

Diskretisierte Modelle für Netzwerke verteilt-parametrischer Port-Hamiltonscher Systeme

Paul Kotyczka

Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München

Boltzmannstr. 15, 85748 Garching

E-Mail: kotyczka@tum.de

In diesem Beitrag wird eine systematische Herangehensweise vorgestellt, um diskretisierte Modelle für Netzwerke verteilt-parametrischer Systeme in einer Ortsvariable zu ermitteln. Hierzu wird der Port-Hamiltonsche Ansatz ausgenutzt, der sich im Rahmen der physikalischen Modellbildung und energiebasierten Regelung als nützlich erwiesen hat. Insbesondere wird eine Methode zur strukturerhaltenden Diskretisierung genutzt, die vor einigen Jahren vorgestellt worden ist. Am Beispiel eines einfachen Pipeline-Netzes wird ein einfach zu implementierendes, rekursives Vorgehen vorgestellt, mit welchem die Systemmatrizen des diskretisierten Port-Hamilton-Systems konstruiert werden können. In einem ersten Schritt wird die bestehende Theorie angewandt, um konzentriert-parametrische Näherungen für die einzelnen Subsysteme (z. B. Pipelines) zu erzeugen. Danach wird durch Verschaltung entsprechend der Struktur des Netzes das Port-Hamiltonsche Gesamtmodell, einschließlich Dissipation, rekursiv aufgestellt. Die Modellierung und Simulation des Beispielnetzes wurde mit Hilfe der freien Mathematiksoftware SAGE durchgeführt, wobei Parameter aus der Literatur verwendet wurden.

1 Einleitung

Große Netze zur Übertragung von elektrischer Leistung, Gas, Öl und Wärme sind „Grundgerüste“ industrialisierter Gesellschaften. Ihr Ausbau, die Modernisierung und Umstrukturierung stehen gerade heute in der öffentlichen Diskussion und werden durch veränderte politische Rahmenbedingungen vorangetrieben – man denke an die dezentrale Einspeisung elektrischer Leistung aus erneuerbaren Energiequellen oder den Ausbau der Fernwärmeversorgung zur Nutzung von Kraftwerksabwärme. Das Verhalten einzelner Komponenten solcher Übertragungsnetze (Pipelines, Hochspannungsleitungen) lässt sich durch partielle Differentialgleichungen hyperbolischen Typs beschreiben. Für das Problem der Erzeugung handhabbarer Näherungsmodelle zur Offline-Simulation und Online-Überwachung gibt es eine Vielzahl von Lösungen in unterschiedlichen Detaillierungsgraden.

Im vorliegenden Beitrag wird der energiebasierte Port-Hamiltonsche Formalismus, siehe [7] für eine einführende Übersicht, herangezogen, um Näherungsmodelle solcher verteilt-parametrischer Leitungssysteme zu erzeugen. Verwendet wird die in [6] vorgestellte Methode zur strukturerhaltenden Diskretisierung, die auch als Grundlage für den Regelungsentwurf in [8] dient. Ein Beispiel für ein verwandtes Vorgehen zur Diskretisierung elektrischer Leitungen ist in [5] dargestellt. In [10] wird ein algorithmischer Ansatz zur Erzeugung konzentriert-parametrischer Approximationen eindimensionaler verteilt-parametrischer Port-Hamilton-Systeme mit allgemeinen örtlichen Ansatzfunktionen vorgestellt. Im vorliegenden Beitrag werden die einfachst möglichen Ansatzfunktionen verwendet. Zwar wird dadurch die Allgemeinheit der Darstellung eingeschränkt, jedoch zugunsten einfacher Ausdrücke für die Subsysteme, welche sich rekursiv zu den Systemmatrizen des diskretisierten Gesamtmodells zusammensetzen lassen.

Der Beitrag gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 wird ein kurzer Überblick über die konzentriert- und verteilt-parametrische Port-Hamiltonsche Systembeschreibung gegeben. Abschnitt 3 enthält die Herleitung des Port-Hamiltonschen Modells eines eindimensionalen Fluids, z. B. durch eine Pipeline, das auch als Anwendungsbeispiel dient. In Abschnitt 4 wird der strukturerhaltende Diskretisierungsansatz aus [6] mit den einfachst möglichen Formfunktionen zusammengefasst. Für das Beispiel der Pipeline (prototypisch für Systeme verwandter Struktur) werden die Zustandsmatrizen des diskretisierten Modells hergeleitet. Dies geschieht durch rekursives Verschalten einzelner Segmente. Schließlich wird am Minimalbeispiel eines Netzes aus 3 Leitungen skizziert, wie diskretisierte Modelle von Leitungsnetzen konstruiert werden können. In Abschnitt 5 wird eine mit SAGE [12] erzeugte Simulation des Beispielnetzes gezeigt, während in Abschnitt 6 eine kurze Zusammenfassung mit dem Ausblick auf weitere Arbeiten den Beitrag abschließt.

2 Port-Hamiltonsche Zustandsdarstellung

Port-Hamiltonsche Modelle ergeben sich aus der physikalischen Modellbildung oder aber als Resultat der passivitätsbasierten Regelung, etwa mit der Methode IDA-PBC [11]. Die Komponenten der Zustandsdarstellung beschreiben dabei Speicherung, Austausch und Dissipation einer physikalischen oder rein virtuellen Energiefunktion. Zusammen mit dem kollokierten Ausgang beschreibt die Zustandsdifferentialgleichung ein passives System, so dass die Energiefunktion als Ljapunowfunktion für das freie System herangezogen werden kann. Weiterhin kann leicht gezeigt werden, dass die leistungserhaltende Verschaltung Port-Hamiltonscher Systeme wiederum auf ein Port-Hamiltonsches Gesamtsystem führt, was eine elegante Eigenschaft für die Modellierung großer Systeme darstellt.

2.1 Konzentriert-parametrischer Fall

Die Port-Hamiltonsche Zustandsdifferentialgleichung eines endlich-dimensionalen Systems ist

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{J} - \mathbf{R})\nabla H(z(t)) + \mathbf{G}u(t).$$

Darin ist $z \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor, $u \in \mathbb{R}^m$ der Eingangsvektor und $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Energie- oder Hamiltonfunktion mit der Eigenschaft

$$z^* = \arg \min_z H(z),$$

wobei z^* Ruhelage des Systems ist. Die $n \times n$ -Matrizen $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$ und $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \geq 0$ werden als Struktur- und Dissipationsmatrix bezeichnet und häufig durch $\mathbf{F} = \mathbf{J} - \mathbf{R}$ zusammengefasst. \mathbf{G} ist die Eingangsmatrix der Dimension $n \times m$. Alle Matrizen dürfen auch vom Zustandsvektor und den Eingangsgrößen abhängen. Letzteres ist etwa bei der Modellierung leistungselektronischer Umrichterschaltungen der Fall. Mit der Definition des kollokierten Ausgangs $y \in \mathbb{R}^m$ gemäß

$$y(t) = \mathbf{G}^T \nabla H(z(t)) + \mathbf{D}u(t),$$

wobei die $m \times m$ -Durchgriffsmatrix $\mathbf{D} = -\mathbf{D}^T$ häufig null ist, ergibt sich die Dissipationsungleichung

$$\dot{H} = \underbrace{\partial_z H (\mathbf{J} - \mathbf{R}) (\partial_z H)^T}_{\leq 0} + \underbrace{\partial_z H \mathbf{G} u}_{=y^T u - u^T \mathbf{D}^T u} \leq y^T u.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass $H(\mathbf{z})$ nach unten beschränkt ist, wird so Passivität der Port-Hamiltonschen Zustandsdarstellung gezeigt. Für den autonomen Fall $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ergibt sich $\dot{H} \leq 0$, wodurch Stabilität der Ruhelage \mathbf{z}^* im Sinne von Ljapunow nachweisbar ist.

Notation: ∇H ist der Spaltenvektor der partiellen Ableitungen von H (Gradient), während ∂H den entsprechenden Zeilenvektor, im Einklang mit der Definition der Jacobimatrix, darstellt.

2.2 Verteilt-parametrischer Fall

Eine Verallgemeinerung der Port-Hamiltonschen Darstellung für Systeme, die durch partielle Differentialgleichungen in einer Ortsvariable x beschrieben werden, ist

$$\dot{\mathbf{z}}(x, t) = \mathbf{P}_1 \partial_x (\delta_z H(t))^T - \mathbf{R}_0 (\delta_z H(t))^T. \quad (1)$$

Darin ist der Zustandsvektor \mathbf{z} eine Funktion der Zeit und der Ortsvariable. $\delta_z H$ ist der Zeilenvektor der Variationsableitungen der Gesamtenergie, die durch das Funktional

$$H(\mathbf{z}(\cdot, t)) = \int_a^b \mathcal{H}(\mathbf{z}(x, t), x) dx$$

dargestellt wird. Der Integrand \mathcal{H} ist die Energie- oder Hamiltonsche Dichte. Die Variationsableitung, siehe [7], ist als diejenige Funktion $\delta_z H$ definiert, welche die Gleichung

$$H(\mathbf{z} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}) = H(\mathbf{z}) + \varepsilon \int_a^b \delta_z H(\mathbf{z}) \boldsymbol{\eta} dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

erfüllt. Enthält \mathcal{H} keine partiellen Ableitungen nach der Ortsvariable x , dann gilt $\delta_z H = \partial_z \mathcal{H}$, d. h. die Variationsableitung stimmt mit der partiellen Ableitung der Hamiltonschen Dichte überein. Gleichung (1) kann knapper geschrieben werden, wenn die Leistungsvariablen $\mathbf{f} = \dot{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{e} = (\delta_z H)^T$ eingeführt werden:

$$\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{P}_1 \partial_x \mathbf{e}(x, t) - \mathbf{R}_0 \mathbf{e}(x, t).$$

Die Energiebilanz für ein Intervall $[a, b]$ des verteilt-parametrischen Systems lässt sich wie folgt ermitteln, wobei die Definition der Variationsableitung ausgenutzt und die rechte Seite der partiellen Differentialgleichung eingesetzt wird:

$$\dot{H} = \partial_z H \dot{\mathbf{z}} = \int_a^b \delta_z H \dot{\mathbf{z}} dx = \int_a^b \mathbf{e}^T \mathbf{f} dx = \int_a^b \mathbf{e}^T \mathbf{P}_1 \partial_x \mathbf{e} dx - \underbrace{\int_a^b \mathbf{e}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{e} dx}_{\geq 0}.$$

Bei der betrachteten Systemklasse hat die Matrix \mathbf{P}_1 die in (9) angegebene Gestalt. Der vorletzte Term kann mithilfe partieller Integration ausgewertet werden und mit der Definitheit des letzten Summanden ergibt sich die Energiebilanzgleichung im verteilt-parametrischen Fall

$$\dot{H} \leq e_1(a)e_2(a) - e_1(b)e_2(b).$$

Das Produkt der Koenergievariablen \mathbf{e} beschreibt jeweils den Leistungsfluss an den Rändern des Systems, wobei an dieser Stelle $e_1(a)e_2(a)$ als zugeführte und $e_1(b)e_2(b)$ als entnommene Leistung zu lesen ist. Für weitere Details und Erklärungen wird auf [7] verwiesen.

Tabelle 1: Symbole und Einheiten des Pipelinemodells

Größe	Symbol	Einheit
Strömungsgeschwindigkeit	v	m/s
Dichte	ρ	kg/m ³
Massenstromdichte	ρv	kg/(m ² s)
Spezifische innere Energie	u	Nm/kg
Ortskoordinate	x	m
Höhe der Rohrleitung	y	m
Steigung / Gefälle der Pipeline	α	Grad

3 Modellbildung

3.1 Fluiddynamisches System

Der Durchfluss eines Gases oder Fluids durch eine Rohrleitung wird durch Kontinuitäts- und Impulsgleichungen, siehe etwa [2], [9], beschrieben, die den folgenden Satz von partiellen Differentialgleichungen liefern:

$$\partial_t \rho = -\partial_x(\rho v) \quad (2)$$

$$\partial_t v = -v \partial_x v - \frac{1}{\rho} \partial_x p - g \sin \alpha - \frac{f |v| v}{2D}. \quad (3)$$

Der dimensionslose Reibkoeffizient f kann aus

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right]$$

berechnet werden, mit der Reynoldszahl $\text{Re} = \rho |v| D / \mu$. Die in den Gleichungen auftretenden Größen und deren Symbole sind in den Tabellen 1 und 3 erklärt.

Als weitere Gleichung ist noch die thermodynamische Zustandsgleichung zu berücksichtigen, die die thermodynamischen Zustände Druck, Dichte und Temperatur in Beziehung setzt. Ihre Gestalt hängt von den Bedingungen des fluidischen Systems ab. Für das betrachtete Beispiel wird sie weiter unten formuliert. In diesem Beitrag werden Rohrleitungen mit konstantem Querschnitt $A = D^2 \pi / 4$ betrachtet.

Die Gleichungen (2) und (3) lassen sich auch in Hamiltonscher Form darstellen, siehe [1], [4], was im Folgenden schrittweise nachvollzogen wird. Zunächst werden die Gleichungen für den verlustlosen Fall formuliert, danach wird der Reibungsterm hinzugefügt. Die Hamiltonsche (Volumen-)Dichte des Fluids

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho (v^2 + gy + u(\rho)),$$

besteht aus jeweils einem Anteil, der der kinetischen Energie, der potentiellen Lageenergie und der inneren Energie zuzuschreiben ist. Die Integration entlang eines Segments $[a, b]$ einer Rohrleitung ergibt den Ausdruck der pro Einheitsfläche in dem Segment gespeicherten Energie

$$H_A = \int_a^b \mathcal{H} dx. \quad (4)$$

Die Verwendung dieses Ausdrucks – statt der gespeicherten Gesamtenergie $H_A \cdot A$ – vereinfacht die resultierenden Gleichungen in dem Sinne, dass kein skalierender Faktor $1/A$ auftritt. Da die Hamiltonsche Dichte \mathcal{H} nicht von Ableitungen nach der Ortskoordinate abhängt, gilt:

$$\delta_v H_A = \partial_v \mathcal{H} = \rho v \quad (5)$$

$$\delta_\rho H_A = \partial_\rho \mathcal{H} = \frac{1}{2}v^2 + gy + \underbrace{u + \rho \partial_\rho u}_{\text{Enthalpie } h} \quad (6)$$

Dabei ist $\delta_v H_A$ der Massenstrom pro Fläche (Massenstromdichte) und $\delta_\rho H_A$ hat die Einheit eines Drucks pro Dichte. Im Falle inkompressibler Flüssigkeiten ist $\delta_\rho H_A$ konstant, gemäß der Bernoulligleichung.

3.2 Enthalpie

Im vorliegenden Beitrag werden die fluidischen partiellen Differentialgleichungen in Port-Hamiltonscher Form dargestellt und anschließend strukturerhaltend diskretisiert. Das so erhaltene Modell kann dann z. B. für die Simulation genutzt werden. Dazu ist allerdings die Ermittlung eines expliziten Ausdrucks für die Enthalpie h nötig.

Annahme: Der betrachtete thermodynamische Prozess – die Strömung im Rohr – ist *reversibel* und *adiabatisch* und damit auch *isentrop*.

Im ersten Hauptsatz der Thermodynamik wird die inkrementelle Änderung der inneren Energie du in Beziehung gesetzt zur inkrementellen Wärmezufuhr dq und am System verrichteten Arbeit dw :

$$du = dq + dw.$$

Die Reversibilität des Prozesses wird durch $dw = -pdV$ ausgedrückt, d. h. durch inkrementell zugeführte Arbeit wird das Medium bei gleichem Druck komprimiert. (Bei Entspannung kann das System dann die betragsmäßig gleiche Arbeit verrichten – Umkehrbarkeit.) $V = 1/\rho$ ist das spezifische Volumen. Wird Adiabaticität berücksichtigt, also kein Wärmeaustausch mit der Umgebung, $dq = 0$, dann lautet der erste Hauptsatz unter diesen Bedingungen

$$du = -pdV.$$

Die inkrementelle Änderung der Enthalpie $h = u + pV$ unter den gegebenen Bedingungen lässt sich schließlich darstellen als

$$dh = du + pdV + Vdp = Vdp = \frac{1}{\rho}dp. \quad (7)$$

Mit der Zustandsgleichung für eine Flüssigkeitsströmung aus [3]

$$p - p_{ref} = c^2(\rho - \rho_{ref}),$$

ergibt sich $dp = c^2 d\rho$ und Gleichung (7), die dann $dh = c^2/\rho d\rho$ geschrieben werden kann, lässt sich über die Dichte integrieren:

$$h = h_{ref} + c^2 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{ref}} \right).$$

Aus Gleichung (7) folgt $\partial_x h = \partial_x p / \rho$ und mit $\partial_x y = \sin \alpha$ lässt sich schließlich einfach zeigen, dass die Hamiltonschen Gleichungen

$$\partial_t \rho = -\partial_x (\delta_v H_A), \quad \partial_t v = -\partial_x (\delta_\rho H_A)$$

äquivalent zu (2), (3) sind (im verlustlosen Fall $f = 0$).

3.3 Port-Hamiltonsche Formulierung mit Reibung

Zur Ermittlung der Port-Hamiltonschen Zustandsdarstellung wird der Vektor der Zustandsgrößen $\mathbf{z}(x, t)$ und dessen Zeitableitung $\mathbf{f}(x, t)$ eingeführt, sowie die Variationsableitungen der Hamiltonfunktion gemäß Gleichungen (5), (6) im Vektor $\mathbf{e}(x, t)$ zusammengefasst:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} v \\ \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \partial_t v \\ \partial_t \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \delta_v H_A \\ \delta_\rho H_A \end{bmatrix}.$$

Da ihr Skalarprodukt $\mathbf{e}^T \mathbf{f}$ eine Leistung (pro Fläche) ergibt, spricht man bei \mathbf{f} und \mathbf{e} von Leistungsvariablen. In der englischsprachigen Literatur werden diese Größen auch als *flows* und *efforts* (Koenergievariablen) bezeichnet. Im Übrigen hat hier auch das Produkt $e_1 \cdot e_2$ die Einheit Leistung pro Fläche. Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich die Gleichungen (2), (3) in der kompakten Port-Hamiltonschen Darstellung

$$\partial_t \mathbf{z} = \mathbf{P}_1 \partial_x \mathbf{e} - \mathbf{R}_0(\mathbf{z}) \mathbf{e}, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} r(\mathbf{z}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

anschreiben, wobei ausgenutzt wurde, dass sich der Reibungsterm aus (3) durch

$$\frac{f|z_1|z_1}{2D} = \frac{f|z_1|}{2Dz_2} e_1 =: r(\mathbf{z}) e_1.$$

darstellen lässt.

4 Strukturhaltende Ortsdiskretisierung

In diesem Abschnitt wird gemäß dem Verfahren vorgegangen, welches in [6] vorgestellt worden ist. Die einfachstmöglichen Formfunktionen für die Verläufe von \mathbf{z} , \mathbf{f} und \mathbf{e} werden genutzt, um die endlich-dimensionale Näherung der Port-Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (8) zu erhalten. Nachdem für einen Pipelineabschnitt gegebener Länge das diskretisierte Modell ermittelt worden ist, wird gezeigt, wie das Modell für eine Pipeline aus N Segmenten rekursiv gewonnen werden kann. Schließlich wird beispielhaft vorgeführt, wie mehrere Pipelinestücke zu einem Netzwerk zusammengefügt werden können. Das Pipeline-Beispiel ist dabei prototypisch für Netzwerke von Systemen (wie elektrische Leitungen), deren Gleichungen entsprechende Struktur aufweisen.

Bemerkenswert bei dem angewandten Verfahren ist, dass die resultierenden Zustandsgrößen des Näherungsmodells tatsächliche physikalische (und damit bestenfalls messbare) Größen sind, im Gegensatz zu Amplituden von Schwingungsformen bei den modalen Verfahren.

4.1 Diskretisierungsansatz

Die verteilten Zustände und ihre Zeitableitungen werden auf dem Intervall $x \in [a, b]$ durch folgenden Ansatz ($i = 1, 2$) diskretisiert:

$$z_i(x, t) \approx \omega_i(x)Z_i(t), \quad f_i(x, t) \approx \omega_i(x)F_i(t). \quad (10)$$

Dabei sollen die groß geschriebenen, diskretisierten Zustandsgrößen, das Integral des verteilten Zustands bzw. seiner Zeitableitung über dem Abschnitt $[a, b]$ darstellen, also

$$\int_a^b z_i(x, t)dx = Z_i(t) \quad (11)$$

und entsprechend für die Zeitableitung. Z_1 beschreibt somit den Gesamtimpuls des in einem Intervall befindlichen Fluids pro Dichte, bezogen auf die Einheitsfläche, Z_2 ist die Masse pro Einheitsfläche im Rohrsegment. Aus der Forderung (11) ergibt sich die Bedingung an die Formfunktion

$$\int_a^b \omega_i(x)dx = 1.$$

Die Koenergievariablen $e_i(x, t)$ treten in der rechten Seite der Port-Hamiltonschen Zustandsbeschreibung (8) auf und induzieren die zeitliche Änderung der Zustandsvariablen. Die Randwerte $e_i(a, t)$ links und $e_i(b, t)$ rechts wirken wie Eingänge auf das System und sollen entsprechend im diskretisierten System als $E_i^a(t)$ bzw. $E_i^b(t)$, $i = 1, 2$, auftreten. Der Forderung

$$e_i(a, t) = E_i^a(t), \quad e_i(b, t) = E_i^b(t)$$

wird durch den Ansatz

$$e_i(x, t) \approx \omega_i^a(x)E_i^a(t) + \omega_i^b(x)E_i^b(t) \quad (12)$$

genügt, wobei die Formfunktionen die Randbedingungen

$$\omega_i^a(a) = 1, \quad \omega_i^a(b) = 0, \quad \omega_i^b(a) = 0, \quad \omega_i^b(b) = 1$$

erfüllen müssen. Werden die Ansätze (10), (12) in Gleichung (8) ersetzt (zunächst für den verlustlosen Fall $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$), erhält man die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \omega_1(x)\dot{Z}_1(t) &= -\partial_x\omega_2^a(x)E_2^a(t) - \partial_x\omega_2^b(x)E_2^b(t) \\ \omega_2(x)\dot{Z}_2(t) &= -\partial_x\omega_1^a(x)E_1^a(t) - \partial_x\omega_1^b(x)E_1^b(t), \end{aligned} \quad (13)$$

deren Terme in orts- und zeitabhängige Größen aufgespalten sind. Erfüllen die Formfunktionen die Bedingung

$$\omega_{1/2}(x) = -\partial_x\omega_{2/1}^a(x) = \partial_x\omega_{2/1}^b(x),$$

was mit der einfachsten Wahl der konstanten und linearen Funktionen

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{b-a}, \quad \omega_1^a(x) = \omega_2^a(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \omega_1^b(x) = \omega_2^b(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad (14)$$

gegeben ist, dann lassen sich die Formfunktionen aus (13) kürzen und es ergibt sich der Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1(t) &= E_2^a(t) - E_2^b(t) \\ \dot{Z}_2(t) &= E_1^a(t) - E_1^b(t). \end{aligned} \quad (15)$$

$E_i^{a/b}$ stellen die Randwerte der Koenergievariablen dar, jedoch nicht die Approximationen der Koenergievariablen auf dem Intervall $[a, b]$. Dies geschieht im einfachsten Fall durch Mittelwertbildung

$$E_i := \frac{1}{2}(E_i^a + E_i^b).$$

Dieser Ausdruck lässt sich gemäß $E_i^{a/b} = 2E_i - E_i^{b/a}$ nach den Randwerten auflösen, so dass Gleichung (16) umformuliert werden kann:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1(t) &= 2E_2(t) - 2E_2^b(t) \\ \dot{Z}_2(t) &= -2E_1(t) + 2E_1^a(t).\end{aligned}\tag{16}$$

Durch Ersetzen der Ansätze (10) und (12) mit den einfachen Formfunktionen (14) im Ausdruck für die Energiefunktion (4) erhält man deren Näherung

$$H_{app} = \frac{1}{2} \frac{Z_1^2 Z_2}{\Delta x^2} + g Z_2 Y_{ab} + Z_2 u\left(\frac{Z_2}{\Delta x}\right) \approx H_A.\tag{17}$$

Darin beschreibt Y_{ab} die mittlere Höhe des Rohrleitungsstücks auf dem Intervall der Länge $\Delta x = b - a$. Partielles Ableiten dieser approximierten Energiefunktion nach den konzentrierten Zuständen Z_1 und Z_2 ergibt

$$\partial_{Z_1} H_{app} = \frac{Z_1}{\Delta x} \frac{Z_2}{\Delta x} \approx E_1, \quad \partial_{Z_2} H_{app} = \frac{1}{2} \frac{Z_1^2}{\Delta x^2} + g Y_{ab} + h\left(\frac{Z_2}{\Delta x}\right) \approx E_2.$$

Man erkennt, dass die Ausdrücke die Variationsableitungen gemäß (5) und (6) approximieren, denen die Rolle von verteilten Koenergievariablen e_1 und e_2 zugewiesen worden ist. Damit gilt, wie oben dargestellt, auch $\partial_{Z_i} H_{app} \approx E_i$. Wird nun noch die Reibung innerhalb eines Rohrsegments als konstant angenommen, lässt sich ihre Wirkung auf die Differentialgleichung für Z_1 durch

$$R(\mathbf{Z}) E_1 \quad \text{mit} \quad R(\mathbf{Z}) = \frac{f|Z_1|}{2DZ_2} \Delta x\tag{18}$$

beschreiben. Weist man schließlich den verbleibenden Randgrößen nach Tabelle 2 die Rolle von Eingängen zu, dann ergibt sich die folgende konzentriert-parametrische Port-Hamiltonsche Differentialgleichung welche das Verhalten des Fluids im Rohrleitungsstück $[a, b]$ annähert (ab hier wird die approximierte Energie pro Querschnittsfläche mit $H = H_{app}$ bezeichnet):

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{F} \nabla H(\mathbf{Z}(t)) + \mathbf{G} \mathbf{U}(t)$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -R(\mathbf{Z}) & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.\tag{19}$$

Für eine vollständige Port-Hamiltonsche Zustandsdarstellung fehlt noch die Definition der Ausgänge. Diese sollen kolloziert zu den zuvor definierten Eingängen sein, d. h. ihr Produkt soll eine Leistung pro Fläche ergeben. Außerdem soll durch $A \cdot \mathbf{Y}^T \mathbf{U}$ die Leistung dargestellt sein, die dem Pipelinestück zugeführt wird, was die Vorzeichenwahl für Y_2 erklärt. Es ergibt sich schließlich

$$Y_1 = E_2^a = 2E_2 - U_2, \quad Y_2 = -E_1^b = -2E_1 + U_1,$$

Tabelle 2: Zustände, Eingangs- und Ausgangsgrößen des diskretisierten Pipelinestücks

Symbol	Einheit	Beschreibung
Z_1	m^2/s	Impuls pro Fläche pro Dichte
Z_2	kg/m^2	Masse pro Einheitsfläche
$U_1 = E_1^a$	$\text{kg}/\text{s}/\text{m}^2$	Massenstromdichte von links
$U_2 = E_2^b$	m^2/s^2	Druck pro Dichte, rechts
$Y_1 = E_2^a$	m^2/s^2	Druck pro Dichte, links
$Y_2 = -E_1^b$	$\text{kg}/\text{s}/\text{m}^2$	Massenstromdichte von rechts

bzw. in Vektornotation

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{G}^T \nabla H(\mathbf{Z}(t)) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t)$$

mit der Durchgriffsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Mit Tabelle 2 lässt sich leicht überprüfen, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}^T \mathbf{U}$ die physikalische Leistung darstellt, die über die Ränder dem Pipelinestück zugeführt wird.

4.2 Ein Rohrleitungsstück

Ein einzelnes Rohrleitungsstück wird somit durch die konzentriert-parametrische, Port-Hamiltonsche Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{F} \nabla H + \mathbf{G}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{G}^T \nabla H + \mathbf{D}\mathbf{U} \end{aligned}$$

näherungsweise beschrieben, mit den Matrizen und dem Dissipationsterm gemäß (19), (20) und (18). Bemerkenswert ist, dass der kollokierte Ausgangs \mathbf{Y} nicht wie häufig durch $\mathbf{G}^T \nabla H$, gebildet wird, sondern einen Durchgriff des Eingangs \mathbf{U} enthält.

4.3 Reihenschaltung zweier Rohrleitungsstücke

Zwei Rohrleitungsstücke (Index l für links, r für rechts) werden, zunächst unabhängig voneinander, durch die Zustandsdarstellung

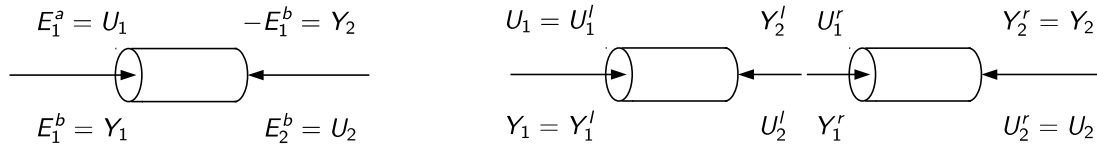
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}^l \\ \dot{\mathbf{Z}}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla H^l \\ \nabla H^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^l \\ U_2^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^l \\ U_1^r \end{bmatrix} \quad (21)$$

beschrieben. Die Verschaltungsbedingungen (Druckgleichheit an der Verbindung und Kontinuität des Massenstroms) werden, entsprechend der Darstellung in Abb. 1 durch

$$\begin{aligned} U_2^l &= Y_1^r = (\mathbf{g}_1^r)^T \nabla H^r - U_2^r \\ U_1^r &= -Y_2^l = -(\mathbf{g}_2^l)^T \nabla H^l - U_1^l \end{aligned}$$

formuliert, so dass zwei Eingangsgrößen aus (21) eliminiert werden und nur die Massenstromdichte links und der Druck pro Dichte rechts als Eingänge des verschalteten Systems übrig

Massenströme



Drücke

Abbildung 1: Ein- und Ausgänge an einem Leitungsstück und bei der Hintereinanderschaltung zweier Segmente

bleiben:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}^l \\ \dot{Z}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^l & \mathbf{g}_2^l (\mathbf{g}_1^r)^T \\ -\mathbf{g}_1^r (\mathbf{g}_2^l)^T & \mathbf{F}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla H^l \\ \nabla H^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^l & -\mathbf{g}_2^l \\ -\mathbf{g}_1^r & \mathbf{g}_2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^l \\ U_2^r \end{bmatrix}.$$

Die kollokierten Ausgänge, also die dualen Leistungsvariablen, für die Reihenschaltung sind

$$\begin{bmatrix} Y_1^l \\ Y_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_1^l)^T \nabla H^l - U_2^l \\ (\mathbf{g}_2^r)^T \nabla H^r + U_1^r \end{bmatrix}.$$

Werden hier wiederum die Verschaltungsbedingungen $-U_2^l = -Y_1^r$ and $U_1^r = -Y_2^l$ ersetzt, ergibt sich der Ausgangsvektor

$$\begin{bmatrix} Y_1^l \\ Y_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_1^l)^T & -(\mathbf{g}_1^r)^T \\ -(\mathbf{g}_2^l)^T & (\mathbf{g}_2^r)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla H^l \\ \nabla H^r \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} U_1^l \\ U_2^r \end{bmatrix}.$$

Die in der Verbindung aus zwei Segmenten gespeicherte Energie pro Querschnittsfläche ist durch die Summe $H = H^l + H^r$ gegeben. Zu beachten ist, neben der Struktur der Eingangsmatrix, der Vorzeichenwechsel vor dem Durchgriff.

4.4 Reihenschaltung von N Segmenten

Rohrleitungsstücke lassen sich iterativ aneinanderfügen. Aus dem Port-Hamiltonschen Modell einer Pipeline mit $N - 1$ Segmenten können die Matrizen für den Fall N wie folgt berechnet werden, wobei gedanklich am rechten Ende ein neues Segment hinzugefügt wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^N &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{N-1} & \mathbf{g}_2^{N-1} \mathbf{g}_1^T \\ -\mathbf{g}_1 (\mathbf{g}_2^{N-1})^T & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_1^N &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{N-1} \\ -\mathbf{g}_1^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^N = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_2^{N-1} \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}^N &= -\mathbf{D}^{N-1}. \end{aligned}$$

Die elementaren „Bausteine“ des Modells $\mathbf{F} = \mathbf{F}^1$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2^1$ und $\mathbf{D} = \mathbf{D}^1$ sind durch (19) und (20) definiert. Die approximierte Gesamtenergie der Leitung ist durch $H = \sum_{i=1}^N H^i$ beschrieben, wobei H^i den Energieinhalt pro Fläche des i -ten Segments nach (17) darstellt.

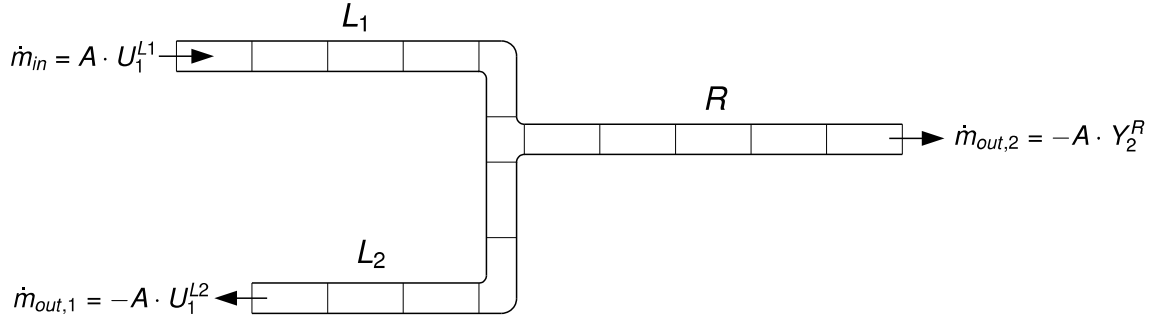


Abbildung 2: Skizze des Beispielnetzes, links die geregelten Einspeise- und Entnahmeknoten. Am Ende von Leitung R sind keine Randbedingungen vorgegeben.

4.5 Rohrleitungsknoten

An einem Knoten von $n = n_l + n_r$ Rohrleitungen, wobei n_l gedanklich von links und n_r von rechts kommen, gelten die Verschaltungsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n_l} Y_2^{L_i} + \sum_{j=1}^{n_r} U_1^{R_j} = 0$$

und

$$U_2^{L_i} = U_2^{L_j} = Y_1^{R_k} = Y_1^{R_l}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n_l\}$ und $k, l \in \{1, \dots, n_r\}$. Die Superskripte L und R bezeichnen Leitungen links und rechts des Knotens. Als einfachstes Beispiel wird der in Abb. 2 dargestellte Knoten dreier Pipelines betrachtet. Als Eingänge werden die Größen U_1^{L1} , U_1^{L2} und U_2^R festgelegt, entsprechend den Massenströmen an den Enden von $L1$ und $L2$ und dem Druck am Ende der Rohrleitung R . Das unverschaltete Gesamtsystem lässt sich anschreiben als

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}^{L1} \\ \dot{Z}^{L2} \\ \dot{Z}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{L1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{L2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla H^{L1} \\ \nabla H^{L1} \\ \nabla H^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{L1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^{L2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{L1} \\ U_1^{L2} \\ U_2^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2^{L1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^{L2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{L1} \\ U_2^{L2} \\ U_1^R \end{bmatrix}.$$

Die Verschaltungsbedingungen in diesem Fall lauten

$$\begin{bmatrix} U_2^{L1} \\ U_2^{L2} \\ U_1^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{g}_1^R)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{g}_1^R)^T \\ -(\mathbf{g}_1^{L1})^T & -(\mathbf{g}_1^{L2})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla H^{L1} \\ \nabla H^{L1} \\ \nabla H^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^{N_R} \\ 0 & 0 & (-1)^{N_R} \\ (-1)^{N_{L1}} & (-1)^{N_{L2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{L1} \\ U_1^{L2} \\ U_2^R \end{bmatrix},$$

so dass sich das verschaltete System als

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}^{L1} \\ \dot{Z}^{L2} \\ \dot{Z}^R \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}^{L1} & \mathbf{0} & \mathbf{g}_2^{L1}(\mathbf{g}_1^R)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{L2} & \mathbf{g}_2^{L2}(\mathbf{g}_1^R)^T \\ -\mathbf{g}_1^R(\mathbf{g}_2^{L1})^T & -\mathbf{g}_1^R(\mathbf{g}_2^{L2})^T & \mathbf{F}^R \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_\Sigma} \begin{bmatrix} \nabla H^{L1} \\ \nabla H^{L1} \\ \nabla H^R \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{L1} & \mathbf{0} & (-1)^{N_R} \mathbf{g}_2^{L1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_1^{L2} & (-1)^{N_R} \mathbf{g}_2^{L2} \\ (-1)^{N_{L1}} \mathbf{g}_1^R & (-1)^{N_{L2}} \mathbf{g}_1^R & \mathbf{g}_2^R \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_\Sigma} \begin{bmatrix} U_1^{L1} \\ U_1^{L2} \\ U_2^R \end{bmatrix} \quad (22)$$

Tabelle 3: Pipeline- und Fluidparameter aus [9]

Größe	Symbol	Wert	Einheit
Länge	L	5000	m
Durchmesser	D	0.508	m
Oberflächenrauigkeit des Rohres	ϵ	$4.6 \cdot 10^{-5}$	m
Referenzdruck	p_{ref}	$5 \cdot 10^5$	Pa
Viskosität	μ	$1.04 \cdot 10^{-1}$	Pa s
Referenz-Eingangsmassenstrom	\dot{m}_{in}	353	kg/s
Schallgeschwindigkeit	c	1227	m/s

darstellen lässt. Schließlich ergibt sich der kollokierte Ausgangsvektor

$$\mathbf{Y}_\Sigma = \mathbf{G}_\Sigma^T \nabla H_\Sigma + \mathbf{D}_\Sigma \mathbf{U}_\Sigma$$

mit der Durchgriffsmatrix

$$\mathbf{D}_\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^{N_{L1}+N_R} \\ 0 & 0 & (-1)^{N_{L2}+N_R} \\ -(-1)^{N_{L1}+N_R} & -(-1)^{N_{L2}+N_R} & 0 \end{bmatrix},$$

wobei der Index Σ anzeigt, dass es sich um Größen des verschalteten Systems handelt.

5 Simulation

Das aus drei Pipelines bestehende Beispielnetz, siehe Abbildung 2, wurde diskretisiert und verschaltet, wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Zur Beschreibung der Strömung in den Rohrleitungen wurden die fluidischen Parameter aus Tabelle 3 benutzt. Jede Pipeline wurde in 5 gleiche Segmente von je 1000 m Länge aufgeteilt, so dass sich eine diskretisierte Port-Hamiltonsche Zustandsdarstellung (22) der Ordnung 30 ergibt. Simuliert wurde mit einer Schrittweite von 0,1 s. Modellbildung und Simulation wurden mit SAGE durchgeführt.

In Abbildung 3 sind die Massenströme an den Rändern der Pipelines über der Zeit dargestellt. \dot{m}_{in} ist der geregelte Massenstrom, der dem System durch die Leitung $L1$ zugeführt wird (strichlierte Linie oben). Mit $\dot{m}_{out,1}$ ist die geregelte Entnahme (Massenstrom) am Ende der Leitung $L2$ dargestellt (strichlierte Linie unten). Der freie (ungeregelte) Abfluss am Ende der Pipeline R (durchgezogene Linie) reagiert auf die Änderungen an den geregelten Enden des Systems. Bei $t = 20s$ wird der ins System gebrachte Massenstrom innerhalb von 10s um 50% erhöht und bei $t = 110s$ wird die geregelte Entnahme $\dot{m}_{out,1}$ ebenfalls um 50% innerhalb von 10s nach oben korrigiert. In den jeweiligen Zeiten stationärer Strömungen erkennt man, als Indikator für die Validität des verwendeten Simulationsmodells, dass $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out,1} + \dot{m}_{out,2}$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ein einfach zu implementierendes, rekursives Vorgehen zur automatischen Erzeugung diskretisierter Modelle für Netzwerke verteilt-parametrischer Systeme wurde vorgestellt. Das Vorgehen ist eine Anwendung einer existierenden Methode zur strukturerhaltenden Ortsdiskretisierung für Port-Hamiltonsche Systeme. Prototypisch für Systeme vergleichbarer Struktur wurden

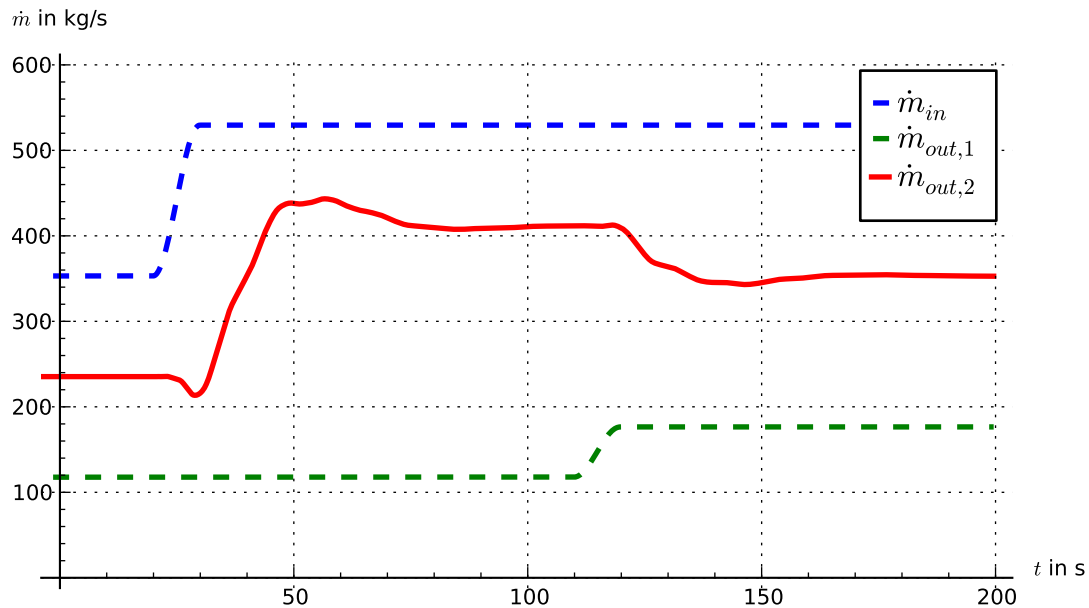


Abbildung 3: Massenstrom an den Rändern des Beispielnetzes. Oben: Einspeisung, unten: geregelte Entnahme, Mitte: freies Ende von Leitung R .

am Beispiel eines einfachen Pipeline-Netzwerks die Modellierungsschritte gezeigt. Besonderes Augenmerk wurde auf die verständliche Herleitung des betrachteten fluidischen Modells gelegt. Durch die Einschränkung auf einfachste Formfunktionen wird die Konstruktion der Systemmatrizen des konzentriert-parametrischen Näherungsmodells überschaubar. Der Einsatz aufwändiger Formfunktionen, die den tatsächlichen Verlauf der Zustandsgrößen besser nachbilden, bleibt noch zu untersuchen. Insbesondere für die elastischen mechanische Systeme, für die der vorgestellte Ansatz in Zukunft zur automatischen Modellgenerierung genutzt werden soll, erscheint die Modifikation der Formfunktionen lohnend in Bezug auf die erreichbare Approximationsgüte. Weiterhin ist dann die Güte der Approximation mit existierenden, etwa modalen Verfahren, zu vergleichen.

Literatur

- [1] Morrison, P. J.: Hamiltonian description of the ideal fluid. In: *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 70, 1998, pp. 467–521.
- [2] Osiadacz, A. J., Chaczykowski, M.: Comparison of isothermal and non-isothermal pipeline gas flow models. In: *Chemical Engineering Journal*, Vol. 81, 2001, pp. 41–51.
- [3] Nieckele, A. O., Braga, A. M. B., Azevedo, L. F. A.: Transient pig motion through gas and liquid pipelines. In: *J. Energy Resources Technology*, Vol. 123, 2001, pp. 260–269.
- [4] van der Schaft, A. J., Maschke, B. M.: Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow. In: *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 42, 2002, pp. 166–194.

- [5] Lopezlana, R., Scherpen, J.M. A.: Lumped Approximation of a transmission line with an alternative geometric discretization. In: *Proc. 2nd IFAC Symp. Systems, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, 2004.
- [6] Golo, G., Talasila, V., van der Schaft, A., Maschke, B.: Hamiltonian discretization of boundary control systems. In: *Automatica*, Vol. 40, 2004, S. 757–771.
- [7] van der Schaft, A. J.: Port-Hamiltonian systems: an introductory survey. In: *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006, pp. 1339–1368.
- [8] Macchelli, A.: Energy shaping of distributed parameter port-Hamiltonian systems based on finite element approximation. In: *Syst. Control Lett.*, Vol. 60, 2011, S. 579–589.
- [9] Hauge, E., Aamo, O. M., Godhavn, J.-M.: Model based pipeline monitoring with leakage detection. In: *Proc. 7th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Pretoria, South Africa, 2007, pp. 318–323.
- [10] Bassi, L., Macchelli, A., Melchiori, C.: An Algorithm to Discretize One-Dimensional Distributed Port Hamiltonian Systems. In: *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control 2006*, Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 366, Springer, 2007, pp. 61–73.
- [11] Ortega, R., Garcia-Canseco, E.: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A Survey. In: *European Journal of Control*, Vol. 10, 2004, pp. 432–450.
- [12] Stein, W. A. et al.: Sage Mathematics Software (Version 5.7), The Sage Development Team, 2013, <http://www.sagemath.org>.