Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung
Technische Universität München

Schaltungstechnik 2

Übungen

12. Auflage 2012

Kontakt: Josef.A.Nossek@tum.de
Herausgeber: Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek,
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung, Technische Universität München
Interne Referenznummer: TUM-LNS-TR-12-04
Druck: Fachschaft Elektrotechnik und Informationstechnik e.V., München

Inhaltsverzeichnis

11 Übung: Reaktive Netzwerkelemente

11.1 Eigenschaften kapazitiver und induktiver Zweipole

Bestimmen Sie die Eigenschaften der durch die folgenden Kennlinien bestimmten Zweipole.

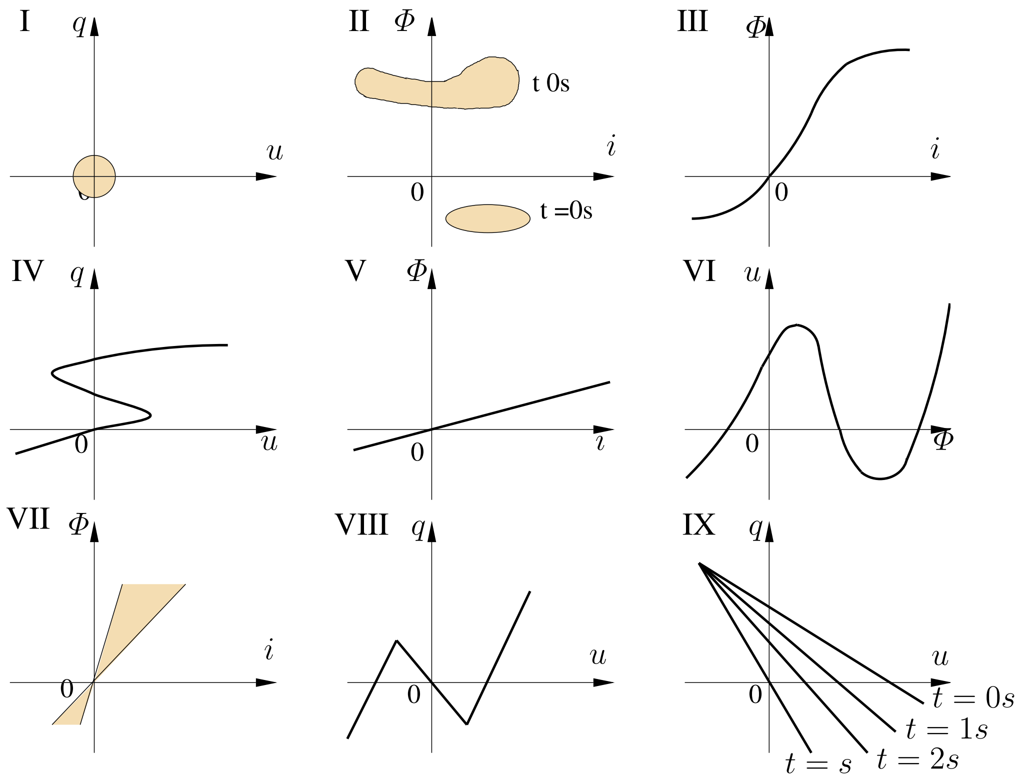


Abbildung 11.1: Kennlinie

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
kapazitiv									
induktiv									
ungepolt									
spannungsgesteuert									
stromgesteuert									
ladungsgesteuert									
flussgesteuert									
streng linear									
linear									
nicht linear									
zeitvariant									
zeitinvariant									

11.2 Streng linearer zeitinvarianter Kondensator

Eine Spannungsquelle $u(t) = A\sin(\omega t)$ wird an einen streng linearen zeitinvarianten Kondensator mit der Kapazität C zum Zeitpunkt $t = 0$ angelegt.

a) Berechnen Sie den Strom $i(t)$, den Fluss $\Phi(t)$ und die Ladung $q(t)$ für $t \geq 0$ unter der Annahme, dass $\Phi(0) = \Phi_0$ und $q(0) = 0\,\mathrm{C}$.

b) Skizzieren Sie den Verlauf in der u-i-Ebene, der i-Φ-Ebene und der u-q-Ebene für $A = 1\,\mathrm{V}$, $\Phi_0 = -1\,\mathrm{Wb}$, $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ und $C = 1\,\mathrm{F}$ und geben Sie deren Durchlauf an. Tragen Sie die Zeitpunkte $t = 0\,\mathrm{s}$, $t = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$, $t = \pi\,\mathrm{s}$, $t = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ und $t = 2\pi\,\mathrm{s}$ in die Zeichnung ein.

Nun wird die zeitabhängige Spannung ersetzt durch eine Spannung der Form $u(t) = A\cos(\omega t) + B$.

c) Berechnen Sie den Strom $i(t)$, den Fluss $\Phi(t)$ und die Ladung $q(t)$ für $t \geq 0$ unter der Annahme, dass $\Phi(0) = \Phi_0$ und $q(0) = C(A + B)$.

d) Skizzieren Sie den Verlauf in der u-i-Ebene und der i-Φ-Ebene und der u-q-Ebene für $A = 1\,\mathrm{V}$, $B = 1\,\mathrm{V}$, $\Phi_0 = -1\,\mathrm{Wb}$, $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ und $C = 1\,\mathrm{F}$.

e) Ist es sinnvoll, den Kondensator durch einen u-i, i-Φ bzw. u-q Verlauf zu beschreiben?

f) Darf die Anfangsladung Q_0 beliebige Werte annehmen?

11.3 Streng lineare zeitinvariante Spule

Gegeben sei eine ideale Spule, an der eine Spannung $u(t) = U_0\sin(\omega t)$ angelegt wird.

a) Berechnen Sie den Strom $i(t)$ und den Fluss $\Phi(t)$ durch die Spule für $t \geq 0$ unter der Annahme, dass $i(t_0 = 0) = -\frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t_0)$.

b) Beschreiben Sie den Durchlauf der Kennlinie in der i-Φ-Ebene für $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ und $L = 1\,\mathrm{H}$. Tragen Sie die Zeitpunkte $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$, $t = \pi\,\mathrm{s}$, $t = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ und $t = 2\pi\,\mathrm{s}$ in die Kennlinie ein.

c) Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der gespeicherten Energie in Abhängigkeit von der Zeit.

d) Warum führt die Berechnung der gespeicherten Energie über das Integral $W(t) = \int_0^t u(\tau)i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ zu einem falschen Ergebnis?

e) Skizzieren Sie die Kennlinie in der u-i-Ebene und geben Sie an, wo die Spule Leistung aufnimmt bzw. abgibt.

11.4 Varaktordiode

Bei der Varaktordiode werden die physikalischen Effekte der Verarmungsebene des pn-Übergangs ausgenützt. Die Diode wird unterhalb einer bestimmten Vorspannung U_0 in Sperrrichtung betrieben. Man erhält die u-q-Kennlinie in Abbildung 11.2.

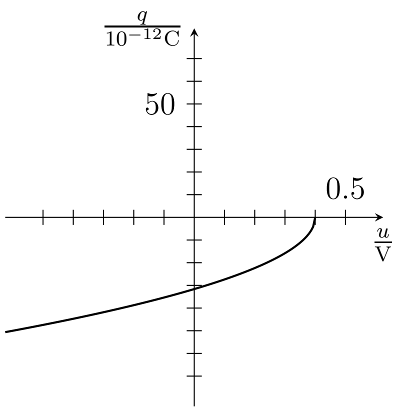


Abbildung 11.2: Kennlinie

a) Berechnen Sie aus der Kennlinie die Kleinsignalkapazität der Diode für einen Betriebspunkt von 0 V.

b) Nun sei der funktionale Zusammenhang zwischen q und u folgendermaßen gegeben:

$$q = -k(U_0 - u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad u < U_0.$$

Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit von u.

c) An die Diode wird nun eine Spannung $u(t) = A\sin(\omega t)$ angelegt. Berechnen Sie den Strom $i(t)$ für $A < U_0$.

11.5 Josephson-Kontakt

Ein Josephson-Kontakt besteht aus zwei supraleitenden ebenen Flächen, die durch eine Oxydschicht getrennt sind (Abbildung 11.3). Dadurch wird ein sinusförmiger Zusammenhang zwischen dem Strom i und dem Fluss Φ erreicht.

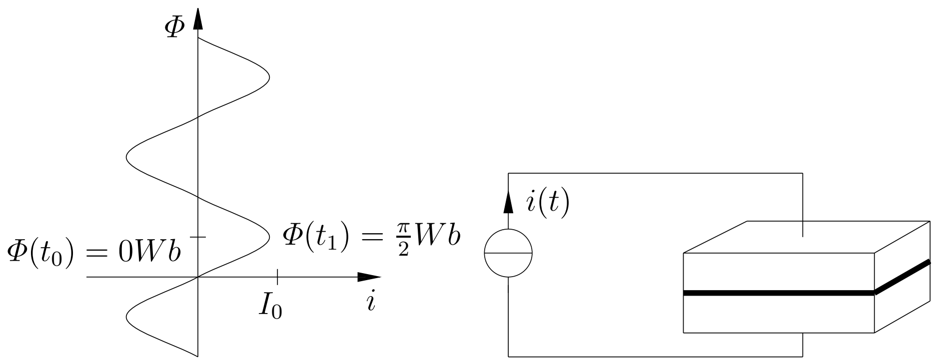


Abbildung 11.3: Josephson-Kontakt

a) Berechnen Sie die Energie W_L zwischen dem Zeitpunkt t_0 und t_1. Wird die Energie vom Bauelement aufgenommen oder abgegeben?

b) Geben Sie die Relaxationspunkte der Kennlinie an (Begründung!)

c) Berechnen Sie die maximal speicherbare Energie.

11.6 Gyratorschaltung

Gegeben sei eine Gyratorschaltung, die mit einer linearen zeitinvarianten Induktivität abgeschlossen ist (Abbildung 11.4).

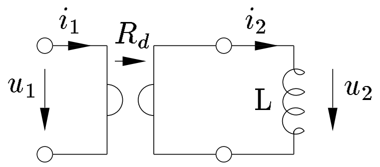


Abbildung 11.4: Gyratorschaltung

a) Geben Sie eine Beschreibung des Zweipols (bezüglich der Eingangsklemmen) mit den Variablenpaaren (u_1, i_1), (u_1, q_1) und (i_1, Φ_1) an.

b) Handelt es sich um einen resistiven, kapazitiven oder induktiven Zweipol? (Begründung!) Geben Sie ein Ersatzschaltbild an.

c) Wie kann man also einen Parallelschwingkreis bzw. Serienschwingkreis ohne Verwendung einer Spule realisieren? Geben Sie je ein mögliches Ersatzschaltbild an.

d) Der Gyrator wird jetzt mit einer Varaktordiode abgeschlossen, die durch die kapazitive Gleichung $q = -k\sqrt{U_0 - u}$ beschrieben ist. Geben Sie eine algebraische Beschreibung des dadurch entstandenen Zweipols mit dem zugehörigen Variablenpaar an.

11.7 Memristor

Betrachten Sie das Diagramm in Abbildung 11.5 der Beziehungen zwischen den grundlegenden Zweipolgrößen. Die Zustandsgrößen Φ und q sind definiert als die Integrale der Betriebsgrößen u und i. Darüber hinaus sind die Netzwerkelemente Widerstand, Kapazität und Induktivität über die Nullstellen einer Funktion $\mathcal{F}(t)$ zweier Variablen, nämlich jeweils des Größenpaares (u, i), (q, u) oder (Φ, i) gegeben. Da noch keine Beziehung zwischen Φ und q vorgesehen ist, kann man als vierten elementaren Zweipol den sogenannten *Memristor*[1] einführen. Seine chakteristische Gleichung lautet

$$f(\Phi, q) = 0.$$

Das Schaltsymbol entspricht der üblichen Systematik (Abbildung 11.6).

a) Zeigen Sie, dass sich ein durch $\Phi = Rq$ charakterisierter linearer Memristor genauso verhält wie ein linearer Widerstand R.

[1] Der Name „Memristor“ ist eine Verkürzung aus „memory“ und „resistor“.

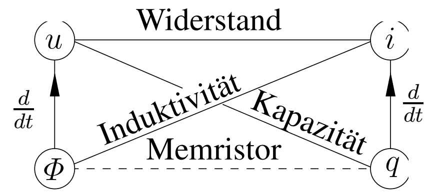


Abbildung 11.5: Beziehungen zwischen den grundlegenden Zweipolgrößen

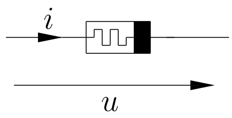


Abbildung 11.6: Memristor

b) Einem Memristor muss in einer Schaltung ein Zustand zugeordnet werden, er ist also ein Element mit Gedächtnis. Veranschaulichen Sie dies!

Im Weiteren wird der Memristor mit der Kennlinie in Abbildung 11.7 untersucht.

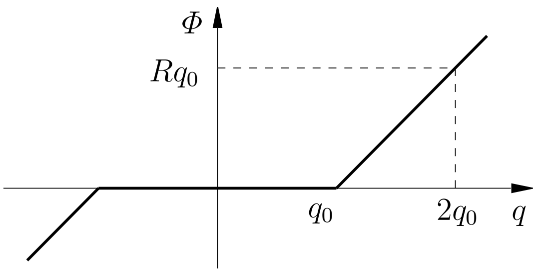


Abbildung 11.7: Memristorkennlinie

c) Ist er fluss- oder ladungsgesteuert?

d) Dem Memristor wird der Stromverlauf $i(t)$ nach Abbildung 11.8 eingeprägt. Außerdem seien $q(0) = 0$ und $q_0 = I_0 \Delta t$. Zeichnen Sie die resultierenden Zeitverläufe $q(t)$, $\Phi(t)$ und $u(t)$.

e) Realisieren Sie den Memristor mit Hilfe der Operationsverstärkerschaltung aus Abbildung 11.9. Welche nichtlineare Kapazität $f(u, q) = 0$ wird dafür benötigt, wenn der Op-Amp im streng linearen Bereich arbeitet?

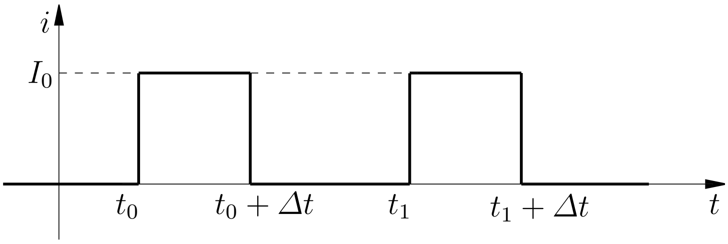


Abbildung 11.8: Strom durch den Memristor

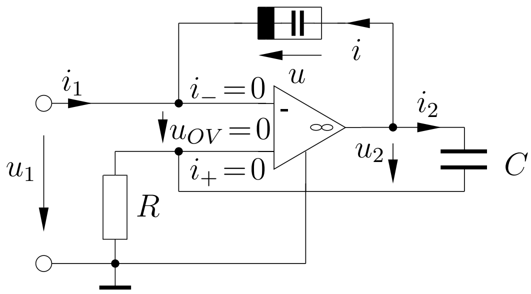


Abbildung 11.9: OPV-Schaltung für Memristor

11.8 Stückweise lineare Kapazität

Gegeben sei eine stückweise lineare Kapazität mit den Kleinsignalkapazitäten $C_1 = 1\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_1 = (0\,\mathrm{V},\ 0\,\mathrm{C})$, $C_2 = -0{,}5\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_2 = (0\,\mathrm{V}, 1{,}5\,\mathrm{C})$ und $C_3 = -0{,}25\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_3 = (0\,\mathrm{V}, -1{,}25\,\mathrm{C})$.

a) Skizzieren Sie die Kennlinie in der u-q-Ebene.

b) Berechnen Sie die Energie, die benötigt wird um vom Punkt P_1 zu P_2 (vom Punkt P_1 zu P_3) zu kommen.

c) Geben Sie alle Relaxationspunkte an.

Gegeben sei nun eine stückweise lineare Kapazität mit den Kleinsignalkapazitäten $C_1 = -1\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_1 = (0\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{C})$, $C_2 = 2\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_2 = (1{,}5\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{C})$ und $C_3 = 4\,\mathrm{F}$ um den Betriebspunkt $P_3 = (-1{,}25\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{C})$.

d) Skizzieren Sie die Kennlinie in der u-q-Ebene.

e) Berechnen Sie die Energie, die benötigt wird um vom Punkt P_1 zu P_2 (vom Punkt P_1 zu P_3) zu gelangen.

f) Geben Sie alle Relaxationspunkte an.

g) Wie verändern sich die Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben, wenn die Angabe auf $P_2 = (3\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{C})$ geändert wird?

11.9 Nichtlineare Energiespeicherung

Geben Sie zu den Kennlinien in Aufgabe 11.1 alle Relaxationspunkte an.

11.10 Kapazitives Zweitor

Gegeben sei ein kapazitives Zweitor mit der Kettenbeschreibung

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -q_2 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass das Zweitor auch resistiv beschrieben werden kann, indem Sie eine resistive Kettenbeschreibung herleiten.

b) Um welches spezielle Zweitor handelt es sich?

c) Geben Sie eine kapazitive Hybridbeschreibung der Form

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

an.

Nun werde das zweite Tor mit einer Kapazität C beschaltet.

d) Wie verhält sich das verbleibende offene Klemmenpaar am ersten Tor?

e) Lässt sich das Zweitor auch memristiv beschreiben?

L11 Lösung: Reaktive Netzwerkelemente

L11.1 Eigenschaften kapazitiver und induktiver Zweipole

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
kapazitiv	**X**			**X**				**X**	**X**
induktiv		**X**	**X**		**X**		**X**		
ungepolt	**X**				**X**		**X**	**X**	
spannungsgesteuert								**X**	**X**
stromgesteuert			**X**		**X**				
ladungsgesteuert				**X**					**X**
flussgesteuert			**X**		**X**				
streng linear					**X**				
linear					**X**				**X**
nicht linear	**X**	**X**	**X**	**X**			**X**	**X**	
zeitvariant		**X**							**X**
zeitinvariant	**X**		**X**	**X**	**X**		**X**	**X**	

VI ist kein reaktives Zweipolelement!

L11.2 Streng linearer zeitinvarianter Kondensator

a) Mit $i(t) = C\dot{u}(t)$, $u(t) = A\sin(\omega t)$ und $\dot{u}(t) = A\omega\cos(\omega t)$ folgt

$$i(t) = CA\omega\cos(\omega t).$$

Mit $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ und $\Phi(0) = \Phi_0$ folgt

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{0} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Phi_0 + \frac{A}{\omega}[-\cos(\omega\tau)]_0^t = \Phi_0 + \frac{A}{\omega}[1-\cos(\omega t)].$$

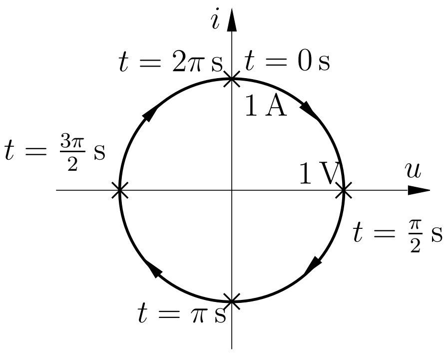
Mit $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ und $q(0) = 0$ folgt

$$q(t) = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = q(0) + CA\omega\frac{1}{\omega}[\sin(\omega\tau)]_0^t = CA\sin(\omega t).$$

b) Abbildung L11.1-L11.3

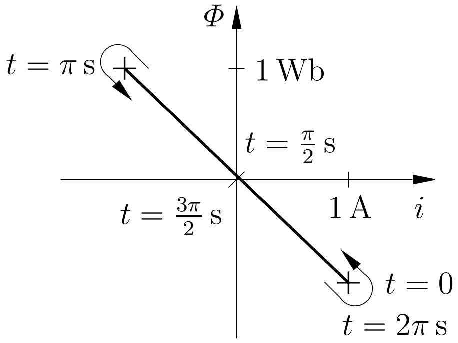
c) Strom $i(t)$ mit $u(t) = A\cos(\omega t) + B$:

$$i(t) = C\dot{u}(t) = -CA\omega\sin(\omega t).$$



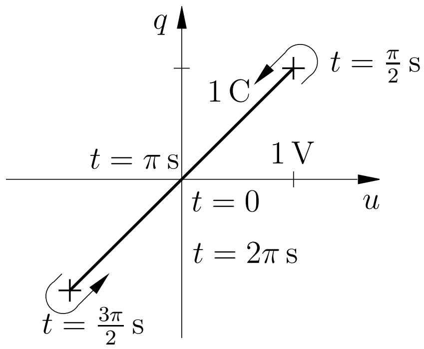
$u(t) = 1\,\mathrm{V}\sin(t/\mathrm{s})$
$i(t) = 1\,\mathrm{A}\cos(t/\mathrm{s})$

Abbildung L11.1: u-i-Ebene



$\Phi(t) = -1\,\mathrm{Wb}\cos(t/\mathrm{s})$
$i(t) = 1\,\mathrm{A}\cos(t/\mathrm{s})$

Abbildung L11.2: i-Φ-Ebene



$q(t) = 1\,\mathrm{C}\sin(t/\mathrm{s})$
$u(t) = 1\,\mathrm{V}\sin(t/\mathrm{s})$

Abbildung L11.3: u-q-Ebene

Fluss $\Phi(t)$:

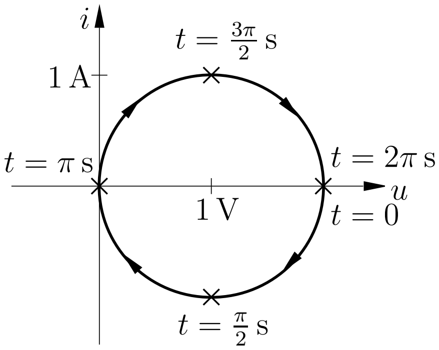
$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Phi_0 + \left[\frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau) + B\tau\right]_0^t = \Phi_0 + \frac{A}{\omega}\sin(\omega t) + Bt.$$

Ladung $q(t)$:

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) + \int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = q(0) + \left[CA\cos(\omega\tau)\right]_0^t \\ &= q(0) + CA\left(\cos(\omega t) - 1\right) = C[A\cos(\omega t) + B], \end{aligned}$$

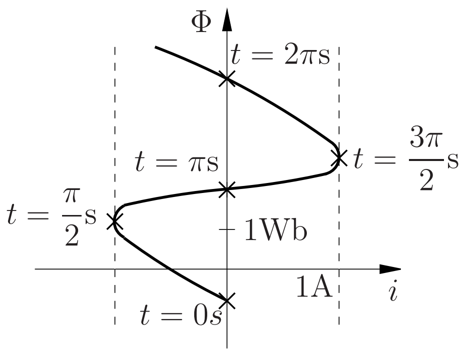
mit $q(0) = C(A+B)$.

d) Abbildung L11.4-L11.6



$u(t) = 1\,\mathrm{V}\cos(t/\mathrm{s}) + 1\,\mathrm{V}$
$i(t) = -1\,\mathrm{A}\sin(t/\mathrm{s})$

Abbildung L11.4: u-i-Ebene



$\Phi(t) = -1\,\mathrm{Wb} + 1\,\mathrm{Wb}\sin(t/\mathrm{s}) + \mathrm{t\,Wb/s}$
$i(t) = -1\,\mathrm{A}\sin(t/\mathrm{s})$

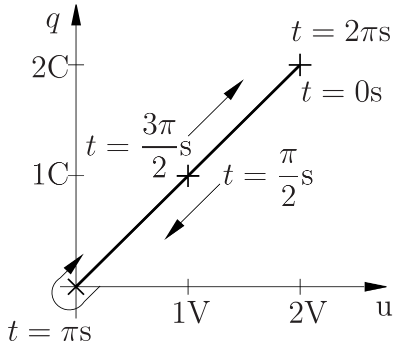
t/s	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	
Φ/Wb	-1	1,57	2,14	2,71	5,28	
i/A	0	-1	0	1	0	[-1,1]

Abbildung L11.5: i-Φ-Ebene

e) Die u-i bzw. Φ-i-Kennlinie ist von der Form der Eingangsspannung abhängig, d.h. i und Φ sind abhängig von $u(t)$. Die q-u-Kennlinie ist dagegen nicht von der Form der Eingangsspannung abhängig, d.h. der algebraische Zusammenhang zwischen q und u ist unabhängig von $u(t)$. Daher ist nur die q-u-Kennlinie sinnvoll.

f) Der Anfangswert Q_0 darf nicht beliebig gewählt werden, da der lineare Zusammenhang zwischen q und u zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein muss.

$$\begin{aligned} Q_0 = Cu(t=0) &= 0 && \text{für Teilaufgabe a),} \\ &= C(A+B) && \text{für Teilaufgabe c).} \end{aligned}$$



$q(t) = 1\,\mathrm{C}\cos(t/\mathrm{s}) + 1\,\mathrm{C}$
$u(t) = 1\,\mathrm{V}\cos(t/\mathrm{s}) + 1\,\mathrm{V}$

Abbildung L11.6: u-q-Ebene

L11.3 Streng lineare zeitinvariante Spule

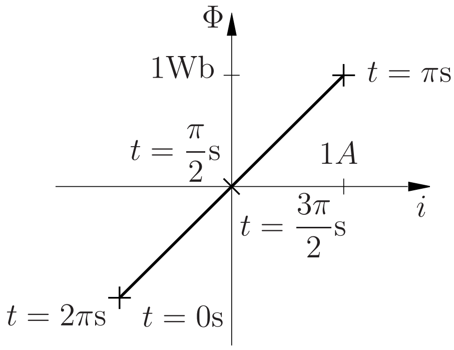
a) Mit $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$, $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und $i(t_0) = \frac{-U_0}{L\omega}\cos(\omega t_0)$ folgt

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} U_0 \sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = i(t_0) + \frac{U_0}{L\omega}(-1)[\cos(\omega\tau)]_{t_0}^{t}$$
$$= i(t_0) - \frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t) + \frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t_0) = -\frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t).$$

Mit $\Phi(t) = Li(t)$ folgt

$$\Phi(t) = Li(t) = -\frac{U_0}{\omega}\cos(\omega t).$$

b) Abbildung L11.7



$\Phi(t) = -1\,\mathrm{Wb}\cos(t/\mathrm{s})$

$i(t) = -1\,\mathrm{A}\cos(t/\mathrm{s})$

Abbildung L11.7: zu L11.3 b: i-Φ-Ebene

c) Abbildung L11.8

$$E_L = \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{L\omega^2}\cos^2(\omega t) =$$
$$\frac{U_0^2}{2L\omega^2}\cos^2(\omega t)$$
$$E_L = 0{,}5\,\mathrm{J}\cos^2(t/\mathrm{s}) = 0{,}25\,\mathrm{J}\,(1 + \cos(2t/\mathrm{s}))$$

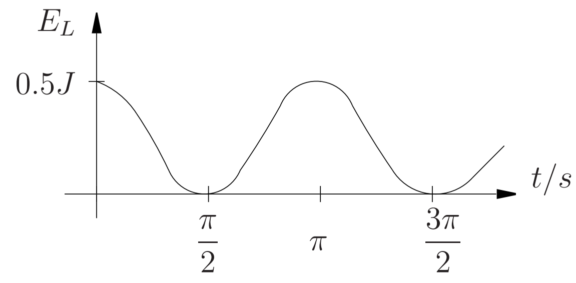


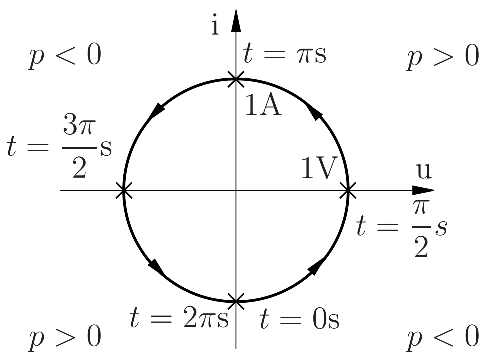
Abbildung L11.8: zu L11.3 c: Zeitverlauf

d)

$$W_L = \int_0^t u(\tau)i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{U_0^2}{L\omega}\int_0^t \sin(\omega\tau)\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{U_0^2}{L\omega}\cdot\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)$$

Im Allgemeinen bezieht man die Energie der Spule auf den Relaxationspunkt der Kennlinie in der i-Φ-Ebene (hier: $i = 0$, $\Phi = 0$, siehe b)). Im Relaxationspunkt ist die abgegebene Energie maximal. Somit dient er als Ausgangspunkt zur Berechnung der gespeicherten Energie. Der Relaxationspunkt ist jedoch nicht bei $t = 0$, sondern bei $t = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \ldots$ zu finden. Somit ist als untere Grenze $\frac{\pi}{2\omega}$ zu wählen, und man erhält dann das gleiche Ergebnis wie in c).

e) Abbildung L11.9



$u(t) = 1\,\mathrm{V}\sin(t/\mathrm{s})$

$i(t) = -1\,\mathrm{A}\cos(t/\mathrm{s})$

$p > 0$ Leistungsaufnahme

$p < 0$ Leistungsabgabe

Abbildung L11.9: zu L11.3 e: u-i-Ebene

L11.4 Varaktordiode

a) Graphische Lösung, Abbildung L11.10:

$$\Delta q = 40\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}, \quad \Delta u = 1\,\mathrm{V}, \quad \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{40\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}} = 40\,\mathrm{pF}.$$

b) Mit $q = -k(u_0 - u)^{\frac{1}{2}}$ folgt

$$C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2}(-k)(u_0 - u)^{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{k}{2\sqrt{u_0 - u}}.$$

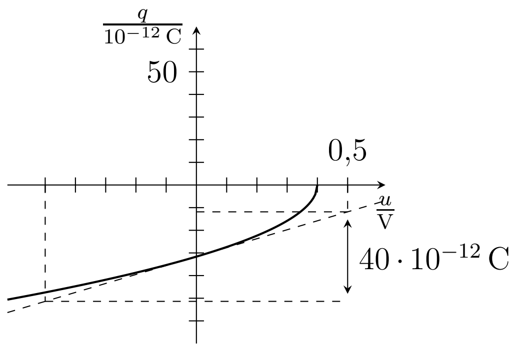


Abbildung L11.10: zu L11.4: Kennlinie

c) Mit $u(t) = A\sin(\omega t)$ folgt

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k\omega}{2\sqrt{u_0 - A\sin(\omega t)}}A\cos(\omega t).$$

L11.5 Josephson-Kontakt

a) Bestimmung von $i(\Phi)$ aus dem Graphen: $i(\Phi) = I_0 \sin\left(\frac{\Phi}{\mathrm{Wb}}\right)$

$$W_L = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t_1)} i(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t_1)} I_0 \sin\left(\frac{\Phi}{\mathrm{Wb}}\right)\,\mathrm{d}\Phi = 1\,\mathrm{Wb}\,(-I_0)\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = I_0 \cdot 1\,\mathrm{Wb}$$

$W_L > 0 \Rightarrow$ die Energie wird vom Bauelement aufgenommen!

b) Alle Schnittpunkte mit der Φ-Achse, die diese mit einer positiven Steigung schneiden ($\Phi = 0, \Phi = 2\pi$) sind Relaxationspunkte, da die Energie von diesen Punkten zu einem beliebigen Betriebspunkt der Kennlinie *immer* größer gleich Null ist.

c)

$$E_{max} = \int_0^{\Phi=\pi} i(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = 2I_0 \cdot 1\,\mathrm{Wb}$$

Dies entspricht der größten Fläche.

L11.6 Gyratorschaltung

a) Aus $u_1 = R_d i_2$ und $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ erhält man $u_2 = L\frac{1}{R_d}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$. Zusätzlich mit $i_1 = \frac{1}{R_d}u_2$ ergibt sich die (u_1, i_1)-Beschreibung:

$$i_1 = \frac{1}{R_d}u_2 = \frac{L}{R_d^2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \frac{L}{R_d^2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - i_1 = 0. \tag{L11.1}$$

Mit $i_1 = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$ folgt die (u_1, q_1)-Beschreibung:

$$\frac{L}{R_d^2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \frac{L}{R_d^2}u_1 - q_1 = 0 \tag{L11.2}$$

Mit $u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}$ folgt die (i_1, Φ_1)-Beschreibung:

$$\frac{L}{R_d^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2} - i_1 = 0 \tag{L11.3}$$

b) Es handelt sich um einen kapazitiven Zweipol, d.h. es besteht ein algebraischer Zusammenhang zwischen u_1 und q_1 mit dem Ersatzschaltbild aus Abbildung L11.11:

$$q = Cu.$$

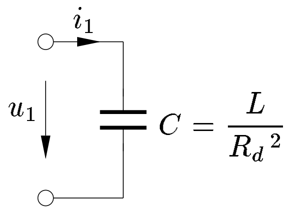


Abbildung L11.11: zu L11.6b: Ersatzschaltbild

Dualwandlung führt zu $q = \frac{\Phi}{R_d}$ und $u = R_d i$. Daraus folgt

$$\frac{\Phi}{R_d} = CR_d i \quad \Rightarrow \Phi = CR_d^2 i = Li \quad \Rightarrow C = \frac{L}{R_d^2}.$$

c) Parallelschwingkreis bzw. Serienschwingkreis (Abbildung L11.12)

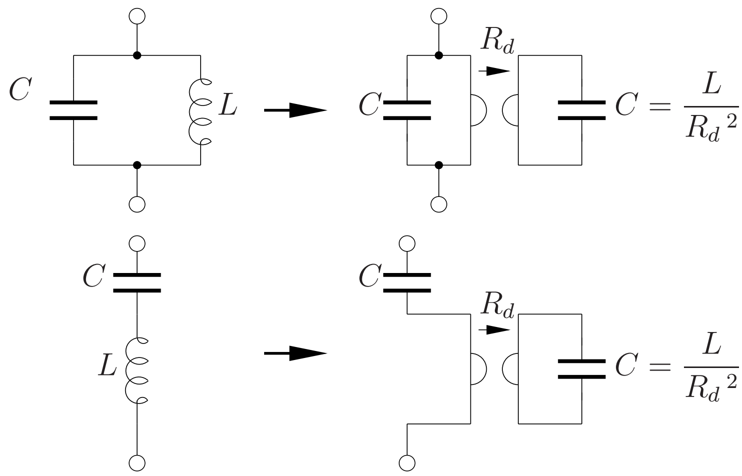


Abbildung L11.12: Parallelschwingkreis bzw. Serienschwingkreis

d) Die Varaktordiode ist ein kapazitiver Zweipol. Durch den Gyrator entsteht ein induktiver Zweipol. Dadurch ergibt sich ein algebraischer Zusammenhang zwischen i und Φ. Durch Anwendung des Dualitätsprinzips lässt sich dieser Zusammenhang leicht herleiten.

Aus $u = iR_d$, $q = \frac{\Phi}{R_d}$ folgt $\frac{\Phi}{R_d} = (-k)(I_0 R_d - iR_d)^{\frac{1}{2}}$.

Daraus ergibt sich die konstante Funktion $\Phi + kR_D^{\frac{3}{2}}(I_0 - i)^{\frac{1}{2}} = 0$.

L11.7 Memristor

a) Aus $\varPhi = Rq$ folgt $\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ und damit $u = Ri$.

b) Die Ladung q und der Fluss $\varPhi$ sind definiert durch die Integrale:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{und} \quad \varPhi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Somit hängen die augenblicklichen Werte von q und $\varPhi$ von Strom- bzw. Spannungsverläufen zu früheren Zeitpunkten ab, d.h. sie haben Gedächtnis.

c) Der Memristor ist ladungsgesteuert ($\varPhi = f(q)$).

d) Zeitverlauf $q(t)$ (Abbildung L11.13):

$$q(t) = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = q(0) + \int_{0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Dies entspricht der Fläche, die $i(t)$ mit der t-Achse einschließt.

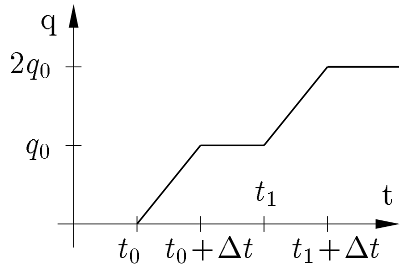


Abbildung L11.13: zu L11.7 d: Zeitverlauf $q(t)$

Der Zeitverlauf von $\varPhi(t)$ ist in Abbildung L11.14 zu sehen.

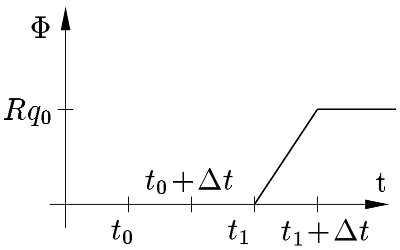


Abbildung L11.14: zu L11.7 d: Zeitverlauf $\varPhi(t)$

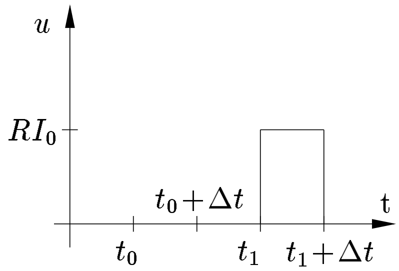


Abbildung L11.15: zu L11.7 d: Zeitverlauf $u(t)$

Daraus ergibt sich der Zeitverlauf von $u(t)$ in Abbildung L11.15 mit

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{Rq_0}{\Delta t} = \frac{RI_0\Delta t}{\Delta t} = RI_0.$$

Die Ableitung einer Konstanten ist Null, die einer linearen Funktion ist konstant!

e) Da die charakteristische Gleichung eines Memristors $f(\Phi_1, q_1) = 0$ lautet, und $f(u, q)$ gesucht wird, muss Φ_1 abhängig von u und q_1 abhängig von q dargestellt werden. Bei dieser Operationsverstärkerschaltung gilt

$$i_1 = -i \quad \Rightarrow q_1 = -q.$$

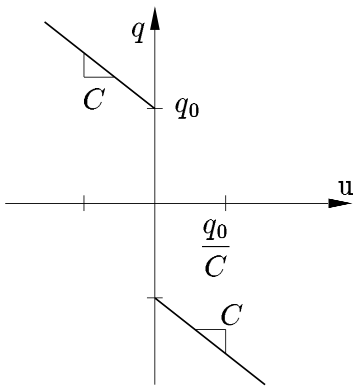
Mit $u_1 = u_R = Ri_2 = RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ und $u_2 = u$ folgt

$$\Phi_1 = \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = RC\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}u = RCu(t).$$

Damit ergibt sich die Gleichung des Memristors zu

$$f(\Phi_1, q_1) = f(RCu(t), -q) = 0.$$

Die gesuchte nichtlineare Kapazität findet sich in Abbildung L11.16.



$U_0 = u(-2q_0)$
$RCU_0 = \Phi_1(2q_0) = Rq_0$
$\Rightarrow U_0 = \frac{q_0}{C}$

Abbildung L11.16: q-u-Ebene

L11.8 Stückweise lineare Kapazität

a) Abbildung L11.17

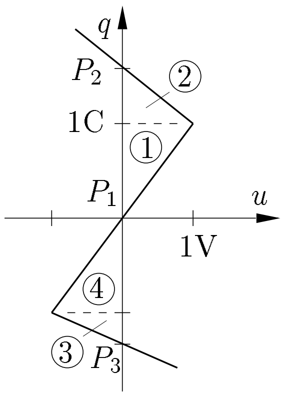
b) Zur Berechnung der Energie unterteilt man die mit der q-Achse eingeschlossene Fläche in Dreiecke. Somit lässt sich nun die Energie leicht berechnen.

$$W_C(P_1, P_2) = \int_{q_1}^{q_2} u(q)\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}1\,\mathrm{C}\,1\,\mathrm{V} + \frac{1}{2}0{,}5\,\mathrm{C}\,1\,\mathrm{V} = \frac{3}{4}\,\mathrm{J} \text{ mit den Flächen 1 und 2.}$$

$$W_C(P_1, P_3) = \int_{q_1}^{q_3} u(q)\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}1\,\mathrm{C}\,1\,\mathrm{V} + \frac{1}{2}0{,}25\,\mathrm{C}\,1\,\mathrm{V} = \frac{5}{8}\,\mathrm{J} \text{ mit den Flächen 3 und 4.}$$

c) Es existiert kein Relaxationspunkt, da die Kennlinie ab dem Punkt P_2 (P_3) im 2. (4.) Quadranten verläuft, und hier die Energie für $u < 0$ ($u > 0$) negativ und beliebig groß werden kann.

d) Abbildung L11.18



$P_1(0\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{C}), C_1 = 1\,\mathrm{F}$
$P_2(0\,\mathrm{V}, 1{,}5\,\mathrm{C}), C_2 = -0{,}5\,\mathrm{F}$
$P_3(0\,\mathrm{V}, -1{,}25\,\mathrm{C}), C_3 = -0{,}25\,\mathrm{F}$

Abbildung L11.17: zu L11.8 a: Kennlinie

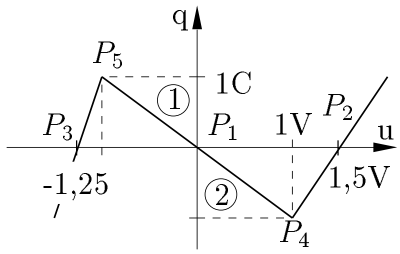


Abbildung L11.18: zu L11.8 d und f: Kennlinie und Relaxationspunkte

e)

$$\begin{aligned}
W_C(P_1,P_2) = &\int_{0\,\mathrm{C}}^{-1\,\mathrm{C}} u(q)\,\mathrm{d}q + \int_{-1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} u(q)\,\mathrm{d}q = \\
&\int_{0\,\mathrm{C}}^{-1\,\mathrm{C}} \frac{1}{C_1} q\,\mathrm{d}q + \int_{-1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} \left(1{,}5\,\mathrm{V} + \frac{1}{C_2} q\right)\,\mathrm{d}q = \\
&\left[\frac{1}{-1\,\mathrm{F}}\frac{1}{2}q^2\right]_{0\,\mathrm{C}}^{-1\,\mathrm{C}} + [1{,}5\,\mathrm{V}q]_{-1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} + \left[\frac{1}{2\,\mathrm{F}}\frac{1}{2}q^2\right]_{-1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} = \\
&-\frac{1}{2}\,\mathrm{J} + \frac{3}{2}\,\mathrm{J} - \frac{1}{4}\,\mathrm{J} = \frac{3}{4}\,\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_C(P_1,P_3) = &\int_{0\,\mathrm{C}}^{1\,\mathrm{C}} u(q)\,\mathrm{d}q + \int_{1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} u(q)\,\mathrm{d}q = \\
&\int_{0\,\mathrm{C}}^{1\,\mathrm{C}} \frac{1}{C_1} q\,\mathrm{d}q + \int_{1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} \left(-1{,}25\,\mathrm{V} + \frac{1}{C_3} q\right)\,\mathrm{d}q = \\
&\left[\frac{1}{-1\,\mathrm{F}}\frac{1}{2}q^2\right]_{0\,\mathrm{C}}^{1\,\mathrm{C}} + [-1{,}25\,\mathrm{V}q]_{1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} + \left[\frac{1}{4\,\mathrm{F}}\frac{1}{2}q^2\right]_{1\,\mathrm{C}}^{0\,\mathrm{C}} = \\
&-\frac{1}{2}\,\mathrm{J} + \frac{5}{4}\,\mathrm{J} - \frac{1}{8}\,\mathrm{J} = \frac{5}{8}\,\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

f) P_1 ist kein Relaxationspunkt, da für Betriebspunkte im Bereich C_1 $W(P_1, P_2) < 0$ gilt. P_2 und P_3 sind ebenfalls keine Relaxationspunkte, da z.B. $W(P_2, P_4) < 0$ bzw. $W(P_3, P_5) < 0$ gilt. Somit sind P_4 und P_5 die einzigen Relaxationspunkte, da die Flächen 1 und 2 gleich groß sind, und daher die Energie für einen beliebigen Punkt auf der Kennlinie immer größer gleich Null ist.

g) Der Punkt P_2 rutscht nach links, der zugehörige Kennlinienast wird steiler (Abbildung L11.19).

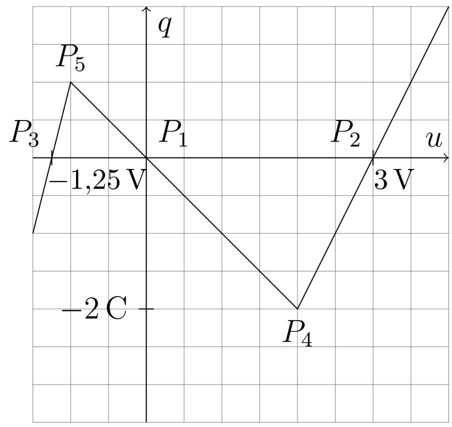


Abbildung L11.19: zu L11.8 g: Kennlinie und Relaxationspunkte

$$W_C(P_1,P_4) = \int_{0\,\mathrm{C}}^{-4\,\mathrm{C}} u(q)\,\mathrm{d}q = \int_{0\,\mathrm{C}}^{-2\,\mathrm{C}} \frac{1}{C_1} q\,\mathrm{d}q = \left[\frac{1}{-1\,\mathrm{F}}\frac{1}{2}q^2\right]_{0\,\mathrm{C}}^{-2\,\mathrm{C}} = -2\,\mathrm{J}$$
$$< W_C(P_1,P_5)$$

$$\Rightarrow W_C(P_4,P_5) = W_C(P_4,P_1) + W_C(P_1,P_5) = 2\,\mathrm{J} - \frac{1}{2}\,\mathrm{J} = \frac{3}{2}\,\mathrm{J}$$

Damit wird P_4 zum einzigen Relaxationspunkt, da nun $W_C(P_4,P_5) > 0$.

L11.9 Nichtlineare Energiespeicherung

Merkregel:

$W_C > 0$ ($W_L > 0$) für steigende q (Φ) Werte bei positiven u (i) Werten oder für fallende q (Φ) Werte bei negativen u (i) Werten.

$W_C < 0$ ($W_L < 0$) für steigende q (Φ) Werte bei negativen u (i) Werten oder für fallende q (Φ) Werte bei positiven u (i) Werten.

Die Energie ist die Fläche zwischen der q-(Φ-)Achse und den beiden Betriebspunkten der Kennlinie.

L11.10 Kapazitives Zweitor

a) $u_1 = a u_2, \quad i_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{a}(-\dot{q}_2) = \frac{1}{a}(-i_2)$

b) Idealer Übertrager

c) $\begin{bmatrix} u_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

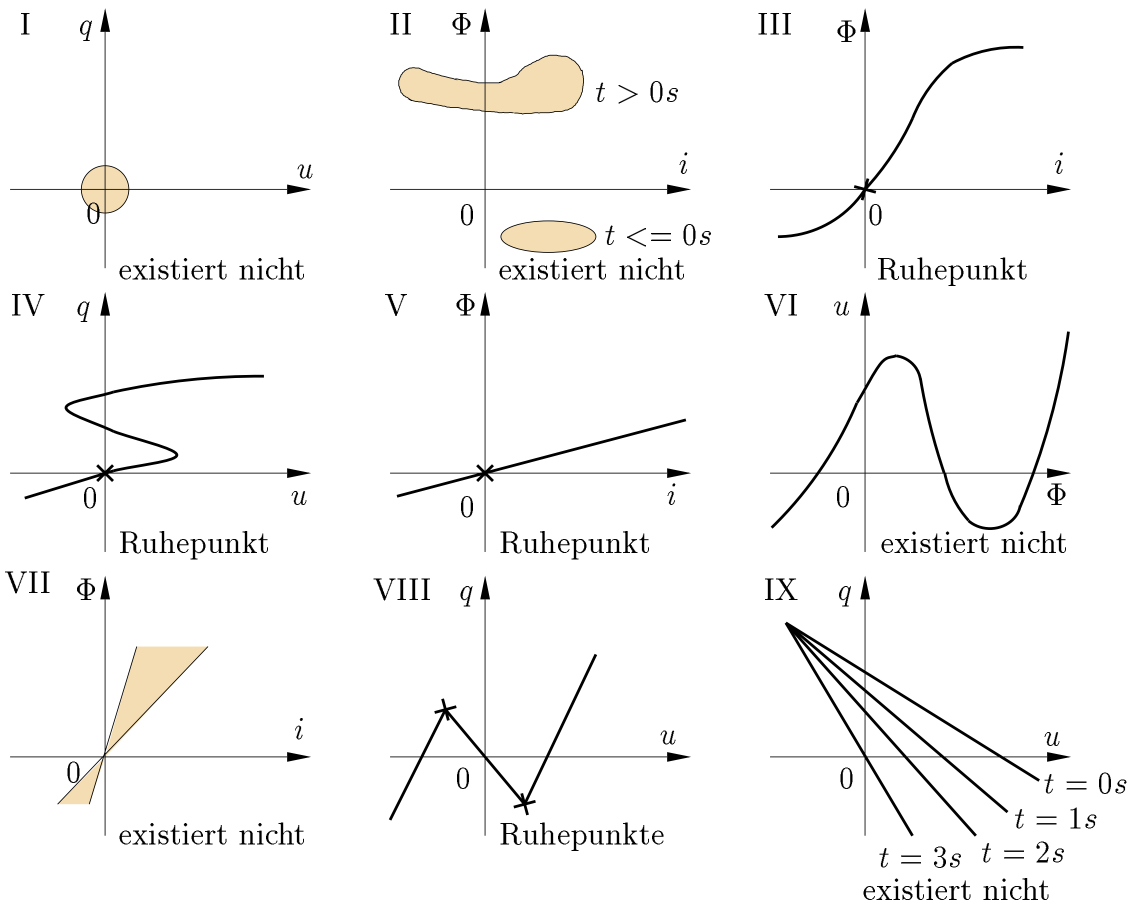


Abbildung L11.20: zu L11.9, Relaxationspunkte zu den Kennlinien

d) $i_C = -i_2 \quad \Rightarrow \quad q_C = -q_2 + k$
Die Konstante k kann ignoriert werden, da sie die Funktionsweise der Schaltung nicht beeinflusst.

$$u_1 = au_2 = au_C = \frac{a}{C}q_C = \frac{a}{C}(-q_2) = \frac{a}{C}(-(-aq_1)) = \frac{a^2}{C}q_1$$

$\Rightarrow$ verhält sich wie eine streng lineare Kapazität $\frac{C}{a^2}$.

e) Ja, alle streng linearen resistiven Zweitore lassen sich auch memristiv beschreiben.

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ -q_2 \end{bmatrix}$$

12 Übung: Schaltungen ersten Grades

12.1 Lineare RL-Schaltungen ersten Grades

Gegeben sei die in Abbildung 12.1 dargestellte lineare Schaltung mit idealen Netzwerkelementen.

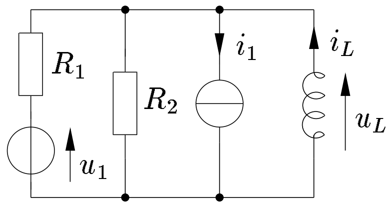


Abbildung 12.1: zu 12.1: Schaltung, Grad 1

Die Spannungs- und Stromquelle seien zunächst abgeschaltet $(u_1 = 0,\ i_1 = 0)$ der Strom durch die Spule zum Zeitpunkt t_0 betrage I_0.

a) Berechnen Sie den Spannungs- und Stromverlauf für $t > t_0$ an der Spule ($t_0 = 0.1$ms).

b) Skizzieren Sie den Spannungs- und Stromverlauf an der Spule für $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $L =$ 100mH und $I_0 = 50$mA.

Betrachten Sie nun eine gleichförmige Erregung mit $u_1 = 0.5R_1I_0$, $i_L(t_0) = I_0$ und $i_1 = I_0$.

c) Berechnen Sie den Spannungs- und Stromverlauf für $t > t_0$ an der Spule ($t_0 = 0.1$ms).

d) Skizzieren Sie den Spannungs- und Stromverlauf an der Spule für $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $L =$ 100mH, und $I_0 = 50$mA.

Gegeben sei nun die in Abbildung 12.2 dargestellte stückweise konstante Erregung für u_1 bzw. i_1 und $i_L(t_0) = I_0$.

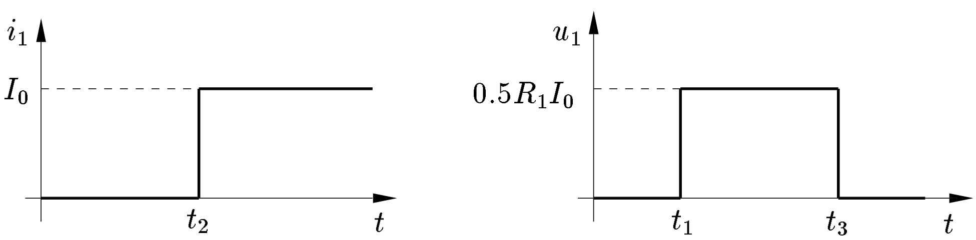


Abbildung 12.2: zu 12.1 d: Stückweise konstante Erregung

e) Berechnen Sie den Spannungs- und Stromverlauf für $t > t_0$ an der Spule ($t_0 = 0.1$ms).

f) Skizzieren Sie den Spannungs- und Stromverlauf für $R_1 = 1\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\mathrm{k}\Omega$, $L = 100\mathrm{mH}$, $I_0 = 50\mathrm{mA}$, $t_1 = 0.6\mathrm{ms}$, $t_2 = 1.1\mathrm{ms}$ und $t_3 = 1.6\mathrm{ms}$

Gegeben sei nun folgende Erregung für u_1 bzw. i_1 und $i_L(t_0) = I_0$:

$$u_1(t) = 0.5 R_1 I_0 \sin(\omega t), \qquad i_1(t) = I_0$$

g) Berechnen Sie den Spannungs- und Stromverlauf für $t > t_0$ an der Spule ($t_0 = 0\mathrm{s}$).

Hinweis: $$\int \exp(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)$$

12.2 RC-Schaltung mit stückweise konstanter Erregung (1)

Berechnen und skizzieren Sie für die RC-Schaltung in Abbildung 12.3 den Strom durch den Widerstand R_2 in Abhängigkeit von der Zeit für $u_C(0) = 2U$.

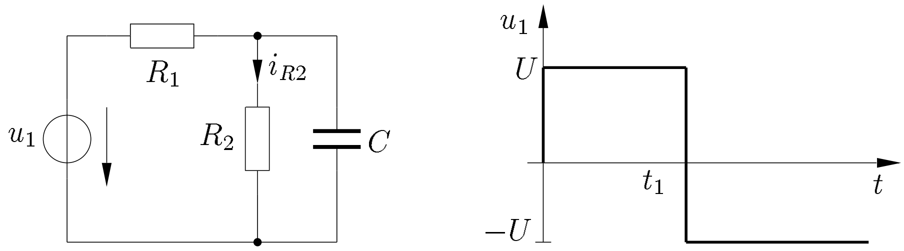


Abbildung 12.3: Stückweise konstante Erregung

12.3 RC-Schaltung mit stückweise konstanter Erregung (2)

Berechnen und skizzieren Sie für die RC-Schaltung in Abbildung 12.4 die Spannung am Widerstand R_2 in Abhängigkeit von der Zeit für $R_1 = 1\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 3\mathrm{k}\Omega$, $C = 10\mu\mathrm{F}$, $I_0 = 2\mathrm{mA}$, $t_1 = 50\mathrm{ms}$, $t_2 = 150\mathrm{ms}$ und $u_C(0) = 0\mathrm{V}$.

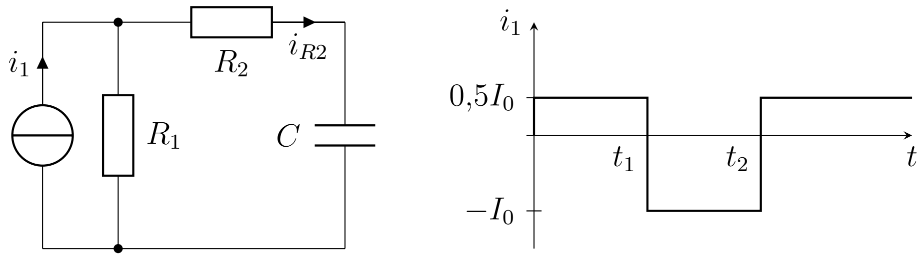


Abbildung 12.4: Stückweise konstante Erregung

12.4 Spannungsvervielfacher

a) Berechnen und skizzieren Sie die Spannung an der Kapazität aus Abbildung 12.5 für $u_C(0) = 0\,\mathrm{V}$ und $2RC = T$. Die Diode sei ideal.

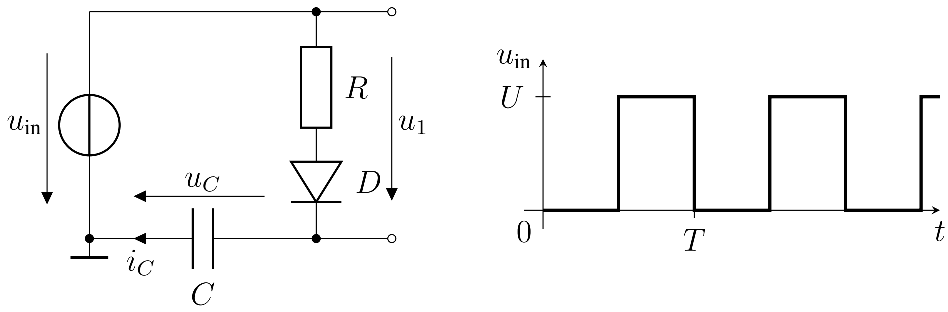


Abbildung 12.5: Stückweise konstante Erregung

b) Welche Spannung erreicht u_{out} in Abbildung 12.6 im eingeschwungenen Zustand?

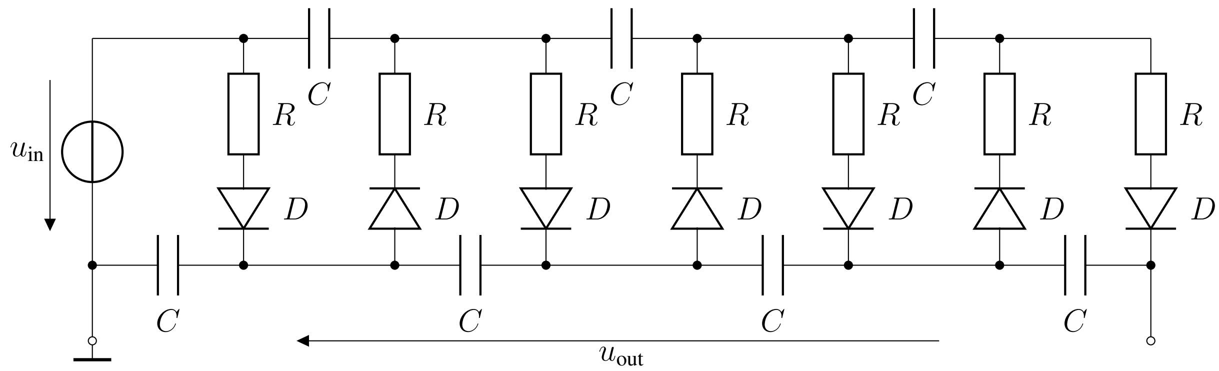


Abbildung 12.6: Spannungsvervielfacher

12.5 Allgemeine Erregung

Beweisen Sie durch Einsetzen, dass die Formel in Gl. (12.14) aus dem Vorlesungsskript eine Lösung der Differentialgleichung Gl. (12.13) aus dem Vorlesungsskript ist.

12.6 Lineare Schaltung ersten Grades mit allgemeiner Erregung

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.7 mit

$$i_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{G_0 L}} \cos(\omega t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

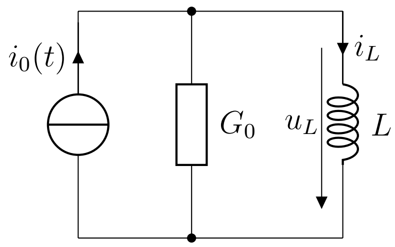


Abbildung 12.7: Schaltung ersten Grades

Berechnen Sie $i_L(t)$ für $t > 0$ unter der Annahme, dass $i_L(0) = I_0$ ist. Verwenden Sie dabei die Abkürzung $\tau = G_0L$.

12.7 Parasitärer Effekt

Betrachten Sie einen linearen zeitinvarianten Kondensator C, der an eine Spannungsquelle angeschlossen ist, die zum Zeitpunkt $t = 1$s sprunghaft von $U = 0$V auf $U = U_0$ ansteigt.

a) Wie groß müsste bei einem idealen Kondensator der Strom zum Zeitpunkt des Umschaltens sein?

b) Erklären Sie das Verhalten bei einem realen Kondensator.

c) Stellen Sie ein Modell für den realen Kondensator auf, durch das dieses Verhalten beschrieben wird und berechnen Sie den Stromfluss formelmäßig ($u_C(t < 1$s$)= 0$V).

d) Skizzieren Sie alle Ströme und Spannungen.

12.8 Integrierer und Differenzierer

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.8.

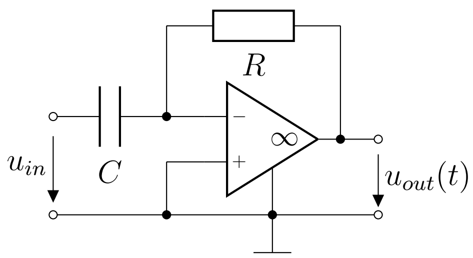


Abbildung 12.8: Differenzierer

Der ideale Operationsverstärker soll dabei im linearen Bereich arbeiten.

a) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $u_{out}(t)$ in Abhängigkeit von u_{in} für $t > t_0$.

b) Vertauschen Sie den Kondensator mit dem Widerstand und berechnen Sie die Ausgangsspannung $u_{out}(t)$ für $t > t_0$.

12.9 Lineare RC-Schaltungen ersten Grades mit Schalter

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.9.

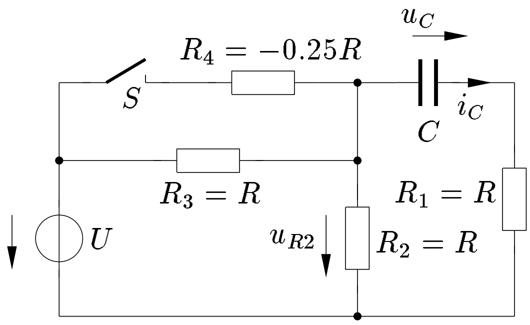


Abbildung 12.9: RC-Schaltung mit Schalter

Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = t_1$ geschlossen und zum Zeitpunkt $t = t_2$ geöffnet.

a) Berechnen Sie die Spannung und den Strom an der Kapazität für $t > t_0$ und $u_C(t_0) = U$.

b) Skizzieren Sie die Spannung und den Strom für $t_1 = t_0 + |\tau_1|$ und $t_2 = t_1 + |\tau_2|$ ($|\tau_1|$: Betrag der Zeitkonstante für geöffneten Schalter, $|\tau_2|$: Betrag der Zeitkonstante für geschlossenen Schalter).

c) Berechnen Sie die Spannung am Widerstand R_2 für $t > t_0$ und $u_C(t_0) = U$.

d) Skizzieren Sie diese Spannung für $t_1 = t_0 + |\tau_1|$ und $t_2 = t_0 + |\tau_1| + |\tau_2|$.

12.10 Lineare RL-Schaltungen ersten Grades mit Schalter

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.10.

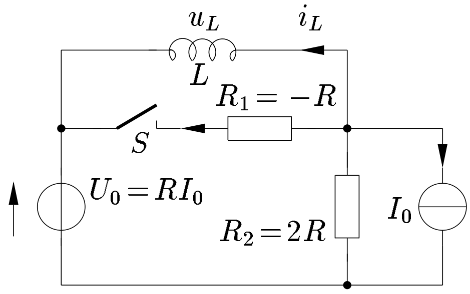


Abbildung 12.10: RL-Schaltung mit Schalter

Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = t_1$ geschlossen und zum Zeitpunkt $t = t_2$ wieder geöffnet.

a) Berechnen Sie die Spannung an der Induktivität für $t > t_0$ und $i_L(t_0) = I_0$.

b) Skizzieren Sie die Spannung für $t_1 = t_0 + |\tau_1|$ und $t_2 = t_0 + |\tau_1| + |\tau_2|$ ($|\tau_1|$: Betrag der Zeitkonstante für geöffneten Schalter, $|\tau_2|$: Betrag der Zeitkonstante für geschlossenen Schalter)

c) Berechnen Sie den Strom durch den Widerstand R_1 für $t > t_0$ und $i_L(t_0) = I_0$.

d) Skizzieren Sie den Strom für $t_1 = t_0 + |\tau_1|$ und $t_2 = t_0 + |\tau_1| + |\tau_2|$.

12.11 Dynamischer Pfad 1

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.11 mit der dargestellten Kennlinie des Zweipols $\mathcal{N}$.

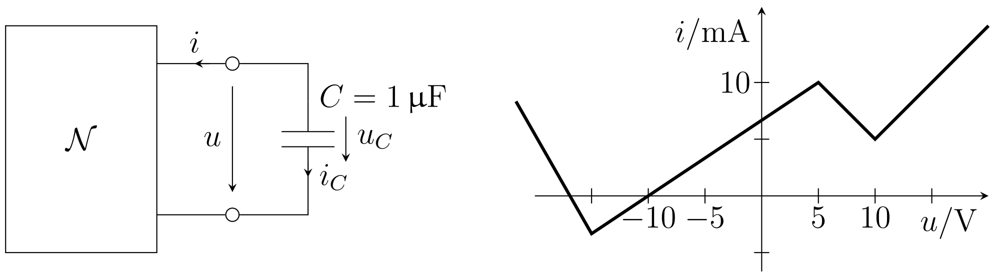


Abbildung 12.11: zu 12.11: Zweipol $\mathcal{N}$ mit Kapazität

a) Kennzeichnen Sie den dynamischen Pfad und markieren Sie alle Gleichgewichtspunkte. Handelt es sich dabei um stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte?

b) Berechnen Sie die Spannung und den Strom an der Kapazität für $t > t_0 = 0\mathrm{s}$ und $u_C(t_0) = 15\mathrm{V}$.

12.12 Dynamischer Pfad 2

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.12 mit der dargestellten Kennlinie des Zweipols $\mathcal{N}$.

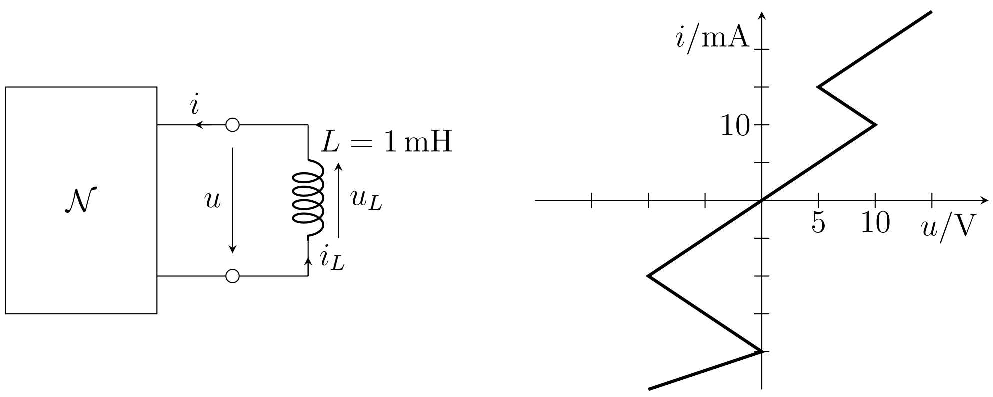


Abbildung 12.12: zu 12.12: Zweipol $\mathcal{N}$ mit Induktivität

a) Kennzeichnen Sie den dynamischen Pfad und markieren Sie alle Gleichgewichtspunkte. Handelt es sich dabei um stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte?

b) Berechnen und skizzieren Sie die Spannung und den Strom an der Induktivität für $t > t_0 = 0\mathrm{s}$ und $i_L(t_0) = 20\mathrm{mA}$.

12.13 Sprungphänomen (1)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.13 mit der dargestellten Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes.

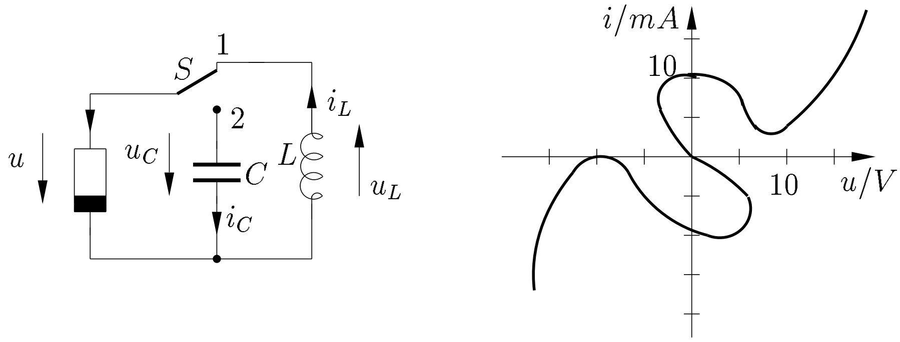


Abbildung 12.13: Nichtlinearer Widerstand

Kennzeichnen Sie den dynamischen Pfad und markieren Sie alle Gleichgewichtspunkte, wenn

a) sich der Schalter S in Stellung 1 befindet
b) sich der Schalter S in Stellung 2 befindet

Handelt es sich dabei um stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte? Tragen Sie alle „toten“ Punkte ein.

12.14 Sprungphänomen (2)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.14 mit der dargestellten Kennlinie des Zweipols $\mathcal{N}$.

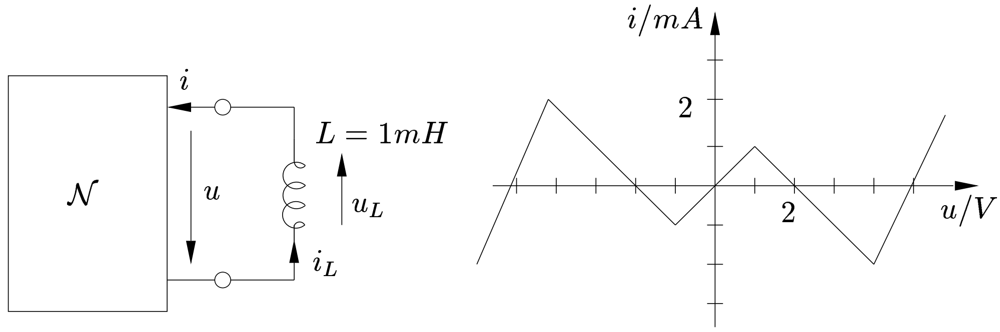


Abbildung 12.14: zu 12.14: Nichtlinearer Widerstand

a) Kennzeichnen Sie den dynamischen Pfad und markieren Sie alle Gleichgewichtspunkte. Handelt es sich dabei um stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte?
b) Welche Forderung muss die Anfangsbedingung $i_L(t_0)$ erfüllen, damit die Schaltung als Relaxationsoszillator arbeitet?

12.15 Sprungphänomen (3)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.15 mit der dargestellten Kennlinie des Zweipols $\mathcal{N}$.

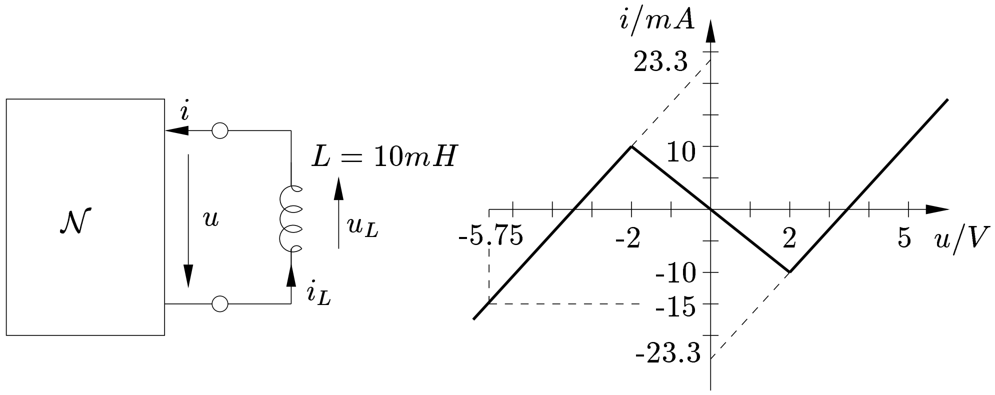


Abbildung 12.15: zu 12.15: Nichtlinearer Widerstand

a) Kennzeichnen Sie den dynamischen Pfad und markieren Sie alle Gleichgewichtspunkte. Handelt es sich dabei um stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte?

b) Berechnen und skizzieren Sie die Spannung und den Strom an der Induktivität für $t > t_0 = 0\text{s}$ und $i_L(t_0) = -15\text{mA}$.

c) Berechnen Sie die Frequenz im eingeschwungenen Zustand.

12.16 Funktionsgenerator

Gegeben sei die Schaltung aus Abbildung 12.16. Die Diode sei ideal.

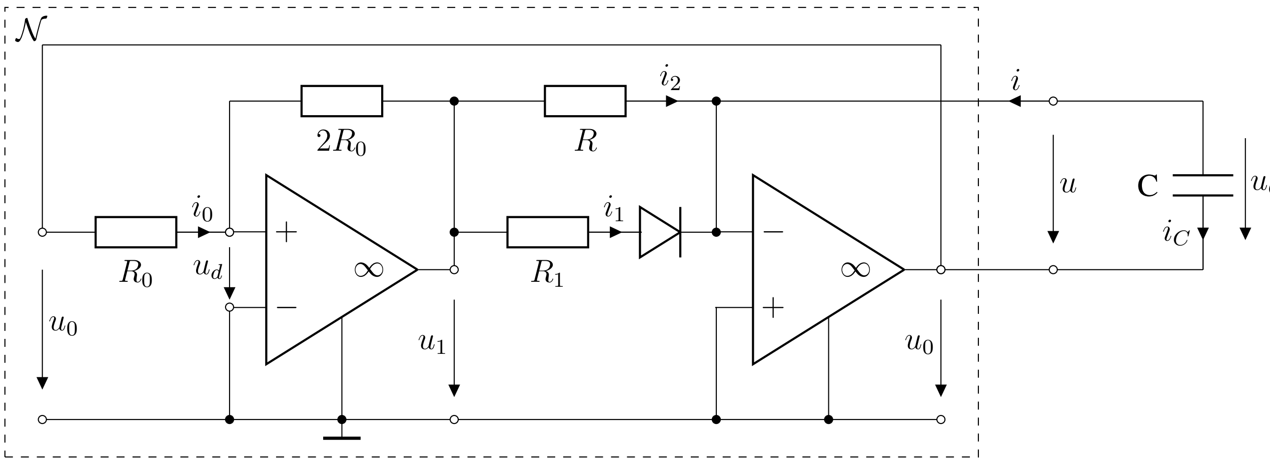


Abbildung 12.16: Funktionsgenerator

a) Welche Funktionen erfüllen die beiden Operationsverstärker?

b) Finden Sie die u-i-Kennlinie des resistiven Netzwerkes $\mathcal{N}$ für $R_1 = R \neq 0$ und $|u| \leq U_{\text{sat}}$. Achten Sie dabei auf die Gültigkeitsbereiche der Operationsverstärkerersatzschaltungen.

c) Zeichnen Sie den dynamischen Pfad für alle Anfangswerte ein und kennzeichnen Sie markante Punkte.

d) Skizzieren Sie den Verlauf von u_0 und u_1 für $R \neq 0$, $R_1 \to \infty$.

e) Skizzieren Sie den Verlauf von u_0 und u_1 für $R \neq 0$, $R_1 \to 0$.

f) Welche Funktionen erzeugt der Funktionsgenerator und mit welcher Frequenz schwingen diese?

12.17 Bistabile Schaltung

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 12.17.

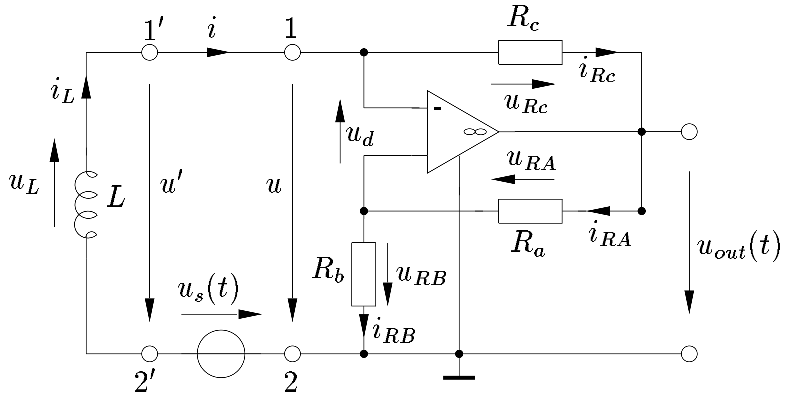


Abbildung 12.17: Bistabile Schaltung

a) Berechnen und skizzieren Sie die u-i-Kennlinien des Zweipols zwischen den Klemmen 1 und 2 für $R_a = R_b = R_c = R$ (Sättigungsspannung des Op-Amp: U_{sat}).

b) Betrachten Sie die dynamische Kennlinie der Schaltung zwischen den Klemmen 1' und 2' für $u_s(t) = 0\,\text{V}$. Geben Sie alle Gleichgewichtspunkte an und kennzeichnen Sie die stabilen bzw. instabilen Punkte.

Die Spannungsquelle besitzt den in Abbildung 12.18 dargestellten zeitlichen Verlauf.

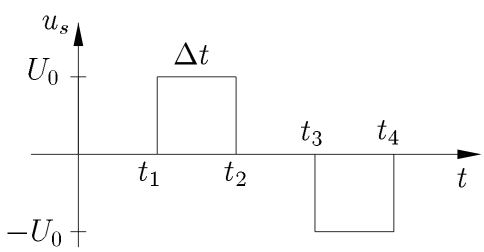


Abbildung 12.18: Zeitverlauf

Ferner gilt: $i(t < t_1) = \frac{-U_{\text{sat}}}{R},\ U_0 > U_{0min},\ \Delta t \gg \Delta t_{min}$. Betrachten Sie den Zweipol $\mathcal{N}'$ zwischen den Klemmen 1’ und 2’.

c) Skizzieren Sie den dynamischen Pfad für $t_1 \leq t \leq t_2$ und geben Sie den dynamischen Durchlauf der Kennlinie an.

d) Skizzieren Sie die Kennlinie für $t_2 \leq t \leq t_3$. Welcher Arbeitspunkt stellt sich ein?

e) Skizzieren Sie die Kennlinie für $t_3 \leq t \leq t_4$ und geben Sie den dynamischen Durchlauf der Kennlinie an.

f) Skizzieren Sie die Kennlinie für $t \geq t_4$. Welcher Arbeitspunkt stellt sich ein?

g) Welche Bedingungen für die Spannung U_0 und die Umschaltzeit Δt müssen gelten, damit die Schaltung als Flipflop ordentlich arbeitet.

h) Berechnen Sie Δt_{min} für $U_0 = 2U_{0min}$

i) Berechnen und skizzieren Sie den Strom $i_L(t)$ für $t < t_3$, $u_0 = 2U_{0min}$ und $\Delta t = 2\ln(3)L/R$

j) Skizzieren Sie den Strom $i_L(t)$ für $\Delta t \gg \Delta t_{min}$ und $U_0 = 0.5U_{0min}$

12.18 Memristor

Gegeben sei ein Memristor M, dessen Kennliniensteigung $W(\Phi_M)$ abschnittsweise konstant den Wert $W(\Phi_M) = W_1$ bzw. $W(\Phi_M) = W_2$ hat (Abbildung 12.19).

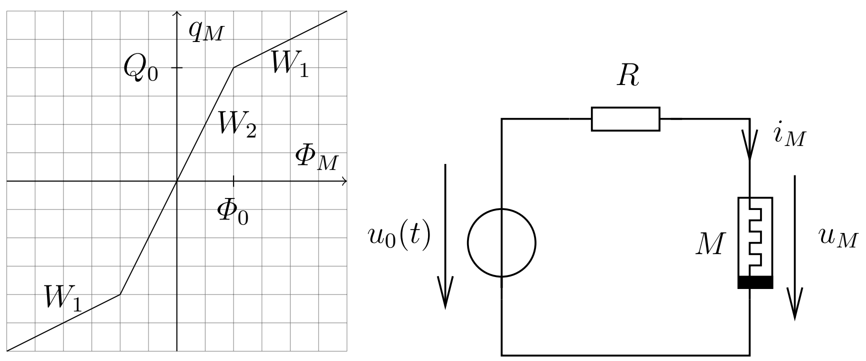


Abbildung 12.19: Kennlinie des Memristors und Schaltung mit Memristor

a) Welche der folgenden Eigenschaften besitzt dieser Memristor?

☐ spannungsgesteuert	☐ flussgesteuert	☐ linear
☐ stromgesteuert	☐ streng linear	☐ ungepolt
☐ ladungsgesteuert	☐ stückweise linear	☐ zeitvariant

b) Wie lautet allgemein jeweils der Zusammenhang zwischen Spannung und Fluss sowie zwischen Strom und Ladung?

c) Geben Sie für alle Kennlinienabschnitte q_M als Funktion von Φ_M an.

d) Geben Sie für die verschiedenen Bereiche von Φ_M nun i_M in Abhängigkeit von u_M an.

Der Memristor werde nun in die oben abgebildete Schaltung eingebaut.

e) Bestimmen Sie u_M in Abhängigkeit von $u_0(t)$ und u_R (Spannung am Widerstand R).

f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen u_R und i_M?

g) Geben Sie nun u_M in Abhängigkeit der Spannung $u_0(t)$, des Widerstandes R und der Kennliniensteigung $W(\Phi_M)$ an.

Die Erregung $u_0(t)$ ist in Abbildung 12.20 gegeben. Außerdem gelte nun $\Phi_M(0) = 0$ und $T_1 = T_2 = T$.

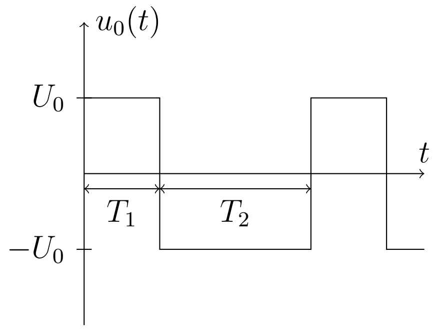


Abbildung 12.20: Verlauf der Erregung

h) Geben Sie $u_M(t)$ für kleine Zeiten $t > 0$ an.

i) Zu welchem Zeitpunkt t_1 wird $\Phi_M(t_1) = \Phi_0$ erreicht?

j) Bestimmen Sie $\Phi(T)$ unter der Annahme, dass $T > t_1$. (Die Annahme gilt auch in allen folgenden Teilaufgaben.)

k) Berechnen und skizzieren Sie $u_M(t)$ füur $0 \leq t \leq 3T$.

l) Wie ist T zu wählen, damit alle Abschnitte im Spannungsverlauf gleich lang sind?

m) Wie ist R zu wählen, damit alle Stufen im Spannungsverlauf gleich hoch sind?

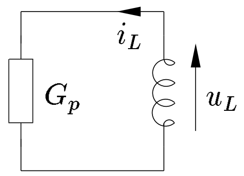
n) Welche Bedingung müssen W_1 und W_2 erfüllen, damit diese Forderung mit einem positiven Widerstand erfüllt werden kann? Ist dies beim vorliegenden Memristor gegeben?

o) Was würde für große t passieren, wenn $T_1 \neq T_2$ gewählt würde?

L12 Lösung: Schaltungen ersten Grades

L12.1 Lineare RL-Schaltungen ersten Grades

a) ESB: Abbildung L12.1



$G_p = G_1 + G_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$

Abbildung L12.1: RL-Schaltung, Grad 1

$$\text{KVL} \quad u_L = +L\dot{i}_L = -\frac{i_L}{G_p} \quad \Rightarrow \quad \dot{i}_L = -\frac{1}{G_p L} i_L$$

Aus der allgemeinen Formel $\dot{x} = Ax(t) + Bv = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{1}{\tau}x(t_\infty)$ ergibt sich bei einer RL-Schaltung für den Strom:

$$i_L(t) = i_L(t_\infty) + [i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

und für die Spannung

$$u_L(t) = L\left(-\frac{1}{\tau}\right)[i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -i_L(t)\frac{1}{\tau} + i_L(t_\infty)\frac{1}{\tau}.$$

Vergleicht man die allgemeine Formel mit der KVL, so erhält man $\tau = G_p L$, $i_L(t_0) = I_0$ und $i_L(t_\infty) = 0$. Setzt man diese Ergebnisse ein, so ergibt sich :

$$i_L(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{G_p L}\right) \qquad u_L(t) = LI_0\left(-\frac{1}{G_p L}\right) \exp\left(-\frac{t-t_0}{G_p L}\right)$$

b) Durch Einsetzen der in der Angabe enthaltenen Werte ($R_1 = 1\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\mathrm{k}\Omega$, $L = 100\mathrm{mH}$ und $I_0 = 50\mathrm{mA}$) erhält man (Abbildung L12.2):

$$i_L(t) = 50\mathrm{mA} \exp\left(-\frac{t-0.1\,\mathrm{ms}}{0.15\,\mathrm{ms}}\right) \qquad u_L(t) = (-33.3\,\mathrm{V}) \exp\left(-\frac{t-0.1\,\mathrm{ms}}{0.15\,\mathrm{ms}}\right)$$

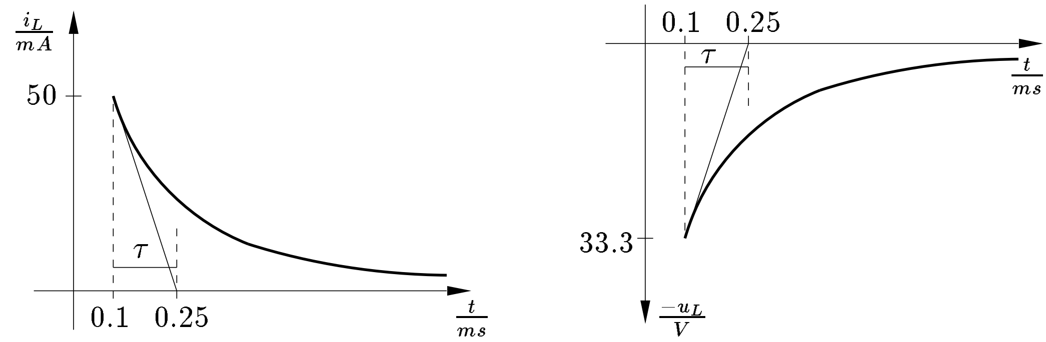


Abbildung L12.2: zu L12.1 b: Zeitverlauf

c) Mit einer gleichförmigen Erregung erhält man ein Ersatzschaltbild (Abbildung L12.3) in dem Quellen und Widerstände zusammengefasst werden, wobei

$$i_0 = \frac{u_1}{R_1} + i_1 = \frac{1}{2}I_0 + I_0 = \frac{3}{2}I_0 \quad \text{und} \quad G_p = G_1 + G_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

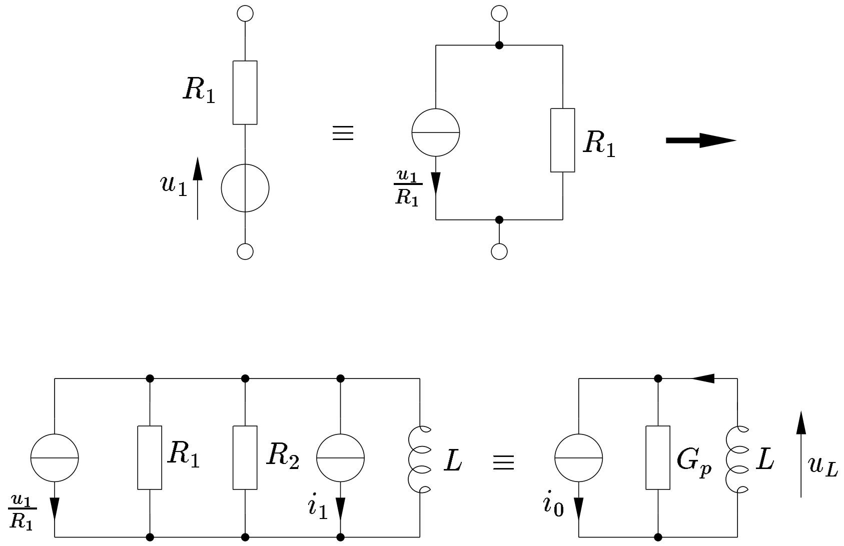


Abbildung L12.3: zu L12.1 c: Ersatzschaltbild

Aus der allgemeinen Formel $\dot{x} = Ax(t) + Bv$ und den daraus resultierenden Gleichungen (siehe a)), ergibt sich mit $\tau = G_p L$, $i_L(t_0) = I_0$ und $i_L(t_\infty) = i_0 = \frac{3}{2}I_0$:

$$i_L(t) = \frac{3}{2}I_0 + \left[I_0 - \frac{3}{2}I_0\right]\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) = \frac{3}{2}I_0 - \frac{1}{2}I_0\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$u_L(t) = L\frac{1}{2}I_0\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

d) Durch Einsetzen der in der Angabe enthaltenen Werte ($R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $L = 100\text{mH}$, und $I_0 = 50\text{mA}$) erhält man (Abbildung L12.4):

$$i_L(t) = 75\text{mA} - 25\text{mA}\exp\left(-\frac{t - 0.1\,\text{ms}}{0.15\,\text{ms}}\right)$$

$$u_L(t) = 16.7\,\text{V}\exp\left(-\frac{t - 0.1\,\text{ms}}{0.15\,\text{ms}}\right)$$

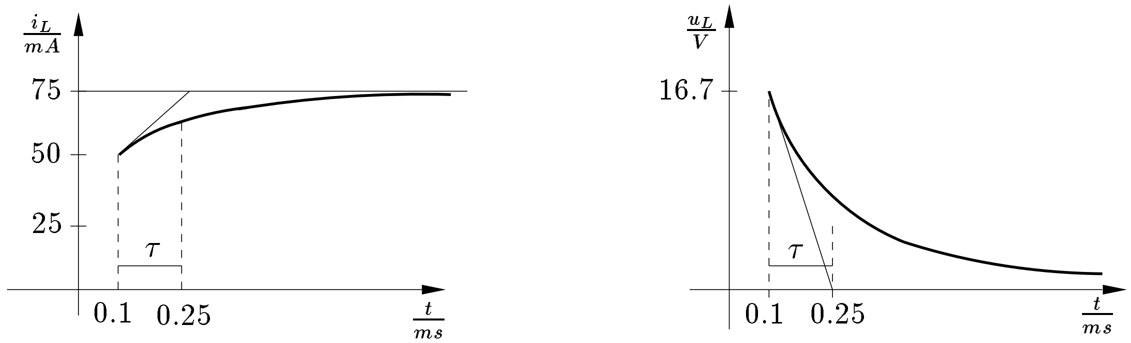


Abbildung L12.4: zu L12.1 d: Zeitverlauf

e) ESB: Abbildung L12.5

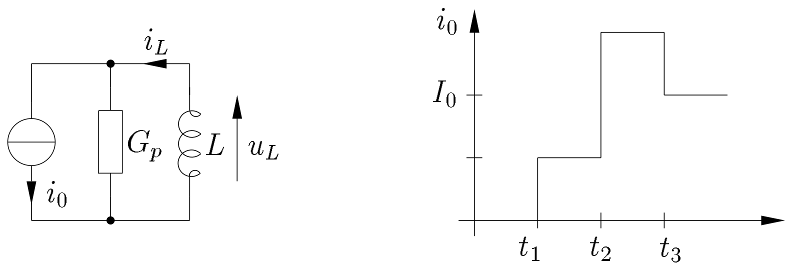


Abbildung L12.5: zu L12.1 e: Stückweise konstante Erregung an RL-Glied

$$i_0 = \frac{u_1(t)}{R_1} + i_1(t)$$

$$G_p = G_1 + G_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Es ergeben sich also vier Zeitintervalle ($[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_3)$, $[t_3, t_\infty)$) mit konstanter Erregung, so dass sich die Ströme und Spannungen in den einzelnen Intervallen wie folgt darstellen lassen (siehe a) und c)):

$[t_0, t_1)$:
$i_L(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$, $\quad u_L(t) = LI_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$

$[t_1, t_2)$:
$i_L(t) = \frac{1}{2}I_0 + \left[i_L(t_1) - \frac{1}{2}I_0\right]\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)$, $\quad u_L(t) = L\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left[i_L(t_1) - \frac{1}{2}I_0\right]\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)$

$[t_2, t_3)$:
$i_L(t) = \frac{3}{2}I_0 + \left[i_L(t_2) - \frac{3}{2}I_0\right]\exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right)$, $\quad u_L(t) = L\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left[i_L(t_2) - \frac{3}{2}I_0\right]\exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right)$

$[t_3, t_\infty)$:
$i_L(t) = I_0 + [i_L(t_3) - I_0]\exp\left(-\frac{t-t_3}{\tau}\right)$, $\quad u_L(t) = L\left(-\frac{1}{\tau}\right)[i_L(t_3) - I_0]\exp\left(-\frac{t-t_3}{\tau}\right)$

f) Zum Skizzieren der einzelnen Verläufe berechnet man die Werte an den Intervallgrenzen. Mit $\tau = 0.15$ms erhält man folgende Ergebnisse:

$i_L(t_0 = 0.1\,\mathrm{ms}) = 50$mA		$u_L^+(t_0 = 0.1\,\mathrm{ms}) = -33.3\,\mathrm{V}$
$i_L(t_1 = 0.6\,\mathrm{ms}) = 1.78$mA	$u_L^-(t_1 = 0.6\,\mathrm{ms}) = -1.19\,\mathrm{V}$	$u_L^+(t_1 = 0.6\,\mathrm{ms}) = 15.5\,\mathrm{V}$
$i_L(t_2 = 1.1\,\mathrm{ms}) = 24.2$mA	$u_L^-(t_2 = 1.1\,\mathrm{ms}) = 0.552\,\mathrm{V}$	$u_L^+(t_2 = 1.1\,\mathrm{ms}) = 33.9\,\mathrm{V}$
$i_L(t_3 = 1.6\,\mathrm{ms}) = 73.2$mA	$u_L^-(t_3 = 1.6\,\mathrm{ms}) = 1.21\,\mathrm{V}$	$u_L^+(t_3 = 1.6\,\mathrm{ms}) = -15.5\,\mathrm{V}$
$i_L(t_\infty) = 50$mA		$u_L^+(t_\infty) = 0\,\mathrm{V}$

Die Verläufe lassen sich nun einfach skizzieren (Abbildung L12.6).

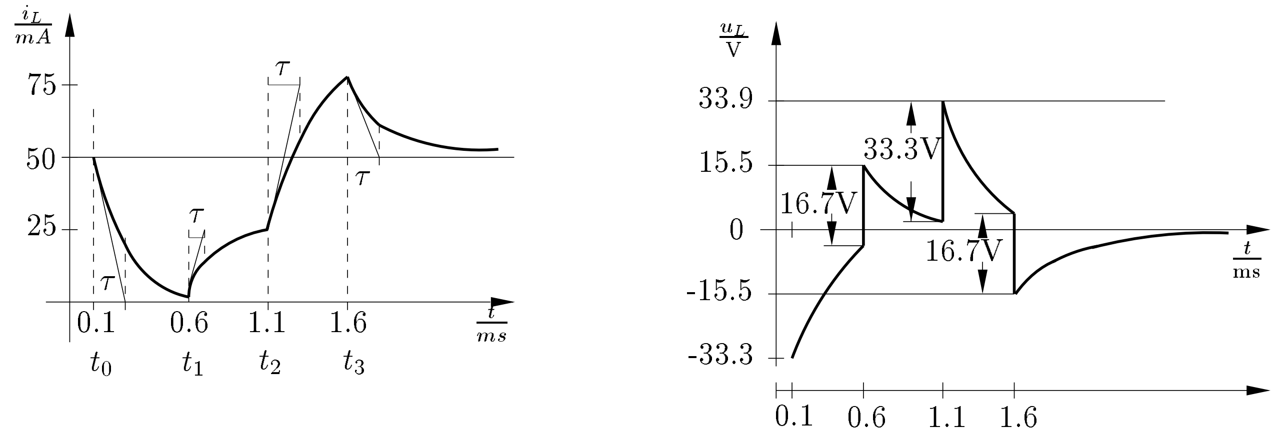
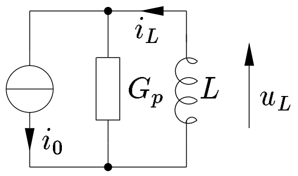


Abbildung L12.6: zu L12.1 f: Zeitverläufe

g) ESB: Abbildung L12.7



$G_p = G_1 + G_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$

Abbildung L12.7: zu L12.1 g:
Erregung an RL-Glied

Mit $\tau = G_p L$, $i_L(t_0) = I_0$ und $i_0(t) = \frac{I_0}{2}\sin(\omega t) + I_0$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) =& i_L(t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\tau} i_0(t')\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t' \\
=& I_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\frac{I_0}{\tau}\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sin(\omega t')\exp\left(\frac{t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t' + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t'\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\sin(\omega t')\exp\left(\frac{t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t' =& \frac{\exp\left(\frac{t'}{\tau}\right)}{\omega^2+\frac{1}{\tau^2}}\left(\frac{1}{\tau}\sin(\omega t') - \omega\cos(\omega t')\right)\Bigg|_{t_0=0\,\mathrm{s}}^{t} \\
=& \frac{\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\omega^2+\frac{1}{\tau^2}}\left(\frac{1}{\tau}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t'\ )\right) + \frac{1}{\omega^2+\frac{1}{\tau^2}}\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_L(t) =& I_0\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\frac{I_0}{\tau} \\
& \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\omega^2+\frac{1}{\tau^2}}\left(\frac{1}{\tau}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right) + \frac{1}{\omega^2+\frac{1}{\tau^2}}\omega\right) + \tau\left(\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)\right] \\
=& I_0\left[\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t) + \omega\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right. \\
& \left. +1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]
\end{aligned}
$$

L12.2 RC-Schaltung mit stückweise konstanter Erregung

Siehe Abbildung L12.8.

ESB

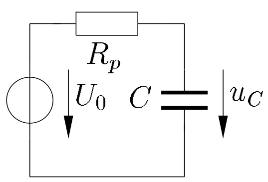


Abbildung L12.8: zu L12.2: ESB

$R_p = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

$U_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_1$ (Ersatzquelle)

KVL $\quad R_p i_C = R_p C\dot{u}_C = -u_C(t) + U_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_C = -\dfrac{1}{R_p C}u_C(t) + \dfrac{1}{R_p C}U_0$

Aus der allgemeinen Formel $\dot{x} = Ax(t) + Bv = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{1}{\tau}x(t_\infty)$ ergibt sich bei einer RC-Schaltung für die Spannung

$$u_C(t) = u_C(t_\infty) + [u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$

und für den Strom

$$i_C(t) = C\left(-\frac{1}{\tau}\right)[u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$

und für $\tau = R_pC$ und $u(t_\infty) = U_0$. Setzt man diese Ergebnisse und $u_C(0) = 2U$ ein, so erhält man für die zwei Zeitintervalle:

$$0 \le t \le t_1 \quad u_C(t_\infty) = U_0 = U\tfrac{R_2}{R_1+R_2} \quad \text{(Spannungsteiler)}, \quad i_{R2} = \tfrac{u_C(t)}{R_2}$$

$$u_C(t) = U\tfrac{R_2}{R_1+R_2} + U\tfrac{2R_1+R_2}{R_1+R_2}\exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)$$

$$t \ge t_1 \quad u_C(t_\infty) = U_0 = (-U)\tfrac{R_2}{R_1+R_2}, \quad u_C(t_1) = U\tfrac{R_2}{R_1+R_2} + U\tfrac{2R_1+R_2}{R_1+R_2}\exp\left(-\tfrac{t_1}{\tau}\right)$$

$$u_C(t) = (-U)\tfrac{R_2}{R_1+R_2} + \left(u_C(t_1) + U\tfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)\exp\left(-\tfrac{t-t_1}{\tau}\right)$$

$$i_{R2}(t) = \tfrac{u_C(t)}{R_2}$$

Damit ergibt sich, falls der stationäre Endwert für t_1 annähernd erreicht wird, der Stromverlauf in Abbildung L12.9.

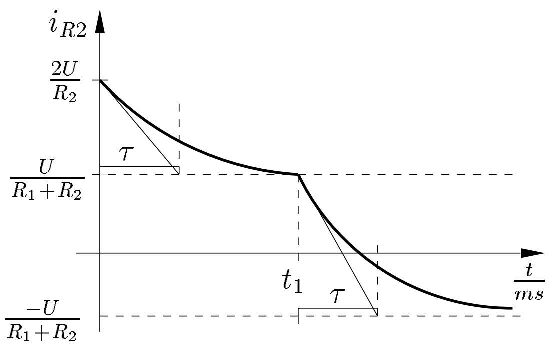


Abbildung L12.9: zu L12.2: Zeitverlauf

L12.3 RC-Schaltung mit stückweise konstanter Erregung

Siehe ESB in Abbildung L12.10.

Es ergeben sich drei Zeitintervalle. Mit $\tau = CR_s = 40\text{ms}$, $U_C(t_\infty) = U_0$ und $u_{R2} = R_2 i_{R2} = R_2 C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ erhält man:

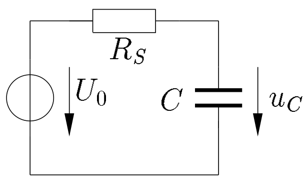


Abbildung L12.10: zu L12.3: ESB

$R_s = R_1 + R_2 = 4\mathrm{k}\Omega$
$U_0 = R_1 i_1$ (Ersatzquelle)

$0 \leq t \leq 50\,\mathrm{ms}$ $\quad u_C(t_0) = u_C(0) = 0\,\mathrm{V},\; u_C(t_\infty) = U_0 = i_1 R_1 = 1\,\mathrm{V},$

$$u_C(t) = \left(1 - \exp\left(-\tfrac{t}{40\,\mathrm{ms}}\right)\right)\mathrm{V}$$

$$u_{R2}(t) = \tfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} C R_2 = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{V}\exp\left(-\tfrac{t}{40\,\mathrm{ms}}\right),\; u_{e2}^{-}(50\,\mathrm{ms}) = 0,215\,\mathrm{V}$$

$50\,\mathrm{ms} \leq t \leq 150\,\mathrm{ms}$ $\quad u_C(t_0) = u_C(50\,\mathrm{ms}) = 0.714\,\mathrm{V},\;\; u_C(t_\infty) = U_0 = i_1 R_1 = -2\,\mathrm{V},$

$$u_{R2}^{+}(50\,\mathrm{ms}) = -2,035\,\mathrm{V},\;\; u_{R2}^{-}(150\,\mathrm{ms}) = -0,167\,\mathrm{V}$$

$$u_C(t) = -2\,\mathrm{V} + 2.71\,\mathrm{V}\exp\left(-\tfrac{t-50\,\mathrm{ms}}{40\,\mathrm{ms}}\right)$$

$$u_{R2}(t) = \tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} C R_2 = -\tfrac{3}{4}\,\mathrm{V}2.71\exp\left(-\tfrac{t-50\,\mathrm{ms}}{40\,\mathrm{ms}}\right)$$

$t \geq 150\,\mathrm{ms}$ $\quad u_C(t_0) = u_C(150\,\mathrm{ms}) = -1.777\,\mathrm{V},\;\; u_C(t_\infty) = U_0 = i_1 R_1 = 1\,\mathrm{V},$

$$u_C(t) = 1\,\mathrm{V} - 2.78\,\mathrm{V}\exp\left(-\tfrac{t-150\,\mathrm{ms}}{40\,\mathrm{ms}}\right),\;\; u_{R2}^{+}(150\,\mathrm{ms}) = 2,083\,\mathrm{V}$$

$$u_{R2}(t) = \tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} C R_2 = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{V}2.78\exp\left(-\tfrac{t-150\,\mathrm{ms}}{40\,\mathrm{ms}}\right)$$

Siehe Zeitverlauf in Abbildung L12.11.

L12.4 Spannungsvervielfacher

a) Mit idealer Diode erhält man:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) = \begin{cases} \frac{1}{R}u_1 = \frac{1}{R}(u_{\text{in}}(t) - u_C(t)) & \text{für } u_1 > 0 \Leftrightarrow u_{\text{in}} > u_C, \\ 0 & \text{für } u_1 \leq 0 \Leftrightarrow u_{\text{in}} \leq u_C. \end{cases}$$

Für $u_{\text{in}} \leq u_C$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) = 0$, u_C ändert sich nicht. Für $u_{\text{in}} > u_C$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_{\text{in}}(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + Bv(t).$$

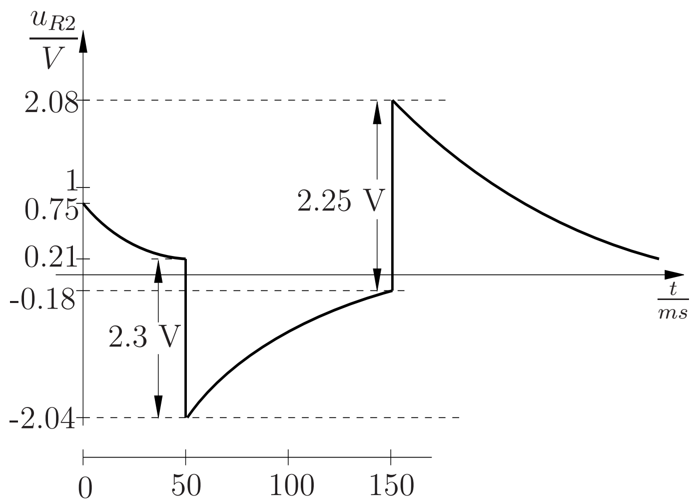


Abbildung L12.11: zu L12.3: Zeitverlauf

Für die beiden ersten Zeitbereiche findet man

$$
\begin{aligned}
0 \leq t < \frac{T}{2}: \quad & u_{\text{in}}(t) = 0\,\text{V}, \quad t_0 = 0\,\text{s}, \quad u_C(0\,\text{s}) = 0\,\text{V}, \\
& u_{\text{in}}(t) = u_C(t_0), \quad \Rightarrow u_C(t) = 0\,\text{V}, \\
& u_C(t) \text{ ändert sich nicht.} \\
\frac{T}{2} \leq t < T: \quad & u_{\text{in}}(t) = U, \quad t_0 = \frac{T}{2}, \quad u_C(T/2) = 0\,\text{V}, \\
& \tau = RC > 0, \quad t_\infty \to +\infty\,\text{s}, \\
& \text{hypothetischer Fixpunkt:} \quad u_C(t_\infty) = B\tau v_0 = U, \\
& u_C(t) = U + [0\,\text{V} - U] \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}\right). \\
& \text{Mit } T = 2RC = 2\tau \text{ erhält man} \\
& u_C(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau}\right)\right) U, \\
& \text{die Spannung an der Kapazität steigt.}
\end{aligned}
$$

Zum Zeitpunkt T ist die Spannung an der Kapazität

$$
u_C(T) = \left(1 - \exp\left(-\frac{T-\tau}{\tau}\right)\right) U = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) U.
$$

Allgemein findet man

$$\begin{aligned}
kT \leq t < kT + \frac{T}{2}, k \in \mathbb{N}_0: \quad & u_{\text{in}}(t) = 0\,\text{V}, \quad \Rightarrow u_{\text{in}}(t) \leq u_C(t), \\
& \Rightarrow u_C(t) \text{ konstant.} \\
kT - \frac{T}{2} \leq t < kT, k \in \mathbb{N}: \quad & u_{\text{in}}(t) = U, \quad \Rightarrow u_{\text{in}}(t) > u_C(t), \quad t_0 = t_{k,0} = kT - \frac{T}{2}, \\
& u_C(t) = U + [u_C(t_{0,k}) - U] \exp\left(-\frac{t - t_{0,k}}{\tau}\right), \\
& \Rightarrow u_C(t) \text{ steigt.}
\end{aligned}$$

Abbildung L12.12 zeigt den Verlauf von u_{in}, u_C und u_1 über die Zeit.

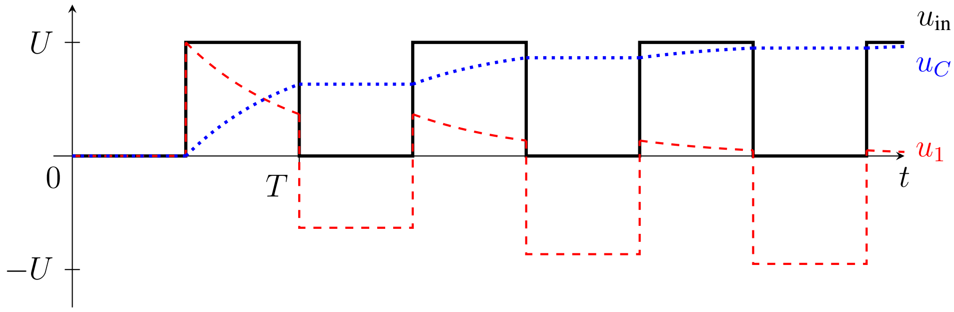


Abbildung L12.12: Zeitverlauf an der ersten Stufe des Spannungsvervielfachers

b) Der Zeitverlauf von $u_1(t) = u_{\text{in}}(t) - u_C(t)$ ist in Abbildung L12.12 gezeigt. Während $u_C(t)$ immer mehr gegen $u_C(t_\infty) = U$ konvergiert, nähert sich $u_1(t)$ immer mehr $u_{1,\infty}(t) = -u_{\text{in}}\left(t - \frac{T}{2}\right)$. Betrachtet man nun die zweite Stufe des Spannungsvervielfachers mit $u_{1,\infty}(t)$ als Eingang, erkennt man, dass die Spannung an der Kapazität wiederum gegen U konvergiert und der Ausgang sich $u_{\text{in}}(t)$ nähert. Alle Kapazitäten in der Schaltung werden sich mit der Zeit so aufladen, dass an Ihnen die Spannung U abfällt und damit wird der Ausgang des Spannungsvervielfachers zu $u_{\text{out}}(t_\infty) = 4U$. Die Spannungen am Spannnungsvervielfacher für $t \to \infty\,\text{s}$ und mit $\hat{u}_{\text{in}}(t) = u_{\text{in}}\left(t - \frac{T}{2}\right)$ sind in Abbildung L12.13 gezeigt.

L12.5 Allgemeine Erregung

Aus der allgemeinen Gleichung $\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau}u_C(t) + \frac{1}{\tau}u_0(t)$ ist die Gleichung

$$u_C(t) = u_C(t_0) \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} u_0(t') \exp\left(-\frac{t - t'}{\tau}\right) \mathrm{d}t'$$

durch Einsetzen herzuleiten.
Setzt man $t = t_0$ ein, so gilt $u_C(t = t_0) = u_C(t_0)$
Ansonsten gilt:

$$u_C(t) = u_C(t_0) \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_{t_0}^{t} u_0(t') \exp\left(\frac{t'}{\tau}\right) \mathrm{d}t'$$

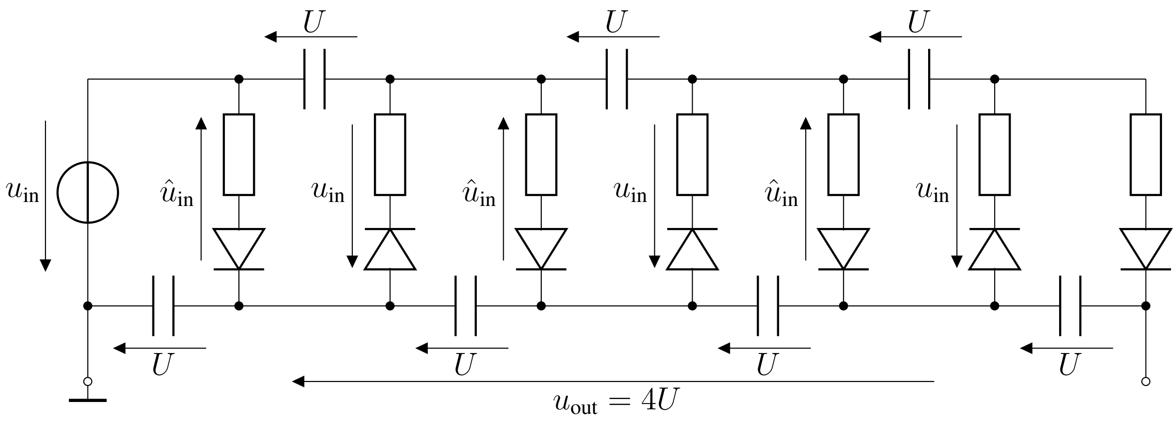


Abbildung L12.13: Spannungsvervielfacher für $t \to \infty\,\mathrm{s}$

Differenziert man diesen Term nach der Produktregel, und mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^{t} f(t')\,\mathrm{d}t' = f(t)$ (f ist stetig) erhält man:

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau}u_C(t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \left(-\frac{1}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\int_{t_0}^{t} u_0(t')\exp\left(\frac{t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t' +$$

$$+\left(\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\left(\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)u_0(t)\right)$$

Nach Einsetzen von $\int_{t0}^{t}\frac{1}{\tau}u_0(t')\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\,\mathrm{d}t' = u_C(t) - u_C(t_0)\exp\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ folgt

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau}u_C(t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)u_0(t')\,\mathrm{d}t'\right] + \frac{1}{\tau}u_0(t) =$$

$$= -\frac{1}{\tau}u_C(t) + \frac{1}{\tau}u_0(t)$$

Der Beweis für eine Induktivität wird durch Anwendung des Dualitätsprinzips geführt.

$$u_C(t) \to i_L(t), \quad u_0(t) \to i_0(t)$$

L12.6 Lineare Schaltung ersten Grades mit allgemeiner Erregung

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= i_L(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\tau}i_0(t')\mathrm{e}^{-\frac{t-t'}{\tau}}\,\mathrm{d}t' \\
&= i_L(0)\mathrm{e}^{-\frac{t-0}{\tau}} + \int_{0}^{t}\frac{1}{\tau}I_0\mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}}\cos(\omega t')\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{\frac{t'}{\tau}}\,\mathrm{d}t' \\
&= I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_0}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_{0}^{t}\cos(\omega t')\,\mathrm{d}t' = I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t')\right]_0^t\right) \\
&= I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega\tau}\right)
\end{aligned}$$

L12.7 Parasitärer Effekt

a) Siehe ESB in Abbildung L12.14. Bei einem idealen Kondensator müsste der Strom unendlich groß sein. Aus $i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1\,\mathrm{s}} \to \infty$ folgt $i_C(t = 1\,\mathrm{s}) \to \infty$.

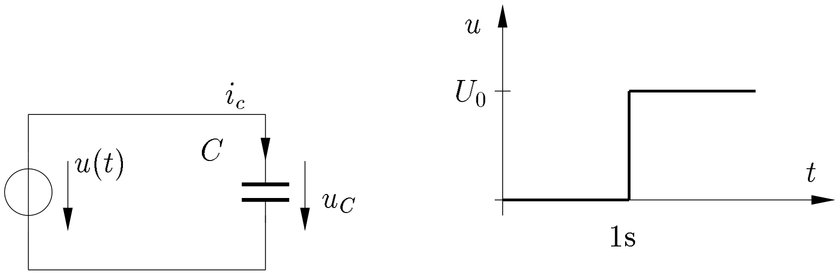


Abbildung L12.14: zu L12.7: ESB, Zeitverlauf

b) Ein realer Kondensator besitzt Leitungswiderstände. Somit existiert kein Spannungssprung. Der Aufladevorgang vollzieht sich über einen kleinen Ladewiderstand zwar sehr rasch, so dass der Strom groß, aber nicht unendlich wird.

c) Siehe ESB in Abbildung L12.15. Mit $\tau = RC,$ und $u_C(t_1) = 0\mathrm{V}$ und $u_C(t_\infty) = U_0$ ergibt sich für Strom und Spannung:

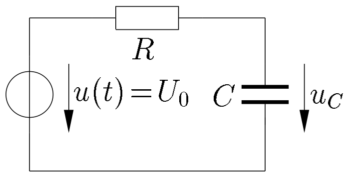


Abbildung L12.15: zu L12.7 c: ESB

$$u_C(t) = u_C(t_\infty) + [u_C(t_1) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right)$$

$$i_C(t) = C\left(-\frac{1}{\tau}\right) [u_C(t_1) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right)$$

d) $i_R = i_C, \quad u_R = u - u_C, \quad i = \frac{u_R}{R}$
Siehe Zeitverlauf in Abbildung L12.16.

L12.8 Integrierer und Differenzierer

a) Siehe Abbildung L12.17.
Der Op-Amp arbeitet im linearen Bereich, d.h. $u_{in} = u_C$.
Ferner gilt $i_C = i_R, \quad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ und $u_{out} = -u_R = -(R\, i_C) = -RC\frac{\mathrm{d}u_{in}}{\mathrm{d}t}$.
Die Schaltung arbeitet somit als Differenzierer.

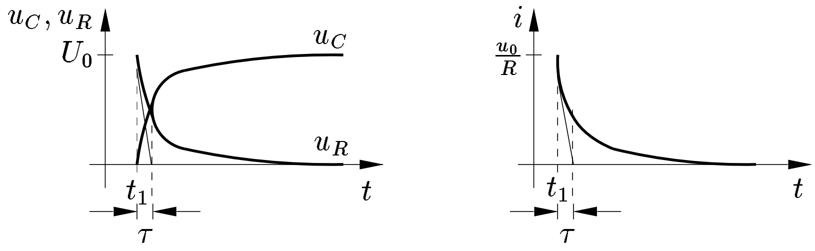


Abbildung L12.16: zu L12.1 d: Zeitverlauf

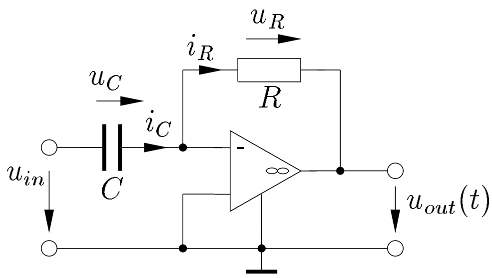


Abbildung L12.17: zu L12.8: Differenzierer

b) Wenn man den Kondensator mit dem Widerstand vertauscht, so ergibt sich das ESB in Abbildung L12.18.

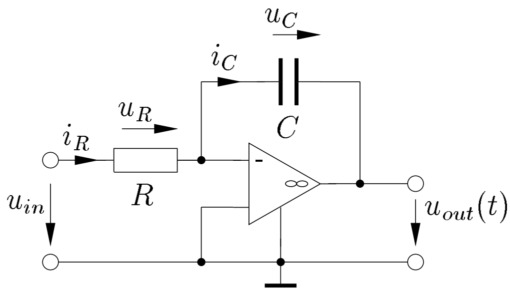


Abbildung L12.18: zu L12.8 b: Integrierer

Der Op-Amp arbeitet im linearen Bereich, d.h. $u_{in} = u_R$.
Ferner gilt $i_C = i_R = \frac{u_R}{R}$, und $u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ für $t \geq t_0$

$$u_{out} = -u_C = -u_C(t_0) - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_R(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -u_C(t_0) - \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} u_R(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -u_C(t_0) - \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} u_{in}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Die Schaltung arbeitet somit als Integrierer.

L12.9 Lineare RC-Schaltungen ersten Grades mit Schalter

a) Abbildung L12.19 und L12.20
Man unterteilt in drei Intervalle und berechnet die Spannungen und Ströme (siehe Übung 12.2).

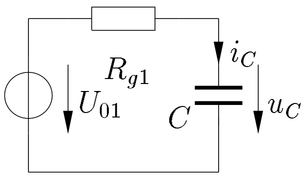


Abbildung L12.19: ESB für geöffneten Schalter S

$$R_{g1} = R_1 + R_2 \| R_3 = R + \frac{R^2}{R+R} = \frac{3}{2}R$$
$$U_{01} = \frac{R_2}{R_2+R_3}U = \frac{1}{2}U$$
$$\tau_1 = \frac{3}{2}RC$$

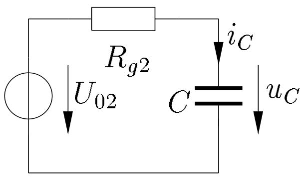


Abbildung L12.20: ESB für geschlossenen Schalter S

$$R_{g2} = R_1 + R_2 \| R_3 \| R_4 = R + \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}-\frac{4}{R}} = \frac{1}{2}R$$
$$U_{02} = \frac{R_2}{R_2+R_3\|R_4}U = \frac{RU}{R-\frac{1}{3}R} = \frac{3}{2}U$$
$$\tau_2 = \frac{1}{2}RC$$

$$[t_0,t_1): \quad u_C(t) = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right)} \qquad i_C(t) = \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) C\frac{U}{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right)}$$

$$[t_1,t_2): \quad u_C(t) = \frac{3}{2}U + \left[u_C(t_1) - \frac{3}{2}U\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)} \qquad i_C(t) = \left(-\frac{1}{\tau_2}\right) C\left[u_C(t_1) - \frac{3}{2}U\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)}$$

$$[t_2,t_\infty): \quad u_C(t) = \frac{1}{2}U + \left[u_C(t_2) - \frac{1}{2}U\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_2}{\tau_2}\right)} \qquad i_C(t) = \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) C\left[u_C(t_2) - \frac{1}{2}U\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_2}{\tau_1}\right)}$$

b) Nach einer Zeitkonstanten τ hat sich $u_C(t)$ von $u_C(t_0)$ bereits um 63% von $u_C(t_0) - u_C(t_\infty)$ in $u_C(t_\infty)$ Richtung bewegt (Siehe Abbildung L12.21). Damit berechnet man die Randwerte zum

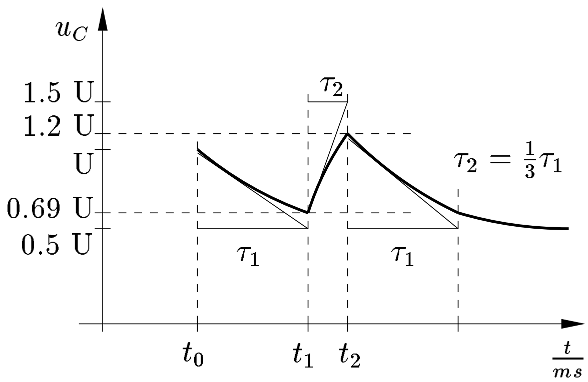


Abbildung L12.21: Zeitverlauf $u_C(t)$

Skizzieren des Stromes (siehe Abbildung L12.22).

$$\begin{array}{lll}
u_C(t_0) = U & & i_c^+(t_0) = -0.333\frac{U}{R} \\
u_C(t_1) = 0.684U & i_c^-(t_1) = -0.123\frac{U}{R} & i_c^+(t_1) = 1.63\frac{U}{R} \\
u_C(t_2) = 1.20U & i_c^-(t_2) = 0.600\frac{U}{R} & i_c^+(t_2) = -0.467\frac{U}{R} \\
u_C(t_\infty) = 0.5U & i_c^-(t_\infty) = 0\frac{U}{R} &
\end{array}$$

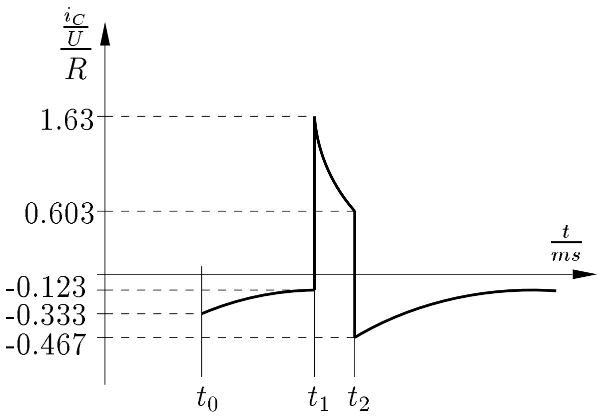


Abbildung L12.22: Zeitverlauf $i_C(t)$

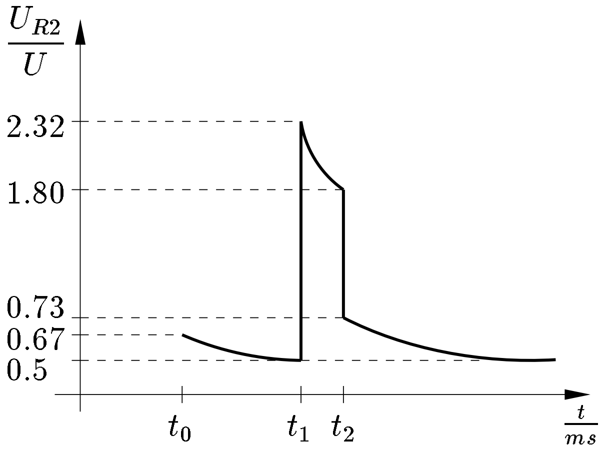


Abbildung L12.23: Zeitverlauf $u_{R2}(t)$

c)

$$u_{R2}(t) = u_C + u_{R1} = u_C + Ri_C$$

d) Siehe Abbildung L12.23.

$$\begin{array}{ll}
u_{R2}(t_0) = 0.667U & u_{R2}(t_\infty) = 0.5U \\
u_{R2}^-(t_1) = 0.562U & u_{R2}^+(t_1) = 2.32U \\
u_{R2}^-(t_2) = 1.80U & u_{R2}^+(t_2) = 0.733U
\end{array}$$

$$[t_0, t_1): \quad u_{R2}(t) = \frac{1}{2}U + \frac{1}{6}U \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right)$$

$$[t_1, t_2): \quad u_{R2}(t) = \frac{3}{2}U - \left[u_C(t_1) - \frac{3}{2}U\right] \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)$$

$$[t_2, t_\infty): \quad u_{R2}(t) = \frac{1}{2}U + \frac{1}{3}\left[u_C(t_2) - \frac{1}{2}U\right] \exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau_1}\right)$$

L12.10 Lineare RL-Schaltungen ersten Grades mit Schalter

a) Abbildung L12.24 und L12.25

Man unterteilt nun wieder in drei Intervalle und berechnet die Spannungen und Ströme (siehe Aufgabe 12.1)

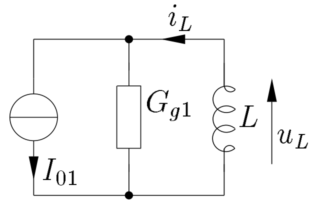


Abbildung L12.24: zu L12.10: ESB für geöffneten Schalter S

$$G_{g1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2R}$$
$$I_{01} = \frac{U_0}{R_2} - I_0 = -\frac{I_0}{2}$$
$$\tau_1 = G_{g1}L = \frac{L}{2R}$$

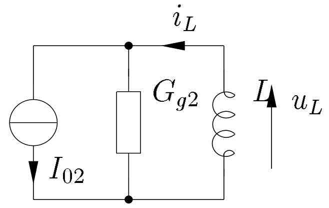


Abbildung L12.25: zu L12.10: ESB für geschlossenen Schalter S

$$G_{g2} = G_1 + G_2 = -\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = -\frac{1}{2R}$$
$$I_{02} = \frac{U_0}{R_2} - I_0 = -\frac{I_0}{2}$$
$$\tau_2 = G_{g2}L = -\frac{L}{2R}$$

$$\begin{array}{lll}
[t_0, t_1): & i_L(t) = -\frac{1}{2}I_0 + \frac{3}{2}I_0\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right)} & u_L(t) = 3(-R)I_0\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right)} \\
[t_1, t_2): & i_L(t) = -\frac{1}{2}I_0 + \left[i_L(t_1) + \frac{1}{2}I_0\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)} & u_L(t) = 2R\left[i_L(t_1) + \frac{1}{2}I_0\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)} \\
[t_2, t_\infty): & i_L(t) = -\frac{1}{2}I_0 + \left[i_L(t_2) + \frac{1}{2}I_0\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_1}{\tau_1}\right)} & u_L(t) = -2R\left[i_L(t_2) + \frac{1}{2}I_0\right]\mathrm{e}^{\left(-\frac{t-t_2}{\tau_1}\right)}
\end{array}$$

b) Siehe Abbildung L12.26.

$$\begin{array}{lll}
i_L(t_0) = I_0 & u_L(t_0) = -3I_0R & \\
i_L(t_1) = 0.052I_0 & u_L^-(t_1) = -3I_0R\frac{1}{\mathrm{e}} = -1.10I_0R & u_L^+(t_1) = 3I_0R\frac{1}{\mathrm{e}} = 1.10I_0R \\
i_L(t_2) = -\frac{I_0}{2} + 0.552I_0\mathrm{e}^1 = I_0 & u_L^-(t_2) = 3I_0R & u_L^+(t_2) = -3I_0R \\
i_L(t_\infty) = -0.5I_0 & u_L(t_\infty) = 0I_0R &
\end{array}$$

c)

$$[t_0, t_1): \quad i_{R1} = 0$$

$$[t_1, t_2): \quad i_{R1} = -\frac{u_L}{R}$$

$$[t_2, t_\infty): \quad i_{R1} = 0$$

d) Siehe Abbildung L12.27.

L12.11 Dynamischer Pfad (1)

a) Es ergibt sich der dynamischen Pfad in Abbildung L12.28.

In der vorliegenden Schaltung gilt $i = -i_C$, $u = u_C$. Somit sind die Stellen für $i = -i_C = 0 = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ stationär. Für $i < 0$ steigt u_C, und für $i > 0$ fällt u_C.

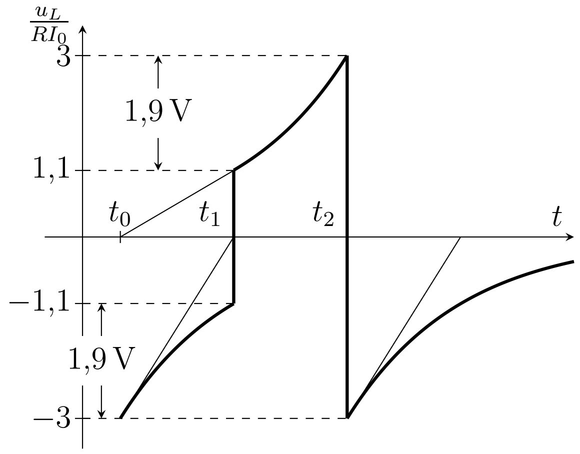


Abbildung L12.26: zu L12.10 b: Zeitverlauf $u_L(t)$

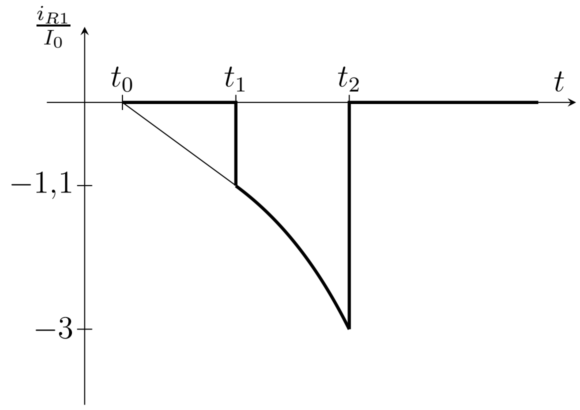


Abbildung L12.27: zu L12.10 d: Zeitverlauf $i_1(t)$

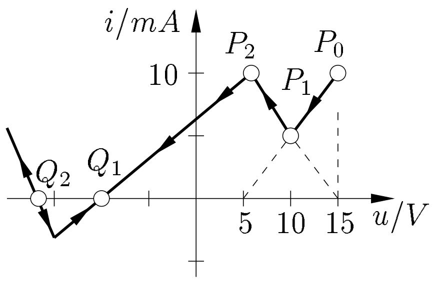
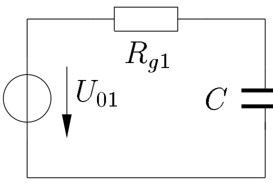


Abbildung L12.28: Dynamischer Pfad

Q_1: Es handelt sich um einen stabilen Gleichgewichtspunkt, da man bei einer kleinen Auslenkung wieder in den Punkt Q_1 hineinläuft.

Q_2: Es handelt sich um einen instabilen Gleichgewichtszustand, da man bei einer kleinen Auslenkung sofort aus dem Punkt hinausläuft.

b) Bei einer stückweise linearen Kennlinie unterteilt man in Intervalle: $[P_0, P1)$ (Abbildung L12.29), $[P_1, P_2)$ (Abbildung L12.30) und $[P_2, Q_1)$ (Abbildung L12.31).

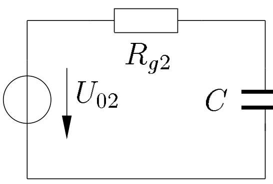


$R_{g1} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = 1\,\text{k}\Omega$
$U_{01} = 5\,\text{V}($ Leerlaufspannung $i = 0)$
$u_C(P_0) = 15\,\text{V}$
$\tau_1 = R_{g1}C = 1\,\text{ms}$

Abbildung L12.29: ESB 1 für $[P_0, P_1)$:

$$u_C(t) = 5\,\text{V} + 10\,\text{V}\exp\left(-\frac{t}{1\,\text{ms}}\right), \qquad i_C(t) = -10\text{mA}\exp\left(-\frac{t}{1\,\text{ms}}\right) \quad \text{für } t_0 \leq t < t_1$$

Nun kann man für $u_C(t_1) = 10\text{V}$ das Zeitintervall mit $t_0 = 0\text{s}$ bestimmen.
Aus $10\,\text{V} = u_C(t_1) = 5\,\text{V} + 10\,\text{V}\exp\left(-\frac{t_1}{1\,\text{ms}}\right)$ folgt $t_1 = \ln(2)\text{ms}$.

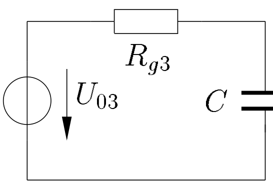


$R_{g2} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = -1\,\text{k}\Omega$
$U_{02} = 15\,\text{V}$
$u_C(t_1) = u_C(P_1) = 10\,\text{V}$
$\tau_2 = R_{g2}C = -1\,\text{ms}$

Abbildung L12.30: ESB 2 für $[P_1, P_2)$

$$u_C(t) = 15\,\text{V} - 5\,\text{V}\exp\left(\frac{t - t_1}{1\,\text{ms}}\right), \quad i_C(t) = -5\text{mA}\exp\left(\frac{t - t_1}{1\,\text{ms}}\right) \quad \text{für } t_1 \leq t \leq t_2$$

Nun kann man für $u_C(t_2) = 5\,\text{V}$ das Zeitintervall mit $t_1 = \ln(2)\text{ms}$ bestimmen.
Aus $5\,\text{V} = u_C(t_2) = 15\,\text{V} - 5\,\text{V}\exp\left(\frac{t_2 - t_1}{1\,\text{ms}}\right)$ folgt $t_2 - t_1 = \ln(2)\text{ms}$.



$R_{g3} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = 1,5\,\text{k}\Omega$
$U_0 = -10\,\text{V}$
$u_C(t_2) = u_C(P_2) = 5\,\text{V}$
$\tau_3 = R_{g3}C = 1,5\,\text{ms}$

Abbildung L12.31: ESB 3 für $[P_2, Q_1)$:

$$u_C(t) = -10\,\text{V} + 15\,\text{V}\exp\left(-\frac{t - t_2}{1{,}5\,\text{ms}}\right) \quad i_C(t) = -10\text{mA}\exp\left(-\frac{t - t_2}{1{,}5\,\text{ms}}\right) \quad \text{für } t_2 \leq t \leq t_\infty$$

Damit lässt sich der zeitliche Verlauf in Abbildung L12.32 darstellen:

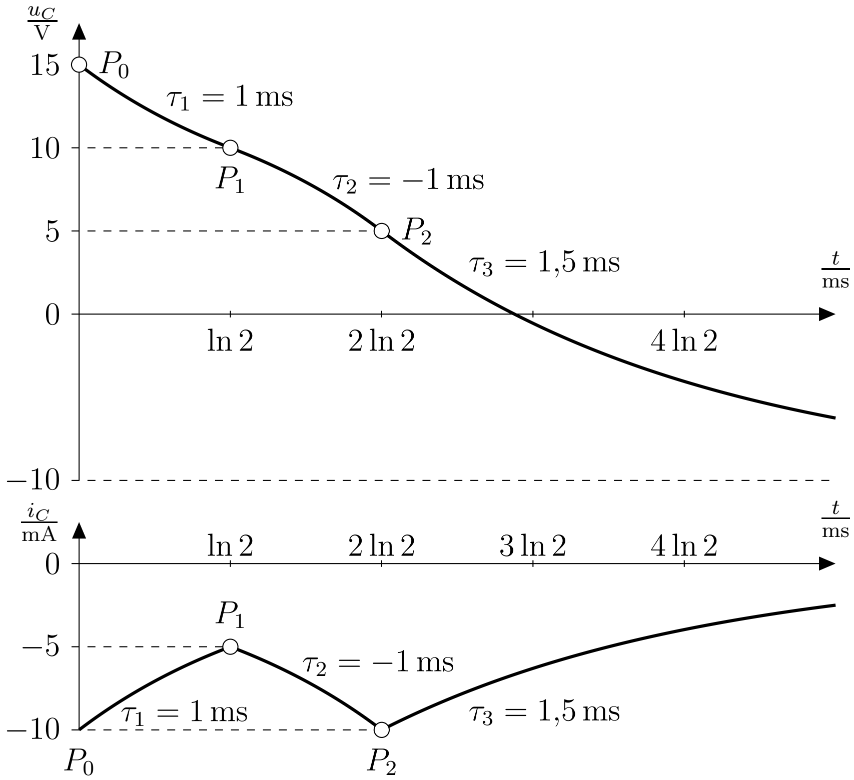


Abbildung L12.32: Zeitverlauf von u_C und i_C

L12.12 Dynamischer Pfad (2)

a) Es ergibt sich der dynamische Pfad in Abbildung L12.33. In der vorliegenden Schaltung gilt $u = -u_L$, $i = i_L$.
Somit sind die Stellen für $u = -u_L = 0 = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ stationär.
Für $u < 0$ steigt i_L, und für $u > 0$ fällt i_L.

Q_1: Es handelt sich um einen stabilen Gleichgewichtspunkt.

Q_2: Es handelt sich um einen instabilen Gleichgewichtszustand.

b) Bei einer stückweise linearen Kennlinie unterteilt man in Intervalle (Abbildung L12.34, L12.35 und L12.36).

$$i_L = 10\,\mathrm{mA} + 10\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t}{1\,\mu\mathrm{s}}\right), \quad u_L(t) = -10\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t}{1\,\mu\mathrm{s}}\right) \quad \text{für} \quad t_0 \le t < t_1$$

Nun kann man für $i_L(t_1) = 15\,\mathrm{mA}$ das Zeitintervall mit $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ bestimmen.
Aus $15\,\mathrm{mA} = i_L(t_1) = 10\,\mathrm{mA} + 10\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t_1}{1\,\mu\mathrm{s}}\right)$ folgt $t_1 = \ln(2)\,\mu\mathrm{s}$.

$$i_L(t) = 20\,\mathrm{mA} - 5\,\mathrm{mA}\exp\left(\frac{t-t_1}{1\,\mu\mathrm{s}}\right), \quad u_L(t) = -5\,\mathrm{V}\exp\left(\frac{t-t_1}{1\,\mu\mathrm{s}}\right) \quad \text{für } t_1 \le t \le t_2$$

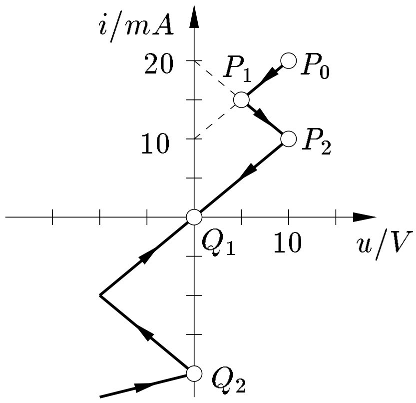


Abbildung L12.33: Dynamischer Pfad

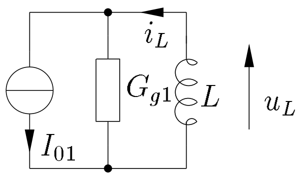


Abbildung L12.34: ESB 1 für $[P_0, P_1)$

$G_{g1} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = 1\,\mathrm{mS}$
$I_{01} = 10\,\mathrm{mA}$
$i_L(P_0) = 20\,\mathrm{mA}$
$\tau_1 = G_{g1}L = 1\,\mu\mathrm{s}$

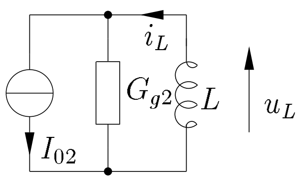


Abbildung L12.35: ESB 2 für $[P_1, P_2)$

$G_{g2} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = -1\,\mathrm{mS}$
$I_{02} = 20\,\mathrm{mA}$
$i_L(P_1) = 15\,\mathrm{mA}$
$\tau_2 = G_{g2}L = -1\,\mu\mathrm{s}$

Nun kann man für $i_L(t_2) = 10\,\mathrm{mA}$ das Zeitintervall mit $t_1 = \ln(2)\,\mu\mathrm{s}$ bestimmen. Aus $10\,\mathrm{mA} = i_L(t_2) = 20\,\mathrm{mA} - 5\,\mathrm{mA}\exp\left(\frac{t_2-t_1}{1\,\mu\mathrm{s}}\right)$ folgt $t_2 = 2\ln(2)\,\mu\mathrm{s}$.

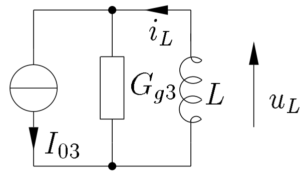


Abbildung L12.36: ESB 3 für $[P_2, Q_1)$

$G_{g3} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = 1\,\mathrm{mS}$
$I_{03} = 0\,\mathrm{mA}$
$i_L(P_2) = 10\,\mathrm{mA}$
$\tau_3 = G_{g3}L = 1\,\mu\mathrm{s}$

$$i_L(t) = 10\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t-t_2}{1\,\mu\mathrm{s}}\right), \quad u_L(t) = -10\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t-t_2}{1\,\mu\mathrm{s}}\right) \quad \text{für } t_2 \leq t \leq t_\infty$$

Damit lässt sich der zeitliche Verlauf wie in Abbildung L12.37 darstellen.

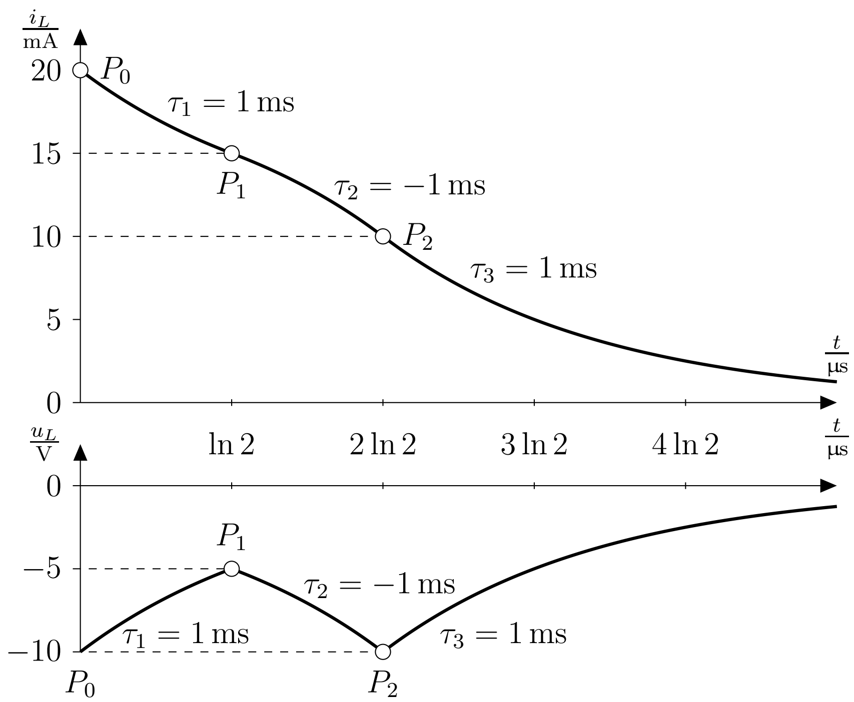


Abbildung L12.37: zu L12.12 d: Zeitverlauf i_L

L12.13 Sprungphänomen (1)

Siehe Abbildung L12.38.

a) Kennlinie für S in Stellung 1:
Für die Gleichgewichtspunkte gilt:
stabil: —
instabil: Q_1, Q_2, Q_3
tote Punkte T_1, T_2, T_3, T_4

b) Kennlinie für S in Stellung 2:
Für die Gleichgewichtspunkte gilt:
stabil: —
instabil: Q_1, Q_2
tote Punkte T_1, T_2

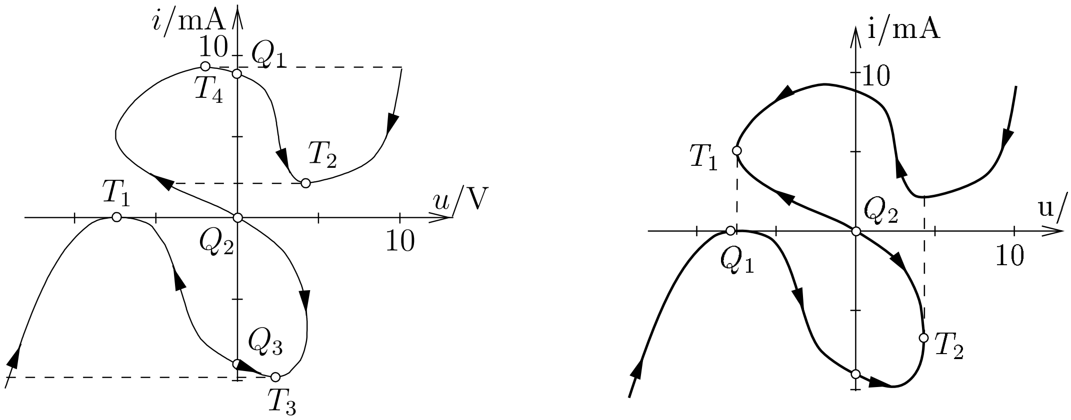


Abbildung L12.38: zu L12.13: Zeitverläufe u-i

L12.14 Sprungphänomen (2)

a) Es ergibt sich der dynamische Pfad in Abbildung L12.39.

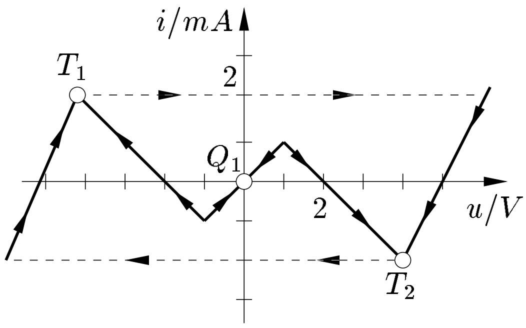


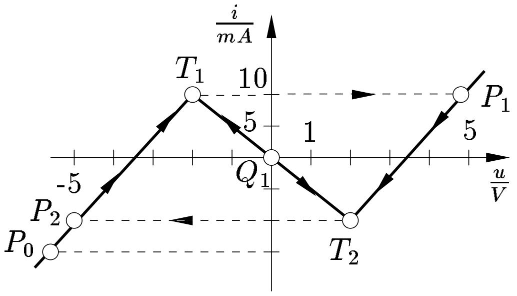
Abbildung L12.39: zu L12.14 Dynamischer Pfad u-i

Für die Gleichgewichtspunkte gilt:
stabil: Q_1
tote Punkte T_1, T_2.

b) Wenn $|i_L(t_0)| > 1\text{mA}$ ist, arbeitet die Schaltung als Relaxationsoszillator, da der stabile Gleichgewichtszustand nicht mehr erreicht werden kann.

L12.15 Sprungphänomen (3)

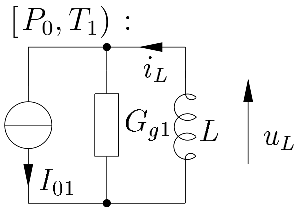
a) Es ergibt sich der dynamische Pfad in Abbildung L12.40.



Für die Gleichgewichtspunkte gilt:
instabil: Q_1
tote Punkte T_1, T_2.

Abbildung L12.40: zu L12.15: Dynamischer Pfad u-i

b) Bei einer stückweise linearen Kennlinie unterteilt man in Intervalle (Abbildung L12.41):



$G_{g1} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{20}{3}$ mS
$I_{01} = 23{,}3\,\mathrm{mA}$
$i_L(P_0) = -15\,\mathrm{mA}$
$\tau_1 = G_{g1}L = 66{,}7\,\mu\mathrm{s}$

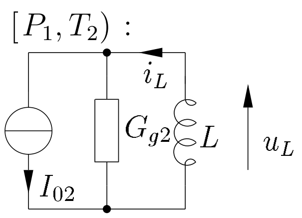
Abbildung L12.41: zu L12.15: P_0, T_1

$$i_L(t) = 23{,}3\,\mathrm{mA} - 38{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right), \quad u_L(t) = 5{,}75\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad \text{für } t_0 \le t < t_1$$

Nun kann man für $i_L(t_1) = 10\,\mathrm{mA}$ das Zeitintervall mit $t_0 = 0\,\mathrm{second}$ bestimmen.

Aus $10\,\mathrm{mA} = i_L(t_1) = i_L(T_1) = 23{,}3\,\mathrm{mA} - 38{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t_1}{\tau_1}\right)$ folgt $t_1 = 70{,}4\,\mu\mathrm{s}$.

$[T_1, P_1)$: In diesem Intervall bleibt der Strom gleich, die Spannung fällt jedoch zum Zeitpunkt t_1 sprunghaft von $u_L = 2\,\mathrm{V}$ auf $u_L = -5\,\mathrm{V}$ ab (Abbildung L12.42).



$G_{g2} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{20}{3}$ mS
$I_{02} = -23{,}3\,\mathrm{mA}$
$i_L(T_1) = 10\,\mathrm{mA}$
$\tau_2 = G_{g2}L = 66{,}7\,\mu\mathrm{s}$

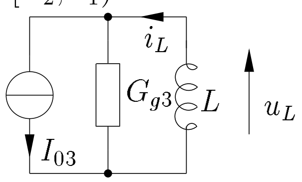
Abbildung L12.42: zu L12.15: P_1, T_2

$$i_L(t) = -23{,}3\,\mathrm{mA} + 33{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right), \quad u_L(t) = -5\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right) \quad \text{für } t_1 \le t < t_2$$

Nun kann man für $i_L(t_2) = -10\,\mathrm{mA}$ das Zeitintervall mit $t_1 = 70{,}4\,\mu\mathrm{s}$ bestimmen.

Aus $-10\,\mathrm{mA} = i_L(t_2) = i_L(T_2) = -23{,}3\,\mathrm{mA} + 33{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t_2-t_1}{\tau_2}\right)$ folgt $t_2 = 131{,}5\,\mu\mathrm{s}$.

$[T_2, P_2)$: In diesem Intervall bleibt der Strom gleich, die Spannung steigt jedoch zum Zeitpunkt t_2 sprunghaft von $u_l = -2\,\mathrm{V}$ auf $u_L = 5\,\mathrm{V}$ an.



$G_{g3} = G_{g1} = \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{20}{3}\,\mathrm{mS}$
$I_{03} = I_{01} = 23{,}3\,\mathrm{mA}$
$i_L(t_2) = -10\,\mathrm{mA} \neq i_L(P_0)$
$\tau = \tau_1 = G_{g1}L = 66{,}7\,\mu\mathrm{s}$

Abbildung L12.43: zu L12.15: P_2, T_1

$$i_L(t) = 23{,}3\,\mathrm{mA} - 33{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau_1}\right), \quad u_L(t) = 5\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau_1}\right) \quad \text{für } t_2 \leq t < t_3$$

Nun kann man für $i_L(t_2) = 10\,\mathrm{mA}$ das Zeitintervall mit $t_2 = 131{,}5\,\mu\mathrm{s}$ bestimmen.

Aus $10\,\mathrm{mA} = i_L(t_3) = i_L(T_2) = 23{,}3\,\mathrm{mA} - 33{,}3\,\mathrm{mA}\exp\left(-\frac{t_3-t_2}{\tau_1}\right)$ folgt $t_3 = 193\,\mu\mathrm{s}$.

Nach dem Zeitpunkt t_3 erfolgt eine periodische Wiederholung des Kennliniendurchlaufs. Damit lässt sich der zeitliche Verlauf gemäß Abbildung L12.44 darstellen.

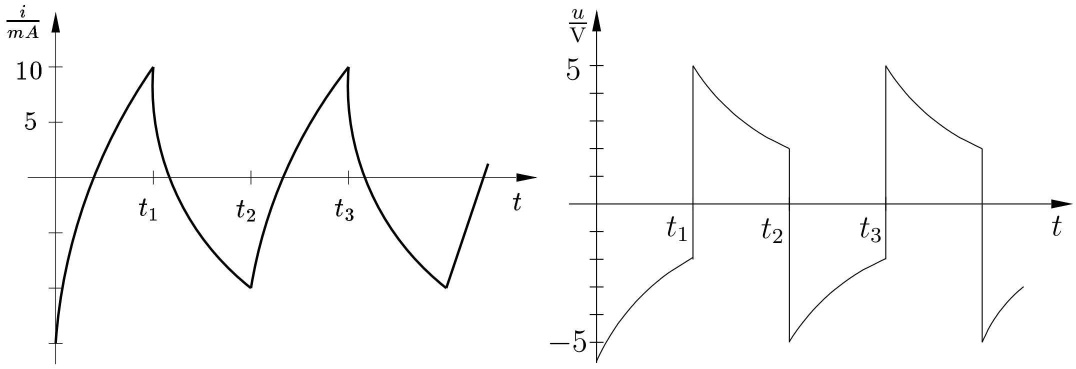


Abbildung L12.44: zu L12.15b: Zeitverlauf $i(t)$

c) Die Frequenz des Oszillators ergibt sich zu $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_3-t_1} = 8{,}2\,\mathrm{kHz}$.

L12.16 Funktionsgenerator

a) Der erste Operationsverstärker ist ein nicht invertierender Schmitt-Trigger oder Komparator. Mit

$$i_0 = \frac{1}{R_0}(u_0 - u_d), \quad u_1 = u_d - 2R_0 i_0 = u_d - 2(u_0 - u_d) = 3u_d - 2u_0,$$

ergibt sich in den drei stückweise linearen Bereichen des Operationsverstärkers

$$\begin{aligned}
\text{streng linear:} \quad & u_d = 0, \quad u_1 = -2u_0, \quad \text{für} \quad |u_0| \leq \frac{U_\text{sat}}{2} \Leftrightarrow |u_1| \leq U_\text{sat}, \\
\text{positive Sättigung:} \quad & u_d > 0, \quad u_1 = U_\text{sat}, \quad \text{für} \quad u_0 > -\frac{U_\text{sat}}{2} \Leftrightarrow 0 < 3u_d = U_\text{sat} + 2u_0, \\
\text{negative Sättigung:} \quad & u_d < 0, \quad u_1 = -U_\text{sat}, \quad \text{für} \quad u_0 < \frac{U_\text{sat}}{2} \Leftrightarrow 0 > 3u_d = -U_\text{sat} + 2u_0.
\end{aligned}$$

Der zweite Operationsverstärker ist ein Integrierer. Es gilt

$$i_C = i_1 + i_2 = C\dot{u}_C = -C\dot{u}_0, \quad i_1 = \begin{cases} 0 & \text{für } u_1 < 0 \\ \frac{1}{R_1}u_1 & \text{für } u_1 \geq 0 \end{cases}, \quad i_2 = \frac{1}{R}u_1,$$

und damit

$$u_0(t) = \begin{cases} u_0(t_0) - \frac{1}{RC}\int_{t_0}^t u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \text{für } u_1 < 0,\ |u_0| \leq U_\text{sat}, \\ u_0(t_0) - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{C}\int_{t_0}^t u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \text{für } u_1 \geq 0,\ |u_0| \leq U_\text{sat}. \end{cases}$$

b) Mit $u = -u_0$ kann die Gleichung des Komparators umgeschrieben werden zu

$$u_1 = \begin{cases} U_\text{sat} & \text{für } u < \frac{U_\text{sat}}{2}, \\ 2u & \text{für } |u| \leq \frac{U_\text{sat}}{2}, \\ -U_\text{sat} & \text{für } u > -\frac{U_\text{sat}}{2}. \end{cases}$$

Der Strom $i = -i_C$ findet sich als

$$i = -i_1 - i_2 = \begin{cases} -\frac{1}{R}u_1 & \text{für } u_1 < 0,\ |u_0| \leq U_\text{sat}, \\ -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)u_1 & \text{für } u_1 \geq 0,\ |u_0| \leq U_\text{sat}. \end{cases}$$

Die Kombination der beiden Operationsverstärker ergibt daher

$$\begin{aligned}
u_1 < 0 \wedge u > -\frac{U_\text{sat}}{2} &: \quad i = \frac{1}{R}U_\text{sat} && \text{für } -\frac{U_\text{sat}}{2} < u \leq U_\text{sat}, \\
u_1 < 0 \wedge |u| \leq \frac{U_\text{sat}}{2} &: \quad i = -\frac{2}{R}u && \text{für } -\frac{U_\text{sat}}{2} \leq u < 0, \\
u_1 \geq 0 \wedge |u| \leq \frac{U_\text{sat}}{2} &: \quad i = -2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)u && \text{für } \quad 0 \leq u \leq \frac{U_\text{sat}}{2}, \\
u_1 \geq 0 \wedge u < \frac{U_\text{sat}}{2} &: \quad i = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)U_\text{sat} && \text{für } -U_\text{sat} \leq u < \frac{U_\text{sat}}{2}.
\end{aligned}$$

Die u-i-Kennlinie mit $R_1 = R \neq 0$ ist in Abbildung L12.45 skizziert.

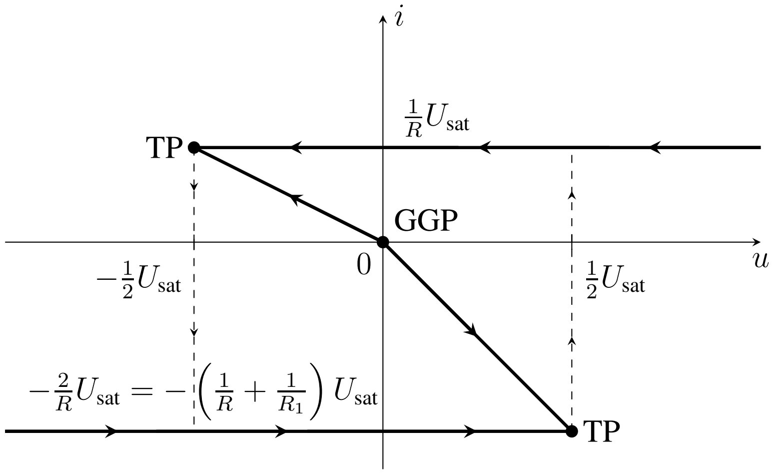


Abbildung L12.45: Dynamischer Pfad an der Funktionsgeneratorschaltung für $R = R_1 \neq 0$

c) Der Dynamische Pfad, die Totpunkte und der instabile Gleichgewichtspunkt sind für $R_1 = R \neq 0$ in Abbildung L12.45 eingezeichnet. Den Dynamischen Pfad erhält man da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = -\frac{1}{C}i(t)$ gilt. Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt, da nach einer inkrementellen Auslenkung der Dynamische Pfad nicht in den Ursprung zurück führt.

d) Durch die Wahl $R_1 \to \infty$, $R \neq 0$ gilt für den unteren Zweig aus Abbildung L12.45

$$i = -\frac{1}{R}U_{\text{sat}} = -\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)U_{\text{sat}},$$

die Kennlinie wird symmetrisch. Willkürlich wird in Punkt $(u = -U_{\text{sat}}/2, i = -U_{\text{sat}}/R)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ gestartet. Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = -\frac{1}{C}i(t)$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \frac{1}{RC}U_{\text{sat}}, \quad \Rightarrow u(t) = -\frac{1}{2}U_{\text{sat}} + \frac{1}{RC}U_{\text{sat}}(t-t_0) \quad \text{für } t_0 < t \leq t_1.$$

Zum Zeitpunkt t_1 wird der Punkt $(u = U_{\text{sat}}/2, i = -U_{\text{sat}}/R)$ erreicht.

$$u(t_1) = \frac{1}{2}U_{\text{sat}} = -\frac{1}{2}U_{\text{sat}} + \frac{1}{RC}U_{\text{sat}}(t_1-t_0), \quad \Rightarrow t_1 - t_0 = RC.$$

Punkt $(u = U_{\text{sat}}/2, i = -U_{\text{sat}}/R)$ ist ein Totpunkt, es folgt ein Sprung nach Punkt $(u = U_{\text{sat}}/2, i = U_{\text{sat}}/R)$ in Zeit $0\,\text{s}$. Bei einer Kapazität muss u_C stetig sein, nur i_C darf springen. Auf dem oberen Kennlinienzweig gilt $i(t) = \frac{1}{R}U_{\text{sat}}$ und daher

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = -\frac{1}{RC}U_{\text{sat}}, \quad \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}U_{\text{sat}} - \frac{1}{RC}U_{\text{sat}}(t-t_1) \quad \text{für } t_1 < t \leq t_2,$$
$$u(t_2) = -\frac{1}{2}U_{\text{sat}} = \frac{1}{2}U_{\text{sat}} - \frac{1}{RC}U_{\text{sat}}(t_2-t_1), \quad \Rightarrow t_2 - t_1 = RC.$$

Zum Zeitpunkt t_2 wird der Totpunkt $(u = -U_{\text{sat}}/2, i = U_{\text{sat}}/R)$ erreicht und es folgt ein Sprung nach $(u = -U_{\text{sat}}/2, i = -U_{\text{sat}}/R)$ in Zeit $0\,\text{s}$. Nun wiederholt sich der Verlauf (Siehe Abbildung L12.46).

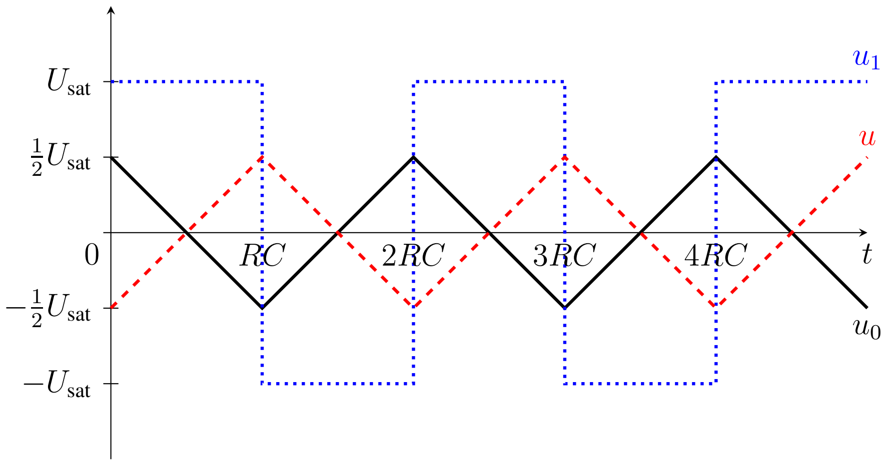


Abbildung L12.46: u, $u_0 = -u$ und u_1 am Funktionsgenerator für $R_1 \to \infty$, $R \neq 0$

e) Durch die Wahl $R_1 \to 0$, $R \neq 0$ geht der Strom des unteren Kennlinienzweiges gegen unendlich. Daher ändert sich auch die Spannung unendlich schnell. Abgeleitet von der Lösung aus d) erhält man

$$\text{für } t_0 < t \leq t_1: \quad i \to -\infty, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \to \infty, \quad \Rightarrow t_1 - t_0 \to 0.$$

Der Wechsel von $u = -U_{\text{sat}}/2$ nach $u = U_{\text{sat}}/2$ geschieht in Zeit $0\,\mathrm{s}$ (Siehe Abbildung L12.47).

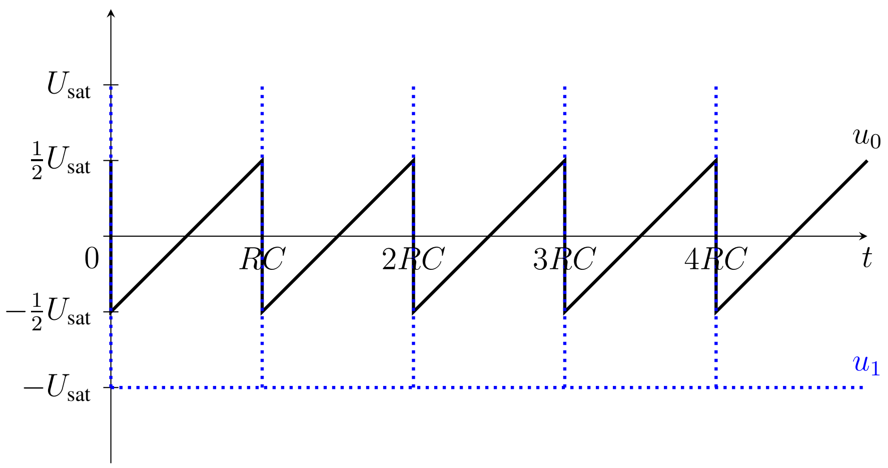


Abbildung L12.47: $u_0 = -u$ und u_1 am Funktionsgenerator für $R_1 \to 0$, $R \neq 0$

f) Mit $R_1 \to \infty$ verläuft u_0 nach einer Dreieckschwingung und u_1 nach einer Rechteckschwingung jeweils mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_2 - t_0} = \frac{1}{2RC}.$$

Mit $R_1 \to 0$ verläuft u_0 nach einer Sägezahnschwingung mit der Frequenz $f = \frac{1}{RC}$.

L12.17 Bistabile Schaltung

a) Die mögliche Ausgangsspannung der Operationsverstärkerschaltung ist in drei Bereiche zu unterteilen:

I Linearer Bereich $u_d = 0$

Mit $u = u_{Rb}$, $u_{Rc} = -u_{Ra}$, $i = \frac{u_{Rc}}{R_c}$ und $i_{Ra} = i_{Rb}$ ergibt sich

$$\frac{u}{i} = \frac{u_{Rb}R_c}{u_{Rc}} = \frac{u_{Rb}}{-u_{Ra}}R_c = -\frac{R_bR_c}{R_a} = -R$$

Für den Gültigkeitsbereich gilt: $-U_{\text{sat}} < u_{out} < U_{\text{sat}}$.

Mit $u_{out} = u_{Ra} + u_{Rb} = \frac{R_b+R_a}{R_b}u_{Rb} = \frac{R_b+R_a}{R_b}u = 2u$ folgt daraus:

$$\frac{-U_{\text{sat}}}{2} < u < \frac{+U_{\text{sat}}}{2}$$

II Positiver Sättigungsbereich $u_d > 0$ **und** $u_{out} = U_{\text{sat}}$

Es ergibt sich

$$u = u_{Rc} + U_{\text{sat}} = R_c i + U_{\text{sat}}$$

Für den Gültigkeitsbereich gilt: $u_d > 0$.

Mit $u_d = u_{Rb} - u$ und $u_{Rb} = \frac{R_b}{R_b+R_a}u_{out} = \frac{R_b}{R_b+R_a}U_{\text{sat}} = \frac{1}{2}U_{\text{sat}}$ folgt daraus

$$\frac{1}{2}U_{\text{sat}} - u > 0 \quad \text{und damit}$$

$$\frac{1}{2}U_{\text{sat}} > u$$

III Negativer Sättigungsbereich $u_d < 0$ **und** $u_{out} = -U_{\text{sat}}$

Es ergibt sich

$$u = u_{Rc} - U_{\text{sat}} = R_c i - U_{\text{sat}}$$

Für den Gültigkeitsbereich gilt: $u_d < 0$.

Mit $u_d = u_{Rb} - u$ und $u_{Rb} = \frac{R_b}{R_b+R_a}u_{out} = -\frac{1}{2}U_{\text{sat}}$ folgt daraus

$$-\frac{1}{2}U_{\text{sat}} - u < 0 \quad \text{und damit}$$

$$-\frac{1}{2}U_{\text{sat}} < u$$

b) Abbildung L12.48

Für die Gleichgewichtspunkte gilt:
stabil: Q_1, Q_3
instabil: Q_2

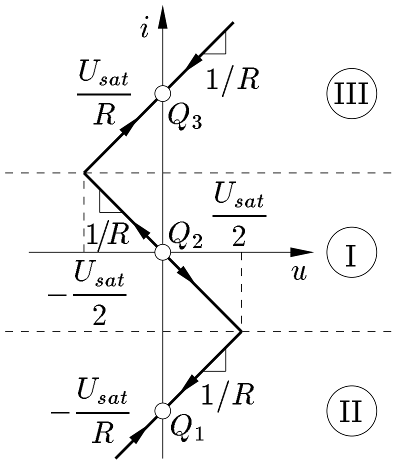


Abbildung L12.48: zu L12.17a, b: Dynamischer Pfad u-i

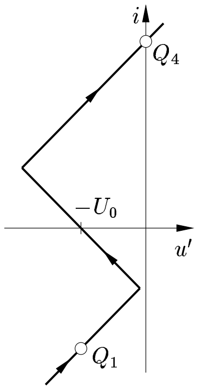


Abbildung L12.49: zu L12.17c: $t_1 \leq t \leq t_2$

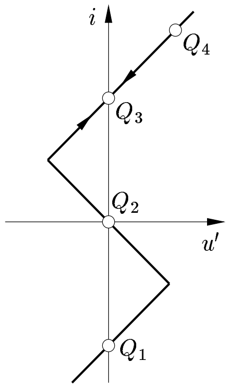


Abbildung L12.50: zu L12.17d: $t_2 \leq t \leq t_3$

c) und d) Abbildung L12.49 und L12.50

Für $t < t_1$ gilt der Gleichgewichtszustand Q_1 ($i(Q_1) < 0$). Für $t_1 \leq t < t_2$ gilt $u_s(t) = U_0$. Damit kommt es zu einer Verschiebung der Kennlinie nach links, da gilt $u' = u - u_s$. Es stellt sich der stabile Gleichgewichtszustand Q_4 ein.

Für $t_2 \leq t < t_3$ gilt $u_s(t) = 0$. Man erhält die ursprüngliche Kennlinie und es stellt sich der stabile Gleichgewichtszustand Q_3 ein.

e) und f) Abbildung L12.51 und L12.52

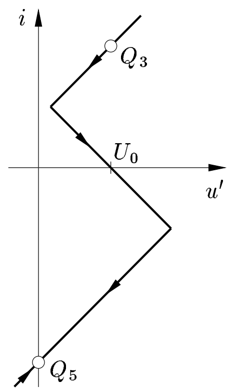


Abbildung L12.51: zu L12.17 e: $t_3 \leq t \leq t_4$

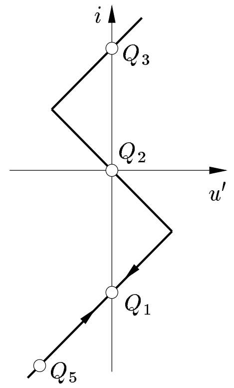


Abbildung L12.52: zu L12.17 f: $t \geq t_4$

Man geht nun vom Gleichgewichtszustand Q_3 aus.

Für $t_3 \leq t < t_4$ gilt $u_s(t) = -U_0$. Damit kommt es zu einer Verschiebung der Kennlinie nach rechts und es stellt sich der stabile Gleichgewichtszustand Q_5 ein.

Für $t \geq t_4$ gilt $u_s(t) = 0$. Man erhält die ursprüngliche Kennlinie und es stellt sich der stabile Gleichgewichtszustand Q_1 ein.

Durch den Triggerimpuls erfolgte ein Umschalten von dem Gleichgewichtszustand Q_3 zu Q_1.

g) Damit die Schaltung als Flipflop ordentlich arbeitet, müssen die Gleichgewichtszustände Q_4 und Q_5 erreicht werden. Somit muss gelten $U_0 > \frac{U_\text{sat}}{2}$. Die Umschaltzeit Δt muss mindestens so groß gewählt werden, dass der Punkt Q_2 durchlaufen wird.

h) Siehe Abbildung L12.53.

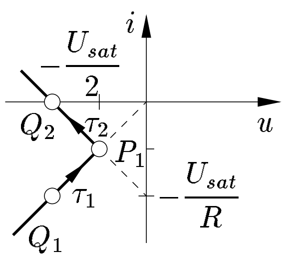


Abbildung L12.53: zu L12.17h: t_{min}

Bei einer stückweise linearen Kennlinie unterteilt man in Intervalle:
$[Q_1, P_1)$: Mit $\tau_1 = GL = \frac{L}{R}$, $i_L(t_1) = -\frac{U_{\text{sat}}}{R}$ und $i_L(t_\infty) = 0$ folgt:

$$i_L(t) = -\frac{U_{\text{sat}}}{R} \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right)$$

Nun kann man mit $i_L(t_1') = -\frac{U_{\text{sat}}}{2R}$ das Zeitintervall bestimmen.
Aus $i_L(P_1) = i_L(t_1') = -\frac{U_{\text{sat}}}{2R} = -\frac{U_{\text{sat}}}{R} \exp\left(-\frac{t_1' - t_1}{\tau_1}\right)$ folgt
$t_1' = t_1 + \tau_1(-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = t_1 + \tau_1 \ln(2)$
$[P_1, Q_2)$: Mit $\tau_2 = -GL = -\frac{L}{R}$, $i_L(t_1') = -\frac{U_{\text{sat}}}{2R}$ und $i_L(t_\infty) = -\frac{U_{\text{sat}}}{R}$ folgt:

$$i_L(t) = -\frac{U_{\text{sat}}}{R} + \frac{U_{\text{sat}}}{2R} \exp\left(-\frac{t - t_1'}{\tau_2}\right)$$

Nun kann man mit $i_L(t_2) = 0$ das Zeitintervall bestimmen.
Aus $i_L(Q_2) = i_L(t_2) = 0 = -\frac{U_{\text{sat}}}{R} + \frac{U_{\text{sat}}}{2R} \exp\left(-\frac{t_2 - t_1'}{\tau_2}\right)$ folgt
$t_2 = t_1' - \tau_2 \ln(2)$
Daraus ergibt sich das minimale Zeitintervall

$$\Delta t_{min} = t_2 - t_1 = \tau_1 \ln(2) - \tau_2 \ln(2) = 2\ln(2)\frac{L}{R}$$

i) Abbildung L12.54 und L12.55

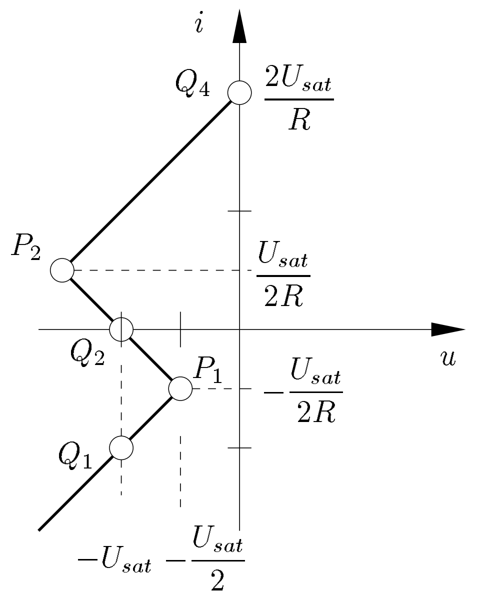


Abbildung L12.54: zu L12.17i: Dynamischer Pfad

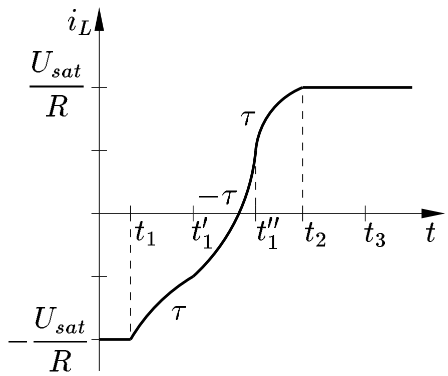


Abbildung L12.55: zu L12.17i: Stromverlauf $i_L(t)$

$$[Q_1, P_1) : t_1 \leq t < t_1'$$

Aus Aufgabe h) gilt: $t_1' = t_1 + \tau_1 \ln(2)$

$$[P_1, P_2) : t_1' \leq t < t_1''$$

$$i_L(t) = -\frac{U_\mathrm{sat}}{R} + \frac{U_\mathrm{sat}}{2R} \exp\left(-\frac{t - t_1'}{\tau_2}\right)$$

Nun kann man mit $i_L(t_1'') = \frac{U_\mathrm{sat}}{2R}$ das Zeitintervall bestimmen:
Aus $i_L(P_2) = i_L(t_1'') = \frac{U_\mathrm{sat}}{2R} = -\frac{U_\mathrm{sat}}{R} + \frac{U_\mathrm{sat}}{2R} \exp\left(-\frac{t_1''-t_1'}{\tau_2}\right)$ folgt:

$$t_1'' = t_1 + \frac{L}{R} (\ln(2) + \ln(3))$$

$$[P_2, Q_4) : t_1'' \leq t < t_2$$

Mit $\tau = \tau_1 = GL = \frac{L}{R}$, $i_L(t_1'') = \frac{U_\mathrm{sat}}{2R}$ und $i_L(t_\infty) = \frac{2U_\mathrm{sat}}{R}$ folgt:

$$i_L(t) = \frac{2U_\mathrm{sat}}{R} - \frac{3U_\mathrm{sat}}{2R} \exp\left(-\frac{t - t_1''}{\tau_1}\right)$$

Mit $t_2 - t_1'' = t_2 - t_1 - \tau_1 (\ln(2) + \ln(3)) = \tau_1 (\ln(3) - \ln(2))$ erhält man:

$$i_L(t_2) = \frac{U_\mathrm{sat}}{R}$$

Damit lässt sich der Stromverlauf vollständig skizzieren (Abbildung L12.55).

j) Dynamischer Pfad siehe Abbildung L12.56. Wird die Triggerspannung zu klein gewählt, so ergibt sich für den Spulenstrom der qualitative Zeitverlauf in Abbildung L12.57.

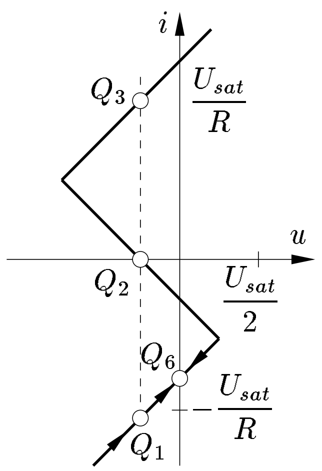


Abbildung L12.56: zu L12.17j: Pfad

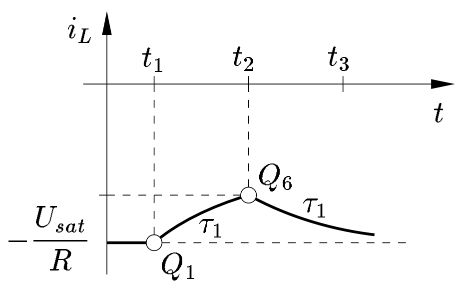


Abbildung L12.57: Stromverlauf $i_L(t)$

L12.18 Memristor

a) Welche der folgenden Eigenschaften besitzt dieser Memristor?

☐	spannungsgesteuert	X	flussgesteuert	☐	linear
☐	stromgesteuert	☐	streng linear	X	ungepolt
X	ladungsgesteuert	X	stückweise linear	☐	zeitvariant

b) $u = \dot{\Phi}$ und $i = \dot{q}$

c) Die Kennlinienabschnitte lauten:

$$q_M = \begin{cases} -Q_0 + W_1(\Phi_M + \Phi_0) & \text{für } \Phi_M \leq -\Phi_0, \\ W_2 \Phi_M & \text{für } -\Phi_0 < \Phi_M < \Phi_0, \\ Q_0 + W_1(\Phi_M - \Phi_0) & \text{für } \Phi_0 \leq \Phi_M. \end{cases}$$

d) i_M in Abhängigkeit von u_M lautet

$$i_M = \dot{q}_M = \begin{cases} W_1 \dot{\Phi}_M = W_1 u_M & \text{für } \Phi_M \leq -\Phi_0, \\ W_2 \dot{\Phi}_M = W_2 u_M & \text{für } -\Phi_0 < \Phi_M < \Phi_0, \\ W_1 \dot{\Phi}_M = W_1 u_M & \text{für } \Phi_0 \leq \Phi_M. \end{cases}$$

e) $u_M = u_0(t) - u_R$

f) $u_R = R i_R = R i_M$

g) $u_M = u_0(t) - R i_M = u_0(t) - R \cdot W(\Phi_M) \cdot u_M$

$$\Rightarrow\ u_M = \frac{u_0(t)}{R \cdot W(\Phi_M) + 1}$$

h) $u_M = \dfrac{U_0}{R \cdot W_2 + 1}$ für kleine $t > 0$

i) $\Phi_0 = \Phi_M(t_1) = \Phi_M(0) + \displaystyle\int_0^{t_1} u_M(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{t_1} \frac{U_0}{R \cdot W_2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{U_0 \cdot t_1}{R \cdot W_2 + 1}$

$$\Rightarrow\ t_1 = \frac{\Phi_0(R \cdot W_2 + 1)}{U_0}$$

j) $\Phi_M(T) = \Phi_M(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{T} \frac{U_0}{R \cdot W_1 + 1}\,\mathrm{d}t = \Phi_0 + \frac{U_0(T - t_1)}{R \cdot W_1 + 1}$

k) Siehe Abbildung L12.58

$$u_M(t) = \begin{cases} U_0/(R \cdot W_2 + 1) & 0 \leq t < t_1 \\ U_0/(R \cdot W_1 + 1) & t_1 \leq t < T \\ -U_0/(R \cdot W_1 + 1) & T \leq t \leq 2T - t_1 \\ -U_0/(R \cdot W_2 + 1) & 2T - t_1 < t < 2T \end{cases}$$

$$u_M(t + 2T) = u_M(t)$$

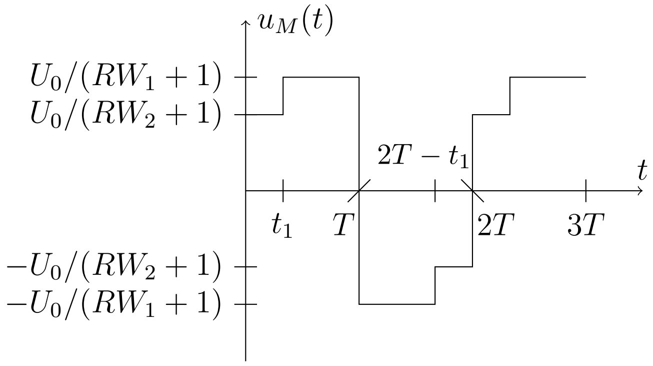


Abbildung L12.58: zu L12.18: Spannungsverlauf am Memristor über die Zeit

l) $T = 2t_1 = \dfrac{2\Phi_0(R \cdot W_2 + 1)}{U_0}$

m) $\dfrac{U_0}{R \cdot W_1 + 1} - \dfrac{U_0}{R \cdot W_2 + 1} = \dfrac{U_0}{R \cdot W_2 + 1} - \dfrac{-U_0}{R \cdot W_2 + 1} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{R \cdot W_1 + 1} = \dfrac{3}{R \cdot W_2 + 1}$

$$\Rightarrow\; 3(R \cdot W_1 + 1) = R \cdot W_2 + 1 \;\Rightarrow\; R(3W_1 - W_2) = -2$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{2}{W_2 - 3W_1}$$

n) $W_2 > 3W_1$,
laut Kennlinie gilt: $W_2 = 4W_1 \;\Rightarrow$ Bedingung ist hier erfüllt.

o) Φ_M würde auf ∞ oder $-\infty$ zustreben (jenach ob T_1 oder T_2 größer ist),

$$\Rightarrow\; u_M(t) = \pm\frac{U_0}{R \cdot W_1 + 1}.$$

13 Übung: Schaltungen zweiten Grades

13.1 Aufstellen von Zustandsgleichungen (1)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.1.

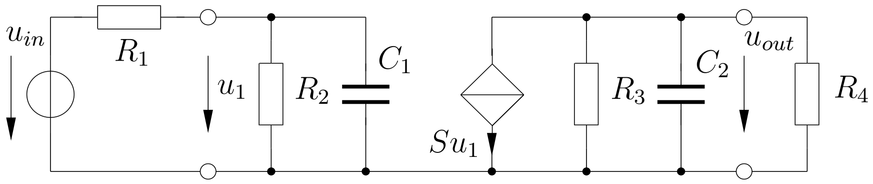


Abbildung 13.1:

a) Stellen Sie die Zustandsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ und v an.

b) Stellen Sie die Ausgangsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{c}$ und d an.

13.2 Aufstellen von Zustandsgleichungen (2)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.2, bei der der Op-Amp im linearen Bereich arbeitet.

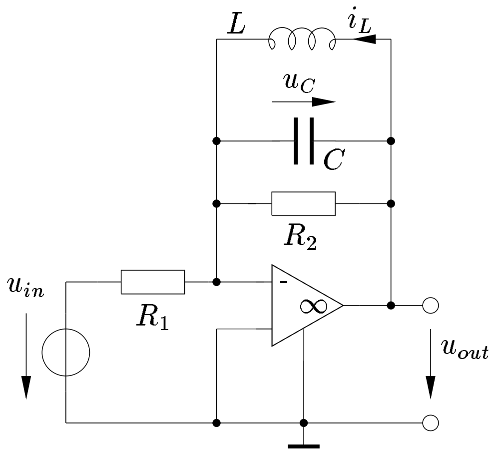


Abbildung 13.2:

a) Stellen Sie die Zustandsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ und v an.

b) Stellen Sie die Ausgangsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{c}$ und d an.

13.3 Aufstellen von Zustandsgleichungen (3)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.3, bei der der Op-Amp im linearen Bereich arbeitet.

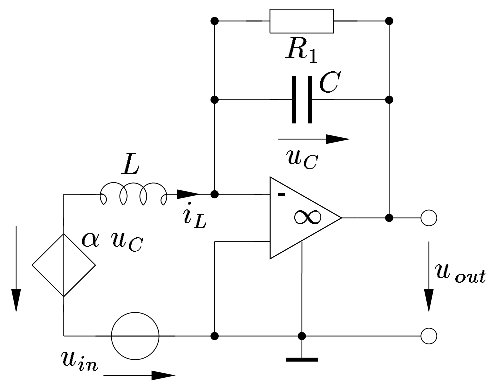


Abbildung 13.3:

a) Stellen Sie die Zustandsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ und v an.

b) Stellen Sie die Ausgangsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{c}$ und d an.

13.4 Aufstellen von Zustandsgleichungen (4)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.4.

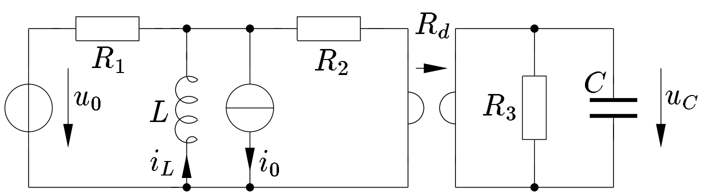


Abbildung 13.4:

Stellen Sie die Zustandsgleichung auf. Geben Sie dazu die Matrizen $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{v}$ an.

13.5 Aufstellen von Zustandsgleichungen (5)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.5, bei der alle Op-Amp im linearen Bereich arbeiten. Ferner gilt: $R_2 = R_4 = R_7$.

a) Stellen Sie die Zustandsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{v}$ an.

b) Stellen Sie die Ausgangsgleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ an.

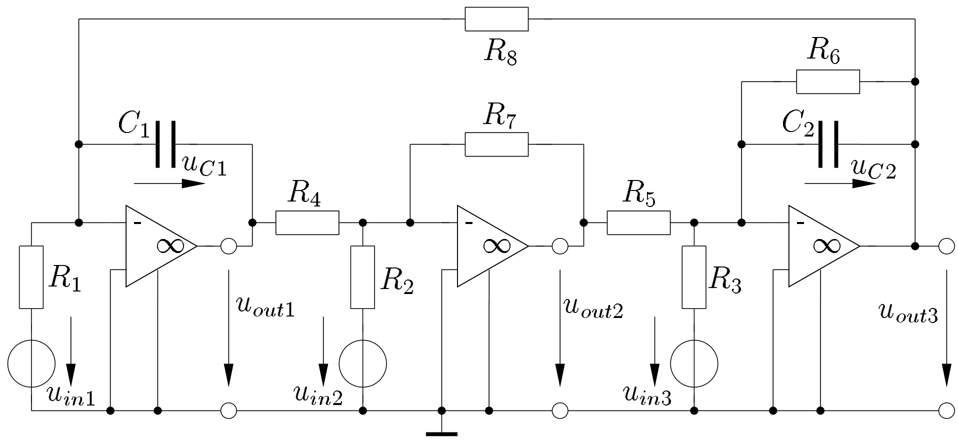


Abbildung 13.5:

13.6 Aufstellen von Zustandsgleichungen (6)

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 13.6 mit $R_1 = R_2 = R_3 = r = R$. Stellen Sie die Zustands-

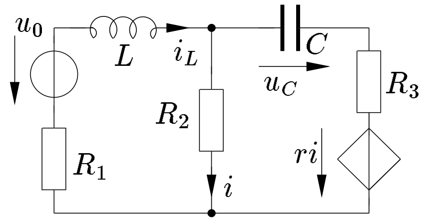


Abbildung 13.6:

gleichung auf. Geben Sie dazu $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{t}$ und v an.

13.7 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (1)

Betrachten Sie die Aufgabe 13.1 mit Abbildung 13.1. Gegeben seien folgende Elementewerte:

$$R_1 = 1/3\,\Omega,\ R_2 = 1\,\Omega,\ R_3 = 2\,\Omega,\ R_4 = 2\,\Omega,\ C_1 = 1\,\mathrm{F},\ C_2 = 1\,\mathrm{F},\ S = -3\,\mathrm{S} \text{ und } u_{in} = 0\,\mathrm{V}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix.

b) Berechnen Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren, deren zweite Komponente $-3\,\mathrm{V}$ ist.

c) Geben Sie formelmäßig die allgemeine Lösung und eine spezielle Lösung für die Anfangswerte $u_{C1}(t_0) = 1\mathrm{V}$ und $u_{C2}(t_0) = -1.5\mathrm{V}$ an.

d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf für u_{C1} und u_{C2}.

e) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenportrait in der u_{C1}-u_{C2}-Ebene.

13.8 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (2)

Betrachten Sie die Aufgabe 13.1. Gegeben seien nun folgende Elementewerte:

$$R_1 = 1/3\,\Omega,\; R_2 = 1\,\Omega,\; R_3 = 2\,\Omega,\; R_4 = 2\,\Omega,\; C_1 = -1\,\text{F},\; C_2 = -1\,\text{F},\; S = 3\,\text{S} \text{ und } u_{in} = 0\,\text{V}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix.

b) Berechnen Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren, deren zweite Komponente $-3\,\text{V}$ ist.

c) Geben Sie formelmäßig die allgemeine Lösung und eine spezielle Lösung für die Anfangswerte $u_{C1}(t_0) = 1\,\text{V}$ und $u_{C2}(t_0) = -1\text{V}$ an.

d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf für u_{C1} und u_{C2}.

e) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der u_{C1}-u_{C2}-Ebene.

13.9 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (3)

Betrachten Sie die Aufgabe 13.1. Gegeben seien nun folgende Elementewerte:

$$R_1 = 2\,\Omega,\; R_2 = 2\,\Omega,\; R_3 = 2\,\Omega,\; R_4 = 2\,\Omega,\; C_1 = 1\,\text{F},\; C_2 = -1\,\text{F},\; S = 3\,\text{S} \text{ und } u_{in} = 0\,\text{V}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix.

b) Berechnen Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren, deren zweite Komponente $-3\frac{1}{\text{s}}$ ist.

c) Geben Sie formelmäßig die allgemeine Lösung für die Anfangswerte $u_{C1}(t_0) = 1\,\text{V}$ und $u_{C2}(t_0) = -1\,\text{V}$ an.

d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf für u_{C1} und u_{C2}.

e) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der u_{C1}-u_{C2}-Ebene.

13.10 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (4)

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 13.7.

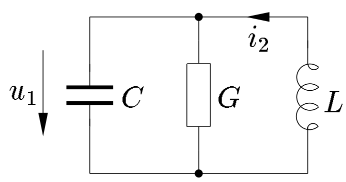


Abbildung 13.7:

a) Stellen Sie die Zustandgleichung auf. Berechnen Sie dazu die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = 4$ S, $C = 1$ F, und $L = 1/3$ H.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = 1$ V und $i_2(t_0) = -1,0$ A.

c) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der x_1-x_2-Ebene.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = -4$ S, $C = 1$ F, und $L = 1/3$ H.

d) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = 1$ V und $i_2(t_0) = -1,0$ A.

e) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der x_1-x_2-Ebene.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = 1$ S, $C = 1$ F, und $L = -1/2$ H.

f) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = -1$V und $i_2(t_0) = -1,5$A.

g) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der x_1-x_2-Ebene.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = 0$ S, $C = 1$ F, und $L = 1$ H.

h) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = 1$ V und $i_2(t_0) = 0$ A.

i) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = 2$ S, $C = 1$ F, und $L = 1/2$ H.

j) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = -2$ V und $i_2(t_0) = -2$ A.

k) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene.

Gegeben seien nun die Elementewerte $G = -2$ S, $C = 1$ F, und $L = 1/2$ H.

l) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1(t_0) = -2$ V und $i_2(t_0) = 2$ A.

m) Skizzieren Sie das dazugehörige Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene.

13.11 Umladen von Kapazitäten

a) Berechnen Sie die Energie, die in einer Kapazität C mit Ladung $q_C = Q$ gespeichert ist, wenn man die Energie im Punkt $(u_C, q_C) = (0,0)$ als Null definiert.

b) Geben Sie nun die Energie an, die in einer Kapazität C mit Spannung $u_C = U$ gespeichert ist, wenn man die Energie im Punkt $(u_C, q_C) = (0,0)$ als Null definiert.

Gegeben sei nun die Schaltung aus Abbildung 13.8.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen i_{C1} und $\dot{u}_{C1}$?

d) Geben Sie i_{C1} sowie i_{C2} jeweils in Abhängigkeit von u_{C1}, u_{C2} und R an.

e) Stellen Sie die Differentialgleichungen für u_{C1} und u_{C2} auf und schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrix-Vektor-Notation.

Im Folgenden gelte stets $C_1 = C_2 = C$, so dass sich $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$ ergibt.

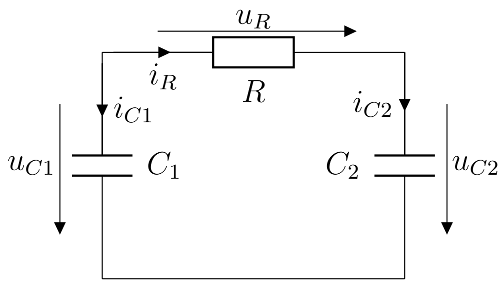


Abbildung 13.8: Schaltung mit zwei Kapazitäten

f) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

Das System soll nun mit Hilfe der Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ transformiert werden.

g) Zeigen Sie, dass die Systemmatrix durch diese Transformation diagonalisiert wird.

h) Wie lautet die allgemeine Lösung des diagonalisierten Systems? Als Anfangswerte seien gegeben $u_{C1}(0) = U_0$ und $u_{C2}(0) = 0$.

i) Wie lauten diese Anfangswerte im transformierten System?

j) Bestimmen Sie für die gegebenen Anfangswerte $u_{C1}(t)$ für $t \geq 0$.

Auf gleiche Weise lässt sich berechnen, dass für $t \geq 0$ gilt: $u_{C2}(t) = \frac{U_0}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\right)$.

k) Auf welchen Punkt strebt das System zu?

l) Welcher Zusammenhang besteht zwischen i_R und $\dot{u}_{C2}$?

m) Berechnen Sie den Strom $i_R(t)$ durch R und die Momentanleistung $p_R(t) = u_R(t)i_R(t)$, die in R umgesetzt wird.

n) Wie viel Energie wird während des Umladens der Kapazitäten verbraucht?

o) Was ergibt sich für diese Energie, wenn R zu einem idealen Leiter wird ($R \to 0$)?

p) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgaben n) und o) durch Berechnung der auf den Kapazitäten gespeicherten Energien vor und nach dem Umladen.

13.12 Wien-Robinson-Oszillator

Gegeben sei die Schaltung aus Bild 13.9.

a) Welche Funktion erfüllt der Operationsverstärker im streng linearen Bereich zusammen mit den Widerständen R_{v1} und R_{v2}? Zeichnen Sie die Schaltung mit einem entsprechenden Ersatzschaltbild für den Fall $R_{v2} = (k-1)R_{v1}$.

b) Stellen Sie die Zustandsgleichung in der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ auf.

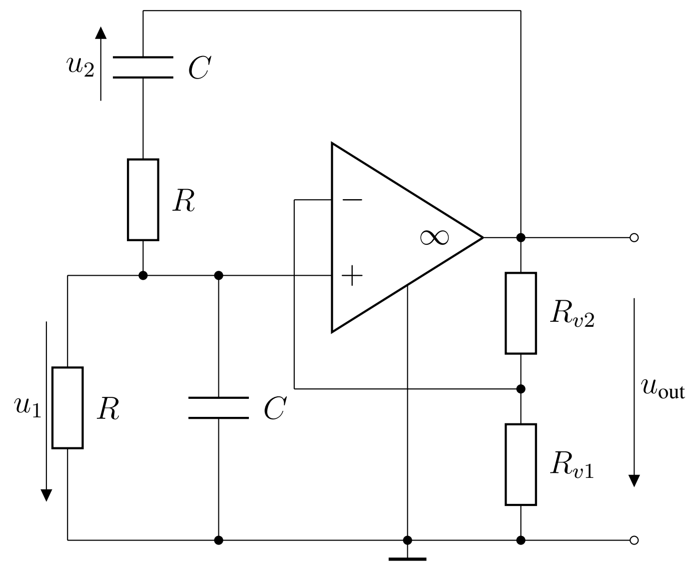


Abbildung 13.9: Wien-Robinson-Oszillator

c) Für welche Werte von k ergeben sich komplex konjugierte Eigenwerte? Welche Arten von Gleichgewichtspunkten ergeben sich in Abhängigkeit von k unter dieser Voraussetzung?

d) Geben Sie die Eigenvektoren für den Fall $k = 3$ an.

e) Berechnen und skizzieren Sie die Lösung für die Anfangswerte $u_1 = 2\,\mathrm{V}$ und $u_2 = -2\,\mathrm{V}$.

f) Skizzieren Sie das zugehörige Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene.

13.13 Lösen von autonomen Zustandsgleichungen

Betrachten Sie die Schaltung in Aufgabe 13.1. Gegeben seien nun folgende Elementewerte:

$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$, $C_1 = 1$ F , $C_2 = 1$ F, $S = -3S$ und $u_{in} = 3$ V.

a) Transformieren Sie das System in ein homogenes System. Geben Sie die transformierte Zustandsgleichung an.

b) Entkoppeln Sie das Differentialgleichungssystem aus Aufgabe a) und geben Sie die entkoppelte allgemeine Lösung an.

c) Führen Sie die Rücktransformation auf die x_1'-x_2'-Ebene durch und geben Sie dafür die allgemeine Lösung an. Benutzen Sie dafür Eigenvektoren, deren zweite Komponente $-3\frac{1}{\mathrm{s}}$ ist. Skizzieren Sie das Phasenportrait in dieser Ebene.

d) Führen Sie die Rücktransformation auf die x_1-x_2-Ebene durch und geben Sie dafür die allgemeine Lösung an. Skizzieren Sie das Phasenportrait in dieser Ebene.

e) Führen Sie die gleiche Analyse für den Fall $C_1 = -1\,\mathrm{F}$, $C_2 = 1\,\mathrm{F}$ durch.

f) Führen Sie die gleiche Analyse für den Fall $C_1 = -1\,\mathrm{F}$, $C_2 = -1\,\mathrm{F}$ durch.

g) Führen Sie die gleiche Analyse für den Fall $C_1 = 2\,\mathrm{F}$, $C_2 = 1\,\mathrm{F}$ durch.

h) Können sich in dieser Schaltung komplexe Eigenwerte ergeben? Begründen Sie Ihre Antwort.

13.14 Zustandsgleichungen mit zeitabhängiger Erregung

Die Schaltung in Abbildung 13.10 ist zu analysieren.

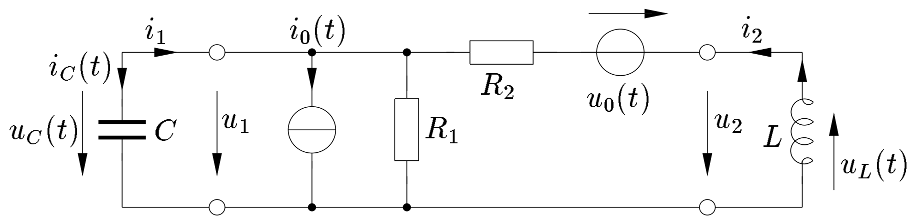


Abbildung 13.10:

Die Schaltung enthält zwei unabhängige Erregungen: $i_0(t) = I_0 \cos \beta t;\ u_0(t) = U_0 \sin \beta t$ mit $U_0 = \beta L I_0$.

Schaltelemente: $R_1 = -\frac{1}{\alpha C},\ R_2 = -\alpha L\ ; L = \frac{1}{\beta^2 C}$ mit $\alpha < 0$ und $C,\ L > 0$

a) Stellen Sie die Zustandsgleichungen mit den Erregungen auf.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren. Bestimmen Sie den Typ des Gleichgewichtspunktes.

c) Transformieren Sie das Zustandsgleichungssystem auf die Normalform.

d) Bestimmen Sie qualitativ den Zeitverlauf in Abhängigkeit vom Anfangswert und von der Erregung in der ξ_1-ξ_2-Ebene und der x_1-x_2-Ebene. Die Anfangswerte betragen $u_C(0) = U;\ i_L(0) = 0$.

13.15 Jordan-Normaltransformation

Gegeben sei ein homogenes Differentialgleichungssystem mit der normierten, dimensionslosen Zustandsmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Warum kann die Transformation auf Normalform nicht durchgeführt werden?

c) Transformieren Sie das System auf Jordan-Normalform und geben Sie die transformierte Differentialgleichung an.

d) Beweisen Sie allgemein für $a_{12} \neq 0$, dass die Matrix $\boldsymbol{Q}'$ invertierbar ist. Wählen Sie dazu die Elemente der ersten Zeile von $\boldsymbol{Q}'$ zu eins.

e) Geben Sie die Lösung in der ξ_1-ξ_2-Ebene und der x_1-x_2-Ebene für $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 2$ an.

f) Skizzieren Sie das Phasenportrait in der ξ_1-ξ_2-Ebene.

L13 Lösung: Schaltungen zweiten Grades

L13.1 Aufstellen von Zustandsgleichungen (1)

a) Bei Anwendung des systematischen Verfahrens ergeben sich folgende vier Schritte, um die allgemeine Form der Zustandsgleichung zu erhalten.

1. Schritt (Abbbildung L13.1): Zunächst wird das Schaltbild so umgezeichnet, dass die Reaktanzen an den Toren eines resistiven Zweitors liegen.

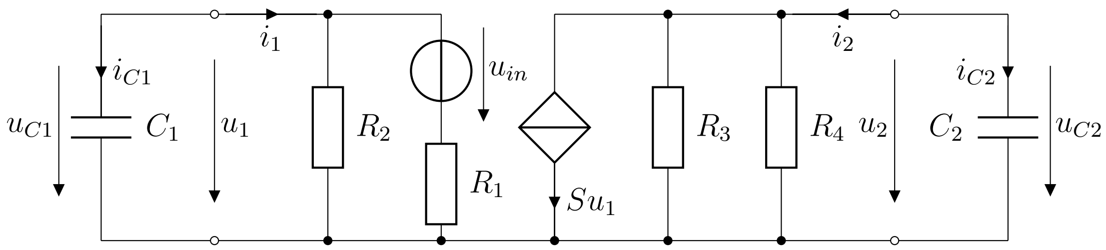


Abbildung L13.1: zu L13.1 Schritt 1

Die Torströme i_1 und i_2 werden so gewählt, dass sie in das Zweitor hineinfließen und entgegengesetzt zu den Zählpfeilrichtungen der Kondensatorströme verlaufen.

$$i_1 = -i_{C1}, \quad i_2 = -i_{C2}, \quad u_1 = u_{C1}, \quad u_2 = u_{C2}$$

Die Zählpfeilrichtungen der resistiven Elemente im Zweitor können für die Analyse (falls nicht aus der Angabe vorgegeben) beliebig gewählt werden.

2. Schritt (Abbbildung L13.2): Beim Aufstellen des Ersatzschaltbildes für das resistive Zweitor muss als Beschreibungsform bei zwei Kapazitäten die Leitwertmatrix und zwei parallele Ersatzstromquellen an den Toreingängen verwendet werden.

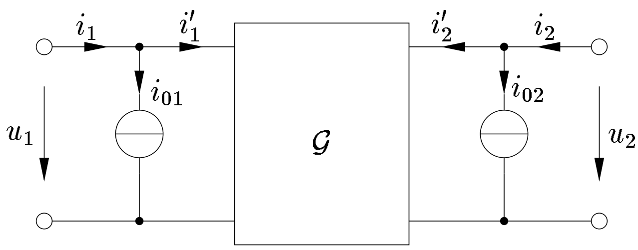


Abbildung L13.2: zu L13.1 Schritt 2, Ersatzschaltbild: Leitwertsmatrix

Der Strom i_1 setzt sich zusammen aus dem Strom i_{01} der Ersatzstromquelle und dem Strom i'_1, der in ein streng lineares und damit quellenfreies Zweitor fließt, das durch die Leitwertsmatrix eindeutig beschrieben wird. Analoge Betrachtungen gelten für den Strom i_2.

$$i_1 = i_{01} + i_1', \qquad i_2 = i_{02} + i_2'$$

3. Schritt: Nun werden die Parameter der Leitwertsmatrix und der Ersatzstromquellen berechnet. Dazu müssen die Torströme i_1 und i_2 als Funktion der Torspannungen u_1 und u_2, sowie den unabhängigen Erregungsquellen ausgedrückt werden, die in dem Vektor $\boldsymbol{v}$ zusammengefasst sind (in unserem Fall lediglich die Spannungsquelle u_{in}).

$$i_1 = f_1(u_1, u_2, u_{in}), \qquad i_2 = f_2(u_1, u_2, u_{in})$$

Dazu werden die Maschen- bzw. Knotengleichungen angewendet.

I)

$$i_1 = i_{R1} + i_{R2} = \frac{u_1 - u_{in}}{R_1} + \frac{u_1}{R_2} = u_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - u_{in}\frac{1}{R_1}$$

II)

$$i_2 = Su_1 + i_{R'} = Su_1 + u_2\frac{1}{R'} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Die Elemente der Leitwertmatrix beschreiben die Zusammenhänge der Ströme i_1' und i_2' mit den Spannungen u_1 und u_2.:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Für die Ströme i_1 und i_2 gilt also:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + i_{01}, \quad i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + i_{02}$$

Ein Vergleich mit I) und II) führt unmittelbar zu:

$$g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{21} = S, \quad g_{22} = \frac{1}{R'}, \quad i_{01} = -\frac{u_{in}}{R_1}, \quad i_{02} = 0.$$

4. Schritt: Die Zustandsmatrix ergibt sich, indem man die erste Zeile von $\boldsymbol{G}$ durch $-C_1$ dividiert und die zweite Zeile durch $-C_2$. Es gilt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 \\ -\frac{S}{C_2} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ bestehen aus den Kondensatorspannungen u_{C1} und u_{C2}. Der Erregungsvektor $\boldsymbol{v}$ besteht nur aus einer Komponente (u_{in}) und ist daher ein Skalar. Für die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ gilt:

$$\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{t}v$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{u_{in}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} u_{in} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hiermit wurden alle Komponenten für die Zustandsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v$$

bestimmt.

b) Da in unserem Beispiel nur eine einzige Ausgangsgröße u_{out} vorkommt, lautet die Ausgangsgleichung:

$$y = u_{out} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d\ v$$

Da $u_{out} = u_{C2}$ gilt, ergibt ein Vergleich:

$$\boldsymbol{c}^T = [0\ \ 1]\,, \quad d = 0$$

L13.2 Aufstellen von Zustandsgleichungen (2)

a) *1. Schritt (Abbbildung L13.3)*: Umzeichnen der Schaltung

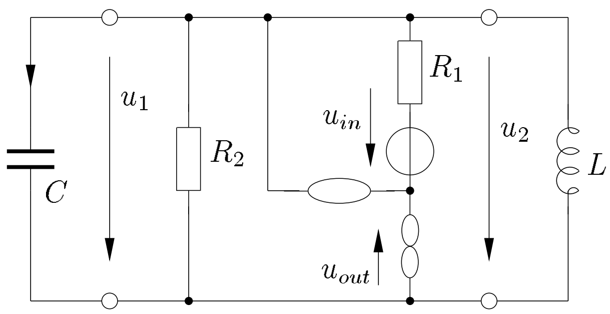


Abbildung L13.3: zu L13.2 Schritt 1

2. Schritt (Abbbildung L13.4): Bei einer Kapazität und einer Induktivität wird das resistive Zweitor durch die inverse Hybridmatrix und eine parallele Stromquelle i_{01}, sowie eine serielle Spannungsquelle u_{02} ausgedrückt.

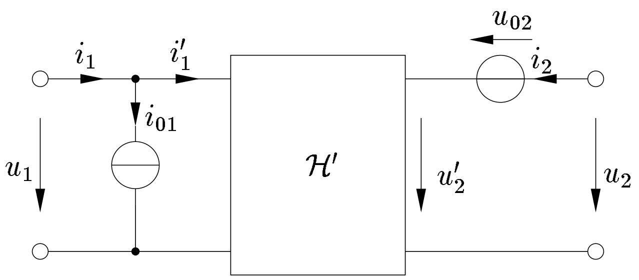


Abbildung L13.4: zu L13.2 Schritt 2, Ersatzschaltbild: inverse Hybridmatrix

3. Schritt: Der Torstrom i_1 und die Torspannung u_2 müssen durch u_1 und i_2, sowie den unabhängigen Erregungsvektoren $\boldsymbol{v}$ (hier nur u_{in}) ausgedrückt werden.

$$i_1 = f_1(u_1, i_2, u_{in}), \qquad u_2 = f_2(u_1, i_2, u_{in})$$

Beim Aufstellen der Knoten bzw. Maschengleichungen ist zu beachten, dass die Ströme i_+ bzw. i_- am Eingangsklemmenpaar des idealen Operationsverstärkers null sind und am Eingangsklemmenpaar keine Spannung abfällt.

I)

$$i_1 = i_{R1} + i_{R2} - i_2 = \frac{u_{R_2}}{R_2} + \frac{u_{R_1}}{R_1} - i_2 = \frac{u_1}{R_2} - i_2 - \frac{u_{in}}{R_1}$$

II)

$$u_2 = u_1$$

Für die inverse Hybridmatrix gilt:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

Ein Vergleich mit I) und II) führt unmittelbar zu:
$h'_{11} = \frac{1}{R_2}$, $h'_{12} = -1$, $h'_{21} = 1$, $h'_{22} = 0$, $i_{01} = -\frac{u_{in}}{R_1}$, $u_{02} = 0$.
4. Schritt: Die Zustandsmatrix ergibt sich, indem man die erste Zeile von $\boldsymbol{H}'$ durch $-C$ dividiert und die zweite Zeile durch $-L$. Es gilt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ bestehen aus der Kondensatorspannung u_C und dem Spulenstrom i_L. Der Erregungsvektor $\boldsymbol{v}$ besteht nur aus einer Komponente (u_{in}) und ist daher ein Skalar. Für die Transformationsmatrix $\boldsymbol{t}$ gilt:

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} u_{in} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Da in diesem Beispiel nur eine einzige Ausgangsgröße u_{out} vorkommt, lautet die Ausgangsgleichung:

$$y = u_{out} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d\, v$$

und man erhält durch einen Vergleich:

$$\boldsymbol{c}^T = [-1 \;\; 0]\,, \quad d = 0$$

L13.3 Aufstellen von Zustandsgleichungen (3)

a) *1. Schritt (Abbbildung L13.5)*: Umzeichnen der Schaltung

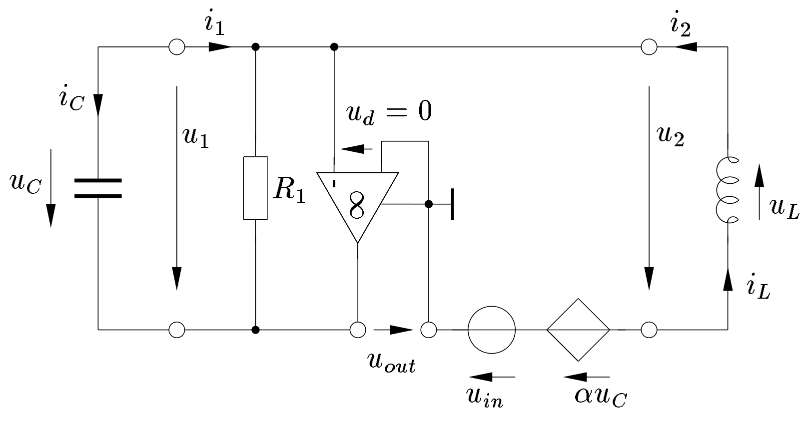


Abbildung L13.5: zu L13.3 Schritt 1

2. Schritt (Abbbildung L13.6): Ersatzschaltbild angeben.

3. Schritt: Analyse

$$\begin{array}{ll} i_1 = f_1(u_1, i_2, u_{in}) & u_1 = f_2(u_1, i_2, u_{in}) \\ i_1 = i_{R1} - i_2 = \frac{u_1}{R_1} - i_2 & i_1 = h'_{11} u_1 + h'_{12} i_2 + i_{01}, \\ u_2 = -u_{in} - \alpha u_C = -u_{in} - \alpha u_1, & u_2 = h'_{21} u_1 + h'_{22} i_2 + u_{02}, \end{array}$$

$$h'_{11} = \frac{1}{R_1},\; h'_{12} = -1,\;\; h'_{21} = -\alpha,\;\; h'_{22} = 0,\;\; i_{01} = 0,\;\; u_{02} = -u_{in}$$

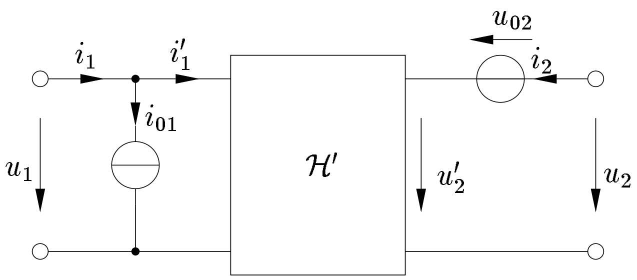


Abbildung L13.6: zu Schritt 2, Ersatzschaltbild: inverse Hybridmatrix

4. Schritt: Die Zustandsmatrix und Einkoppelmatrix aufstellen.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad v = u_{in}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{1}{C} \\ \frac{\alpha}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} u_{in} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

b) Ausgangsgleichung.

$$y = u_{out} = -u_1 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d\, v, \quad \boldsymbol{c}^T = [-1 \;\; 0], \quad d = 0$$

L13.4 Aufstellen von Zustandsgleichungen (4)

a) Betrachtet man den rechten Teil der Schaltung, so führt der Gyrator eine Dualwandlung mit dem Widerstand R_3 und der Kapazität C durch (Abbbildung L13.7). Die Parallelschaltung geht dabei in eine Serienschaltung über.

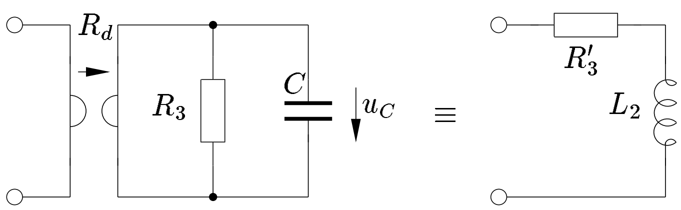


Abbildung L13.7: Dualwandlung von C nach L

Für die Elementewerte gilt:

$$R_3' = \frac{R_d^2}{R_3}, \quad L_2 = C R_d^2$$

Dadurch vereinfacht sich der resistive Teil der Schaltung.

1. Schritt (Abbbildung L13.8): Umzeichnen der Schaltung

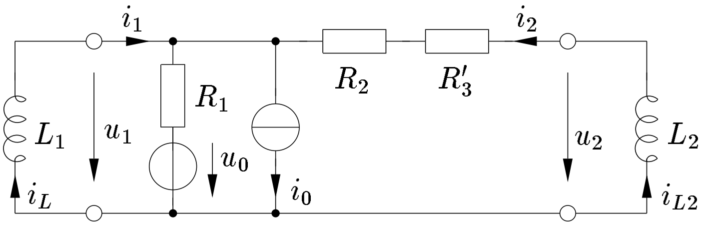


Abbildung L13.8: zu L13.4, 1. Schritt

2. Schritt (Abbbildung L13.9): Ersatzschaltbild angeben.

Bei zwei Induktivitäten muss das resistive Zweitor durch die Widerstandsmatrix und zwei serielle Spannungsquellen u_{01} und u_{02} beschrieben werden.

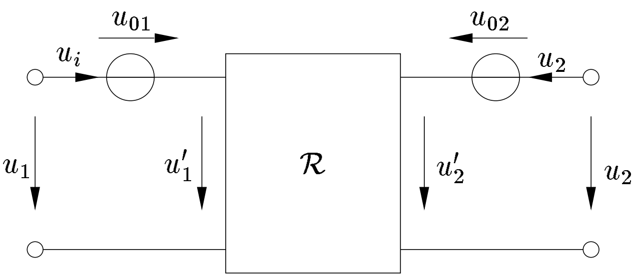


Abbildung L13.9: zu L13.4, 2. Schritt, Ersatzschaltbild: Widerstandsmatrix

3. Schritt: Analyse

Die Torspannungen u_1 und u_2 müssen durch die Torströme i_1 und i_2, sowie den unabhängigen Erregungsquellen (hier u_0 und i_0) ausgedrückt werden.

$$u_1 = f_1(i_1, i_2, u_0, i_0) \qquad u_2 = f_1(i_1, i_2, u_0, i_0)$$

I) $u_1 = u_{R1} + u_0 = R_1 i_{R_1} + u_0 = R_1\,(i_1 + i_2 - i_0) + u_0$

II) $u_2 = u_{R3'} + u_{R2} + u_{R1} + u_0 = R_3' i_2 + R_2 i_2 + R_1(i_1 + i_2 - i_0) + u_0 =$

$= (R_3' + R_2 + R_1)\,i_2 + R_1 i_1 - R_1 i_0 + u_0$

Für die Widerstandsmatrix gilt:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

Ein Vergleich mit I) und II) führt unmittelbar zu:

$$r_{11} = R_1, \quad r_{12} = R_1, \quad r_{21} = R_1, \quad r_{22} = R_1 + R_2 + R_3'$$

$$u_{01} = u_0 - R_1 i_0, \quad u_{02} = u_0 - R_1 i_0$$

4. Schritt: Die Zustandsmatrix ergibt sich, indem man die erste Zeile von $\boldsymbol{R}$ durch $-L_1$ dividiert und die zweite Zeile durch $-L_2$. Es gilt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{R} = -\begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & \frac{R_1+R_2+\frac{R_d^2}{R_3}}{L_2} \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ bestehen aus den Spulenströmen i_{L1} und i_{L2}. Der Erregungsvektor $\boldsymbol{v}$ besteht aus den Komponenten u_0 und i_0. Für die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$, die die Erregungsquellen auf die Ersatzquellen abbildet, gilt:

$$\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 1 & -R_1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 1 & -R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{R_1}{L_2} \end{bmatrix}$$

L13.5 Aufstellen von Zustandsgleichungen (5)

a) *1. Schritt (Abbbildung L13.10)*: Umzeichnen der Schaltung. Das Umzeichnen der Schaltung kann entfallen, wenn man beachtet, dass bei zwei Kapazitäten die Kondensatorströme entgegengesetzt zu den Torströmen des resistiven Zweitors fließen und die Kondensatorspannungen die gleiche Zählpfeilrichtung besitzen wie die Torspannungen. Die Zählpfeilrichtungen im resistiven Teil der Schaltung können prinzipiell beliebig gewählt werden.

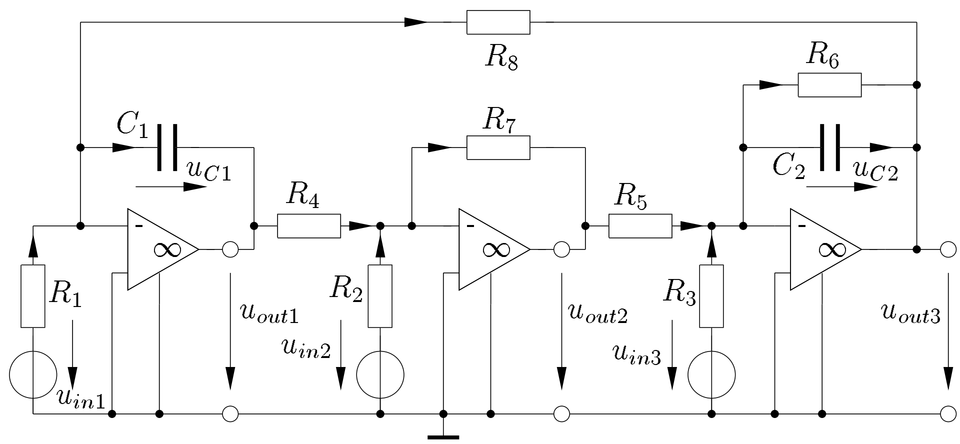


Abbildung L13.10:

2. Schritt (Abbbildung L13.11): Ersatzschaltbild angeben.

3. Schritt: Analyse

$$i_1 = f_1\left(u_1, u_2, u_{in1}, u_{in2}, u_{in3}\right), \qquad i_2 = f_1\left(u_1, u_2, u_{in1}, u_{in2}, u_{in3}\right)$$

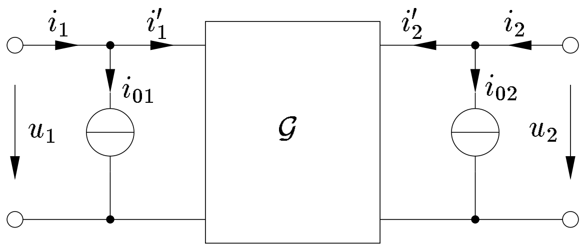


Abbildung L13.11: zu L13.5, 2. Schritt, Leitwertmatrix

Zunächst wird der Strom i_1 berechnet

$$i_1 = i_{R8} - i_{R1} = \frac{u_{R8}}{R_8} - \frac{u_{R1}}{R_1}$$

Zur Berechnung von u_{R1} und u_{R8} werden folgende Maschengleichungen benötigt.

$$u_{R1} - u_{in1} = 0, \qquad u_{R8} - u_2 = 0$$

Damit ergibt sich für i_1:

$$i_1 = \frac{u_2}{R_8} - \frac{u_{in1}}{R_1}$$

Die entsprechende Knotengleichung für i_2 lautet:

$$i_2 = i_{R6} - i_{R3} - i_{R5} = \frac{u_{R6}}{R_6} - \frac{u_{R3}}{R_3} - \frac{u_{R5}}{R_5}$$

Zur Lösung verwendet man die Maschengleichungen:

$$u_{R6} - u_2 = 0, \quad u_{R3} - u_{in3} = 0, \quad u_{R5} - u_{out2} = 0$$

Zwischen den Klemmen u_{out2} und u_{out1} liegt ein invertierender Summationsverstärker, der die Spannungen u_{out1} und u_{in2} mit den Faktoren $\frac{R_7}{R_4}$ bzw. $\frac{R_7}{R_2}$ aufsummiert und invertiert. Für $R_7 = R_4 = R_2$ gilt:

$$u_{out2} = -\frac{R_7}{R_4} u_{out1} - \frac{R_7}{R_2} u_{in2} = -u_{out1} - u_{in2}$$

Unter Verwendung der Maschengleichung $u_{out1} + u_1 = 0$ erhält man:

$$u_{R5} = -u_{out1} - u_{in2} = u_1 - u_{in2}$$

Damit ergibt sich für i_2:

$$i_2 = \frac{u_2}{R_6} - \frac{u_{in3}}{R_3} - \frac{u_1 - u_{in2}}{R_5}$$

Für die Elementewerte der Leitwertmatrix und der Ersatzstromquellen erhält man:

$$g_{11} = 0, \quad g_{12} = \frac{1}{R_8}, \quad g_{21} = -\frac{1}{R_5}, \quad g_{22} = \frac{1}{R_6}, \quad i_{01} = -\frac{u_{in1}}{R_1}, \quad i_{02} = \frac{u_{in2}}{R_5} - \frac{u_{in3}}{R_3}$$

4. Schritt: Zustandgleichung und Einkoppelmatrix aufstellen.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_8 C_1} \\ \frac{1}{R_5 C_2} & -\frac{1}{R_6 C_2} \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ bestehen aus den Kondensatorspannungen u_{C1} und u_{C2}. Der Erregungsvektor $\boldsymbol{v}$ besteht aus den Komponenten u_{in1}, u_{in2} und u_{in3}. Für die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$, die die Erregungsquellen auf die Ersatzquellen abbildet, gilt:

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} u_{in1} \\ u_{in2} \\ u_{in3} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Einkoppelmatrix $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_5 C_2} & \frac{1}{R_3 C_2} \end{bmatrix}$$

b) Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}$$

Die Ausgangsspannungen u_{out1}, u_{out2} und u_{out3} werden in dem Vektor $\boldsymbol{y}$ zusammengefasst. Da $u_{out1} = -u_1, \quad u_{out2} = -u_{in2} + u_1, \quad u_{out3} = -u_2$ gilt, ergibt sich durch Vergleich:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L13.6 Aufstellen von Zustandsgleichungen (6)

1. Schritt (Abbbildung L13.12): Umzeichnen der Schaltung.

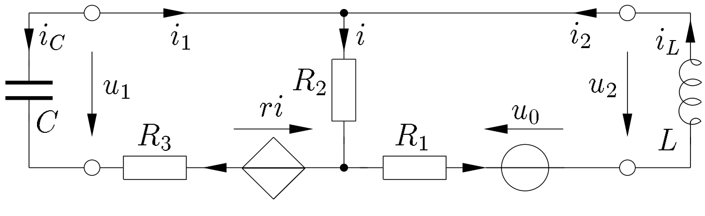


Abbildung L13.12:

2. Schritt (Abbbildung L13.13): Ersatzschaltbild angeben (Abbildung L13.13).

3. Schritt: Analyse

$$i_1 = f_1(u_1, i_2, u_0), \quad u_2 = f_2(u_1, i_2, u_0)$$

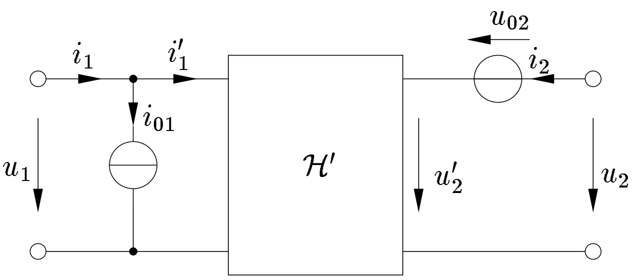


Abbildung L13.13: zu L13.6, Ersatzschaltbild, inverse Hybridmatrix

$$i_1 = i - i_2 = \frac{u_{R2}}{R_2} - i_2, \quad i = i_1 + i_2, \quad u_{R2} - ri + R_3 i_1 - u_1 = 0$$

$$u_{R2} = ri_1 + ri_2 - R_3 i_1 + u_1 = Ri_2 + u_1 \quad \text{mit} \quad r = R_3 = R_2 = R_1 = R$$

$$i_1 = \frac{Ri_2 + u_1}{R} - i_2 = \frac{u_1}{R}$$

$$u_2 = u_{R2} + R_1 i_2 - u_0 = Ri_2 + u_1 + Ri_2 - u_0 = u_1 + 2Ri_2 - u_0$$

$$h'_{11} = \frac{1}{R}, \quad h'_{12} = 0, \quad h'_{21} = 1, \quad h'_{22} = 2R, \quad i_{01} = 0, \quad u_{02} = -u_0$$

4. Schritt Zustandsmatrix und Einkoppelmatrix aufstellen.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad v = u_0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} u_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

L13.7 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (1)

a) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Für $u_{in} = 0$ ergibt sich folgende Zustandsgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}$$

Nun sollen die zeitabhängigen Spannungsverläufe der Zustandsvariablen u_{C1} und u_{C2} berechnet werden. Dazu geht man von dem allgemeinen Lösungsansatz

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t)\boldsymbol{q}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t)\boldsymbol{q}_2$$

aus. Dabei sind λ_1 und λ_2 die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ sind die dazugehörigen Eigenvektoren. Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \varDelta}$$

wobei T die Spur der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist ($T = a_{11} + a_{22}$) und $\varDelta$ die Determinante ($\varDelta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$). Für $T = -5\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\varDelta = 4\frac{1}{\mathrm{s}^2}$ ergibt sich:

$$\lambda_1 = -1\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \lambda_2 = -4\frac{1}{\mathrm{s}}$$

b) Der nächste Schritt besteht in der Berechnung der Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Da sich für $\boldsymbol{q}_2$ der Nullvektor als triviale Lösung ergibt (wegen $a_{12} = 0$), müssen wir eine andere Rechenvorschrift verwenden. Dazu wird die zweite Zeile der linear abhängigen Matrixgleichungen

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\, \boldsymbol{q}_1 = \mathbf{0}; \quad (\boldsymbol{A} - \lambda_2 \mathbf{1})\, \boldsymbol{q}_2 = \mathbf{0}$$

mit $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix}$ verwendet

$$a_{21}q_{11} + (a_{22} - \lambda_1)q_{12} = 0, \quad a_{21}q_{21} + (a_{22} - \lambda_2)q_{22} = 0.$$

Diese Gleichungen legen nur die Verhältnisse $\frac{q_{11}}{q_{12}}$ und $\frac{q_{21}}{q_{22}}$ fest, da jedes Vielfache von $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ebenfalls ein Eigenvektor und damit eine Lösung von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q}$ ist. Eine mögliche Wahl ist sicherlich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix}.$$

wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Hierbei wird vorausgesetzt, dass $a_{21} \neq 0$ gilt, da sonst die beiden Eigenvektoren linear abhängig sind.

Für $a_{12} = 0$ und $a_{21} = 0$ erhält man ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem, zu dem man sofort

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

als linear unabhängige Eigenvektoren angeben kann.

Fasst man diese drei Fälle zusammen, so lässt sich für eine mögliche Berechnung der Eigenvektoren folgende einfache Rechenvorschrift angeben:

$$1)\quad a_{12} \neq 0 \qquad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$2)\quad a_{21} \neq 0 \qquad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix}$$

$$3)\quad a_{12} = a_{21} = 0 \qquad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für unser Beispiel ergeben sich also nach Fall 2 zwei linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

c) Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$\begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} = c_1 \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} + c_2 \exp\left(-\frac{4t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die Kondensatorspannungen erhält man durch Addition zweier e-Funktionen mit unterschiedlichen Zeitkonstanten $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = 1\mathrm{s}$ und $\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{4}\mathrm{s}$. Für $t \to \infty$ klingen beide Kondensatorspannungen auf den Wert 0 ab, d.h. es handelt sich um einen stabilen Fall (positive Zeitkonstanten!). Dies gilt immer dann, wenn zwei Eigenwerte mit negativem Realteil vorliegen. Eine spezielle Lösung ergibt sich, wenn die Anfangswerte der Zustandsvariablen (hier Kondensatorspannungen zum Anfangszeitpunkt) eingesetzt werden. Daraus können die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt werden. Für $u_{C1}(0) = 1\mathrm{V}$ und $u_{C2}(0) = -1{,}5\mathrm{V}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1\,\mathrm{V} = c_1 0 \frac{1}{\mathrm{s}} + c_2 3 \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad -1{,}5\,\mathrm{V} = c_1(-3)\frac{1}{\mathrm{s}} + c_2(-3)\frac{1}{\mathrm{s}},$$

mit den Lösungen $c_1 = \frac{1}{6}\mathrm{Vs}$ und $c_2 = \frac{1}{3}\mathrm{Vs}$. Dabei ist zu beachten, dass die Konstanten c_1 und c_2 von den Eigenvektoren abhängig sind und lediglich das Produkt $c_1\boldsymbol{q}_1$ bzw. $c_2\boldsymbol{q}_2$ eindeutig bestimmt ist.

d) Die Kondensatorspannung u_{C1} ergibt sich aus der e-Funktion, die durch c_2 charakterisiert ist, da $q_{11} = 0$ ist. Die Spannung u_{C2} setzt sich aus zwei e-Funktionen (in Abbildung L13.14 gestrichelt skizziert) zusammen. Dabei werden die Funktionswerte zu jedem Zeitpunkt addiert.

e) Da die beiden Eigenwerte reell, negativ und voneinander verschieden sind, ergibt sich im Phasenportrait ein *stabiler Knotenpunkt* (Abbbildung L13.15). Von einem stabilen Knotenpunkt ist bekannt, dass alle Trajektorien gegen den stabilen Gleichgewichtszustand (0,0) für $t \to \infty$ verlaufen. In der x_1-x_2-Ebene gibt der Eigenvektor, der zum **langsamen Eigenwert** (d.h. zu dem betragsmäßig kleineren Eigenwert) gehört, die Steigung an, mit der der stabile Gleichgewichtspunkt erreicht wird. Für unser Beispiel ist das der Eigenvektor $\boldsymbol{q}_1$ zum langsamen Eigenwert λ_1. Der Eigenvektor zum **schnellen Eigenwert** (betragsmäßig größeren Eigenwert) gibt die Steigung für $t \to -\infty$ an, d.h. die Richtung aus der die Bahnkurven kommen. Um die Trajektorien für verschiedene Anfangswerte skizzieren zu können, müssen daher zuerst die Richtungen der Eigenvektoren eingezeichnet werden. Ferner ist zu beachten, dass sich die einzelnen Trajektorien nie schneiden.

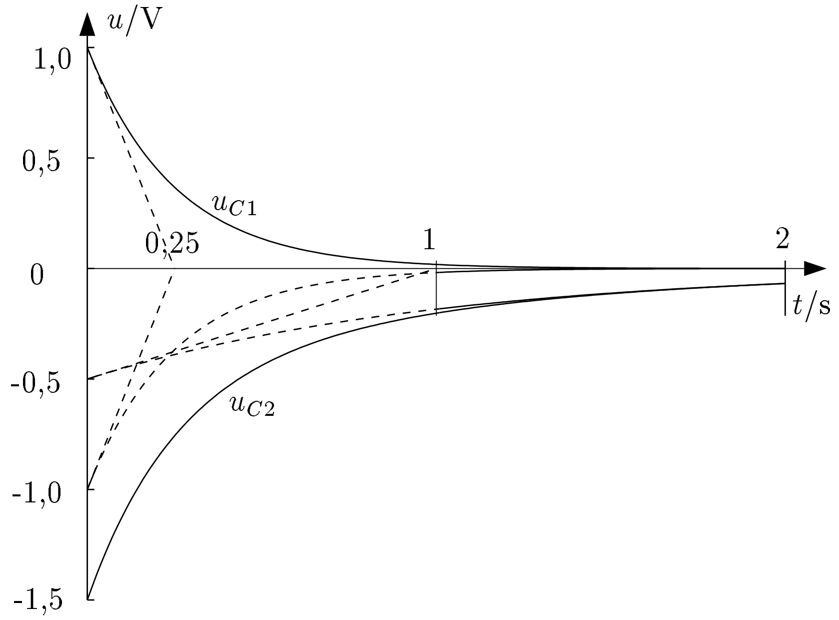


Abbildung L13.14: Zeitverlauf $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$ zu Schaltung Abbildung 13.1, Elementewerte nach 13.7

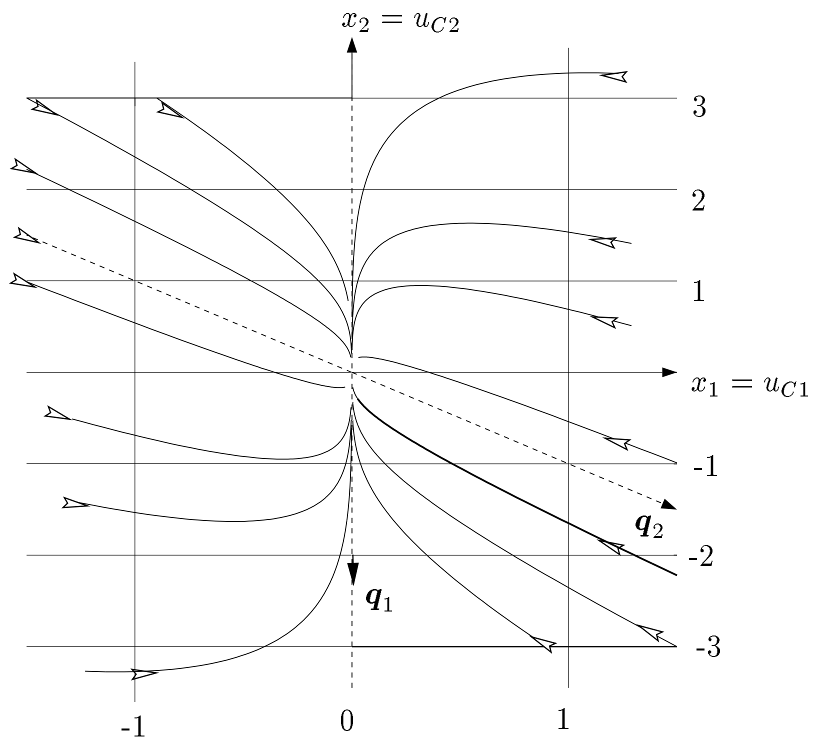


Abbildung L13.15: Phasenportrait $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$ zu Schaltung 13.1, Werte nach 13.7

L13.8 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (2)

a) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

und man erhält für $T = 5\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = 4\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = 1\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \lambda_2 = 4\frac{1}{\mathrm{s}}$$

b) Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

c) Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} = c_1 \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} + c_2 \exp\left(\frac{4t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Da beide Eigenwerte reell und positiv sind, erhält man als Lösung zwei exponentiell anklingende e-Funktionen mit negativen Zeitkonstanten $\tau_1 = -1\mathrm{s}$ und $\tau_2 = -0,25\mathrm{s}$. Für die Anfangswerte $u_{C1}(0) = 1\mathrm{V}$ und $u_{C2}(0) = -1\mathrm{V}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1\,\mathrm{V} = c_1 0\frac{1}{\mathrm{s}} + c_2(-3)\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad -1\,\mathrm{V} = c_1(-3)\frac{1}{\mathrm{s}} + c_2(-3)\frac{1}{\mathrm{s}}$$

mit den Lösungen $c_1 = \frac{2}{3}\mathrm{Vs}$ und $c_2 = -\frac{1}{3}\mathrm{Vs}$, und man erhält als spezielle Lösung dieser Anfangswerte

$$u_{C1}(t) = 1\,\mathrm{V} \exp\left(\frac{4t}{\mathrm{s}}\right), \qquad u_{C2}(t) = -2\,\mathrm{V} \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + 1\,\mathrm{V} \exp\left(\frac{4t}{\mathrm{s}}\right)$$

d) Die Spannung $u_{C1}(t)$ besteht nur aus einer einzigen e-Funktion. $u_{C2}(t)$ setzt sich aus zwei e$-$Funktionen zusammen, die zu jedem Zeitpunkt addiert werden. Dabei strebt der erste Term gegen $-\infty$ (in Abbildung L13.16 gestrichelt), der zweite Term gegen $+\infty$. Es überwiegt aber der zweite Term, da 1V $\exp\left(\frac{4t}{\mathrm{s}}\right)$ wesentlich schneller ansteigt als -2V $\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$ abfällt. Deshalb wird $u_{C2}(t)$ für $t \to \infty$ gegen $+\infty$ verlaufen.

e) Da die Eigenwerte reell, positiv und voneinander verschieden sind, ergibt sich im Phasenportrait ein *instabiler Knoten* (Abbbildung L13.17). Das bedeutet, dass es keinen stabilen Gleichgewichtspunkt gibt. Für $t \to \infty$ verlaufen die Bahnkurven in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gegen $(+\infty, +\infty)$, $(+\infty, -\infty)$,$(-\infty, +\infty)$ oder $(-\infty, -\infty)$. Für $t \to -\infty$ nähern sich die Trajektorien dem Punkt $(0, 0)$. Daraus folgt, dass das Phasenportrait qualitativ genauso verläuft wie beim stabilen Knoten, nur dass die Bahnkurven in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Zeichnet man die Trajektorien auch für negative Zeiten, so beginnen alle Kurven im Punkt $(0, 0)$. Der Eigenvektor zum **langsamen Eigenwert** (hier $\boldsymbol{q}_1$) bestimmt die Steigung im Punkt $(0, 0)$, und der Eigenvektor zum **schnellen Eigenwert** (hier $\boldsymbol{q}_2$) die Richtung für $t \to \infty$.

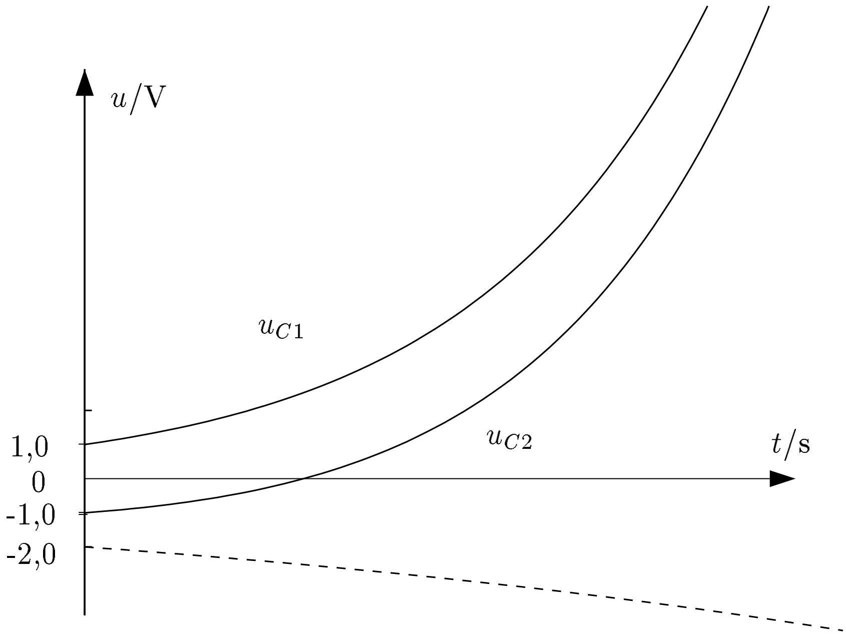


Abbildung L13.16: Zeitverlauf $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$

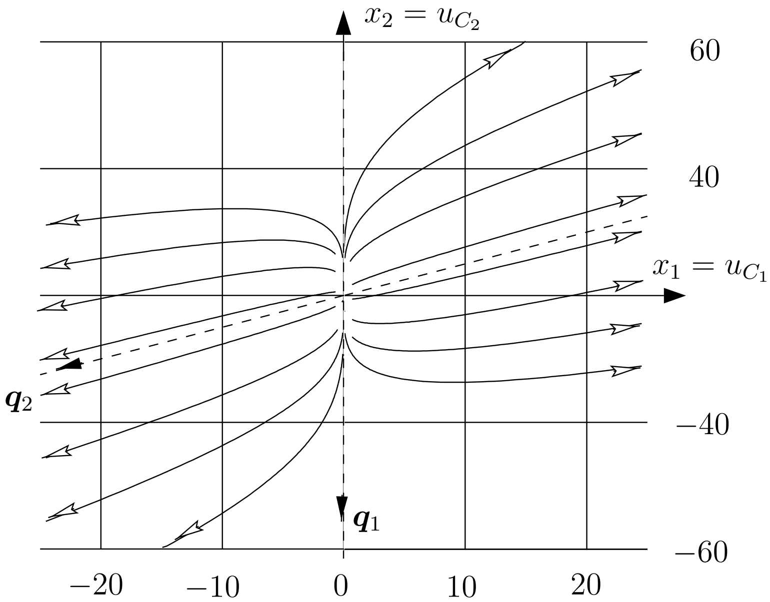


Abbildung L13.17: Phasenportrait $u_{C2}(u_{C1})$

L13.9 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (3)

a) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

und man erhält für $T = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = -1\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = 1\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = -1\frac{1}{\mathrm{s}},$$

b) Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

c) Die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} = c_1 \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{t}{\mathrm{s}} + c_2 \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Da beide Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen besitzen, erhalten wir als Lösung eine ansteigende und eine abklingende e-Funktion mit den Zeitkonstanten $\tau_1 = -1\mathrm{s}$ und $\tau_2 = 1\mathrm{s}$. Für die Anfangswerte $u_{C1}(0) = 1\mathrm{V}$ und $u_{C2}(0) = -1\mathrm{V}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1\,\mathrm{V} = c_1 0\frac{t}{\mathrm{s}} + c_2 2\frac{t}{\mathrm{s}}, \qquad -1\,\mathrm{V} = c_1(-3)\frac{t}{\mathrm{s}} + c_2(-3)\frac{t}{\mathrm{s}}$$

mit den Lösungen $c_1 = -\frac{1}{6}\mathrm{Vs}$ und $c_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Vs}$ erhält man als spezielle Lösung für diese Anfangswerte

$$u_{C1}(t) = 1\,\mathrm{V} \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right), \qquad u_{C2}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{V} \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) - \frac{3}{2}\,\mathrm{V} \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

d) Die Spannung u_{C1} ergibt sich aus einer abklingenden e-Funktion. Dagegen setzt sich $u_{C2}(t)$ aus einer anklingenden und einer abklingenden e-Funktion zusammen (dünn eingezeichnet). Für $t \to \infty$ kann der zweite Term mit der positiven Zeitkonstanten (negativer Eigenwert) vernachlässigt werden, so dass u_{C2} gegen $+\infty$ verläuft (Abbildung L13.18).

e) Da die Eigenwerte reell sind und unterschiedliche Vorzeichen besitzen, ergibt sich im Phasenportrait ein *Sattelpunkt* (Abbbildung L13.19). Der Eigenvektor zum **negativen** Eigenwert (hier $\boldsymbol{q}_2$) gibt dabei die Richtung an, aus der die Bahnkurven für $t \to -\infty$ kommen; der Eigenvektor zum **positiven** Eigenwert (hier $\boldsymbol{q}_1$) gibt die Richtung an, in die die Trajektorien für $t \to +\infty$ verlaufen. Ein stabiler Gleichgewichtszustand existiert für diesen Fall nicht. Die Bahnkurven verlaufen also bei einem Sattelpunkt aus der Richtung des Eigenvektors zum negativen Eigenwert auf den Ursprung zu, „biegen" vor dem Ursprung ab und verlaufen in Richtung des Eigenvektors zum positiven Eigenwert. Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt (Abbildung L13.19).

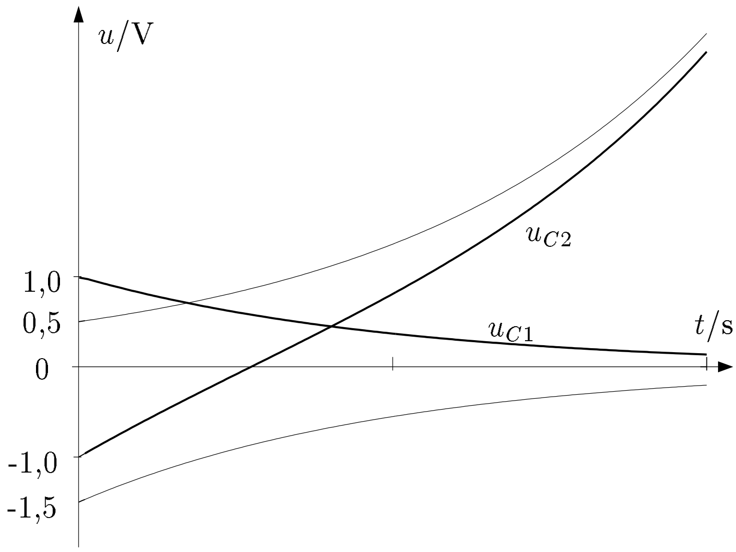


Abbildung L13.18: Zeitverlaufverlauf $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$

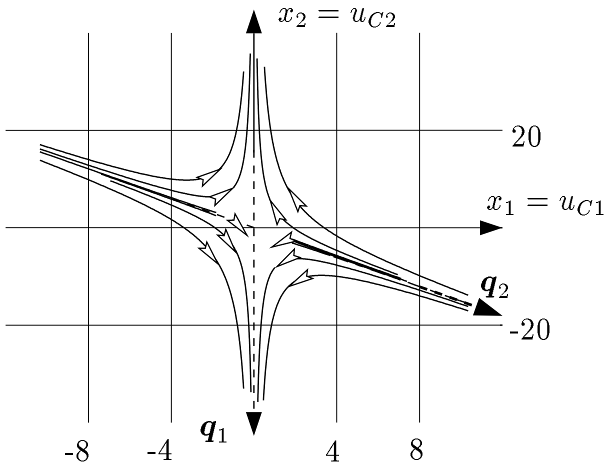


Abbildung L13.19: Phasenportrait u_{C1} versus u_{C2}

L13.10 Lösen von homogenen Zustandsgleichungen (4)

a) Der Zustandsvektor besteht aus der Kondensatorspannung u_C und dem Spulenstrom i_L. Das resistive Netzwerk beinhaltet hier nur den Widerstand R. Bei einem C-L-Netzwerk müssen der Torstrom i_1 und die Torspannung u_2 in Abhängigkeit von den Zustandsvariablen ausgedrückt werden. Es gilt:

$$i_1 = i_R - i_2 = Gu_1 - i_2, \qquad u_2 = u_1$$

Daraus bestimmt man die inverse Hybridmatrix

$$\boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} G & -1 \\ & \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Zeilen der Matrix $\boldsymbol{H}'$ entsprechen den zu eliminierenden Torvariablen i_1 und u_2 des resisitiven Netzwerks, die Spalten den Torzustandvariablen u_1 und i_2. Dividiert man die erste Zeile von $\boldsymbol{H}'$ durch $-C$ und die zweite Zeile durch $-L$, so erhält man die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & \frac{1}{C} \\ & \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4\frac{1}{\mathrm{s}} & 1\frac{1}{F} \\ & \\ -3\frac{1}{H} & 0\frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

und man erhält für $T = -4\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = 3\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = -1\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = -3\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -3\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = c_1 \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -3\,\mathrm{A} \end{bmatrix} + c_2 \exp\left(-\frac{3t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$$

Für die Anfangswerte $u_C(0) = 1\text{V}$ und $i_L(0) = -1\text{A}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1 = -c_1 - c_2, \qquad -1 = -3c_1 - c_2$$

mit den Lösungen $c_1 = 1$ und $c_2 = -2$, und man erhält als spezielle Lösung für diese Anfangswerte

$$u_C(t) = -1\,\text{V}\exp\left(-\frac{t}{\text{s}}\right) + 2\,\text{V}\exp\left(-\frac{3t}{\text{s}}\right), \quad i_L(t) = -3\,\text{A}\exp\left(-\frac{t}{\text{s}}\right) + 2\,\text{A}\exp\left(-\frac{3t}{\text{s}}\right)$$

Die Kondensatorspannung bzw. der Spulenstrom setzen sich aus zwei e-Funktionen (dünn skizziert) mit den Zeitkonstanten $\tau_1 = 1\text{s}$ und $\tau_2 = \frac{1}{3}\text{s}$ zusammen (Abbildung L13.20). Da der erste Term mit der größeren Zeitkonstante langsamer abklingt als der zweite Term, ergibt sich für die zeitabhängigen Verläufe ein „Überschwingen".

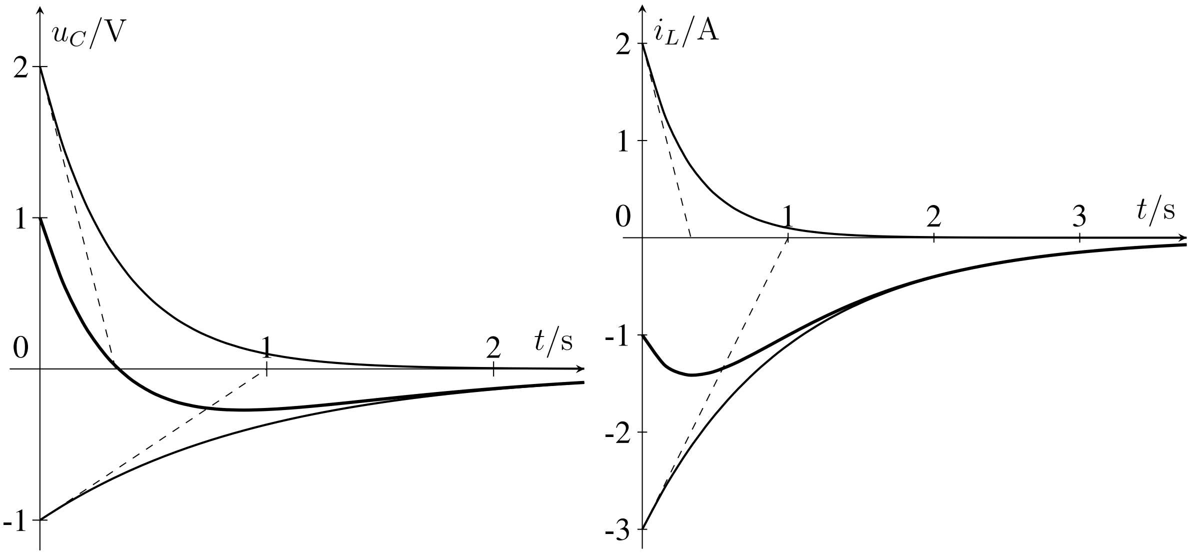


Abbildung L13.20: zu L13.10 b: Zeitverlaufverlauf $u_C(t)$, $i_L(t)$, Summenkurve fett

c) Im Phasenportrait (Abbildung L13.21) ergibt sich ein stabiler Knoten, wobei die Richtung der Trajektorie für $t \to -\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_2$ und für $t \to +\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_1$ bestimmt ist.

d) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4\frac{1}{\text{s}} & 1\frac{1}{\text{F}} \\ -3\frac{1}{\text{H}} & 0\frac{1}{\text{s}} \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

und man erhält für $T = 4\frac{1}{\text{s}}$ und $\Delta = 3\frac{1}{\text{s}^2}$:

$$\lambda_1 = 1\frac{1}{\text{s}}, \qquad \lambda_2 = 3\frac{1}{\text{s}},$$

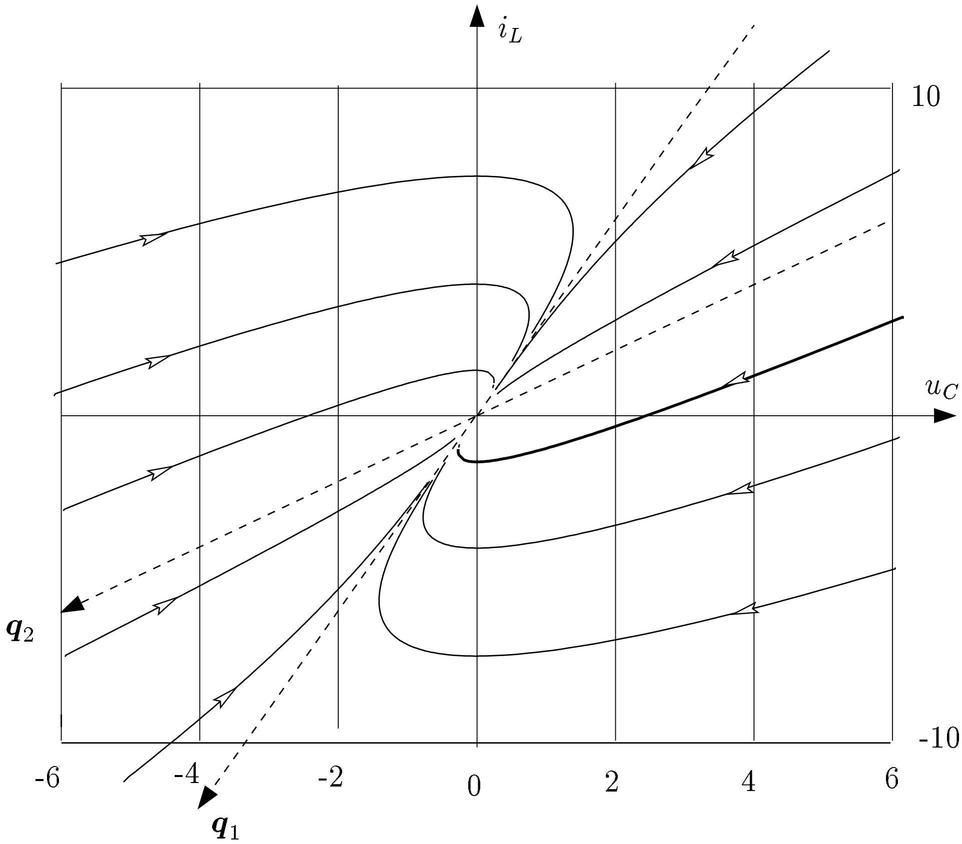


Abbildung L13.21: Phasenportrait u_C, $i_L(t)$, Verlauf für die gewählten Anfangswerte fett

Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 3\,\mathrm{A} \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

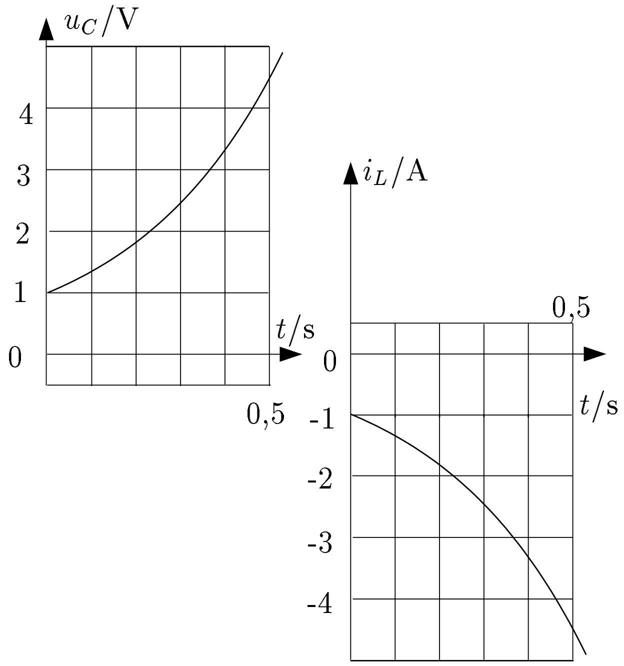
Die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = c_1 \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 3\,\mathrm{A} \end{bmatrix} + c_2 \exp\left(\frac{3t}{\mathrm{s}}\right) \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Für die Anfangswerte $u_C(0) = 1\mathrm{V}$ und $i_L(0) = -1\mathrm{A}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$1 = -c_1 - c_2, \qquad -1 = 3c_1 + c_2$$

mit den Lösungen $c_1 = 0$ und $c_2 = -1$, und man erhält für diese Anfangswerte die in Abbildung L13.22 angegebene spezielle Lösung.



$$u_C(t) = 1\,\mathrm{V} \exp\left(\tfrac{3t}{\mathrm{s}}\right), \quad i_L(t) = -1\,\mathrm{A} \exp\left(\tfrac{3t}{\mathrm{s}}\right)$$

Abbildung L13.22: zu L13.10 d: Zeitverlauf $u_C(t)$, $i_L(t)$

e) Im Phasenportrait (Abbildung L13.23) ergibt sich ein instabiler Knoten, wobei die Richtung der Trajektorien für $t \to -\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_1$ und für $t \to +\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_2$ bestimmt ist.

f) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{\mathrm{s}} & 1\frac{1}{\mathrm{F}} \\ 2\frac{1}{\mathrm{H}} & 0\frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix}$$

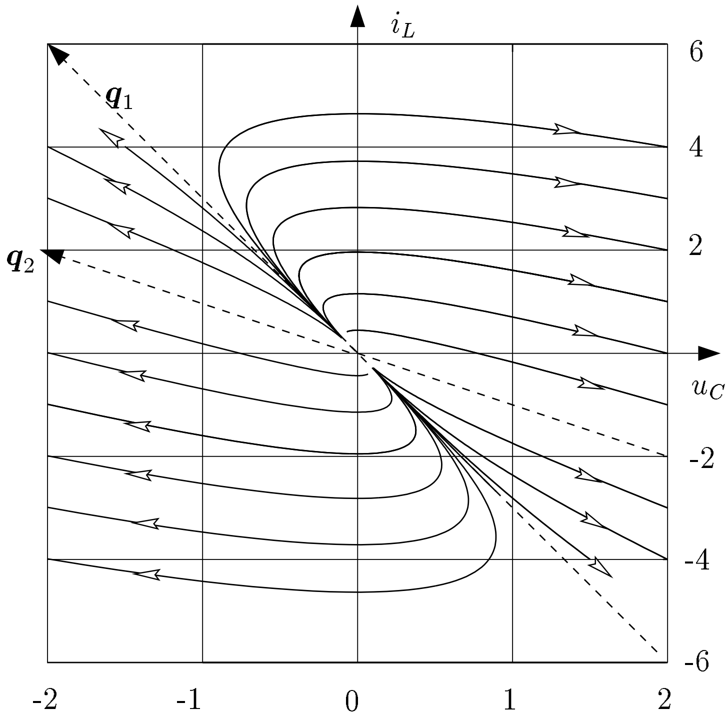


Abbildung L13.23: zu L13.10 e: Phasenportrait u_C, i_L

Die Eigenwerte berechnet man nach der Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

und man erhält für $T = -1\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = -2\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = 1\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = -2\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \left[\begin{array}{c} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1\,\mathrm{V} \\ -2\,\mathrm{A} \end{array}\right], \qquad \boldsymbol{q}_2 = \left[\begin{array}{c} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{array}\right].$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\left[\begin{array}{c} u_C(t) \\ i_L(t) \end{array}\right] = c_1 \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \left[\begin{array}{c} -1\,\mathrm{V} \\ -2\,\mathrm{A} \end{array}\right] + c_2 \exp\left(-\frac{2t}{\mathrm{s}}\right) \left[\begin{array}{c} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{array}\right]$$

Für die Anfangswerte $u_C(0) = -1\mathrm{V}$ und $i_L(0) = -1,5\mathrm{A}$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$-1 = -c_1 - c_2, \qquad -1,5 = -2c_1 + c_2$$

mit den Lösungen $c_1 = \frac{5}{6}$ und $c_2 = \frac{1}{6}$, und man erhält als spezielle Lösung für diese Anfangswerte

$$u_C(t) = -\frac{5}{6}\,\mathrm{V} \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) - \frac{1}{6}\,\mathrm{V} \exp\left(-\frac{2t}{\mathrm{s}}\right), \quad i_L(t) = -\frac{5}{3}\,\mathrm{A} \exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + \frac{1}{6}\,\mathrm{A} \exp\left(-\frac{2t}{\mathrm{s}}\right)$$

Die Kondensatorspannung bzw. der Spulenstrom setzen sich aus der Überlagerung einer abklingenden und einer anklingenden e-Funktion zusammen (Abbildung L13.24).

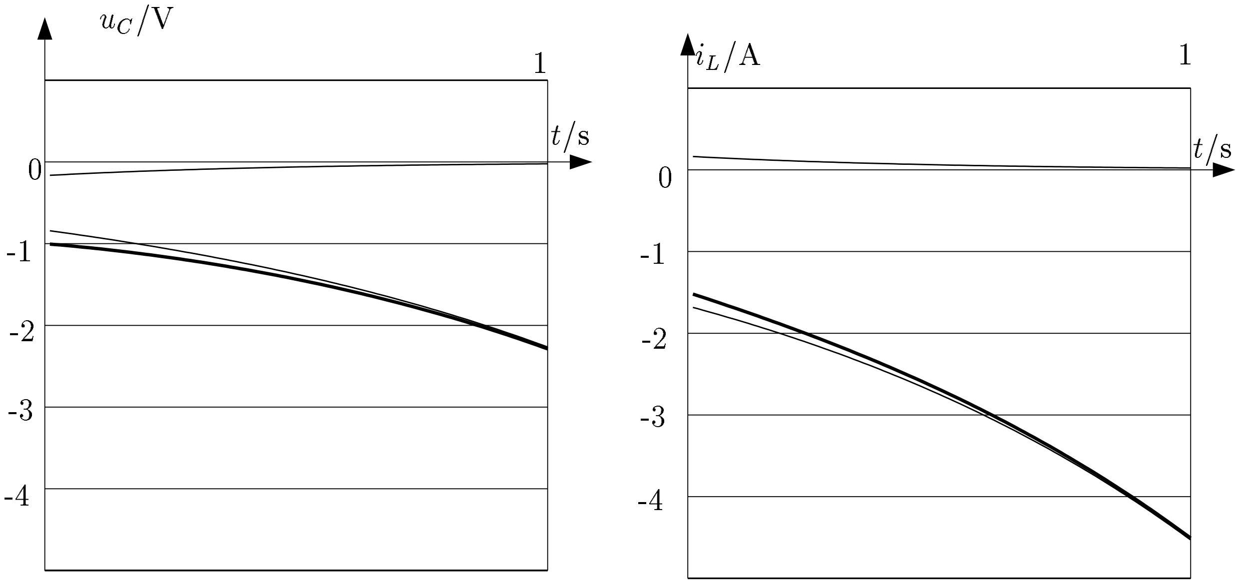


Abbildung L13.24: zu L13.10 f: Phasenportrait Zeitverlauf u_C, i_L, Summenkurven fett

g) Im Phasenportrait (Abbildung L13.25) ergibt sich ein Sattelpunkt, wobei die Richtung der Trajektorien für $t \to -\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_2$ (negativer Eigenwert) und für $t \to +\infty$ durch den Eigenvektor $\boldsymbol{q}_1$ (positiver Eigenwert) bestimmt ist.

h) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0\frac{1}{\mathrm{s}} & 1\frac{1}{\mathrm{F}} \\ -1\frac{1}{\mathrm{H}} & 0\frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix}$$

Für die Eigenwerte erhält man für $T = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = 1\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = \mathrm{j}\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = -\mathrm{j}\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Es ergeben sich zwei konjugiert komplexe Eigenwerte. Daraus folgt, dass auch die Eigenvektoren zueinander konjugiert komplex sind. Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -\mathrm{j}\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ \mathrm{j}\,\mathrm{A} \end{bmatrix}.$$

Setzt man die Konstanten c_1 und c_2 ebenfalls konjugiert komplex an, so erhält man für die allgemeine Lösung wieder reelle Größen:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t)\, \boldsymbol{q}_1 + c_1^* \exp(\lambda_1^* t)\, \boldsymbol{q}_1^* = 2\,\mathrm{Re}\,\{c_1 exp\,(\lambda_1 t)\, \boldsymbol{q}_1\}$$

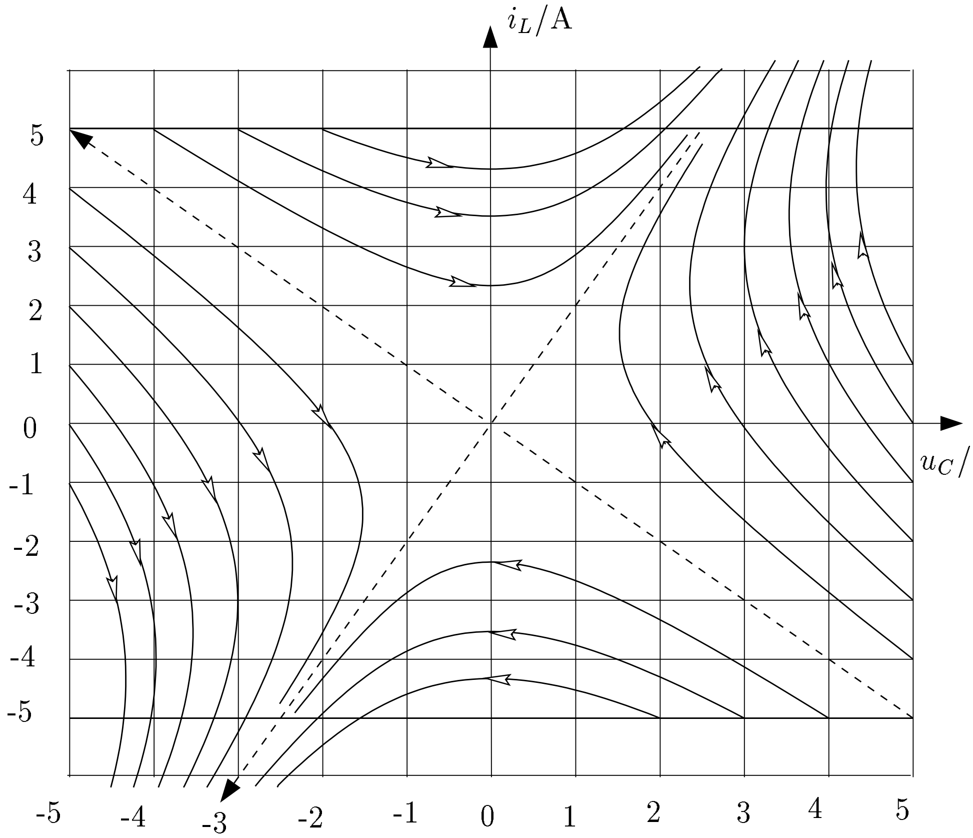


Abbildung L13.25: zu L13.10 g: Phasenportrait u_C, i_L

Dabei stecken in der komplexen Konstanten c_1 zwei Informationen, nämlich der Realteil und der Imaginärteil $c_1 = \gamma + \mathrm{j}\delta$ die durch die Anfangsbedingung bestimmt sind. Mit $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$ und $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_r + \mathrm{j}\boldsymbol{q}_i$ (Zerlegung in Real- und Imaginärteil) gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= 2\,\mathrm{Re}\left\{(\gamma + \mathrm{j}\delta)\exp\left((\alpha + \mathrm{j}\beta)\,t\right)(\boldsymbol{q}_r + \mathrm{j}\boldsymbol{q}_i)\right\} = \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\{\exp(\alpha t)\exp(\mathrm{j}\beta t)\left((\gamma\boldsymbol{q}_r - \delta\boldsymbol{q}_i) + \mathrm{j}\,(\gamma\boldsymbol{q}_i + \delta\boldsymbol{q}_r)\right)\right\}, \\
\boldsymbol{x}(t) &= 2\exp(\alpha t)\left((\gamma\boldsymbol{q}_r - \delta\boldsymbol{q}_i)\cos(\beta t) - (\gamma\boldsymbol{q}_i + \delta\boldsymbol{q}_r)\sin(\beta t)\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine allgemeine Lösung für komplexe Eigenwerte hergeleitet. Da in dieser Aufgabe die Eigenwerte rein imaginär sind, ergibt sich für die Dämpfung α der Wert Null. Es gilt mit

$$\boldsymbol{q}_r = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_i = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{q}_1\} \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = 2\left(\gamma \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{A} \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) - 2\left(\gamma \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

Die Konstanten γ und δ müssen an die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0)$ angepasst werden. Setzt man die Anfangswerte $u_C(0) = 1\mathrm{V}$ in $i_L(0) = 0\mathrm{A}$ ein, so erhält man wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$1 = 2\,(-1\gamma - 0\delta)\,, \quad 0 = 2\,(0\gamma - (-1)\delta)$$

mit der Lösung $\gamma = -\frac{1}{2}$ und $\delta = 0$. Für diese Anfangsbedingung lautet die spezielle Lösung (Abbbildung L13.26):

$$u_C(t) = 1\,\mathrm{V}\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right), \qquad i_L(t) = -1\,\mathrm{A}\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

i) Betrachtet man das Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene (reellwertige Normalform, siehe Abbildung 13.15 im Vorlesungsskriptum), oder wie in Abbildung L13.27 in der u_C-i_L-Ebene (in der ξ_1-ξ_2-Ebene verlaufen die Trajektorien immer im Gegenuhrzeigersinn!), so ergibt sich bei rein imaginären Eigenwerten ein *Wirbelpunkt*. Die Trajektorien bestehen aus konzentrischen Ellipsen.

j) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{\mathrm{s}} & 1\frac{1}{\mathrm{F}} \\ & \\ -2\frac{1}{\mathrm{H}} & 0\frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix}$$

Für die Eigenwerte erhält man für $T = -2\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\varDelta = 2\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = (-1 + \mathrm{j})\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = (-1 - \mathrm{j})\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Es ergeben sich zwei konjugiert komplexe Eigenwerte. Daraus folgt, dass auch die Eigenvektoren zueinander konjugiert komplex sind. Für die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ (-1 - \mathrm{j})\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1^* = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ (-1 + \mathrm{j})\,\mathrm{A} \end{bmatrix}.$$

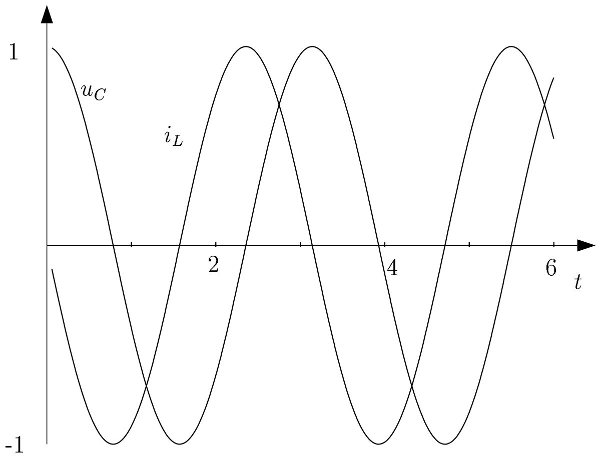


Abbildung L13.26: zu L13.10 h: Zeitverlauf $u_C(t), i_L(t)$

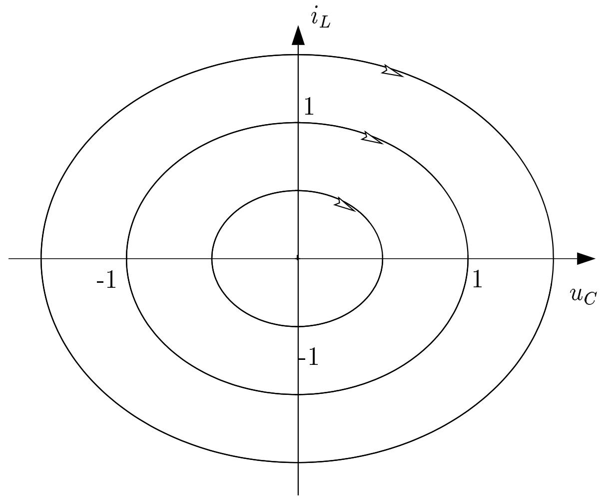


Abbildung L13.27: zu L13.10 i: Phasenportrait u_C, i_L

Für den Real- bzw. Imaginärteil gilt

$$\boldsymbol{q}_r = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_i = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$$

Mit der allgemeinen Lösung

$$\boldsymbol{x}(t) = 2\exp(\alpha t)\left((\gamma \boldsymbol{q}_r - \delta \boldsymbol{q}_i)\cos(\beta t) - (\gamma \boldsymbol{q}_i + \delta \boldsymbol{q}_r)\sin(\beta t)\right)$$

gilt für die zeitabhängigen Verläufe der Zustandsvariablen:

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = 2\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\left(\gamma \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) -$$
$$2\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\left(\gamma \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

Die Konstanten γ und δ müssen an die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0)$ angepasst werden. Setzt man die Anfangswerte $u_C(0) = -2\mathrm{V}$ und $i_L(0) = -2\mathrm{A}$ ein, so erhält man wegen $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ und $\mathrm{e}^0 = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$-2 = 2\,(-1\gamma - 0\delta)\,, \quad -2 = 2\,(-1\gamma - (-1)\delta)$$

mit der Lösung $\gamma = 1$ und $\delta = 0$. Für diese Anfangsbedingung lautet die spezielle Lösung (Abbildung L13.28):

$$u_C(t) = -2\,\mathrm{V}\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

$$i_L(t) = -2\,\mathrm{A}\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + 2\,\mathrm{A}\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) = 2\,\mathrm{A}\exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

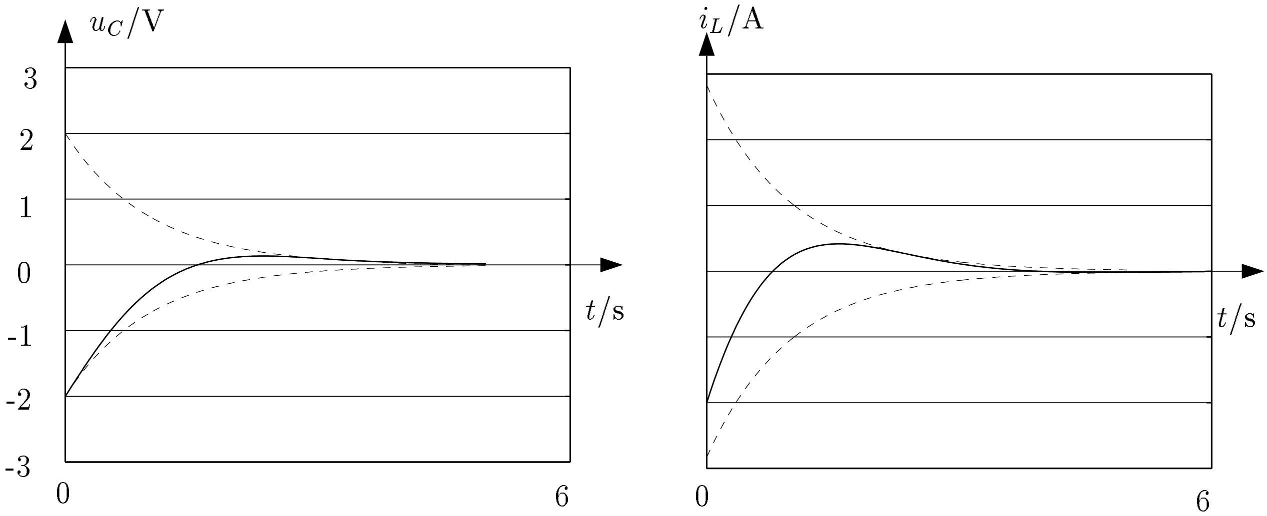


Abbildung L13.28: zu L13.10 j: Zeitverlauf von u_C und i_L

Man erhält als Lösung für die Kondensatorspannung eine Kosinusschwingung, die für $t \to \infty$ auf den Wert Null abklingt. Die e-Funktion stellt dabei eine Hüllkurve dar. Der Spulenstrom setzt sich zusammen aus der Überlagerung einer abklingenden Kosinusschwingung mit einer abklingenden Sinusschwingung, die über eine trigonometrische Umwandlung in eine phasenverschobene Sinusschwingung transformiert werden.

k) Betrachtet man das Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene (reellwertige Normalform, Abbildung 13.13 im Skriptum oder in der u_c-i_l-Ebene in Abbildung L13.29), so ergibt sich bei negativer Dämpfung ein *stabiler Strudelpunkt*. Die Trajektorien bestehen aus logarithmischen Spiralen, die auf den Ursprung im Uhrzeigersinn (in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene im Gegenuhrzeigersinn) zulaufen.

l) Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{\mathrm{s}} & 1\frac{1}{\mathrm{F}} \\ -2\frac{1}{\mathrm{H}} & 0\frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix}$$

Für die Eigenwerte erhält man für $T = 2\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = 2\frac{1}{\mathrm{s}^2}$:

$$\lambda_1 = (1+\mathrm{j})\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = (1-\mathrm{j})\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Es ergeben sich zwei konjugiert komplexe Eigenwerte. Daraus folgt, dass auch die Eigenvektoren zueinander konjugiert komplex sind.

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ (1-\mathrm{j})\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1^* \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ (1+\mathrm{j})\,\mathrm{A} \end{bmatrix}.$$

Für den Real- bzw. Imaginärteil von $\boldsymbol{q}_1$ gilt:

$$\boldsymbol{q}_r = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_i = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$$

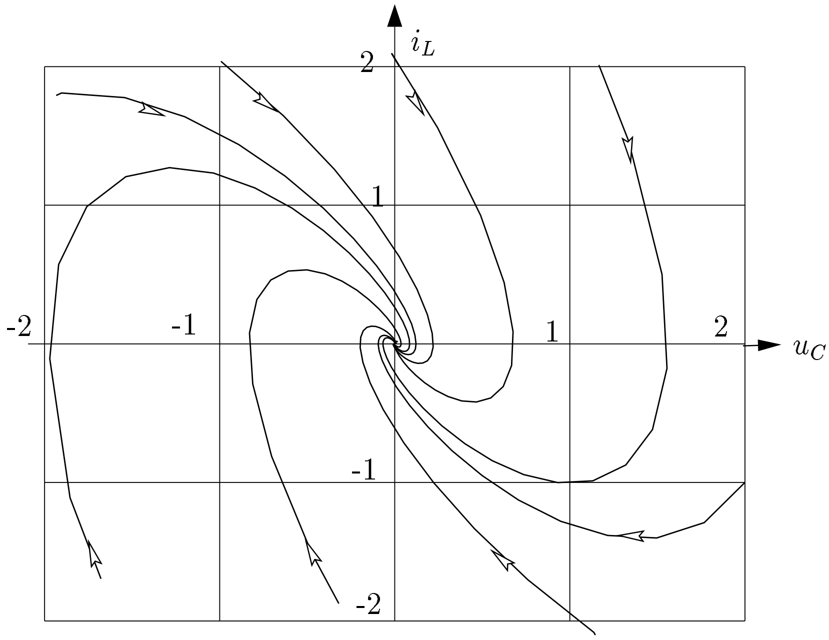


Abbildung L13.29: zu L13.10 k: Phasenportrait u_C, i_L

Mit der allgemeinen Lösung gilt für die zeitabhängigen Verläufe der Zustandsvariablen:

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = 2\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\left(\gamma \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) -$$

$$2\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\left(\gamma \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{A} \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}\right)\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

Die Konstanten γ und δ müssen an die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0)$ angepasst werden. Setzt man die Anfangswerte $u_C(0) = -2$V und $i_L(0) = 2$A ein, so erhält man wegen $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ und $\mathrm{e}^0 = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$-2 = 2\left(-1\gamma - 0\delta\right), \quad 2 = 2\left(1\gamma - (-1)\delta\right)$$

mit der Lösung $\gamma = 1$ und $\delta = 0$. Für diese Anfangsbedingung lautet die spezielle Lösung:

$$u_C(t) = -2\,\mathrm{V}\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

$$i_L(t) = 2\,\mathrm{A}\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + 2\,\mathrm{A}\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) = 2\,\mathrm{A}\exp\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Man erhält als Lösung für die Kondensatorspannung eine anklingende Kosinusschwingung bzw. eine anklingende phasenverschobene Sinusschwingung für den Spulenstrom (Abbildung L13.30).

m) Das Phasenportrait in der ξ_1'-ξ_2'-Ebene (reellwertige Normalform, siehe Abbildung 13.12-3 im Skript oder in der u_c-i_l-Ebene, siehe Abbildung L13.31) ist ein instabiler Strudel. Zum Zeitpunkt $t \to -\infty$ beginnen die Bahnkurven im Ursprung und bewegen sich auf logarithmischen Spiralen im Uhrzeigersinn nach außen (in der ξ_1-ξ_2-Ebene im Gegenuhrzeigersinn).

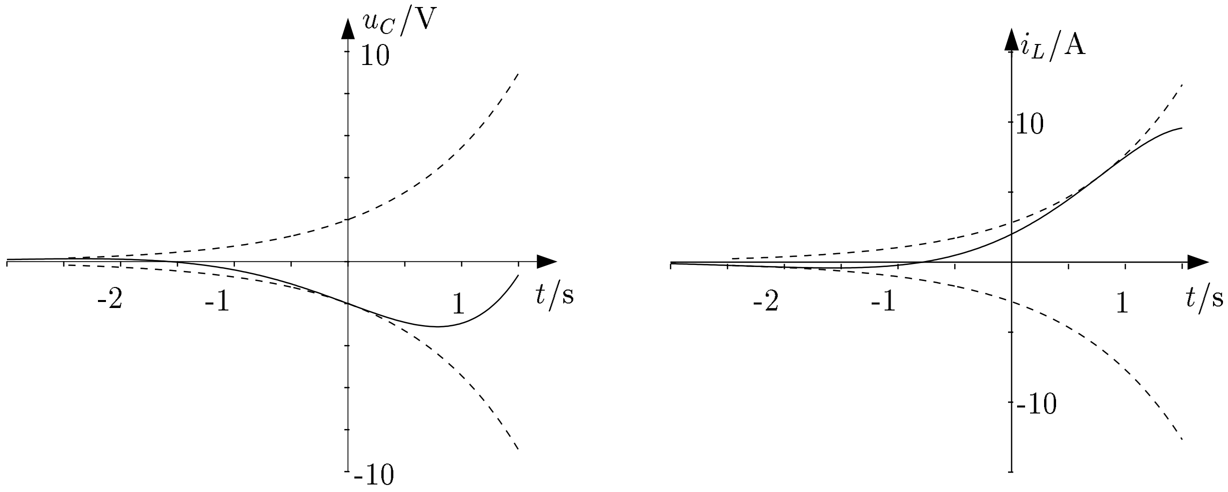


Abbildung L13.30: zu L13.10 l: Zeitverlauf $u_C(t)$, $i_L(t)$

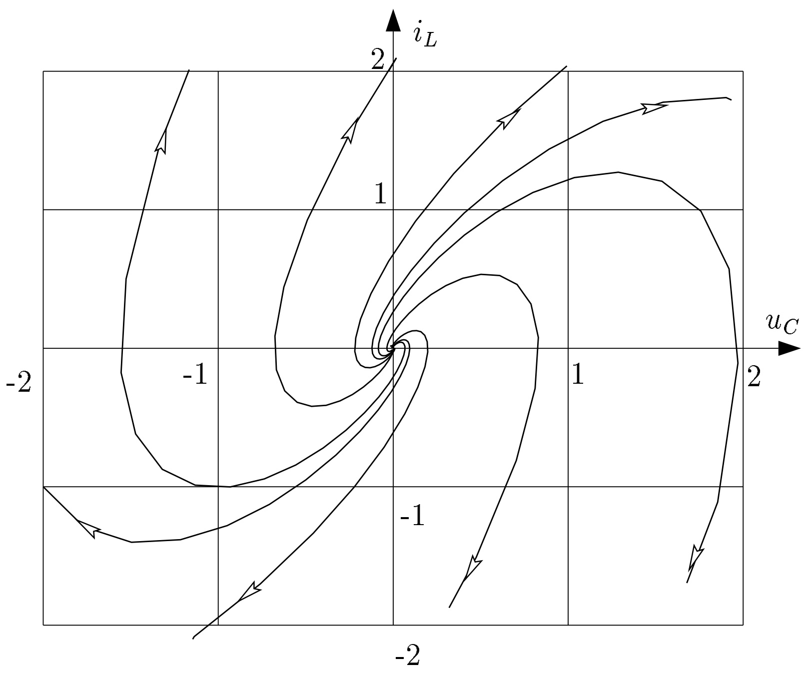


Abbildung L13.31: zu L13.10 m: Zeitverlauf u_C, i_L

L13.11 Umladen von Kapazitäten

a) $$E = \int_0^{q_C} u_C(q'_C)\,\mathrm{d}q'_C = \int_0^{Q} \frac{1}{C} q'_C\,\mathrm{d}q'_C = \left[\frac{1}{C}\frac{q'^2_C}{2}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

b) $$Q = q_C = Cu_C = CU$$

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2U^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

c) $$i_{C1} = C_1 \dot{u}_{C1}$$

d) $$i_{C1} = -i_R = -\frac{u_R}{R} = -\frac{(u_{C1} - u_{C2})}{R} = -\frac{u_{C1}}{R} + \frac{u_{C2}}{R}$$

$$i_{C2} = i_R = -i_{C1} = \frac{u_{C1}}{R} - \frac{u_{C2}}{R}$$

e) $$\dot{u}_{C1} = \frac{i_{C1}}{C_1} = -\frac{u_{C1}}{RC_1} + \frac{u_{C2}}{RC_1}$$

$$\dot{u}_{C2} = \frac{i_{C2}}{C_2} = \frac{u_{C1}}{RC_2} - \frac{u_{C2}}{RC_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}$$

f) $$\det \boldsymbol{A} = \left(\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \left(\frac{1}{RC}\right)^2\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{2}\right)^2 - \det\boldsymbol{A}} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 0}$$
$$= -\frac{1}{RC} \pm \frac{1}{RC} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{2}{RC} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{q}_1 \sim \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} - 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{q}_2 \sim \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} - \left(-\frac{2}{RC}\right) \end{bmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

g) $$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (weil } \boldsymbol{Q} \text{ unitär ist)}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2}{RC} & \frac{2}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{RC} \end{bmatrix}$$

h) $$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{RC} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{01} \cdot \mathrm{e}^{0 \cdot t} \\ \xi_{02} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}} \end{bmatrix}$$

i) $$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q^{-1}x} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{Q^{-1}x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U_0$$

j) $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q\xi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u_{C1}(t) = x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1(t) + \xi_2(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}} \right) = \frac{U_0}{2} \left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}} \right) \end{aligned}$$

k) $$u_{C1,\infty} = \lim_{t\to\infty} u_{C1}(t) = \frac{U_0}{2}$$

$$u_{C2,\infty} = \lim_{t\to\infty} u_{C2}(t) = \frac{U_0}{2}$$

l) $$i_R = i_{C2} = C_2 \cdot \dot{u}_{C2} = C \cdot \dot{u}_{C2}$$

m) $$i_R(t) = C\dot{u}_{C2}(t) = C\frac{U_0}{2} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}} \right) \left(-\frac{2}{RC} \right) = \frac{U_0}{R} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$p_R(t) = Ri_R^2 = \frac{U_0^2}{R} \mathrm{e}^{-\frac{4t}{RC}}$$

n) $$\Delta E = \int_0^\infty p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{R} \left[\mathrm{e}^{-\frac{4t}{RC}} \left(-\frac{RC}{4} \right) \right]_0^\infty = \frac{U_0^2}{R} \frac{RC}{4} = \frac{1}{4} C U_0^2$$

o) Die Energie bleibt unverändert, da sie nicht von R abhängt.

p) $$E_0 = E_{C1,0} + E_{C2,0} = \frac{1}{2} C U_0^2 + 0 = \frac{1}{2} C U_0^2$$

$$E_\infty = E_{C1,\infty} + E_{C2,\infty} = \frac{1}{2} C \left(\frac{U_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} C \left(\frac{U_0}{2} \right)^2 = \frac{2 \cdot 1}{2} C \frac{U_0^2}{4} = \frac{1}{4} C U_0^2$$

$$E_0 - E_\infty = \Delta E$$

L13.12 Wien-Robinson-Oszillator

a) $$u_{R_{v1}} = u_1, \quad i_{R_{v1}} = \frac{1}{R_{v1}} u_{R_{v1}} = i_{R_{v2}},$$

$$u_{\text{out}} = \frac{R_{v1} + R_{v2}}{R_{v1}} u_1 = k u_1,$$ nicht invertierender Verstärker.

ESB siehe Abbildung L13.32.

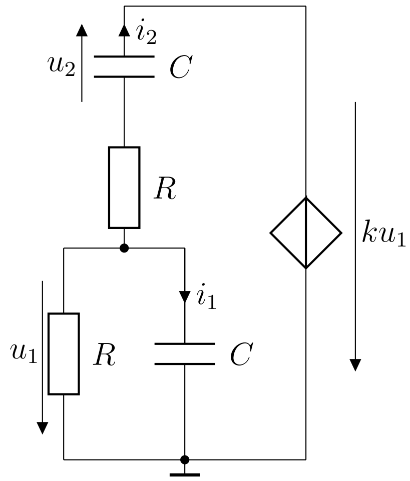


Abbildung L13.32: ESB: Wien-Robinson-Oszillator mit OpAmp im streng linearen Bereich

b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right] = \frac{1}{C}\left.\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix}\right],$$

$$u_2 = -ku_1 + u_1 - Ri_2, \quad \Rightarrow i_2 = \frac{1-k}{R}u_1 - \frac{u_2}{R},$$

$$i_1 = -i_2 - \frac{u_1}{R}, \quad \Rightarrow i_1 = \frac{k-2}{R}u_1 + \frac{u_2}{R},$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right]}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} k-2 & 1 \\ 1-k & -1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right]}_{\boldsymbol{x}}, \quad RC = \tau.$$

c) $$\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{sp}(\boldsymbol{A})}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{sp}(\boldsymbol{A})^2}{4} - \det \boldsymbol{A}}$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\frac{k-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(k-3)^2}{4} - ((2-k)-(1-k))}\right)$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left(k-3 \pm \sqrt{(k-3)^2-4}\right).$$

Für komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \mathrm{j}\beta$ muss die Diskriminante kleiner Null sein:

$$(k-3)^2 - 4 < 0, \quad |k-3| < 2, \quad 1 < k < 5.$$

Stabilität:

$\alpha = \mathrm{Re}\{\lambda\} > 0,$ für $5 > k > 3$, $\Rightarrow$ instabiler Strudel,

$\alpha = \mathrm{Re}\{\lambda\} = 0,$ für $k = 3$, $\Rightarrow$ Wirbelpunkt, $\lambda_{1/2} = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\tau}$,

$\alpha = \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0,$ für $1 < k < 3$, $\Rightarrow$ stabiler Strudel.

d) $$\lambda_{1/2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{\tau}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\boldsymbol{q}_1 = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{j} & 1 \\ -2 & -1-\mathrm{j} \end{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-\mathrm{j} \end{bmatrix}\mathrm{V},$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{j} \end{bmatrix}\mathrm{V}, \quad \text{da } \lambda_2 = \lambda_1^*.$$

e) Aufspalten von $\boldsymbol{q}_1$ in Real und Imaginärteil:

$$\boldsymbol{q}_\mathrm{r} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\mathrm{V}, \quad \boldsymbol{q}_\mathrm{i} = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{q}_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\mathrm{V}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \exp^{\alpha t}\left[\boldsymbol{q}_\mathrm{r}\cos(\beta t) - \boldsymbol{q}_\mathrm{i}\sin(\beta t)\right] + c_2 \exp^{\alpha t}\left[\boldsymbol{q}_\mathrm{r}\sin(\beta t) + \boldsymbol{q}_\mathrm{i}\cos(\beta t)\right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spezielle Lösung:

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{q}_\mathrm{r} + c_2\boldsymbol{q}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\mathrm{V}, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 0,$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = -2\,\mathrm{V}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + 2\,\mathrm{V}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

$$u_1 = 2\,\mathrm{V}\cos\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

$$u_2 = -2\,\mathrm{V}\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) - 2\,\mathrm{V}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right) = -2\,\mathrm{V}\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Siehe Abbildung L13.33 für die Skizze des Zeitverlaufs.

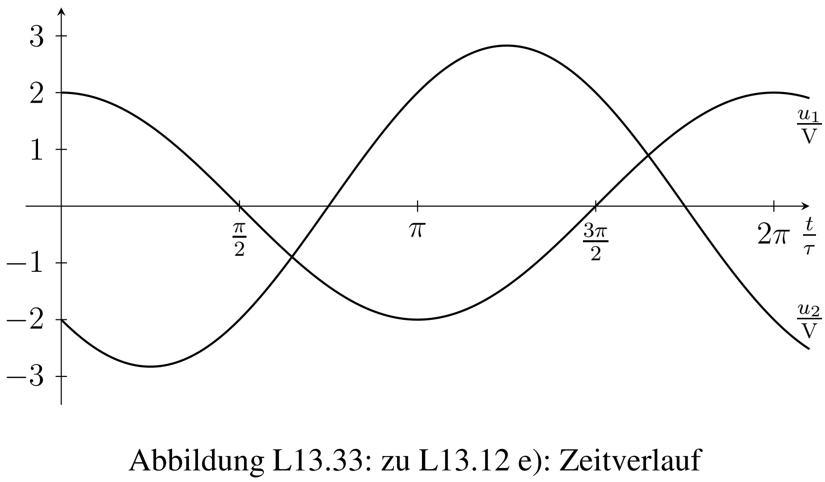


Abbildung L13.33: zu L13.12 e): Zeitverlauf

f) Siehe Abbildung L13.34 für das Phasenportrait.

$$\boldsymbol{\xi}_0' = \boldsymbol{Q}'^{-1}\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{r}} & -\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{V}, \quad \boldsymbol{Q}'^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{V}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\xi}_0' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{V}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\mathrm{V} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

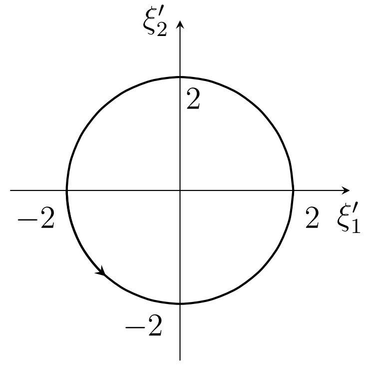


Abbildung L13.34: zu L13.12 f): Phasenportrait

L13.13 Lösen von autonomen Zustandsgleichungen

Homogenes System:

Ein homogenes System besitzt keine unabhängigen Erregungsquellen. Die Zustandbeschreibung vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Die zeitlichen Ableitungen der Komponenten des Zustandsvektors hängen im Allgemeinen von beiden Komponenten des Zustandsvektors ab. Daher ist es für diese Form nicht trivial, eine explizite Lösungsformel direkt anzugeben. Dazu wendet man auf das System eine Koordinatentransformation an, die den Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ auf einen transformierten Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi}$ abbildet.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}$$

Die Matrix besteht aus den Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ in den Spalten ($\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \ \boldsymbol{q}_2]$). Wir erhalten den transformierten Vektor $\boldsymbol{\xi}$ durch Multiplikation von $\boldsymbol{x}$ mit der *inversen Modalmatrix* $\boldsymbol{Q}^{-1}$. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Modalmatrix invertierbar ist, was bei linear unabhängigen Eigenvektoren immer erfüllt ist. Setzen wir den Ausdruck für $\boldsymbol{x}$ in die Zustandgleichung ein, so erhalten wir:

$$\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit $\boldsymbol{Q}^{-1}$, so erhält man:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}$$

Für den Ausdruck $\boldsymbol{AQ}$ gilt:

$$\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q\Lambda} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \text{da gilt:}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1 = & \ \boldsymbol{q}_1\lambda_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 = & \ \boldsymbol{q}_2\lambda_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{q}_1, \ \ \boldsymbol{q}_2] = [\boldsymbol{q}_1\lambda_1, \ \ \boldsymbol{q}_2\lambda_2] = [\boldsymbol{q}_1, \ \ \boldsymbol{q}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q\Lambda}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q\Lambda\xi} = \boldsymbol{\Lambda\xi}$$

Im Gegensatz zu unserem ursprünglichen Differentialgleichungssystem erhalten wir jetzt eine Zustandsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$, deren Nebendiagonalelemente gleich Null sind. D.h. wir haben kein verkoppeltes Differentialgleichungssystem, sondern zwei Differentialgleichungen vom Grad 1. Durch die Transformation erreicht man also eine Entkopplung der Differentialgleichungen und kann zu den transformierten Gleichungen sofort die Lösungen angeben.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Lambda\xi} \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\xi_1 \\ \\ \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2\xi_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \\ \\ \tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} \end{array}$$

$$\xi_1(t) = c_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) = c_1 \exp\left(\lambda_1 t\right), \quad \xi_2(t) = c_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) = c_2 \exp\left(\lambda_2 t\right)$$

Für die Rücktransformation muss man lediglich den Vektor $\boldsymbol{\xi}$ mit der Modalmatrix $\boldsymbol{Q}$ multiplizieren und erhält die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{Q\xi}(t) = \boldsymbol{q}_1\xi_1(t) + \boldsymbol{q}_2\xi_2(t) = \boldsymbol{q}_1 c_1 \exp\left(\lambda_1 t\right) + \boldsymbol{q}_2 c_2 \exp\left(\lambda_2 t\right)$$

Autonomes System:

Jedes autonome System, d.h. ein System mit konstanter Erregung $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ kann durch folgende Transformation auf ein homogenes System übergeführt werden, sofern die Zustandsmatrix invertierbar ist:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_0$$

Durch Einsetzen in die autonome Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}v_0$$

erhält man mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}v_0$ das homogene System

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}v_0\right) + \boldsymbol{B}v_0 = \boldsymbol{Ax}'$$

Dieses System kann durch die Transformation in die ξ_1- ξ_2-Ebene entkoppelt und auf bekannte Weise gelöst werden. Für die Rücktransformation aus der x_1'-x_2'-Ebene ergibt sich mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_0$ als stationärer Endwert im stabilen Fall der Gleichgewichtspunkt:

$$\boldsymbol{x}(t_\infty) = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_0$$

a) Das Differentialgleichungssystem ergibt sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ -\frac{S}{C_2} & -\frac{1}{R_3C_2} - \frac{1}{R_4C_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \frac{u_{\text{in}}}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Durch Einsetzen der Elementewerte erhält man das autonome Differentialgleichungssystem:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} + \left.\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right] \frac{1}{\mathrm{s}} v_0$$

Der Zustandvektor besteht aus den beiden Kondensatorspannungen. Da nur eine unabhängige Erregungsquelle existiert ($\boldsymbol{v}_0 = u_{in} = 3\mathrm{V}$), ist der Erregungsvektor ein Skalar. Dieses autonome System wird über $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_0$ in das homogene System

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \boldsymbol{x}'$$

übergeführt.

b) Für die Transformation auf Normalform werden zunächst die Eigenwerte der Zustandsmatrix berechnet und man erhält mit $T = -3\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\Delta = 2\frac{1}{\mathrm{s}^2}$

$$\lambda_1 = -2\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \lambda_2 = -1\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Durch die Transformation auf Normalform $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}'$ erhält man das entkoppelte Differentialgleichungssystem in der Normalform:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \boldsymbol{\xi}$$

In Komponentenschreibweise gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = -2\frac{1}{\mathrm{s}}\xi_1, \qquad \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = -1\frac{1}{\mathrm{s}}\xi_2$$

mit den Lösungen

$$\xi_1(t) = c_1 \exp\left(-2t/\,\mathrm{s}\right), \qquad \xi_2(t) = c_2 \exp\left(-t/\,\mathrm{s}\right).$$

Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich aus der Anfangsbedingung $\boldsymbol{\xi}(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0\mathrm{s}$. Da beide Eigenwerte reell und negativ sind, erhalten wir einen stabilen Knoten im Phasenportrait. Die Bahnkurven kommen aus der Richtung der ξ-Komponente, die zum schnellen Eigenwert (hier λ_1) gehört. Die Steigung im Ursprung ist durch die ξ-Komponente definiert, die zum langsamen Eigenwert (hier λ_2) gehört. Siehe Abbildung L13.35 für das Phasenportrait.

c) Die Eigenvektoren berechnen sich zu

$$\boldsymbol{q}_1 = \left.\begin{matrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{matrix}\right] = \left.\begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}\right] \frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \left.\begin{matrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{matrix}\right] = \left.\begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix}\right] \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

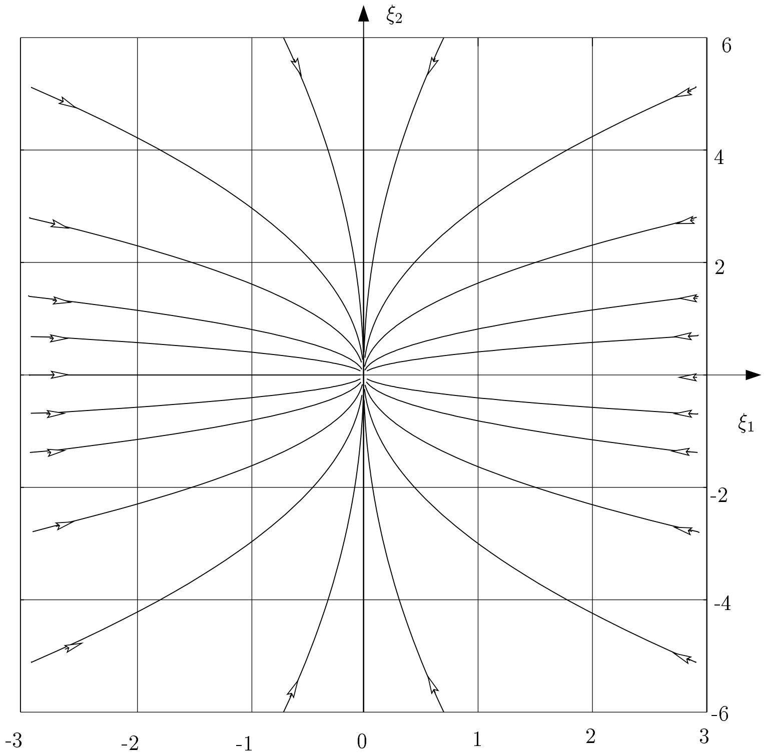


Abbildung L13.35: zu L13.13 b: Phasenportrait ξ_1, ξ_2

Damit ergibt sich die Modalmatrix

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \;\; \boldsymbol{q}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Mit der Rücktransformation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}$ erhält man die allgemeine Lösung in der x_1'-x_2'-Ebene

$$\begin{bmatrix} u_{C1}'(t) \\ u_{C2}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} c_1 \exp\left(-2\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} c_2 \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$$

Das Phasenportrait in der x_1'-x_2'-Ebene (Abbbildung L13.36) ergibt sich durch eine Drehstreckung mit den Eigenvektoren.

d) Bei der Rücktransformation auf das autonome System erhält man als stabilen Gleichgewichtspunkt nicht mehr den Ursprung, sondern den Gleichgewichtspunkt:

$$\boldsymbol{x}(t_\infty) = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}v_0 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} 3\,\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \mathrm{V}$$

Für die allgemeine Lösung gilt damit

$$\begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} c_1 \exp\left(-2\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} c_2 \exp\left(-\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \mathrm{V}$$

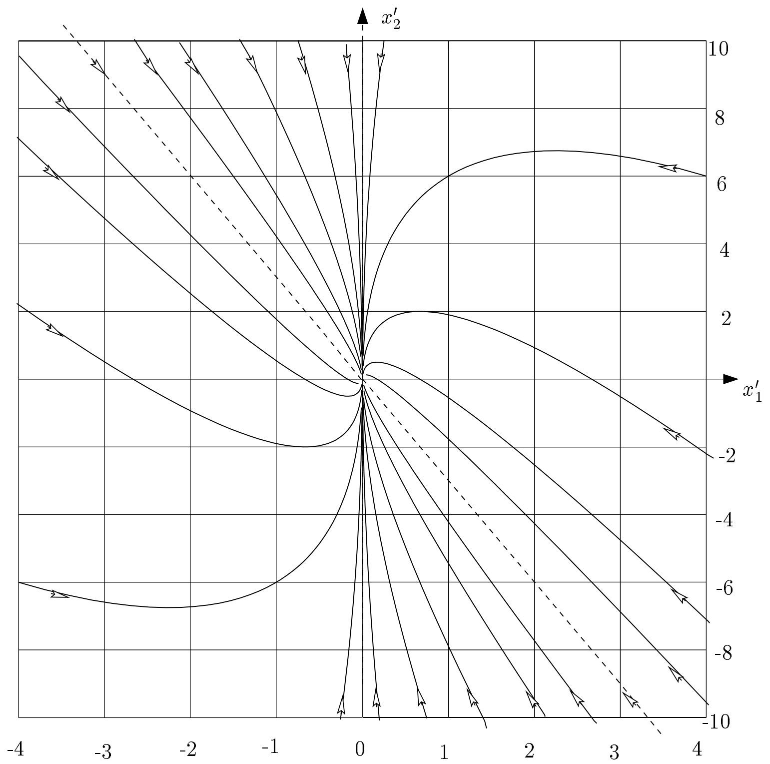


Abbildung L13.36: zu L13.13 c: Phasenportrait

Das Phasenportrait aus der x_1'-x_2'-Ebene wird in der x_1-x_2-Ebene lediglich um den Wert $\frac{3}{2}$V nach rechts und um $\frac{9}{2}$V nach rechts oben verschoben (siehe Abbildung L13.37).

e) Für die Werte $C_1 = -1\,\mathrm{F}$, $C_2 = 1\,\mathrm{F}$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1},$$

$$\boldsymbol{x}_\infty = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = -\frac{1\,\mathrm{s}}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3\,\mathrm{Vs}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1/2} = \begin{cases} 2\,\mathrm{s}^{-1} \\ -1\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt}, \quad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -3\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}\,\boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_{0,1}\exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) \\ \xi_{0,2}\exp\left(-\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_{C1}' \\ u_{C2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,1}\exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,2}\exp\left(-\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right),$$

$$\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,1}\exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,2}\exp\left(-\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix}.$$

Die Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene können in Abbildung L13.38 betrachtet werden.

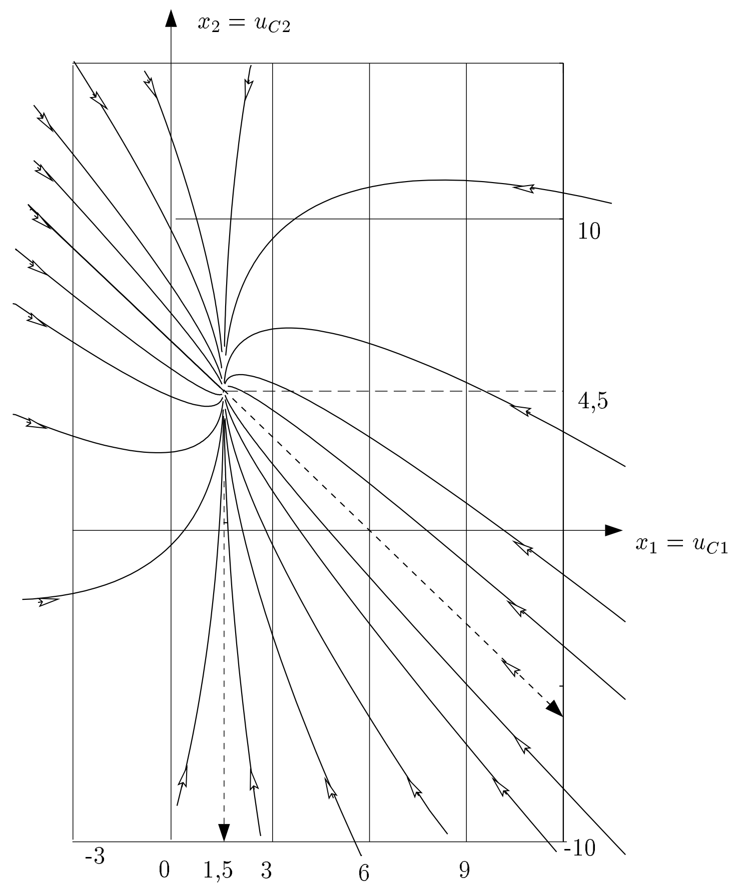


Abbildung L13.37: zu L13.13 d: Phasenportrait u_{C1}, u_{C2}

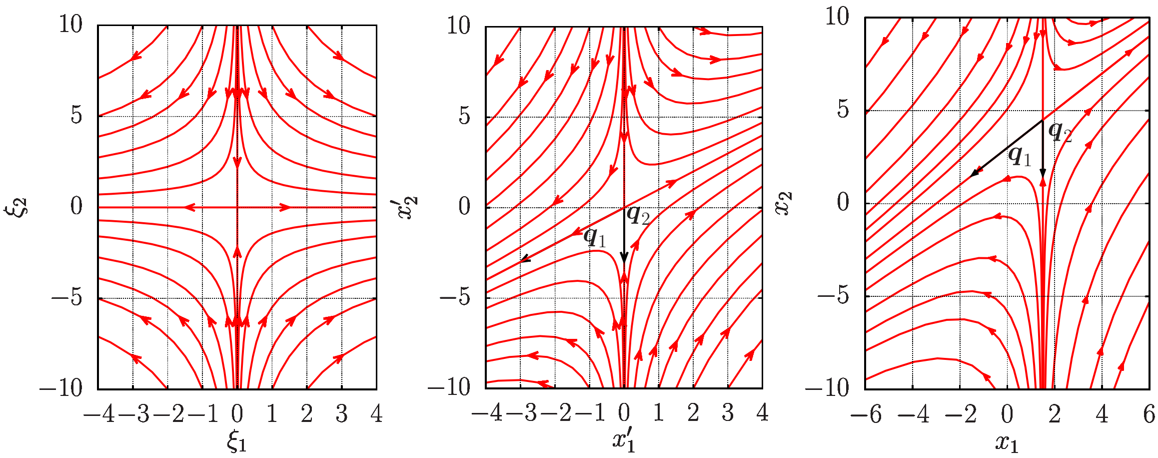


Abbildung L13.38: zu L13.13 e: Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene

f) Für die Werte $C_1 = -1\,\mathrm{F}$, $C_2 = -1\,\mathrm{F}$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1},$$

$$\boldsymbol{x}_\infty = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = -\frac{1\,\mathrm{s}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3\,\mathrm{Vs}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1/2} = \begin{cases} 2\,\mathrm{s}^{-1} \\ 1\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{instabiler Knoten}, \quad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}\,\boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_{0,1} \exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) \\ \xi_{0,2} \exp\left(\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u'_{C1} \\ u'_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,1} \exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,2} \exp\left(\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right),$$

$$\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{s}^{-1} \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,1} \exp\left(2\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \xi_{0,2} \exp\left(\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix}.$$

Die Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene können in Abbildung L13.39 betrachtet werden.

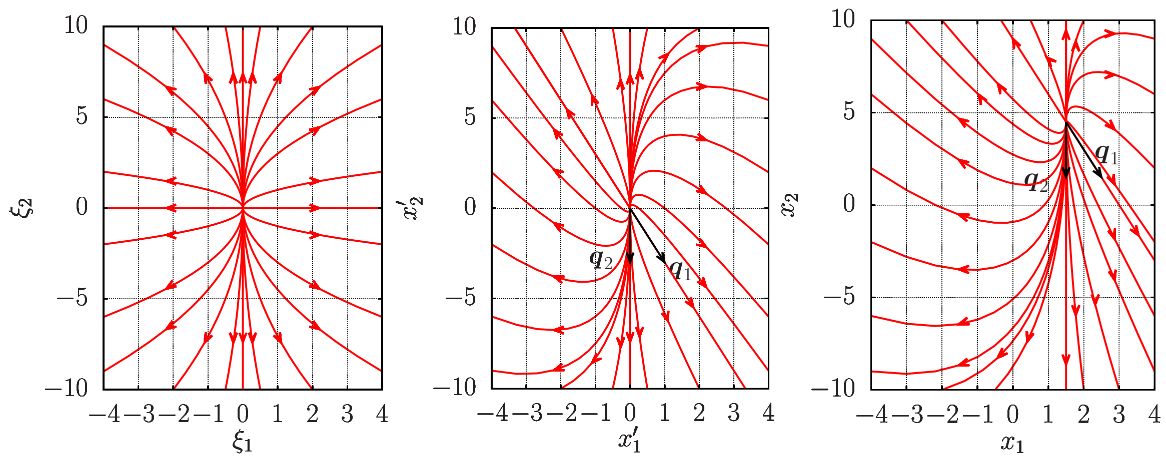


Abbildung L13.39: zu L13.13 f: Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene

g) Für die Werte $C_1 = 2\,\mathrm{F}$, $C_2 = 1\,\mathrm{F}$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1},$$

$$\boldsymbol{x}_\infty = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = -\frac{1\,\mathrm{s}}{1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\,\mathrm{Vs}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1/2} = \lambda = -1\,\mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{nicht-diagonalisierbarer stabiler Knoten},$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} -1\,\mathrm{s}^{-1} & 1 \\ 0 & -1\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} (\xi_{0,1} + t\xi_{0,2}) \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right) \\ \xi_{0,2} \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u'_{C1} \\ u'_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} (\xi_{0,1} + t\xi_{0,2}) \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \xi_{0,2} \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right),$$

$$\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\,\mathrm{s}^{-1} \end{bmatrix} (\xi_{0,1} + t\xi_{0,2}) \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \xi_{0,2} \exp\left(-\mathrm{t\,s}^{-1}\right) + \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{V} \\ 4{,}5\,\mathrm{V} \end{bmatrix}.$$

Die Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene können in Abbildung L13.40 betrachtet werden.

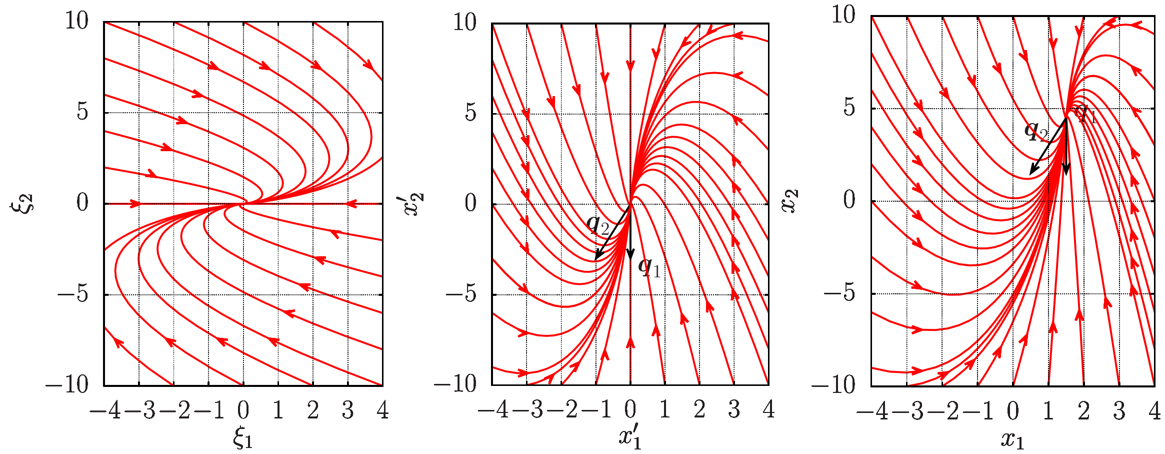


Abbildung L13.40: zu L13.13 g: Phasenportraits in der $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}$ Ebene

h) Komplexe Eigenwerte bedeuten, dass eine schwach gedämpfte oder ungedämpfte Schwingung vorliegt. Hierzu müsste aber der rechte Schaltungsteil auf den linken rückwirken können, was nicht der Fall ist. Komplexe Eigenwerte sind hier also nicht möglich.

Alternativ: Bei Dreiecksmatrizen sind die Hauptdiagonalenelemente gleich den Eigenwerten. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind also $-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ und $-\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)$, was bei reellen Bauelementewerten niemals komplex sein kann.

L13.14 Lösen von Zustandsgleichungen mit zeitabhängiger Erregung

a) Bei einer Kapazität und einer Induktivität benötigt man die inverse Hybriddarstellung (Abbbildung L13.41) für das resistive Zweitor mit einer parallelen Ersatzstromquelle und einer seriellen Ersatzspannungsquelle.

Damit ergibt sich für die Analyse:

$$\begin{aligned} i_1 &= f_1(u_1, i_2, i_0(t), u_0(t)), & u_2 &= f_2(u_1, i_2, i_0(t), u_0(t)) \\ i_1 &= i_0(t) + i_{R1} - i_2 = i_0(t) + \tfrac{u_1}{R_1} - i_2 & u_2 &= -u_0(t) + R_2 i_2 + u_1 \end{aligned}$$

$$h'_{11} = \frac{1}{R_1}, \quad h'_{12} = -1, \quad h'_{21} = 1, \quad h'_{22} = R_2, \quad i_{01} = i_0(t), \quad u_{02} = -u_0(t)$$

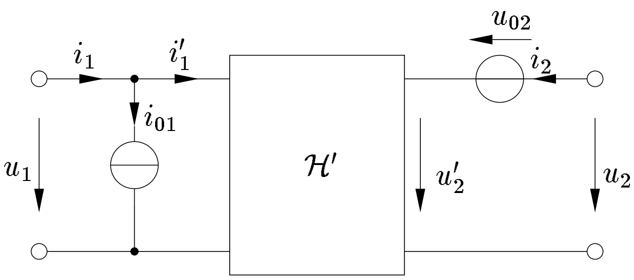


Abbildung L13.41: zu L13.14: Ersatzschaltbild: inverse Hybridmatrix

Für die Zustandsmatrix und die Einkoppelmatrix folgt

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} i_0(t) \\ u_0(t) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Ein Einsetzen der Schaltelemente führt zu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{C} \\ -\beta^2 C & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \beta^2 C \end{bmatrix}$$

b) Für die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$ erhält man mit $T = 2\alpha$ und $\Delta = \alpha^2 + \beta^2$:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{j}\beta$$

Wegen $\alpha < 0$ ergibt sich ein stabiler Strudelpunkt. Für die Eigenvektoren folgt:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \\ -\mathrm{j}\beta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \\ \mathrm{j}\beta \end{bmatrix}$$

c) Durch die Transformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}$ mit

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \ \boldsymbol{q}_1^*] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\mathrm{j}\beta & \mathrm{j}\beta \end{bmatrix}$$

gilt:

$$\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\nu}'$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha + \mathrm{j}\beta & 0 \\ 0 & \alpha - \mathrm{j}\beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}.$$

d) Damit hat man zwei entkoppelte Differentialgleichungen vom Grad 1 mit zeitabhängiger Erregung, für die die Lösungen bekannt sind:

$$\xi_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\,\xi_{01} + \int_0^t \exp(\lambda_1(t-t'))\,\nu'_{01}(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$\xi_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\,\xi_{02} + \int_0^t \exp(\lambda_2(t-t'))\,\nu'_{02}(t')\,\mathrm{d}t',$$

wobei der erste Term der „zero-input-response“ entspricht und der zweite Term der „zero-state-response“. Die Auswertung dieser Integrale führt zu:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C}{2}U \\ -\frac{C}{2}U \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det\boldsymbol{Q} = -\frac{2\mathrm{j}\beta}{C} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{C}{2} & \frac{\mathrm{j}}{2\beta} \\ -\frac{C}{2} & -\frac{\mathrm{j}}{2\beta} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nu}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_0\cos(\beta t) + \mathrm{j}\frac{1}{2}I_0\sin(\beta t) \\ \frac{1}{2}I_0\cos(\beta t) - \mathrm{j}\frac{1}{2}I_0\sin(\beta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_0\exp(\mathrm{j}\beta t) \\ \frac{1}{2}I_0\exp(-\mathrm{j}\beta t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}I_0\exp(\lambda_1 t)\int_0^t \exp(-\lambda_1 t')\exp(\mathrm{j}\beta t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}I_0\frac{\exp(\lambda_1 t)}{\mathrm{j}\beta-\lambda_1}\left(\exp((\mathrm{j}\beta-\lambda_1)\,t)-1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}I_0\exp(\mathrm{j}\beta t)\,\frac{1}{\alpha}\left(\exp(\alpha t)-1\right)$$

Analog gilt

$$\frac{1}{2}I_0\exp(\lambda_2 t)\int_0^t \exp(-\lambda_2 t')\exp(-\mathrm{j}\beta t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}I_0\exp(-\mathrm{j}\beta t)\,\frac{1}{\alpha}\left(\exp(\alpha t)-1\right)$$

Damit erhält man als Lösung in der ξ_1-ξ_2-Ebene:

$$\xi_1(t) = -\frac{UC}{2}\exp(\alpha t + \mathrm{j}\beta t) + \frac{1}{2}I_0\frac{\exp(\alpha t)-1}{\alpha}\exp(\mathrm{j}\beta t)$$

$$\xi_2(t) = -\frac{UC}{2}\exp(\alpha t - \mathrm{j}\beta t) + \frac{1}{2}I_0\frac{\exp(\alpha t)-1}{\alpha}\exp(-\mathrm{j}\beta t) = \xi_1^*(t)$$

Für die Rücktransformation in die x_1-x_2-Ebene gilt mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\xi}$:

$$x_1(t) = u_C(t) = -\frac{1}{C}2\,\mathrm{Re}\{\xi_1(t)\} = U\exp(\alpha t)\cos(\beta t) + \frac{I_0}{C}\,\frac{1-\exp(\alpha t)}{\alpha}\cos(\beta t)$$

$$x_2(t) = i_L(t) = 2\beta\,\mathrm{Im}\{\xi_1(t)\} = -UC\beta\exp(\alpha t)\sin(\beta t) + \beta I_0\frac{\exp(\alpha t)-1}{\alpha}\sin(\beta t)$$

L13.15 Jordan-Normaltransformation

a) Mit $T = 6$ und $\varDelta = 9$ erhält man zwei gleiche Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \alpha = \frac{T}{2} = 3$. Daraus folgt, dass auch die beiden Eigenvektoren gleich sind:

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Die Modalmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist nicht mehr invertierbar. Die Transformation $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}$ kann daher nicht ausgeführt werden.

c) Für das transformierte Differentialgleichungssystem gilt in Jordan-Normalform:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Die transformierte Zustandsvariable $\boldsymbol{\xi}$ erhält man durch $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q}'^{-1}\boldsymbol{x}$, wobei für die Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q}'$ gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{J}$$

Führt man die Matrixmultiplikation $= \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{J}$ allgemein durch, so folgt:

$$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{J} = [\alpha\boldsymbol{q}_1',\ \boldsymbol{q}_1' + \alpha\boldsymbol{q}_2']$$

wobei $\boldsymbol{q}_1'$ und $\boldsymbol{q}_2'$ die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{Q}'$ sind. Durch Gleichsetzen der beiden Spaltenvektoren $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{J}$ erhält man:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1' = \alpha\boldsymbol{q}_1'$$

Dies ist die Gleichung für einen Eigenvektor. $\boldsymbol{q}_1'$ ist also ein zum Eigenwert α zugehöriger Eigenvektor (hier z.B. $\boldsymbol{q}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2' = \boldsymbol{q}_1' + \alpha\boldsymbol{q}_2' \qquad (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{1})\,\boldsymbol{q}_2' = \boldsymbol{q}_1'$$

Die Matrix $\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{1}$ ist nicht invertierbar, da α der Eigenwert zur Matrix $\boldsymbol{A}$ ist. Es ergeben sich zwei linear abhängige Gleichungen. Wir benützen davon die erste Zeile

$$(a_{11} - \alpha)q_{21}' + a_{12}q_{22}' = q_{11}'$$

um die Elemente q_{21}' und q_{22}' des zweiten Spaltenvektors von $\boldsymbol{Q}'$ zu berechnen. Dieser Spaltenvektor ist ebenso wie $\boldsymbol{q}_1'$ nicht eindeutig definiert und kann mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden. Für $q_{21}' = 1$ und $\boldsymbol{q}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ erhält man für $a_{12} \neq 0$:

$$q_{22}' = \frac{q_{11}' - (a_{11} - \alpha)q_{21}'}{a_{12}} = -2, \quad \boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Es muss gezeigt werden, dass $\det \boldsymbol{Q}' \neq 0$ gilt. Wählt man für den ersten Spaltenvektor von $\boldsymbol{Q}'$ einen Eigenvektor, dessen erste Komponente 1 ist, so folgt daraus:

$$q'_{12} = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}, \quad a_{12} \neq 0$$

Wählt man die erste Komponente des zweite Spaltenvektors ebenfalls zu 1, so gilt für die Determinante:

$$\det \boldsymbol{Q}' = q'_{11}q'_{22} - q'_{12}q'_{21} = \frac{1 - (a_{11} - \alpha)}{a_{12}} + \frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}} = \frac{1}{a_{12}} \neq 0$$

Für alle $a_{12} = 0$ und $a_{21} \neq 0$ kann ebenfalls gezeigt werden, dass eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{Q}'$ existiert. Falls beide Nebendiagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ null sind, ist das System entkoppelt und eine Transformation auf Jordan-Normalform nicht mehr notwendig.

e) In der ξ_1-ξ_2-Ebene gilt nach

$$\xi_1(t) = \exp(\alpha t)\,(\xi_{01} + t\xi_{02}) \qquad \xi_2(t) = \exp(\alpha t)\,\xi_{02}$$

mit

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{Q}'^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Für die Lösung in der x_1-x_2-Ebene erhält man mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\xi}$:

$$x_1(t) = (1 - 3t)\exp(3t) \quad x_2(t) = (2 + 3t)\exp(3t)$$

f)

$$\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1} = \frac{\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}} = \frac{\alpha\xi_2(t)}{\alpha\xi_1(t) + \xi_2(t)} = \frac{3\xi_2(t)}{3\xi_1(t) + \xi_2(t)}$$

Für $\xi_1 = 0$: $\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1} = 3 = const.$

Für $\xi_2 > 0, \xi_1 \to +\infty : \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1} \to= 0$

$\xi_2 < 0 : \xi_1 \to -\infty$: $\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1} \to= 0.$

Fixpunkt: $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0.$
Senkrechte Tangente $\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1} \to \infty$: $3\xi_1 + \xi_2 = 0$ oder $\xi_2 = -3\xi_1$.

Das Phasenportrait (Abbildung L13.43) ist eine spezielle Form des instabilen Knotenpunktes. Abbildung L13.42 zeigt beispielhaft die genaue Kurvenform für alle Kurven. Die Kurve für das willkürlich gewählte $\boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ ist in Abbildung L13.43 fett hervorgehoben.

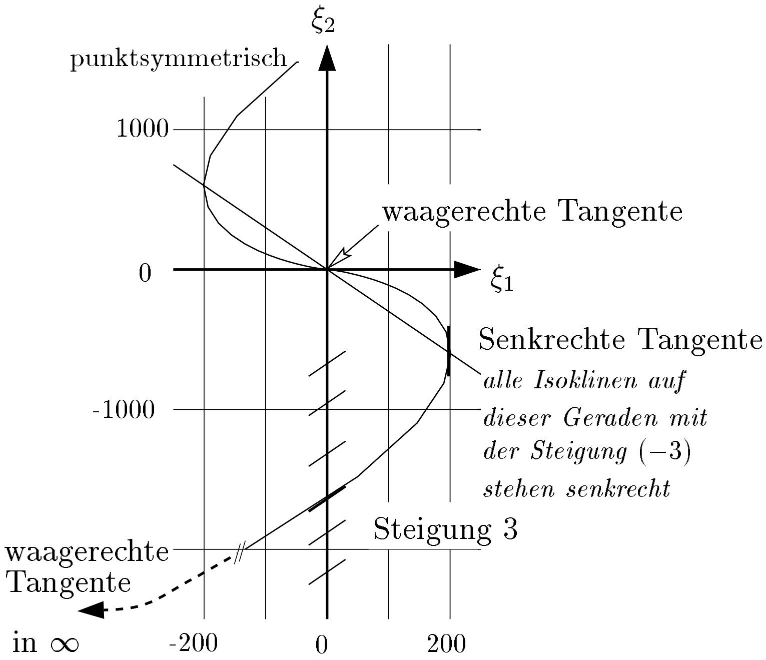


Abbildung L13.42: Genauer Kurvenverlauf

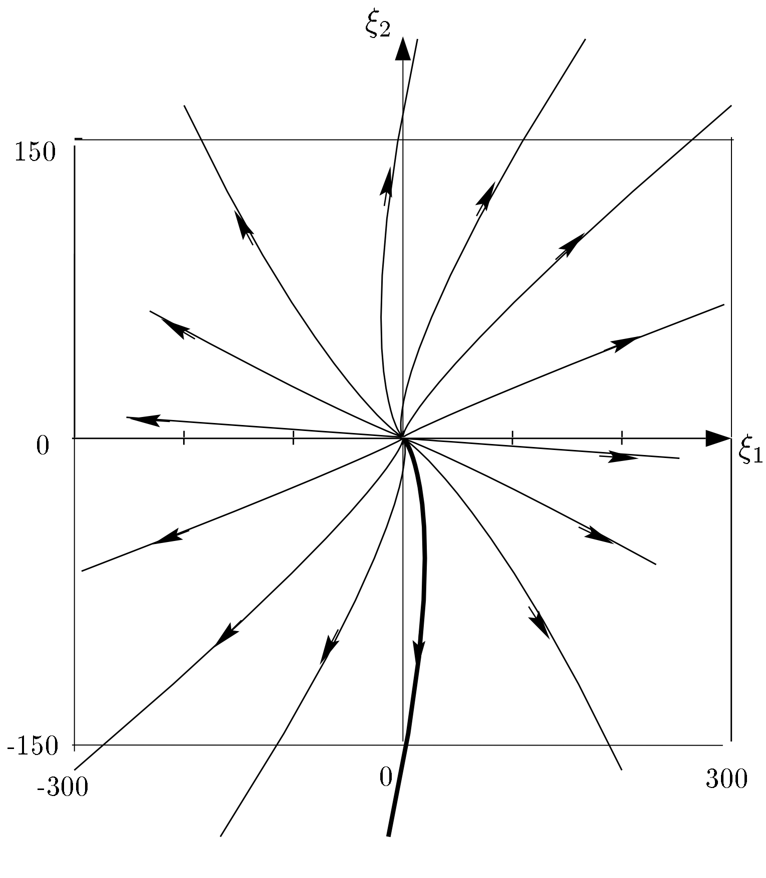


Abbildung L13.43: Phasenportrait des instabilen Knotenpunktes für zwei gleiche Eigenwerte

14 Übung: Nichtlineare dynamische Schaltungen

14.1 Dynamische Schaltungen mit kubischer Nichtlinearität

Gegeben sei die dynamische Schaltung zweiten Grades in Abbildung 14.1.

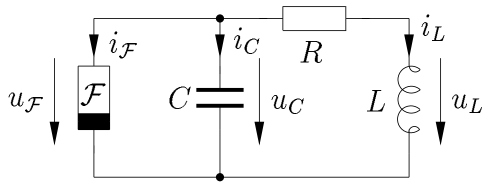


Abbildung 14.1: Dynamische Schaltung, Grad 2

Das einzige nichtlineare Element der Schaltung ist ein spannungsgesteuerter resistiver Zweipol $\mathcal{F}$.

a) Wählen Sie ein geeignetes Paar von Zustandsvariablen.

b) Geben Sie unter Verwendung der Leitwertbeschreibung $g_{\mathcal{F}}$ die Zustandsbeschreibung der Schaltung an.

Die linearen Netzwerkelemente besitzen nun die Werte:

$$C = \frac{1}{2}\mathrm{F}, \quad L = \frac{1}{9}\mathrm{H}, \quad R = 1\,\Omega$$

und die Kennlinie von $\mathcal{F}$ sei gegeben durch

$$\frac{i_{\mathcal{F}}}{\mathrm{A}} = \left(\frac{u_{\mathcal{F}}}{\mathrm{V}}\right)^3 - 5\frac{u_{\mathcal{F}}}{\mathrm{V}}$$

Das dynamische Verhalten der Schaltung soll nun qualitativ untersucht werden.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte direkt aus dem Schaltbild.

d) Setzen Sie die gegebenen Größen in die in b) berechnete allgemeine Zustandsbeschreibung ein und führen Sie die folgenden Substitutionen durch:

$$x_1 := \frac{u_C}{\mathrm{V}}; \quad x_2 := \frac{i_L}{\mathrm{A}}; \quad \tau := \frac{t}{\mathrm{s}}.$$

Sie erhalten damit die dimensionslose *normierte Beschreibung* der Schaltung.

Verwenden Sie die normierte Beschreibung als Grundlage aller weiteren Betrachtungen.

e) Bestimmen und klassifizieren Sie die Gleichgewichtspunkte.

f) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

g) Diskutieren Sie das dynamische Verhalten des Systems.

14.2 Schwingkreis mit nichtidealem Gyrator

Gegeben ist ein ungedämpfter Schwingkreis mit einem Gyrator $\mathcal{G}$ (Abbildung 14.2). Es soll untersucht werden, wie sich Nichtidealitäten des Gyrators auf das Verhalten der Schaltung auswirken.

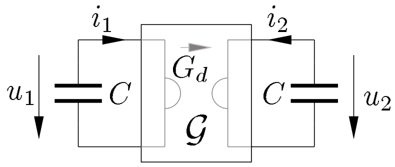


Abbildung 14.2: Schwingkreis mit Gyrator

$\mathcal{G}$ wird zu diesem Zweck durch die folgende Leitwertsbeschreibung modelliert:

$$i_1 = g_1(u_1, u_2) = +G_d u_2 - \varepsilon G_0 u_1 f\left(\frac{u_1^2 + u_2^2}{U_0^2}\right)$$

$$i_2 = g_2(u_1, u_2) = -G_d u_1 - \varepsilon G_0 u_2 f\left(\frac{u_1^2 + u_2^2}{U_0^2}\right)$$

a) Geben Sie eine Zustandbeschreibung der Schaltung an.

Nun gelten die folgenden Werte für die Parameter, wobei alle Konstanten (einschließlich k) positiv sind:

$$C = \frac{I_0 t_0}{U_0}, \quad G_d = k\frac{I_0}{U_0}, \quad G_0 = \frac{I_0}{U_0}$$

b) Normieren Sie die Zustandbeschreibung mit

$$x_1 := \frac{u_1}{U_0}, \quad x_2 := \frac{u_2}{U_0}, \quad \tau := \frac{t}{t_0},$$

c) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt und untersuchen seine Stabilität.

d) Transformieren Sie die normierte Beschreibung in Polarkoordinaten (r, φ) so, dass

$$x_1 := r\cos\varphi, \quad x_2 := r\sin\varphi.$$

e) Wählen Sie ε so, dass sich $\mathcal{G}$ wie ein idealer Gyrator verhält. Lösen Sie entsprechend die Differentialgleichung in Polarkoordinaten und diskutieren Sie das Ergebnis.

Für f wird nun als konkretes Beispiel eine Sinusfunktion gewählt:

$$f(\xi) := \sin\xi$$

Unterscheiden Sie im Folgenden immer zwischen den Fällen $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$.

f) Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der radialen Differentialgleichung.

g) Skizzieren Sie ein Phasenportrait des Systems.

h) Diskutieren Sie nun erneut die Stabilität des Gleichgewichtspunktes.

14.3 Van der Pol-Oszillator

Ein resistives Eintor $\mathcal{F}$ heißt *letztendlich passiv (eventually passive)*, wenn je ein positives U und I existieren, so dass,

$$\forall(u,i) \in \mathcal{F} : \ (|u| > U \vee |i| > I \Rightarrow ui > 0)$$

a) Interpretieren Sie anhand von Beispielen die praktische Bedeutung dieser Eigenschaft.

Die Kennlinie eines nichtlinearen Widerstands $\mathcal{F}$ sei nun mit $\alpha, \beta, G > 0$ gegeben durch

$$i_{\mathcal{F}} = G\left(\alpha(u_{\mathcal{F}})^3 - \beta(u_{\mathcal{F}})\right)$$

b) Untersuchen Sie die Eigenschaften von $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{F}$ letztendlich passiv?

$\mathcal{F}$ wird zum Aufbau eines Van der Pol-Oszillators verwendet (Abbildung 14.3).

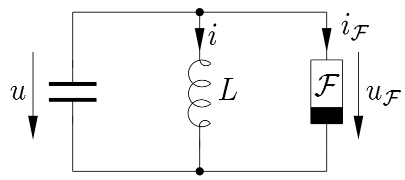


Abbildung 14.3: Van der Pol-Oszillator

c) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt der Schaltung direkt aus dem Schaltbild.

d) Nehmen Sie (ohne Rechnung) Stellung zur Bedeutung der letztendlichen Passivität von $\mathcal{F}$.

e) Linearisieren Sie die Schaltung im Gleichgewichtspunkt. Zeigen Sie, dass die Schaltung einen stabilen Grenzzyklus besitzt, also als Oszillator arbeitet.

Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Schwingkreis *sehr schwach gedämpft* sei, dass heißt:

$$G \ll \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Die Trajektorien sind dann fast ideale Ellipsen, und der Zeitverlauf der Zustandsgrößen u und i ist in sehr guter Näherung sinusförmig. Wählen Sie daher als Ansatz für die Kondensatorspannung

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega_0 t)$$

f) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0 der Schwingung.

g) Bestimmen Sie die Amplitude $\hat{U}$ aus der Überlegung, dass auf dem Grenzzyklus die gesamte während einer Periode zwischen dem LC-Schwingkreis und dem resistiven Element $\mathcal{F}$ ausgetauschten Energie gleich Null sein muss.

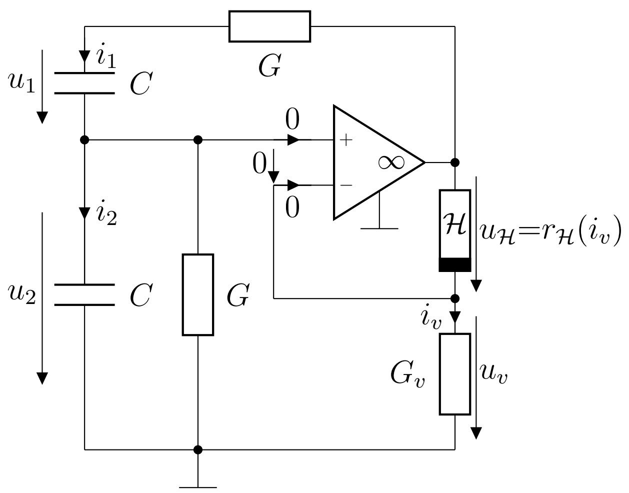


Abbildung 14.4: Wien-Oszillator

14.4 Wien-Oszillator

Die Schaltung in Abbildung 14.4 heißt *Wien-Oszillator* oder *RC-Oszillator*.

Der nichtlineare resistive Zweipol $\mathcal{H}$ sei quellenfrei, bilateral, ungepolt und strikt inkremental passiv. Nehmen Sie außerdem an, dass der Operationsverstärker nur im linearen Bereich betrieben wird. Es sollen nun die Bedingungen an den Zweipol $\mathcal{H}$ hergeleitet werden, die erfüllt sein müssen, dass die Schaltung als Oszillator arbeitet.

a) Geben Sie eine Zustandsbeschreibung der Schaltung an.

b) Normieren Sie die Zustandbeschreibung mit

$$x_1 := \frac{u_1}{U_0}, \quad x_2 := \frac{u_2}{U_0}, \quad \tau := \frac{G}{C}t, \quad h(x) := \frac{1}{U_0} r_{\mathcal{H}}(G_v\, U_0\, x).$$

c) Zeigen Sie, dass der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems ist. Welcher Bedingung muss h genügen, damit er sicher instabil ist?

d) Bestimmen Sie eine weitere Eigenschaft von h, die sicherstellt, dass die Trajektorien des Systems beschränkt sind. Bestimmen Sie dazu unter den Kreislinien $\mathit{\Gamma}_r$ mit dem Radius $r \in \mathbb{R}_0^+$ um den Ursprung

$$\mathit{\Gamma}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} \middle| \; \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

eine, auf der alle Trajektorien strikt nach innen gerichtet sind, was hier gleichbedeutend ist mit:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathit{\Gamma}_r : \; \boldsymbol{x}^T \dot{\boldsymbol{x}} < 0$$

Bei dieser Abschätzung sind die folgenden beiden Beziehungen nützlich:

$$|\sin x \cdot \cos x| \le \frac{1}{2} \qquad |\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$$

e) Formulieren Sie Beziehungen zwischen $r_{\mathcal{H}}$, G_v und der Sättigungsspannung des Op-amps, die gewährleisten, dass der Wien-Oszillator einen stabilen Grenzzyklus besitzt, bei dem der Operationsverstärker vollständig im linearen Bereich arbeitet.

14.5 FM-Sender

a) Dimensionieren Sie einen verlustlosen Schwingkreis mit $L = 72,6\,\mathrm{nH}$, der bei $91{,}5\,\mathrm{MHz}$ schwingt. Wie verändert sich die Schwingung, wenn Sie die Kapazität mit einer weiteren Kapazität von $\pm 0{,}05\,\mathrm{pF}$ parallel schalten?

Die Schaltung aus Abbildung 14.5 ist für den Vorwärtsbetrieb des Transistors dimensioniert. Für den Transistor soll ein dynamisches Modell verwendet werden, welches um nichtlineare Kapazitäten $C_\mathrm{c}(u_\mathrm{bc}) = \frac{C_\mathrm{c0}}{\sqrt{1-u_\mathrm{bc}/\mathrm{V}}}$ und $C_\mathrm{e}(u_\mathrm{be}) = \frac{C_\mathrm{e0}}{\sqrt{1-u_\mathrm{be}/\mathrm{V}}}$ parallel zu den Dioden erweitert wurde (Abbildung 14.6). C_0 und C_NF können im Kleinsignalmodell als Kurzschlüsse betrachtet werden.

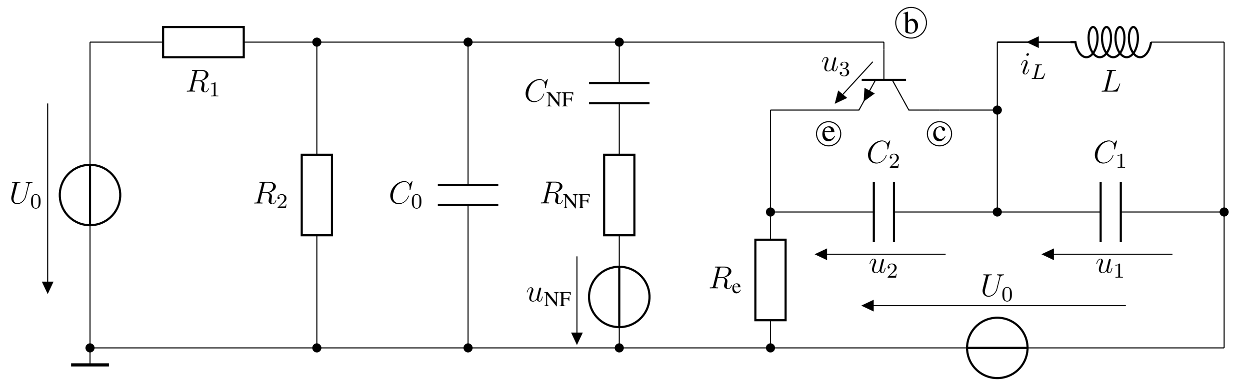


Abbildung 14.5: FM-Sender

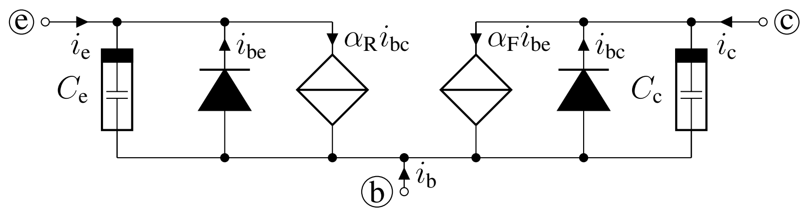


Abbildung 14.6: Dynamisches Großsignalmodell des npn-Transistors

b) Zeigen Sie allgemein, dass die Schaltung im Sperr- und Sättigungsbereich des Transistors stabile, aber nicht erreichbare Gleichgewichtspunkte hat. Im Sperrbereich leitet keine der beiden Dioden, während im Sättigungsbereich beide Dioden leiten. Vereinfacht können die Dioden im Sättigungsbereich als ideale Spannungsquellen betrachtet werden.

c) Stellen sie das Zustandsgleichungssystem für den Vorwärtsbetrieb auf. Verwenden Sie die Ersatzschaltung aus Abbildung 14.7 und der Näherung $\frac{\beta_F}{R_\mathrm{be}} \gg \frac{1}{R_\mathrm{e} \| R_\mathrm{be}}$. Warum tritt eine Rangreduktion auf?

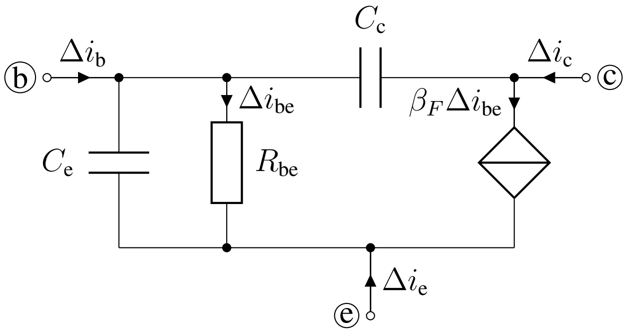


Abbildung 14.7: Dynamisches Kleinsignalersatzschaltbild des Transistors für den Vorwärtsbetrieb

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix mit der Näherung $C_2C_3 \ll C_1(C_2 + C_\mathrm{e})$. Verbessern Sie danach diese Lösung durch Linearisierung. Es gelte $\frac{\beta_F}{R_\mathrm{be}} L/\mathrm{s} \gg C_1/\mathrm{F} > C_2/\mathrm{F}, C_\mathrm{e}/\mathrm{F}$. Wie verhält sich die Schaltung?

e) Wie beeinflusst die Quelle $u_\mathrm{NF} = A_\mathrm{NF} \sin(\omega_\mathrm{NF} t)$ die Schaltung? Für die niedrige Frequenz von u_NF kann C_NF als Kurzschluss betrachtet werden, während die anderen Kapazitäten im Gleichgewichtspunkt seien.

f) Geben Sie die mittlere, maximale und minimale Frequenz $\omega_\mathrm{HF,AP}$, $\omega_\mathrm{HF,max}$ und $\omega_\mathrm{HF,min}$ an, wenn folgende Bauelementewerte gelten: $R_1 = 12\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$, $R_\mathrm{NF} = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, $U_0 = 15\,\mathrm{V}$, $A_\mathrm{NF} = 3\,\mathrm{V}$, $C_\mathrm{c0} = 10\,\mathrm{pF}$, $L = 72,6\,\mathrm{nH}$, $C_1 = 39\,\mathrm{pF}$.

L14 Lösung: Nichtlineare dynamische Schaltungen

L14.1 Dynamische Schaltungen mit kubischer Nichlinearität

a) Ein geeignetes Paar von Zustandsvariablen ist (u_C, i_L), wobei die Schreibweise als geordnetes Paar (willkürlich) die Reihenfolge festlegt.

b)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C = \frac{1}{C}i_C = -\frac{1}{C}\left(i_{\mathcal{F}} + i_L\right) \\[2ex] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = \frac{1}{L}u_L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C = -\frac{1}{C}\left(g_{\mathcal{F}}(u_C) + i_L\right) \\[2ex] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = \frac{1}{L}\left(u_C - Ri_L\right) \end{array}$$

c) In einem Gleichgewichtspunkt der Schaltung muss sich jedes dynamische Element in einem Relaxationspunkt befinden. Bei positiven linearen Reaktanzen bedeutet das:

Kondensator: Die Kondensatorspannung bleibt konstant, wenn kein Strom fließt. Ein Kondensator verhält sich also im Gleichgewicht wie ein Leerlauf.

Spule: Der Spulenstrom bleibt konstant, wenn keine Spannung anliegt. Eine Spule verhält sich also im Gleichgewicht wie ein Kurzschluss.

Man kann also die Gleichgewichtspunkte direkt bestimmen, indem man den Kondensator weglässt, die Spule kurzschließt und die Lösungen der resultierenden resistiven Schaltung (in die man zweckmäßigerweise die Zählpfeile der Zustandsgrößen einträgt) bestimmt (siehe Abbildung L14.1).

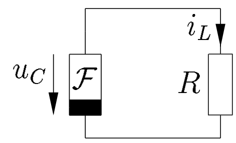


Abbildung L14.1: Zählpfeile

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{F}: & -\frac{i_L}{\mathrm{A}} = \left(\frac{u_C}{\mathrm{V}}\right)^3 - 5\frac{u_C}{\mathrm{V}} \\ R: & i_L = \frac{u_C}{R} \Rightarrow \frac{i_L}{\mathrm{A}} = \frac{u_C}{\mathrm{V}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{u_C}{\mathrm{V}}\right)^3 = 4\frac{u_C}{\mathrm{V}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_C \in \{-2\,\mathrm{V}, 0, 2\,\mathrm{V}\}$$

Die Schaltung besitzt also drei Gleichgewichtszustände:

$(-2\,\mathrm{V}, -2\,\mathrm{A}), (0\,\mathrm{V}, 0\,\mathrm{A})$ und $(2\,\mathrm{V}, 2\,\mathrm{A})$.

d)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C = -2\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}\left(\left(\left(\frac{u_C}{\mathrm{V}}\right)^3 - 5\frac{u_C}{\mathrm{V}}\right) \cdot 1\,\mathrm{A} + i_L\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = 9\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\left(u_C - 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}i_L\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_C}{\mathrm{V}} \cdot 1\mathrm{s} = -2\left(\left(\frac{u_C}{\mathrm{V}}\right)^3 - 5\frac{u_C}{\mathrm{V}} + \frac{i_L}{\mathrm{A}}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{i_L}{\mathrm{A}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 9\left(\frac{u_C}{\mathrm{V}} - \frac{i_L}{\mathrm{A}}\right) \end{cases}$$

Mit den angegebenen Substitutionen führt dies auf die dimensionslose Beschreibung:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_1 &= -2x_1^3 + 10x_1 - 2x_2 \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_2 &= 9x_1 - 9x_2 \end{aligned}$$

e) In einem Gleichgewichtspunkt sind $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_1 = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_2 = 0$, so dass gelten muss:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1^3 + 10x_1 - 2x_2 = 0 \\ 9x_1 - 9x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1^3 = 4x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \in \{-2, 0, 2\}$$

Es gibt damit insgesamt drei Gleichgewichtspunkte, die wir zur einfacheren Identifikation noch besonders bezeichnen wollen:

$P_1 = (-2, -2),\ Q = (0, 0)$ und $P_2 = (2, 2)$

Die Jacobi-Matrix des Systems lautet allgemein:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\delta \boldsymbol{f}}{\delta \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -6x_1^2 + 10 & -2 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Der Typ der Gleichgewichtspunkte kann nun nach dem Satz von Hartmann durch eine Eigenwertzerlegung der entsprechenden Jacobi-Matrix bestimmt werden.

Analyse von Q:

$$x_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}(Q) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (10 - \lambda)(-9 - \lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 90 + 18 = \lambda^2 - \lambda - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4} = 72 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{17}{2} \Rightarrow \lambda \in \{-8, 9\}$$

$\Rightarrow$ Q ist ein Sattelpunkt.

Analyse von P_1 und P_2:

$$x_1^2 = 4 \ \Rightarrow \boldsymbol{J}(Q) = \begin{bmatrix} -14 & -2 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (-14 - \lambda)(-9 - \lambda) + 18 = \ldots = \lambda^2 + 23\lambda + 144 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda\frac{23}{2} + \left(\frac{23}{2}\right)^2 = \left(\frac{23}{2}\right)^2 - 144 \quad \Rightarrow \quad \left(\lambda + \frac{23}{2}\right)^2 = -\frac{47}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{23}{2} \pm \frac{\sqrt{47}}{2}\mathrm{j} \ \Rightarrow \lambda \approx -\frac{23}{2} \pm \frac{7}{2}\mathrm{j}$$

$\Rightarrow$ P_1 und P_2 sind stabile Strudel.

f) Zum Skizzieren des Systems ist eine Berechnung der Eigenräume des Sattelpunkts Q erforderlich. Die Eigenräume erhält man aus der Überlegung, dass der zu einem Eigenwert λ gehörige Eigenraum $(\mathrm{ER}(\lambda))$ den Kern einer einfach bestimmbaren Matrix darstellt:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ER}(\lambda) = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{1}).$$

Damit ergeben sich die Eigenräume von $\boldsymbol{J}$ in $\boldsymbol{Q}$ zu:

$$\mathrm{ER}(9) = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{J}(Q) - 9 \cdot \mathbf{1}) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -18 \end{bmatrix}\right) = \left\{c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathrm{ER}(-8) = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{J}(Q) + 8 \cdot \mathbf{1}) = \mathrm{Kern}\begin{bmatrix} 18 & -2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \left\{c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R}\right\}$$

Das Phasenportrait wird nun auf die folgende Art gezeichnet:

- Die Gleichgewichtspunkte werden eingezeichnet und beschriftet.
- Am Sattelpunkt Q deutet man die Richtungen der Eigenräume an und versieht sie den Vorzeichen entsprechend mit Durchlaufrichtungen.
- Die sich von Q entfernenden Trajektorien führt man zu einer Spirale um den jeweils nächstgelegenen Gleichgewichtspunkt fort. Den Umlaufsinn erhält man so, dass sich jeweils ein möglichst glatter Kurvenzug ergibt.
- Die zu Q *vorwärts asymptotischen* Trajektorien (die für $t \to \infty$ gegen Q konvergieren) werden ebenfalls (hin zu früheren Zeitpunkten) verlängert, wobei man sie in der Nähe der Strudel mit einer leichten Krümmung versieht, die der Krümmung der vorherskizzierten Spiralen entspricht.
- Man ergänzt die Skizze mit einigen Trajektorien, die sich möglichst glatt in das Gesamtbild einfügen.

Man erhält damit (qualitativ) das Phasenportrait in Abbildung L14.2.

g) Es handelt sich um ein *bistabiles System*: Im Grenzübergang $t \to \infty$ erreicht der Zustand des Systems für fast jeden Anfangszustand einen der Gleichgewichtspunkte P_1 oder P_2 .

Die Grenzlinie oder *Separatrix* S zwischen den *Anziehungsbereichen* von P_1 und P_2 besteht aus dem Sattelpunkt Q und den beiden in Abbildung L14.2 fett gezeichneten, zu Q vorwärts asymptotischen instabilen Trajektorien. Der Anziehungsbereich von P_1 und P_3 ist die offene Halbebene links bzw. rechts von S.

L14.2 Schwingkreis mit nichtidealem Gyrator

a)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1 &= -\tfrac{1}{C}i_1 = -\tfrac{1}{C}g_1(u_1, u_2) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2 &= -\tfrac{1}{C}i_2 = -\tfrac{1}{C}g_2(u_1, u_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1 &= -\tfrac{G_d}{C}u_2 + \tfrac{\varepsilon G_0}{C} f\left(\tfrac{u_1^2+u_2^2}{U_0^2}\right) u_1 \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2 &= +\tfrac{G_d}{C}u_1 + \tfrac{\varepsilon G_0}{C} f\left(\tfrac{u_1^2+u_2^2}{U_0^2}\right) u_2 \end{aligned}$$

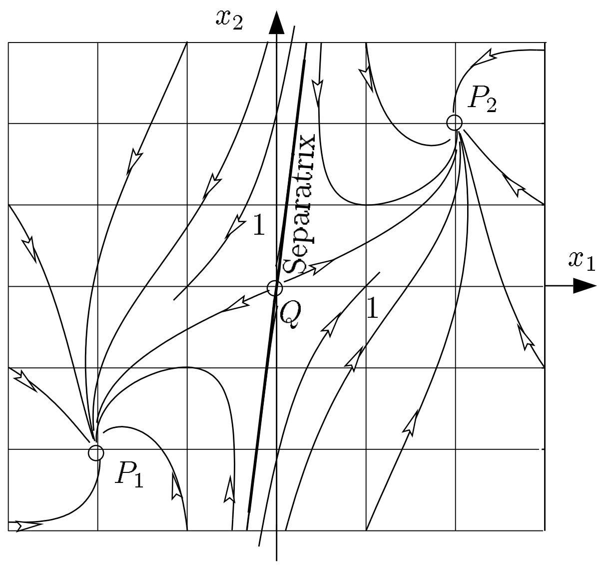


Abbildung L14.2: zu L14.1 f: Phasenportrait mit Separatrix

b)

$$\frac{G_d}{C} = \frac{k}{t_0}; \quad \frac{\varepsilon G_0}{C} = \frac{\varepsilon}{t_0}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow \frac{t_0}{U_0}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -k\frac{u_2}{U_0} + \varepsilon f\left(\frac{u_1^2+u_2^2}{U_0^2}\right)\frac{u_1}{U_0} \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_1 = -kx_2 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_2 = +kx_1 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_2 \end{array}\right. \tag{1}$$

c) In Gleichgewichtspunkten verschwinden die Zeitableitungen:

$$\text{I)} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_1 = -kx_2 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_1 = 0$$

$$\text{II)} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x_2 = +kx_1 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_2 = 0$$

Das unbekannte f sollte zunächst eliminiert werden, beispielsweise durch eine geeignete Linearkombination der beiden Gleichungen:

$$\mathrm{II}\cdot x_1 - \mathrm{I}\cdot x_2: \qquad kx_1^2 + kx_2^2 = 0$$

Mit $k > 0$ folgt daraus, dass unabhängig von f der Ursprung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt der Schaltung ist.

Da das Berechnen der Jacobi-Matrix hier nicht durch einfaches Ablesen möglich ist, stellen wir der Übersichtlichkeit halber zuerst einmal die Differentialgleichung in Vektorfeldschreibweise auf:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad \text{wobei} \quad \left\{\begin{array}{l} g_1(\boldsymbol{x}) = -kx_2 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_1 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = +kx_1 + \varepsilon f\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_2 \end{array}\right.$$

Die partiellen Ableitungen der Vektorkomponenten lauten dann allgemein und im Ursprung:

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} = \left.\left(\varepsilon f\left(x_1^2+x_2^2\right)+\varepsilon f'\left(x_1^2+x_2^2\right)\cdot 2x_1^2\right)\right|_{(0,0)} = \varepsilon f(0)$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} = \left.\left(\varepsilon f'\left(x_1^2+x_2^2\right)\cdot 2x_1x_2-k\right)\right|_{(0,0)} = -k$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} = \left.\left(k+\varepsilon f'\left(x_1^2+x_2^2\right)\cdot 2x_1x_2\right)\right|_{(0,0)} = k$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} = \left.\left(\varepsilon f\left(x_1^2+x_2^2\right)+\varepsilon f'\left(x_1^2+x_2^2\right)\cdot 2x_2^2\right)\right|_{(0,0)} = \varepsilon f(0)$$

Die Jacobi-Matrix des Vektorfelds im Ursprung lautet damit

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})|_{(0,0)} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \varepsilon f(0) & -k \\ k & \varepsilon f(0) \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich immer ein konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten:

$$(\varepsilon f(0)-\lambda)^2+k^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\varepsilon f(0)\pm k\mathrm{j}$$

Der Realteil der Eigenwerte gibt gegebenenfalls Aufschluss über die Stabilität im Ursprung:

$\varepsilon f(0) < 0$	$\Rightarrow$	Der Gleichgewichtspunkt im Ursprung ist stabil.
$\varepsilon f(0) > 0$	$\Rightarrow$	Der Gleichgewichtspunkt im Ursprung ist instabil.
$\varepsilon f(0) = 0$		Ohne eine weitergehende Analyse kann keine Aussage über die Stabilität des Gleichgewichtspunkts im Ursprung gemacht werden.

d) Zur Durchführung der Koordinatentransformation drücken wir mit Hilfe der gegebenen Transformationsgleichungen die kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 und ihre Ableitungen $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$ durch die Polarkoordinaten r und φ sowie deren Ableitungen $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ aus:

$$x_1 = r\cos\varphi \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{L14.1}$$

$$x_2 = r\sin\varphi \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{L14.2}$$

Mit $\sin\varphi^2+\cos\varphi^2=1$ geht der nichtlineare Term über in

$$f(x_1^2+x_2^2) = f\left((r\sin\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2\right) = f\left(r^2\left(\sin\varphi^2+\cos\varphi^2\right)\right) = f\left(r^2\right)$$

Die Substitution der Zustandsvariablen in der dimensionslosen Beschreibung (1) der Schaltung durch die entsprechenden Ausdrücke in Polarkoordinaten führt auf:

I) $\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -kr\sin\varphi + \varepsilon f\left(r^2\right) r\cos\varphi,$

II) $\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = +kr\cos\varphi + \varepsilon f\left(r^2\right) r\sin\varphi,$

Durch geeignete Linearkombinationen dieser Gleichungen lässt sich jeweils eine der beiden Ableitungen eliminieren,

$$\mathrm{II}\cdot \sin\varphi + \mathrm{I}\cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{r}\sin^2\varphi + \dot{r}\cos^2\varphi = \varepsilon f\left(r^2\right) r\sin^2\varphi + \varepsilon f\left(r^2\right) r\cos^2\varphi$$

$$\mathrm{II}\cdot \cos\varphi - \mathrm{I}\cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad r\dot{\varphi}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = kr\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

was schließlich die einfache Darstellung der Differentialgleichung in Polarkoordinaten ergibt:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon f\left(r^2\right) r \\ \dot{\varphi} = k \end{cases}$$

e) Für $\varepsilon = 0$ geht die Leitwertsdarstellung von $\mathcal{G}$ über in die eines idealen Gyrators:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_d \\ -G_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Die Differentialgleichung in Polarkoordinaten lautet dann einfach:

$$\mathrm{I} \quad \dot{r} = 0$$

$$\mathrm{II} \quad \dot{\varphi} = k$$

Dies kann man direkt interpretieren: I $\Rightarrow$ Jede Trajektorie hat konstanten Abstand zum Ursprung, ist also ein Kreis II $\Rightarrow$ und dieser Kreis wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit k im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Das Phasenportrait besteht also ausschließlich aus konzentrischen Kreisen um den Ursprung (Abbildung L14.3).

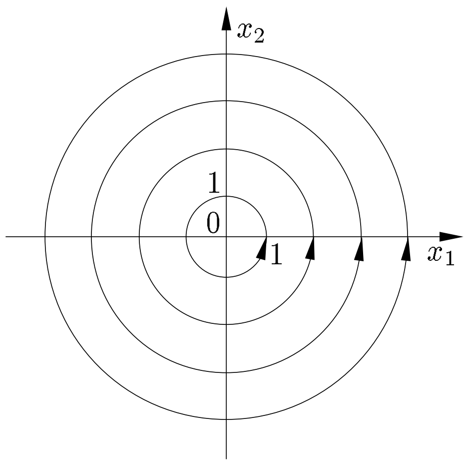


Abbildung L14.3: Phasenportrait für $\varepsilon = 0$

Das System ist konservativ; es gibt keine stabilen oder instabilen Trajektorien.

f) Mit der gegebenen Funktion $f(\xi) := \sin(\xi)$ hat die radiale Differentialgleichung die Gestalt:

$$\dot{r} = \varepsilon r \sin(r^2)$$

Diese Gleichung besitzt auch bei $\varepsilon \neq 0$ unendlich viele Fixpunkte:

$$\varepsilon r \sin(r^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{k\pi} \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{da} \quad r \geq 0$$

Die Stabilität der Fixpunkte analysiert man am besten mit dem Verfahren des dynamischen Pfades: Man trägt die rechte Seite der Gleichung über r auf, und markiert auf den Abschnitten des Graphen den jeweiligen Durchlaufsinn: über der r-Achse nach rechts, unter der r-Achse nach links. Die Schnittpunkte mit der r-Achse sind die Gleichgewichtspunkte.

Bei einem $\varepsilon > 0$ erhält man den dynamischen Pfad in Abbildung L14.4.

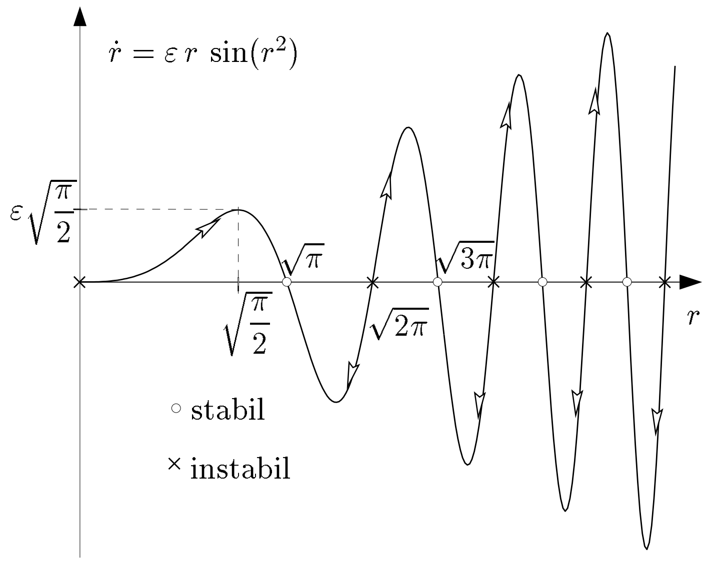


Abbildung L14.4: zu L14.2 f: Dynamischer Pfad

Die stabilen und instabilen Gleichgewichtspunkte kann man daraus direkt ablesen:

$$\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{stabil :} & r = \sqrt{(2k+1)\pi} \\ \text{instabil :} & r = \sqrt{2k\pi} \end{array} \right\} \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Bei $\varepsilon < 0$ sind die jeweils anderen Fixpunkte stabil bzw. instabil.

g) Die stabilen (oder instabilen) Fixpunkte der radialen Differentialgleichung entsprechen im Gesamtsystem jeweils einem stabilen (oder instabilen) Grenzzyklus (beziehungsweise bei $r = 0$ dem Gleichgewichtspunkt im Ursprung).

Als Phasenportrait des Systems für $\varepsilon > 0$ ergibt sich qualitativ Abbildung L14.5.

Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt, und gleichzeitig das Zentrum von strikt abwechselnden stabilen und instabilen exakt kreisförmigen Grenzzyklen, die mit zunehmendem Radius immer dichter aufeinander folgen.

In der Abbildung sind stabile Grenzzyklen schwarz und instabile grau gezeichnet. Außerdem sind zwei Trajektorien eingezeichnet, die sich dem innersten stabilen Grenzzyklus asymptotisch nähern.

Bei $\varepsilon < 0$ kehren sich die Stabilitätseigenschaften der Grenzzyklen und des Ursprungs genau um.

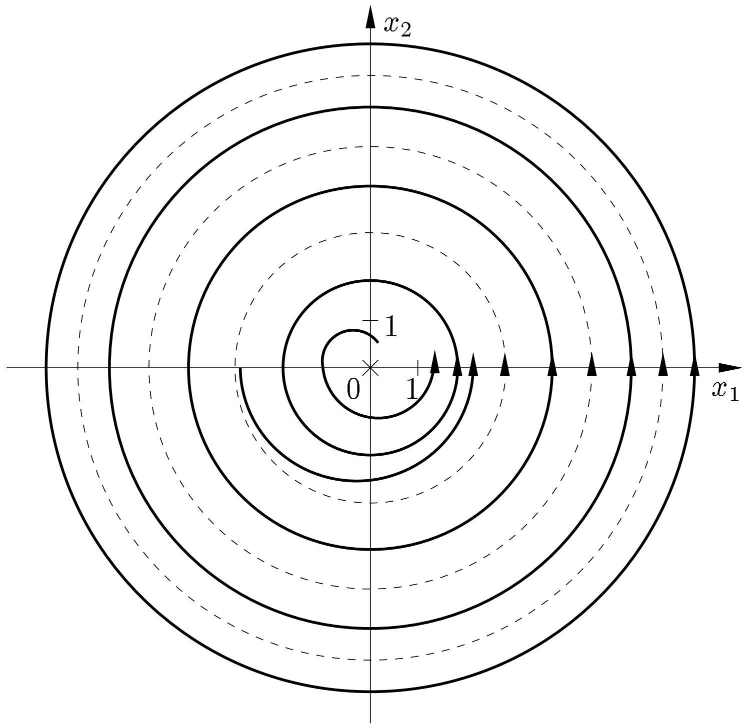


Abbildung L14.5: zu L14.2 g: Phasenportrait für $\varepsilon > 0$

h) Bei der gegebenen Funktion f ist $f(0) = 0$, so dass (wie in d) gezeigt) eine Linearisierung des Systems im Ursprung keinen Aufschluss über dessen Stabilitätseigenschaften ergibt. Die gerade in Polarkoordinaten durchgeführte genauere Analyse erlaubt hier aber den folgenden Schluss:

$\varepsilon < 0 \quad \Rightarrow$ Der Ursprung ist stabil.
$\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow$ Der Ursprung ist instabil.
$\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow$ Der Ursprung ist ein labiler Gleichgewichtspunkt.

Es kann gezeigt werden, dass dies für alle Funktionen f gilt, bei denen in einer Umgebung des Ursprungs gilt:

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$$

L14.3 Van der Pol-Oszillator

a) Die Kennlinie eines letztendlich passiven resistiven Eintores kann zusätzlich zu passiven Betriebspunkten (innerhalb der abgeschlossenen I. und III. Quadranten der u-i-Ebene) auch beliebige aktive Betriebspunkte in einer beschränkten Umgebung $[-U, U] \times [-I, I]$ des Ursprungs enthalten.

Der graue Bereich des Diagramms (Abbildung L14.6) zeigt die prinzipielle Gestalt des Bereichs der u-i-Ebene innerhalb dessen die Kennlinie eines letztendlich passiven resistiven Zweipoles liegen darf.

Zahlreiche idealisierte resistive Eintore sind nicht letztendlich passiv, da immer Betriebspunkte zu einem beliebig großen Strom- oder Spannungswert existieren, in denen das Eintor Leistung abgibt:

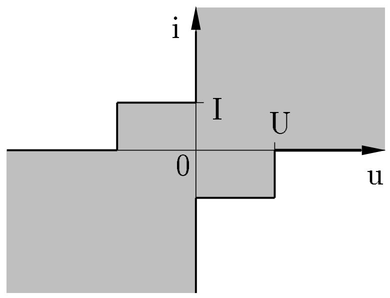


Abbildung L14.6: Lage der Betriebspunkte

- ideale Strom- und Spannungsquellen,
- negative Widerstandsgeraden.

Beispiele von letztendlich passiven resistiven Eintoren sind:

- alle passiven Eintore,
- reale Quellenzweipole,
- reale negative Widerstände mit S- oder N-Kennlinie.

Die Beispiele eines realen Quellenzweipols und eines negativen Widerstands mit N-Kennlinie in Abbildung L14.7 zeigen, dass ein letztendlich passiver resistiver Zweipol durchaus aktiv sein kann.

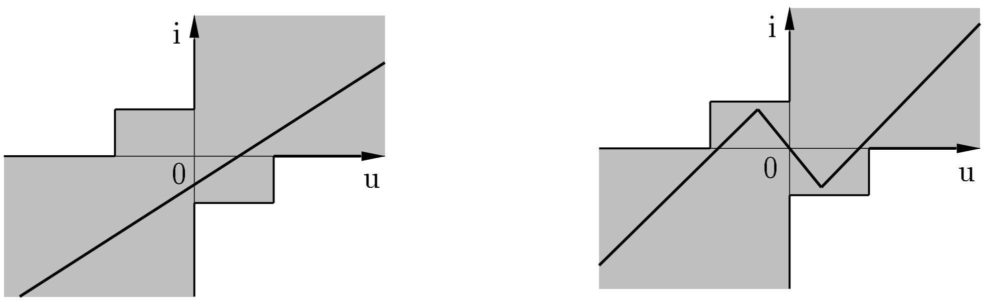


Abbildung L14.7: Beispiele

Ein realer Quellenzweipol ist ein besseres Modell einer realen Strom- oder Spannungsquelle, ebenso wie eine S- oder N-Kennlinie einen praktisch realisierbaren aktiven Widerstand genauer beschreibt als eine negative Widerstandsgerade. Wenn man bedenkt, dass die Definition der letztendlichen Passivität auch einfach auf Mehrtore erweiterbar ist, stellt man fest:

Jedes hinreichend genaue resistive Modell einer realen Schaltung ist letztlich passiv!

b) Die Kennlinie von $\mathcal{F}$ hat qualitativ die Gestalt aus Abbildung L14.8. $\mathcal{F}$ ist nichtlinear, spannungsgesteuert, ungepolt, quellenfrei, aktiv und letztendlich passiv.

c) Die Gleichgewichtspunkte einer dynamischen Schaltung S mit linearen Reaktanzen sind die Lösungen der resistiven Schaltung, die man aus S erhält, indem man die Kapazitäten weglässt und die Induktivitäten kurzschließt:

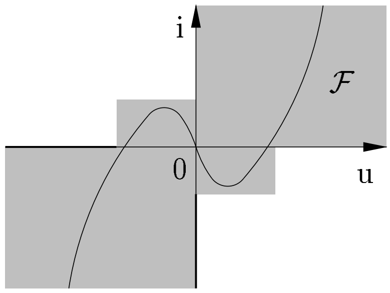


Abbildung L14.8: Kennlinie von $\mathcal{F}$

In Abbildung L14.9 sieht man sofort, dass der Ursprung $(0, 0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt ist.

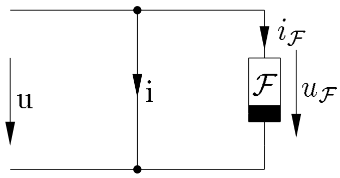


Abbildung L14.9: Ermittlung der Gleichgewichtspunkte

$$u = u_{\mathcal{F}} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{\mathcal{F}} = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0$$

d) Die letztendliche Passivität von $\mathcal{F}$ bedeutet hier, dass $\mathcal{F}$ bei großen Spannungen dem LC-Schwingkreis Energie entnimmt. Daher können die Kondensatorspannung und der Spulenstrom keine beliebig großen Werte annehmen. Die Zustandsgrößen der Schaltung sind also beschränkt.

Dies gilt sogar in einer viel allgemeineren, auf viele praktische Schaltungen anwendbaren Form:

Die Zustandsgrößen jeder dynamischen Schaltung, die nur aus positiven linearen Kapazitäten und Induktivitäten, sowie letztendlich passiven resistiven Elementen besteht, sind beschränkt!

e) G_0 sei der Kleinsignalleitwert von $\mathcal{F}$ im Ursprung:

$$G_0 := \left.\frac{\mathrm{d}i_{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}u_{\mathcal{F}}}\right|_{u_{\mathcal{F}}=0} = \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_{\mathcal{F}}} G\left(\alpha u_{\mathcal{F}}^3 - \beta u_{\mathcal{F}}\right)\right)\right|_{u_{\mathcal{F}}=0} = \left.\left(G\left(3\alpha u_{\mathcal{F}}^2 - \beta\right)\right)\right|_{u_{\mathcal{F}}=0} = -\beta G$$

Damit erhält man im Ursprung das Kleinsignalersatzschaltbild aus Abbildung L14.10.

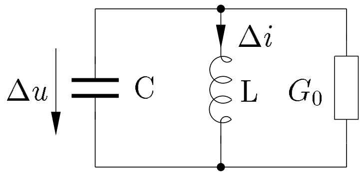


Abbildung L14.10: Kleinsignalersatzschaltbild

Über die Zustandsgleichungen erhält man die zugehörige Jacobi-Matrix:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta u &= -\tfrac{1}{C}(G_0\Delta u + \Delta i) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta i &= \tfrac{1}{L}\Delta u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\frac{G_0}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\left(-\frac{G_0}{C} - \lambda\right)(-\lambda) - \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}\right) = \lambda^2 + \frac{G_0}{C}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Mit $G_0 = -\beta G$ heißt das:

$$\lambda = \frac{\beta G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Da $\beta G > 0$, ist der Realteil beider Eigenwerte in allen Fällen positiv.

Damit ist der einzige Gleichgewichtspunkt der Schaltung (der Ursprung) instabil. Da gleichzeitig die Zustandsgrößen beschränkt sind, folgt, dass die Schaltung mindestens einen stabilen Grenzzyklus besitzt, also als Oszillator arbeitet.

f) Schwache Bedämpfung kann als der Grenzübergang $G \to 0$ interpretiert werden. Damit:

$$\lim_{G\to 0} \lambda = \pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm\mathrm{j}\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{LC}$$

g) Ein Grenzzyklus des Oszillators ist eine geschlossene Kurve $\varGamma$ in der Zustandsebene, auf der gilt:

$$\oint_{\varGamma} u_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) \cdot i_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

wobei $\boldsymbol{x} = \begin{matrix} u \\ i \end{matrix}\Bigg]$ der Zustandsvektor der Schaltung ist.

Da der Grenzzyklus wegen der schwachen Bedämpfung ungefähr ellipsenförmig verläuft, ist für die Kondensatorspannung der Ansatz $u(t) = \hat{U}\sin\omega_0 t$ naheliegend.

Wir werten nun unter Berücksichtigung von $u_{\mathcal{F}} = u$ und $i_{\mathcal{F}} = G(\alpha u^3 - \beta u)$ das Integral über eine Periodendauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ aus:

$$\Rightarrow \int_{T_0}^{0} uG(\alpha u^3 - \beta u)\,\mathrm{d}t = G\int_{T_0}^{0} u^2(\alpha u^2 - \beta)\,\mathrm{d}t =$$

$$= G\hat{U}^2 \int_{T_0}^{0} \sin^2\omega_0 t(\alpha\hat{U}^2\sin^2\omega_0 t - \beta)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\hat{U}^2 \int_{2\pi}^{0} \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \beta\int_{2\pi}^{0}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\Rightarrow \alpha\hat{U}^2\frac{3}{4}\pi = \beta\pi$$

$$\hat{U} = \sqrt{\frac{4\beta}{3\alpha}}$$

L14.4 Wien-Oszillator

a) Op-Amp im linearen Bereich ⇒ $u_v = u_2 \quad \Rightarrow \quad u_{\mathcal{H}} = r_{\mathcal{H}}(G_v u_2)$

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= G(u_{\mathcal{H}} - u_1) = G r_{\mathcal{H}}(G_v u_2) - G u_1 \\ i_2 &= i_1 - G u_2 = G r_{\mathcal{H}}(G_v u_2) - G u_1 - G u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1 &= -\tfrac{G}{C} u_1 + \tfrac{G}{C} r_{\mathcal{H}}(G_v u_2) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2 &= -\tfrac{G}{C} u_1 + \tfrac{G}{C} r_{\mathcal{H}}(G_v u_2) - \tfrac{G}{C} u_2 \end{aligned}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{C}{GU_0} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1 &= -\tfrac{u_1}{U_0} + \tfrac{1}{U_0} r_{\mathcal{H}}\left(G_v U_0 \tfrac{u_2}{U_0}\right) \\ \tfrac{C}{GU_0} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2 &= -\tfrac{u_1}{U_0} + \tfrac{1}{U_0} r_{\mathcal{H}}\left(G_v U_0 \tfrac{u_2}{U_0}\right) - \tfrac{u_2}{U_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x_1 &= -x_1 + h(x_2) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x_2 &= -x_1 + h(x_2) - x_2 \end{aligned}$$

c) Gleichgewichtspunkte ⇒ $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_2 = 0$$

Da $\mathcal{H}$ quellenfrei ist, gilt weiter $h(0) = 0$, und damit

$$x_1 + h(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Wieder einmal ist der Ursprung $(0, 0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt.
Wir definieren $h_0 := \left.\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$. Da $\mathcal{H}$ strikt inkremental passiv ist, ist $h_0 > 0$.
Die Jacobi-Matrix im Ursprung lautet

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & h_0 \\ -1 & h_0 - 1 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$(-1 - \lambda)(h_0 - 1 - \lambda) + h_0 = \ldots = \lambda^2 + (2 - h_0)\lambda + 1 = 0$$

Mit $\nu = \frac{2-h_0}{2} < 1$ folgt daraus durch quadratisches Ergänzen:

$$(\lambda + \nu)^2 = \nu^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \pm \mathrm{j}\sqrt{1-\nu^2} & \text{für } 0 < h_0 < 4 \\ -\nu & h \text{ für } h_0 = 4 \\ -\nu \pm \mathrm{j}\sqrt{\nu^2 - 1} & \text{für } 4 < h_0 \end{array} \right]$$

Der Ursprung ist sicher instabil, wenn $\nu > 0$, also wenn $h_0 > 2$. Die Bedingung lautet also:

$$\left.\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} > 2 \qquad (1)$$

d)

$$\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{x}} = x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = -x_1^2 + x_1 h(x_2) - x_1 x_2 + x_2 h(x_2) - x_2^2$$

Wir führen nun die Koordinaten der Punkte auf einem Kreis Γ_r mit Radius r um den Ursprung ein:

$$x_1 = r\cos\varphi$$

$$x_2 = r\sin\varphi$$

Mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ erhält man daraus:

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{x}} = -r^2\cos^2\varphi + rh(x_2)\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi\sin\varphi + rh(x_2)\sin\varphi - r^2\sin^2\varphi =$$

$$= -r^2 + rh(x_2)(\cos\varphi + \sin\varphi) - r^2\cos\varphi\sin\varphi \leq -r^2 + h(x_2)\left|\sin\varphi + \cos\varphi\right| + r^2\left|\cos\varphi\sin\varphi\right|$$

Wir wenden darauf nun die gegebenen Abschätzungen an. Da $\mathcal{H}$ ungepolt und strikt inkremental passiv ist, ist h punktsymmetrisch zum Ursprung und streng monoton steigend. Damit gilt als weitere Abschätzung:

$$|h(x_2)|_{\Gamma_r} \leq h(r)$$

und es ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{x}} \leq -r^2 + \frac{r^2}{2} + \sqrt{2}\,|h(r)|r = -\frac{r^2}{2} + \sqrt{2}\,|h(r)|r$$

Die Beziehung

$$\left(\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{x}}\right)\Big|_{\Gamma} < 0$$

ist daher sicher mindestens dann erfüllt, wenn gilt:

$$\sqrt{2}\,|h(r)|r < \frac{r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad |h(r)| < \frac{r}{2\sqrt{2}}$$

Eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Trajektorien ist damit:

$$\exists x > 0: \quad h(x) < \frac{x}{2\sqrt{2}} \qquad (2)$$

e) Das normierte System besitzt (da es zweidimensional ist) sicher einen stabilen Grenzzyklus, wenn der Gleichgewichtspunkt im Ursprung instabil ist und gleichzeitig die Trajektorien beschränkt sind. Wie oben gezeigt wurde, ist dies dann der Fall, wenn gleichzeitig (1) und (2) gelten.

Durch Rücksubstitution mit der Normierungsgleichung für $r_{\mathcal{H}}$, sowie $u := U_0 x$, erhält man aus (1):

$$\text{I)} \quad \left.\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{U_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}r_{\mathcal{H}}(G_v U_0 x)\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}r_{\mathcal{H}}(G_v u)\right|_{u=0} = G_v\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}r_{\mathcal{H}}(i)\right|_{i=0} = G_v R_{\mathcal{H}0}$$

$$\Rightarrow \quad G_v R_{\mathcal{H}0} > 2$$

wobei $R_{\mathcal{H}0}$ der Kleinsignalwiderstand von $\mathcal{H}$ im Ursprung ist.
Wählt man weiter $i := G_v U_0 x$, so führt (2) auf:

$$\text{II)} \quad \exists x > 0: \quad r_{\mathcal{H}}(G_v U_0 x) < \frac{U_0 x}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \exists i > 0: \quad r_{\mathcal{H}}(i) < \frac{i}{2\sqrt{2}\,G_v}$$

Hierin kann man auch noch die begrenzte Ausgangsspannung u_{out} des Op-Amps berücksichtigen:

$$U_{\text{sat}} \geq u_{out} = r_{\mathcal{H}}(i_v) + \frac{i_v}{G_v}$$

Insgesamt erhält man folgende Bedingungen an $\mathcal{H}$:

$$\exists i > 0: \quad \left(r_{\mathcal{H}}(i) < \frac{i}{2\sqrt{2}\,G_v}\right) \wedge \left(r_{\mathcal{H}}(i) + \frac{i}{G_v} \leq U_{\text{sat}}\right)$$

L14.5 FM-Sender

a) Für den Schwingkreis aus Abbildung L14.11 ergibt sich

$$u_L = L\dot{i}_L = u_C, \quad i_C = C\dot{u}_C = -i_L, \quad \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1/2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Er schwingt mit $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, damit muss $C = 41{,}67\,\text{pF}$ gelten. Mit der parallel geschalteten

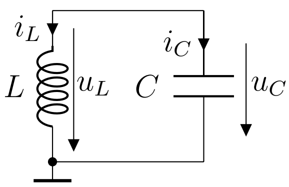


Abbildung L14.11: Verlustloser Schwingkreis

Kapazität erhält man

$$f_{1/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C \pm 0{,}05\,\text{pF})}} \approx 91{,}5\,\text{MHz} \pm 55\,\text{kHz}.$$

b) Sperrbereich: Die Großsignalersatzschaltung für den Sperrbereich kann in Abbildung L14.12 betrachtet werden. Da $u_{bc} < 0$ und $u_{be} > 0$ gilt, liegt der Gleichgewichtspunkt im Einzugsbereich des Vorwärtsbetriebes und kann daher nie erreicht werden. Die zugehörige Kleinsignalersatzschaltung aus Abbildung L14.13 ist passiv und verlustbehaftet. Daher ist der Gleichgewichtspunkt stabil.

Sättigungsbereich: Die Großsignalersatzschaltung für den Sättigungsbereich (Beide Dioden in Durchlassrichtung) kann in Abbildung L14.14 betrachtet werden. Da $i_{bc} < 0$ und $i_{be} > 0$ gilt, liegt der Gleichgewichtspunkt im Einzugsbereich des Vorwärtsbetriebes und kann daher nie erreicht werden. Im Sättigungsbereich werden alle Zustandsgrößen im Kleinsignal zu Null, daher ist der Gleichgewichtspunkt stabil.

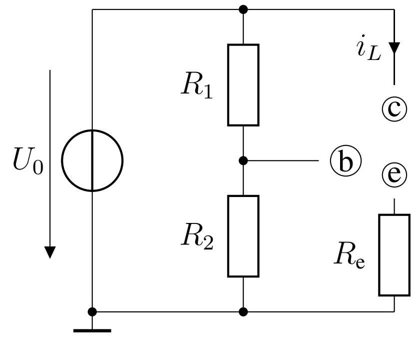


Abbildung L14.12: Sperrbereich, Großsignal

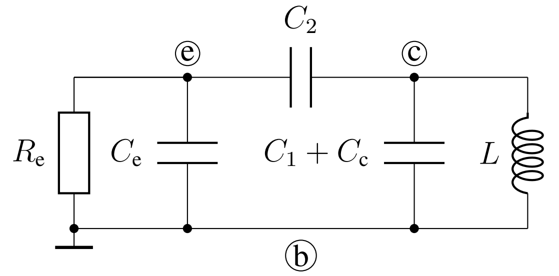


Abbildung L14.13: Sperrbereich, Kleinsignal

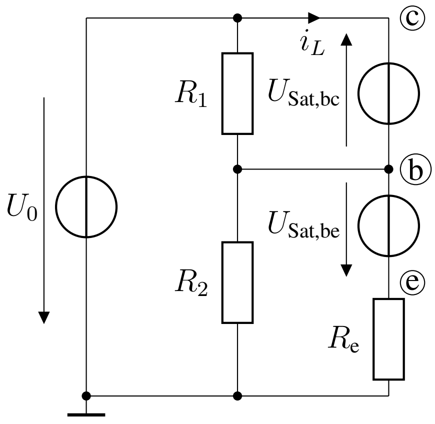


Abbildung L14.14: Sättigung, Großsignal

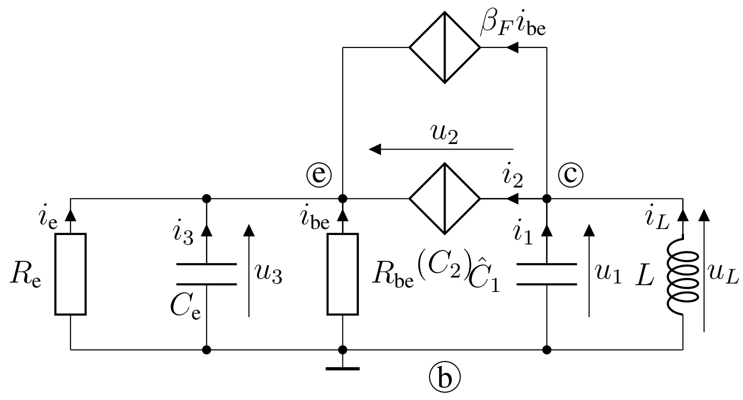


Abbildung L14.15: Vorwärtsbetrieb, KSESB

c) Siehe Abbildung L14.15. Die Kapazitäten C_1 und C_c können zu einer Kapazität $\hat{C}_1$ zusammengefasst werden. Die Kapazitäten $\hat{C}_1$, C_2 und C_e bilden die Schleife

$$u_2 = -u_1 + u_3, \quad \dot{u}_2 = -\dot{u}_1 + \dot{u}_3, \quad i_2 = -\frac{C_2}{\hat{C}_1} i_1 + \frac{C_2}{C_\mathrm{e}} i_3.$$

Daher kann die Kapazität C_2 durch eine gesteuerte Stromquelle ersetzt werden. Der Grad der Schaltung verringert sich auf drei.

Mit $i_\mathrm{be} = \frac{1}{R_\mathrm{be}} u_3$, $i_\mathrm{e} = \frac{1}{R_\mathrm{e}} u_3$ und der Näherung $g = \frac{\beta_F}{R_\mathrm{be}} \gg \frac{1}{R_\mathrm{e} \| R_\mathrm{be}}$ ergibt sich die Stromgleichung für den Emitterknoten zu

$$\begin{aligned}
0 &= i_\mathrm{e} + i_2 + i_3 + (1+\beta_F) i_\mathrm{be}, \\
0 &= i_2 + i_3 + \left(\frac{1}{R_\mathrm{e} \| R_\mathrm{be}} + \frac{\beta_F}{R_\mathrm{be}} \right) u_3, \\
0 &= \frac{C_2}{C_\mathrm{e}} i_3 - \frac{C_2}{\hat{C}_1} i_1 + i_3 + g u_3, \\
i_3 &= \frac{C_\mathrm{e}}{C_2 + C_\mathrm{e}} \left(\frac{C_2}{\hat{C}_1} i_1 - g u_3 \right).
\end{aligned}$$

Für den Kollektorknoten ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= i_L + i_1 - i_2 - \beta i_\mathrm{be}, \\
0 &= i_L + i_1 - \frac{C_2}{C_\mathrm{e}} i_3 + \frac{C_2}{\hat{C}_1} i_1 - g u_3, \\
i_1 &= \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_1 + C_2} \left(-i_L + \frac{C_2}{C_\mathrm{e}} i_3 + g u_3 \right), \\
i_1 &= \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_1 + C_2} \left(-i_L + \frac{C_2}{C_2 + C_\mathrm{e}} \left(\frac{C_2}{\hat{C}_1} i_1 - g u_3 \right) + g u_3 \right), \\
i_1 &= \frac{\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2} \left(-(C_2 + C_\mathrm{e}) i_L + C_\mathrm{e} g u_3 \right), \\
i_3 &= \frac{C_\mathrm{e}}{C_2 + C_\mathrm{e}} \left(\frac{C_2}{C_{12\mathrm{e}}^2} \left(-(C_2 + C_\mathrm{e}) i_L + C_\mathrm{e} g u_3 \right) - g u_3 \right), \\
i_3 &= \frac{C_\mathrm{e}}{C_{12\mathrm{e}}^2} \left(-C_2 i_L - \hat{C}_1 g u_3 \right),
\end{aligned}$$

mit $C_{12\mathrm{e}}^2 = \hat{C}_1 C_2 + \hat{C}_1 C_\mathrm{e} + C_2 C_\mathrm{e}$. Damit erhält man die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{i}_L &= \frac{1}{L} u_1, \\
\dot{u}_1 &= \frac{1}{C_{12\mathrm{e}}^2} \left(-(C_2 + C_\mathrm{e}) i_L + C_\mathrm{e} g u_3 \right), \\
\dot{u}_3 &= \frac{1}{C_{12\mathrm{e}}^2} \left(-C_2 i_L - \hat{C}_1 g u_3 \right)
\end{aligned}$$

und das Zustandsgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{C_{12\mathrm{e}}^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{12\mathrm{e}}^2}{L} & 0 \\ -C_2 - C_\mathrm{e} & 0 & gC_\mathrm{e} \\ -C_2 & 0 & -g\hat{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= -\lambda^3 - \frac{g\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2}\lambda^2 - \frac{(C_2 + C_\mathrm{e})}{LC_{12\mathrm{e}}^2}\lambda - \frac{gC_2C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^4} - \frac{g\hat{C}_1(C_2 + C_\mathrm{e})}{LC_{12\mathrm{e}}^4} \overset{!}{=} 0, \\ f(\lambda) &= \lambda^3 + \frac{g\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2}\lambda^2 + \frac{C_2 + C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^2}\lambda + \frac{g}{LC_{12\mathrm{e}}^2} \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

d) Mit $C_2C_\mathrm{e} \ll \hat{C}_1(C_2 + C_\mathrm{e})$ vereinfacht sich das charakteristische Polynom zu

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^3 + \frac{g}{C_2 + C_\mathrm{e}}\lambda^2 + \frac{1}{L\hat{C}_1}\lambda + \frac{g}{L\hat{C}_1(C_2 + C_\mathrm{e})}, \\ 0 &= \lambda^2\left(\lambda + \frac{g}{C_2 + C_\mathrm{e}}\right) + \frac{1}{L\hat{C}_1}\left(\lambda + \frac{g}{C_2 + C_\mathrm{e}}\right), \\ 0 &= \left(\lambda + \frac{g}{C_2 + C_\mathrm{e}}\right)\left(\lambda^2 + \frac{1}{L\hat{C}_1}\right). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte mit der Näherung lauten

$$\lambda_1 = -\frac{g}{C_2 + C_\mathrm{e}}, \quad \lambda_{2/3} = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}.$$

Durch die Linearisierung $f(\lambda) \approx f(\lambda_2) + f'(\lambda_2)(\lambda - \lambda_2)$ des Polynoms an der Stelle $\lambda = \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}$ soll eine bessere Näherung für λ_2 bestimmt werden (Newton-Verfahren).

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 + \frac{g\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2}\lambda^2 + \frac{C_2 + C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^2}\lambda + \frac{g}{LC_{12\mathrm{e}}^2}, \\ f\left(\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\right) &= -\mathrm{j}\frac{1}{(\sqrt{L\hat{C}_1})^3} - \frac{g}{LC_{12\mathrm{e}}^2} + \mathrm{j}\frac{C_2 + C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^2}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}} + \frac{g}{LC_{12\mathrm{e}}^2} = -\mathrm{j}\frac{C_2C_\mathrm{e}}{(\sqrt{L\hat{C}_1})^3 C_{12\mathrm{e}}^2}, \\ f'(\lambda) &= 3\lambda^2 + \frac{2g\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2}\lambda + \frac{C_2 + C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^2}, \\ f'\left(\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\right) &= -3\frac{1}{L\hat{C}_1} + \mathrm{j}\frac{2g\hat{C}_1}{C_{12\mathrm{e}}^2}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}} + \frac{C_2 + C_\mathrm{e}}{LC_{12\mathrm{e}}^2} = \frac{-2C_{12\mathrm{e}}^2 - C_2C_\mathrm{e} + \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}}{L\hat{C}_1C_{12\mathrm{e}}^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{j}\frac{C_2 C_\mathrm{e}}{(\sqrt{L\hat{C}_1})^3 C_{12\mathrm{e}}^2} + \frac{-2C_{12\mathrm{e}}^2 - C_2 C_\mathrm{e} + \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}}{L\hat{C}_1 C_{12\mathrm{e}}^2}\left(\lambda - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\right), \\
0 &= \mathrm{j}C_2 C_\mathrm{e} + \left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e} - \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}\right)\left(\sqrt{L\hat{C}_1}\lambda - \mathrm{j}\right), \\
0 &= -\mathrm{j}2C_{12\mathrm{e}}^2 - 2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1} + \left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e} - \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}\right)\sqrt{L\hat{C}_1}\lambda, \\
\lambda &= \frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\frac{2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1} + \mathrm{j}2C_{12\mathrm{e}}^2}{2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e} - \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}}, \\
\lambda &= \frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\frac{\left(2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1} + \mathrm{j}2C_{12\mathrm{e}}^2\right)\left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e} + \mathrm{j}2g\hat{C}_1\sqrt{L\hat{C}_1}\right)}{\left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e}\right)^2 + 4g^2 L\hat{C}_1^3}, \\
\lambda &= \frac{2g\hat{C}_1 C_2 C_\mathrm{e}}{\left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e}\right)^2 + 4g^2 L\hat{C}_1^3} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}\frac{2C_{12\mathrm{e}}^2\left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e}\right) + 4g^2 L\hat{C}_1^3}{\left(2C_{12\mathrm{e}}^2 + C_2 C_\mathrm{e}\right)^2 + 4g^2 L\hat{C}_1^3}, \\
\lambda &\approx \frac{C_2 C_\mathrm{e}}{2gL\hat{C}_1^2} + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{L\hat{C}_1}}.
\end{aligned}
$$

Da der Realteil der komplexen Eigenwerte positiv ist, ergibt sich ein instabiler Strudel im Vorwärtsbetrieb. Die Zustandsgrößen strudeln vom Gleichgewichtspunkt weg. Aufgrund der jeweils stabilen Gleichgewichtspunkte des angrenzenden Sättigungs- und Sperrbereiches, die jeweils im Einzugsbereich des Vorwärtsbetriebes liegen, werden die Zustandsgrößen begrenzt. Es stellt sich ein stabiler Zyklus mit dem Imaginärteil der komplexen Eigenwerte als Kreisfrequenz ein.

e) Die beiden Kapazitäten C_e und C_c und der Widerstand R_be in der Hochfrequenzersatzschaltung hängen von der Niederfrequenzquelle ab. Die genauen Größen von C_e und R_be haben keinen signifikanten Einfluss. Da der Imaginärteil der komplexen Eigenwerte die Kreisfrequenz bestimmt, wird die Frequenz der Schwingung durch C_c beeinflusst. Der Zusammenhang $\omega_\mathrm{HF}(u_\mathrm{NF})$ kann in die drei Abhängigkeiten

$$
\omega_\mathrm{HF}(C_\mathrm{c}) = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_\mathrm{c})}}, \quad C_\mathrm{c}(u_\mathrm{bc}) = \frac{C_\mathrm{c0}}{\sqrt{1 - u_\mathrm{bc}/\mathrm{V}}}
$$

und $u_\mathrm{bc}(u_\mathrm{NF})$ zerlegt werden.

Im Arbeitspunkt erhält man die Großsignalersatzschaltung aus Abbildung L14.16. u_bc ist parallel zu dem Widerstand R_1. Der Strom durch die Basis des Transistors ist für die Spannungen an den Widerständen R_1 und R_2 vernachlässigbar klein.

Man erhält die Arbeitspunktspannung $u_\mathrm{bc,AP} = -\frac{R_1}{R_1+R_2}U_0$.

Für niedrige Frequenzen erhält man die Modellschaltung aus Abbildung L14.17. Weiterhin sei i_b vernachlässigbar klein und es gilt

$$
\Delta u_\mathrm{bc} = u_\mathrm{bc}(u_\mathrm{NF}) - u_\mathrm{bc,AP} = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_\mathrm{NF}} u_\mathrm{NF}.
$$

Die Amplitude A_NF bestimmt die maximale und minimale Frequenz ω_HF. Die niedrige Frequenz ω_NF bestimmt, wie schnell zwischen den beiden Grenzfrequenzen gewechselt wird.

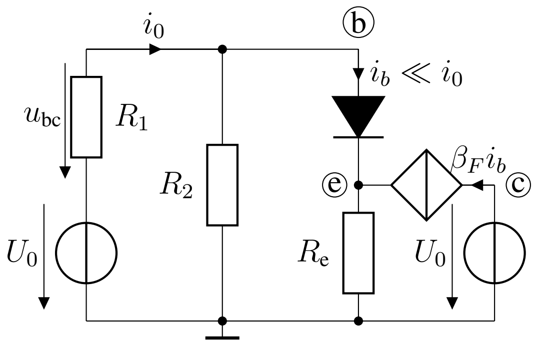


Abbildung L14.16: Modell im Arbeitspunkt

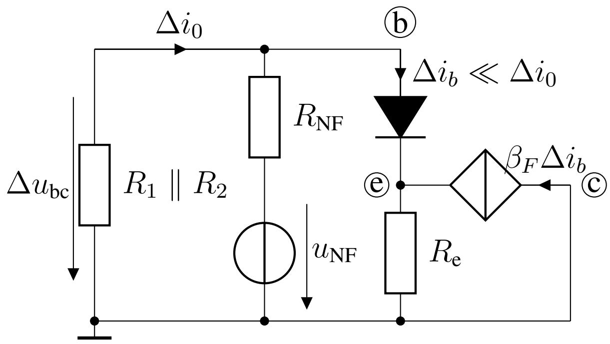


Abbildung L14.17: Modell für den NF Bereich

f)

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{bc,AP}} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = -13{,}04\,\mathrm{V}, \\
u_{\mathrm{bc,max}} &= u_{\mathrm{bc,AP}} + \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_{\mathrm{NF}}} A_{\mathrm{NF}} = -12{,}56\,\mathrm{V}, \\
u_{\mathrm{bc,min}} &= u_{\mathrm{bc,AP}} - \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_{\mathrm{NF}}} A_{\mathrm{NF}} = -13{,}52\,\mathrm{V}, \\
C_{\mathrm{c,AP}} &= \frac{C_{\mathrm{c0}}}{\sqrt{1 - u_{\mathrm{bc,AP}}/\mathrm{V}}} = 2{,}67\,\mathrm{pF}, \\
C_{\mathrm{c,max}} &= \frac{C_{\mathrm{c0}}}{\sqrt{1 - u_{\mathrm{bc,max}}/\mathrm{V}}} = 2{,}72\,\mathrm{pF}, \\
C_{\mathrm{c,min}} &= \frac{C_{\mathrm{c0}}}{\sqrt{1 - u_{\mathrm{bc,min}}/\mathrm{V}}} = 2{,}62\,\mathrm{pF}, \\
f_{\mathrm{HF,AP}} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_{\mathrm{c,AP}})}} = 91{,}51\,\mathrm{MHz}, \\
f_{\mathrm{HF,max}} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_{\mathrm{c,min}})}} = 91{,}56\,\mathrm{MHz}, \\
f_{\mathrm{HF,min}} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_{\mathrm{c,max}})}} = 91{,}45\,\mathrm{MHz}.
\end{aligned}
$$

15 Übung: Dynamische Schaltungen beliebigen Grades

15.1 Verallgemeinerte Zustandsgleichungen

Gegeben sind die beiden folgenden Schaltungen in Abbildung 15.1.

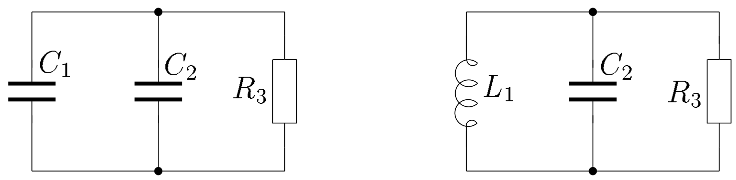


Abbildung 15.1:

a) Stellen Sie die verallgemeinerte Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von den Bauelementeparametern auf.

b) Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{D})$.

c) Welchen Grad haben die beiden Schaltungen?

15.2 Gekoppelte Schwingkreise

Gegeben sind zwei durch den Kondensator C_K gekoppelten Schwingkreise gleicher Resonanzfrequenz mit nebenstehender Kantenzuordnung in Abbildung 15.2.

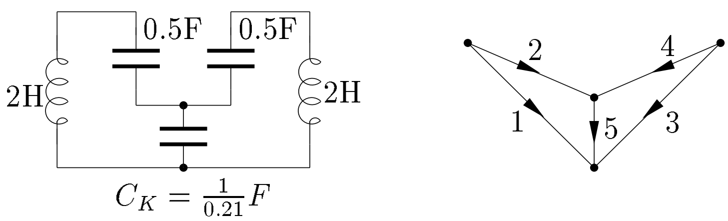


Abbildung 15.2:

Die verallgemeinerten Zustandsgleichungen dieser Schaltung lauten:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-2&0&0&0&0\\
0&0,5&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\
0&0&0&0,5&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5 \end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
1&-1&-1&1&0&0&0&0&0&0\\
-1&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&-1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-0.21
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ i_5 \end{bmatrix}
$$

a) Zu welchen beiden Eigenwerten gehören die beiden Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$?

$$
\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} -2\\ -2\\ 2\\ 2\\ 0\\ \mathrm{j}\\ -\mathrm{j}\\ -\mathrm{j}\\ \mathrm{j}\\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad
\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 121\mathrm{j}\\ 100\mathrm{j}\\ 121\mathrm{j}\\ 100\mathrm{j}\\ 21\mathrm{j}\\ 55\\ -55\\ 55\\ -55\\ -110 \end{bmatrix}
$$

j bezeichnet dabei die imaginäre Einheit ($\mathrm{j}^2 = -1$). Geben Sie noch zwei weitere Eigenwerte und Eigenvektoren an.

Die beiden Eigenlösungen sind stationäre Schwingungen (rein imaginäre Eigenwerte). Für die Eigenlösung „$\boldsymbol{q}_1$“ gilt $u_5 = i_5 = 0$, während für die Eigenlösung „$\boldsymbol{q}_2$“ i_5 sich gerade gleichmäßig auf i_2 und i_4 aufteilt.

b) Entwickeln Sie aus dieser Beobachtung für die beiden Eigenlösungen jeweils ein „Ersatzschaltbild“ aus zwei entkoppelten Schwingkreisen.

15.3 Explizite Zustandsgleichungen und numerische Probleme

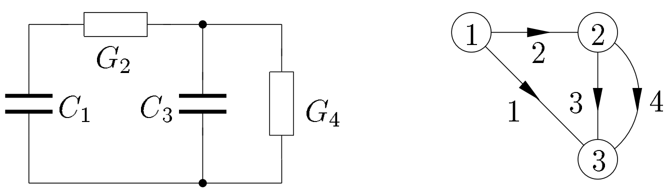


Abbildung 15.3:

a) Stellen Sie für die Schaltung in Abbildung 15.3 die verallgemeinerten Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von den Bauelementeparametern auf. Benutzen Sie dabei die Knoten und Kantennummerierung des nebenstehenden Netzwerkgraphen.

Hinweis: Verwenden Sie die Schleifengleichungen „2-3-1“ und „2-4-1“, sowie die Knotengleichungen ① und ② in dieser Reihenfolge.

Durch Vertauschen der Zeilen ([1,2,3,4,5,6,7,8] $\Rightarrow$ [1,2,3,4,8,6,5,7]) und Spalten ([1,2,3,4,5,6,7,8] $\Rightarrow$ [7,2,8,4,5,6,1,3]) erhält man ein lineares Algebro-Differentialgleichungssystem der Form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

b) Identifizieren Sie die Größen $\boldsymbol{D}_{22}$, $\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{A}_{21}$, $\boldsymbol{A}_{22}$, $\boldsymbol{x}_1(t)$ und $\boldsymbol{x}_2(t)$.

c) Welche algebraische Bedingung muss erfüllt sein, damit der Vektor $\boldsymbol{x}_2(t)$ einen zulässigen Satz von Zustandsvariablen erhält?

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Transformation $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{D}_{22}^{-1}(\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})$ explizite Zustandsgleichungen.

Hinweis:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_2+G_4 & -G_4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_4 & G_4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis von $\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ muss eine Ihnen vertraute Leitwertmatrix sein

Der Leitwert G_2 modelliere einen recht großen (parasitären) Leitungsleitwert (kleinen Leitungswiderstand), der G_4 um vier Größenordnungen übersteigt. G_2 und G_4 seien auf je drei Stellen genau bekannt. Das gesuchte Ergebnis sind die Eigenwerte der Zustandsgleichungen, die das Einschwingverhalten der Schaltung beschreiben.

e) Mit welcher Stellenzahl muss eine Rechenmaschine mindestens arbeiten, um aus den expliziten Zustandsgleichungen von Teilaufgabe d) ein auf 3 Stellen genaues Ergebnis berechnen zu können?

f) Glauben Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der ausgehend von den impliziten Zustandsgleichungen mit nur drei oder vier Stellen Rechengenauigkeit ein auf drei Stellen genaues Ergebnis liefert?

L15 Lösung: Dynamische Schaltungen beliebigen Grades

L15.1 Verallgemeinerte Zustandsgleichungen

a) Die verallgemeinerten Zustandsgleichungen für die beiden Schaltungen lauten:
Schaltung 1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

Schaltung 2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

b) Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz für die Determinante

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{D})$$

ergibt sich jeweils das charakteristische Polynom:
Schaltung 1:

$$-R_3(C_1 + C_2)\lambda - 1$$

Schaltung 2:

$$-L_1 C_2 R_3 \lambda^2 - L_1 \lambda - R_3$$

c) Der Grad einer Schaltung ist gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms der zugehörigen (verallgemeinerten) Zustandsgleichungen; die Schaltung 1 hat somit den Grad eins (zwei parallele Kapazitäten), Schaltung 2 hat den (vollen) Grad zwei.

L15.2 Gekoppelte Schwingkreise

a) Durch Einsetzen von $\boldsymbol{q}_1$ in die verallgemeinerten Zustandsgleichungen ergibt sich:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\mathrm{j} \\ -1 \\ 2\mathrm{j} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} := \boldsymbol{p}_1$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{j} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\mathrm{j} \\ -1 \\ 2\mathrm{j} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} := \mathrm{j}\boldsymbol{p}_1$$

$\boldsymbol{q}_1$ gehört somit zum Eigenwert j.
Durch Einsetzen von $\boldsymbol{q}_2$ in die verallgemeinerten Zustandsgleichungen ergibt sich:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 121\mathrm{j} \\ 100\mathrm{j} \\ 121\mathrm{j} \\ 100\mathrm{j} \\ 21\mathrm{j} \\ 55 \\ -55 \\ 55 \\ -55 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -110 \\ 50\mathrm{j} \\ -110 \\ 50\mathrm{j} \\ 21\mathrm{j} \end{bmatrix} := \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 121\mathrm{j} \\ 100\mathrm{j} \\ 121\mathrm{j} \\ 100\mathrm{j} \\ 21\mathrm{j} \\ 55 \\ -55 \\ 55 \\ -55 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -121\mathrm{j} \\ -55 \\ -121\mathrm{j} \\ -55 \\ -23,1 \end{bmatrix} = 1,1\mathrm{j} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -110 \\ 50\mathrm{j} \\ -110 \\ 50\mathrm{j} \\ 21\mathrm{j} \end{bmatrix} = 1,1\mathrm{j}\boldsymbol{p}_2$$

$\boldsymbol{q}_2$ gehört somit zum Eigenwert $1,1\mathrm{j}$.

Da die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{D}$ reell sind, muss zu jedem Eigenwert und zu jedem Eigenvektor auch das konjugiert komplexe Pendant existieren:

$$\boldsymbol{q}_1^* = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ zu } \lambda_1^* = -\mathrm{j} \text{ und } \quad \boldsymbol{q}_2^* = \begin{bmatrix} -121\mathrm{j} \\ -100\mathrm{j} \\ -121\mathrm{j} \\ -100\mathrm{j} \\ -21\mathrm{j} \\ 55 \\ -55 \\ 55 \\ -55 \\ 110 \end{bmatrix} \text{ zu } \lambda_2^* = -1,1\mathrm{j}.$$

b) Die Eigenlösung „1“ beschreibt eine **gegenphasige** Schwingung der beiden Resonanzkreise; dadurch liegt am Koppelkondensator weder eine Spannung noch fließt Strom. Der Koppelkondensator lässt sich für diesen speziellen Schwingungszustand durch einen Kurzschluss oder Leerlauf ersetzen und man das folgendes Ersatzschaltbild in Abbildung L15.1.

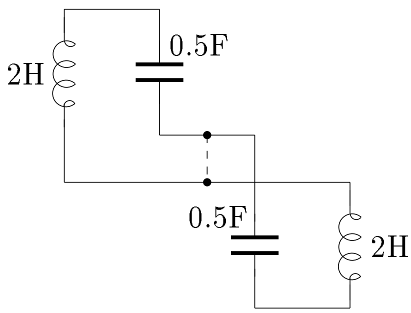


Abbildung L15.1: zu L15.2 b Kopplung der Schwingkreise, gegenphasige Schwingung

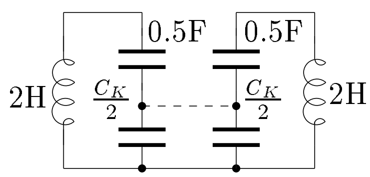


Abbildung L15.2: zu L15.2 b Kopplung der Schwingkreise, gleichphasige Schwingung

Die Eigenlösung „2“ beschreibt eine **gleichphasige** Schwingung der beiden Resonanzkreise (Abbildung L15.2). Jeder Schwingkreis „sieht“ noch die halbe Koppelkapazität; durch die graue Verbindung im zugehörigen Ersatzschaltbild fließt kein Strom.

L15.3 Explizite Zustandsgleichungen und numerische Probleme

a) Die impliziten Zustandsgleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ C_1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&C_3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\i_1\\i_2\\i_3\\i_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1&1&1&0&0&0&0&0\\ -1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&G_2&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&G_4&0&0&0&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\i_1\\i_2\\i_3\\i_4 \end{bmatrix}$$

b) Für die verschiedenen Teilmatrizen erhält man:

$$\boldsymbol{D}_{22} = \begin{bmatrix} C_1 & 0\\ 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&-1\\ 0&0&-1&G_4&0&0\\ 0&G_2&0&0&0&-1 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} -1&1\\ -1&0\\ 0&0\\ 0&0\\ 0&0\\ 0&0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{x_1}(t) = \begin{bmatrix} i_3(t)\\ u_2(t)\\ i_4(t)\\ u_4(t)\\ i_1(t)\\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&\text{-1}&0\\ \text{-1}&0&0&0&0&0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0&0\\ 0&0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{x_2}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t)\\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

c) Der Vektor $\boldsymbol{x}_2(t)$ enthält genau dann einen Satz zulässiger Zustandsvariablen, wenn $\boldsymbol{A_{11}}$ invertierbar ist.

d) Für die expliziten Zustandsgleichungen erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1\\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_2}{C_1} & -\frac{G_2}{C_1}\\ -\frac{G_2}{C_3} & \frac{G_2+G_4}{C_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_3 \end{bmatrix}$$

e) Um alle Stellen der Leitwertssumme $G_2 + G_4$ überhaupt darstellen zu können, muss der Rechner neben den drei Stellen zur Repräsentation der Einzelleitwerte vier weitere Stellen für den Größenordnungsunterschied von G_2 und G_4 zur Verfügung stellen; die Rechenmaschine muss also eine Rechengenauigkeit von mindestens sieben Stellen besitzen.

f) Die folgende Tabelle zeigt Analyseergebnisse für die Elementewerte

$$\begin{aligned} C_1 &= 2{,}00\,\mathrm{F}\\ G_2 &= \text{siehe Tabelle}\\ C_3 &= 1{,}00\,\mathrm{F}\\ G_4 &= 1{,}00\,\mathrm{S} \end{aligned}$$

Die numerischen Ergebnisse (der Eigenwert $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\left(\frac{G_2+G_4}{C_3}+\frac{G_2}{C_1}\right)^2-\frac{4G_2G_4}{C_1C_3}\right)}-\frac{G_2+G_4}{C_3}-\frac{G_2}{C_1}\right)$) wurden einerseits auf direktem Weg aus den verallgemeinerten Zustandsgleichungen (QZ-Algorithmus) und andererseits über den „Umweg“ der expliziten Zustandsgleichungen berechnet. Die Rechengenauigkeit der Maschine betrug 16 Dezimalstellen.

G_2/S	exaktes Ergebnis	explizite Zustandsgl.	QZ-Algorithmus
10^6	- 0,333333 185185 2181…	- 0,333333 185184 44…	- 0,333333 185185 22…
10^9	- 0,333333 333185 1851…	- 0,333333 381626 29…	- 0,333333 333185 19…
10^{12}	- 0,333333 333333 1851…	- 0,333309 233188 63…	- 0,333333 333333 19…
10^{15}	- 0,333333 333333 3331…	- 0,380798 339843 75…	- 0,333333 333333 33…

Übertragen auf das Beispiel in Aufgabe f) wird es mit Hilfe eines guten Algorithmus also möglich sein bei drei oder vier Stellen Rechengenauigkeit direkt aus den impliziten Zustandsgleichungen ein quasi exaktes Ergebnis zu berechnen, während der Weg über die expliziten Zustandsgleichungen offensichtlich völlig unsinnige numerische Resultate liefert, wenn die Dynamik der Bauelementewerte zu groß ist.

16 Übung: Komplexe Wechselstromrechnung

16.1 Zeigergrößen

Gegeben seien die Schaltungen in Abbildung 16.1 und 16.2.

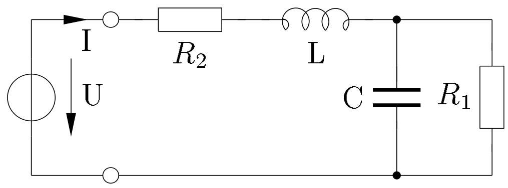


Abbildung 16.1: Schaltung zur komplexen Wechselstromrechnung (A)

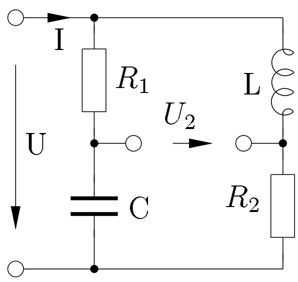


Abbildung 16.2: Schaltung zur komplexen Wechselstromrechnung (B)

Für die Elementewerte gilt:

$R_1 = 1000\,\Omega, \quad R_2 = 300\,\Omega, \quad L = 318\text{mH}, \quad$ und $C = 3,18\mu\text{F}$

a) Berechnen Sie für den eingeschwungenen Zustand den komplexen Widerstand Z für Schaltung A, sowie die Übertragungsfunktion U_2/U für Schaltung B jeweils bei der Frequenz $f' = 50\text{Hz}$.

b) Geben Sie die „Steady State“-Antwort des Stromes I (Schaltung A,) bzw. der Spannung U_2 (Schaltung B) für eine Erregung $u(t) = 1\,\text{V}\cos(2\pi ft + \frac{\pi}{4})$ an. Wie lauten die zeitabhängigen Größen?

16.2 GL-Glied

Diese Schaltung aus Abbildung 16.3 soll mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung untersucht werden.

a) Geben Sie den Zeiger I_0 für den Fall $i_0(t) = \hat{I}_0\cos(\omega t)$ und für den Fall $i_0(t) = \hat{I}_0\sin(\omega t)$ an.

b) Welche Beziehung besteht zwischen $i(t)$ und $u(t)$? Übersetzen Sie diesen Zusammenhang in eine Gleichung mit den Zeigern I und U.

c) Geben Sie mit Hilfe der Kirchhoff-Gesetze und des Ohm'schen Gesetzes den Zeiger I in Abhängigkeit der Zeiger U und I_0 an.

d) Geben Sie nun den Zeiger I abhängig vom Zeiger I_0 an.

Von nun an soll $i_0(t)$ als Eingang der Schaltung und $i(t)$ als Ausgang angesehen werden.

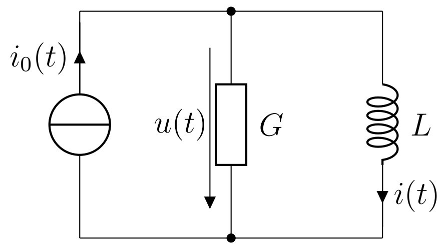


Abbildung 16.3: GL-Glied

e) Zeigen Sie, dass die Schaltung ein sogenannter Tiefpass ist, d.h. dass sie Signale $i_0(t)$ mit niedriger Frequenz passieren lässt und Signale mit hoher Frequenz dämpft. Untersuchen Sie hierzu $|\frac{I}{I_0}|$ insbesondere für die Fälle $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{GL}$ und $\omega \to \infty$.

f) Berechnen Sie den Zeiger I für den Fall $I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})\hat{I}_1$, $\omega = \frac{1}{GL}$.

g) Berechnen Sie den Zeiger I für den Fall $I_0 = (1 - 0{,}5\mathrm{j})\hat{I}_2$, $\omega = \frac{2}{GL}$.

Nun sei der Eingangsstrom

$$i_0(t) = \hat{I}_1 \cos(\frac{1}{GL}t + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{1{,}25}\hat{I}_2 \cos(\frac{2}{GL}t + \arctan(-0{,}5))$$

gegeben.

h) Bestimmen Sie basierend auf den bisherigen Ergebnissen für die Zeiger nun die zugehörige Zeitfunktion $i(t)$.
Hinweis: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$ und $\sqrt{1{,}25}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(-0{,}5)} = 1 - \frac{\mathrm{j}}{2}$.

i) Betrachten Sie nun $i_G(t) = Gu(t)$ als Ausgang der Schaltung und untersuchen Sie $|\frac{I_G}{I_0}|$ für die Fälle $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{GL}$ und $\omega \to \infty$.

Nun soll die duale Schaltung bezüglich der Dualitätskonstanten R_d betrachtet werden. Hierzu sollen die Abkürzungen $C = \frac{L}{R_d^2}$, $R = R_d^2 G$, $u'(t) = R_d i(t)$, $i'(t) = \frac{u(t)}{R_d}$ und $u_0'(t) = R_d i_0(t)$ verwendet werden.

j) Zeichnen Sie die duale Schaltung.

k) Bestimmen Sie den Zeiger U' abhängig vom Zeiger U_0'.

l) Bestimmen Sie R, so dass $|\frac{U'}{U_0'}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $f = 1\,\mathrm{kHz}$ gilt, wenn $C = 100\,\mathrm{nF}$ ist. Verwenden Sie $\frac{5}{\pi} \approx 1{,}6$.

Nun soll an Stelle einer sinusförmigen Erregung ein Dreieckssignal als Eingangssignal $u_0'(t)$ verwendet werden.

m) Ist das Ausgangssignal $u'(t)$ ebenfalls ein Dreieckssignal? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Ein Dreieckssignal kann als sogenannte Fourierreihe wie folgt geschrieben werden:

$$u_0'(t) = -\hat{U}\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos((2k-1)\omega t)$$

mit $c_k = \frac{1}{(2k-1)^2}$.

16.3 Schwingkreis

Berechnen Sie für die Parallelschaltung von R, L und C

a) den komplexen Leitwert und Widerstand
b) die Resonanzfrequenz
c) die Güte
d) die 3db-Frequenzpunkte
e) die 3db-Bandbreite

16.4 Komplexe Leitwertsmatrix

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.4. Der Operationsverstärker arbeite im linearen Bereich.

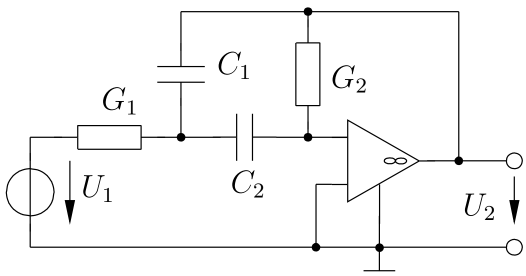


Abbildung 16.4: zu 16.4: Aktives RC-Filter (1)

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(p) = U_2/U_1$ aus der Knotenleitwertsmatrix der Schaltung. Ersetzen Sie dazu die (nicht spannungsgesteuerte) Spannungsquelle durch äquivalente Quellenumformung.
b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der Schaltung und klassifizieren Sie diese für $C_1 = C_2 = C$ in Abhängigkeit von G_1 und G_2. Welches Phasenportrait ergibt sich?
c) Skizzieren Sie das Bodediagramm für die normierten Elementewerte $C_1 = C_2 = 1$ und $G_1 = 1{,}82,\ G_2 = 5{,}5$.

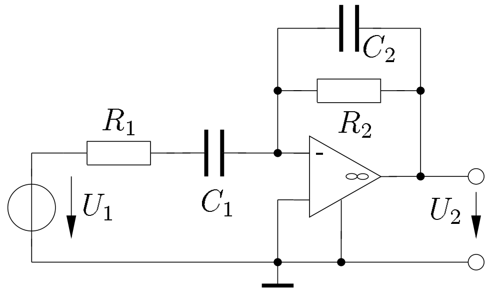


Abbildung 16.5: zu 16.5: Aktives RC-Filter (2)

16.5 Komplexe Übertragungsfunktion

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.5.

Der Operationsverstärker arbeite im linearen Bereich.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega) = U_2/U_1$ durch einfaches Aufstellen der Maschen- und Knotengleichungen („by inspection“) unter Berücksichtigung des idealen Operationsverstärkers (Nullator).

b) Setzen Sie $R_1 = R$, $R_2 = 10R$, $C_1 = 10^4 C$, $C_2 = C$ und $RC = 1$ und zerlegen (faktorisieren) Sie die Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$.

c) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm ($20\lg(.)$ über dem Frequenzmaßstab) und geben Sie die „Eckpunkte“ und die Asymptoten für die normierten Elementewerte $RC = 1$ an.

d) Skizzieren Sie den tatsächlichen Verlauf von Betrag und Phase im Bode-Diagramm. Kennzeichnen Sie die 3db-Eckfrequenzen.

e) Welche Funktion erfüllt diese Schaltung?

f) Zeichnen Sie die Ortskurve von $H(\mathrm{j}\omega)$ in der komplexen H-Ebene und geben Sie einige wesentliche Frequenzpunkte dieser Ortskurve an. Vergleichen Sie dazu die Übertragungsfunktion mit der Impedanzfunktion eines Parallelschwingkreises.

16.6 Komplexe Leitwertsmatrix

Untersuchen Sie die Schaltung in Abbildung 16.6.

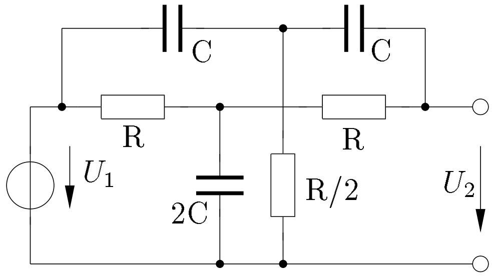


Abbildung 16.6: zu 16.6: Doppel-T-RC-Glied

a) Wandeln Sie die Spannungsquelle äquivalent um.

b) Stellen Sie die Leitwertmatrix auf

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion U_2/U_1.

d) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion

e) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für die normierten Elementewerte $RC = 1$.

16.7 Transferfunktion und Reziprozität

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.7.

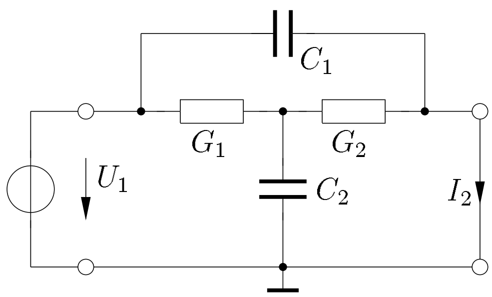


Abbildung 16.7: zu 16.7: Überbrücktes RC-Glied

a) Berechnen Sie die Transferfunktion $H(p) = I_2/U_1$ mit Hilfe der Knotenleitwertsmatrix. Wandeln Sie die nicht spannungsgesteuerten Elemente (Spannungsquelle und Kurzschluss) mit Hilfe von Gyratoren.

b) Setzen Sie $R_1 = R_2 = R$ und berechnen Sie die Nullstellen des Zählerpolynoms von $H(p)$ für $C_2 = 10C, C_1 = \frac{C}{10}$.

c) Fügen Sie die eben untersuchte Schaltung in die Gesamtanordnung aus Abbildung 16.8 ein und berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) und der Reziprozität die Übertragungsfunktion $H(p)' = U_2/U_0$

(Der Operationsverstärker arbeite im streng linearen Bereich.)

16.8 Transferfunktion, Allpass

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.9.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(p) = U_2/U_1$

b) Dimensionieren Sie R_1 und R_2 so, dass die Schaltung ein sogenannter Allpass wird ($\Rightarrow |H(\mathrm{j}\omega)| = 1$).

c) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für die in b) hergeleitete Dimensionierung.

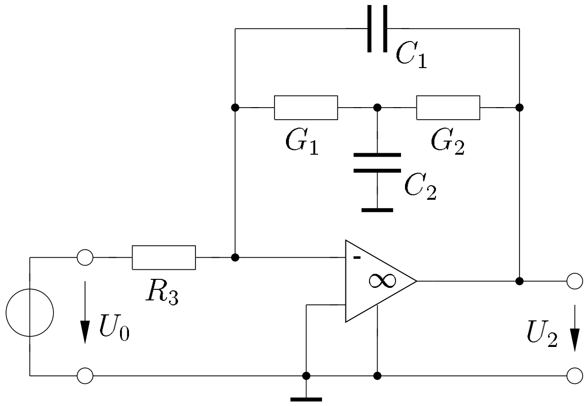


Abbildung 16.8: zu 16.7 c: Überbrücktes RC-Glied als Rückkopplung

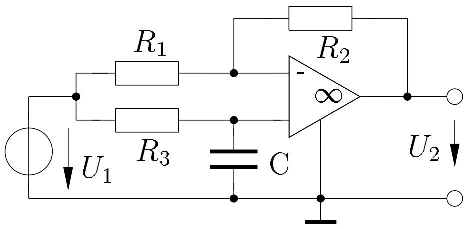


Abbildung 16.9: zu 16.8: Allpass

16.9 Transferfunktion, Weiche

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.10.

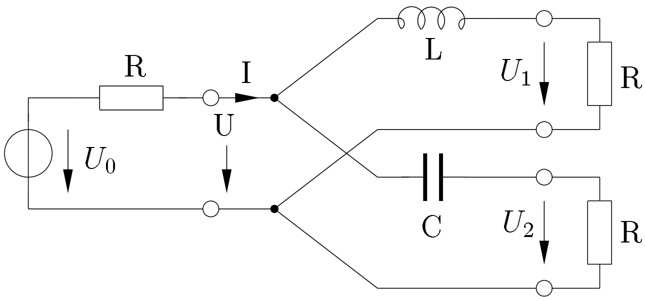


Abbildung 16.10: zu 16.9: Weiche

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $H_1(p) = U_1/U_0$. $H_2(p) = U_2/U_0$ für $L/R = RC$.

b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für beide Übertragungsfunktionen.

c) Stellen Sie eine Beziehung zwischen $|H_1(\mathrm{j}\omega)|$ und $|H_2(\mathrm{j}\omega)|$ auf und interpretieren Sie diese.

d) Zeichnen Sie die duale Schaltung. Benutzen Sie R_d als Dualitätsinvariante.

e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion U_2/U_1

f) Berechnen Sie die Nullstellen des Zähler- und Nennerpolynoms.

16.10 Transferfunktion, Kreuzglied

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.11.

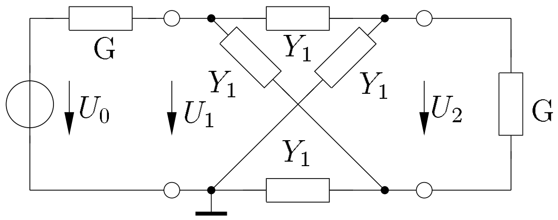


Abbildung 16.11: zu 16.10: Kreuzglied

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $H(p) = U_2/U_0$. Stellen Sie dazu die Knotenleitwertsmatrix auf und berechnen Sie U_2 als Differenz zweier Spannungen.

b) Berechnen Sie das Übertragungsverhältnis $v(\omega) = 20 \lg |H(\mathrm{j}\omega)|$ für $Y_1 = \mathrm{j}B_1$ und $Y_2 = \mathrm{j}B_2$ (rein reaktiv) und $Y_1Y_2 = G^2$ (Y_1 dual zu Y_2 bezüglich G).

c) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für $B_1 = \omega C$, $B_1 = -\frac{1}{\omega L}$ und $G^2 = \frac{C}{L}$.

16.11 Detektorempfänger

Detektorempfänger sind einfache Geräte zum Empfang von Rundfunksignalen, die amplitudenmoduliert auf Kurz-, Mittel- oder Langwelle ausgestrahlt werden. Sie stammen aus den Anfangstagen des Rundfunks, können aber auch heute noch eingesetzt werden.

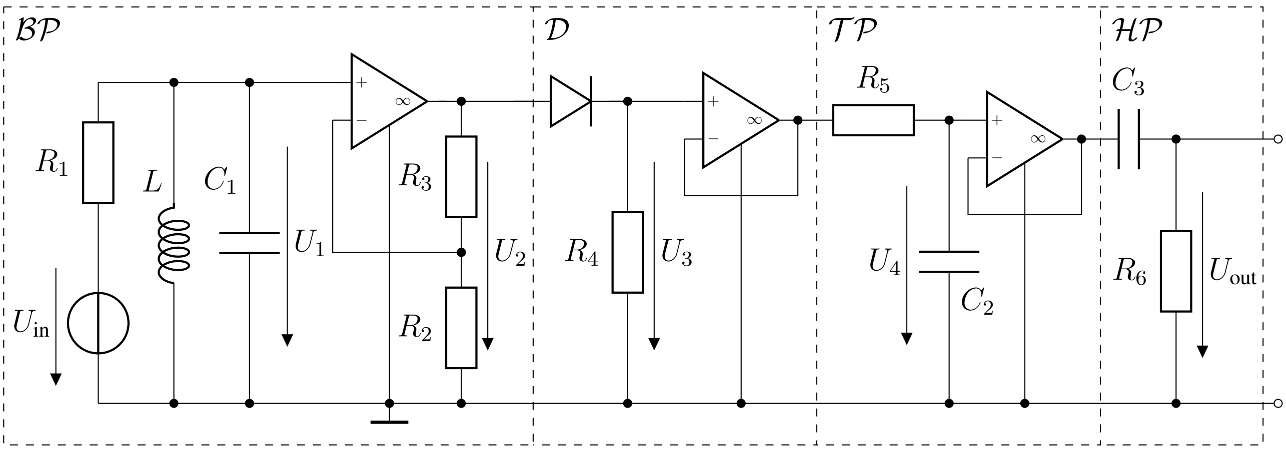


Abbildung 16.12: Detektorempfängerschaltung

Mit der Schaltung aus Abbildung 16.12 kann ein Detektorempfänger realisiert werden, bei dem die einzelnen Baugruppen entkoppelt wurden, damit sie unbelastet betrachtet werden können. Die Operationsverstärker können im streng linearen Bereich angenommen werden. Durch U_{in} und R_1 wird die Antenne dargestellt. Für die Elementewerte gilt: $L = 9\,\mu\text{H}$, $C_1 = 1\,\text{nF}$, $C_2 = 1{,}6\,\text{nF}$, $C_3 = 1{,}6\,\mu\text{F}$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_6 = 1\,\text{k}\Omega$.

a) Berechnen Sie für den eingeschwungenen Zustand die Übertragungsfunktionen $H_1(\mathrm{j}\omega) = U_4/U_3$ der Baugruppe $\mathcal{TP}$ und $H_2(\mathrm{j}\omega) = U_{\text{out}}/U_4$ der Baugruppe $\mathcal{HP}$ jeweils bei den Frequenzen $f = 1\,\text{Hz}, 1\,\text{kHz}, 1\,\text{MHz}$.

b) Geben Sie jeweils die „Steady State“-Antwort der Spannung U_{out} für eine Erregung $u_3(t) = 1\,\text{V}\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right)$ mit $f = 1\,\text{Hz}, 1\,\text{kHz}, 1\,\text{MHz}$ an. Wie lauten die zeitabhängigen Größen?

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H_0(p) = U_2/U_{\text{in}}$ durch Knotenspannungsanalyse der Baugruppe $\mathcal{BP}$. Ersetzen Sie dazu die (nicht spannungsgesteuerte) Spannungsquelle durch äquivalente Quellenumformung.

d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der Baugruppe $\mathcal{BP}$ und klassifizieren Sie diese abhängig von R_1. Welches Phasenportrait ergibt sich jeweils? Zeichnen Sie jeweils qualitativ ein Pol-Nullstellen-Diagramm.

e) Skizzieren Sie jeweils das Bodediagramm von U_{out}/U_3 und U_2/U_{in}.

f) Diskutieren Sie das Verhalten der Schaltung, wenn über die Antenne das Signal

$$u_{\text{in}} = 1\,\text{mV} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t))\cos(2\pi \cdot 1{,}678\,\text{MHz} \cdot t)$$

empfangen wird. Beschreiben Sie das Verhalten der idealen Diode mit Hilfe der Näherung $\max(\cos(\omega t), 0) \approx \left(\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)^2$ und den Zusammenhängen $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ und $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$.

16.12 Ortskurve

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.13.

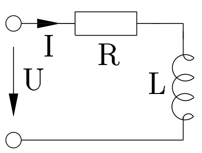


Abbildung 16.13: zu 16.12: RL-Glied

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Ortskurve des komplexen Widerstandes Z für positive Frequenzen.

b) Zeigen Sie, dass für den komplexen Leitwert gilt:

$$\left(\text{Re}\{Y\} - \frac{1}{2R}\right)^2 + (\text{Im}\{Y\})^2 = -\frac{1}{4R}^2$$

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Ortskurve des komplexen Leitwerts Y für positive Frequenzen. Kennzeichnen Sie die 3 dB-Grenzfrequenz.

16.13 Ortskurve 2

Gegeben sei das Eintor aus Abbildung 16.14 mit den angegebenen Zweipolfunktionen.

Es sei $R = 1\,\Omega$, $L = 2\,\text{mH}$, $C = 1\,\text{mF}$. Zunächst soll die Admittanz Y betrachtet werden.

$$Z(\mathrm{j}\omega) = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$
$$Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{\omega^2 RC^2 + \mathrm{j}\omega C(1-\omega^2 LC)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

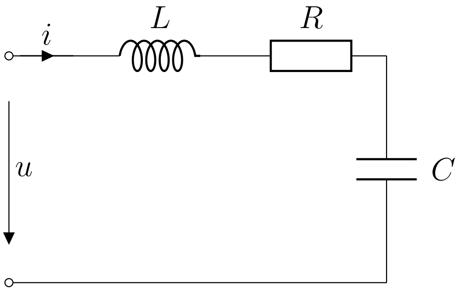


Abbildung 16.14: Schwingkreis

a) Für welche Werte von ω wird der Realteil zu Null, für welche der Imaginärteil?

b) Für welche Werte von ω gilt $\mathrm{Im}\,\{Y\} = \mathrm{Re}\,\{Y\} \neq 0$, für welche gilt $\mathrm{Im}\,\{Y\} = -\,\mathrm{Re}\,\{Y\} \neq 0$?

c) Geben Sie in einer Tabelle für alle ω aus a) und b) den Real- und Imaginärteil von Y an.

d) Skizzieren Sie die Ortskurve von Y.

e) Wiederholen Sie a) bis d) für die Impedanz Z.

f) Welcher graphische Zusammenhang besteht zwischen den beiden Ortskurven?

16.14 Komplexe Leistung

Berechnen Sie die komplexe Leistung für die Schaltungen A und B in Aufgabe 16.1 für die angegebene Dimensionierung bei einer Erregung $u(t) = 1\,\mathrm{V}\cos(2\pi f t + \frac{\pi}{4})$.

16.15 Komplexe Leistung 2

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 16.15 mit $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t)$.

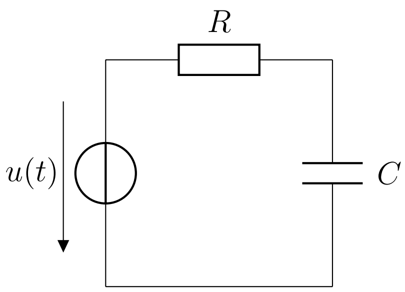


Abbildung 16.15: RC-Glied

a) Geben Sie den komplexen Zeiger U sowie die Admittanz Y der Reihenschaltung von R und C an.

b) Bestimmen Sie die komplexe Scheinleistung, die in der Schaltung umgesetzt wird.

c) Wieviel Energie wird der Quelle in jeder Periode entnommen?

d) Für welches ω wird diese Energie maximal? Wie groß ist die maximale Energie?

L16 Lösung: Komplexe Wechselstromrechnung

L16.1 Zeigergrößen

a) Für die Impedanzfunktion der Schaltung A gilt in Zeigerdarstellung:

$$Z(\mathrm{j}\omega) = \frac{U}{I} = R_2 + \mathrm{j}\omega L + \frac{R_1 \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = R_2 + \mathrm{j}\omega L + \frac{R_1}{1 + \mathrm{j}\omega R_1 C}$$

Mit $\omega' = 2\pi f'$ und $f' = 50\mathrm{Hz}$ erhält man

$$\omega' C = 10^{-3}\,\mathrm{S}, \quad \omega' L = 100\,\Omega$$

$$Z(\mathrm{j}\omega') = 300\,\Omega + \mathrm{j}100\,\Omega + \frac{1000\,\Omega}{1 + \mathrm{j}} = 800\,\Omega - \mathrm{j}400\,\Omega$$

In Schaltung B soll eine Übertragungsfunktion $\frac{U_2}{U}$ berechnet werden. Durch Aufstellen von Knoten- und Maschengleichungen erhält man

$$U_2 = U_C - U_{R2} = I_{R1} \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} - I_{R2} R_2$$

Für die Ströme wird dabei die gleiche Zählpfeilrichtung wie bei I angenommen.

$$I_{R1} = \frac{U}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}, \quad I_{R2} = \frac{U}{R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

Damit erhält man für das Spannungsverhältnis

$$H(\mathrm{j}\omega') = \left.\frac{U_2}{U}\right|_{\mathrm{j}\omega'} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega' C}}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega' C}} - \frac{R_2}{R_2 + \mathrm{j}\omega' L} =$$

$$= \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega' R_1 C} - \frac{R_2}{R_2 + \mathrm{j}\omega' L} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}} - \frac{3}{3 + \mathrm{j}} = -0,4 - 0,2\mathrm{j}$$

b) Schreibt man den komplexen Widerstand Z aus Schaltung A in Polarkoordinatenschreibweise (Betrag und Phase) an, so gilt

$$Z(\mathrm{j}\omega') = \frac{U}{I} = 800\,\Omega - \mathrm{j}400\,\Omega = 894\,\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.464}$$

Daraus erhält man den komplexen Zeiger des Stromes mit $U = 1\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}$ zu

$$I = \frac{1}{894\,\Omega} \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.464} 1\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = 1.12\,\mathrm{mA}\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.249}$$

Für den zeitabhängigen Stromverlauf gilt:

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = 1.12\,\mathrm{mA}\cos(\omega' t + 1.249\mathrm{rad})$$

Dies ist die Antwort des Stromes für den eingeschwungenen Zustand („steady state“). Sie kann auch durch eine Transientenanalyse für $t \to \infty$ gewonnen werden, was aber viel höheren Rechenaufwand erfordert. Die Verwendung von komplexen Zeigern ist also ein Hilfsmittel, um schnell zum gewünschten Ergebnis zu kommen.
Für Schaltung B verfährt man in gleicher Weise und erhält

$$H(\mathrm{j}\omega') = -0.4 - \mathrm{j}0.2 = \sqrt{0.2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3.605},$$
$$U_2 = H(\mathrm{j}\omega')U = 1\,\mathrm{V}\sqrt{0,2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3.605}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = 0,45\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.391}\,\mathrm{V},$$
$$u_2 = \mathrm{Re}\left\{U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega' t} = 0,45\,\mathrm{V}\cos(\omega' t + 4,391\mathrm{rad})\right\}$$

L16.2 GL-Glied

a) $$i_0(t) = \hat{I}_0\cos(\omega t) \;\Rightarrow\; I_0 = \hat{I}_0$$
$$i_0(t) = \hat{I}_0\sin(\omega t) = \hat{I}_0\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \;\Rightarrow\; I_0 = \hat{I}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{j}\hat{I}_0$$

b) $$u(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \;\Rightarrow\; U = \mathrm{j}\omega LI$$

c) $$I = I_0 - GU$$

d) $$I = I_0 - GU = I_0 - G\mathrm{j}\omega LI \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega GL}I_0$$

e) $$\omega = 0: \quad \left|\frac{I}{I_0}\right| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}0\cdot GL}\right| = 1$$
$$\omega = \frac{1}{GL}: \quad \left|\frac{I}{I_0}\right| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\omega \to \infty: \quad \left|\frac{I}{I_0}\right| = \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega GL}\right| = 0$$

f) $$I = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})\hat{I}_1\frac{1}{1+\mathrm{j}} = \frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}$$

g) $$I = (1-0{,}5\mathrm{j})\hat{I}_2\frac{1}{1+2\mathrm{j}} = \frac{(1-0{,}5\mathrm{j})(1-2\mathrm{j})}{(1+2\mathrm{j})(1-2\mathrm{j})}\hat{I}_2 = \frac{1-0{,}5\mathrm{j}-2\mathrm{j}+\mathrm{j}^2}{1^2+2^2}\hat{I}_2 = \frac{-2{,}5\mathrm{j}}{5}\hat{I}_2 = -\frac{\mathrm{j}}{2}\hat{I}_2$$

h) $$I_1 = \hat{I}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \hat{I}_1\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}) \quad \text{und} \quad \omega_1 = \frac{1}{GL}$$
$$I_2 = \hat{I}_2\sqrt{1{,}25}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(-0{,}5)} = \hat{I}_2(1-\frac{\mathrm{j}}{2}) \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{2}{GL}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \mathrm{Re}\left\{\frac{I_1}{1+\mathrm{j}\omega_1 GL}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\frac{I_2}{1+\mathrm{j}\omega_2 GL}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t}\right\}\\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\frac{-\mathrm{j}\hat{I}_2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t}\right\}\\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega_1 t) + \mathrm{j}\sin(\omega_1 t)\right)\right\}\\
&\quad + \mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{I}_2}{2}\left((-\mathrm{j})\cos(\omega_2 t) + \mathrm{j}(-\mathrm{j})\sin(\mathrm{j}\omega_2 t)\right)\right\}\\
&= \frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{GL}t\right) + \frac{\hat{I}_2}{2}\sin\left(\frac{2}{GL}t\right)
\end{aligned}$$

Wichtig: Das Superpositionsprinzip gilt nicht für Zeiger, die zu unterschiedlichen Frequenzen gehören! Darum werden hier die Zeitsignale überlagert und nicht die Zeiger.

i) $I_G = I_0 - I$

$$\omega = 0: \quad \left|\frac{I_0 - I}{I_0}\right| = \left|1 - \frac{1}{1+\mathrm{j}0\cdot GL}\right| = 0$$

$$\omega = \frac{1}{GL}: \quad \left|\frac{I_0 - I}{I_0}\right| = \left|1 - \frac{1}{1+\mathrm{j}}\right| = \left|\frac{1+\mathrm{j}-1}{1+\mathrm{j}}\right| = \left|\frac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega \to \infty: \quad \left|\frac{I_0 - I}{I_0}\right| = \lim_{\omega\to\infty}\left|1 - \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega GL}\right| = 1$$

Das Verhalten ist genau umgekehrt als zuvor, das heißt es handelt sich nun um einen Hochpass, der Signale hoher Frequenz passieren lässt.
Ströme mit hoher Frequenz fließen also vornehmlich duch G, Ströme mit niedriger Frequenz vornehmlich durch L.

j) Die duale Schaltung ist in Abbildung L16.1 zu finden. Zeichnen Sie die duale Schaltung.

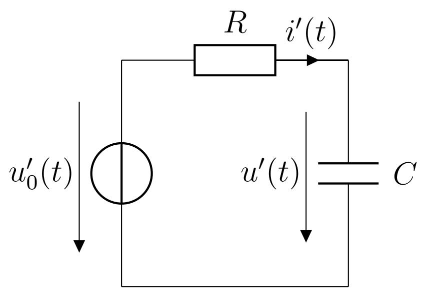


Abbildung L16.1: zu L16.2 j): Duale Schaltung zum GL-Glied

k) $U' = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}U_0'$ (folgt aus d) wegen Dualität)

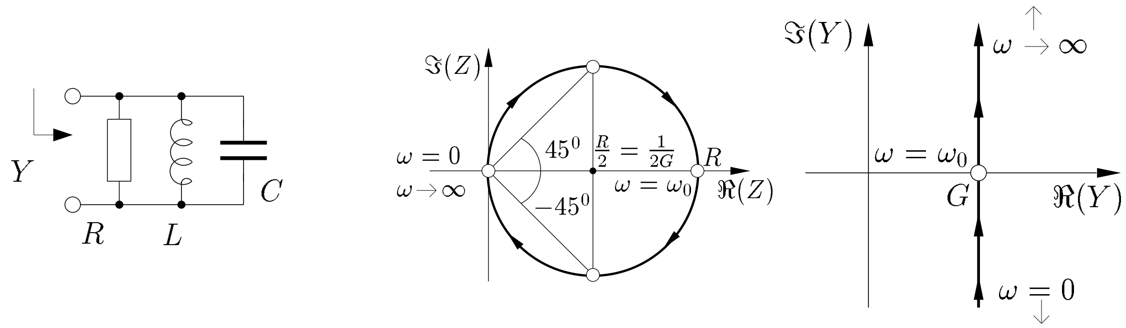


Abbildung L16.2: Zu L16.3 a): Schwingkreis, Ortskurve

l) $$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left|\frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} \;\Rightarrow\; 1 = (2\pi f RC)^2 \;\Rightarrow\; 1 = 2\pi f RC$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{-7}\ \mathrm{AsV}^{-1}} = \frac{1}{2\pi 10^{-4}}\ \Omega = \frac{5}{\pi}\ \mathrm{k}\Omega \approx 1{,}6\,\mathrm{k}\Omega$$

m) $u_0'(t)$ ist eine Überlagerung von Cosinus-Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_k = (2k-1)\omega$. Die zugehörigen Zeiger sind:

$$U'_{0,k} = -\hat{U}\frac{8}{\pi^2}c_k.$$

$$u'(t) = -\hat{U}\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1 + \mathrm{j}(2k-1)\omega RC}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k-1)\omega t}\right\}}_{=a_k\cos((2k-1)\omega t + \varphi_k)}$$

Die Größen a_k und φ_k hängen von k ab, d.h. Signale mit verschiedenen Frequenzen werden unterschiedlich gedämpft und bekommen unterschiedlichen Phasenversatz.
$\Rightarrow$ Reihe des Ausgangssignals ist qualitativ anders als die Reihe des Eingangssignals
$\Rightarrow$ kein Dreieck am Ausgang

L16.3 Schwingkreis

a) Der komplexe Leitwert eines Parallelschwingkreises ist mit $G = 1/R$ beschrieben durch

$$Y = G + pC + \frac{1}{pL}, \quad p = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

Die komplexe Ortskurve von Y ist in der komplexen Leitwertsebene Y eine senkrechte Gerade, die mit wachsendem ω von $-\infty$ nach $+\infty$ (von „unten“ nach „oben“) durchlaufen wird. In der komplexen Widerstandsebene $Z = \frac{1}{Y}$ ergibt sich als Ortskurve ein Kreis, der für wachsende ω im Uhrzeigersinn durchlaufen wird (Abbildung L16.2).

b) Besonders ausgezeichnete Frequenzpunkte sind, außer der Resonanzfrequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, diejenigen Frequenzen, bei denen $|\,\mathrm{Re}\{Y\}| = |\,\mathrm{Im}\{Y\}|$ ist und somit die Grenzen ω_{-D} und ω_{+D} die Bandweite des Resonanzkreises darstellen.

c) Wegen der großen praktischen Bedeutung von Resonanzkreisen haben sich folgende Begriffe und Normierungen durchgesetzt. Dazu schreibt man Y als gebrochen rationale Funktion

$$Y = C\frac{p^2 + \frac{G}{C}p + \frac{1}{LC}}{p}$$

Normiert man Y auf den Wert $Y(\mathrm{j}\omega_0) = G$ (bei der Resonanzfrequenz), so erhält man

$$\frac{Y}{G} = \frac{C}{G}\frac{p^2 + \frac{G}{C}p + \frac{1}{LC}}{p} = \tilde{Y}$$

$$\tilde{Y} = \frac{Q}{\omega_0}p + \frac{Q\omega_0}{p} + 1 = 1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)$$

wobei $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$ als Güte des Schwingkreises definiert wird. Normiert man auf die neue Frequenzvariable s, mit $s = \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}$, so erhält man den normierten Leitwert als Funktion der Güte

$$Y_s = 1 + sQ$$

Die Frequenzvariable s bezeichnet man als Verstimmung. Durch die Normierung liegt das Maximum von Y_s bei 1 und die Resonanzfrequenz bei $s = 0$.

d) Um die 3dB-Frequenzpunkte $\omega_{\pm D}$ zu ermitteln, genügt es, s an den Stellen zu berechnen, wo $|\operatorname{Re}\{Y_s\}| = |\operatorname{Im}\{Y_s\}|$, d.h. wo $1 = |sQ|$. Mit dieser Bedingung ergibt sich

$$1 = \left|Q\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\right)\right| = \left|\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right| = \frac{1}{Q}, \quad \omega^2 \pm \frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0, \quad \omega_{\substack{1,2\\3,4}} = \pm\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2}$$

Da negative Frequenzen nicht betrachtet werden sollen, ergibt sich

$$\omega_{\pm D} = \omega_0\left(\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

e) Die Bandbreite $\omega_{+D} - \omega_{-D}$ ist bestimmt durch

$$\omega_{+D} - \omega_{-D} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Die Frequenzen $\omega_{\pm D}$ liegen geometrisch symmetrisch zu ω_0.

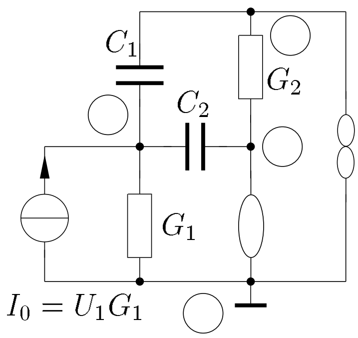


Abbildung L16.3: zu L16.4: Schaltung mit Nullor

L16.4 Komplexe Leitwertsmatrix

Siehe ESB in Abbildung L16.3.

a) Für die Knotenleitwertsmatrix $\boldsymbol{Y}_k'$ (ohne Einbau von Nullator und Norator) gilt

$$\boldsymbol{Y}_k' = \begin{bmatrix} G_1 + p(C_1 + C_2) & -pC_1 & -pC_2 \\ -pC_1 & G_2 + pC_1 & -G_2 \\ -pC_2 & -G_2 & G_2 + pC_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}_q' = \begin{bmatrix} U_1 G_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bei Berücksichtigung des Op-Amps ergibt sich:

- Nullator zwischen Knoten 3 und 0: Addiere Spalte 3 auf Spalte 0 (fällt weg, da Knoten 0 Bezugsknoten ist). Streiche Spalte 3.
- Norator zwischen Knoten 2 und 0: Addiere Zeile 2 auf 0 (fällt weg, da Knoten 0 Bezugsknoten ist). Streiche Zeile 2.

Damit ergibt sich folgende Knotenleitwertsmatrix:

$$\boldsymbol{Y}_k = \begin{bmatrix} G_1 + p(C_1 + C_2) & -pC_1 \\ -pC_2 & -G_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I}_q = \begin{bmatrix} U_1 G_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für die Übertragungsfunktion folgt

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{k2} G_1}{I_{q1}} = G_1 \frac{(-1)^{(n+m)} \det \boldsymbol{Y}_{nm}}{\det \boldsymbol{Y}_k}$$

Mit U_2 am Knoten 2 ($m = 2$) und der Erregung I_{q1}, ($n = 1$) ergibt sich

$$H(p) = G_1 \frac{-Y_{12}}{\det \boldsymbol{Y}_k} = \frac{-pC_2 G_1}{G_1 G_2 + pG_2(C_1 + C_2) + p^2 C_1 C_2}$$

b) Für $C_1 = C_2 = C$ erhält man

$$H(p) = \frac{-pC_2 G_1}{G_1 G_2 + 2pCG_2 + p^2 C^2}$$

Die Eigenfrequenzen ergeben sich durch Nullsetzen des Nennerpolynoms

$$G_1G_2 + 2pCG_2 + p^2C^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\frac{G_2}{C} \pm \frac{\sqrt{G_2^2 - G_1G_2}}{C}$$

Die Eigenfrequenzen sind reell für $G_2^2 - G_1G_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad G_2 > G_1$. In diesem Fall erhält man zwei negative Eigenwerte und als Phasenportrait einen stabilen Knoten bei positiven Elementewerten. Für $G_2 = G_1$ ergibt sich eine doppelte Polstelle. Im Phasenportrait ergibt sich eine spezielle Form eines stabilen Knotenpunktes. Für $G_2 < G_1$ sind die Nullstellen konjungiert komplex. Das Phasenportrait ist ein stabiler Strudel aufgrund der negativen Realteile.

c) Für die normierten Elementewerte ergibt sich bei einer dimensionslosen Frequenz ω:

$$p_{1,2} = -5.5 \pm 4.5, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -10$$

Zur Konstruktion des Bodediagramms wird die Übertragungsfunktion in vier Teile faktorisiert:

$$H(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1.82\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega)(10+\mathrm{j}\omega)} = \underbrace{-0.182}_{H_0}\ \underbrace{\mathrm{j}\omega}_{H_1}\ \underbrace{\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{1}}}_{H_2}\ \underbrace{\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{10}}}_{H_3}$$

Für jeden der vier Faktoren werden jeweils der asymptotische Betragsverlauf $v(H)$ und der Phasenverlauf $\varphi(H)$ skizziert, die sich folgendermaßen berechnen:

$$v(H) = 20\lg\sqrt{\mathrm{Re}^2\{H\} + \mathrm{Im}^2\{H\}}\mathrm{dB}; \quad \varphi(H) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H\}}{\mathrm{Re}\{H\}}\right) & \text{für } \mathrm{Re}\{H\} > 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H\}}{\mathrm{Re}\{H\}}\right) \pm \pi & \text{für } \mathrm{Re}\{H\} < 0 \end{cases}$$

Die sich daraus ergebenden Verläufe sind in Abbildung L16.6 anhand von vier wichtigen Beispielen illustriert. Da für Produkte bzw. Quotienten von Übertragungsfunktionen gilt:

$$v(H_1H_2) = v(H_1) + v(H_2) \qquad \varphi(H_1H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2)$$

$$v\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = v(H_1) - v(H_2) \qquad \varphi\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = \varphi(H_1) - \varphi(H_2)$$

ergeben sich der Betrag und die Phase von $H(\mathrm{j}\omega)$ im Bodediagramm aus der konstruktiven Überlagerung der einzelnen Betrags- bzw. Phasenverläufe (Abbildung L16.4 und L16.5):

L16.5 Komplexe Übertragungsfunktion

a) Bei der angegebenen Schaltung handelt es sich um einen invertierenden Verstärker mit dem Verstärkungsfaktor $\frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$. Die Widerstände Z_1 und Z_2 sind dabei komplex.

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}, \quad Z_2 = \frac{R_2\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} = \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega C_2R_2}$$

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion:

$$H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-R_2}{1+\mathrm{j}\omega C_2R_2}\frac{1}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} = \frac{-R_2}{1+\mathrm{j}\omega C_2R_2}\frac{\mathrm{j}\omega C_1}{1+\mathrm{j}\omega C_1R_1}$$

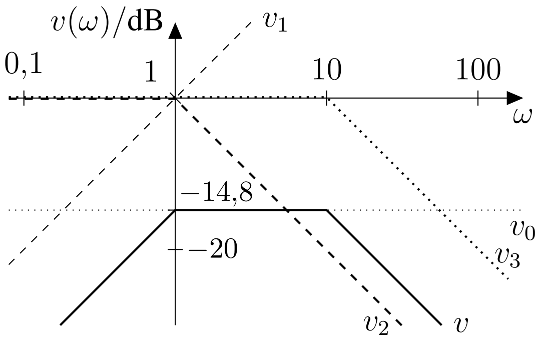


Abbildung L16.4: zu 16.4 c: Betragsverlauf

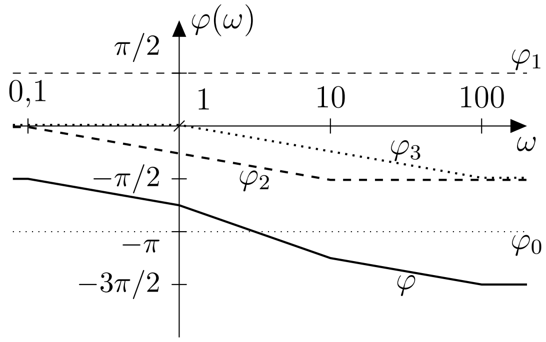


Abbildung L16.5: Phasenverlauf

b) Mit $R_1 = R$, $R_2 = 10R$, $C_1 = 10^4 C$, $C_2 = C$ und $RC = 1$ lässt sich die Übertragungsfunktion faktorisieren in

$$H(\mathrm{j}\omega) = -10^5 \mathrm{j}\omega \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{10^{-1}}} \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{10^{-4}}}$$

mit dimensionslosem ω. Normiert man die Frequenzachse im Bodediagramm auf 10^{-4}, ($\omega' = \frac{\omega}{10^{-4}}$), so gilt für die normierte Frequenz ω':

$$H(\mathrm{j}\omega') = \underbrace{-10}_{H_0} \underbrace{\mathrm{j}\omega}_{H_1} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega'}{10^3}}}_{H_2} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega'}{1}}}_{H_3}$$

mit den beiden 3dB Eckfrequenzen $\alpha_1 = 10^3$ und $\alpha_2 = 1$.

c) Das Bodediagramm für Betrag und Phase erhält man wieder durch Addition aus den einzelnen Produkttermen (Abbildung L16.7).

d) Das Bodediagramm liefert nur einen asymptotischen Verlauf der Betrags- und Phasenfunktion. Die Frequenzen und (Schnittpunkte der Asymptoten) bezeichnet man als 3dB Eckfrequenzen, da hier die Verstärkung um 3dB gegenüber dem Maximalwert abgefallen ist. Für den tatsächlichen Verlauf der Betrags- und Phasenfunktion gilt:

e) Die Schaltung arbeitet als Bandpass. Frequenzen zwischen α_1 und α_2 werden „durchgelassen“, außerhalb von diesem Bereich wird unterdrückt. Der Verstärkungsabfall beträgt im Sperrbereich 20dB pro Dekade. Die maximale Verstärkung liegt bei der Frequenz α_0 in der Mitte von α_1 und α_2 auf der logarithmischen Frequenzachse. Aufgrund der logarithmischen Darstellung gilt:

$$\alpha_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \ln \alpha_0 = \frac{1}{2}(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2)$$

Liegen die beiden Eckfrequenzen α_1 und α_2 nicht weit genug auseinander, so wird die maximale Verstärkung von 20dB bei der Resonanzfrequenz nicht ganz erreicht (siehe Abbildung L16.8).

f) Für den Parallelschwingkreis gilt bei Normierung des Widerstandes auf R:

$$\frac{Z(\mathrm{j}\omega)}{R} = \frac{1}{CR} \frac{\mathrm{j}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega \frac{1}{RC}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R - RLC\omega^2 + \mathrm{j}\omega L}$$

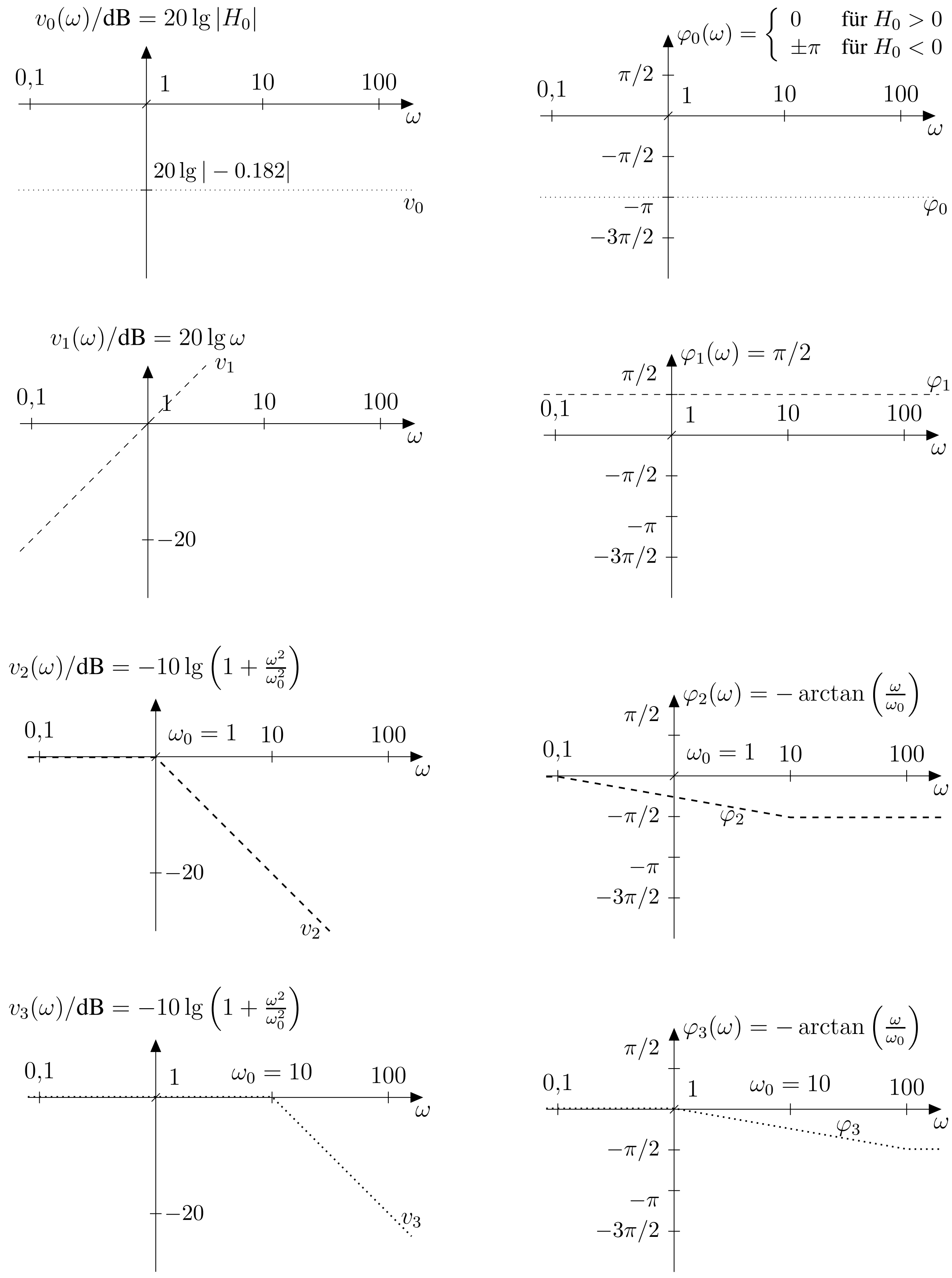


Abbildung L16.6: zu 16.4 c: vier Teile der Übertragungsfunktion

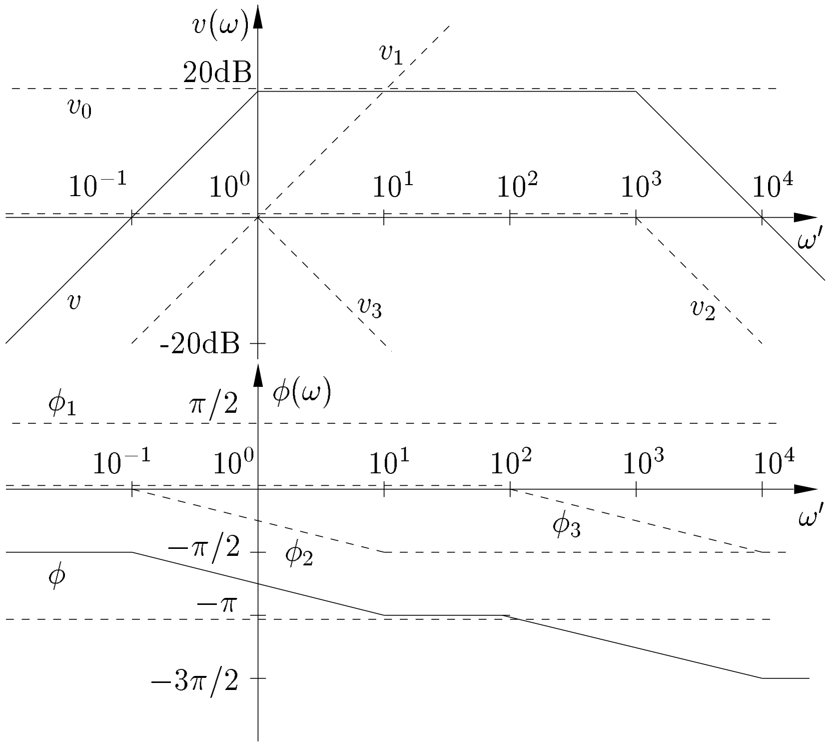


Abbildung L16.7: zu L16.5 c: Betrags- und Phasenverlauf, schematisch

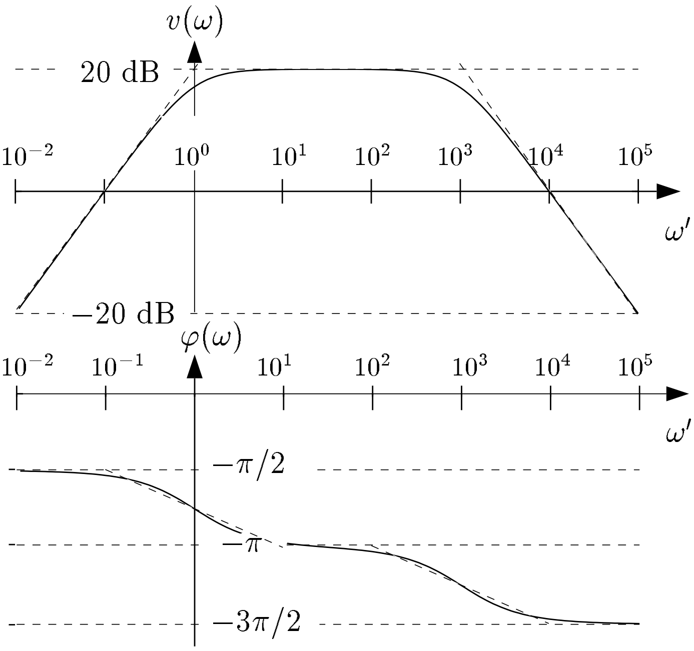


Abbildung L16.8: zu L16.5 d: Betrags- und Phasenverlauf, tatsächlicher Verlauf

Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$H(\mathrm{j}\omega') = (-10)\,\frac{\mathrm{j}\omega'}{1 - \frac{\omega'^2}{10^3} + \mathrm{j}\omega'(10^{-3}+1)}$$

Man erkennt, dass die beiden Übertragungsfunktionen die gleiche Struktur besitzen und daher auch die Ortskurven qualitativ übereinstimmen müssen. Für die Ortskurve $H(\mathrm{j}\omega')$ ergibt sich also ein Kreis. Wertet man die Funktion für $\omega' = 0$ und $\omega' = \alpha_0 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ aus, so gilt

$$H(\mathrm{j}\omega')\big|_{\omega'=0} = 0, \quad H(\mathrm{j}\omega')\big|_{\omega'=\alpha_0} = (-10)\frac{\mathrm{j}31,6}{1-1+\mathrm{j}31,6(10^{-3}+1)} \approx -10$$

mit $\alpha_0 = 31.6$. Durch diese beiden Punkte ist der Kreis eindeutig festgelegt. Die Durchlaufrichtung erhält man z.B. durch Auswertung der Funktion an den 3dB Eckfrequenzen. Die Ortskurve ist in Abbildung L16.9 dargestellt.

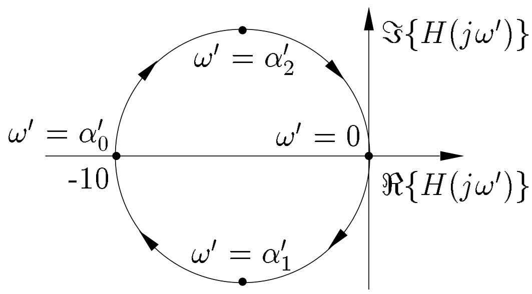


Abbildung L16.9: zu L16.5 f, Ortskurve

L16.6 Komplexe Leitwertsmatrix

a) Für die Knotenpotentialanalyse muss die Spannungsquelle U_1 in eine Stromquelle umgewandelt werden. Dies kann in dem vorliegenden Fall nur durch einen Gyrator erfolgen. Ersetzt man den Gyrator durch zwei gesteuerte Stromquellen mit dem Leitwert g, so ergibt sich das Ersatzschaltbild in Abbildung L16.10.

b) Die Knotenleitwertsmatrix lässt sich direkt aufstellen unter Berücksichtigung der gesteuerten Quellen:

$$\boldsymbol{Y}_k = \begin{bmatrix} pC+G & 0 & -pC & -G & -g \\ 0 & pC+G & -pC & -G & 0 \\ -pC & -pC & 2pC+2G & 0 & 0 \\ -G & -G & 0 & 2pC+2G & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\quad \boldsymbol{I}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_0 \end{bmatrix} \;;\quad \boldsymbol{I}_q = \boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{U}_k$$

c) Für die Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$ gilt

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{gU_2}{I_0}$$

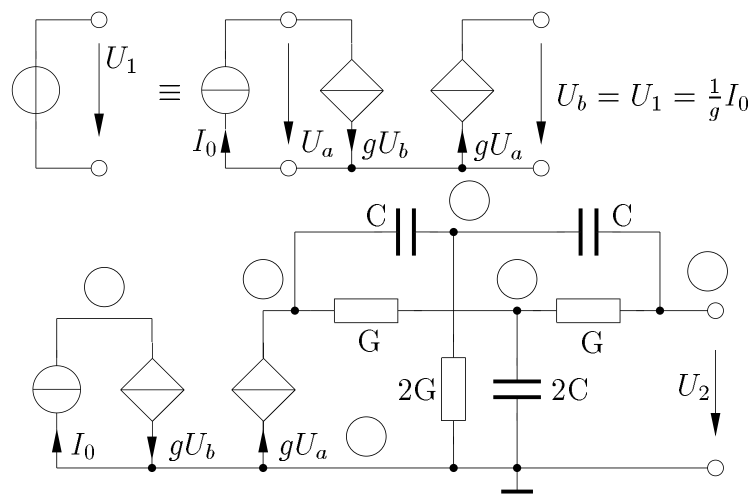


Abbildung L16.10: zu L16.6 a: Ersatzschaltbild

Die Funktion $\frac{U_2}{I_0}$ kann durch Berechnung der Unterdeterminante $\det \boldsymbol{Y}_{52}$ und und $\det \boldsymbol{Y}_k$ gewonnen werden, da die Spannung U_2 die Spannung am Knoten 2 darstellt ($m = 2$) und der Strom I_0 in den Knoten 5 hineinfließt ($n = 5$). Somit gilt:

$$\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{Y}_k^{-1} \boldsymbol{I}_q \quad \Rightarrow \quad U_2 = Y_{52}^{-1} I_{q5}, \quad Y_{52}^{-1} = \frac{(-1)^{5+2} \det \boldsymbol{Y}_{52}}{\det \boldsymbol{Y}_k}$$

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{gU_2}{I_0} = g(-1)^{5+2} \frac{\det \boldsymbol{Y}_{52}}{\det \boldsymbol{Y}_k}$$

Die Determinante $\boldsymbol{Y}_k$ erhält man durch Entwicklung von Unterdeterminanten.

$$\det \boldsymbol{Y}_k = g(-1)^{5+1} \begin{bmatrix} 0 & -pC & -G & -g \\ pC+G & -pC & -G & 0 \\ -pC & 2pC+2G & 0 & 0 \\ -G & 0 & 2pC+2G & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= g(-g)(-1)^{1+4} \begin{bmatrix} pC+G & -pC & -G \\ -pC & 2pC+2G & 0 \\ -G & 0 & 2pC+2G \end{bmatrix} =$$

$$= g^2 \left(4(pC+G)^3 - 2(pC)^2(pC+G) - 2G^2(pC+G) \right) =$$

$$= 2g^2(pC+G)(G^2 + 4pCG + p^2C^2)$$

Die Determinante $\det \boldsymbol{Y}_{52}$ berechnet man aus der entstandenen Unterdeterminante nach Streichen der 5. Zeile (I_0 strömt in den Knoten 5) und der 2. Spalte (U_2 liegt am Knoten 2).

$$\det \boldsymbol{Y}_{52} = \begin{vmatrix} pC+G & -pC & -G & -g \\ 0 & -pC & -G & 0 \\ -pC & 2pC+2G & 0 & 0 \\ -G & 0 & 2pC+2G & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -g(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -pC & -G \\ -pC & 2pC+2G & 0 \\ -G & 0 & 2pC+2G \end{vmatrix} = (-2)g(G+pC)\left((pC)^2+G^2\right)$$

Somit gilt für die Übertragungsfunktion:

$$H(p) = \frac{G^2+p^2C^2}{G^2+4GpC+p^2C^2}$$

d) Die Nullstellen bzw. Polstellen erhält man durch Nullsetzen des Zählers bzw. Nenners:
Nullstellen: $G^2+p^2C^2=0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=\pm \mathrm{j}\frac{G}{C}$.
Polstellen: $G^2+4GpC+p^2C^2=0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=-\frac{2G}{C}\pm\sqrt{\frac{4G^2}{C^2}-\frac{G^2}{C^2}}=\frac{G}{C}\left(-2\pm\sqrt{3}\right)$.

e) Durch Einsetzen der normierten Elementewerte $RC=1$ erhält man für die Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$ in faktorisierter Form

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1+(\mathrm{j}\omega)^2}{(\mathrm{j}\omega+3,73)(\mathrm{j}\omega+0,27)}=\frac{1+(\mathrm{j}\omega)^2}{\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{3,73}+1\right)\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{0,27}+1\right)}$$

Das Bodediagramm (Abbildung L16.11) setzt sich wieder aus der Überlagerung der Funktionsverläufe für die einzelnen Produktterme zusammen. Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck $1+(\mathrm{j}\omega)^2$ aufgrund konjugiert komplexer Nullstellen nicht mehr faktorisiert werden kann. Der logarithmierte Betragsverlauf hat bei $\omega=1$ eine Polstelle, da $H(\mathrm{j}1)=0$ und damit $\ln 0 \to \infty$ gilt. Der Phasenverlauf hat an dieser Stelle einen Phasensprung um den Wert π.

L16.7 Transferfunktion und Reziprozität

a) Für die Knotenpotentialanalyse muss die Spannungsquelle U_1 in eine Stromquelle $I_4=G_dU_1$ umgewandelt werden. Ebenso muss der Kurzschluss I_2 durch einen Gyrator in einen Leerlauf transformiert werden. Dadurch erreicht man, dass der Kurzschlussstrom I_2 durch eine Knotenspannung beschrieben wird. Somit ergibt sich das Ersatzschaltbild in Abbildung L16.12:

Für diese Schaltung kann jetzt die Knotenpotentialanalyse angewendet werden. Unter Berücksichtigung des Gyrators erhält man:

$$\boldsymbol{Y}_k=\begin{bmatrix} G_1+pC_1 & -pC_1 & -G_1 & -G_d & 0 \\ -pC_1 & G_2+pC_1 & -G_2 & 0 & G_d \\ -G_1 & -G_2 & G_1+G_2+pC_2 & 0 & 0 \\ G_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{I}_q=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der Kurzschlussstrom I_2 wird über den rechten Gyrator in die Knotenspannung $U_5=\frac{I_2}{G_d}$ transformiert. Für die Übertragungsfunktion gilt somit:

$$H(p)=\frac{I_2}{U_1}=\frac{G_dU_5}{\frac{1}{G_d}I_4}=G_d^2\frac{U_5}{I_4}=G_d^2\frac{(-1)^{4+5}\det \boldsymbol{Y}_{45}}{\det \boldsymbol{Y}_k}$$

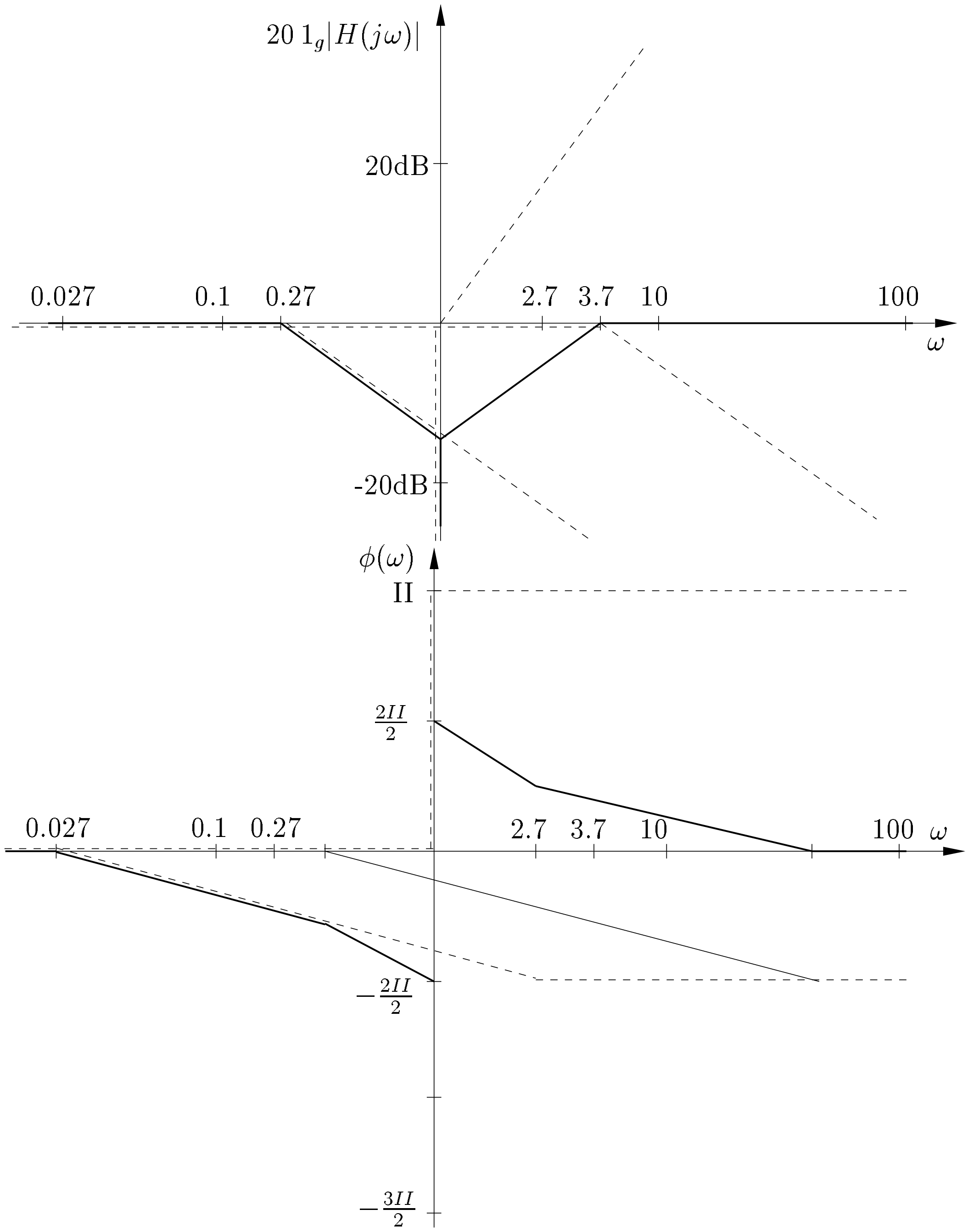


Abbildung L16.11: zu L16.6 e, Betrag und Phase

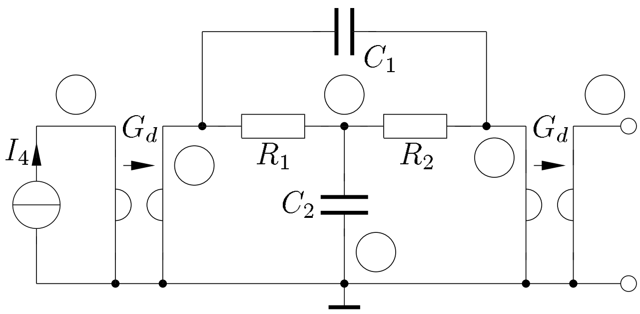


Abbildung L16.12: zu L16.7 a, Überbrücktes RC-Glied mit Gyratoren

Die Übertragungsfunktion $\frac{U_5}{I_4}$ entspricht dabei dem Matrixelement Y_{45}^{-1} der inversen Leitwertsmatrix ($n = 4$, $m = 5$). Sie wird aus der Unterdeterminante $\det \boldsymbol{Y}_{45}$ und der Determinante $\det \boldsymbol{Y}_k$ berechnet. Die Determinante von $\det \boldsymbol{Y}_k$ wird durch fortgesetzte Entwicklung von Adjunkten zu den Zeilen bzw. Spalten gebildet, die nur ein einziges Element besitzen.

$$\det \boldsymbol{Y}_k = (-G_d)(-1)^{1+4}G_d(-1)^{1+4}(-G_d)(-1)^{3+2}G_d(-1)^{2+1}(G_1 + G_2 + pC_2) =$$

$$= G_d^4(G_1 + G_2 + pC_2)$$

Die Unterdeterminante $\det \boldsymbol{Y}_{45}$ erhält man durch Berechnung der Determinante der Matrix, die nach dem Streichen der 5. Spalte und 4. Zeile übrigbleibt.

$$\det \boldsymbol{Y}_{45} = \begin{vmatrix} G_1 + pC_1 & -pC_1 & -G_1 & -G_d \\ -pC_1 & G_2 + pC_1 & -G_2 & 0 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 + pC_2 & 0 \\ 0 & -G_d & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-G_d)(-1)^{4+2}(-G_d)(-1)^{1+3}\left((-pC_1)(G_1 + G_2 + pC_2) - G_2G_1\right) =$$

$$= -G_d^2\left(p^2C_1C_2 + pC_1(G_1 + G_2) + G_1G_2\right)$$

Somit erhält man für die Übertragungsfunktion

$$H(p) = \frac{p^2C_1C_2 + pC_1(G_1 + G_2) + G_1G_2}{G_1 + G_2 + pC_2}$$

b) Für die angegebene Dimensionierung ergibt sich

$$H(p) = \frac{p^2C^2 + 0,2pCG + G^2}{2G + 10pC}$$

Durch Nullsetzen des Zählerpolynoms $p^2C^2 + 0,2pCG + G^2$ berechnen sich die Nullstellen zu

$$p_{1,2} = -\frac{G}{10C} \pm \mathrm{j}\frac{1}{10}\,\frac{G}{C}\sqrt{99} \approx \frac{G}{C}\left(\frac{1}{10} \pm \mathrm{j}\right)$$

c) Das ursprüngliche in a) analysierte RC-Netzwerk wird hier mit $U_1 = 0$ (idealer Op-Amp) betrieben. Damit gilt für die Übertragungsfunktion $H'(p)$:

$$H'(p) = \frac{U_2}{U_0} = \left.\frac{U_2}{R_3 I_1}\right|_{U_1=0}$$

Ferner wissen wir, dass das in a) untersuchte Netzwerk reziprok ist, da es nur aus reziproken Bauteilen besteht, die alle linear sind. Für ein lineares, reziprokes Netzwerk gilt:

$$\left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

Betrachtet man die Funktion $\left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$, so ist dies genau die Übertragungsfunktion des in a) untersuchten Netzwerks. Da $\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$ proportional dem Kehrwert der Übertragungsfunktion $H'(p)$ gilt:

$$H(p) = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} \qquad (U_2 = 0 \text{ wegen Kurzschluss}),$$

$$\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{H'(p)R_3} \quad \Rightarrow \quad H'(p) = \frac{1}{H(p)R_3} = \frac{1}{R_3}\frac{2G + 10pC}{p^2C^2 + 0,2pCG + G^2}$$

L16.8 Transferfunktion Allpass

a) Für den idealen Operationsverstärker folgt $U_{R3} = U_{R1}$. Aus der Maschengleichung erhält man ferner

$$U_1 = I_{R3}\left(R_3 + \frac{1}{pC}\right)$$

Damit ergibt sich für I_{R1}:

$$I_{R1} = \frac{R_3}{R_1}I_{R3} = \frac{R_3}{R_1}\frac{U_1}{R_3 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_3}{R_1}U_1\frac{pC}{1 + pCR_3}$$

Eine zweite Maschengleichung liefert

$$U_1 = U_{R1} + U_{R2} + U_2 = (R_1 + R_2)I_{R1} + U_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}U_1\frac{pCR_3}{1 + pCR_3} + U_2$$

Damit lässt sich die Übertragungsfunktion $H(p)$ angeben zu

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = 1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1}\frac{pCR_3}{1 + pCR_3} = \frac{R_1 - R_2pCR_3}{R_1(1 + pCR_3)} = \frac{1 - pC\frac{R_2R_3}{R_1}}{1 + pCR_3}$$

b) Die Betragsfunktion erhält man, indem man Nenner und Zähler der Übertragungsfunktion konjugiert komplex erweitert und die Wurzel daraus bildet.

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \sqrt{\frac{\left(1+\mathrm{j}\omega C\frac{R_2R_3}{R_1}\right)\left(1-\mathrm{j}\omega C\frac{R_2R_3}{R_1}\right)}{(1+\mathrm{j}\omega CR_3)\,(1-\mathrm{j}\omega CR_3)}} = \sqrt{\frac{1+\left(\omega C\frac{R_2R_3}{R_1}\right)^2}{1+(\omega CR_3R_1)^2}} = 1$$

Der Betrag von $H(\mathrm{j}\omega)$ ist genau dann gleich 1, wenn das Nennerpolynom gleich dem Zählerpolynom ist. Dies ist nur für $R_2 = R_1$ bei allen Frequenzen erfüllt. In diesem Fall ist die Verstärkung frequenzunabhängig und hat den Wert 1. Ein Netzwerk mit frequenzunabhängiger Betragsfunktion bezeichnet man als Allpass.

c) Siehe Abbildung L16.13. Die Betragsfunktion eines Allpasses ist im Bodediagramm immer eine waagerechte Gerade. Für den Winkel gilt bei der Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega) = \frac{1-\mathrm{j}\omega CR_3}{1+\mathrm{j}\omega CR_3}$

$$\varphi(\mathrm{j}\omega) = \arctan(-\omega CR_3) - \arctan(\omega CR_3) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{R_3C}$$

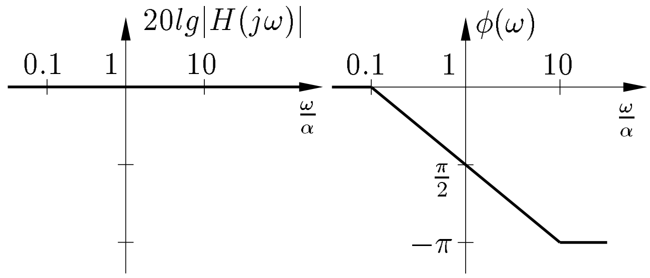


Abbildung L16.13: zu L16.8 c, Betrag und Phase

L16.9 Transferfunktion Weiche

a) Um den Spannungsabfall am Widerstand R berechnen zu können, stellt man zuerst die Impedanzfunktion $Z = \frac{U}{I}$ auf:

$$Z = \frac{U}{I} = Z_1 \parallel Z_2 \quad \text{mit} \quad Z_1 = pL + R \quad \text{und} \quad Z_2 = \frac{1}{pC} + R$$

$$Z = \frac{(pL+R)\left(\frac{1}{pC}+R\right)}{pL+R+\frac{1}{pC}+R} = \frac{(pL+R)(1+pCR)}{p^2LC+2pRC+1} =$$

$$= \frac{pL+p^2RLC+R+pCR^2}{p^2LC+2pRC+1} = R\frac{p^2LC+pRC+p\frac{L}{R}+1}{p^2LC+2pRC+1} = R$$

für $\frac{L}{R} = RC = \frac{1}{\alpha}$. D.h. die Impedanzfunktion ist für diesen Fall nicht frequenzabhängig. Daraus folgt:

$$U = \frac{R}{R+R}U_0 = \frac{U_0}{2}$$

Ferner gilt für die Übertragungsfunktion bei Anwendung der Spannungsteilerformel:

$$H_1'(p) = \frac{U_1}{U} = \frac{R}{R+pL} \quad \Rightarrow \quad H_1(p) = \frac{1}{2}\frac{R}{R+pL}$$

$$H_2'(p) = \frac{U_2}{U} = \frac{R}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1+pRC} \quad \Rightarrow \quad H_2(p) = \frac{1}{2}\frac{pRC}{1+pRC}$$

b) Um das Bodediagramm zeichnen zu können, spaltet man die Übertragungsfunktionen in einzelne Produktterme auf:

$H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{R/L}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\alpha}}$ mit $\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$ (Abbildung L16.14 und L16.15)

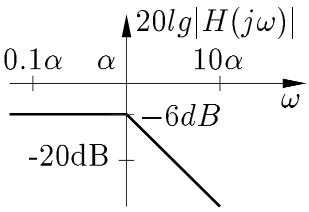


Abbildung L16.14: Betrag von $H_1(\mathrm{j}\omega)$

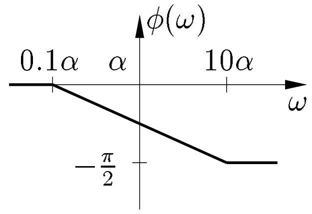


Abbildung L16.15: Phase von $H_1(\mathrm{j}\omega)$

$H_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{j}\omega}{\alpha}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\alpha}}$ (Abbildung L16.16 und L16.17)

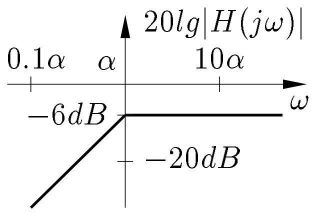


Abbildung L16.16: Betrag von $H_2(\mathrm{j}\omega)$

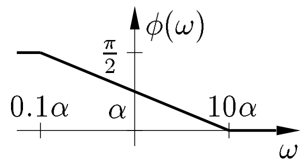


Abbildung L16.17: Phase von $H_2(\mathrm{j}\omega)$

c) Die Schaltung arbeitet als Frequenzweiche. Bei niedrigen Frequenzen sperrt H_2, welche einen Hochpass darstellt. Bei hohen Frequenzen sperrt H_1 (Tiefpass). Für die Beträge gilt:

$$|H_1(\mathrm{j}\omega)|^2 + |H_2(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{1}{4}$$

Sie sind also zueinander komplementär.

d) Die Schaltung lässt sich wie in Abbildung L16.18 umzeichnen und in eine duale Struktur überführen (Abbildung L16.19).

Für die dualen Elementewerte gilt mit der Dualitätskonstanten R_d:

$$I_0 = \frac{1}{R_d}U_0, \quad R' = \frac{R_d^2}{R}, \quad C' = \frac{L}{R_d^2}, \quad L' = CR_d^2$$

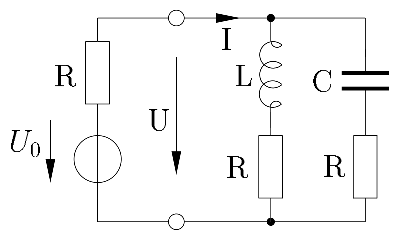


Abbildung L16.18: zu L16.9 d, Weiche

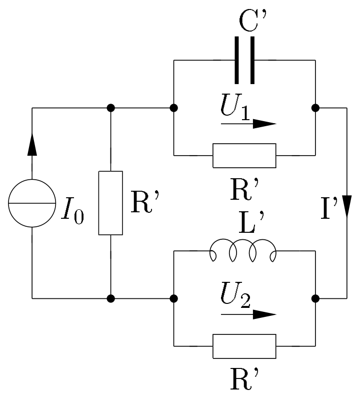


Abbildung L16.19: Duale Schaltung

e) Für die Spannungen U_1 und U_2 erhält man:

$$U_1 = I' \frac{R' \frac{1}{pC'}}{R' + \frac{1}{pC'}} = I' \frac{R'}{1 + pC'R'}$$

$$U_2 = -I' \frac{R'pL'}{R' + pL'}$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$H'(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R'pL'}{R' + pL'} \, \frac{1 + pC'R'}{R'} = -\frac{pL'(1 + pC'R')}{R' + pL'}$$

f) Die Nullstellen des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion lauten

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{R'C'} = -\alpha$$

Die Nullstelle des Nennerpolynoms (Eigenfrequenz des Systems) ist

$$p_1 = -\frac{R'}{L'} = -\alpha$$

Anmerkung: Die Pol- und Nullstelle $p = -\alpha$ darf in diesem Fall auch gekürzt werden. Dies ist aber nur erlaubt, wenn es sich um eine **negative** Polstelle (Nullstelle) handelt.

L16.10 Transferfunktion Kreuzglied

a) Um die Übertragungsfunktion $H(p)$ mittels der Knotenpotentialanalyse bestimmen zu können, wird die artfremde Spannungsquelle U_0 mit dem Längsleitwert G in eine Stromquelle $I_0 = U_0 G$ mit dem Parallelleitwert G gewandelt, siehe Abbildung L16.20.

Für die Knotenleitwertsmatrix erhält man durch direktes Aufstellen:

$$\boldsymbol{Y}_k = \begin{bmatrix} G + Y_1 + Y_2 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & G + Y_1 + Y_2 & -G \\ -Y_2 & -G & G + Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I}_q = \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

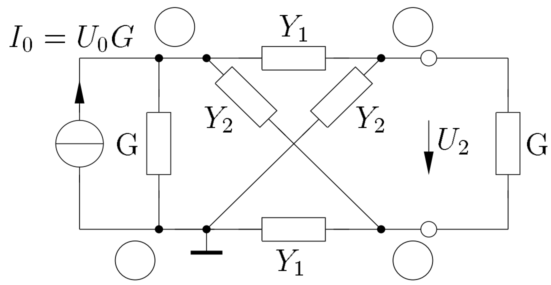


Abbildung L16.20: zu L16.10, Kreuzglied, Spannungsquelle in Stromquelle gewandelt

Damit ergibt sich für die Determinante:

$$\det \boldsymbol{Y}_k =$$
$$= (G+Y_1+Y_2)^3 - 2Y_1Y_2G - Y_2^2(G+Y_1+Y_2) - Y_1^2(G+Y_1+Y_2) - G^2(G+Y_1+Y_2) =$$
$$= (G+Y_1+Y_2)2(GY_1+GY_1+Y_1Y_2) - 2Y_1Y_2G = 2G(Y_1+Y_2)(G+Y_1+Y_2) + 2Y_1Y_2(Y_1+Y_2)$$
$$\det \boldsymbol{Y}_k = 2(Y_1+Y_2)(G^2+G(Y_1+Y_2)+Y_1Y_2)$$

Die Übertragungsfunktion berechnet sich aus der Differenz der Verstärkungsfunktionen am Knoten 2 und Knoten 3.

$$H(p) = \frac{U_2}{U_0} = \frac{U_{k2}-U_{k3}}{I_0\frac{1}{G}} = G\frac{(-1)^{(1+2)}\det \boldsymbol{Y}_{12} - (-1)^{(1+3)}\det \boldsymbol{Y}_{13}}{\det \boldsymbol{Y}_k}$$

Die einzelnen Unterdeterminanten berechnen sich zu

$$\det \boldsymbol{Y}_{12} = -Y_1(G+Y_1+Y_2) - Y_2G, \quad \det \boldsymbol{Y}_{13} = Y_1G + Y_2(G+Y_1+Y_2)$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion:

$$H(p) = G\frac{(Y_1-Y_2)(G+Y_1+Y_2) + (Y_2-Y_1)G}{2(Y_1+Y_2)(G^2+G(Y_1+Y_2)+Y_1Y_2)} = \frac{(Y_1-Y_2)G}{2(G+Y_1)(G+Y_2)}$$

b) Setzt man die angegebenen Werte in die Übertragungsfunktion ein, so gilt für $H(\mathrm{j}\omega)$:

$$H(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\frac{G\left(B_1+\frac{G^2}{B_1}\right)}{2(G+\mathrm{j}B_1)\left(G-\mathrm{j}\frac{G^2}{B_1}\right)} = \frac{\mathrm{j}G\left(B_1+\frac{G^2}{B_1}\right)}{2\left(G^2+\mathrm{j}B_1G-\mathrm{j}\frac{G^3}{B_1}+G^2\right)} =$$
$$= \frac{\mathrm{j}G^2\left(\frac{B_1}{G}+\frac{G}{B_1}\right)}{2G^2\left(2+\mathrm{j}\left(\frac{B_1}{G}-\frac{G}{B_1}\right)\right)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{B_1}{G}+\frac{G}{B_1}}{\left(\frac{B_1}{G}-\frac{G}{B_1}\right)-2\mathrm{j}}$$

Bildet man den Betrag der Übertragungsfunktion, so gilt für das Quadrat:

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{B_1}{G}+\frac{G}{B_1}\right)^2}{\left(\frac{B_1}{G}-\frac{G}{B_1}\right)^2+4} = \frac{1}{4}, \quad v(\omega) = 20\lg|H(\mathrm{j}\omega)| = -6\,\mathrm{dB}$$

Die Schaltung ist also ein Allpass, wenn die Leitwerte Y_1 und Y_2 zueinander dual und rein reaktiv gewählt werden.

c) Mit $Y_1 = \mathrm{j}\omega C$ und $Y_2 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$ erhält man für die Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{G\left(\mathrm{j}\omega C - \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)}{2\left(G + \mathrm{j}\omega C\right)\left(G + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 LC - 1}{2\left(1 + \mathrm{j}\omega\frac{C}{G}\right)\left(1 + \mathrm{j}\omega LG\right)}$$

Setzt man $G = \sqrt{\frac{C}{L}}$ ein, so ergibt sich mit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 LC - 1}{2\left(1 + \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\right)\left(1 + \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{j}\omega\sqrt{LC} - 1}{\left(1 + \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\right)} = -\frac{1}{2}\frac{1 - \frac{\mathrm{j}\omega}{\alpha}}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\alpha}}$$

Der Betrag besitzt den frequenzunabhängigen Wert von -6dB. Beim Phasenverlauf verursacht sowohl das Nennerpolynom als auch das Zählerpolynom eine Abnahme des Winkels um $\frac{\pi}{2}$, da $\arctan\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ gilt.
Das Bodediagramm ist in Abbildung L16.21 dargestellt.

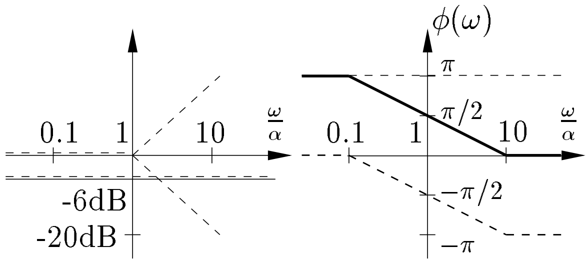


Abbildung L16.21: zu L16.10, Betrag und Phase

L16.11 Detektorempfänger

a) Das Ersatzschaltbild der Baugruppe $\mathcal{TP}$ ist in Abbildung L16.22 gezeigt. Durch die Spannungsfolger kann die Baugruppe unbelastet berechnet werden. Die Übertragungsfunktion $H_1(\mathrm{j}\omega)$ ergibt sich zu

$$H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_4}{U_3} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_5 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega R_5 C_2} = \frac{1 - \mathrm{j}\omega R_5 C_2}{1 + (\omega R_5 C_2)^2}.$$

Mit

$$z = x + \mathrm{j}y = \sqrt{x^2 + y^2}\exp(\mathrm{j}\varphi), \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } x = y = 0, \end{cases}$$

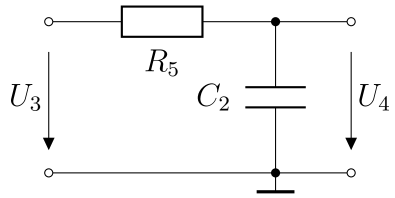


Abbildung L16.22: ESB von $\mathcal{TP}$

wobei $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$, kann die Übertragungsfunktion auch umgeschrieben werden zu

$$H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\sqrt{1+(\omega R_5 C_2)^2}}{1+(\omega R_5 C_2)^2} \exp\left(\mathrm{j} \cdot \arctan\left(\frac{\frac{-\mathrm{j}\omega R_5 C_2}{1+(\omega R_5 C_2)^2}}{\frac{1}{1+(\omega R_5 C_2)^2}}\right)\right) = \frac{\exp(\mathrm{j} \cdot \arctan(-\omega R_5 C_2))}{\sqrt{1+(\omega R_5 C_2)^2}}.$$

Mit $R_5 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C_2 = 1{,}6\,\mathrm{nF}$ findet man

$$\begin{aligned}
f_1 = 1\,\mathrm{Hz} \quad &: \quad \omega_1 = 2\pi f_1, \quad \omega_1 R_5 C_2 \approx 0{,}0001,\\
&\quad\; H_1(\mathrm{j}\omega_1) \approx 1 - \mathrm{j}0{,}0001 \approx 1 \exp(-\mathrm{j}0{,}0001),\\
f_2 = 1\,\mathrm{kHz} \quad &: \quad \omega_2 = 2\pi f_2, \quad \omega_2 R_5 C_2 \approx 0{,}1,\\
&\quad\; H_1(\mathrm{j}\omega_2) \approx 0{,}99 - \mathrm{j}0{,}099 \approx 0{,}995 \exp(-\mathrm{j}0{,}1),\\
f_3 = 1\,\mathrm{MHz} \quad &: \quad \omega_3 = 2\pi f_3, \quad \omega_3 R_5 C_2 \approx 100,\\
&\quad\; H_1(\mathrm{j}\omega_3) \approx 0{,}0001 - \mathrm{j}0{,}01 \approx 0{,}01 \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion $H_2(\mathrm{j}\omega)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
H_2(\mathrm{j}\omega) &= \frac{U_{\text{out}}}{U_4} = \frac{R_6}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3} + R_6} = \frac{\mathrm{j}\omega R_6 C_3}{1+\mathrm{j}\omega R_6 C_3}\\
&= \frac{(\omega R_6 C_3)^2 + \mathrm{j}\omega R_6 C_3}{1+(\omega R_6 C_3)^2} = \frac{\omega R_6 C_3}{\sqrt{1+(\omega R_6 C_3)^2}} \exp\left(\mathrm{j} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\omega R_6 C_3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Mit $R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_3 = 1{,}6\,\mathrm{\mu F}$ findet man für die verschiedenen Frequenzen

$$\begin{aligned}
f_1 = 1\,\mathrm{Hz} \quad &: \quad \omega_1 = 2\pi f_1, \quad \omega_1 R_6 C_3 \approx 0{,}01,\\
&\quad\; H_2(\mathrm{j}\omega_1) \approx 0{,}0001 + \mathrm{j}0{,}01 \approx 0{,}01 \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right),\\
f_2 = 1\,\mathrm{kHz} \quad &: \quad \omega_2 = 2\pi f_2, \quad \omega_2 R_6 C_3 \approx 10,\\
&\quad\; H_2(\mathrm{j}\omega_2) \approx 0{,}99 + \mathrm{j}0{,}099 \approx 0{,}995 \exp(\mathrm{j}0{,}1),\\
f_3 = 1\,\mathrm{MHz} \quad &: \quad \omega_3 = 2\pi f_3, \quad \omega_3 R_6 C_3 \approx 10000,\\
&\quad\; H_2(\mathrm{j}\omega_3) \approx 1 + \mathrm{j}0{,}0001 \approx 1 \exp(\mathrm{j}0{,}0001).
\end{aligned}$$

b) Der zu $u_3(t)$ gehörige Zeiger lautet $U_3 = 1\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)$. Mit $U_\text{out} = H_2(\mathrm{j}\omega)H_1(\mathrm{j}\omega)U_3$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_1 = 1\,\mathrm{Hz} \quad : \quad U_\text{out} &= 0{,}01 \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \exp(-\mathrm{j}0{,}0001) \cdot 1\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 0{,}01\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}\right),\\
u_\text{out}(t) &= 0{,}01\,\mathrm{V} \cdot \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{3\pi}{4}\right)\\
f_2 = 1\,\mathrm{kHz} \quad : \quad U_\text{out} &= 0{,}995 \exp(\mathrm{j}0{,}1) \cdot 0{,}995 \exp(-\mathrm{j}0{,}1) \cdot 1\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 0{,}99\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right),\\
u_\text{out}(t) &= 0{,}99\,\mathrm{V} \cdot \cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4}\right)\\
f_3 = 1\,\mathrm{MHz} : \quad U_\text{out} &= 1 \exp(\mathrm{j}0{,}0001) \cdot 0{,}01 \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 0{,}01\,\mathrm{V} \cdot \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right),\\
u_\text{out}(t) &= 0{,}01\,\mathrm{V} \cdot \cos\left(2\pi f_3 t - \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

c) Aus dem ESB in Abbildung L16.23 ergibt sich zunächst ohne Berücksichtigung von Nullator und Norator

$$\boldsymbol{Y}_k' = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_q' = \begin{bmatrix} \frac{U_\text{in}}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

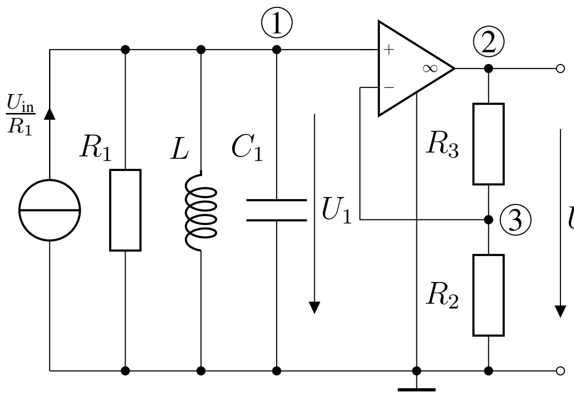


Abbildung L16.23: zu L16.11 c: ESB der Baugruppe $\mathcal{BP}$

Durch Einbau von Nullator (Spalte 1 und 3 addieren) und Norator (Zeile 2 streichen) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C_1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}_k} \begin{bmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{U_\text{in}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}_q}.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C_1)(-\frac{1}{R_3})} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U_{\text{in}}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$U_2 = U_{k2} = \frac{(-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3})\frac{U_{\text{in}}}{R_1}}{(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C_1)(-\frac{1}{R_3})} = \left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)\frac{\mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L + R_1 + (\mathrm{j}\omega)^2 R_1 L C_1} U_{\text{in}}.$$

Mit der Substitution $\mathrm{j}\omega \to p$ ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H_0(p) = \frac{U_2}{U_{\text{in}}} = \frac{pL(1+\frac{R_3}{R_2})}{R_1 + pL + p^2 R_1 L C_1}.$$

d) Die Lösungen von $0 = p^2 R_1 L C_1 + pL + R_1$ und somit die Polstellen von $H_0(p)$ sind gegeben durch

$$p_{1/2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4R_1^2 L C_1}}{2R_1 L C_1} = -\frac{1}{2R_1 C_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4R_1^2 C_1^2} - \frac{1}{LC_1}}.$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion sind gleichzeitig die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{1})$, d.h. die Eigenwerte der Zustandsmatrix.

Für $\frac{1}{4R_1^2C_1^2} > \frac{1}{LC_1}$ ergeben sich also zwei verschiedene negative reelle Eigenwerte. Das zugehörige Phasenportrait ist ein stabiler Knoten.

Für $\frac{1}{4R_1^2C_1^2} = \frac{1}{LC_1}$ ergibt sich ein doppelter negativer reeller Eigenwert und somit ein nicht-diagonalisierbarer stabiler Knoten.

Für $\frac{1}{4R_1^2C_1^2} < \frac{1}{LC_1}$ ergeben sich konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil. Das Phasenportrait ist dann ein stabiler Strudel.

Die Pol-Nullstellen-Diagramme für die drei Fälle sind in Abbildung L16.24 zu sehen.

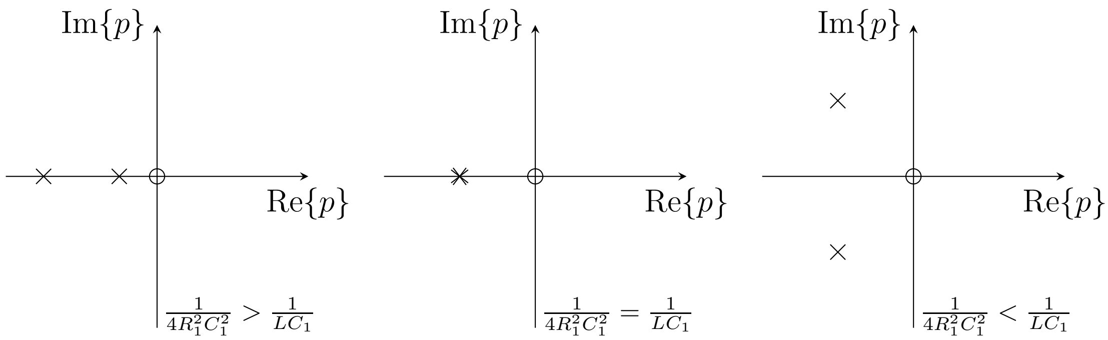


Abbildung L16.24: zu L16.11 d: Pol-Nullstellen-Diagramme

e) Die Übertragungsfunktion $H_{12}(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_3}$ erhält man aus den Ergebnissen von Aufgabe a) als

$$H_{12}(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_3} = \frac{U_{\text{out}}}{U_4}\frac{U_4}{U_3} = H_2(\mathrm{j}\omega)H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega R_6 C_3}{1+\mathrm{j}\omega R_6 C_3}\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega R_5 C_2}$$
$$= \mathrm{j}\omega R_6 C_3 \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega R_6 C_3}\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega R_5 C_2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}$$

mit $\omega_2 = \frac{1}{R_6 C_3}$ und $\omega_1 = \frac{1}{R_5 C_2}$. Der Betrag der Übertragungsfunktion lässt sich wie folgt logarithmisch als Funktion von ω oder von $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ausdrücken:

$$v(\omega) = 20\lg|H_{12}(\mathrm{j}\omega)| = 20\lg\left|\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}\right|$$
$$= 20\lg\left|\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right| + 20\lg\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}\right| + 20\lg\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}\right|$$
$$= \underbrace{20\lg\left|\mathrm{j}\frac{f}{f_2}\right|}_{v_1(f)} + \underbrace{20\lg\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{f}{f_2}}\right|}_{v_2(f)} + \underbrace{20\lg\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{f}{f_1}}\right|}_{v_3(f)} = \tilde{v}(f)$$

mit $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_6 C_3} \approx 100\text{Hz}$ und $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_5 C_2} \approx 10\text{kHz}$. Für die Phase erhalten wir entsprechend

$$\varphi(\omega) = \arg(H_{12}(\mathrm{j}\omega)) = \arg\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \arg\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \arg\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$
$$= \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\varphi_1(f)} \underbrace{-\arctan\left(\frac{f}{f_2}\right)}_{\varphi_2(f)} \underbrace{-\arctan\left(\frac{f}{f_1}\right)}_{\varphi_3(f)} = \tilde{\varphi}(f).$$

Das zugehörige Bodediagramm ist in Abbildung L16.25 gegeben.
Für die Übertragungsfunktion $H_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_{\text{in}}}$ gilt

$$H_0(\mathrm{j}\omega) = \left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)\frac{\mathrm{j}\omega L}{(\mathrm{j}\omega)^2 R_1 L C_1 + \mathrm{j}\omega L + R_1} = A\mathrm{j}\omega\frac{L}{LC_1R_1((\mathrm{j}\omega)^2 + \mathrm{j}\omega\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{LC_1})}$$
$$= A\mathrm{j}\omega\frac{1}{\sqrt{LC_1}}\sqrt{\frac{L}{C_1}}\frac{1}{R_1}\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2 + \mathrm{j}\omega\frac{1}{\sqrt{LC_1}}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C_1}}\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\sqrt{LC_1}^2}} = A\mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2 + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$
$$= A\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right) + \mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

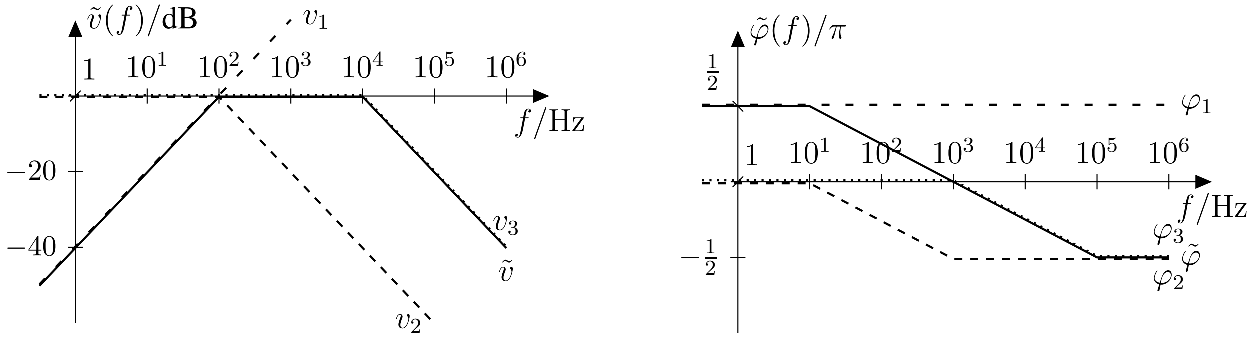


Abbildung L16.25: zu L16.11 e: Betragsverlauf und Phasenverlauf von $\frac{U_{\text{out}}}{U_3}$

mit $A = 1 + \frac{R_3}{R_2} \approx 1000$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \approx 10{,}54 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ und $Q = R_1\sqrt{\frac{C_1}{L}} \approx 100$.
Für $\frac{1}{4R_1^2C_1^2} < \frac{1}{LC_1}$, also für $Q > \frac{1}{2}$, ergeben sich konjugiert komplexe Polstellen, so dass sich das Nennerpolynom nicht reell faktorisieren lässt.
Wir erhalten

$$v_0(\mathrm{j}\omega) = 20\lg|H_0(\mathrm{j}\omega)| = 20\lg|A| + 20\lg\left|\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right| + 20\lg\left|\frac{1}{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)+\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}\right|$$
$$= \underbrace{20\lg(A)}_{v_{0,1}(\mathrm{j}\omega)} + \underbrace{20\lg\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}_{v_{0,2}(\mathrm{j}\omega)} \underbrace{-10\lg\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}_{v_{0,3}(\mathrm{j}\omega)}$$

und

$$\varphi_0(\mathrm{j}\omega) = \arg(H_0(\mathrm{j}\omega)) = \arg(A) + \arg\left(\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \arg\left(\frac{1}{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)+\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$
$$= 0 + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\varphi_{0,2}(\mathrm{j}\omega)} \underbrace{-\arg\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)+\mathrm{j}\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}_{\varphi_{0,3}(\mathrm{j}\omega)}$$

wobei

$$\varphi_{0,3}(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \omega < \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \omega_0 \\ -\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)+\pi\right) & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Das zugehörige Bodediagramm ist in Abbildung L16.26 und Abbildung L16.27 gegeben.

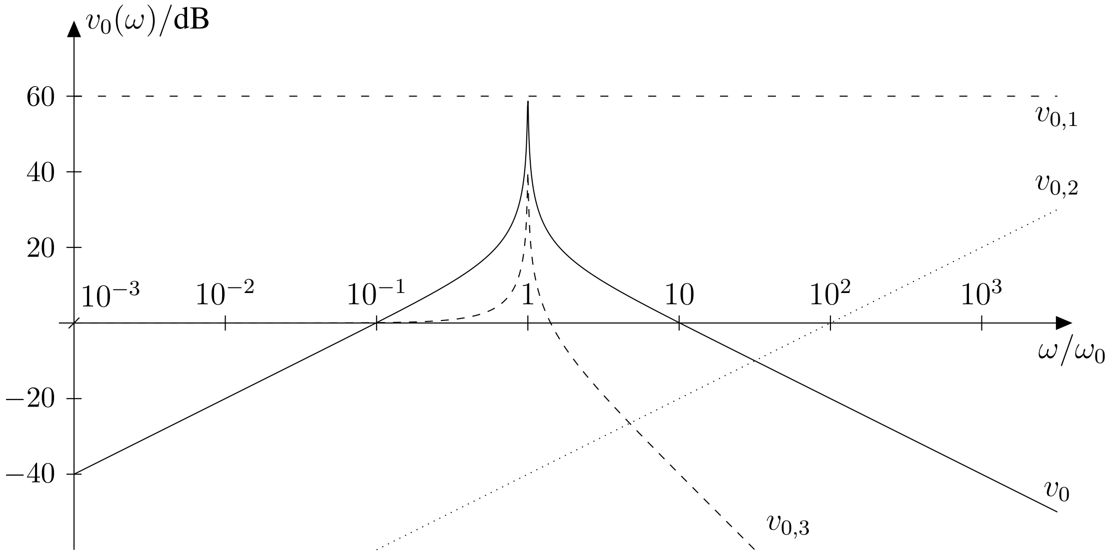


Abbildung L16.26: zu L16.11 e: Betragsverlauf von $H_0(\mathrm{j}\omega)$

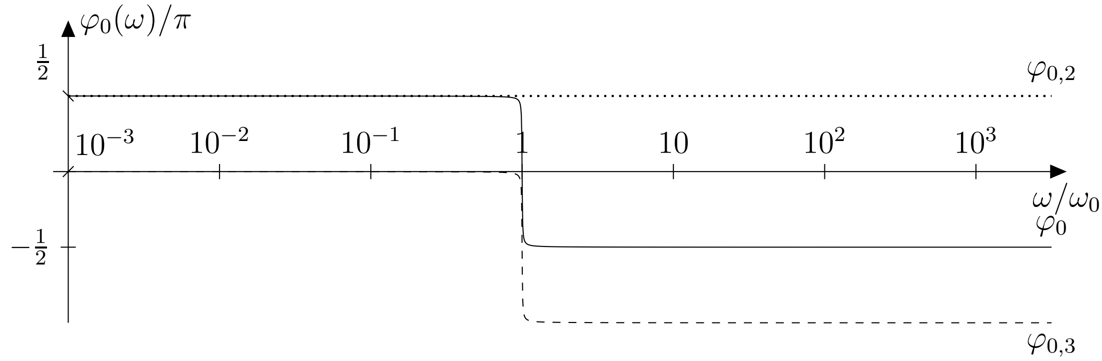


Abbildung L16.27: zu L16.11 e: Phasenverlauf von $H_0(\mathrm{j}\omega)$

f) Wegen $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ gilt

$$\begin{aligned} u_{\text{in}} &= 1\,\text{mV} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t))\cos(2\pi \cdot 1{,}678\,\text{MHz} \cdot t) \\ &= 1\,\text{mV} \cdot \cos(2\pi f_{\text{T}} t) + \frac{1}{2}\,\text{mV} \cdot \cos(2\pi(f_{\text{T}} + 1\,\text{kHz})t) + \frac{1}{2}\,\text{mV} \cdot \cos(2\pi(f_{\text{T}} - 1\,\text{kHz})t) \end{aligned}$$

mit $f_{\text{T}} = 1{,}678\,\text{MHz}$. Das Eingangssignal ist also eine Überlagerung von drei Signalen unterschiedlicher Frequenz. Da die Schaltung linear ist, kann die Wirkung der Schaltung auf diese drei Signale jeweils unabhängig analysiert werden.

Der Schaltungsteil $\mathcal{BP}$ verstärkt Signale mit eine Frequenz von etwa $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1{,}678\,\text{MHz}$ um 60dB (Faktor 1000). Signale anderer Frequenzen werden weniger verstärkt oder gar gedämpft. Da $f_{\text{T}} \approx f_0$ und $f_{\text{T}} \pm 1\,\text{kHz} \approx f_0$ werden alle drei Signale, die in u_{in} enthalten sind, deutlich verstärkt und damit gegenüber Signalen, die von der Antenna auf anderen Frequenzen empfangen werden herausgehoben. Es gilt also

$$u_2 \approx 1\,\text{V} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t)) \cdot \cos(2\pi f_{\text{T}} t).$$

Aufgrund der idealen Diode ergibt sich unter Verwendung der Hinweise aus der Angabe

$$\begin{aligned} u_3 &\approx \underbrace{1\,\text{V} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t))}_{\geq 0} \cdot \max\{\cos(2\pi f_{\text{T}} t),\ 0\} \\ &\approx 1\,\text{V} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t)) \left(\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{T}} t}{2}\right)\right)^2 \\ &= 1\,\text{V} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t)) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi f_{\text{T}} t)) \\ &= \frac{1}{2}\,\text{V} + \frac{1}{2}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t) + \frac{1}{2}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi f_{\text{T}} t) \\ &\qquad + \frac{1}{4}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi(f_{\text{T}} + 1\,\text{kHz})t) + \frac{1}{4}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi(f_{\text{T}} - 1\,\text{kHz})t). \end{aligned}$$

Der Schaltungsteil $\mathcal{TP}$ dämpft Signale mit $f > f_1$ und lässt Signale mit $f < f_1$ durch. Da $f_{\text{T}} \gg f_1$ und $f_{\text{T}} \pm 1\,\text{kHz} \gg f_1$ gilt

$$u_4 \approx \frac{1}{2}\,\text{V} + \frac{1}{2}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t). \tag{L16.1}$$

Der Schaltungsteil $\mathcal{HP}$ dämpft Signale mit $f < f_2$ und lässt Signale mit $f > f_2$ durch. Da $\frac{1}{2}\,\text{V} = \frac{1}{2}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 0 \cdot t)$ und $0 \ll f_2$ gilt

$$u_{\text{out}} \approx \frac{1}{2}\,\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot t). \tag{L16.2}$$

L16.12 Ortskurve

a) Die Ortskurve wird für $Z = R + \text{j}\omega L$ durch eine Gerade beschrieben (siehe Abbildung L16.28), wobei für positive Frequenzen nur der Teil im ersten Quadranten durchlaufen wird.

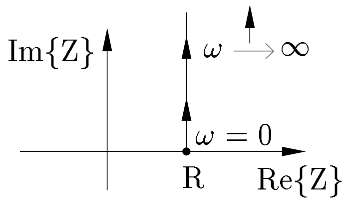


Abbildung L16.28: zu L16.12, Ortskurve der Impedanz

b) Für den Leitwert muss der Kehrwert des komplexen Widerstandes gebildet werden.

$$Y = \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Durch Rechnung lässt sich zeigen:

$$\left(\mathrm{Re}\{Y\} - \frac{1}{2R}\right)^2 + (\mathrm{Im}\{Y\})^2 = \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{2R}\right)^2 + \frac{(\omega L)^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} =$$

$$\frac{R^4 + (\omega L)^4 - 2R^2(\omega L)^2}{4R^2\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} + \frac{(\omega L)^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2}\frac{4R^2}{4R^2} =$$

$$\frac{R^4 + (\omega L)^4 - 2R^2(\omega L)^2 + 4R^2\omega^2 L^2}{4R^2\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} = \frac{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2}{4R^2\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} = \frac{1}{4R^2}$$

c) Nachdem in b) gezeigt wurde, dass die Ortskurve einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2R}, 0)$ und dem Radius $\frac{1}{2R}$ ergibt, muss noch der Durchlaufbereich überlegt werden. Hierfür gilt:

$$Y(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{R}, \quad Y(\mathrm{j}\omega)|_{\omega\to\infty} = 0$$

Da der Imaginärteil stets negativ ist, ergibt sich damit eindeutig als Ortskurve die untere Hälfte des Kreises für positive Frequenzen (siehe Abbildung L16.29). Für die 3dB Eckfrequenz $\omega_0 = \frac{R}{L}$ gilt $\mathrm{Re}\{Y\} = \mathrm{Im}\{Y\}$.

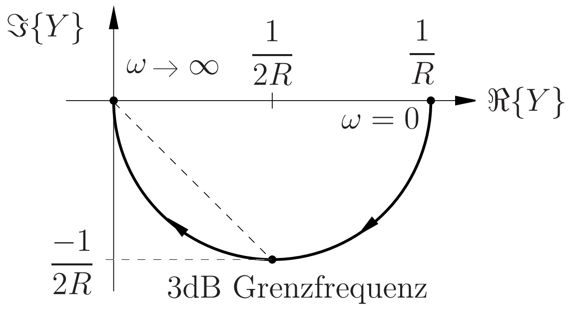


Abbildung L16.29: zu L16.12, Ortskurve der Admittanz

L16.13 Ortskurve 2

a) Realteil gleich Null:

$$0 = \frac{\omega^2 RC^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega \to \infty \end{cases}$$

Imaginärteil gleich Null:

$$0 = \frac{\omega C(1-\omega^2 LC)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}^2}} = \frac{1000}{\sqrt{2}}\ \mathrm{s}^{-1} \\ \omega \to \infty \end{cases}$$

b) Realteil gleich Imaginärteil für

$$\omega^2 RC^2 = \omega C(1-\omega^2 LC) \ \Rightarrow\ \omega RC = 1 - \omega^2 LC \ \Rightarrow\ LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$$

$$\omega_{1/2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{-1\,\mathrm{ms} \pm \sqrt{1\ (\mathrm{ms})^2 + 8\ (\mathrm{ms})^2}}{4\ (\mathrm{ms})^2} = \begin{cases} 500\,\mathrm{s}^{-1} \\ -1000\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

Realteil gleich minus Imaginärteil für

$$\omega^2 RC^2 = -\omega C(1-\omega^2 LC) \ \Rightarrow\ \omega RC = \omega^2 LC - 1 \ \Rightarrow\ LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$$

$$\omega_{1/2} = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{1\,\mathrm{ms} \pm \sqrt{1\ (\mathrm{ms})^2 + 8\ (\mathrm{ms})^2}}{4\ (\mathrm{ms})^2} = \begin{cases} 1000\,\mathrm{s}^{-1} \\ -500\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

c)

ω	$\mathrm{Re}\{Y\}$	$\mathrm{Im}\{Y\}$
0	0	0
$500\,\mathrm{s}^{-1}$	0,5 S	0,5 S
$\frac{1000}{\sqrt{2}}\ \mathrm{s}^{-1}$	1 S	0
$1000\,\mathrm{s}^{-1}$	0,5 S	−0,5 S
∞	0	0

d) Siehe Abbildung L16.30

e) Realteil gleich Null: $0 = R \ \Rightarrow$ nicht erfüllbar
Imaginärteil gleich Null:

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \ \Rightarrow\ 0 = \omega L - \frac{1}{\omega C} \ \Rightarrow\ \omega^2 LC = 1$$

$$\Rightarrow\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1000}{\sqrt{2}}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Realteil gleich Imaginärteil für

$$R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \ \Rightarrow\ \omega RC = \omega^2 LC - 1 \ \Rightarrow\ LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$$

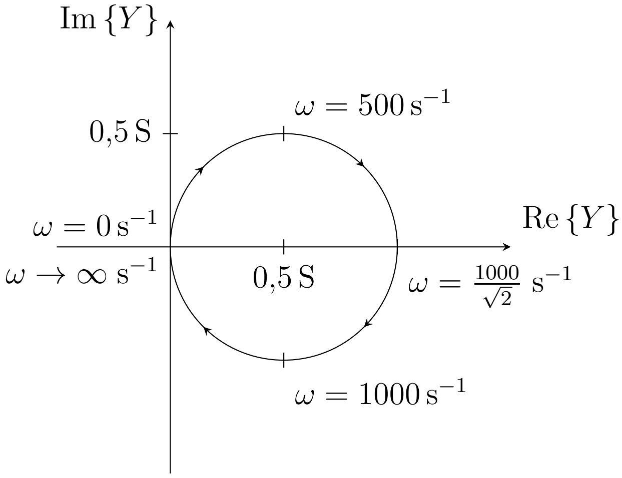


Abbildung L16.30: Zu L16.13 d): Ortskurve

$$\Rightarrow\ \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$$

Realteil gleich minus Imaginärteil für

$$-R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \ \Rightarrow\ \omega RC = 1 - \omega^2 LC \ \Rightarrow\ LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$$
$$\Rightarrow\ \omega = 500\,\mathrm{s}^{-1}$$

ω	$\mathrm{Re}\,\{Z\}$	$\mathrm{Im}\,\{Z\}$
$500\,\mathrm{s}^{-1}$	$1\,\Omega$	$-1\,\Omega$
$\frac{1000}{\sqrt{2}}\,\mathrm{s}^{-1}$	$1\,\Omega$	0
$1000\,\mathrm{s}^{-1}$	$1\,\Omega$	$1\,\Omega$

Die Ortskurve ist in Abbildung L16.31 zu finden.

f) $$Z = \frac{1}{Y} = \left(\frac{1}{Y^*}\right)^*$$

entspricht Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse.

L16.14 Komplexe Leistung

In Schaltung A gilt für die komplexe Leistung P:

$$P = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}|U|^2\frac{1}{Z^*} = \frac{1}{2}1\mathrm{V}^2\frac{1}{894\,\Omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.464}$$

Durch Abspaltung des Realteils und Imaginärteils erhält man die Wirkleistung und die Blindleistung.

$$P_w = \mathrm{Re}\{P\} = 0.56\,\mathrm{mW}\cos(-0.464) = 0.5\,\mathrm{mW}$$

$$P_b = \mathrm{Im}\{P\} = 0.56\,\mathrm{mW}\sin(-0.464) = -0.25\,\mathrm{mW}$$

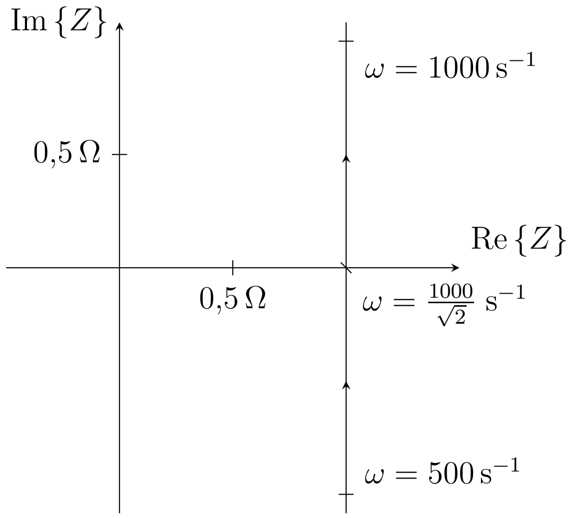


Abbildung L16.31: Zu L16.13 e)): Ortskurve

In Schaltung B muss zunächst der komplexe Widerstand Z berechnet werden.

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{pC}\right)(R_2 + pL)}{R_1 + R_2 + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{(1 + pR_1C)(R_2 + pL)}{p^2LC + (R_1 + R_2)\,pC + 1}$$

Wertet man die Funktion an der Stelle f' aus, so ergibt sich:

$Z(\mathrm{j}\omega) = 283\ \Omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}0.142}$

Daraus folgt für die Leistung [1]:

$P = 1.77\ \mathrm{mVAe}^{\mathrm{j}0.142}, \quad P_W = \mathrm{Re}\{P\} = 1.75\,\mathrm{mW}, \quad P_B = \mathrm{Im}\{P\} = 0.25\mathrm{mvar}$

L16.15 Komplexe Leistung 2

a) $U = \hat{U}$

$$Y = \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega C}{1 + \mathrm{j}\omega CR} = \frac{\mathrm{j}\omega C + \omega^2 C^2 R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

b) $$P = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}U(YU)^* = \frac{1}{2}|U|^2 Y^* = \frac{1}{2}\hat{U}^2 \frac{\omega^2 C^2 R - \mathrm{j}\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

c) Die Wirkleistung $P_\mathrm{W} = \mathrm{Re}\,\{P\}$ ist der Leistungsmittelwert, $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ ist die Dauer einer Periode.

$$E = T \cdot P_\mathrm{W} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \mathrm{Re}\,\{P\} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{2}\hat{U}^2 \frac{\omega^2 C^2 R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} = \pi \hat{U}^2 C^2 R \frac{\omega}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

[1] Als Einheiten der verschiedenen Leistungen verwendet man:
Komplexe Leistung (Scheinleistung): $[P]$ = VA; Wirkleistung: $[P_w]$ = W; Blindleistung: $[P_b]$ = var; var steht für Volt-Ampere-reaktiv.

d) $$0 = \frac{\partial E}{\partial \omega} = \pi \hat{U}^2 C^2 R \frac{(1+\omega^2 C^2 R^2) - \omega(2\omega C^2 R^2)}{(1+\omega^2 C^2 R^2)^2} = \pi \hat{U}^2 C^2 R \frac{1-\omega^2 C^2 R^2}{(1+\omega^2 C^2 R^2)^2}$$

$$\Rightarrow \; 0 = 1 - \omega^2 C^2 R^2 \; \Rightarrow \; \omega = \frac{1}{RC}$$

Für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ wird $E = 0$, dazwischen ist es stets positiv. Also muss es sich bei der Stelle mit waagerechter Tangente um ein Maximum handeln.

$$E_{\text{max}} = \pi \hat{U}^2 C^2 R \frac{\frac{1}{RC}}{1 + \frac{C^2 R^2}{C^2 R^2}} = \pi \frac{1}{2} C \hat{U}^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} C \left(\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} C U_{\text{eff}}^2$$

17 Übung: Dynamische Mehrtore

17.1 Tiefpassverhalten realer Op-Amps

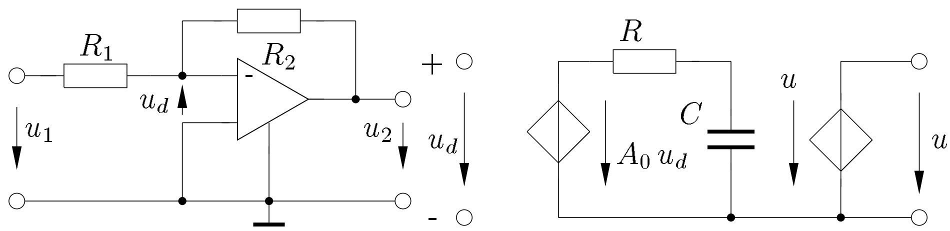


Abbildung 17.1: zu 17.1, Op-Amp-Schaltung, TP-Verhalten

a) Für die in Abbildung 17.1 gegebene invertierende Verstärkerschaltung ist eine Ersatzschaltung zu erstellen. Das dynamische Verhalten des Op-Amps soll durch das Modell ersten Grades berücksichtigt werden.

b) Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$ der Schaltung.

c) Geben Sie für $A_0 \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}$ eine geeignete Näherung $\tilde{H}(\mathrm{j}\omega)$ der Übertragungsfunktion an.

d) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für den unbeschalteten Operationsverstärker mit einer Leerlaufverstärkung $A_0 = 10^5$ und einer Eckfrequenz $\omega_{g0} = 10\mathrm{Hz}$.

e) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm für den beschalteten Operationsverstärker mit $R_1 = 1\mathrm{k}\Omega$ und $R_2 = 100\mathrm{k}\Omega$.

f) Zeigen Sie, dass das Bandbreiteverstärkungsprodukt $\omega_g H(0)$ der Schaltung unabhängig von der Beschaltung stets einen konstanten Wert annimmt.

17.2 Kleinsignalanalyse einer Transistorschaltung

a) Analysieren Sie die Struktur der gegebenen Transistorschaltung in Abbildung 17.2.

b) Die angegebene Admittanzmatrix beschreibt die zugrundeliegende allgemeine Ersatzschaltung für das Kleinsignalmodell der Emitterschaltung des Transistors T_1. Geben Sie das Kleinsignalmodell der Emitterschaltung an und bestimmen Sie die Modellparameter. Es gilt $C_{12} = C_{21}$

$$\boldsymbol{Y}_E = \begin{pmatrix} g_{11} + \mathrm{j}\omega C_{11} & -\mathrm{j}\omega C_{12} \\ g_{21} - \mathrm{j}\omega C_{21} & g_{22} + \mathrm{j}\omega C_{22} \end{pmatrix}$$

Im weiteren gilt: $g_{11} = 0.4\mathrm{mS}$, $g_{21} = 40\mathrm{mS}$, $g_{22} = 0$, $C_{11} = 10\mathrm{nF}$, $C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0$ und $T_1 = T_2$.

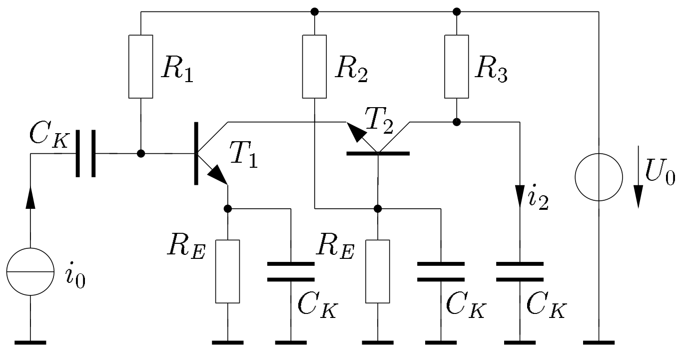


Abbildung 17.2: zu 17.2, Transistorschaltung

c) Bestimmen Sie die Admittanzmatrix für das Kleinsignalmodell der Basisschaltung von Transistor T_2.

d) Geben Sie das Kleinsignalmodell der Basisschaltung an und bestimmen Sie die Modellparameter.

e) Bestimmen Sie die Kleinsignalersatzschaltung der gesamten Transistorschaltung

f) Berechnen Sie die frequenzabhängige Kleinsignalstromverstärkung i_2/i_0 der Schaltung. Es gilt $g_{11} \gg R_1^{-1}$.

g) Zeichnen Sie den Frequenzgang der Kleinsignalstromverstärkung in ein doppeltlogarithmisches Diagramm.

17.3 Eingangsadmittanz der Sourceschaltung

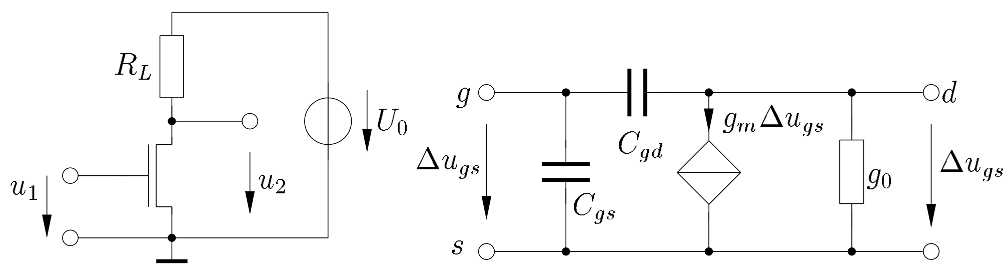


Abbildung 17.3: zu 17.3, MOSFET-Schaltung

a) Berechnen Sie für die gegebene Schaltung (Abbildung 17.3) die komplexe Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$. Verwenden Sie das angegebene dynamische Kleinsignalmodell des MOSFET.

b) Berechnen Sie die komplexe Eingangsadmittanz $y_e(\mathrm{j}\omega)$ der unbelasteten Transistorstufe.

c) Bringen Sie $y_e(\mathrm{j}\omega)$ in die Form $y_e(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega C_M$.
Die Millerkapazität C_M soll als Funktion der komplexen Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$ dargestellt werden.

L17 Lösung: Dynamische Mehrtore

L17.1 Tiefpassverhalten realer Op-Amps

a) Ersatzschaltung der invertierenden Verstärkerschaltung, siehe Abbildung L17.1.

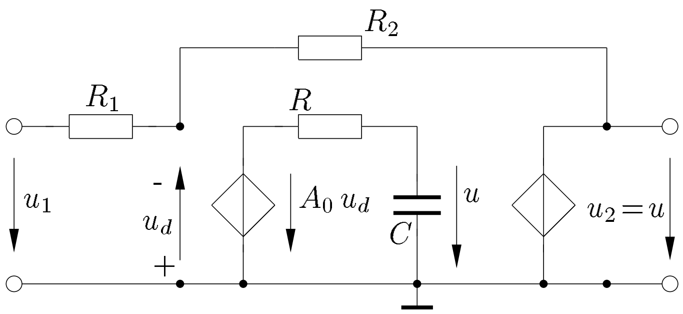


Abbildung L17.1: zu L17.1, Ersatzschaltung

b) Berechnung der komplexen Übetragungsfunktion mit der Methode „by inspection“:

(1) $\quad u_2 = u$

(2) $\quad u_2 = u = A_0 u_d \dfrac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R} = \dfrac{A_0 u_d}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \qquad$ (Spannungsteiler)

daraus folgt: $\quad u_d = u_2 \dfrac{1 + \mathrm{j}\omega C}{A_0}$

(3) $\quad - u_d = u_2 + (u_1 - u_2)\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{u_1 R_2 + u_2 R_1}{R_1 + R_2} \qquad$ (Spannungsteiler)

(siehe Abbildung L17.2)

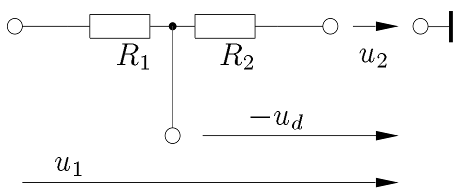


Abbildung L17.2: zu L17.1 b, Spannungsabfälle

mit (2) und (3) gilt:

$$-u_2 \frac{1 + \mathrm{j}\omega C}{A_0} = \frac{u_1 R_2 + u_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$-u_2(1+\mathrm{j}\omega C)(R_1+R_2) = A_0(u_1R_2+u_2R_1)$$

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-A_0R_2}{A_0R_1+(1+\mathrm{j}\omega RC)(R_1+R_2)}$$

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+\left(\frac{1}{A_0}+\mathrm{j}\omega\frac{RC}{A_0}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

c) $\frac{1}{A_0}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$ kann vernachlässigt werden:

$$\tilde{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+\mathrm{j}\omega\frac{RC}{A_0}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

d) Aus Gleichung (2) von b) folgt mit $\omega_{g0} = 10$ Hz (siehe Abbildung L17.3):

$$H_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{A_0}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{10^5}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{10\,\mathrm{Hz}}} \qquad (\text{ 20 lg } A_0 = 100 \text{ dB, da } A_0 = 10^5 \text{ })$$

e) Mit dem Ergebnis von c) und $\frac{R_2}{R_1} = 100$ folgt (siehe Abbildung L17.3):

$$\tilde{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{-100}{1+\mathrm{j}(100+1)\frac{\omega}{10\,\mathrm{Hz}10^5}} \approx \frac{-100}{1+\mathrm{j}(100)\frac{\omega}{10\,\mathrm{Hz}10^5}} \approx \frac{-100}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{10^4\,\mathrm{Hz}}}$$

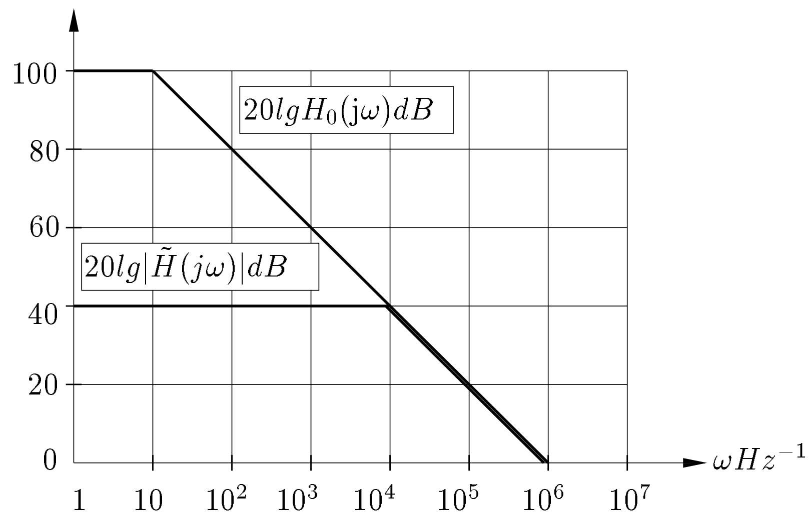


Abbildung L17.3: zu L17.1 d und L17.1 e, Bodediagramm, Beträge der Übertragungsfunktionen

f) Die Grenzfrequenz oder 3dB-Eckfrequenz eines Verstärkers wird definiert als die Frequenz ω_g, für die gilt: $\mathrm{Re}\{H(\mathrm{j}\omega)\} = \mathrm{Im}\{H(\mathrm{j}\omega)\}$. Daraus folgt für die vorliegende Aufgabe die Bestimmungsgleichung:

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\omega_g RC}{A_0} = 1$$

Mit $H(0) = \frac{R_2}{R_1} >> 1$ gilt schließlich:

$$\omega_g H(0) = \frac{A_0}{RC} = \omega_{g0}A_0 = const.$$

L17.2 Kleinsignalanalyse einer Transistorschaltung

a) Struktur der Transistorschaltung: T_1: Emitterschaltung T_2 : Basisschaltung

b) Kleinsignalmodell der Emitterschaltung in Abbildung L17.4.

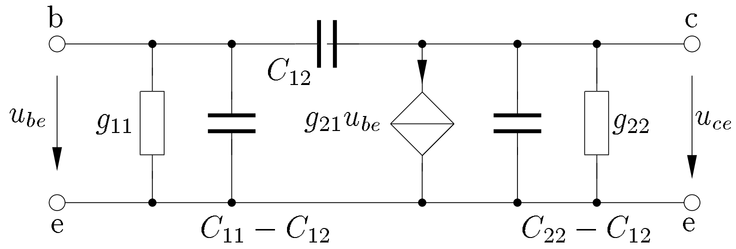
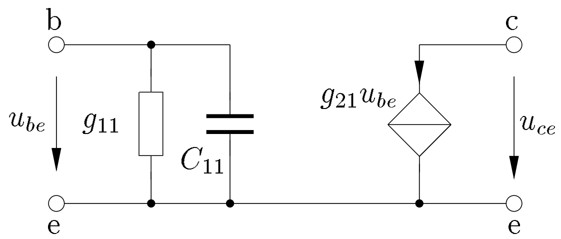


Abbildung L17.4: zu L17.2 b, Ersatzschaltung

c) und d)

Da $T_1 = T_2$ kann das Kleinsignalmodell der Basisschaltung von T_2 aus dem Kleinsignalmodell der Emitterschaltung von T_1 ermittelt werden.

Emitterschaltung in Abbildung L17.5.



$$Y_E = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{b} & \text{c} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} g_{11} + \mathrm{j}\omega C_{11} & 0 \\ g_{21} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{b} \\ \text{c} \end{array} \end{array}$$

Abbildung L17.5: zu L17.2 c und d, Emitterschaltung

Vollständige Admittanzmatrix:

$$Y = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{b} & \text{c} & \text{e} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} g_{11} + \mathrm{j}\omega C_{11} & 0 & -g_{11} - \mathrm{j}\omega C_{11} \\ g_{21} & 0 & -g_{21} \\ -g_{11} - g_{21} - \mathrm{j}\omega C_{11} & 0 & g_{11} + g_{21} + \mathrm{j}\omega C_{11} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{b} \\ \text{c} \\ \text{e} \end{array} \end{array}$$

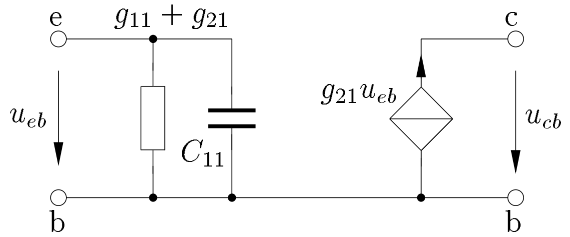
Die Basisschaltung in Abbildung L17.6 kann aus der vollständigen Admittanzmatrix abgelesen werden.

e) Kleinsignalersatzschaltung der gesamten Transistorschaltung, siehe Abbildung L17.7.

(Mit Hilfe der Kleinsignalmodelle von Basis- und Emitterschaltung, dabei gilt für die gegebenen Elementewerte mit $g_{11} + g_{21} \approx g_{21}$)

f) Kleinsignalstromverstärkung der Schaltung:

$$i_2 = g_{21}u_{eb2} = g_{21}(-g_{21}u_{be1})\frac{1}{g_{21} + \mathrm{j}\omega C_{11}} = -g_{21}^2 \frac{1}{g_{21} + \mathrm{j}\omega C_{11}} \frac{1}{R_1^{-1} + g_{11} + \mathrm{j}\omega C_{11}} i_0$$



$$Y = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \mathrm{e} & \mathrm{c} \\ \left[\begin{array}{cc} g_{11} + g_{21} + \mathrm{j}\omega C_{11} g & 0 \\ -g_{21} & 0 \end{array}\right. & \end{array}\hspace{-1em}\left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right]\begin{array}{c} \mathrm{e} \\ \mathrm{c} \end{array}$$

Abbildung L17.6: zu L17.2 c und d, Basisschaltung

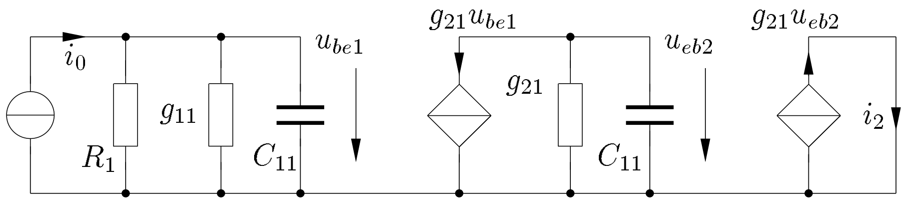


Abbildung L17.7: zu L17.2 e, Ersatzschaltung

mit $g_{11} \gg R_1^{-1}$ gilt:

$$\frac{i_2}{i_0} = \frac{-g_{21}}{g_{11}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega C_{11} g_{21}^{-1}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega C_{11} g_{11}^{-1}} = \frac{-100}{\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{4\,\mathrm{MHz}}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{40\,\mathrm{kHz}}\right)}$$

Bemerkung: mit $\beta = \frac{g_{21}}{g_{11}}$ als Kleinsignalstromverstärkung des Transistors gilt:

$$\frac{i_2}{i_0} = -\beta \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega C_{11} g_{21}^{-1}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega C_{11} \beta g_{21}^{-1}}$$

g) Abbildung L17.8 zeigt den Frequenzgang der Kleinsignalstromverstärkung.

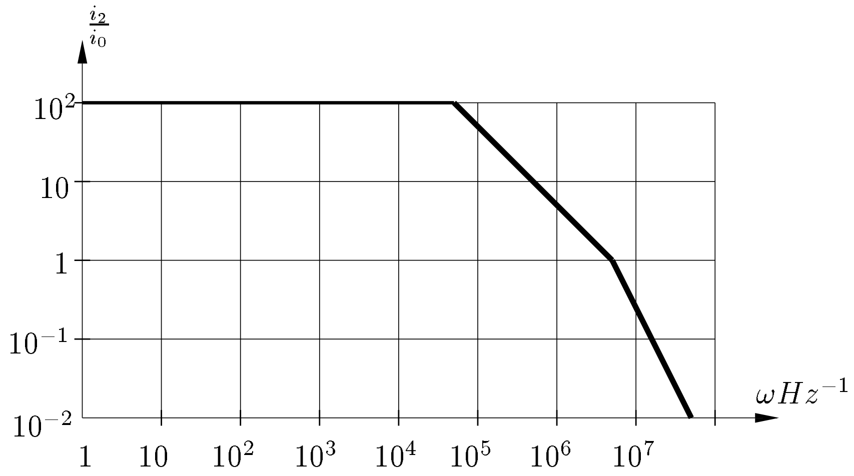


Abbildung L17.8: zu L17.2 g, Frequenzgang der Kleinsignalstromverstärkung

L17.3 Eingangsadmittanz einer Sourceschaltung

a) Komplexe Übertragungsfunktion:
Lösung „by inspection" – Anwendung der Knotenregel am Knoten k (Abbildung L17.9):

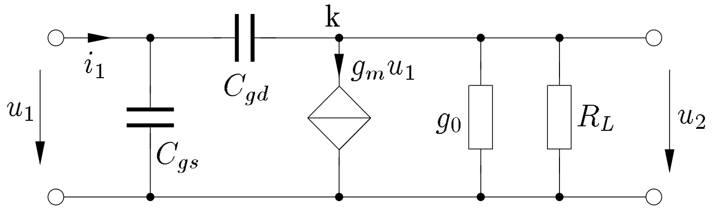


Abbildung L17.9: zu L17.3 a, Sourceschaltung

$$g_m u_1 = (u_1 - u_2)\mathrm{j}\omega C_{gd} - u_2(g_0 + \frac{1}{R_L})$$

$$(g_m - \mathrm{j}\omega C_{gd})u_1 = -u_2(g_0 + \frac{1}{R_L} + \mathrm{j}\omega C_{gd})$$

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{-g_m + \mathrm{j}\omega C_{gd}}{g_0 + \frac{1}{R_L} + \mathrm{j}\omega C_{gd}}$$

b) Komplexe Eingangsadmittanz $y_e = \frac{i_1}{u_1}$:
Lösung „by inspection":

$$i_1 = u_1 \mathrm{j}\omega C_{gs} + (u_1 - u_2)\mathrm{j}\omega C_{gd}$$

$$\frac{i_1}{u_1} = \mathrm{j}\omega C_{gs} + (1 + \frac{u_2}{u_1})\mathrm{j}\omega C_{gd}$$

$$y_e(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega C_{gs} + (1 - H(\mathrm{j}\omega))\mathrm{j}\omega C_{gd}$$

c) Millerkapazität $y_e(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega C_M$:

$$C_M = C_{gs} + i(1 + H(\mathrm{j}\omega))C_{gd}$$