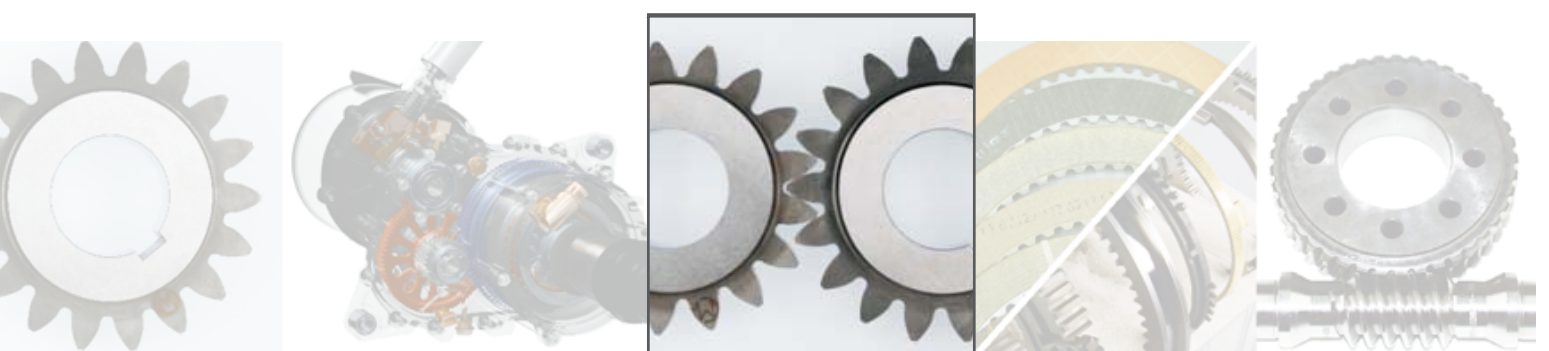


# Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnungen

**Thomas Frühe**





## **Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnungen**

**Thomas Frühe**

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Willibald A. Günthner  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bernd-Robert Höhn (i. R.)  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher  
(Reinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen)  
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl

Die Dissertation wurde am 06.09.2011 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 12.03.2012 angenommen.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Problemstellung und Zielsetzung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Berechnung der Zahnfußspannung</b> .....	<b>3</b>
2.1	Methoden zur Berechnung der Zahnfußspannung .....	3
2.1.1	Das analytische Berechnungsverfahren der <i>ISO 6336-3</i> .....	4
2.1.2	Ein Zahnradberechnungsprogramm mit numerischem Ansatz ( <i>RIKOR</i> ).....	7
2.1.3	Höherwertige numerische Rechenverfahren .....	8
2.2	Stand des Wissens .....	10
2.3	LowLoss-Verzahnungen .....	15
<b>3</b>	<b>Vergleich der Zahnradberechnungsmethoden</b> .....	<b>17</b>
3.1	Vergleich eines Zahnradberechnungsprogramms ( <i>RIKOR</i> ) mit der <i>FEM</i> .....	17
3.1.1	Referenzverzahnungen .....	17
3.1.2	Zahnbruchverhalten der Referenzverzahnungen im Laufversuch.....	19
3.1.3	<i>FEM</i> -Berechnung der Referenzverzahnungen.....	19
3.1.4	Vergleich der Berechnungsergebnisse.....	22
3.2	Vergleich der <i>ISO 6336-3</i> mit dem Zahnradberechnungsprogramm <i>RIKOR</i> .....	24
3.3	Existierende Modifikationsvorschläge zur <i>ISO 6336-3</i> .....	27
3.3.1	Zahnfußspannungsberechnung nach <i>ISO 6336-3 – modifiziert Schinagl</i> .....	27
3.3.2	Zahnfußspannungsberechnung nach <i>ISO 6336-3 – modifiziert Otto</i> .....	28
<b>4</b>	<b>Berechnung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss- Verzahnungen mit einem modifizierten analytischen Verfahren</b> .....	<b>29</b>
4.1	Analyse der <i>ISO 6336-3</i> .....	29
4.1.1	Berechnung der Zahnfußgeometrie im Normalschnitt an der 30°-Tangente mit Hilfe der Ersatzgeradverzahnung .....	29
4.1.2	Profilüberdeckung $\varepsilon_{\alpha n}$ und der äußere Einzeleingriffspunkt ( <i>AEP</i> ).....	38
4.2	Vorschlag zur Modifikation der <i>ISO 6336-3</i> .....	42
4.2.1	Herleitung des modifizierten Verfahrens .....	42
4.2.2	Zusammenfassende Beurteilung des modifizierten Verfahrens „ <i>ISO 6336-3 – mod. Frühe</i> “ im Vergleich mit den vorhandenen Verfahren.....	48
4.3	Erweiterung des modifizierten Verfahrens auf LowLoss-Verzahnungen .....	51
4.3.1	Untersuchung der Zahnfußtragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen in Pulsatorversuchen.....	51
4.3.2	Ermittlung der Zahnfußtragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen in Laufversuchen .....	60
4.3.3	<i>FEM</i> -Berechnungen von LowLoss-Verzahnungen.....	77
4.3.4	Anpassung des modifizierten Verfahrens.....	79

<b>5</b>	<b>Minimierung der Zahnfußspannung durch Optimierung des Zahnfußes...</b>	<b>82</b>
5.1	Definition eines Zahnrades .....	82
5.2	Referenzverzahnungen.....	85
5.3	Optimales Standardwerkzeug mit kreisförmiger Kopfrundung.....	86
5.3.1	Optimierung des Werkzeugkopfrundungsradius' $\rho_{aP0}$ .....	86
5.3.2	Optimierung der Werkzeugkopfhöhe $h_{aP0}$ und des Werkzeugkopfrundungsradius' $\rho_{aP0}$ .....	87
5.3.3	Optimierung des Werkzeugprofilwinkels $\alpha_{P0}$ , der Werkzeugkopfhöhe $h_{aP0}$ und des Werkzeugkopfrundungsradius' $\rho_{aP0}$ .....	89
5.3.4	Ermittlung und Auswertung der Zahnfußspannungen .....	90
5.3.5	Abgleich der analog zur ISO 6336-3 ermittelten Zahnfußspannungen mit der <i>FEM</i> .....	92
5.4	Minimierung der Zahnfußspannung durch elliptische Fußausrundungen .....	93
5.4.1	Herleitung der Gleichungen einer Zahnfußellipse .....	94
5.4.2	Berechnung und Auswertung der Zahnfußspannung $\sigma_{F,FEM}$ von ellipsenartigen Zahnfüßen .....	99
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>104</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>107</b>
	<b>Anhang A: ISO 6336-3 – mod. Frühe.....</b>	<b>115</b>
	<b>Anhang B: Abbildungen.....</b>	<b>117</b>

**Zeichen, Einheiten, Benennungen**

$a$	mm	Achsabstand
$a_\rho, b_\rho$	mm	Hauptachsen der Ellipse an der Zahnfußkrümmung
$a_\rho/b_\rho$	-	Ellipsen-Hauptachsenverhältnis
$b$	mm	Zahnbreite
$b_m$	mm	mittlere Berührlinienbreite
$b_B$	mm	Berührlinienbreite
$c$	mm	Zahnkopfhöhenspiel
$c_\alpha$	-	Korrekturfaktor (nach Schinagl)
$c_\beta$	-	Korrekturfaktor (nach Schinagl)
$d$	mm	Teilkreisdurchmesser
$d_a$	mm	Kopfkreisdurchmesser
$d_{an}$	mm	Kopfkreisdurchmesser der Ersatzgeradverzahnung
$d_b$	mm	Grundkreisdurchmesser
$d_{bn}$	mm	Grundkreisdurchmesser der Ersatzgeradverzahnung
$d_e$	mm	Durchmesser des <i>AEPs</i>
$d_{en}$	mm	Durchmesser des <i>AEPs</i> bei der Ersatzgeradverzahnung
$d_{en}^*$	mm	modifizierter Durchmesser des <i>AEPs</i> bei der Ersatzgeradverzahnung
$d_n$	mm	Teilkreisdurchmesser der Ersatzgeradverzahnung
$d_{Ff}$	mm	Fußformkreisdurchmesser
$d_{F\ res}$	mm	Angriffspunkt der resultierenden Kraft
$d_{Nf}$	mm	Fußnutzkreisdurchmesser
$f$	Hz	Frequenz
$f_{b,max}$	-	stützende Breite (nach Schinagl)
$f_\varepsilon$	-	Zusatzfaktor (nach Otto)
$g_{a-AEP}$	mm	Eingriffsstrecke vom Zahnkopf bis zum <i>AEP</i>
$h_{aP0}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils
$h_{aP0,\ddot{U}}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils am Übergang zur Kopfrundung
$h_{aP0,\rho\ opt}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils bei optimiertem $\rho_{Pan0}$
$h_{aP0,h\&\rho\ opt}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils bei optimiertem $h_{Pan0}$ und $\rho_{Pan0}$
$h_{aP0,\alpha\&h\&\rho\ opt}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils bei optimiertem $\alpha_{Pn0}$ , $h_{Pan0}$ und $\rho_{Pan0}$
$h_{aPn0}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils
$h_{aPt0}$	mm	Kopfhöhe des Werkzeugbezugsprofils im Stirnschnitt
$h_f$	mm	maßgeblichen Hebelarm (nach Schinagl)
$h_F$	mm	Hebelarm der angreifenden Last an der 30°-Tangente
$h_{Fa}$	mm	Hebelarm der am Zahnkopf angreifenden Last an der 30°-Tangente
$h_{Fa,analyt}$	mm	Hebelarm der am Zahnkopf angreifenden Last an der 30°-Tangente, analytisch berechnet
$h_{Fe}$	mm	Hebelarm der am <i>AEP</i> angreifenden Last an der 30°-Tangente
$i$	-	Übersetzung
$j$	-	Potenzfaktor der Ellipsengleichung
$l_a$	mm	Länge der Kopfrücknahme
$m_i$	-	Tangentensteigung an einem Ellipsenpunkt
$m_n$	mm	Normalmodul
$m_t$	mm	Stirnmodul
$m_{Pn0}$	mm	Modul des Werkzeugbezugsprofils
$m_{Pt0}$	mm	Stirnmodul des Werkzeugbezugsprofils
$\rho_{et}$	mm	Eingriffsteilung
$s_b$	mm	Zahndicke am Grundkreis
$\hat{s}_{Ff}$	rad	am Fußformkreis der entsprechende Zahndickenwinkel
$s_{Fn}$	mm	Zahnfußdickensehne an der 30°-Tangente im Normalschnitt
$s_{Fn,analyt}$	mm	Zahnfußdickensehne an der 30°-Tangente, analytisch berechnet
$s_{Ft}$	mm	Zahnfußdickensehne an der 30°-Tangente im Stirnschnitt

$u$	-	Zähnezahlverhältnis
$u^*$	mm	Hilfsstrecke
$v_{\text{ref},F}$	m/s	Summengeschwindigkeit bei Referenzbedingungen
$v_t$	m/s	Geschwindigkeit am Teilkreis
$v_{\Sigma}$	m/s	Summengeschwindigkeit
$x^*$	mm	Hilfsstrecke
$x_i, y_i$	mm	kartesische Ellipsenkoordinaten
$x_{1,2}$	-	Profilverschiebungsfaktor Ritzel, Rad
$z_n$	-	virtuelle Zähnezahl der Ersatzgeradverzahnung
$z_{1,2}$	-	Zähnezahl Ritzel, Rad
$C_a$	$\mu\text{m}$	Betrag der Kopfrücknahme
$C_b$	$\mu\text{m}$	Betrag der Endrücknahme
$E$	-	Variable zur Berechnung der Zahnfußspannung
$F_{\text{res}}$	N	resultierende Kraft
$F_t$	N	Nenn-Umfangskraft
$F_N$	N	Zahnnormalkraft
$G$	-	Variable zur Berechnung der Zahnfußspannung
$H$	-	Variable zur Berechnung der Zahnfußspannung
$H_V$	-	Zahnverlustfaktor
$K_v$	-	Dynamikfaktor
$K_A$	-	Anwendungsfaktor
$K_{F\alpha}$	-	Stirnfaktor für Zahnfußbeanspruchung
$K_{F\beta}$	-	Breitenfaktor für Zahnfußbeanspruchung
$L_a$	mm	Länge der Kopfrücknahme
$L_b$	mm	Länge der Endrücknahme
$N$	-	Lastspielzahl
$P_f$	-	Zahnfußpunkt
$P_n$	-	Punkt der 30°-Tangente im Normalschnitt
$P_t$	-	in den Stirnschnitt transformierter Punkt der 30°-Tangente
$P_A$	-	Ausfallwahrscheinlichkeit
$P_{An}$	kW	Antriebsleistung
$P_{Ff}$	-	Zahnflankenpunkt am Fußformkreis
$P_V$	kW	Verlustleistung in einem Getriebe
$P_{VD}$	kW	Dichtungsverlustleistung
$P_{VLP}$	kW	lastabhängige Lagerverlustleistung
$P_{VL0}$	kW	lastunabhängige Lagerverlustleistung
$P_{VX}$	kW	sonstige Verlustleistung
$P_{VZP}$	kW	lastabhängige Verzahnungsverlustleistung
$P_{VZ0}$	kW	lastunabhängige Verzahnungsverlustleistung
$R_a$	$\mu\text{m}$	Rauheit
$S_F$	-	rechnerischer Sicherheitsfaktor für Zahnfußbeanspruchung
$S_{Fmin}$	-	geforderten Mindest-Sicherheitsfaktor für Zahnfußbeanspruchung
$T$	Nm	Drehmoment
$Y_B$	-	rim thickness factor (Zahnkranzfaktor) nach ISO 6336-3 (2006)
$Y_{DT}$	-	deep tooth factor (Hochverzahnungsfaktor) nach ISO 6336-3 (2006)
$Y_F$	-	Formfaktor
$Y_{Fa}$	-	Formfaktor bei Lastangriff am Zahnkopf
$Y_{LowLoss}$	-	LowLoss-Faktor
$Y_S$	-	Spannungskorrekturfaktor
$Y_{Sa}$	-	Spannungskorrekturfaktor bei Lastangriff am Zahnkopf
$Y_\alpha$	-	Lastverteilungsfaktor
$Y_\beta$	-	Schrägenfaktor
$Y_{\Delta \text{Berührlinie}}$	-	Berührlinieneinfluss-Faktor
$Y_{\Delta \text{Gerad-Hoch}}$	-	Gerad-Hochverzahnung-Faktor



$\alpha$	°	Eingriffswinkel
$\alpha_a$	°	Eingriffswinkel am Zahnkopf
$\alpha_{an}$	°	Eingriffswinkel am Zahnkopf der Ersatzgeradverzahnung
$\alpha_n$	°	Normaleingriffswinkel
$\alpha_t$	°	Eingriffswinkel im Stirnschnitt
$\alpha_w$	°	Betriebseingriffswinkel
$\alpha_{wn}$	°	Betriebseingriffswinkel der Ersatzgeradverzahnung
$\alpha_{Fa}$	°	Kraftangriffswinkel am Zahnkopf im Stirnschnitt
$\alpha_{Fe}$	°	Kraftangriffswinkel am <i>AEP</i> im Stirnschnitt
$\alpha_{Ff}$	°	Eingriffswinkel am Fußformkreis
$\alpha_{Fn}$	°	Kraftangriffswinkel im Normalschnitt
$\alpha_{P0}$	°	Werkzeugprofilwinkel
$\alpha_{Pn0}$	°	Werkzeugprofilwinkel
$\alpha_{Pt0}$	°	Werkzeugprofilwinkel im Stirnschnitt
$\beta$	°	Schrägungswinkel
$\beta_b$	°	Grundkreisschrägungswinkel
$\varepsilon_{a-AEP}$	-	Teilprofilüberdeckung vom Zahnkopf bis zum <i>AEP</i>
$\varepsilon_{a-AEP,n}$	-	Teilprofilüberdeckung vom Zahnkopf bis zum <i>AEP</i> der Ersatzgeradverzahnung
$\varepsilon_{an}$	-	Profilüberdeckung der Ersatzgeradverzahnung
$\varepsilon_\alpha$	-	Profilüberdeckung
$\varepsilon_\beta$	-	Sprungüberdeckung
$\varepsilon_{1n}$	-	Teilüberdeckung der Ersatzgeradverzahnung
$\varepsilon_{1,2}$	-	Teilüberdeckungen Ritzel, Rad
$\gamma$	°	Neigung der Ellipse
$\gamma_a$	°	Winkel zur Berechnung der Zahnfußspannung
$\gamma_{Ff}$	°	Wälzwinkel zur Erzeugung des Punktes am Fußformkreis
$\mu_{mZ}$	-	Reibungszahl
$\rho_{aP0}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius
$\rho_{aP0,\rho\text{ opt}}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius, optimiert
$\rho_{aP0,h\&\rho\text{ opt}}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius bei optimiertem $h_{Pan0}$ und $\rho_{Pan0}$
$\rho_{aP0,\alpha\&h\&\rho\text{ opt}}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius bei optimiertem $\alpha_{Pn0}$ , $h_{Pan0}$ und $\rho_{Pan0}$
$\rho_{aPn0}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius
$\rho_{aPt0}$	mm	Werkzeugkopfrundungsradius im Stirnschnitt
$\rho_{Fn}$	mm	Zahnfußkrümmungsradius an der 30°-Tangente im Normalschnitt
$\rho_{Fn,analyt}$	mm	Zahnfußkrümmungsradius an der 30°-Tangente, analytisch berechnet
$\rho_{Ft}$	mm	Zahnfußkrümmungsradius an der 30°-Tangente im Stirnschnitt
$\rho_\psi$	mm	Krümmungsradius an einem Ellipsenpunkt
$\sigma_v$	N/mm <sup>2</sup>	von <i>Mises</i> -Vergleichsspannung
$\sigma_F$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung
$\sigma_{F0}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfuß-Nennspannung
$\sigma_{F0 (2006)}$	N/mm <sup>2</sup>	nach <i>ISO 6336-3 (2006)</i> berechnete Zahnfuß-Nennspannung
$\sigma_{FG}$	N/mm <sup>2</sup>	Grenzfestigkeit
$\sigma_{F,FEM}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung nach <i>FEM</i>
$\sigma_{F,FEM\text{ opt}}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung bei <i>FEM</i> -optimierter Zahnfußform
$\sigma_{F,RIKOR}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung nach <i>RIKOR</i>
$\sigma_{F,L1\%}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung bei Dauerlast mit 1%er Ausfallwahrscheinlichkeit im Laufversuch
$\sigma_{F,L50\%}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung bei Dauerlast mit 50%er Ausfallwahrscheinlichkeit im Laufversuch
$\sigma_{F,P50\%}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung bei Dauerlast mit 50%er Ausfallwahrscheinlichkeit im Pulsator
$\sigma_1$	N/mm <sup>2</sup>	1. Hauptspannung

$\tau$	°	Steigung der Fußtangente
$\Delta\rho$	mm	Fehlerglied
$\Delta x$	mm	Hilfsstrecke
$\Delta y$	mm	Hilfsstrecke
$\Delta z$	-	zwischen den Pulsatorbacken eingespannte Zähnezahl
$\vartheta$	rad	Winkelvariable zur Berechnung der Zahnfußspannung
$\psi$	°	Polarwinkel in der Ellipse





## 1 Problemstellung und Zielsetzung

In Zeiten zunehmender Ressourcenknappheit erlangen Wirtschaftlichkeit und Effizienz eine immer größere Bedeutung. Selbst bei Getrieben, die in einer Stirnradstufe einen Wirkungsgrad von um die 99% aufweisen, bemüht man sich intensiv, ihn noch weiter zu verbessern. Auf Grund der dominierenden Stellung von Getrieben in Antrieben und ihrer daraus resultierenden weiten Verbreitung und großen Anzahl kann schon eine Reduzierung der Verluste um ein halbes Prozent helfen, viel Energie einzusparen. Eine derartige Reduzierung in einer Stirnradstufe ist mit LowLoss-Verzahnungen möglich, die in letzter Zeit immer mehr ins Blickfeld der Getriebehersteller geraten. Auf Grund ihrer speziellen von einer Standardverzahnung abweichenden Geometrie (kleine Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha \leq 1,0$  und großer Eingriffswinkel  $\alpha_n \gg 20^\circ$ ) bestehen Unsicherheiten in der Berechnung der Tragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen. Zudem ist bei ihnen wegen der großen Zahnsteifigkeit eine hohe Fertigungsqualität zu fordern, um ein ungleiches Tragen der einzelnen Zähne und eine starke dynamische Anregung zu vermeiden, die sich in einer Minderung der Tragfähigkeit und in einer unerwünschten Geräuschentwicklung auswirken könnte.

Bei der Auslegung von Getrieben und deren einzelnen Zahnradstufen versucht der Konstrukteur nah an die Grenzen der Tragfähigkeit zu gehen, um ein möglichst kleines und kompaktes Getriebe mit einem hohen Wirkungsgrad zu erhalten [31]. Eine kleine Baugröße wirkt sich in einem geringeren Materialverbrauch aus, und das sich daraus ergebende geringere Gewicht führt bei bewegten Getrieben (z.B. in Fahrzeugen) zu einer besseren Energieeffizienz und einem besseren Fahrverhalten. Je genauer die Fertigung und je sicherer die Berechnung der Tragfähigkeiten von Verzahnungen möglich ist, desto besser kann ein Getriebe optimiert werden.

Zur Berechnung der Tragfähigkeit sind genormte analytische Verfahren (*ISO 6336*, *DIN 3990*) sowie höherwertige Zahnradberechnungsprogramme (*RIKOR*, *STIRAK*) weit verbreitet. Mit den Zahnradberechnungsprogrammen können Dank ihrer kontinuierlichen Weiterentwicklung in den letzten Jahrzehnten die Belastungen in einem Zahnrad sehr realitätsnah bestimmt werden. Die Normen zur Zahnfußtragfähigkeit (*ISO 6336-3*, *DIN 3990 T3*) beruhen hauptsächlich auf dem Stand der Technik der 80er Jahre. Durch Versuche und Berechnungen konnte in den letzten Jahren gezeigt werden, dass die Normen vor allem bei Schrägverzahnungen und Hochverzahnungen ( $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$ ) größere Ungenauigkeiten aufweisen können.

Eine weitere oft nicht berücksichtigte Möglichkeit zur Optimierung von Zahnradern besteht in der Wahl des richtigen Verzahnungswerkzeuges. Damit kann die Zahnfußform beeinflusst werden und somit die Zahnfußspannung reduziert und eine höhere Zahnfußtragfähigkeit erzielt werden. Diese kann zur weiteren Reduzierung des Gewichts und der Verzahnungsverluste genutzt werden.

In dieser Arbeit werden daher folgende Ziele verfolgt:

In Abschnitt 2 sollen nach der Vorstellung der einzelnen Methoden zur Berechnung der Zahnfußspannung diese miteinander verglichen werden. Dazu wird an neun Verzahnungen, die in einem früheren Forschungsvorhaben untersucht wurden, ein Abgleich des Zahnradberechnungsprogramms *RIKOR* mit der Methode der Finiten Elemente (*FEM*) vorgenommen. Anhand einer umfangreichen Variationsberechnung werden anschließend in einem Vergleich mit *RIKOR* die Ungenauigkeiten der Normen *ISO 6336-3* und *DIN 3990 T3* dokumentiert.

In Abschnitt 3 wird die bei der analytischen Berechnung der Zahnfußspannung verwendete Ersatzgeradzahnung einer kritischen Untersuchung unterzogen. Darauf aufbauend soll eine Modifikation der *ISO 6336-3* erarbeitet werden, die eine einfachere, verständlichere und genauere Berechnung der Zahnfußspannung ermöglicht. Das sich von Standardverzahnungen unterscheidende Tragverhalten von LowLoss-Verzahnungen bezüglich Zahnfußbruch soll in Laufversuchen und *FEM*-Berechnungen ermittelt und im zuvor erarbeiteten modifizierten Verfahren durch einen einfachen Faktor berücksichtigt werden.

In Abschnitt 4 soll das Potential zur Reduzierung der Zahnfußspannung durch die Wahl eines geeigneten Wälzfräs-Werkzeuges aufgezeigt werden. An 19 Referenzverzahnungen wird dazu durch Modifikation der einzelnen Parameter schrittweise das Standardwerkzeug mit kreisförmiger Kopfrundung optimiert und eine Empfehlung zur Werkzeugwahl erarbeitet. Mit Hilfe von *FEM*-Berechnungen soll die zusätzlich mögliche Reduzierung der Zahnfußspannung durch ellipsenförmige Zahnfußausrundungen ermittelt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt eine Definition einer an ihren Rändern tangentialstetigen Fußellipse hergeleitet. Anschließend wird mit einer darauf aufbauenden *FEM*-Variationsrechnung die optimale Form der Zahnfußellipse bestimmt. Durch einen einfachen, im *FEM*-Programm vorhandenen Optimierungsalgorithmus, soll zudem abgeschätzt werden, in wie weit die optimale Zahnfußellipse der optimalen Zahnfußform nahe kommt.

In Abschnitt 5 erfolgt eine Zusammenfassung und ein Ausblick wird gegeben.

## 2 Grundlagen der Berechnung der Zahnfußspannung

### 2.1 Methoden zur Berechnung der Zahnfußspannung

Bei der Bestimmung der Zahnfußtragfähigkeit einer Verzahnung muss von beiden Zahnrädern die auftretende Zahnfußspannung  $\sigma_F$  bestimmt und der zulässigen Zahnfuß-Grenzfestigkeit  $\sigma_{FG}$  gegenübergestellt werden. Für eine ausreichende Zahnfußtragfähigkeit wird gefordert, dass der rechnerische Sicherheitsfaktor  $S_F$  größer oder gleich dem geforderten Mindest-Sicherheitsfaktor  $S_{Fmin}$  für Zahnfußbeanspruchung ist.

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F} \geq S_{Fmin} \quad (1)$$

Die auftretende Zahnfußspannung  $\sigma_F$  kann in analytischen Rechenverfahren berechnet werden. Dazu wird die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  bestimmt und mit Faktoren multipliziert, die die ungleichmäßige Kraftverteilung über der Berührlinie ( $K_{F\alpha}$  und  $K_{F\beta}$ ), sowie die Krafterhöhung infolge innerer dynamischer Einwirkungen ( $K_v$ ) bzw. äußerer Einwirkungen von der Ein- oder Ausgangsseite ( $K_A$ ) berücksichtigen.

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \quad (2)$$

Bei der Berechnung der Zahnfußspannung mit höherwertigen Berechnungsprogrammen (z.B. *RIKOR*) oder mit numerischen 3D-Rechenprogrammen, wie zum Beispiel mit der *FEM*, werden die ungleichen Lastverteilungen direkt berücksichtigt. Die Lastverteilungsfaktoren können entfallen und die auftretende Zahnfußspannung  $\sigma_F$  bestimmt sich somit näherungsweise zu

$$\sigma_F = \sigma_{F,RIKOR} \cdot K_A \cdot K_v \quad (3)$$

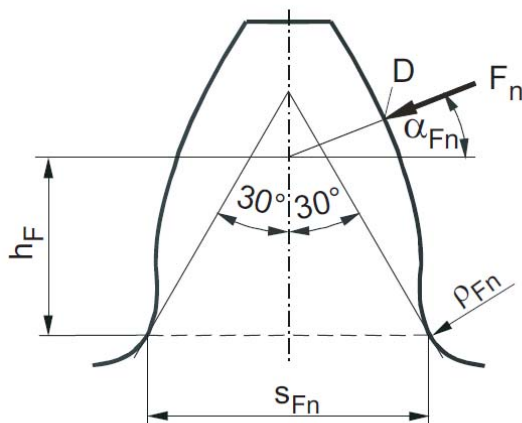
$$\sigma_F = \sigma_{F,FEM} \cdot K_A \cdot K_v \quad (4)$$

Die verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Zahnfußspannung werden im Folgenden kurz beschrieben.

### 2.1.1 Das analytische Berechnungsverfahren der ISO 6336-3

Analytische Berechnungsverfahren stellen die einfachste Form der Zahnfußspannungsberechnung dar. Sie sind die Grundlage verschiedener Normen (ISO 6336-3 [48] [49], DIN 3990 T3 [26] und AGMA 2101 [1]).

Die Berechnung der Zahnfußspannung ist bei ISO 6336-3 (1996) und DIN 3990 T3 identisch. Im Folgenden wird die ISO 6336-3 (1996) [48] näher betrachtet. Sie basiert auf einer zweidimensionalen Berechnung von Geradverzahnungen. Die sich aus dem Drehmoment ergebende Zahnkraft  $F_N$  wirkt dabei am äußeren Einzeleingriffspunkt  $D$  (siehe Abbildung 1) über die ganze Zahnbreite  $b$ . Es wird angenommen, dass die maximale Zahnfußspannung an der  $30^\circ$ -Tangente im Zahnfuß auftritt. An diesem Punkt werden die Zahnfußdickensehne  $s_{Fn}$ , der Zahnfußkrümmungsradius  $\rho_{Fn}$  und der Hebelarm  $h_F$  der angreifenden Last bestimmt.



**Abbildung 1:** Größen zur Berechnung der Zahnfußspannung nach DIN 3990 T3 und ISO 6336-3 (Bild aus [85])

Dem Verfahren liegt die Theorie des eingespannten Biegebalkens zugrunde. Die Zahnkraft wird mit Hilfe des Hebelarms und des Widerstandsmoments, das im Formfaktor  $Y_F$  enthalten ist, in die am Zahnfuß auftretende Biegezugspannung umgerechnet. Der Formfaktor bestimmt sich aus dem Normalmodul  $m_n$ , dem Eingriffswinkel  $\alpha_n$  und dem Kraftangriffswinkel  $\alpha_{Fn}$  zu

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_F}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fn}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_n} \quad (5)$$



Mit dem empirisch ermittelten Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  werden die spannungserhöhende Wirkung der Kerbe und der am Fuß auftretende komplexe Spannungszustand berücksichtigt.

$$Y_S = \left( 1,2 + 0,13 \cdot \frac{s_{Fn}}{h_F} \right) \cdot \left( \frac{s_{Fn}}{2 \cdot \rho_{Fn}} \right)^{\frac{1}{1,21+2,3 \cdot \frac{s_{Fn}}{h_F}}} \quad (6)$$

Bei der Festlegung des Berechnungsverfahrens in der *DIN 3990 T3* wurden zur Validierung zahlreiche *FEM*-Berechnungen und Versuche durchgeführt und ausgewertet [43]. Bei Anwendung der *DIN 3990 T3* und der *ISO 6336-3* in der Praxis hat sich gezeigt, dass bei Geradverzahnungen mit einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha < 2,0$  die Zahnfußspannung relativ gut berechnet wird. Bei Hochverzahnungen mit einer Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$  ergeben sich allerdings deutlich höhere Spannungen, als sie in Wirklichkeit auftreten [28] [85]. Das liegt daran, dass bei diesen Verzahnungen kein Einzeleingriff mehr vorliegt und die Last sich daher immer auf mindestens zwei Zähne verteilt. Die *ISO 6336-3* berücksichtigt dies nicht.

Eine Schrägverzahnung mit einem Schrägungswinkel  $\beta$  kann auch mit dem analytischen Verfahren der *ISO 6336-3* berechnet werden. Dazu wird diese zuvor näherungsweise in eine virtuelle Geradverzahnung umgerechnet. Zudem wird der Schrägenfaktor  $Y_\beta$  eingeführt, der die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  und den Einfluss der bei der Schrägverzahnung schräg über die Flanke verlaufenden Berührlinie berücksichtigt.

$$Y_\beta = 1 - \min(\varepsilon_\beta ; 1) \cdot \frac{\min(\beta ; 30^\circ)}{120} \quad (7)$$

Zu der Umrechnung in eine virtuelle Ersatzgeradverzahnung und zu der Ermittlung des Schrägenfaktors  $Y_\beta$  existieren kaum Versuche. Dies liegt u. a. daran, dass Pulsatorprüfstände nicht für die Untersuchung von Schrägverzahnungen geeignet sind. Bei der Einspannung der schrägen Zähne zwischen den Pulsatorbacken entsteht ein Kippmoment, das abgefangen werden muss. Ebenso kann die sich bei Schrägverzahnungen während des Eingriffs ständig ändernde ungleiche Lastverteilung über der Breite, die sich auf Grund der schräg über der Zahnflanke verlaufenden Berührlinien ergibt, in Pulsatorversuchen nicht nachgebildet werden. Laufversuche in Verspannungsprüfständen sind sehr zeit- und kostenintensiv. Daher existieren nur wenig Laufversuche [28] [35] [75] [85] [108], die größtenteils erst nach der Aufstellung der Gleichungen für eine Schrägverzahnung durchgeführt wurden. Als das Berechnungsverfahren festgelegt wurde, gab es auch keine Ergebnisse aus *FEM*-Berechnungen von Schrägverzahnungen, da damals auf Grund von mangelnden Rechenkapazitäten dreidimensionale

*FEM*-Kontaktanalyse-Berechnungen noch nicht möglich waren. Die Gleichungen zur Berechnung der Schrägverzahnungen ergaben sich folglich vor allem aus theoretischen Überlegungen.

Die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  für Gerad- und Schrägverzahnungen berechnet sich mit den verschiedenen Faktoren und der Nenn-Umfangskraft  $F_t$  am Teilzylinder im Stirnschnitt zu

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \quad (8)$$

Auf Grund ihrer theoretischen Herleitung hat die Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von Schrägverzahnungen nur eine begrenzte Genauigkeit. Bei Schrägverzahnungen mit einem großen Schrägungswinkel  $\beta$  konnten zuletzt Schinagl [85] und Otto [73] zeigen, dass die Zahnfußspannung in der *ISO 6336-3 (1996)* tendenziell zu gering berechnet wird. In der Neuauflage der *ISO 6336-3 (2006)* [49] wird die Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  mit dem „rim thickness factor“ (Zahnkranzfaktor)  $Y_B$  und dem „deep tooth factor“ (Hochverzahnungsfaktor)  $Y_{DT}$  erweitert.

$$\sigma_{F0(2006)} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \cdot Y_B \cdot Y_{DT} \quad (9)$$

Der Zahnkranzfaktor  $Y_B$  ermöglicht die Berechnung von Verzahnungen mit dünnen Zahnkränzen, der Hochverzahnungsfaktor  $Y_{DT}$  erlaubt die Reduzierung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  um bis zu 30%, falls die Verzahnung eine hohe Fertigungsqualität, eine Zahnkopfkorrektur und eine große Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha n} > 2,05$  aufweist. In dieser Arbeit werden beide Faktoren zu  $Y_B = Y_{DT} = 1$  gesetzt, so dass sich die *ISO 6336-3 (2006)* von der *ISO 6336-3 (1996)* bei der Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  nicht unterscheidet.

### 2.1.2 Ein Zahnradberechnungsprogramm mit numerischem Ansatz (*RIKOR*)

Dank der heutigen Computertechnik ist eine deutlich genauere und dennoch schnelle Berechnung von Zahnradern mit Hilfe von speziell dafür entwickelten Berechnungsprogrammen möglich (z.B. die FVA-Programme *RIKOR* [95] und *STIRAK* [71], sowie *LVR* [5], *PLANKORR* [98] und *KISSsoft* [54]).

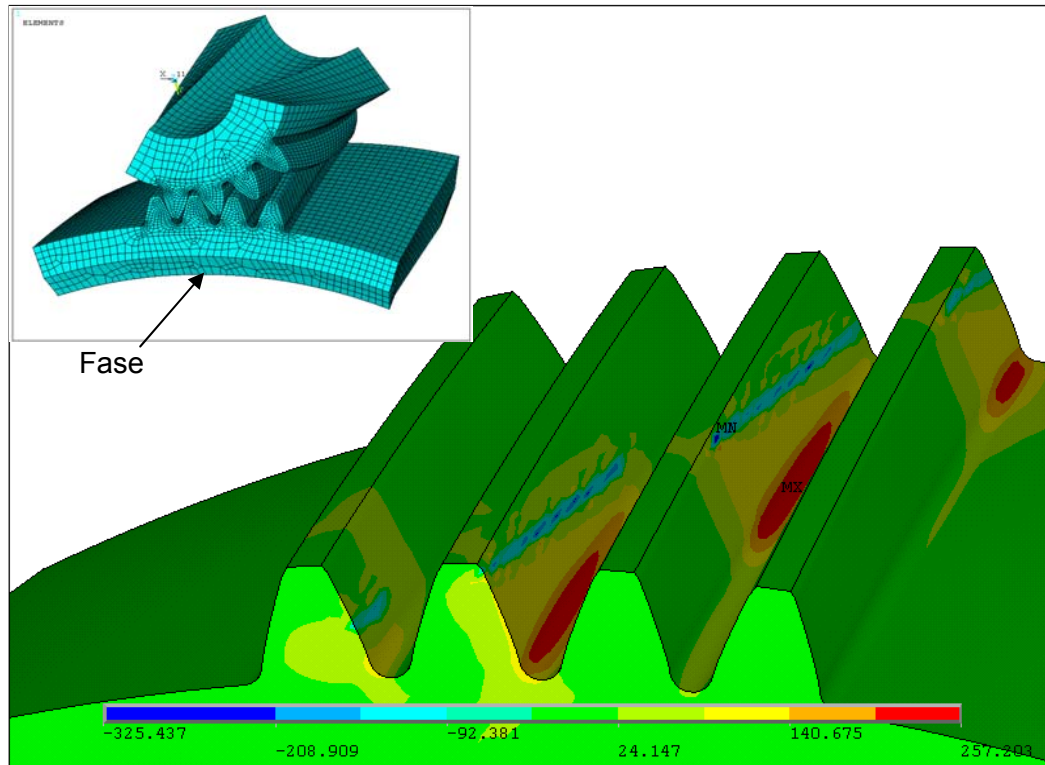
In *RIKOR* kann die Geometrie der Verzahnung durch Angabe der verschiedenen Verzahnungsparameter eingegeben oder von anderen Programmen importiert werden. Zu Beginn der Berechnung werden die Zahnflanken von Rad und Ritzel mit einzelnen Punkten diskretisiert. Nach der Theorie der eingespannten Platte werden von den einzelnen Punkten die jeweiligen Steifigkeiten und deren Abhängigkeiten voneinander berechnet. Das Ergebnis ist eine Steifigkeitsmatrix. Die Steifigkeiten des Gesamtsystems, d.h. auch die Wellen- und Lagersteifigkeiten, können in der Matrix mit berücksichtigt werden. Mit dieser wird anschließend die Lastverteilung über der Berührlinie berechnet. Die Berührlinie wird dabei je Eingriffsstellung fest vorgegeben, d.h. die sich in Abhängigkeit von der Last einstellende leichte Verlagerung der Berührlinie wird vernachlässigt. Auf Grund der Zahnverformungen können die einzelnen Zähne eher in Eingriff kommen und sich die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  erhöhen. Dieser Effekt kann mit der Aktivierung des „vorzeitigen Eingriffs“ in *RIKOR* berücksichtigt werden. Mit Hilfe der Lastverteilung werden in einem weiteren Rechengang die sich daraus ergebenden Flankenpressungen und Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,RIKOR}$  berechnet. Es wird dabei angenommen, dass die maximale Fußspannung an der 30°-Fußtangente auftritt. Die unterschiedlichen Hebelarme der auf der Zahnflanke wirkenden Linienlast und die daraus resultierende Verteilung der Biegemomente im Zahnfuß werden nach dem Ansatz von Umezawa [96] berücksichtigt.

Die Kerbwirkung am Zahnfuß wird mit dem Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  erfasst, der sich analog zu den analytischen Rechenverfahren ermitteln lässt (siehe Abschnitt 2.1.1).

Mit *RIKOR* können Fertigungsabweichungen, Flankenkorrekturen, Lagerspiele und Gehäuseverformungen berücksichtigt werden. Darin zeigt sich auch eine Stärke des Programms. Unter Berücksichtigung des gesamten Getriebesystems können mit *RIKOR* die Auswirkungen von verschiedenen Korrekturen auf die Pressungsverteilung und die Zahnfußspannungen untersucht werden. Somit kann eine optimale Korrekturauslegung zur Minimierung der Spannungen ermittelt und damit eine Erhöhung der Tragfähigkeit erzielt werden.

### 2.1.3 Höherwertige numerische Rechenverfahren

Zu den höherwertigen numerischen Rechenverfahren zählen u. a. die Finite Element Methode (*FEM*) und die Boundary Element Methode (*BEM*). In der Praxis wird die *FEM* vielfach angewendet, die *BEM* ist dagegen nicht so weit verbreitet. Es existieren zahlreiche universelle Berechnungsprogramme (z.B. *ANSYS*, *IDEAS*, *MARC*, *NASTRAN*, *ABAQUS*, etc.), die auf die *FEM* aufbauen und es dem Anwender ermöglichen, die Verformungen, Schnittgrößen und Spannungen in einem beliebig geformten Körper unter Last zu untersuchen. Auf Grund der stetig steigenden Rechenleistung von Computern werden immer größere und detailliertere Berechnungen in immer kürzerer Rechenzeit möglich. Zudem gibt es in letzter Zeit bei den *FEM*-Programmen eine deutliche Entwicklung zur Erhöhung der Bedienerfreundlichkeit. Da u. a. auch die Schnittstellen zu anderen CAD-Programmen immer komfortabler werden, ist in vielen Entwicklungsabteilungen von Unternehmen die *FEM* unverzichtbar geworden. Auch bei der Berechnung von Verzahnungen wird die *FEM* vereinzelt eingesetzt. Der Vorteil der *FEM* liegt darin, dass viele Effekte, die bei der Lastübertragung zwischen zwei Zahnrädern auftreten, detailliert untersucht werden können. So werden bei einer *FEM*-Kontaktanalyse die veränderlichen Zahnsteifigkeiten entlang der Berührlinie und die sich daraus ergebende lastabhängige Verlagerung der Berührlinie sowie die sich einstellende Pressungsverteilung automatisch berechnet. Es können zum Beispiel die Effekte am Rand einer Verzahnung genauer untersucht werden, die bei Zahnrädern mit großen Schrägungswinkeln zu Spannungsspitzen an der spitzen Stirnkante führen können. Auf Grund der Einsatzhärtung liegen an der spitzen Stirnkante unterschiedliche Materialeigenschaften vor, die zum Bruch des Zahnrades führen können. Weist ein Zahnrad eine Sondergeometrie auf, d.h. hat es eine von den üblichen Verzahnungen abweichende Geometrie, können die aus dieser Abweichung entstehenden möglichen Effekte am einfachsten mit der *FEM* untersucht werden. Abbildung 2 zeigt beispielhaft die Berechnung einer Verzahnung in einem Schiffsgetriebe, bei dem der Einfluss einer aufgetragenen Fase am Rand des Flansches einer Stegverzahnung untersucht wurde.



**Abbildung 2:** 3D-FEM-Modell einer angefasten Schiffsverzahnung – Vernetzung (oben) und 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  am Rad (unten)

Für die Bestimmung der auftretenden Zahnfußspannung  $\sigma_{F0}$  wird im *FEM*-Modell die 1. Hauptspannung ( $\sigma_1 = \sigma_{F,FEM}$ ) ausgewertet. Diese Spannung ist im Zahnfuß parallel zum Normalschnitt und entspricht somit der in Versuchen mit Dehnmessstreifen und in analytischen und höherwertigen Rechenverfahren ermittelten Zahnfußspannung. Die ebenfalls berechenbare *von Mises*-Vergleichsspannung  $\sigma_v$  kann für Detailbetrachtungen in einer Verzahnung verwendet werden. Bei komplizierten mehrachsigen Spannungszuständen liefert sie eine genauere Aussage über das Beanspruchungsniveau im Werkstoff. Die *FEM*-Berechnung mit Kontaktanalyse ist für die Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Verzahnungen noch nicht Standard, da die Erstellung eines *FEM*-Modells einer Verzahnung aufwendig ist. Zudem ist für eine geeignete Vernetzung und den Ansatz der Randbedingungen *FEM*-Expertenwissen erforderlich, da diese Faktoren bei fehlerhafter Modellierung das Ergebnis deutlich verzerren können. Auch stellt die Rechenzeit, die sich bei detaillierteren 3D-Modellen in Minuten und Stunden bemisst, immer noch eine Hürde dar.

## 2.2 Stand des Wissens

### Zahnfußspannungsberechnung mit analytischen Verfahren

Zur Berechnung der Zahnfußspannung mit analytischen Verfahren existieren zahlreiche Veröffentlichungen. Als grundlegend sind die Arbeiten zur spannungserhöhenden Wirkung der Zahnfußausrundung (Hirt [43]), zum Einfluss von Schleifkerben im Zahnfuß (Wirth [110]), zum Einfluss des Schrägungswinkels und der Zahnfußrundung bei Schrägverzahnungen (Broßmann [16]) und zum Einfluss von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung (Strasser [93]) zu nennen.

Gajewski [35] ermittelt an Schrägverzahnungen in Laufversuchen und durch Berechnungen den Einfluss von unterschiedlichen Breitenballigkeiten auf die Zahnfußspannungsverteilung.

Börner [6] untersucht in einer Parametervariation mit der *BEM* den Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  in Abhängigkeit vom Profilverschiebungsfaktor  $x$  und stellt diesbezüglich die beiden Rechenverfahren *DIN 3990 T3* und *AGMA 2101* vergleichend gegenüber. Bei großen Profilüberdeckungen werden nach *DIN 3990 T3* tendenziell zu große und nach der *AGMA 2101* tendenziell zu kleine Zahnfußspannungen berechnet.

Schinagl [84] untersucht mit Hilfe der *FEM* die spannungserhöhende Wirkung der Zahnfußausrundung bei kleinen Hebelarmen, d.h. bei Kraftangriff in Zahnfußnähe. Neben den Biegezugspannungen berücksichtigt er zusätzlich die am Zahnfuß auftretenden Schubspannungen aus Querkraft und Druckspannungen aus Normalkraft.

Spitas et al. [87] berechnen mit der *BEM* in einer umfangreichen Parameterstudie die Zahnfußspannungen und leiten daraus ein auf Tabellenwerten beruhendes analytisches Verfahren zur schnellen Bestimmung der Fußspannung von Verzahnungen ab.

Döbereiner [28] führt Pulsator- und Laufversuche an Hoch- und Schrägverzahnungen durch. Er kann belegen, dass die *DIN 3990 T3* bei Hochverzahnungen ( $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$ ) zu einer Überdimensionierung führt.

Steutzger [92] untersucht mit der *FEM* und in Pulsatorversuchen den Baugrößeneinfluss (Modul  $m_n$  und Breite  $b$ ) auf die Zahnfußtragfähigkeit von Geradverzahnungen.

Schinagl [85] untersucht theoretisch und in Laufversuchen die Zahnfußtragfähigkeit von Hoch-Schrägverzahnungen und entwickelt einen Modifikationsvorschlag zur *DIN 3990 T3* (siehe Abschnitt 3.3.1), der das Tragverhalten von Verzahnungen mit großen Schrägungswinkeln  $\beta$  und großen Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  besser erfasst.

Otto [73] führt Laufversuche zum Einfluss des Schrägungswinkels  $\beta$  und von Zahnflankenabweichungen auf die Zahnfußtragfähigkeit durch und macht ebenfalls einen Vorschlag zur

Modifikation der *DIN 3990 T3* (siehe Abschnitt 3.3.2), der im Gegensatz zu dem von Schinagl die Struktur der Norm nahezu unverändert lässt.

### Verzahnungsberechnung mit höherwertigen Zahnradberechnungsprogrammen

Die leistungsstarken Zahnradberechnungsprogramme haben auf Grund ihrer kontinuierlichen Weiterentwicklung in den letzten Jahrzehnten eine immer größere Bedeutung bei der Berechnung von Verzahnungen erlangt.

Das FVA-Programm *RIKOR* baut auf die nach der Theorie der Plattenmechanik durchgeführten Verformungsberechnungen von Schmidt [82] auf, die Placzek [77] in *RIKOR* integriert. Wikidal [105] ergänzt *RIKOR* durch das Programm *LAGER* [13] und integriert den Vorschlag von Fuhrke [32] zur Berechnung der Wellenverformung aus Querkraftschub. Zusammen mit Kunert und Trempler [56] erweitert er das Programm mit einem Ansatz zur Berücksichtigung des Randeinflusses auf die lokale Zahnsteifigkeit bei Schrägverzahnungen. Schinagl [83] integriert das Programm *LOKI* [29], mit dem die Effekte des Losradkippens berücksichtigt werden können. Otto [74] erweitert die Berechnungsmöglichkeiten von *RIKOR* u. a. durch die Implementierung des Programms *LAGER2*, mit dem eine einfachere und genauere Berücksichtigung der Lagerung der Wellen möglich wird. Thoma [95] implementiert in *RIKOR* Gleichungen zur Berücksichtigung des vor- und nachzeitigen Eingriffs, der zu einer Vergrößerung der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  führen kann.

Das FVA-Programm *STIRAK* [71] benutzt zur Ermittlung der Zahnsteifigkeit und der Spannungsverteilung am Zahnfuß ein integriertes *FEM*-Modul (Neupert [68]). Bong [4] verbessert die Rechengenauigkeit durch Einführung von *FEM*-Elementtypen mit einem Ansatz höherer Ordnung und durch die Berücksichtigung der Biegeverformung der Wellen nach der linearen Biegetheorie. Cao [103] implementiert das Übertragungsmatrizen-Verfahren bei der Berechnung der Wellenbiegung und erweitert den automatischen *FEM*-Strukturgenerator. Schäfer [104] erweitert *STIRAK* um ein Kontaktmodell zur Berechnung von Stirnradpaarungen mit Mehrfacheingriffen. Dies ermöglicht die Berechnung von Radketten, Sammel- und Verteilgetrieben, Getrieben mit Stufenblöcken sowie Kombinationen dieser Getriebetypen. Gacka [8] entwickelt in *STIRAK* die FE-basierte Zahnkontaktanalyse zur Berechnung von Lastverteilungsfaktoren von Stirnradverzahnungen weiter.

Das Zahnradberechnungsprogramm *LVR* [5] benutzt einen mit Hilfe der *FEM* ermittelten analytischen Ansatz der Zahnverformung (Hohnrein und Senf [47]) und den Ansatz zur Ermittlung der Kontaktverformung nach Linke [59]. Die Randeinflüsse auf die Zahnsteifigkeit werden ebenfalls berücksichtigt (Kunert [57]).

Das Programm PLANKORR [98] ermöglicht die Berechnung der statischen und dynamischen Lastverteilung in Planetengetrieben.

#### Verzahnungsberechnung mit der *FEM* und *BEM*

Prasil und Mackerle [62] geben einen guten Überblick über die in den Jahren 1997 bis 2006 veröffentlichten Arbeiten zur Berechnung von Verzahnungen mit Hilfe der *FEM*.

Litvin et al. [61] sowie Wang [99] [100] beschreiben in ihren Arbeiten die Modellierung und Berechnung von Verzahnungen mit Hilfe der *FEM* und ermitteln mit dieser Methode die Auswirkungen von Zahnflankenmodifikationen auf die Zahnradtragfähigkeit.

Moriwaki et al. [67] stellen ein dünnes Zahnflankenschichtelement vor, mit dem bei der *FEM*-Berechnung von Verzahnungen im Kontakt die Mikrogeometrie auf den Zahnflanken einfacher berücksichtigt werden kann.

Vecchiato [97] vergleicht in seiner Arbeit die Anwendung der *BEM* und der *FEM* zur Ermittlung der Flankenpressungen und Zahnfußspannungen in einer Zahnkontaktanalyse.

Raptis et al. [78] ermitteln mit spannungsoptischen Methoden die Zahnfußspannung von am äußersten Einzeleingriffspunkt belasteten Verzahnungen und stellen diese Ergebnisse zusätzlich durchgeführten *FEM*-Berechnungen gegenüber. Sie stellen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse fest, die jedoch bei größeren Zähnezahlen des Rades nicht mehr so gegeben ist.

#### Zahnfußspannungsminimierung

Niemann und Richter [69] leiten durch theoretische Überlegungen und Messungen der Berührlinienbreite an Verzahnungen die „Tragfähigste Evolventen-Schrägverzahnung“ her.

Der Hovanesian et al. [19] optimieren mit Hilfe von spannungsoptischen Untersuchungen die Zahnfußform und minimieren so die auftretenden Zahnfußspannungen.

Eine weitere Möglichkeit zu deren Reduzierung besteht in der Verwendung von asymmetrischen Verzahnungsgeometrien. Voraussetzung dafür ist, dass die Rückflanke einer Verzahnung mit einer deutlich geringeren Auslegungslast zu bemessen ist als die im Hauptbetrieb belastete Zahnflanke. Zahlreiche Arbeiten beschäftigen sich mit dieser Art von Verzahnungsgeometrie [7] [20] [36] [60].

Spitas et al. [88] bestimmen mit Hilfe der *BEM* den Einfluss von kreisförmigen Zahnfußausrundungen auf die Zahnfußspannung. Bei Zahnrädern mit kleinen Ritzelzähnezahlen haben



derartige Zahnfußausrundungen gegenüber den bei Standardzahnradern üblichen trochoidenförmigen Zahnfußformen Vorteile.

Weit am häufigsten wird die *FEM* dazu verwendet, eine bezüglich der Zahnfußspannung optimierte Zahnfußform zu bestimmen:

Kremmer et al. [55] bestimmen die optimale Zahnfußgeometrie in schrägverzahnten Pkw-Getrieben unter Berücksichtigung von verschiedenen Eingriffsstellungen in einer *FEM*-basierten Kontaktanalyse. Die optimale Zahnfußform wird dabei iterativ durch biologische Designfindung [64], die auf adaptives Wachstum aufbaut, ermittelt.

Haberer [41] entwickelt ebenfalls ein Programm, mit dem er den Abwälzvorgang von Verzahnungen in einer *FEM*-Kontaktanalyse nachbilden kann, und optimiert darauf aufbauend die Zahnfußform.

Li et al. [58] entwickeln ein komplettes *FEM*-Optimierungstool, mit dem sowohl Stirnradverzahnungen als auch Planetengetriebe im 2D modelliert und berechnet werden können. Mit diesem Berechnungsmodul ermittelt ein im Programm implementierter Optimierungsalgorithmus mit Hilfe einer Zielfunktion die optimalen Zahnformen.

Masuyama et al. [63] definieren den Kopf eines Wälzfräasers, mit dem ein Zahnrad hergestellt wird, durch hermitesche Polynome. Durch Simulation des Herstellungsprozesses ermitteln sie die Geometrie des Zahnrades, das sie anschließend in einer zweidimensionalen *FEM*-Berechnung mit einer Kraft am Kopf belasten. Durch Variation des Werkzeugkopfes ermitteln sie schließlich dasjenige Werkzeug und die dazugehörige Zahnfußform, bei denen die geringsten Zahnfußspannungen auftreten.

Costopoulos und Spitas [18] modellieren asymmetrische Verzahnungen mit zum Teil kreisförmigen Fußausrundungen und optimieren diese Zahnformen mit *FEM*-Berechnungen im 2D.

Eine ähnliche Vorgehensweise verfolgen Kapelevich und Shekhtman [51], die asymmetrische Verzahnungen mit einer beliebigen Zahnfußgeometrie modellieren. Durch eine gesteuerte Variation der Fußkontur des Zahnrades ermitteln sie die optimale Zahnradgeometrie mit Hilfe von 2D-*FEM*-Berechnungen, bei denen sie das Zahnrad mit einer Einzelkraft belasten.

Shanmugasundaram et al. [86] untersuchen kreisförmige Zahnfußformen mit 2D-*FEM*-Berechnungen und kommen zu denselben Schlussfolgerungen wie Spitas et al. [88]

Am Werkzeugmaschinenlabor (*WZL*) der RWTH Aachen wird seit Jahren an einer rechnergestützten Zahnfußoptimierung geforscht. Büßenschütt [17] entwickelt das auf der *FEM* basierende Optimierungssystem *GESTALT*, mit dem u. a. die Zahnfußgeometrie von geradverzahnten Zahnradern optimiert werden kann. Die Fußform definiert sie mit Hilfe von vier

Grundgestalten (Basisformen). Brömsen [101] erweitert dieses Programm durch Implementierung eines Fehlstellenmodells, mit dem die Randschichteigenschaften von einsatzgehärteten Zahnrädern berücksichtigt werden können. In Pulsatorversuchen untersucht er die zahnfußoptimierten Zahnräder [102] [14]. Zuletzt verbessert Brömsen das Optimierungsprogramm, indem er die Zahnfußform nicht direkt, sondern über einen parametrisierten Wälzfräser definiert [15], mit dem verschiedene Zahnfußformen erzeugt werden können. Zuber untersucht Zahnräder, die mit dem Optimierungssystem ausgelegt wurden, in Pulsatorversuchen [10] [11] [12]. Gacka [33] erweitert das Zahnradberechnungsprogramm *STIRAK* mit der Möglichkeit, asymmetrische Zahnräder mit frei wählbarer Zahnfußausrundung zu berechnen. Somit wird eine Optimierung der gesamten Zahngeometrie durch systematische Variation der Eingriffswinkel von Zug- und Druckseite möglich.

Das kommerzielle Zahnradberechnungsprogramm KISSsoft [52] [53] ermöglicht auch eine automatisierte Optimierung der Fußform und die Berechnung der Geometrie des dafür erforderlichen Werkzeuges.

Gutmann und Li erkennen, dass Zahnräder mit elliptischen Zahnfußausrundungen eine hohe Zahnfußtragfähigkeit aufweisen und erwerben ein Patent [38] [39] für derartige Zahnfußformen, bei denen geneigte Zahnfußellipsen mit tangentialstetigen Übergängen die Zahnfußgeometrie beschreiben. Als variable Parameter zur Beschreibung verwenden sie das Hauptachsenverhältnis  $a/b$  und die Neigung  $\gamma$  der Ellipse.

Roth und Etzold [80] machen den Vorschlag, die Zahnfußform nach der von Mattheck [65] [66] vorgestellten Methode der Zugdreiecke auszubilden. Für derartige Fußformen erwerben sie ebenfalls ein Patent [81].

### 2.3 LowLoss-Verzahnungen

Die Verlustleistung in einem Getriebe berechnen sich nach Linke [59] und Niemann/Winter [70] zu

$$P_V = P_{VZ0} + P_{VZP} + P_{VL0} + P_{VLP} + P_{VD} + P_{VX} \quad (10)$$

$P_{VZ0}$  und  $P_{VZP}$  sind die lastunabhängigen und lastabhängigen Verluste, die in der Verzahnung auftreten,  $P_{VL0}$  und  $P_{VLP}$  sind die lastunabhängigen und lastabhängigen Lagerverluste,  $P_{VD}$  sind die Dichtungsverluste und mit  $P_{VX}$  werden die sonstigen Verluste bezeichnet, die z.B. in Kupplungen entstehen.

Bei größeren Drehmomenten machen die lastabhängigen Verluste  $P_{VZP}$  in der Verzahnung überwiegend die Getriebeverluste aus [107]. Sie werden maßgeblich von der Antriebsleistung  $P_{An}$ , vom Schmierstoff (Reibungszahl  $\mu_{mZ}$ ) und der Verzahnungsgeometrie bestimmt.

$$P_{VZP} = P_{An} \cdot \mu_{mZ} \cdot H_V \quad (11)$$

Der Zahnverlustfaktor  $H_V$  ist ein Kennwert, der die Geometrie einer Verzahnung wiedergibt. Ohlendorf [72] leitet ihn für Verzahnungen mit einer Profilüberdeckung von  $1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$  her.

$$H_V = \frac{\pi \cdot (u+1)}{z_1 \cdot u \cdot \cos \beta_b} \cdot \left(1 - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right) \quad \text{für } 1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2 \quad (12)$$

Neben dem Zähnezahlnverhältnis  $u$ , der Ritzelzähnezahl  $z_1$  und dem Grundkreisschrägungswinkel  $\beta_b$  bestimmen vor allem die Teilprofilüberdeckungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die Größe dieses Faktors. Für Verzahnungen mit einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha < 1$  kann der Faktor nach Wimmer [106] berechnet werden.

$$H_V = \frac{\pi \cdot (u+1)}{z_1 \cdot u \cdot \cos \beta_b} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_\alpha}\right) \quad \text{für } \varepsilon_\alpha < 1 \quad (13)$$

Durch einen kleinen Modul  $m$  respektive einer großen Ritzelzähnezahl  $z_1$  und einer möglichst kleinen Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  können der Zahnverlustfaktor  $H_V$  und somit auch die lastabhän-

gigen Verzahnungsverluste  $P_{VZP}$  gering gehalten werden. Der Schrägungswinkel  $\beta$  sollte nicht zu groß gewählt werden.

Wimmer [107] untersucht die Einflüsse der Mikro- und Makrogeometrie einer Verzahnung auf die lastabhängigen Verzahnungsverluste  $P_{VZP}$ . Er erarbeitet daraus einen Optimierungskatalog zur Auslegung von verlustarmen Verzahnungen. Danach sollte neben einem kleinen Modul  $m$  und einer kleinen Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  auch der Eingriffswinkel  $\alpha$  möglichst groß gewählt werden.

LowLoss-Verzahnungen, bei denen ein konzentrierter Eingriff um den Wälzpunkt angestrebt wird, lassen sich somit durch eine Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha \leq 1,0$  und einen möglichst kleinen Modul  $m$  definieren.

Die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  sollte möglichst ganzzahlig gewählt werden, damit die Berührlinienbreite  $b_B$  über den gesamten Eingriffsverlauf nahezu konstant bleibt und somit die lasterhöhenden dynamischen Anregungen niedrig bleiben. Zudem ist bei LowLoss-Verzahnungen eine hohe Fertigungsgenauigkeit zu fordern, da die Verzahnungssteifigkeit auf Grund der sehr gedungenen Form der Zähne groß ist und dadurch schon geringe Flankenabweichungen zu einem starken Anregungs- und Geräuschverhalten führen können.

LowLoss-Verzahnungen liegen nicht mehr im Gültigkeitsbereich der Normen. Auch mit Zahnradberechnungsprogrammen wie z.B. *RIKOR* können noch keine zuverlässigen Tragfähigkeitsberechnungen durchgeführt werden. Sie müssen daher in Versuchen untersucht werden.

Grossl et al. [37] ermitteln in Laufversuchen an beschichteten und unbeschichteten LowLoss-Verzahnungen das Anregungsverhalten und den Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Schmierungsbedingungen.

Gackstetter [34] und Frühe [30] führen umfangreiche Laufversuche mit LowLoss-Verzahnungen durch und bestimmen dabei den Wirkungsgrad und das Anregungsverhalten sowie die Flanken- und Fußtragfähigkeit dieser Verzahnungen.

### 3 Vergleich der Zahnradberechnungsmethoden

#### 3.1 Vergleich eines Zahnradberechnungsprogramms (*RIKOR*) mit der *FEM*

Die in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Zahnradberechnungsprogramme haben sich in der Praxis vielfach bewährt. Bei der Berechnung der Zahnfußspannung von Schrägverzahnungen wurde ihre Gültigkeit bisher nur an wenigen kosten- und zeitintensiven Laufversuchen in einem Verspannungsprüfstand bestätigt [73] [85], da mit Schrägverzahnungen Pulsatorversuche kaum durchführbar sind. Eine systematische Validierung der Zahnradberechnungsprogramme bei der Berechnung der Zahnfußspannung durch einen Vergleich mit *FEM*-Berechnungen mit Kontaktanalyse gibt es bisher noch nicht. In diesem Abschnitt soll daher eine Validierung des *FVA*-Programms *RIKOR* mit der Methode der Finiten Elemente durchgeführt werden.

##### 3.1.1 Referenzverzahnungen

Als Referenz werden neun Prüfverzahnungen (siehe Tabelle 1) verwendet, die Otto [73] in Laufversuchen untersucht hat. Bei den Verzahnungen handelt es sich um eine Gerad- und zwei Schrägverzahnungen, auf denen gewollte Flankenabweichungen in Form von unterschiedlichen Korrekturen aufgebracht sind. Otto ermittelte in Laufversuchen u. a. das dauerhaft übertragbare Lastmoment bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit. Bei den folgenden Berechnungen mit *RIKOR* und der *FEM* werden die Referenzverzahnungen mit diesem Moment belastet.

Prüfverzahnung		V1	V1 β-	V2	V2 α-	V2 α+	V2 α+β+	V2 β-	V2 β+	V3
Dauerfestigkeitsmoment [50%]	$T$ [Nm]	560	479	556	585	573	416	465	510	325
Achsabstand	$a$ [mm]	91,5								
Normalmodul	$m_n$ [mm]	1,75								
Zähnezahl Ritzel / Rad	$z$ [-]	50 / 54				46 / 48				40 / 44
Schrägungswinkel	$\beta$ [°]	0				25				36
Profilverschiebungsfaktor Ritzel / Rad	$x$ [-]	0,14 / 0,15				0,21 / 0,23				0,18 / 0,19
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$ [°]	20								
Zahnbreite Ritzel / Rad	$b$ [mm]	15 / 15	13,7 / 13,7			17,5 / 13,7				10 / 10
Kopfkreisdurchmesser Ritzel / Rad	$d_a$ [mm]	90,75 / 97,75				92,8 / 96,7				91,1 / 99,7
Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$ [-]	1,4								
Sprungüberdeckung	$\varepsilon_\beta$ [-]	0				1,0				1,0
Gesamtüberdeckung	$\varepsilon_\gamma$ [-]	1,4				2,4				2,4
Wkz.-Kopfhöhe	$h_{a0}$ [mm]	$1,5 \cdot m_n$								
Wkz.-Kopfrundungsradius	$\rho_{a0}$ [mm]	$0,2 \cdot m_n$								
Protuberanzbetrag Wkz.	$pr_0$ [mm]	0,12								
Protuberanzwinkel Wkz.	$\alpha_{pr0}$ [°]	10								
lineare Kopfücknahme an Ritzel / Rad	$C_a / l_a$ [μm] / [mm]	25 / 0,9				-				
Generated Tip Relief am Ritzel	$C_{gwa0} / l_{gwa0}$ [μm] / [mm]	-	48 / 1,4			-				108 / 1,5
Generated Tip Relief am Rad	$C_{gwa0} / l_{gwa0}$ [μm] / [mm]	-	48 / 1,5			48 / 1,5				93 / 1,6
Profilwinkelkorrektur am Rad	$f_{nc}$ [μm]	-	-	-	-10	+10	+10	-	-	-
Flankenwinkelkorrektur am Rad	$f_{np}$ [μm]	-	-20	-	-	-	+20	-20	+20	-

Tabelle 1: Geometrie und Korrekturen der Referenzverzahnungen (Zeichungsdaten) nach Otto [73]

### 3.1.2 Zahnbruchverhalten der Referenzverzahnungen im Laufversuch

Die unkorrigierte und korrigierte Geradverzahnung  $V1$  brach im Versuch jeweils am Ritzel. Die unkorrigierte Schrägverzahnung  $V2$  brach ebenfalls am Ritzel. Die Schrägverzahnung  $V3$  brach am Rad trotz der dort etwas niedrigeren Lastwechselzahl.

Bei den korrigierten Verzahnungen  $V2$  wurde das Ritzel breiter ausgeführt als das Rad. Auf Grund der zusätzlichen mittragenden Breite am Zahnfuß weist somit das Ritzel eine größere Tragfähigkeit auf. Die Verlagerung der Belastungen auf der Zahnflanke und das Bruchverhalten der korrigierten Verzahnungen sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Bei der negativen Profilwinkelkorrektur ( $V2 \alpha^-$ ) tritt auf Grund der Belastungsumlagerung der Bruch am breiteren Ritzel auf.

Prüfverzahnung	Belastungsänderung am Rad	Belastungsänderung am Ritzel	Bruch am
<b>V2 <math>\alpha^+</math></b> negative Profilwinkelkorrektur	zusätzliche Belastung am Zahnkopf	Entlastung am Zahnkopf	Rad
<b>V2 <math>\alpha^-</math></b> positive Profilwinkelkorrektur	Entlastung am Zahnkopf	zusätzliche Belastung am Zahnkopf	Ritzel
<b>V2 <math>\alpha+\beta^+</math></b> kombinierte positive Profil- und Schrägungswinkelkorrektur	zusätzliche Belastung an Kopf und spitzer Stirnseite	Entlastung am Zahnkopf & zusätzliche Belastung nahe der stumpfen Stirnseite	Rad
<b>V2 <math>\beta^+</math></b> positive Schrägungswinkelkorrektur	zusätzliche Belastung an der spitzen Stirnseite	zusätzliche Belastung nahe der stumpfen Stirnseite	Rad
<b>V2 <math>\beta^-</math></b> negative Schrägungswinkelkorrektur	zusätzliche Belastung an der stumpfen Stirnseite	zusätzliche Belastung nahe der spitzen Stirnseite	Rad

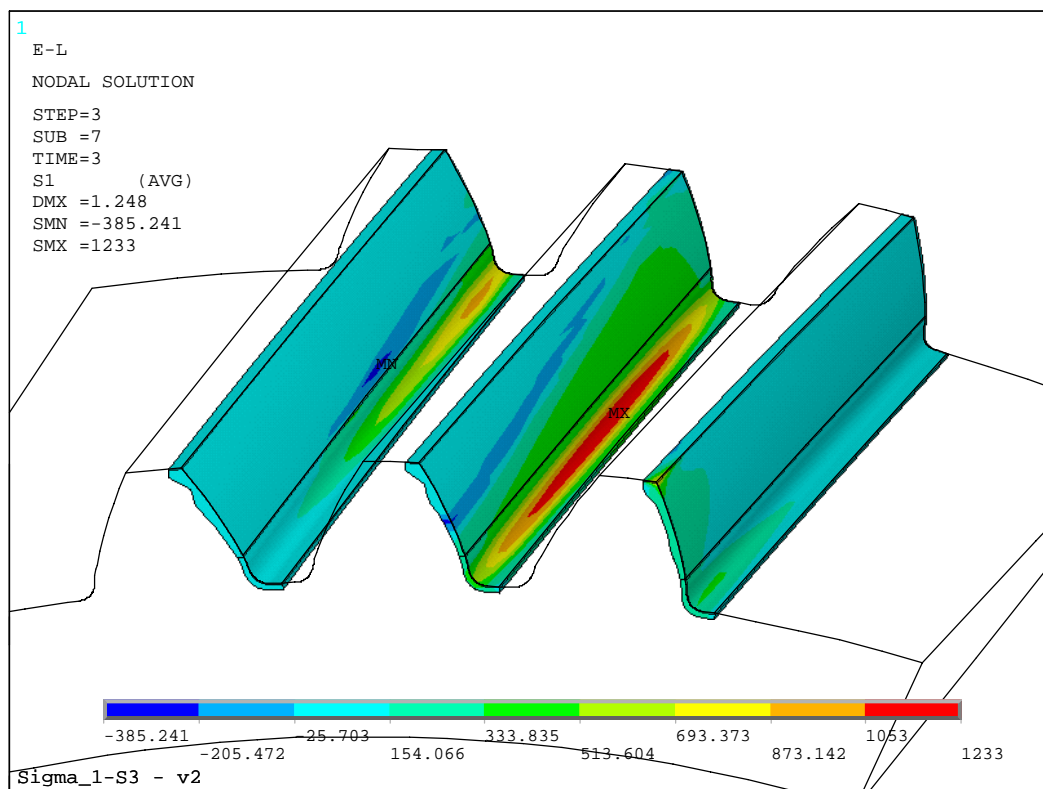
**Tabelle 2:** Belastungsverlagerungen und Bruchverhalten der korrigierten Referenzverzahnungen von Otto [73] in den Laufversuchen

### 3.1.3 FEM-Berechnung der Referenzverzahnungen

Die Zahnfußspannungen der Referenzverzahnungen werden mit dem *FEM*-Programm *ANSYS 11.0* [2] berechnet. Dabei wird ein in der klassischen Oberfläche von *ANSYS* entwickeltes Programmmodul verwendet, mit dem eine effiziente und gleichwertige *FEM*-Berechnung von verschiedenen Schrägverzahnungen möglich ist. Zur Erzeugung eines *FEM*-Modells einer Verzahnung wird in einem ersten Schritt die Geometrie des Stirnschnitts mit dem *FVA*-Programm *STplus* erzeugt und über ein *VBA*-Makro in *Excel* nach *ANSYS* exportiert. Anschließend werden die Zahnräder in *ANSYS* im Stirnschnitt modelliert und in die dritte Dimension entlang der aus dem Schrägungswinkel berechneten Spirallinie gestreckt. Mit Hilfe des *FVA*-Programms *RIKOR* [74] [95], das eigenständig von dem *FEM*-Modul angesprochen wird, ist es möglich, jede beliebige Flankenkorrektur auf den Zahnradflanken zu berechnen und anschließend aufzubringen. Dazu werden die oberflächennahen FE-Knoten im *ANSYS*-

Modell um den entsprechenden Korrekturbetrag verschoben. Die Bedienung des FE-Moduls ist trotz der zahlreichen Einstellungsmöglichkeiten einfach gehalten. So kann der Benutzer interaktiv mit Hilfe von Eingabemasken die automatische Vernetzung anpassen, die Eingriffsstellung der Zahnräder verändern, Flankenkorrekturen und Belastungen eingeben, sowie mehrere Eingriffsstellungen, die während des Abwälzvorgangs auftreten, berechnen lassen. Mit der zuletzt genannten Funktion kann sichergestellt werden, dass die maßgebende Eingriffsstellung näherungsweise erfasst wird.

Bei der Auswertung der *FEM*-Berechnungen wird die maximale auftretende 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  am Zahnfuß von Ritzel und Rad bestimmt ( $\sigma_{F,FEM} = \sigma_1$ ). Diese entspricht der Zahnfußspannung, die in analytischen Rechenverfahren und den Zahnradberechnungsprogrammen bestimmt wird. In Abbildung 3 ist die maximale Zahnfußspannung am Ritzel dargestellt, die sich bei der Verzahnung V2 in der maßgebenden Eingriffsstellung ergibt. Es sind nur die Ergebnisse der finiten Elemente am Rand der aktiven Zahnflanke und des Fußes sichtbar.



**Abbildung 3:** 3D-FEM Berechnung der 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  am Ritzel der Referenzverzahnung V2 in der maßgebenden Eingriffstellung

Die bei der Modellierung des Verzahnungsmodells im FEM-Programm ANSYS im Detail verwendeten Elementtypen, die Kontakt- und Randbedingungen, sowie die Netzfeinheit werden nachfolgend beschrieben.



Elementtypen:

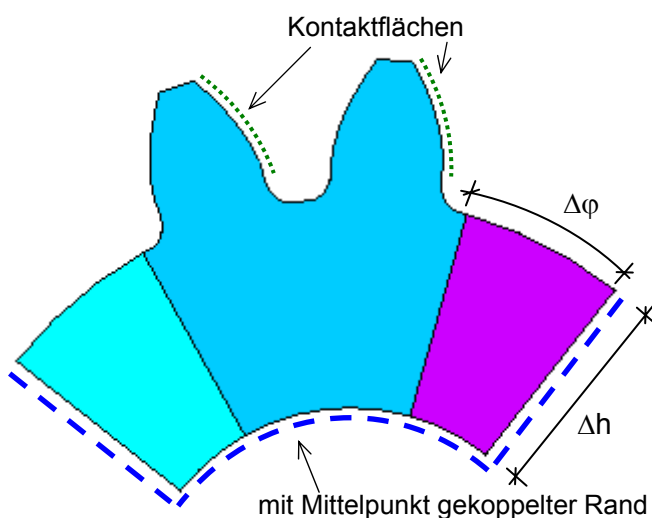
Bei der dreidimensionalen Berechnung werden zur Modellierung der Zahnradkörper verschiedenen Elemente verwendet. Um qualitativ gute Spannungswerte im Fußbereich zu erhalten, werden dort 20-knotige *SOLID186* Elemente eingesetzt. Der restliche Zahnradkörper besteht aus den 8-knotigen *SOLID185* Elementen, die deutlich weniger Rechenzeit beanspruchen. Die Kontaktbedingungen stellen *TARGE170* und *CONTA173* dar. Die Ränder werden ebenfalls über die Elemente *TARGE170* und *CONTA173* mit dem Mittelpunkt des jeweiligen Zahnrades gekoppelt.

Kontaktmodellierung:

Um den Kontakt zu modellieren gibt es in *ANSYS* zahlreiche Einstellungsmöglichkeiten (26 real constants, 3 material properties und 10 keyopt settings). Als günstig für die Berechnung von Zahnradern im Kontakt erweist sich der erweiterte Lagrangesche Algorithmus mit den Einstellung *keyopt* (5) = 1 und *keyopt* (10) = 2 (für Schließen des anfänglichen Zwischenraums und Steuerung der Kontaktsteifigkeit während der nichtlinearen Berechnung). Für die übrigen Werte werden die Standardeinstellungen verwendet.

Randbedingungen:

Um die Rechenzeit kurz zu halten wird nur der Bereich der Zahnräder modelliert, der auch einen Einfluss auf die Fußspannungen, Flankenpressungen und Zahnverformungen hat. In Berechnungen mit variierenden Modellgrößen [111] wurden die erforderlichen Abmessungen des Modells ermittelt (siehe Abbildung 4).



**Abbildung 4:** Stirnschnitt durch das Ritzel des Zahnradmodells (Rad nicht dargestellt); 2 Zähne im Kontakt ( $1 < \varepsilon_{an} \leq 2$ )

Eine Zahnkranzdicke von dreimal dem Modul ( $\Delta h = 3 \cdot m_n$ ) ist ausreichend. Der seitliche Rand hat bei einer Entfernung von einer Zahnteilung ( $\Delta \varphi = 360^\circ/z$ ) vom belasteten Zahn keinen Einfluss auf das *FEM*-Ergebnis. Unbelastete Zähne haben ebenfalls keinen Einfluss und werden deshalb auch nicht modelliert. Die Kontaktflächen werden an den aktiven Zahnflanken angebracht. Die abgeschnittenen Ränder (gestrichelte Linien) werden starr mit dem Zahnradmittelpunkt gekoppelt. Die Lasten und Eingriffsstellungen werden damit erzeugt, dass ein Moment bzw. eine Verdrehung auf den Mittelpunkt von Ritzel und Rad aufgebracht wird.

#### Netzfeinheit:

Die Feinheit des *FEM*-Netzes kann vom Anwender gezielt verändert werden. Die vorgegebenen Standardeinstellungen liefern bei praxisüblichen Verzahnungen ausreichend genaue Ergebnisse bei den Fußspannungen und den Verformungen. Eine kritische Kontrolle des Netzes und den daraus resultierenden Ergebnissen (evtl. Variationsrechnungen mit unterschiedlichen Netzfeinheiten) ist vom Anwender aber stets erforderlich.

### 3.1.4 Vergleich der Berechnungsergebnisse

Bei der Untersuchung der Referenzzahnräder mit der *FEM* werden jeweils 10 Eingriffsstellungen berechnet und die maßgebliche Fußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  am Ritzel und Rad ausgelesen. Ebenso werden die Referenzverzahnungen mit dem *FVA*-Programm *RIKOR I* berechnet, wobei der vorzeitige Zahneingriff bei der Berechnung aktiviert wird.

In Tabelle 3 sind die mit der *FEM* und dem Programm *RIKOR I* berechneten Zahnfußbruchspannungen  $\sigma_F$  gegenübergestellt. Der Wert des im Laufversuch gebrochenen Zahnrad ist jeweils fett hervorgehoben.

Prüfverzahnung		V1	V1 β-	V2	V2 α-	V2 α+	V2 α+β+	V2 β-	V2 β+	V3
FEM	$\sigma_{F,FEM,Ritzel}$	<b>1420</b>	<b>1428</b>	<b>1233</b>	<b>1260</b>	1087	851	1113	1151	1149
	$\sigma_{F,FEM,Rad}$	1413	1398	1241	1209	<b>1347</b>	<b>1228</b>	<b>1245</b>	<b>1346</b>	<b>1188</b>
RIKOR I [3]	$\sigma_{F,RIKOR,Ritzel}$	<b>1470</b>	<b>1494</b>	<b>1295</b>	<b>1325</b>	1042	905	1023	1184	1089
	$\sigma_{F,RIKOR,Rad}$	1486	1494	1286	1215	<b>1439</b>	<b>1159</b>	<b>1355</b>	<b>1216</b>	<b>1093</b>
Vergleich FEM - RIKOR I	$\Delta\sigma_{Ritzel} [\%]$	3%	4%	5%	5%	-4%	6%	-9%	3%	-6%
	$\Delta\sigma_{Rad} [\%]$	5%	6%	3%	0%	6%	-6%	8%	-11%	-9%

**Tabelle 3:** Berechnete Zahnfußspannungen  $\sigma_F$  in N/mm<sup>2</sup> bei Dauerlast mit 50% Ausfallwahrscheinlichkeit (Wert des im Versuch gebrochenen Zahnrad jeweils **fett** hervorgehoben)

Die in den Versuchen aufgetretenen Zahnbrüche lassen sich gut nachvollziehen. So ist z.B. bei der Verzahnung V3 die Fußspannung am Rad  $\sigma_{F,FEM,Rad}$  nach der *FEM* um 4% größer als am Ritzel  $\sigma_{F,FEM,Ritzel}$ . Dies erklärt den Bruch des Rades trotz der dort geringeren Lastspielzahl im Vergleich zum Ritzel. Da alle Prüfzahnräder aus derselben Materialcharge gefertigt wurden und auch denselben Härteprozess durchlaufen haben, ist die Festigkeit am Zahnfuß bei allen in etwa als gleich groß anzunehmen. Auf Grund der Streuung der Versuchsergebnisse und der Vernachlässigung der dynamischen Effekte ergeben sich bei der Berechnung der Zahnfußspannungen Unterschiede. Die mit Hilfe der *FEM* ermittelten Zahnfußbruchspannungen variieren um 20% (1188...1428 N/mm<sup>2</sup> ; siehe Tabelle 3) und liegen damit in etwa in dem von Otto [75] erwarteten wahrscheinlichen Fehlerbereich bei der Versuchsdurchführung. *RIKOR I* (mit aktiviertem vorzeitigem Eingriff) weist eine Schwankung von 37% (1093...1494 N/mm<sup>2</sup>) auf. Mit dem höherwertigen Verfahren der *FEM* können – den geringeren Schwankungen nach zu urteilen – die Versuchsergebnisse am Besten nachvollzogen werden. Beim direkten Vergleich von *RIKOR I* und der *FEM* (siehe Tabelle 3) zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Berechnungsmethoden. Im Durchschnitt weichen die Ergebnisse um nur 6% voneinander ab. Die maßgeblichen Eingriffsstellungen und Orte der maximalen Zahnfußspannung sind bei beiden Rechenverfahren ähnlich. Der Vergleich der Rechenmethoden zeigt, dass das Zahnradberechnungsprogramm *RIKOR* die Steifigkeitsverhältnisse und die komplexen Spannungszustände am Zahnfuß von Schrägverzahnungen sehr gut erfasst.

### 3.2 Vergleich der ISO 6336-3 mit dem Zahnradberechnungsprogramm RIKOR

In dem im Abschnitt 2.1.1 vorgestellten analytischen Berechnungsverfahren nach ISO 6336-3 werden einige Vereinfachungen und Näherungen bei der Nachbildung des komplexen Tragverhaltens und des Spannungszustandes am Fuß gemacht. Die daraus resultierenden Abweichungen der nach ISO 6336-3 berechneten von den in Wirklichkeit auftretenden Zahnfußspannungen können im Vergleich zu einem höherwertigen Berechnungsprogramm (z.B. RIKOR) aufgezeigt werden. Dazu wird eine Parameterstudie von verschiedenen Verzahnungsgeometrien durchgeführt, bei der die Abweichungen der Zahnfußspannung nach ISO 6336-3 von denen nach RIKOR berechnet und in einem Diagramm dargestellt werden. Diese Methode wird auch von Schinagl [85] und Otto [73] angewendet.

Im Folgenden werden die Norm ISO 6336-3 und das FVA-Programm RIKOR I miteinander verglichen. Tabelle 4 zeigt die Parametervariation der untersuchten Verzahnungen.

Stirnmodul	$m_t$	1 mm
Stirneingriffswinkel	$\alpha_t$	20°
Zähnezahl	$z_1 / z_2$	35 / 35
Schrägungswinkel	$\beta$	10° / 20° / 30° / 40°
Profilverschiebungsfaktor	$x_1 / x_2$	0 / 0
Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$	1,0 / 1,1 / ... / 2,5
Sprungüberdeckung	$\varepsilon_\beta$	0,5 / 0,6 / ... / 2,5
Wkz.-Kopfrundungsradius	$\rho_{aPn0}$	0,2 mm
Zahnkopfhöhenspiel	$c$	0,2 mm

**Tabelle 4:** Verzahnungsparameter der in der Parameterstudie untersuchten 2268 Verzahnungen

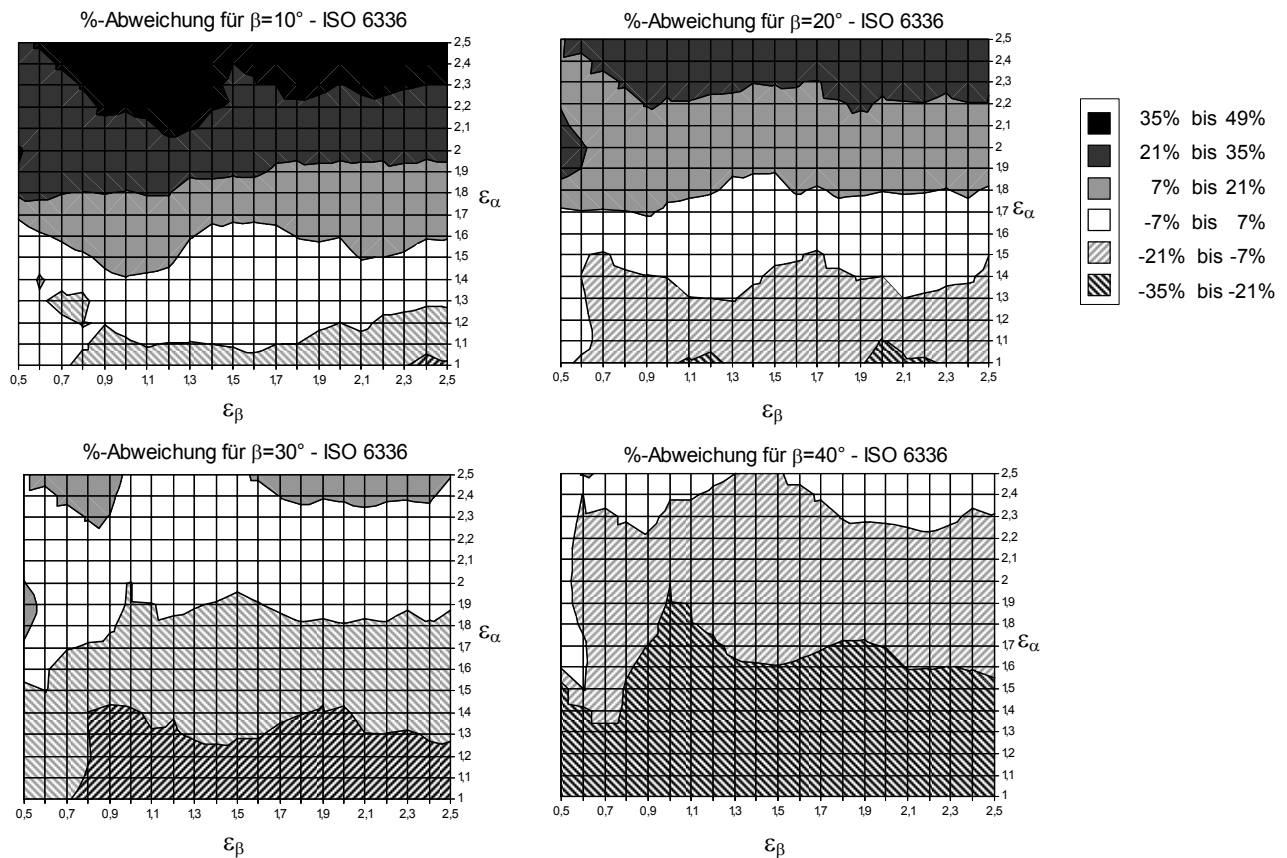
Es werden der Schrägungswinkel  $\beta$ , die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  variiert. Die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  haben bei Schrägverzahnungen einen Einfluss auf die Länge und Lage der Berührlinie. Der Schrägungswinkel  $\beta$  beeinflusst maßgeblich das Verhältnis zwischen Stirnschnitt und Normalschnitt, d.h. mit ihm lassen sich die Geometriegrößen im Stirnschnitt in den Normalschnitt umrechnen und umgekehrt.

Alle übrigen Verzahnungsparameter bleiben bei der Variationsrechnung unverändert, da sie lediglich in Abhängigkeit vom Schrägungswinkel  $\beta$  die Zahnform im Stirn- bzw. Normalschnitt beeinflussen. Sie können quasi als 2D-Geometrie-Parameter betrachtet werden. Unterschiedliche Geometrien von Zahnfuß und Zahnflanke werden analog zu Geradverzahnungen durch den Formfaktor  $Y_F$  und den Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  ausreichend genau erfasst (siehe Abschnitt 5.3.5). Der Stirnmodul  $m_t$  stellt einen Größenfaktor dar und wird zu  $m_t = 1$  mm

gewählt. Die Baugröße geht auf Grund des linear elastischen Verhaltens von Stahlzahnradern linear in die Zahnfußspannungsberechnung ein und muss nicht variiert werden. Der Stirneingriffswinkel wird gleich dem Betriebseingriffswinkel gewählt  $\alpha_t = \alpha_w = 20^\circ$  ( $x_1 = x_2 = 0$ ). Die Übersetzung wird zu  $i = 1$  gewählt, da sie bei einer gegebenen Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  keinen Einfluss auf die Zahnfußspannung hat. Die Zähnezahl ( $z = 35$ ), der Werkzeugkopfrundungsradius ( $\rho_{aPno} = 0,2$  mm) und das Zahnkopfhöhenspiel ( $c = 0,2$  mm) beeinflussen hauptsächlich nur die Zahnfußform und werden als konstant gewählt. Eine Parameterstudie mit Variation der Zahnfußform wird separat an Geradverzahnungen in einem zweidimensionalen Modell in Abschnitt 5.3.5 untersucht. Mit Festlegung bzw. Variation der oben genannten Parameter sind die Makrogeometrien der Verzahnungen bei der Variationsrechnung eindeutig festgelegt.

Bei dem Vergleich der Berechnungsverfahren *ISO 6336-3* und *RIKOR* wird vorausgesetzt, dass die Verzahnungen abweichungsfrei sind. Die Krafftoren werden in *ISO 6336-3* zu  $K_{F\alpha} = K_{F\beta} = 1,0$  gesetzt. In *RIKOR* wird das Modul zur Berücksichtigung des vorzeitigen Zahneingriffs deaktiviert.

In Abbildung 5 sind die Ergebnisse der vergleichenden Zahnfußspannungsberechnungen dargestellt.



**Abbildung 5:** Prozentuale Abweichung der *ISO 6336-3* (1996) von *RIKOR* bei der Berechnung der Zahnfußspannung in Abhängigkeit von  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  und  $\beta$

Die vier Diagramme, die jeweils unterschiedliche Schrägungswinkel repräsentieren ( $\beta = 10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $40^\circ$ ), geben die prozentuale Abweichung der nach der *ISO 6336-3* berechneten Zahnfußspannung  $\sigma_{F0,ISO 6336}$  von der mit *RIKOR* berechneten Zahnfußspannung  $\sigma_{F,RIKOR}$  wieder. Auf der Abszisse ist die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$ , auf der Ordinate die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  aufgetragen. Negative Abweichungen weisen auf eine zu geringe Fußspannung nach *ISO 6336-3* hin, bei positiven Abweichungen wird die Fußspannung zu groß berechnet. Man erkennt in allen Diagrammen, dass mit größer werdender Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  die Zahnfußspannung nach *ISO 6336-3* tendenziell zu groß berechnet wird. Vergleicht man die vier Diagramme untereinander, kann man feststellen, dass der Schrägungswinkel  $\beta$  nicht korrekt erfasst wird. Je größer  $\beta$  wird umso mehr ist die nach *ISO 6336-3* berechnete Fußspannung auf der unsicheren Seite. An der fast horizontalen Trennung der Flächen in den Diagrammen erkennt man, dass die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  relativ gut von der *ISO 6336* berücksichtigt wird.

Die von Schinagl [85] und Otto [73] festgestellten Ungenauigkeiten in der Norm können somit bestätigt werden.

### 3.3 Existierende Modifikationsvorschläge zur ISO 6336-3

Die festgestellten Ungenauigkeiten in der ISO 6336-3 (siehe Abschnitt 3.2) bei der Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von Schrägverzahnungen führten zu mehreren Modifikationsvorschlägen, die im Folgenden kurz vorgestellt werden.

#### 3.3.1 Zahnfußspannungsberechnung nach ISO 6336-3 – modifiziert Schinagl

Schinagl [85] berücksichtigt in einem modifizierten analytischen Verfahren bei Schrägverzahnungen sowohl die Stützwirkung der Zahnbereiche neben der Berührlinie, als auch die unterschiedlichen Hebelarme der Punkte auf der schräg über die Flanke verlaufenden Berührlinie. Die Methode der Ersatzgeradverzahnung zur Bestimmung der Zahnfußgeometrie an der 30°-Tangente im Normalschnitt behält er bei. Er geht davon aus, dass nur drei Eingriffsstellungen die maximalen Spannungen am Fuß erzeugen können. Bei diesen Eingriffsstellungen verläuft die Berührlinie in der Nähe des Zahnkopfecks an der spitzen Stirnseite. Die maximale Zahnfußspannung tritt nach seiner Theorie immer nahe der spitzen Stirnkante auf. Er schlägt vor, für alle drei Eingriffsstellungen die Zahnfußspannungen zu berechnen. Die maximale Spannung der drei Eingriffsstellungen ist die maßgebende Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$ . Das Verfahren kalibriert Schinagl mit Hilfe der Korrekturfaktoren  $c_\alpha$  und  $c_\beta$ , sowie durch die Gleichungen zum maßgeblichen Hebelarm  $h_f$  und der stützenden Breite  $f_{b,max}$ . Dazu führt er eine Parameterstudie (über 1000 Verzahnungen) mit dem Programm *RIKOR* (Version G) durch und gleicht seine Faktoren und Gleichungen diesen Ergebnissen an. Durch diese umfangreiche Kalibrierung gelingt es ihm, die Einflüsse der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und des Schrägungswinkels  $\beta$  auf die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  besser als in der ISO 6336-3 zu erfassen. Der Nachteil des modifizierten Verfahrens ist die teilweise von der Norm deutlich abweichende Vorgehensweise bei der Berechnung. So müssen zuerst die drei maßgeblichen Eingriffsstellungen bestimmt werden. Die Berechnung der Zahnfußspannung ist anschließend für jedes Zahnrad dreimal durchzuführen, wobei dazu der maßgebliche Hebelarm  $h_f$  und die stützende Breite  $f_{b,max}$  neu bestimmt werden müssen. Zudem weist der vereinfachte Ansatz von Schinagl zur Pressungsverteilung bei der Herleitung der maßgeblichen Eingriffsstellungen Ungenauigkeiten auf. Eine genauere Analyse der Pressungsverteilung mit dem Programm *RIKOR* zeigt z.B. bei den Referenzverzahnungen V2 und V3, dass andere Eingriffsstellungen maßgeblich werden. Der Zahnfußbruch startet danach nicht wie von Schinagl angenommen im Fußbereich nahe der spitzen Stirnkante, sondern in Zahnmitte. Die von Otto durchgeführten Versuche und die dabei entstandenen Bruchbilder bestätigen dies (siehe Bild 7.7 und 7.8 in [75]).

Für Geradverzahnungen mit einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$  (Hochverzahnungen) reduziert Schinagl mit dem Korrekturfaktor  $c_\alpha$  die berechnete Zahnfußspannung um 20%.

### 3.3.2 Zahnfußspannungsberechnung nach *ISO 6336-3* – *modifiziert Otto*

Die Berechnung nach der modifizierten Methode von Schinagl weist stellenweise eine von der *ISO 6336-3* deutlich abweichende Vorgehensweise auf. Otto [73] nimmt daher nur geringe Modifikationen an der *ISO 6336-3* vor, die die größten von ihm festgestellten Ungenauigkeiten beheben. Den Formfaktor  $Y_F$  multipliziert er mit einem Zusatzfaktor  $f_\varepsilon$ , den er aus der Profil- und der Sprungüberdeckung bestimmt. Den Schrägenfaktor  $Y_\beta$  quadriert er und teilt ihn anschließend durch  $\cos^3(\beta)$ . Dies führt bei größeren Eingriffswinkeln zu einer deutlichen Erhöhung der berechneten Zahnfußspannung:

z.B.:

$$\varepsilon_\alpha = 1,0 ; \varepsilon_\beta = 1,0 ; \beta = 30^\circ \quad \rightarrow \Delta\sigma_{F0} = +38\%$$

$$\varepsilon_\alpha = 1,0 ; \varepsilon_\beta = 1,0 ; \beta = 40^\circ \quad \rightarrow \Delta\sigma_{F0} = +53\%$$

Den Zusatzfaktor  $f_\varepsilon$  und die Gleichung zum Schrägenfaktor  $Y_\beta$  kalibriert Otto ebenfalls an Hand einer vergleichenden Parameterstudie mit dem Programm *RIKOR* (Version H). Das neue Verfahren erfasst die Einflüsse der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und des Schrägungswinkels  $\beta$  auf die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  relativ gut (siehe Abbildung 48 ff. im Anhang). Der Rechenaufwand ist im Vergleich zur *ISO 6336-3* nur unwesentlich größer. Die Bestimmung der Zahnfußgeometrie für Schrägverzahnungen über die Ersatzgeradverzahnung, die in der Norm historisch gewachsen ist, wird ebenso beibehalten wie die Umrechnung des äußeren Einzeleingriffpunktes und der Sprungüberdeckung in die Ersatzgeradverzahnung. Er bleibt somit innerhalb der bestehenden Modellvorstellung der Norm.

Für Geradverzahnungen mit einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$  (Hochverzahnungen) reduziert Otto analog zu Schinagl die berechnete Zahnfußspannung um 20%.



## 4 Berechnung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnungen mit einem modifizierten analytischen Verfahren

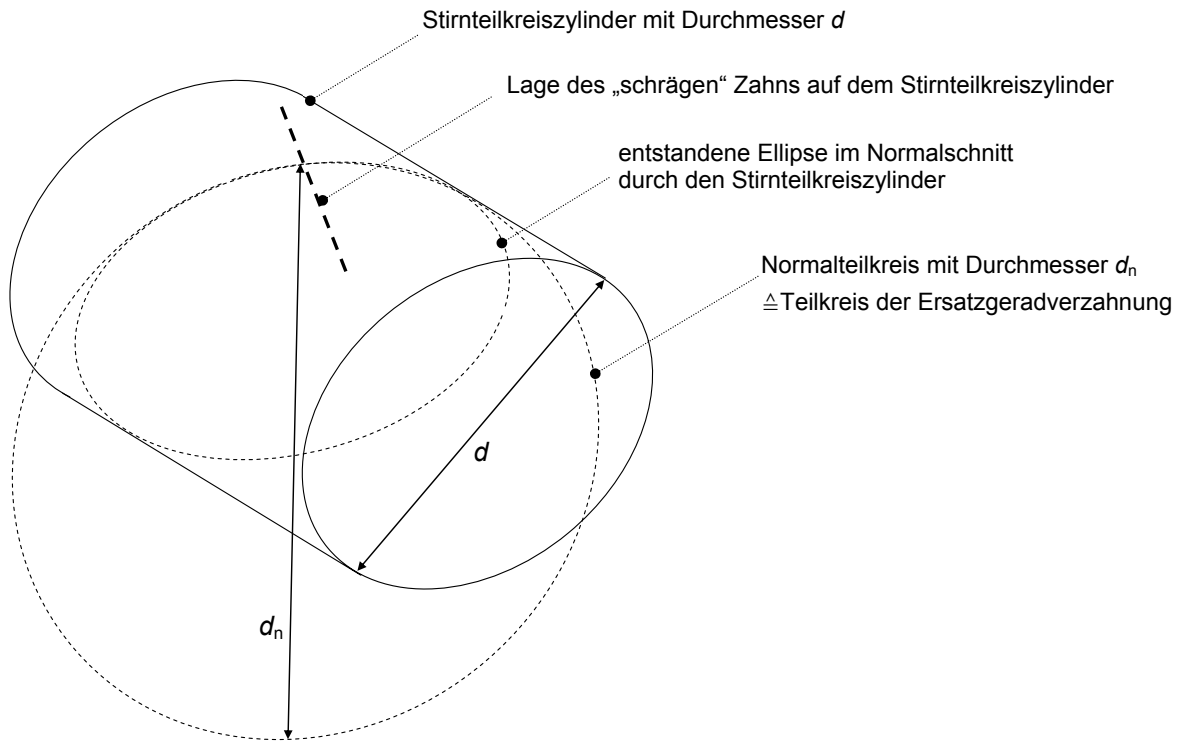
In diesem Kapitel soll die *ISO 6336-3* genauer untersucht und Schwächen bei der Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von Schrägverzahnungen aufgezeigt werden. Darauf aufbauend wird ein Vorschlag zur Modifizierung der *ISO 6336-3* gemacht, durch den eine einfachere, verständlichere und genauere Berechnung möglich wird.

### 4.1 Analyse der *ISO 6336-3*

#### 4.1.1 Berechnung der Zahnfußgeometrie im Normalschnitt an der 30°-Tangente mit Hilfe der Ersatzgeradverzahnung

Der Zahn einer Schrägverzahnung bricht im Normalschnitt, da er dort den schmalsten Querschnitt aufweist. Zudem wirkt in einer Verzahnung die Normalkraft jeweils in Richtung des Normalschnitts. Für die Bestimmung der maximalen Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  ist folglich der Normalschnitt entscheidend. Dies wird bei der *ISO 6336-3* und den Modifikationen von Schinagl und Otto (siehe Abschnitt 2.1.1 und 3.3) berücksichtigt, indem versucht wird, die Zahngeometrie im Normalschnitt durch ein im Normalschnitt abwälzendes Werkzeug nachzubilden. Die dabei erzeugte Geradverzahnung ist die Ersatzgeradverzahnung. Sie besitzt eine ähnliche Zahnform wie die Zähne der Schrägverzahnung im Normalschnitt und weist einen Teilkreisdurchmesser  $d_n$  auf, der dem doppelten Radius der Ellipse entspricht, die durch den Schnitt des Stirnteilkreiszyinders mit der Normalschnittebene entsteht (siehe Abbildung 7).

$$d_n = \frac{d}{\cos^2 \beta_b} \quad (14)$$



**Abbildung 6:** Verhältnisse der Teilkreise im Stirnschnitt und im Normalschnitt

Zur Bestimmung des Kopfkreisdurchmessers  $d_{an}$  wird zum Teilkreisdurchmesser  $d_n$  die Zahnkopfhöhe zwischen Teilkreis  $d$  und Kopfkreis  $d_a$  hinzuaddiert.

$$d_{an} = d_n + (d_a - d) \quad (15)$$

Die virtuelle Zähnezahl  $z_n$  der Ersatzgeradverzahnung wird mit Hilfe des Normalmoduls  $m_n$  und dem Teilkreisdurchmesser  $d_n$  im Normalschnitt berechnet.

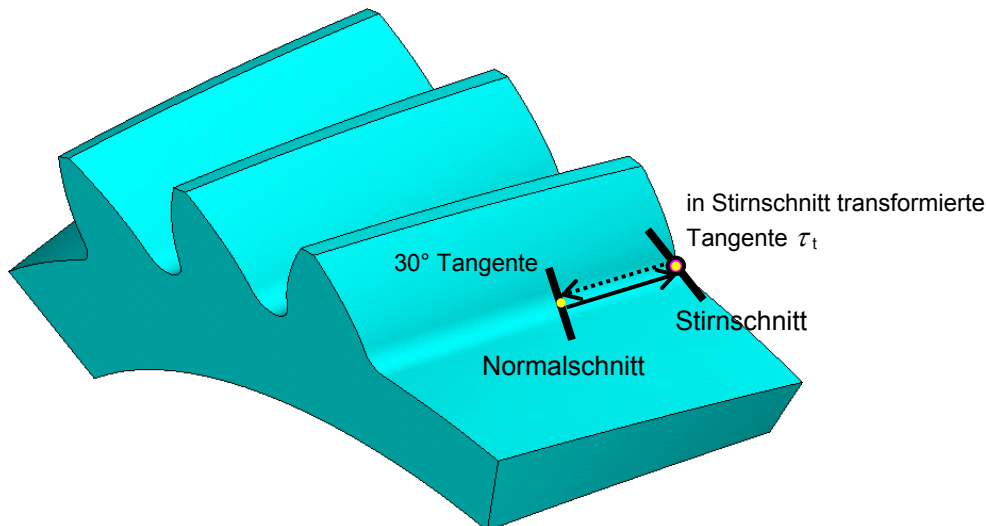
$$m_n = m_t \cdot \cos \beta \quad (16)$$

$$z_n = \frac{d_n}{m_n} = \frac{\frac{d}{\cos^2 \beta_b}}{m_t \cdot \cos \beta} = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \quad (17)$$

Die Ersatzgeradverzahnung kann aber nur eine Näherung der realen Zahnform darstellen, was an der Zahnflanke leicht zu erkennen ist. Die Zahnflankenform im Normalschnitt von einer Schrägverzahnung ist keine Evolvente mehr, die Flanke der virtuellen Ersatzgeradverzahnung weist aber eine derartige Form auf. Um die Qualität dieses Näherungsverfahrens

beurteilen zu können, werden die oben genannten Zahnfußgeometriegrößen im Normalschnitt analytisch hergeleitet. In einer Parameterstudie, in der die maßgeblichen Verzahnungsparameter variiert werden, werden anschließend die Geometriegrößen nach den zuvor hergeleiteten Gleichungen berechnet und den nach *DIN 3990 T3* ermittelten Zahnfußgeometrien gegenübergestellt.

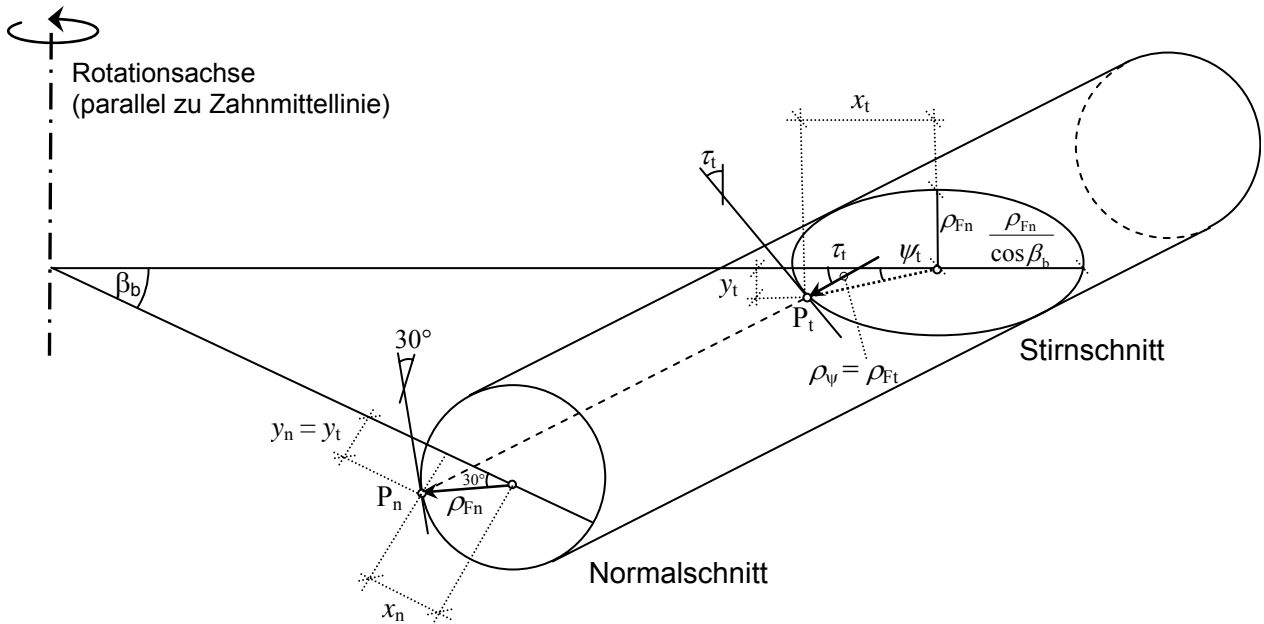
Abbildung 7 zeigt die Verhältnisse an einer Schrägverzahnung.



**Abbildung 7:** Darstellung des Stirnschnitts und Normalschnitts am Fuß in einer Schrägverzahnung

In Analogie zum Zahnfußbruchverhalten von Geradverzahnungen, bricht der Zahn einer Schrägverzahnung theoretisch an der 30°-Tangente im Normalschnitt. Die Geometrie im Zahnfuß bestimmt sich durch den Abwälzvorgang des Wälzfräasers. Das Abwälzen findet im Stirnschnitt statt. Daher ist es erforderlich, den Berührungspunkt der 30°-Tangente im Zahnfuß in den Stirnschnitt umzurechnen (siehe Abbildung 7) und die dortige Tangentensteigung zu ermitteln. Ebenso muss das Werkzeug, dessen Geometrie üblicherweise im Normalschnitt definiert ist, in den Stirnschnitt umgerechnet werden. An der ermittelten Tangentensteigung können dann analog zu den Berechnungen bei einer Geradverzahnung die Zahnfußgeometriegrößen ( $s_{Ft}$ ,  $h_F$  und  $\rho_{Ft}$ ) im Stirnschnitt bestimmt werden. Anschließend sind die Zahnfußgeometriegrößen wieder in den Normalschnitt zurückzurechnen.

Normal- und Stirnschnitt sind um den Schrägungswinkels  $\beta_b$  zueinander gedreht. Die Rotationsachse ist parallel zur Zahnmittellinie im Stirnschnitt. Abbildung 8 gibt die geometrischen Verhältnisse zwischen Stirn- und Normalschnitt wieder.



**Abbildung 8:** Stirn- und Normalschnittverhältnisse am Zahnfuß einer Schrägverzahnung mit den Krümmungsradien  $\rho_{Fn}$  und  $\rho_{Ft}$  am Punkt  $P_t = P_n$  an den Tangenten bei  $30^\circ$  bzw.  $\tau_t$

Auf Grund des Schrägungswinkels  $\beta_b$  entspricht ein Kreis im Normalschnitt einer Ellipse im Stirnschnitt. Die Beziehung der beiden Geometrien zueinander lässt sich durch einen schrägen Schnitt (im Winkel  $\beta_b$ ) durch einen Zylinder veranschaulichen (siehe Abbildung 8). Der Winkel  $\beta_b$  stellt hier eine Näherung dar. Um exakt zu rechnen müsste man den Schrägungswinkel am Zahnrad Durchmesser der  $30^\circ$ -Tangente verwenden. Der bei der Verwendung von  $\beta_b$  gemachte Fehler ist vernachlässigbar gering.

Die Hauptachsen der Ellipse berechnen sich zu

$$a_\rho = \frac{\rho_{Fn}}{\cos(\beta_b)} \quad (18)$$

$$b_\rho = \rho_{Fn} \quad (19)$$

Der Punkt  $P_n$  liegt an der  $30^\circ$ -Tangente im Normalschnitt. Im Stirnschnitt entspricht dieser Punkt dem Punkt  $P_t$ , der am Polarwinkel  $\psi_t$  in der Ellipse liegt.

$$\psi_t = \arctan\left(\frac{y_t}{x_t}\right) = \arctan\left(\frac{y_n}{\frac{x_n}{\cos\beta_b}}\right) = \arctan(\tan 30^\circ \cdot \cos\beta_b) \quad (20)$$

Der Normalenwinkel  $\tau_t$  der Ellipse am Punkt  $P_t$  und somit die Tangentensteigung im Stirnschnitt lässt sich mit dem Hauptachsenverhältnis  $a_\rho/b_\rho$  und dem Polarwinkel  $\psi_t$  berechnen.

$$\tau_t = \arctan\left(\frac{a_\rho^2}{b_\rho^2} \cdot \tan \psi_t\right) = \arctan\left(\frac{\tan \psi_t}{\cos^2 \beta_b}\right) \quad (21)$$

Die Geometrie eines Verzahnungswerkzeuges wird üblicherweise im Normalschnitt mit dem Modul  $m_{Pn0}$ , dem Profilwinkel  $\alpha_{Pn0}$ , der Kopfhöhe  $h_{aPn0}$  und dem Kopfrundungsradius  $\rho_{aPn0}$  des Werkzeugbezugprofils definiert. Die Werkzeugengrößen im Stirnschnitt errechnen sich daraus nach Hösel [46] zu

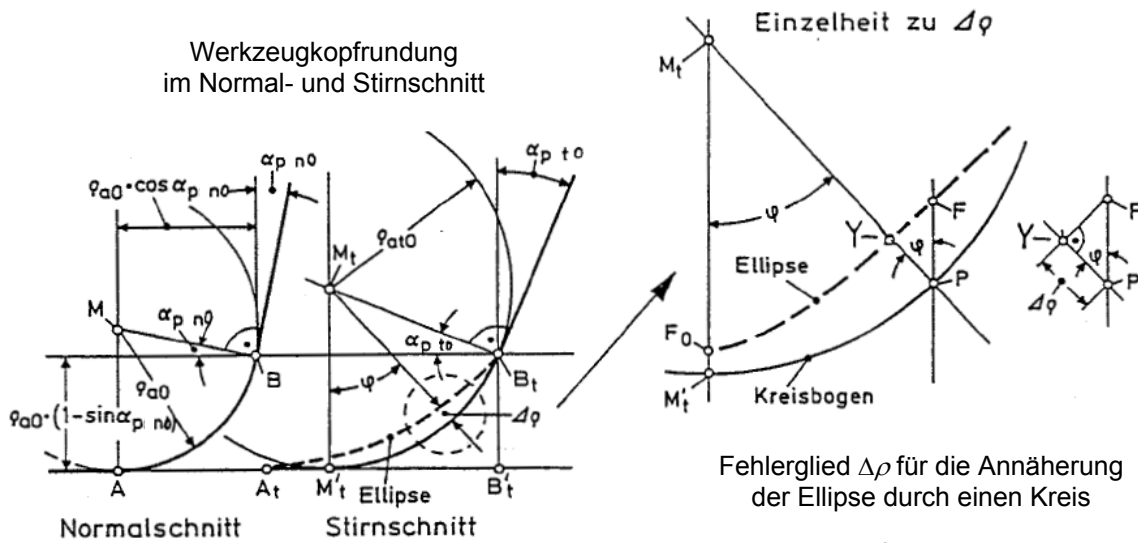
$$m_t = m_{Pt0} = \frac{m_{Pn0}}{\cos \beta} = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (22)$$

$$\alpha_t = \alpha_{Pt0} = \arctan\left(\frac{\tan \alpha_{Pn0}}{\cos \beta}\right) \quad (23)$$

$$h_{aPt0} = h_{aPn0} \quad (24)$$

$$\rho_{aPt0} = \rho_{aPn0} \cdot \frac{1 - \sin(\alpha_{Pn0})}{1 - \sin(\alpha_{Pt0})} \quad (25)$$

$\rho_{aPt0}$  in Gleichung (25) stellt dabei eine Näherung dar. In der Realität ist die Kopfrundung des Werkzeugs im Stirnschnitt eine Ellipse und kein Kreis (siehe Abbildung 9).



**Abbildung 9:** Darstellung der geometrischen Verhältnisse bei der Umrechnung der im Normalschnitt gegebenen Werkzeuggeometrie in den Stirnschnitt (aus Hösel [46])

Das Fehlerglied  $\Delta\rho$  berechnet sich nach Hösel [46] zu

$$\Delta\rho = \rho_{aPn0} \cdot \cos\varphi \cdot \left[ 1 - (1 - \cos\varphi) \frac{1 - \sin\alpha_{Pn0}}{1 - \sin\alpha_{Pt0}} - \sqrt{1 - \left( \cos\alpha_{Pn0} + \frac{1 - \sin\alpha_{Pn0}}{1 - \sin\alpha_{Pt0}} (\sin\varphi - \cos\alpha_{Pt0}) \cdot \cos\beta \right)^2} \right] \quad (26)$$

Für die Berechnung der Zahnfußspannung ist der Fehler vernachlässigbar gering. So ergibt sich zum Beispiel für ein Verzahnungswerkzeug mit einem Kopfrundungsradius von  $\rho_{aPn0} = 0,2 \cdot m_{Pn0}$  und einem Profilwinkel von  $\alpha_{Pn0} = 20^\circ$ , sowie einem Schrägungswinkel von  $\beta = 30^\circ$  eine maximale Abweichung von  $\Delta\rho \leq 0,004 \cdot m_{Pn0}$ .

Die Zahnfußdickensehne  $s_{Ft}$ , der Hebelarm  $h_{Fa}$  und die Zahnfußausrundung  $\rho_{Ft}$  im Stirnschnitt an der Tangente mit dem Winkel  $\alpha_t$  berechnen sich nach den Gleichungen (27) bis (37). Der Hebelarm  $h_{Fa}$  wird dabei bei einem Kraftangriff am Kopf bestimmt, um eine gute Vergleichbarkeit des Verfahrens der Ersatzgeradzahnung mit den analytisch exakt berechneten Werten zu gewährleisten. Die Gleichungen entsprechen den Gleichungen der ISO 6336-3 Method C (Kraftangriff am Kopf). Lediglich die Gleichungen (29) und (31) werden für beliebige Tangentensteigungen  $\alpha_t$  erweitert.

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot m_t - h_{aPt0} \cdot \tan\alpha_t - (1 - \sin\alpha_t) \cdot \frac{\rho_{aPt0}}{\cos\alpha_t} \quad (27)$$

$$G = \frac{\rho_{aPt0}}{m_t} - \frac{h_{aPt0}}{m_t} + x \quad (28)$$

$$H = \frac{2}{z} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_t} \right) - \frac{\pi}{2} + \tau_t \quad (29)$$

$$\vartheta = \frac{2G}{z} \cdot \tan \vartheta - H \quad (\text{Iteration mit Startwert } \vartheta_{\text{start}} = \frac{\pi}{6}) \quad (30)$$

$$\frac{s_{Ft}}{m_t} = z \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \tau_t - \vartheta \right) + 2 \cdot \cos \tau_t \cdot \left( \frac{G}{\cos \vartheta} - \frac{\rho_{aPt0}}{m_t} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\rho_{Ft}}{m_t} = \frac{\rho_{aPt0}}{m_t} + \frac{2G^2}{\cos \vartheta \cdot (z \cdot \cos^2 \vartheta - 2G)} \quad (32)$$

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_t \quad (33)$$

$$\alpha_a = \arccos \left( \frac{d_b}{d_a} \right) \quad (34)$$

$$\gamma_a = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{x}{m_t} \cdot \tan \alpha_t}{z} + \text{inv} \alpha_t - \text{inv} \alpha_a \quad (35)$$

$$\alpha_{Fa} = \alpha_a - \gamma_a = \tan \alpha_a - \text{inv} \alpha_t - \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{x}{m_t} \cdot \tan \alpha_t}{z} \quad (36)$$

$$\frac{h_{Fa}}{m_t} = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\cos \gamma_a - \sin \gamma_a \cdot \tan \alpha_{Fa}) \cdot \frac{d_a}{m_t} - z \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} - \vartheta \right) - \frac{G}{\cos \vartheta} + \frac{\rho_{aPt0}}{m_t} \right] \quad (37)$$

Für die Rückumrechnung der ermittelten Zahnfußgrößen in den Normalschnitt benötigt man die Formel des Krümmungsradius' einer Ellipse. Bei einer Ellipse in Parameter-Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\rho \cdot \cos \psi_t \\ b_\rho \cdot \sin \psi_t \end{pmatrix} \quad (38)$$

berechnet sich der Krümmungsradius  $\rho_\psi$  am Winkel  $\psi_t$  (siehe Abbildung 8) zu

$$\begin{aligned}\rho_{\psi} &= \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'} = \frac{(a_{\rho}^2 \cdot \sin^2 \psi_t + b_{\rho}^2 \cdot \cos^2 \psi_t)^{\frac{3}{2}}}{a_{\rho} \cdot \sin \psi_t \cdot b_{\rho} \cdot \sin \psi_t + a_{\rho} \cdot \cos \psi_t \cdot b_{\rho} \cdot \cos \psi_t} = \\ &= \frac{b_{\rho}^2}{a_{\rho}} \cdot \left( \frac{a_{\rho}^2}{b_{\rho}^2} \sin^2 \psi_t + \cos^2 \psi_t \right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (39)$$

bzw. die Hauptachse  $b_{\rho}$  zu

$$b_{\rho} = \rho_{\psi} \cdot \frac{a_{\rho}}{b_{\rho}} \cdot \left( \frac{a_{\rho}^2}{b_{\rho}^2} \sin^2 \psi_t + \cos^2 \psi_t \right)^{-\frac{3}{2}}\quad (40)$$

Damit ergibt sich für den Zahnfußkrümmungsradius  $\rho_{F_n, \text{analytisch}}$  im Normalschnitt

$$\rho_{F_n, \text{analytisch}} = b_{\rho} = \frac{\rho_{F_t}}{\cos \beta_b} \cdot \left( \frac{\sin^2 \psi_t}{\cos^2 \beta_b} + \cos^2 \psi_t \right)^{-\frac{3}{2}}\quad (41)$$

Die Zahnfußdickensehne  $s_{F_n, \text{analytisch}}$  und der Hebelarm  $h_{F_a, \text{analytisch}}$  berechnen sich zu

$$s_{F_n, \text{analytisch}} = s_{F_t} \cdot \cos \beta_b\quad (42)$$

$$h_{F_a, \text{analytisch}} = h_{F_a}\quad (43)$$

Mit den gewonnenen Zahnfußgrößen kann nun die Qualität des Verfahrens der Ersatzgeradverzahnung zur Bestimmung von  $s_{F_n}$ ,  $h_F$  und  $\rho_{F_n}$  abgeschätzt werden. Da ein Vergleich der einzelnen Größen miteinander nicht aussagekräftig ist, wird jeweils das Produkt  $Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}$  aus Form- und Spannungskorrekturfaktor (siehe Gleichungen (5) und (6)) miteinander verglichen. Es werden insgesamt 128 Zahnradgeometrien (siehe Tabelle 5) untersucht. Variiert werden dabei der Schrägungswinkel  $\beta$  (von  $10^\circ$  bis  $40^\circ$ ), die Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha}$  (von 1,0 bis 2,5) und die Zähnezahlen ( $z_1/z_2 = 20/20$ ;  $35/35$ ). Die Breite  $b$ , aus der sich die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_{\beta}$  berechnet, hat keinen Einfluss auf die Zahnfußgeometrie und kann daher beliebig gewählt werden. Der Stirnmodul  $m_t$ , der Eingriffswinkel  $\alpha_t$  im Stirnschnitt und die Profilver-



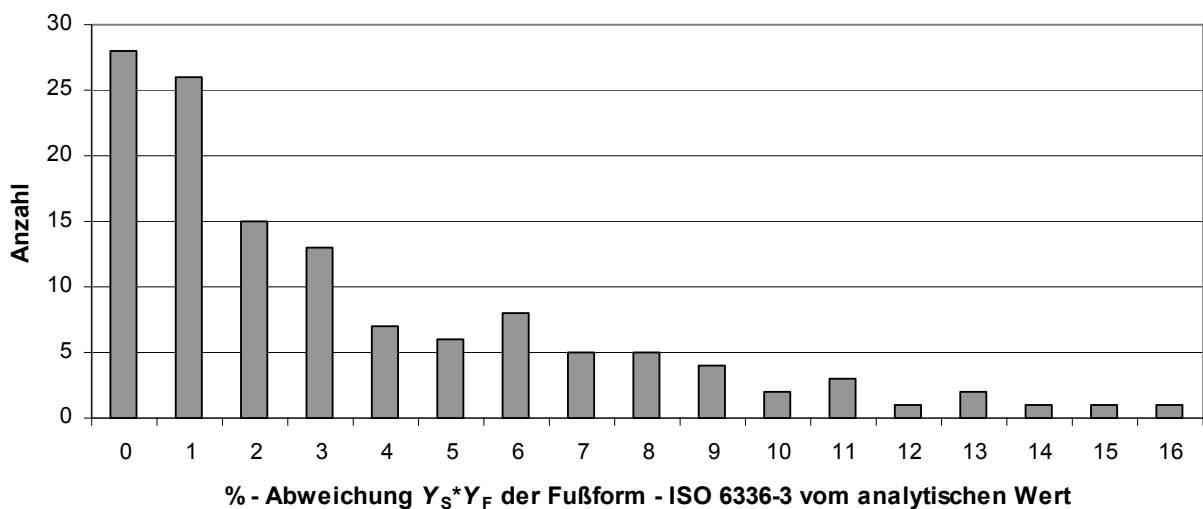
schiebungsfaktoren  $x_i$  bleiben konstant. Das Werkzeug im Normalschnitt mit Modul  $m_{Pn0}$ , Kopfhöhe  $h_{aPn0}$  und Profilwinkel  $\alpha_{Pn0}$  bestimmt sich aus den Vorgaben im Stirnschnitt.

Normalmodul	$m_t$	1 mm
Stirneingriffswinkel	$\alpha_t$	20°
Zähnezahl	$z_1 / z_2$	20 / 20 ; 35 / 35
Schrägungswinkel	$\beta$	10° / 20° / 30° / 40°
Profilverschiebungsfaktor	$x_1 / x_2$	0 / 0
Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$	1,0 / 1,1 / ... / 2,5
Wkz.-Kopfrundungsradius	$\rho_{aPn0}$	0,2 mm
Zahnkopfhöhenspiel	$c$	0,2 mm

**Tabelle 5:** Zahnradgeometrien der Massenrechnung zur Beurteilung der Qualität der Zahnfußgeometrieberechnung mit Hilfe der Ersatzgeradverzahnung

Der Vergleich zeigt, dass die mit der Ersatzgeradverzahnung bestimmten Fußgeometrieparameter den nach Gleichung (41) bis (43) analytisch genau berechneten Werten sehr nahe kommen (siehe Abbildung 10). Im Durchschnitt weicht das Produkt  $Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}$  um nur 3,5% ab. Die größte Abweichung von 16% ergibt sich bei  $\beta = 40^\circ$   $\varepsilon_\alpha = 1,0$  und  $z_1/z_2 = 35/35$ .

Die in Abschnitt 3.2 festgestellte unzureichende Erfassung des Schrägungswinkels  $\beta$  bei der Bestimmung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  in der ISO 6336-3 geht nicht aus einer ungenauen Ermittlung der Zahnfußgeometrie mittels der Ersatzgeradverzahnung hervor.



**Abbildung 10:** Verteilung der an 128 Verzahnungen berechneten %-Abweichung von  $Y_{Sa} \cdot Y_{Fa}$  (Ersatzgeradverzahnung nach ISO 6336-3 ↔ analytisch berechnete Werte)

#### 4.1.2 Profilüberdeckung $\varepsilon_{an}$ und der äußere Einzeleingriffspunkt (AEP)

Neben den oben behandelten Geometriegrößen wird in der ISO 6336-3 auch die Profilüberdeckung  $\varepsilon_{an}$  der Ersatzgeradverzahnung berechnet.

$$\varepsilon_{an} = \frac{\varepsilon_a}{\cos^2 \beta_b} \quad (44)$$

Diese Gleichung kann mit der Teilüberdeckung  $\varepsilon_{1n}$  hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \frac{z_n}{2\pi} \cdot \left[ \sqrt{\frac{d_{an}^2}{d_{bn}^2} - 1} - \tan \alpha_{wn} \right] = \\ &= \frac{z}{2\pi \cdot \cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \cdot \left[ \cos \beta \cdot \sqrt{\frac{d_a^2}{d_b^2} - 1} \cdot \cos \beta - \tan \alpha_w \cdot \cos \beta \right] = \frac{\varepsilon_1}{\cos^2 \beta_b} \quad (45) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{d_{an}^2}{d_{bn}^2} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha_{an}} - 1 = \tan^2 \alpha_{an} = \tan^2 \alpha_a \cdot \cos^2 \beta = \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha_a} - 1 \right) \cdot \cos^2 \beta = \left( \frac{d_a^2}{d_b^2} - 1 \right) \cdot \cos^2 \beta \quad (46)$$

Die Profilüberdeckung  $\varepsilon_a$  wird im Stirnschnitt ermittelt und anschließend in die Ersatzgeradverzahnung umgerechnet.

Bei der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung nach ISO 6336-3 wird der Zahn am äußeren Einzeleingriffspunkt (AEP) mit der Normalkraft belastet. Der äußere Einzeleingriffspunkt (AEP) in einer Verzahnung ist als der Punkt auf der Flanke definiert, bei dem auch der Nachbarzahn in Kontakt kommt. Die Ersatzgeradverzahnung wälzt im Stirnschnitt ab, obwohl deren Geometrie im Normalschnitt erzeugt wird (siehe Abbildung 6). Der Ort des AEP auf der Zahnflanke wird folglich im Stirnschnitt bestimmt und ist somit unabhängig vom Schrägungswinkel  $\beta$ . Daher muss der AEP ebenso wie die Profilüberdeckung  $\varepsilon_a$  vom Stirnschnitt in die Ersatzgeradverzahnung im Normalschnitt umgerechnet werden. Die Teilprofilüberdeckung  $\varepsilon_{a-AEP}$  des AEPs, d.h. der auf die Eingriffsteilung  $p_{et}$  bezogene Abstand des AEPs vom Kopfeingriffspunkt, berechnet sich im Stirnschnitt zu

$$\varepsilon_{a-AEP} = \frac{g_{a-AEP}}{p_{et}} = \varepsilon_a - 1 \quad (47)$$

Bei der Umrechnung in den Normalschnitt muss die relative Lage des *AEPs* auf der Eingriffsstrecke, d.h. die relative Lage zum Eingriffsbeginn und –ende, gleich bleiben. Dies erreicht man, indem man die Teilprofilüberdeckung  $\varepsilon_{a-AEP}$  mit dem gleichen Faktor streckt wie die Profilüberdeckung  $\varepsilon_a$ , d.h. durch  $\cos^2(\beta)$  teilt.

$$\varepsilon_{a-AEP,n} = \frac{\varepsilon_{a-AEP}}{\cos^2 \beta_b} = \frac{\varepsilon_a - 1}{\cos^2 \beta_b} = \varepsilon_{an} - \frac{1}{\cos^2 \beta_b} \quad (48)$$

In der *ISO 6336-3* wird der Durchmesser  $d_{en}$  des *AEPs* über die folgende Gleichung bestimmt.

$$d_{en} = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_{an}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_n}{|z|} \cdot (\varepsilon_{an} - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} \quad (49)$$

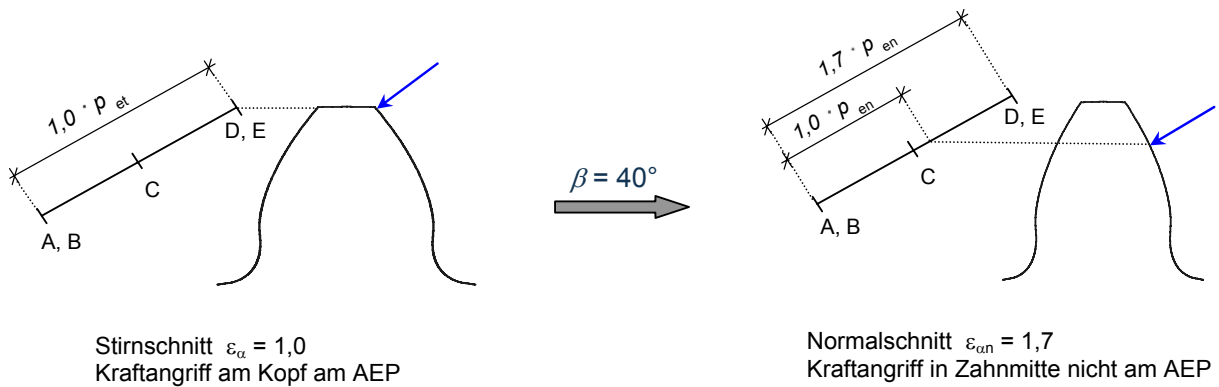
Dabei geschieht im Term  $(\varepsilon_{an} - 1)$  ein Fehler bei der Umrechnung des *AEPs* in die Ersatzgeradzahnung. Es entsteht eine Abhängigkeit des Ortes des *AEPs* vom Schrägungswinkel  $\beta$ . Richtig müsste die Gleichung lauten:

$$d_{en}^* = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_{an}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_n}{|z|} \cdot \left(\varepsilon_{an} - \frac{1}{\cos^2 \beta}\right) \right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} \quad (50)$$

Im Term  $\left(\varepsilon_{an} - \frac{1}{\cos^2 \beta}\right)$ , der jetzt proportional zu  $\frac{1}{\cos^2 \beta}$  ist, wird nun die Teilprofilüberdeckung  $\varepsilon_{a-AEP}$  korrekt in die Ersatzgeradzahnung umgerechnet (siehe Gleichung (48)) und den übrigen unter der Wurzel auftauchenden Geometrie Größen der Ersatzgeradzahnung ( $d_{an}$ ,  $d_{bn}$ ) angepasst, die auch eine starke Abhängigkeit von  $\frac{1}{\cos^2 \beta}$  aufweisen.

Der aufgezeigte Fehler bei der Bestimmung des Durchmessers  $d_{en}$  in der *ISO 6336-3* in Gleichung (49) wird umso größer, je größer auch der Schrägungswinkel  $\beta$  wird. Beispielhaft wird eine Verzahnung mit einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha = 1,0$  und einem Schrägungswinkel von  $\beta = 40^\circ$  betrachtet. Die Punkte A und B, sowie D und E auf der Eingriffsstrecke fallen bei dieser Verzahnung aufeinander (siehe Abbildung 11). Die Kraft F greift beim äußeren Ein-

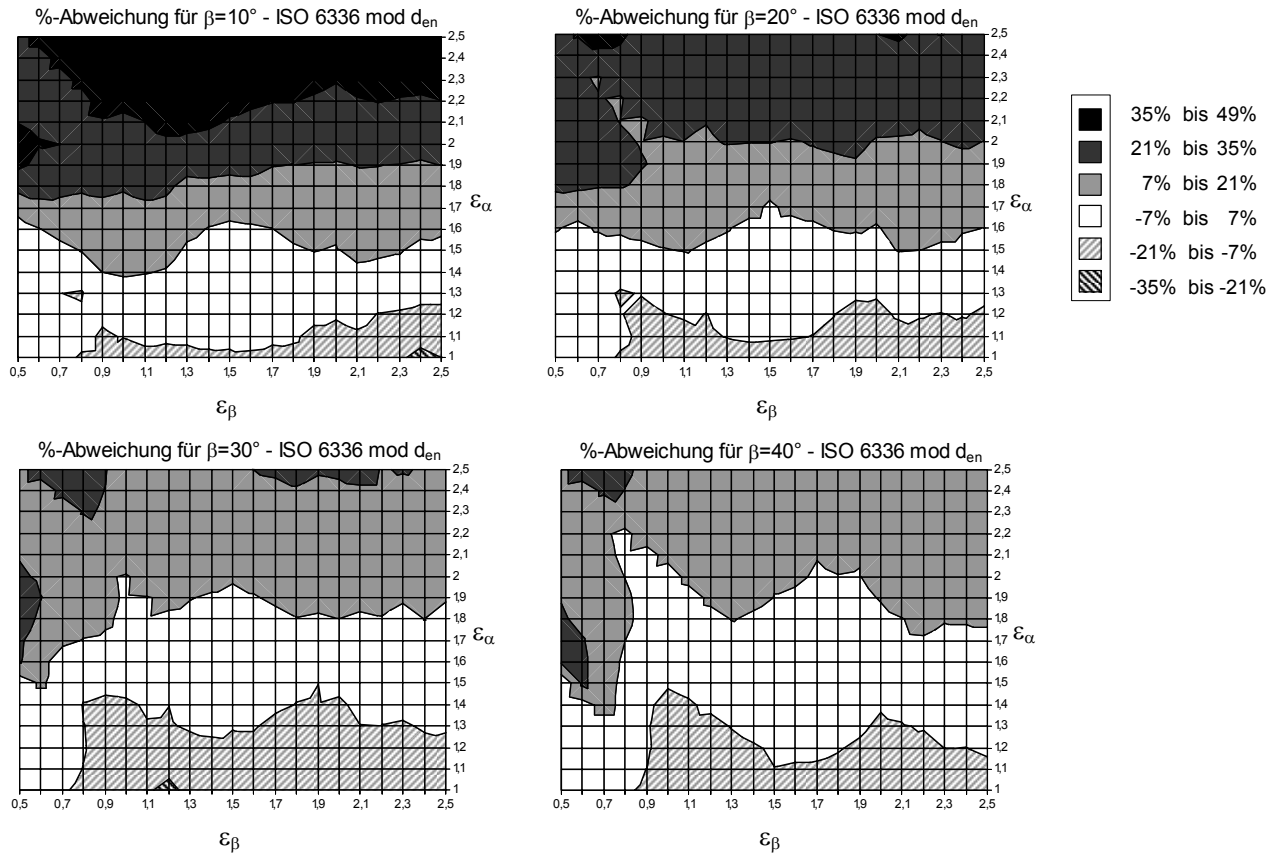
zeleingriffspunkt am Zahnkopf an. Beim Übergang in die Ersatzgeradverzahnung bleibt der Angriffspunkt der Kraft nach ISO 6336-3 nicht am Zahnkopf, sondern wandert nach unten in Richtung Mitte der Eingriffsstrecke.



**Abbildung 11:** Eingriffstrecken im Stirnschnitt und in der Ersatzgeradverzahnung mit Angriffspunkt der Kraft am berechneten AEP (nach ISO 6336-3)

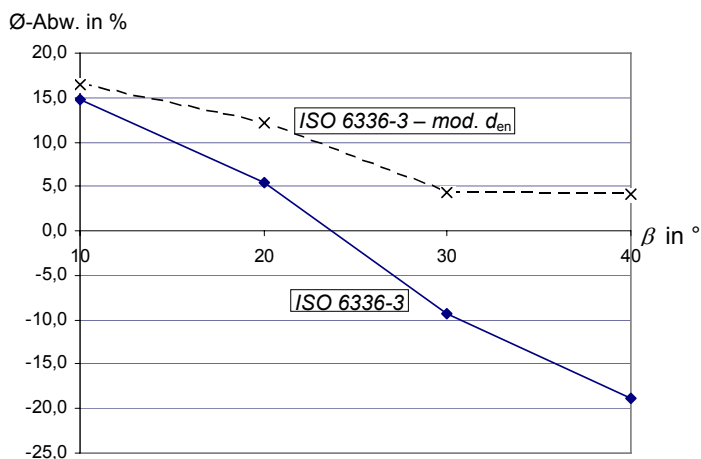
Der Hebelarm  $h_F$  und somit auch das Nennmoment und die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  werden zu gering berechnet. Dies erklärt auch die immer größer werdenden Ungenauigkeiten der ISO 6336-3 in der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  bei steigendem Schrägungswinkel.

Modifiziert man die ISO 6336-3, indem man die korrigierte Gleichung (50) für den Durchmesser  $d_{en}^*$  des AEPs verwendet, wird der Schrägungswinkel  $\beta$  in der Norm deutlich besser erfasst. Eine analog zu Abschnitt 3.2 durchgeführte Parameterstudie bestätigt dies (siehe Abbildung 12).



**Abbildung 12:** Prozentuale Abweichung der beim Durchmesser  $d_{en}$  modifizierten ISO 6336-3 von RIKOR bei der Berechnung der Zahnfußspannung in Abhängigkeit von  $\epsilon_\alpha$ ,  $\epsilon_\beta$  und  $\beta$

Der Schrägungswinkel  $\beta$  wird jetzt nahezu korrekt erfasst. Der Mittelwert der prozentualen Abweichung der Zahnfußspannung  $\sigma_{F0}$  im Vergleich zu RIKOR schwankt über  $\beta$  nur noch von 4%...16% und nicht mehr von -19%...15% wie bei der ISO 6336-3 (siehe Abbildung 13). Die Ungenauigkeiten bei variierender Profilüberdeckung  $\epsilon_\alpha$  (vor allem bei kleinen Schrägungswinkeln  $\beta$ ) bestehen weiterhin und sind der Grund für die noch auftretenden Abweichungen.



**Abbildung 13:** Mittelwert der prozentualen Abweichung der Zahnfußspannung  $\sigma_{F0}$  nach ISO 6336-3 und nach ISO 6336-3 mod.  $d_{en}$  im Vergleich zu RIKOR über  $\beta$

## 4.2 Vorschlag zur Modifikation der ISO 6336-3

Der Vergleich der ISO 6336-3 mit dem Zahnradberechnungsprogramm *RIKOR* in Abschnitt 3.2 hat gezeigt, dass man mit der ISO 6336-3 die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von Standardverzahnungen mit kleinen Schrägungswinkeln  $\beta$  und Profilüberdeckungen von  $\varepsilon_\alpha \approx 1,0 \dots 1,8$  mit guter Genauigkeit berechnen kann. Auf Grund eines Fehlers bei der Berechnung des Durchmessers  $d_{en}$  des äußeren Einzeleingriffspunktes (siehe Abschnitt 4.1.2) ermittelt die ISO 6336-3 bei größeren Schrägungswinkeln  $\beta$  zu geringe Spannungen. Es besteht daher Anlass zur Verbesserung der ISO 6336-3. Der Modifikationsvorschlag von Schinagl (Abschnitt 3.3.1) erhöht den Rechenaufwand zur Bestimmung der Zahnfuß-Nennspannung erheblich. Otto (Abschnitt 3.3.2) modifiziert die ISO 6336-3 durch das Einführen eines Zusatzfaktors  $f_\varepsilon$  und einer geschickten Abänderung des Schrägenfaktors  $Y_\beta$ . Damit kompensiert er den Fehler, der bei der Bestimmung des Durchmessers des äußeren Einzeleingriffspunktes gemacht wird. Alle drei Verfahren arbeiten mit der relativ komplizierten und teilweise schwer nachvollziehbaren Umrechnung von einer Schrägverzahnung in eine virtuelle Ersatzgeradverzahnung.

In einem neuen Ansatz soll nun gezeigt werden, dass ohne Umrechnung in eine Ersatzgeradverzahnung eine deutlich einfachere, verständlichere und genauere Berechnung der Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  möglich ist. Dazu wird in Anlehnung an Abschnitt 4.1.1 das im Normalschnitt definierte Werkzeug in den Stirnschnitt umgerechnet, die Zahnfußgeometriegrößen analog zur Norm an der 30°-Tangente im Stirnschnitt bestimmt und in den Normalschnitt transformiert. Die Kalibrierung des Verfahrens erfolgt mit einem Korrekturfaktor, der sich über eine nachvollziehbare Gleichung mit den für eine Schrägverzahnung maßgeblichen Parametern  $\varepsilon_\alpha$  und  $\cos(\beta)$  berechnet.

### 4.2.1 Herleitung des modifizierten Verfahrens

Wegen der Berechnung der Zahnfußgeometrie im Stirnschnitt wird in einem ersten Schritt das Werkzeug in diesen umgerechnet.

$$m_t = m_{pt} = \frac{m_{pn}}{\cos \beta} \quad (51)$$

$$\alpha_t = \alpha_{pt0} = \arctan\left(\frac{\tan \alpha_{pn0}}{\cos \beta}\right) \quad (52)$$

$$h_{apt0} = h_{apn0} \quad (53)$$

$$\rho_{apt0} = \rho_{apn0} \quad (54)$$

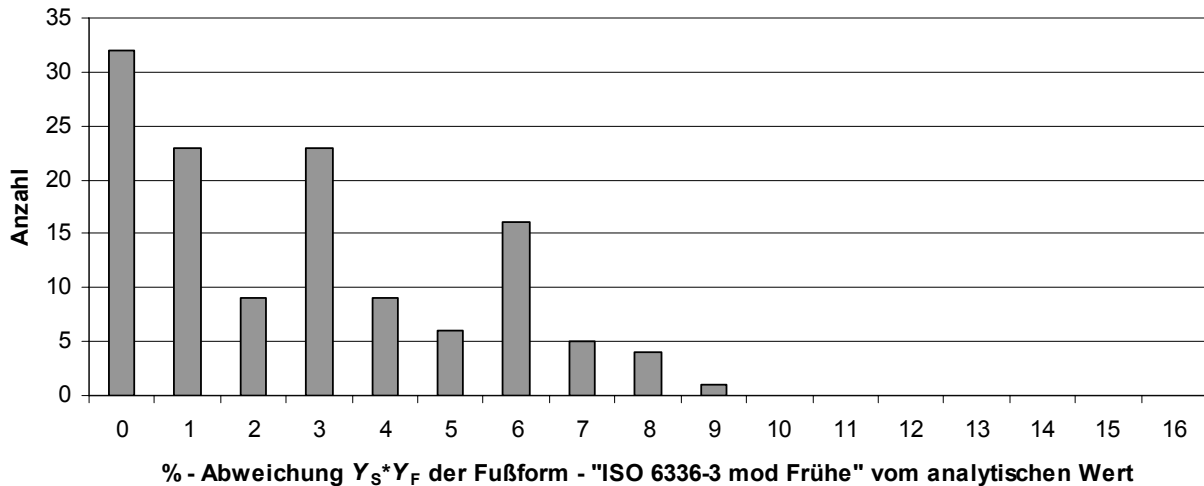
Um das Berechnungsverfahren möglichst einfach zu halten, werden in Gleichung (54) die Kopfrundungen im Normal- und Stirnschnitt als gleich groß angenommen, anstatt sie nach Gleichung (25) genau zu berechnen. Eine weitere Vereinfachung wird bei der Bestimmung der Zahnfußgeometrie vorgenommen. Anstatt der aufwendigen Umrechnung der 30°-Tangente im Normalschnitt in die Tangente im Stirnschnitt, werden die Zahnfußdickensehne  $s_{Ft}$ , der Hebelarm  $h_F$  und der Zahnfußkrümmungsradius  $\rho_{Ft}$  an der 30°-Tangente im Stirnschnitt bestimmt. Die Gleichungen der ISO 6336-3 zur Berechnung der Zahnfußgeometrie von Geradverzahnungen können beibehalten werden. Mit den Gleichungen (55) bis (57) werden die Stirnschnitt-Zahnfußparameter in den Normalschnitt transformiert. Dabei wird auf eine Unterscheidung zwischen  $\beta$  und  $\beta_b$  auf Grund des geringen Einflusses verzichtet. Es wird nur mit dem Schrägungswinkel  $\beta$  gerechnet. Die Zahnfußkrümmungsradien ( $\rho_{Fn}$ ,  $\rho_{Ft}$ ) werden in Gleichung (56) wieder vereinfachend in Normal- und Stirnschnitt als gleich groß angenommen. Diese Annahme ist zu der oben gemachten Annahme der gleich großen Werkzeug-Kopfkreisradien negativ korrelierend und verringert somit den gemachten Fehler.

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = \frac{s_{Ft}}{m_t} \quad (55)$$

$$\frac{\rho_{Fn}}{m_n} = \frac{\rho_{Ft}}{m_t \cdot \cos \beta} \quad (56)$$

$$\frac{h_F}{m_n} = \frac{h_F}{m_t \cdot \cos \beta} \quad (57)$$

Zur Beurteilung der Qualität des Modifikationsvorschlages bei der Bestimmung der Zahnfußgeometriegrößen im Normalschnitt wird analog zu Abschnitt 4.1.1 das Produkt  $Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}$  bei Kraftangriff am Kopf von 128 Referenzverzahnungen berechnet. Die Gegenüberstellung mit den analytisch genau berechneten Werten zeigt, dass dieses Verfahren bessere Ergebnisse liefert als die in Abschnitt 4.1.1 untersuchte Ersatzgeradverzahnung (siehe Abbildung 14). Im Durchschnitt weicht das Produkt  $Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}$  um nur 2,9% ab. Die größte Abweichung von 8,8% ergibt sich bei  $\beta = 40^\circ$ ,  $\varepsilon_\alpha = 2,5$  und  $z_1/z_2 = 20/20$ .



**Abbildung 14:** Verteilung der an 128 Verzahnungen berechneten %-Abweichung von  $Y_{Sa} \cdot Y_{Fa}$  (modifiziertes Verfahren *ISO 6336-3 – mod. Frühe* ↔ analytisch berechnete Werte)

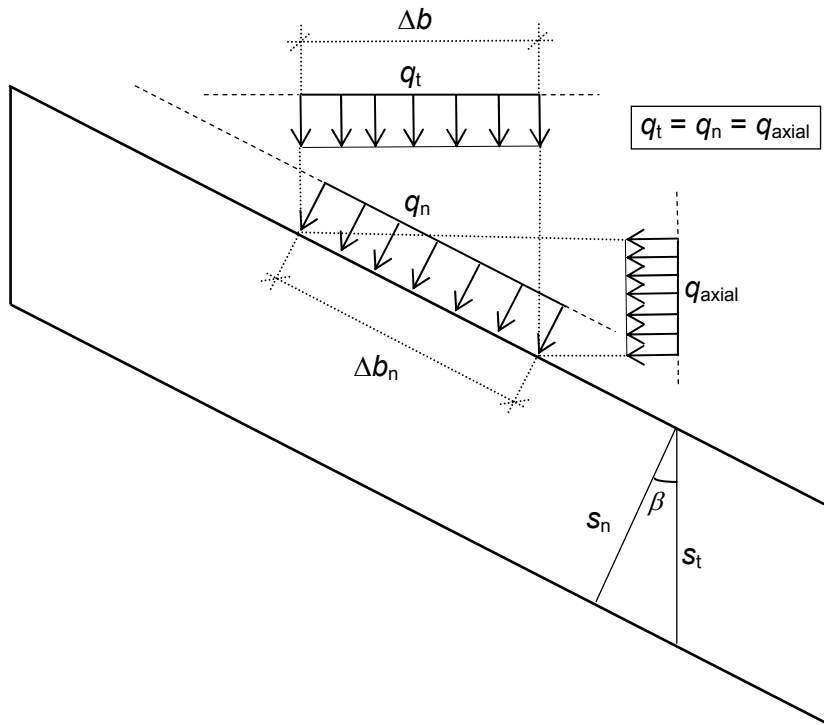
Ein weiterer Vorteil der Modifikation ist, dass der Durchmesser des äußeren Einzeleingriffspunkts nicht in die Ersatzgeradverzahnung umgerechnet werden muss, sondern im Stirnschnitt bestimmt wird.

$$d_e = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \alpha_t \cdot (\varepsilon_\alpha - 1)}{|z|} \right]^2 + \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} \quad (58)$$

Dadurch wird der in Abschnitt 4.1.2 festgestellte Fehler in der *ISO 6336-3* vermieden.

Da die Linienlast auf der Zahnflanke  $q_t$  im Stirnschnitt bezogen auf die Breite  $\Delta b$  gleich der Linienlast  $q_n$  im Normalschnitt bezogen auf die Normalschnittbreite  $\Delta b_n$  ist (siehe Abbildung 15), bleibt die Berechnung des Formfaktors  $Y_F$  und des Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  im Vergleich zur *ISO 6336-3* unverändert. Es wird die zuvor berechnete Zahnfußgeometrie im Normalschnitt verwendet. Lediglich  $\cos(\alpha_n)$  im Nenner von Gleichung (5) zur Berechnung des Faktors  $Y_F$  muss in Gleichung (59) zu  $\cos(\alpha_t)$  korrigiert werden, da die Eingriffsverhältnisse (und somit auch der Hebelarm  $h_F$ ) sich im Stirnschnitt bestimmen.





**Abbildung 15:** Draufsicht: Linienlast auf der Zahnflanke im Stirnschnitt  $q_t$  und im Normalschnitt  $q_n$

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fe}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fe}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_t} \quad (59)$$

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \frac{s_{Fn}}{h_{Fe}}\right) \cdot \left(\frac{s_{Fn}}{2 \cdot \rho_{Fn}}\right)^{\frac{1}{1,21+2,3 \cdot \frac{h_{Fe}}{s_{Fn}}}} \quad (60)$$

Der Schrägenfaktor  $Y_\beta$  der ISO 6336-3 wird nicht übernommen. Er wird durch den Lastverteilungsfaktor  $Y_\alpha$  ersetzt, mit dessen Hilfe das Verfahren kalibriert wird. Bei Schrägverzahnungen ist zu berücksichtigen, dass die Breite der Berührlinie normalerweise abhängig von der jeweiligen Eingriffsstellung ist. Sie schwankt dabei um die mittlere Berührlinienbreite  $b_m$ , die sich mit der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und der Zahnbreite  $b$  berechnen lässt.

$$b_m = b \cdot \varepsilon_\alpha \quad (61)$$

Bei Geradverzahnungen ist die Berührlinienlänge im Einzeleingriff gleich der Zahnbreite  $b$ . Da die Linienlast auf der Zahnflanke und somit auch die Zahnfußspannung abhängig von der Berührlinienbreite sind, muss die mittlere Berührlinienbreite  $b_m$  bei Schrägverzahnungen im Lastverteilungsfaktor  $Y_\alpha$  berücksichtigt werden. Zudem verläuft bei Schrägverzahnungen die Berührlinie schräg über die Zahnflanke. Die Annahme einer wie bei Geradverzahnungen auf Höhe des  $AEP$ s verlaufenden maßgeblichen Berührlinie muss daher korrigiert werden. Die maximale Zahnfußspannung tritt am Fuß an der Breitenkoordinate auf, an der die Berührlinie am Zahnkopf ausläuft bzw. in dessen Nähe. Der Hebelarm ist somit größer als am  $AEP$ . Der negative Einfluss des größeren Hebelarms wird durch das Mittragen der Nachbarbereiche, die unterhalb des Zahnkopfes oder gar nicht belastet werden, abgeschwächt. Es zeigt sich, dass all diese Effekte der schrägen Berührlinie mit der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  gut abgebildet werden können. Durch einen Abgleich von Berechnungen mit dem Zahnradberechnungsprogramm *RIKOR* bestimmt sich der Berührlinieneinfluss-Faktor  $Y_{\Delta \text{Berührlinie}}$  zu

$$Y_{\Delta \text{Berührlinie}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\alpha}} \quad (62)$$

Bei geradverzahnten Hochverzahnungen ( $\varepsilon_\alpha \geq 2,0$ ) existiert kein Einzeleingriff, da immer mindestens zwei Zähne die Last übertragen. Dadurch reduziert sich die Zahnfußspannung. Dieser Effekt kann ebenfalls im Lastverteilungsfaktor  $Y_\alpha$  berücksichtigt werden. Den Vorschlag von Schinagl [85] und Otto [73] folgend wird die Zahnfußspannung auf 80% reduziert.

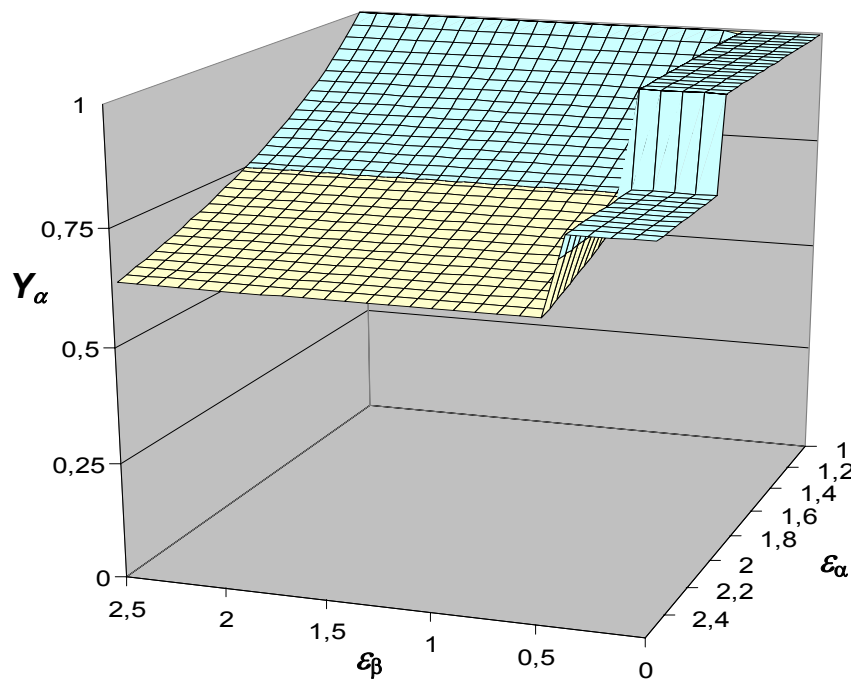
$$Y_{\Delta \text{Gerad-Hoch}} = 0,8 \quad (63)$$

Zusammengefasst lässt sich der Lastverteilungsfaktor  $Y_\alpha$  nach Gleichung (64) berechnen.

$$Y_\alpha = \begin{cases} 1,0 & ; \quad \varepsilon_\beta < 0,5 ; \quad \varepsilon_\alpha < 2,0 \\ Y_{\Delta \text{Gerad-Hoch}} = 0,8 & ; \quad \varepsilon_\beta < 0,5 ; \quad \varepsilon_\alpha \geq 2,0 \\ Y_{\Delta \text{Berührlinie}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\alpha}} & ; \quad \varepsilon_\beta \geq 0,5 \end{cases} \quad (64)$$

Bei kleinen Sprungüberdeckungen  $\varepsilon_{\beta}$  schwankt die Berührlinienbreite stark in Abhängigkeit von der Eingriffsstellung. Die Reduzierung der Zahnfußspannung um den Berührlinieneinfluss-Faktor  $Y_{\Delta \text{ Berührlinie}}$  ist mit Unsicherheiten behaftet. Auf der sicheren Seite liegend werden daher Schrägverzahnungen mit einer Sprungüberdeckung von  $\varepsilon_{\beta} < 0,5$ , die in der Praxis eher unüblich sind, im Lastverteilungsfaktor  $Y_{\alpha}$  als Geradverzahnung behandelt.

Der Verlauf des Lastverteilungsfaktor  $Y_{\alpha}$  ist in Abbildung 16 dargestellt.



**Abbildung 16:** Lastverteilungsfaktor  $Y_{\alpha}$

Die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  berechnet sich nach dem neuen Verfahren zu

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_{\alpha} \quad (65)$$

Im Anhang ist das modifizierte Verfahren „ISO 6336-3 – mod. Frühe“ vollständig abgedruckt.

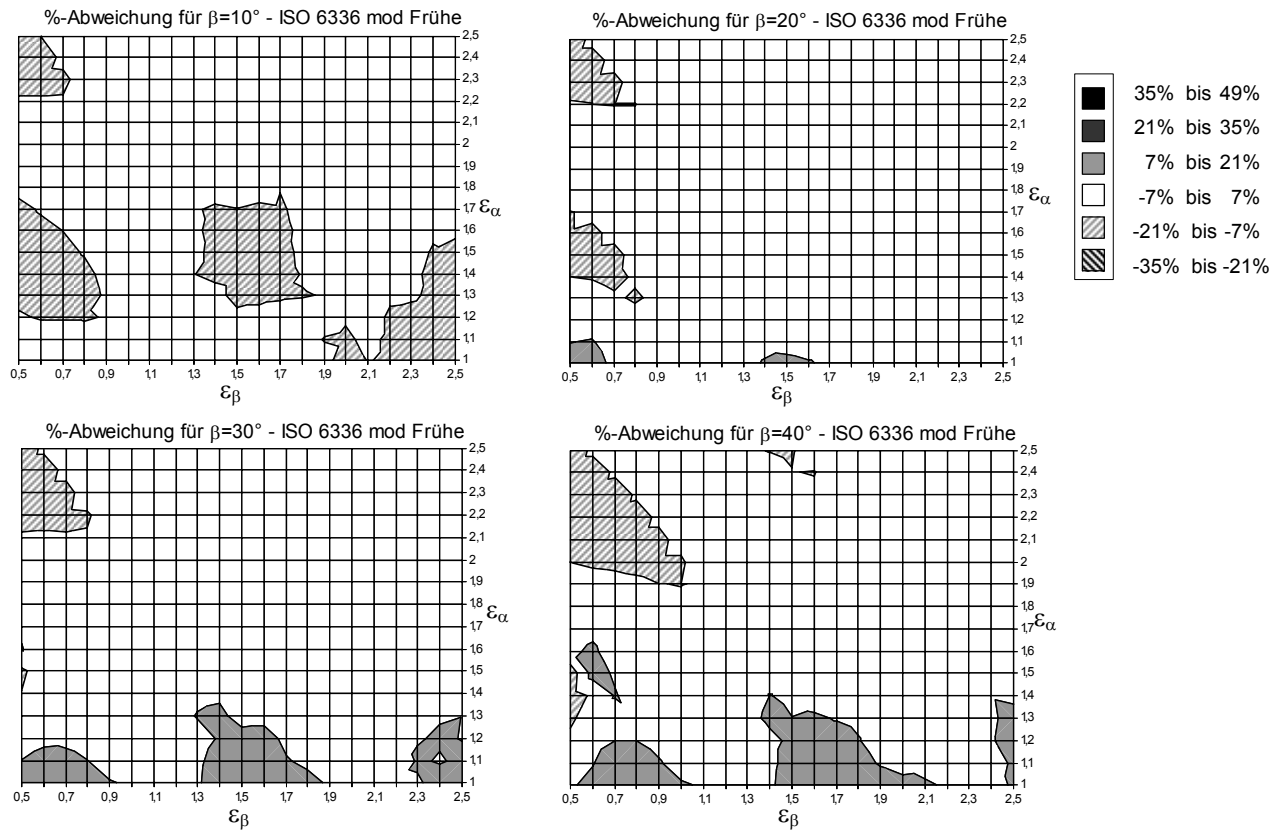
#### 4.2.2 Zusammenfassende Beurteilung des modifizierten Verfahrens „ISO 6336-3 – mod. Frühe“ im Vergleich mit den vorhandenen Verfahren

Die eben vorgestellte Modifikation der ISO 6336-3 hat mehrere Vorteile.

Das Verfahren ist einfacher, da sich der Rechenaufwand merkbar reduziert. Durch den Verzicht auf die Ersatzgeradverzahnung entfallen sieben Gleichungen, mit denen die Geometriegrößen der Ersatzgeradverzahnung berechnet werden. Die Umrechnung des Werkzeugs in den Stirnschnitt (Gleichungen (51) bis (54)), sowie die Rückumrechnung der Zahnfußgeometrie in den Normalschnitt (Gleichungen (55) bis (57)) kann ohne weiteres in die bestehenden Gleichungen integriert werden, so dass keine zusätzlichen Gleichungen erforderlich sind. Eine Unterscheidung von Schräg- und Geradverzahnungen findet nur im Lastverteilungsfaktor  $Y_\alpha$  statt.

Das Verfahren ist verständlicher. Es verzichtet auf die schwer nachzuvollziehende virtuelle Ersatzgeradverzahnung mit ihren z.B. nicht ganzzahligen Zähnezahlen. Stattdessen wird die Zahnfußgeometrie in dem Querschnitt berechnet, in dem sie erzeugt wird (Stirnschnitt), und die Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  wird in dem Querschnitt berechnet, in dem sie entsteht (Normalschnitt). Der Lastverteilungsfaktors  $Y_\alpha$ , an dem das Verfahren kalibriert wird, lässt sich anschaulich begründen.

Das Verfahren ist genauer. In Abbildung 17 sind analog zu Abschnitt 3.2 und 4.1.2 die Diagramme dargestellt, die in einer Parameterstudie von Verzahnungen mit einer Zähnezahl von  $z_1/z_2 = 35/35$  ermittelt wurden. Sie geben die Abweichung der nach dem modifizierten Verfahren bestimmten Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von den mit *RIKOR* ermittelten Ergebnissen an. Die Abweichungen sind über das gesamte Parameterfeld sehr gering. Bei Verzahnungen mit einer Zähnezahl von  $z_1/z_2 = 25/25$  ergibt sich ein ähnliches Bild.



**Abbildung 17:** Prozentuale Abweichung des modifizierten Verfahrens ISO 6336-3 – mod. Frühe von RIKOR bei der Berechnung der Zahnfußspannung in Abhängigkeit von  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  und  $\beta$

Im Anhang sind die verschiedenen in diesem Bericht vorgestellten Verfahren im Vergleich mit dem Zahnradberechnungsprogramm RIKOR zusammenfassend gegenübergestellt.

Die Ergebnisse der folgenden vier Verfahren sind dort abgebildet:

- ISO 6336-3
- ISO 6336-3 – modifizierte Ermittlung von  $d_{en}^*$  (siehe Abschnitt 4.1.2)
- ISO 6336-3 – mod. Otto (siehe Abschnitt 3.3.2)
- ISO 6336-3 – mod. Frühe (siehe Abschnitt 4.2.1)

Abbildung 48 und Abbildung 49 zeigen die prozentuale Abweichung der mit den einzelnen analytischen Verfahren ermittelten Zahnfuß-Nennspannung  $\sigma_{F0}$  von den Rechenergebnissen mit RIKOR I in Form von den bekannten Flächendiagrammen.

In Abbildung 50 ff sind die Ergebnisse einer statistischen Auswertung dargestellt. Man kann in diesen Diagrammen den Mittelwert und die Standardabweichung der prozentualen Abweichung in Abhängigkeit von den Parametern  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  und  $\beta$  ablesen.

Folgende Erkenntnisse können aus den Diagrammen gewonnen werden:

Die *ISO 6336-3* erfasst die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  und den Schrägungswinkel  $\beta$  nur unzureichend. Für größere Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  liegt sie auf der sicheren Seite, für große Schrägungswinkel  $\beta$  liegt sie teilweise stark auf der unsicheren Seite. Die Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$  wird im Mittel gut erfasst, jedoch streuen die Werte sehr stark. Insgesamt gesehen ist die Standardabweichung, d.h. die Streuung der Ergebnisse, mit 10-20% über alle Parameter relativ hoch.

Modifiziert man bei der *ISO 6336-3* die Ermittlung des Durchmessers  $d_{en}^*$  des AEPs (siehe Gleichung (50)), wird der Einfluss des Schrägungswinkels  $\beta$  deutlich besser erfasst. Die ungenaue Berücksichtigung der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$ , die bei großen Profilüberdeckungen zu tendenziell zu großen Zahnfußspannungen führt, bleibt jedoch bestehen. Die Ergebnisse streuen mit dieser Modifizierung geringer (Standardabweichung von 4-18%).

Das Verfahren „*ISO 6336-3 – mod. Otto*“ liefert deutlich bessere Rechenergebnisse. Bei größeren Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  liegt dieses Verfahren leicht auf der sicheren Seite, ebenso wie im Bereich von kleinen Sprungüberdeckungen ( $\varepsilon_\beta < 1$ ). Die Streuung ist mit einer Standardabweichung von 4-10% gering.

Das im Abschnitt 4.2.1 vorgestellte Verfahren „*ISO 6336-3 – mod. Frühe*“ liefert die besten Rechenergebnisse. Die Einflüsse der Parameter  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  und  $\beta$  werden im Mittel sehr gut erfasst (Abweichungen von maximal 4%). Die Standardabweichung schwankt zwischen 3-7%.

### 4.3 Erweiterung des modifizierten Verfahrens auf LowLoss-Verzahnungen

LowLoss-Verzahnungen weisen – wie ihr Name schon aussagt – geringe Verluste auf und haben einen hohen Wirkungsgrad. Lastabhängige Verzahnungsverluste können mit ihnen um bis zu 70% reduziert werden [106]. In Zeiten zunehmender Ressourcenknappheit werden sie in Zukunft vermehrt zum Einsatz kommen.

LowLoss-Verzahnungen besitzen einige geometrische Besonderheiten. So zeichnen sie sich neben einem großen Eingriffswinkel  $\alpha_n > 20^\circ$  durch eine geringe Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha \leq 1,0$  aus. Sie haben folglich eine geringe Zahnhöhe. Da die Zähne gedrungen und steifer als bei üblichen Verzahnungen sind, haben LowLoss-Verzahnungen ein sich von Standardverzahnungen unterscheidendes Tragverhalten. Der Einfluss dieses Tragverhaltens auf die Zahnfußtragfähigkeit wird nachfolgend in Bauteilversuchen und *FEM*-Berechnungen genauer untersucht. Die Ergebnisse werden anschließend in das in Abschnitt 4.2 vorgeschlagene modifizierte Rechenverfahren implementiert.

#### 4.3.1 Untersuchung der Zahnfußtragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen in Pulsatorversuchen

In Pulsatorversuchen wird die Zahnfußtragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen in Abhängigkeit des Eingriffswinkels  $\alpha_t$  und des Hebelarms  $h_F$  des Kraftangriffspunktes genauer untersucht.

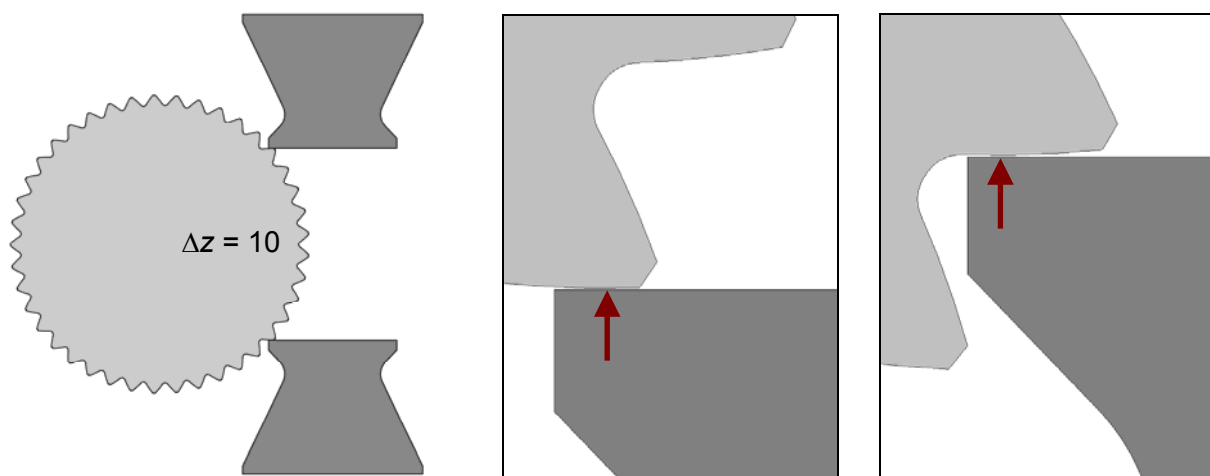
##### 4.3.1.1 Prüfprogramm und Versuchsverzahnungen

In einem Pulsatorprüfstand können nur Geradverzahnungen sinnvoll getestet werden. Die Einspannung von Schrägverzahnungen ist auf Grund des bei ihnen auftretenden Kippmoments nicht einfach möglich. Für die Untersuchungen am Pulsator werden geradverzahnte Zahnräder gefertigt, die unterschiedliche Eingriffswinkel ( $\alpha_t = 28,2^\circ ; 36^\circ ; 41^\circ$ ) aufweisen (siehe Tabelle 6).

Pulsator - Prüfverzahnungen		LL1	LL2	LL3
Zähnezahl	$z$	42	41	35
Modul	$m_t$ [mm]	1,81	1,81	2,3
Zahnbreite	$b$ [mm]	20	20	20
Teilkreisdurchmesser	$d$ [mm]	73,02	74,21	80,50
Kopfkreisdurchmesser	$d_a$ [mm]	76,4	74,5	86,0
Fußkreisdurchmesser	$d_f$ [mm]	70,65	69,41	77,58
Fußformkreisdurchmesser	$d_{Ff}$ [mm]	70,066	71,552	78,769
Eingriffswinkel	$\alpha$ [°]	36	41	28,2
Eingriffswinkel am Fußformkreis	$\alpha_{Ff}$ [°]	36,93	30,74	25,75
Schrägungswinkel	$\beta$ [°]	0	0	0
Profilverschiebungsfaktor	$x$ [-]	-0,7	-0,6	0,35
Wkz.-Kopfhöhe	$h_{aP0}$ [mm]	$0,75 \cdot m_t$	$0,7 \cdot m_t$	$0,95 \cdot m_t$
Wkz.-Kopfrundungsradius	$\rho_{aP0}$ [mm]	$0,75 \cdot m_t$	$0,385 \cdot m_t$	$0,46 \cdot m_t$

**Tabelle 6:** Verzahnungsparameter – Pulsatorräder

Die Zahnräder werden sowohl am Zahnkopf als auch in der Nähe des Zahnfußes in den Pulsator eingespannt. Dies wird durch eine Variation der sich zwischen den Pulsatorbacken befindenden Zähnezahl  $\Delta z$  erreicht. Um ein Kantentragen zu verhindern, wurde bei der Auslegung der Zahnräder darauf geachtet, dass die Krafteinleitung nicht zu dicht am Zahnkopf bzw. Zahnfuß liegt (siehe Abbildung 18).



**Abbildung 18:** Einspannung der Verzahnung LL2 in den Pulsator (links), sowie Details der Krafteinleitung am Kopf mit  $\Delta z = 10$  (mittig) und am Fuß mit  $\Delta z = 9$  (rechts)



#### 4.3.1.2 Dokumentation der Prüfräder

Die Prüfräder werden mit einem Wälzfräser hergestellt. Sie stammen von derselben Materialcharge (16MnCr5) und werden in einer gemeinsamen Ofenreise einsatzgehärtet und anschließend reinigungsgestrahlt. Dreh-, Stirn- und Kopfkanten werden nicht gefast, sondern lediglich mit Ölstein gebrochen, um ein gleichmäßiges Tragen über der gesamten Breite sicherzustellen. Auf eine Bearbeitung der Flanken (Zahnflankenschleifen) von im Pulsator getesteten Zahnradern kann verzichtet werden.

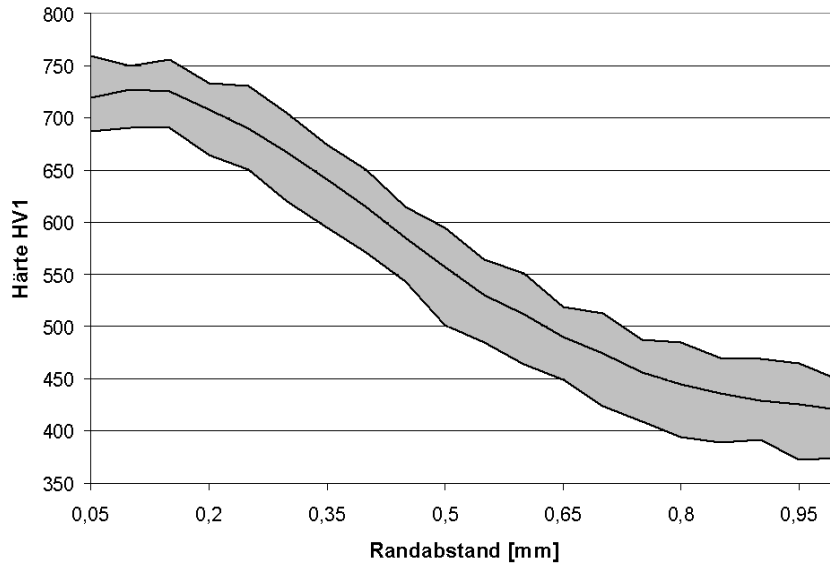
Vor den Versuchen werden die Flanken- und Profillinien in einem 3D-Verzahnungsmesszentrum der Firma Klingelberg vermessen. Die Verzahnungsqualität nach *DIN 3962* [24] liegt bei Qualität  $\leq 9$  und ist somit für die Pulsatorversuche ausreichend genau.

Werkstoffanalysen zeigen, dass die Werkstoffzusammensetzung in dem von *DIN EN 10084* [27] und der strengeren ZF-Werksnorm-Norm (ZF 6) vorgeschriebenen Toleranzbereich liegt. In Tabelle 7 werden der Mittelwert der gemessenen Werte und die geforderte Zusammensetzung des Werkstoffes gegenübergestellt.

Stahl 16 MnCr5	Chemische Zusammensetzung, Massenanteil in %							
	C	Si	S	P	Mn	Cr	Cu	Al
Toleranzbereich nach DIN EN 10084	0,14-0,19	<0,4	<0,035	<0,035		0,80-1,10		
Toleranzbereich nach ZF-Werksnorm (ZF6)	0,13-0,18	<0,4	0,20-0,35	<0,025	1,0-1,3	0,80-1,10	<0,03	0,02-0,05
Mittelwerte der gepulsten Verzahnungen nach Analyse	0,18	0,26	0,03	0,01	1,16	1,05	0,28	0,03

**Tabelle 7:** Durchschnittliche Werkstoffzusammensetzung der im Pulsator untersuchten Verzahnungen

Nach den Versuchen werden von den Verzahnungen stichprobenartig Schliffe angefertigt. An den Schliffen wird der Härtetiefenverlauf bestimmt. Die Härteverläufe der Verzahnungen streuen gering (siehe Abbildung 19). Bei den Messungen wird die Einsatzhärte von 550 HV1 in einer Tiefe von  $0,15 \dots 0,30 \cdot \text{Modul}$  erreicht. Die geforderte Oberflächenhärte von  $720 \pm 20$  HV1 wird annähernd erreicht, ebenso wie die geforderte Kernhärte von 315-405 HV1. Bei den Verzahnungen LL1 und LL2 besteht auf Grund der geringen Zahndicke am Kopf (ca. 0,6 mm) die Gefahr des Durchhärtens. Dies kann durch den sorgfältigen Härteprozess vermieden werden. Keiner der in den Schliffen untersuchten Zähne ist durchgehärtet.



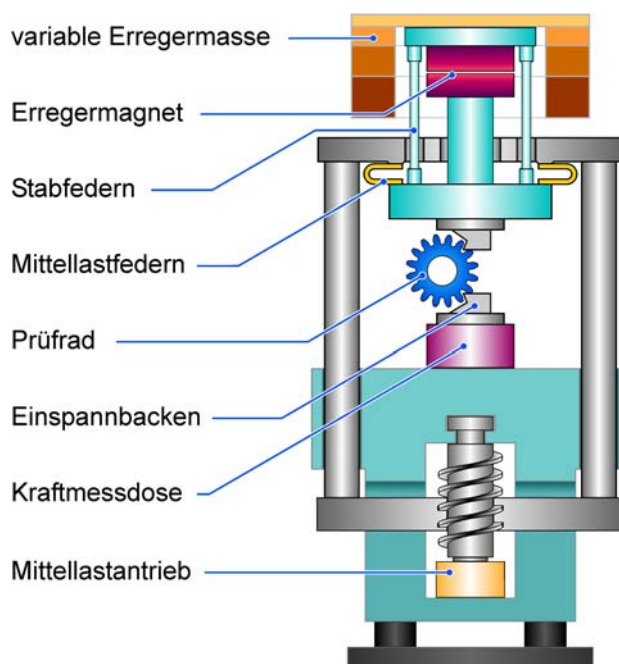
**Abbildung 19:** Streuband der 20 gemessenen Härtetiefenverläufe und gemittelter Härtetiefenverlauf im Zahnfuß der im Pulsator untersuchten Verzahnungen

Die beim Aufkohlungsprozess durch den in der Atmosphäre vorhandenen Sauerstoff entstehende Randschichtoxidation kann zu einer Reduzierung der Zahnfußtragfähigkeit führen. Anhand ungeätzter Schliffbilder wird die Randoxidationstiefe im Bereich des Zahnfußes nach der Wärmebehandlung bestimmt. Die gemessenen Randschichtoxidationstiefen von maximal 15  $\mu\text{m}$  sind klein. Beumelburg [3] konnte feststellen, dass bei einer geringen Randoxidationstiefe ( $< 20 \mu\text{m}$ ) keine Tragfähigkeitseinbußen im Vergleich zum randoxidationsfreien Bauteil zu erwarten sind.

Nach einer Ätzung der Schliffe mit Nital 1% (60 sec.) wird das Gefüge der Zahnräder im Lichtmikroskop untersucht. Alle Prüfvarianten weisen nach der Wärmebehandlung ein für 16MnCr5 typisches Gefüge auf. Während am Rand feinnadeliger Martensit mit geringen Restaustenitanteilen vorliegt, zeigt sich im Kern ein aus Bainit und Martensit bestehendes Gefüge (siehe Abbildung 64 im Anhang).

#### 4.3.1.3 Versuchsdurchführung

Die Versuche werden am Hochfrequenzpulsator (Abbildung 20) durchgeführt, der nach dem Resonanzprinzip arbeitet. Prüfmaschine und Prüfling bilden dabei ein Schwingsystem, das mit Hilfe einer elektromagnetisch erzeugten, pulsierenden Schwingkraft in sinusförmige Resonanzschwingung versetzt wird. Das Prüfzahnrad wird mit Hilfe einer mechanisch aufgebrachtene Vorspannung symmetrisch zwischen zwei planparallelen Pulsatorbacken eingespannt, die zahnähnlich ausgeformt sind. Es wird eine Mittelspannung eingestellt, die während des Versuchslaufs mittels PC ständig kontrolliert und nachgeregelt wird. Die Versuchsbedingungen werden kontinuierlich erfasst und aufgezeichnet. Bei den untersuchten Zahnradern fällt die Frequenz im Pulsator ( $f \approx 100$  Hz) bei leichten Anrissen um ca.  $\Delta f = 0,2$  Hz ab und stellt das Ausfallkriterium dar, da man auf einen kompletten Bruch des Zahnes, wie es sonst bei Pulsatorversuchen üblich ist, nicht warten kann. Beim Pulsen mit einer Einspannung in Nähe des Zahnfußes stellt sich, nachdem die Spannungsspitzen im Kräfteinleitungsbereich durch einen Anriss abgebaut sind, ein konstanter Zustand ein, in dem der Riss nicht mehr weiter wächst. Im normalen Betrieb eines LowLoss-Zahnrades würde der Riss nicht zum Stoppen kommen, da dort der Zahn nicht nur am Zahnfuß, sondern abwechselnd auch am Zahnkopf belastet wird. Die dabei aus dem Biegemoment entstehenden Biegezugspannungen führen dann relativ schnell zum kompletten Bruch des Zahnes und dem Ausfall der Verzahnung.

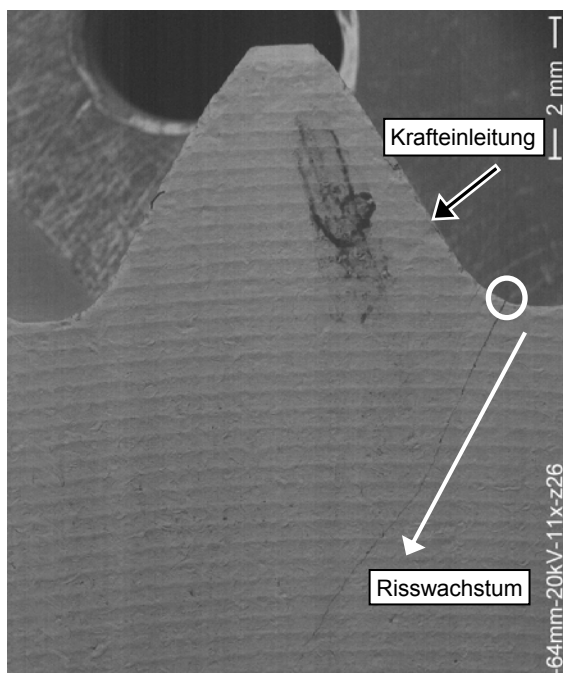


**Abbildung 20:** Hochfrequenzpulsator (Bild aus [73])

#### 4.3.1.4 Auswertung der Pulsatorversuche

##### Schadensbilder

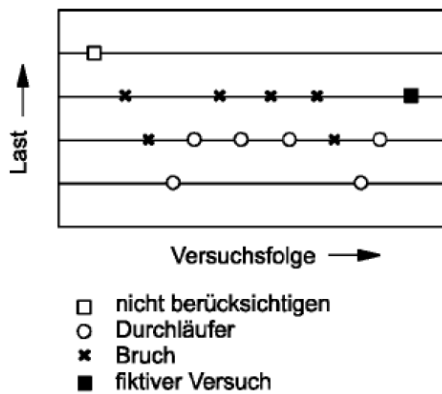
Die Zähne brechen im Pulsator nicht ab, da der Versuch bei einem Anriss am Fuß beendet wird, der eine Pulsfrequenzänderung von  $\Delta f = 0,2$  Hz bewirkt. Bei den Verzahnungen LL1 und LL2 tritt auf Grund der großen Eingriffswinkel der Anriss an einer Tangente  $> 30^\circ$  auf (siehe Abbildung 21). Bei der Verzahnung LL1 existiert auf Grund der flachen Neigung im Fuß nicht einmal eine  $30^\circ$ -Tangente. Bei der Verzahnung in Abbildung 21, die in Zahnfußnähe in den Pulsator eingespannt wurde, wird die Last nach Versuchsende deutlich erhöht. Der Riss, der bei der Ausfalllast weniger als 1 mm lang war, wächst bei Erhöhung der Last in die Zahnradmitte.



**Abbildung 21:** Riss am Zahnfuß bei der Verzahnung LL2 (Einspannung in Zahnfußnähe); Ausgangspunkt und Risswachstum Richtung Zahnradmitte bei deutlich erhöhter Last

##### Ermittlung der Wöhlerlinien

Die Versuchsdurchführung zur Ermittlung der Dauerfestigkeit erfolgt nach dem Treppenstufenverfahren. Die Versuche werden auf vorher festgelegten Lastniveaus durchgeführt, die jeweils gleich große Stufensprünge aufweisen. Wird ein Versuch mit einem Zahnfußbruch beendet, erfolgt der nächste Versuch auf dem nächst niedrigeren Lastniveau. Nach einem Durchläufer, d.h. die Grenzlastspielzahl ( $N = 6,0 \cdot 10^6$ ) wird ohne Schaden erreicht, wird der nachfolgende Versuch auf dem nächst höheren Lastniveau durchgeführt. Die auf diese Weise entstehenden Versuchsreihen sind in Abbildung 22 schematisch dargestellt. Nach den Versuchen wird die dauerhaft ertragbare Pulsatorkraft ( $F_{PN50\%}$ ) für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 50% mit Hilfe des Auswerteverfahren von Hück [40] ermittelt.



**Abbildung 22:** schematische Darstellung des Treppenstufenverfahrens (Bild aus [91])

Zur Bestimmung des Zeitfestigkeitsbereiches werden auf zwei Lastniveaus, bei denen stets Ausfälle auftreten, jeweils zwei bis drei Versuche durchgeführt. Es wird angenommen, dass die bei den Versuchen ermittelte Anzahl der ertragbaren Lastwechsel eine Gauß'sche Normalverteilung aufweist. Mit Hilfe der Näherung nach Rossow [79] können die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_A$  der einzelnen Versuchspunkte bestimmt werden. In Gleichung (69) ist  $n$  die Anzahl der Versuchspunkte je Lastniveau und  $j$  die Ordnungszahl des Versuchs.

$$P_A = \frac{3 \cdot j - 1}{3 \cdot n + 1} \quad (66)$$

Nachdem die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_A$  in Abhängigkeit von der Lastspielzahl  $N$  für die zwei Lastniveaus ermittelt worden sind, kann der Zeitfestigkeitsast im Wöhlerdiagramm als eine Gerade durch die beiden Punkte eingetragen werden.

Die in den Pulsatorversuchen ermittelten Wöhlerlinien sind im Anhang in Abbildung 53 ff. dargestellt. Es wurden jeweils 12 Versuche im Bereich der Dauerfestigkeit durchgeführt. Lediglich bei der Verzahnung *LL1* musste die Versuchsanzahl auf 7 bzw. 9 reduziert werden, da von dieser Verzahnung nicht ausreichend viele Prüflinge vorhanden waren.

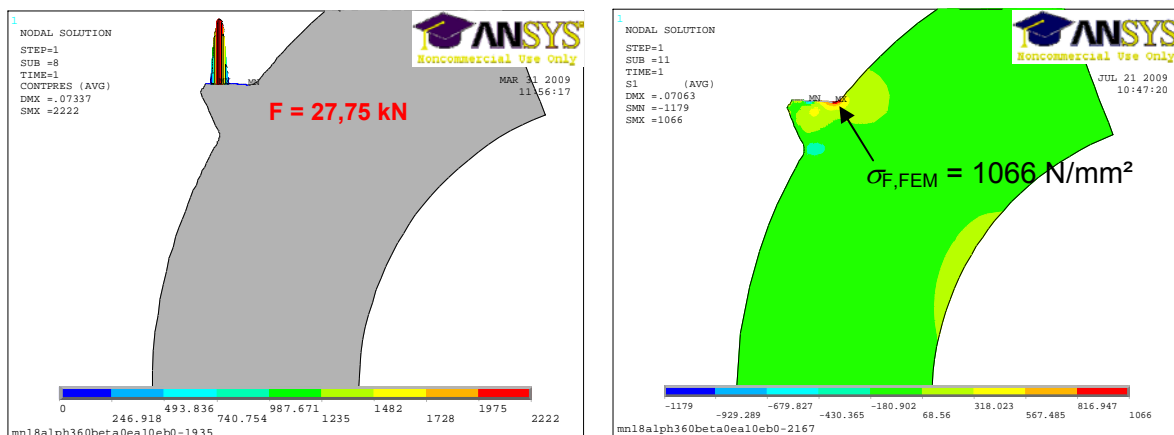
### Versuchsergebnisse

Die dauerhaft übertragbaren Pulsatorkräfte  $F_{PN50\%}$  bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit sind Tabelle 8 zu entnehmen.

Prüfverzahnung	Einspannung der Zähne am ...	Radius des Kraftangriffs [mm]	Pulsatorkraft $F_{PN50\%}$ [kN]	$\sigma_{F,FEM P50\%}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{F,FEM L1\%}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
LL1	Kopf	37,47	27,75	1066	874
	Fuß	36,56	32,5	999	819
LL2	Kopf	36,87	39,62	1221	1001
	Fuß	35,54	45,42	1148	941
LL3	Kopf	42,22	34,6	1264	1036
	Fuß	40,52	40,58	1016	833

**Tabelle 8:** Ergebnisse der Pulsatorversuche mit den LowLoss-Verzahnungen LL1, LL2 und LL3

Die in den Versuchen ermittelte Pulsatorkraft  $F_{PN50\%}$  mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 50% wird mit Hilfe der *FEM* in eine Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM P50\%}$  umgerechnet (siehe Abbildung 23). Diese entspricht der maximalen am Zahnfuß auftretenden ersten Hautspannung  $\sigma_1$  und somit der in Normen und Rechenprogrammen ermittelten Zahnfußspannung. Modelliert wird das Zahnrad im *FEM*-Programm ANSYS bis zur horizontal liegenden Symmetrieachse. An dieser werden die Symmetriebedingungen als Randbedingungen aufgebracht. Unbelastete Zähne werden nicht modelliert. Die Last wird über eine Kontaktberechnung mit einer in den Bildern nicht dargestellten Pulsatorbacke aufgebracht.



**Abbildung 23:** *FEM*-Berechnung der auftretenden Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM P50\%}$  der Verzahnung LL1 bei Einspannung am Kopf: Pressung bzw. Krafteinleitung (links) und 1. Hauptspannung (rechts)

Die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM L1\%}$  im Laufversuch bei 1% Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet sich nach Stahl [89] durch Multiplikation der Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM P50\%}$  im Pulsator bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit mit dem Faktor 0,82.

$$\sigma_{F,FEM L1\%} = 0,82 \cdot \sigma_{F,FEM P50\%} \quad (67)$$

Auf Grund des gleichen Materials, derselben Ofenreise beim Härteprozess und der gleichen Versuchsbedingungen haben alle Verzahnungen in etwa die gleiche Zahnfußfestigkeit. Die *FEM* kann die beim Pulsen auftretende Spannungsverteilung im Zahn gut wiedergeben. Die Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM P1\%}$  schwanken in einem Bereich von 819 bis 1036 N/mm<sup>2</sup> und liegen damit in den bei den Versuchen zu erwartenden wahrscheinlichen Fehlerbereichen. Die Unterschiede ergeben sich aus Abweichungen in den Versuchen, die systematischer oder zufälliger Natur sind. Auf Grund der großen Eingriffswinkel und der dadurch bedingten großen Krümmungsradien auf der Zahnflanke haben schon kleine Verformungen und Verdrehungen einen starken Einfluss auf den Ort der Krafteinleitung. Bei der Einspannung der Zahnräder wird daher große Sorgfalt auf die Ausrichtung der Zahnräder gelegt, um eine hohe Wiederholgenauigkeit zu erreichen. Stellt man die dauerhaft ertragbaren Pulsatorkräfte  $F_{PN50\%}$  bei einer Belastung am Kopf und am Fuß gegenüber, erkennt man Folgendes:

Die maßgebende Belastung für die Zahnfußtragfähigkeit von den untersuchten Verzahnungen ist die Belastung am Zahnkopf. Aber obwohl der Hebelarm der Kraft bei einer Belastung am Zahnfuß nahezu null ist, entsteht der Bruch schon bei einer nur um ca. 20% höheren Pulsatorlast als bei der Einspannung des gleichen Zahnrades am Kopf. Dies ergibt sich aus der Nähe des Zahnfußes zur Krafteinleitung. Der Ort, an dem der Riss startet, liegt im *Saint Vernantschen* Krafteinleitungsbereich. Die in diesem Bereich entstehenden Zugspannungen an der Zahnfußoberfläche, die sich bei einem Anriss abbauen, sind maßgebend für den Anriss.

### 4.3.2 Ermittlung der Zahnfußtragfähigkeit von LowLoss-Verzahnungen in Laufversuchen

In Laufversuchen wird die Zahnfußtragfähigkeit von einer extremen ( $\varepsilon_\alpha = 0,7$ ) und einer gemäßigten ( $\varepsilon_\alpha = 1,0$ ) LowLoss-Verzahnung bestimmt.

#### 4.3.2.1 Prüfprogramm und Versuchsverzahnungen

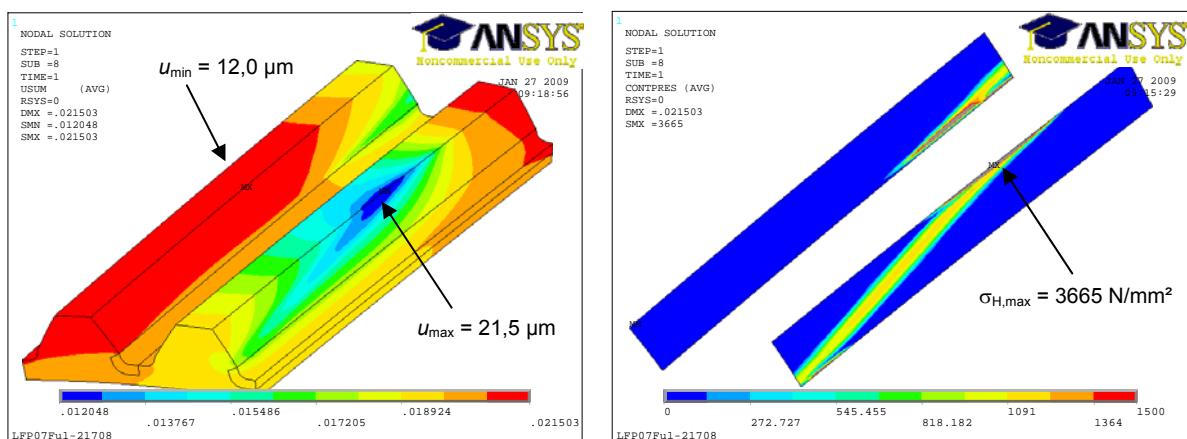
Für die Untersuchungen werden zwei LowLoss-Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* und eine Referenzverzahnung *LFP-Ref-Puls* (siehe Tabelle 9) ausgelegt. In einem FZG-Standardverspannungsprüfstand mit Achsabstand  $a = 91,5$  mm wird von den LowLoss-Verzahnungen die Wöhlerlinie zur Zahnfußtragfähigkeit mit jeweils 15 Versuchspunkten ermittelt. Die Referenzverzahnung wird in Pulsatorversuchen untersucht. An ihr soll die Zahnfußfestigkeit ermittelt werden, um die in den Laufversuchen gewonnenen Ergebnisse in die bestehenden Rechenverfahren einordnen zu können.

Prüfverzahnungen			LFP-ea07-Fu	LFP-ea10-Fu	LFP-Ref-Puls
Achsabstand	$a$	[mm]	91,5	91,5	-
Normalmodul	$m_n$	[mm]	1,25	1,25	1,75
Zähnezahl	$z$	[-]	68 / 72	68 / 72	42
Schrägungswinkel	$\beta$	[°]	15	15	0
Profilverschiebung	$x \cdot m_n$	[mm]	0,463 / 0,463	0,463 / 0,463	0,350
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	[°]	30	30	20
Zahnbreite	$b$	[mm]	17,0	17,0	7,0
Kopfkreisdurchmesser	$d_a$	[mm]	90,1 / 95,5	90,85 / 96,1	76,768
Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$	[-]	0,694	1,046	-
Sprungüberdeckung	$\varepsilon_\beta$	[-]	1,120	1,120	-
Gesamtüberdeckung	$\varepsilon_\gamma$	[-]	1,815	2,166	-
Wkz.-Kopfhöhenfaktor	$h_{a0}^*$	[-]	1,0 / 1,0	1,25 / 1,25	1,5
Wkz.-Kopfabrundungsfaktor	$\rho_{a0}^*$	[-]	0,25 / 0,40	0,20 / 0,28	0,20
Protuberanzbetrag Wkz.	$\rho r_0$	[mm]	0,110	0,110	0,120
Protuberanzwinkel Wkz.	$\alpha_{pr0}$	[°]	15	15	10
Bearbeitungszugabe	$q$	[mm]	0,090	0,090	-
unteres Zahnweitenabmaß	$A_{wi}$	[mm]	-0,100	-0,100	-
parabelförmige Kopfrücknahme	$C_a$	[ $\mu$ m]	10 / 10	10 / 10	-
	$L_a$		$\frac{1}{2} \cdot g_\alpha$ / $\frac{1}{2} \cdot g_\alpha$	$\frac{1}{4} \cdot g_\alpha$ / $\frac{1}{4} \cdot g_\alpha$	-
beidseitige lineare Endrücknahme	$C_b$	[ $\mu$ m]	- / 15	- / 15	-
	$L_b$	[mm]	- / 1,7	- / 1,7	-

**Tabelle 9:** Geometrie der in Laufversuchen untersuchten LowLoss-Verzahnungen (*LFP-ea07-Fu*, *LFP-ea10-Fu*) und der im Pulsator untersuchten Referenzverzahnung (*LFP-Ref-Puls*)

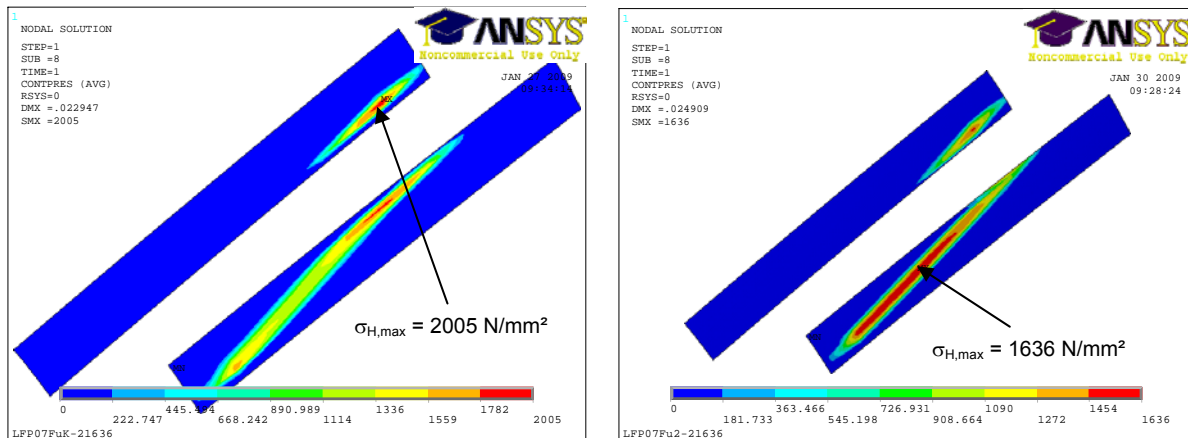


Die in Laufversuchen untersuchten LowLoss-Verzahnungen haben einen Normaleingriffswinkel von  $\alpha_n = 30^\circ$  und weisen eine Sprungüberdeckung von  $\varepsilon_\beta = 1,1$  auf. An beiden Seiten des Rades ist eine Endrücknahme über 10% der Breite aufgebracht, so dass sich eine wahre Sprungüberdeckung von  $\varepsilon_\beta = 1,0$  ergibt. Dadurch kann der Einfluss einer lokalen Kraftüberhöhung im Laufversuch gering gehalten werden. Bei der extremen Variante ( $\varepsilon_\alpha = 0,7$ ) besteht die Gefahr eines Zahnflankenbruchs. Durch die geringe Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  entstehen hohe Flankenpressungen und durch den großen Eingriffswinkel  $\alpha_n$  ist der Krümmungsradius der Zahnflanke relativ groß. Beide Effekte begünstigen den Zahnflankenbruch. Um diesem vorzubeugen werden zwei Maßnahmen bei der Auslegung ergriffen. Zum einen wird für diese Verzahnung ein Verzahnungswerkzeug gewählt, das am Kopf nicht voll ausgerundet ist. Der Krümmungsradius im Zahnfuß wird dadurch etwas kleiner. Dies führt zu einer höheren Zahnfußspannung und somit auch zu einem früheren Bruch am Zahnfuß als an der Zahnflanke. Zudem wird die Einsatzhärtungstiefe (Eht) auf eine optimale Flankenbruchtragfähigkeit ausgelegt. Diese ist etwas größer (siehe Tabelle 13) als die optimale Eht [94] gegen Zahnfußbruch. Auf Grund der Unsicherheit bei den Tragfähigkeitsberechnungen mit den bestehenden Normen (ISO 6336-3) und Zahnradberechnungsprogrammen, die sich beide zur Berechnung des Kerbeinflusses am Zahnfuß auf den bei LowLoss-Verzahnungen unsicheren Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$  stützen, werden bei der Auslegung die Zahnfußspannungen und Flankenpressungen im Vorfeld mit Hilfe der Finiten Element Methode überprüft. Dabei werden in einem ersten Schritt die Verzahnungen in der FEM mit einer vorab geschätzten Prüflast belastet und die Verformungen bestimmt (siehe Abbildung 24 links).



**Abbildung 24:** Verformung (links) und Pressungsverteilung (rechts) der unkorrigierten LowLoss-Verzahnung *LFP-ea07-Fu* bei 300 Nm → gewählte lineare Kopfrücknahme von  $C_a = u_{\max} - u_{\min} = 21,5 \mu\text{m} - 12,0 \mu\text{m} \approx 10 \mu\text{m}$

Anschließend werden abhängig von den berechneten Verformungen Korrekturen (Kopf- und Endrücknahmen) an den Zahnflanken aufgebracht und die Verzahnungen nochmals berechnet, wobei die Länge der Kopfrücknahmen variiert wird. Die Rücknahme mit der günstigsten berechneten Flankenpressung (siehe Abbildung 25 rechts) wird für die Fertigung der Prüfverzahnungen gewählt.



**Abbildung 25:** Pressungsverteilung der unterschiedlich lang korrigierten LowLoss-Verzahnungen *LFP- $ea07-Fu$*  bei 300 Nm (links:  $l_a = 0,25 \cdot g_\alpha$ ; rechts:  $l_a = 0,5 \cdot g_\alpha$ )  $\rightarrow$  die rechte Verzahnung weist eine gleichmäßigere und dadurch auch geringere Pressungen auf und wird ausgewählt

Durch die genaue Ermittlung der erforderlichen Korrekturen kann ein Kantentragen am Zahnkopf und am Rand vermieden werden. Dreh-, Stirn- und Kopfanten werden nicht gefast, sondern lediglich mit Ölstein gebrochen, um vorhandene Grate zu beseitigen. Neben den auf den Flanken aufgetragenen Endrücknahmen, die die stirnseitigen Flankenränder lastfrei stellen, kann mit dem Entgraten sichergestellt werden, dass an den bei Schrägverzahnungen gefährdeten spitzen (hinterschnittenen) Stirnkanten kein Schaden auftritt. Die Zahnfußbrüche starten dadurch alle in der Mitte des Zahnrades.

Um bei den Zahnfußbruchuntersuchungen den Einfluss des Materials berücksichtigen zu können, werden aus derselben Materialcharge, aus dem die Prüfräder hergestellt werden, geradzahnte Zahnräder *LFP-Ref-Puls* für Pulsatorversuche gefertigt und in derselben Ofenreise einsatzgehärtet. Dadurch haben die Zahnräder bei ähnlicher Oberflächenrauheit am Zahnfuß auch die gleiche Festigkeit am Zahnfuß, womit ein direkter Vergleich der Bruchspannungen von Lauf- und Pulsatorversuchen möglich ist. Die Verzahnungsgeometrie des Pulsatorrades entspricht der Verzahnung aus dem *FVA*-Forschungsvorhaben Nr. 369/1+2 [90] In diesem Vorhaben wurden zahlreiche Pulsatorversuche mit dieser Verzahnungsgeometrie durchgeführt. Die Zahnradparameter sind ebenfalls in Tabelle 9 dargestellt.

#### 4.3.2.2 Dokumentation der Prüfräder

Die Prüfwahnräder werden mit einem Protuberanzfräser hergestellt. Sie werden in einer gemeinsamen Ofenreise gehärtet und anschließend reinigungsgestrahlt. Die Flanken der Laufverzahnungen werden im Teilwälzschliff fertig bearbeitet. Sie sollen eine Rauheit von  $R_a \approx 0,2 \mu\text{m}$  aufweisen.

#### Geometrie

Die Flanken- und Profillinien der Prüfräder werden vor den Laufversuchen im 3D-Messzentrum (Firma Klingelberg) vermessen (siehe Abbildung 59 ff. im Anhang). Standardmäßig werden an jedem Rad vier Zähne vermessen, die gleichmäßig über den Umfang verteilt sind. Die Messungen erfolgen am Teilkreis und in der Mitte der Zahnbreite. Stichprobenartig werden Messungen nahe des stirnseitigen Randes durchgeführt, um den Verlauf der beidseitigen Endrücknahmen am Rad zu überprüfen. Die gemittelten Werte der gefertigten Korrekturen sind in Tabelle 10 dargestellt. Die durchschnittliche Kopfrücknahme  $C_a$  am Rad der Verzahnung *LFP-ea07-Fu* ist mit  $C_a = 7,7 \mu\text{m}$  etwas geringer als gefordert ( $10 \mu\text{m}$ ). Bei den nach den Versuchen durchgeführten *FEM*-Berechnungen werden die ausgeführten Korrekturen berücksichtigt.

gemessene Flankenkorrekturen	parabelförmige Kopfrücknahme $C_a$ [ $\mu\text{m}$ ]	beidseitige lineare Endrücknahme $C_b$ [ $\mu\text{m}$ ]
<i>LFP-ea07-Fu</i>	9,0 / 7,7	- / 13,9
<i>LFP-ea10-Fu</i>	9,8 / 9,6	- / 12,8

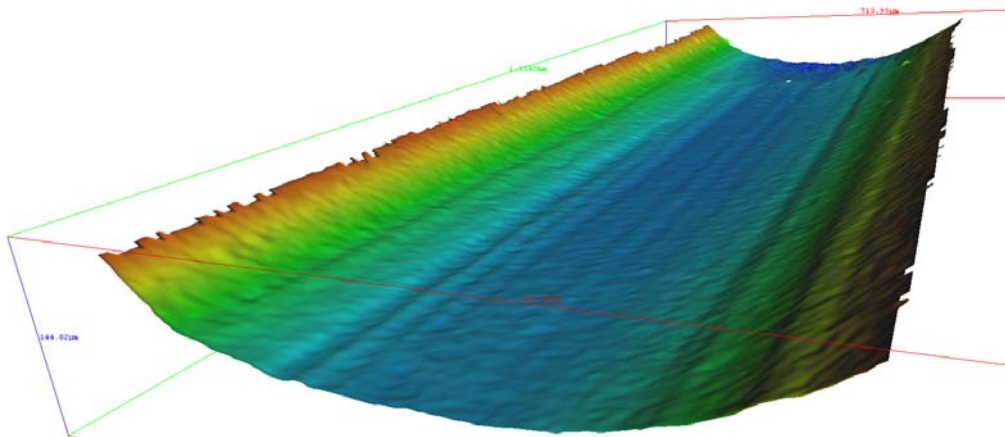
**Tabelle 10:** Gefertigte (gemessene) Flankenkorrekturen am Ritzel / Rad

Die Laufverzahnungen weisen eine nach *DIN 3961* hohe Fertigungsqualität  $\leq 5$  auf. Die ebenfalls im Verzahnungsmesszentrum untersuchten Referenzverzahnungen *LFP-Ref-Puls* erreichen die für Pulsatorversuche ausreichende Fertigungsqualität  $\leq 9$ .

Durch Fertigung mit einem Protuberanzfräser wird sichergestellt, dass auch nach der abschließenden Schleifbearbeitung am Zahnfuß keine Schleifkerben auftreten. Da die Zahnfußspannung durch die Geometrie der Prüfverzahnung maßgeblich beeinflusst wird, ist eine möglichst exakte Erfassung der Fußform erforderlich. Von der Zahnfußrundung werden daher im Stirnschnitt 2D-Scans mit dem 3D-Messzentrum durchgeführt und mit den im Programm *STplus* berechneten Zahnfußkonturen verglichen. Die Fußrundungen nach Messung und Berechnung stimmen gut überein (siehe Abbildung 63 im Anhang).

### Rauheit am Zahnfuß

Die Oberflächenrauheit in der Zahnfußrundung, die nach *ISO 6336-3* mit dem relativen Oberflächenfaktor  $Y_{\text{RelT}}$  in die Berechnung der Zahnfußfestigkeit eingeht, hat einen Einfluss auf die Dauerfestigkeit am Zahnfuß. Um bei den Zahnfußbruchuntersuchungen eine Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse im Laufversuch und im Pulsatorversuch gewährleisten zu können, müssen die Zahnfußrauheiten der Prüfverzahnungen ähnliche Werte aufweisen. Es werden deshalb die Rauheiten an den Laufverzahnungen und der Referenzverzahnung bestimmt und miteinander verglichen. Da der Modul der Verzahnungen sehr klein ist, kann die Rauheit nicht mit taktilen Messgeräten erfasst werden. Die Messstrecke für eine statistische Aussage ist dafür zu kurz. Die Rauheit wird mit einer optischen Oberflächentopographie-Messmaschine der Firma Alicona bestimmt. Die Messmaschine kann berührungs- und schädigungslos auf einer Focusvariation basierend ein hochauflösendes 3D-Abbild der Oberfläche erzeugen (siehe Abbildung 26) und daraus die Oberflächenrauheit berechnen. Die gemittelten Rauheiten am Zahnfuß weisen bei allen Verzahnungen ähnliche Werte auf. Sie sind in Tabelle 11 dargestellt.



**Abbildung 26:** Optische Oberflächentopographie-Messmaschine: hochauflösendes 3D-Abbild der Zahnfußoberfläche der Verzahnung *LFP-ea10-Fu*

		<i>LFP-ea07-Fu</i>	<i>LFP-ea10-Fu</i>	<i>LFP-Ref-Puls</i>
Rauheit am Zahnfuß	$R_a$ [ $\mu\text{m}$ ]	0,75	0,81	0,94

**Tabelle 11:** Gemittelte Rauheit am Zahnfuß bei den Lauf- und den Referenzverzahnungen bei einer Filterwellenlänge von 0,8 mm

### Werkstoffanalysen

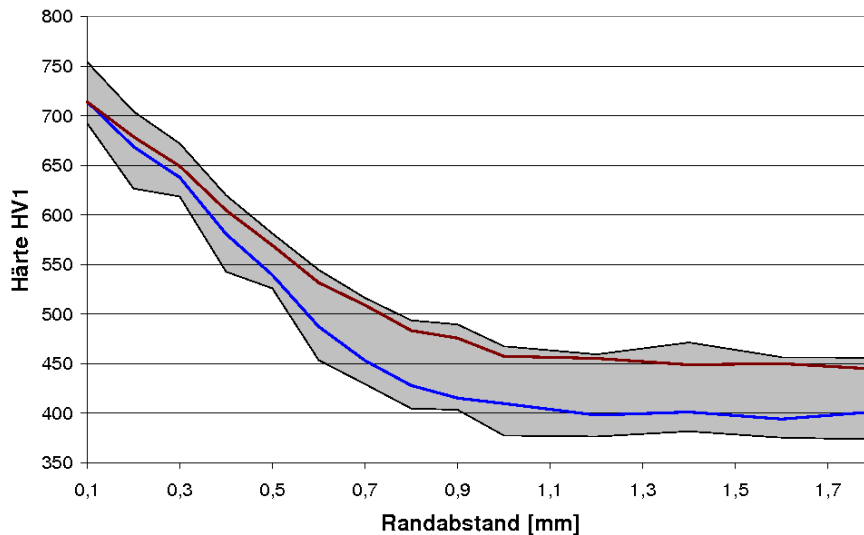
Die Prüfräder werden aus 16MnCr5 hergestellt. In Tabelle 12 werden der Mittelwert der gemessenen Zusammensetzungen und die geforderte Zusammensetzung des Werkstoffes gegenübergestellt. Die Referenzverzahnung *LFP-Ref-Puls* weist mit einem leicht höheren Kohlenstoff- und Siliziumanteil (C, Si), sowie einem leicht niedrigeren Chromanteil (Cr) auf eine geringfügig andere Werkstoffcharge hin. Eine Vergleichbarkeit der Referenzverzahnung mit den Laufverzahnungen ist aus metallurgischer Sicht auf Grund der nur geringen Abweichungen gegeben. Die gemessenen Werte liegen bis auf den erwähnten C-Gehalt in dem von *DIN EN 10084* [27] und der strengeren ZF-Werksnorm-Norm (ZF 6) vorgeschriebenen Toleranzbereich.

Stahl 16 MnCr5	Chemische Zusammensetzung, Massenanteil in %							
	C	Si	S	P	Mn	Cr	Cu	Al
Toleranzbereich nach DIN EN 10084	0,14-0,19	<0,4	<0,035	<0,035		0,80-1,10		
Toleranzbereich nach ZF-Werksnorm (ZF6)	0,13-0,18	<0,4	0,20-0,35	<0,025	1,0-1,3	0,80-1,10	<0,03	0,02-0,05
Mittelwerte nach Analyse <i>LFP-ea07-Fu</i> und <i>LFP-ea10-Fu</i>	0,18	0,26	0,025	0,018	1,17	1,01	0,22	0,027
Mittelwerte nach Analyse <i>LFP-Ref-Puls</i>	0,20	0,33	0,026	0,014	1,13	0,88	0,23	0,030

**Tabelle 12:** Chemische Zusammensetzung von 16MnCr5 nach Norm und nach Analyse

### Härtetiefenverlauf

Zur Überprüfung des Härtetiefenverlaufes erfolgen HV1-Messungen im Bereich der ungeschliffenen Zahnfüße. Es werden an je drei Ritzeln und Rädern der Laufverzahnungen und an drei Referenzverzahnungen zwei Messungen durchgeführt. In Abbildung 27 sind die gemittelten Einsatzhärtungstiefen und das Streuband, in dem alle Messergebnisse liegen, dargestellt.



**Abbildung 27:** Streuband der gemessenen Härtetiefenverläufe und die gemittelten Härtetiefenverläufe im Zahnfuß der Prüfverzahnungen: *LFP-ea07-Fu* & *LFP-ea10-Fu* (blau); *LFP-Ref-Puls* (braun)

In Tabelle 13 kann man die gemittelte Einsatzhärte an der Oberfläche und im Kern, sowie die Einsatzhärtungstiefe (bei einer Härte von 550 HV1) der jeweiligen Verzahnung ablesen.

Prüfverzahnung	Oberflächenhärte nach Vickers	Kernhärte nach Vickers	Eht bei 550 HV1
<i>LFP-ea07-Fu</i> (Fuß)	718 HV1	386 HV1	0,48 mm = 0,38·m <sub>n</sub>
<i>LFP-ea10-Fu</i> (Fuß)	711 HV1	392 HV1	0,48 mm = 0,38·m <sub>n</sub>
<i>LFP-Ref-Puls</i> (Fuß)	714 HV1	452 HV1	0,55 mm = 0,31·m <sub>n</sub>

**Tabelle 13:** Durchschnittliche Einsatzhärte am Zahnfuß der Lauf- und Referenzverzahnungen

Die geforderten Oberflächenhärten ( $720 \pm 20$  HV1) und Kernhärten (315 - 405 HV1) werden weitestgehend eingehalten. Die Kernhärte der Referenzverzahnung *LFP-Ref-Puls* ist mit 452 HV1 um 11% zu groß. Bei den Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* wurde eine Einsatzhärtungstiefe (Eht) von  $0,35 \cdot m_n$  angestrebt. Dieser Bereich liegt etwas über der von Tobie [94] empfohlenen Eht von  $0,15 \dots 0,25 \cdot m_n$ . Auf Grund der großen Flankenbruchgefahr ist diese Erhöhung der Eht notwendig. Im Vergleich zu dem Referenzzahnrad *LFP-Ref-Puls* ist die auf den Modul bezogene Eht in etwa gleichwertig (0,38 zu 0,31). Eine Übertragung der im Pulsatorversuch gewonnenen Festigkeiten auf die Zahnräder im Laufversuch ist bzgl. des Härteverlaufs zulässig.

### Randschichtoxidation

Anhand ungeätzter Schliffbilder wird die Randschichtoxidationstiefe im Bereich des Zahnfußes nach der Wärmebehandlung bestimmt. Signifikante Unterschiede hinsichtlich der Randoxidation werden an den gemeinsam wärmebehandelten und strahlbehandelten Prüfzahnradern nicht festgestellt. Die maximale gemessene Randschichtoxidationstiefe ist mit 15 µm gering. Es sind nach Beumelburg [3] keine Auswirkungen auf die Zahnfußtragfähigkeit zu erwarten.

### Gefügeuntersuchungen

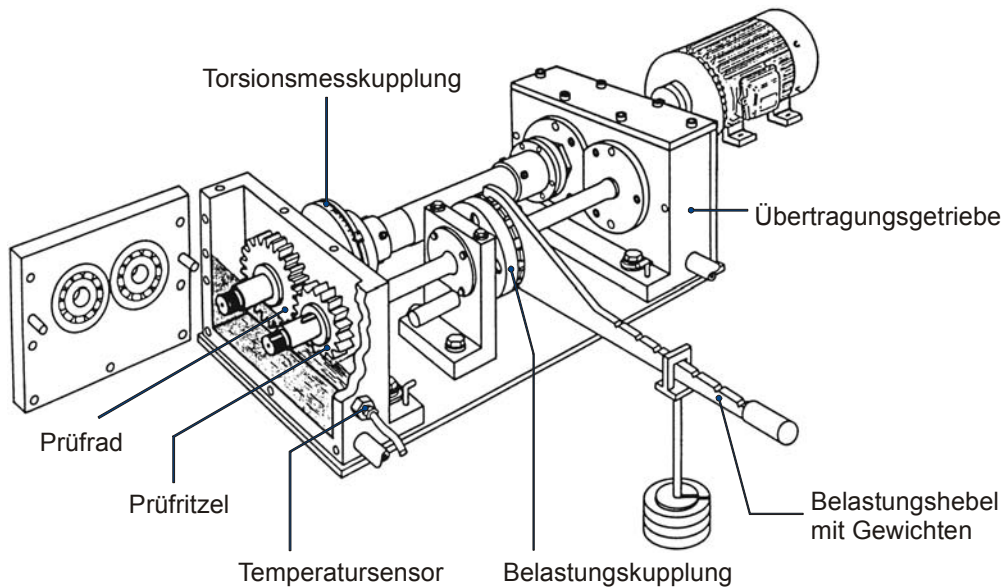
An den einsatzgehärteten Prüfverzahnungen werden im Kernbereich sowie am Zahnfuß und an der Zahnflanke im Bereich der Randschicht Gefügeschliffbilder erstellt (Ätzung: Nital 1%, 60 sec.). Das bei allen Schliffen dokumentierte Gefüge ist typisch für einsatzgehärtete Zahnräder aus 16MnCr5. Am Rand liegt feinnadeliger Martensit mit geringen Restaustenitanteilen vor. Im Kern zeigt sich ein aus Bainit und Martensit bestehendes Gefüge (siehe Abbildung 65 im Anhang).

Bei der Fertigung der Prüfräder werden die gemachten Vorgaben im Wesentlichen eingehalten. Die Zahnräder weisen ähnliche Eigenschaften am Zahnfuß auf. Es ist davon auszugehen, dass sie die gleiche Zahnfußfestigkeit besitzen.

### 4.3.2.3 Versuchsdurchführung der Laufversuche

Die Zahnfußfestigkeit der Referenzverzahnung wird am Hochfrequenzpulsator (siehe Abschnitt 4.3.1.3) ermittelt.

Die Laufversuche zur Ermittlung der Zahnfußtragfähigkeit erfolgen am FZG-Zahnradverspannungsprüfstand mit Achsabstand  $a = 91,5$  mm. Der Aufbau des Prüfstandes ist in Abbildung 28 schematisch dargestellt. Der Prüfstand kann mit Drehzahlen von 1500 U/min und 3000 U/min am Rad betrieben werden.



**Abbildung 28:** Standard-FZG-Zahnradverspannungsprüfstand mit Achsabstand  $a = 91,5$  mm (Bild aus [73])

Das definierte Prüfdrehmoment wird über eine Verspanneinrichtung aufgebracht. Bei Betrieb läuft die Prüfleistung über das Prüfgetriebe und ein Übertragungsgetriebe mit gleicher Übersetzung in einem mechanischen Kreislauf. So muss lediglich die Verlustleistung über den Elektromotor in das System eingebracht werden. Die Verspannrichtung wird bei allen Prüfläufen so festgelegt, dass das Rad, das auf der Torsionswelle angeordnet ist, vom Ritzel getrieben wird.

Die in der schrägverzahnten Prüfverzahnung entstehende Axialkraft wird durch eine angeordnete Lagerung mit Kegelrollenlagern abgefangen. Die Betriebsbedingungen jedes Versuchs werden durch die Prüfparameter Drehzahl, Schmierstoff, Temperatur und Belastung festgelegt. LowLoss-Verzahnungen sind auf Grund ihrer großen Zähnezahzahl und ihrer großen Zahnsteifigkeit bezüglich ihres Anregungsverhaltens als kritisch zu sehen. Durch Messung des Anregungsverhaltens bei beiden Prüfstandsdrehzahlen vor Versuchsbeginn kann festgestellt werden, dass sich das System Prüfstand-Zahnrad bei 3000 U/min des Rades nahe einer



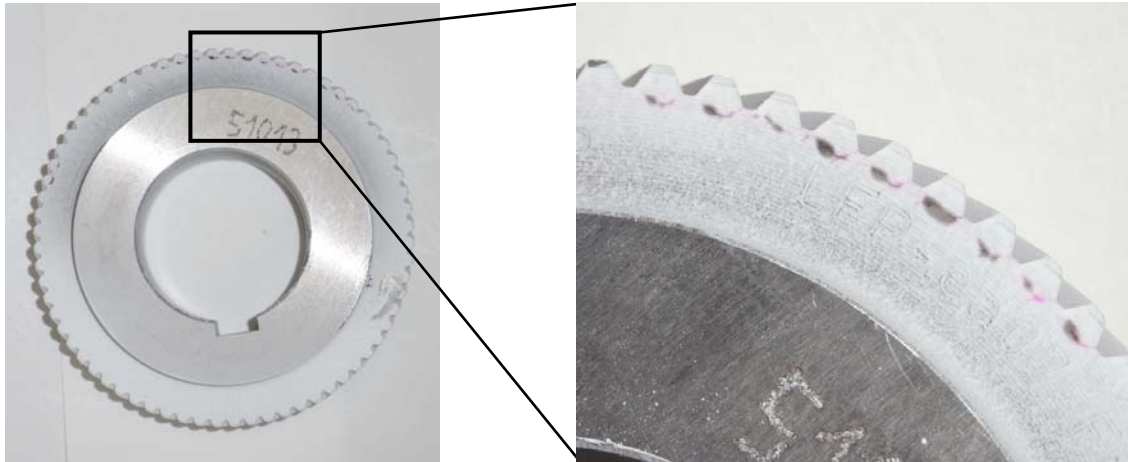
Eigenfrequenz bewegt, wodurch Lasterhöhungen entstehen können. Es werden daher die Versuche mit der niedrigeren einzustellenden Drehzahl von 1500 U/min am Rad durchgeführt. Um die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls wegen Grübchen- oder Graufleckenbildung zu minimieren, wird für alle Versuche das synthetische Öl Klübersynth GH 6-460 als Schmierstoff hoher Viskosität eingesetzt. Die Öleinspritztemperatur liegt immer bei 60°C. Jeweils beim ersten Versuch einer neuen Variante und zusätzlich stichprobenartig werden vor Versuchsbeginn Tragbilder bei niedrigen Drehmomenten angefertigt. Die Tragbilder bestätigen ein gleichmäßiges Tragen der Prüfverzahnungen.

Die Zahnflanken werden vor jedem Versuchslauf durch einen einstufigen Einlauf geglättet, um die Gefahr der Graufleckenbildung zu verringern. Der Einlauf, der jeweils bei der Prüfdrehzahl durchgeführt wird, umfasst für alle Prüfvarianten  $2 \cdot 10^5$  Lastwechsel am Rad bei einem Moment von ca. 150 Nm. Dies entspricht in etwa 40% des dauerhaft übertragbaren Drehmoments bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit. Nach dem Einlauf wird über die Verspanneinrichtung das Moment auf das Prüfdrehmoment erhöht und der Versuch bei konstanten Bedingungen so lange durchgeführt, bis entweder das Schadenskriterium Zahnbruch auftritt oder die festgelegte Grenzlastspielzahl von  $6 \cdot 10^6$  Lastspielen am Rad erreicht wird. In Tabelle 14 sind die Prüfbedingungen für die Zahnfußuntersuchungen zusammengefasst.

Öl		Klübersynth GH 6-460
Öltemperatur		60° C
Kin. Viskosität bei 60° C		231 mm <sup>2</sup> /s
Einlauf	Drehmoment	150 Nm
	Drehzahl (Rad)	1500 min <sup>-1</sup>
	Lastspielzahl	N = 200.000 (ca. 2h)
Prüflauf	Drehmoment	320 ... 560 Nm
	Drehzahl (Rad)	1500 min <sup>-1</sup>
	Versuchsende	N = $6 \cdot 10^6$ oder Zahnbruch
FZG-Verspannungsprüfstand, Einspritzschmierung		

**Tabelle 14:** Prüfbedingungen für die Laufversuche zur Zahnfußtragfähigkeit

Bei den durchgelaufenen Tragfähigkeitsversuchen ( $N > 6 \cdot 10^6$ ) wird nach Beendigung des Versuchs eine Rissprüfung an Rad und Ritzel vorgenommen. Bei einem Durchläufer bei einem relativ hohen Drehmoment von  $T = 400$  Nm werden Anrisse am Ritzel entdeckt (siehe Abbildung 29). Der Versuch wird im Nachhinein als Ausfall gewertet.

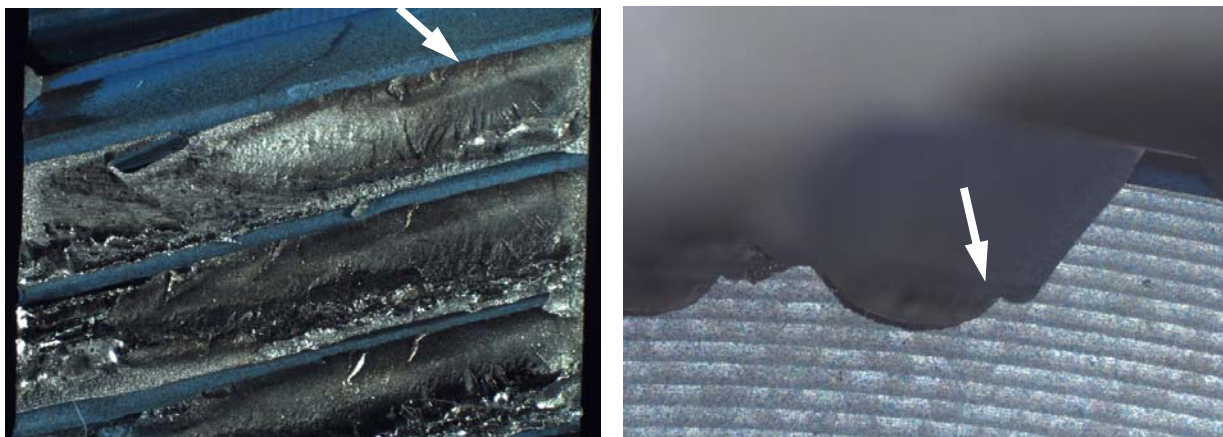


**Abbildung 29:** Anrisse in Zahnfußnähe in einem Zahnradsegment an einem hoch belasteten durchgelaufenen Prüfritzel (*LFP-ea10-Fu*); Ritzel ist mit weißer Rissprüffarbe besprüht

#### 4.3.2.4 Auswertung der Laufversuche und Pulsator-Referenzversuche

##### Schadensbilder

Sowohl bei den gemäßigten LowLoss-Verzahnung *LFP-ea07-Fu*, als auch bei den extremen LowLoss-Verzahnungen *LFP-ea10-Fu* entstehen Zahnfußbrüche. Die Breitenkorrektur der Prüfverzahnung (beidseitige Endrücknahme) hat den gewünschten Effekt, dass die Zahnbrüche nicht an der Stirnkante, sondern in der Mitte des Zahnrades ihren Ausgang finden (siehe Abbildung 30 links).



**Abbildung 30:** Bruchbild der Verzahnung *LFP-ea07-Fu*: Draufsicht mit Bruchausgangspunkt (links) und Stirnansicht (rechts)

### Ermittlung der Wöhlerlinien

Zur Ermittlung der Wöhlerlinien der LowLoss-Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* werden jeweils neun Laufversuche nach dem Treppenstufenverfahren im Bereich der Dauerfestigkeit und sechs Laufversuche im Bereich der Zeitfestigkeit durchgeführt. Die Wöhlerlinie der Referenzversuche am Pulsator wird mit 16 Versuchen im Bereich der Dauerfestigkeit und 10 Versuchen im Bereich der Zeitfestigkeit bestimmt. Die Versuche werden nach Hück [40] und Rossow [79] ausgewertet (siehe auch Abschnitt 4.3.1.4)

### Fehlerbetrachtung

Bei Versuchen, die unter den gleichen Bedingungen durchgeführt werden, treten dennoch stets Abweichungen auf, die systematischer oder zufälliger Natur sein können. Nach *DIN 1319* [22] können die Fehler bei der Durchführung der Versuche abgeschätzt werden. Bei Laufversuchen haben die Ablesegenauigkeit bei der Einstellung des Prüfdrehmoments, die Kalibriergenauigkeit der Prüfstandswellen und die Wiederholgenauigkeit einen wesentlichen Einfluss. Ebenso können unterschiedliche dynamische Einflüsse (Dynamikfaktor  $K_v$ ) sowie unterschiedliches Tragen der Verzahnung über der Breite (Breitlastfaktor  $K_{F\beta}$ ) eine Rolle spielen. Die beiden letzteren Einflüsse werden durch geometrische Abweichungen im eingebauten Zustand und Streuungen der Prüfverzahnungen verursacht.

Bei den FZG-Verspannungsprüfständen ist die Drehmomentmesswelle mit einem mittleren Drehmomentmessfehler von ca.  $\pm 5\%$  behaftet, das eingestellte Drehmoment wird auf ca.  $\pm 2\%$  genau gehalten [50]. Der Einfluss des Dynamikfaktors  $K_v$  und des Breitlastfaktors  $K_{F\beta}$  können beide mit  $\pm 5\%$  angesetzt werden [94]. Überlagert man alle Fehler, ergibt sich für die wirksame Zahnnormalkraft ein maximaler Fehler von  $\pm 15\%$  und ein wahrscheinlicher Fehler von  $\pm 9\%$ .

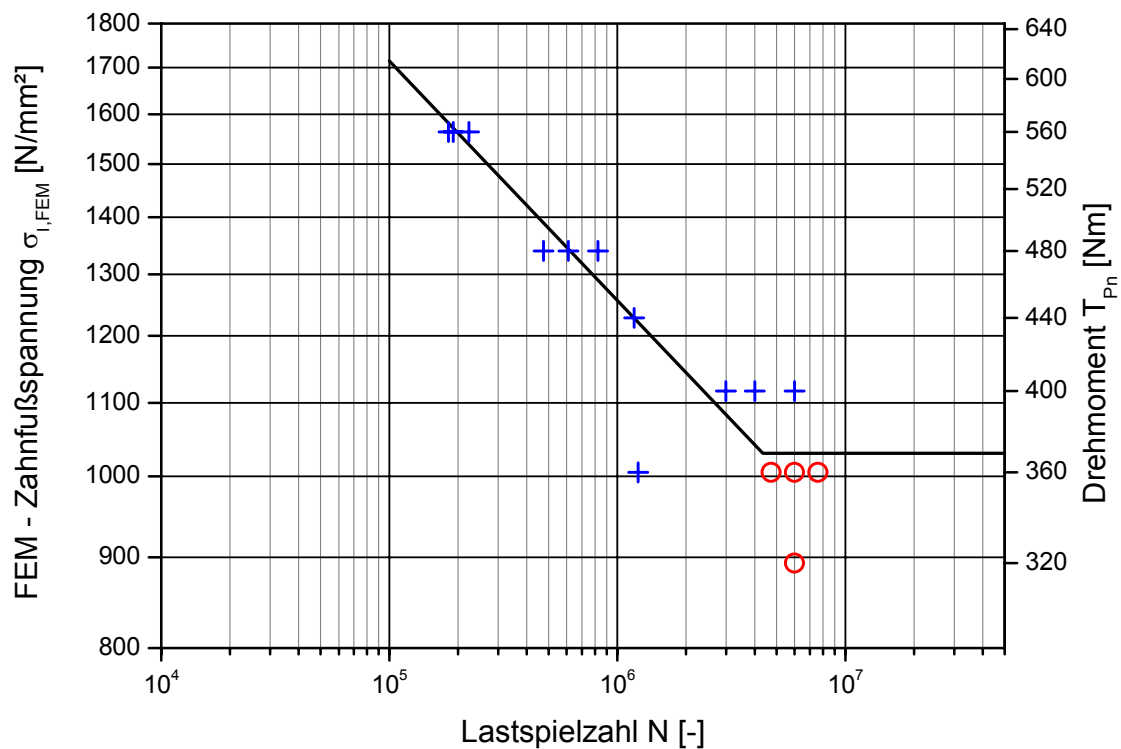
### Versuchsergebnisse

Die dauerhaft übertragbaren Drehmomente bzw. die Pulsatorkraft bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit sind Tabelle 15 zu entnehmen.

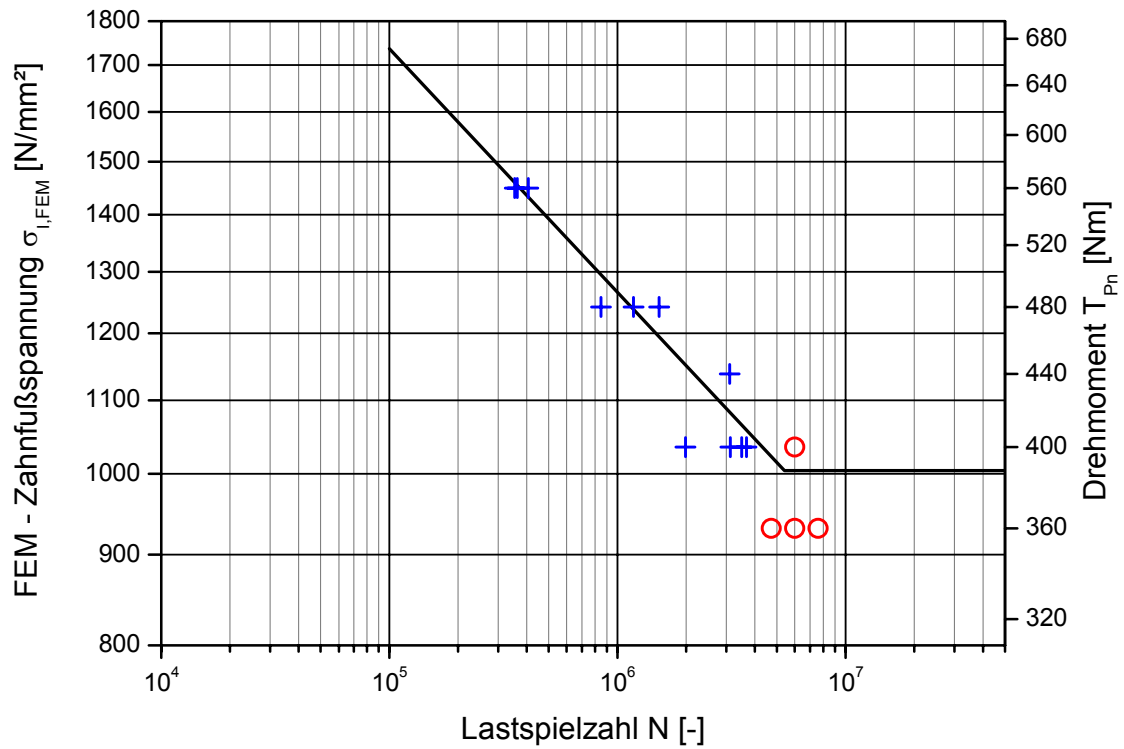
	<i>LFP-ea07-Fu</i>	<i>LFP-ea10-Fu</i>	<i>LFP-Ref-Puls</i>
Dauerhaft übertragbares Prüfdrehmoment bzw. übertragbare Pulsatorkraft bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit	369 Nm	388 Nm	4,24 kN

**Tabelle 15:** Ergebnisse aus den Lauf- und Pulsator-Referenzversuchen

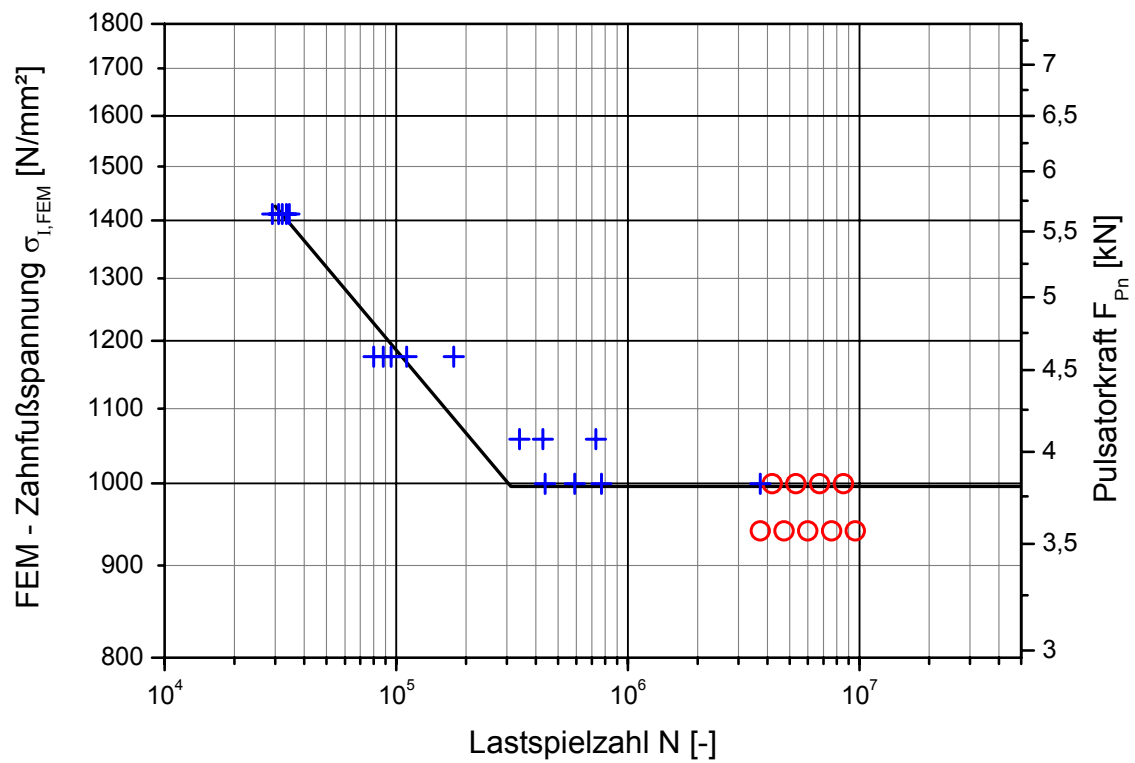
Die aus den Laufversuchen experimentell erhaltenen Drehmomente, Pulsatorkräfte und Lastspielzahlen in den Zeit- und Dauerfestigkeitsbereichen der jeweiligen Prüfverzahnungen werden zur grafischen Veranschaulichung in Wöhlerkurven dargestellt (siehe Abbildung 31 bis Abbildung 33). Dazu werden die Lastwechselzahlen auf der Abszisse logarithmisch aufgetragen, ebenso wie die gefahrenen Drehmomente bzw. Pulsatorkräfte auf der Ordinate. Ausfälle sind als blaues Kreuz, Durchläufer als roter Kreis gekennzeichnet. Die dauerhaft übertragene Last und der Zeitfestigkeitsast können eingezeichnet werden. Der Schnittpunkt beider Geraden stellt den Knickpunkt der Wöhlerkurve dar.



**Abbildung 31:** Wöhlerlinie zur Zahnfußtragfähigkeit der extremen LowLoss-Verzahnung *LFP-ea07-Fu* mit 50%er Ausfallwahrscheinlichkeit



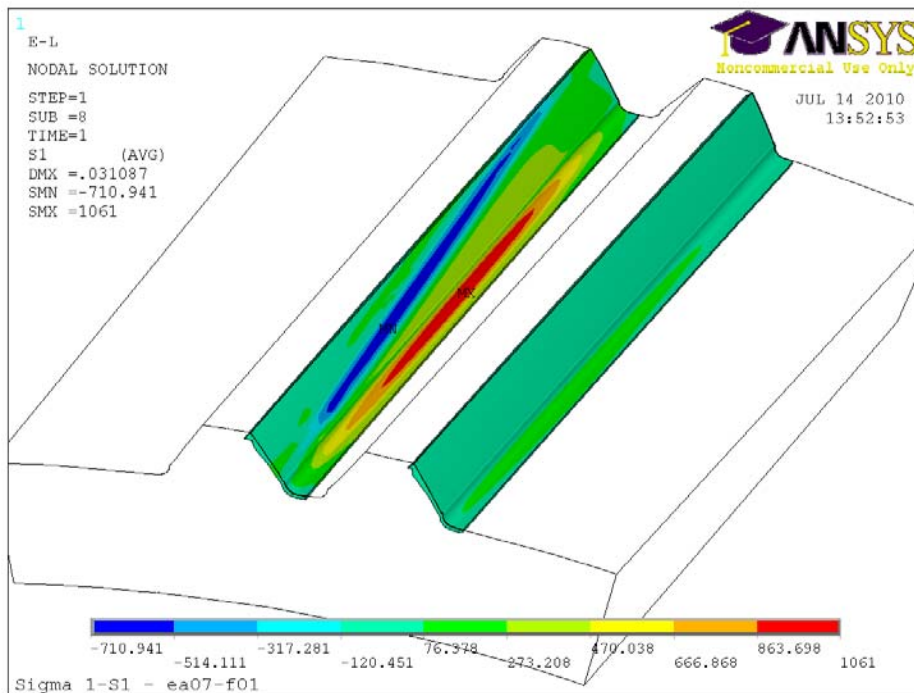
**Abbildung 32:** Wöhlerlinie zur Zahnfußtragfähigkeit der gemäßigten LowLoss-Verzahnung *LFP-ea10-Fu* mit 50%er Ausfallwahrscheinlichkeit



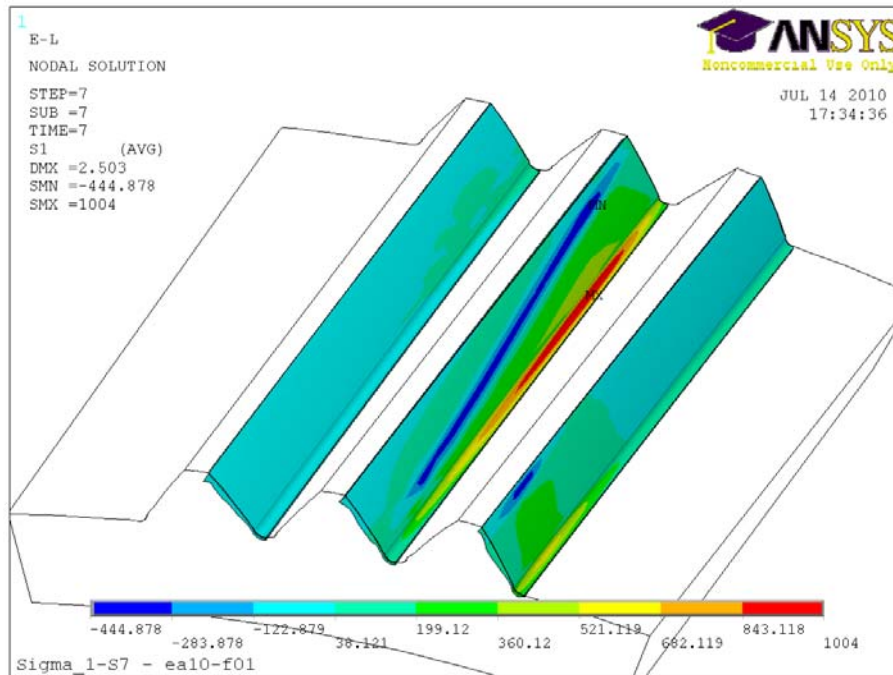
**Abbildung 33:** Pulsator-Wöhlerlinie zur Zahnfußtragfähigkeit der Referenz-Verzahnung *LFP-Ref-Puls* mit 50%er Ausfallwahrscheinlichkeit

#### 4.3.2.5 Abgleichende FEM-Berechnungen

Zu Versuchsverzahnungen (*LFP-ea07-Fu*, *LFP-ea10-Fu*, *LFP-Ref-Puls*) werden mit dem in Abschnitt 3.1.3 vorgestellten Programmmodul umfangreiche FEM-Berechnungen mit Kontaktanalyse durchgeführt. Bei den zwei Laufverzahnungen werden die nach Fertigung der Zahnräder gemessenen Korrekturen berücksichtigt und jeweils zehn Eingriffstellungen untersucht. Auf Grund der ganzzahligen Sprungüberdeckung  $\varepsilon_{\beta} \approx 1,0$  schwanken die maximalen Zahnfußspannungen über die zehn Eingriffstellungen hinweg kaum. Die Verzahnungen werden mit dem dauerhaft übertragbaren Drehmoment bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit belastet. Die bei den maßgebenden Eingriffsstellungen auftretenden maximalen 1. Hauptspannungen ( $\sigma_1 = \sigma_{F,FEM L50\%}$ ) der Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* sind in Abbildung 34 und Abbildung 35 dargestellt.



**Abbildung 34:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 1061 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei  $T_{50\%} = 380 \text{ Nm}$  an der Verzahnung *LFP-ea07-Fu*



**Abbildung 35:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 1004 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei  $T_{50\%} = 388 \text{ Nm}$  an der Verzahnung LFP-ea10-Fu

Die im Pulsator untersuchte Referenzverzahnung LFP-Ref-Puls wird ebenfalls mit der FEM untersucht. Die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM P50\%}$  bei 50% Ausfallwahrscheinlichkeit wird in einem 2D-Kontaktmodell zu  $\sigma_1 = 997 \text{ N/mm}^2$  ermittelt (siehe Abschnitt 4.3.1.4).

#### 4.3.2.6 Gegenüberstellung der Ergebnisse verschiedener Rechenmethoden

Neben der FEM werden die Verzahnungen auch nach ISO 6336-3, ISO 6336-3 – mod. Frühe und mit RIKOR berechnet und anschließend mit den Gleichungen (68) und (69) (siehe Stahl [89]) in die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,L1\%}$  bei Dauerlast im Laufversuch bei 1% Ausfallwahrscheinlichkeit umgerechnet.

$$\sigma_{F,L1\%} = 0,98 \cdot \sigma_{F,L50\%} \quad (68)$$

$$\sigma_{F,L1\%} = 0,82 \cdot \sigma_{F,P50\%} \quad (69)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 16 dargestellt.

Zahnfußspannungen $\sigma_{F,L1\%}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	<i>LFP-ea07-Fu</i>	<i>LFP-ea10-Fu</i>	<i>LFP-Ref-Puls</i>
nach ISO 6336-3 ( $K_A = K_V = 1,0$ )	1104	1237	815
nach ISO 6336-3 - mod NEU ( $K_A = K_V = 1,0$ )	1403	1384	815
RIKOR-Berechnung ( $K_A = K_V = 1,0$ )	-	1429	-
FEM-Berechnung ( $K_A = K_V = 1,0$ )	1040	984	818

**Tabelle 16:** Mit ISO 6336-3, ISO 6336-3 – mod Frühe, RIKOR und der FEM berechnete Zahnfußspannung  $\sigma_{F,L1\%}$  [N/mm<sup>2</sup>] bei Dauerlast mit 1%er Ausfallwahrscheinlichkeit im Laufversuch

Die im Pulsatorversuch auftretende Zahnfußbruchspannung  $\sigma_{F,P50\%}$  an der Referenzverzahnung *LFP-Ref-Puls*, die eine praxisübliche Geometrie aufweist, kann mit den Gleichungen der ISO 6336-3 und der FEM sehr realitätsnah berechnet werden. Mit Gleichung (69) ergibt sich für die Zahnfußspannung bei 1% Ausfallwahrscheinlichkeit im Laufversuch  $\sigma_{F,L1\%} = 815$  N/mm<sup>2</sup> bzw. 818 N/mm<sup>2</sup>.

Da die Laufverzahnungen ähnliche Materialeigenschaften, Härteverläufe und Rauheiten wie die gepulsten Verzahnungen aufweisen, ist bei ihnen mit einer ähnlichen Festigkeit am Fuß zu rechnen. Die bei den LowLoss-Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* mit Hilfe der FEM berechneten Zahnfußspannungen sind nur um ca. 20% größer ( $\sigma_{F,L1\%} = 984$  N/mm<sup>2</sup> bzw. 1040 N/mm<sup>2</sup>) als bei der Referenzverzahnung. Der FEM kann daher eine realitätsnahe Ermittlung der Spannungsverhältnisse am Zahnfuß von LowLoss-Verzahnungen bescheinigt werden.

Die nach ISO 6336-3 und mit RIKOR berechneten Zahnfußspannungen der LowLoss-Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* und *LFP-ea10-Fu* sind um bis zu 75% größer ( $\sigma_{F,L1\%} = 1104$  N/mm<sup>2</sup> bis 1429 N/mm<sup>2</sup>) als bei der Referenzverzahnung. Beide Verfahren berechnen die Zahnfußspannung mit Hilfe des statischen Modells des eingespannten Biegebalkens bzw. der eingespannten Biegeplatte. Dieses Modell ist auf Grund der gedungen Zahnform von LowLoss-Zahnradern (kleine Zahnhöhe, großer Eingriffswinkel) nicht mehr gültig. Die berechneten Spannungen liegen jedoch auf der sicheren Seite.



### 4.3.3 FEM-Berechnungen von LowLoss-Verzahnungen

Um das Tragverhalten von LowLoss-Verzahnungen genauer beurteilen zu können, reichen die zwei in Abschnitt 4.3.2 untersuchten Verzahnungsgeometrien nicht aus. Da mit Hilfe der FEM die in LowLoss-Verzahnungen auftretenden Zahnfußspannungen relativ genau und schnell ermittelt werden können, wird mit ihr eine Parameterstudie durchgeführt und damit zeit- und kostenintensive Versuche substituiert.

Die untersuchten LowLoss-Verzahnungen werden aus Forschungsvorhaben [42] [44] übernommen, bei denen aus in der Praxis verwendeten Verzahnungen verlustarme Verzahnungen entwickelt wurden. Die Verzahnungen *Industrie 1* (gemäßigt / extrem) und *Industrie 2* (gemäßigt / extrem) sind Modifikationen von zwei Industrieverzahnungen, die Verzahnungen *Fahrzeug* (gemäßigt / extrem) stammen von einer Verzahnung in einem Fahrzeuggetriebe ab. Es wird jeweils eine gemäßigte ( $\varepsilon_\alpha \approx 1,1$ ) und eine extreme ( $\varepsilon_\alpha \approx 0,6 \dots 0,8$ ) LowLoss-Verzahnung untersucht. In Tabelle 17 sind die Verzahnungsgeometrien und Korrekturen dargestellt. Das angesetzte Drehmoment entspricht dem Auslegungsdrehmoment der in der Industrie verwendeten Referenzverzahnungen.

Es stellt sich bei den FEM-Berechnungen heraus, dass sich durch eine geeignete Kopf- und Endrücknahme eine ausgeglichene Pressungsverteilung auf den Zahnflanken erreichen lässt. Auf eine Schrägungswinkelkorrektur, die bei den großen Breiten der Verzahnungen in der Praxis notwendig wäre, kann bei den FEM-Berechnungen verzichtet werden, indem die Torsionsverformung der Welle, auf der das Zahnrad liegt, verhindert wird. Die für LowLoss-Verzahnungen günstigen Korrekturbeträge und -längen lassen sich aus der Umfangskraft  $F_b$  am Grundkreis, der Zahnbreite  $b$ , sowie den Überdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  und  $\varepsilon_\beta$  ermitteln.

$$C_a = C_b = \frac{F_b}{100 \cdot b \cdot \min(\varepsilon_\alpha; 1)} \cdot \frac{\text{mm} \cdot \mu\text{m}}{N} \quad (70)$$

$$L_a = \frac{25\%}{\varepsilon_\alpha} \cdot g_\alpha \quad (71)$$

$$L_b = \frac{20\%}{\varepsilon_\beta} \cdot b \quad (72)$$

LowLoss-Verzahnungen		Industrie 1 gemäßigt	Industrie 1 extrem	Industrie 2 gemäßigt	Industrie 2 extrem	Fahrzeug gemäßigt	Fahrzeug extrem
Ritzeldrehmoment	$T$ [Nm]	12732,4	12732,4	5588	5588	425	425
Achsabstand	$a$ [mm]	265	265	240	240	91,5	91,5
Normalmodul	$m_n$ [mm]	5	4	4	3,25	1,92	1,81
Zähnezahl	$z_1$ [-]	32	40	21	26	34	39
	$z_2$ [-]	71	89	94	116	46	52
Schrägungswinkel	$\beta$ [°]	12	12	12,3	13	33	25
Profilverschiebungsfaktoren	$x_1$ [-]	0,2995	0,2862	0,5329	0,4984	0,0587	0,2075
	$x_2$ [-]	0,055	0,0243	0,6472	0,4927	-0,097	0,1431
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$ [°]	25	35	30	35	27	36
Zahnbreite	$b$ [mm]	150	180	120	137	23,3	28
Kopfkreisdurchmesser	$d_{a1}$ [mm]	174,6	171,0	97,2	93,4	81,8	80,6
	$d_{a2}$ [mm]	370,7	369,1	396,8	393,1	108,6	106,5
Fußformkreisdurchmesser	$d_{FF1}$ [mm]	159,728	160,945	83,091	86,863	74,457	76,340
	$d_{FF2}$ [mm]	356,594	359,191	382,603	386,920	101,331	102,242
Eingriffswinkel am Fußformkreis	$\alpha_{FF1}$ [°]	21,85	33,64	26,35	35,13	21,34	34,37
	$\alpha_{FF2}$ [°]	22,72	33,90	29,42	35,00	22,18	34,74
Profilüberdeckung	$\epsilon_\alpha$ [-]	1,106	0,802	1,095	0,612	1,104	0,652
Sprungüberdeckung	$\epsilon_\beta$ [-]	1,985	2,978	2,034	3,018	2,104	2,081
Gesamtüberdeckung	$\epsilon_\gamma$ [-]	3,091	3,78	3,129	3,63	3,208	2,733
Wkz.-Kopfhöhenfaktor	$h_{a0}^*$ [-]	0,98	0,79	1,05	0,7	1,14	0,75
Wkz.-Kopfrundungsfaktor	$\rho_{a0}^*$ [-]	0,516	0,446	0,31	0,567	0,334	0,4
Umfangskraft am Grundkreis	$F_b$ [N]	172462	191453	150993	158695	12666	13987
lineare Kopfrücknahme an Ritzel / Rad	$C_a$ [µm]	11	13	13	19	5	8
	$L_a / g_\alpha$ [-]	23%	31%	23%	41%	23%	38%
beidseitige Endrücknahme am Ritzel	$C_b$ [µm]	11	13	13	19	5	8
	$L_b / b$ [-]	10%	7%	10%	7%	10%	10%

Tabelle 17: Geometrie der mit der FEM untersuchten LowLoss-Verzahnungen

Die in den *FEM*-Berechnungen ermittelten maximalen Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM}$  von Ritzel und Rad sind Tabelle 18 zu entnehmen. Die dazugehörigen *FEM*-Ausdrucke bei den jeweils maßgebenden Eingriffsstellungen sind im Anhang (siehe Abbildung 66ff.) abgedruckt. Es gibt so gut wie keine Abhängigkeit der Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM}$  von der Eingriffsstellung. Die ermittelten maximalen Spannungen bei den jeweils zehn untersuchten Eingriffsstellungen schwanken nur geringfügig, da auf Grund des nahezu ganzzahligen Werts der Sprungüberdeckung  $\varepsilon_{\beta}$  die Berührlinienlänge während des Eingriffs in etwa konstant bleibt.

LowLoss-Verzahnungen		Industrie 1 gemäßigt	Industrie 1 extrem	Industrie 2 gemäßigt	Industrie 2 extrem	Fahrzeug gemäßigt	Fahrzeug extrem	LFP-ea10	LFP-ea07
FEM Ritzel & Rad	$\sigma_{F,FEM,Ri}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	386	383	540	557	541	497	1004	1061
	$\sigma_{F,FEM,Ra}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	383	381	517	554	555	496	917	972

**Tabelle 18:** Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM}$  der mit der *FEM* untersuchten LowLoss-Verzahnungen

#### 4.3.4 Anpassung des modifizierten Verfahrens

Das Tragverhalten von LowLoss-Verzahnungen bezüglich Zahnfußbruch kann wie folgt beschrieben werden:

Durch den großen Eingriffswinkel  $\alpha$  und die geringe Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha}$  ist der Eingriffswinkel  $\alpha_{Ff}$  am Fußformkreis, an dem die Evolvente in die Zahnfußausrundung übergeht, relativ groß. Bei den untersuchten Verzahnungen schwankt er zwischen  $\alpha_{Ff} = 21^{\circ} \dots 35^{\circ}$  (siehe Tabelle 17). Dies bedeutet, dass es teilweise keine  $30^{\circ}$ -Tangente am Zahnfuß mehr gibt und der Zahnfußbruch an einer Tangente mit größerem Winkel entsteht. Auf Grund des großen Eingriffswinkels  $\alpha_{Ff}$  am Fußformkreis trägt der Zahn die auf ihn wirkenden Kräfte nicht mehr als eingespannte Biegeplatte ab, sondern leitet sie hauptsächlich über Druckkräfte in den Zahnradkörper ab. Dadurch werden die am Zahnfuß auftretenden Biegezugspannungen reduziert. Neben diesem positiven Effekt weisen LowLoss-Verzahnungen auch ein ungünstiges Verhalten auf. Der große Eingriffswinkel  $\alpha_{Ff}$  am Fußformkreis und die gedrungene Zahnform bewirken zudem, dass die Berührlinie auf der Zahnflanke bei LowLoss-Verzahnungen näher am Zahnfuß ist als bei Standardverzahnungen. Auf Grund von Effekten im Krafteinleitungsbereich können am Zahnfuß bei Belastungen in dessen Nähe nicht unerhebliche Zugspannungen entstehen (siehe Abschnitt 4.3.1). Bei extremen LowLoss-Verzahnungen mit einer sehr geringen Profilüberdeckung ( $\varepsilon_{\alpha} < 0,8$ ) wird dieser Effekt maßgebend. Verläuft die Berührlinie steil über die Zahnflanke, was bei großen Schrägungswinkeln  $\beta$  der Fall ist, wird der Zahnfuß örtlich stärker belastet. Dieser Effekt kann auch bei Hypoidverzahnungen beobachtet werden [76] [109]. Paul führte bei der Berechnung der Zahnfuß-

spannung von Hypoidverzahnungen den Hypoidfaktor ein, in dem das Verhältnis von Höhe zu Breite des Zahnflankenbereichs eingeht, auf dem die Berührlinie verläuft.

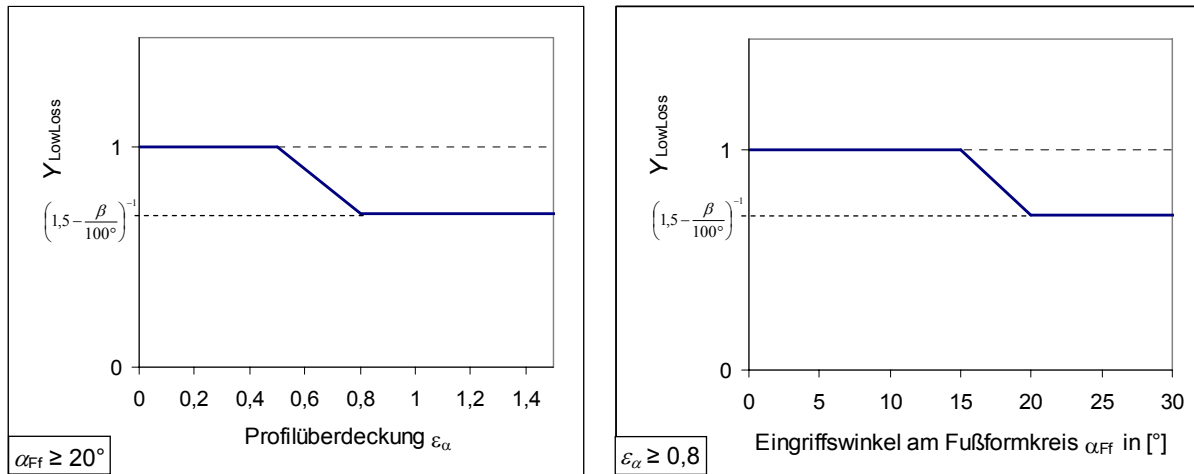
Bei der analytischen Berechnung der Zahnfußspannungen von LowLoss-Verzahnungen ist zu beachten, dass bei einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha < 1,0$  der äußere Einzeleingriffspunkt am Zahnkopf liegt. Da der nach ISO 6336-3 berechnete *EAP* oberhalb der Zahnflanke liegt ( $\varepsilon_\alpha - 1 < 0$ !), muss Gleichung (58) angepasst werden.

$$d_e = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \alpha_t}{|z|} \cdot \max(\varepsilon_\alpha - 1; 0) \right]^2 + \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} \quad (73)$$

Die Ergebnisse der FEM-Berechnungen (siehe Abschnitt 4.3.3) zeigen, dass LowLoss-Verzahnungen ein bis zu 50% günstigeres Tragverhalten aufweisen, d.h. die Spannung kann nur das  $(1,5)^{-1}$ -fache der nach *DIN 3990 T3 - mod. Frühe* berechneten Spannung sein. Dies ist vor allem bei kleinen Schrägungswinkeln  $\beta$  und Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha \geq 0,8$  der Fall. Die positiven Effekte des Tragverhaltens von LowLoss-Verzahnungen können mit dem LowLoss-Faktor  $Y_{\text{LowLoss}}$  berücksichtigt werden.

$$Y_{\text{LowLoss}} = \left( 1 + \left( 0,5 - \frac{\beta}{100^\circ} \right) \cdot \max \left[ 0; \min \left( \frac{\varepsilon_\alpha - 0,5}{0,3}; 1 \right) \right] \cdot \max \left[ 0; \min \left( \frac{\alpha_{\text{Ff}} - 15^\circ}{5^\circ}; 1 \right) \right] \right)^{-1} \quad (74)$$

Der Faktor berücksichtigt den ungünstigen Effekt von großen Schrägungswinkeln  $\beta$  und ist durch den Eingriffswinkel  $\alpha_{\text{Ff}}$  am Fußformkreis und der Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  begrenzt. Im Bereich von  $\alpha_{\text{Ff}} = 20^\circ$  bis  $15^\circ$  und  $\varepsilon_\alpha = 0,8$  bis  $0,5$  (siehe Abbildung 36) wird er linear auf  $Y_{\text{LowLoss}} = 1,0$  reduziert. Für große Eingriffswinkel am Fußformkreis  $\alpha_{\text{Ff}} \geq 20^\circ$  und große Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha \geq 0,8$  bestimmt er sich zu  $Y_{\text{LowLoss}} = (1,5 - \beta/100^\circ)^{-1}$ .



**Abbildung 36:** Begrenzung des LowLoss-Faktors  $Y_{LowLoss}$  in Abhängigkeit von der Profilüberdeckung  $\epsilon_\alpha$  und dem Eingriffswinkel  $\alpha_{Ff}$  am Fußformkreis

Die Qualität des vorgeschlagenen LowLoss-Faktors  $Y_{LowLoss}$  kann mit einem Vergleich der mit der *FEM* berechneten Zahnfußspannungen (Abschnitt 4.3.3) mit den nach *DIN 3990 T3 – mod. Frühe* (Abschnitt 4.2) berechneten Zahnfußspannungen beurteilt werden (siehe Tabelle 19). Der vorgeschlagene Faktor  $Y_{LowLoss}$  gibt das günstigere Tragverhalten bei den untersuchten LowLoss-Verzahnungen gut wieder.

LowLoss-Verzahnungen		Industrie 1 gemäßigt	Industrie 1 extrem	Industrie 2 gemäßigt	Industrie 2 extrem	Fahrzeug gemäßigt	Fahrzeug extrem	LFP-ea10	LFP-ea07
FEM Ritzel & Rad	$\sigma_{F,FEM,Ri}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	386	383	540	557	541	497	1004	1061
	$\sigma_{F,FEM,Ra}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	383	381	517	554	555	496	917	972
ISO 6336-3-mod Frühe (ohne $Y_{LowLoss}$ ) Ritzel & Rad	$\sigma_{F,6336-Frühe,Ri}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	532	592	786	642	699	603	1412	1432
	$\sigma_{F,6336-Frühe,Ra}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	511	580	805	610	683	599	1314	1255
Differenz ISO - FEM Ritzel & Rad	$\Delta_{ISO-FEM,Ri}$ [%]	38%	55%	46%	15%	29%	21%	41%	35%
	$\Delta_{ISO-FEM,Ra}$ [%]	33%	52%	56%	10%	23%	21%	43%	29%
durch Faktor $Y_{LowLoss}$ berücksichtigte höhere Tragfähigkeit	$\Delta$ [%]	38%	38%	38%	14%	17%	13%	35%	23%

**Tabelle 19:** Gegenüberstellung der mit der *FEM* (Abschnitt 4.3.3) und der nach *DIN 3990 T3 – mod. Frühe* (Abschnitt 4.2) berechneten Zahnfußspannungen  $\sigma_F$  sowie des aus der Differenz empirisch ermittelten LowLoss-Faktors  $Y_{LowLoss}$

Das günstige Tragverhalten von LowLoss-Verzahnungen kann aber nur bei einer hohen Fertigungsqualität und einer präzisen Auslegung der Verzahnungskorrekturen erreicht werden. Auf Grund der gedrungenen Zahnform besitzen die LowLoss-Zahnräder eine hohe Zahnsteifigkeit. Schon geringe Flankenabweichungen und Schiefstellungen der Wellen der Verzahnungen können zu größeren Ungleichverteilungen der Flankenlast führen, wodurch die Zahnfuß- aber auch die Zahnflankentragfähigkeit deutlich gemindert werden.

## 5 Minimierung der Zahnfußspannung durch Optimierung des Zahnfußes

Der vorhergehende Abschnitt 4 beschäftigt sich mit der Berechnung der Zahnfußspannung. Der dort vorgestellte Vorschlag zur Verbesserung der ISO 6336-3 ermöglicht eine genauere und sicherere Auslegung von Verzahnungen, mit der die Potenziale einer Verzahnung bezüglich der Zahnfußtragfähigkeit besser ausgenutzt und kleinere, kompaktere Getriebe konstruiert werden können. Eine weitere in diesem Abschnitt untersuchte Möglichkeit zur Optimierung von Verzahnungen besteht in der Optimierung der Zahnfußform und einer dadurch erreichbaren Zahnfußspannungsminimierung.

Bei der Auslegung von Zahnrädern ist der Konstrukteur an einer ausreichenden Flanken- und Fußtragfähigkeit von Ritzel und Rad interessiert. Zusätzlich versucht er das Getriebe hinsichtlich Bauraum (d.h. Achsabstand  $a$  und Breite  $b$ ), Wirkungsgrad oder Schwingungsanregung zu optimieren. Dies beeinflusst er mit der Wahl von geeigneten Verzahnungsparametern und Korrekturen. Damit legt er in der Regel aber nur die Zahnflankenform fest. Der Zahnfuß ist in seiner Form damit noch nicht eindeutig bestimmt. Durch die Wahl eines geeigneten Werkzeugs kann die Fußform optimiert und eine zum Teil erhebliche Steigerung der Zahnfußtragfähigkeit erzielt werden. Dadurch entsteht Potential für eine weitere Reduzierung des Bau-raums oder eine Verbesserung des Wirkungsgrades, welches zurzeit nur vereinzelt ausge-nutzt wird. In diesem Abschnitt wird zuerst der Einfluss des Werkzeugs auf die Zahnfußform und die Zahnfußspannung systematisch untersucht. Darauf aufbauend werden Empfehlungen für die Wahl des optimalen Werkzeugs erarbeitet.

Bei der Optimierung der Zahnfußform wird vorausgesetzt, dass der Konstrukteur eine Freiheit bei der Wahl des Werkzeuges hat. In der heutigen Zeit ist auf Grund der immer knapper und teurer werdenden Ressourcen die Fertigung eines „maßgeschneiderten“ Werkzeuges schon bei mittleren Stückzahlen wirtschaftlich. Bei kleinen Stückzahlen werden Verfahren wie Profilschleifen, die eine beliebige Zahnfußform ermöglichen, immer häufiger angewandt.

### 5.1 Definition eines Zahnrades

Die Makrogeometrie bzw. Form der Vor- und Rückflanke eines Zahnrades wird mit sieben Parametern eindeutig festgelegt.

Davon bestimmen zwei Parameter die Form des Zahnrades in Achsrichtung:

- Zahnbreite  $b$   
→ Breite des Zahnrades
- Schrägungswinkel  $\beta$   
→ Steigungswinkel  $\gamma$  der Spirale [23], auf der die schrägverzahnten Zähne liegen

Fünf Parameter bestimmen die Zahnform im Stirnschnitt:

- Grundkreisdurchmesser  $d_b$  (bzw. Teilkreisdurchmesser  $d$ )  
→ Krümmung der Flanke im Profil bzw. die Form der Evolvente

$$d = \frac{d_b}{\cos \alpha_t} \quad \text{mit} \quad (75)$$

$$\alpha_t = \arctan(\tan \alpha_n \cdot \cos \beta) \quad (76)$$

- Zähnezahl  $z$  (bzw. Stirnmodul  $m_t$  oder Normalmodul  $m_n$ )  
→ Anzahl der Zähne

$$m_t = \frac{d}{z} \quad (77)$$

$$m_n = m_t \cdot \cos \beta \quad (78)$$

- Zahndicke  $s_b$  am Grundkreis (bzw. der Profilverschiebungsfaktor  $x$ )  
→ Abstand von Vor- und Rückflanke bzw. die Zahndicke

$$s_b = d_b \cdot \left( \frac{m_t \cdot (\pi/2 + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_t)}{d} + \text{inv} \alpha_t \right) \quad [59], \text{ bzw.} \quad (79)$$

$$x = \frac{\left( \frac{s_b}{d_b} - \text{inv} \alpha_t \right) \cdot \frac{d}{m_t} - \pi/2}{2 \cdot \tan \alpha_t} \quad (80)$$

- Kopfkreisdurchmesser  $d_a$   
→ obere Ende der Zahnflanken
- Fußnutzkreisdurchmesser  $d_{Nf}$  (bzw. Fußformkreisdurchmesser  $d_{FF}$ )  
→ untere Ende der Zahnflanken

$$d_{FF} \leq d_{Nf} \quad (81)$$

Ein Zahnrad ist unabhängig vom Eingriffswinkel  $\alpha_n$  bzw.  $\alpha_t$  definierbar. Bei Änderung des Eingriffswinkels  $\alpha_n$  ändern sich nach den Gleichungen (75) bis (80) bei gleichbleibendem Zahnrad lediglich die abgeleiteten Größen  $d(\alpha_n)$ ,  $m_t(\alpha_n)$ ,  $m_n(\alpha_n)$  und  $x(\alpha_n)$ . In letzter Zeit werden vermehrt Zahnräder mit Eingriffswinkel  $\alpha_t \neq 20^\circ$  gefertigt und definiert. Daher ist der in der Praxis oftmals verwendete Spruch

*„Zahnräder mit gleichem Modul kämmen miteinander.“*

zu unpräzise. Er muss lauten:

*„Zahnräder mit gleichem Modul bei gleichem Eingriffswinkel kämmen miteinander.“*

Bei der Definition von Zahnrädern mit einem Eingriffswinkel  $\alpha_n \neq 20^\circ$  sollte daher bei der Angabe der Verzahnungsparameter immer der Eingriffswinkel im Index mit angegeben werden, z.B. bei  $\alpha_n = 30^\circ$ :  $d_{30^\circ}$ ,  $m_{t,30^\circ}$ ,  $m_{n,30^\circ}$  und  $x_{30^\circ}$ .

Die bisherigen Überlegungen beziehen sich auf die Flankenform. Die Zahnfußform kann bei festgelegter Flankenform durch drei Werkzeugparameter beeinflusst werden:

Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0}$ , Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0}$  und Werkzeugprofilwinkel  $\alpha_{P0}$ .



## 5.2 Referenzverzahnungen

Für die weiteren theoretischen Untersuchungen werden 19 Referenzverzahnungen (mit jeweils sieben Parametern für die Zahnflankendefinition) festgelegt, von denen ausgehend eine Optimierung der Zahnfußform zur Minimierung der Zahnfußspannung vorgenommen wird.

- Die Zahnfußspannungsberechnungen sollen in einem zweidimensionalen Modell an Geradverzahnungen erfolgen. Somit wird der Schrägungswinkel zu  $\beta = 0^\circ$  gewählt.
- Die Zahnbreite  $b$  ist bei einer Betrachtung im 2D ohne Relevanz.
- Der Grundkreis  $d_b$  eines Zahnrades kann als Größenfaktor betrachtet werden. Da Stahlzahnräder ein linearelastisches Tragverhalten aufweisen, geht die Baugröße linear in die Zahnfußspannungsberechnung ein. Auf eine Variation von  $d_b$  kann daher verzichtet werden. Der Grundkreis wird zu  $d_b = 112,763$  mm (bzw.  $d = 120$  mm) festgelegt.
- Die Zähnezahl  $z$  wird in neun Schritten variiert ( $z = 12, 15, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80$ ).
- Der Profilverschiebungsfaktor  $x$  wird ebenfalls variiert. Da eine Profilverschiebung nur bei Zahnrädern mit einer kleinen Zähnezahl einen deutlichen Einfluss auf die Zahnfußform hat, wird nur bei den Zahnrädern mit  $z \leq 40$  zusätzlich eine negative und eine positive Profilverschiebung aufgebracht. Die Größe der negativen Profilverschiebung wird so gewählt, dass kein Unterschnitt entsteht bzw. dieser nicht zu groß wird. Die positive Profilverschiebung hat den gleichen Absolutwert wie die negative Profilverschiebung.
- Der Kopfkreisdurchmesser  $d_a$  hat keinen Einfluss auf den Zahnfuß und wird nicht variiert.
- Ebenso wird auf eine Variation des Fußformkreisdurchmessers  $d_{Ff}$  verzichtet. Dieser ergibt sich aus dem gewählten Werkzeug zur Erzeugung der Referenzverzahnungen. Als Werkzeug wird das Bezugsprofil II nach *DIN 3972* [25] gewählt mit Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0} = 0,2 \cdot m_t$ , Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0} = 1,25 \cdot m_t$  und Werkzeugprofilwinkel  $\alpha_{P0} = 20^\circ$ .

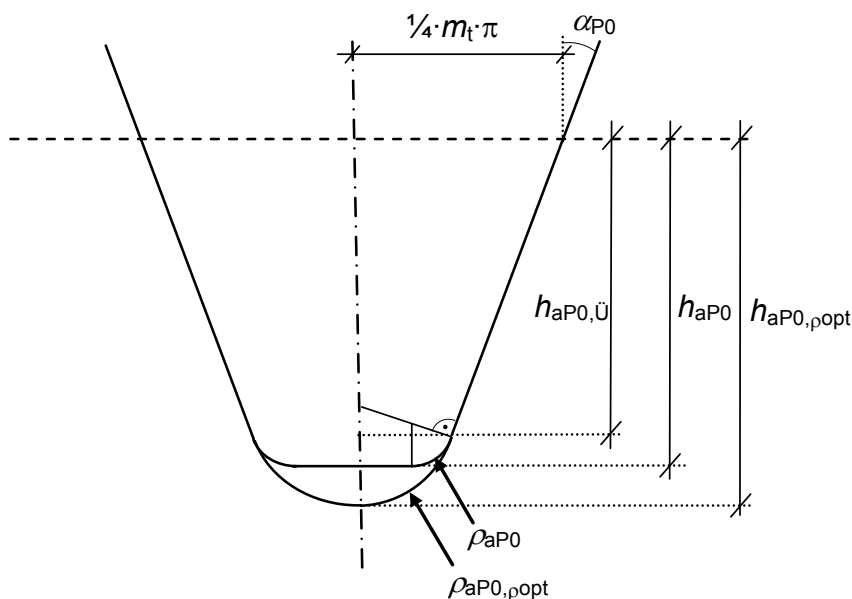
Die Verzahnungsgrößen (siehe Tabelle 20) sowie die Stirnschnitte (siehe Abbildung 78 ff) der Referenzverzahnungen sind im Anhang abgedruckt.

### 5.3 Optimales Standardwerkzeug mit kreisförmiger Kopfrundung

Stirnzahnrädern weisen üblicherweise eine Evolventenverzahnung nach *DIN 876* [21] auf. Der in dieser Norm festgelegte Profilwinkel  $\alpha_p = 20^\circ$  des Bezugsprofils wird gelegentlich variiert. Die zur Erstellung dieser Verzahnung erforderlichen Werkzeuge haben ein zahnstangenförmiges Profil mit einem Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0}$ , einer Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0}$  und einem Werkzeugprofilwinkel  $\alpha_{P0}$ . Ausgehend von Bezugsprofil II, das bei den Referenzverzahnungen verwendet wird, soll schrittweise durch eine Modifikation dieser drei Werkzeugkenngrößen die Zahnfußspannung minimiert werden. Die Geometriegrößen der modifizierten Verzahnungen sind in Tabelle 21 im Anhang dargestellt.

#### 5.3.1 Optimierung des Werkzeugkopfrundungsradius' $\rho_{aP0}$

In einem ersten Schritt wird der Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0}$  optimiert, indem er maximiert wird. In Abbildung 37 sind die geometrischen Beziehungen am Werkzeug dargestellt.



**Abbildung 37:** Maximierung des Kopfrundungsradius' am Verzahnungswerkzeug

Der Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0,\rho,opt}$  berechnet sich mit Gleichung (82) und (83).

$$\begin{aligned}
 h_{aP0,\bar{U}} &= h_{aP0} - \rho_{aP0} \cdot (1 - \sin \alpha_{P0}) = \\
 &= 1,25 \cdot m_t - 0,2 \cdot m_t \cdot (1 - \sin 20^\circ) = 1,118 \cdot m_t
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

$$\begin{aligned} \rho_{aP0, \rho \text{ opt}} &= \frac{\frac{m_t \cdot \pi}{4} - h_{aP0, \bar{U}} \cdot \tan \alpha_{P0}}{\cos \alpha_{P0}} = \\ &= \frac{\frac{m_t \cdot \pi}{4} - 1,118 \cdot m_t \cdot \tan 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 0,403 \cdot m_t \end{aligned} \quad (83)$$

Die Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0, \rho \text{ opt}}$  muss angepasst werden.

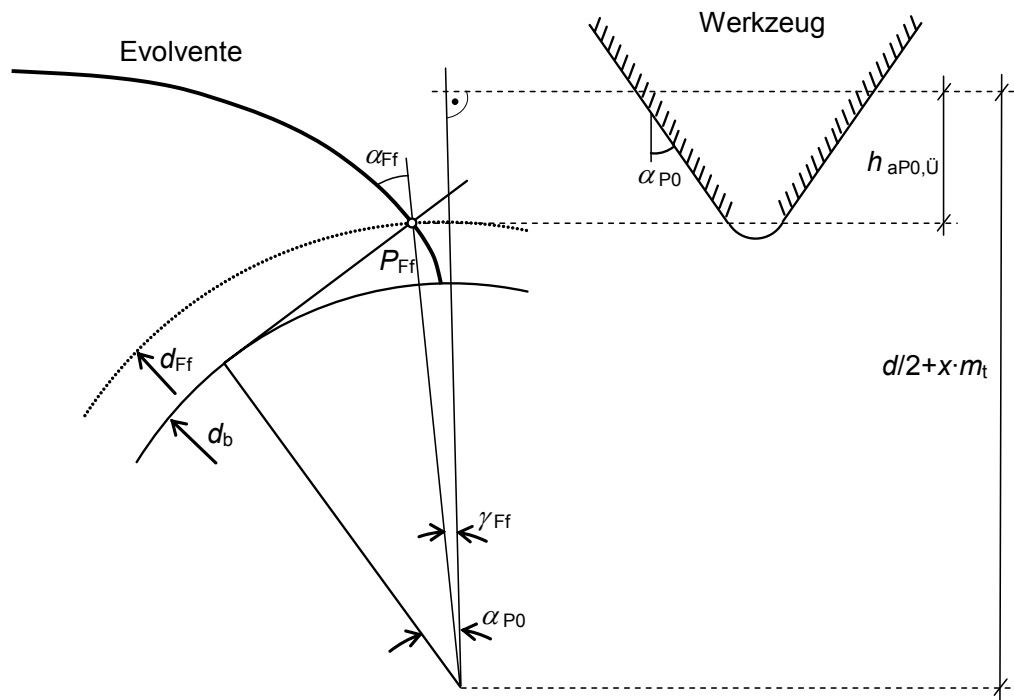
$$\begin{aligned} h_{aP0, \rho \text{ opt}} &= h_{aP0, \bar{U}} + \rho_{aP0, \rho \text{ opt}} \cdot (1 - \sin \alpha_{P0}) = \\ &= 1,118 \cdot m_t + 0,402 \cdot m_t \cdot (1 - \sin 20^\circ) = 1,383 \cdot m_t \end{aligned} \quad (84)$$

### 5.3.2 Optimierung der Werkzeugkopfhöhe $h_{aP0}$ und des Werkzeugkopfrundungsradius'

$\rho_{aP0}$

Die Referenzverzahnungen mit einer kleinen Zähnezahl und einer großen negativen Profilverschiebung weisen Unterschnitt auf (Referenzverzahnungen 11, 14, 16, 17, 18 und 19). Die Werkzeugkopfhöhe ist bei diesen Verzahnungen zu groß. Durch eine Optimierung (Reduzierung) der Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0}$  kann der Unterschnitt vermieden und eine weitere Steigerung der Zahnfußtragfähigkeit erreicht werden.

Der Zahnflankenpunkt  $P_{Ff}$  am Fußformkreis  $d_{Ff}$  wird vom Werkzeug mit einem Werkzeugprofilwinkel  $\alpha_{P0}$  bei einem Wälzwinkel  $\gamma_{Ff}$  erzeugt (siehe Abbildung 38).



**Abbildung 38:** Geometrische Verhältnisse beim Erzeugen des Zahnflankenpunktes am Fußformkreis

$$\gamma_{Ff} = \alpha_{P0} - \alpha_{Ff} = \alpha_{P0} - \arccos\left(\frac{d_b}{d_{Ff}}\right) \quad (85)$$

Die Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0,\dot{U}}$  des Werkzeugflankenpunktes, der den Zahnflankenpunkt  $P_{Ff}$  erzeugt, berechnet sich nun zu

$$h_{aP0,\dot{U}} = \frac{d}{2} + x \cdot m_t - \frac{d_{Ff}}{2} \cdot \cos \gamma_{Ff} = \frac{d}{2} + x \cdot m_t - \frac{d_{Ff}}{2} \cdot \cos\left(\alpha_{P0} - \arccos\left(\frac{d_b}{d_{Ff}}\right)\right) \quad (86)$$

Am eben berechneten Werkzeugflankenpunkt geht das optimierte Werkzeug in eine kreisförmige Ausrundung über (siehe Abbildung 37). Nach Gleichung (83) und (84) lassen sich der Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0,h\&\rho_{opt}}$  und die Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0,h\&\rho_{opt}}$  berechnen.

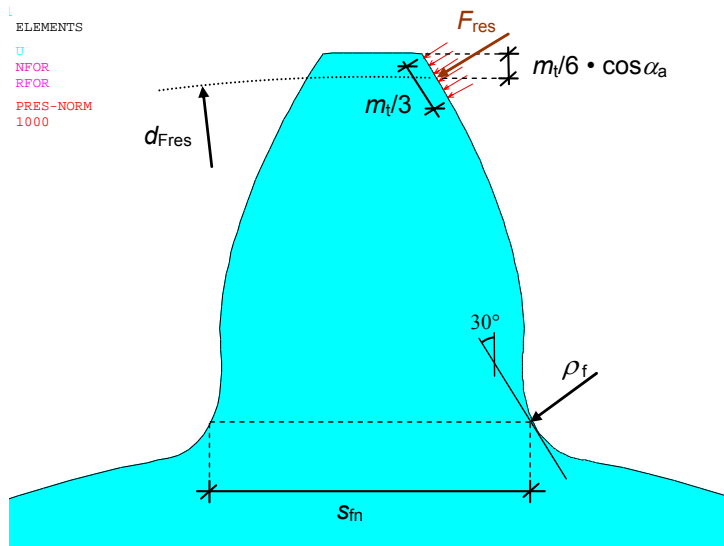
### 5.3.3 Optimierung des Werkzeugprofilwinkels $\alpha_{p0}$ , der Werkzeugkopfhöhe $h_{aP0}$ und des Werkzeugkopfrundungsradius' $\rho_{aP0}$

Eine weitere Optimierung der Zahnfußrundung kann durch eine Modifikation des Werkzeugprofilwinkels  $\alpha_{p0}$  erreicht werden. Ein veränderter Werkzeugprofilwinkel  $\alpha_{p0}$  wirkt sich auf die Werkzeugkopfgeometrie, den Teilkreisdurchmesser  $d$ , den Modul  $m_t$ , die Profilverschiebung  $x$  (siehe Gleichungen (75) ff.) und somit auch auf die erzeugte Zahnfußform und die am Zahnfuß entstehenden Zahnfußspannungen aus. Der Variation des Werkzeugprofilwinkels sind geometrische Grenzen auf Grund des Abwälzvorgangs bei der Verzahnungserzeugung gesetzt. Der Werkzeugprofilwinkel wird mit  $\alpha_{p0} = 15^\circ$  und  $\alpha_{p0} = 25^\circ$  (bzw.  $24^\circ$ ) variiert.

Um die selben Zahnflanken wie bei den Referenzverzahnungen zu erhalten, muss der Teilkreisdurchmesser  $d$ , der Modul  $m_t$  und die Profilverschiebung  $x$  nach den Gleichungen (75), (77) und (80) angepasst werden. Die Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0,Ü}$  am Übergangspunkt der Werkzeugkopfrundung, sowie der optimierte Werkzeugkopfrundungsradius  $\rho_{aP0,\alpha\&h\&\rho\text{opt}}$  und die Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0,\alpha\&h\&\rho\text{opt}}$  berechnen sich analog zu Abschnitt 5.3.2.

### 5.3.4 Ermittlung und Auswertung der Zahnfußspannungen

Sämtliche Zahnräder – die Referenzverzahnungen und ihre Modifikationen – werden einheitlich jeweils mit einer Flächenlast von  $1000 \text{ N/mm}^2$  am Zahnkopf über eine Länge von  $\frac{1}{3} \cdot \text{Modul}$  belastet (siehe Abbildung 39).



**Abbildung 39:** Zahn mit Lastabgriff am Kopf  $p = 1000 \text{ N/mm}^2$

Zur analytischen Berechnung der Zahnfußspannung werden in einem ersten Schritt die resultierende Kraft  $F_{\text{res}}$  und ihr Angriffspunkt  $d_{F_{\text{res}}}$  ermittelt.

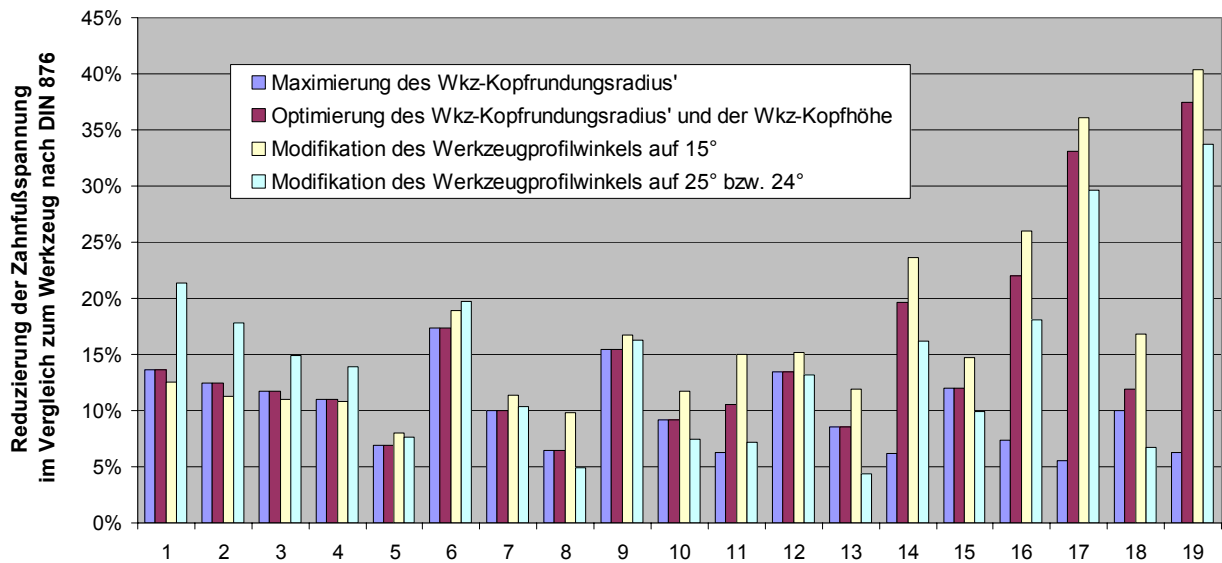
$$\frac{F_{\text{res}}}{b \cdot m_t} = \frac{1000}{3} \text{ N/mm}^2 \quad (87)$$

$$d_{F_{\text{res}}} = d_a - \frac{m_t}{3} \cdot \cos \alpha_a \quad (88)$$

Damit kann analog zur *ISO 6336-3* die Nennspannung an der  $30^\circ$ -Tangente im Fuß bei Kraftangriff am Kopf (siehe Abbildung 39) berechnet werden. Die für die Referenzverzahnungen und die zuvor beschriebenen Modifikationen ermittelten Zahnfußspannungen sind in Tabelle 22 im Anhang zusammengestellt.

Im Vergleich der Zahnfußspannungen miteinander lässt sich das Potential der in den letzten drei Abschnitten beschriebenen Optimierung der Werkzeuggeometrie bezüglich der Erhöhung der Zahnfußtragfähigkeit feststellen. Eine Reduzierung der Zahnfußspannung entspricht einer Erhöhung der Zahnfußtragfähigkeit im selben Verhältnis.

Die Reduzierung der Zahnfußspannungen ist in Abbildung 40 dargestellt.



**Abbildung 40:** Reduzierung der Zahnfußspannung  $\sigma_{F0}$  nach ISO 6336-3 in % bei den 19 Referenzverzahnungen durch Modifikation des Werkzeugs mit kreisförmiger Kopfrundung

Durch die alleinige Maximierung des Werkzeugkopfrundungsradius'  $\rho_{aP0}$  (siehe Abschnitt 5.3.1) kann die Zahnfußspannung um durchschnittlich 10% reduziert werden.

Bei den Verzahnungen mit Unterschnitt kann der Unterschnitt (bei gleichbleibender Zahnflanke!) durch eine Reduzierung der Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0}$  vermieden werden (siehe Abschnitt 5.3.2), wodurch sich die Zahnfußtragfähigkeit zum Teil deutlich steigern lässt. Im Vergleich zu den Referenzverzahnungen ergibt sich eine durchschnittliche Verringerung der Zahnfußspannung von 15%.

Mit einer Modifikation des Werkzeugprofilwinkels  $\alpha_{P0}$  (siehe Abschnitt 5.3.3) kann ebenfalls eine Erhöhung der Zahnfußtragfähigkeit erzielt werden. Bei Verzahnungen mit einer großen Zähnezahzahl oder einer positiven Profilverschiebung (Eingriffswinkel am Fußformkreis  $\alpha_{Ff} > 10^\circ$ ) wirkt sich eine Vergrößerung des Werkzeugprofilwinkels positiv aus, bei Verzahnungen mit einer kleinen Zähnezahzahl oder einer negativen Profilverschiebung ( $\alpha_{Ff} < 10^\circ$ ) ist dagegen eine Verkleinerung des Werkzeugprofilwinkels vorteilhaft für die Zahnfußtragfähigkeit. Durch diese Maßnahme lässt sich eine nochmalige Zahnfußspannungsreduzierung von bis zu 7% erzielen. Im Vergleich zu den Referenzverzahnungen wird eine Verringerung der Zahnfußspannung um 18% erreicht (bei kleinen Zähnezahlen z.T. um mehr als 30%).

### **5.3.5 Abgleich der analog zur ISO 6336-3 ermittelten Zahnfußspannungen mit der FEM**

Alle Referenzverzahnungen und ihre Modifikationen werden auch mit der *FEM* untersucht. Zur Berechnung der Zahnfußspannung wird die Geometrie in das *FEM*-Programm importiert. Dies geschieht über eine Schnittstelle zwischen *STplus* [45] und *ANSYS* [2]. Die Berechnung wird im 2D unter Annahme eines ebenen Verformungszustandes durchgeführt. Die maximale 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  am Fuß wird ausgelesen. In Tabelle 22 im Anhang werden die mit der *FEM* berechneten Zahnfußspannungen den analog zur *ISO 6336-3* ermittelten analytischen Ergebnissen gegenübergestellt. Beide Rechenmethoden zeigen bei diesen Verzahnungen eine hohe Übereinstimmung. Im Durchschnitt weichen die Werte bei den insgesamt 82 Verzahnungen um nur 2,6% voneinander ab.

Bei Verzahnungen mit einer Standardgeometrie wird die spannungserhöhende Wirkung der Fußkerbe mit dem Verfahren der *ISO 6336-3* sehr gut erfasst.



#### 5.4 Minimierung der Zahnfußspannung durch elliptische Fußausrundungen

In einem weiteren Schritt werden Verzahnungen berechnet, die eine von der *ISO 6336-3* abweichende Zahnfußform besitzen. Die Gültigkeit der Norm ist nicht mehr gegeben, da die maximale Zahnfußspannung an anderen Stellen als der 30°-Tangenten auftreten kann. Mit der *FEM* ist eine Untersuchung dieser Verzahnungen möglich.

Zur Optimierung der Zahnfußform mit Hilfe von numerischen Methoden existieren verschiedene Untersuchungen [9] [51] [63]. Eine elliptische Fußausrundung kommt dem optimalen Zahnfuß meistens sehr nahe. Zur Form, Größe und Lage der Ellipse gibt es bisher keine systematischen Untersuchungen. Die optimalen Geometriegrößen der Zahnfußellipse sollen in diesem Abschnitt bestimmt werden. Dazu werden an den Referenzverzahnungen unterschiedliche elliptische Zahnfußformen aufgebracht und die Zahnfußspannung  $\sigma_1$  mit der *FEM* bestimmt. Variiert werden die Neigung  $\gamma$  der Ellipse und das Verhältnis  $a/b$  der beiden Ellipsenhauptachsen  $a$  und  $b$ . Es wird gefordert, dass die aus Ellipsen und Zahnflanken gebildete Zahnform durchweg eine Tangentenstetigkeit aufweist (siehe Abbildung 41). Aus der Tangentenstetigkeit ergibt sich zwangsläufig der Absolutwert der Ellipsenhauptachsen und der Fußkreisdurchmesser  $d_f$ .

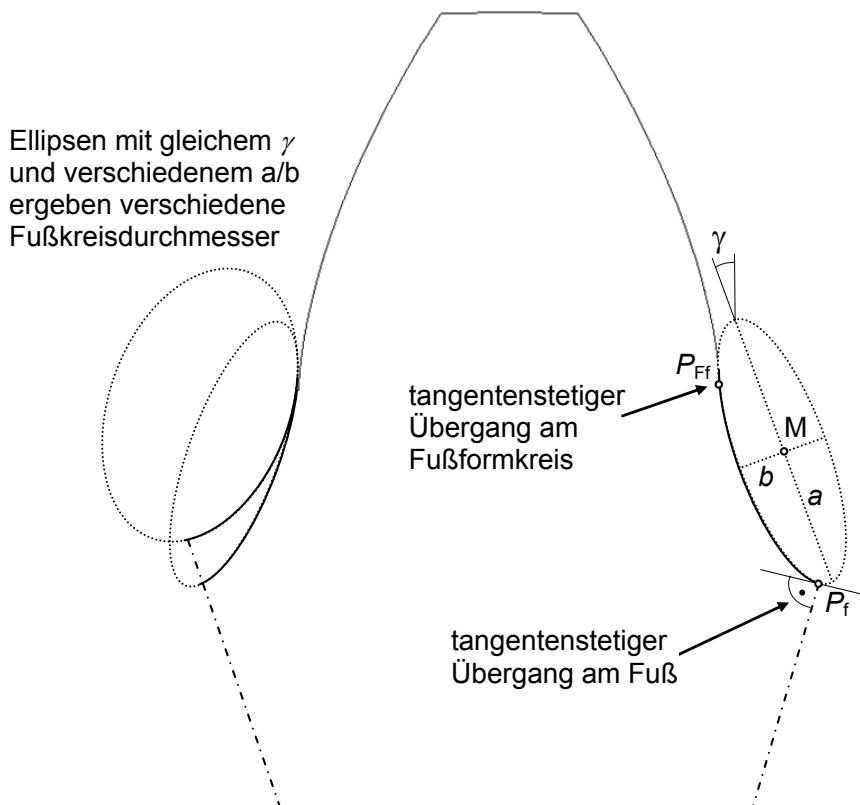


Abbildung 41: Zahnfußausrundung mit tangentialen Ellipsen

### 5.4.1 Herleitung der Gleichungen einer Zahnfußellipse

Das tangenzenstetige Einpassen einer Ellipse in den Zahnfuß stellt ein mathematisches Problem dar. Die Lage und Form einer Ellipse wird durch fünf Parameter festgelegt, d.h. sie besitzt fünf Freiheitsgrade (5 FG): X- und Y-Koordinate des Mittelpunktes (2 FG), Neigung  $\gamma$  der Hauptachsen (1 FG) und Größe der Hauptachsen  $a$  und  $b$  (2 FG). Anstatt  $a$  und  $b$  kann man alternativ auch  $a$  und das Hauptachsenverhältnis  $a/b$  zur Definition verwenden. Wenn die Ellipse tangenzenstetig in den Zahnfuß eingepasst wird (siehe Abbildung 41), sind drei dieser Freiheitsgrade festgelegt durch die Lage und Steigung am Fußformkreis-Punkt  $P_{Ff}$  (2 FG) und die Steigung am Fußkreis-Punkt  $P_f$  (1 FG). Folglich bleiben zur Definition der Ellipse nur noch zwei Freiheitsgrade ( $5 - 3 = 2$ ) übrig. Es zeigt sich, dass es für eine allgemeine Zahnfußellipsendefinition günstig ist, die Neigung  $\gamma$  ( $0^\circ \dots 45^\circ$ ) und das Verhältnis der Hauptachsen  $a/b$  ( $0 \dots \infty$ ) variabel zu lassen.

Die Ellipse im Zahnfuß inklusive der Winkel, Punkte und Längen ist in Abbildung 42 dargestellt. Dabei ist  $z$  die Zähnezah,  $\alpha_{Ff}$  der Eingriffswinkel am Fußformkreis und  $\widehat{s}_{Ff}$  der entsprechende Zahndickenwinkel.

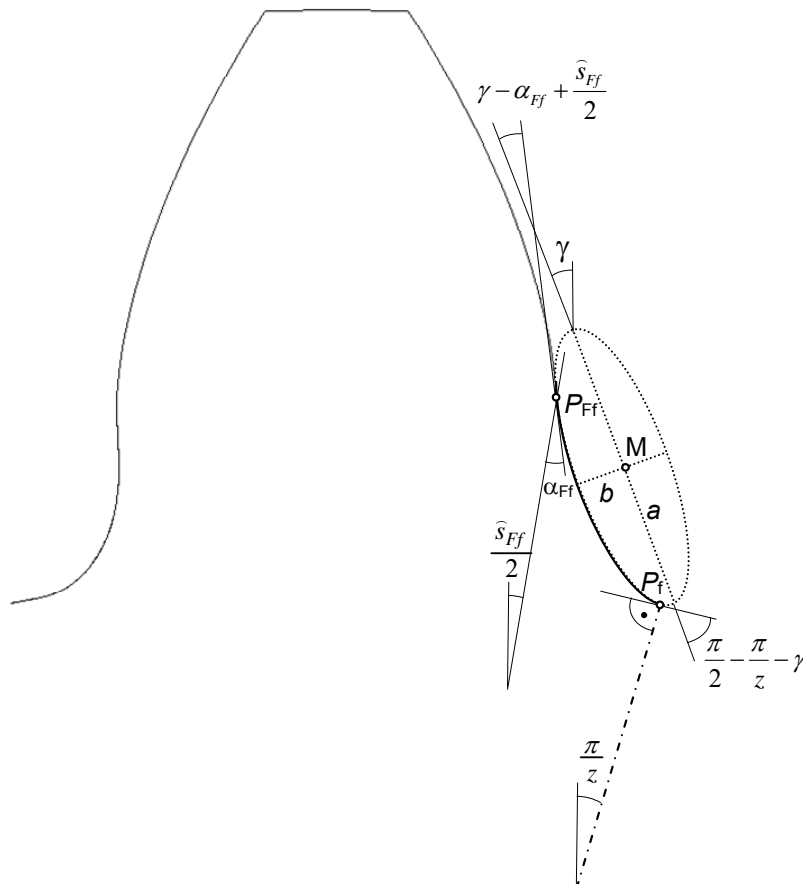
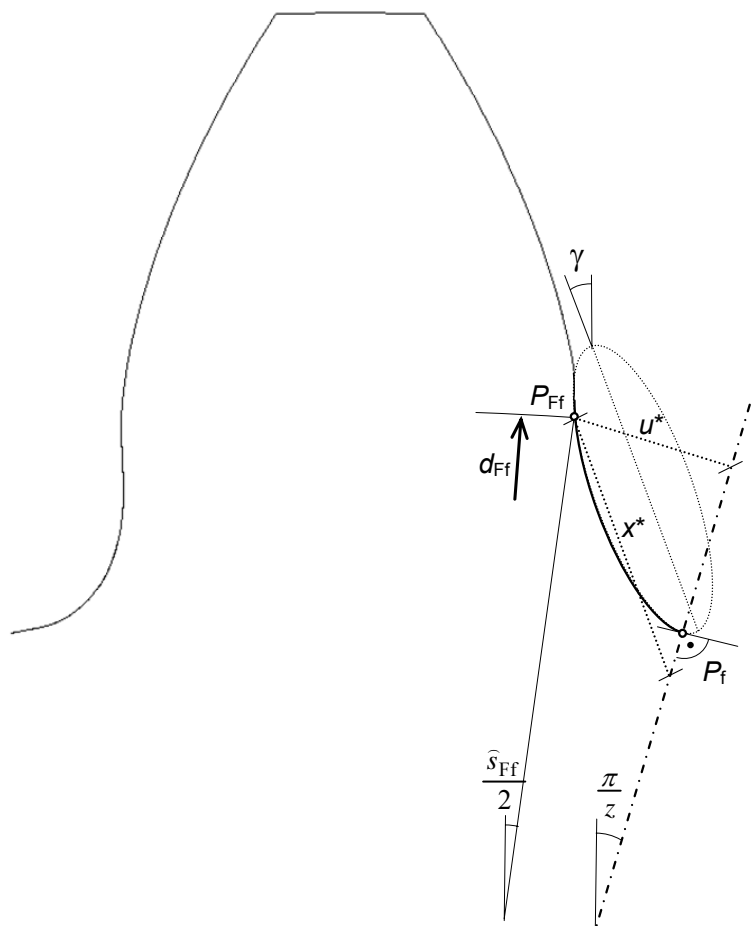


Abbildung 42: Geometrie einer Ellipse im Zahnfuß

Zur mathematischen Definition der Ellipse ist die Länge  $x^*$  der im Ellipsenwinkel  $\gamma$  geneigten Strecke zwischen Punkt  $P_{\text{Ff}}$  und der Zahnfußhalbierenden Symmetrieachse erforderlich (siehe Abbildung 43).

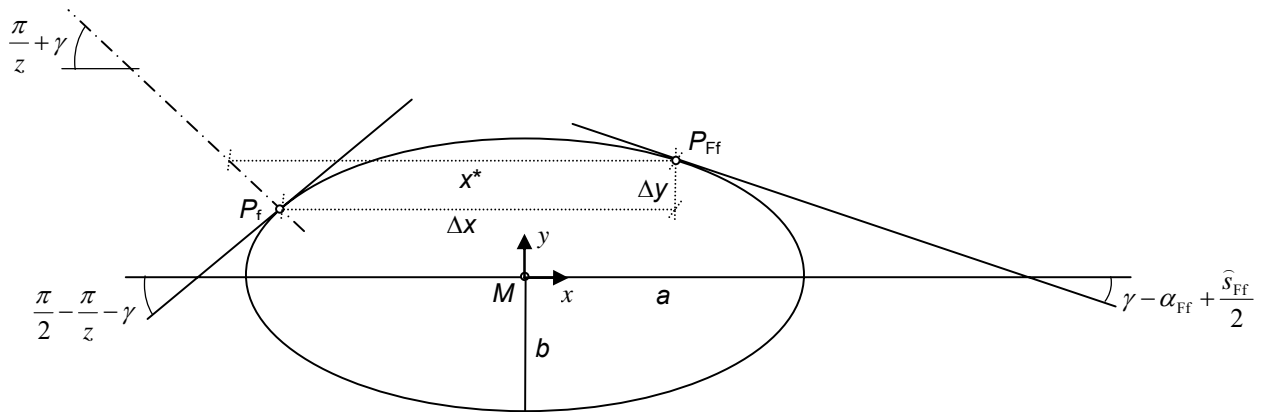
$$x^* = \frac{u^*}{\sin\left(\frac{\pi}{z} + \gamma\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z} - \frac{\widehat{s}_{\text{Ff}}}{2}\right) \cdot \frac{d_{\text{Ff}}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{z} + \gamma\right)} \quad (89)$$

Dabei ist  $d_{\text{Ff}}$  der Durchmesser am Fußformkreis.



**Abbildung 43:** Geometriegrößen am Zahnfuß

Die Ellipse lässt sich nun vereinfacht in Abbildung 44 darstellen.



**Abbildung 44:** Vereinfachte Darstellung der Ellipse im Zahnfuß

Die Ellipsengleichung in kartesischer Form lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (90)$$

Da für die Ellipse am Zahnfuß nur positive Werte von  $y$  möglich sind, kann man auch schreiben

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} \quad (91)$$

Durch Ableiten nach  $\frac{d}{dx}$  kann die Tangentensteigung  $m_i$  von jedem Punkt der Ellipse bestimmt werden.

$$\frac{d}{dx_i} y_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_i^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot x_i = -\frac{x_i}{|x_i|} \cdot \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{a^2}{x_i^2} - 1}} = m_i \quad (92)$$

Durch Auflösen nach  $x_i$  erhält man die  $x$ -Koordinate eines beliebigen Punktes auf der Ellipse in Abhängigkeit von seiner Tangentensteigung  $m_i$  und den Hauptachsen  $a$  und  $b$ .

$$x_i = -\frac{m_i}{|m_i|} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_i^2} + 1}} \quad (93)$$

Setzt man Gleichung (93) in (91) ein, erhält man die  $y$ -Koordinate.

$$y_i = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_i^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_i^2} + 1}} = a \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{m_i^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \quad (94)$$

Von der Zahnfußellipse sind die Tangentensteigungen  $m_{Ff}$  am Fußformkreis und  $m_f$  am Fußkreis bekannt (siehe Abbildung 44). Sie berechnen sich zu

$$m_{Ff} = -\tan\left(\gamma - \alpha_{Ff} + \frac{\widehat{s}_{Ff}}{2}\right) \quad (95)$$

$$m_f = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z} - \gamma\right) > 0 \quad (96)$$

Damit lassen sich die Koordinaten der Zahnfußpunkte  $P_{Ff}$  und  $P_f$  und die Strecken  $\Delta x$  und  $\Delta y$  aus Abbildung 44 in Abhängigkeit von den Hauptachsen  $a$  und  $b$  bestimmen.

$$\Delta x = x_{Ff} - x_f = a \cdot \left[ -\frac{m_{Ff}}{|m_{Ff}|} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_{Ff}^2} + 1}} + \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_f^2} + 1}} \right] \quad (97)$$

$$\Delta y = y_{Ff} - y_f = a \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{m_{Ff}^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} - \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{m_f^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \right] \quad (98)$$

Nach Abbildung 44 gilt zudem die Beziehung

$$\Delta y = (x^* - \Delta x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{z} + \gamma\right) \quad (99)$$

Setzt man (97), (98) und (89) in (99) ein und löst nach  $a$  auf, erhält man

$$a = \frac{\frac{d_{\text{Ff}}}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z} - \frac{\bar{s}_{\text{Ff}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z} + \gamma\right)}}{\frac{\frac{m_{\text{Ff}}}{|m_{\text{Ff}}|} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_{\text{Ff}}^2} + 1}} + \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{m_{\text{f}}^2} + 1}} + \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{m_{\text{Ff}}^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\frac{1}{m_{\text{Ff}}^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} - \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{m_{\text{f}}^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\frac{1}{m_{\text{f}}^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}}{\tan\left(\frac{\pi}{z} + \gamma\right)}} \quad (100)$$

Bei gegebenem  $a/b$  und  $\gamma$  ist somit  $a$ ,  $b$ ,  $x_{\text{f}}$ ,  $x_{\text{Ff}}$ ,  $y_{\text{f}}$ ,  $y_{\text{Ff}}$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  und damit auch die Zahnfußellipse berechenbar.

### 5.4.2 Berechnung und Auswertung der Zahnfußspannung $\sigma_{F,FEM}$ von ellipsenartigen Zahnfüßen

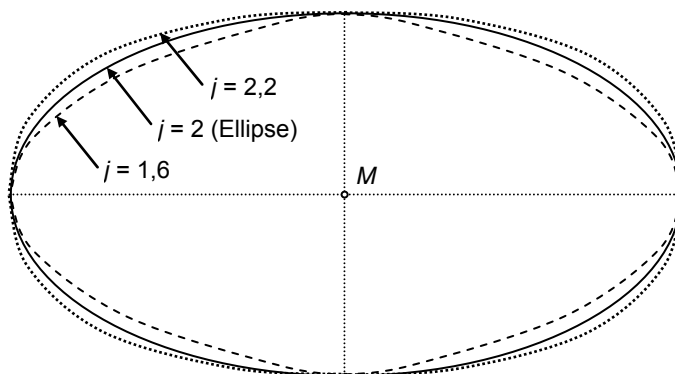
Um eine Aussage über die optimale Form der Zahnfußellipse treffen zu können, wird eine umfangreiche Parameterstudie mit Hilfe der *FEM* durchgeführt.

Zu jeder der 19 Referenzverzahnungen (siehe Abschnitt 5.2) werden die elliptischen Zahnfußformen bei Variation der Neigung ( $\gamma = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$  und  $35^\circ$ ) und des Hauptachsenverhältnisses ( $a/b = 2,0 ; 2,25 ; \dots ; 4,25$ ) nach Abschnitt 5.4.1 berechnet und die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  bestimmt. Je Verzahnung werden somit 40 Ellipsenformen untersucht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 23 im Anhang dargestellt. Für jede Ellipsenneigung sind dort die kleinste ermittelte Zahnfußspannung ( $a/b = \text{optimal}$ ) sowie die Spannung bei einem konstanten Hauptachsenverhältnis  $a/b$  angegeben.

In einer weiteren Variationsrechnung werden ellipsenähnliche Zahnfußformen untersucht. Die Herleitung der Zahnfußellipsenform in Abschnitt 5.4.1 beruht auf der Ellipsengleichung

$$\frac{x^j}{a^j} + \frac{y^j}{b^j} = 1 \quad ; \quad \text{mit } j = 2 \quad (101)$$

Verändert man den Faktor  $j$  in der Potenz, ändert sich die Bauchigkeit (siehe Abbildung 45) der geometrischen Form. Bei  $j > 2$  wird die Ellipse bauchiger, bei  $j < 2$  wird sie flacher.



**Abbildung 45:** Ellipse und ähnliche geometrische Formen mit unterschiedlicher Bauchigkeit

Die Gleichungen (93) und (94) müssen dementsprechend angepasst werden. Für  $x_i$  und  $y_i$  ergibt sich

$$x_i = -\frac{m_i}{|m_i|} \cdot a \cdot \left( \left( |m_i| \cdot \frac{a}{b} \right)^{\frac{j}{1-j}} + 1 \right)^{-\frac{1}{j}} \quad (102)$$

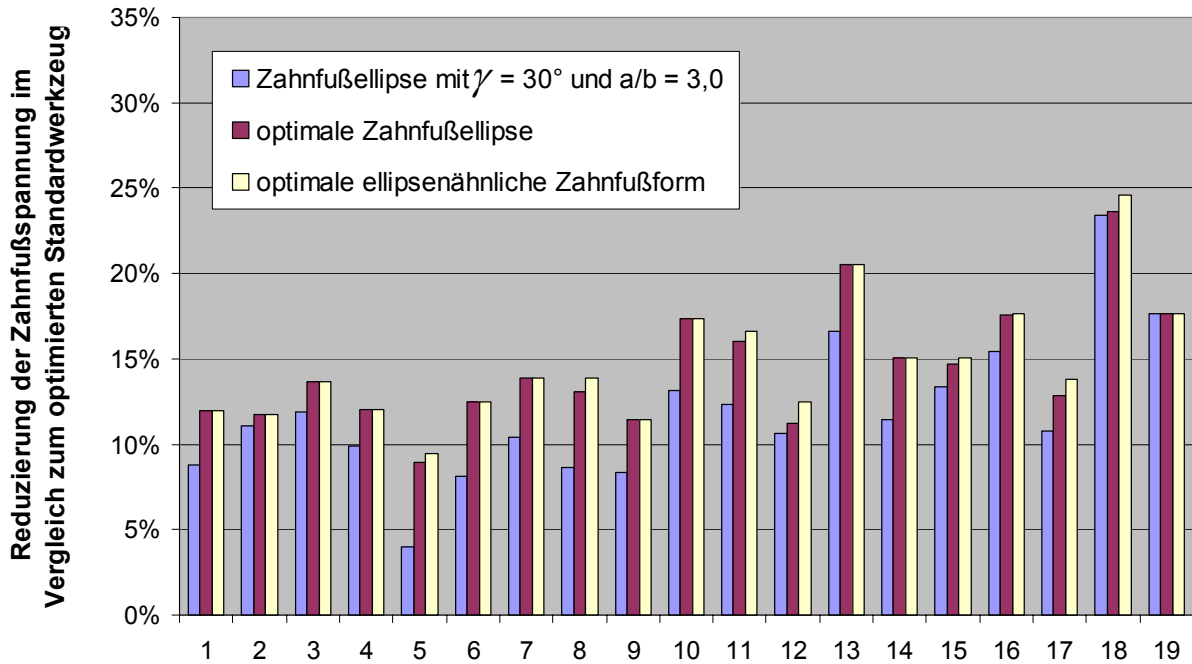
$$y_i = a \cdot \frac{a}{b} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\left( |m_i| \cdot \frac{a}{b} \right)^{\frac{j}{1-j}} + 1} \right)^{\frac{1}{j}} \quad (103)$$

Alle übrigen Geometrie Größen der ellipsenähnlichen Form berechnen sich analog zur Zahnfußellipse (siehe Abschnitt 5.4.1).

In der Variationsrechnung werden die Potenz ( $j = 1,6 ; 1,8 ; 2,2$ ), die Neigung ( $\gamma = 25^\circ ; 30^\circ$ ) und das Hauptachsenverhältnis  $a/b$  variiert und die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  bestimmt. Pro Referenzverzahnung werden somit weitere 40 ellipsenähnliche Zahnfußformen untersucht. Die berechneten Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM}$  sind in Tabelle 23 im Anhang dargestellt.

Durch ellipsenförmige und ellipsenähnliche Zahnfußausrundungen kann die Zahnfußspannung deutlich gesenkt werden. Abbildung 46 veranschaulicht dies grafisch. Dort ist die Reduzierung der Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  von Zahnfußellipsen mit einer Neigung von  $\gamma = 30^\circ$  und einem Hauptachsenverhältnis  $a/b = 3,0$  im Vergleich zu der in Abschnitt 5.3.3 erzielten minimalen Zahnfußspannung bei optimaler Wahl eines gradverzahnten Werkzeugs dargestellt. Zudem zeigt es die in den Variationsrechnungen ermittelten maximalen Zahnfußspannungsminderungen bei elliptischen Zahnfußformen und bei ellipsenähnlichen Zahnfußformen.



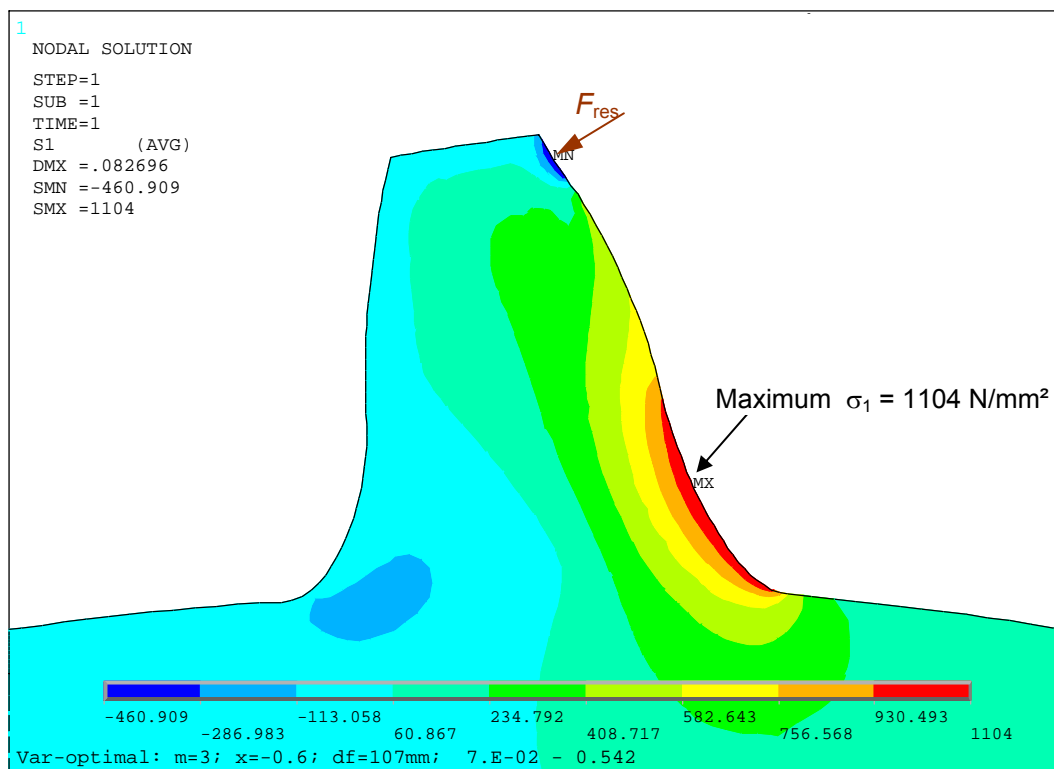


**Abbildung 46:** Reduzierung der Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  bei den 19 Referenzverzahnungen im Vergleich zum  $\alpha$ - $\rho$ - $h$ -optimierten Standardwerkzeug bei Optimierung der Zahnfußform mit Ellipsen und ellipsenähnlichen Formen

Durch Zahnfußellipsen mit einer Neigung von  $\gamma = 30^\circ$  und einem Hauptachsenverhältnis  $a/b = 3,0$  lassen sich die Spannungen im Durchschnitt um weitere 11,9% reduzieren. Dies kommt dem Optimum sämtlicher untersuchten Ellipsenformen, mit denen eine Reduzierung um 14,5% erreicht wurde, sehr nahe. Eine Änderung der Bauchigkeit der Ellipsen durch eine Variation der Potenz in der Ellipsengleichung hat so gut wie keinen weiteren Einfluss auf eine Verringerung der Zahnfußspannung ( $\Delta = 14,8\%$ ).

In einer weiteren *FEM*-Studie wird untersucht, wie nah die optimale Ellipsenfußform der wirklich optimalen Zahnfußform kommt, indem ein in *ANSYS* implementierter Optimierungsalgorithmus genutzt wird. Zuerst wird die Verzahnung in *ANSYS* modelliert, wobei der Zahnfuß durch einen Spline abgebildet wird, dessen Enden einen tangentialstetigen Übergang aufweisen. Die Form des Splines kann durch zwei interne Spline-Punkte und den Fußkreisdurchmesser variiert werden. Anschließend ermittelt der Optimierungsalgorithmus unter diesen Vorgaben mit Hilfe einer gesteuerten Parametervariation für jede Verzahnung eine optimierte Fußform. Die damit berechneten minimalen Zahnfußspannungen  $\sigma_{F,FEM-opt}$  sind bei allen Verzahnungen nur um maximal 3% geringer als bei den Ellipsen (siehe Tabelle 23). Die mit dem Spline gefundene Zahnfußform kann auf Grund ihrer etwas einschränkenden Vorgaben (nur zwei Punkte können variiert werden) noch weiter optimiert werden. Eine deutliche Reduzierung der Fußspannung ist aber nicht mehr zu erwarten, was an den ausgeglichenen

Spannungsverteilungen im Zahnfuß (siehe Abbildung 47) zu erkennen ist. Die Ellipse kommt der optimalen Zahnfußform folglich sehr nahe.



**Abbildung 47:** 1. Hauptspannung ( $\sigma_1 = \sigma_{F,FEM}$ ) an dem mit einem ANSYS-Algorithmus optimierten Zahnfuß der am Zahnkopf belasteten Referenzverzahnung 5 (verformte Darstellung)

Die durch freie Zahnfußformen wie z.B. Ellipsen erzielbare Zahnfußspannungsminimierung bedeutet nicht gleichsam eine Erhöhung der Zahnfußtragfähigkeit im selben Verhältnis, da ähnliche Effekte wie beim Baugrößenfaktor der Zahnfußfestigkeit berücksichtigt werden müssen [9]. Zum einen wird ein größerer Bereich am Zahnfuß durch die ausgeglichene Spannungsverteilung mit der maximalen Spannung belastet (siehe Abbildung 47). Der Gradient des Spannungsverlaufs senkrecht zur Oberfläche ist geringer, wodurch sich die Möglichkeit der Spannungsumlagerung an der Kerbe verringert. Zudem ist auf Grund des größeren Bereichs auch aus statistischen Überlegungen (statistischer Größeneinfluss) die Tragfähigkeitserhöhung etwas geringer. Kleine Material- und Fertigungsungenauigkeiten haben einen größeren negativen Einfluss. Um das Potential von freien Fußformen für die Tragfähigkeitssteigerung genauer festlegen zu können wären Bauteilversuche im Pulsator erforderlich, die in dieser Arbeit nicht durchgeführt wurden.

### Exkurs

Freie Zahnfußformen wie zum Beispiel Ellipsen können nicht mehr analytisch in Anlehnung zur *ISO 6336-3* berechnet werden. Dies zeigt ein durchgeführter Vergleich (siehe Tabelle 23). Für elliptische Zahnfüße mit einer Ellipsenneigung von  $\gamma = 30^\circ$  und einem Hauptachsenverhältnis  $a/b = 3,0$  wurde dort die Zahnfußspannung an der  $30^\circ$ -Tangente mit Hilfe des Formfaktors  $Y_{Fa}$  und des Spannungskorrekturfaktors  $Y_{Sa}$  ermittelt und der *FEM*-Berechnung gegenübergestellt. Die analytisch ermittelten Zahnfußspannungen weichen mit 12% bis 30% zum Teil deutlich von den *FEM*-Ergebnissen ab.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Zahnfußspannung von gerad- und schrägverzahnten Stirnrädern. Die verschiedenen Methoden zur Berechnung der Zahnfußspannung werden vorgestellt und anschließend miteinander verglichen. Dazu werden an neun Verzahnungen die Zahnfußbruchspannungen mit der Methode der Finiten Elemente (*FEM*) bestimmt und den Berechnungsergebnissen des Zahnradberechnungsprogramms *RIKOR* gegenübergestellt. Durch die gute Übereinstimmung der Ergebnisse kann die hohe Qualität von *RIKOR* bei der Berechnung der Zahnfußspannung bestätigt werden. Anschließend werden in einer Parameterstudie die schon bekannten Mängel der Normen *ISO 6336-3* und *DIN 3990 T3* dokumentiert. Bei großen Schrägungswinkeln  $\beta$  liegen die Normen auf der unsicheren Seite und bei großen Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  sind die berechneten Spannungen hingegen teilweise weit auf der sicheren Seite. Es wird gezeigt, dass die unzureichende Erfassung des Schrägungswinkels  $\beta$  sich durch einen Fehler bei der in den Normen vorgenommenen Umrechnung der Schrägverzahnung in eine virtuelle Ersatzgeradverzahnung erklären lässt. Dazu wird zuerst die Zahnfußgeometrie an der 30°-Tangente im Normalschnitt analytisch berechnet und in einer Parameterstudie der Zahnfußgeometrie der Ersatzgeradverzahnung gegenübergestellt. Die dabei festgestellte gute Übereinstimmung schließt die Zahnfußgeometrie der Ersatzgeradverzahnung als Ursache für die Ungenauigkeiten in den Normen bezüglich des Schrägungswinkels  $\beta$  aus. Dies gilt ebenso für die Gleichung zur Umrechnung der Profilüberdeckung in die Ersatzgeradverzahnung ( $\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_{\alpha n}$ ), die analytisch hergeleitet wird. Bei der in den Normen durchgeführten Umrechnung des äußeren Einzeleingriffspunktes in die Ersatzgeradverzahnung existiert hingegen eine Unstimmigkeit. Mit einer Parameterstudie wird gezeigt, dass in den Normen der Schrägungswinkel  $\beta$  richtig erfasst wird, wenn diese Unstimmigkeit korrigiert wird. In einem darauf folgenden Schritt wird ein Vorschlag zur Modifikation der *ISO 6336-3* gemacht, der bei der Ermittlung der Zahnfußspannung auf die Umrechnung der Schrägverzahnung in eine Ersatzgeradverzahnung komplett verzichtet. Dadurch wird die *ISO 6336-3* nicht nur einfacher und verständlicher, sondern zudem auch noch genauer, was mit einer weiteren Parameterstudie belegt wird.

Um die Norm für die Berechnung von LowLoss-Verzahnungen, die einen großen Eingriffswinkel ( $\alpha_n > 20^\circ$ ) und eine kleine Sprungüberdeckung ( $\varepsilon_\alpha \leq 1,0$ ) aufweisen, zu erweitern, werden Pulsator- und Laufversuche mit derartigen Verzahnungen durchgeführt. Es wird gezeigt, dass das Tragverhalten nur mit der *FEM* realitätsnah nachgebildet werden kann und dass die Normen *ISO 6336-3* und *DIN 3990 T3* sowie das Zahnradberechnungsprogramm *RIKOR* wegen der ihnen zu Grunde gelegten Theorie des eingespannten Biegebalkens bzw. Biegeplatte für stumpfe Verzahnungen deutlich zu große Zahnfußspannungen ausweisen. Auf diese Erkenntnisse aufbauend wird an sechs weiteren praxisrelevanten LowLoss-

Verzahnungen die Zahnfußspannung mit der *FEM* bestimmt und ein LowLoss-Korrekturfaktor für das zuvor vorgeschlagene modifizierte Rechenverfahren *der ISO 6336-3* erarbeitet.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Optimierung der Zahnfußform zur Minimierung der Zahnfußspannungen. Als Grundlage dafür wird eine Definition der Geometrie der Zahnflanken eines Zahnrades festgelegt und gezeigt, dass ein und dasselbe Zahnrad mit unterschiedlichen Eingriffswinkeln  $\alpha$  definiert werden kann. Ausgehend von einem Standardwerkzeug nach *DIN 876* wird anschließend in einer Parameterstudie an 19 Referenzverzahnungen das Potenzial einer Werkzeugoptimierung diskutiert. Durch Maximierung des Werkzeugkopfradius'  $\rho_{aP0}$ , Minimierung der Werkzeugkopfhöhe  $h_{aP0}$  und einer geschickten Wahl des Werkzeugeingriffswinkels ( $\alpha_{P0} = 15^\circ$  bei einem Eingriffswinkel am Fußformkreis von  $\alpha_{Ff} < 10^\circ$  und  $\alpha_{P0} = 25^\circ$  bei  $\alpha_{Ff} > 10^\circ$ ) können die Zahnfußspannungen im Durchschnitt um 18% gegenüber einem Standardwerkzeug nach *DIN 876* reduziert werden. Da Ellipsen in der Literatur oft als eine günstige Zahnfußform beschrieben werden, werden die Gleichungen zur Definition einer Zahnfußellipse hergeleitet, bei der die 1. Hauptachse zur Zahnfußhalbierenden um den Ellipsenwinkel  $\gamma$  geneigt ist und die im Zahnfuß und am Fußformkreis  $d_{Ff}$ , d.h. am Übergangspunkt der Evolvente in den Zahnfußbereich, eine Tangentenstetigkeit aufweist. Mit einer abschließenden Parametervariation der zwei frei zu wählenden Ellipsenparametern (Hauptachsenverhältnis  $a/b$  und Ellipsenneigung  $\gamma$ ) wird für die 19 Referenzverzahnungen jeweils die optimale Ellipsenform bezüglich der Zahnfußspannung ermittelt. Rechnerisch lässt sich mit Ellipsen die mittels *FEM* ermittelte Zahnfußspannung im Durchschnitt um weitere 15% reduzieren. Allgemein weisen Zahnfußellipsen mit einer Neigung von  $\gamma = 30^\circ$  und einem Hauptachsenverhältnis von  $a/b = 3,0$  eine für die Zahnfußtragfähigkeit günstige Form auf. Zur weiteren Optimierung der Zahnfußform werden in dieser Arbeit aus Ellipsen ellipsenähnliche Zahnfußformen weiterentwickelt. Es stellt sich heraus, dass sich mit diesen Fußformen keine nennbaren weiteren Zahnfußspannungsreduzierungen erzielen lassen. Durch einen im FE-Programm implementierten Optimierungsalgorithmus wird abschließend gezeigt, dass die optimale Zahnfußellipse bei einem Zahnrad der optimalen Zahnfußform sehr nahe kommt, d.h. eine weitere Zahnfußspannungsreduzierung ist durch eine Modifikation der optimalen Ellipsenform kaum mehr möglich. Mit diesem Wissen ist es dem Konstrukteur jetzt auf einfache Weise möglich, auch ohne aufwendige Computerprogramme eine Verzahnung mit einer für die Zahnfußtragfähigkeit optimierten Zahnfußform auszulegen [31].

Da diese Arbeit sich bei der Zahnfußoptimierung nur mit der Zahnfußspannung befasst, besteht bei der Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf die Zahnfußtragfähigkeit noch Forschungsbedarf. Vor allem bei optimierten Zahnfüßen kann die Reduzierung der Zahnfußspannung nicht direkt in eine gleiche Erhöhung der Tragfähigkeit umgerechnet werden, da die gleichmäßigere Auslastung der Fußkerbe mit einem größeren beanspruchten Volumen einen

negativen Effekt hat und größere Zahnfußausrundungen zu geringeren Zahnfußfestigkeiten führen. Ellipsenförmige Zahnfußausrundungen sollten daher in Pulsatorversuchen bezüglich ihrer Zahnfußtragfähigkeit noch genauer untersucht werden. Ebenso ist zu überprüfen, inwieweit eine wirtschaftliche Fertigung von ellipsenförmigen Zahnfußausrundungen mit abwälzenden Fertigungsverfahren möglich ist.

## Literatur

- [1] **AGMA 2101:** Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth. AGMA 2004.
- [2] **Ansys Inc.:** ANSYS Workbench Documentation for Release 11.0. Canonsburg 2007.
- [3] **Beumelburg, W.:** Der Einfluss der Randoxidation auf die Umlaufbiegefestigkeit und statische Biegefestigkeit einsatzgehärteter Proben. Härterei Technische Mitteilungen (HTM) 25 Heft 3 (1979), S.191-194.
- [4] **Bong, H. B.:** Benutzeranleitung für das Programmsystem FE-Stirnrade. FVA-Heft324, Frankfurt 1990.
- [5] **Börner, J.; Kurz, N.; Joachim, F.:** Effective Analysis of Gears with the Program LVR. International Conference on Gears : VDI-Berichte Nr. 1665, S.721-735, 2002
- [6] **Börner, J.:** Weiterentwicklung der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung durch genauere Erfassung der Spannungskonzentration einschließlich einer Analyse der AGMA-Methode, FVA-Heft 492, Frankfurt 1995.
- [7] **Bolotovskiy, I. A.; Vasil'eva, O. F.; Kotelnikov, V. P.:** Involute gears with asymmetric teeth, Vestnik Mashinostroeniya, Issue 4, 1984, pp. 15–17.
- [8] **Brecher, C.; Gorgels, C., Gacka, A.:** Anwendung der FE-basierten Zahnkontaktanalyse zur Berechnung von Lastverteilungsfaktoren für einen zertifizierten Tragfähigkeitsnachweis von Stirnradverzahnungen. Abschlussbericht, FVA-Heft Nr. 942, 2010.
- [9] **Brecher, C., Zuber, D.:** Optimierung der Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder unter Berücksichtigung von Fertigungsrandbedingungen. Tagungsband "1. Konferenz für angewandte Optimierung in der virtuellen Produktentwicklung". Karlsruhe 2006.
- [10] **Brecher, C., Zuber, D.:** Zahnfußtragfähigkeits-Optimierung von einsatzgehärteten Zahnrädern. 45. Arbeitstagung „Zahnrad- und Getriebeuntersuchungen“ des WZL, Aachen 2004.
- [11] **Brecher, C., Zuber, D.:** Tragfähigkeits- und fertigungsorientierte Zahnfußoptimierung einsatzgehärteter Stirnräder. Aachen: 46. Arbeitstagung „Zahnrad und Getriebeuntersuchungen“ des WZL, Aachen 2005.
- [12] **Brecher, C., Zuber, D.:** Untersuchung der Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder mit unterschiedlichen Randschichteigenschaften und Zahnfußgeometrien. Bericht zur 47. Arbeitstagung "Zahnrad- und Getriebeuntersuchungen" des WZL, Aachen 2006.
- [13] **Breuer, M.:** EDV-Programm zur Berechnung der Lagersteifigkeit. FVA-Infoblatt Nr. 184/1, Frankfurt 1993.
- [14] **Brömsen, O.; Weck, M.:** Gestaltoptimierung einsatzgehärteter Bauteile - Versuchsprogramm zum Nachweis der Tragfähigkeitssteigerung durch Gestaltoptimierung. Werkstatttechnik 91 (2001) H.9, S.575-580.

- 
- [15] **Brömsen, O.:** Steigerung der Zahnfußtragfähigkeit von einsatzgehärteten Stirnrädern durch automatische Geometrieoptimierung. Dissertation RWTH Aachen, 2005.
- [16] **Broßmann, U.:** Über den Einfluss der Zahnfußausrundung und des Schrägungswinkels auf Beanspruchung und Festigkeit schrägverzahnter Stirnräder. Dissertation TU München, 1979.
- [17] **Büßenschütt, A.:** FEM-gestützte Gestaltoptimierung zur funktions- und gussgerechten Auslegung komplexer Bauteile. Dissertation RWTH Aachen, 1997.
- [18] **Costopoulos, T.; Spitas, V.:** Reduction of gear fillet stresses by using one-sided involute asymmetric teeth. *Mechanism and Machine Theory* 44 (2009), pp.1524–1534.
- [19] **Der Hovanesian, J., Erickson, M.A., Hathaway, R.B., Savoyard, J.P., Jr.:** Gear root stress optimization using photoelastic optimization techniques. *SAE transactions*, ISSN 0096-736X, 1989, vol. 97 (4), pp. 748-755.
- [20] **DiFrancesco, G.; Marini, S.:** Structural Analysis of Asymmetrical Teeth: Reduction of Size and Weight, *Gear Technology*, September/October, 1997, pp.47-51.
- [21] **DIN 867:** Bezugsprofile. 1986.
- [22] **DIN 1319:** Grundlagen der Meßtechnik Teil 3. 1993.
- [23] **DIN 3960:** Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. 1987.
- [24] **DIN 3962:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen. 1978.
- [25] **DIN 3972:** Bezugsprofile von Verzahnungswerkzeugen. 1952.
- [26] **DIN 3990 T3:** Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern - Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit. 1987.
- [27] **DIN EN 10084:** Einsatzstähle. 1998.
- [28] **Döbereiner, R.:** Tragfähigkeit von Hochverzahnungen geringer Schwingungsanregung. Dissertation TU München, 1998.
- [29] **Freudenthal, P.:** Programm zur Berechnung des Losradkippens. FVA-Heft Nr. 402, Frankfurt 1994.
- [30] **Frühe, T.:** Tragfähigkeit LowLoss-Verzahnungen. Zwischenberichterstattung im IGF-Cluster „Low Friction Powertrain (LFP)“, Frankfurt 2011.
- [31] **Frühe, T.:** Low Friction Powertrain - Tragfähigkeit LowLoss-Verzahnungen. FVA-Heft, Forschungsvorhaben Nr. 582 I, Frankfurt 2012.
- [32] **Fuhrke, H.:** Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. *Ingenieur Archiv* 23, S.329-348, 1955.
- [33] **Gacka, A.:** FE-Berechnung beliebiger evolventischer Zahnlückengeometrien mit frei wählbarer Zahnfußausrundung. Abschlussbericht FVA-Forschungsvorhaben 484I, Frankfurt 2008.
- [34] **Gackstetter, G.:** Verlustarme Zahnräder. Dissertation TH München, 1968



- 
- [35] **Gajewski, G.:** Untersuchungen zum Einfluß der Breitenballigkeit auf die Tragfähigkeit von Stirnradgetrieben, Dissertation TU Dresden, 1984.
- [36] **Gang, G.; Nakanishi, T.:** Enhancement of Bending load Carrying Capacity of Gears Using An Asymmetric Involute Tooth, The JSME International Conference on Motion and Transmissions (MPT2001-Fukuoka), Fukuoka, JAPAN, pp.513-517, 2001.
- [37] **Grossl, A.; Martens, S.; Feldhofer, G.:** Oilfree Powertrain - Workpackage 1.1. Analysis of Minimum Oil Requirements Considering Friction in Gears and Engines. EU-Project No. IPS-2001-80006. Final Report, 2003
- [38] **Gutmann, P.; Li, J. H.:** Verzahnung eines evolventisch wälzverzahnten Zahnrades. Deutsche Patentschrift, DE102006015521B3, 2007.
- [39] **Gutmann, P.; Li, J. H.:** Tothing System of a Gearwheel Having Involute Roller Tothing. Europäische Patentschrift, EP2005032B1, 2009.
- [40] **Hück, M.:** Ein verbessertes Verfahren für die Auswertung von Treppenstufenversuchen. Berichtsband der 6. Sitzung des DVM Arbeitskreises Betriebsfestigkeit, S. 147-176, Berlin. 1981.
- [41] **Haberer, C.:** Methode zur Optimierung der Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Dissertation Montanuniversität Leoben, 2010.
- [42] **Hinterstoßer, M.:** Tragfähigkeit verlustoptimierter Verzahnung - FVA-Heft Nr. 859, Frankfurt 2008.
- [43] **Hirt, M.:** Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. Dissertation TU München, 1974.
- [44] **Höhn, B.-R.; Michaelis, K.; Hinterstoßer, M.:** Wirkungsgradoptimiertes Schaltgetriebe (50%-Getriebe). FAT-Forschungsvorhaben Nr. 15183, 2008.
- [45] **Höhn, B.-R.; Seingröver, K.:** FVA-Stirnradprogramm STplus - Benutzeranleitung. FVA-Heft Nr. 477, Frankfurt 2006.
- [46] **Hösel, T.:** Zahnradgetriebe. Vorlesungsskript – Lehrstuhl für Maschinenelemente TU München, 1991.
- [47] **Hohrein, A. ; Senf, M.:** Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an schrägverzahnten Stirnrädern, TU Dresden, Diss., 1977
- [48] **ISO 6336-3 (1996):** Calculation of load capacity of spur and helical gears – Calculation of tooth bending strength. 1996.
- [49] **ISO 6336-3 (2006):** Calculation of load capacity of spur and helical gears – Calculation of tooth bending strength. 2006.
- [50] **Käser, W.:** Beitrag zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern. Einfluss von Härtetiefe und Schmierstoff auf die Flankentragfähigkeit. Diss. TU München, 1977.
- [51] **Kapelevich, A.; Shekhtman, Y.:** Tooth Fillet Profile Optimization for Gears with Symmetric and Asymmetric Teeth, AGMA Fall Technical Meeting, San Antonio, Texas, October 12-14, 2008, (08FTM06), published in the Gear Technology, pp. 73-79, September/October 2009.

- [52] **Kissling, U.:** Optimierung von Zahnrädern aus Kunststoff. Antriebstechnik, Bd. 37, Nr. 12, S.1-56, 1998.
- [53] **KISSsoft AG:** Optimierung KISSsoft Tutorial: Zahnformoptimierung, Zahnformmodifikationen, insbesondere für Kunststoff-, Sinter-, drahterodierte und formgeschmiedete Zahnräder. <http://www.kisssoft.ch/deutsch/downloads/pdf/04-10/kisssoft-tut-011-D-zahnform.pdf> , 2010.
- [54] **KISSsoft AG:** KISSsoft Release 04/2010 Benutzerhandbuch. Hombrechtikon Schweiz, 2010.
- [55] **Kremmer, M., Naas, J., Philipsenburg, H. J.:** Formoptimierung von PKW-Getrieben durch Simulation mit biologischer Designfindung. Antriebstechnik, Bd. 37, S.34-37, 1998.
- [56] **Kunert, J.; Trempler, U. ;Wikidal, F.:** Lastverteilungsmessung. FVA- Heft Nr. 458, Frankfurt 1995.
- [57] **Kunert, J.:** Experimentell gestützte Untersuchungen zum Verformungs- und Spannungsverhalten an außenverzahnten Stirnrädern für eine verbesserte Beanspruchungsanalyse, TU Dresden, Diss., 1999
- [58] **Li, Chien-Hsing; Chiou, Hong-Shun; Hung, Chinghua; Chang, Yun-Yuan; Yen, Cheng-Chung:** Integration of Finite element analysis and optimum design on gear systems. Finite Elements in Analysis and Design 38 (2002) pp.179-192.
- [59] **Linke, H.:** Stirnradverzahnung. Leipzig : Hanser Verlag, 1996
- [60] **Litvin, F.L.; Lian, Q.; Kapelevich, A.L.:** Asymmetric modified gear drives: reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Issue 188, pp. 363–390, 2000.
- [61] **Litvin, F.; et al.:** Modified involute helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol 192, 33-34, pp.3619-3655, 2003.
- [62] **Ludvik Prasil; Jaroslav Mackerle:** Finite element analyses and simulations of gears and gear drives - A bibliography 1997-2006. Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software Vol. 25 No. 3, 2008, pp.196-219.
- [63] **Masuyama, T.; Inoue, K.; Sato, T.:** Improvement of the load capacity of carburized gears through the tooth profile optimization. 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003
- [64] **Mattheck, C.:** Struktur- und Formoptimierung mechanischer Bauteile durch Simulation biologischer Designfindung. Sonderdruck Werkstoffe im Automobilbau, 1997/1998.
- [65] **Mattheck, C.; Iwiza, T.:** Die Methode der Zugdreiecke im Vergleich mit anderen Kerbformen. Konstruktionspraxis. S.20-22, 2008.

- 
- [66] **Mattheck, C.:** Verborgene Gestaltgesetzte der Natur. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 2006.
- [67] **Moriwaki, I.; Ogaya, S.; Watanabe, K.:** Global Local Finite Element Method (GLFEM) in Gear Tooth Stress Analysis. Application of Tooth Flank Film Element. Machine Design and Tribology Division Meeting in JSME, vol 2 PP.37-40, 2002.
- [68] **Neupert, B.:** Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben, RWTH Aachen, Diss., 1983.
- [69] **Niemann, G.; Richter, W.:** Tragfähigste Evolventen-Schrägverzahnung. Schriftenreihe Antriebstechnik Band 16 Friedrich Vieweg Verlag, 1954.
- [70] **Niemann, G.; Winter, H.:** Maschinenelemente. Bd. 2. 2. Auflage. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer Verlag, 1983.
- [71] **N.N.:** FE-Stirnradkette v3.2 – Benutzeranleitung. FVA-Heft723, Frankfurt 2007.
- [72] **Ohlendorf, H.:** Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern. Dissertation TH München 1958.
- [73] **Otto, M.:** Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. Dissertation TU München 2010.
- [74] **Otto, M.:** Ritzelkorrektur (RIKOR) - Version H. FVA-Heft Nr. 481, Frankfurt 2005
- [75] **Otto, M.:** Zahnfußtragfähigkeit von Hoch- und Schrägverzahnungen. FVA-Heft Nr. 833, Frankfurt 2007.
- [76] **Paul, M.:** Einfluß von Balligkeit und Lageabweichungen auf die Zahnfußbeanspruchung spiralverzahnter Kegelräder. Diss. TU München 1986.
- [77] **Placzek, T.:** Lastverteilung und Flankenkorrektur, Dissertation TU München, 1988.
- [78] **Raptis, K. G.; Costopoulos, T. N., Papadopoulos, Georgios A.; Tsolakis, Andonios D.:** Rating of Spur Gear Strength Using Photoelasticity and the Finite Element Method. American J. of Engineering and Applied Sciences 3 (1): pp.222-231, 2010.
- [79] **Rossow, E.:** Eine einfache Rechenschiebernäherung an die normal scores entsprechenden Prozentpunkte. Qualitätskontrolle 9, Heft 12 S.146-147, 1964.
- [80] **Roth, Z.; Etzold, M.:** Developing a Bionic Gear Root Fillet Contour. International Conference on Gears, S.1147-1158, Garching 2010.
- [81] **Roth, Z.; Etzold, M.:** Verzahnung eines Zahnrades. Deutsche Patentschrift, DE102008045318B3,2009.
- [82] **Schmidt, G.:** Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertation TH München, 1973.
- [83] **Schinagl, S.:** Ritzelkorrektur, Programmbeschreibung (RIKOR G), FVA-Heft Nr. 481, Frankfurt/Main 2000.
- [84] **Schinagl, S.:** Zahnfußtragfähigkeit von Hoch- und Schrägverzahnungen. FVA-Heft Nr. 677, Frankfurt 2002

- [85] **Schinagl, S.:** Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertation TU München 2002.
- [86] **Shanmugasundaram, S.; Maasanamuthu, S. R.; Muthusamy, N.:** Profile Modification for Increasing the Tooth Strength in Spur Gear Using CAD. Engineering, 2 (2010), pp.740-749.
- [87] **Spitas, V.; Costopoulos, T.; Spitas, C.:** Fast Modelling of Bending Stresses in Dimensionless Gear Teeth using BEM. Applied Simulation and Modelling, Crete, 2002.
- [88] **Spitas, V.; Costopoulos, T.; Spitas, C.:** Increasing the Strength of Standard Involute Gear Teeth with Novel Circular Root Fillet Design. American Journal of Applied Sciences 2 (6): pp.1058-1064, 2005.
- [89] **Stahl, K.:** Lebensdauerstatistik. FVA-Heft Nr. 580, Frankfurt 1999.
- [90] **Stenico, A.; Krug, T.:** Eigenspannungseinfluss auf die Zahnfußtragfähigkeit kleinmoduliger Zahnräder. FVA-Heft Nr. 745, Frankfurt 2003.
- [91] **Stenico, A.:** Werkstoffmechanische Untersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit ein-satzgehärteter Zahnräder. Diss. TU München 2007.
- [92] **Steutzger, M.:** Einfluss der Baugröße auf die Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, Dissertation, TU München, Diss., 2004
- [93] **Strasser, H.:** Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit. Dissertation, TU München 1984.
- [94] **Tobie, T.:** Zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Diss. TU München 2001.
- [95] **Thoma, F.; Otto, M.:** Erweiterung Ritzelkorrekturprogramm (RIKOR) zur Bestimmung der Lastverteilung von Stirnradgetrieben, Version I. FVA-Heft Nr. 914, Frankfurt 2009.
- [96] **Umezawa, K.:** The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission. Bulletin of the JSME, Vol. 16, No.92, S. 407-413, 1973.
- [97] **Vecchiato, D.:** Stress Analysis of Gear Drives Based on Boundary Element Method. AGMA - Fall Technical Meeting, Virginia 2004.
- [98] **Vriesen, J.:** PLANKORR. Schriftenreihe des Instituts für Konstruktionstechnik, Heft Nr. 02.12, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2002
- [99] **Wang, J.:** Numerical and Experimental Analysis of Spur Gears in Mesh. Dissertation Department of Mechanical engineering, Curtin University of Technology, Perth, 2003
- [100] **Wang, J.:** Analysis of Spur Gears in Mesh with Various Types of Profile Modifications. Department of Mechanical engineering, Curtin University of Technology, Perth, 2006
- [101] **Weck, M., Brömsen, O.:** Optimierung der Zahnfußgeometrie zur Tragfähigkeitssteigerung. 41. Arbeitstagung „Zahnrad- und Getriebeuntersuchungen“ des WZL, Aachen 2000.

- 
- [102] **Weck, M., Brömsen, O.:** Zahnfußoptimierung einsatzgehärteter Zahnräder – Berechnungsmetallischer und Prüfstandsergebnisse. 42. Arbeitstagung „Zahnrad- und Getriebeuntersuchungen“ des WZL, Aachen 2001.
- [103] **Weck, M.; Cao, J.:** Erweiterung des Softwaresystems "Stirnradkette" (STIRAK) zur Berechnung von Stirnradgetrieben auf Basis der Finite-Element-Methode (FEM). FVA-Heft 534, Frankfurt 1997.
- [104] **Weck, M.; Schlattmeier, H.; Schäfer, J.:** Berechnung von Stirnradpaarungen mit Mehrfacheingriffen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode, Programmdokumentation FE-Stirnradkette 3.0, FVA-Heft Nr. 723, 2003.
- [105] **Wikidal, F.:** Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung last- und fertigungsbedingter Abweichungen. Dissertation TU München, 1996.
- [106] **Wimmer, A.:** Lastverluste von Stirnradverzahnungen - Konstruktive Einflüsse, Wirkungsgradmaximierung, Tribologie. Dissertation TU München 2006.
- [107] **Wimmer, A.:** Konstruktive Einflüsse auf die lastabhängigen Verluste von Verzahnungen. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 372, FVA-Heft Nr. 731, 2004.
- [108] **Winter, H.; Broßmann, U.:** Zur Zahnfußtragfähigkeit von Stirnrädern - Einfluß von Fußausrundung und Schrägungswinkel. VDI-Berichte 332 (1979), S. 33 - 36.
- [109] **Wirth, C.:** Zur Tragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. Dissertation TU München 2008.
- [110] **Wirth, X.:** Über den Einfluss von Schleifkerben oberflächengehärteter Zahnräder auf die Dauerfestigkeit und die Lebensdauer im Zweistufenversuch. Dissertation TU München 1977.
- [111] **Ziegler, A.:** FE-Untersuchung einer Low-Loss-Verzahnung. Diplomarbeit TU München 2006.



**Anhang A: ISO 6336-3 – mod. Frühe**

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F} \geq S_{F \min} \quad (104)$$

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \quad (105)$$

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\alpha \cdot Y_{\text{LowLoss}} \quad (106)$$

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fe}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fe}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_t} \quad (107)$$

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \frac{s_{Fn}}{h_{Fe}}\right) \cdot \left(\frac{s_{Fn}}{2 \cdot \rho_{Fn}}\right)^{\frac{1}{1,21+2,3 \cdot \frac{h_{Fe}}{s_{Fn}}}} \quad (108)$$

$$Y_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1,0 & ; \quad \varepsilon_\beta < 0,5 ; \quad \varepsilon_\alpha < 2,0 \\ 0,8 & ; \quad \varepsilon_\beta < 0,5 ; \quad \varepsilon_\alpha \geq 2,0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\alpha}} & ; \quad \varepsilon_\beta \geq 0,5 \end{cases} \quad (109)$$

$$Y_{\text{LowLoss}} = \left(1 + \left(0,5 - \frac{\beta}{100^\circ}\right) \cdot \max\left[0; \min\left(\frac{\varepsilon_\alpha - 0,5}{0,3}; 1\right)\right] \cdot \max\left[0; \min\left(\frac{\alpha_{Ff} - 15^\circ}{5^\circ}; 1\right)\right]\right)^{-1} \quad (110)$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{m_{Pn}}{\cos \beta} \quad (111)$$

$$\alpha_t = \arctan\left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}\right) = \arctan\left(\frac{\tan \alpha_{Pn0}}{\cos \beta}\right) \quad (112)$$

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot m_t - h_{aP0} \cdot \tan \alpha_t + \frac{s_{pr}}{\cos \beta \cdot \cos \alpha_t} - (1 - \sin \alpha_t) \cdot \frac{\rho_{aPn0}}{\cos \alpha_t} \quad (113)$$

$$G = \frac{\rho_{aPn0}}{m_t} - \frac{h_{aP0}}{m_t} + x \cdot \cos \beta \quad (114)$$

$$H = \frac{2}{z} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_t} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (115)$$

$$\vartheta = \frac{2G}{z} \cdot \tan \vartheta - H \quad (\text{Iteration mit Startwert } \vartheta_{\text{start}} = \frac{\pi}{6}) \quad (116)$$

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = z \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} - \vartheta \right) + \sqrt{3} \cdot \left( \frac{G}{\cos \vartheta} - \frac{\rho_{aPn0}}{m_t} \right) \quad (117)$$

$$\frac{\rho_{Fn}}{m_n} = \left( \frac{\rho_{aPn0}}{m_t} + \frac{2G^2}{\cos \vartheta \cdot (z \cdot \cos^2 \vartheta - 2G)} \right) \cdot \frac{1}{\cos \beta} \quad (118)$$

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_t \quad (119)$$

$$d_e = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[ \sqrt{\left( \frac{d_a}{2} \right)^2 - \left( \frac{d_b}{2} \right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \alpha_t}{|z|} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \right]^2 + \left( \frac{d_b}{2} \right)^2} \quad (120)$$

$$\alpha_e = \arccos \left( \frac{d_b}{d_e} \right) \quad (121)$$

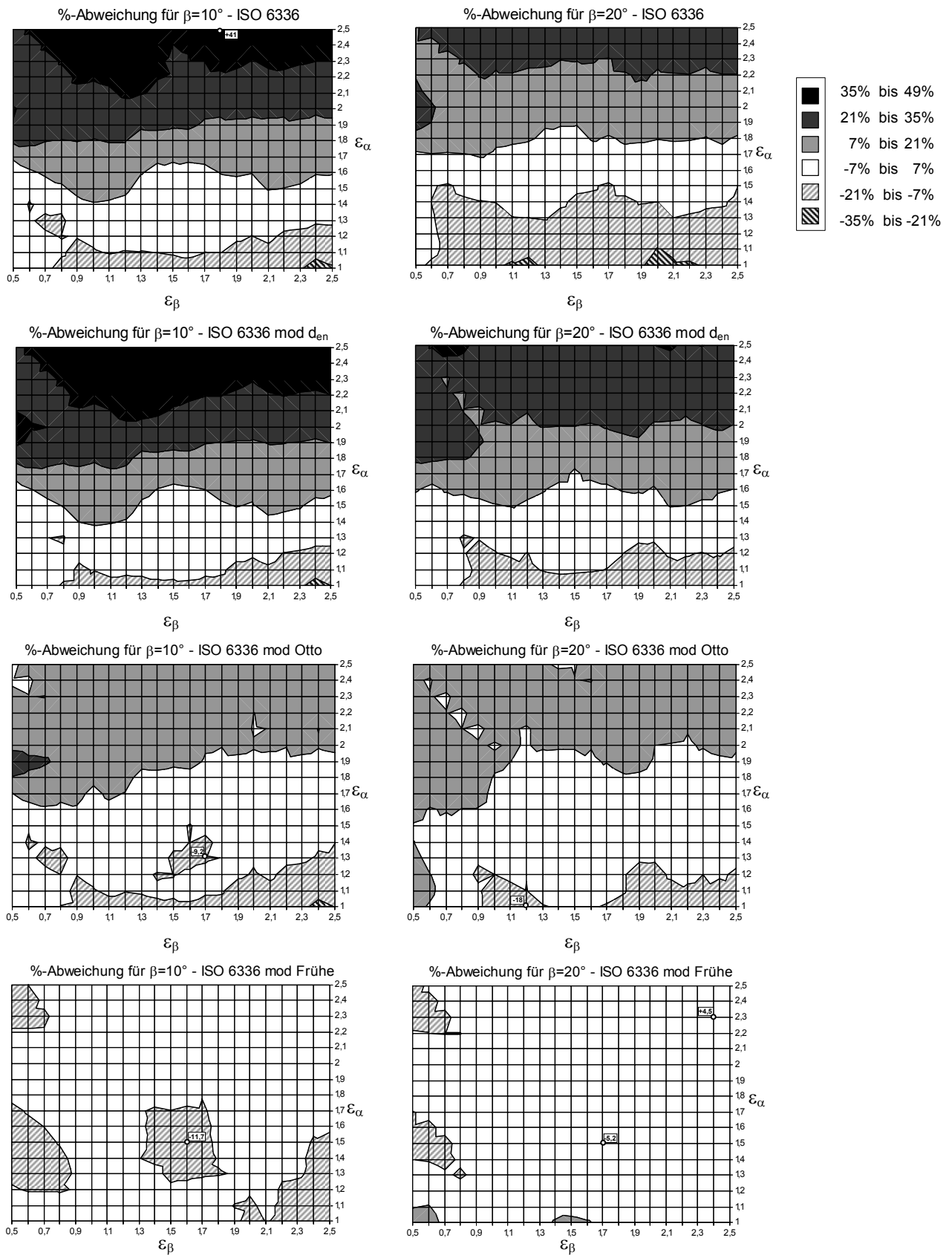
$$\gamma_e = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \cos \beta \cdot \tan \alpha_t}{z} + \text{inv} \alpha_t - \text{inv} \alpha_e \quad (122)$$

$$\alpha_{Fe} = \alpha_e - \gamma_e = \tan \alpha_e - \text{inv} \alpha_t - \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \cos \beta \cdot \tan \alpha_t}{z} \quad (123)$$

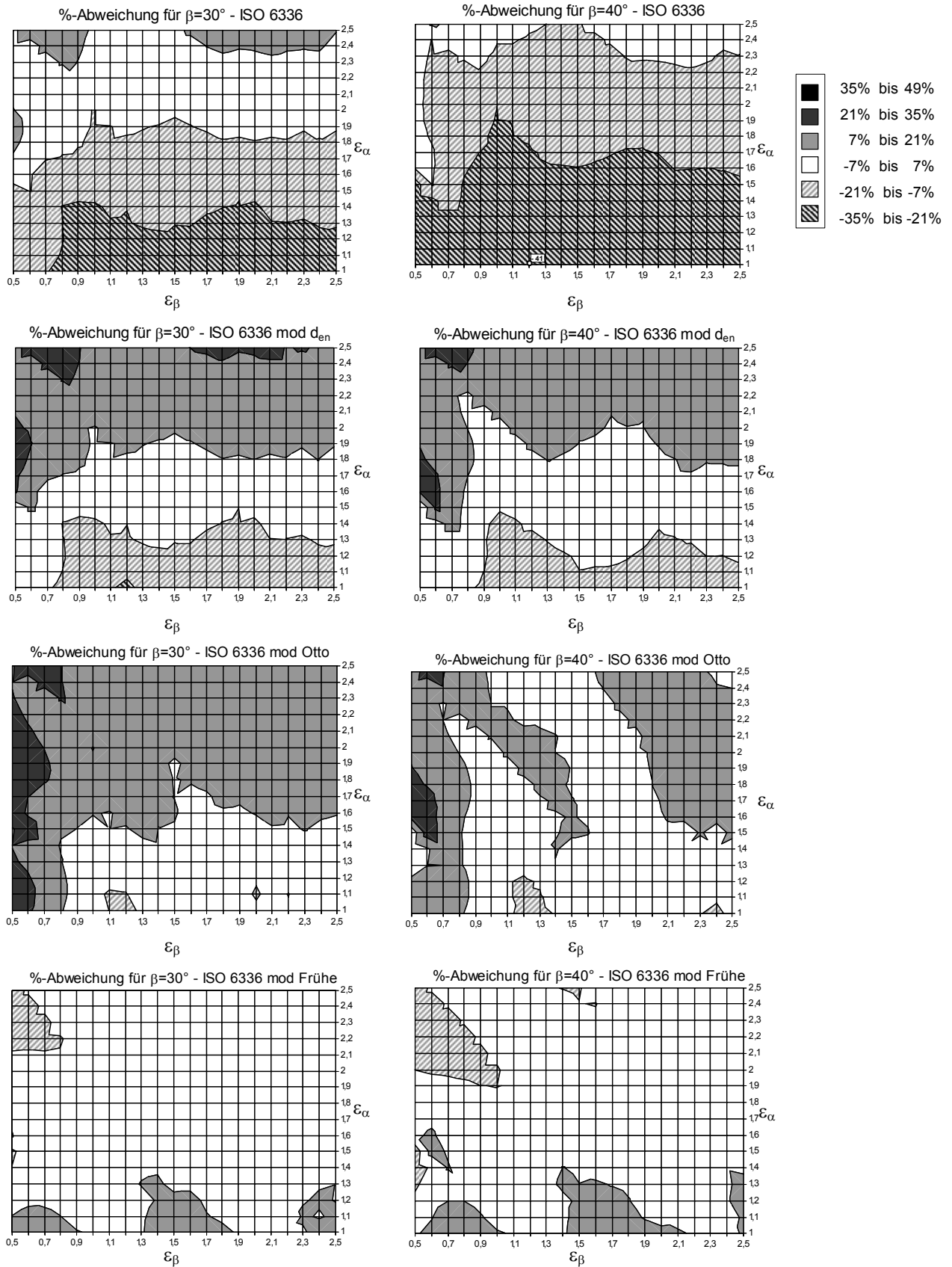
$$\frac{h_{Fe}}{m_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \cdot \tan \alpha_{Fe}) \cdot \frac{d_e}{m_t} - z \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} - \vartheta \right) - \frac{G}{\cos \vartheta} + \frac{\rho_{aPn0}}{m_t} \right] \cdot \frac{1}{\cos \beta} \quad (124)$$



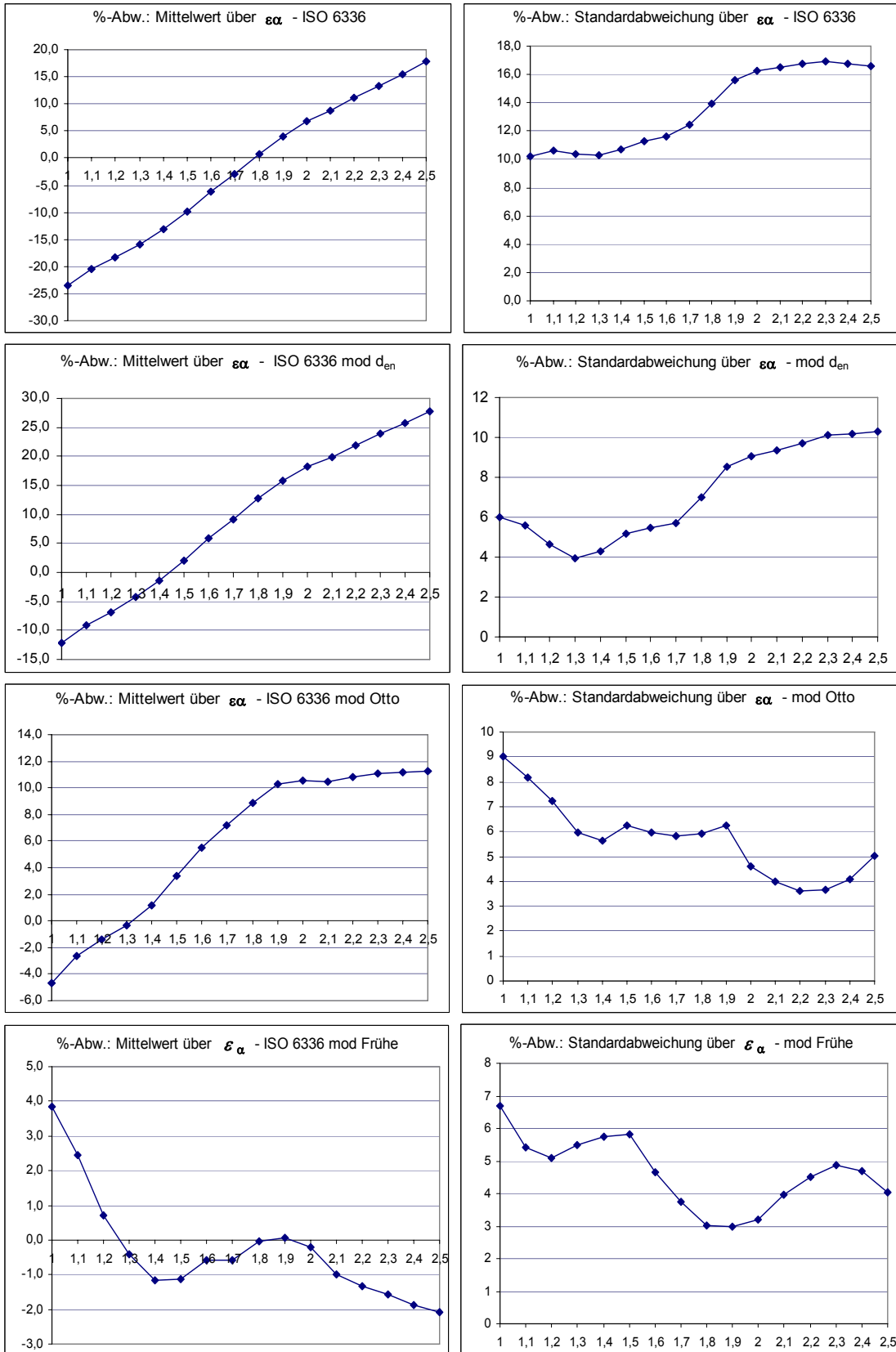
Anhang B: Abbildungen



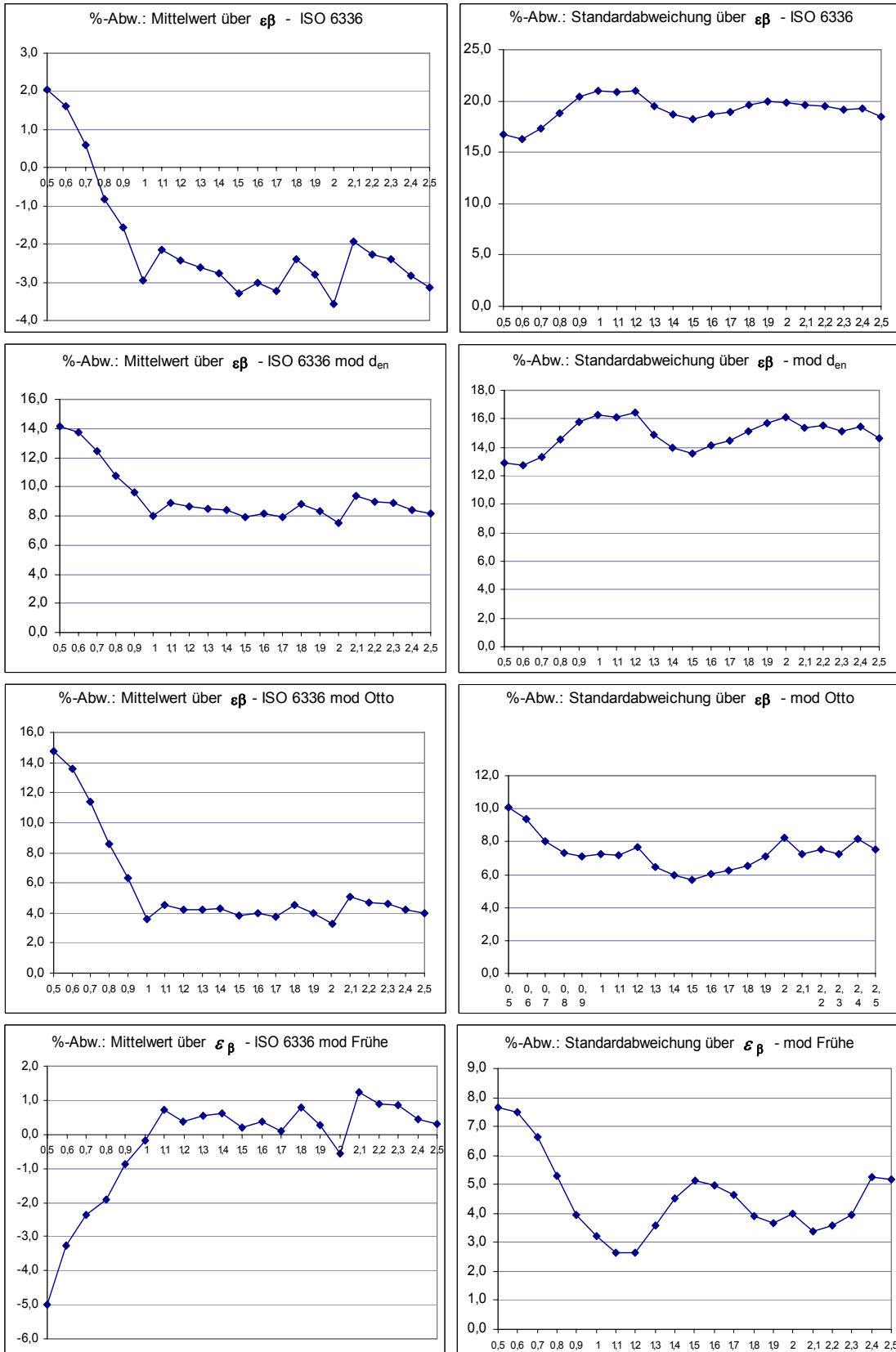
**Abbildung 48:** %-Abweichung der Rechenverfahren zu RIKOR I (ISO 6336-3 ; mod. Ansatz für  $d_{en}$  ; modifiziert Otto ; modifiziert Frühe) bei  $\beta = 10^\circ$  (links) und  $\beta = 20^\circ$  (rechts)



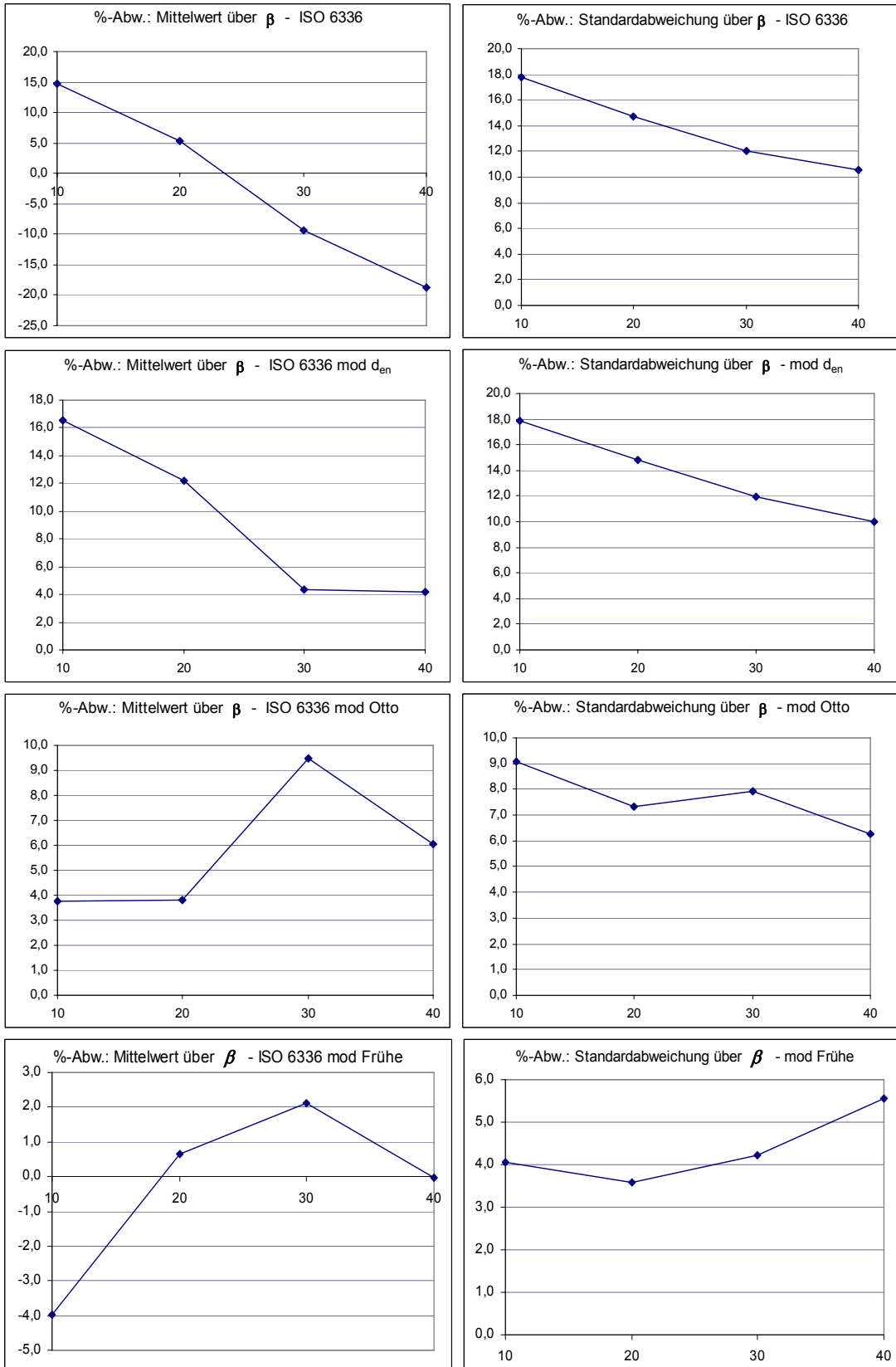
**Abbildung 49:** %-Abweichung der Rechenverfahren zu RIKOR I (ISO 6336-3 ; mod. Ansatz für  $d_{en}$  ; modifiziert Otto ; modifiziert Frühe) bei  $\beta = 30^\circ$  (links) und  $\beta = 40^\circ$  (rechts)



**Abbildung 50:** Mittelwert und Standardabweichung der %-Abweichung der Rechenverfahren zu RIKOR I (ISO 6336-3; modifizierter Ansatz für  $d_{en}$ ; modifiziert Otto; modifiziert Frühe) in Abhängigkeit von  $\epsilon_\alpha$



**Abbildung 51:** Mittelwert und Standardabweichung der %-Abweichung der Rechenverfahren zu *RIKOR I* (ISO 6336-3; modifizierter Ansatz für  $d_{en}$ ; modifiziert Otto; modifiziert Frühe) in Abhängigkeit von  $\epsilon_{\beta}$



**Abbildung 52:** Mittelwert und Standardabweichung der %-Abweichung der Rechenverfahren zu RIKOR I (ISO 6336-3 ; modifizierter Ansatz für  $d_{en}$  ; modifiziert Otto ; modifiziert Frühe) in Abhängigkeit von  $\beta$

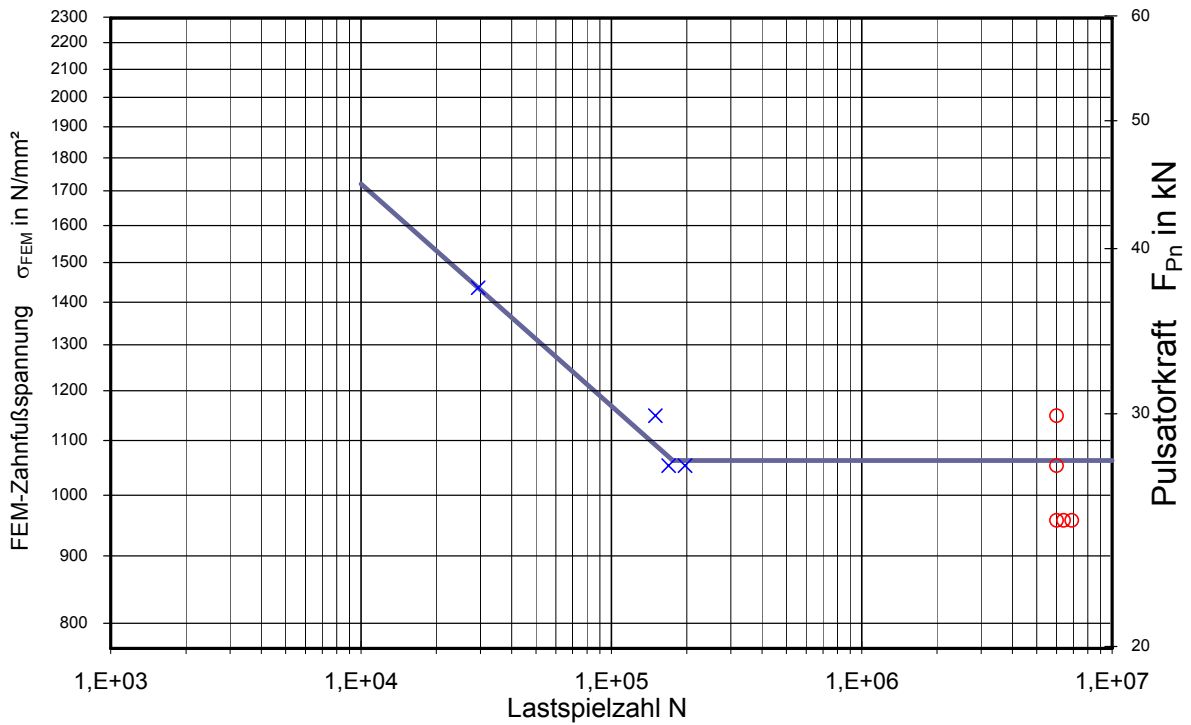


Abbildung 53: Zahnfußbruch - Wöhlerlinie – LL1  $\alpha = 36^\circ$  – Belastung am Zahnkopf

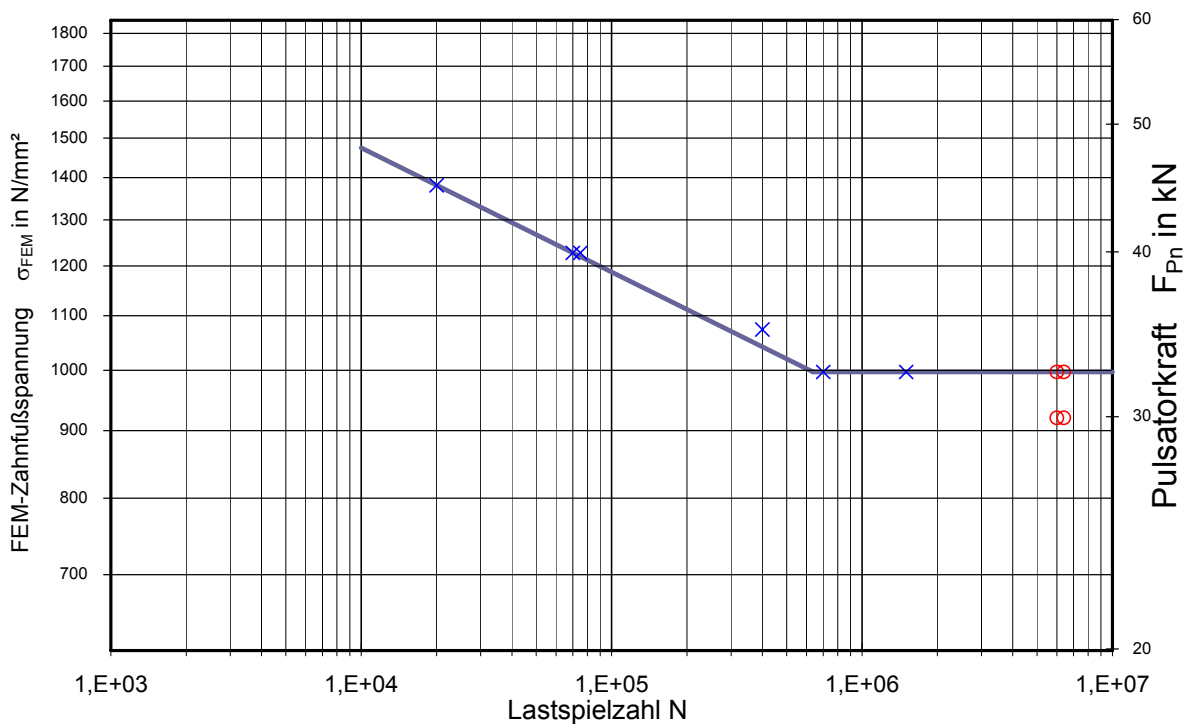
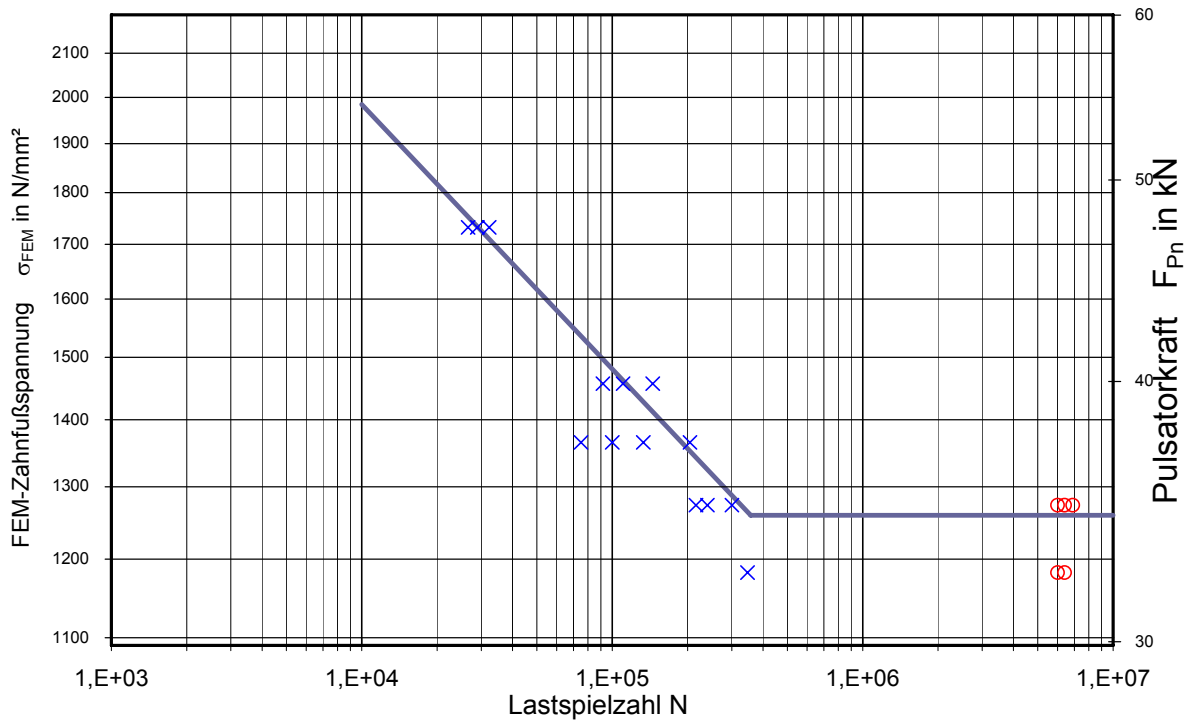
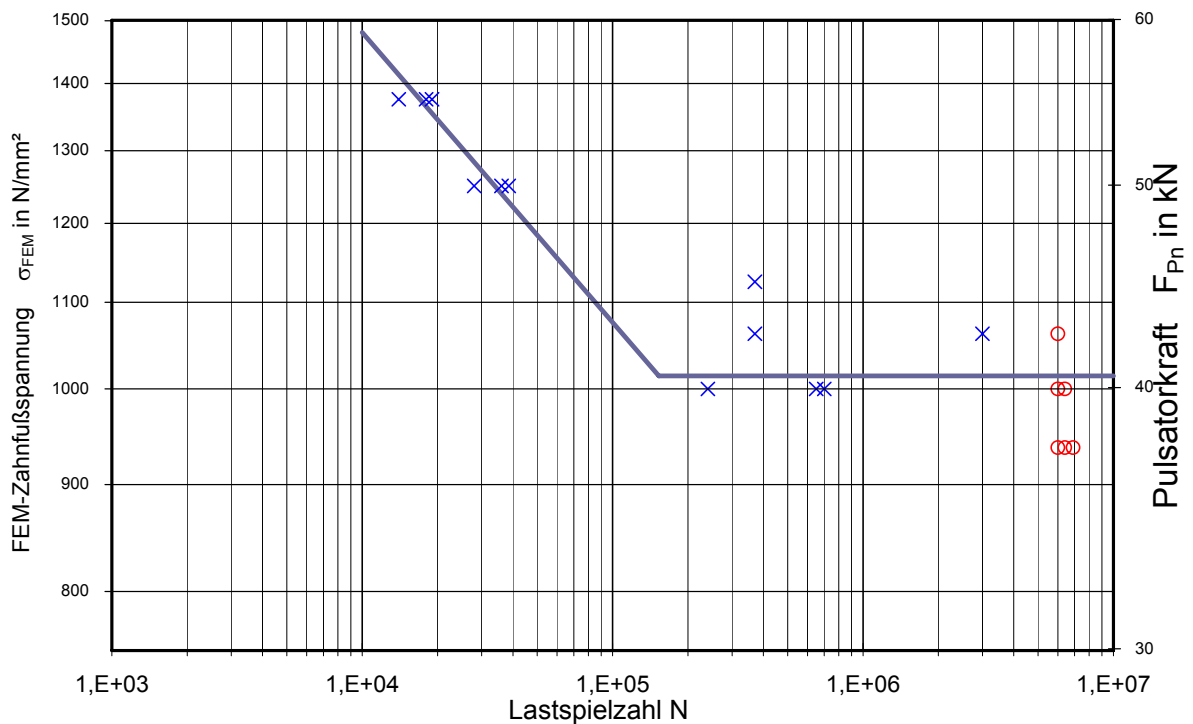


Abbildung 54: Zahnfußbruch - Wöhlerlinie – LL1  $\alpha = 36^\circ$  – Belastung am Zahnfuß





**Abbildung 57:** Zahnfußbruch - Wöhlerlinie – LL3  $\alpha = 28,2^\circ$  – Belastung am Zahnkopf



**Abbildung 58:** Zahnfußbruch - Wöhlerlinie – LL3  $\alpha = 28,2^\circ$  – Belastung am Zahnfuß



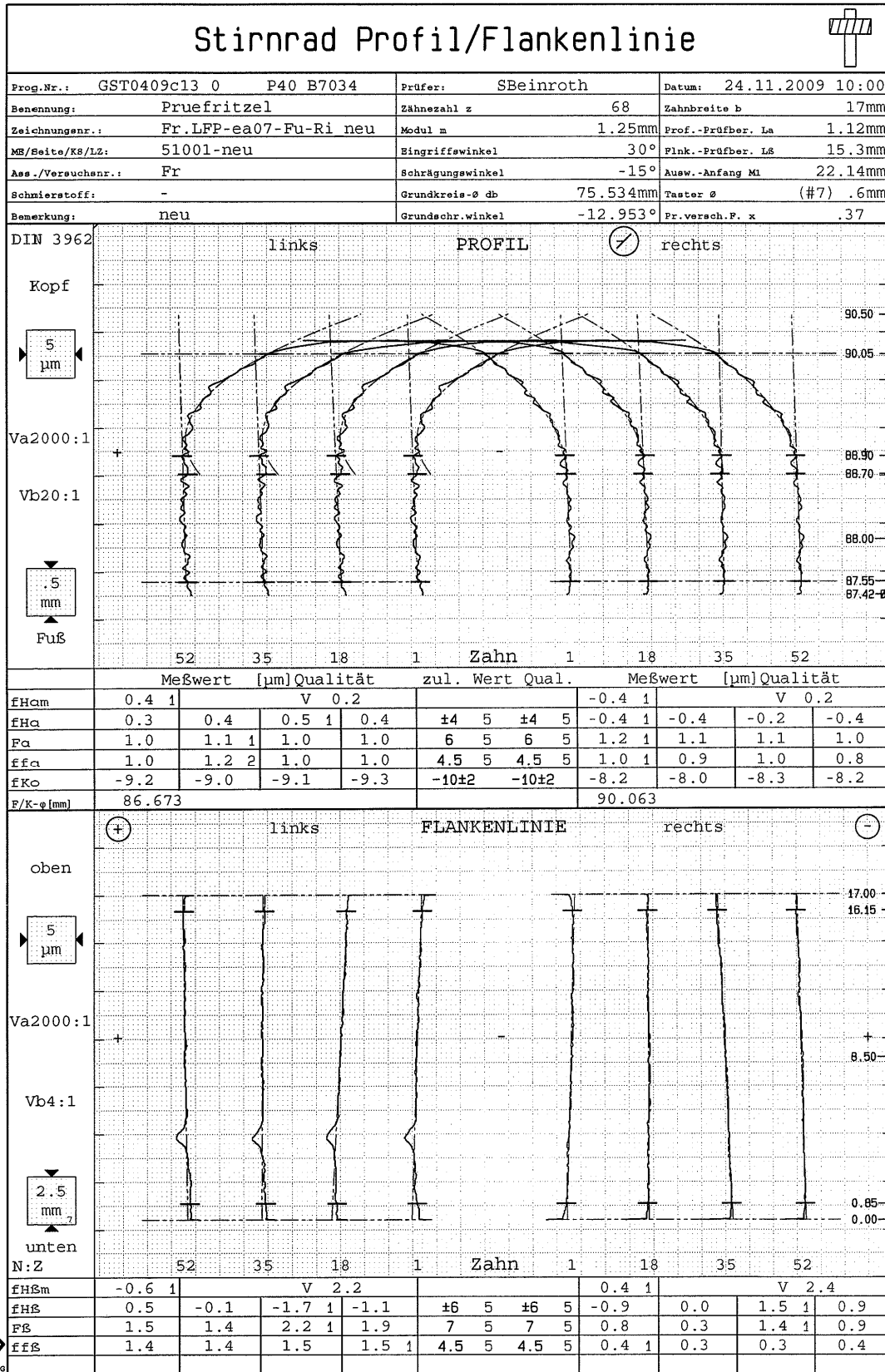


Abbildung 59: gemessene Profil- und Flankenlinie der extremen LowLoss-Verzahnung LFP-ea07-Fu (Ritzel)

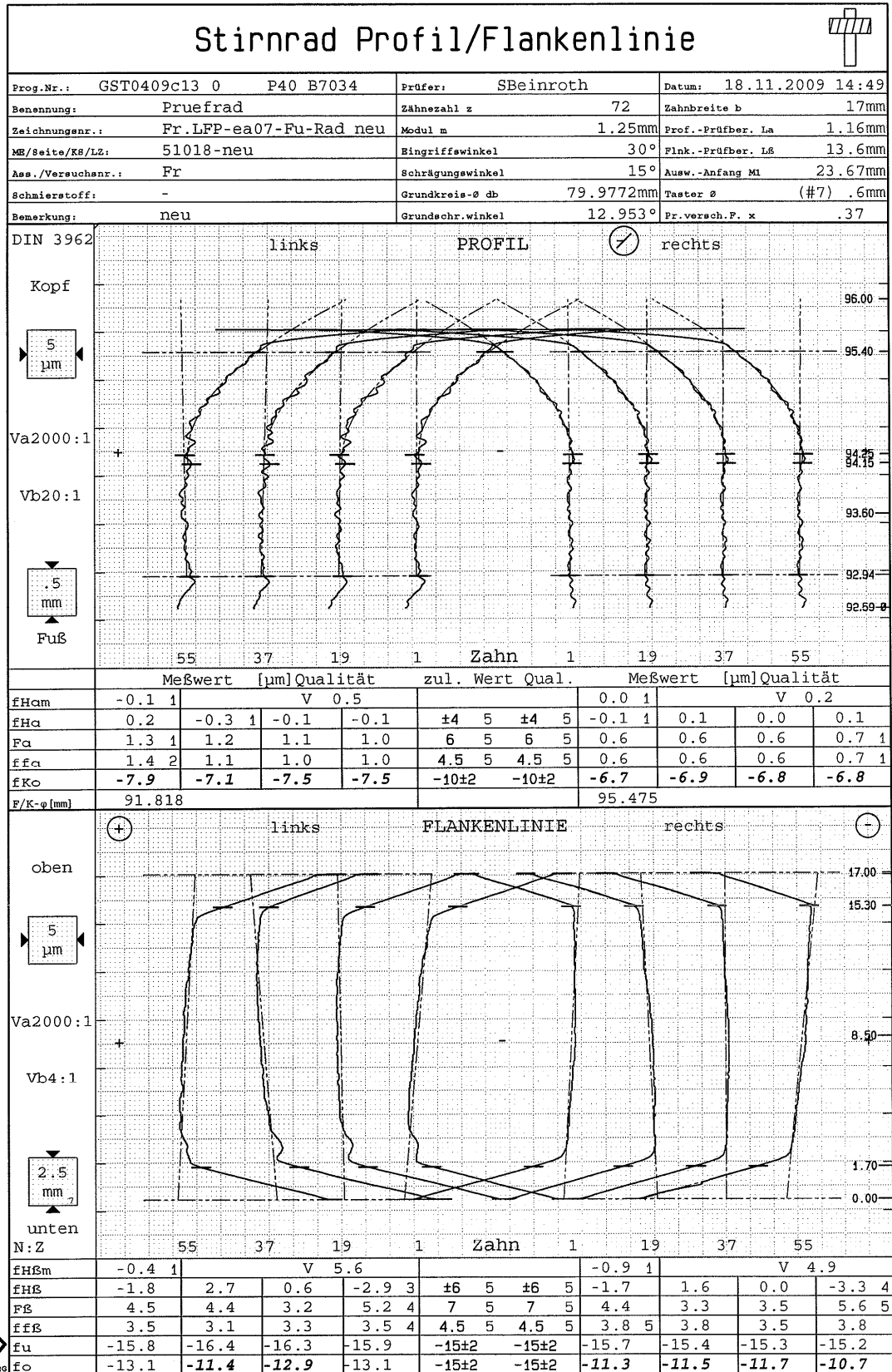
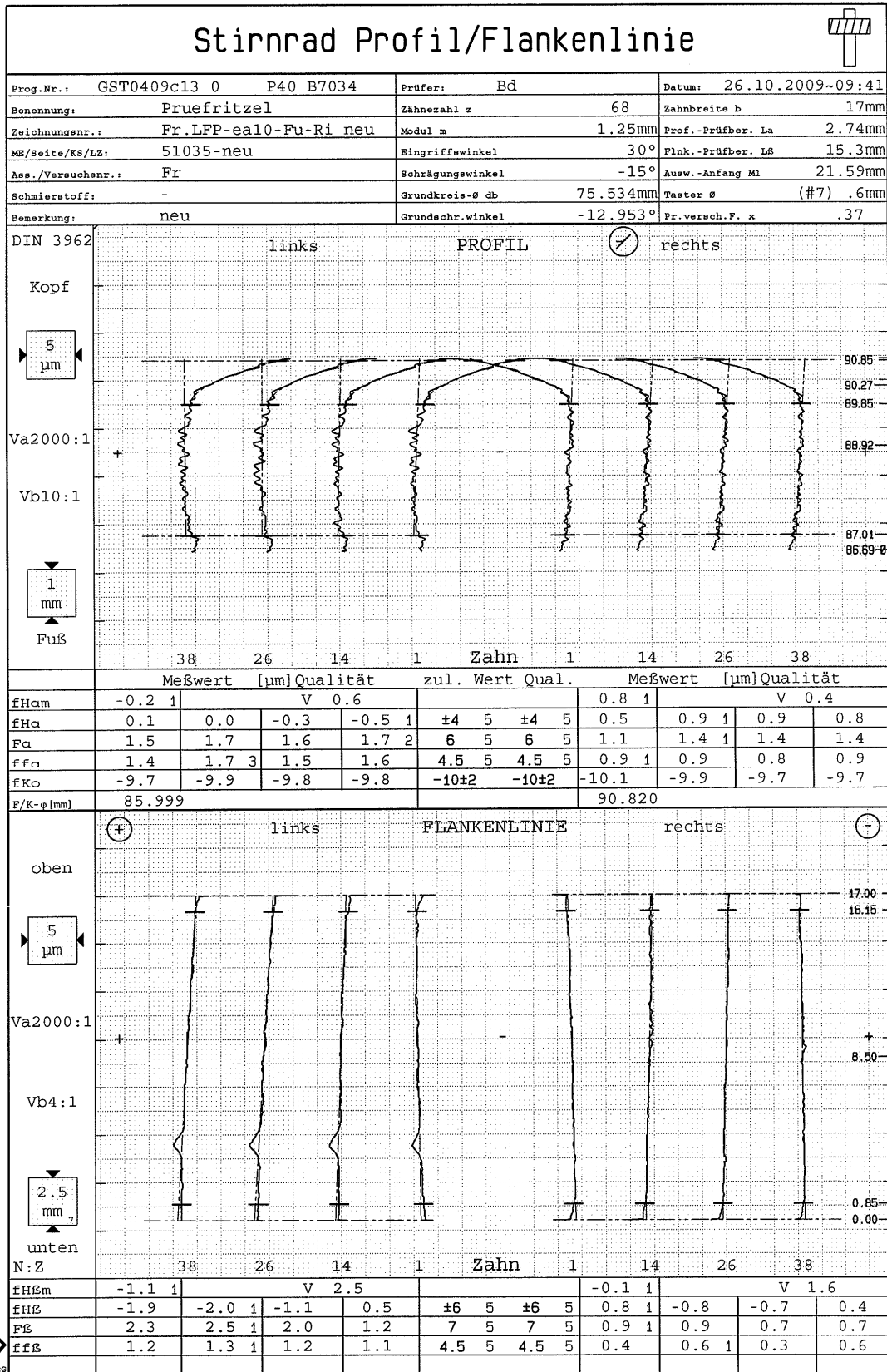


Abbildung 60: gemessene Profil- und Flankenlinie der extremen LowLoss-Verzahnung LFP-ea07-Fu (Rad)

FZG TU-München



Copyright (c) Klingelberg GmbH



Abbildung 61: gemessene Profil- und Flankenlinie der gemäßigten LowLoss-Verzahnung LFP-ea10-Fu (Ritzel)

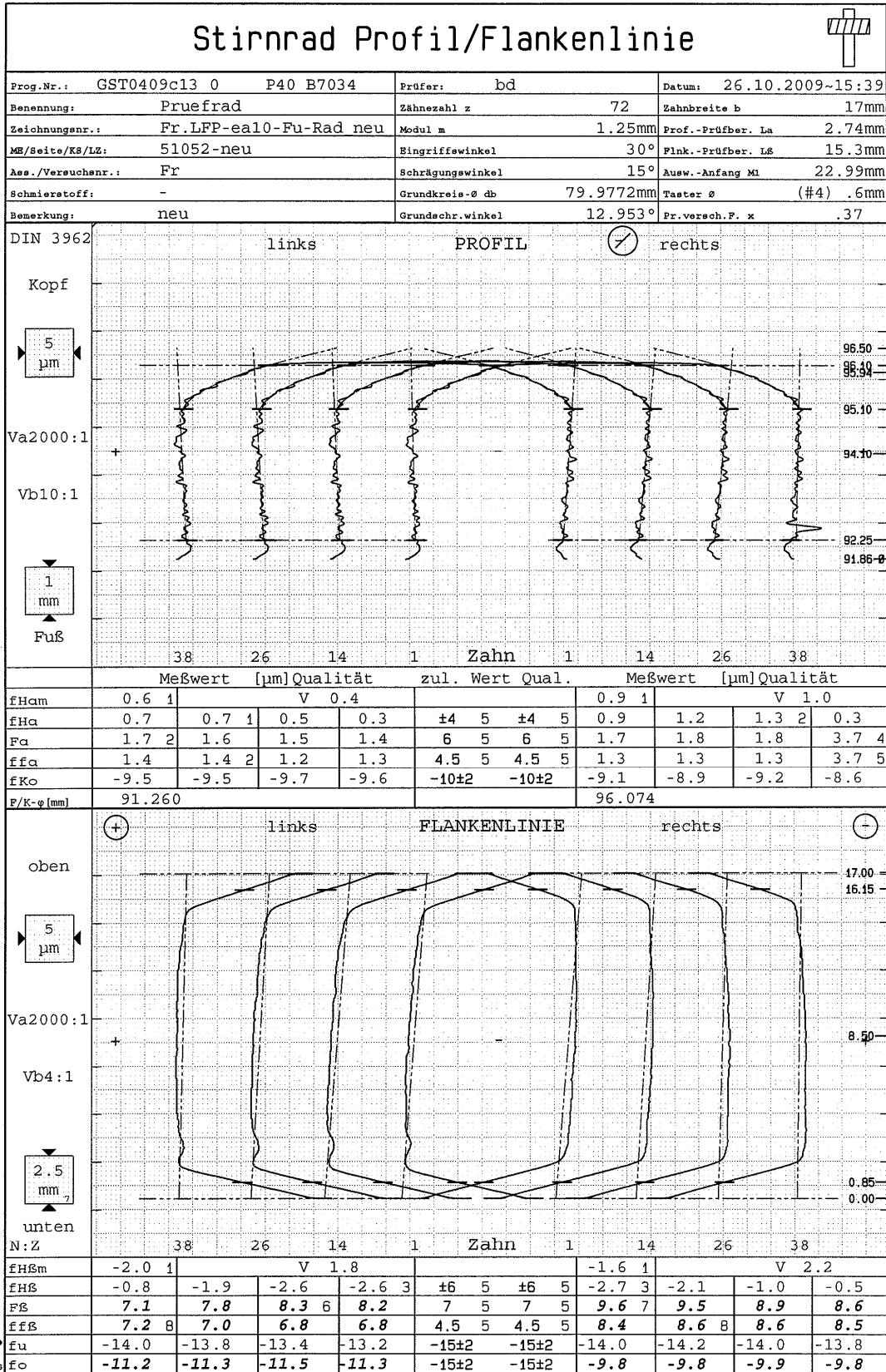
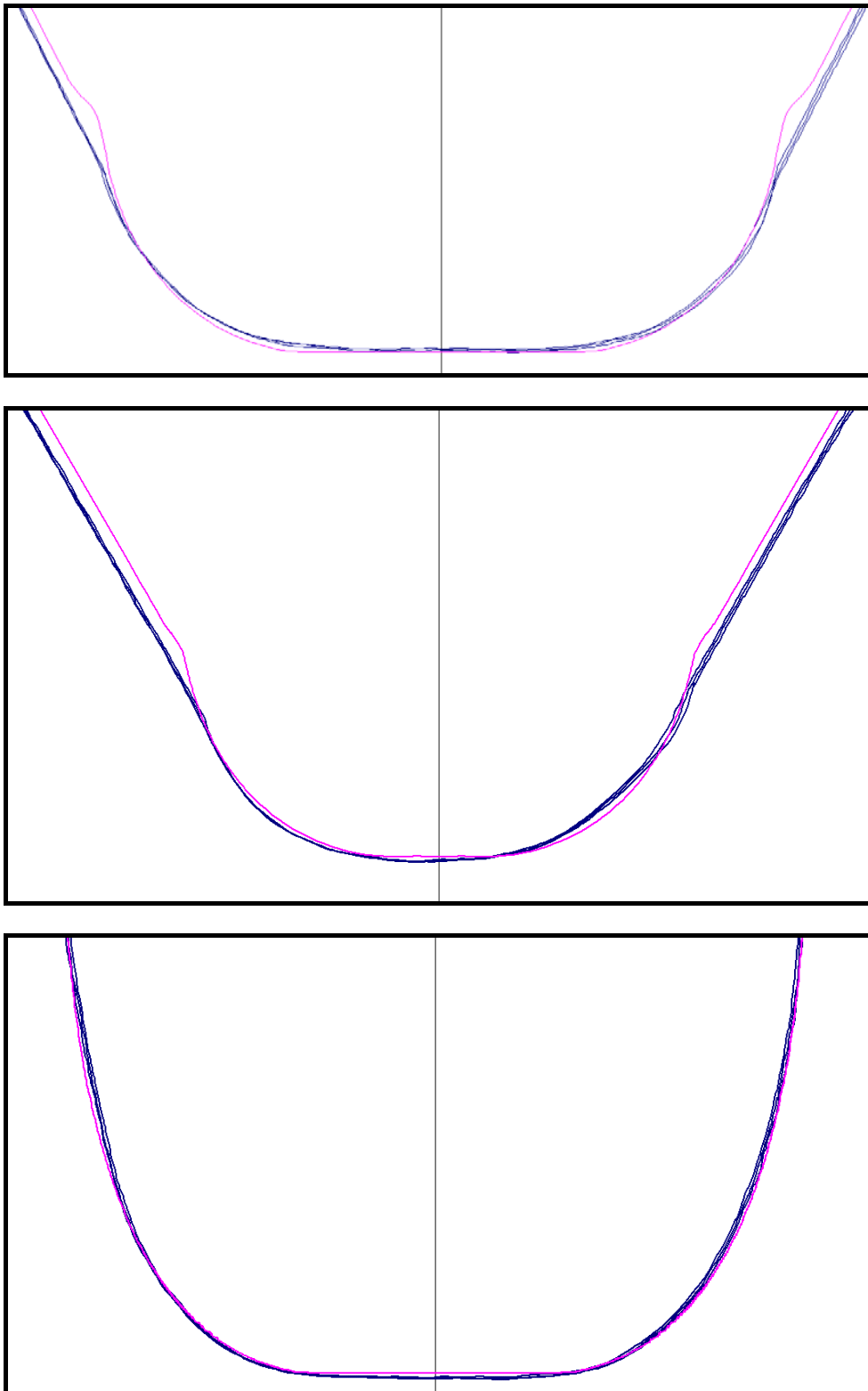
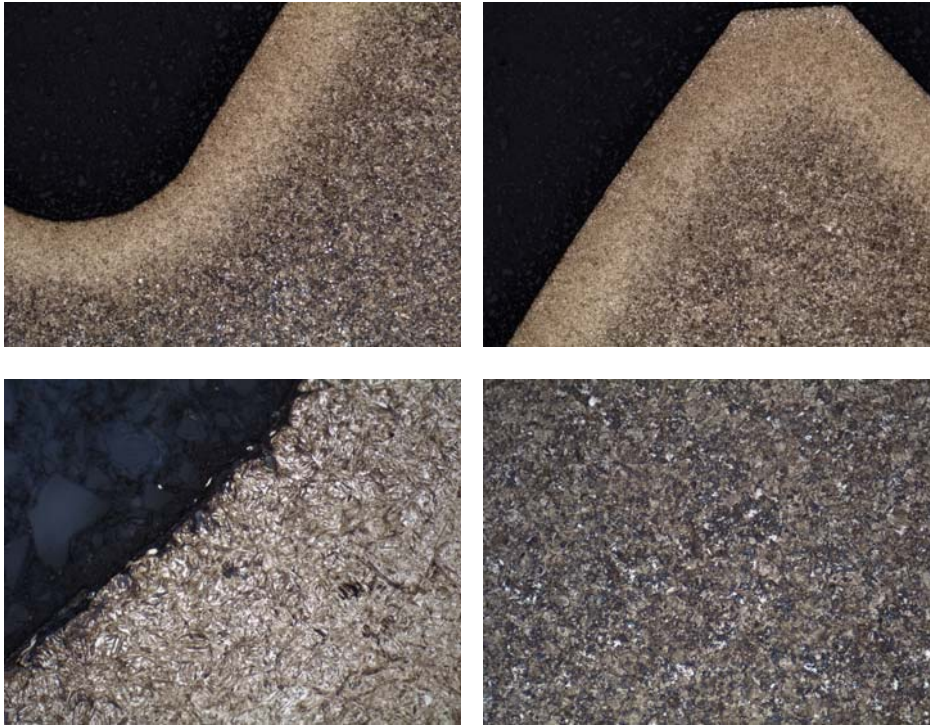


Abbildung 62: gemessene Profil- und Flankenlinie der gemäßigten LowLoss-Verzahnung LFP-ea10-Fu (Rad)



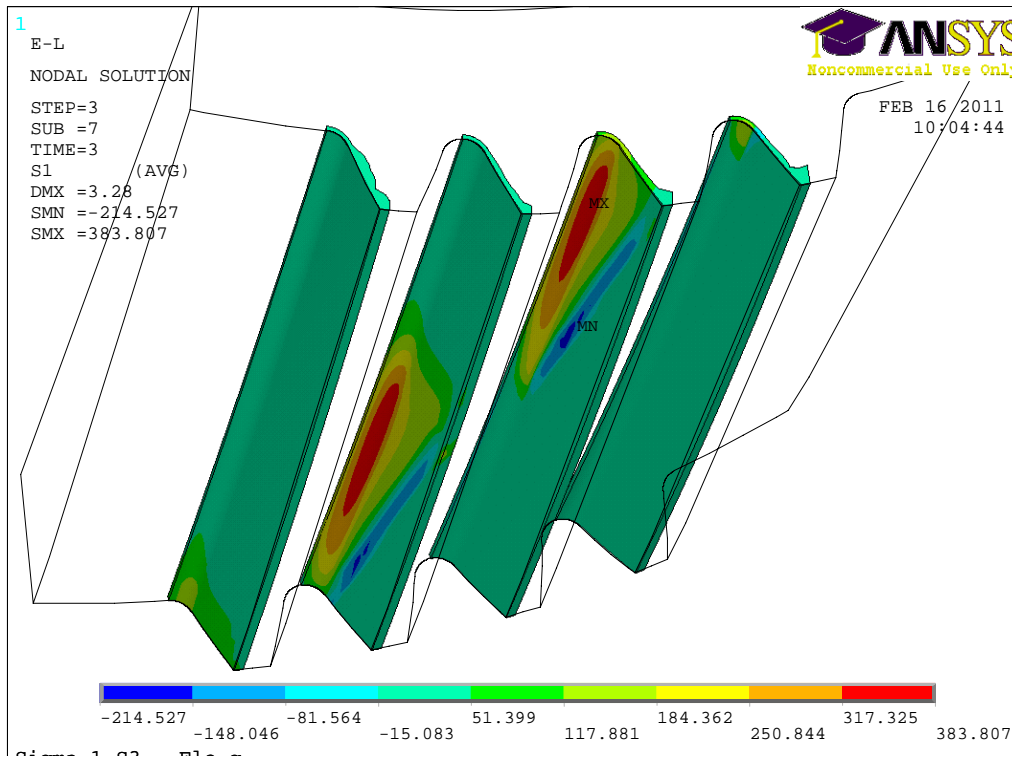
**Abbildung 63:** Vergleich von jeweils drei gemessenen (blaue Linien) mit der berechneten (rote Linie) Zahnfußkontur bei den Verzahnungen *LFP-ea07-Fu* (oben), *LFP-ea10-Fu* (mittig) und *LFP-Ref-Puls* (unten)



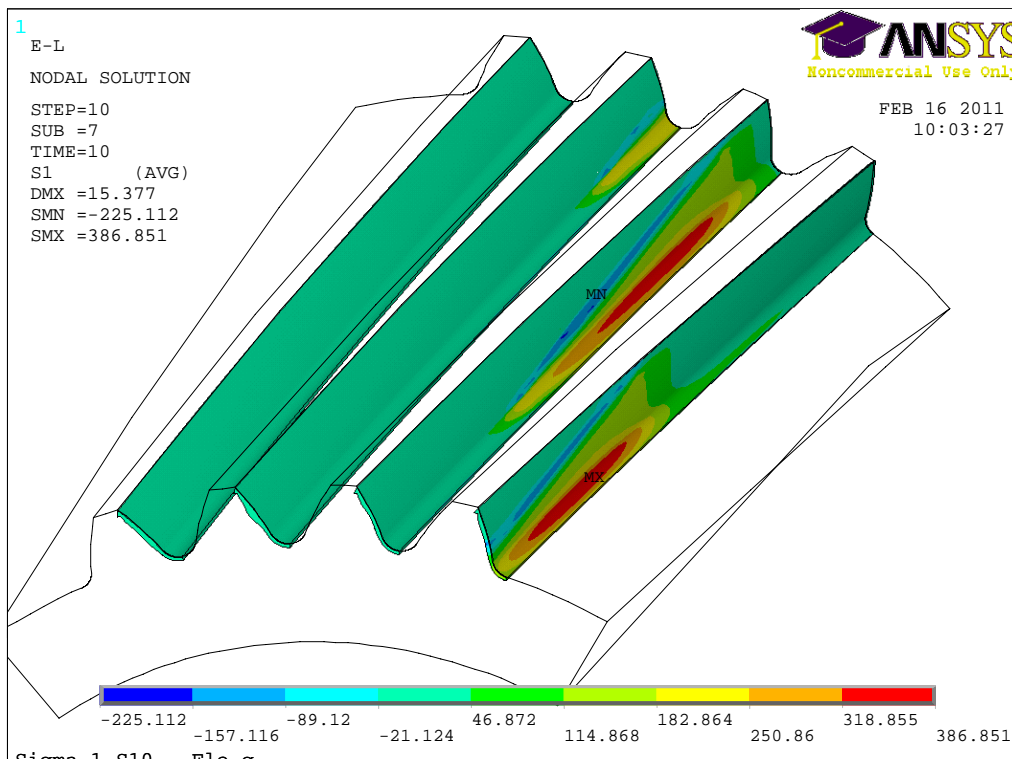
**Abbildung 64:** Schliff der Verzahnung *LL2*: Übersicht Zahnfuß (oben links); Gesamtübersicht (oben rechts); Randgefüge: feinnadliger Martensit mit wenig Restaustenit (unten links); Kerngefüge (unten rechts)



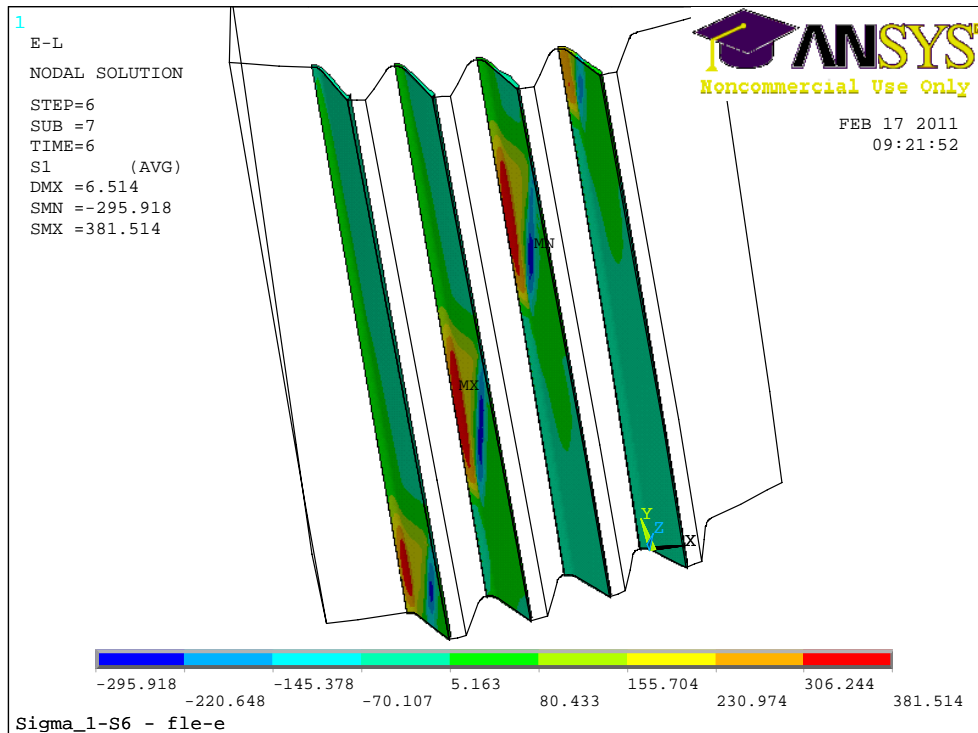
**Abbildung 65:** Schliff der Verzahnung *LFP-ea10-Fu*: Übersicht Zahnfuß (oben links); Gesamtübersicht (oben rechts); Randgefüge: feinnadliger Martensit mit wenig Restaustenit (unten links); Kerngefüge (unten rechts)



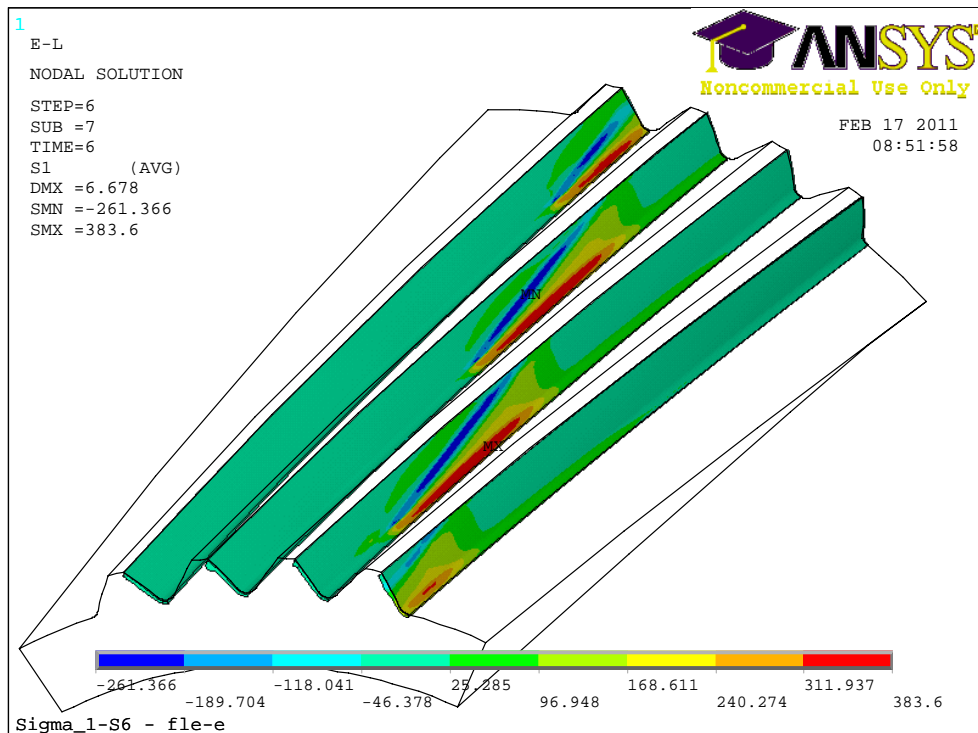
**Abbildung 66:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 383 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Industrie1-gemäßigt*



**Abbildung 67:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 386 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Industrie1-gemäßigt*

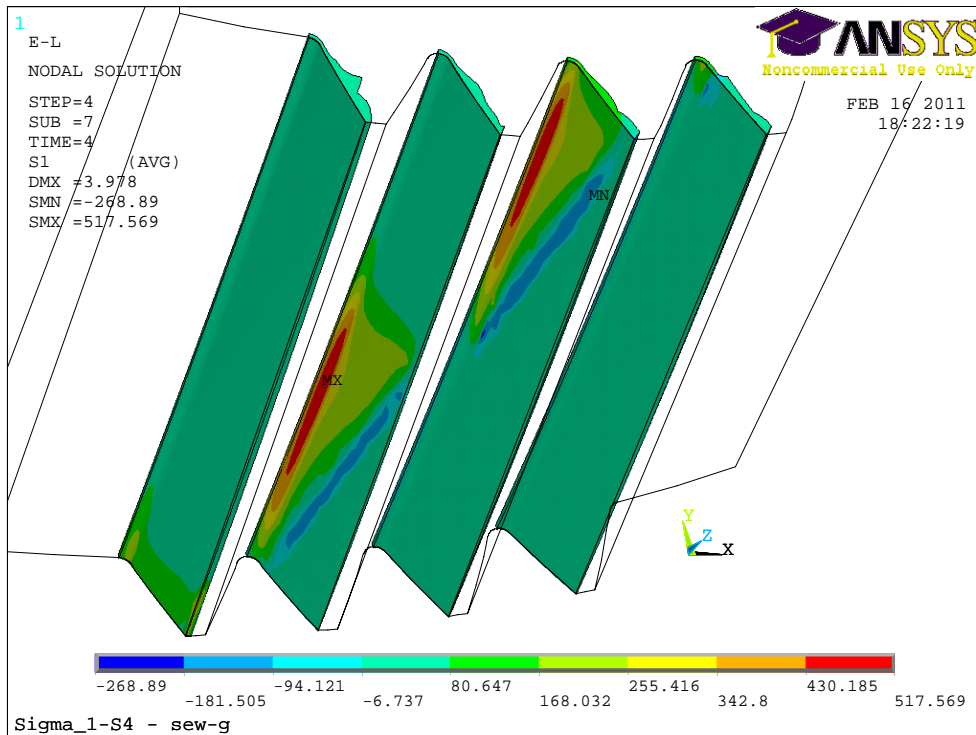


**Abbildung 68:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 381 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Industrie1-extrem*

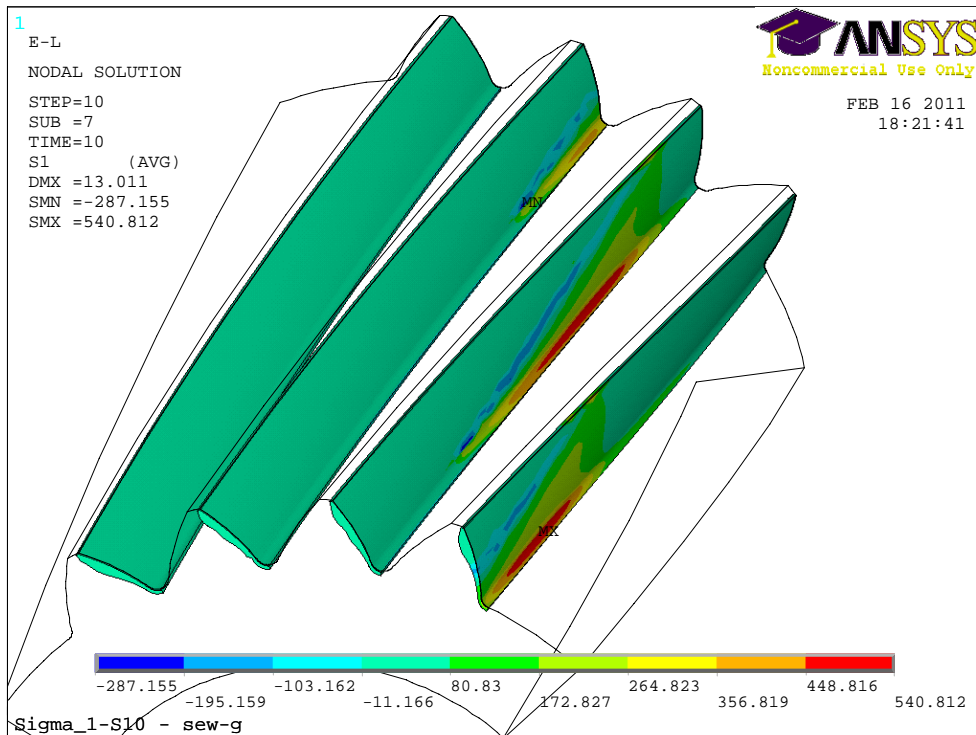


**Abbildung 69:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 383 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Industrie1-extrem*

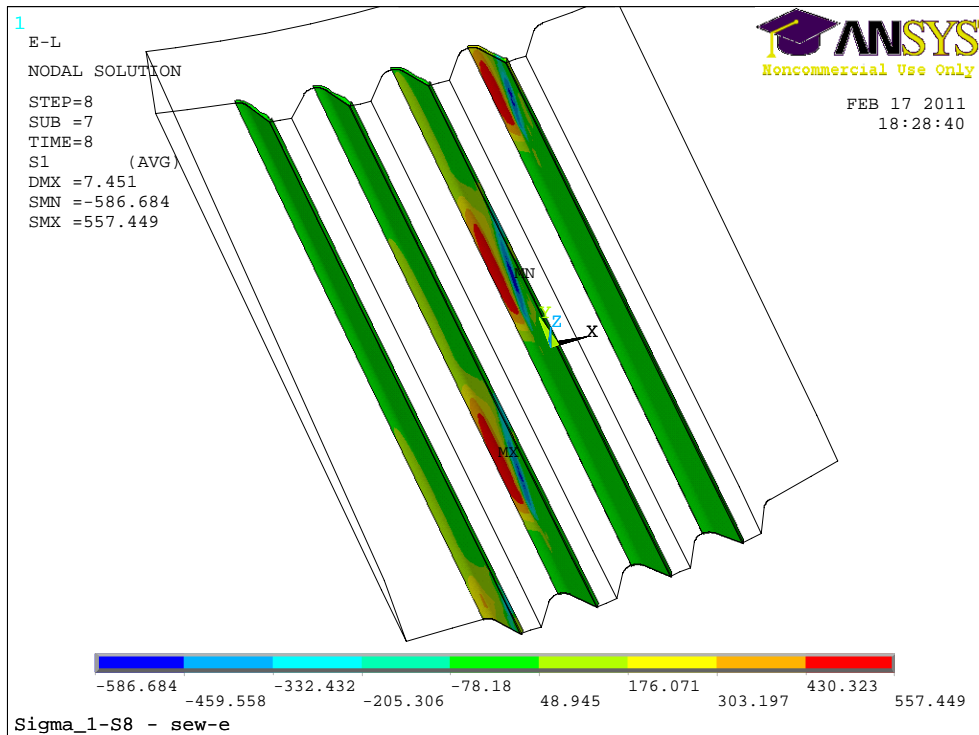




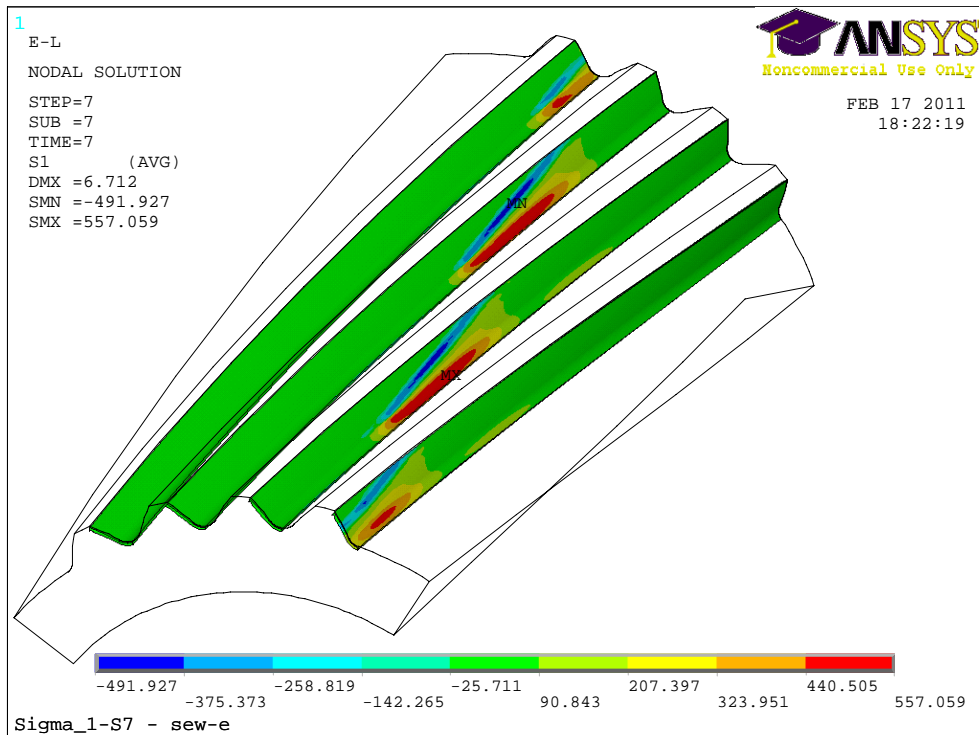
**Abbildung 70:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 517 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Industrie2-gemäßigt*



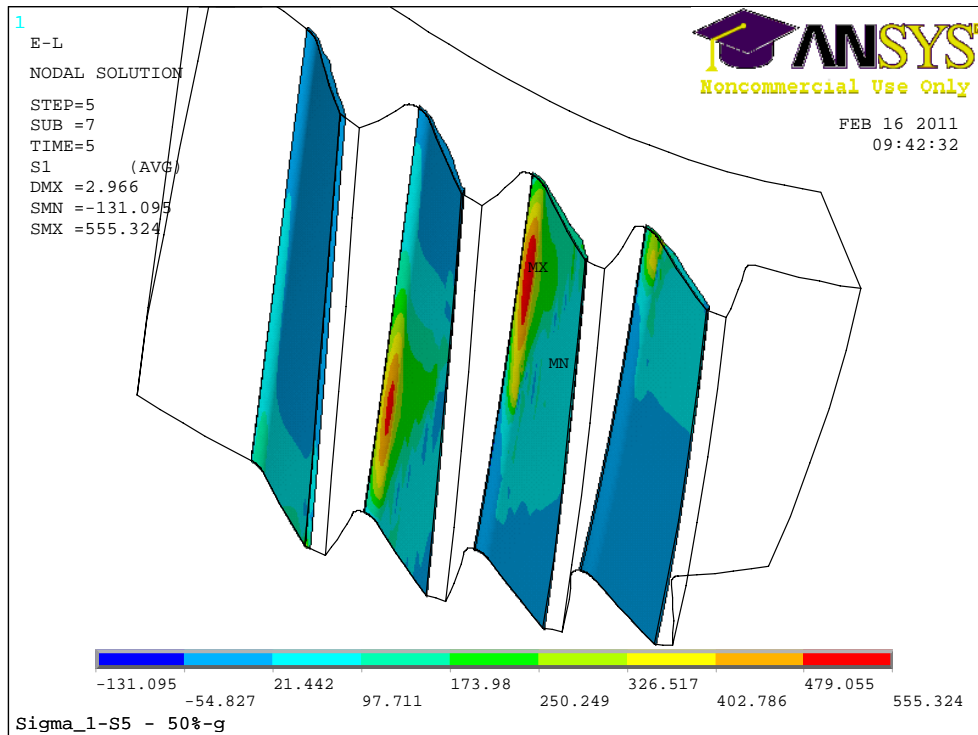
**Abbildung 71:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 540 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Industrie2-gemäßigt*



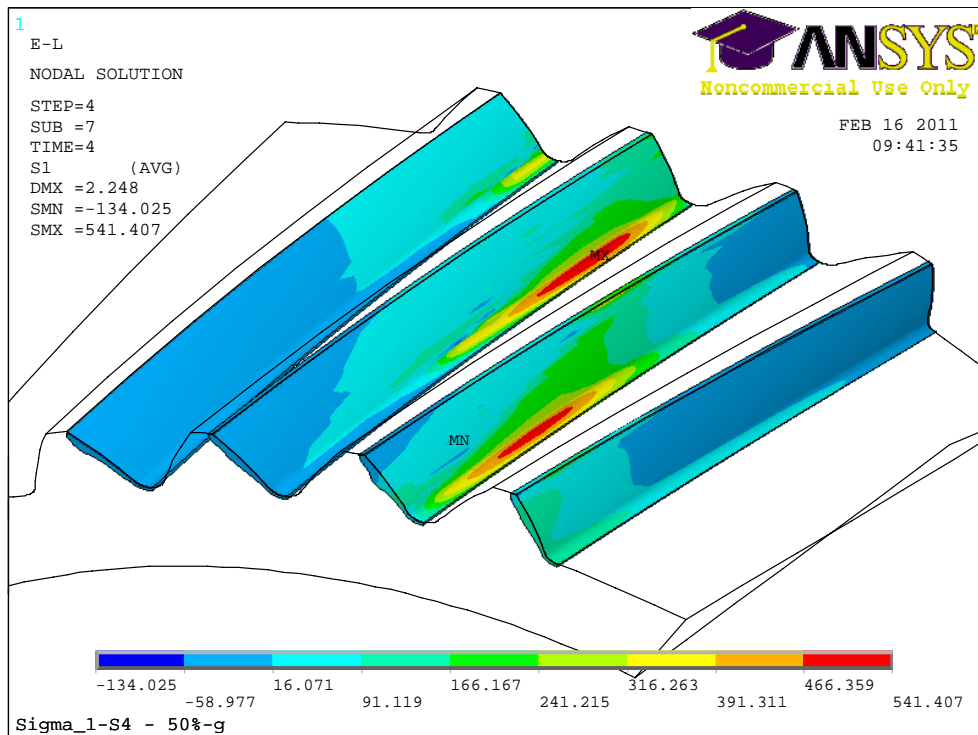
**Abbildung 72:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 557 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Industrie2-extrem*



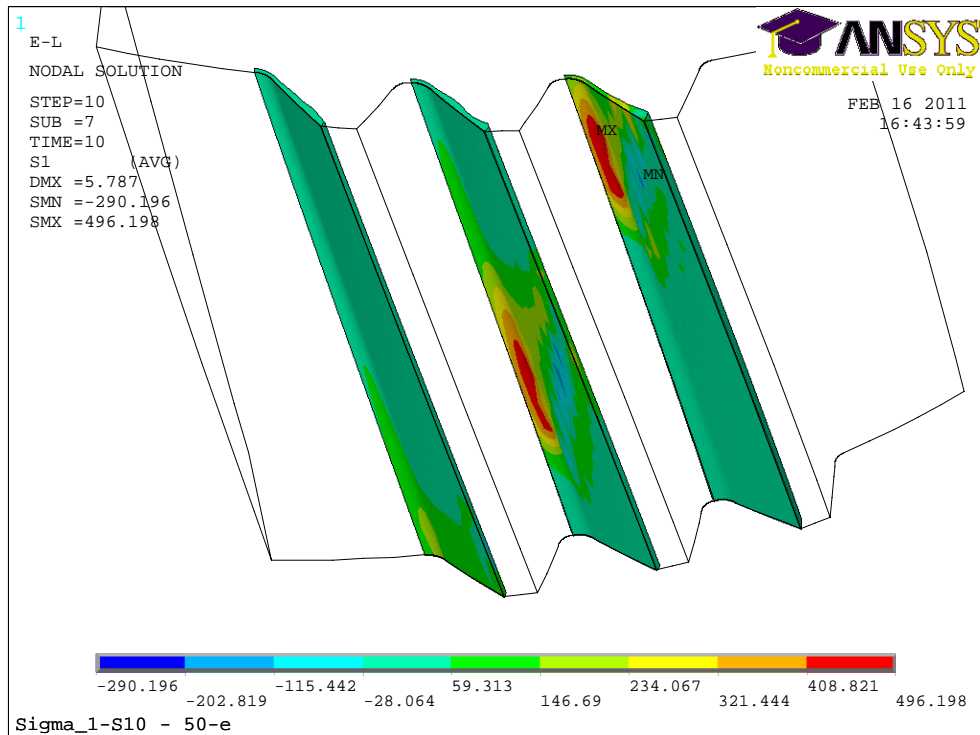
**Abbildung 73:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 557 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Industrie2-extrem*



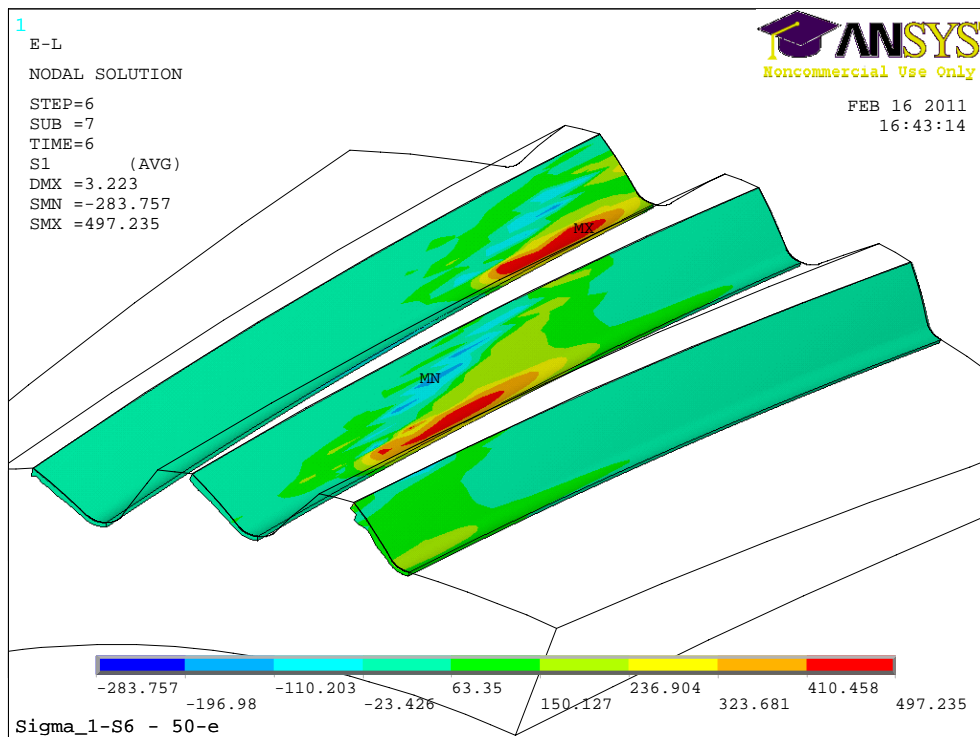
**Abbildung 74:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 555 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Fahrzeug-gemäßigt*



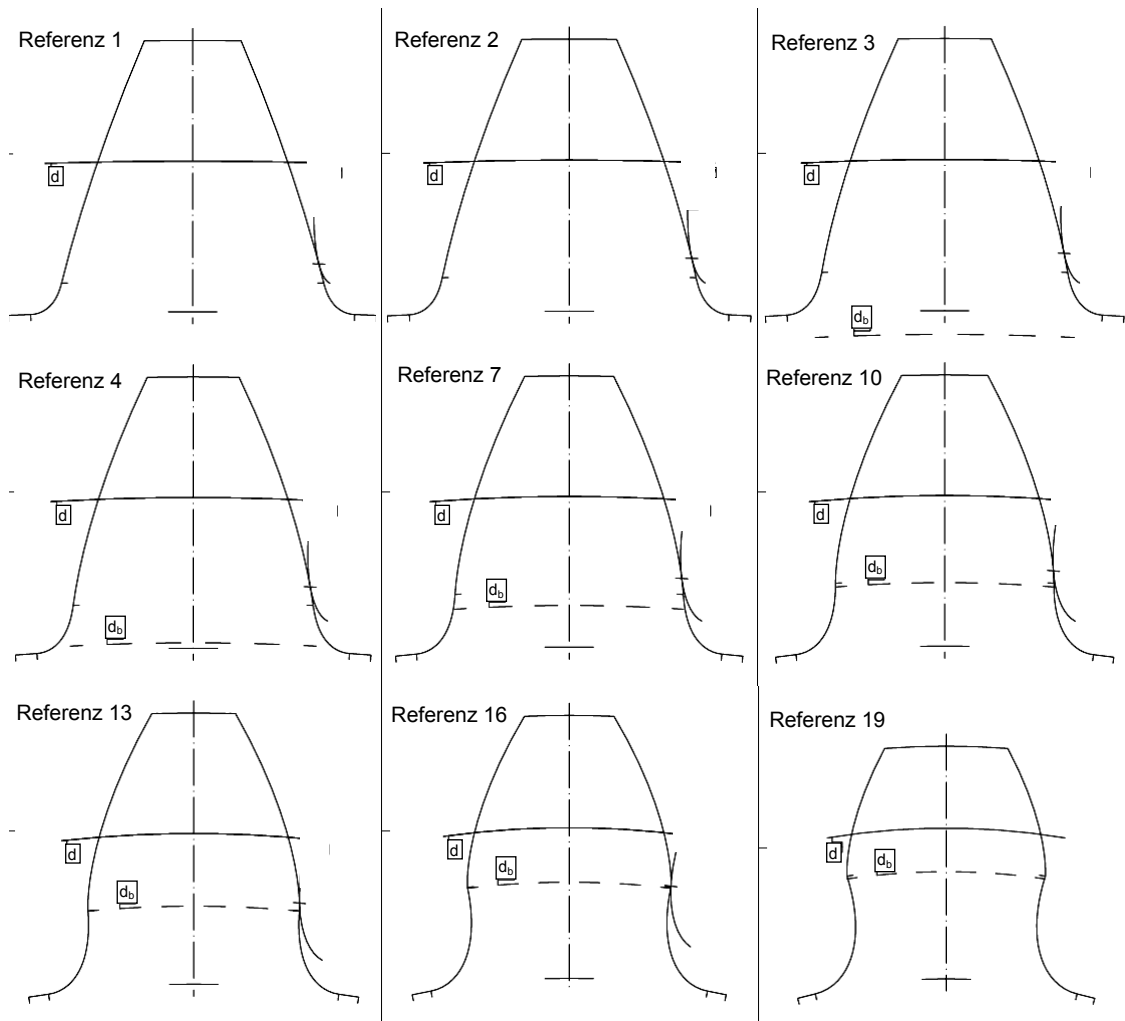
**Abbildung 75:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 541 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Fahrzeug-gemäßigt*



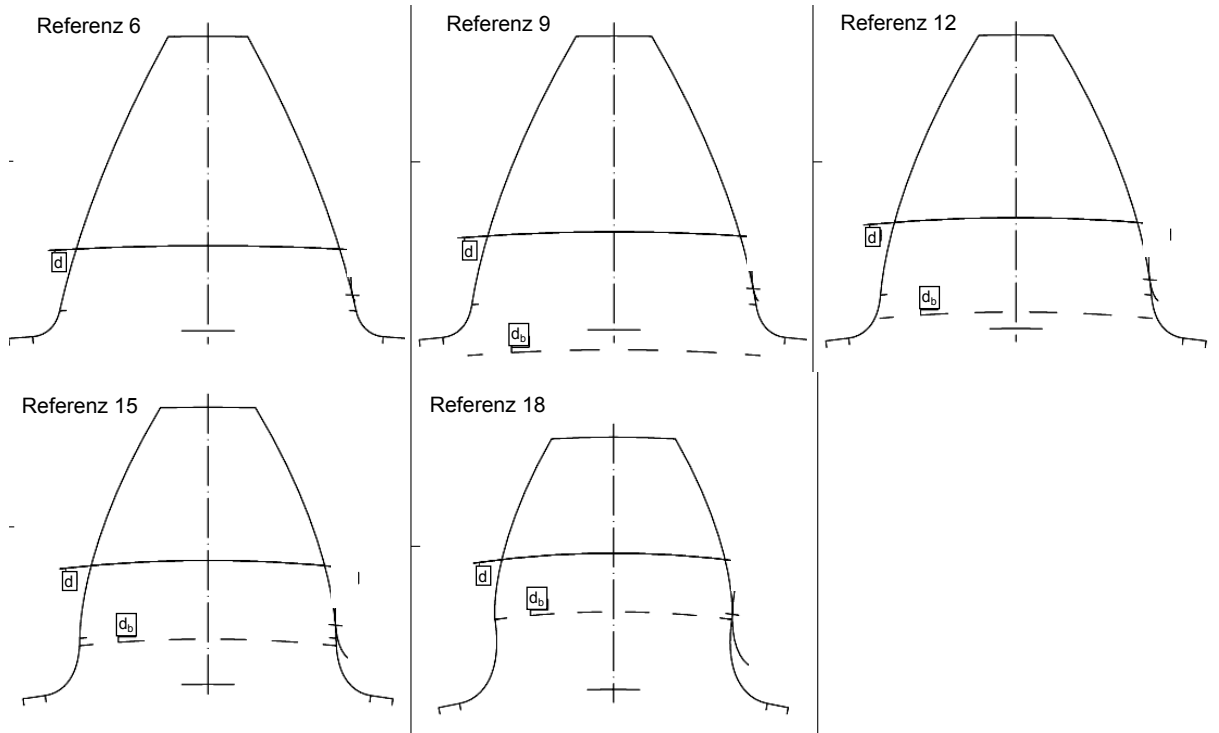
**Abbildung 76:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 496 \text{ N/mm}^2$  am Ritzel bei an der Verzahnung *Fahrzeug-extrem*



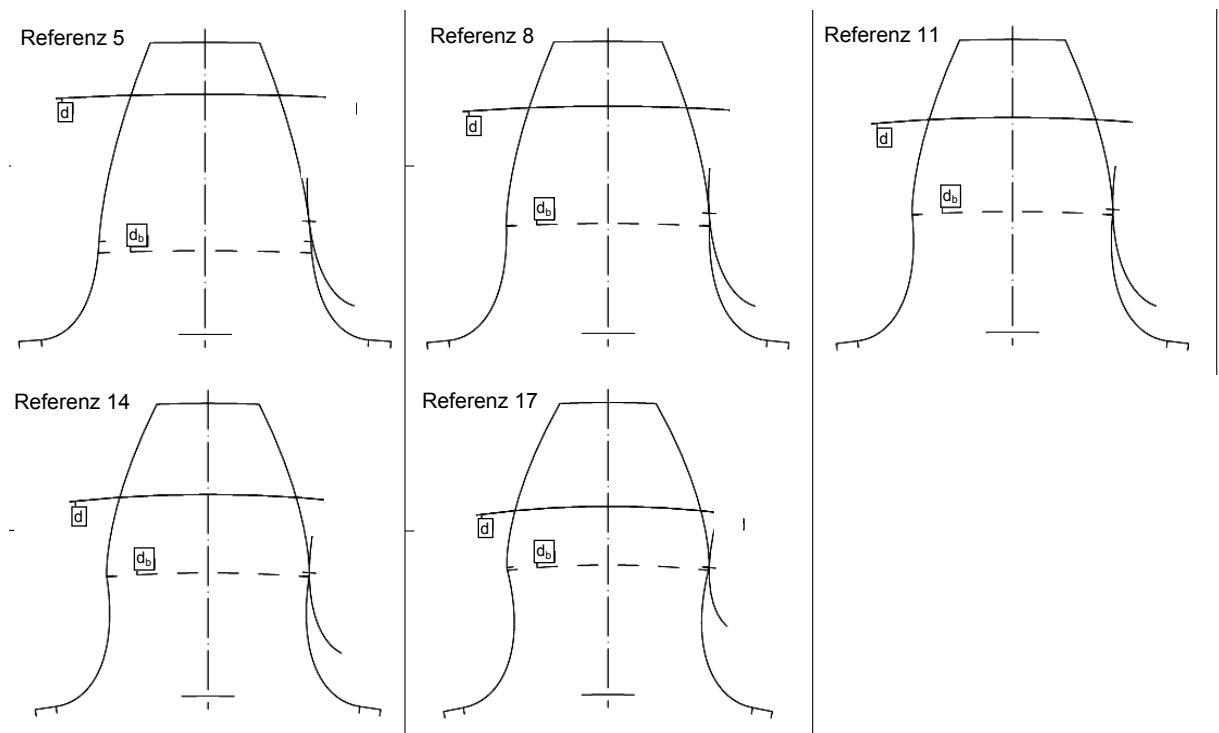
**Abbildung 77:** FEM-Berechnung in der Eingriffsstellung mit der maximalen Zahnfußspannung  $\sigma_1 = 497 \text{ N/mm}^2$  am Rad bei an der Verzahnung *Fahrzeug-extrem*



**Abbildung 78:** 2D-Referenzverzahnungen ohne Profilverschiebung  
( $z = 80, 60, 48, 40, 30, 24, 20, 15$  und  $12$ )



**Abbildung 79:** 2D-Referenzverzahnungen mit positiver Profilverschiebung  
( $z = 40, 30, 24, 20$  und  $15$ )



**Abbildung 80:** 2D-Referenzverzahnungen mit negativer Profilverschiebung  
( $z = 40, 30, 24, 20$  und  $15$ )

Referenzverzahnung																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Zähnezahl	80	60	48	40	40	40	30	30	30	24	24	24	20	20	20	15	15	15	12
Profilverschiebungsfaktor	0	0	0	0	-0,6	0,6	0	-0,5	0,5	0	-0,4	0,4	0	-0,3	0,3	0	-0,2	0,2	0
Schrägungswinkel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Grundkreisdurchmesser	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763	112,763
Kopfkreisdurchmesser	123,000	124,000	125,000	126,000	122,400	129,600	128,000	124,000	132,000	130,000	126,000	134,000	132,000	128,400	134,100	134,900	132,800	134,300	133,600
Eingriffswinkel am Kopf	23,541	24,580	25,564	26,499	22,888	29,531	28,241	24,580	31,321	29,841	26,499	32,699	31,321	28,572	32,766	33,290	31,884	32,898	32,431
Kraftangriffswinkel am Kopf	22,394	23,105	23,781	24,427	20,480	27,822	25,638	21,531	29,190	26,762	22,914	30,146	27,810	24,563	29,293	28,663	27,114	27,515	27,275
Durchmesser Angriffspunkt $F_{res}$	122,542	123,394	124,248	125,105	121,479	128,730	126,825	122,787	130,861	128,554	124,508	132,597	130,291	126,644	132,418	132,671	130,536	132,061	130,787
Fußformkreisdurchmesser	117,008	116,179	115,436	114,779	113,292	117,202	113,743	112,811	115,854	113,073	112,764	114,530	112,778	112,835	113,438	112,877	113,122	112,763	113,234
Eingriffswinkel am Kopf	15,480	13,928	12,354	10,754	5,638	15,819	7,526	1,669	13,265	4,243	0,227	10,077	0,931	2,045	6,253	2,574	4,565	0,045	5,227
Zahnfußdickensehne am Grundkreis	3,895	4,633	5,371	6,109	4,878	7,340	7,585	6,217	8,953	9,061	7,693	10,429	10,537	9,306	11,768	13,489	12,395	14,584	16,441

Werkzeug

Werkzeug-Profilwinkel	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Werkzeug-Kopfrundungsfaktor	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Werkzeug-Kopfhöhenfaktor	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25

vom Werkzeug abgeleitete Parameter

Modul	1,5	2,0	2,5	3,0	3,0	3,0	4,0	4,0	4,0	5,0	5,0	5,0	6,0	6,0	6,0	8,0	8,0	8,0	10,0
Teilkreisdurchmesser	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
Fußkreisdurchmesser	116,250	115,000	113,750	112,500	108,900	116,100	110,000	106,000	114,000	107,500	103,500	111,500	105,000	101,400	108,600	100,000	96,800	103,200	95,000
Zahnfußsehnen-Faktor	2,264	2,220	2,177	2,137	1,885	2,324	2,059	1,806	2,262	1,987	1,754	2,185	1,918	1,723	2,092	1,788	1,634	1,933	1,667
Biegebelastarm-Faktor	1,795	1,790	1,786	1,784	1,738	1,836	1,781	1,735	1,837	1,780	1,737	1,835	1,780	1,742	1,669	1,700	1,751	1,446	1,424
Fußrundungsradius-Faktor	0,343	0,371	0,392	0,410	0,636	0,248	0,436	0,637	0,279	0,455	0,622	0,315	0,469	0,597	0,356	0,488	0,577	0,406	0,501

Tabelle 20: Referenzverzahnungen - Geometrie

Referenzverzahnung		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
<b>Maximierung von <math>\rho_{ap0}</math>*</b>																				
Werkzeug-Profilwinkel	$\alpha_p$	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Werkzeug-Kopfrundungsfaktor	$\rho_{ap0}$ *	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403	0,403
Werkzeug-Kopfhöhenfaktor	$h_{ap0}$ *	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836	1,3836
<b>veränderte Parameter</b>																				
Fußkreisdurchmesser	$d_f$	115,849	114,466	113,082	111,698	108,098	115,298	108,931	104,931	112,931	106,164	102,164	110,164	103,397	99,797	106,997	97,862	94,662	101,062	92,328
Zahnfußsehnen-Faktor	$s_{in}$ *	2,300	2,256	2,215	2,175	1,922	2,363	2,098	1,842	2,303	2,026	1,790	2,226	1,956	1,758	2,132	1,824	1,666	1,971	1,698
Biegebelastarm-Faktor	$h_{re}$ *	1,838	1,837	1,836	1,837	1,794	1,885	1,839	1,796	1,893	1,844	1,803	1,896	1,849	1,813	1,736	1,779	1,831	1,824	1,512
Fußrundungsradius-Faktor	$\rho_f$ *	0,527	0,551	0,569	0,584	0,800	0,436	0,606	0,798	0,462	0,622	0,781	0,493	0,634	0,755	0,529	0,649	0,733	0,573	0,660
<b>Optimierung von <math>\rho_{ap0}</math>* und <math>h_{ap0}</math>*</b>																				
Werkzeug-Profilwinkel	$\alpha_p$											20							20	20
Werkzeug-Kopfrundungsfaktor	$\rho_{ap0}$ *											0,453							0,538	0,648
Werkzeug-Kopfhöhenfaktor	$h_{ap0}$ *											1,286							1,123	0,911
<b>veränderte Parameter</b>																				
Fußkreisdurchmesser	$d_f$											103,100							102,032	102,224
Zahnfußsehnen-Faktor	$s_{in}$ *											1,793							1,870	1,756
Biegebelastarm-Faktor	$h_{re}$ *											1,706							1,506	1,339
Fußrundungsradius-Faktor	$\rho_f$ *											0,770							0,643	0,718
<b>Werkzeugprofilwinkel <math>\alpha_p = 15^\circ</math></b>																				
Werkzeug-Profilwinkel	$\alpha_p$	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Werkzeug-Kopfrundungsfaktor	$\rho_{ap0}$ *	0,476	0,500	0,514	0,524	0,621	0,427	0,536	0,617	0,455	0,543	0,635	0,479	0,548	0,674	0,500	0,629	0,723	0,531	0,685
Werkzeug-Kopfhöhenfaktor	$h_{ap0}$ *	1,569	1,500	1,459	1,432	1,153	1,708	1,397	1,164	1,627	1,376	1,112	1,561	1,362	1,000	1,500	1,129	0,862	1,411	0,969
<b>veränderte Parameter</b>																				
Teilkreisdurchmesser [mm]	$d$	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741	116,741
Profilschiebungsfaktor	$x$	1,307	0,980	0,784	0,653	-0,162	1,468	0,490	-0,189	1,169	0,392	-0,151	0,935	0,327	-0,081	0,734	0,245	-0,027	0,517	0,196
Modul	$m_p$	1,459	1,946	2,432	2,919	2,919	2,919	3,891	3,891	3,891	4,864	4,864	4,864	5,837	5,837	5,837	7,783	7,783	7,783	9,728
Fußkreisdurchmesser	$d_f$	115,973	114,718	113,463	112,197	109,065	115,346	109,683	106,211	113,178	107,169	104,454	110,652	104,562	104,121	107,804	103,044	102,903	102,827	101,702
Zahnfußsehnen-Faktor	$s_{in}$ *	2,331	2,272	2,225	2,183	1,895	2,423	2,109	1,834	2,347	2,042	1,801	2,261	1,980	1,801	2,165	1,908	1,791	2,018	1,872
Biegebelastarm-Faktor	$h_{re}$ *	1,844	1,816	1,800	1,792	1,662	1,929	1,781	1,666	1,909	1,779	1,599	1,890	1,788	1,469	1,705	1,473	1,324	1,440	1,051
Fußrundungsradius-Faktor	$\rho_f$ *	0,483	0,500	0,520	0,539	0,721	0,437	0,573	0,743	0,455	0,599	0,739	0,486	0,619	0,726	0,524	0,654	0,733	0,577	0,689
<b>Werkzeugprofilwinkel <math>\alpha_p = 25^\circ</math> (24°)</b>																				
Werkzeug-Profilwinkel	$\alpha_p$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
Werkzeug-Kopfrundungsfaktor	$\rho_{ap0}$ *	0,142	0,164	0,177	0,110	0,088	0,285	0,128	0,117	0,279	0,139	0,133	0,223	0,146	0,305	0,209	0,369	0,500	0,223	0,523
Werkzeug-Kopfhöhenfaktor	$h_{ap0}$ *	1,557	1,525	1,505	1,534	1,636	1,348	1,509	1,594	1,357	1,495	1,502	1,380	1,485	1,268	1,398	1,181	1,001	1,380	0,970
<b>veränderte Parameter</b>																				
Teilkreisdurchmesser [mm]	$d$	123,435	123,435	123,435	124,420	123,435	123,435	124,420	123,435	123,435	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420	124,420
Profilschiebungsfaktor	$x$	-1,028	-0,771	-0,617	-0,646	-1,005	-0,024	-0,485	-0,794	0,023	-0,388	-0,700	-0,076	-0,323	-0,557	-0,089	-0,242	-0,399	-0,086	-0,194
Modul	$m_p$	1,5429	2,0572	2,5716	3,1105	3,0859	3,0859	4,1473	4,1145	4,1145	5,1842	5,1842	5,1842	6,2210	6,2210	6,2210	8,2947	8,2947	8,2947	10,3684
Fußkreisdurchmesser	$d_f$	115,448	113,983	112,367	114,778	107,176	114,972	107,874	103,784	112,455	104,898	101,589	109,327	101,736	101,714	105,914	100,890	101,795	100,104	100,305
Zahnfußsehnen-Faktor	$s_{in}$ *	2,334	2,278	2,240	2,183	1,947	2,338	2,092	1,849	2,277	2,006	1,782	2,192	1,924	1,757	2,095	1,826	1,716	1,927	1,774
Biegebelastarm-Faktor	$h_{re}$ *	1,922	1,910	1,936	1,919	1,904	1,891	1,914	1,897	1,906	1,914	1,804	1,921	1,931	1,597	1,774	1,533	1,364	1,538	1,062
Fußrundungsradius-Faktor	$\rho_f$ *	0,731	0,705	0,691	0,714	0,913	0,501	0,692	0,872	0,509	0,679	0,829	0,539	0,672	0,763	0,560	0,645	0,715	0,580	0,651

Tabelle 21: Modifikationen – Geometrie bei Optimierung des Standard-Werkzeuges



Referenzverzahnung		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Formfaktor	[ ]	Y <sub>Fa</sub>	2,067	2,133	2,202	2,271	2,926	1,920	2,418	3,159	2,001	2,570	3,321	2,122	2,733	3,408	2,124	2,979	3,727	2,191	2,908
Spannungskorrekturfaktor	[ ]	Y <sub>Sa</sub>	2,022	1,946	1,889	1,841	1,509	2,273	1,766	1,479	2,143	1,708	1,469	2,013	1,660	1,474	1,942	1,598	1,452	1,847	1,587
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>	1288	1273	1269	1269	1379	1286	1284	1449	1248	1307	1498	1231	1337	1523	1199	1392	1606	1197	1368
Fußspannung nach FEM	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>FEM</sub>	1263	1259	1259	1262	1362	1251	1281	1440	1244	1308	1496	1247	1348	1532	1194	1410	1651	1173	1394
%-Abweichung ISO 6336-3 / FEM	%	Δ <sub>6336-FEM</sub>	2%	1%	1%	1%	3%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	-1%	-1%	0%	-1%	-3%	2%	-2%	-2%
<b>Maximierung von p<sub>apo</sub>*</b>																					
Formfaktor	[ ]	Y <sub>Fa</sub>	2,051	2,120	2,187	2,258	2,905	1,906	2,405	3,144	1,990	2,561	3,309	2,113	2,729	3,407	2,127	2,996	3,749	2,222	2,976
Spannungskorrekturfaktor	[ ]	Y <sub>Sa</sub>	1,760	1,715	1,680	1,649	1,414	1,891	1,598	1,390	1,823	1,556	1,381	1,749	1,520	1,384	1,707	1,471	1,364	1,640	1,454
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>	1113	1115	1121	1130	1283	1063	1155	1355	1056	1186	1404	1065	1223	1429	1055	1289	1518	1077	1282
Fußspannung nach FEM	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>FEM</sub>	1064	1078	1090	1106	1284	1023	1145	1369	1038	1191	1435	1064	1242	1474	1047	1332	1612	1064	1342
%-Abweichung ISO 6336-3 / FEM	%	Δ <sub>6336-FEM</sub>	5%	3%	3%	2%	4%	1%	-1%	2%	0%	-2%	0%	-1%	-3%	1%	-3%	-6%	1%	-4%	-4%
%-Zahnfußspannungsoptimierung		Δ <sub>Optim.</sub>	-14%	-12%	-12%	-11%	-7%	-17%	-10%	-6%	-15%	-9%	-6%	-13%	-9%	-6%	-12%	-7%	-6%	-10%	-6%
<b>Durchschnittliche Optimierung</b>																					
-10,0%																					
<b>Optimierung von p<sub>apo</sub>* und h<sub>apo</sub>*</b>																					
Formfaktor	[ ]	Y <sub>Fa</sub>											3,121			2,810			2,413	2,468	1,789
Spannungskorrekturfaktor	[ ]	Y <sub>Sa</sub>											1,398			1,436			1,538	1,467	1,652
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>											1339			1223			1086	1074	1054
Fußspannung nach FEM	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>FEM</sub>											1363			1241			1096	1095	1038
%-Abweichung ISO 6336-3 / FEM	%	Δ <sub>6336-FEM</sub>											-2%			-1%			-1%	-2%	2%
%-Zahnfußspannungsoptimierung		Δ <sub>Optim.</sub>											-11%			-20%			-22%	-33%	-12%
<b>Durchschnittliche Optimierung</b>																					
-14,9%																					
<b>Werkzeugprofilwinkel α<sub>p</sub> = 15°</b>																					
Formfaktor	[ ]	Y <sub>Fa</sub>	1,949	2,010	2,067	2,127	2,693	1,805	2,242	2,862	1,879	2,366	2,821	1,986	2,506	2,559	1,971	2,205	2,282	1,948	1,656
Spannungskorrekturfaktor	[ ]	Y <sub>Sa</sub>	1,825	1,784	1,743	1,706	1,467	1,906	1,643	1,432	1,849	1,593	1,431	1,775	1,550	1,458	1,736	1,553	1,474	1,681	1,618
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>	1127	1130	1130	1132	1268	1043	1138	1306	1040	1153	1274	1044	1177	1162	1022	1030	1026	995	816
Fußspannung nach FEM	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>FEM</sub>	1092	1106	1119	1131	1196	1076	1157	1257	1095	1190	1248	1116	1230	1158	1078	1069	1041	1025	854
%-Abweichung ISO 6336-3 / FEM	%	Δ <sub>6336-FEM</sub>	3%	2%	1%	0%	6%	-3%	-2%	4%	-5%	-3%	2%	-6%	-4%	0%	-5%	-4%	-1%	-3%	-4%
%-Zahnfußspannungsoptimierung		Δ <sub>Optim.</sub>	-13%	-11%	-11%	-11%	-8%	-19%	-11%	-10%	-17%	-12%	-15%	-15%	-12%	-24%	-15%	-26%	-36%	-17%	-40%
<b>Durchschnittliche Optimierung</b>																					
-18,2%																					
<b>Werkzeugprofilwinkel α<sub>p</sub> = 25° (24°) / α<sub>p</sub> = 15° - Optimum</b>																					
Formfaktor	[ ]	Y <sub>Fa</sub>	2,142	2,223	2,319	2,427	3,090	2,009	2,610	3,390	2,108	2,812	3,464	2,289	3,055	3,115	2,334	2,671	2,730	2,432	1,986
Spannungskorrekturfaktor	[ ]	Y <sub>Sa</sub>	1,579	1,579	1,571	1,537	1,358	1,793	1,520	1,349	1,752	1,498	1,356	1,680	1,472	1,402	1,650	1,513	1,448	1,610	1,597
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>	1013	1046	1080	1092	1274	1033	1150	1378	1045	1209	1391	1069	1279	1277	1080	1140	1131	1116	906
Fußspannung nach FEM	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>FEM</sub>	1004	1026	1056	1061	1388	966	1115	1484	978	1179	1484	1014	1259	1323	1020	1112	1150	1046	890
%-Abweichung ISO 6336-3 / FEM	%	Δ <sub>6336-FEM</sub>	1%	2%	2%	3%	-8%	7%	3%	-7%	3%	-6%	5%	2%	2%	-4%	6%	3%	-2%	7%	2%
%-Zahnfußspannungsoptimierung		Δ <sub>Optim.</sub>	-21%	-18%	-15%	-14%	-8%	-20%	-10%	-5%	-16%	-7%	-7%	-13%	-4%	-16%	-10%	-18%	-30%	-7%	-34%
<b>Durchschnittliche Optimierung</b>																					
-18,2%																					
<b>Werkzeugprofilwinkel α<sub>p</sub> = 25° (24°) / α<sub>p</sub> = 15° - Optimum</b>																					
Fußspannung nach ISO 6336-3	[N/mm <sup>2</sup> ]	σ <sub>6336-3</sub>	1013	1046	1080	1092	1268	1033	1138	1306	1040	1153	1274	1044	1177	1162	1022	1030	1026	995	816
%-Zahnfußspannungsoptimierung		Δ <sub>Optim.</sub>	-21%	-18%	-15%	-14%	-8%	-20%	-11%	-10%	-17%	-12%	-15%	-15%	-12%	-24%	-15%	-26%	-36%	-17%	-40%
<b>Durchschnittliche Optimierung</b>																					
-18,2%																					

Tabelle 22: Zahnfußspannungen bei Optimierung des Standard-Werkzeuges

Zahnfußspannungen (FEM) in N/mm<sup>2</sup>

Referenzverzahnung		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\sigma_p = 15^\circ/25^\circ$ - Optimum		1004	1026	1056	1061	1196	966	1115	1257	978	1179	1248	1014	1230	1158	1020	1069	1041	1025	854
gerade Ellipse		972	991	1011	1034	1215	943	1082	1275	970	1128	1248	1010	1162	1170	1003	1049	1065	955	843
Ellipse 20°		911	924	934	943	1089	886	977	1118	900	992	1090	922	1010	1026	906	927	950	866	808
$a/b=2,50$		944	943	960	943	1117	934	978	1151	942	992	1120	959	1010	1050	939	927	961	892	826
Ellipse 25°		888	905	912	934	1091	869	960	1093	876	975	1048	900	977	984	870	881	907	816	755
$a/b=3,00$		973	977	972	966	1108	957	976	1119	961	978	1074	959	985	1007	921	881	916	852	786
Ellipse 30°		884	911	926	954	1149	846	999	1147	866	1024	1091	905	1026	1022	884	902	923	783	704
$a/b=3,00$		916	912	931	956	1149	887	999	1149	896	1024	1094	906	1026	1025	884	904	929	785	704
Ellipse 35°		929	961	992	1021	1206	874	1062	1201	917	1082	1141	967	1079	1070	940	950	968	831	724
$a/b=3,00$		932	965	993	1024	1215	877	1069	1207	920	1093	1145	975	1093	1074	949	955	970	833	725
Ellipse 30° - Potenz 2,2		896	918	940	967	1164	859	1013	1163	880	1040	1106	917	1041	1037	898	916	935	796	710
$a/b=2,75$		912	921	943	970	1165	899	1013	1164	906	1040	1109	920	1041	1039	898	918	940	798	710
Ellipse 30° - Potenz 1,8		898	915	921	938	1130	871	981	1128	875	1005	1072	887	1006	1004	867	885	908	773	706
$a/b=3,50$		920	925	921	938	1130	903	981	1128	889	1006	1072	887	1006	1005	867	885	911	773	724
$a/b=optimal$		957	951	967	976	1108	910	977	1106	914	996	1050	916	990	985	886	880	897	800	735
Ellipse 30° - Potenz 1,6		985	951	967	983	1108	920	993	1106	914	1003	1050	930	990	1005	904	905	939	817	763
$a/b=4,25$		918	934	946	964	1083	887	979	1083	901	992	1040	918	980	992	900	899	920	833	781
Ellipse 25° - Potenz 1,8		931	934	946	966	1130	916	999	1144	921	1019	1108	918	1024	1051	900	939	972	833	781
$a/b=3,00$		913	913	932	944	1104	882	983	1046	883	977	998	913	935	945	891	857	880	758	680
<i>FEM</i> -Optimierung mit ANSYS																				

Vergleich ISO 6336-3 - FEM bei elliptischer Fußsausrundung

ISO 6336-3	798	813	822	830	894	751	839	886	776	839	852	798	831	816	754	751	769	665	596
Ellipse 30° - $a/b = 3,00$	15%	12%	13%	15%	28%	18%	19%	30%	15%	22%	28%	13%	23%	26%	17%	20%	21%	18%	18%
%-Abw. zu FEM																			

Zahnfußspannungsreduktion in % im Vergleich zum  $\sigma_p = 15^\circ/25^\circ$  - Optimum

Referenzverzahnung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ellipse 20°	9%	10%	12%	11%	9%	8%	12%	11%	8%	16%	13%	9%	18%	11%	11%	13%	9%	15%	5%
$a/b=optimal$	6%	8%	9%	9%	7%	3%	12%	8%	4%	16%	10%	5%	18%	9%	8%	13%	8%	13%	3%
$a/b=2,50$	12%	12%	14%	12%	9%	10%	14%	13%	10%	17%	16%	11%	21%	15%	15%	18%	13%	20%	12%
Ellipse 25°	3%	5%	8%	9%	7%	1%	12%	11%	2%	17%	14%	5%	20%	13%	10%	18%	12%	17%	8%
$a/b=3,00$	12%	11%	12%	10%	4%	12%	10%	9%	11%	13%	13%	11%	17%	12%	13%	16%	11%	24%	18%
Ellipse 30°	9%	11%	12%	10%	4%	8%	10%	9%	8%	13%	12%	11%	17%	11%	13%	15%	11%	23%	18%
$a/b=3,00$	8%	6%	6%	4%	-1%	10%	5%	4%	6%	8%	9%	5%	12%	8%	8%	11%	7%	19%	15%
$a/b=optimal$	7%	6%	6%	3%	-2%	9%	4%	4%	6%	7%	8%	4%	11%	7%	7%	11%	7%	19%	15%
Ellipse 35°	11%	11%	11%	9%	3%	11%	9%	7%	10%	12%	11%	10%	15%	10%	12%	14%	10%	22%	17%
"Ellipse" 30° - Potenz 2,2	9%	10%	11%	9%	3%	7%	9%	7%	7%	12%	11%	9%	15%	10%	12%	14%	10%	22%	17%
$a/b=2,75$	11%	11%	13%	12%	6%	10%	12%	10%	11%	15%	14%	12%	18%	13%	15%	17%	13%	25%	17%
"Ellipse" 30° - Potenz 1,8	8%	10%	13%	12%	6%	7%	12%	10%	9%	15%	14%	12%	18%	13%	15%	17%	13%	25%	15%
$a/b=3,50$	5%	7%	8%	8%	7%	6%	12%	12%	7%	16%	16%	10%	20%	15%	13%	18%	14%	22%	14%
"Ellipse" 30° - Potenz 1,6	2%	7%	8%	7%	7%	5%	11%	12%	7%	15%	16%	8%	20%	13%	11%	15%	10%	20%	11%
$a/b=4,25$	9%	9%	10%	9%	8%	8%	12%	14%	8%	16%	17%	9%	20%	14%	12%	16%	12%	19%	9%
"Ellipse" 25° - Potenz 1,8	7%	9%	10%	9%	6%	5%	10%	9%	6%	14%	11%	9%	17%	9%	12%	12%	7%	19%	9%
$a/b=3,00$	12%	12%	14%	12%	9%	12%	14%	13%	11%	17%	16%	11%	21%	15%	15%	18%	13%	24%	18%
Optimum aus Ellipse 20°, 25°, 30°, 35°	12%	12%	14%	12%	9%	12%	14%	13%	11%	17%	16%	11%	21%	15%	15%	18%	13%	24%	18%
Optimum aus ellipsenähnlicher Form	12%	12%	14%	12%	9%	12%	14%	13%	11%	17%	16%	11%	21%	15%	15%	18%	14%	25%	18%
<i>FEM</i> -Optimierung mit ANSYS	9%	11%	12%	11%	8%	9%	12%	17%	10%	17%	20%	10%	24%	18%	13%	20%	15%	26%	20%
<i>FEM</i> -Optimierung mit ANSYS																			

Tabelle 23: Spannungen bei optimierter ellipsenförmiger Fußsausrundung

Mittelwert

11,1%	9,0%	13,8%	10,1%	12,6%	11,9%	7,9%	7,4%	11,3%	10,8%	13,4%	12,8%	12,0%	10,8%	12,2%	14,5%	14,8%	14,8%
-------	------	-------	-------	-------	-------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------