Optimale Portfolios mit beschränktem Value-at-Risk

Claudia Klüppelberg Ralf Korn

30. April 1999

Zusammenfassung

In Analogie zum klassischen Portfoliooptimierungsansatz nach Markowitz lösen wir ein zeitstetiges Portfolioproblem, bei dem das erwartete Endvermögen unter der Nebenbedingung einer oberen Schranke für den Value-at-Risk zu maximieren ist. Im mehrdimensionalen Black-Scholes-Modell erhalten wir hierfür eine explizite Lösung, die wir mit der entsprechenden Lösung im klassischen Markowitz Erwartungswert-Varianz Problem vergleichen.

We solve some continuous-time portfolio selection problem that consist of maximising expected terminal wealth under the constraint of an upper bound for the Value-at-Risk. In a Black-Scholes world we obtain an explicit solution, which we compare to the corresponding solution of the classical Markowitz mean-variance problem.

1 Einleitung

Empirische Untersuchungen zeigen, dass bei einem langen Investitionszeitraum Anlagen in Aktien zu einem höheren Gewinn führen als eine risikolose Anlage (siehe z.B. Goeppl et al. [4]). Langfristig gesehen, wachsen Aktienindizes schneller als ein risikoloses Instrument trotz sich wiederholender Crashs am Aktienmarkt. In dieser Arbeit formulieren wir ein Optimalitätskriterium, das genau diese Anlagestrategie als optimal erkennt.

Klassische Portfoliooptimierung nach Markowitz [7] und Sharpe [9] basiert auf einer Erwartungswert-Varianz (EV) Analyse, d.h. es wird unter allen Portfolios, bei denen die Varianz des Endvermögens unter einer vorgegebenen Schranke liegt, das mit maximalem erwarteten Endvermögen ausgewählt. Aus heutiger Sicht gibt es mehrere Kritikpunkte an diesem Ansatz. Zum einen kann damit obiges Phänomen nicht erklärt werden: benutzt man die Varianz als Risikomass, so ist das Portfolio mit dem geringsten Risiko automatisch ein reines Bondportfolio. Mehr noch, mit steigendem Zeithorizont wird ein Aktieninvestment durch das EV-Kriterium auch als Instrument mit wachsendem Risiko beurteilt. Nimmt man die obigen empirischen Beobachtungen als Massstab, so bedeutet dies, dass das EV-Kriterium genau im Gegensatz zur Optimalität des langfristigen Aktieninvestments steht. Zum anderen ist die Varianz mittlerweile auch aus anderen Gründen als ein unzureichendes Risikomass erkannt: Momente sind meist ungeeignet, Risiken zu messen.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf den Value-at-Risk (VaR) als Risikomass für die Portfoliooptimierung. Der VaR hat sich während der letzten Jahre zum Benchmark-Risikomass entwickelt. Ausserdem ist der VaR auch von Aufsichtsämtern als Basismass akzeptiert, wenn die Höhe von Reserven zur Absicherung von Kapitalmarktrisiken festgelegt werden.

Der VaR eines Portfolios ist üblicherweise definiert als die Differenz zwischen dem Erwartungswert μ der Profit-Loss Verteilung und dem Downside Risikokapital, gegeben durch ein Quantil. Wenn die Profit-Loss Verteilung eines Portfolios normal ist mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, dann ist der VaR des Portfolios, basierend auf dem α-Quantil (z.B. $\alpha = 0.05$)

$$\mathrm{VaR} = \mu - (\mu - \sigma z_\alpha) = \sigma z_\alpha \,, \tag{1.1}$$

wobei z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Eine statistische Schätzung des VaR ist in diesem Fall einfach: σ wird durch die empirische Standardabweichung geschätzt und z_α ist tabelliert. Wenn die Profit-Loss Verteilung nicht normal ist, was eher die Regel als die Ausnahme ist, wird es schwierig, genaue Schätzungen für VaR zu erhalten. Eine Lösung dieses statistischen Problems, basierend auf Extremwerttheorie, wird in Emmer, Klüppelberg und Trüstedt [3] vorgeschlagen; für den mathematischen und statistischen Hintergrund möchten wir auf das Buch Embrechts, Klüppelberg und Mikosch [2] verweisen.

In Analogie zu Definition (1.1) möchten wir den VaR eines beliebigen dynamischen Portfolios als Differenz einer mittleren Anlage und dem Quantil des Endvermögens beschreiben. Ziel unserer Definition ist insbesondere, einen Risikovergleich verschiedener Portfolios mithilfe des VaR zu ermöglichen. Das erreichen wir, indem wir den Erwartungswert in Definition (1.1) durch die sichere Anlage des Marktes, also ein reines Bondportfolio, ersetzen. Wir möchten aber darauf hinweisen, dass die Definition von VaR für unser dynamisches Portfolioproblem nicht eindeutig definiert ist. Wir halten uns hier an die Definition von Artznèr et al. [1], möchten aber nicht verschweigen, dass es in der Literatur verschiedene Definitionen gibt.

Von einem eher praktischen Standpunkt aus wird das Problem der statischen Portfoliooptimierung unter VaR-Restriktionen von Zagst und Kehrbaum [10] betrachtet: sie finden eine Lösung mittels numerischer Approximation und präsentieren auch eine sehr interessante Fallstudie. Scheuenstuhl und Zagst [8] lösen das Optimierungsproblem für Portfolios, die neben Aktien auch Optionen enthalten können.

2 Optimale Portfolios und Value-at-Risk

Wir betrachten das Standardmodell eines Black-Scholes-Markts, der aus einer risikolosen Anlage, dem Bond, und mehreren risikobehafteten Anlagen, den Aktien, besteht. Die zeitliche Entwicklung ihrer Preise $(P_0(t))_{t\geq 0}$ (Bond) und $(P_i(t))_{t\geq 0}$ für $i = 1, \ldots, d$ (Aktien) werden durch die (stochastischen) Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dP_0(t) &= P_0(t)\, r\, dt\,, & P_0(0) &= 1\,, \\ dP_i(t) &= P_i(t)\left(b_i(t)dt + \textstyle\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW_j(t)\right)\,, & P_i(0) &= p_i\,, \quad i = 1, \ldots, d\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

modelliert. Dabei ist $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))'$ eine Standard Brownsche Bewegung, $r \in \mathbb{R}$ ist die risikolose Zinsrate, $b(t) = (b_1(t), \ldots, b_d(t))'$ der Vektor der mittleren Aktienertragsraten und $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ ist die Volatilitätsmatrix, die wir als regulär voraussetzen.

Sei $\pi(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_d(t))'$ ein zulässiges Portfolio, d.h. $\pi_i(t)$ ist der prozentuale Anteil am Vermögen $X^\pi(t)$, der in Aktie i investiert wird (wir verweisen auf Korn [6] für relevante Definitionen). Mit $(X^\pi(t))_{t\geq 0}$ bezeichnen wir den zugehörigen Vermögensprozess, dessen Dynamik durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t)\left(\{(1 - \pi(t)'\underline{1})r + \pi(t)'b\}dt + \pi(t)'\sigma dW(t)\right)\,, t > 0\,, \quad X^\pi(0) = x\,,$$

beschrieben wird, wobei $x \in \mathbb{R}$ das Anfangsvermögen des Investors ist und $\underline{1} = (1, \ldots, 1)'$ der Vektor (jeweils der richtigen Dimension), dessen Komponenten alle gleich 1 sind. Der Anteil des Investments in den Bond ist dann $1 - \pi(t)'\underline{1}$. Sei T ein fester Planungshorizont. Wir werden uns in $[0, T]$ auf konstante Portfolios $\pi(t) = \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$ beschränken. Das bedeutet lediglich, dass die in Aktien investierten Vermögensanteile über die Zeit $[0, T]$ konstant gehalten werden. Man muss aber wegen der unterschiedlichen Entwicklung der Wertpapierpreise seine Positionen dynamisch in der Zeit anpassen, um die wertmässigen Verhältnisse zwischen den einzelnen Positionen konstant zu halten. In vielen Aufgabenstellungen der zeitstetigen Portfoliooptimierung stellt sich heraus, dass solch konstante Portfolios auch in einer weitaus grösseren Klasse von Portfolioprozessen optimale Strategien sind (vgl. z.B. Kapitel 3 und 4 in Korn [6]). Weiter erlaubt uns diese Restriktion eine explizite Bestimmung des optimalen Portfolios in unserem Erwartungswert-VaR-Problem, und sie erlaubt auch eine ökonomische Interpretation unserer Resultate.

Für den Vermögensprozess $X^\pi(t)$ zum Portfolio π erhalten wir folgende explizite Formeln:

$$X^\pi(t) = x\exp\left((\pi'(b-r\underline{1})+r-\|\pi'\sigma\|^2/2)t+\pi'\sigma W(t)\right)\,, \tag{2.2}$$

$$E(X^\pi(t)) = x\exp\left((\pi'(b-r\underline{1})+r)t\right)\,, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{var}(X^\pi(t)) = x^2\exp\left(2(\pi'(b-r\underline{1})+r)t\right)\left(\exp(\|\pi'\sigma\|^2 t)-1\right)\,, \tag{2.4}$$

Die Norm $\|\cdot\|$ ist die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$. Man beachte, dass $\operatorname{var}(X)$ die Varianz der Zufallsvariablen X ist, während $\operatorname{VaR}(x,\pi,T)$ Value-at-Risk bedeutet. Er ist wie folgt definiert.

Definition 2.1 *Wir betrachten den Black-Scholes Markt, gegeben durch die Gleichungen (2.2)-(2.4). Sei z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung und $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_d)$ ein konstantes Portfolio. Wir bezeichnen die Differenz zwischen dem Endvermögen der reinen Bondstrategie und dem α-Quantil der Verteilung von $X^\pi(T)$ als* Value-at-Risk des Portfolios π mit Anfangskapital x und Planungshorizont T*:*

$$\begin{aligned}\operatorname{VaR}(x,\pi,T) &= x\left(\exp(rT)-\exp((\pi'(b-r\underline{1})+r-\|\pi'\sigma\|^2/2)T+z_\alpha\|\pi'\sigma\|\sqrt{T})\right)\\ &= x\exp(rT)\left(1-\exp(f(\pi))\right)\,,\end{aligned}$$

wobei

$$f(\pi)=(\pi'(b-r\underline{1})-\|\pi'\sigma\|^2/2)T+z_\alpha\|\pi'\sigma\|\sqrt{T}\,.$$

Im Gegensatz zu Zagst und Kehrbaum [10], die den VaR als Differenz zwischen dem erwarteten Endvermögen des gerade betrachteten Portfolios und einem Quantil definieren, benutzen wir die reine Bondstrategie als Referenzmass. Das Risiko eines beliebigen Portfolios wird im Vergleich zu der risikolosen Anlage am Markt gemessen. Das erlaubt es nicht nur, für ein bestimmtes Portfolio das Risiko zu messen, sondern auch verschiedene Portfolios bzgl. ihres Marktrisikos zu vergleichen.

Abbildung 2.2 $\operatorname{VaR}(1\,000,\,1,\,T)$ des reinen Aktienportfolios ($\pi=1$) für festes Kapital $x=1\,000$ in Abhängigkeit des Planungshorizonts T.

Man beachte, dass $f(\pi)\to-\infty$ strebt für $\|\pi'\sigma\|\to\infty$, so dass

$$\sup_{\pi\in\mathbb{R}^d}\operatorname{VaR}(x,\pi,T)=x\exp(rT)\,, \tag{2.5}$$

d.h. eine riskante Anlagestrategie kann zu einem VaR führen, der nahezu das gesamte Kapital beinhaltet.

Der erste bemerkenswerte Unterschied zwischen den Konzepten des VaR und der Varianz als Risikomass wird bereits bei der Bestimmung des Portfolios mit dem jeweiligen kleinsten Risiko deutlich. Die Varianz ist immer für ein reines Bondportfolio minimal. Die Minimierung des VaR führt zu folgendem Resulat (für α stellen wir uns einen sehr kleinen Wert wie 0.05 oder 0.1 vor, d.h. $z_\alpha < 0$, ausserdem setzen wir $\theta = \|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|$):

- $b_i = r$ für alle $i = 1, \ldots, d$.
  Dann ist $\overline{\pi} = 0$ das Portfolio mit minimalem $\mathrm{VaR}(x, \overline{\pi}, T) = 0$.

- $b_i \neq r$ für ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ und $\sqrt{T}\theta < |z_\alpha|$.
  Dann ist $\overline{\pi} = 0$ das Portfolio mit minimalem $\mathrm{VaR}(x, \overline{\pi}, T) = 0$.

- $b_i \neq r$ für ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ und $\sqrt{T}\theta \geq |z_\alpha|$.
  Dann ist
  $$\overline{\pi} = \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right) \frac{(\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|}$$
  und
  $$\mathrm{VaR}(x, \overline{\pi}, T) = x \exp(rT) \left(1 - \exp\left(\frac{1}{2}(\sqrt{T}\theta - |z_\alpha|)^2\right)\right) < 0\,.$$

Man beachte, dass der VaR negativ werden kann, was implizit daran liegt, dass der VaR des reinen Aktieninvestments mit wachsendem Zeithorizont negativ wird. Dies lässt sich damit erklären, dass die gegenüber dem Bond höhere Driftrate auf lange Zeit gesehen die Schwankung des Aktienpreises dominiert, so dass schliesslich das untere Quantil des Aktieninvestments über dem Wert des langfristigen Bondinvestments liegt.

Eine ökonomische Interpretation findet man z.B. bei Artznér et al. [1]. Wenn der VaR positiv ist, interpretieren wir ihn als minimale zusätzlich notwendige Reserve für das Portfolio. Wenn der VaR dagegen negativ ist, kann man diesen Betrag aus der Reserve herausnehmen.

Wir wollen nun die eigentliche Optimierungsaufgabe lösen:

$$\boxed{\max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)) \qquad \text{so dass} \qquad \mathrm{VaR}(x, \pi, T) \leq C\,, \qquad (2.6)}$$

wobei C eine vorgegebene Konstante ist.

Dieses Optimierungsproblem kann analytisch gelöst werden, und man erhält folgende optimale Strategie: Unter der Bedingung, dass

$$\min\left\{0, x\exp(rT)\left(1-\exp\left(\frac{1}{2}(\sqrt{T}\theta-|z_\alpha|)^2\right)\right)\right\} \leq C \leq x\exp(rT)$$

und dass $b_i \neq r$ für mindestens ein $i \in \{1,\ldots,d\}$ hat das Problem (2.6) die Lösung

$$\pi^* = \varepsilon^* \frac{(\sigma\sigma')^{-1}(b-r\underline{1})}{\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\|}\,, \tag{2.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= (\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\| + z_\alpha/\sqrt{T}) + \sqrt{(\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\| + z_\alpha/\sqrt{T})^2 - 2c/T}\,, \\ c &= \ln\left(1-\frac{C}{x}\exp(-rT)\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Das zugehörige maximale erwartete Endvermögen unter obiger Value-at-Risk Restriktion ist dann nach (2.3)

$$E(X^{\pi^*}(T)) = x\exp\left((r+\varepsilon^*\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\|)T\right)\,. \tag{2.9}$$

Man beachte, dass das optimale erwartete Endvermögen von dem Aktienvermögen nur über $\|\sigma^{-1}(b-r\underline{1})\|$, die relative Risikoprämie für Aktieninvestment, abhängt, nicht aber explizit von der Anzahl an Aktien. Ein solches Ergebnis wird als "mutual fund theorem" bezeichnet, da man den gleichen Ertrag durch Investition in lediglich zwei Wertpapiere mit geeigneten Drift- und Volatilitätsparametern (als Fonds aufgefasst) statt einer Investition in mehrere Aktien erzielen kann.

Abbildung 2.3 Erwartetes Endvermögen für ein reines Bondportfolio ($\pi = 0$), ein reines Aktienportfolio ($\pi = 1$), sowie die optimale Strategie als Lösung des Optimierungsproblems (2.6). Als Parameter wählten wir $x = 1\,000$ $d = 1$, $r = 0.05$, $b = 0.15$, $\sigma = 0.2$ und $\alpha = 0.05$. Als obere Schranke für den VaR haben wir $C = \mathrm{VaR}(1\,000, 1, 5)$ gewählt, also den VaR eines reinen Aktienportfolios mit Zeithorizont $T = 5$.

Abbildung 2.4 Optimales Portfolio, gegeben durch den Wert von π^* aus (2.7), im Vergleich zum reinen Aktienportfolio $\pi = 1$.

Abbildungen 2.3 und 2.4 illustrieren das Verhalten der optimalen Strategie und das maximale erwartete Endvermögen für unterschiedliche Planungshorizonte T. Abb. 2.3 zeigt das erwartete

Endvermögen für ein reines Bondportfolio ($\pi = 0$), ein reines Aktienportfolio ($\pi = 1$), sowie die optimale Strategie als Lösung π^* gegeben durch (2.7) des Optimierungsproblems (2.6). Wie man sieht, ist das Resultat für das optimale Portfolio deutlich besser als für das reine Aktienportfolio. Die Ursache wird deutlich, wenn wir die zugehörige Portfolios anschauen.

Abb. 2.4 zeigt das optimale Portfolio π^* im Vergleich zum reinen Aktienportfolio $\pi = 1$ über einen längeren Zeithorizont T. Es gibt drei strukturell verschiedene Abschnitte: Ungefähr bis zu 5.5 Jahren enthält das optimale Portfolio eine Shortposition im Bond, zwischen 5.5 und 8 Jahren enthält es eine Longposition in Bond und Aktie, danach enthält es wieder eine Shortposition in Bond, die mit der Zeit steigt. Der Grund dafür liegt im fallenden VaR des Aktienportfolios, s. Abb. 2.2

Abb. 2.5 zeigt die Erwartungswert-VaR Effizienzgrenze ($\mathrm{VaR} = C = \mathrm{VaR}(1\,000,\, 1,\, 5)$) für die obigen Parameter zum Planungshorizont $T = 5$. Wie nicht anders erwartet, hat sie die gleiche Form wie eine typische Erwartungswert-Varianz Effizienzgrenze.

Abbildung 2.5 Erwartungswert-VaR Effizienzgrenze für die obigen Parameter zum Planungshorizont $T = 5$.

3 Vergleich mit dem klassischen Markowitz Portfolio

In diesem Abschnitt vergleichen wir das optimale Portfolio π^*, gegeben durch (2.7), mit dem klassischen optimalen Portfolio nach Markowitz (genauer dem optimalen Portfolio in einer zeitstetigen Variante des Markowitz-Problmes), in dem das Risiko durch die Varianz beschrieben wird.

Dazu lösen wir das Optimierungsproblem

$$\boxed{\max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)) \qquad \text{so dass} \qquad Var(X^\pi(T)) \leq C\,, \qquad (3.1)}$$

Mit Hilfe der expliziten Formel (2.4) für die Varianz schreiben wir die Varianzrestriktion um und erhalten die äquivalente Restriktion

$$(b - r\underline{1})'\pi T \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{x^2(\exp(\|\pi'\sigma\|^2 T) - 1)}\right) - rT\,.$$

Damit lässt sich das Optimierungsproblem (3.1) explizit lösen und man erhält folgende optimale

Strategie, falls $b_i \neq r$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, d\}$:

$$\widehat{\pi} = \widehat{\varepsilon} \frac{(\sigma\sigma')^{-1}(b - r\underline{1})}{\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|}\,, \tag{3.2}$$

wobei $\widehat{\varepsilon}$ die eindeutige positive Lösung der nicht-linearen Gleichung

$$\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|\varepsilon T - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{C}{x^2(\exp(\varepsilon^2 T) - 1)}\right) + rT = 0\,, \tag{3.3}$$

ist. Das zugehörige maximale erwartete Endvermögen unter obiger Varianzrestriktion ist dann nach (2.3)

$$E(X^{\widehat{\pi}}(T)) = x\exp((r + \widehat{\varepsilon}\|\sigma^{-1}(b - r\underline{1})\|T)\,, \tag{3.4}$$

was von der selben Form ist wie (2.9). Insbesondere stehen die in die einzelnen Aktien investierten Beträge in beiden optimalen Lösungen zueinander im selben Verhältnis ! Der wesentliche Unterschied liegt allerdings im Detail verborgen, nämlich im Verhalten der Konstanten $\widehat{\varepsilon}$ und ε^*. Während die zum Varianz-Problem gehörende Konstante $\widehat{\varepsilon}$ mit wachsendem Zeithorizont fällt, also ein schwächer werdendes Aktieninvestment bewirkt, wächst die zum VaR-Problem gehörende Konstante ε^* und erlaubt somit ein zunehmendes Aktieninvestment.

Abbildung 3.1 ε^* aus der Erwartungswert-VaR Optimierung und $\widehat{\varepsilon}$ aus der Erwartungswert-Varianz Optimierung in Abhängigkeit vom Planungshorizont T. Für den Vergleich haben wir C so gewählt, dass $\varepsilon^* = \widehat{\varepsilon}$ für $T = 10$ gilt. Für einen längeren Planungshorizont empfiehlt die optimale Strategie nach dem VaR-Kriterium einen höheren Anteil an Aktien im Portfolio als die optimale Strategie nach dem Varianz-Kriterium.

4 Schlussbemerkung und Ausblick

Der Black-Scholes Markt erlaubt die explizite Berechnung der optimalen Strategien bei beschränktem VaR im Vergleich zum klassischen Markowitz Ansatz mit beschränkter Varianz. Bei realistischeren Marktmodellen kann man explizite Lösungen natürlich nicht mehr erwarten.

In Klüppelberg und Korn [5] finden sich noch einige explizite Berechnungen für Sprungdiffusionen, d.h. die Wiener Prozesse in (2.1) werden zu zufälligen Zeiten durch Sprünge zufälliger Höhe gestört. Bei unserem Optimierungsproblem (2.6) stellt sich heraus, dass das VaR-Kriterium diese Sprünge weitgehend ignoriert, was sicherlich zu Problemen im Risikomanagement führen kann. Weiter noch, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung gering, so ist der optimale Anteil am Gesamtvermögen, der in Aktien investiert werden soll höher als beim Standard-Black-Scholes-Modell, wenn die Aktienpreise in beiden Modellen gleiche Erwartungswerte besitzen.

Auch dies ist wieder ein Hinweis auf Probleme mit dem VaR als Risikomass. Bekanntlich hat der VaR keineswegs alle wünschenswerten Eigenschaften eines Risikomasses, was sich auch in diesem Modell zeigt.

Alternative Risikomasse wie den Shortfall untersuchen wir momentan im Zusammenhang mit Portfoliooptimierung und werden zu einem späteren Zeitpunkt die entsprechenden Ergebnisse präsentieren.

Literatur

[1] Artznèr, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. (1998) Coherent measures of risk. Preprint.

[2] Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Springer, Berlin.

[3] Emmer, S., Klüppelberg, C. und Trüstedt, M. (1998) VaR – ein Mass für das extreme Risiko. *Solutions* **2**, 53-63.

[4] Goeppl, H. , Herrmann, R., Kirchner, T., Neumann, M. (1996) Risk Book: German Stocks 1976-1995 Fritz Knapp Verlag.

[5] Klüppelberg, C. und Korn, R. (1998) Optimal portfolios with bounded value-at-risk. Preprint Technische Universität München und Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

[6] Korn, R. (1997) *Optimal Portfolios.* World Scientific, Singapore.

[7] Markowitz, H. (1959) *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments.* Wiley, New York.

[8] Scheuenstuhl, G. und Zagst, R. (1998) Integrated portfolio management with options. Risklab Research Papers No. 9804.

[9] Sharpe, W. (1964) A theory of market equilibrium under condition of risk. *Journal of Finance* **19**, 425-442.

[10] Zagst, R. und Kehrbaum, J. (1998) Portfolio optimization under limited value at risk. Risklab Research Papers No. 98024.

Kontaktadressen

Prof. Dr. Claudia Klüppelberg
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
80290 München

email: cklu@ma.tum.de
internet: http://www.ma.tum.de/stat/

Dr. habil. Ralf Korn
Fachbereich Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
55099 Mainz

email: korn@mathematik.uni-mainz.de