Übungsaufgaben

Schaltungstechnik 1

Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek

WS 2012/13
9. Oktober 2012

Technische Universität München
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung
Univ.-Prof. Dr.techn. Josef A. Nossek

12. Auflage 2012

Kontakt: Josef.A.Nossek@tum.de
Herausgeber: Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung, Technische Universität München
Referenznummer: TUM-LNS-TR-12-06
Druck: Fachschaft Elektrotechnik und Informationstechnik e.V., München

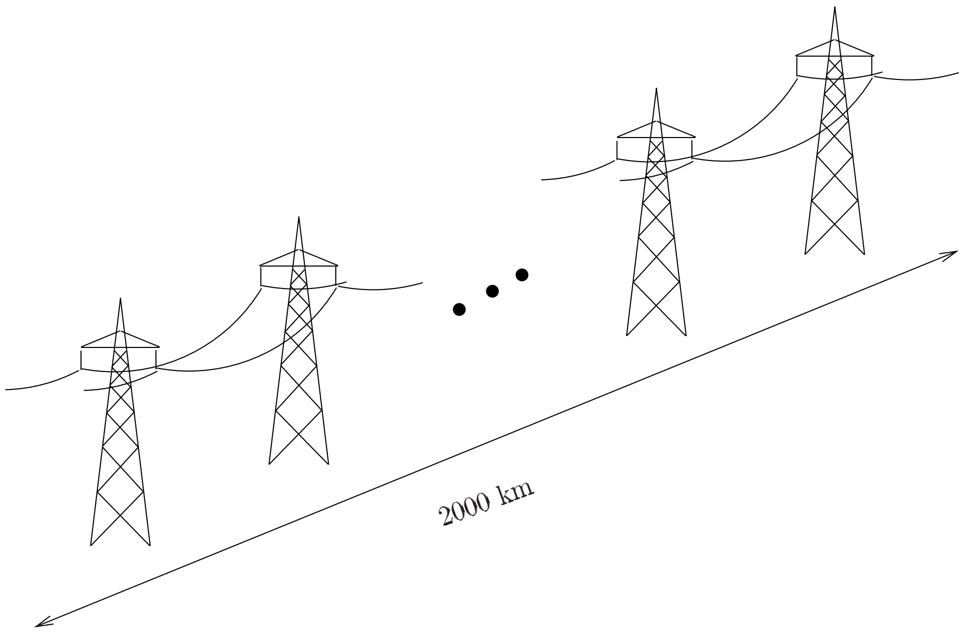
Übung 1: Grundlagen

Aufgabe 1.1 Konzentriertheitshypothese

a) Welche Annahme liegt der Modellierung von Schaltungen als konzentrierte Netzwerke zugrunde?

b) Gegeben sei eine Schaltung der Größenordnung 5 cm mit einer Spannungsquelle $u_s(t)$. Die Spannungsquelle erzeugt Signale mit $f \leq 30\text{kHz}$. Ist die Modellierung dieser Schaltung als konzentriertes Netzwerk zulässig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Prüfen Sie, ob die abgebildete Überlandleitung mit $f = 50\,\text{Hz}$ als konzentrierte Schaltung modelliert werden kann.



d) Abgebildet ist ein Breitbandverstärker in Originalgröße. Als Parameter sind $f_{max} = 2\,\text{GHz}$ und $c_{Platine} = 200\,000\,\text{km/s}$ gegeben. Prüfen Sie auch hier die Anwendbarkeit der Konzentriertheitshypothese.

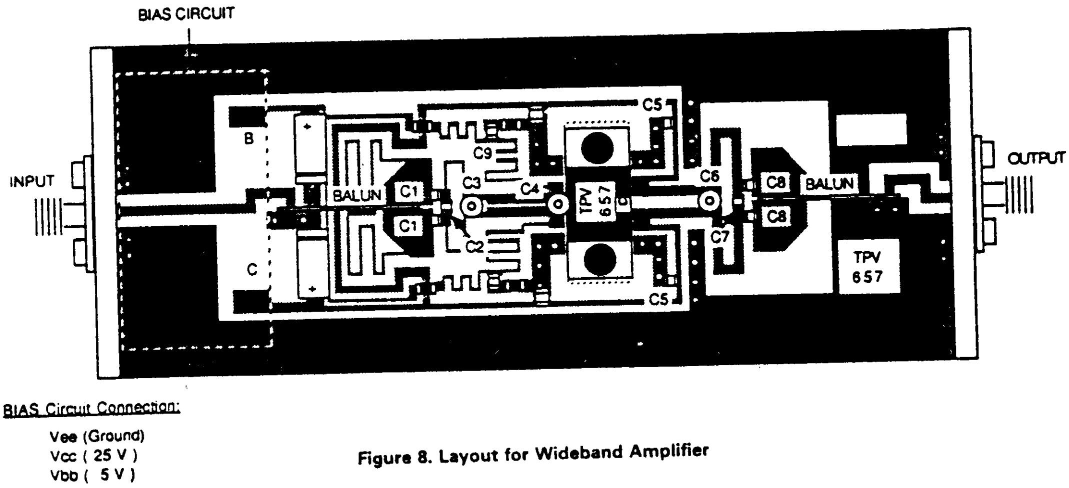


Figure 8. Layout for Wideband Amplifier

e) Nennen Sie ein weiteres Beispiel für welches die Annahme einer konzentrierten Schaltung nicht gerechtfertigt ist.

Aufgabe 1.2 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$x + 2y = 3 \tag{1}$$
$$x - y = 0 \tag{2}$$
$$y = 2. \tag{3}$$

a) Jede der gegebenen Gleichungen beschreibt eine Gerade in der x-y Ebene. Zeichnen Sie diese Geraden.

b) Existiert eine Lösung für das gegebene Gleichungssystem? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Modifizieren Sie gegebenenfalls das Gleichungssystem so, dass eine eindeutige Lösung bestimmbar ist.

d) Schreiben Sie das erhaltene Gleichungssystem in kompakterer Schreibweise als Summe zweidimensionaler Vektoren.

e) Zeichnen Sie die Vektoren in der Ebene und ermitteln Sie die Lösung graphisch. Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihres Ergebnis anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe a).

f) Wie lautet die kompakte Darstellung des Gleichungssystems aus Teilaufgabe c) in Matrix-Vektor-Schreibweise? Wie lassen sich anhand dieser Schreibweise die Zeichnungen aus Teilaufgabe a) und e) interpretieren.

Aufgabe 1.3 Weitere mathematische Grundlagen

Gegeben ist die Gleichung

$$13x^2 - 5x = 6 - 12x^2 \tag{4}$$

a) Um welche Form von Gleichung handelt es sich? Wieviele Lösungen besitzt diese Gleichung?

b) Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen zu (4).

c) Lösen Sie die Gleichung

$$z = \ln(x \cdot y) \tag{5}$$

nach y auf.

d) Gegeben ist der funktionale Zusammenhang

$$x = 3 \cdot \left(\exp\left(\frac{y}{27}\right) - 1 \right). \tag{6}$$

Lösen Sie auch diese Gleichung nach y auf. Für welchen Wertebereich von $x \in \mathbb{R}$ ist die so erhaltene Funktion $y = f(x)$ definiert?

Aufgabe 1.4 Parallele Summe

Die *parallele Summe* $a||b$ zweier reeller Zahlen a und b ist definiert über die Eigenschaft:

$$\frac{1}{a||b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

a) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift für die parallele Summe $a||b$ her.

b) Zeigen Sie Kommutativität und Assoziativität der parallelen Summe.

c) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift für die parallele Summe $a||b||c$ dreier Operanden her.

d) Berechnen Sie: $1||1$, $1||2$, $2||3$ und $\frac{1}{2}||\frac{1}{3}$.

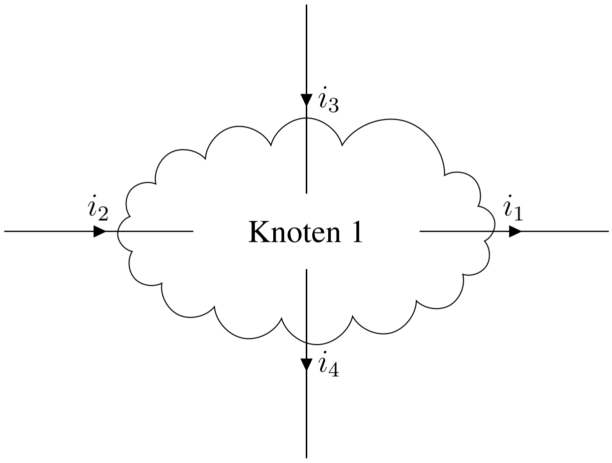
e) Lösen Sie nach x auf: $x||x = R$

Übung 2: Kirchhoffgesetze

Aufgabe 2.1 Grundlagen Kirchhoff-Gesetze

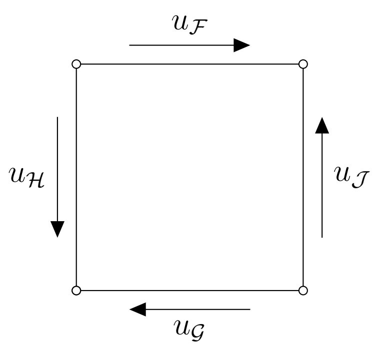
a) Lassen sich die Kirchhoffschen Gesetze auf konzentrierte Netzwerke anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie lautet die Kirchhoffsche Knotenregel angewendet auf den abgebildeten Knoten?



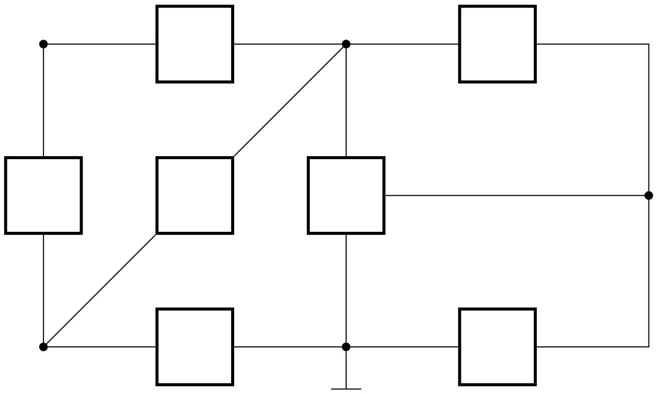
c) Wie lautet das Kirchhoffsche Stromgesetz in allgemeiner Form?

d) Wie lautet die Kirchhoffsche Maschenregel angewendet auf das abgebildete Netzwerk?



e) Wie lautet das Kirchhoffsche Spannungsgesetz in allgemeiner Form?

Aufgabe 2.2 Kirchhoff-Gesetze und Graphen



a) Aus wie vielen Knoten und Zweigen besteht ein gerichteter Graph (*Digraph*) des oben dargestellten Netzwerkes ?

b) Zeichnen Sie einen Digraph des Netzwerkes.

c) Stellen Sie die Kirchhoffschen Stromgleichungen (KCL) für alle Knoten auf.

d) Stellen Sie die Knoteninzidenzmatrix $\boldsymbol{A}'$ auf.

e) Sind alle Stromgleichungen linear unabhängig? Stellen Sie die reduzierte Knoteninzidenzmatrix $\boldsymbol{A}$ auf.

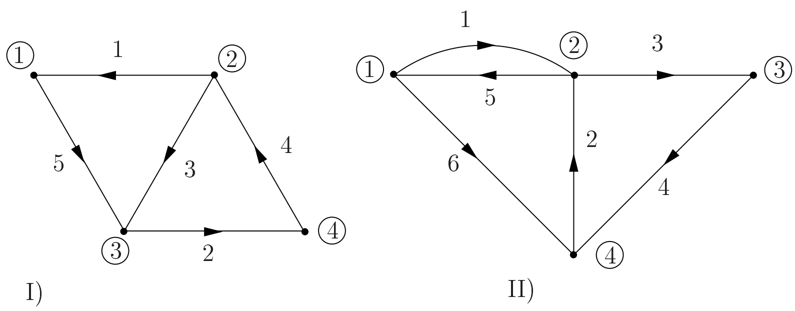
f) Stellen Sie die Kirchhoffschen Spannungsgleichungen (KVL) für einige Maschen auf.

g) Stellen Sie alternativ alle Kirchhoffschen Spannungsgleichungen (KVL) auf, in dem Sie alle Zweigspannungen in Abhängigkeit von den Knotenpotentialen ausdrücken.

h) Verifizieren Sie, dass das Produkt $\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}$ aus der transponierten Knoteninzidenzmatrix und dem Knotenpotentialvektor den Kantenspannungsvektor $\boldsymbol{u}$ ergibt.

Aufgabe 2.3 Kirchhoffgesetze und Inzidenzmatrizen

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben für die beiden Digraphen I und II:



a) Stellen Sie das vollständige System der Kirchhoffschen Knotengleichungen auf.

b) Schreiben Sie alle Zweigspannungen in Abhängigkeit von den Knotenpotentialen.

c) Stellen Sie die Kirchhoffschen Spannungsgleichungen bezüglich der Maschen auf.

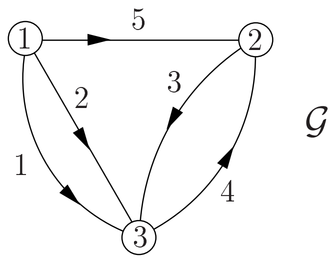
d) Stellen Sie die Knoteninzidenzmatrix $\boldsymbol{A}'$ und die reduzierte Knoteninzidenzmatrix $\boldsymbol{A}$ auf.

e) Verifizieren Sie, dass das Produkt $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{i}$ aus Knoteninzidenzmatrix und Zweigstromvektor den Kirchhoffschen Stromgleichungen entspricht.

f) Verifizieren Sie, dass das Produkt $(\boldsymbol{A}')^T\boldsymbol{u}_k$ aus der transponierten Knoteninzidenzmatrix und dem Knotenpotentialvektor den Kantenspannungsvektor $\boldsymbol{u}$ ergibt.

Aufgabe 2.4 Linearität und lineare Abhängigkeit

Gegeben ist der folgende Netzwerkgraph $\mathcal{G}$:



a) Geben Sie sämtliche Schleifengleichungen für $\mathcal{G}$ an.

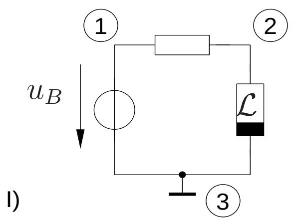
b) Wieviele linear unabhängige Schleifengleichungen gibt es?

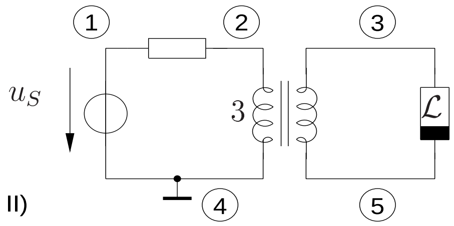
c) Formulieren Sie sämtliche Knotengleichungen und Superknotengleichungen für $\mathcal{G}$.

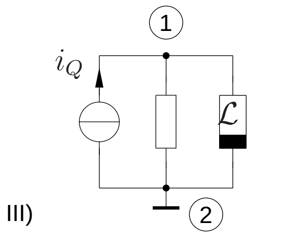
d) Wieviele linear unabhängige (Super-) Knotengleichungen gibt es?

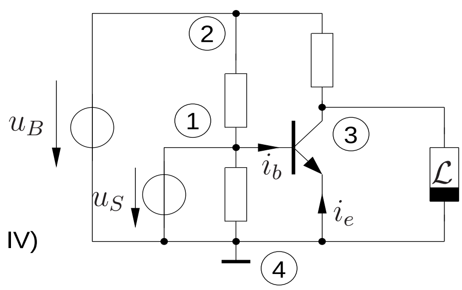
e) Bestimmen Sie (durch Probieren) je zwei linear unabhängige, zulässige Strom- bzw. Spannungsvektoren und verifizieren Sie, dass eine willkürliche Linearkombination beider Vektoren wieder die Kirchhoffschen Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 2.5 Netzwerkgraphen und Berechnung von Strom/Spannung









Gegeben sind die vier abgebildeten Schaltungen. Dabei sind folgende Zweigströme und -spannungen vorgegeben, beziehungsweise durch Messung ermittelt worden:

I)	$u_B = 5$ V ;	$u_L = 4$ V ;	$i_L = 0{,}1$ A ;			
II)	$u_S = 10$ mV ;	$u_3 = 8$ mV ;	$i_3 = 1$ mA ;	$u_L = 4$ mV	$i_L = 2$ mA ;	
III)	$u_1 = 5$ V ;	$i_Q = 5$ A ;	$u_L = 3$ V ;	$i_L = 4$ A		
IV)	$u_B = 15$ V ;	$u_S = 10$ V ;	$i_b = 10$ mA ;	$i_e = -0{,}9$ A	$u_L = 5$ V ;	$i_L = 0{,}1$ A

u_L und i_L sind hierbei die Spannung an und der Strom durch die nichtlineare Last $\mathcal{L}$ bezüglich von oben nach unten orientierter Zählpfeile.

a) Zeichnen Sie zu jeder der Schaltungen einen Digraphen.

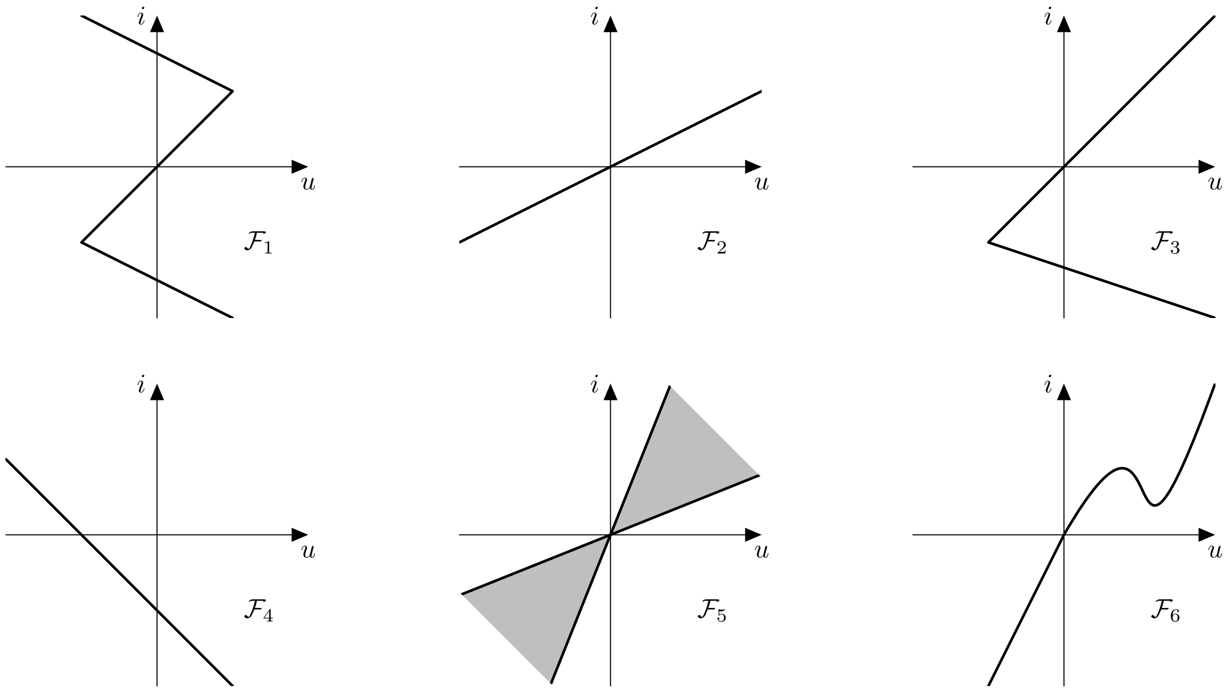
b) Berechnen Sie alle unbekannten Zweigströme.

c) Berechnen Sie alle unbekannten Knotenpotentiale und Zweigspannungen.

Übung 3: Resistive Eintore

Aufgabe 3.1 Eigenschaften resistiver Eintore

a) Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender Eintore:



	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$
spannungsgesteuert						
stromgesteuert						
ungepolt						
streng linear						
linear (affin)						
stückweise linear						
passiv						
verlustfrei						
quellenfrei						

Aufgabe 3.2 Analytisch definierte resistive Eintore

Gegeben sind die analytisch definierten Eintore:

$$\left(\frac{i}{I_0}\right)^3 - \frac{i}{I_0} - \frac{u}{RI_0} = 0 \tag{7}$$

$$u + 10i = 0 \tag{8}$$

$$\frac{u}{U_0} = \frac{i}{I_0} \tag{9}$$

$$\left(1 - \mathrm{e}^{u/U_T}\right) + \frac{i}{I_S} = 0 \tag{10}$$

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{i}{I_0}\right)^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

a) Liegt jeweils eine implizite, explizite oder parametrische Beschreibung vor ?

b) Ist das jeweilige Eintor streng linear, linear oder gar nicht-linear?

c) Welches der Eintore ist stromgesteuert, welches spannungsgesteuert?

d) Welches der Eintore ist passiv, welches aktiv?

e) Welches der Eintore ist zeitvariant, welches zeitinvariant?

Aufgabe 3.3 Konsequenzen der strengen Linearität

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jedes streng lineare resistive Eintor ist ungepolt und quellenfrei.

b) Sind (u_1, i_1) und (u_2, i_2) Betriebspunkte eines streng linearen resistiven Eintores $\mathcal{F}$, so ist auch $(k_1u_1 + k_2u_2, k_1i_1 + k_2i_2)$ ein Betriebspunkt von $\mathcal{F}$.

c) Die Kennlinie eines streng linearen resistiven Eintores ist ein linearer Unterraum der u-i-Ebene.

d) Ein spannungsgesteuertes streng lineares Eintor hat eine Ursprungsgerade als Kennlinie.

e) Ein passiver, verlustbehafteter, spannungsgesteuerter streng linearer Widerstand ist ohmsch.

Aufgabe 3.4 Diodenkennlinien

Gegeben ist eine pn-Diode mit dem Sperrstrom $I_s = 10$pA und der Temperaturspannung $U_T = 26$mV.

a) Zeichnen Sie quantitativ die Kennlinie der Diode.

b) Wie dimensioniert man allgemein einen konkaven Widerstand, so dass er das Verhalten der gegebenen Diode in einem durch einen Spannungswert U_{AP} gegebenen Arbeitspunkt approximiert?

c) Dimensionieren Sie einen linearen und einen konkaven Widerstand, die für $U_{AP} = 0,7$ V dem Diodenverhalten entsprechen.

Aufgabe 3.5 Dualität

Gegeben sei $R_d = \dfrac{U_0}{I_0}$. Zeigen Sie:

a) Verwendet man ein u-i-Diagramm mit gleichen Achsenabschnitten für U_0 und I_0 , so entsteht die zu einer Eintorkennlinie $\mathcal{F}$ duale Kennlinie $\mathcal{F}^d$ durch Spiegeln von $\mathcal{F}$ an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

b) Das zu einem spannungs- (strom-) gesteuerten resistiven Eintor duale Eintor ist resistiv und strom- (spannungs-) gesteuert.

Berechnen Sie zu den folgenden resistiven Eintoren jeweils das duale Eintor, und zeichnen Sie die Kennlinie von beiden in ein u-i-Diagramm mit gleichen Achsenabschnitten für U_0 und I_0.

c)

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(U_0, \frac{I_0}{2} \right) \right\}$$

d)

$$i = Gu, \quad \text{wobei} \quad G = \frac{I_0}{2U_0}$$

e)

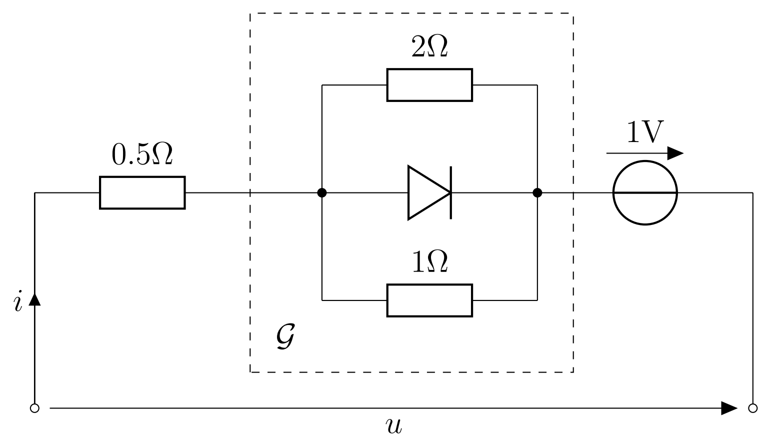
$$u = U_Q + Ri \quad \text{wobei} \quad U_Q = U_0 \quad \text{und} \quad R = \frac{U_0}{4I_0}$$

Aufgabe 3.6 Resistive Schaltungen und Dualität

a) Führen Sie rechnerisch sowie graphisch die Dualwandlung für eine Stromquelle $I_0 = 1\text{A}$ bezüglich einer Dualitätskonstante $R_d = 2\Omega$ durch.

b) Gegeben ist die Dualitätskonstante R_d. Beschreiben Sie das zum Leitwert G duale Eintor in Abhängigkeit von R_d und G.

Gegeben ist im weiteren Verlauf die Schaltung:



c) Bestimmen Sie die Kennlinie der Teilschaltung $\mathcal{G}$ graphisch.

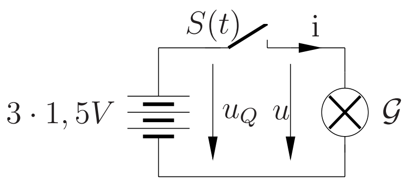
d) Bestimmen Sie nun graphisch die Kennlinie $\mathcal{F}$ der Gesamtschaltung.

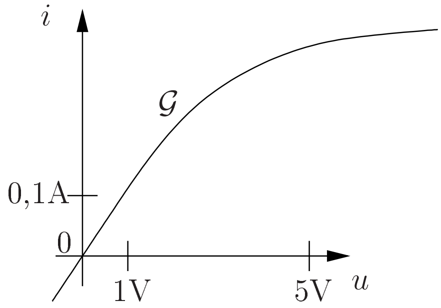
e) Zeichnen Sie die Kennlinie $\mathcal{F}_d$ des dualen Eintores mit $R_d = 1\Omega$.

f) Zeichnen Sie eine mögliche Realisierung des dualen Eintores.

Aufgabe 3.7 Taschenlampe

Gegeben sind der Schaltplan einer Taschenlampe und die Kennlinie der verwendeten Glühlampe $\mathcal{G}$:





a) Diskutieren Sie die Eigenschaften von $\mathcal{G}$ und interpretieren Sie die Eigenschaften physikalisch! Woher kommt die Biegung der Kennlinie? Welche Eintoreigenschaft wird bereits durch die graphische Gestaltung des Elementsymbols ausgedrückt?

b) Ersetzen Sie für die Analyse der Schaltung die Symbole für die drei elektrochemischen Batterien und die Glühlampe durch geeignete Netzwerkelemente.

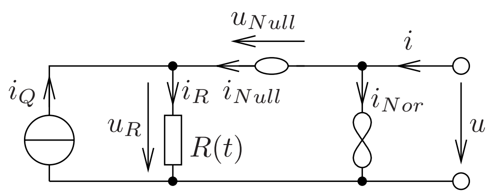
c) Warum muss die Schaltung zeitvariant sein? Wodurch ist die Schaltfunktion $S(t)$ bestimmt?

d) Der Schalter wird geschlossen. Welcher Betriebspunkt (u, i) stellt sich an $\mathcal{G}$ ein?
Welche Leistung wird dann in der Glühlampe umgesetzt? Geben sie allgemein $p(t)$ an.

e) Warum sind die Batterien genau genommen keine resistiven Elemente?

Aufgabe 3.8 Signalquelle

Sie benötigen für Messzwecke eine temperaturabhängige Signalspannungsquelle. Untersuchen Sie dazu die gegebene Schaltung, die als Messfühler einen temperaturabhängigen Widerstand verwendet:



Betrachten Sie i_Q und die Abhängigkeit $R(T)$ des Widerstands von der Temperatur T als gegeben.

a) Der Zeitverlauf der Temperatur sei gegeben durch $T(t)$.
Stellen Sie den Messfühler als zeitvarianten ohmschen Widerstand $R(t)$ dar.

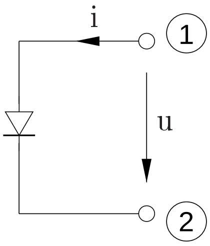
b) Berechnen Sie in dieser Reihenfolge i_R, u_R, u und i.

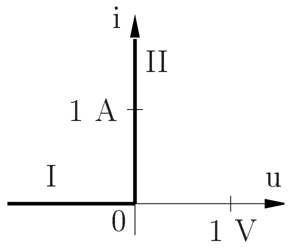
c) Geben Sie ein Modell der Schaltung an.

d) Erklären Sie das Funktionsprinzip der Schaltung.

Aufgabe 3.9 Ideale Diode

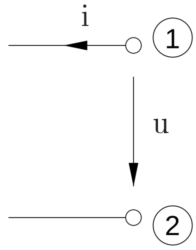
Betrachten Sie das Elementsymbol und die stückweise lineare Kennlinie einer idealen Diode:





Die Kennlinie besteht aus zwei Ästen I und II, für die jeweils ein eigenes Modell angegeben werden kann. Das Ersatzschaltbild ESB I von Ast I ergibt sich beispielsweise zu:

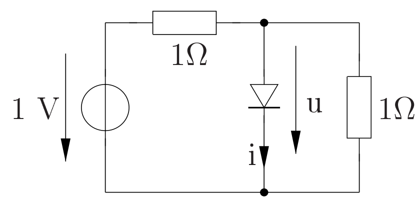
ESB I: $i = 0$
$u \leq 0$



Die Bedingungsungleichung $u \leq 0$ ist dabei eine notwendige Bedingung für die Anwendbarkeit des Ersatzschaltbildes.

a) Entwerfen Sie das entsprechende Ersatzschaltbild ESB II für Ast II der Kennlinie.

Unter Verwendung dieser Ersatzschaltbilder soll festgestellt werden, in welchem Punkt ihrer Kennlinie die Diode in der folgenden Schaltung $\mathcal{S}$ betrieben wird:



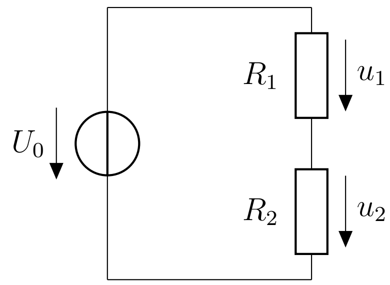
b) Nehmen Sie zunächst an, die Diode werde im Bereich I der Kennlinie betrieben. Konstruieren Sie das entsprechende Gesamt-Ersatzschaltbild $\mathcal{S}_I$ von $\mathcal{S}$ und bestimmen Sie die Lösung $\mathcal{L}_I = (u, i)$ dieser Schaltung $\mathcal{S}_I$. Ist $\mathcal{L}_I$ eine Lösung von $\mathcal{S}$?

c) Nehmen Sie nun an, die Diode werde im Bereich II der Kennlinie betrieben. Konstruieren Sie das Gesamt-Ersatzschaltbild $\mathcal{S}_{II}$ von $\mathcal{S}$ und bestimmen Sie die zugehörige Lösung $\mathcal{L}_{II} = (u, i)$ von $\mathcal{S}_{II}$. Ist $\mathcal{L}_{II}$ eine Lösung von $\mathcal{S}$?

d) Zeichnen Sie $\mathcal{L}_I$ und $\mathcal{L}_{II}$ in das Betriebsdiagramm der idealen Diode ein.

Aufgabe 3.10 Regeln zur Teilung von Spannung und Strom

Gegeben ist zunächst die abgebildete Schaltung:

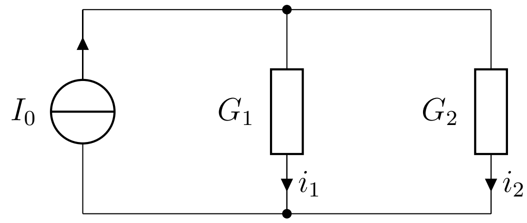


a) Bestimmen Sie u_1 in Abhängigkeit von U_0, R_1 und R_2.

b) Bestimmen Sie u_2 in Abhängigkeit von U_0, R_1 und R_2.

c) Analysieren Sie die Resultate der Teilaufgaben a) und b). Formulieren Sie einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einer Teilspannung u_n an einem von N in Reihe geschalteten Widerständen $R_1, \ldots, R_N$ zu der an der Reihenschaltung anliegenden Gesamtspannung U_0.

Gegeben ist nun die Schaltung:



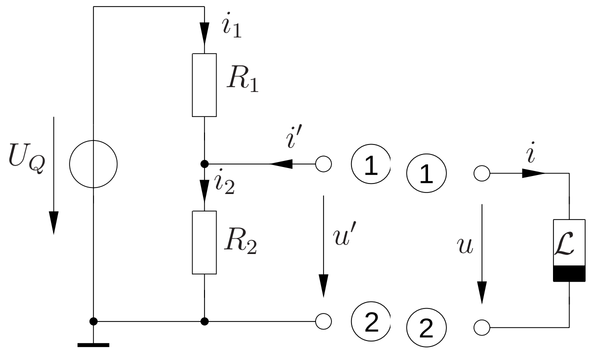
d) Bestimmen Sie i_1 in Abhängigkeit von I_0, G_1 und G_2.

e) Bestimmen Sie i_2 in Abhängigkeit von I_0, G_1 und G_2.

f) Analysieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben d) und e). Formulieren Sie einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einem Teilstrom i_n an einem von N parallel geschalteten Leitwerten $G_1, \ldots, G_N$ zu dem an der Parallelschaltung anliegenden Gesamtstrom I_0.

Aufgabe 3.11 Spannungsteiler

Gegeben ist die folgende Schaltung, die mit einer Last $\mathcal{L}$ beschaltet werden soll:



Man bezeichnet die Schaltung als *Spannungsteiler*: Man verwendet einige ohmsche Widerstände, um eine benötigte Spannung u' zu erzeugen, die kleiner ist als die feste Versorgungsspannung U_Q.

a) Berechnen Sie die Ausgangsspannung U_0 des unbelasteten Spannungsteilers (also bei $i' = 0$) abhängig von U_Q, R_1 und R_2. Wie bezeichnet man U_0?

b) Drücken Sie U_0 auch abhängig von U_Q, dem Gesamtwiderstand $R_{ges} = R_1 + R_2$ und dem Teilverhältnis $V = \dfrac{R_2}{R_{ges}}$ aus. Welche Vorteile hat diese Darstellung?

c) Sie bauen eine Operationsverstärkerschaltung auf und verwenden dafür ein 15 V-Netzteil. In der Schaltung benötigen Sie eine Referenzspannung von 3 V. Realisieren Sie diese mit Hilfe eines Spannungsteilers mit $R_2 = 1\text{k}\Omega$.

d) Berechnen Sie die Kennlinie des Spannungsteilers wenn dieser als realer Quellenzweipol $\mathcal{Q}$ bezüglich der Klemmen ① und ② betrachtet wird.

Der Spannungsteiler wird nun *belastet*, also mit einer zweipoligen Last $\mathcal{L}$ beschaltet.

e) $\mathcal{L}$ *zieht einen Strom* von $i = 1$ mA unabhängig von u. Modellieren Sie $\mathcal{L}$ durch ein Netzwerkelement. Wie groß ist u, wenn der Spannungsteiler wie bei c) dimensioniert wurde?

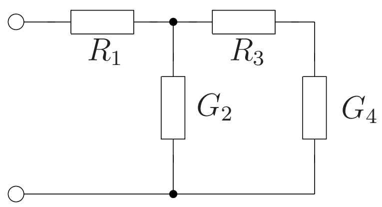
f) Welchen Freiheitsgrad beim Entwurf des Spannungsteilers können Sie nutzen, um diesen Störeinfluss zu verringern? Welche nachteilige Auswirkung hat diese Maßnahme bei einer Realisierung der Schaltung?

Bei der zu entwerfenden Schaltung ist $\mathcal{L}$ ein ohmscher Widerstand $R_L = 10\Omega$.

g) Dimensionieren Sie den Spannungsteiler so, dass an R_L exakt 3 V anliegen. Was ist die einfachste Schaltung, die der Anforderung genügt?

Aufgabe 3.12 Kettenbruchschaltungen

Gegeben ist eine streng lineare Schaltung mit ohmschen Widerständen:

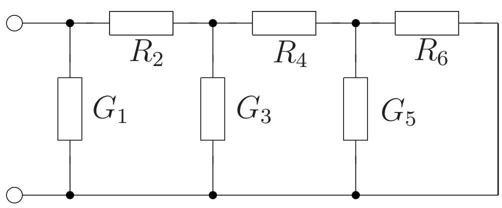


Schaltungen mit dieser Struktur nennt man Kettenbruchschaltungen. Die R_i bezeichnet man als Längswiderstände, die G_i als Querleitwerte.

a) Zeigen Sie, dass sich die Schaltung wie ein einziger ohmscher Widerstand verhält und berechnen Sie dessen Wert R_{L4}.

b) Drücken Sie R_{L4} nur durch Widerstände, und $G_{L4} = \dfrac{1}{R_{L4}}$ nur durch Leitwerte aus. Warum trifft man die Unterscheidung in Längswiderstände und Querleitwerte?

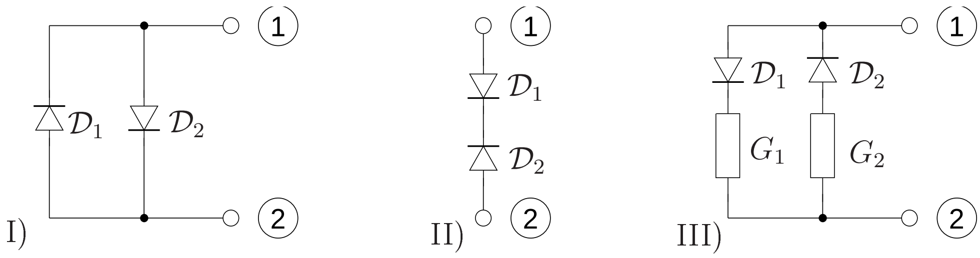
c) Schreiben Sie ohne lange zu überlegen den Ersatzleitwert G_{L6} der folgenden Schaltung an:



Aufgabe 3.13 Ideale Diodenschaltungen

a) Welches resistive Eintor ist dual zur idealen Diode?
Welchen Einfluss hat die Wahl der Dualitätskonstanten R_d?

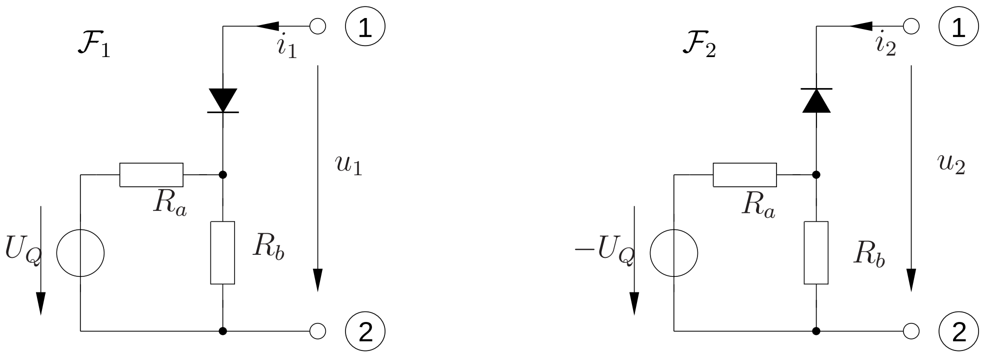
b) Die folgenden drei Diodenschaltungen sind zu teuer. Vereinfachen Sie sie so weit wie möglich und sparen Sie dabei jeweils mindestens eine ideale Diode ein.



Außer Dioden sind in den Ersatzschaltungen nur ideale Drähte und ohmsche Widerstände erlaubt. Treffen Sie bei III eine geeignete Fallunterscheidung.

Aufgabe 3.14 Konkave Widerstände

Gegeben ist die innere Struktur zweier resistiver Eintore $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$:



Betrachten Sie die Widerstände als ohmsch und die Quellen als ideal.

a) Vereinfachen Sie $\mathcal{F}_1$ durch Quellenumwandlung derart, dass die vereinfachte Schaltung wieder eine Spannungsquelle enthält.

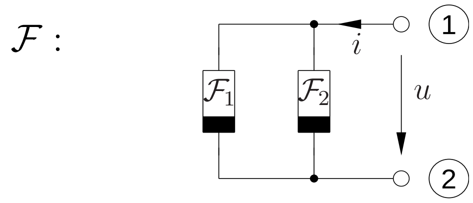
b) Konstruieren Sie die Kennlinie von $\mathcal{F}_1$ unter der Annahme, dass die Diode ideal sei.
Stellen Sie $\mathcal{F}_1$ durch ein einziges Netzwerkelement dar und geben Sie dessen Parameter an.

c) Ein besseres Modell für eine reale Diode ist ein konkaver Widerstand (G_d, U_e). Welche geänderte Kennlinie ergibt sich damit für $\mathcal{F}_1$?

Die Schaltung wurde für den Aufbau mit einem Labornetzgerät mit Ausgängen -15V, 0V und 15V dimensioniert, so dass $U_Q = 15\text{V}$. Die handelsüblichen pn-Dioden können Sie hier als konkave Widerstände mit $U_e = 0,7\text{V}$ und $G_d \to \infty$ betrachten. Außerdem ist $R_a = 46,2\text{k}\Omega$ und $R_b = 3,3\text{k}\Omega$.

d) Zeichnen Sie quantitativ die Kennlinien von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ in ein u-i-Diagramm.

e) Konstruieren und beschreiben Sie die Kennlinie der Parallelschaltung $\mathcal{F}$:

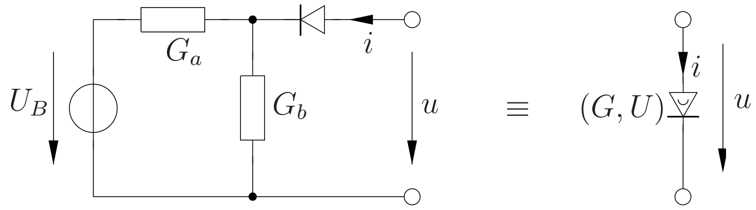


f) Was wäre ein besseres Diodenmodell für die obige Schaltung?
Begründen Sie mit einer Abschätzung, warum wir es nicht verwenden.

g) Diskutieren Sie die Bedeutung der Auswahl geeigneter Bauelementemodelle für den quantitativen Entwurf von Schaltungen. Wann ist ein Modell adäquat?

Aufgabe 3.15 Synthese eines stückweise linearen Widerstands

Die folgende Schaltung $\mathcal{S}$ realisiert einen konkaven Widerstand:



Zunächst soll auf möglichst schnellem Weg der genaue Zusammenhang zwischen den Parametern U_B, G_a und G_b von $\mathcal{S}$, sowie G und U des äquivalenten konkaven Widerstandes bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie den Knickpunkt der stückweise linearen Kennlinie von $\mathcal{S}$. Gehen Sie dabei davon aus, dass dort auch die ideale Diode im Knickpunkt Ihrer Kennlinie betrieben wird.

b) Bestimmen Sie die Steigung G des rechten Astes der Kennlinie $\mathcal{S}$ als ihren Kleinsignalleitwert bei Betrieb der idealen Diode im Durchlassbereich.

c) Skizzieren Sie die Kennlinie $\mathcal{S}$ in der u-i-Ebene und beschriften Sie sie.

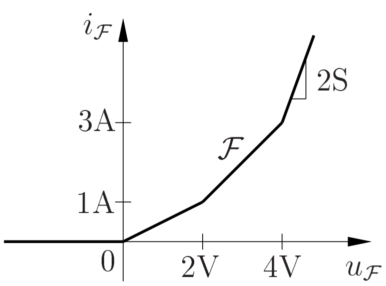
$U_B > 0$ sei im folgenden die fest vorgegebene Versorgungsspannung der Schaltung.

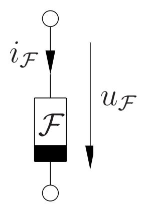
d) Entwerfen Sie als *Dimensionierungsvorschrift* für $\mathcal{S}$ einen Satz von Gleichungen, der die Werte der wählbaren Größen G_a und G_b abhängig von den Wunschgrößen U und G ausdrückt.

e) Welchen *Realisierbarkeitsbedingungen* müssen G und U genügen, damit die dem konkaven Widerstand (G, U) entsprechende Schaltung $\mathcal{S}$ mit billigen Bauteilen realisierbar ist?

f) Vereinfachen Sie $\mathcal{S}$ und die Dimensionierungsvorschrift für den Fall $U = 0$.

Nun soll ein stückweise linearer Widerstand $\mathcal{S}$ mit der folgenden Kennlinie synthetisiert werden:





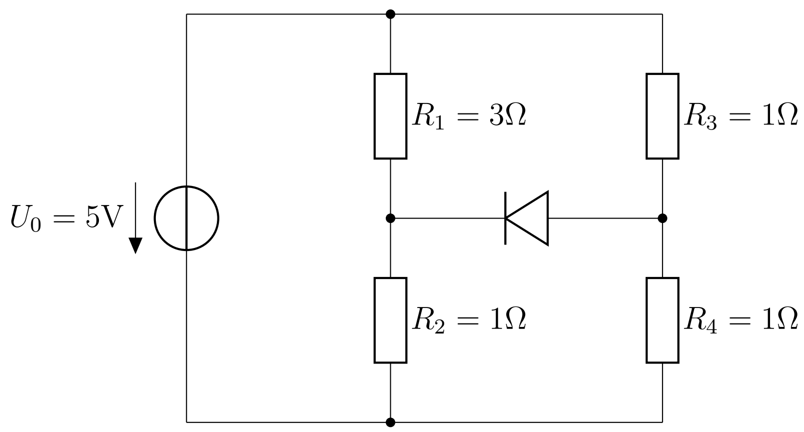
An den Achsen des Diagramms sind die Strom- und Spannungswerte der Knickpunkte eingetragen.

g) Stellen Sie $\mathcal{F}$ durch eine Parallelschaltung dreier konkaver Widerstände $(G_i, U_i),\ i \in \{1, 2, 3\}$, dar, und geben Sie deren Parameterwerte an.

h) Realisieren Sie $\mathcal{F}$ mit Hilfe von idealen Dioden, ohmschen Widerständen und einer einzigen Betriebsspannungsquelle $U_B = 10\text{V}$. Geben Sie ein vollständiges Schaltbild mit allen Elementewerten an.

Aufgabe 3.16 Arbeitspunktbestimmung

Der folgenden Betrachtung liegt die abgebildete Schaltung zugrunde:



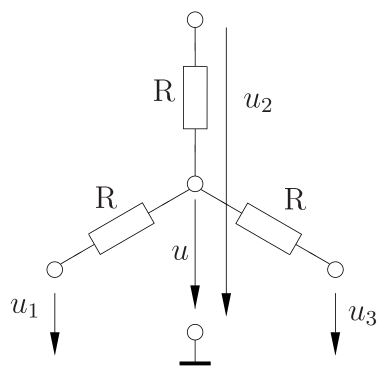
a) Nehmen Sie an, dass die Diode im Sperrbereich betrieben wird. Bestimmen Sie den Arbeitspunkt der Schaltung.

b) Nehmen Sie an, dass die Diode im Durchlassbereich betrieben wird. Bestimmen Sie den Arbeitspunkt der Schaltung.

Aufgabe 3.17 Symmetrie

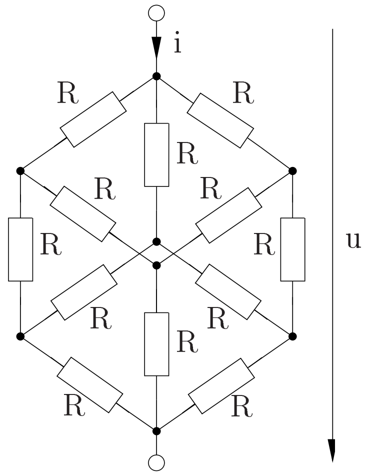
Quantitative Ergebnisse können auch ohne langwierige Rechengänge aus qualitativen Eigenschaften abgeleitet werden. Von zentraler Bedeutung ist dabei oft das Vorhandensein von *Symmetrie*.

a) Gegeben sei die folgende Sternschaltung mit drei gleichen Widerständen R:



Berechnen Sie u abhängig von u_1, u_2 und u_3.

b) Gegeben sei eine Schaltung aus zwölf gleichen Widerständen, die an den Kanten eines Würfels angeordnet sind. Die Schaltung ist hier (auf einer Ecke stehend) perspektivisch dargestellt.

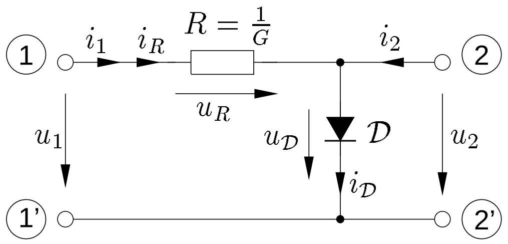


Zwei diagonal gegenüberliegende Ecken sind als Anschlüsse von außen zugänglich. Berechnen Sie diesbezüglich den Widerstand der Schaltung.

Übung 4: Resistive Zweitore

Aufgabe 4.1 Beschreibungsformen resistiver Zweitore

Gegeben ist das folgende aus einem ohmschen Widerstand und einer pn-Diode zusammengesetzte nichtlineare resistive Zweitor:



Verwenden Sie bei allen Berechnungen den Leitwert $G = \dfrac{1}{R}$, wenn dies eine einfachere Darstellung von Formeln oder Ergebnissen ermöglicht.

a) Schreiben Sie die Kirchhoffschen Gesetze an.

b) Geben Sie die Beschreibungsgleichungen der in dem Zweitor enthaltenen Eintore sowohl in der spannungs- als auch in der stromgesteuerten Form an.

Berechnen Sie nun die folgenden sechs expliziten Beschreibungsformen des Zweitores:

c) Die Leitwertsbeschreibung: $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$

d) Die Widerstandsbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}\left(\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}\right)$

e) Die hybride Beschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}\left(\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$

f) Die Kettenbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}\left(\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}\right)$

g) Die inverse Kettenbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}'\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix}\right)$

h) Die inverse hybride Beschreibung: $\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}'\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}\right)$

Das Zweitor wird nun in einer Umgebung des Arbeitspunktes AP $= (U_1, U_2, I_1, I_2)$ betrieben.

i) Zerlegen Sie die Torgrößen in Arbeitspunkt- und Kleinsignalanteil.
Setzen Sie diese zerlegten Torgrößen in die Leitwertsbeschreibung ein.

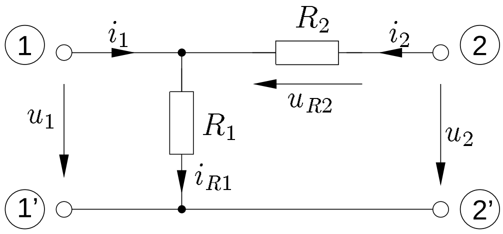
j) Welcher Beziehung müssen die Arbeitspunktgrößen vernünftigerweise genügen?

k) Leiten Sie eine näherungsweise Beziehung zwischen den Kleinsignalgrößen ab.
Welche Voraussetzung muss dabei erfüllt sein?

l) Bestimmen Sie die Kleinsignal-Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$ des Zweitores im Arbeitspunkt AP.

Aufgabe 4.2 Zweitormatrizen

Gegeben ist ein aus zwei ohmschen Widerständen zusammengesetztes streng lineares Zweitor:



Verwenden Sie bei allen Berechnungen die Leitwerte $G_1 = \dfrac{1}{R_1}$ und $G_2 = \dfrac{1}{R_2}$, wenn dies eine einfachere Darstellung von Formeln oder Ergebnissen ermöglicht.

a) Schreiben Sie alle aufgrund elementarer Gesetzmäßigkeiten für das Innere des Zweitores angebbaren Beziehungen an.

Bestimmen Sie nun alle sechs Beschreibungsmatrizen des Zweitores:

b) Die Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$.

c) Die Widerstandsmatrix $\boldsymbol{R}$.

d) Die Hybridmatrix $\boldsymbol{H}$.

e) Die inverse Hybridmatrix $\boldsymbol{H}'$.

f) Die Kettenmatrix $\boldsymbol{A}$.

g) Die inverse Kettenmatrix $\boldsymbol{A}'$.

Bei streng linearen Zweitoren kann man auch direkt einzelne Elemente der Beschreibungsmatrizen aus speziellen Beschaltungen berechnen. Vergleichen Sie dies mit der obigen Methode:

h) Leiten Sie Beschaltungsfälle her, die das direkte Berechnen einzelner Matrixelemente der Hybridmatrix eines streng linearen Zweitores ermöglichen. Berechnen Sie damit die Hybridmatrix.

i) Leiten Sie Beschaltungsfälle her, die das direkte Berechnen einzelner Elemente der Kettenmatrix eines streng linearen Zweitores ermöglichen. Berechnen Sie damit die Kettenmatrix.

Aufgabe 4.3 Umrechnung von Zweitormatrizen

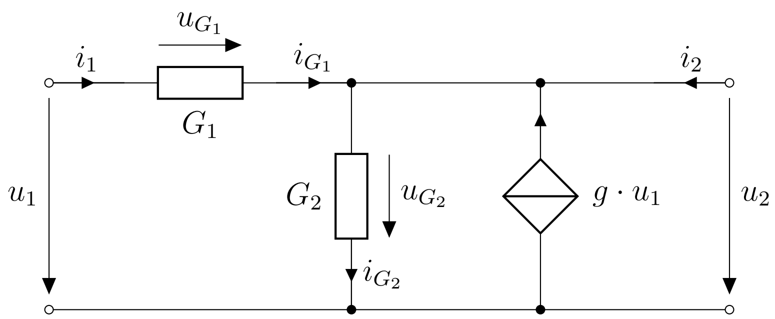
Es soll eine Formel für die Berechnung der Kettenmatrix $\boldsymbol{A}$ eines streng linearen Zweitores aus seiner als bekannt vorausgesetzten Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$ angegeben werden.

a) Drücken Sie allgemein u_1 und i_1 durch u_2 und $-i_2$ aus. Wann ist dies möglich?

b) Bestimmen Sie durch elementweisen Vergleich mit den Koeffizienten der Kettendarstellung des Zweitores die Elemente der Kettenmatrix.

Aufgabe 4.4 Zweitor mit gesteuerten Quellen

Gegeben sei das folgende Zweitor:



a) Bestimmen Sie u_{G_1} in Abhängigkeit von u_1 und u_2.

b) Bestimmen Sie i_1 in Abhängigkeit von u_1 und u_2.

c) Bestimmen Sie u_{G_2} und i_{G_2} in Abhängigkeit von u_2.

d) Bestimmen Sie i_2 in Abhängigkeit von u_1 und u_2.

e) Geben Sie die Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$ des Zweitors an.

f) Bestimmen Sie g so, dass das Zweitor reziprok ist.

g) Ist es möglich, g so zu wählen, dass das Zweitor umkehrbar ist?

h) Geben Sie eine implizite Beschreibung der Form

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

für das Zweitor an.

i) Ist die implizite Beschreibung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

j) Unter welcher Bedingung existiert die Widerstandsmatrix $\boldsymbol{R}$?

In den folgenden Teilaufgaben soll nun die parametrisierte Beschreibung des Zweitors betrachtet werden. Im ersten Schritt soll durch zwei Messungen eine Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ bestimmt werden. Dazu sind zwei sinnvolle Beschaltungen des Zweitores notwendig.

k) Ist eine Beschaltung mit Stromquellen sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.

l) Geben Sie zwei Beschaltungen an, mit denen die Betriebsmatrix bestimmt werden kann. Füllen Sie dazu die gegebene Tabelle aus.

	Tor 1	Tor 2
Messung 1		
Messung 2		

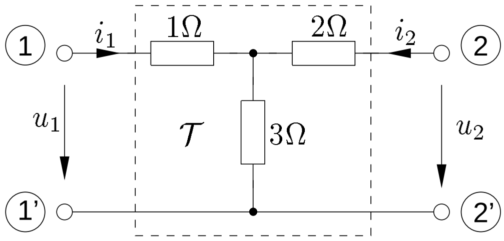
m) Bestimmen Sie nun die Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$.

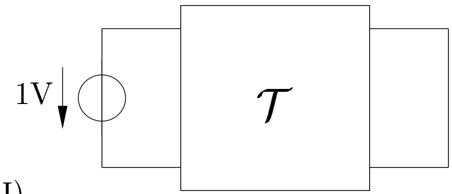
n) Bestimmen Sie anhang der Betriebsmatrix die inverse Kettenmatrix $\boldsymbol{A}'$ des Zweitors.

o) Zeigen Sie anhand der Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$, dass das Zweitor verlustbehaftet ist.

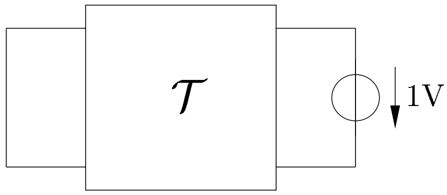
Aufgabe 4.5 Betriebsvektoren streng linearer Zweitore

Gegeben sei das abgebildete T-Glied $\mathcal{T}$, das auf die verschiedenen Arten I bis VI beschaltet wird:

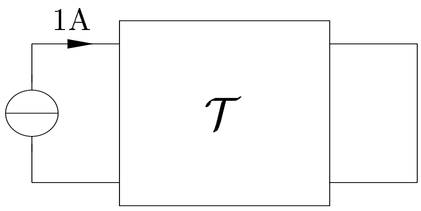




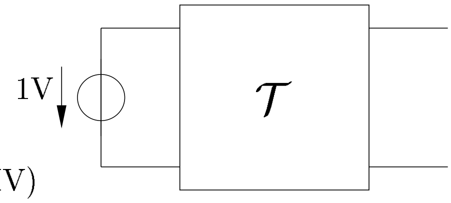
I)



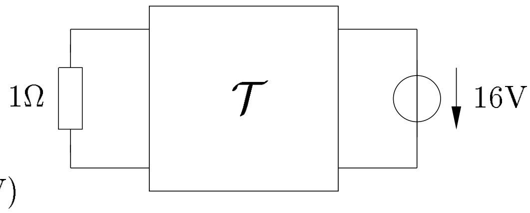
II)



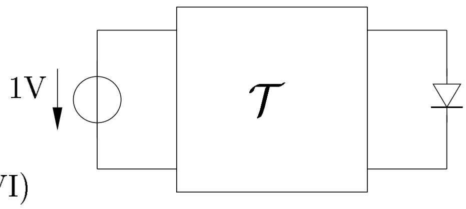
III)



IV)



V)



VI)

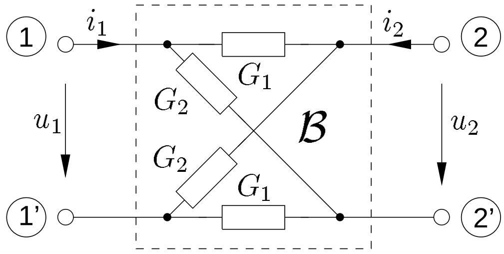
a) Berechnen Sie jeweils zahlenmäßig den Vektor der Betriebsgrößen $[u_1\ u_2\ i_1\ i_2]^T$.

b) Zeigen Sie, dass sich die Betriebsvektoren bei den Beschaltungen III, IV, V und VI als Linearkombination der ersten beiden Messungen darstellen lassen.

c) Geben Sie die Zweitormatrizen $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{A}$ von $\mathcal{T}$ zahlenmäßig an.

Aufgabe 4.6 Symmetrische Brückenschaltung

Das abgebildete Zweitor $\mathcal{B}$ heißt *symmetrische Brückenschaltung*.



a) Welche Eigenschaften besitzt $\mathcal{B}$ aufgrund seiner Struktur und der in ihm enthaltenen Elemente?

b) Bestimmen Sie die Leitwertsmatrix von $\mathcal{B}$.

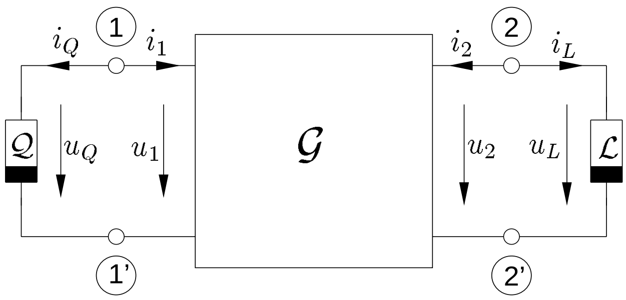
c) Geben Sie für den Fall $G_1 = G_2 := G$ ein möglichst einfaches zu $\mathcal{B}$ äquivalentes Zweitor an.

Aufgabe 4.7 Idealer Gleichrichter

Ein *idealer Gleichrichter* ist ein verlustloses resistives Zweitor $\mathcal{G}$ mit den Beschreibungsgleichungen

$$\begin{aligned} u_2 &= |u_1| \\ -i_2 &= |i_1|. \end{aligned}$$

Das Bild zeigt die Beschaltung mit einer Quelle $\mathcal{Q}$ und einer Last $\mathcal{L}$:



Zunächst soll das allgemeine Verhalten von $\mathcal{G}$ untersucht werden:

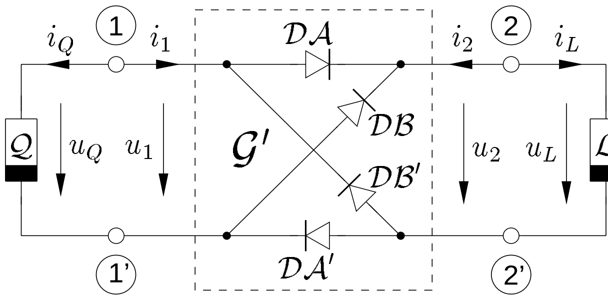
a) Die Beschreibungsgleichungen stellen bereits eine Einschränkung an die Betriebspunkte dar, die $\mathcal{L}$ in der Schaltung annehmen kann. Untersuchen Sie dies.

b) Leiten Sie aus der Verlustfreiheit von $\mathcal{G}$ eine Vorzeichenbeziehung zwischen den Eingangsgrößen u_1 und i_1 her. Welche Betriebspunkte kann $\mathcal{Q}$ in der Schaltung annehmen?

c) Diskutieren Sie den Leistungsfluss in der Schaltung.

d) Ist $\mathcal{G}$ linear? Durch welches Paar von Größen ist $\mathcal{G}$ gesteuert?

Nun ist zu untersuchen, ob die folgende verlustlose Schaltung $\mathcal{G}'$ aus vier idealen Dioden als Realisierung des idealen Gleichrichters geeignet ist:



e) Zeichnen Sie den Digraph der Schaltung. Benennen und orientieren Sie die Zweige wie die zugehörigen Zweipole. Zeigen Sie, dass die Torbedingungen erfüllt sind.

f) Gegeben sei eine ideale Diode $\mathcal{D}$ mit Zählpfeilen für $u_\mathcal{D}$ und $i_\mathcal{D}$ in Durchlassrichtung.
Welche Aussagen können Sie immer über $u_\mathcal{D}$ und $i_\mathcal{D}$ alleine treffen?

g) Zunächst eine einfache Plausibilitätsbetrachtung über die Verwendbarkeit von $\mathcal{G}'$:
Wenden Sie KCL auf den Knoten ② und KVL auf die Schleife $\mathcal{L}$-$\mathcal{DA}'$-$\mathcal{DB}$ an. Leiten Sie daraus je eine Bedingung für den Strom $-i_2 = i_\mathcal{L}$ und die Spannung $u_2 = u_\mathcal{L}$ ab.
Welchen Schluss ziehen Sie aus den Ergebnissen?

Um die Tauglichkeit der Schaltung $\mathcal{G}'$ als Realisierung von $\mathcal{G}$ unter Beweis zu stellen, muss man ihr Verhalten allerdings quantitativ analysieren:

h) Wenden Sie KCL auf die Superknoten {①',②} und {①,②} an und zeigen Sie: $-i_2 \geq |i_1|$.

i) Wenden Sie KVL auf die Schleifen $\mathcal{DA}$-$\mathcal{L}$-$\mathcal{DA}'$-$\mathcal{Q}$ und $\mathcal{DB}'$-$\mathcal{L}$-$\mathcal{DB}$-$\mathcal{Q}$ an, und zeigen Sie dabei: $u_2 \geq |u_1|$.

j) Verwenden Sie diese Ergebnisse und die Verlustlosigkeit von $\mathcal{G}'$, um $\mathcal{G}'$ zu beschreiben.

k) Sind $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}$ äquivalent?

$\mathcal{G}'_{in}(\mathcal{L})$ sei die Eingangskennlinie der idealen Gleichrichterrealisierung $\mathcal{G}'$ bei ausgangsseitiger Beschaltung mit dem resistiven Lastzweipol $\mathcal{L}$.

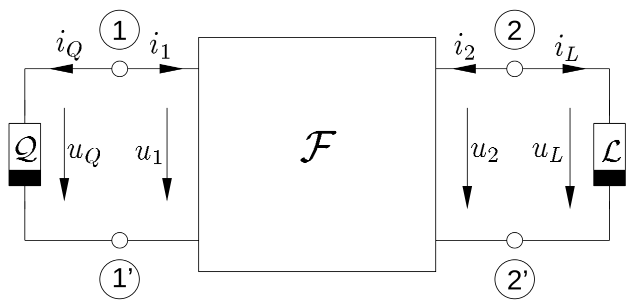
l) $\mathcal{L}$ sei ein Kurzschluss. Bestimmen Sie $\mathcal{G}'_{in}(\mathcal{L}) = \mathcal{G}'_{in}(\text{KS})$ durch Schaltungsumformung.

m) $\mathcal{L}$ sei ein ohmscher Widerstand R. Bestimmen Sie $\mathcal{G}'_{in}(R)$ durch Rechnung.

n) Wie erhält man $\mathcal{G}'_{in}(\mathcal{L})$ auf graphischem Weg aus der Lastkennlinie $\mathcal{L}$?
Welche Zweipoleigenschaften besitzt $\mathcal{G}'_{in}(\mathcal{L})$ allgemein?

Aufgabe 4.8 Kettendarstellung und Kennlinientransformation

Ein resistives Zweitor $\mathcal{F}$, dessen Kettenbeschreibung existiert, sei ausgangsseitig mit einer resistiven Last $\mathcal{L}$ und eingangsseitig mit einer Zweipolquelle $\mathcal{Q}$ beschaltet:



a) Der Betriebspunkt der Last $\mathcal{L}$ sei (u_L, i_L). Welchen Betriebspunkt (u_1, i_1) nimmt dann der Eingang von $\mathcal{F}$ an?

Bezüglich des Eingangstores verhält sich $\mathcal{F}$ also wie ein resistives Eintor, dessen Kennlinie $\mathcal{F}_{in}(\mathcal{L})$ *Eingangskennlinie von $\mathcal{F}$ bei Beschaltung mit $\mathcal{L}$* genannt wird.

b) Charakterisieren Sie $\mathcal{F}_{in}(\mathcal{L})$ durch eine Formel.

c) Interpretieren Sie den Übergang von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{F}_{in}(\mathcal{L})$ als Abbildung.

d) Interpretieren Sie die Verschaltung von $\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{L}$ als Zweipolschaltung.

e) Erläutern Sie, warum die hier untersuchte Zweitorbeschreibung "Kettendarstellung" heißt.

f) Wie kann man diese Ergebnisse zum gezielten Entwurf nichtlinearer Kennlinien einsetzen?

Nun soll das Kleinsignalverhalten der Schaltung um den Arbeitspunkt analysiert werden.
Behandeln Sie "$(-i_2)$" bei den folgenden Berechnungen immer als ein einziges Variablensymbol.

g) Stellen Sie u_1, i_1 , u_2 und $-i_2$ in der Form $a(t) = A + \Delta a(t)$ dar.
Welche Beziehung besteht zwischen den Arbeitspunktgrößen U_1, I_1 , U_2 und $-I_2$?

h) Leiten Sie über das totale Differential der Beschreibungsgleichungen eine Näherungsbeziehung zwischen den Kleinsignalgrößen ab, und stellen Sie diese unter Verwendung der *Kleinsignal-Kettenmatrix* $\boldsymbol{A}|_{AP}$ im Arbeitspunkt AP dar.

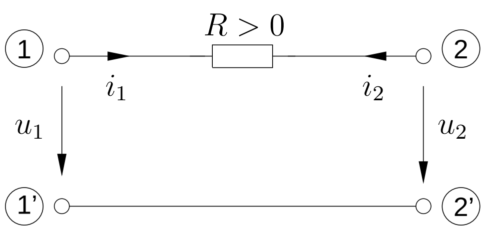
Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich im streng linearen Fall:

i) Welche weitergehende Bedeutung hat die Kettenmatrix bei streng linearen Zweitoren?

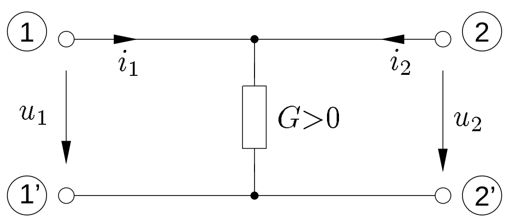
j) Ein streng lineares Zweitor $\mathcal{F}$ wird ausgangsseitig mit einem ohmschen Widerstand R beschaltet. Bestimmen Sie die Eingangskennlinie $\mathcal{F}_{in}(R)$. Gibt es besonders einfache Sonderfälle?

Aufgabe 4.9 Kennlinientransformation durch einfache lineare Zweitore

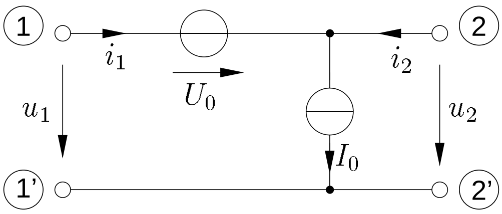
Gegeben sind drei lineare Zweitore $\mathcal{F}_I$, $\mathcal{F}_{II}$ und $\mathcal{F}_{III}$. Bearbeiten Sie jeweils a) bis d).



I)



II)



III)

a) Bestimmen Sie die Kettendarstellung von $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ wird ausgangsseitig mit einer zweipoligen Last $\mathcal{L}$ beschaltet.

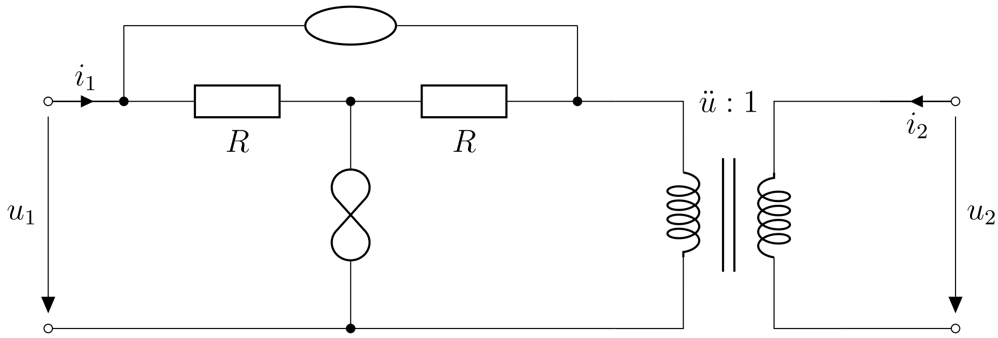
b) Interpretieren Sie die Funktion von $\mathcal{F}$ in dieser Beschaltung als Abbildung $\mathcal{F}_{in}$ von der Lastkennlinie $\mathcal{L}$ auf die Eingangskennlinie $\mathcal{F}_{in}(\mathcal{L})$. Beschreiben Sie diese Abbildung.

c) Skizzieren Sie das Bild des I. und III. Quadranten der Lastbetriebsebene unter $\mathcal{F}_{in}$.
Welche Bedeutung hat dieses Bild für die Beschaltung von $\mathcal{F}$ mit einer passiven Last $\mathcal{L}$?

d) Deuten Sie die Beschaltung von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{L}$ als Zweipolschaltung.

Aufgabe 4.10 Zweitor mit Nullor

Gegeben sei das folgende Zweitor bestehend aus einem NIK und einem Übertrager:



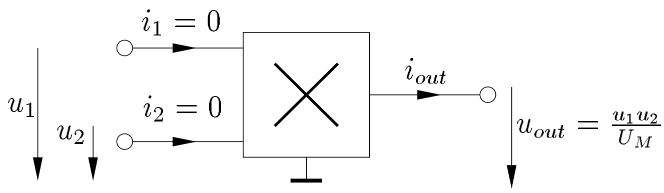
a) Welche Zweitorzusammenschaltung liegt vor?

b) Bestimmen Sie die Kettenmatix $\boldsymbol{A}$ des Zweitors. Um welches Zweitor handelt es sich?

c) Ist das Zweitor reziprok?

Aufgabe 4.11 Spannungsmultiplizierer

Das folgende Dreitor ist ein Spannungsmultiplizierer:



Seine Beschreibungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} u_{out} &= \frac{u_1 u_2}{U_M}, \\ i_1 &= 0, \\ i_2 &= 0, \end{aligned}$$

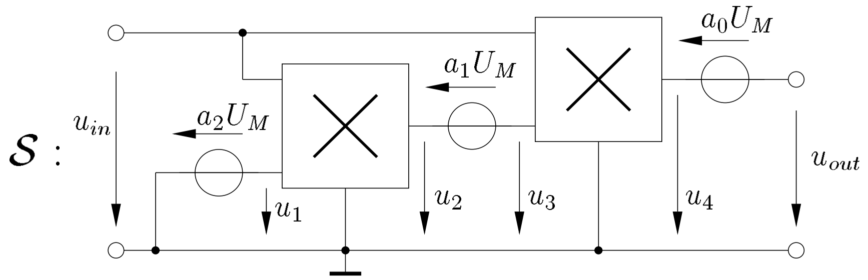
wobei $U_M > 0$ die sogenannte *Multipliziererkonstante* ist.

a) Welche Torgrößen steuern den Spannungsmultiplizierer?

b) Ist der Spannungsmultiplizierer quellenfrei?

c) Ist der Spannungsmultiplizierer passiv oder aktiv?

Nun soll die folgende Schaltung $\mathcal{S}$ untersucht werden, wobei a_0, a_1 und a_2 reelle Konstanten sind:



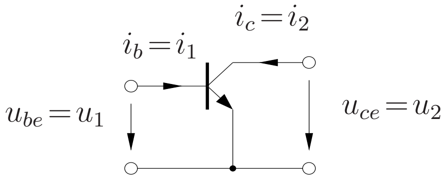
d) Berechnen Sie die Zwischenspannungen u_1 bis u_4 und die Ausgangsspannung u_{out}. Drücken Sie jedes Ergebnis nur mit Hilfe der Eingangsspannung u_{in} sowie der konstanten Parameter aus.

e) Wofür könnte man diese Schaltung $\mathcal{S}$ verwenden?

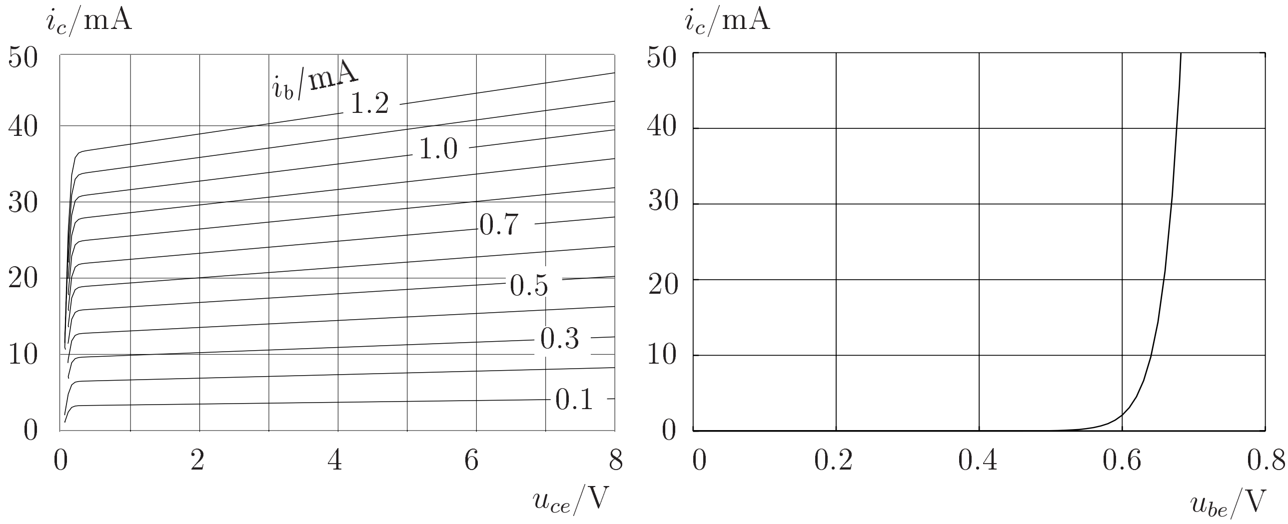
Übung 5: Transistoren

Aufgabe 5.1 Ersatzschaltbilder für Bipolartransistoren

Gegeben sei ein npn-Transistor, der in Emitterschaltung als resistives Zweitor aufgefasst werden soll:



Sein Klemmenverhalten wird durch das folgende Kennlinienfeld beschrieben:



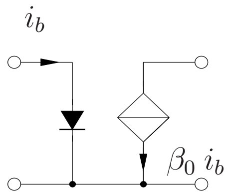
Es sollen einfache Ersatzschaltbilder für diesen Transistor entwickelt werden.

a) Welche Form hat die hybride Beschreibung des Transistorverhaltens? Wie kann man Werte dieser Funktion an dem gegebenen Kennlinienfeld ablesen?

b) Bestimmen Sie alle Transistor-Betriebsgrößen in dem durch $(I_b, U_{ce}) = (0,5\mathrm{mA}, 4,0\mathrm{V})$ festgelegten Arbeitspunkt AP

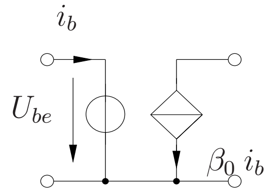
c) In welchem Bereich $\mathcal{A}$ des Kennlinienfeldes ist die folgende Ersatzschaltung ESB 1 verwendbar? Bestimmen Sie β_0 für den Arbeitspunkt AP.

ESB1:



d) Wie muss man allgemein bei der Verwendung eines Ersatzschaltbildes vorgehen, das nur in einem Teil des Kennlinienfeldes des modellierten Bauelements zutrifft?

e) Es gibt auch eine lineare, nicht quellenfreie Ersatzschaltung des Transistors:

ESB2: 

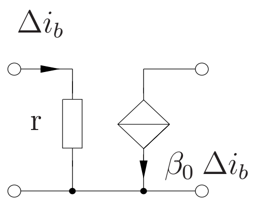
Durch welche weitere Vereinfachung erhält man sie aus ESB 1? Wann ist sie anwendbar?
Bestimmen Sie U_{be} für den Arbeitspunkt AP des gegebenen Transistors.

Die streng linearen Kleinsignal-Ersatzschaltungen werden aus der hybriden Beschreibung abgeleitet:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{be} \\ \Delta i_c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r & \mu \\ \beta & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_b \\ \Delta u_{ce} \end{bmatrix}$$

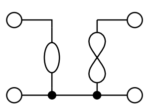
f) Wie sind r, μ, β und g definiert, und wie bestimmt man sie anhand des Kennlinienfeldes?
Verwenden Sie zur Berechnung die Kettenregel der Differentiation und als Zwischengröße den *Kleinsignal-Transferwiderstand* $r_T = \dfrac{\mathrm{d}u_{be}}{\mathrm{d}i_c}$.

g) Bestimmen Sie den Bereich $\mathcal{A}$ des Kennlinienfeldes, in dem $\dfrac{\partial i_c}{\partial u_{ce}} \approx 0$ gilt.
Zeigen Sie, dass das Kleinsignalverhalten des Transistors bei Lage des Arbeitspunktes in $\mathcal{A}$ durch die folgende Ersatzschaltung gut approximiert wird:

ESB3: 

Bestimmen Sie die Kleinsignal-Hybridmatrix des gegebenen Transistors in AP.

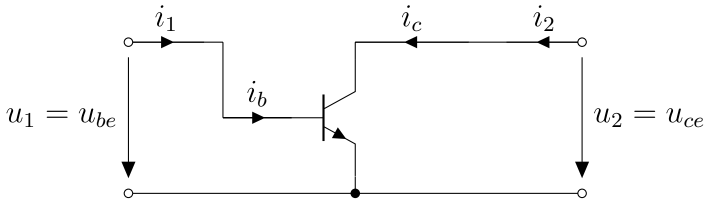
h) Zeigen Sie, dass der Grenzübergang $\beta \to \infty$ auf einen Dreipolnullor führt:

ESB4: 

i) Vergleichen Sie abschließend die Anwendungsgebiete der vier hergeleiteten Ersatzschaltbilder.

Aufgabe 5.2 Bipolartransistor

Ein npn-Transistor in Emitterschaltung soll hier wie ein Zweitor diskutiert werden:



Das Klemmenverhalten wird im Vorwärtsbetrieb durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$i_b = I_s \cdot (e^{\frac{u_{be}}{U_\mathrm{T}}} - 1)$$
$$i_c = \beta_0 \cdot i_b$$

a) Wie lauten die Bedingungen für den Vorwärtsbetrieb des Bipolartransistors?

b) Geben Sie die hybride Beschreibung des Zweitores an.

Eine Kleinsignal-Ersatzschaltung soll aus einer hybriden Beschreibung abgeleitet werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{be} \\ \Delta i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \mu \\ \beta & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta i_b \\ \Delta u_{ce} \end{bmatrix}.$$

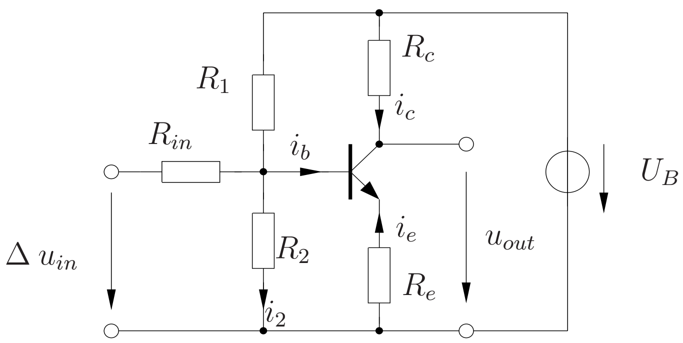
c) Bestimmen Sie r, μ, β und g im Arbeitspunkt $(I_{b,AP}, U_{ce,AP})$.

d) Zeichnen Sie nun das Kleinsignal-Ersatzschaltbild des Transistors im Arbeitspunkt.

e) Zeigen Sie, dass für das Kleinsignal-Ersatzschaltbild der Grenzübergang $\beta_0 \to \infty$ auf einen Dreipolnullor führt.

Aufgabe 5.3 Emitterschaltung

In vielen praktischen Verstärkerschaltungen bestehen die eigentlichen Verstärkungsstufen aus Emitterschaltungen mit Bipolartransistoren.



Im folgenden ist die Schaltung so zu dimensionieren, dass sie im Aussteuerbereich $\Delta u_{in} \in [-1\mathrm{V}, +1\mathrm{V}]$ die konstante Kleinsignalverstärkung $v = \dfrac{\Delta u_{out}}{\Delta u_{in}} = -12$ liefert. Eine Batterie stellt die Versorgungsgleichspannung $U_B = 25\mathrm{V}$ zur Verfügung. Der Transistor ist durch eine konstante Stromverstärkung $\beta = 100$ und den maximalen Kollektorstrom $I_{c,max} = 100\mathrm{mA}$ gekennzeichnet. Bei der Festlegung eines geeigneten Arbeitspunktes ist darauf zu achten, dass folgende Bedingungen im gesamten Aussteuerbereich von Δu_{in} erfüllt sind: $0 < i_c < I_{c,max}$ und $u_{ce} > 0$.

a) Stellen Sie die Maschengleichung des Ausgangskreises, die i_c und u_{ce} in Abhängigkeit von den Bauelementewerten und der Stromverstärkung β darstellt, auf.

b) Wie hoch darf die Kollektor-Emitter-Spannung u_{ce} maximal werden, damit der für i_c erlaubte Bereich nicht verlassen wird? Geben Sie $U_{ce,max}$ und die daraus resultierende maximale Ausgangsspannung $U_{out,max}$ an.

c) Wie hoch darf der Kollektorstrom i_c maximal werden, damit der für u_{ce} erlaubte Bereich nicht verlassen wird? Geben Sie eine Gleichung an, die den maximal erlaubten Kollektorstrom $I_{c,max}$ und die daraus resultierende minimale Ausgangsspannung $U_{out,min}$ in Abhängigkeit von den Bauelementewerten und der Stromverstärkung β darstellt.

d) Legen Sie die Ausgangsspannung $U_{out,AP}$ im Arbeitspunkt in die Mitte des in b) und c) ermittelten erlaubten Bereiches von u_{out} so dass der Aussteuerbereich von Δu_{in} vollständig auf den von $\Delta u_{out} = u_{out} - U_{out,AP}$ abgebildet wird. Geben Sie dann $U_{out,AP}$, $U_{out,max}$ und $U_{out,min}$ zahlenmäßig an.

e) Skizzieren Sie die so erzielte Abhängigkeit zwischen den Kleinsignalgrößen Δu_{in} und Δu_{out}.

f) Bestimmen Sie R_c und R_e.

g) Geben Sie den Kollektorstrom, den Basisstrom und die Kollektor-Emitterspannung im Arbeitspunkt an.

h) Berechnen Sie die Steilheit $g_m = \dfrac{\partial i_c}{\partial u_{be}}$ bei Raumtemperatur ($U_T \approx$26mV) im Arbeitspunkt.

i) Aus dem Datenblatt des verwendeten Transistors entnehmen Sie folgenden Messpunkt:

$$(i_{b,M} = 1\text{mA}, \;\; u_{be,M} = 0,72\text{V})$$

Berechnen Sie daraus die Basis-Emitter-Spannung $U_{be,AP}$ im Arbeitspunkt.

j) Bestimmen Sie die Widerstände R_1 und R_2 so, dass sich im Arbeitspunkt der gewünschte Basisstrom einstellt, der ein Zehntel des über R_2 fließenden Stroms i_2 betragen soll. Betrachten Sie dabei den Widerstand R_{in} als Leerlauf.

k) Zeichnen Sie nun das Kleinsignalersatzschaltbild der Emitterstufe, wobei der Transistor durch das ESB 3 zu ersetzen ist.

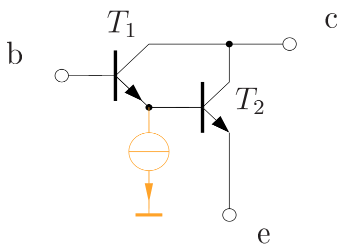
l) Geben Sie für $\Delta u_{in} = -0,4$V näherungsweise die Ausgangsspannung u_{out} an.

m) Berechnen Sie aus dem Kleinsignalersatzschaltbild den Wert von u_{ce} für $\Delta u_{in} = -0,4$V.

Aufgabe 5.4 Verbundtransistoren

In praktischen Schaltungen setzt man oft Verschaltungen mehrerer Einzeltransistoren ein, sogenannte Verbundtransistoren, die sich insgesamt wie ein Transistor mit einigen besonders guten Eigenschaften verhalten. Die aus zwei Transistoren zusammengesetzten *Darlington-Schaltungen* beispielsweise besitzen eine besonders hohe Stromverstärkung.

Die folgende Schaltung aus zwei Transistoren heißt *Darlington-Paar*.

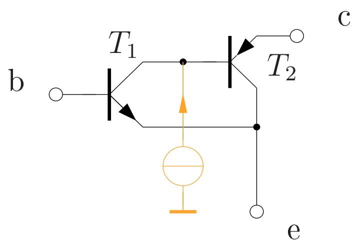


a) Zeichnen Sie das Kleinsignal-Ersatzschaltbild der Schaltung unter Verwendung des Kleinsignal-Transistormodells ESB 3. Ignorieren Sie dabei die grau gezeichnete Stromquelle.

b) Ermitteln Sie die Hybridmatrix der Gesamtschaltung.

c) Vergleichen Sie die gesamte Stromverstärkung mit der der Einzeltransistoren.

Die insbesondere in Leistungsverstärkern häufig eingesetzte *Komplementär-Darlington-Schaltung* entsteht durch die folgende Verschaltung zweier bipolarer Transistoren verschiedenen Typs:



Da der Emitter des Ausgangstransistors T_2 als Kollektor c der sich wie ein npn-Transistor verhaltenden Gesamtschaltung wirkt, nennt man diese Schaltung häufig auch *Paradox-Paar*.

d) Zeichnen Sie das Kleinsignal-Ersatzschaltbild der Schaltung unter Verwendung von ESB 3.

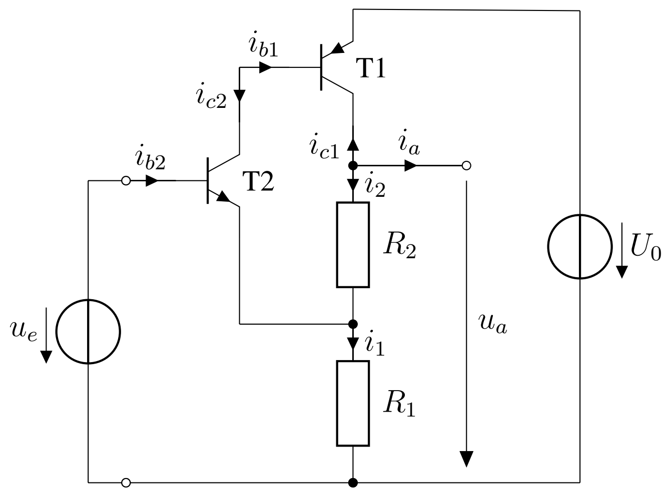
e) Ermitteln Sie die Hybridmatrix der Gesamtschaltung.

f) Vergleichen Sie mit dem Darlington-Paar.

Die in praktischen Schaltungen noch enthaltenen Stromquellen verschieben den Arbeitspunkt von T_1 durch Erhöhung seines Kollektorstroms in einen Bereich mit höherer Stromverstärkung, was eine entsprechende Verbesserung der Stromverstärkung des Verbundtransistors bedeutet.

Aufgabe 5.5 Verstärkerschaltung

Gegeben sei folgende Schaltung mit einem pnp- und einem npn-Transistor:



Die Eingangsspannung u_e ist dabei $u_e = U_e + \Delta u_e$. Die beiden Transistoren befinden sich im Vorwärtsbetrieb und es gelte jeweils $i_c = \beta \cdot i_b$.

a) Zeigen Sie, dass $i_1 = i_2 \cdot (1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2})$ gilt.

Im Arbeitspunkt gelte: $U_0 = 15V$, $U_e = 3,1V$, $\Delta u_e = 0V$, $|U_{be,1/2}| = 0,6V$. Die Widerstandswerte seien $R_1 = 1\text{k}\Omega$ und $R_2 = 2\text{k}\Omega$. Die Stromverstärkung sei $\beta = 100$.

b) Bestimmen Sie U_a im Arbeitspunkt mit der Näherung $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{100} \ll 1$.

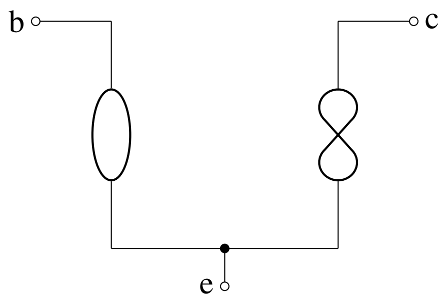
c) Befinden sich die Transistoren am Arbeitspunkt wirklich im Vorwärtsbetrieb?

Nun folgt eine Kleinsignalanalyse. Für beide Transistoren soll zuerst das Ersatzschaltbild aus Teilaufgabe d) in Aufgabe 1 verwendet werden.

d) Zeichnen Sie das Kleinsignal-Ersatzschaltbild der gesamten Schaltung.

e) Geben Sie die Kleinsignal-Spannungsverstärkung $v = \frac{\Delta u_a}{\Delta u_e}$ allgemein an.

Nun soll für beide Transistoren der Dreipolnullor als KS-ESB verwendet werden.



f) Bestimmen Sie für diese Modellierung die Kleinsignal-Spannungsverstärkung $v = \frac{\Delta u_a}{\Delta u_e}$.

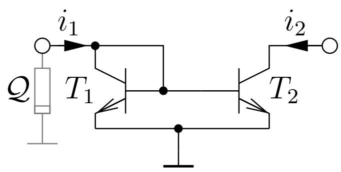
Aufgabe 5.6 Stromspiegel

Das durch $u_1 = 0$ und $i_1 = i_2$ beschriebene resistive Zweitor heißt *idealer Stromspiegel*.

a) Wie stellt man einen idealen Stromspiegel in einer Schaltung dar?

b) Erläutern Sie die Bezeichnung "Stromspiegel".

In der Praxis wird die folgende Transistorschaltung als *Stromspiegel* bezeichnet:



T_1 und T_2 seien in guter Näherung identisch.

c) Wie realistisch ist diese Voraussetzung? Wie kann man sie herstellungstechnisch erfüllen?

d) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild unter Verwendung des Transistormodells ESB 1.

e) Berechnen Sie i_2 abhängig von i_1. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Der Stromspiegel soll nun als Stromquelle in einer Transistorschaltung verwendet werden. Er wird dazu eingangsseitig (wie oben grau angedeutet) mit einem linearen Quellenzweipol $\mathcal{Q}$ beschaltet, der die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i besitzt.

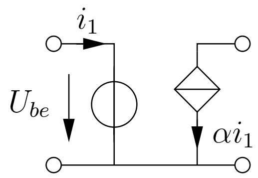
f) Geben Sie eine Beziehung zwischen i_1, U_0 und R_i an. Wie wählt man U_0 in der Praxis?

g) Gegeben seien $U_0 = 5$V, $\beta_0 = 100$, $I_S = 10$pA und $U_T = 25\text{mV}$.
Dimensionieren Sie R_i für einen Ausgangsstrom von $i_2 = 5\text{mA}$.

h) Vergleichen Sie die Schaltung mit den Stromquellen aus Aufgabe 5.3.

Bei der Analyse komplexer Transistorschaltungen ist es meist sinnvoll, Schaltungsteile mit bekannter Funktion (wie den hier gezeigten Stromspiegel) durch einfache Ersatzschaltungen zu ersetzen.

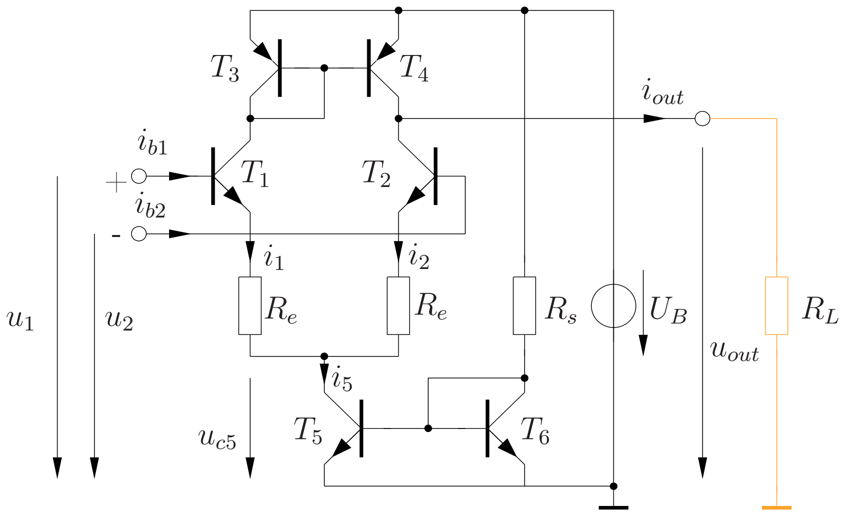
i) Zeigen Sie, dass die folgende Schaltung eine gute Näherung für den Stromspiegel darstellt:



Bestimmen Sie U_{be} und α. In welchem Betriebsbereich ist diese Ersatzschaltung anwendbar?

Aufgabe 5.7 Differenzverstärker

Gegeben sei ein einstufiger *Differenzverstärker*:



Die in gleicher Höhe gezeichneten Transistoren seien jeweils paarweise als identisch vorausgesetzt. Alle Transistoren besitzen eine hohe Stromverstärkung.

a) Welche Funktion erfüllen T_3 und T_4? Wie hängt u_{out} von i_1 und i_2 ab?

b) Wozu dienen T_5 und T_6? Bestimmen Sie i_5.

c) Bestimmen Sie u_{out} unter der Voraussetzung, dass $u_1 = u_2$.

Nun soll das Kleinsignalverhalten der Schaltung untersucht werden.

d) Konstruieren Sie ein Kleinsignal-Ersatzschaltbild der gesamten Schaltung:

- Modellieren Sie T_1 und T_2 mit Hilfe von ESB 3.
- Ersetzen Sie Transistorblöcke, deren Funktion durch die vorhergehenden Aufgaben bekannt ist, durch entsprechende einfache Ersatzschaltungen, sogenannte *Funktionsblöcke*.
- Fügen Sie zusätzlich einen ohmschen Widerstand R_i ein, der den Kleinsignalleitwert der Kollektor-Emitter-Strecke von T_5 modelliert. R_i sei groß, aber nicht genau bekannt.

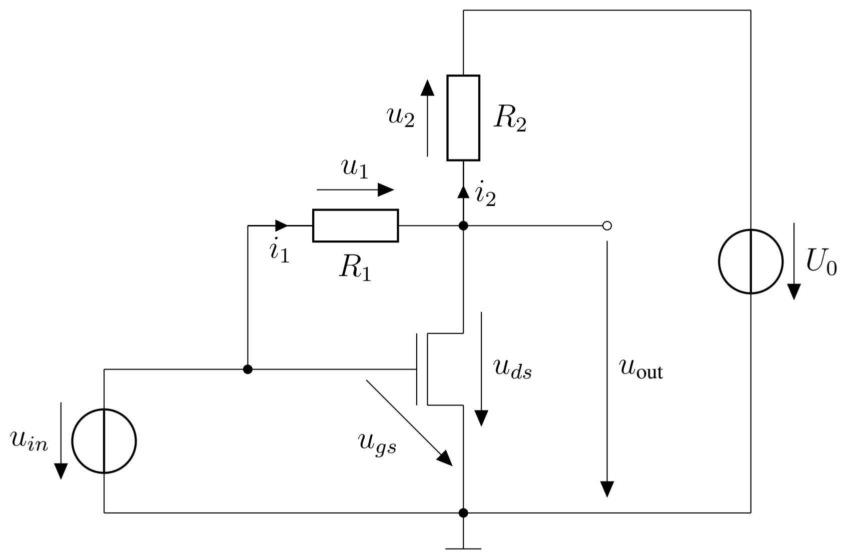
Verwenden Sie dabei als Zwischengrößen die Kleinsignal-Emitterpotentiale Δu_{e1} und Δu_{e2}.

e) Stellen Sie Δu_{out} zunächst abhängig von Δi_1 und Δi_2 dar, dann abhängig von Δu_1 und Δu_2. Interpretieren Sie das Ergebnis. Welche Näherung kann man durchführen?

f) Wie groß ist die Kleinsignal-Differenzverstärkung der Schaltung?

Aufgabe 5.8 Feldeffekttransistor

Gegeben sei folgende Schaltung:



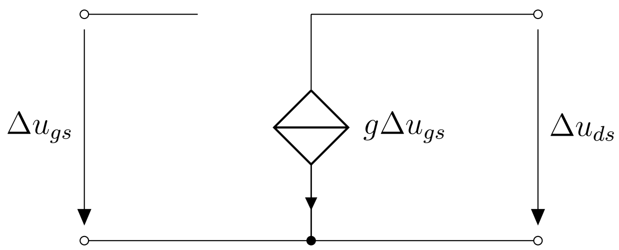
a) In welchem Betriebsbereich befindet sich der Transistor für $u_{in} \leq U_{th}$?

Im weiteren Verlauf soll eine Groß- und eine Kleinsignalanalyse durchgeführt werden. Dazu wird angenommen, dass sich die Spannungsquelle u_{in} am Eingang aus einer Konstantspannungsquelle U_{in} und einer Wechselspannungsquelle Δu_{in} zusammensetzt.

b) Beginnen Sie die Bestimmung des Arbeitspunktes, indem Sie ein Ersatzschaltbild zeichnen. Ersetzen Sie dabei den Transitor gemäß dem resistiven Shichman-Hodges Modell.

c) Es wird angenommen, dass sich der Transistor im linearen Bereich befindet. Schreiben Sie die möglichen Lösungen für die Ausgangsspannung U_{out} in Abhängigkeit von $U_{in}, U_0, U_{th}, R_1, R_2$ und β. Nutzen Sie hier als Vereinfachung $I_1 \ll I_d$.

Nun soll das Kleinsignalverhalten der Schaltung, für den Betrieb des Transistors im Sättigungsbereich, näher beleuchtet werden. Für den Transistor soll dabei das abgebildete Kleinsignalersatzschaltbild verwendet werden.



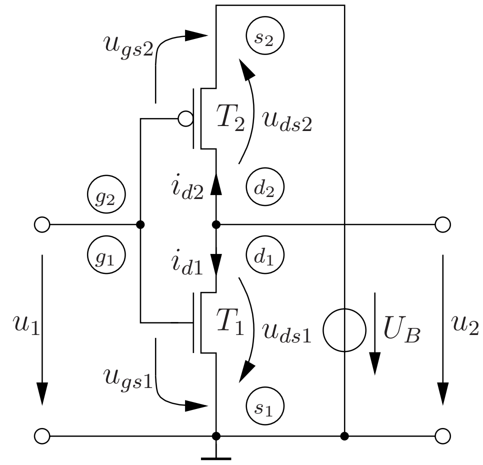
d) Zeichnen Sie ein Kleinsignalersatzschaltbild für die Gesamtschaltung.

e) Berechnen Sie den Verstärkungsfaktor $v = \frac{\Delta u_{out}}{\Delta u_{in}}$ in Abhängigkeit von g, R_1, R_2.

Aufgabe 5.9 CMOS-Inverter

a) Warum bezeichnet man Enhancement-FETs als "normally off" oder "selbstsperrend"?

Gegeben sei nun eine Inverterschaltung in CMOS-Technologie:



$U_{th1} = 1\text{V}$ $\quad$ $U_{th2} = -1\text{V}$
$\beta_1 = 2 \cdot 10^{-3}\text{AV}^{-2}$ $\quad$ $\beta_2 = 10^{-3}\text{AV}^{-2}$
$\lambda_1 = 0$ $\quad$ $\lambda_2 = 0$
$U_B = 5\text{V}$

b) Im Arbeitspunkt bei $u_1 = 2,5\text{V}$ befindet sich T_1 im linearen und T_2 im Sätttigungsbereich. Berechnen Sie die Drainströme i_{d1} und i_{d2}, die Drain-Source-Spannungen u_{ds1} und u_{ds2} und die Ausgangsspannung u_2.

c) Geben Sie sowohl für T_1 als auch für T_2 die $\boldsymbol{G}$-Matrix im Arbeitspunkt an. Dabei betrachte man bei beiden die jeweilige Gate-Source-Strecke als Tor 1 und die Drain-Source-Strecke als Tor 2.

d) Geben Sie für beide FETs geeignete Kleinsignalersatzschaltbilder an.

e) Bilden Sie das Kleinsignalersatzschaltbild des gesamten Inverters und berechnen Sie die Kleinsignalverstärkung $v = \dfrac{\Delta u_2}{\Delta u_1}$ bei ausgangsseitigem Leerlauf.

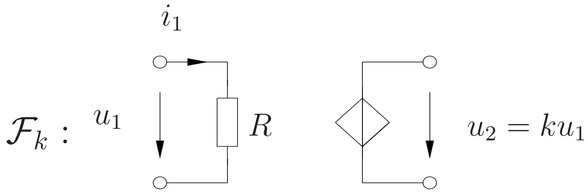
f) Berechnen Sie näherungsweise die Leerlaufausgangsspannung u_2 für $u_1 = 2,6\text{V}$ und für $u_1 = 3\text{V}$.

Übung 6: Operationsverstärker

Aufgabe 6.1 Idealisiertes Verstärkermodell

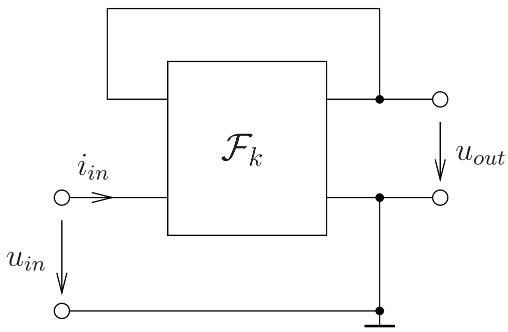
Die durch das folgende Ersatzschaltbild definierte Familie $\mathcal{F}_k$ streng linearer Zweitore stellt Modelle des linearen Bereichs von Operationsverstärkern mit unterschiedlicher Verstärkung k dar:

$$\mathcal{F}_k : \begin{array}{l} u_1 = Ri_1 \\ u_2 = ku_1 \end{array}$$



Es soll untersucht werden, ob die Verwendung eines *idealisierten Modells* zur Bearbeitung praktischer Probleme zulässig ist.

a) Bestimmen Sie allgemein die Ausgangsspannung u_{out} und den Eingangsstrom i_{in} der folgenden Schaltung abhängig von der Eingangsspannung u_{in}:

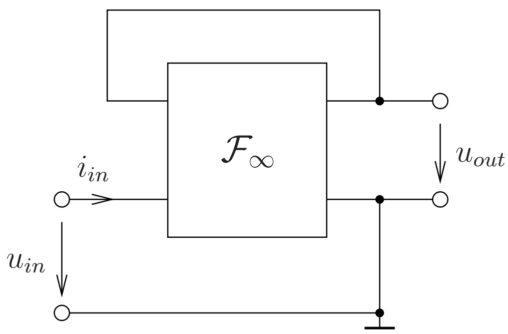


Führen Sie im Ergebnis den Grenzübergang $k \to \infty$ durch.

b) Charakterisieren Sie das Zweitor $\mathcal{F}_\infty$, das durch den folgenden Grenzübergang definiert ist:

$$\mathcal{F}_\infty := \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_k$$

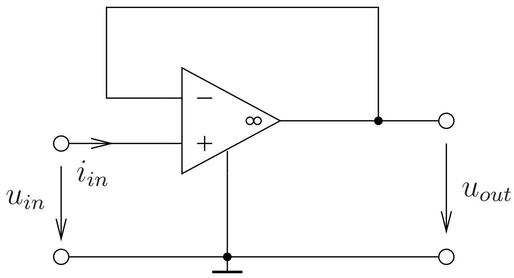
Bestimmen Sie nun in der folgenden *idealisierten Schaltung* u_{out} und i_{in} abhängig von u_{in}:



c) Diskutieren Sie vergleichend die Rechenwege von a) und b).

Aufgabe 6.2 Spannungsfolger

Die folgende Operationsverstärkerschaltung heißt *Spannungsfolger*:



Der ideale Op-Amp habe die Sättigungsspannung U_{sat}.

a) Bestimmen Sie die Spannungsübertragungskennlinie $u_{out}(u_{in})$ des Spannungsfolgers.

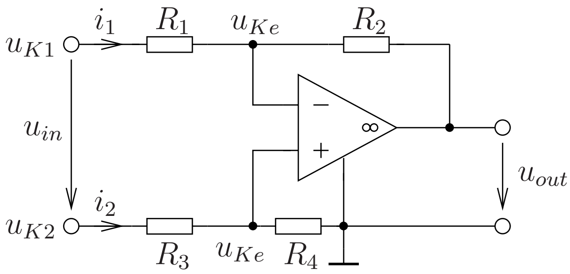
b) Die Schaltung wird in praktischen Anwendungen meist im linearen Bereich betrieben. Charakterisieren Sie ihre Funktion und geben Sie ein einfaches Modell an.

Der Spannungsfolger kann nur bei der oben abgebildeten Polung der Eingänge verwendet werden:

c) Bestimmen Sie die Spannungsübertragungskennlinie $u_{out}(u_{in})$ des Spannungsfolgers bei umgekehrter Polung der Eingänge. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 6.3 Differenzverstärker

Gegeben sei ein ausschließlich im linearen Bereich des Op-Amps betriebener Summierer:



Man nennt die Schaltung Potentialdifferenzverstärker, wenn die Ausgangsspannung u_{out} nur von der Differenz $u_{in} := u_{K1} - u_{K2}$ der beiden Eingangspotentiale abhängt: $u_{out} = v_d u_{in}$.

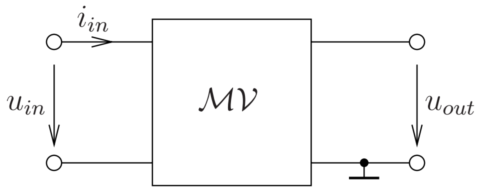
a) Berechnen Sie u_{out}. Bezeichnen Sie dabei das Potential der Op-Amp-Eingänge mit u_{Ke}.

b) Wann verhält sich die Schaltung als Potentialdifferenzverstärker?
Wie groß ist dann die *Differenzverstärkung* v_d?

c) Wieviele und welche Freiheitsgrade hat man bei der Dimensionierung der Schaltung?

Aufgabe 6.4 Messverstärker

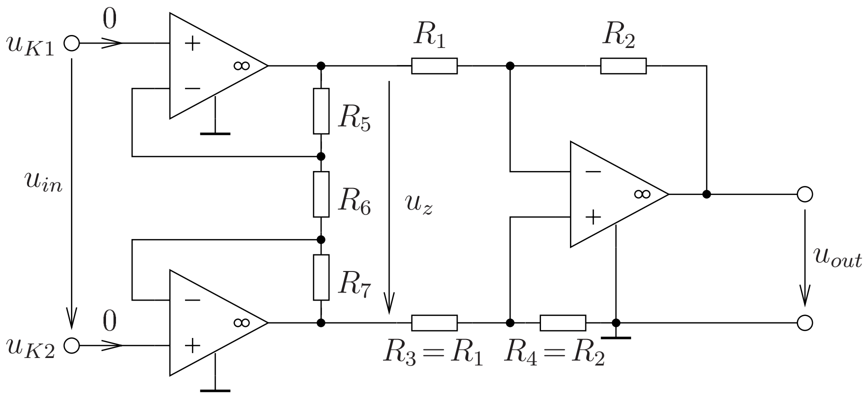
Ein in der Messtechnik sehr nützliches Zweitor ist ein *Messverstärker mit potentialfreiem Eingang*:



Seine Beschreibungsgleichungen lauten:

$$u_{out} = v_d u_{in},$$
$$i_{in} = 0.$$

$\mathcal{MV}$ kann durch die folgende Schaltung realisiert werden:



Alle Op-Amps werden im linearen Bereich betrieben.

a) Zerlegen Sie den Verstärker in eine Kettenschaltung mit u_z als Zwischengröße.

b) Berechnen Sie seine Differenzverstärkung v_d.

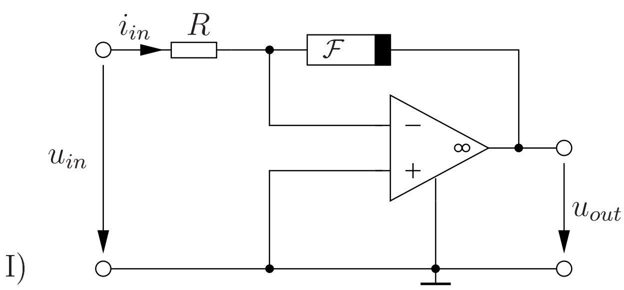
Aufgabe 6.5 Nichtlineare Spannungsübertragung

Ein sowohl strom- als auch spannungsgesteuerter nichtlinearer Widerstand $\mathcal{F}$ werde beschrieben durch seine Widerstands- oder Leitwertsdarstellung bezüglich der üblichen Zählpfeilrichtungen:

$$u_F = r_F(i_f) \Leftrightarrow i_F = g_F(u_f)$$

a) In welcher Beziehung stehen die Funktionen r_F und g_F?

Gegeben sei nun die folgende Schaltung I, deren Op-Amp im linearen Bereich betrieben wird:



b) Berechnen Sie u_{out} abhängig von u_{in}. Wozu dient die Schaltung?

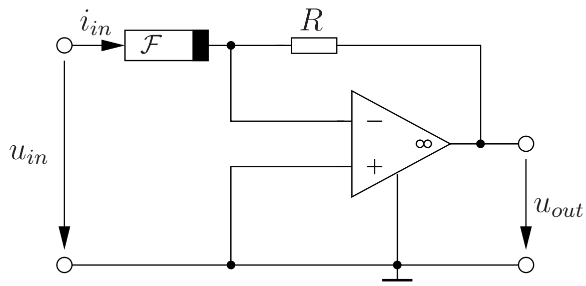
c) Untersuchen Sie das Eingangs- und Ausgangsverhalten der Schaltung.
Was kann man verbessern? Entwerfen Sie ein Ersatzschaltbild für die Gesamtschaltung.

d) Wie kann man das Vorzeichen der Ausgangsspannung u_{out} umkehren?

e) Entwerfen Sie einen *Logarithmierverstärker*: Ein Zweitor, dessen Ausgangsspannung ungefähr proportional zum Logarithmus der Eingangsspannung ist.

Zum Vergleich sei eine modifizierte Schaltung II gegeben. Auch hier wird der Op-Amp im linearen Bereich betrieben.

II)

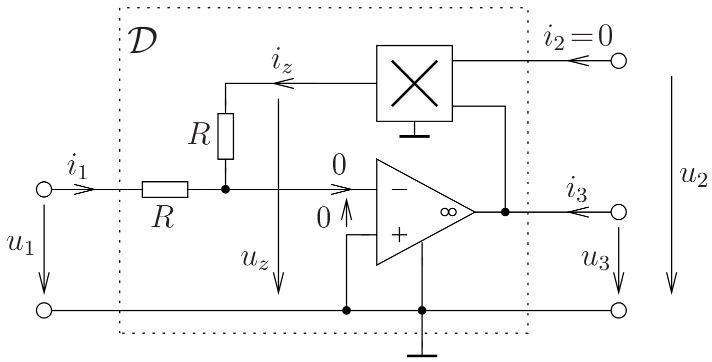


f) Berechnen Sie u_{out} abhängig von u_{in}. Wozu dient die Schaltung?

g) Vergleichen Sie mit Schaltung I.

Aufgabe 6.6 Dividierer

Gegeben sei das Dreitor $\mathcal{D}$, das mit Hilfe eines Op-Amps, eines (wie in Aufgabe 4.10 definierten) Spannungsmultiplizierers, sowie zweier ohmscher Widerstände aufgebaut wurde:



Der ideale Op-Amp wird im linearen Bereich seiner Übertragungskennlinie betrieben.

a) Berechnen Sie u_3 abhängig von u_1 und u_2.

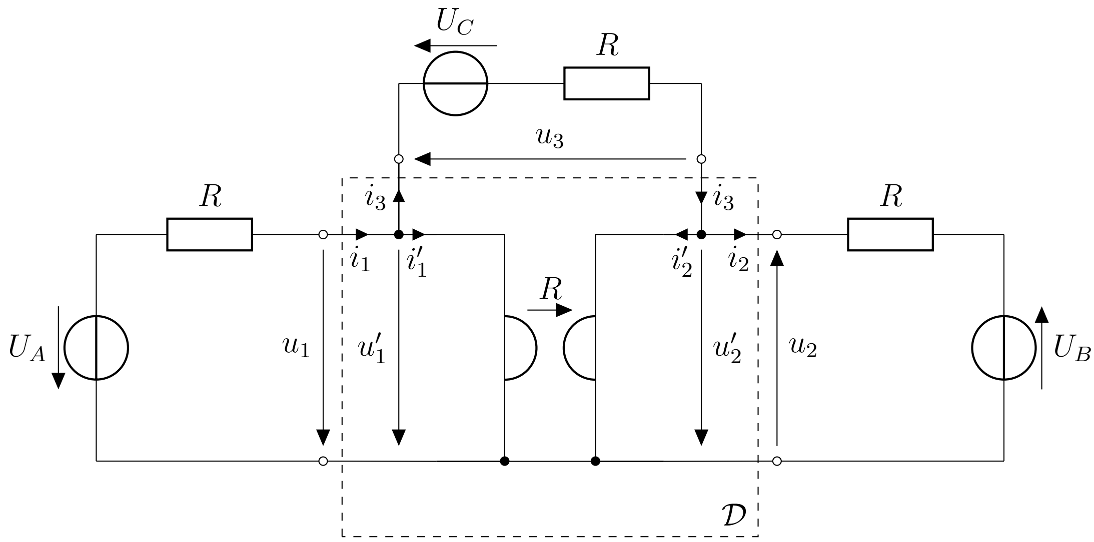
b) Geben Sie die Beschreibungsgleichungen des Dreitores $\mathcal{D}$ an und charakterisieren Sie verbal seine Funktion.

c) Bestimmen Sie den zulässigen Bereich für u_1 bei gegebenem $u_2 = const.$ Das heißt: Welchen Wertebereich hat u_1 bei Betrieb des Op-Amp im streng linearen Teil seiner Kennlinie?

Übung 7: Resistive Mehrtore

Aufgabe 7.1 Gyrator, Zirkulator

Gegeben sei die folgende Schaltung:

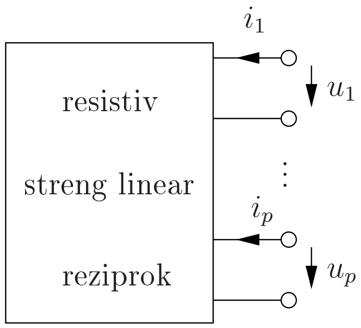


a) Bestimmen Sie die Widerstandsbeschreibung des Dreitors $\mathcal{D}$. Welche Eigenschaften besitzt es?

b) Bestimmen Sie die Spannungen, Strömen und Leistungen an den drei Toren. Was fällt dabei auf?

Aufgabe 7.2 Kettenbeschreibung linearer, reziproker Mehrtore

Die Kettenbeschreibung des folgenden p-Tors soll untersucht werden.



a) Welcher Bedingung muss p genügen, damit überhaupt eine Kettenmatrix $\boldsymbol{A}$ existieren kann, die das n-Tor vollständig beschreibt?

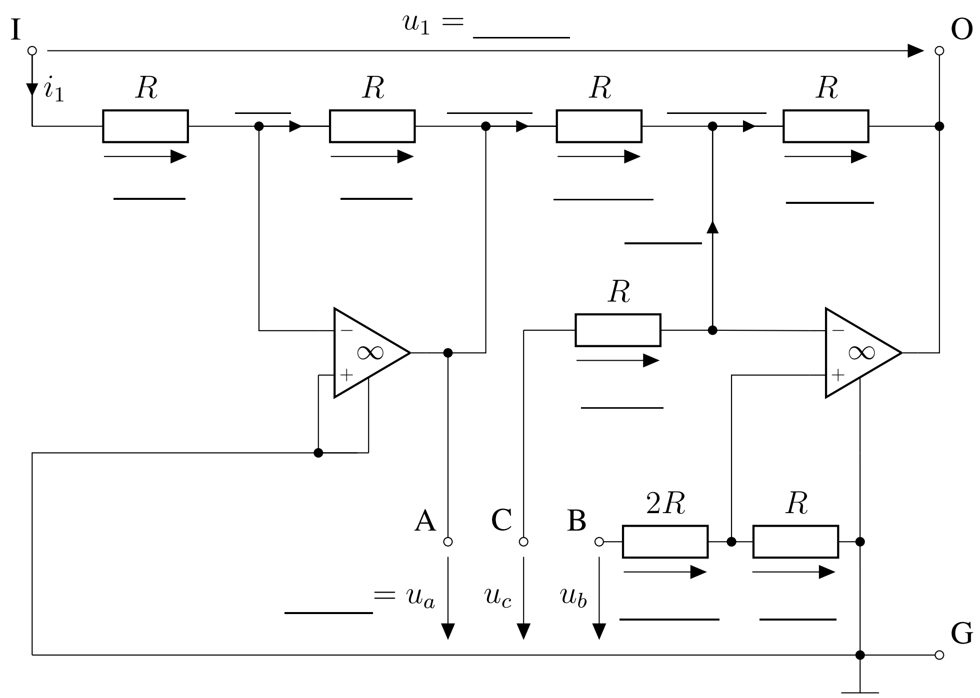
Wieviele (echt verschiedene) Kettenbeschreibungen können existieren?

b) Wie lautet die Reprozitätsbedingung an die Kettenmatrix des Mehrtors?

c) Leiten Sie aus dem Ergebnis von Teilaufgabe b) als Spezialfall die Reziprozitätsbedingung an $\boldsymbol{A}$ für Zweitore ab.

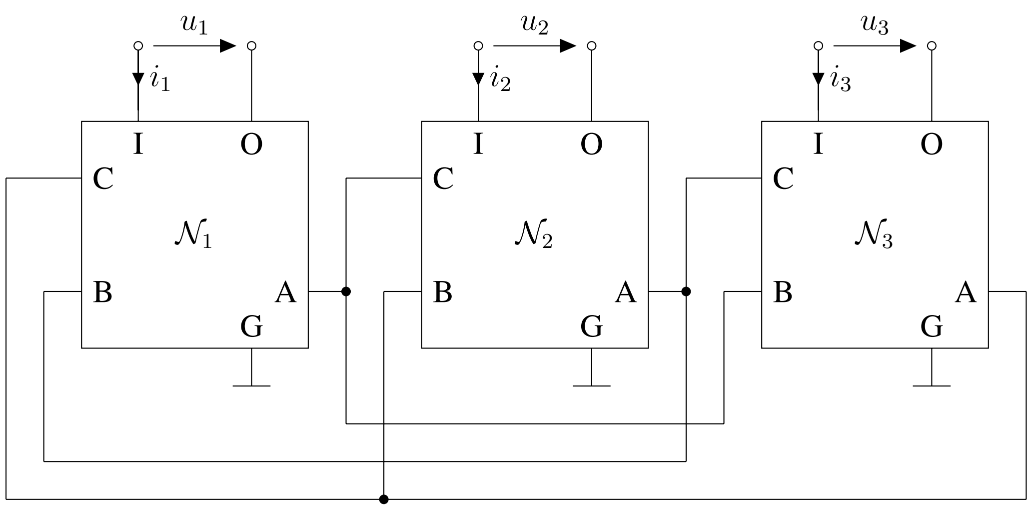
Aufgabe 7.3 Zirkulator

Gegeben sei der folgende 6-Pol $\mathcal{N}_1$. Es wird angenommen, dass die Operationsverstärker im linearen Bereich arbeiten.



a) Ermitteln Sie die fehlenden Ströme und Spannungen "by inspection" in Abhängigkeit von i_1, u_b, u_c und R.

Nun wird $\mathcal{N}_1$ mit baugleichen 6-Polen $\mathcal{N}_2$ und $\mathcal{N}_3$ wie folgt verschaltet:



b) Welche Zusammenhänge zwischen den Spannungen $u_{a,i}$, $u_{b,i}$, $u_{c,i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ ergeben sich durch die Verschaltung? Hierbei steht $u_{a,i}$ für die Spannung u_a am 6-Pol $\mathcal{N}_i$ etc.

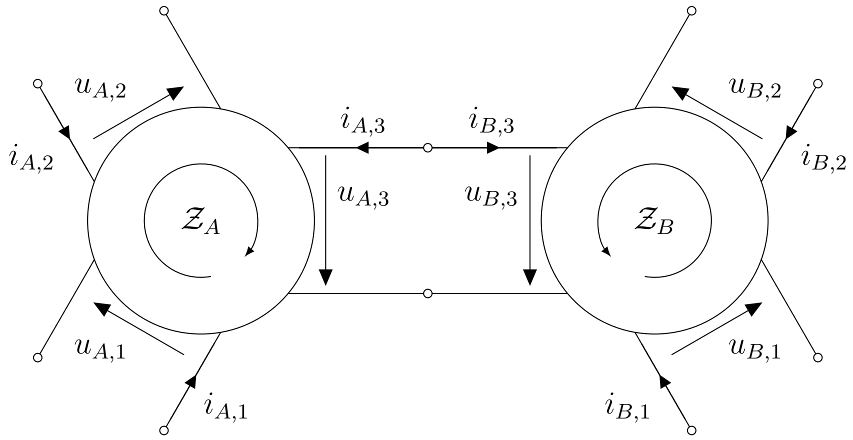
c) Geben Sie $u_{a,1}$, $u_{a,2}$ und $u_{a,3}$ in Abhängigkeit von i_1, i_2, i_3 und R an.

d) Geben Sie u_1, u_2 und u_3 in Abhängigkeit von $u_{a,1}$, $u_{a,2}$ und $u_{a,3}$ an.

e) Betrachten Sie die Verschaltung der drei 6-Pole als Dreitor und zeigen Sie, dass es sich um einen Zirkulator handelt. **Hinweis:** Berechnen Sie hierzu die Widerstandsmatrix des Dreitores.

Der Zirkulator $\mathcal{Z}_A$ wird nun wie folgt mit einem spannungsgesteuerten Zirkulator $\mathcal{Z}_B$ zu einem Viertor verschaltet. $\mathcal{Z}_B$ hat die Leitwertsmatrix

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}.$$



f) Welcher Zusammenhang gilt zwischen $u_{A,3}$ und $u_{B,3}$, welcher zwischen $i_{A,3}$ und $i_{B,3}$?

g) Geben Sie $u_{B,3}$ in Abhängigkeit von $i_{A,1}$, $i_{A,2}$ und R an.

h) Geben Sie $i_{A,3}$ in Abhängigkeit von $u_{B,1}$, $u_{B,2}$ und R an.

i) Bestimmen Sie $\boldsymbol{H}$, so dass

$$\begin{bmatrix} u_{A,1} \\ u_{A,2} \\ i_{B,1} \\ i_{B,2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} i_{A,1} \\ i_{A,2} \\ u_{B,1} \\ u_{B,2} \end{bmatrix}.$$

j) Geben Sie die Matrizen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{I}$ einer parametrischen Beschreibung des Viertores an.

k) Wie könnte man aus der parametrischen Beschreibung eine Widerstandsbeschreibung erhalten? Welche Voraussetzung muss dazu erfüllt sein?

Die linearen Quellen $\mathcal{Q}_A$ und $\mathcal{Q}_B$ haben den Innenwiderstand R und die Leerlaufspannung U_A bzw. U_B. Die Widerstandsbeschreibung des Viertores lautet

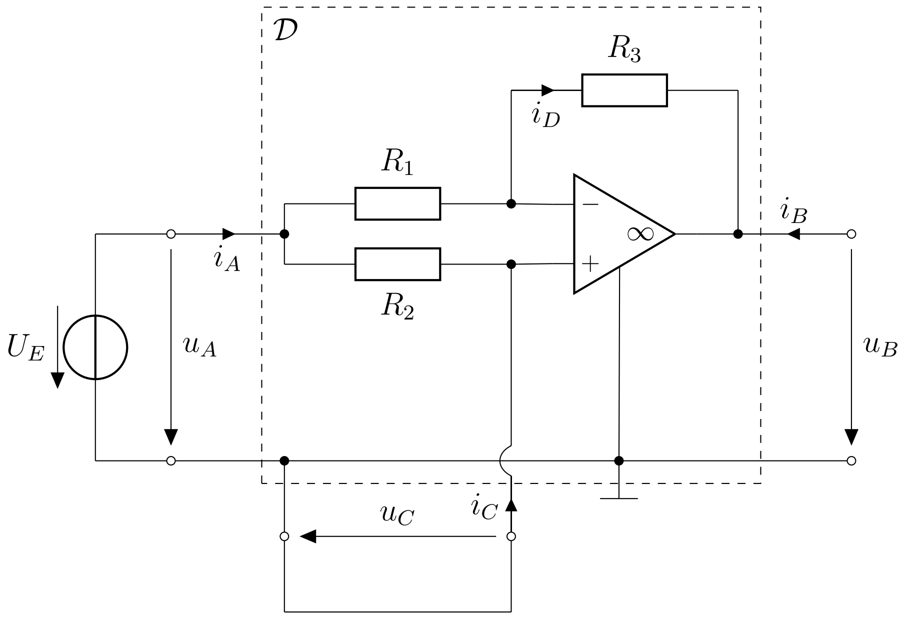
$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{A,1} \\ u_{A,2} \\ u_{B,1} \\ u_{B,2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & R & -R & -R \\ -R & 0 & R & R \\ R & -R & 0 & -R \\ R & -R & R & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{A,1} \\ i_{A,2} \\ i_{B,1} \\ i_{B,2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{i}}.$$

l) Ist das Viertor verlustlos? Begründen Sie Ihre Antwort!

m) Bestimmen Sie den Stromvektor $\boldsymbol{i}$ in Abhängigkeit von R, U_A und U_B. Welche Torströme hängen von U_A und welche von U_B ab? **Hinweis:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 7.4 Verschaltung von Mehrtore

Untersucht werden soll zunächst die abgebildete Beschaltung des Dreitors $\mathcal{D}$. Der Operationsverstärker wird dabei im streng linearen Bereich betrieben.



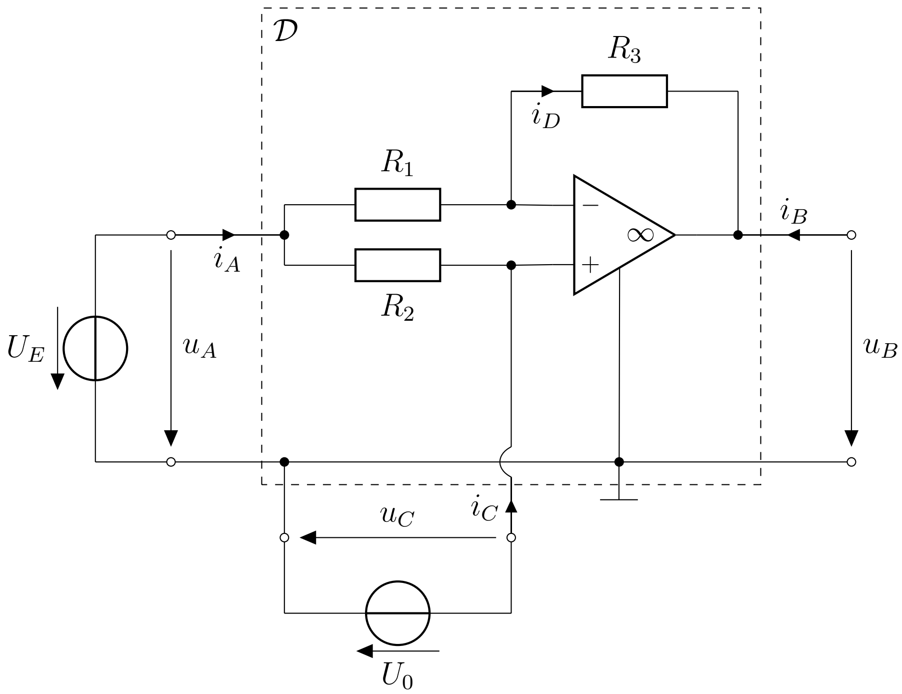
a) Bestimmen Sie die Ströme i_C, i_D und i_A in Abhängigkeit von U_E, R_1, R_2 und R_3.

b) Bestimmen Sie die Spannungen u_A, u_C, u_B in Abhängigkeit von U_E, R_1, R_2 und R_3.

Stellen Sie sich vor, dass U_E als Eingang und u_B als Ausgang der Schaltung definiert wird.

c) Welche Funktion erfüllt die Schaltung am Ausgang u_B wenn die Schaltung mit $R_1 = R_3$ dimensioniert wird?

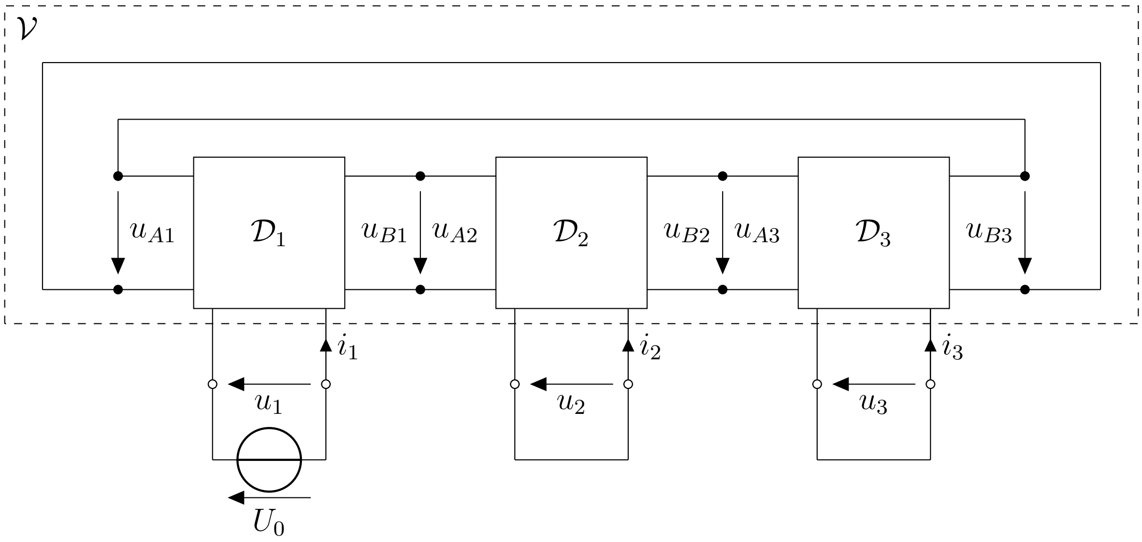
Nun soll eine ähnliche Beschaltung von $\mathcal{D}$ untersucht werden. Der Operationsverstärker wird weiterhin im streng linearen Bereich betrieben.



d) Bestimmen Sie die Ströme i_C, i_D und i_A in Abhängigkeit von U_E, U_0, R_1, R_2 und R_3.

e) Bestimmen Sie die Spannungen u_A, u_C, u_B abhängig von U_E, U_0, R_1, R_2 und R_3.

Drei Realisierungen des Dreitors $\mathcal{D}$ werden zu einem Gesamtdreitor $\mathcal{V}$ verschaltet. Die benutzten Widerstände werden dabei zu $R_1 = R_2 = R_3 = R$ gesetzt.



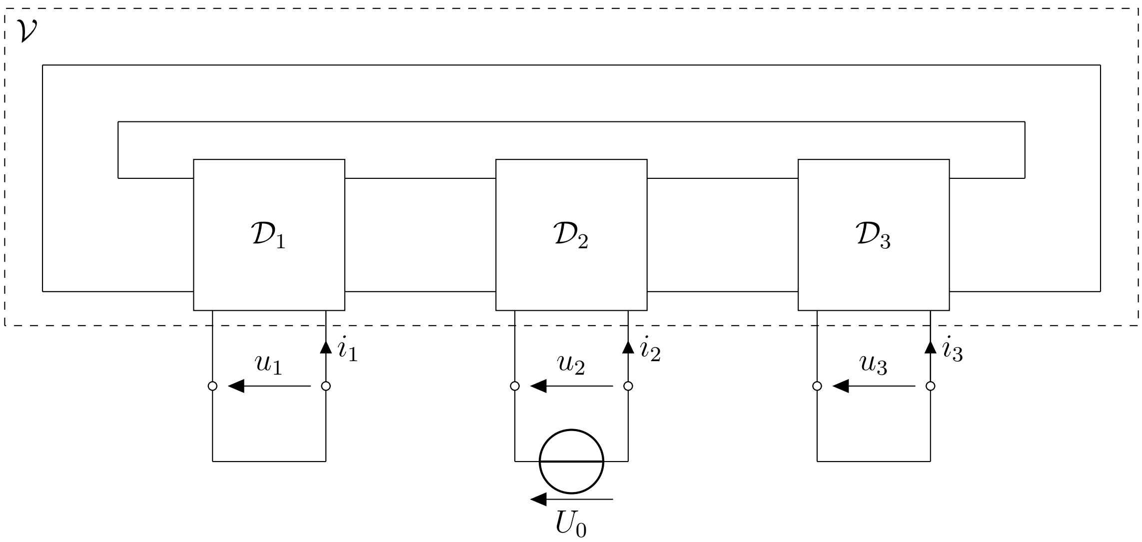
f) Setzen Sie u_{A1}, u_{A2} und u_{A3} zueinander in Verbindung. Benutzen Sie ausschließlich die Ergebnisse aus den Teilaufgaben b) und c).

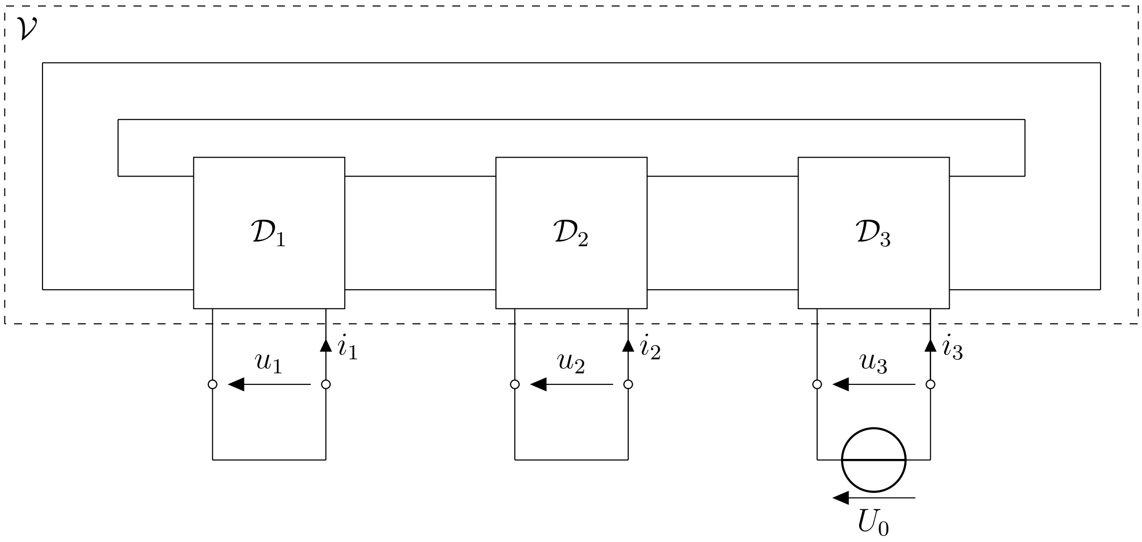
g) Setzen Sie u_{A1}, u_{A2} und U_0 zueinander in Verbindung. Benutzen Sie ausschließlich die Ergebnisse aus der Teilaufgabe e).

h) Wie groß sind u_{A1}, u_{A2} und u_{A3} in Abhängigkeit von U_0.

i) Bestimmen Sie die Größen u_1, i_1 an Tor 1, u_2, i_2 an Tor 2 und u_3, i_3 an Tor 3.

Zur Berechnung der Betriebsmatrix wird das Dreitor $\mathcal{V}$ für zwei weitere Messungen wie folgt beschaltet:





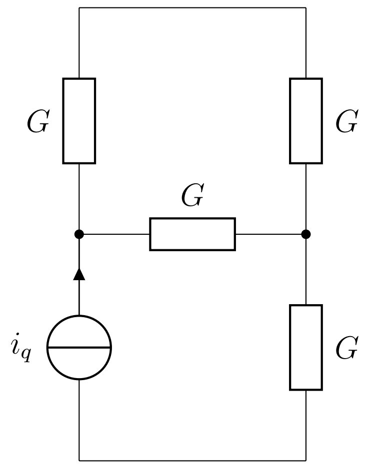
j) Geben Sie eine Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ des Dreitores $\mathcal{V}$ an. Benutzen Sie dazu die zirkuläre Symmetrie des Dreitors $\mathcal{V}$.

k) Berechnen Sie die Leitwertsmatrix $\boldsymbol{G}$.

Übung 8: Analyseverfahren

Aufgabe 8.1 Allgemeine Netzwerkanalyse

Gegeben sei folgende resistive Schaltung:



a) Zeichnen Sie den Netzwerkgraphen der Schaltung. Verzichten Sie dabei noch auf die Nummerierung der Kanten.

b) Zeichnen Sie einen möglichen Baum in den Netzwerkgraphen.

c) Nummerieren Sie nun die Kanten. Beginnen Sie mit den Baumzweigen.

d) Wieviele linear unabhängige Maschengleichungen gibt es? Geben Sie die Maschengleichungen in der Form

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

an.

e) Wieviele linear unabhängige Knotengleichungen gibt es? Geben Sie die Knotengleichungen in der Form

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$$

an.

f) Verifizieren Sie, dass gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$

g) Geben Sie die implizite Beschreibung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}$$

der Netzwerkelemente an.

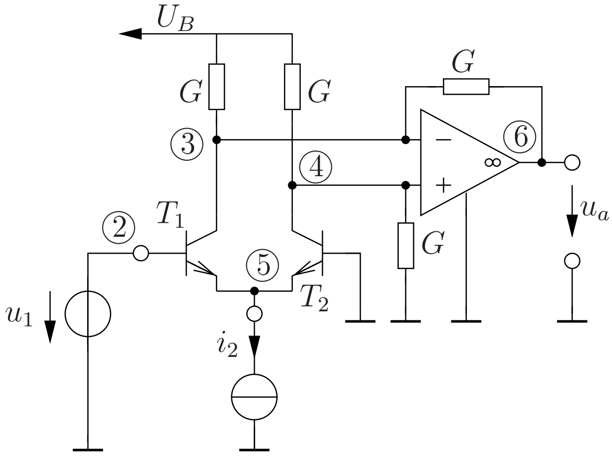
h) Unter welcher Bedingung ist die Matrix $\boldsymbol{N}$ invertierbar?

i) Sammeln Sie alle in den vorhergehenden Teilaufgaben erhaltenen Gleichungen in einem Gleichungssystem. Geben Sie dabei das entstehende Gleichungssystem in allgemeiner Form an.

j) Ist das in Teilaufgabe i) erhaltene Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Aufgabe 8.2 Direktes Aufstellen der Knotenleitwertsmatrix

Die folgende Schaltung soll durch direktes Aufstellen der Knotenleitwertsmatrix analysiert werden. (Der Knoten 1 fehlt bewusst noch.)



Für beide Transistoren T_1 und T_2 gelte der Zusammenhang:

$$i_c \approx I_S \exp(u_{BE}/U_T)$$
$$i_B \approx \frac{i_c}{\beta}$$

I_S	Sperrsättigungsstrom
U_T	Temperaturspannung (26mV)
β	Stromverstärkungsfaktor

a) Geben Sie das linearisierte Ersatzschaltbild von beiden Transistoren im AP $u_1 = 0\text{V}$ und $i_2 = i_{20}$ an.

Bestimmen Sie die Elementewerte in Abhängigkeit von i_{20} und den Transistorkenngrößen.

b) Skizzieren Sie das Kleinsignal-ESB der vollständigen Schaltung. Ersetzen Sie dabei den OP durch sein Nullormodell und alle nicht spannungsgesteuerten Elemente durch eine äquivalente spannungsgesteuerte Schaltung.

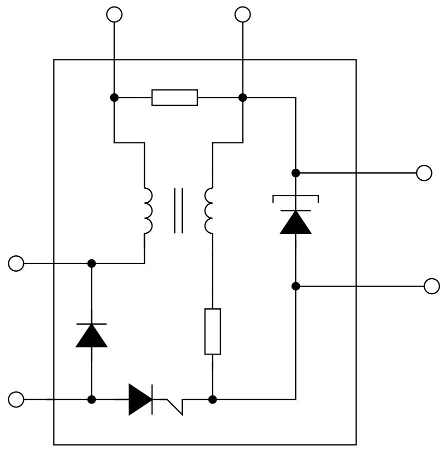
c) Stellen Sie die zugehörige Knotenleitwertsmatrix auf.

d) Berechnen Sie u_a aus dem reduzierten Knotenspannungs-Gleichungssystem. Welche Funktion führt die Schaltung aus?

Übung 9: Netzwerkeigenschaften

Aufgabe 9.1 Erhaltungssatz der Reziprozität

Zeigen Sie, dass ein Mehrtor, das sich im Inneren nur aus Zweipolelementen und Übertragern zusammensetzt (siehe z.B. folgendes Bild), reziprok ist.



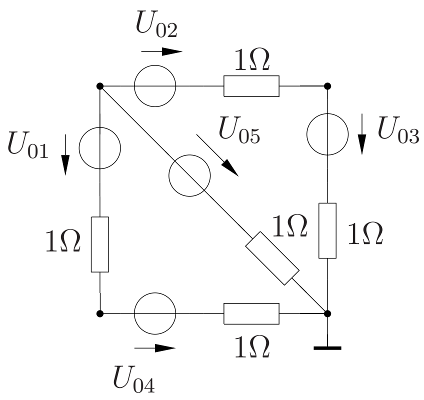
Die Reziprozität wurde in der Vorlesung nur im Linearen definiert. Diese Definition lässt sich jedoch punktweise auf das linearisierte Kleinsignalverhalten von nichtlinearen Schaltungen erweitern.

a) Zerlegen Sie das linearisierte Mehrtor zunächst symbolisch in ein verallgemeinertes Verbindungsmehrtor (mit inneren und äußeren Klemmen) und die Netzwerkelemente.

b) Weisen Sie allgemein mit Hilfe der Verlustlosigkeit und Reziprozität des verallgemeinerten Verbindungsmehrtores (Tellegenscher Satz) die Reziprozität des Mehrtores nach.

Aufgabe 9.2 Leistungsminimierung in elektrischen Netzwerken

Gegeben ist das folgende Netzwerk, bestehend aus linearen Quellenzweipolen mit einem Innenwiderstand von jeweils 1Ω.



a) Ordnen Sie der Serienschaltung einer Spannungsquelle mit einem Widerstand von 1Ω je eine Kante zu und skizzieren Sie den Netzwerkgraphen der Schaltung.
Wie lautet die zugehörige Knoteninzidenzmatrix?

b) Drücken Sie Kantenströme in Abhängigkeit der Knotenspannungen $\boldsymbol{u}_k$ aus.

c) Berechnen Sie die gesamte dissipierte Leistung $P(\boldsymbol{u}_k)$ im Netzwerk in Matrixschreibweise.

d) Berechnen Sie $\boldsymbol{u}_k$ algebraisch so, dass die verbrauchte Leistung minimal wird.
<u>Hinweis:</u>
$P(\boldsymbol{u}_k)$ wird minimal, wenn – analog zu eindimensionalen Funktionen – alle partiellen Ableitungen nach den Komponenten des Vektors $\boldsymbol{u}_k$ verschwinden:

$$\frac{\partial P}{\partial u_{k1}} = 0, \ldots, \frac{\partial P}{\partial u_{kn-1}} = 0.$$

Diese partiellen Ableitungen, zu einem Spaltenvektor zusammengefasst, heißen *Gradientenvektor* von $P(\boldsymbol{u}_k)$, abgekürzt $\mathbf{grad}(P(\boldsymbol{u}_k))$.
Es muss also gelten:

$$\mathbf{grad}(P(\boldsymbol{u}_k)) = \mathbf{0}$$

Der Gradient ist ein <u>linearer</u> Operator und es gelten folgende im Zweidimensionalen leicht überprüfbare Rechenregeln:

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M}^T \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M})^T + (\boldsymbol{M} \boldsymbol{x}) \qquad \text{Produktregel}$$

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{b}) = \mathbf{grad}(\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

$$\mathbf{grad}(\text{Konstante}) = \mathbf{0}$$

Bei der Produktregel ist der erste Summand zu transponieren, um ihn in einen Spaltenvektor zu wandeln.

e) Zeigen Sie, dass sich die Knotenspannungen $\boldsymbol{u}_k$ im gegebenen Kirchhoffnetz gerade so einstellen, dass die dissipierte Leistung minimal wird.

Aufgabe 9.3 Zweipolersatzschaltung und Leistungsanpassung

Gegeben sei folgendes Modell einer Verstärkerschaltung:

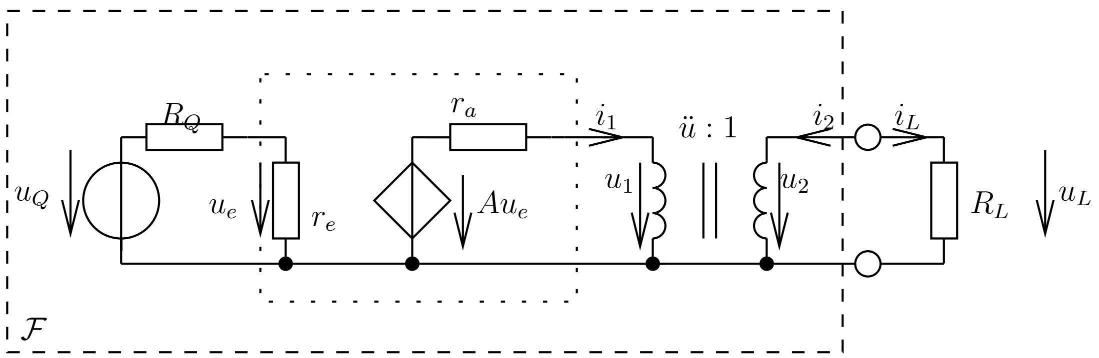


Abbildung 1. Modell einer Verstärkerschaltung

a) Ist das gekennzeichnete Eintor $\mathcal{F}$ linear? Begründung!

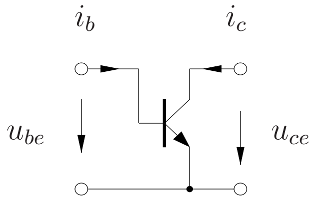
b) Leiten Sie eine einfache Zweipolersatzschaltung für das Eintor $\mathcal{F}$ her.

c) Bestimmen Strom, Spannung und Leistung an dem Lastwiderstand R_L.

d) Bestimmen Sie das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ so, dass die aufgenommene Leistung P_L an dem Lastwiderstand R_L maximal wird. Wie gross sind P_L und der Innenwiderstand von $\mathcal{F}$ in diesem Fall?

Aufgabe 9.4 Maximierung der Leistungsverstärkung

Ein Transistor ist (ohne Festlegung auf ein spezielles Transistormodell) auf maximale Kleinsignal-Leistungsverstärkung zu untersuchen.



a) Wie groß sind

1. der Kleinsignal-Leistungsfluss P_b in das Basis-Emitter-Tor
2. der Kleinsignal-Leistungsfluss P_c in das Kollektor-Emitter-Tor
3. der Kleinsignal-Gesamtleistungsfluss P in den Transistor

in Abhängigkeit von den Kleinsignalgrößen Δu_{be}, Δu_{ce}, Δi_b, Δi_c?

b) Fassen Sie $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_{be} \\ \Delta u_{ce} \end{bmatrix}$ sowie $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} \Delta i_b \\ \Delta i_c \end{bmatrix}$ zu Vektoren zusammen und geben Sie P_b, P_c und P in Matrixschreibweise an.

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Matrizen $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Durch Messung wurde die spannungsgesteuerte Kleinsignalbeschreibung

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} \tag{9.4.1}$$

des Transistors ermittelt.

c) Formulieren Sie P_b und P_c mit Hilfe der Gleichung (9.4.1) jeweils als quadratische Form[1] in Abhängigkeit von $\boldsymbol{u}$.

d) Zeigen Sie: Die “Formmatrix“ $\boldsymbol{A}$ einer quadratischen Form $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ lässt sich immer durch ihren symmetrischen Anteil $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)$ substituieren.

e) Bringen Sie das Problem “maximiere die Leistungsverstärkung“ auf die mathematische Form

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

Geben Sie “$\boldsymbol{x}$“ und “$f(\boldsymbol{x})$“ an.

Hinweis: Minimieren Sie den Quotient $\frac{P_c}{P_b}$. Der optimale Quotient ist negativ.

Ein symmetrisches ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T$) Minimierungsproblem der Gestalt

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} \tag{9.4.2}$$

wird durch denjenigen Vektor $\boldsymbol{x}$ gelöst, der das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_{\min}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \tag{9.4.3}$$

[1] Der Ausdruck $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ heißt quadratische Form.

löst. Die skalare Größe $\lambda_{\min}$ ist die kleinste (negativste) Zahl, die die Gleichung

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}) = 0 \tag{9.4.4}$$

erfüllt und bildet gleichzeitig den minimal erreichbaren Wert von Gleichung (9.4.2).

Im folgenden wollen wir zur Vereinfachung annehmen, der Transistor sei rückwirkungsfrei, die Kleinsignal-Leitwertsmatrix habe also die Form

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_{bb} & 0 \\ g_{cb} & g_{cc} \end{bmatrix} \tag{9.4.5}$$

f) Bestimmen Sie für einen solchen Transistor die maximal erreichbare Leistungsverstärkung $v_{\max} = |\lambda_{\min}|$ in Abhängigkeit von den Elementen der Leitwertsmatrix.

Hinweis: Benutzen Sie Gleichung (9.4.4) und achten Sie auf die Bedingung der Symmetrie.

g) In welchem Verhältnis müssen die Spannungen Δu_{ce} und Δu_{be} stehen, damit diese maximale Leistungsverstärkung erzielt wird?

Hinweis: Benutzen Sie Gleichung (9.4.3) und achten Sie auf die Bedingung der Symmetrie.

Übung 10: Logikschaltungen

Aufgabe 10.1 Logikschaltung

Der Übertragausgang c_{out} eines 1-Bit Volladdierers realisiert folgende Boole'sche Funktion

$$c_{out} = (a \wedge b) \vee (c_{in} \wedge (a \vee b)).$$

Es soll hier eine CMOS-Schaltung entworfen werden, die die Funktion c_{out} realisiert.

a) Verbinden Sie zur Realisierung des Pull-Down-Blocks n-MOS Transistoren so, daß die Verschaltung die Funktion c_{out} repräsentiert.

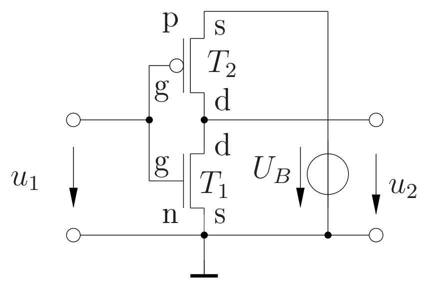
Hinweis: Eine Serienschaltung von zwei Transistoren T_1 und T_2 ist leitend wenn T_1 und T_2 leitend sind. Analog ist eine Parallelschaltung von T_1 und T_2 leitend wenn T_1 oder T_2 leitend sind.

b) Realisieren Sie nun den Pull-Up-Block. Erzeugen Sie dazu ein Verbindungsnetzwerk aus p-MOS Transistoren, das dual zum Pull-Down-Block ist.

c) Welcher letzter Schritt fehlt noch um c_{out} korrekt umzusetzen?

Aufgabe 10.2 Analyse von CMOS-Gattern

a) Beschreiben Sie qualitativ das Funktionsprinzip eines FETs und erklären Sie damit die Funktionsweise des folgenden CMOS-Inverters.



b) Skizzieren Sie ausgehend vom CMOS-Inverter ein mögliches Schaltbild eines CMOS-NAND-Gatters.

c) Wie könnte ein CMOS-OR-Gatter aussehen?