

Sättigende weiche strukturvariable Regelung

Saturated Soft Variable-structure Control

Michael Buhl, Philipp Joos und Boris Lohmann

Der Beitrag beschreibt eine weiche strukturvariable Regelung mit dem Ziel, lineare Strecken mit Stellgrößenbegrenzung nahezu zeitoptimal in eine Ruhelage zu überführen. Dazu werden gezielt Reglerverstärkungen verwendet, die in großen Bereichen des Zustandsraums zu einer Sättigung der Stellgröße führen. Dynamik und Robustheit der Regelung können über zwei Parameter in transparenter Weise eingestellt werden; der numerische Aufwand ist vergleichsweise gering.

This paper presents a saturated, soft variable-structure controller. The aim of the controller is a nearly time-optimal transfer of linear systems with input saturation into a desired equilibrium point. For this purpose feedback gains are used which lead in large areas of the state-space to a saturated input signal. The dynamic and the robustness of the controller can be tuned transparently by two parameters; the numerical effort is considered as comparatively low.

Schlagwörter: Weiche strukturvariable Regelung, nahezu zeitoptimale Regelung, Stellgrößenbegrenzungen

Keywords: Soft structure-variable control, nearly time-optimal control, input saturation

1 Einleitung

Regelungen linearer Systeme werden zumeist so ausgelegt, dass die Stellgrößenbegrenzung in keiner Betriebsituation erreicht wird. Eine solche eher konservative Auslegung hat – zumindest bei Verwendung linearer zeitinvarianter Regler – eine eher langsame Dynamik der Regelung zur Folge. Eine zeitoptimale Regelung hingegen erfordert dem Maximumprinzip folgend die volle Ausnutzung der Stellgröße. Die Berechnung der hierzu nötigen Schaltflächen erfordert jedoch für schwingungsfähige Systeme oder Systeme größerer Ordnung ($n > 2$) einen hohen numerischen Aufwand. Um ferner nicht mit der Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme konfrontiert zu werden, wird in der Praxis zumeist auf die volle Nutzung des Stellgrößenhubs verzichtet.

Eine Möglichkeit, die verfügbare Stellgröße besser auszunutzen, ohne die zeitoptimalen Schaltflächen bestimmen zu müssen, stellen die sogenannten weichen strukturvariablen Regelungen (SVR) dar. Kernidee ist es dabei, eine lineare (Zustands-)Rückführung stetig in Abhängigkeit des

Systemzustands so zu variieren, dass eine bessere Stellgrößenausnutzung erreicht wird als dies bei einer linearen zeitinvarianten Rückführung möglich wäre. Einen ausführlichen Überblick findet man in [1] und den dortigen Referenzen. Bild 1 zeigt ein Blockschaltbild für ein lineares System mit einem Eingang und weicher SVR. Eine Erweiterung der Struktur um einen Zustandsbeobachter ist in [2] beschrieben.

Anders als in dem Großteil der bisherigen Arbeiten auf dem Gebiet der weichen SVR, bei denen die Variation der Zustandsrückführung immer so erfolgt, dass

$$|u| = |\mathbf{k}^T(\alpha)\mathbf{x}| \leq u_{max}$$

sicher gestellt ist, wird in diesem Artikel ähnlich wie in [3; 4] die Rückführung gezielt so variiert, dass in großen Bereichen des Zustandsraums gilt

$$|\mathbf{k}^T(\alpha)\mathbf{x}| \geq u_{max}. \quad (1)$$

Auf diese Weise wird die verfügbare Stellgröße über längere Zeitintervalle voll genutzt, ähnlich wie beim zeitop-

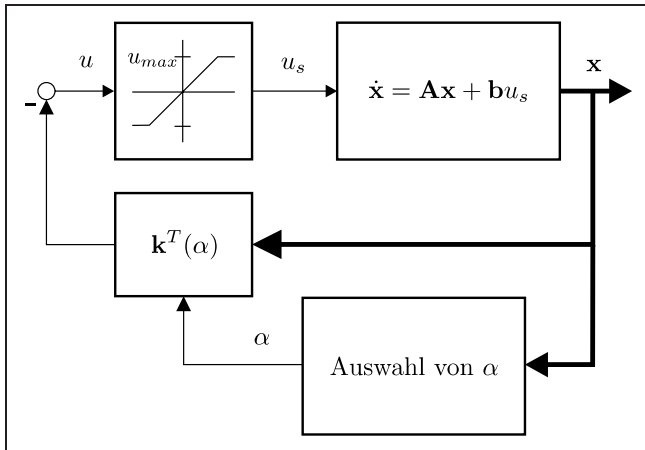


Bild 1: Blockschaltbild eines linearen Systems mit weicher SVR.

timalen Entwurf. Durch die Verwendung von gesättigten Rückführungen entsprechend (1) erhält das geschlossene System in zweifacher Hinsicht einen nichtlinearen Charakter. Zum einen weil sich die Rückführung in Abhängigkeit des Zustands ändert (wie bei der klassischen, weichen SVR auch), zum anderen weil die Begrenzung der Stellgröße die gewünschte Zustandsrückführung nichtlinear abschneidet (im Unterschied zur klassischen SVR). Um die Wahl der Rückführung $\mathbf{k}(\alpha)$ und den zugehörigen Stabilitätsnachweis einfach zu gestalten, wird hier ein *integrierter Entwurf* einer Lyapunov-Funktion und einer Rückführung $\mathbf{k}(\alpha)$ vorgestellt.

2 Abschätzung von Einzugsbereichen

2.1 Theorie

Durch die Verwendung von Reglern, welche die Stellgröße voll ausnutzen und hierfür in gewissen Bereichen des Zustandsraums sogar einen größeren Wert für u kommandieren als realisierbar ist, kann die Stabilität des geschlossenen Systems – selbst bei konstanter Zustandsrückführung \mathbf{k} – nicht mehr durch die Betrachtung der Eigenwerte des geschlossenen Kreises analysiert werden. Da auch Systeme mit instabiler Matrix \mathbf{A} und folglich begrenzten Einzugsbereichen im geregelten Fall betrachtet werden sollen, ist eine Stabilitätsanalyse im Frequenzbereich z. B. anhand des Popow- oder des Kreiskriteriums nicht sinnvoll. Die Stabilitätsanalyse erfolgt deshalb im Folgenden ausschließlich mit Zustandsraummethoden, nämlich mit Hilfe der Lyapunov Theorie (siehe z. B. [5]).

Laut dieser ist die Ruhelage $\mathbf{x} = 0$ eines nichtlinearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Bereich \mathbb{S} asymptotisch stabil, falls:

- eine positiv definite Funktion $V(\mathbf{x})$ existiert,
- die Ableitung \dot{V} im Bereich \mathbb{S} negativ definit ist,
- der Bereich \mathbb{S} beschränkt ist und von einer Höhenlinie η von V begrenzt wird: $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) \leq \eta\}$

Die Bereiche \mathbb{S} können somit zur Abschätzung des Einzugsbereichs einer Ruhelage herangezogen werden. Allerdings führen diese Lyapunov-Funktionen-basierten Ab-

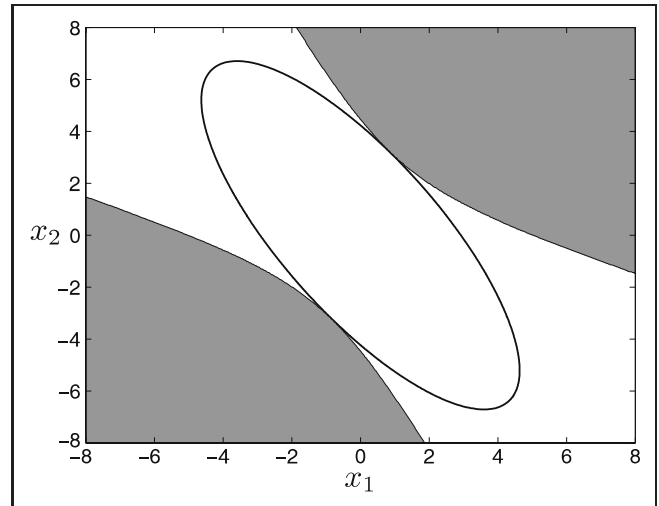


Bild 2: Abschätzung des Einzugsbereichs \mathbb{S} (Ellipse) und die Bereiche mit $\dot{V}_h > 0$ (grau) bzw. $\dot{V}_h < 0$ (weiß).

schätzungen oftmals zu sehr konservativen, das heißt zu kleinen Abschätzungen der tatsächlichen Einzugsbereiche. Außerdem hängt die Qualität der Abschätzungen stark von den verwendeten Lyapunov-Funktionen ab.

2.2 Beispiel

In [7] wurde mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion die Stabilität des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}\left(\underbrace{[-10 \ -2] \mathbf{x}}_{\mathbf{k}^T \mathbf{x}}\right) \quad (2)$$

mit der Sättigungsfunktion

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} -u_{max} & \text{für } u \leq -u_{max} \\ u & \text{für } -u_{max} < u < u_{max} \\ u_{max} & \text{für } u \geq u_{max} \end{cases}$$

und dem Sättigungslevel $u_{max} = 5$ analysiert. Als Lyapunov-Funktion wurde dort durch Lösen einer Optimierungsaufgabe die Funktion

$$V_h = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_h \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0,117 & 0,0627 \\ 0,0627 & 0,0558 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

gefunden. Diese führt bei Verwendung von quadratischen Lyapunov-Funktionen zu einer größtmöglichen Ausdehnung von \mathbb{S} in Richtung $[-10, 8]^T$. Die Matrix \mathbf{P}_h wurde so normiert, dass die Höhenlinie, welche den Bereich \mathbb{S} begrenzt, den Wert 1 hat. Bild 2 zeigt für das Beispiel den Bereich \mathbb{S} und die Bereiche mit $\dot{V}_h < 0$ bzw. $\dot{V}_h > 0$.

3 Reglerauslegung

3.1 Ansatz

Im Beispiel des vorhergehenden Abschnitts wurde eine Lyapunov-Funktion für eine gegebene Regelung mit Hilfe einer numerischen Optimierung gefunden. Dieses Vorgehen

ist zum einen relativ aufwendig, zum anderen ist auch die Auswahl einer sinnvollen Gütefunktion für die Optimierung nicht einfach. Betrachtet man ferner in Bild 2 die Bereiche mit $\dot{V}_h > 0$ und $\dot{V}_h < 0$, so erkennt man, dass $\dot{V}_h = 0$ nur an zwei Punkten der Randkurve von \mathbb{S} ist. In vielen Bereichen stellt \mathbb{S} also mit Sicherheit eine zu kleine Abschätzung des Einzugsbereichs dar.

Anstatt einen möglichst „günstigen“ Bereich \mathbb{S} für ein gegebenes System zu finden, wird in diesem Beitrag der Ansatz verfolgt, eine Rückführung zu finden, die eine einfache und möglichst wenig konservative Abschätzung des Einzugsbereichs erlaubt. Ausgangspunkt hierfür ist die Beobachtung, dass \mathbb{S} den exakten Einzugsbereich der Ruhelage beschreibt, wenn der Rand $\partial\mathbb{S}$ die Gebiete mit $\dot{V} > 0$ und $\dot{V} < 0$ genau trennt, also auf dem Rand $\dot{V} = 0$ ist. Um dieser Situation möglichst nahe zu kommen, soll die Rückführung so gewählt werden, dass eine Lyapunov-Funktion gefunden werden kann, welche die Forderung

$$\dot{V} = -\alpha V \quad (3)$$

erfüllt. Verwendet man für V einen quadratischen Ansatz der Form $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ und drückt \dot{V} mit Hilfe der Zustandsdifferentialgleichung entsprechend Bild 1 aus, so ergibt sich

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(u) = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (4)$$

Im linearen Fall, also für $|u| \leq u_{max}$, gilt für (4)

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (5)$$

Da $\dot{V} < 0$ gelten soll, bietet es sich an, dem von u abhängigen Term eine quadratische Form mit negativem Vorzeichen zu verleihen:

$$u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (6)$$

Mit der Rückführung (6) wird Gl. (5) zu

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (7)$$

Um Gl. (7) für alle \mathbf{x} zu erfüllen, muss \mathbf{P} die algebraische Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \underbrace{\mathbf{P} \left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right)}_{\mathbf{A}_\alpha} - 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\mathbf{Q}} \quad (8)$$

lösen. Durch die Wahl von \mathbf{P} entsprechend (8) bzw. von u entsprechend (6) wird die Forderung (3) in den ungesättigten Bereichen ($|u| < u_{max}$) exakt erfüllt. In den gesättigten Bereichen reduziert sich der Betrag von \dot{V} , sodass dort $\dot{V} \geq -\alpha V$ ist. Innerhalb der Abschätzung des Einzugsbereichs muss außerdem $\dot{V} < 0$ gelten, sodass durch eine entsprechend kleine Wahl von α ein beliebig schmales Intervall $[-\alpha V; 0[$ für den Verlauf von \dot{V} auf dem Rand von \mathbb{S} erreicht werden kann, was, wie oben erläutert, eine wenig konservative Abschätzung des Einzugsbereichs erwarten lässt.

3.2 Eigenschaft der Matrix \mathbf{P}

Wie in [8] beschrieben, wird der Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ der symmetrischen und positiv semi-definiten Lösung \mathbf{P} durch die Eigenvektoren der unbeobachtbaren Eigenwerte von $[\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q}]$ mit $Re(\lambda(\mathbf{A}_\alpha)) \leq 0$ aufgespannt. Da in (8) $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ist, sind alle diese Eigenwerte von \mathbf{A}_α nicht beobachtbar und spannen folglich den Nullraum von \mathbf{P} auf.

Die Lyapunov-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ erfasst deshalb nur die Richtungen im Zustandsraum, deren zugehörige Eigenvektoren von \mathbf{A}_α instabil sind (bzw. die Eigenvektoren von \mathbf{A} mit $Re(\lambda(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2}$). Für die Stabilitätsuntersuchung ist dies jedoch ausreichend, denn die Eigenwerte von \mathbf{A} , deren Eigenvektoren den Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ aufspannen, sind stabil und haben keinen Einfluss auf die Rückführung ($\mathbf{k}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{P}$). Folglich werden diese Eigenwerte nicht verschoben und bleiben stabil.

Die Forderung (3), welche Grundlage für die Bestimmung von \mathbf{P} ist, führt im linearen Fall dazu, dass V exponentiell mit α abklingt. Dies spiegelt sich auch in der Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises $[\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}]$ wider (Beweis siehe Anhang):

Satz 1. *Habe die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$, q Eigenwerte mit dem Realteil $Re(\lambda_i(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2}$ ($i = 1, \dots, q$), so hat die Matrix $[\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}]$ q Eigenwerte bei $-\frac{\alpha}{2}$. Die $k = n - q$ Eigenwerte $\lambda_j(\mathbf{A})$ von \mathbf{A} mit $Re(\lambda_j(\mathbf{A})) \leq -\frac{\alpha}{2}$ samt Eigenvektoren sind auch Eigenwerte der Matrix $[\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}]$.*

3.3 Abschätzung des Einzugsbereichs

Die Bestimmung von \mathbf{P} und der Rückführung \mathbf{k} wurde so gewählt, dass im ungesättigten Bereich des Zustandsraums Forderung (3) erfüllt ist. Aufgrund der Stellgrößenbegrenzung kann es jedoch Bereiche im Zustandsraum mit $\dot{V} > 0$ geben, sodass nicht globale Stabilität für das geschlossene System gezeigt werden kann.

In diesem Fall kann eine Abschätzung \mathbb{S} des Einzugsbereichs mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ gefunden werden. Entsprechend Abschnitt 2.1 wird \mathbb{S} durch die kleinste Höhenlinie η mit $\dot{V} = 0$ begrenzt. Dies ist ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{z}} \eta = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (9)$$

mit der Nebenbedingung

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{z} - 2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{z}) = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \mathcal{N}(\mathbf{P})\} \quad (11)$$

Durch die Bedingung (11) sollen die trivialen, aber nicht interessierenden Lösungen für \mathbf{z} im Nullraum von \mathbf{P} bzw. im Ursprung ausgeschlossen werden. Da der Punkt \mathbf{z} im gesättigten Bereich liegen muss ($u = \pm u_{max}$) und unter Verwendung von (7), lässt sich die Nebenbedingung (10) umschreiben in

$$\mathbf{z}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{z} \pm 2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u_{max} = 0. \quad (12)$$

Mögliche Lösungen dieses Optimierungsproblems mit Nebenbedingung sind Stationärpunkte der zugehörigen Lagrangeschen Hilfsfunktion $L = L(\mathbf{z}, \mu)$:

$$L = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \mu (\mathbf{z}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{z} \pm 2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u_{max}).$$

mit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \mathcal{N}(\mathbf{P})\}$. Am Stationärpunkt muss die partielle Ableitung $\partial L / \partial \mathbf{z}$ verschwinden:

$$0 = \mathbf{P} [(2 - 2\mu\alpha)\mathbf{z} + (4\mu \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \pm 2u_{max})\mathbf{b}]. \quad (13)$$

Da die Ausdrücke in den runden Klammern in (13) skalare Größen sind und die Lösungen von \mathbf{z} im Nullraum von \mathbf{P} ausgeschlossen wurden, folgt hieraus

$$\mathbf{z} = a \mathbf{b} \quad (14)$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Der Faktor a ergibt sich durch Einsetzen von (14) in (12) zu

$$a = \pm \frac{2u_{max}}{2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha}. \quad (15)$$

Mit Gln. (15) und (14) erhält man für η

$$\eta = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} u_{max}^2. \quad (16)$$

Die Höhenlinie η kann auch als explizite Funktion von α und \mathbf{A} geschrieben werden.

Satz 2. Habe die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$, q Eigenwerte mit dem Realteil $Re(\lambda_i(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2}$ ($i = 1, \dots, q$), so kann η geschrieben werden als

$$\eta = \frac{4\gamma + 2q\alpha}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2} u_{max}^2, \quad (17)$$

mit $\gamma = \sum_{i=1}^q \lambda_i(\mathbf{A})$. (Beweis siehe Anhang)

Aus diesem Ergebnis lassen sich noch weitere Eigenschaften der Abschätzungen $\mathcal{S}(\alpha)$ des Einzugsbereichs ableiten.

Satz 3. Habe die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$, q Eigenwerte mit dem Realteil $Re(\lambda_i(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2}$ ($i = 1, \dots, q$), dann gelten folgende Aussagen:

1. Ist $q = 1$, so ist der abgeschätzte Einzugsbereich \mathcal{S} unabhängig von α .
2. Sei $q > 1$ und $\alpha \geq \max(0, -2\frac{\gamma}{q-1})$, dann ist $\frac{d\eta}{d\alpha} < 0$ und $\frac{d\mathcal{P}}{d\alpha} \geq 0$.
3. Für Systeme mit Eigenwerten ausschließlich in der geschlossenen linken Halbebene gibt es ein $\hat{\alpha} = -2\frac{\gamma}{q-1}$, sodass sich für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ der gesamte Zustandsraum als Einzugsbereich ergibt.

(Beweise siehe Anhang)

Eine Konsequenz des ersten Punktes ist, dass keine Vergrößerung von \mathcal{S} durch eine Verkleinerung von α mehr möglich ist, sobald α so klein gewählt wurde, dass nur noch ein Eigenwert von \mathbf{A} verschoben wird. Falls also λ_2 bei Berücksichtigung der Vielfachheit den Eigenwert von \mathbf{A} mit dem zweitgrößten Realteil bezeichnet, so ist $\alpha_{min} = \max(0, -2Re(\lambda_2))$ eine sinnvolle Untergrenze für α .

Für Systeme, auf die der dritte Punkt zutrifft, ist $\alpha_{min} = \hat{\alpha} \geq -2Re(\lambda_2) \geq 0$ eine sinnvolle Untergrenze.

Aufgrund der Polplazierung bei $-\frac{\alpha}{2}$, sollte α aus dem Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ für $\alpha_{min} > 0$ und sonst aus dem Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ gewählt werden. Sobald $\alpha > \alpha_{min}$ ist, sind die Voraussetzungen für den zweiten Punkt erfüllt, sodass die Bereiche $\mathcal{S}(\alpha)$ ineinander liegen und mit steigendem α kleiner werden.

In Bild 3a sind für das Beispiel aus Abschnitt 2.2 zur Veranschaulichung die verschiedenen $\mathcal{S}(\alpha)$ dargestellt. Außerdem ist in Bild 3b zu sehen, dass für $\alpha = \alpha_{min} = 2$ ein Einzugsbereich abgeschätzt wird, auf dessen Rand fast immer $\dot{V}/V \approx 0$ gilt. Somit ist der Einzugsbereich für diese Lyapunov-Funktion annähernd exakt abgeschätzt. Wie oben erklärt, führt eine weitere Verkleinerung von α nicht mehr

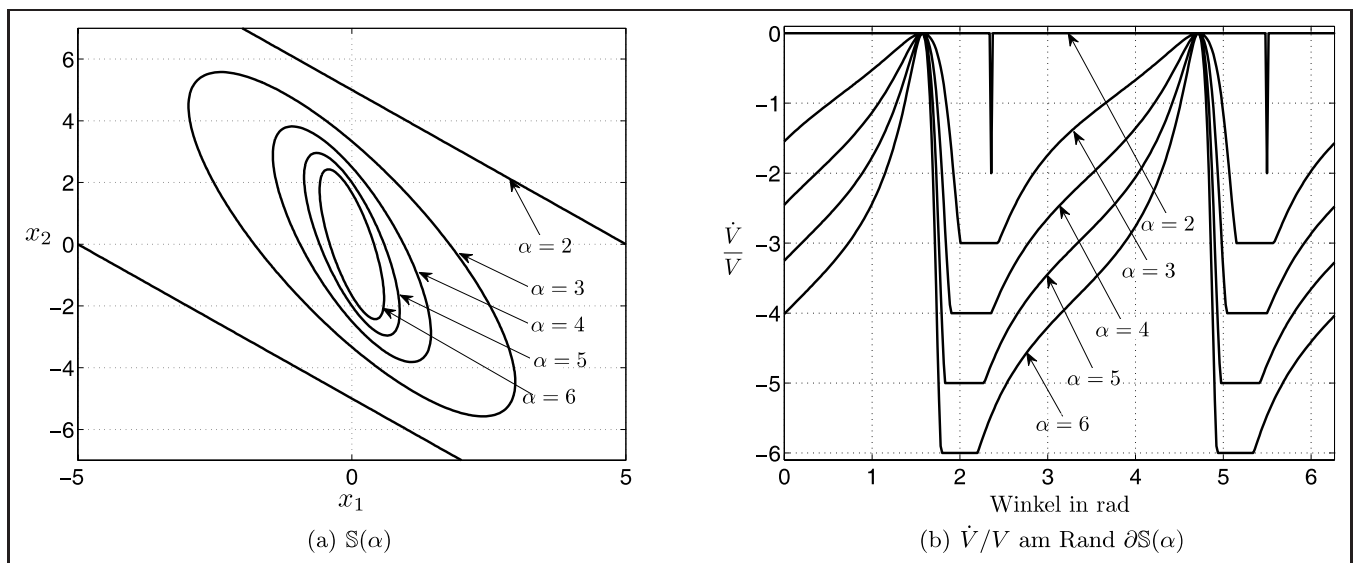


Bild 3: Einzugsbereiche und \dot{V}/V auf dem Rand $\partial\mathcal{S}$ für verschiedene α .

zu einer Vergrößerung von \mathbb{S} . Ebenfalls gut ersichtlich ist, dass der kritische Punkt \mathbf{z} mit $\dot{V} = 0$ in Richtung von $\pm \mathbf{b}$ liegt, was einem Winkel von $\pm \pi/2$ entspricht.

4 Gesättigte, weiche SVR

4.1 Ansatz

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, besteht bei der Verwendung von konstanten Zustandsrückführungen ein Zielkonflikt zwischen der Dynamik des geregelten Systems, die mit wachsendem α schneller wird, und der Abschätzung des Einzugsbereichs \mathbb{S} , die mit wachsendem α kleiner wird. Eine Möglichkeit, diesen Konflikt zu mindern, stellt die kontinuierliche bzw. *weiche* Variation der Zustandsrückführung dar. Der einzige Parameter, der hierfür zur Verfügung steht, ist α , welcher über (8) die Matrix \mathbf{P} und somit die Rückführung \mathbf{k} implizit festlegt (siehe auch Bild 1). Über die Matrix \mathbf{P} parametrisiert α auch η (16) und somit die Größe von \mathbb{S} . Für die Variation von α bietet sich folgende Strategie an:

Wähle zu jedem Zeitpunkt das größtmögliche α aus dem Intervall $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ bzw. $]\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, sodass

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} \leq \beta \eta(\alpha). \quad (18)$$

Durch diese Variation von α wird erreicht, dass die schnellste Rückführung verwendet wird, in deren \mathbb{S} der aktuelle Zustand liegt. Der Parameter $\beta \in]0; 1[$ steuert hierbei die Robustheit der Variation. Für $\beta \rightarrow 1$ liegt \mathbf{x} am Rand von \mathbb{S} , was eine geringe Robustheit gegenüber Modellunsicherheiten zur Folge hat. Für $\beta \rightarrow 0$ liegt \mathbf{x} entsprechend weiter weg vom Rand, in diesem Fall wird jedoch später auf ein höheres α geschaltet, wodurch sich die Dynamik verlangsamt.

Die Wahl des Intervalls $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ ist neben β die einzige, anwendungsspezifische Einstellung, welche vom Benutzer zu erbringen ist. Für instabile Systeme kann α_{min} so weit verkleinert werden, bis $\mathbb{S}(\alpha_{min})$ ausreichend groß wird. Falls \mathbf{A} hingegen keine Eigenwerte in der offenen rechten Halbebene besitzt, ist es sinnvoll, $\alpha_{min} \rightarrow \hat{\alpha}$ zu wählen, da somit $\mathbb{S}(\alpha_{min})$ beliebig groß gemacht werden kann. Über die Wahl von α_{max} wird die schnellste Polkonfiguration (Satz 1) des geschlossenen Systems festgelegt. In der Praxis ergeben sich Begrenzungen für α_{max} aus Unzulänglichkeiten des linearen Streckenmodells.

4.2 Stabilität der SVR

Die Stabilität der beschriebenen Regelung kann anhand der Lyapunov-Funktion

$$V_\alpha = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} \quad (19)$$

gezeigt werden, wobei α entsprechend dem beschriebenen Schema variiert wird. Obwohl $\mathbf{P}(\alpha)$ für manche α nur positiv semidefinit ist, kann V_α als Kandidat einer

Lyapunov-Funktion verwendet werden (Begründung siehe Abschnitt 3.2). Für die Ableitung von V_α erhält man

$$\dot{V}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}. \quad (20)$$

Die Summe der ersten beiden Terme ist negativ, da die Variation von α so erfolgt, dass \mathbf{x} immer im Einzugsbereich des geschlossenen Systems im Falle einer konstanten Matrix \mathbf{P} liegt. Das Vorzeichen des dritten Terms ist nicht so offensichtlich. In den Bereichen mit $\alpha = \alpha_{max}$ ist $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}' \dot{\alpha} = 0$, sodass dort auf jeden Fall $\dot{V}_\alpha < 0$ ist. Solange $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ ist, gilt in (18) das Gleichheitszeichen und man erhält

$$\dot{V}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}' \mathbf{x} \dot{\alpha} = \beta \eta' \dot{\alpha}. \quad (21)$$

Nach Satz 3 ist $\eta' < 0$ und $\mathbf{P}' \geq 0$. Für $\dot{\alpha} \leq 0$ wäre somit die rechte Seite von (21) positiv bzw. null und die linke Seite negativ. Die einzige widerspruchsfreie Lösung für $\dot{\alpha}$ ist $\dot{\alpha} > 0$. Was zeigt, dass die Variation von α entsprechend (18) zu einer kontinuierlichen Erhöhung von α führt. Wertet man die rechte Seite von (21) mit $\dot{\alpha} > 0$ aus, erhält man auch für $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ das Ergebnis $\dot{V}_\alpha < 0$, womit die Stabilität der vorgeschlagenen SVR gezeigt ist.

4.3 Aufwand bei der Anwendung

Der wesentliche Aufwand bei der Anwendung des Ansatzes entsteht bei der Bestimmung von α . Da (18) nicht explizit nach α aufgelöst werden kann, muss zum Auffinden von α mehrmals pro Zeitschritt eine Riccati-Gleichung zur Bestimmung von $\mathbf{P}(\alpha)$ gelöst werden. Durch Abspeicherung von $\mathbf{P}(\alpha)$ für eine gewisse Anzahl von Stützstellen im Intervall $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ kann das Suchintervall für α verkleinert werden, wodurch sich der Online-Rechenaufwand deutlich reduziert. Für Systeme, bei denen kleine Sprünge in der Stellgröße tolerierbar sind, kann der Online-Rechenaufwand darauf beschränkt werden nur die größte Stützstelle auszuwählen, welche (18) erfüllt.

4.4 Technisches Beispiel

Um die Leistungsfähigkeit der SVR zu demonstrieren, wird die Tiefenregelung eines U-Bootes betrachtet. Die Dynamik der Tauchtiefe wurde entsprechend [6] approximiert mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,005 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u) \quad (22)$$

wobei x_1 die Tauchtiefe in Metern darstellt und die Stellgrößenbegrenzung bei $u_{max} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ liegt. In [1] wurde dieses Beispiel bereits verwendet, um die Leistungsfähigkeit von SVR zu testen. Ziel der Regelung ist es, eine Anfangsstörung $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ -0,004]^T$ möglichst schnell auszuregulieren. Zur Bewertung des α -Reglers mit $\alpha \in [0,01; 1,17]$ und $\beta = 0,9$ sind in Bild 4 auch die Tauchtiefen- und Stellgrößenverläufe einer zeitoptimalen Regelung, einer weichen strukturvariablen Regelung nach [1] und einer Regelung mit festem $\alpha = 0,0109$ dargestellt. Der feste Wert von

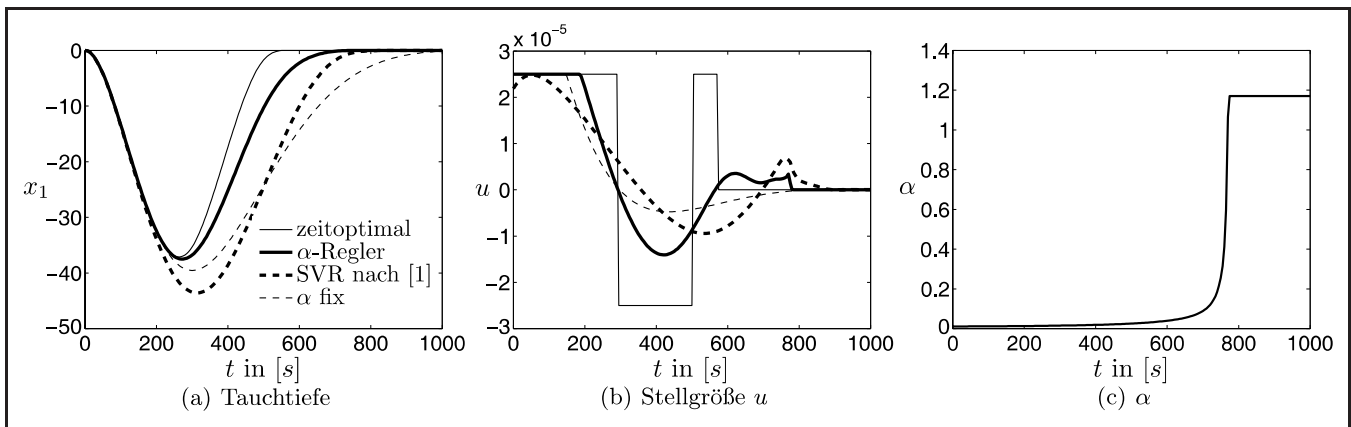


Bild 4: Simulationbeispiel: U-Boot-Dynamik.

Tabelle 1: Vergleich der Ausregelzeiten (absolut und relativ).

Regler	zeitoptimal	α -Regler	WSVR	α fest
$T_{0,1}$	541	712	792	1013
$T_{0,1}/T_{opt}$	1	1,32	1,46	1,87

$\alpha = 0,0109$ ist so gewählt, dass sich der Anfangszustand bei einer Wahl von $\beta = 0,9$ im gesicherten Einzugsbereich der Regelung befindet. Die zeitoptimale Regelung stellt eine natürliche Grenze für die erreichbare Dynamik dar und soll deshalb als Referenzgröße für die Bewertung der Regelungen dienen. Als Maß für die Dynamik der Regelungen ist in Tabelle 1 die Zeit $T_{0,1}$ bis zum Erreichen einer Tiefe von 0,1 m gegeben. Wie zu erwarten war, erzielt der α -Regler durch die erheblich bessere Ausnutzung der Stellgröße ein deutlich besseres Ergebnis als die Regelung mit festem α . Die dargestellte weiche strukturvariable Regelung WSVR nach [1] stellt eine der schnellsten in der Literatur zu findenden Regelungen für das Beispiel dar. Bei ihr wird auch eine variable Zustandsrückführung verwendet. Die Variation der Rückführung erfolgt dort jedoch so, dass mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen immer sichergestellt werden kann, dass $\text{sat}(u) = u$. Wie man in Bild 4b erkennen kann, führt dies zu einer ebenfalls geringeren Stellgrößenausnutzung, was sich in einer entsprechend längeren Ausregelzeit niederschlägt. Zusammenfassend kann der vorgestellte α -Regler für das gegebene Beispiel somit im Vergleich zu den existierenden Reglern als durchaus leistungsfähig eingestuft werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die in diesem Artikel vorgestellte, gesättigte, weiche strukturvariable Regelung zeichnet sich dadurch aus, dass die kommandierte Stellgröße u in großen Bereichen des Zustandsraums größer als der Stellhub des Systems ist. Dies ermöglicht eine nahezu zeitoptimale Stabilisierung einer Ruhelage.

Der wesentliche Aufwand bei der Anwendung der vorgestellten Regelung liegt in der Auswertung der Auswahlstrategie (18). Wie beschrieben, kann dieser jedoch je nach Anwendung stark reduziert werden. Dem gegenüber stehen neben der hohen Ausnutzung der Stellgröße der sehr geringe Aufwand und die Transparenz bei der Parametrierung der Regelung.

Falls eine Online-Veränderung von α trotzdem zu aufwändig erscheint, kann der vorgestellte Ansatz bei Vorgabe eines fixen α auch zur Bestimmung einer konstanten Rückführung verwendet werden. Der so gefundene lineare Regler bietet eine analytische Abschätzung des Einzugsbereichs und eine sinnvolle Polplatzierung.

Um größere Arbeitspunktwechsel zu ermöglichen, soll in einer Folgearbeit die Verwendung eines Führungsfilters vorgestellt werden.

6 Anhang

Beweis Satz 1:

Da die k Eigenvektoren der Eigenwerte von \mathbf{A} mit $\text{Re}(\lambda(\mathbf{A})) \leq -\frac{\alpha}{2}$ im Nullraum von \mathbf{P} liegen, werden diese Eigenwerte durch die Rückführung (6) nicht verschoben. Für den Nachweis, dass das geregelte System $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P})$ q Eigenwerte mit einem Realteil bei $-\frac{\alpha}{2}$ besitzt, muss man die ARE aus Gl. (8) umformen in

$$\underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P})}_{\hat{\mathbf{A}}^T} \mathbf{P} + \mathbf{P} \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P})}_{\hat{\mathbf{A}}} = -\alpha\mathbf{P}.$$

Sei nun $\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})$, $i = 1 \dots, q$ der i -te stabile Eigenwert von $\hat{\mathbf{A}}$ und \mathbf{v}_i der korrespondierende Eigenvektor. Multipliziert man Gl. (6) von rechts und links mit \mathbf{v}_i bzw. \mathbf{v}_i^H , so gilt

$$\mathbf{v}_i^H \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_i = -\alpha \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, q. \quad (23)$$

Da $\hat{\mathbf{A}}$ eine rein reelle Matrix sein muss, gilt $\hat{\mathbf{A}}^T = \hat{\mathbf{A}}^H$ und Gl. (23) wird zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^H \hat{\mathbf{A}}^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_i &= -\alpha \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i \\ (\bar{\lambda}_i(\hat{\mathbf{A}}) + \lambda_i(\hat{\mathbf{A}})) \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i &= -\alpha \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i \\ 2\text{Re}(\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})) &= -\alpha. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P})$ q Eigenwerte $\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})$ mit dem Realteil $Re(\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})) = -\frac{\alpha}{2}$ hat. \square

Beweis Satz 2:

Sei \mathbf{U} die Transformationsmatrix um \mathbf{A}_α auf geordnete Schurform zu transformieren:

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{U}^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_k & \mathbf{T}_{k,q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_q \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_n. \quad (24)$$

Bei der geordneten Schurform sind die Diagonalelemente $T_\alpha(i, i)$ von \mathbf{T}_α in aufsteigender Reihenfolge angeordnet, sodass

$$T_\alpha(i, i) \leq T_\alpha(i + 1, i + 1), \quad \forall i = 1, \dots, n - 1.$$

Die Aufteilung von \mathbf{T} ist dabei so erfolgt, dass $Re(\lambda(\mathbf{T}_q)) > -\frac{\alpha}{2}$. Durch Multiplikation von (8) von links und rechts mit \mathbf{U} bzw. \mathbf{U}^T erhält man

$$\mathbf{T}_\alpha^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}_\alpha = 2\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{P}}. \quad (25)$$

Bedingt durch den Aufbau der Matrix \mathbf{U} sowie der Tatsache, dass die Eigenvektoren der Eigenwerte von \mathbf{A}_α mit $Re(\lambda(\mathbf{A}_\alpha)) \leq 0$ den Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ aufspannen, sind

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}^T \mathbf{P} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_q \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{U}^T \mathbf{b} = [\mathbf{b}_k \mathbf{b}_q]^T. \quad (26)$$

Aufgrund des Aufbaus der Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ müssen nur die letzten q Zeilen und Spalten der Gl. (25) betrachtet werden:

$$\left(\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_q\right)^T \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_q \underbrace{\left(\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_q\right)}_{\Delta_q} = 2\mathbf{P}_q \mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q. \quad (27)$$

Da $Re(\lambda(\Delta_q)) > 0$, ist \mathbf{P}_q nun positiv definit. Deshalb existiert für \mathbf{P}_q eine Cholesky-Zerlegung $\mathbf{P}_q = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, sodass gilt

$$\begin{aligned} \Delta_q^T \mathbf{L}\mathbf{L}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T \Delta_q &= 2\mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \mathbf{L}\mathbf{L}^T \\ \mathbf{L}^{-1} \Delta_q^T \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \Delta_q \mathbf{L}^{-T} &= 2 \underbrace{\mathbf{L}^T \mathbf{b}_q}_{\mathbf{a}} \underbrace{\mathbf{b}_q^T \mathbf{L}}_{\mathbf{a}^T} \end{aligned} \quad (28)$$

Für die Summe der Eigenwerte von (28) gilt nun

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \lambda_j(\mathbf{L}^{-1} \Delta_q^T \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \Delta_q \mathbf{L}^{-T}) &= 2 \sum_{j=1}^q \lambda_j(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \\ 2 \sum_{j=1}^q \lambda_j(\Delta_q) &= 2 \sum_{j=1}^q \lambda_j(\mathbf{a}\mathbf{a}^T). \end{aligned} \quad (29)$$

Die Matrix $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ hat einen Eigenwert $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q \mathbf{b}_q$ und $q - 1$ - Eigenwerte bei Null. Damit wird aus (29)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \lambda_j(\Delta_q) &= \sum_{j=1}^q \lambda_j\left(\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right) = \underbrace{\sum_{j=1}^q \lambda_j(\mathbf{T}_q)}_{\gamma} + q \frac{\alpha}{2} \\ &= \mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q \mathbf{b}_q = [\mathbf{b}_k \quad \mathbf{b}_q]^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_q \end{bmatrix} [\mathbf{b}_k \quad \mathbf{b}_q] = \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \\ \Rightarrow \gamma + q \frac{\alpha}{2} &= \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (30)$$

Mit (30) in (16) ergibt sich das gewünschte Ergebnis

$$\eta = \frac{4\gamma + 2q\alpha}{(2\gamma + (q - 1)\alpha)^2} u_{max}^2. \quad (31)$$

\square

Beweis von Satz 3:

1. Mit der Verwendung der Transformationen aus den Gln. (24) und (26) sowie $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{U}^T \mathbf{z} = [\mathbf{z}_k \mathbf{z}_q]^T$, wird Gl. (10) zu

$$\tilde{\mathbf{z}}^T (\mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}) \tilde{\mathbf{z}} - 2\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{b}} \text{sat}(\tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{z}}) = 0. \quad (32)$$

Wegen des Aufbaus von $\tilde{\mathbf{P}}$ wird daraus

$$\mathbf{z}_q^T (\mathbf{T}_q^T \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_q \mathbf{T}_q) \mathbf{z}_q - 2\mathbf{z}_q^T \mathbf{P}_q \mathbf{b}_q \text{sat}(\mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q \mathbf{z}_q) = 0. \quad (33)$$

Ist ferner $q = 1$, so sind \mathbf{P}_q , \mathbf{T}_q und \mathbf{b}_q Skalare und für den kritischen Punkt $z_q = ab_q$ gilt

$$a = \pm \frac{1}{T_q} u_{max}.$$

Damit ist die Ausdehnung des geschätzten Einzugsbereichs \mathbb{S} unabhängig von α . \square

2. Leitet man die Gl. (31) nach α ab, so erhält man

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = 2 \frac{-2\gamma(q - 2) + q\alpha(1 - q)}{(2\gamma + (q - 1)\alpha)^3} u_{max}^2. \quad (34)$$

Für $\gamma > 0$ und $q > 1$ ist offensichtlich $\frac{d\eta}{d\alpha} < 0$.

Für $\gamma < 0$, $q > 1$ und $\alpha > \max(0, -2\frac{\gamma}{q-1})$ gilt, dass der Nenner von $\frac{d\eta}{d\alpha}$ größer als 0 ist. Da nur die q Eigenwerte von \mathbf{A} verschoben werden, die rechts von $-\frac{\alpha}{2}$ liegen, gilt für die Summe der verschobenen Eigenwerte $\gamma > -\frac{\alpha}{2}q$. Mit der daraus resultierenden Beziehung $-2\gamma < \alpha q$ kann der Zähler nach oben abgeschätzt werden zu

$$\begin{aligned} -2\gamma(q - 2) + q\alpha(1 - q) &< \alpha q(q - 2) + q\alpha(1 - q) = \\ &= -\alpha q < 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\frac{d\eta}{d\alpha} < 0$ auch für $\gamma < 0$.

Um zu zeigen, dass $\frac{d\mathbf{P}}{d\alpha} \geq 0$, leitet man (27) nach α ab:

$$(\Delta_q - 2\mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \tilde{\mathbf{P}})^T \mathbf{P}'_q + \mathbf{P}'_q (\Delta_q - 2\mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q) = -\mathbf{P}_q.$$

\mathbf{P}'_q ist also die Lösung einer Lyapunov-Gleichung mit negativ definiten rechter Seite. Da \mathbf{P}_q die stabilisierende Lösung von Gl. (27) ist, muss $[\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_q - 2\mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \mathbf{P}_q]$ stabil und somit \mathbf{P}'_q positiv definit sein. Aus (26) ergibt sich $\mathbf{P}' = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}'_q \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$ und somit folgt aus $\mathbf{P}'_q > 0$ auch $\mathbf{P}' \geq 0$. \square

3. Für Systeme mit Eigenwerten auf und links der Imaginärachse ist $\gamma \leq 0$, sodass es immer ein $\hat{\alpha} \geq 0$ gibt, welches den Nenner in (31) zu Null macht:

$$2\gamma + (q - 1)\hat{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \hat{\alpha} = -2\frac{\gamma}{q-1}$$

Für $\hat{\alpha} > 0$ ergibt sich für η

$$\eta(\hat{\alpha}) = \lim_{\alpha \rightarrow \hat{\alpha}} \frac{2\hat{\alpha} + 2q(\alpha - \hat{\alpha})}{((q - 1)(\alpha - \hat{\alpha}))^2} u_{max}^2 = \infty$$

Falls \mathbf{A} mehr als einen Eigenwert auf der imaginären Achse besitzt, ist $\hat{\alpha} = 0$. Mit der Regel von l'Hospital wird dann η zu:

$$\eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{q}{(q-1)^2 \alpha} u_{max}^2 = \infty$$

Für $\alpha > 0$ ist $\mathbf{P}(\alpha)$ endlich. Da $\mathbf{P}' \geq 0$ ist, bleibt \mathbf{P} auch für $\alpha \rightarrow 0$ endlich. Somit kann man aus $\eta \rightarrow \infty$ tatsächlich schließen, dass der Einzugsbereich für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ unendlich groß wird. \square

Bemerkung zu möglichen Problemen bei der Berechnung von \mathbf{P}

Laut [8] existiert keine *stabilisierende* Lösung \mathbf{P} für die Riccati-Gleichung (8), falls \mathbf{A}_α Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, was für $\alpha = -2\text{Re}(\lambda(\mathbf{A}))$ der Fall ist. Der Grund hierfür liegt darin, dass die zugehörigen Eigenvektoren im Nullraum von \mathbf{P} liegen. Dadurch hat auch die Matrix $\mathbf{A}_\alpha - 2\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}$ Eigenwerte auf der imaginären Achse und ist folglich nicht asymptotisch stabil. Deshalb wird an diesen Stellen die Lösung \mathbf{P} nicht als *stabilisierende* Lösung bezeichnet. Für die vorgeschlagene Regelung ist jedoch nur wichtig, dass die Lösung \mathbf{P} auch für $\alpha = -2\text{Re}(\lambda(\mathbf{A}))$ existiert und dort stetig ist.

Literatur

- [1] J. Adamy; A. Flemming, "Soft variable-structure controls: a survey", *Automatica*, 40:1821–1844, 2004.
- [2] J. Adamy; H. Lens, „Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter“, *at-Automatisierungstechnik*, 55 (2007), Heft 3, S. 107–118.
- [3] M. Buhl; B. Lohmann, „Schaltende Regler für Systeme mit Stellgrößenbegrenzung“, *Methoden der Regelungstechnik – Erlangen-Münchner Workshop 2005 und 2006*, Shaker-Verlag.
- [4] J.A. De Doná; G.C. Goodwin; S.O.R. Moheimani, "Combining switching, oversaturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation", *Automatica*, 38:1153–1162, 2002.
- [5] O. Föllinger, „Nichtlineare Regelungen 2“, *Oldenbourg Verlag GmbH, München* 1980.
- [6] P. Gutman; P. Hagander, "A New Design of Constraint Controllers for Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control* (1985), Nr. 30, S. 22–33.
- [7] T. Hu; Z. Lin; B. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance", *Automatica*, 38:351–359, 2002.
- [8] Ch. Roduner, „Die Riccati-Gleichung“, *Institut für Mess-Regeltechnik, ETH Zürich*, 1994.

Manuskripteingang: 4. Dezember 2007.



Dipl.-Ing. Michael Buhl promoviert am Lehrstuhl für Regelungstechnik im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: weiche strukturvariable Regelungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Fax: + 49-(0)89-289-15653, E-Mail: buhl@tum.de



Dipl.-Ing. Philipp Joos hat am Lehrstuhl für Regelungstechnik seine Diplomarbeit angefertigt.

Adresse: E-Mail: philipp.joos@mytum.de



Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann ist Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Fakultät Maschinenwesen der TU München. Hauptarbeitsgebiete: Modellreduktion, nichtlineare, robuste und optimale Regelung, aktive Schwingungsdämpfung, industrielle Anwendungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Fax: + 49-(0)89-289-15653, E-Mail: lohmann@tum.de