

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
LEHRSTUHL FÜR AERODYNAMIK UND STRÖMUNGSMECHANIK

# Aeroelastische Stabilitäts- und Antwortanalyse auf Basis numerischer Strömungssimulation

Mark Förster

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Oskar J. Haidn

Prüfer der Dissertation:

1. apl.-Prof. Dr.-Ing. Christian W. M. Breitsamter

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 10.09.2015 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 16.03.2016 angenommen.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn apl.-Prof. Dr.-Ing. Christian W. M. Breitsamter für die hervorragende Betreuung und die stete fachliche Unterstützung. Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel für die Prüfung der Arbeit und bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Oskar J. Haidn für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Bei den Herren Dipl.-Ing. Cyrille Vidy und Dr.-Ing. Michail Iatrou bedanke ich mich für die angenehme projektbezogene Zusammenarbeit, sowie für die hilfreichen fachlichen Anregungen und Diskussionen.

Allen Kollegen bin ich für die schöne Zeit am Lehrstuhl dankbar. Bezüglich meiner Arbeit möchte ich den wissenschaftlichen Austausch mit Dipl.-Ing. Alexander Pechloff, Dr.-Ing. Dietmar Fleischer und Dipl.-Ing. Maximilian Winter hervorheben. Großer Dank gilt weiterhin den Studierenden, deren Arbeiten ich während der Zeit am Lehrstuhl betreuen durfte und die in diesem Rahmen ebenfalls einen Beitrag zum Entstehen der vorliegenden Arbeit geleistet haben.

Eching, März 2016

Mark Förster



# Kurzfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die numerische Untersuchung aeroelastisch gekoppelter Stabilitäts- und Antwortprobleme. Die Stabilitätsanalyse bezieht sich auf die Lösung des klassischen Flutterproblems. Im Zusammenhang mit dem Antwortproblem werden dynamische Systemantworten auf diskrete Böenanstörungen analysiert. In diesem Rahmen sind sowohl ein transientes, gekoppeltes Verfahren zur Modellierung nichtlinearer Systeme, als auch ein linearisiertes, sehr effizientes Verfahren zur Modellierung dynamisch linearer Systeme entwickelt worden. Beide Verfahren eignen sich besonders zur Anwendung auf transsonische Problemstellungen.

Die nichtlineare, zeitechte Kopplung erfolgt direkt im Zeitbereich. Dementsprechend werden sowohl die nichtlinearen RANS-Gleichungen zur Modellierung der Strömung, als auch die FEM-basierten Formulierungen zur Modellierung der Struktur und die nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Flugmechanik simultan gelöst. Zusätzlich kommen geeignete Methoden zur Durchführung des Last- und Verformungstransfers zwischen den Lösern, sowie zur Realisierung der Netznachführung zum Einsatz.

Die linearisierte Kopplungsmethodik basiert auf einem zeitlinearisierten RANS-Verfahren, welches generalisierte Luftkräfte sehr effizient im Frequenzbereich bestimmt. Die generalisierten Luftkräfte können anschließend im Rahmen des aeroelastischen Analyseprozesses in einem indirekten Verfahren weiterverwendet werden. Zur Modellierung harmonischer Böenlasten ist eine neue Formulierung entwickelt und erfolgreich in den zeitlinearisierten Löser integriert worden. Die Stabilitätsuntersuchungen werden mithilfe eines klassischen Flutterlösers durchgeführt. Zur Lösung des Antwortproblems wird die Formulierung aus dem Frequenzbereich in ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell überführt und im Zeitbereich gelöst.

Grundsätzlich findet für alle Anwendungsbeispiele jeweils ein Vergleich der nichtlinearen, transienten und der zeitlinearisierten Methode statt. Die Validierung der aeroelastischen Kopplungsmethoden erfolgt an geeigneten experimentellen Daten. Für einen Flügel kleiner Streckung mit symmetrischem Überschallprofil werden kritische Fattergrößen für verschiedene sub-, trans- und supersonische Anströmbedingungen berechnet und mit experimentellen Daten verglichen. Für einen typischen Transportflugzeugflügel großer Streckung mit superkritischem Profil werden statische aeroelastische Verformungen bei transsonischen Anströmbedingungen mit experimentellen Daten validiert. Die Validierung der implementierten Böenmodelle findet an einem zweidimensionalen, analytischen Testfall statt. Die Beurteilung der Vorhersagequalität der linearisierten Methode bezüglich des dynamischen Böenantwortverhaltens des Flügels kleiner Streckung sowie einer generischen Flugzeugkonfiguration erfolgt ausschließlich durch den Vergleich mit der nichtlinearen Referenzlösung. Die Böenantworten der generischen Flugzeugkonfiguration werden unter Berücksichtigung der Flugdynamik ermittelt und diskutiert.



# Abstract

Subject of the present work is the numerical investigation of coupled aeroelastic stability and response problems. The stability analysis refers to the solution of the classical flutter problem. With respect to the response problem, dynamic system responses to discrete gust excitations are analyzed. In this context, a transient coupled approach in order to model non-linear systems as well as a very efficient linear approach in order to model dynamically linear systems are developed. Both methods are particularly appropriate for the application to transonic problems.

The non-linear coupling method is performed directly in time domain. Accordingly, the non-linear RANS-equations, the FEM based formulations as well as the non-linear equations of flight dynamics are solved simultaneously in order to model the flow dynamics, the structural deformations and the rigid body motion, respectively. Additionally, appropriate methods are applied to realize the transfer of loads, displacements and the grid motion.

The linearized coupling method is based on a time-linearized RANS-method. This method is capable of computing generalized aerodynamic forces very efficient in the frequency domain. Subsequently, the generalized aerodynamic forces can be used in an indirect aeroelastic analysis. A new approach in order to model harmonic gust loads is developed and integrated successfully into the time-linearized solver. The stability investigations are conducted using a classical flutter solver. In order to solve the response problem, the respective equations are transformed from frequency domain into a linear time-invariant state-space-model and are finally solved in time domain.

A comparison between the non-linear transient and the time-linearized methods is performed for all test cases. The validation of the aeroelastic coupling methods is done using appropriate experimental data. For a small aspect ratio wing with a symmetrical supersonic airfoil, critical flutter data is computed for sub-, trans- and supersonic free stream conditions and is compared to experimental data. For a typical high aspect ratio transport aircraft wing with supercritical airfoil, static aeroelastic displacements are validated against experimental data at transonic free stream conditions. The validation of the implemented gust models is done using an analytical test case. The assessment of the prediction quality of the linearized method with respect to the dynamic gust response of a small aspect ratio wing as well as of a generic aircraft configuration is based on the comparison to the non-linear reference solution. The gust responses of the generic aircraft configuration are determined and discussed considering the flight dynamics as well.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Aeroelastik in der Luftfahrt . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	4
1.3 Problemstellung und Ziel der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Numerische Methoden</b>	<b>13</b>
2.1 Modellierung der Strömung . . . . .	13
2.1.1 Nichtlinearer CFD-Löser . . . . .	13
2.1.2 Linearisierter CFD-Löser . . . . .	16
2.1.3 Böenmodellierung nichtlinearer Strömungslöser . . . . .	20
2.1.4 Böenmodellierung linearisierter Strömungslöser . . . . .	20
2.2 Modellierung der Struktur . . . . .	22
2.2.1 Finite Elemente Methode . . . . .	22
2.2.2 Modalanalyse . . . . .	27
2.3 Modellierung der Flugmechanik . . . . .	29
2.3.1 Nichtlineare Flugmechanikgleichungen . . . . .	30
2.3.2 Linearisierte Flugmechanikgleichungen . . . . .	32
2.3.3 Trimmanalyse . . . . .	36
2.3.4 Freiflugmodellierung . . . . .	38
2.4 Nichtlineare aeroelastische Analyse . . . . .	38
2.4.1 Oberflächeninterpolation . . . . .	39
2.4.2 Lastinterpolation . . . . .	41
2.4.3 Netznachführung . . . . .	42
2.4.4 Zeitliche Kopplungsmethoden . . . . .	45
2.5 Lineare aeroelastische Analyse . . . . .	48
2.5.1 Generalisierte Luftkräfte . . . . .	49
2.5.2 Stabilitätsanalyse . . . . .	51
2.5.3 Antwortanalyse . . . . .	55
<b>3 Stabilitätsproblem - Flutteranalyse</b>	<b>61</b>
3.1 Flügel kleiner Streckung . . . . .	61
3.1.1 Numerische Modellierung . . . . .	62
3.1.2 Statische Analyse . . . . .	66
3.1.3 Flutteranalyse im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	68
3.2 Flügel großer Streckung . . . . .	77
3.2.1 Numerische Modellierung . . . . .	79

---

3.2.2	Statische aeroelastische Analyse . . . . .	83
3.2.3	Dynamische Analyse erzwungener Schwingungen . . . . .	88
3.2.4	Dynamische Analyse freier Schwingungen . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Antwortproblem - Böenanalyse</b>	<b>95</b>
4.1	Zweidimensionaler Testfall . . . . .	95
4.2	Flügel kleiner Streckung . . . . .	102
4.2.1	Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas . . . . .	102
4.2.2	Böenantwort im Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	105
4.3	Generisches Modellflugzeug . . . . .	111
4.3.1	Numerische Modellierung . . . . .	112
4.3.2	Statische aeroelastische Analyse . . . . .	117
4.3.3	Dynamische aeroelastische Böenantwort unter Berücksichtigung der Flugmechanik . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Aeroelastisches Kräftedreieck . . . . .	3
2.1	Multiblock-Topologie einer Flügel-Rumpf-Konfiguration in Oberflächennähe	44
2.2	Funktionsweise des Verformungsalgorithmus für Multiblock-Netze, aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur die oberflächennächsten Blöcke des undeformierten Referenznetzes (schwarz, grün) und des deformierten Netzes (rot, blau) dargestellt . . . . .	45
2.3	Programmablaufplan der gekoppelten Simulation im Zeitbereich . . . . .	47
2.4	Programmablaufplan der Stabilitätsanalyse . . . . .	53
2.5	Programmablaufplan der Antwortanalyse . . . . .	59
3.1	Geometrie des AGARD 445.6-Flügels [53] . . . . .	62
3.2	Diskretisierung des AGARD 445.6-Strukturmodells; links: FEM-Netz; rechts: Dickenverteilung . . . . .	63
3.3	1. Biegemode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53] . . . . .	64
3.4	1. Torsionsmode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53] . . . . .	64
3.5	2. Biegemode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53] . . . . .	64
3.6	2. Torsionsmode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53] . . . . .	64
3.7	Diskretisierung des Strömungsraums um die AGARD 445.6-Konfiguration; links: Netztopologie und Oberflächennetz; rechts: Netzschnitt und Oberflächennetz im Bereich der Tragflügelspitze [53] . . . . .	65
3.8	Vergleich der stationären Druckverteilungen in drei verschiedenen Profilschnitten $\eta$ am AGARD 445.6-Flügel zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Simulation für verschiedene Machzahlen $M_\infty < 1$ bei $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	67
3.9	Vergleich der stationären Druckverteilungen in drei verschiedenen Profilschnitten $\eta$ am AGARD 445.6-Flügel zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Simulation für verschiedene Machzahlen $M_\infty > 1$ bei $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	68
3.10	Überschallgebiet am AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,960$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	68
3.11	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,499$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	70
3.12	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,678$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	70
3.13	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,901$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	71
3.14	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,960$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	71
3.15	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 1,072$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	72

3.16	GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 1,141$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . .	72
3.17	Lissajousfigur von den GAF der ersten Torsionsmode für den AGARD 445.6-Flügel bei $k_{red} = 1,0$ , $\alpha = 0^\circ$ , $M_\infty = 0,960$ (links) und $M_\infty = 1,141$ (rechts) . . . . .	73
3.18	V-f- und V-g-Diagramm für den AGARD 445.6-Flügel bei $M_\infty = 0,901$ , $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$ und $\alpha = 0^\circ$ , ermittelt mit AER-NS (reibungsbefahet) und der g-Methode . . . . .	74
3.19	FS (links) und FR (rechts) ermittelt mit der g-Methode für den AGARD 445.6-Flügel in Abhängigkeit der Machzahl im Vergleich zu experimentellen Daten [163] bei $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	75
3.20	Antwort der generalisierten Koordinaten des AGARD 445.6-Flügel auf eine initiale Störung bei $M_\infty = 0,678$ , $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$ , $\alpha = 0^\circ$ und $q_\infty = 5296 \text{ Pa}$ (links), $q_\infty = 5575 \text{ Pa}$ (Mitte), $q_\infty = 5853 \text{ Pa}$ (rechts) [53] . . . . .	76
3.21	Dämpfung der Strukturantwort des AGARD 445.6-Flügel in Abhängigkeit des Staudrucks bei $M_\infty = 0,678$ , $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$ und $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	77
3.22	FS (links) und FR (rechts) für den AGARD 445.6-Flügel, ermittelt mit nichtlinearen, gekoppelten Methoden in Abhängigkeit der Machzahl im Vergleich zu experimentellen Daten [163] bei $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	77
3.23	Dreiseitenansicht des HIRENASD-Modells [52] . . . . .	80
3.24	Flügelquerschnittsgeometrie und bemaßte Draufsicht des HIRENASD- Windkanalmodells in Millimetern [21] . . . . .	80
3.25	Diskretisierung des HIRENASD-Strukturmodells; links: FEM-Netz; rechts: Dickenverteilung [52] . . . . .	81
3.26	1. Biegemode des HIRENASD-Strukturmodells [52] . . . . .	82
3.27	2. Biegemode des HIRENASD-Strukturmodells [52] . . . . .	82
3.28	1. Torsionsmode des HIRENASD-Strukturmodells [52] . . . . .	82
3.29	Diskretisierung des Strömungsraums um die HIRENASD-Konfiguration; links: Netztopologie und Oberflächennetz; rechts: Netzchnitt und Oberflächennetz im Bereich der Tragflügelspitze [52] . . . . .	83
3.30	Starrer Flügel (grau) und aeroelastisch verformter Flügel der HIRENASD-Konfiguration mit Oberflächendruckverteilung in der statischen Gleichgewichtslage bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 3^\circ$ , $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 14 \cdot 10^6$ [52] . . . . .	84
3.31	Vergleich der Biegelinien der Flügelvorderkante (VK) und der Flügelhinterkante (HK) der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten [114] bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 3^\circ$ , $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 14 \cdot 10^6$ [52] . . . . .	85
3.32	Vergleich der Auftriebs- (links) und der Nickmomentenpolare (rechts) der HIRENASD-Konfiguration in Abhängigkeit des Anstellwinkels $\alpha$ mit experimentellen Daten (EXP) [114] bei $M_\infty = 0,8$ , $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 14 \cdot 10^6$ . . . . .	85
3.33	Vergleich der stationären Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten $\eta$ zwischen dem starren und dem aeroelastisch verformten (FSI) Tragflügel der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten (EXP) [114] für drei verschiedene Anstellwinkel $\alpha$ und bei $M_\infty = 0,8$ , $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 14 \cdot 10^6$ [52] . . . . .	86

3.34	Vergleich der stationären Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten $\eta$ zwischen dem starren und dem aeroelastisch verformten (FSI) Tragflügel der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten (EXP) [114] bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 1,5^\circ$ , $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 7 \cdot 10^6$ [52] . . . . .	87
3.35	Vergleich der komplexen Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten $\eta$ für erzwungene harmonische Schwingungen der HIRENASD-Konfiguration in der zweiten elastischen Eigenmode mit experimentellen Daten [114] bei $\alpha = 1,5^\circ$ , $k_{red} = 0,66$ , $\Delta z = 0,0039 m$ , $M_\infty = 0,8$ , $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 7 \cdot 10^6$ [52] . . . . .	89
3.36	Zeitlicher Verlauf der normierten Modalkoordinaten von 1., 2. und 5. Eigenmode der anfangs unverformten HIRENASD-Konfiguration bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 1,5^\circ$ , $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$ und $Re = 7 \cdot 10^6$ . . . . .	91
3.37	Frequenzverlauf (links) und Dämpfungsverlauf (rechts) in Abhängigkeit des entdimensionalisierten Staudrucks $q_\infty/E$ von 1., 2. und 5. Eigenmode der anfangs unverformten HIRENASD-Konfiguration bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 1,5^\circ$ und $Re = 7 \cdot 10^6$ und Vergleich mit experimentellen Daten [125] . . . . .	91
3.38	V-f- und V-g-Diagramm für die HIRENASD-Konfiguration bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 1,5^\circ$ und $\rho_\infty = 1,259 kg/m^3$ , ermittelt mit AER-SDNS (reibungsfrei) und der g-Methode [52] . . . . .	92
3.39	V-f- und V-g-Diagramm für die HIRENASD-Konfiguration bei $M_\infty = 0,8$ , $\alpha = 1,5^\circ$ , $Re = 7 \cdot 10^6$ und $\rho_\infty = 1,259 kg/m^3$ , ermittelt mit AER-SDNS (reibungsbefahet) und der g-Methode [52] . . . . .	93
4.1	Sears-Funktion in der komplexen Ebene . . . . .	96
4.2	Diskretisierung des Strömungsraums für NACA-Profil variabler Dicke, links: NACA0003, Mitte: NACA0006, rechts: NACA0012 . . . . .	97
4.3	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Profile NACA0003 (d/l3), NACA0006 (d/l6), NACA0012 (d/l12), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), $M_\infty = 0,2$ , $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	98
4.4	Amplitude des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Profile NACA0003 (d/l3), NACA0006 (d/l6), NACA0012 (d/l12), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), $M_\infty = 0,2$ , $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	98
4.5	Phasenlage des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Profile NACA0003 (d/l3), NACA0006 (d/l6), NACA0012 (d/l12), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), $M_\infty = 0,2$ , $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	98
4.6	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Profile NACA0003 (d/l3), NACA0006 (d/l6), NACA0012 (d/l12), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU), $M_\infty = 0,2$ , $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	99
4.7	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Machzahlen $M_\infty = 0,1$ (M0.1), $M_\infty = 0,1$ (M0.4), $M_\infty = 0,4$ (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006, $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	100
4.8	Amplitude des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Machzahlen $M_\infty = 0,1$ (M0.1), $M_\infty = 0,1$ (M0.4), $M_\infty = 0,4$ (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006, $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	100

4.9	Phasenlage des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Machzahlen $M_\infty = 0,1$ (M0.1), $M_\infty = 0,1$ (M0.4), $M_\infty = 0,4$ (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006, $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	100
4.10	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Machzahlen $M_\infty = 0,1$ (M0.1), $M_\infty = 0,1$ (M0.4), $M_\infty = 0,4$ (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU), NACA0006, $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	101
4.11	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Böenamplituden $\hat{\alpha}_B=0,5^\circ$ (WB05), $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ (WB1), $\hat{\alpha}_B=2^\circ$ (WB2), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006, $M_\infty = 0,2$ . . . . .	101
4.12	Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Böenamplituden $\hat{\alpha}_B=0,5^\circ$ (WB05), $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ (WB1), $\hat{\alpha}_B=2^\circ$ (WB2), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU), NACA0006, $M_\infty = 0,2$ . . . . .	101
4.13	Sears-Funktion in der komplexen Ebene, Vergleich zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Lösung, sowie zwischen der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (SD) Lösung, NACA0006, $M_\infty = 0,2$ , $\hat{\alpha}_B=1^\circ$ . . . . .	102
4.14	Vergleich der Böenantworten der ersten generalisierten Koordinate des AGARD 445.6-Flügels für starke (s) und schwache (w) zeitliche Kopplungsschemata variablen Zeitschritts, bestimmt mit dem nichtlinearen, reibungsfreien Löser, $M_\infty = 0,499$ , $q_\infty = 2139 Pa$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ , $t_B = 0,1 s$ ; rechts: vergrößerte Ansicht der ersten Auslenkungsamplitude . . . . .	104
4.15	Böen-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für $M_\infty = 0,499$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	106
4.16	Böen-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für $M_\infty = 0,960$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	107
4.17	Böen-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für $M_\infty = 1,141$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	108
4.18	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 50 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 0,499$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	109
4.19	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 5 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 0,499$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	109
4.20	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 50 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 0,960$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	110
4.21	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 5 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 0,960$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	110
4.22	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 50 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 1,141$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	111
4.23	Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit $l_B = 5 m$ , $\hat{w}_B = 2 m/s$ (links) und $\hat{w}_B = 10 m/s$ (rechts) bei $M_\infty = 1,141$ , $U_\infty = 100 m/s$ und $\alpha = 0^\circ$ [53] . . . . .	111
4.24	Geometrie und Dreiseitenansicht des generischen Modellflugzeugs . . . . .	112
4.25	1. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	114
4.26	3. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	114

4.27	5. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	114
4.28	7. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	114
4.29	9. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	115
4.30	11. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	115
4.31	14. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	115
4.32	17. Mode des generischen Modellflugzeugs . . . . .	115
4.33	Diskretisierung des Strömungsraums um das generische Modellflugzeug . .	116
4.34	Auslenkung des Höhenruders zur Trimmung des generischen Modellflugzeugs	118
4.35	Aeroelastische Verformung des generischen Modellflugzeugs im getrimmten Flugzustand, bestimmt mit dem reibungsfreien Löser, $M_\infty = 0,2$ , $q_\infty =$ $2837,2 Pa$ , $\alpha = 0,88^\circ$ . . . . .	119
4.36	Druckbeiwert in drei Tragflächenschnitten des elastischen (FSI) und des starken generischen Modellflugzeugs im getrimmten Flugzustand, bestimmt mit dem reibungsfreien Löser, $M_\infty = 0,2$ , $q_\infty = 2837,2 Pa$ . . . . .	119
4.37	Zeitlicher Verlauf der an der 1/4-Punktlinie der Tragfläche des generischen Modellflugzeugs induzierten Böengeschwindigkeit für die Böen B3 (links) und B20 (rechts) bei $U_\infty = 68 m/s$ . . . . .	120
4.38	Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflug- zeugs auf die Böenanregung B3, bestimmt mit der nichtlinearen Methode (NL) für die starre Referenzkonfiguration (UNDEF) und die statisch, elas- tisch verformte Konfiguration, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty = 2837,2 Pa$ , $l_B = 3 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	122
4.39	Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflug- zeugs auf die Böenanregung B20, bestimmt mit der nichtlinearen Methode (NL) für die starre Referenzkonfiguration (UNDEF) und die statisch, elas- tisch verformte Konfiguration, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty = 2837,2 Pa$ , $l_B = 20 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	124
4.40	Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflug- zeugs auf die Böenanregung B3, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (LIN) Methode für die starre und die dynamisch, elastisch verformte (FSI) Konfiguration, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty = 2837,2 Pa$ , $l_B = 3 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	125
4.41	Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflug- zeugs auf die Böenanregung B20, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (LIN) Methode für die starre und die dynamisch, elastisch verformte (FSI) Konfiguration, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty = 2837,2 Pa$ , $l_B = 20 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	126
4.42	Antwort der symmetrischen, elastischen Freiheitsgrade des generischen Mo- dellflugzeugs auf die Böenanregung B3, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) (links) und der linearisierten (LIN) (rechts) Methode mit (FM) und ohne Berücksichtigung der Starrkörperfreiheitsgrade, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty =$ $2837,2 Pa$ , $l_B = 3 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	127
4.43	Antwort der symmetrischen, elastischen Freiheitsgrade des generischen Mo- dellflugzeugs auf die Böenanregung B20, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) (links) und der linearisierten (LIN) (rechts) Methode mit (FM) und ohne Berücksichtigung der Starrkörperfreiheitsgrade, $U_\infty = 68 m/s$ , $q_\infty =$ $2837,2 Pa$ , $l_B = 20 m$ , $\hat{w}_B = 5 m/s$ . . . . .	127

- 
- 4.44 Oberflächendruckverteilung, Position und Verformung des generischen Modellflugzeugs während der elastischen Antwort auf die Böenanregung B3 zum Zeitpunkt  $t = 0,064s$  (links) und  $t = 0,144s$  (rechts) im Vergleich zur ungestörten Konfiguration (grau), bestimmt mit dem nichtlinearen Löser,  $U_\infty = 68 m/s$ ,  $q_\infty = 2837,2 Pa$ ,  $l_B = 3 m$ ,  $\hat{w}_B = 5 m/s$  . . . . . 128
- 4.45 Oberflächendruckverteilung, Position und Verformung des generischen Modellflugzeugs während der elastischen Antwort auf die Böenanregung B20 zum Zeitpunkt  $t = 0,184s$  (links) und  $t = 0,327s$  (rechts) im Vergleich zur ungestörten Konfiguration (grau), bestimmt mit dem nichtlinearen Löser,  $U_\infty = 68 m/s$ ,  $q_\infty = 2837,2 Pa$ ,  $l_B = 20 m$ ,  $\hat{w}_B = 5 m/s$  . . . . . 129

# Tabellenverzeichnis

2.1	Zerlegung der Nickschwingung c) in die Ein-Freiheitsgrad-Schwingungen Schlagschwingung a) und Drehschwingung b) [51] . . . . .	36
3.1	Geometrische Eigenschaften des AGARD 445.6-Flügels [163], [53] . . . . .	62
3.2	Materialeigenschaften des AGARD 445.6-Flügels [163], [92], [53] . . . . .	63
3.3	Eigenfrequenzen des AGARD 445.6-Flügels [53] . . . . .	63
3.4	Anströmbedingungen der für den AGARD 445.6-Flügel untersuchten Testfälle [53] . . . . .	66
3.5	Geometrische Eigenschaften des HIRENASD-Windkanalmodells [5] . . . . .	78
3.6	Materialeigenschaften des HIRENASD-Windkanalmodells bei $T = 293 K$ [5] . . . . .	79
3.7	Eigenfrequenzen des HIRENASD-Modells bei $T_\infty = 293 K$ [52] . . . . .	81
3.8	Anströmbedingungen zur Validierung der statischen aeroelastischen Verformung der HIRENASD-Konfiguration [52] . . . . .	84
3.9	Anströmbedingungen zur Validierung der dynamischen aeroelastischen Verformung der HIRENASD-Konfiguration [52] . . . . .	87
4.1	Anströmbedingungen und Eigenschaften des NACA0006-Basisfalls . . . . .	97
4.2	Anströmbedingungen und Eigenschaften der "1-cos"-Vertikalböe für die Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas am AGARD 445.6-Flügel . . . . .	103
4.3	Testfälle und Rechenzeitbedarf für die Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas am AGARD 445.6-Flügel . . . . .	103
4.4	Eigenschaften der am AGARD 445.6-Flügel untersuchten "1-cos"-Böen [53] . . . . .	107
4.5	Geometrische Eigenschaften des generischen Modellflugzeugs . . . . .	113
4.6	Materialeigenschaften des generischen Modellflugzeugs . . . . .	113
4.7	Eigenfrequenzen des generischen Modellflugzeugs . . . . .	116
4.8	Anströmbedingungen der starren und der elastischen generischen Modellflugzeugkonfiguration im getrimmten Flugzustand . . . . .	118
4.9	Eigenschaften der "1-cos"-Böenanregungen für das generische Modellflugzeug120 . . . . .	



# Nomenklatur

## Lateinische Symbole

$a$	Schallgeschwindigkeit
$\mathbf{a}$	Beschleunigungsvektor
$\underline{\mathbf{A}}_{eBj}$	böeninduzierte RFA-Vektoren
$\overline{\mathbf{A}}_{eej}$	verformungsinduzierte RFA-Matrizen
$\overline{\mathbf{AIC}}$	Matrix der aerodynamischen Einflusskoeffizienten
$\mathbf{b}$	Volumenkraftvektor
$c$	lokale Profiltiefe
$c_A$	Auftriebsbeiwert
$c_{A0}$	Nullauftriebsbeiwert
$c_i$	aerodynamischer Beiwert
$c_{ij}$	aerodynamisches Stabilitätsderivativ
$c_k$	Steifigkeitsdämpfungskonstante
$c_L$	Rollmomentenbeiwert
$c_m$	Trägheitsdämpfungskonstante
$c_M$	Nickmomentenbeiwert
$c_{M0}$	Nullmomentenbeiwert
$c_N$	Giermomentenbeiwert
$c_W$	Widerstandsbeiwert
$c_Y$	Seitenkraftbeiwert
$\overline{\mathbf{C}}$	Dämpfungsmatrix, Elastizitätstensor
$d$	Dicke
$\mathbf{d}$	Vektor der Knotenverschiebungen
$D$	Dämpfungsmaß
$e$	spezifische Energie
$e_0, e_x, e_y, e_z$	Euler-Rodrigues-Parameter
$E$	Elastizitätsmodul
$f$	Frequenz
$f_j$	Freiheitsgrad
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$	konvektive Flüsse in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{f}_v, \mathbf{g}_v, \mathbf{h}_v$	viskose Flüsse in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{F}$	Lastvektor
$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$	konvektive Flüsse in krummlinigen Koordinaten
$\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v, \mathbf{H}_v$	viskose Flüsse in krummlinigen Koordinaten
$\mathbb{F}$	modaler Lastvektor
$g$	Erdbeschleunigung, künstliche Strukturdämpfung
$G$	Schubmodul
$\overline{\mathbf{G}}$	Interpolationsmatrix
$H$	Hankel-Funktion

$\mathbf{H}$	Vektor der Übertragungsfunktionen
$i$	imaginäre Einheit
$\bar{\mathbf{I}}$	Einheitsmatrix, Trägheitstensor
$J$	Jakobideterminante
$k$	dimensionslose Frequenz
$k_{red}$	reduzierte Frequenz
$K$	Plattensteifigkeit, Federsteifigkeit
$K_i$	modale Steifigkeit
$\bar{\bar{\mathbf{K}}}$	Steifigkeitsmatrix
$\bar{\mathbf{K}}$	modale Steifigkeitsmatrix
$l$	Länge, Flügeltiefe
$l_m$	mittlere Flügeltiefe
$l_\mu$	Bezugsflügeltiefe
$L$	Rollmoment
$\mathbf{L}$	Drehimpulsvektor
$\bar{\mathbf{L}}$	Operatormatrix
$m$	Masse
$M$	Machzahl, Nickmoment
$M_i$	modale Masse
$\mathbf{M}$	Momentenvektor
$\bar{\mathbf{M}}$	Massenmatrix
$\bar{\mathbf{M}}$	modale Massenmatrix
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$N$	Giermoment, Anzahl der Iterationen
$N^e$	Elementanzahl
$\mathbf{N}$	Vektor der Formfunktionen
$p$	Druck, dimensionslose Laplace-Variable
$p, q, r$	Winkelgeschwindigkeiten in körperfesten Koordinaten
$q_i$	Wärmestrom, Staudruck
$q_{Bj}$	böeninduzierte RFA-“lag states”
$\mathbf{q}$	Zustandsvektor in kartesischen Koordinaten, Vektor der generalisierten Verschiebungen
$\mathbf{q}_{ej}$	verformungsinduzierte RFA-“lag states”
$\mathbf{Q}$	Zustandsvektor in krummlinigen Koordinaten
$\bar{\mathbf{Q}}$	Matrix der generalisierten Luftkräfte
$r$	Radius
$\mathbf{r}$	Vektor des Hebelarms eines Punktes bezogen auf den Drehpunkt, Vektor der Starrkörperfreiheitsgrade
$R$	spezifische Gaskonstante
$\mathbf{R}$	Residuumsvektor
$Re$	Reynoldszahl
$s$	Halbspannweite, Bogenlänge, Laplace-Variable
$\mathbf{s}$	Vektor der Trimmvariablen
$S$	Fläche, Sears-Funktion
$t$	Zeit
$\mathbf{t}$	Oberflächenkraftvektor
$T$	Temperatur, Schubkraft
$u, v, w$	Geschwindigkeiten in kartesischen (körperfesten) Koordinaten,

	Verschiebungen in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$U_\infty$	ungestörte Anströmgeschwindigkeit
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$V_w$	Windgeschwindigkeit in erdfesten Koordinaten
$w_B$	induzierte Böengeschwindigkeit
$W$	Gewichtskraft
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$\mathbf{x}$	Ortsvektor
$X$	Längskraft
$Y$	Seitenkraft
$Z$	Normalkraft

### Griechische Symbole

$\alpha$	Anstellwinkel, Stabilitätsparameter
$\beta$	Schiebewinkel, Stabilitätsparameter
$\gamma$	Schubrotationswinkel, Abklingrate
$\gamma_j$	RFA-Polstellen
$\Gamma$	Rand
$\delta$	logarithmisches Dekrement
$\bar{\epsilon}$	Dehnungstensor
$\zeta_i$	modales Dämpfungsverhältnis
$\eta$	Höhenruderwinkel
$\theta$	Nickwinkel
$\kappa$	Isentropenexponent
$\lambda$	Zuspitzung
$\Lambda$	Streckung
$\mu$	Massenverhältnis
$\nu$	Querdehnzahl
$\xi, \eta, \zeta$	krummlinige Koordinaten
$\rho$	Dichte
$\bar{\sigma}$	Spannungstensor
$\tau$	Zeit im krummlinigen Koordinatensystem
$\tau_{ij}$	Schubspannung
$\tau^*$	Pseudozeit
$\phi$	Torsionswinkel, Rollwinkel, Pfeilungswinkel
$\Phi$	Eigenvektor
$\psi$	Gierwinkel
$\omega$	Kreisfrequenz
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor
$\Omega$	Gebiet

## Tiefgestellte Indizes

0	Anfangswert
1, 2, 3	Richtungsindizes
$A$	Größe bezieht sich auf die bewegungsinduzierte Aerodynamik
$b$	Größe in körperfesten Koordinaten
$B$	Größe bezieht sich auf die Böe
$f$	Größe in erdfesten Koordinaten, Größe am Flatterpunkt
$F$	Größe bezieht sich auf das Fluid, Größe bezieht sich auf den Flügel
$e$	Größe bezieht sich auf die elastischen Moden
$H$	Größe bezieht sich auf das Höhenleitwerk
$i, j, k$	diskrete Raumindizes
$k$	konvektiver Anteil
$max$	Maximalwert
$r$	Größe bezieht sich auf die Starrkörpermoden
$ref$	Referenzwert
$S$	Größe bezieht sich auf die Struktur, Größe bezieht sich auf das Seitenleitwerk
$t$	zeitliche Ableitung
$T$	Hebelarm für den Schubvektor
$v$	viskoser Anteil
$x, y, z$	örtliche Ableitungen nach genannter Variable
$\infty$	ungestörte Anströmbedingungen

## Hochgestellte Indizes

0	Anfangswert
(1)	Störanteil der Strömungsgröße
(2)	Störanteil der Metrik
$e$	elementbezogene Größe
$m$	diskreter Pseudozeitindex
$n$	diskreter Zeitindex
–	zeitinvarianter Anteil
=	Matrix
$\wedge$	Amplitude, vorgeschriebene Größe
$\sim$	harmonischer Anteil, effektive Größe
$\cdot$	zeitliche Ableitung
$\prime$	turbulenter Anteil

## Abkürzungen

AIC	aerodynamische Einflusskoeffizienten
CFD	Computational Fluid Dynamics
CVT	Constant Volume Tetrahedron
DTS	Dual-Time-Stepping

---

ETW	Europäischer Transsonischer Windkanal
FEM	Finite-Elemente-Methoden
FR	Frequenzverhältnis
FS	Flutter Speed Index
GAF	generalisierte Luftkräfte
GDG	gewöhnliche Differentialgleichung
HIRENASD	High Reynolds Number Aerostructural Dynamics
IPS	Infinite Plate Spline
LCO	Grenzyklusschwingung
LES	Grobstruktursimulation
LU-SSOR	Lower-Upper-Symmetric-Successive-Overrelaxation
LZZ	lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell
PDG	partielle Differentialgleichung
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RANS	Reynolds-Averaged-Navier-Stokes
RFA	Rational Function Approximation
ROM	Reduced Order Model
TFI	Transfinite Interpolation
TPS	Thin Plate Spline
TSD	Transonic Small Disturbance



# Einleitung

Der Fluzeugentwicklungsprozess erweist sich vor allem aufgrund seines interdisziplinären Charakters als sehr anspruchsvolle Aufgabe. Ein bedeutendes Teilgebiet dieses Prozesses wird durch die Aeroelastik verkörpert. In der vorliegenden Arbeit werden effiziente numerische Methoden zur Lösung aeroelastischer Stabilitäts- und Antwortprobleme vorgestellt, mit deren Hilfe die Vorhersagequalität vor allem im Bereich transsonischer Anwendungen gesteigert werden kann. Im Folgenden wird ein Überblick über die Bedeutung der Aeroelastik in der Luftfahrt gegeben. Anschließend erfolgt eine Literaturstudie bezüglich der Methodenentwicklung und des aktuellen Forschungsstandes. Abschließend werden der Beitrag und die Zielsetzung dieser Arbeit abgegrenzt.

## 1.1 Aeroelastik in der Luftfahrt

Als Aeroelastik wird das Aufgabengebiet bezeichnet, das sich mit der Wechselwirkung von aerodynamischen Kräften, elastischen Kräften und Trägheitskräften, bzw. mit den daraus resultierenden physikalischen Phänomenen beschäftigt. Dieser Zusammenhang kann mithilfe des in Abbildung 1.1 dargestellten aeroelastischen Kräftedreiecks verdeutlicht werden. Die interagierenden Kräfte repräsentieren die Eckpunkte des Dreiecks. Aus der Wechselwirkung von aerodynamischen Kräften und Trägheitskräften resultieren Starrkörperbewegungen, die durch die Bewegungsgleichungen der Flugmechanik beschrieben werden. Die Interaktion von elastischen Kräften und Trägheitskräften führt zu mechanischen Vibrationen, dem Hauptproblem der klassischen Strukturmechanik. Die statische Aeroelastik hat ihren Ursprung im Zusammenwirken von aerodynamischen und elastischen Kräften. Typische Probleme der statischen Aeroelastik sind die Bestimmung der Flugzeugdeformation unter den stationären Fluglasten, die damit gegebenenfalls verbundene Abminderung der Steuerflächenwirksamkeit bis hin zur Ruderumkehr oder die Divergenz von Tragflächen. Die Ursache für Divergenz oder Ruderumkehr ist eine derartige Verformung der auftriebserzeugenden Fläche, so dass die aerodynamische Belastung ansteigt oder der Druckpunkt wandert, was wiederum zu einer Zunahme der Verformung führt. Das Wechselwirken aller beschriebenen Kräfte begründet die dynamische Aeroelastik. Diese beinhaltet sowohl Stabilitätsprobleme wie Flattern, als auch Antwortprobleme auf Böen- oder Flugmanöverlasten. Als Flattern wird im Allgemeinen eine angefachte Schwingung bezeichnet, die durch die Wechselwirkung der drei oben beschriebenen Kräfte hervorgerufen wird. Weil in der Luftfahrt eine maximale Reduzierung des Fluggewichts von besonderem Interesse ist, müssen häufig Kompromisse auf Seiten der Struktursteifigkeit eingegangen werden. Als Folge kommt es zu Verformungen der Strukturoberfläche, wodurch sich Änderungen in der lokalen aerodynamischen Last ergeben. Diese bewirken wiederum Änderungen in der Strukturdeformation. Die beschriebene Rückkopplung kann der Grund für angefachte, selbsterregte Schwingungen sein, welche Energie aus der Luft-

strömung aufnehmen und die Struktur beschädigen oder zerstören können. Es existieren sehr viele verschiedene Fluttermechanismen. Übliche in der Praxis auftretende Formen sind das klassische Biege-Torsions-Flattern der Tragflächen, Ruderflattern, “Propeller-Whirl“-Flattern, Beplankungsflattern bei Überschallgeschwindigkeit, Flattern der Flugzeugaußenlasten oder “Body-Freedom“-Flattern, bei dem die Kopplung meist zwischen einer Anstellwinkelschwingung und der ersten Flügelbiegung stattfindet. Ein weiteres dynamisches aeroelastisches Phänomen stellt das Steuerflächenbrummen (“Control-Surface-Buzz”) dar. Bei dieser selbsterregten Schwingungsform ist nur ein Bewegungsfreiheitsgrad beteiligt. Für gewöhnlich tritt Steuerflächenbrummen im transsonischen und niedrigen supersonischen Geschwindigkeitsbereich aufgrund aerodynamischer Nichtlinearitäten auf. Es existieren verschiedene “Buzz“-Typen [10]. Der erste Fall A tritt bei niedrigen Überschallgeschwindigkeiten auf und wird durch Stoß-Grenzschicht-Interaktionen sowie stoßinduzierte Strömungsablösungen hervorgerufen, die vor der Steuerfläche entstehen. Im zweiten Fall B sind wandernde Verdichtungsstöße auf der Steuerfläche die Ursache für das instabile Systemverhalten. Beim dritten Typ C liegt am gesamten Tragflügel Überschallströmung vor und der Verdichtungsstoß befindet sich an der Steuerflächenhinterkante. Das Schütteln (“Buffeting”) ist ein weiteres nichtlineares aeroelastisches Phänomen in Folge von Strömungsablösungen. Es tritt vor allem an Flugzeugkomponenten auf, die im turbulenten Nachlauf von stromaufwärts befindlichen Flugzeugkomponenten liegen. Man kann zwischen Schüttelerscheinungen bei subsonischen und transsonischen Flugeschwindigkeiten unterscheiden. Bei subsonischen Geschwindigkeiten wird Schütteln meist durch Vorderkantenablösungen in Folge hoher Auftriebsbelastungen hervorgerufen. Bei transsonischen Geschwindigkeiten sind die Ablösungen in der Regel stoßinduziert. Obwohl durch diese Schüttelbelastungen keine unmittelbare Zerstörungsgefahr der Struktur droht, resultiert daraus dennoch eine erhöhte Materialermüdung und die Wartungskosten steigen. Neben der Tatsache, dass die Aeroelastik beim Entwurf des Flugzeugs berücksichtigt werden muss, damit weder die Flugsicherheit, noch Flugleistungen, Missionsziele, die Wirtschaftlichkeit oder der Flugkomfort leiden, können aeroelastische Effekte auch bewusst ausgenutzt werden, wie zum Beispiel das Konzept des “Aeroelastic Tailoring” zeigt. Mithilfe des Einsatzes von Faserverbundmaterialien ist es möglich, die Verformung des Flugzeugs passiv zu steuern und damit die aeroelastischen Eigenschaften günstig zu beeinflussen. Das aeroelastische Kräftradreieck, Abbildung 1.1, kann noch um das Flugzeugregelsystem erweitert werden. Die zugehörige Disziplin wird Aeroservoelastik genannt und ist ebenfalls von großer Bedeutung, weil auch aeroelastische Wechselwirkungen mit dem Regelsystem zu Instabilitäten führen können.

Aus historischer Sicht nimmt die Aeroelastik schon seit Beginn der Luftfahrt eine bedeutende Stellung ein. Seitdem Flugzeuge entwickelt und gebaut werden, sehen sich die Konstrukteure mit aeroelastischen Problemstellungen konfrontiert. Anfangs waren diese Zusammenhänge, sowie die entsprechenden Ursachen noch unklar. Aber selbst heute, wo die physikalischen Prozesse weitestgehend erforscht sind, stellt die Aeroelastik hinsichtlich ihrer Vorhersage und Beherrschung höchste Anforderungen an die Ingenieure. Ein ausführlicher Überblick über die historische Entwicklung von Flattern wird in den Veröffentlichungen [58], [32] und [90] gegeben. Ein paar ausgewählte Ereignisse werden im Folgenden kurz zusammengefasst, um einen Eindruck über die zeitliche Entwicklungsgeschichte der Aeroelastik in der Luftfahrt zu vermitteln. Bereits 1903 scheiterte Langley in zwei Flugversuchen mit seinem “Langley Monoplane“ unter anderem aufgrund von aeroelastischen Divergenzproblemen am ersten motorisierten Flug. Etwas später im gleichen Jahr machten sich die Gebrüder Wright elastische Verformungen der Tragflächen für die

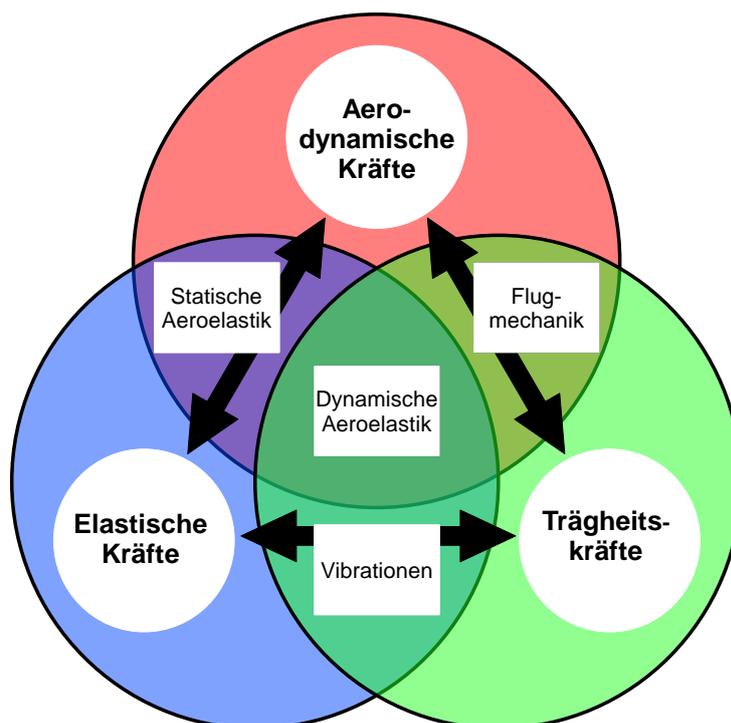


Abbildung 1.1: Aeroelastisches Kräfte dreieck

Flugsteuerung zunutze und beobachteten zum Beispiel aeroelastische Torsionseffekte am Propeller. Zur Zeit des ersten Weltkriegs wurde Flattern erstmals für die britischen Flugzeuge des Typs Handley Page 0/400 und Havilland DH-9 von Lanchester und Bairstow untersucht, dokumentiert und durch konstruktive Maßnahmen vermieden. Auch auf Seiten des deutschen und französischen Militärs wurden zeitgleich an verschiedenen Flugzeugtypen Divergenzfälle im Sturzflug und Steuerflächenflattern beobachtet. Nach dem ersten Weltkrieg sind große Anstrengungen unternommen worden, um neue Geschwindigkeitsrekorde in der Luftfahrt aufzustellen, bei denen es zunehmend zu Flatterfällen kam. Nach 1933 stieg die Anzahl der Flugzeugentwicklungen in Deutschland dramatisch an. In dem Zeitraum bis 1945 wurden 146 Flatterfälle dokumentiert, von denen 24 zum Absturz führten. Auch in anderen Staaten sind regelmäßig Flatterunfälle vorgekommen. Aufgrund des vermehrten Auftretens von aeroelastischen Instabilitäten, wurde in verschiedenen Staaten die Tragweite dieses Problems erkannt. Daraufhin sind Organisationen gegründet worden, die sich speziell mit der Analyse aeroelastischer Phänomene beschäftigten. Ab dem zweiten Weltkrieg sahen sich die Flugzeugkonstrukteure erneut mit großen Problemen konfrontiert, als die Flugzeuge durch die Entwicklung von Strahltriebwerken und dem neu entdeckten Pfeilungseinfluss der Tragflächen, erstmals transsonische Geschwindigkeiten erreichten. Zur Beschreibung der nichtlinearen aerodynamischen Zusammenhänge waren zu dieser Zeit noch keine geeigneten theoretischen Modelle verfügbar. Weil auch transsonische Windkanäle noch nicht existierten, basierten die ersten Untersuchungen auf Flugversuchen. Bei der Mehrzahl der Vorfälle handelte es sich um Steuerflächenbrummen. Später, in den fünfziger Jahren, gab es erste transsonische Windkanäle, in denen unter anderem systematische Flatterstudien durchgeführt wurden. In der Folge nahm die Anzahl der dokumentierten Flatterereignisse zunehmend ab. Mit der anschließenden Realisierbarkeit des stationären Überschallflugs wuchs auch die Bedeutung des Beplankungsflattern. Heutzutage treten aufgrund der großen Fortschritte in der rechnergestützten Flattervor-

hersage, sowie dem gutem Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Prozesse und der darauffolgenden umfassenden Windkanal-, Standschwingungs- und Flugversuchen nur selten aeroelastische Instabilitäten auf. Diese Tatsache wird durch die Vorgabe relativ "großzügig" gewählter Sicherheitstoleranzen begünstigt.

Auch heute gibt es auf dem Gebiet der Aeroelastik noch einige Herausforderungen in Verbindung mit dem Flugzeugentwurfsprozess, wie zum Beispiel die Auslegung von T-Leitwerken oder die Anbringung von Außenlasten. Vor allem nichtlineares Systemverhalten verlangt nach besonderer Aufmerksamkeit, da es mit den weit verbreiteten linearen Analysemethoden nicht vorhergesagt werden kann und damit ein wesentlicher Grund für Unsicherheiten in der Flutteranalyse ist [39]. Ein häufig auftretendes, mit nichtlinearem aeroelastischen Verhalten in Verbindung stehendes Phänomen ist die Grenzzyklus-schwingung (LCO). Unter dem Begriff LCO versteht man das Schwingen der Struktur mit beschränkter Amplitude. LCO können ausschließlich durch die Verwendung nichtlinearer Methoden vorhergesagt werden. Aeroelastische Nichtlinearitäten beziehen sich auf nichtlineare Zusammenhänge zwischen der Strukturverformung und der resultierenden Luftkraft und können sowohl auf Seiten der Strömungsmechanik, als auch auf Seiten der Strukturmechanik oder der Flugregelung in das System eingebracht werden. Aerodynamische Nichtlinearitäten können aufgrund von Strömungsablösungen oder im transsonischen Geschwindigkeitsbereich aufgrund wandernder Verdichtungsstöße entstehen. Strukturelle Nichtlinearitäten werden durch nichtlineare Materialgesetze, Spiel, Gelenke oder geometrische Nichtlinearitäten in Verbindung mit großen elastischen Verformungen hervorgerufen. Auch das Regelungssystem kann die Ursache für nichtlineares Systemverhalten sein, zum Beispiel in Form von nichtlinearen Regelungsgesetzen, Zeitverzug oder Beschränkungen in der Auslenkungsamplitude und den Auslenkungsgeschwindigkeiten der Steuerflächen.

## 1.2 Stand der Forschung

Die Pioniere der Flugzeugentwicklung zu Beginn des 19. Jahrhunderts verzichteten beim Entwurf neuer Flugzeuge fast vollständig auf analytische Methoden. Vor allem die Aerodynamik war wenig erforscht. Im Folgenden sind einige bedeutende Meilensteine der historischen Entwicklung der theoretischen Aeroelastik zusammengefasst [58], [32].

### Potentialmethoden

Als ersten wichtigen Schritt in der Modellierung der Aerodynamik gelang es Kutta und Joukowski 1906 eine Beziehung zwischen der Zirkulationsstärke und der Auftriebskraft herzustellen. Diese Beziehung ist als Satz von Kutta-Joukowski bekannt und bildete für viele Jahre die Grundlage aller aerodynamischen Berechnungen. Eine entscheidende Weiterentwicklung gelang Prandtl zur Zeit des ersten Weltkriegs. Er formulierte die Traglinientheorie für Flügel endlicher Streckung. Im Jahr 1922 veröffentlichte sein Student Birnbaum die erste Arbeit [15], in der Flattern als strukturelles, dynamisches Stabilitätsproblem behandelt und am Beispiel eines Profils mit zwei Freiheitsgraden analysiert wurde. In dieser Arbeit ist erstmals die instationäre Aerodynamik für harmonische Bewegungen modelliert worden. Ergänzt und erweitert wurden die entsprechenden zur Beschreibung der instationären Aerodynamik eingeführten Formulierungen vor allem durch Wagner [155], Küssner [94] und Glauert [60]. Zur gleichen Zeit untersuchten Baumhauer und Koning [9] in den Niederlanden das Tragflächen-Querruder-Flattern auf experimentelle und theore-

tische Weise und kamen zu dem Ergebnis, dass die Fluttermoden durch geeignete Ausgleichsmassen entkoppelt werden können. Auch in Großbritannien wurden umfangreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Im Jahr 1929 veröffentlichten Frazer und Duncan ihre gesammelten Ergebnisse in einem fundamentalen Werk [55]. Einen weiteren bedeutenden Beitrag zur Modellierung des zweidimensionalen Flutterproblems lieferte der US-Amerikaner Theodorsen 1934 [150]. Mit seiner "strip-theory" gelang Theodorsen die einfachste exakte Beschreibung der instationären Aerodynamik an der ebenen Platte. Andere Studien, die sich mit der Erweiterung der zweidimensionalen Theorie auf endliche Tragflächen beschäftigen sind [87], [57], [84]. Da in der vorliegenden Arbeit auch Böenantworten untersucht werden, sind ebenso die Böenfunktionen von Sears [139] und von Kármán zu erwähnen [87]. Gegen Ende der dreißiger Jahre gelang es Prandtl unter Verwendung des Beschleunigungspotentials und der Annahme kleiner Störungen eine Formulierung für kompressible Strömungsmedien herzuleiten [123]. Der Italiener Possio erweiterte die Gleichungen anschließend auf instationäre Probleme und wendete diese auf zweidimensionale Beispiele in Unter- und Überschallströmungen an [121], [122]. Während des zweiten Weltkriegs legte Küssner die Basis für eine allgemeine Tragflächentheorie endlicher Flügel [95], die später mit dem Aufkommen der ersten Computer auch numerisch gelöst werden konnte. Der schnelle Fortschritt in der Informatik ermöglichte ab den sechziger Jahren das Rechnen mit sehr großen Matrizen. Als Konsequenz wurden Panel- und Wirbelgitterverfahren entwickelt, die ebenfalls auf Potentialmethoden basieren, bei denen die Geometrie aber in kleine Felder unterteilt wird und die Lösung der Potentialgleichungen numerisch erfolgt [89]. Die Erweiterung auf instationäre Strömungen folgte kurze Zeit später [96], [97], vor allem auch in Form von Dipolgitterverfahren [1], [164]. Etwas später wurden geeignete, robuste Methoden für Überschallanwendungen entwickelt [27]. Die genannten Potentialmethoden funktionieren sehr gut für Unter- und Überschallgeschwindigkeiten, also in Bereichen linearer aerodynamischer Gesetzmäßigkeiten. Für den nicht-linearen, transsonischen Geschwindigkeitsbereich brachte die Einführung von Transonic Small Disturbance (TSD)-Verfahren [7] oder die Lösung der vollständigen Potentialgleichungen [81] weitere Fortschritte. Diese Methoden sind allerdings auf die Umströmung sehr schlanker Körper beschränkt.

### **Aeroelastischer Analyseprozess**

Ursprünglich war die mathematische Beschreibung der Strukturmechanik weniger problematisch als die Modellierung der Strömungsmechanik. Durch die Einführung von Computern ergaben sich aber auch auf Seiten der Strukturmodellierung neue Möglichkeiten. Die Entwicklung von Finite-Elemente-Methoden (FEM) erlaubt wesentlich detailliertere Lösungen und bildet bis heute die Standardmethode der Strukturmodellierung. Die Potentialmethoden zusammen mit den FEM und den klassischen Flutterlösern k-, p-k-Methode [69] und g-Methode [28] bilden für die nächsten Jahrzehnte die bevorzugten Werkzeuge in der Aeroelastik. Auf diesen Methoden basiert folglich auch die übliche Vorgehensweise im Zulassungsprozess von Flugzeugen. Ein wesentliches Ziel, das im Zulassungsprozess ziviler Flugzeuge entsprechend der Vorschriften [43], [45] und militärischer Flugzeuge entsprechend der Vorschriften [37], [108] verfolgt wird, ist der Nachweis, dass das Flugverhalten für alle Bereiche der vorgesehenen Flugenveloppe frei von aeroelastischen Instabilitäten ist. Daher muss das aeroelastische Verhalten für eine immense Anzahl von Lastfällen untersucht werden. Der in der Industrie gängige Flutter-Genehmigungsprozess lässt sich nach [70] wie folgt zusammenfassen und wird in den folgenden Kapiteln als klassischer Flutteranalyseprozess bezeichnet. Sobald ein erster Flugzeugentwurf verfügbar ist, müssen geeignete numerische Modelle zur Beschreibung des aeroelastischen Systems bereitgestellt

werden. Die Aerodynamik wird dabei meist mithilfe von Potentialmethoden modelliert. Das Ergebnis bildet die sogenannte aerodynamische Einflusskoeffizienten (AIC)-Matrix, welche einen linearen Zusammenhang zwischen der Strukturdeformation und der korrespondierenden Luftkraft herstellt. In den Analyseprozess mit dem Ziel der Anpassung der AIC-Matrix an die behandelte Konfiguration können auch empirische Korrekturen oder experimentell gewonnene Daten einfließen. Das elastische Verhalten der Struktur wird meist durch ein lineares FEM-Modell beschrieben, das durch ein entsprechendes Massenmodell ergänzt wird. Das FEM-Modell wird zusätzlich durch einen Standschwingungsversuch an das reale Strukturverhalten angepasst und validiert. Anhand des numerischen Modells können die modalen Eigenschaften des Systems bestimmt werden. Die aerodynamischen und strukturellen Informationen werden anschließend an einen Flutterlöser übergeben, welcher das resultierende System von Schwingungsgleichungen in Form eines Stabilitätsproblems auf iterative Weise nach der kritischen Flattergeschwindigkeit löst. Weil die Flattergeschwindigkeit von der Machzahl und der Luftdichte abhängt, ist eine Vielzahl von Rechnungen notwendig, um eine "matched point"-Lösung zu erhalten. Früher wurde wegen des hohen Rechenaufwands zum Teil auf diesen Schritt verzichtet. Auf Basis der gewonnenen Lösung kann der Flugzeugentwurf überarbeitet werden. Dieser iterative Prozess wiederholt sich so lange, bis ein zufriedenstellendes Ergebnis vorliegt, das die im Voraus definierten Anforderungen im Rahmen der festgelegten Flugenveloppe und Toleranzen erfüllt. In den aeroelastischen Zulassungsregularien ist die Flugenveloppe durch die im Rahmen der Flugzeugauslegung ermittelte Sturzfluggeschwindigkeit und die korrespondierende Machzahl beschränkt. Zur Definition der auslegungsrelevanten kritischen Flattergeschwindigkeit wird üblicherweise ein Toleranzbereich von 15% zu der Sturzfluggeschwindigkeit addiert. Durch diesen Sicherheitsabstand können mögliche Ungenauigkeiten in der Flattervorhersage aufgefangen werden. Nachdem anhand von numerischen Modellen sichergestellt worden ist, dass die Flugenveloppe frei von aeroelastischen Instabilitäten ist, wird das aeroelastische Verhalten in instrumentierten Flugversuchen überprüft. Als Anfangsgeschwindigkeit wird je nach Wahrscheinlichkeit eines Flutterfalls die Hälfte der berechneten Sturzfluggeschwindigkeit oder die Hälfte der Sturzfluggeschwindigkeit einer zugelassenen Basiskonfiguration angesetzt. Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse wird das numerische Modell angepasst und die Geschwindigkeit für den nächsten Flugversuch inkrementell erhöht. Dieser iterative Prozess ist sehr langwierig und damit auch kostspielig. Neben der Flattervorhersage muss der Einfluss des elastischen Flugzeugverhaltens auch in anderen zulassungsrelevanten Untersuchungen wie der Manöver-, Kontrollsystem-, Lebensdauer- oder Böenanalyse berücksichtigt werden. Häufig verwendete kommerzielle Programme, die dieses Problemspektrum abdecken, sind zum Beispiel "NASTRAN" [133] und "ZAERO" [166].

## CFD-Methoden

Potentialmethoden sind ausgesprochen effizient, liefern aber keine ausreichende Genauigkeit im transsonischen Geschwindigkeitsbereich. Große Fortschritte auf diesem Gebiet konnten in den 1980er Jahren gemacht werden, weil aufgrund der rasanten Entwicklung der Rechnerindustrie die Einführung von Computational Fluid Dynamics (CFD)-Methoden, anfangs in Gestalt der numerischen Lösung der Eulergleichungen, ermöglicht wurde [141]. Ein paar richtungsweisende, frühe Arbeiten aus dem sehr umfangreichen Literaturangebot sind [8], [132], [128]. In den 1990er Jahren folgten reibungsbehaftete Methoden, zum Beispiel durch die Lösung der Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS)-Gleichungen, die heute das am weitesten verbreitete Werkzeug zur Modellierung der Strömungsmechanik darstellen [98]. Die angesprochenen CFD-Methoden liefern zwar für

die meisten aeroelastischen Anwendungen eine ausreichend genaue Modellierung der Strömungsphänomene, bringen aber auch wieder neue Herausforderungen mit sich. Das bedeutendste Ziel, vor allem für komplexe Geometrien, ist nach wie vor die Minimierung der Simulationszeit. Weitere anspruchsvolle Herausforderungen umfassen den Last- und Verformungstransfer zwischen der Struktur und der Strömung [46], [25], [21], [61], die Netzbeziehung [8], [132], [152] und die Genauigkeit des eingesetzten zeitlichen Kopplungsschemas [2], [112], [119], [47]. Um die mit der Vernetzung und Netznachführung einhergehenden Probleme zu minimieren, werden auch automatische Algorithmen für die Erzeugung kartesischer Netze entwickelt. Ein Beispiel sind "Chimera"-Technologien [11] zur Behandlung überlappender Netze und spezielle Randbedingungen, die keine konturangepassten Netze benötigen [168]. Aktuell konzentriert sich die Forschung in der Aeroelastik auf der einen Seite auf die genauere Untersuchung von nichtlinearen Instabilitätsmechanismen. Im Bereich der Strömungsmechanik wird dieses Vorhaben durch den Einsatz von sehr genauen und rechenaufwendigen Simulationen mithilfe von RANS- oder auch Grobstruktursimulation (LES)-Verfahren begleitet, mit deren Anwendung auch massiv abgelöste Strömungen oder Transitionsvorgänge vorhergesagt werden können. Weil im Rahmen der aeroelastischen Stabilitäts- und Antwortanalyse sehr viele Parametervariationen durchgeführt werden müssen und daher der Rechenaufwand in der Summe der notwendigen Simulationen sehr groß ist, besteht auf der anderen Seite erhebliches Interesse an Methoden bzw. Modellen reduzierter Ordnung, sogenannte "Reduced Order Models (ROMs)".

## ROM-Methoden

Als ROM werden im Allgemeinen Modelle bezeichnet, deren Anzahl an Systemfreiheitsgraden und der daraus resultierende Rechenaufwand kleiner ist, als für das originale aeroelastische System der vollen Ordnung. Wichtig ist dabei, dass die wesentliche oder bestenfalls vollständige Systemdynamik trotzdem erhalten bleibt und möglichst exakt wiedergegeben werden kann. Es gibt zwei Verfahren, über die eine Modellreduzierung erreicht werden kann. Zum einen durch die Anwendung von Systemidentifikationstechniken, die eine Beziehung zwischen den Eingangs- und Ausgangsdaten herstellen und diese Beziehungen zur Konstruktion eines neuen Modells verwenden. Zum anderen ist auch eine direkte Manipulation des Originalsystems möglich. ROM können grundsätzlich auf beliebige dynamische Systeme angewendet werden. Zum Beispiel können sie die instationäre Aerodynamik, die Strukturdynamik oder als aeroelastisches ROM, das gekoppelte Systemverhalten nachbilden. Einige etablierte ROM-Methoden sind im Folgenden kurz beschrieben [102], [40]. In "Indicial Response"-Methoden werden Sprungantworten zu ausgewählten Parameteränderungen um einen beliebigen Referenzzustand bestimmt [100]. Mithilfe der gewonnenen Information ist die Vorhersage von Luftkräften anschließend für beliebige Anregungen über ein Zustandsraummodell möglich. Ein häufig angewandtes Vorgehen zur Reduzierung des Rechenaufwands beruht auf der Linearisierung des dynamischen Systems. Linearisiert wird üblicherweise unter der Annahme kleiner Störungen um einen nichtlinearen Referenzzustand. Das Ziel ist in der Regel die generalisierte Luftkräfte (GAF)-Matrix im Frequenzbereich zu bestimmen, welche dann mithilfe der in der Aeroelastik gängigen Standardanalysetechniken weiterverwendet werden kann [131]. Ein mögliches Verfahren basiert auf dem Eigensystem Realization Algorithm (ERA) bzw. dem Observer Kalman Identification Algorithm (OKID) [85], [86], [144], [49], [50]. Durch die Anwendung dieser Verfahren wird eine lineare Systemidentifikation durchgeführt, woraus sich ein dynamisches Zustandsraummodell im Zeitbereich ableiten lässt. Als Systemeingang müssen die Sprungantworten der GAF bereitgestellt werden. Grundsätzlich können GAF auch durch instationäre, zeitechte Simulationen für erzwungene harmonische Struk-

turschwingungen berechnet werden. Instationäre, zeitechte Simulationen sind allerdings für Anwendungen, bei denen die Strömung voll entwickelt und periodisch in der Zeit ist, sehr ineffizient. Eine alternative Methode sind zeitlinearisierte Euler- bzw. Navier-Stokes-Verfahren bei kleinen Störungen. Diese Verfahren sind keine ROM im klassischen Sinne, da es sich nicht um eine Reduzierung der Systemfreiheitsgrade handelt, sondern um eine Formulierung der physikalischen Gleichungen im Frequenzbereich. Dennoch resultiert aus diesem Vorgehen eine bedeutende Rechenzeiterparnis, wobei der physikalische Charakter der zugrundeliegenden Gleichungen erhalten bleibt. Ursprünglich sind die zeitlinearisierten Methoden für Turbomaschinen entwickelt worden [63]. Beginnend im Jahr 1997 wurde am Lehrstuhl für Fluidmechanik der TU München ein ähnliches Verfahren für die Anwendung auf Flugzeugkonfigurationen entwickelt [93]. Anschließend fanden Erweiterungen zur Berücksichtigung der zweiten Harmonischen [142] und von Reibungseffekten [79], [117] statt. Bestimmte Parallelen zu den zeitlinearisierten CFD-Verfahren besitzen "Harmonic Balance" -Verfahren. Sie dienen der effizienten Modellierung zeitperiodischer Systeme, wobei auch höhere Harmonische, also nichtlineare Effekte Berücksichtigung finden [33]. "Harmonic Balance" -Verfahren wurden im CFD-Bereich ebenfalls zuerst für die Analyse von Turbomaschinen verwendet [65]. Sie beruhen auf der Annahme, dass die Lösung durch eine endliche Fourier-Reihe mit einer vorgegebenen Anzahl höherer Harmonischer abgebildet wird. Als Lösung des letztendlich resultierenden algebraischen Gleichungssystems folgen die Fourierkoeffizienten der angenommenen Lösung. Die Proper Orthogonal Decomposition (POD) ist eine empirische spektrale Methode, bei der die gesuchten Variablen durch einen Satz von Basisfunktionen approximiert werden und ein weiteres, häufig verwendetes ROM [64], [91]. Letztendlich wird das Strömungsfeld durch eine kleine Anzahl charakteristischer Moden approximiert. Wegen des großen Potentials, komplexe physikalische Simulationsergebnisse genau wiederzugeben, wurde diese Methode ursprünglich sehr viel im Bereich turbulenter Strömungen eingesetzt. Allerdings muss bei der POD vorerst eine gewisse CFD-Datenbasis zur Verfügung stehen. Einen weiteren Ansatz zur Systemreduzierung liefern adaptive Methoden wie die neuronalen Netzwerke [113], [103], bei denen die Systemeigenschaften über Abbildungsfunktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen in Anlehnung an biologische neuronale Netze approximiert werden. Diese Netzwerke bestehen aus Neuronen, die die Fähigkeit besitzen, Erfahrungen zu speichern und später wieder abzurufen. Gewisse Parallelen zu den Neuronalen Netzwerken weist die Volterra Theorie auf [148], [138]. Vorteile der Volterra Theorie sind zum einen, dass relativ wenige CFD-Eingangsdaten notwendig sind, während im Fall der Neuronalen Netzwerke intensives Training des Modells erforderlich ist. Außerdem sind direkte Rückschlüsse auf physikalische Zusammenhänge möglich. Sowohl die Modellierung durch Neuronale Netzwerke, POD, als auch mithilfe der Volterra Theorie kann auf nichtlineare, instationäre aerodynamische Antwortprobleme angewendet werden [167], [12], [143], [130]. Zum Teil ist eine klare Unterscheidung der Methoden nicht eindeutig möglich, da in vielen ROM-Anwendungen vielschichtige Kombinationen verschiedener ROM-Ansätze zum Einsatz kommen.

## Flugmechanik

Ab den 1950er Jahren wurden erstmals große Transportflugzeuge konstruiert. Diese besitzen in der Regel schlanke, gepfeilte Flügel großer Streckung und sind in der Folge sehr flexibel. Aus diesen geometrischen und strukturellen Eigenschaften ergeben sich für die ersten elastischen Eigenmoden charakteristische Frequenzen, die im Bereich der flugmechanischen Eigenfrequenzen liegen. Dadurch kann es zu Instabilitäten kommen, die aus der Kopplung der Disziplinen Aeroelastik und Flugmechanik resultieren. Es ist folglich

unerlässlich, die gegenseitige Beeinflussung dieser Disziplinen bereits in frühen Phasen des Flugzeugentwurfs, speziell bei der numerischen Analyse, zu berücksichtigen. Erste Diskussionen zu diesem Thema gibt es in [30], [31], vor allem zu der Frage, wo die Gültigkeitsgrenzen des quasistationären aeroelastischen Ansatzes, der bis dahin traditionell in die Vorhersage des flugmechanischen Verhaltens angenommen wurde, liegen. Die quasistationäre Annahme setzt voraus, dass Änderungen in den Luftkräften so langsam erfolgen, dass sich die Struktur immer im statischen Gleichgewicht befindet, wovon für Anregungsfrequenzen durch Steuerflächen oder Böen im Bereich der ersten elastischen Struktureigenmoden nicht ausgegangen werden darf. Auch heute werden noch quasistationäre, aeroelastische Korrekturen am Aerodynamikmodell vorgenommen, allerdings wird davon ausgegangen, dass das elektronische Flugregelungssystem die Anregung elastischer Struktureigenmoden, zum Beispiel durch geeignete Filter, unterbindet [105]. Diese Punkte werden auch in der Zulassungsvorschrift CS-25 [43] adressiert. Frühe Veröffentlichungen, in denen Ansätze zur Beschreibung der Flugmechanik für flexible Flugzeuge vorgestellt werden, gehen auf Skoog, Milne, Dusto und Bisplinghoff zurück [145], [109], [42], [16]. Für aeroelastische Simulationen, bei denen Starrkörperbewegungen des Flugzeugs Berücksichtigung finden, ist die Wahl des Koordinatensystems nicht unerheblich [135]. Es werden sowohl Ansätze verfolgt, bei denen ein zum unverformten Körper bewegliches "mean axes"-System [109], als auch ein zum unverformten Körper festes Koordinatensystem verwendet wird. Beide Möglichkeiten besitzen diverse Vor- und Nachteile bezüglich des Formulierungsaufwandes der entsprechenden aerodynamischen und strukturellen Gleichungen. In neueren Veröffentlichungen wird die Komplexität durch die Berücksichtigung von weiteren Kopplungsmechanismen, wie zum Beispiel der Trägheitskopplung in Folge eines nicht als konstant angenommenen Trägheitstensors, weiter erhöht [22], [126], [116]. Grundsätzlich existieren außerdem direkte und indirekte Methoden zur Ermittlung der aeroelastischen Systemantwort im Zeitbereich. Indirekte Methoden basieren häufig auf einer "Rational Function Approximation (RFA)" [147], [137], [88], [153] der im Frequenzbereich ermittelten GAF und werden zum Beispiel in ähnlicher Form in [157] verwendet. Bei direkten Methoden werden die Strömungsgleichungen mithilfe von Potential- [105] oder CFD-Methoden [48], [129] direkt zu jedem instationären Zeitschritt gelöst.

## Böen

Neben aeroelastischen Stabilitätsbetrachtungen müssen im Flugzeugentwurfsprozess auch aeroelastische Antwortuntersuchungen durchgeführt werden. Ein wichtiges Antwortproblem stellt die Böenanalyse dar, die einen wesentlichen Bestandteil der vorliegenden Arbeit bildet. Als Böen werden im Allgemeinen am Flugzeug senkrecht zum Flugpfad induzierte Geschwindigkeiten bezeichnet. Seltener in die Analysen einbezogen, aber dennoch von Bedeutung, sind Böen in Richtung der freien Anströmung. Aufgrund des induzierten Anstell- oder Schiebewinkels beeinflussen Böen die aerodynamischen Lasten am Flugzeug und folglich auch das dynamische aeroelastische Antwortverhalten. Bedingt durch die elastische Verformung der Struktur können sich außerdem größere Strukturbelastungen als am starren Flugzeug ergeben. Grundsätzlich sind die Böengeschwindigkeiten in ihrer Form und Amplitude beliebig ausgeprägt. Seit den 1950er Jahren gab es begleitet durch die Entwicklung neuer Berechnungsmethoden viele Diskussionen, wie Böen in den Zulassungsanforderungen dargestellt werden sollten. Untersuchungen der atmosphärischen Turbulenz haben ergeben, dass die stärksten Böen meistens einzeln auftreten, während zusätzlich ein beträchtliches Maß an isotroper Turbulenz existiert [75]. Für die Zulassungsvorgaben hat man sich folglich entschieden, die beiden Extremfälle zu prüfen. Das sind zum einen diskrete, deterministisch beschriebene, zumeist "1-cos"-Böen und zum anderen

kontinuierliche, statistisch beschriebene Turbulenz. Das aus diesen Erkenntnissen abgeleitete kontinuierliche Turbulenzmodell wird als das realistischere Modell angesehen als die einzelnen, diskreten Böen, hat aber den Nachteil, dass das Antwortverhalten des Flugzeugs nicht direkt aus den Simulationsergebnissen abgelesen werden kann. Der Vorteil der statistischen Turbulenzmodellierung, welche meistens mithilfe der spektralen Leistungsdichte ausgedrückt wird, liegt in der willkürlichen Überlagerung von Böen verschiedener Stärke, Länge und Form, wodurch die Anregung aller elastischer Moden begünstigt wird. Die Antworten auf diskrete Böen werden heutzutage von einigen Luftfahrtbehörden nicht mehr gefordert [75], sind aber in Europa nach wie vor zulassungsrelevant [43]. Auch aufgrund der Transparenz der Simulationsergebnisse werden in dieser Arbeit ausschließlich Antworten auf diskrete Böen untersucht. Bei der Wahl der Böenparameter ist neben der Böenamplitude vor allem die Variation der diskreten Böenlänge wichtig, um die maximale Strukturdeformation und -belastung zu ermitteln. Die Vorgaben bezüglich der Böenstärke und Böenlänge in Abhängigkeit der Flughöhe und des Flugzeugtyps können der Vorschrift [43] entnommen werden. Die aus diskreten Böen resultierenden Luftkräfte werden üblicherweise mit Potential- oder CFD-Methoden im Zeitbereich bestimmt, eine Analyse im Frequenzbereich ist aber ebenso möglich. Vergleiche von existierenden Böenmodellen für die Anwendung in CFD-Lösern werden unter anderem in [83] und [71] gegeben.

### 1.3 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Die vorangehende Zusammenfassung der phänomenologischen, sowie technischen Entwicklung der Aeroelastik hat gezeigt, dass vor allem die numerischen Vorhersagemethoden nach wie vor stark an Bedeutung gewinnen. Diese Tatsache ist vorrangig dadurch begründet, dass sowohl experimentelle Versuche, als auch Flugversuche nicht in dem erforderlichen Umfang durchgeführt werden können, welcher für die Absicherung der kompletten Flugenveloppe notwendig wäre und diese Tests aufgrund der akuten Zerstörungs- bzw. Absturzgefahr der untersuchten Konfiguration sehr gefährlich sind. Auf der einen Seite sind in Abhängigkeit von den zu erwartenden aeroelastischen Phänomenen für bestimmte Probleme sehr komplexe, aufwendige Methoden notwendig, um zum Beispiel nichtlineare Instabilitätsmechanismen zu untersuchen. Häufig werden auch nichtlineare aeroelastische Phänomene durch Vorhersagen abgesichert, die auf linearen Methoden basieren. Diese Herangehensweise bringt allerdings die Voraussetzung größerer Sicherheitstoleranzen und demzufolge schwerere und steifere, also unwirtschaftlichere Flugzeuge oder Beschränkungen in den Flugleistungen mit sich. Außerdem sind umfangreiche Windkanalversuche und Flugtests mit sehr vorsichtig gewählten Parametervariationen nötig, um die empirisch oder mit einfachen Modellen gewonnenen Ergebnisse abzusichern, woraus ein erheblicher Zeit- und Kostenaufwand resultiert. Auf der anderen Seite besteht großes Interesse an effizienten Methoden, die über den gesamten Machzahlbereich genaue Vorhersagen für die klassischen aeroelastischen Stabilitäts- und Antwortprobleme liefern, aber aufgrund der Modellreduzierung oder -linearisierung bislang nur eingeschränkt in der Lage sind, instationäre, dynamische Nichtlinearitäten zu erfassen.

Das Ziel dieser Arbeit ist, bezüglich beider Vorgehensweisen einen Beitrag zur numerischen Modellierung zu leisten. Dementsprechend wird eine direkte, nichtlineare, starke Kopplungsstrategie im Zeitbereich verfolgt, in der sowohl die nichtlinearen RANS-Gleichungen zur Modellierung der Strömung, ein FEM-Löser zur Modellierung der Struk-

tur und die nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Flugmechanik in Form eines Antwortproblems mithilfe von instationären Simulationen gelöst werden. Außerdem kommt ein zeitlinearisiertes RANS-Verfahren zum Einsatz, welches die GAF effizient und direkt im Frequenzbereich berechnet. Die GAF können anschließend im Rahmen des klassischen aeroelastischen Analyseprozesses in einem indirekten Verfahren weiterverwendet werden. Damit auch die Bestimmung von diskreten Böenantworten innerhalb dieser Prozesskette ermöglicht wird, ist eine neue, zeitlinearisierte Formulierung für harmonische Böenanregungen im Frequenzbereich entwickelt worden. Der Vorteil von zeitlinearisierten CFD-Methoden gegenüber den sehr effizienten und robusten Potentialmethoden, die im Allgemeinen gut im sub- und supersonischen, aber unzureichend im transsonischen Geschwindigkeitsbereich funktionieren, ist, dass Verdichtungsstöße in Folge der Linearisierung um einen nichtlinearen stationären Referenzzustand genauer modelliert werden. Zum Beispiel können im transsonischen Geschwindigkeitsbereich kleine Änderungen an der Struktur große Änderungen in den Luftkräften zur Folge haben, was eine Abnahme der kritischen Flattergeschwindigkeit bewirken kann. Die Abnahme des Stabilitätsmaß im transsonischen Geschwindigkeitsbereich wird auch "transsonic dip" genannt und resultiert aus der Bewegung von Verdichtungsstößen [3]. Sofern die Stoßstärke linear variiert, werden entsprechende Phänomene von den zeitlinearisierten CFD-Methoden abgebildet.

Die vorliegende Arbeit ist neben der Einleitung in drei Hauptkapitel unterteilt. Im zweiten Kapitel werden die numerischen Methoden und die zugehörige Theorie beschrieben. Die zugrundeliegenden Gleichungen und numerischen Formulierungen des Strömungs-, des Struktur- und des Flugmechaniklösers werden vorgestellt. In diesem Zusammenhang findet auch eine Diskussion der angewendeten Strategien zur Kopplung der Teilfeldlöser statt. Ein linearisiertes, diskretes Böenmodell im Frequenzbereich wird hergeleitet und in den linearisierten Löser integriert. Die Kapitel drei und vier konzentrieren sich auf die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse von den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Stabilitäts- und Antwortanalysen. Die Bewertung der Rechenergebnisse erfolgt anhand geeigneter experimenteller sowie analytischer Daten und durch den Vergleich der beschriebenen linearisierten und nichtlinearen Methoden untereinander. Es wird zum einen das Stabilitätsproblem Flattern und zum anderen die Antwort auf diskrete Vertikalböen numerisch simuliert und analysiert. Flatterergebnisse werden für einen Flügel kleiner Streckung im sub-, trans- und supersonischen Geschwindigkeitsbereich mit experimentellen Daten verglichen. Für eine Transportflugzeugkonfiguration werden im transsonischen Geschwindigkeitsbereich statische aeroelastische Verformungen, instationäre Druckverteilungen, sowie aeroelastische Dämpfungskonstanten mit experimentellen Daten verglichen. Zusätzlich wird eine klassische Flatteranalyse durchgeführt. Zur Validierung des zeitlinearisierten Böenmodells dient, basierend auf dem Vergleich des instationären Auftriebsanstiegs für verschiedene Böenfrequenzen, ein analytischer, zweidimensionaler, inkompressibler Testfall. Anschließend findet ein Vergleich der linearisierten und der nichtlinearen Methoden anhand von Böenantworten für den Flügel kleiner Streckung statt. Abschließend erfolgt die Analyse der Böenantwort für eine generische Flugzeugkonfiguration mithilfe der linearisierten bzw. indirekten und der nichtlinearen bzw. direkten Methode unter Einbeziehung der Flugmechanik. Diese Untersuchung konzentriert sich vorrangig auf Kopplungseffekte zwischen den elastischen und den flugmechanischen Freiheitsgraden.



# Numerische Methoden

## 2.1 Modellierung der Strömung

Um Aussagen über das aeroelastische Verhalten von Flugzeugen treffen zu können, ist es notwendig, die auf die Struktur wirkenden Luftkräfte zu bestimmen. Die in dieser Arbeit verwendeten Strömungslöser AER-NS und AER-SDNS basieren auf CFD-Verfahren. Der Vorteil von CFD-Verfahren gegenüber den in der Aeroelastik bewährten Potentialmethoden liegt hauptsächlich in der Berücksichtigung von stoßinduzierten Nichtlinearitäten im transsonischen Geschwindigkeitsbereich. Außerdem ermöglicht die Verwendung von reibungsbehafteten Methoden eine Beurteilung von Reibungseinflüssen, bis hin zur Vorhersage ablösebedingter Nichtlinearitäten. Ein wesentlicher Nachteil ist der damit verbundene Mehraufwand an Rechenleistung bzw. Rechenzeit. Mit AER-NS wird die nichtlineare Variante des Löser bezeichnet und AER-SDNS ist eine linearisierte Version, die speziell für aeroelastische Anwendungen entwickelt wurde [93], [117], [79]. In den Kapiteln 2.1.3 und 2.1.4 wird je ein Bőenmodell für die Anwendung im Zeit- und Frequenzbereich beschrieben. Das für den linearisierten Löser AER-SDNS implementierte Bőenmodell wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt und in [154] veröffentlicht.

### 2.1.1 Nichtlinearer CFD-Löser

Instationäre, kompressible, reibungsbehaftete Strömungen Newtonscher Fluide werden durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Die Navier-Stokes-Gleichungen bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen (PDG) zweiter Ordnung. Sie beinhalten die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung und lauten in konservativer Form wie folgt [76], [74]

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}_v}{\partial z}, \quad (2.1)$$

mit

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho e + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho e + p)w \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} - q_1 e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} - q_2 e \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{h}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} - q_3 e \end{bmatrix}.$$

Mithilfe der thermischen Zustandsgleichung für das ideale Gas

$$p = \rho RT, \quad (2.3)$$

ergibt sich die für die Schließung des Gleichungssystems 2.1 notwendige Beziehung

$$p = (\kappa - 1) \left[ \rho e - \frac{1}{2\rho} ((\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2) \right]. \quad (2.4)$$

Die Gleichungen 2.1 bis 2.4 werden für gewöhnlich entdimensionalisiert [76], [79]. Der Vorteil liegt zum einen in einer Reduzierung der für das Problem charakteristischen Größen auf die wesentlichen Basisgrößen, was sich auch positiv auf die Vergleichbarkeit unterschiedlicher Strömungsprobleme auswirkt. Zum anderen werden die Variablen so skaliert, dass sie numerisch effizienter verarbeitet werden können. Um die Effizienz und die Genauigkeit der Strömungslösung steuern zu können, sowie eine einfachere Implementierung der Randbedingungen zu ermöglichen, werden die entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen anschließend auf krummlinige Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  transformiert

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial \zeta}, \quad (2.5)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{q}, \quad (2.6)$$

den konvektiven Flüßen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= J\xi_t \mathbf{q} + J\xi_x \mathbf{f} + J\xi_y \mathbf{g} + J\xi_z \mathbf{h}, \\ \mathbf{G} &= J\eta_t \mathbf{q} + J\eta_x \mathbf{f} + J\eta_y \mathbf{g} + J\eta_z \mathbf{h}, \\ \mathbf{H} &= J\zeta_t \mathbf{q} + J\zeta_x \mathbf{f} + J\zeta_y \mathbf{g} + J\zeta_z \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

und den viskosen Flüßen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v &= J\xi_x \mathbf{f}_v + J\xi_y \mathbf{g}_v + J\xi_z \mathbf{h}_v, \\ \mathbf{G}_v &= J\eta_x \mathbf{f}_v + J\eta_y \mathbf{g}_v + J\eta_z \mathbf{h}_v, \\ \mathbf{H}_v &= J\zeta_x \mathbf{f}_v + J\zeta_y \mathbf{g}_v + J\zeta_z \mathbf{h}_v. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Den reibungsfreien Sonderfall der Navier-Stokes-Gleichungen bilden die Eulergleichungen. Für die Eulergleichungen entfallen die viskosen Flüße 2.8 und es ergibt sich ein rein hyperbolisches Differentialgleichungssystem.

Zur Diskretisierung der Gleichungen 2.5 bis 2.8 wird die Finite Volumen Methode verwendet. Da diese Methode auf der integralen, konservativen Form der Erhaltungsgleichungen beruht, sind auch unstetige Lösungen, wie sie häufig in kompressiblen Strömungen auftreten, zulässig. Das Strömungsgebiet wird im Zuge der Diskretisierung in kleine Zellen unterteilt, deren Größe hauptsächlich durch die gewünschte Auflösung vorgegeben ist. Eine bestimmte Mindestauflösung ist allerdings in Abhängigkeit vom verwendeten Verfahren notwendig, um eine "netzkonvergierte" Lösung zu erhalten. Die Löser AER-NS

und AER-SDNS sind strukturierte Multiblock-Löser, was zur Folge hat, dass das Rechenetz ausschließlich aus hexaederförmigen Zellen bestehen muss. Diese Bedingung erfordert in den meisten Fällen einen größeren Vernetzungsaufwand, wirkt sich in der Regel aber positiv auf die Netzqualität und die damit verbundene Lösungsqualität aus. Die Flüsse werden jeweils an den Seitenflächen der Hexaeder ausgewertet, was auf folgende räumliche Diskretisierung führt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}_{i,j,k}}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta \xi} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta \eta} \\ + \frac{\mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta \zeta} = \frac{\mathbf{F}_v_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_v_{i-1/2,j,k}}{\Delta \xi} \\ + \frac{\mathbf{G}_v_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_v_{i,j-1/2,k}}{\Delta \eta} + \frac{\mathbf{H}_v_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_v_{i,j,k-1/2}}{\Delta \zeta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Das Ergebnis ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDG) erster Ordnung. Für die Diskretisierung der konvektiven Flüsse kommt das Flux-Difference-Splitting-Verfahren nach Roe zum Einsatz [136], [101], [151]. Auf diese Weise werden die charakteristischen Ausbreitungsrichtungen der Lösung bei der Diskretisierung des zugrundeliegenden Gleichungssystems berücksichtigt. Räumliche Genauigkeit zweiter Ordnung wird durch Anwendung der MUSCL-Extrapolation erreicht [93], [74]. Im Bereich von Unstetigkeiten wird durch den Einsatz geeigneter "Flux-Limiter" lokal auf ein räumliches Diskretisierungsschema erster Ordnung umgeschaltet, damit die "Total-Variation-Diminishing"-Eigenschaft der Lösung erhalten bleibt. Die Diskretisierung der viskosen Flüsse erfolgt entsprechend Chakravarthy [26], [79]. Die Turbulenz wird hier mithilfe des Eingleichungsmodells nach Spalart und Allmaras modelliert [149], [76].

Als Randbedingung können die Festkörper-, die Symmetrie- und die Fernfeldrandbedingung gewählt werden. Alle Randbedingungen sind auf frei im Raum bewegliche Rechenetze anwendbar. Im Fall der Festköperrandbedingung werden die konservativen Zustandsvariablen gemäß [74] auf den Rand extrapoliert und die resultierenden Geschwindigkeiten mit der kinematischen Randbedingung korrigiert. An den Fernfeldrändern werden die charakteristischen Zustandsvariablen unter der Annahme eindimensionaler Strömungsausbreitung entsprechend ihrer charakteristischen Ausbreitungsrichtung vorgeschrieben. Diese Art der Randbedingung wird als charakteristische Fernfeldrandbedingung bezeichnet und ist in AER-NS für bewegliche Ränder angepasst worden [67], [159], [72].

Ausgangspunkt für die diskrete Zeitintegration ist das Gleichungssystem 2.5

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} = -\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_v, \quad (2.10)$$

mit

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta}, \quad (2.11)$$

und

$$\mathbf{R}_v = -\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial \zeta}. \quad (2.12)$$

Um zeitechte, nichtlineare Simulationen durchführen zu können, wird dieses Gleichungssystem durch Anwendung eines impliziten Dual-Time-Stepping (DTS)-Verfahrens in der Zeit integriert. Die in zweiter Ordnung genaue, zeitdiskrete Formulierung lautet [18], [19],

[79]

$$\left[ \left( \frac{1}{\Delta\tau^*} + \frac{3}{2\Delta\tau} \right) J^{n+1} \bar{\mathbf{I}} + \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{q}} \right]^n \Delta \mathbf{q} = -(\mathbf{R}_k^n + \mathbf{R}_v^n) - \frac{3\mathbf{Q}^{n+1,m} - 4\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta\tau}. \quad (2.13)$$

Mit  $\tau^*$  wird die im Rahmen des DTS-Verfahrens eingeführte künstliche Pseudozeit bezeichnet, welche die diskrete Zeitschrittweite der inneren Iteration vorgibt. Dieser Zeitschritt wird als infinit angenommen, so dass der erste Term in Gleichung 2.13 entfällt. Die Genauigkeit der Lösung wird nur über die rechte Seite der Gleichung gesteuert. Die linke Seite bestimmt ausschließlich die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens. Die viskosen Flüsse werden auf der linken Seite der Gleichung nicht berücksichtigt, weil Untersuchungen diesbezüglich keine nennenswerten Verbesserungen des Konvergenzverhaltens ergeben haben [79]. Ein bedeutender Vorteil des DTS ist, dass Konvergenzbeschleunigungstechniken wie Mehrgitterverfahren oder das lokale Voranschreiten in der Zeit ermöglicht werden. Zur Lösung des Gleichungssystems 2.13 durch Invertierung der Bandmatrix wird das Lower-Upper-Symmetric-Successive-Overrelaxation (LU-SSOR)-Verfahren eingesetzt [82].

## 2.1.2 Linearisierter CFD-Löser

Die zeitlinearisierten Navier-Stokes-Gleichungen bei kleinen Störungen basieren auf der Annahme, dass die instationäre Strömungslösung auf eine harmonische Bewegung des umströmten Körpers harmonisch und linear antwortet. Dabei kann es bezüglich der Strömungsantwort zu einer Änderung in der Amplitude und der Phasenlage kommen. Die Annahme erfolgt unter der Einschränkung, dass kleine Störungen betrachtet werden, was für eine Vielzahl aeroelastischer Problemstellungen zulässig ist. Folglich werden im Rahmen dieser Modellierung nichtlineare, dynamische Strömungsphänomene als lineare Störung um einen nichtlinearen, stationären Referenzzustand  $\bar{\mathbf{q}}$  behandelt [117], [79]

$$\mathbf{q}(\tau, \xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{q}}(\xi, \eta, \zeta) + \tilde{\mathbf{q}}(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \mathbf{q}'(\tau, \xi, \eta, \zeta). \quad (2.14)$$

Die Beziehung 2.14 wird als Dreifachdekomposition bezeichnet und die Größen  $\tilde{\mathbf{q}}$  und  $\mathbf{q}'$  repräsentieren den zeitabhängigen harmonischen und den zeitabhängigen turbulenten Anteil der jeweils betrachteten Strömungsgrößen. Wendet man die Dreifachdekomposition auf die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen an und führt die Zeit- und Phasenmittelung durch, so ergibt sich nach der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung folgende Formulierung für den Zustandsvektor [79]

$$\mathbf{Q} = \bar{J}\bar{\mathbf{q}} + \bar{J}\tilde{\mathbf{q}} + \bar{J}\mathbf{q}', \quad (2.15)$$

mit den konvektiven Flüssen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \overline{J\xi_t}\bar{\mathbf{q}} + \overline{J\xi_x}\bar{\mathbf{f}} + \overline{J\xi_y}\bar{\mathbf{g}} + \overline{J\xi_z}\bar{\mathbf{h}} \\ &\quad + \overline{J\xi_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}} \\ &\quad + \widetilde{J\xi_t}\bar{\mathbf{q}} + \widetilde{J\xi_x}\bar{\mathbf{f}} + \widetilde{J\xi_y}\bar{\mathbf{g}} + \widetilde{J\xi_z}\bar{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \overline{J\eta_t}\bar{\mathbf{q}} + \overline{J\eta_x}\bar{\mathbf{f}} + \overline{J\eta_y}\bar{\mathbf{g}} + \overline{J\eta_z}\bar{\mathbf{h}} \\ &\quad + \overline{J\eta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}} \\ &\quad + \widetilde{J\eta_t}\bar{\mathbf{q}} + \widetilde{J\eta_x}\bar{\mathbf{f}} + \widetilde{J\eta_y}\bar{\mathbf{g}} + \widetilde{J\eta_z}\bar{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \overline{J\zeta_t}\bar{\mathbf{q}} + \overline{J\zeta_x}\bar{\mathbf{f}} + \overline{J\zeta_y}\bar{\mathbf{g}} + \overline{J\zeta_z}\bar{\mathbf{h}} \\ &\quad + \overline{J\zeta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}} \\ &\quad + \widetilde{J\zeta_t}\bar{\mathbf{q}} + \widetilde{J\zeta_x}\bar{\mathbf{f}} + \widetilde{J\zeta_y}\bar{\mathbf{g}} + \widetilde{J\zeta_z}\bar{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

und den viskosen Flüssen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v &= \overline{J\xi_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \overline{J\xi_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \overline{J\xi_z}\bar{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \overline{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \widetilde{J\xi_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\xi_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\xi_z}\bar{\mathbf{h}}_v, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_v &= \overline{J\eta_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \overline{J\eta_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \overline{J\eta_z}\bar{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \overline{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \widetilde{J\eta_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\eta_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\eta_z}\bar{\mathbf{h}}_v, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_v &= \overline{J\zeta_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \overline{J\zeta_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \overline{J\zeta_z}\bar{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \overline{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v \\ &\quad + \widetilde{J\zeta_x}\bar{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\zeta_y}\bar{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\zeta_z}\bar{\mathbf{h}}_v. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Terme, die keinen Störanteil besitzen, erfüllen die Navier-Stokes-Gleichungen von vornherein und müssen in den Gleichungen 2.15 bis 2.21 nicht weiter berücksichtigt werden. Im Folgenden werden die verbleibenden Gleichungen umgeordnet und die Störanteile der Strömungslösung mit <sup>(1)</sup> bzw. die Terme der Störmetrik mit <sup>(2)</sup> gekennzeichnet

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}^{(1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_v^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_v^{(1)}}{\partial \zeta} = \\ &\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_v^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_v^{(2)}}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{Q}}^{(1)} &= \tilde{J}\tilde{\mathbf{q}}, \\
\tilde{\mathbf{Q}}^{(2)} &= \tilde{J}\tilde{\mathbf{q}}, \\
\tilde{\mathbf{F}}^{(1)} &= \overline{J\xi_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{F}}^{(2)} &= \widetilde{J\xi_t}\tilde{\mathbf{q}} + \widetilde{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}} + \widetilde{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}} + \widetilde{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{G}}^{(1)} &= \overline{J\eta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{G}}^{(2)} &= \widetilde{J\eta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \widetilde{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \widetilde{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \widetilde{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{H}}^{(1)} &= \overline{J\zeta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \overline{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \overline{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \overline{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{H}}^{(2)} &= \widetilde{J\zeta_t}\tilde{\mathbf{q}} + \widetilde{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}} + \widetilde{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}} + \widetilde{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}}, \\
\tilde{\mathbf{F}}_v^{(1)} &= \overline{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}}_v, \\
\tilde{\mathbf{F}}_v^{(2)} &= \widetilde{J\xi_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\xi_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\xi_z}\tilde{\mathbf{h}}_v, \\
\tilde{\mathbf{G}}_v^{(1)} &= \overline{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v, \\
\tilde{\mathbf{G}}_v^{(2)} &= \widetilde{J\eta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\eta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\eta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v, \\
\tilde{\mathbf{H}}_v^{(1)} &= \overline{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \overline{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \overline{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v, \\
\tilde{\mathbf{H}}_v^{(2)} &= \widetilde{J\zeta_x}\tilde{\mathbf{f}}_v + \widetilde{J\zeta_y}\tilde{\mathbf{g}}_v + \widetilde{J\zeta_z}\tilde{\mathbf{h}}_v.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Die linke Seite von Gleichung 2.22 besteht aus Produkttermen der unbekanntenen Strömungsgrößen und der bekannten Referenzmetrik. Auf der rechten Seite befinden sich Produkte der Störmatrix und der stationären Strömungslösung. Folglich wird die Störung über die Störmatrix auf der bekannten rechten Seite der Gleichung definiert. Die Metrik wird aus den Ortskoordinaten der Zelleckpunkte berechnet. Die Eckpunkte können analog zu den Strömungsgrößen in einen Referenz- und einen Störanteil aufgeteilt werden

$$\mathbf{x}(\tau, \xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta, \zeta) + \tilde{\mathbf{x}}(\tau, \xi, \eta, \zeta). \tag{2.24}$$

Für eine harmonische Bewegung des umströmten Körpers folgt

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau, \xi, \eta, \zeta) = \hat{\mathbf{x}}(\xi, \eta, \zeta)e^{ik\tau}, \tag{2.25}$$

ebenso ergibt sich für den harmonischen Anteil des Zustandsvektors

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tau, \xi, \eta, \zeta) = \hat{\mathbf{q}}(\xi, \eta, \zeta)e^{ik\tau}. \tag{2.26}$$

Entsprechende Formulierungen gelten auch für die Metrikterme

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &= \hat{J}e^{ik\tau}, \\
\widetilde{J\xi_{t,x,y,z}} &= \widehat{J\xi_{t,x,y,z}}e^{ik\tau}, \\
\widetilde{J\eta_{t,x,y,z}} &= \widehat{J\eta_{t,x,y,z}}e^{ik\tau}, \\
\widetilde{J\zeta_{t,x,y,z}} &= \widehat{J\zeta_{t,x,y,z}}e^{ik\tau},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

für die konvektiven Flüsse  $\tilde{\mathbf{f}}$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}$ ,  $\tilde{\mathbf{h}}$  und für die viskosen Flüsse  $\tilde{\mathbf{f}}_v$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}_v$ ,  $\tilde{\mathbf{h}}_v$ . Dabei ist zu beachten, dass das Netz stets der Körperoberfläche folgt. In der gestörten bzw. der

ausgelenkten Netzlage gibt das Rechnernetz die Schwingungsamplitude des umströmten Körpers vor. Der äußere Rand des deformierten Störnetzes muss gleich dem Referenznetz bleiben. Für eine ausführliche Linearisierung der Randbedingungen, des Spalart-Allmaras-Turbulenzmodells, sowie der Gleichungen 2.22 unter Berücksichtigung des harmonischen Zeitansatzes sei auf die Literatur verwiesen [93], [117], [79]. Die aus der vollständigen Linearisierung resultierende Formulierung lautet

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \hat{Q}^{(1)}}{\partial \tau^*} + ik\hat{Q}^{(1)} + \frac{\partial \hat{F}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}^{(1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \hat{F}_v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{G}_v^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{H}_v^{(1)}}{\partial \zeta} \right) e^{ik\tau} = \\ & \left( -ik\hat{Q}^{(2)} - \frac{\partial \hat{F}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{G}^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{H}^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \hat{F}_v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_v^{(2)}}{\partial \zeta} \right) e^{ik\tau}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Terme  $e^{ik\tau}$  können abschließend gekürzt werden. Die Ableitung nach der Zeit auf der linken Seite der Gleichung ist Null, wird aber in Hinblick auf die numerische Zeitintegration beibehalten. Der entscheidende Vorteil dieses Verfahrens ist, dass die Lösung des instationären Problems mithilfe der Störampplituden aus numerischer Sicht formal wie ein stationäres Problem behandelt werden kann und daher eine bedeutende Ersparnis an Rechenaufwand zur Folge hat. Aufgrund der Einführung des komplexen Zeitgesetzes ergeben sich als Lösung komplexe Druckverteilungen auf der Körperoberfläche. Diese komplexen Druckverteilungen beinhalten Informationen über die Amplituden- und Phasenlage der Strömungsantwort gegenüber der harmonischen Anregung.

Für die räumliche Diskretisierung des Gleichungssystems 2.28 kommen überwiegend die in Kapitel 2.1.1 beschriebenen Methoden zum Einsatz. Die Zeitintegration findet analog zum stationären Problem mithilfe einer künstlichen Pseudozeit statt

$$\left[ \bar{J}(\Delta\tau^{*-1} + ik)\bar{I} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\bar{q}} \right] \Delta \hat{\mathbf{q}} = -\hat{\mathbf{R}}^{(1)n} - \hat{\mathbf{R}}^{(2)}, \quad (2.29)$$

mit

$$\hat{\mathbf{R}}^{(1)} = ik\hat{Q}^{(1)} + \frac{\partial \hat{F}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}^{(1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \hat{F}_v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{G}_v^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{H}_v^{(1)}}{\partial \zeta}, \quad (2.30)$$

und

$$\hat{\mathbf{R}}^{(2)} = ik\hat{Q}^{(2)} + \frac{\partial \hat{F}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}^{(2)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \hat{F}_v^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{G}_v^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{H}_v^{(2)}}{\partial \zeta}. \quad (2.31)$$

Die Größen  $k$ ,  $\bar{J}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}^{(2)}$  und  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\bar{q}}$  sind gegeben bzw. werden beim Programmstart einmalig bestimmt. Für die Lösung des resultierenden Gleichungssystems findet das LU-SSOR-Verfahren Anwendung [82], [18], [19]. Die Kopplung zwischen dem Real- und dem Imaginärteil des Lösungsvektors erfolgt ausschließlich über den Term  $ik\hat{Q}^{(1)}$ .

### 2.1.3 Böenmodellierung nichtlinearer Strömungslöser

Die in dieser Arbeit behandelten Antwortanalysen konzentrieren sich auf Systemantworten, die durch eine Böenanregung hervorgerufen werden. Um die elastische Antwort auf eine Böenanregung im Zeitbereich bestimmen zu können, ist eine weitere instationäre Randbedingung in AER-NS implementiert worden. Die offensichtlichste Möglichkeit, eine Böengeschwindigkeit im Strömungsgebiet zu induzieren, wird durch eine instationäre Fernfeldrandbedingung am Einströmrand verkörpert. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass Interaktionen zwischen der Strömungslösung und der Böe stattfinden können. Dafür bringt diese Modellierung auch einige numerische Nachteile mit sich. Auf der einen Seite muss die Böe durch große Teile des Rechengebiets wandern, bis sie den umströmten Körper erreicht. Dieser Zeitverzug bedeutet zusätzlichen Simulationsaufwand. Auf der anderen Seite muss die Diskretisierung im Fernfeld sehr fein sein, damit das Böenprofil erhalten bleibt, bis es den Körper erreicht. In der Literatur wurden verschiedene Böenmodelle vorgestellt [165], [83], [71]. Untersuchungen von [71] haben gezeigt, dass die Rückkopplung der Körperumströmung nur für Böenwellenlängen kleiner zwei Profilsenhnenlängen einen relevanten Einfluss auf die Böe hat und folglich in vielen Anwendungen vernachlässigt werden kann. In dieser Arbeit kommt eine Methode zum Einsatz, die unter einer Vielzahl von Namen bekannt ist und hier als “Artificial-Velocity-Model” bezeichnet wird. Bei dieser Methode wird der lokale Böengeschwindigkeitsvektor mit den Komponenten  $u_B$ ,  $v_B$ ,  $w_B$  zu den Zellpunktgeschwindigkeiten  $x_\tau$ ,  $y_\tau$ ,  $z_\tau$  addiert, so dass gilt [53]

$$\begin{aligned} J\xi_t &= -J\xi_x(x_\tau + u_B) - J\xi_y(y_\tau + v_B) - J\xi_z(z_\tau + w_B), \\ J\eta_t &= -J\eta_x(x_\tau + u_B) - J\eta_y(y_\tau + v_B) - J\eta_z(z_\tau + w_B), \\ J\zeta_t &= -J\zeta_x(x_\tau + u_B) - J\zeta_y(y_\tau + v_B) - J\zeta_z(z_\tau + w_B). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Durch diesen Eingriff wird der zeitabhängige Anteil der Metrik manipuliert. Die Metrik umfasst die Koeffizienten  $J$ ,  $\xi_t$ ,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\xi_z$ ,  $\eta_t$ ,  $\eta_x$ ,  $\eta_y$ ,  $\eta_z$ ,  $\zeta_t$ ,  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\zeta_z$  in den Gleichungen 2.6 bis 2.8, welche die Koordinatentransformation auf krummlinige Koordinaten ermöglichen. Physikalisch entspricht diese Anpassung der Metrik einer künstlichen, lokalen Netzstarrkörperbewegung beziehungsweise einer Netzrelativbewegung gegenüber der freien Anströmung entsprechend der lokalen Böengeschwindigkeit, wobei das Netz aber tatsächlich starr bleibt. Diese Modellierung vereint die oben genannten Vorteile, nämlich dass die Störung direkt im Nahfeld um den Körper induziert werden kann, wodurch sich der Simulationsaufwand nicht nennenswert vergrößert. Weiterhin ist dieser Bereich aufgrund der Anforderungen an die Strömungslösung entsprechend feiner diskretisiert, was zwangsläufig zu einer ausreichenden Auflösung des Böenprofils führt.

### 2.1.4 Böenmodellierung linearisierter Strömungslöser

Entsprechend dem eben beschriebenen “Artificial-Velocity-Model” im Zeitbereich lässt sich eine sinngemäße Böenmodellierung auf den linearisierten Löser in den Frequenzbereich übertragen [53]. Durch die Implementierung des linearisierten Böenmodells ist es möglich, generalisierte Böenluftkräfte und Böenantworten auf harmonische Böenanregungen sehr effizient im Frequenzbereich zu berechnen. Ausgangspunkt der Überlegung ist gemäß Kapitel 2.1.2 die Voraussetzung einer linearen, harmonischen Störung des nichtlinearen, stationären Strömungsfeldes. Ein komplexer Ausdruck für ein harmonisches Böengeschwindigkeitsprofil, das sich mit einer Geschwindigkeit  $U_\infty$  in x-Richtung fortbewegt,

lautet

$$\widehat{\mathbf{v}}_B(t, x, y, z) = \mathbf{v}_B(y, z) e^{i\omega \left( t - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}}{U_\infty} \right)}. \quad (2.33)$$

Analog zu der Formulierung nach Gleichung 2.28 kann die explizite Zeitabhängigkeit gekürzt werden. Man erhält einen Ausdruck in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz  $k_{red}$

$$\widehat{\mathbf{v}}_B(x, y, z) = \mathbf{v}_B(y, z) e^{ik_{red} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}}{l_{ref}} \right)}, \quad (2.34)$$

mit

$$k_{red} = \frac{\omega l_{ref}}{U_\infty}. \quad (2.35)$$

Die Komponenten  $\widehat{u}_B$ ,  $\widehat{v}_B$ ,  $\widehat{w}_B$  der böeninduzierten Geschwindigkeitsverteilung werden anschließend zu den Netzpunktgeschwindigkeiten  $\widehat{x}_\tau$ ,  $\widehat{y}_\tau$ ,  $\widehat{z}_\tau$  des Störzustandes addiert. Die Zellflächengeschwindigkeiten  $\widehat{J}_{\xi_t}$ ,  $\widehat{J}_{\eta_t}$ ,  $\widehat{J}_{\zeta_t}$  der linearisierten Metrik aus Gleichung 2.27 sind in diesem Zusammenhang wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{\xi_t} &= -\overline{J_{\xi_x}}(\widehat{x}_\tau + \widehat{u}_B) - \overline{J_{\xi_y}}(\widehat{y}_\tau + \widehat{v}_B) - \overline{J_{\xi_z}}(\widehat{z}_\tau + \widehat{w}_B), \\ \widehat{J}_{\eta_t} &= -\overline{J_{\eta_x}}(\widehat{x}_\tau + \widehat{u}_B) - \overline{J_{\eta_y}}(\widehat{y}_\tau + \widehat{v}_B) - \overline{J_{\eta_z}}(\widehat{z}_\tau + \widehat{w}_B), \\ \widehat{J}_{\zeta_t} &= -\overline{J_{\zeta_x}}(\widehat{x}_\tau + \widehat{u}_B) - \overline{J_{\zeta_y}}(\widehat{y}_\tau + \widehat{v}_B) - \overline{J_{\zeta_z}}(\widehat{z}_\tau + \widehat{w}_B), \end{aligned} \quad (2.36)$$

und die Amplituden der Netzpunktgeschwindigkeiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{x}_\tau &= ik\widehat{x}, \\ \widehat{y}_\tau &= ik\widehat{y}, \\ \widehat{z}_\tau &= ik\widehat{z}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

In dieser Formulierung sind die Zellflächengeschwindigkeiten keine rein imaginären Größen mehr, weil die Böengeschwindigkeit  $\widehat{\mathbf{v}}_B$  im Allgemeinen sowohl Real- als auch Imaginärteil besitzt. Durch Anwendung der Eulerschen Formel auf die Beziehung 2.34 wird dieser Zusammenhang offensichtlich

$$\widehat{\mathbf{v}}_B(x, y, z) = \mathbf{v}_B(y, z) \left\{ \cos \left[ k_{red} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}}{l_{ref}} \right) \right] + i \sin \left[ k_{red} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}}{l_{ref}} \right) \right] \right\}. \quad (2.38)$$

Damit lässt sich für die Änderung in den Zellflächengeschwindigkeiten Folgendes schreiben

$$\begin{aligned} \Delta \Re(\widehat{J}_{\xi_t}) &= -\overline{J_{\xi_x}} \Re(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\xi_y}} \Re(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\xi_z}} \Re(\widehat{w}_B), \\ \Delta \Re(\widehat{J}_{\eta_t}) &= -\overline{J_{\eta_x}} \Re(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\eta_y}} \Re(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\eta_z}} \Re(\widehat{w}_B), \\ \Delta \Re(\widehat{J}_{\zeta_t}) &= -\overline{J_{\zeta_x}} \Re(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\zeta_y}} \Re(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\zeta_z}} \Re(\widehat{w}_B), \\ \Delta \Im(\widehat{J}_{\xi_t}) &= -\overline{J_{\xi_x}} \Im(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\xi_y}} \Im(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\xi_z}} \Im(\widehat{w}_B), \\ \Delta \Im(\widehat{J}_{\eta_t}) &= -\overline{J_{\eta_x}} \Im(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\eta_y}} \Im(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\eta_z}} \Im(\widehat{w}_B), \\ \Delta \Im(\widehat{J}_{\zeta_t}) &= -\overline{J_{\zeta_x}} \Im(\widehat{u}_B) - \overline{J_{\zeta_y}} \Im(\widehat{v}_B) - \overline{J_{\zeta_z}} \Im(\widehat{w}_B). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Gleichungen 2.39 haben direkte Auswirkungen auf die Störmatrix und demzufolge auf die mit (2) indizierten Terme der rechten Seite von Gleichung 2.28.

Unter der Annahme, dass entlang einer undurchlässigen Festkörperwand zu jedem Zeitpunkt die Haftbedingung

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{\xi_t} + \overline{J_{\xi_x}} \widehat{u} + \overline{J_{\xi_y}} \widehat{v} + \overline{J_{\xi_z}} \widehat{w} &= 0, \\ \widehat{J}_{\eta_t} + \overline{J_{\eta_x}} \widehat{u} + \overline{J_{\eta_y}} \widehat{v} + \overline{J_{\eta_z}} \widehat{w} &= 0, \\ \widehat{J}_{\zeta_t} + \overline{J_{\zeta_x}} \widehat{u} + \overline{J_{\zeta_y}} \widehat{v} + \overline{J_{\zeta_z}} \widehat{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

erfüllt ist, resultiert für den reellen Anteil der konvektiven Flüsse die Festkörperandbe-  
dingung

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{J\xi_x\bar{p}} \\ \widehat{J\xi_y\bar{p}} \\ \widehat{J\xi_z\bar{p}} \\ -\Delta\Re(\widehat{J\xi_t}\bar{p}) \end{bmatrix}, & \Re(\tilde{\mathbf{G}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{J\eta_x\bar{p}} \\ \widehat{J\eta_y\bar{p}} \\ \widehat{J\eta_z\bar{p}} \\ -\Delta\Re(\widehat{J\eta_t}\bar{p}) \end{bmatrix}, \\ \Re(\tilde{\mathbf{H}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{J\zeta_x\bar{p}} \\ \widehat{J\zeta_y\bar{p}} \\ \widehat{J\zeta_z\bar{p}} \\ -\Delta\Re(\widehat{J\zeta_t}\bar{p}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

und für den imaginären Anteil der konvektiven Flüsse gilt

$$\begin{aligned} \Im(\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k\widehat{J\xi_t}\bar{p} + \Delta\Im(\widehat{J\xi_t}\bar{p}) \end{bmatrix}, & \Im(\tilde{\mathbf{G}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k\widehat{J\eta_t}\bar{p} + \Delta\Im(\widehat{J\eta_t}\bar{p}) \end{bmatrix}, \\ \Im(\tilde{\mathbf{H}}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k\widehat{J\zeta_t}\bar{p} + \Delta\Im(\widehat{J\zeta_t}\bar{p}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Mit den viskosen Flüssen wird analog verfahren. Der Druck  $\bar{p}$  wird mit einem räumlichen  
Ansatz zweiter Ordnung auf den Rand extrapoliert.

## 2.2 Modellierung der Struktur

In der numerischen Strukturmechanik kommen heutzutage vorrangig auf FEM basierende  
Verfahren zum Einsatz. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein auf linearen FEM beruhen-  
der Strukturlöser AER-FE für statische und dynamische aeroelastische Problemstellun-  
gen implementiert. Als Analysemethoden stehen die statische Verformungsanalyse, die  
Modalanalyse, die Frequenzganganalyse und diverse transiente Simulationsverfahren zur  
Verfügung. Eine genauere Beschreibung der zum Einsatz kommenden Simulationsmetho-  
den und Elementtypen wird in den nachfolgenden Unterkapiteln gegeben.

### 2.2.1 Finite Elemente Methode

FEM kommen im Allgemeinen zur Anwendung, wenn Rand- und Anfangswertprobleme  
von Feldvariablen gelöst werden sollen, die meist in Form von PDG gegeben sind. Ein  
wesentlicher Grundgedanke der FEM ist die Unterteilung der Struktur in kleine Elemen-  
te, wobei die zugrundeliegenden mechanischen Gleichungen für jedes Element formuliert

sind. Auf diese Weise kann ein geometrisch komplexes Gebiet in einfach zu behandelnde Teilbereiche aufgespalten werden. In diesem Zusammenhang können die FEM auch als Erweiterung des Rayleigh-Ritzschen-Variationsverfahrens für stückweise stetige Ansatzfunktionen verstanden werden [162], [54]. Die einzelnen Elemente sind mithilfe von Knoten verbunden, wobei jeder Knoten über geeignete Freiheitsgrade verfügen muss, um die jeweilige verformte Gleichgewichtslage der Struktur abbilden zu können. An den Knoten müssen Kräfte und Momente im Gleichgewicht sein und die Stetigkeit der Verschiebungen der angrenzenden Elementknoten ist zu gewährleisten. Innerhalb der Elemente werden beliebige Ansatzfunktionen, zumeist Polynome niedriger Ordnung, definiert, deren Linearkombinationen die möglichen Lösungen des numerischen Problems liefern. Während des Diskretisierungsprozesses werden alle räumlichen Ableitungen eliminiert, was im statischen Fall zu einem linearen Gleichungssystem und im dynamischen Fall zu einem GDG-System führt, durch dessen Lösung die Verformung oder der Spannungszustand der Struktur ermittelt werden kann. Die nachfolgenden Herleitungen beziehen sich auf das dynamische Problem, da es das statische weitestgehend einschließt.

Die erforderlichen Grundgleichungen der linearen, klassischen Strukturmechanik umfassen die Gleichgewichtsbedingungen, die kinematischen Bedingungen und das Spannungs-Dehnungs-Gesetz [78], [156]. In einem strukturdynamischen Problem ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  eine Funktion von der Zeit  $t \in [t_0, t_{max}]$  und von dem Ortsvektor  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Damit lauten die Grundgleichungen auf dem Gebiet  $\Omega \times [t_0, t_{max}]$

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \hat{\mathbf{b}}, \quad (2.43)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.44)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (2.45)$$

mit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}, \quad (2.46)$$

und

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}, \quad (2.47)$$

wobei das Symbol  $\times$  das kartesische Produkt zweier Mengen repräsentiert. Diese Gesetzmäßigkeiten werden ergänzt durch entsprechende Rand- und Anfangsbedingungen. Die Randbedingungen auf den Rändern  $\Gamma$  sind unterteilt in die notwendige Randbedingung (Verschiebungsrandbedingung)

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_u \times [t_0, t_{max}], \quad (2.48)$$

und die natürliche Randbedingung (Flussrandbedingung)

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_\sigma \times [t_0, t_{max}]. \quad (2.49)$$

Unter der natürlichen Randbedingung werden alle Randbedingungen zusammengefasst, die mit der Belastungsfunktion in Beziehung stehen. Die notwendige Randbedingung betrifft die Lösungsfunktion. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\mathbf{u}}_0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad (2.50)$$

und

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\mathbf{v}}_0 \quad \text{in} \quad \Omega. \quad (2.51)$$

Grundsätzlich kann man die FEM durch Anpassungen oder Erweiterungen mehrerer mathematischer Methoden herleiten. Als Beispiel werden hier das Verfahren der gewichteten Residuen, Extremalprinzipien und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen genannt [162], [14]. Für die nachfolgende räumliche Diskretisierung der Grundgleichungen soll in Anlehnung an [156] das Verfahren der gewichteten Residuen dienen. Da man in der Aeroelastik vorrangig an den Strukturdeformationen interessiert ist und demzufolge großen Wert auf deren exakte Vorhersage legt, wird hier eine rein verschiebungsbasierte FEM-Formulierung verwendet. Die Residuen der Gleichungen 2.43 und 2.49 werden mit der zeitunabhängigen Wichtungsfunktion  $\mathbf{w}$  multipliziert

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{b}} - \rho \mathbf{a}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{w}^T (\hat{\mathbf{t}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0. \quad (2.52)$$

Die Erfüllung der Gleichungen erfolgt jetzt nicht mehr punktweise (starke Formulierung), sondern im integralen Mittel über Teilbereiche (schwache Formulierung). Werden die Elemente sehr klein oder der Grad der Ansatzfunktionen genügend hoch gewählt, kann man eine beliebig genaue Approximation der “starken Lösung” erreichen. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes lassen sich Randbedingungsterme eliminieren und die Anforderungen an die Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen für  $\mathbf{u}$  nehmen ab

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w})^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.53)$$

Da die Wichtungsfunktionen frei wählbar sind, können sie durch die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  ersetzt werden. Ein analoger Ausdruck ergibt sich durch die Anwendung des d’Alembertschen Prinzips

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.54)$$

Setzt man die primäre Variable  $\mathbf{u}$  unter Verwendung der starken Beziehung 2.45 in Gleichung 2.54 ein, so erhält man

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{L}} \delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{L}} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.55)$$

Im Zuge der Diskretisierung wird das Gebiet  $\Omega$  in  $N^e$  Elemente  $\Omega^e$  unterteilt. Auf jedem Element werden Formfunktionen  $\mathbf{N}^e(x)$  eingeführt und mit den zeitabhängigen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}^e(t)$  multipliziert

$$\mathbf{u}^e(x, t) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{d}^e(t). \quad (2.56)$$

Mithilfe des isoparametrischen Konzepts lassen sich die Formfunktionen auch in Abhängigkeit vom lokalen Elementkoordinatensystem ausdrücken [78], [6]. Der Vorteil liegt darin, alle Formulierungen in einem einfachen elementangepassten Parameterraum zu beschreiben, was sie für eine numerische Integration leichter zugänglich macht. Anschließend werden alle Elementmatrizen wieder in den realen Raum transformiert. Bei einer isoparametrischen Transformation kommen für die Transformation der Geometrie die gleichen Formfunktionen zum Einsatz wie für die Interpolation der Verschiebungen. Durch Einsetzen der Formfunktionen 2.56 in die Gleichung 2.55 erhält man

$$\sum_{e=1}^{N^e} \left[ \delta \mathbf{d}^T \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \ddot{\mathbf{d}} + \int_{\Omega^e} (\bar{\mathbf{L}} \mathbf{N})^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{L}} \mathbf{N} d\Omega \mathbf{d} - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \right]^e = 0. \quad (2.57)$$

Basierend auf der Gleichung 2.57 werden die Elementmassenmatrix  $\bar{\bar{M}}^e$ , die Elementsteifigkeitsmatrix  $\bar{\bar{K}}^e$  und der Elementlastvektor  $\mathbf{F}^e$  definiert

$$\bar{\bar{M}}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega, \quad (2.58)$$

$$\bar{\bar{K}}^e = \int_{\Omega^e} (\bar{\bar{L}}\mathbf{N})^T \bar{\bar{C}} \bar{\bar{L}}\mathbf{N} d\Omega, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{F}^e = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.60)$$

Die lokal definierten Elementvektoren bzw. -matrizen müssen anschließend in den realen Raum transformiert und zu globalen Matrizen zusammgebaut werden. Das Resultat der räumlichen Diskretisierung ist ein semidiskretes System GDG zweiter Ordnung

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\bar{K}}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.61)$$

Dieses Gleichungssystem kann mithilfe direkter Zeitintegration gelöst werden. Das heißt, die Lösung erfolgt in den physikalischen Freiheitsgraden, ohne die Vorab-Anwendung einer Transformation. Das in AER-FE umgesetzte Zeitintegrationsverfahren ist ein Kollokationsverfahren. Bei diesen Verfahren sind die Bewegungsgleichungen an bestimmten Punkten, den Kollokationspunkten, exakt erfüllt [162]. Für gewöhnlich werden Finite Differenzen Verfahren zur Entwicklung von Kollokationsverfahren verwendet. Zeitintegrationsverfahren können im Allgemeinen explizit oder implizit formuliert werden. Der Vorteil impliziter Verfahren ist, dass diese bedingungslos stabil sein können, was aber in der Regel mit einem deutlich größeren Rechen- und Speicheraufwand verbunden ist. Die expliziten Verfahren erfordern geringeren Rechen- bzw. Speicherbedarf, benötigen aber sehr kleine Zeitschrittweiten um die notwendigen Stabilitätskriterien zu erfüllen. Häufig verwendete Vertreter expliziter Verfahren sind die Runge-Kutta-Verfahren oder das Zentrale-Differenzen-Verfahren. Die Runge-Kutta-Verfahren gehören zu den Einzschritverfahren und das Zentrale-Differenzen-Verfahren zu den Mehrschrittverfahren, bei denen auch physikalische Größen von zurückliegenden Zeitschritten in die Berechnung einbezogen werden. Beispiele für implizite Zeitintegrationsverfahren sind die Wilson- $\theta$ -Methode [160], die Hilber-Hughes-Taylor- $\alpha$ -Methode [73] oder die Newmark- $\beta$ -Methode [115]. Letztere findet in AER-FE bei der Lösung linearer, ungekoppelter dynamischer Strukturprobleme Anwendung und wird hier kurz beschrieben. Gleichung 2.61 lässt sich unter Einbeziehung einer Dämpfungsmatrix  $\bar{\bar{C}}$  zu einer diskreten Zeit  $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$  wie folgt schreiben

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} + \bar{\bar{C}}\dot{\mathbf{d}}^{n+1} + \bar{\bar{K}}\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1}. \quad (2.62)$$

Gemäß [54] werden in der Newmark- $\beta$ -Methode für den Verschiebungs- und den Geschwindigkeitsvektor folgende Annahmen getroffen

$$\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \dot{\mathbf{d}}^n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{d}}^n + \beta \ddot{\mathbf{d}}^{n+1} \right] \Delta t^2, \quad (2.63)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \dot{\mathbf{d}}^n + \left[ (1 - \alpha) \ddot{\mathbf{d}}^n + \alpha \ddot{\mathbf{d}}^{n+1} \right] \Delta t. \quad (2.64)$$

Mithilfe der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich die Stabilität und die Genauigkeit des Verfahrens steuern. Löst man Gleichung 2.63 nach der Beschleunigung auf und setzt das

Ergebnis in Gleichung 2.64 ein, ergeben sich

$$\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{2\beta - 1}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}^n - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n), \quad (2.65)$$

und

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\alpha}{\beta\Delta t} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n). \quad (2.66)$$

Durch das Einsetzen der Gleichungen 2.65 und 2.66 in 2.62 kann nach den Verschiebungen zum neuen Zeitschritt  $t^{n+1}$  gelöst werden

$$\mathbf{d}^{n+1} = \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{-1} \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}^{n+1}. \quad (2.67)$$

Die effektive Steifigkeitsmatrix und der effektive Kraftvektor lauten

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}} = \bar{\mathbf{K}} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\alpha}{\beta\Delta t} \bar{\mathbf{C}}, \quad (2.68)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}^{n+1} = & \mathbf{F}^{n+1} + \bar{\mathbf{M}} \left[ \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}^n + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{d}^n \right] \\ & + \bar{\mathbf{C}} \left[ \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n + \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\alpha}{\beta\Delta t} \mathbf{d}^n \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die Newmark- $\beta$ -Methode ist für  $\beta \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{4}$  bedingungslos stabil. Wenn gilt  $\alpha > \frac{1}{2}$ , wird die Lösung numerisch gedämpft und für  $\alpha = \frac{1}{2}$  liefert die Newmark- $\beta$ -Methode Genauigkeit zweiter Ordnung. Wenn der Strukturlöser AER-FE mit einem anderen zeitechten Löser gekoppelt wird, kommt das in Kapitel 2.4.4 beschriebene Zeitintegrationsverfahren zum Einsatz.

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Strukturmodelle sind ausschließlich aus Balken- und Plattenelementen aufgebaut. Zusätzlich können dem Modell auch konzentrierte, diskrete Punktmassen oder -steifigkeiten hinzugefügt werden. Mit AER-FE ist es weiterhin möglich, neben isotropen Materialeigenschaften auch orthotrope Faserverbundwerkstoffe zu modellieren. Die jeweiligen elementspezifischen Grundgleichungen der eingesetzten Elementtypen werden im Folgenden entsprechend der Ansätze gemäß [54] aufgeführt. Eindimensionale Strukturen wurden mithilfe des klassischen Euler-Bernoulli-Balkens modelliert. Das Spannungs-Dehnungsgesetz ist gegeben durch

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x - zw_{xx} - yv_{xx} \\ -z\phi_x \\ y\phi_x \end{Bmatrix}, \quad (2.70)$$

mit

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.71)$$

und

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u - zw_x - yv_x \\ v - z\phi \\ w + y\phi \end{Bmatrix}. \quad (2.72)$$

Das Spannungs-Dehnungs-Gesetz der Kirchhoff-Platte lautet

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x - zw_{xx} \\ v_y - zw_{yy} \\ u_y + v_x - 2zw_{xy} \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

mit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u - zw_x \\ v - zw_y \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Alternativ kann die schubverformbare Reissner-Mindlin-Platten-Theorie verwendet werden

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x + z(\gamma_{5x} - w_{xx}) \\ v_y - z(w_{yy} - \gamma_{4y}) \\ u_y + v_x + z(\gamma_{4x} + \gamma_{5y} - 2w_{xy}) \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

mit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u + z(\gamma_5 - w_x) \\ v - z(w_y - \gamma_4) \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Für die Plattenmodellierung stehen in AER-FE sowohl drei- als auch vierknotige Elemente zur Verfügung.

## 2.2.2 Modalanalyse

Die Modalanalyse umfasst die Charakterisierung des dynamischen Verhaltens schwingungsfähiger Systeme unter Verwendung der modalen Eigenschwingungsgrößen, die im Folgenden definiert werden. In komplexen Systemen sind Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften beliebig und kontinuierlich im System verteilt. Aus diesem Grund bieten sich auch hier die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen FEM an, um die PDG, welche die kontinuierliche Struktur mathematisch beschreiben, in lineare GDG umzuwandeln. Lineare GDG können durch eine Modalanalyse gelöst werden. Dabei wird angenommen, dass in einem frei schwingenden System bevorzugte Schwingungsformen und Frequenzen existieren, welche als Eigenformen bzw. Eigenmoden und als Eigenfrequenzen bezeichnet werden. Weiterhin wird angenommen, dass folglich beliebige Schwingungsvorgänge durch die Überlagerung der Eigenformen approximiert werden können [38]. Wenn ein Mehr-Freiheitsgrad-System mit einer bestimmten Anfangsdeformation  $\mathbf{d}(0)$  und einer Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{d}}(0)$  in einer Eigenmode aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird und keine äußeren Kräfte  $\mathbf{F}(t) = 0$  wirken, so schwingt das System mit konstantem Auslenkungsverhältnis aller Freiheitsgrade weiter. Dieses konstante Verhältnis der Auslenkungen wird als Eigenvektor  $\Phi$  bezeichnet und repräsentiert die jeweilige Eigenform der Struktur. Mithilfe der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  lässt sich die Lösung für die Bewegungsgleichung eines freien, ungedämpften Schwingers

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{d}(t) = 0, \quad (2.77)$$

wie folgt formulieren [38]

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Phi} e^{j\omega t}. \quad (2.78)$$

Setzt man die Gleichung 2.78 in die Gleichung 2.77 ein, erhält man ein Eigenwertproblem

$$\left[ \omega^2 \bar{\bar{\mathbf{M}}} - \bar{\bar{\mathbf{K}}} \right] \mathbf{\Phi} = 0, \quad (2.79)$$

das sich nur dann nichttrivial lösen lässt, wenn die Determinante verschwindet

$$\det \left[ \omega^2 \bar{\bar{\mathbf{M}}} - \bar{\bar{\mathbf{K}}} \right] = 0. \quad (2.80)$$

Die resultierende charakteristische Gleichung liefert die Eigenwerte, die für physikalisch realisierbare Systeme nicht negativ sind und deren Anzahl gleich der Anzahl der Systemfreiheitsgrade ist. Zur Lösung des generalisierten Eigenwertproblems wird in dieser Arbeit eine Variante der Lanczoschen Methode verwendet [78], [6]. Weiterhin verfügt ein starrer Körper im Konfigurationsraum über insgesamt sechs Freiheitsgrade. Darunter sind drei Translationsfreiheitsgrade, welche die Position des Körpers festlegen und drei Rotationsfreiheitsgrade, welche die Orientierung des Körpers beschreiben, definiert. Existieren in einem dynamischen System Starrkörperfreiheitsgrade, so liefert die Lösung der charakteristischen Gleichung Eigenwerte  $\omega^2 = 0$ . Durch jede Einschränkung der Bewegungsmöglichkeit in den Starrkörperfreiheitsgraden verringert sich deren Anzahl. Das heißt, unter Berücksichtigung der Existenz von Starrkörperfreiheitsgraden ist die Steifigkeitsmatrix positiv semidefinit und die Massenmatrix ist immer positiv definit. Beide Matrizen sind außerdem reell, symmetrisch und quadratisch. Setzt man die Eigenwerte in Gleichung 2.79 ein, so kann nach den Eigenvektoren  $\mathbf{\Phi}$  gelöst werden. Die Eigenvektoren sind bis auf einen beliebig wählbaren Faktor frei skalierbar. Mit diesen Erkenntnissen kann gezeigt werden, dass die Massen- und die Steifigkeitsmatrix orthogonal sind, selbst wenn einige Eigenwerte mehrfach vorkommen [38]

$$\mathbf{\Phi}_i^T \bar{\bar{\mathbf{M}}} \mathbf{\Phi}_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ M_i, & \text{falls } i = j \end{cases}, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{\Phi}_i^T \bar{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{\Phi}_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ K_i, & \text{falls } i = j \end{cases}. \quad (2.82)$$

Die Größen  $K_i$  und  $M_i$  werden als modale Steifigkeits- und Massenmatrix bezeichnet. Aufgrund der Skalierbarkeit der Eigenvektoren kann man die modalen Matrizen beliebig normieren. Die in dieser Arbeit verwendete Variante ist der massennormierte Fall

$$\begin{aligned} M_i &= 1, \\ K_i &= \omega_i^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Führt man für Gleichung 2.61 die Modaltransformation

$$\mathbf{d} = \bar{\bar{\mathbf{\Phi}}} \mathbf{q}, \quad (2.84)$$

durch und multipliziert von links mit  $\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}^T$ , erhält man ein diagonalisiertes und dadurch entkoppeltes Gleichungssystem

$$\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}} \bar{\bar{\mathbf{\Phi}}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}^T \bar{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\bar{\mathbf{\Phi}}} \mathbf{q}(t) = \bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}^T \mathbf{F}(t), \quad (2.85)$$

wobei die Einzelschwinger durch folgende Gleichung charakterisiert sind

$$M_i \ddot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = F_i(t). \quad (2.86)$$

Für die massennormierte Form der Gleichungen 2.85 und 2.86, ergibt sich die einfache Beziehung

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F_i(t), \quad (2.87)$$

oder unter Verwendung der modalen Diagonalmatrizen  $\bar{\bar{M}}$  und  $\bar{\bar{K}}$

$$\bar{\bar{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\bar{K}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.88)$$

Die wesentlichen Vorteile der Modaltransformation liegen darin, dass es für die meisten Anwendungen ausreichend ist, nur eine begrenzte Anzahl an entkoppelten, niederfrequenten Bewegungsgleichungen 2.87 zu berücksichtigen, um eine sehr gute Approximation der Dynamik des Gesamtsystems zu erreichen.

Falls die Dämpfungseigenschaften des Systems modelliert werden sollen, ist es vorteilhaft, wenn die modale Dämpfungsmatrix ebenfalls Diagonalform besitzt. Das heißt, die Eigenvektoren müssen auch zur Dämpfungsmatrix  $\bar{\bar{C}}$  orthogonal sein, was im Allgemeinen nicht zwangsläufig erfüllt ist, da gedämpfte Systeme in der Regel keine rein reellen Eigenvektoren besitzen. Grundsätzlich existieren viele verschiedene Dämpfungsarten, aber nur das lineare viskose Dämpfungsmodell ist einer einfachen mathematischen Analyse, entsprechend dem Vorgehen in der Modalanalyse, zugänglich [38]. Das viskose Dämpfungsmodell, welches die Orthogonalitätsvoraussetzung erfüllt, wird als proportionale Dämpfung oder als Rayleigh-Dämpfung bezeichnet. Die gedämpfte Form von Gleichung 2.87 lautet

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F_i(t). \quad (2.89)$$

Proportionale Dämpfung kann mit der folgenden Annahme sichergestellt werden

$$\bar{\bar{C}} = c_m \bar{\bar{M}} + c_k \bar{\bar{K}}. \quad (2.90)$$

Damit lässt sich das modale Dämpfungsverhältnis bestimmen

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{c_m}{\omega_i} + c_k \omega_i \right). \quad (2.91)$$

## 2.3 Modellierung der Flugmechanik

Die Flugmechanik befasst sich mit der Bewegung eines Flugkörpers als Reaktion auf die Wirkung äußerer Kräfte und Momente. In dieser Arbeit soll im Rahmen der Antwortanalyse die elastische Antwort eines Flugzeugs auf Störungen in Form von Böen ermittelt werden. Weil es zu einer gegenseitigen Beeinflussung von lokalen elastischen Verformungen und den Bewegungen des Flugzeugs als starrer Körper bzw. der jeweils resultierenden Lasten kommen kann, müssen für flexible Flugzeuge beide Disziplinen berücksichtigt werden, um Aussagen über das dynamische Antwortverhalten treffen zu können. Aus diesem Grund werden im Folgenden die zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen aufgestellt. Weiterhin können die Flugmechanikgleichungen um eine Gleichgewichtslage linearisiert werden, was in Kapitel 2.3.2 genauer beschrieben wird. Besondere Aufmerksamkeit erhält in diesem Zusammenhang die Bestimmung der dynamischen Derivative.

### 2.3.1 Nichtlineare Flugmechanikgleichungen

Um die Flugmechanikgleichungen formulieren zu können, muss ein geeignetes Koordinatensystem gewählt werden [118], [44], [110]. Die Komplexität der resultierenden Gleichungen hängt sehr stark von dieser Wahl ab. Grundsätzlich werden in dieser Arbeit kartesische Rechtssysteme verwendet und da in den Simulationen keine großen Strecken bezüglich der Erdoberfläche zurückgelegt werden, können für die Herleitung der Bewegungsgleichungen die Erdrotation und -krümmung in guter Näherung vernachlässigt werden. Das erdfeste oder inertielle Koordinatensystem bietet sich an, um die Position und Orientierung des Flugzeugs zu beschreiben. Es ist allerdings wesentlich günstiger, den Trägheitstensor des Flugzeugs im körperfesten Koordinatensystem auszudrücken [118], weshalb die Drehimpulserhaltung bevorzugt im körperfesten Koordinatensystem beschrieben wird. Die globalen Kraft- und Momentenbeiwerte liegen häufig im aerodynamischen Koordinatensystem vor. Die aerodynamischen Beiwerte sind allerdings nicht in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit des Flugzeugs zur Erdoberfläche, sondern relativ zur Geschwindigkeit der umgebenden Strömung definiert. Deswegen ist es vorteilhaft, die aerodynamischen Kräfte in einem Koordinatensystem zu beschreiben, das in der Atmosphäre fixiert ist. In den nachfolgenden Herleitungen wird das für die mathematische Formulierung der Gleichungen jeweils günstigste Koordinatensystem aus den genannten Systemen genutzt.

Für die Herleitung der Flugmechanikgleichungen kann von dem zweiten Newtonschen Gesetz ausgegangen werden. Es besagt, dass für einen starren Körper, von dem im Folgenden ausgegangen wird, die Summe aller angreifenden Kräfte gleich der zeitlichen Änderung des Impulses ist

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v}). \quad (2.92)$$

Analog ist die Summe aller angreifenden Momente gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\bar{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}). \quad (2.93)$$

In ausführlicher Form ergibt sich für die Impulserhaltung in körperfesten Koordinaten [118]

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} -S_\theta \\ S_\phi C_\theta \\ C_\phi C_\theta \end{pmatrix} + \frac{g}{W} \begin{pmatrix} X_b + T_{1b} \\ Y_b + T_{2b} \\ Z_b + T_{3b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

mit

$$\begin{aligned} S_\phi &= \sin \phi, & C_\phi &= \cos \phi \\ S_\theta &= \sin \theta, & C_\theta &= \cos \theta \\ S_\psi &= \sin \psi, & C_\psi &= \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Die Größen  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$ ,  $\dot{w}$  repräsentieren die translatorischen Beschleunigungen,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  sind die Winkelgeschwindigkeiten und  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  sind der Roll-, Nick- und Gierwinkel. Die äußeren Kräfte werden unterteilt in die Gewichtskraft  $W$ , die aerodynamischen Kräfte  $X_b$ ,  $Y_b$ ,  $Z_b$

und die Antriebskräfte  $T_{1b}$ ,  $T_{2b}$ ,  $T_{3b}$ . Für die Drehimpulserhaltung gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11b} & -I_{12b} & -I_{13b} \\ -I_{12b} & I_{22b} & -I_{23b} \\ -I_{13b} & -I_{23b} & I_{33b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L_b + T_{3b}y_{Tb} - T_{2b}z_{Tb} + (I_{22b} - I_{33b})qr + I_{23b}(q^2 - r^2) + I_{13b}pq - I_{12b}pr \\ M_b + T_{1b}z_{Tb} - T_{3b}x_{Tb} + (I_{33b} - I_{11b})pr + I_{13b}(r^2 - p^2) + I_{12b}qr - I_{23b}pq \\ N_b + T_{2b}x_{Tb} - T_{1b}y_{Tb} + (I_{11b} - I_{22b})pq + I_{12b}(p^2 - q^2) + I_{23b}pr - I_{13b}qr \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

wobei die Komponenten des Trägheitstensors durch die Variablen  $I_{11b}$  bis  $I_{33b}$  und die aerodynamischen Momente durch  $L_b$ ,  $M_b$ ,  $N_b$  ausgedrückt sind. Gyroskopische Effekte können durch zusätzliche Terme in Gleichung 2.96 berücksichtigt werden, sind hier aber unter der Annahme eines starren Körpers vernachlässigt worden. Um die Position und Lage des Flugzeugs gegenüber dem erdfesten Koordinatensystem beschreiben zu können, sind sechs weitere Gleichungen notwendig. Die Position des körperfesten Koordinatenursprungs ist durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}_f$  festgelegt und die Orientierung kann durch die Eulerschen Winkel ausgedrückt werden. Mithilfe der Eulerschen Winkel kann die Lage des Flugzeugs durch drei aufeinanderfolgende Drehungen beschrieben werden. Dabei sind die richtige Reihenfolge der Drehungen und die Beachtung der festgelegten Drehachsen von Bedeutung. Die Position und die Orientierung sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1w} \\ V_{2w} \\ V_{3w} \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_\phi S_\theta / C_\theta & C_\phi S_\theta / C_\theta \\ 0 & C_\theta & -S_\phi \\ 0 & S_\phi / C_\theta & C_\phi / C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Die Größen  $V_{1w}$ ,  $V_{2w}$  und  $V_{3w}$  repräsentieren die Relativwindgeschwindigkeit in erdfesten Koordinaten. Die Gleichungen 2.94 bis 2.98 bilden ein nichtlineares System GDG erster Ordnung. Für die numerische Zeitintegration werden für gewöhnlich explizite Standardverfahren höherer Ordnung, wie das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung oder das Adams-Bashfort-Moulton-Verfahren 4. Ordnung, angewendet [118]. Ein Problem der Formulierung in Abhängigkeit von den Eulerschen Winkeln ist, dass die Beschreibung singular wird, wenn das Flugzeug vertikal in der Luft steht. Diese Singularität wird als "Gimbal Lock" bezeichnet. Eine mögliche Abhilfe bietet die Verwendung der Euler-Rodrigues-Quaternion-Formulierung anstatt der Eulerschen Winkel. Obwohl die Anzahl der flugmechanischen Bewegungsgleichungen um eine Gleichung erhöht wird, nimmt der numerische Rechenaufwand bedeutend ab. Es bestehen folgende Beziehungen zwischen der Quaternion-Formulierung und den Eulerschen Winkeln

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} C_{\phi/2}C_{\theta/2}C_{\psi/2} + S_{\phi/2}S_{\theta/2}S_{\psi/2} \\ S_{\phi/2}C_{\theta/2}C_{\psi/2} - C_{\phi/2}S_{\theta/2}S_{\psi/2} \\ C_{\phi/2}S_{\theta/2}C_{\psi/2} + S_{\phi/2}C_{\theta/2}S_{\psi/2} \\ C_{\phi/2}C_{\theta/2}S_{\psi/2} - S_{\phi/2}S_{\theta/2}C_{\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Beide Lösungen sind unabhängig vom Vorzeichen identisch gültig. Löst man das Gleichungssystem nach den Eulerschen Winkeln, ergibt sich für den Fall der ersten Singularität  $e_0e_y - e_xe_z = 0, 5$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \arcsin \left[ \frac{e_x}{\cos(\pi/4)} \right] + \psi \\ \frac{\pi}{2} \\ \text{beliebig} \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

für den Fall der zweiten Singularität  $e_0e_y - e_xe_z = -0,5$

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \arcsin \left[ \frac{e_x}{\cos(\pi/4)} \right] - \psi \\ -\frac{\pi}{2} \\ \text{beliebig} \end{Bmatrix}, \quad (2.101)$$

und sonst

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \arctan2 [2(e_0e_x + e_ye_z), (e_0^2 + e_z^2 - e_x^2 - e_y^2)] \\ \arcsin [2(e_0e_y - e_xe_z)] \\ \arctan2 [2(e_0e_z + e_xe_y), (e_0^2 + e_x^2 - e_y^2 - e_z^2)] \end{Bmatrix}. \quad (2.102)$$

Die Bewegungsgleichungen der Flugmechanik 2.94, 2.97 und 2.98 lauten in der Quaternion-Formulierung

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} 2(e_xe_z - e_ye_0) \\ 2(e_ye_z + e_xe_0) \\ e_z^2 + e_0^2 - e_x^2 - e_y^2 \end{Bmatrix} + \frac{g}{W} \begin{Bmatrix} X_b + T_{1b} \\ Y_b + T_{2b} \\ Z_b + T_{3b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{Bmatrix}, \quad (2.103)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \otimes \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} e_0 \\ -e_x \\ -e_y \\ -e_z \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} V_{1w} \\ V_{2w} \\ V_{3w} \end{Bmatrix}, \quad (2.104)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_x & -e_y & -e_z \\ e_0 & -e_z & e_y \\ e_z & e_0 & -e_x \\ -e_y & e_x & e_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}. \quad (2.105)$$

Die Drehimpulserhaltung 2.96 bleibt unverändert erhalten.

### 2.3.2 Linearisierte Flugmechanikgleichungen

Analog zu den Strömungsgleichungen kann die Theorie kleiner Störungen auch auf die Flugmechanikgleichungen 2.96 und 2.103 bis 2.105 angewendet werden. Während diese Methode im Fall der Strömungsgleichungen vor allem zur Reduktion des numerischen Rechenaufwandes dient, unterstützt sie für die Flugmechanikgleichungen auch die Reglerauslegung und liefert transparentere geschlossene Lösungen. Die notwendige Bedingung, die die Gleichungen einer Linearisierung zugänglich macht, ist auch hier die Voraussetzung kleiner Störungen um einen stationären Gleichgewichtszustand. Die Referenzlage, um die anschließend linearisiert wird, ist im Folgenden der stationäre Geradeausflug bei einer mittleren Geschwindigkeit  $U_\infty$ . Außerdem wird von einem zum Mittelschnitt symmetrischen Flugzeug ausgegangen. Im Rahmen der Linearisierung müssen die aerodynamischen Kräfte und Momente in Abhängigkeit der Zustandsvariablen ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta X_b \\ \Delta Y_b \\ \Delta Z_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X_b}{\partial u} & \frac{\partial X_b}{\partial v} & \frac{\partial X_b}{\partial w} \\ \frac{\partial Y_b}{\partial u} & \frac{\partial Y_b}{\partial v} & \frac{\partial Y_b}{\partial w} \\ \frac{\partial Z_b}{\partial u} & \frac{\partial Z_b}{\partial v} & \frac{\partial Z_b}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial X_b}{\partial p} & \frac{\partial X_b}{\partial q} & \frac{\partial X_b}{\partial r} \\ \frac{\partial Y_b}{\partial p} & \frac{\partial Y_b}{\partial q} & \frac{\partial Y_b}{\partial r} \\ \frac{\partial Z_b}{\partial p} & \frac{\partial Z_b}{\partial q} & \frac{\partial Z_b}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial X_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial X_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial X_b}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial Y_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial Y_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial Y_b}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial Z_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial Z_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial Z_b}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{w} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \Delta L_b \\ \Delta M_b \\ \Delta N_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial L_b}{\partial u} & \frac{\partial L_b}{\partial v} & \frac{\partial L_b}{\partial w} \\ \frac{\partial M_b}{\partial u} & \frac{\partial M_b}{\partial v} & \frac{\partial M_b}{\partial w} \\ \frac{\partial N_b}{\partial u} & \frac{\partial N_b}{\partial v} & \frac{\partial N_b}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial L_b}{\partial p} & \frac{\partial L_b}{\partial q} & \frac{\partial L_b}{\partial r} \\ \frac{\partial M_b}{\partial p} & \frac{\partial M_b}{\partial q} & \frac{\partial M_b}{\partial r} \\ \frac{\partial N_b}{\partial p} & \frac{\partial N_b}{\partial q} & \frac{\partial N_b}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial L_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial L_b}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial M_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_b}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial N_b}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial N_b}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial N_b}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{w} \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Ein Teil der Abhängigkeiten kann aufgrund von Symmetrieeigenschaften oder weil der Einfluss auf die Bewegung des Flugzeugs für die Annahme kleiner Störungen nur sehr gering ist, vernachlässigt werden. Mit der Bedeutung und Bestimmung der Derivative beschäftigt sich der zweite Teil dieses Kapitels. Das Ergebnis der Linearisierung sind zwei entkoppelte Gleichungssysteme mit jeweils sechs Zustandsvariablen. Eine detaillierte Beschreibung der Linearisierung ist unter anderem in [118] und in [44] gegeben. Für die Längsbewegung erhält man

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{W}{g} - \frac{\partial X_b}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial X_b}{\partial \dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial Z_b}{\partial \dot{u}} & \frac{W}{g} - \frac{\partial Z_b}{\partial \dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial M_b}{\partial \dot{u}} & -\frac{\partial M_b}{\partial \dot{w}} & I_{22b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{x}_f \\ \Delta \dot{z}_f \\ \Delta \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial X_b}{\partial u} & \frac{\partial X_b}{\partial w} & \frac{\partial X_b}{\partial q} & 0 & 0 & -W \cos \theta_0 \\ \frac{\partial Z_b}{\partial u} & \frac{\partial Z_b}{\partial w} & \frac{\partial Z_b}{\partial q} + V_0 \frac{W}{g} & 0 & 0 & -W \sin \theta_0 \\ \frac{\partial M_b}{\partial u} & \frac{\partial M_b}{\partial w} & \frac{\partial M_b}{\partial q} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 & 0 & 0 & -V_0 \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 & 0 & 0 & -V_0 \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta x_f \\ \Delta z_f \\ \Delta \theta \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.108}$$

und für die Seitenbewegung folgt

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11b} & -I_{13b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{13b} & I_{33b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{p} \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \dot{y}_f \\ \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial Y_b}{\partial v} & \frac{\partial Y_b}{\partial p} & \frac{\partial Y_b}{\partial r} - V_0 \frac{W}{g} & 0 & W \cos \theta_0 & 0 \\ \frac{\partial L_b}{\partial v} & \frac{\partial L_b}{\partial p} & \frac{\partial L_b}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_b}{\partial v} & \frac{\partial N_b}{\partial p} & \frac{\partial N_b}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_0 \cos \theta_0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec \theta_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta y_f \\ \Delta \phi \\ \Delta \psi \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

In den Bewegungsgleichungen der Flugmechanik bei kleinen Störungen werden die Kräfte 2.106 und die Momente 2.107 in Form von aerodynamischen Stabilitätsbeiwerten bzw. Derivativen ausgedrückt. Häufig ist es sinnvoll, die aerodynamischen Kräfte und deren Derivative in dimensionsloser Form anzugeben. Weil annähernd eine Proportionalität zu

$U_\infty$ ,  $\rho_\infty$  und  $l_{ref}^2$  besteht, resultieren für die dimensionslosen aerodynamischen Beiwerte die folgenden Definitionen

$$\begin{aligned}
c_W &\approx \frac{X}{q_\infty S}, \\
c_Y &= \frac{Y}{q_\infty S}, \\
c_A &\approx \frac{Z}{q_\infty S}, \\
c_L &= \frac{L}{q_\infty S s}, \\
c_M &= \frac{M}{q_\infty S l_\mu}, \\
c_N &= \frac{N}{q_\infty S s}.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Eine bedeutungsvolle Aufgabe der Aerodynamik ist die Bestimmung der aerodynamischen Beiwerte 2.110 sowie der entsprechenden Derivative  $c_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial f_j}$  [44], [51], [110], [77], [33], [34], [106].

Betrachtet man allgemeine instationäre Vorgänge, so ist die resultierende Kraft von der kompletten zeitlichen Entwicklung der Zustandsvariablen oder der Freiheitsgrade  $f_j$  abhängig, so dass gilt  $F(t) = F(f_j(\tau))$  für  $-\infty \leq \tau \leq t$ . Mathematisch beschreiben lässt sich  $f_j(\tau)$  als Taylorreihe um  $t$  [44]

$$f_j(\tau) = f_j(t) + (\tau - t)\dot{f}_j(t) + \frac{1}{2}(\tau - t)^2\ddot{f}_j(t) + \dots \tag{2.111}$$

Entwickelt man die Funktion  $F$  um  $t = 0$ , ergibt sich

$$\Delta F(t) = F_{f_j} \Delta f_j + \frac{1}{2} F_{f_j f_j} (\Delta f_j)^2 + \dots + F_{\dot{f}_j} \Delta \dot{f}_j + \frac{1}{2} F_{\dot{f}_j \dot{f}_j} (\Delta \dot{f}_j)^2 + \dots \tag{2.112}$$

Wie die Gleichung 2.112 verdeutlicht, sind auch nichtlineare Terme und Terme höherer zeitlicher Ordnung enthalten. Je nach Anwendungsfall und gewünschter Genauigkeit kann entschieden werden, wieviele Terme der Reihenentwicklung berücksichtigt werden sollen. In den Gleichungen 2.106 und 2.107 wurden im Rahmen der linearen Näherung nur lineare Glieder beibehalten. Glieder mit Abhängigkeiten von höherer Ordnung in der Zeit werden nur für bestimmte Freiheitsgrade in der ersten Ableitung berücksichtigt. Für die meisten Anwendungen ist es ausreichend, die Derivative nach  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  und  $\dot{p}$  beizubehalten, wobei gilt

$$\begin{aligned}
U_\infty &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \\
\alpha &= \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right), \\
\beta &= \tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right).
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Die Derivative  $c_{i\dot{\alpha}}$ ,  $c_{i\dot{\beta}}$  und  $c_{i\dot{p}}$  werden als instationäre Stabilitätsbeiwerte bezeichnet und resultieren aus der Tatsache, dass die Luftkräfte nicht unverzüglich auf eine Änderung der Zustandsvariablen reagieren und den neuen Gleichgewichtszustand einnehmen, sondern erst nach einem gewissen Zeitverzug. Die Derivative nach  $\dot{\beta}$  und  $\dot{p}$  wurden in den Gleichungen 2.106 und 2.107 vernachlässigt, da in dieser Arbeit vorrangig die Antwort

auf Anregungen in Form von symmetrischen Vertikalböen untersucht wird. Die Derivative nach  $\dot{q}$  und  $\dot{r}$  sind proportional zu  $\ddot{\alpha}$  und  $\ddot{\beta}$ , sind also Terme höherer Ordnung und werden ebenfalls vernachlässigt.

Ermitteln kann man die dynamischen Derivative mithilfe von harmonischen Schwingungen um den jeweiligen stationären Flugzustand bei genügend kleinen reduzierten Frequenzen  $k_{red} < 0,1$ . Für kleine reduzierte Frequenzen sind die instationären Stabilitätsbeiwerte annähernd konstant. Die harmonische Antwort der globalen Kraft- und Momentenbeiwerte 2.110 kann durch Anwendung des nichtlinearen Löser AER-NS mit anschließender Fourieranalyse oder durch Anwendung des linearen Löser AER-SDNS direkt im Frequenzbereich bestimmt werden. Für die Berechnung der Derivative eines Beiwertes bietet sich analog zu Gleichung 2.112 eine Taylorreihenentwicklung an [110], [51]

$$c_i(k\tau) = c_{i0} + f_j(k\tau)c_{if_j} + \dot{f}_j(k\tau)c_{if_j} + \dots \quad (2.114)$$

Das harmonische Anregungssignal wird beschrieben durch

$$f_j(k\tau) = f_{j0} + f_{jmax} \sin(k\tau), \quad (2.115)$$

und

$$\dot{f}_j(k\tau) = f_{jmax}k \cos(k\tau). \quad (2.116)$$

Mit den Annahmen  $f_{j0} = 0$  und  $k\tau = 0$  folgt

$$c_{if_j} = \frac{c_i(0) - c_{i0}}{kf_{jmax}}, \quad (2.117)$$

und mit  $k\tau = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich

$$c_{if_j} = \frac{c_i(\frac{\pi}{2}) - c_{i0}}{f_{jmax}}. \quad (2.118)$$

Folglich lassen sich die Derivative direkt aus den, auf Basis der nichtlinearen Lösung bestimmten, Lissajous-Figuren der Beiwerte ablesen. Alternativ können die Derivative aus den komplexen Beiwerten berechnet werden, die der linearisierte Löser liefert. [93], Für die Nickschwingung gilt

$$c_{if_j} = \frac{\Im(\hat{c}_{i1})}{kf_{jmax}}, \quad (2.119)$$

und

$$c_{if_j} = \frac{\Re(\hat{c}_{i1})}{f_{jmax}}. \quad (2.120)$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten erster Ordnung  $\hat{c}_{i1}$  werden als erste Harmonische und  $c_{i0}$  entsprechend als "nullte" Harmonische bezeichnet. In Gleichung 2.114 wird allerdings angenommen, dass die Derivative von nur einem Freiheitsgrad abhängen. Diese Annahme ist nur für bestimmte Bewegungen zutreffend. Eine Nickschwingung c) lässt sich zum Beispiel durch Überlagerung einer reinen Drehschwingung b) und einer Schlagschwingung a) erzeugen. Die einzelnen Schwingungsformen sind in Tabelle 2.1 dargestellt. An der reinen Drehschwingung b) ist nur der Freiheitsgrad  $q$  beteiligt, während sich bei der Schlagschwingung a) nur der Anstellwinkel  $\alpha$  ändert. Der Imaginärteil der Nickschwingung c) entspricht hingegen dem gekoppelten Derivat  $c_{Mq} + c_{M\dot{\alpha}}$ .

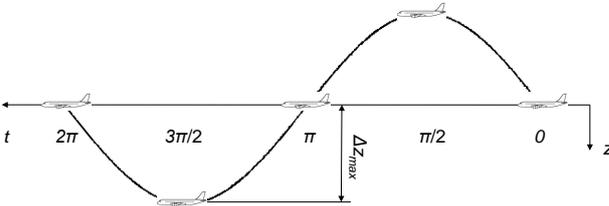
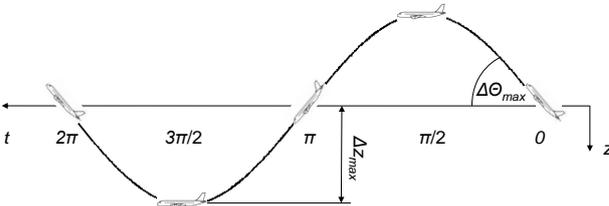
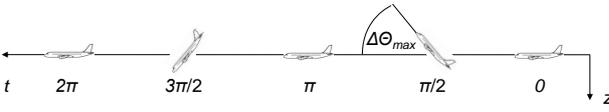
Schwingungstyp	Dimensionslose Einflussgröße	Derivativ
a) Schlagschwingung	 $\begin{aligned} \Delta\theta &= 0 \\ \Delta z &= -\Delta z_{max} \sin(k\tau) \\ \Delta\alpha &\approx -k\Delta z_{max}/U_\infty \cos(k\tau) \\ \dot{\alpha} &\approx k^2\Delta z_{max}/U_\infty \sin(k\tau) \\ q &= 0 \end{aligned}$	$c_{M\dot{\alpha}}$
b) Drehschwingung	 $\begin{aligned} \Delta\theta &= \Delta\theta_{max} \cos(k\tau) \\ \Delta z &= -\Delta z_{max} \sin(k\tau) \\ \Delta\alpha &= 0 \\ \Delta q &= -k\Delta\theta_{max} \sin(k\tau) \end{aligned}$	$c_{Mq}$
c) Nickschwingung	 $\begin{aligned} \Delta\theta &= \Delta\theta_{max} \sin(k\tau) \\ \Delta z &= 0 \\ q = \dot{\alpha} &= k\Delta\theta_{max} \cos(k\tau) \end{aligned}$	$c_{Mq}$ + $c_{M\dot{\alpha}}$

Tabelle 2.1: Zerlegung der Nickschwingung c) in die Ein-Freiheitsgrad-Schwingungen Schlagschwingung a) und Drehschwingung b) [51]

### 2.3.3 Trimmanalyse

Damit die Böenantwort eines Flugzeugs besser analysiert werden kann, ist es vorteilhaft, wenn sich dieses im stationären Geradeausflug befindet. Die Längstrimmung erfolgt über die Einstellung von Anstellwinkel, Höhenruderausschlag und Triebwerksschub. Die notwendige Bedingung für den stationären Geradeausflug ist, dass die Summe aller resultierenden Momente gleich Null ist und sich die Auftriebs-, Widerstands-, Schub- und Gewichtskraft gegenseitig aufheben. Solange man sich im Bereich linearer aerodynamischer Abhängigkeiten bezüglich der Trimmvariablen befindet und das Flugzeug als starrer Körper betrachtet wird, lassen sich die Trimmvariablen, das heißt der Nickwinkel  $\theta$  und der Höhenruderausschlag  $\eta$ , mithilfe der aerodynamischen Derivative explizit berechnen

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{A\alpha} & c_{A\eta} \\ c_{M\alpha} & c_{M\eta} \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{Bmatrix} \hat{c}_A \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c_{A0} \\ c_{M0} \end{Bmatrix} \right]. \quad (2.121)$$

Zusätzlich muss die Widerstandskraft durch die Schubkraft des Flugantriebs ausgeglichen werden. Liegt ein elastisch verformbares Flugzeug vor, kommt es zu einer Rückkopplung und die Derivative sind Funktionen der Trimmvariablen. Dieses Problem kann mithilfe

des Newton-Verfahrens iterativ gelöst werden [127]

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \eta \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} c_{A\alpha} & c_{A\eta} \\ c_{M\alpha} & c_{M\eta} \end{bmatrix}_i^{-1} \left[ \begin{Bmatrix} \hat{c}_A \\ 0 \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} c_A \\ c_M \end{Bmatrix}_i \right], \quad (2.122)$$

wobei alle aerodynamischen und strukturellen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden können. Alternativ schlägt [166] eine Methode im Modalraum vor, in der die Luftkräfte in der Form von aerodynamischen Einflusskoeffizienten gegeben sind. Die Methode wurde in dieser Arbeit für die Verwendung von GAF angepasst. Für die Trimmanalyse werden die GAF bei einer reduzierten Frequenz  $k_{red} = 0$  berechnet. Eine genaue Beschreibung der GAF wird in Kapitel 2.5.1 gegeben. Ausgangspunkt der Herleitung ist das Kräftegleichgewicht zwischen elastischen Kräften, Trägheitskräften und aerodynamischen Kräften

$$\bar{\bar{M}}\bar{\bar{\Phi}}_r\hat{\mathbf{a}}_r + \bar{\bar{K}}\mathbf{d} - q_\infty\bar{\bar{AIC}}\mathbf{d} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{s} + \mathbf{F}_0. \quad (2.123)$$

Der tiefgestellte Index  $r$  bezieht sich auf die Starrkörperfreiheitsgrade und mit  $e$  werden im Folgenden die elastischen Freiheitsgrade gekennzeichnet. Der Vektor  $\hat{\mathbf{a}}_r$  beinhaltet vorgeschriebene Beschleunigungen in den Starrkörperfreiheitsgraden, die der gewünschte getrimmte Flugzustand erfordert. Die Matrix  $\bar{\bar{AIC}}$  umfasst die AIC und  $\mathbf{s}$  ist der Vektor der Trimmvariablen. Die aerodynamischen "Nullkräfte und -momente" sind in  $\mathbf{F}_0$  gegeben. Führt man entsprechend der Transformation 2.84 generalisierte Koordinaten ein, ergibt sich aus Gleichung 2.123

$$\bar{\bar{M}}\bar{\bar{\Phi}}_r\hat{\mathbf{a}}_r + \bar{\bar{K}}\bar{\bar{\Phi}}_e\mathbf{q} - q_\infty\bar{\bar{AIC}}\bar{\bar{\Phi}}_e\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{s} + \mathbf{F}_0. \quad (2.124)$$

Multipliziert man die Beziehung 2.124 von links mit  $\bar{\bar{\Phi}}_e^T$ , vereinfacht sich die Gleichung aufgrund der Orthogonalität der Eigenvektoren  $\bar{\bar{\Phi}}_e$  und  $\bar{\bar{\Phi}}_r$  zu

$$\bar{\bar{K}}_{ee}\mathbf{q} - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{ee}\mathbf{q} = q_\infty\bar{\bar{Q}}_{es}\mathbf{s} + \mathbb{F}_{0e}. \quad (2.125)$$

Multipliziert man stattdessen die Gleichung 2.124 von links mit  $\bar{\bar{\Phi}}_r^T$ , kann man den zweiten Term auf der linken Seite der Gleichung eliminieren und erhält

$$\bar{\bar{M}}_{rr}\hat{\mathbf{a}}_r - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{re}\mathbf{q} = q_\infty\bar{\bar{Q}}_{rs}\mathbf{s} + \mathbb{F}_{0r}. \quad (2.126)$$

Löst man die Gleichung 2.125 nach  $\mathbf{q}$  auf und setzt das Ergebnis in die Gleichung 2.126 ein, kann man nach den gesuchten Trimmvariablen lösen

$$\mathbf{s} = \left[ q_\infty\bar{\bar{Q}}_{rs} + q_\infty^2\bar{\bar{Q}}_{re} \left( \bar{\bar{K}}_{ee} - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{ee} \right)^{-1} \bar{\bar{Q}}_{es} \right]^{-1} \left[ \bar{\bar{M}}_{rr}\hat{\mathbf{a}}_r - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{re} \left( \bar{\bar{K}}_{ee} - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{ee} \right)^{-1} \mathbb{F}_{0e} - \mathbb{F}_{0r} \right]. \quad (2.127)$$

Der kleinste positive, reelle Eigenwert  $q_\infty$  des Eigenwertproblems

$$\left( \bar{\bar{K}}_{ee} - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{ee} \right) \mathbf{q} = 0, \quad (2.128)$$

liefert außerdem den Staudruck, bei dem erstmals Divergenz beziehungsweise statisches Auskippen auftritt [166].

### 2.3.4 Freiflugmodellierung

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen eines frei beweglichen, elastisch deformierbaren Körpers kann es zu einer Kopplung der Starrkörper- und der elastischen Freiheitsgrade kommen [109], [157], [158]. Ausschlaggebend für die Minimierung der Kopplungseinflüsse ist die Wahl eines geeigneten körperfesten Koordinatensystems. Der Drehimpulsvektor eines deformierbaren Flugzeugs  $\mathbf{L}$  bezogen auf das erdfeste Inertialsystem ist gegeben durch

$$\mathbf{L}_f = \int \mathbf{r}_f \times \dot{\mathbf{r}}_f dm. \quad (2.129)$$

Entsprechend Kapitel 2.3 ist es von Vorteil, die Drehimpulserhaltung bezüglich körperfester Koordinaten zu beschreiben

$$\mathbf{L}_b = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_b \omega_b + \int \mathbf{r}_b \times \dot{\mathbf{r}}_b dm. \quad (2.130)$$

Durch die Wahl eines "mean axes"-Koordinatensystems, können die Bewegungsgleichungen entscheidend vereinfacht werden [109], [24], [157], [158]. Das "mean axes"-Koordinatensystem ist körperfest, bewegt sich folglich mit dem Flugzeug mit, ist aber nicht an materielle Strukturpunkte gebunden. Die Definition erfolgt durch die Erfüllung der folgenden zwei Bedingungen. Der aus der elastischen Verformung resultierende Impuls des Körpers bezüglich des körperfesten "mean axes"-Systems muss zu jeder Zeit Null sein, was gleichbedeutend mit der Lage des Koordinatenursprungs im Körperschwerpunkt ist. Außerdem muss der durch elastische Verformungen hervorgerufene Drehimpuls verschwinden

$$\int \mathbf{r}_b \times \dot{\mathbf{r}}_b dm = 0. \quad (2.131)$$

Daraus resultiert ein Zustand minimaler kinetischer Energie bezüglich des bewegten Koordinatensystems [24]. Durch die Verwendung eines "mean axes"-Systems kann die Kopplung zwischen Starrkörper- und elastischen Moden folglich minimiert werden. Der verbleibende erste Term in Gleichung 2.130 entspricht formal dem Drehimpuls eines starren Körpers. Allerdings wird die aus der Verformung des Flugzeugs folgende Änderung des Trägheitstensors  $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_b$  als klein vorausgesetzt und entsprechend vernachlässigt. Diese Annahme wird im Rahmen dieser Arbeit für alle Simulationen getroffen, bei denen die Flugmechanikgleichungen gelöst werden. Die elastischen Eigenformen, die aus der Modalanalyse für einen in den Rotations- und Translationsfreiheitsgraden frei beweglichen, nicht gelagerten Körper resultieren, sollten die "mean axes"-Bedingung erfüllen [24], [158].

## 2.4 Nichtlineare aeroelastische Analyse

In der vorliegenden Arbeit werden Wechselwirkungen zwischen dem Struktur-, Strömungs- und Flugmechaniklöser untersucht. Der Strömungslöser liefert in erster Linie aus Strukturdeformationen oder Starrkörperbewegungen resultierende Druckverteilungen. Diese Flächenlasten müssen zum einen auf die Strukturoberfläche interpoliert werden und zum anderen liefern sie die globalen Kräfte und Momente zur Lösung der flugmechanischen Bewegungsgleichungen. Aus der Strukturdeformation resultiert mit der Nachführung des CFD-Netzes eine weitere anspruchsvolle Anforderung an den Lösungsprozess. In den folgenden Kapiteln wird auf die verschiedenen Kopplungsmethoden näher eingegangen.

Für die Simulation komplexer mechanischer Systeme ist es meist vorteilhaft, zur Lösung der einzelnen Teilprobleme Programme zu verwenden, die auf unterschiedlichen mathematischen Methoden und Modellierungen basieren. Die wesentliche Herausforderung stellt dabei die interdisziplinäre Kopplung der diskretisierten Methoden dar. Notwendige Anforderungen an das Kopplungsschema sind die Konnektivitätsbedingung in Form der kinematischen Randbedingung für ein viskoses Fluid [104], [21]

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_F(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_S(t, \mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{u}}_F(t, \mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{u}}_S(t, \mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.132}$$

und der dynamischen Randbedingung

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_F(t, \mathbf{x})\mathbf{n} = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_S(t, \mathbf{x})\mathbf{n}.\tag{2.133}$$

Aus den Beziehungen 2.132 und 2.133 resultiert die Erhaltung der übertragenen mechanischen Leistung

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_F(t, \mathbf{x})\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}}_F(t, \mathbf{x}) = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_S(t, \mathbf{x})\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}}_S(t, \mathbf{x}).\tag{2.134}$$

Dabei ist vor allem in der Aeroelastik wichtig, dass die Gesamtenergie im gekoppelten System erhalten bleibt, das Verfahren also konservativ ist. Anderenfalls kann Energie im Gesamtsystem entstehen oder verloren gehen, was direkten Einfluss auf die Stabilität von aeroelastischen Systemen nehmen kann und eine Unterscheidung von numerischen und physikalischen Phänomenen unmöglich macht. Neben der räumlichen Kopplung muss auch die zeitliche Kopplung der Löser berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, dass Gleichung 2.134 zu jedem diskreten, physikalischen Zeitschritt erfüllt ist und die pro Zeitschritt zwischen Strömungs- und Strukturlöser übertragene Arbeit betragsmäßig gleich ist

$$\Delta t \int_{\Gamma_F} \dot{\mathbf{u}}_F^{n+1}(\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_F^{n+1}\mathbf{n}^{n+1})dS = -\Delta t \int_{\Gamma_S} \dot{\mathbf{u}}_S^{n+1}(\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_S^{n+1}\mathbf{n}^{n+1})dS.\tag{2.135}$$

### 2.4.1 Oberflächeninterpolation

Zur Modellierung der Strömung werden oft Finite-Volumen-Methoden verwendet (siehe Kapitel 2.1). Die Struktur wird hingegen meist unter Verwendung von FEM modelliert (siehe Kapitel 2.2). Während für CFD-Methoden eine möglichst exakte Repräsentation der Körperoberfläche angestrebt wird, können die FEM-Modelle in ihrer äußeren Form sehr stark von der realen Geometrie abweichen. Selbst wenn die Oberflächen beider Modelle übereinstimmen, sind die optimalen Diskretisierungsansätze dennoch sehr verschieden. Außerdem werden auf der Oberfläche des CFD-Netzes die Festkörper Randbedingungen für den Strömungslöser gesetzt, was einer sorgfältigen Interpolation besondere Bedeutung zukommen lässt. Dadurch ergeben sich hohe Anforderungen an das Interpolationsverfahren. In der Literatur wird eine Vielzahl von Methoden vorgestellt und verglichen [146], [166], [133], [61], [46], [21]. Der Verformungstransfer in dieser Arbeit wurde mithilfe der “Thin Plate Spline (TPS)“-Methode [41] oder alternativ mit der “Constant Volume Tetrahedron (CVT)“-Transformation [61] realisiert.

Die TPS-Methode ist eine Erweiterung der “Infinite Plate Spline (IPS)“-Methode [66]. Beide Verfahren basieren auf der Überlagerung von Lösungen der Gleichgewichtsbeziehung einer unendlich ausgedehnten, elastischen Platte

$$K\nabla^4 w = f.\tag{2.136}$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung 2.136 kann aus  $N$  Einzellösungen, entsprechend der bekannten Punkte  $x_i, y_i$ , gebildet werden

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N \left( A_i + B_i r_i^2 + \frac{C_i}{16\pi K} r_i^2 \ln r_i^2 \right), \quad (2.137)$$

mit

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2. \quad (2.138)$$

Die Randbedingungen im Unendlichen werden so gewählt, dass nur lineare Verformungen  $w$  möglich sind. Anfangs müssen die diskreten Lasten für das Struktur- und Fluidoberflächennetz bestimmt werden, die zu einer vorgegebenen Verformung führen. Als Resultat erhält man die gesuchten Koeffizienten  $A_i, B_i$  und  $C_i$ . Durch die Anwendung von Gleichung 2.137 kann anschließend die Oberflächenverformungen an beliebigen Punkten  $x, y$  berechnet werden. Die bedeutendste Einschränkung der IPS-Methode in Hinblick auf die hier behandelten Interpolationsprobleme ist, dass beide Oberflächennetze in einer Ebene liegen müssen. Das heißt, dreidimensionale Punkteverteilungen müssen auf die Interpolationsebene projiziert werden. Die Beziehungen 2.136 bis 2.138 gelten außerdem nur für die Interpolationsrichtung orthogonal zur Interpolationsebene. Sie können allerdings analog auf andere Raumrichtungen angewendet werden, wobei folglich keine Kopplung der verschiedenen Koordinatenrichtungen stattfindet. Ein weiterer Nachteil der Methode ist, dass Punkte außerhalb der Interpolationsebene zwar annähernd linear extrapoliert werden, es aber unter Umständen zu Oszillationen kommen kann [166]. Duchon [41] hat die IPS-Methode für Probleme erweitert, bei denen nicht alle Punkte in einer Ebene liegen. Gleichung 2.138 lautet dann

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2. \quad (2.139)$$

In dieser Methode, die als TPS-Methode bezeichnet wird, findet die Beschreibung einer ungleichmäßigen Fläche durch Funktionen statt, die ein Energiefunktional minimieren. Die Eigenschaften der TPS-Methode entsprechen weitestgehend denen der IPS-Methode. Wenn alle Strukturpunkte in einer Ebene liegen, wird die Methode singulär. Tritt dieser Fall ein, wird im Rahmen dieser Arbeit dem Struktur- und Fluidoberflächennetz zur Bestimmung der Interpolationsmatrix eine quadratische Funktion überlagert. Das abschließende Resultat der Interpolation ist durch folgende lineare Beziehung zwischen Fluid- und Strukturoberflächennetz gegeben

$$\delta \mathbf{x}_F = \bar{\mathbf{G}} \delta \mathbf{x}_S, \quad (2.140)$$

wobei  $\delta \mathbf{x}_F$  die Verschiebungen des Fluidoberflächennetzes und  $\delta \mathbf{x}_S$  die Verschiebungen des Strukturoberflächennetzes sind. Aufgrund der Tatsache, dass die TPS-Matrix ein skalarer Operator ist, der entkoppelt in verschiedenen Raumrichtungen angewendet wird, ist die Methode zum Beispiel nicht in der Lage Rotationen exakt darzustellen. Wird jedoch die Flattergleichung unter der Annahme kleiner Störungen im Frequenzbereich gelöst, liefert diese Interpolationsmethode ein mathematisch konsistentes Verfahren.

Für Simulationen im Zeitbereich, bei denen es auch zu größeren Geometrierotationen kommen kann, bietet sich die Verwendung der CVT-Transformation an [61]. Das Verfahren basiert auf der Erhaltung des Tetraedervolumens, welches aus jeweils drei Strukturnetzpunkten und einem Punkt des Fluidoberflächennetzes gebildet wird. Mithilfe von Suchalgorithmen wird sichergestellt, dass die Punkte möglichst kleine Abstände zueinander haben. Die nichtlineare Beziehung zwischen den Strukturnetzpunkten  $\mathbf{x}_{S,i}, \mathbf{x}_{S,j}$  und

$\mathbf{x}_{S,k}$  und dem Fluidnetzpunkt  $\mathbf{x}_{F,i}$  ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_{F,i} - \mathbf{x}_{S,i}(t) = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{d}, \quad (2.141)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{x}_{S,j} - \mathbf{x}_{S,i}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{x}_{S,k} - \mathbf{x}_{S,i}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.142)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{|\mathbf{b}|^2(\mathbf{a}\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{b}\mathbf{c})}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{a}\mathbf{b})}, \\ \beta &= \frac{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{b}\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{a}\mathbf{c})}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{a}\mathbf{b})}, \\ \gamma &= \frac{\mathbf{c}\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

In Hinblick auf die Lastinterpolation ist es von Vorteil, eine linearisierte Form von Gleichung 2.141 zu entwickeln [61], [70]

$$\delta \mathbf{x}_{F,i} = \bar{\bar{\mathbf{A}}}\delta \mathbf{x}_{S,i} + \bar{\bar{\mathbf{B}}}\delta \mathbf{x}_{S,j} + \bar{\bar{\mathbf{C}}}\delta \mathbf{x}_{S,k}. \quad (2.144)$$

Aus dieser Gleichung resultiert ein Zusammenhang gemäß der Beziehung 2.140. Wird die CVT-Methode jeweils für den gegenwärtigen Verformungszustand angewendet, ist der durch die Linearisierung eingebrachte Fehler gering [70]. Im Gegensatz zur TPS-Methode ist die Interpolationsmatrix nicht voll besetzt, was einen wesentlich geringeren Speicherbedarf zur Folge hat und bedeutet, dass der Verformungstransfer lokal stattfindet.

## 2.4.2 Lastinterpolation

Ziel der Lastinterpolation ist die Umwandlung der Flächenlasten aus der Strömungslösung in Knotenlasten für den Strukturlöser. Dabei muss das Verfahren einen konservativen Lasttransfer entsprechend der Gleichung 2.133 gewährleisten [46], [25]. Diese Forderung beinhaltet die dynamische Äquivalenz der übertragenen Lasten, sowie die Gleichheit der geleisteten Arbeit bei Übertragung der virtuellen Verschiebungen von der Struktur auf die Strömungsseite [21]. Bevor der Lasttransfer zwischen den partitionierten Lösern stattfinden kann, müssen die zellzentrierten Fluidoberflächenspannungen, die das Finite Volumen Verfahren liefert, in konsistente, knotenzentrierte Einzelkräfte und -momente umgewandelt werden. Realisiert wird die Umrechnung der Lasten entsprechend [21] und [46]. Das Ziel ist die Erhaltung der von der Flächenlast und von den korrespondierenden Einzelkräften geleisteten Arbeit. Die Flächenlast  $\mathbf{t}$ , als auch die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  werden mithilfe linearer Formfunktionen  $N_i$  approximiert

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\xi, \eta) &= \sum_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{t}_i, \\ \mathbf{u}(\xi, \eta) &= \sum_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Bildet man unter Verwendung der Beziehungen 2.145 einen Ausdruck für die geleistete Arbeit der Flächenlast, ergibt sich für die konsistenten Einzelkräfte [21]

$$\mathbf{F}_i = \int_{\xi} \int_{\eta} N_i(\xi, \eta) \left( \sum_j N_j(\xi, \eta) \mathbf{t}_j \right) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta, \quad (2.146)$$

wobei  $\times$  in Gleichung 2.146 das Kreuzprodukt repräsentiert.

Alternativ können die Knotenkräfte des Fluidoberflächennetzes auf Basis der in Kapitel 2.4.1 vorgestellten "Spline"-Methoden berechnet werden. Sowohl für die TPS-Methode, als auch für die CVT-Methode ergibt sich nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit für die Kräfte folgender Zusammenhang [166], [61]

$$\mathbf{F}_S = \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{F}_F. \quad (2.147)$$

Ein Vorteil der CVT-Methode gegenüber der TPS-Methode ist, dass der Lasttransfer lokal stattfindet. In einigen Fällen produziert die TPS-Methode unphysikalische Oszillationen für den Verlauf der transferierten Kräfte in der Nähe der Strukturränder. Für die CVT-Methode wurden mangelhafte interpolierte Kraftverteilungen im Bereich von starken Oberflächengradienten bzw. -unstetigkeiten, wie sie zum Beispiel an ausgeschlagenen Steuerflächen auftreten, beobachtet. Aus diesen Gründen kommt im Rahmen der vorliegenden Arbeit die oben beschriebene konservative, konsistente Lasttransfermethode entsprechend [21] und [20] zum Einsatz. In diesem Verfahren wird mithilfe eines Suchalgorithmus für jeden Fluidnetzoberflächenknoten das lotgerecht, nächstliegende Strukturelement zugeordnet. Anschließend werden die Kräfte und Momente auf den Lotpunkt, oder falls nicht vorhanden, den nächsten Elementknoten übertragen. Momente entstehen, wenn die Kraftwirkungslinie nicht direkt durch den Lotpunkt verläuft. Die konsistente Verteilung der Lasten auf die einzelnen Elementknoten erfolgt durch die Gewichtung mit linearen Formfunktionen des jeweiligen Elementtyps.

### 2.4.3 Netznachführung

Nachdem das Oberflächennetz des deformierten Festkörpers unter Einsatz der in Kapitel 2.4.1 vorgestellten Methoden generiert worden ist, muss das Volumennetz, welches das Strömungsgebiet repräsentiert, geeignet nachgeführt werden. Daraus resultieren sehr anspruchsvolle Anforderungen bezüglich der Erhaltung der Netzqualität, die unmittelbaren Einfluss auf die Stabilität und die Genauigkeit des Strömungslösers hat. Die wichtigsten Eigenschaften von strukturierten Netzen, die während der Nachführung erhalten bleiben sollen, sind die Orthogonalität kreuzender Netzlinien, die Abstände paralleler Netzlinien und folglich die Vermeidung von Netzfehlern wie Netzfaltungen oder "negative Zellvolumina". Grundsätzlich existieren zwei mögliche Vorgehen, mit denen das Netz an die verformte Geometrie angepasst werden kann. Zum einen kann das Strömungsgebiet neu vernetzt werden, was allerdings deutlich zu zeitaufwendig und im Fall von strukturierten Netzen für beliebig komplexe Geometrien schwer automatisierbar ist. Die in der Aeroelastik nahezu ausschließlich verwendete Methode beruht auf der Anpassung eines bestehenden Referenznetzes. Die Netznachführung wird in der Literatur mit einer Vielzahl von Verfahren realisiert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden drei Methoden untersucht. Die Netznachführung mithilfe eines elliptischen Netzglätters [36] hat ihre Grenzen für

relativ große Strukturdeformationen, wie sie bei sehr flexiblen Konfigurationen auftreten können. Die Orthogonalität der Zellflächen wird sehr gut erhalten, aber bei großen Deformationen ist eine deutliche Aufweitung der oberflächennahen Zellen zu beobachten, was besonders bei reibungsbehafteten Simulationen nicht akzeptabel ist. Als Basis der "Spring Analogy"-Methode [8], [132] werden allen Verbindungslinien benachbarter Netzknoten Federsteifigkeiten zugeordnet. Die Federsteifigkeiten  $K$  sind invers proportional zum Abstand der Nachbarpunkte

$$K_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{[(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2]^{\frac{p}{2}}}. \quad (2.148)$$

Mithilfe des Parameters  $p$  kann das relative Steifigkeitsverhältnis der einzelnen Federn kontrolliert werden. Die Zellen werden anschließend durch einen Prädiktorschritt

$$\begin{aligned} \Delta x_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [(1 - \alpha)\Delta x_{i,j,k}^n + (1 + \alpha)\Delta x_{i,j,k}^{n-1}], \\ \Delta y_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [(1 - \alpha)\Delta y_{i,j,k}^n + (1 + \alpha)\Delta y_{i,j,k}^{n-1}], \\ \Delta z_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [(1 - \alpha)\Delta z_{i,j,k}^n + (1 + \alpha)\Delta z_{i,j,k}^{n-1}], \end{aligned} \quad (2.149)$$

und einen Korrektorschritt

$$\begin{aligned} \Delta x_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{K_{i+\frac{1}{2},j,k}\Delta x_{i,j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}\Delta x_{i,j,k-1}}{K_{i+\frac{1}{2},j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}}, \\ \Delta y_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{K_{i+\frac{1}{2},j,k}\Delta y_{i,j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}\Delta y_{i,j,k-1}}{K_{i+\frac{1}{2},j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}}, \\ \Delta z_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{K_{i+\frac{1}{2},j,k}\Delta z_{i,j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}\Delta z_{i,j,k-1}}{K_{i+\frac{1}{2},j,k} + \dots + K_{i,j,k-\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

entsprechend der Verformungsrandbedingung verschoben. Das Konvergenzverhalten des Verfahrens kann über den Parameter  $\alpha$  in der Gleichung 2.149 gesteuert werden. Damit die Oberflächendeformation numerisch stabil in das Fernfeld propagiert werden kann, müssen die charakteristischen Ausbreitungsrichtungen in der Gleichung 2.150 berücksichtigt werden. Wendet man die "Spring Analogy"-Methode auf die Netzzellen an, ergeben sich die gleichen Nachteile wie für den Netzglätter. Besonders die häufig in Strömungsrichtung verlaufenden Blockgrenzen im Nachlauf des Tragflügelprofils werden stark verzerrt. Sowohl die Netzglättung als auch die Spring Analogy werden aufgrund des iterativen Lösungsprozesses von einem erhöhten Rechenaufwand begleitet, was vor allem bei instationären, stark gekoppelten Simulationen ein Nachteil ist. Eine weitere Möglichkeit der Volumenetzverformung bietet als ein Vertreter der algebraischen Methoden die Transfinite Interpolation (TFI) [152]. Algebraische Methoden sind meist sehr robust und effizient, was sie für aeroelastische Anwendungen sehr attraktiv macht. Die TFI beruht auf einer Parametrisierung des Rechenraums. Das heißt, innerhalb eines Blocks wird für jeden Netzknoten die diskrete Bogenlänge entlang der krummlinigen Koordinatenrichtungen bestimmt. Für die  $\xi$ -Richtung ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{1,j,k} &= 0, \\ s_{i,j,k} &= s_{i-1,j,k} + \sqrt{(x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k})^2 + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k})^2 + (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})^2} \\ &\text{für } i = 2, \dots, i_{max}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Die Bogenlänge wird anschließend entdimensionalisiert

$$\begin{aligned} F_{i,j,k} &= \frac{s_{i,j,k}}{s_{i_{max},j,k}} && \text{für } i = 1, \dots, i_{max}, \\ G_{i,j,k} &= \frac{s_{i,j,k}}{s_{i,j_{max},k}} && \text{für } j = 1, \dots, j_{max}, \\ H_{i,j,k} &= \frac{s_{i,j,k}}{s_{i,j,k_{max}}} && \text{für } k = 1, \dots, k_{max}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Auf Basis der bekannten Blockeckpunktverschiebungen und der Parametrisierung gemäß der Gleichungen 2.152 kann die Knotenverteilung auf den Blockkanten rekonstruiert werden

$$\Delta \mathbf{x}_{i,1,1} = (1 - F_{i,1,1}) \Delta \mathbf{x}_{1,1,1} + F_{i,1,1} \Delta \mathbf{x}_{i_{max},1,1}. \quad (2.153)$$

Analog wird für die verbleibenden Blockkanten verfahren. Liegen die diskreten Punkte auf

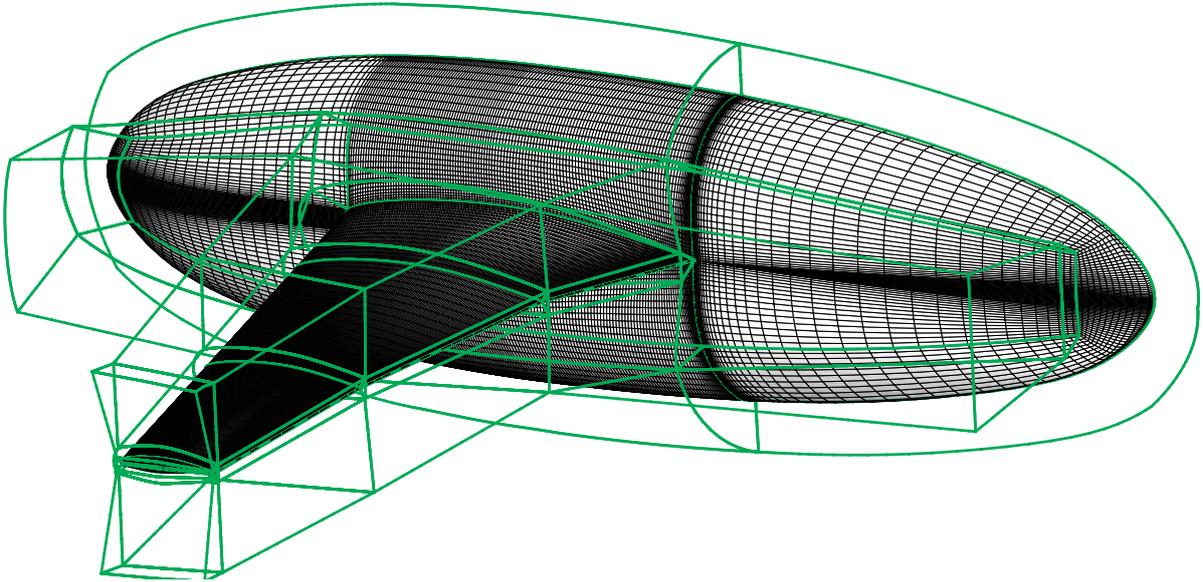


Abbildung 2.1: Multiblock-Topologie einer Flügel-Rumpf-Konfiguration in Oberflächennähe

den Blockkanten vor, kann die Punkteverteilung auf den Blockflächen mithilfe der zweidimensionalen TFI und nachfolgend das Volumennetz mit der dreidimensionalen TFI erstellt werden [152]. Solange sich die Form und die Größe des Blocks moderat ändern, funktioniert die TFI sehr zuverlässig und liefert gute Ergebnisse. Die Grenze des Verfahrens liegt darin, dass die Blöcke auf der Multiblock-Ebene unstrukturiert vernetzt sind. Wenn die oberflächennahen Blöcke klein gegenüber den Strukturdeformationen sind, müssen die Blockeckpunkte mit einer alternativen Methode entsprechend der Strukturoberfläche mitbewegt werden. Dafür wird im Rahmen dieser Arbeit die Spring Analogy verwendet. In den meisten Anwendungen ist die Anzahl der Blöcke genügend klein, dass die Spring Analogy sehr schnell konvergiert. Die maximalen Blockeckpunktverschiebungen werden entsprechend der maximalen Strukturdeformation begrenzt. Die Anpassung der Methode an die jeweilige Anwendung wird über den Parameter  $p$  in der Gleichung 2.148 gesteuert. Wichtig bei der Anwendung des kombinierten Verfahrens ist, dass oberflächennahe Blöcke ausreichend fein unterteilt sind, damit diese auch stärkeren Strukturkrümmungen folgen können. In der Abbildung 2.1 ist die Multiblock-Topologie zur Vernetzung einer

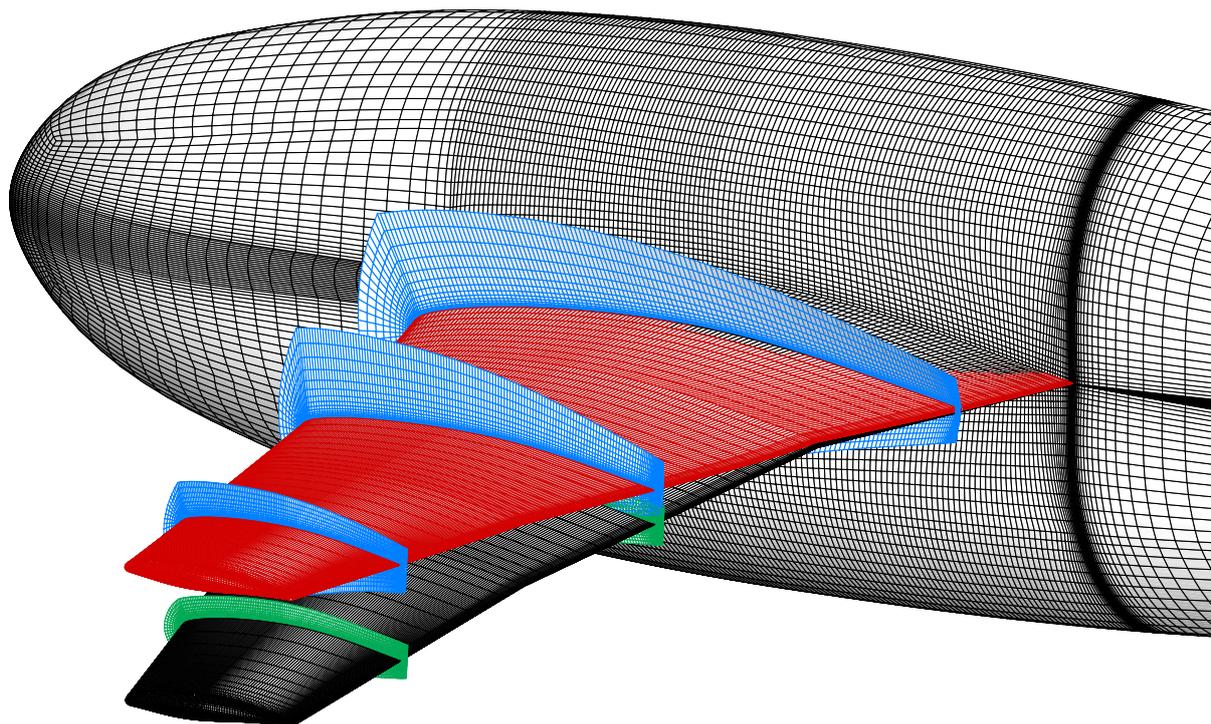


Abbildung 2.2: Funktionsweise des Verformungsalgorithmus für Multiblock-Netze, aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur die oberflächennächsten Blöcke des undeformiertes Referenznetzes (schwarz, grün) und des deformiertes Netzes (rot, blau) dargestellt

Flügel-Rumpf-Konfiguration dargestellt. Die Abbildung 2.2 zeigt das Ergebnis der Netznachführung für eine relativ große Tragflächenbiegung und -torsion. Die Netzschnitte sind ausschließlich für die benachbarten Blöcke der Tragfläche abgebildet.

#### 2.4.4 Zeitliche Kopplungsmethoden

Neben der geometrischen Kopplung hat die zeitliche Kopplung der partitionierten Löser bedeutenden Einfluss auf die Stabilität, die Effizienz und die Genauigkeit der Simulation. Für transiente Simulationen ist es besonders wichtig, dass der Kopplungsalgorithmus zeitchte und konservative Lösungen liefert. In der Literatur wird grundsätzlich zwischen drei Methoden unterschieden, der schwachen Kopplung, der starken Kopplung und diversen Ansätzen, die eine Zwischenstellung einnehmen. Die einfachste Modellierungsmöglichkeit repräsentiert die schwache Kopplung [62]. In diesem Fall wird nach jedem physikalischen Zeitschritt  $n$  die neue Strukturdeformation auf Basis der letzten berechneten Druck- und Schubspannungsverteilung ermittelt. Unter Verwendung des resultierenden Verformungszustandes wird anschließend die Strömungslösung zum physikalischen Zeitschritt  $n + 1$  bestimmt. Je nachdem, welcher der Teilfeldlöser innerhalb des Zeitschritts nicht mit der aktuellen Randbedingung zum Zeitpunkt  $n + 1$  beaufschlagt wird, eilt ein Löser den anderen Lösern nach. Das schwache Kopplungsverfahren ist aufgrund der geringen Anzahl von Kopplungsschritten sehr zeiteffizient, vereint aber einige Nachteile hinsichtlich der Genauigkeit und der Stabilität der Lösung. Selbst wenn alle Teilfeldlöser eine Ge-

nauigkeit höherer Ordnung liefern, besitzt das gekoppelte Verfahren um mindestens eine Ordnung geringere Genauigkeit [120]. Damit das Verfahren dennoch akzeptable Lösungen produziert und numerisch stabil ist, muss der physikalische Zeitschritt sehr klein gewählt werden, was den Vorteil des geringeren Rechenaufwands wieder vermindert. Vor allem für aeroelastische Problemstellungen besteht die Gefahr, dass physikalische Instabilitäten und numerische Instabilitäten in Folge einer schwachen Kopplung nicht eindeutig unterschieden werden können. Bei einer starken Kopplung tauschen die Löser innerhalb eines physikalischen Zeitschritts so lange Informationen aus, bis ein vorgegebenes Konvergenzkriterium erreicht ist [2], [112]. Aufgrund der Tatsache, dass alle gekoppelten Löser die aktuelle Randbedingung zum Zeitpunkt  $n + 1$  verwenden, kommt es für keinen Löser zu einem Zeitverzug. Dadurch kann zur Durchführung von transienten Simulationen ein größerer Zeitschritt gewählt werden, ohne dass Genauigkeits- oder Stabilitätsverluste auftreten [112]. Weil starke Kopplungsmethoden bedingt durch die große Anzahl an Subiterationen sehr rechenintensiv sind, wurde eine Vielzahl von Verfahren entwickelt, die die Vorteile der starken Kopplung mit besserer Effizienz vereinen. Häufig werden Prediktor-Korrektor-Verfahren verwendet, bei denen die Zustandsgrößen eines Löser zu Beginn des Zeitschritts  $n$  auf das Ende des Zeitschritts extrapoliert werden [119]. In [119] wurden zusätzlich mehrere Fluid-Zeitschritte innerhalb eines Struktur-Zeitschritts durchgeführt. Bei anderen Methoden wird der Zeitschritt eines Löser zwischen zwei Zeitschritten des anderen Löser ausgewertet [47] oder der Datentransfer findet auf den jeweiligen Stufen eines Runge-Kutta-Integrationsalgorithmus statt [35]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine starke Kopplung in Form des Dual-Time-Stepping (DTS) nach [2] gewählt und für die Einbindung der Flugmechanikgleichungen erweitert. Dadurch ist unter Verwendung der in den letzten Kapiteln beschriebenen Transfermethoden eine konservative und zeitechte Simulation gewährleistet.

Die zeitlich diskretisierten Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik sind in der Beziehung 2.13 in einer für die starke Kopplung vorteilhaften DTS-Formulierung gegeben. Für die Integration der Struktur- und der Flugmechanikgleichungen kommt ebenfalls ein entsprechendes Verfahren zum Einsatz. Dadurch können in der Pseudozeit beliebig Informationen zwischen den partitionierten Lösern ausgetauscht werden, ohne die zeitechte Gesamtlösung zu beeinflussen. Die Erhaltungs- und Bewegungsgleichungen werden folglich implizit erfüllt. Ausgangspunkt für die Zeitintegration der strukturellen Bewegungsgleichungen ist die modale Beschreibung 2.89. Mithilfe der modalen Formulierung können die dynamischen Systemfreiheitsgrade reduziert werden, wobei die wesentlichen Systeminformationen erhalten bleiben. Um die Gleichungen 2.89 einer Zeitintegration im Sinne der DTS-Methode besser zugänglich zu machen, wird das Gleichungssystem in die folgende Zustandsraumdarstellung überführt

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_i \end{pmatrix}, \quad (2.154)$$

oder gemäß der Darstellung 2.10

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{R}. \quad (2.155)$$

In Anlehnung an den Strömungslöser lautet die zeitdiskrete DTS-Formulierung

$$\left[ \left( \frac{1}{\Delta\tau^*} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \bar{\mathbf{I}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right]^n \Delta \mathbf{q} = \mathbf{R}^{n+1,m} - \frac{3\mathbf{q}^{n+1,m} - 4\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (2.156)$$

Diese Methode lässt sich in analoger Weise direkt auf die Bewegungsgleichungen der Flugmechanik 2.96, 2.103, 2.104 und 2.105 anwenden. In der Jakobimatrix  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}}$  werden jeweils

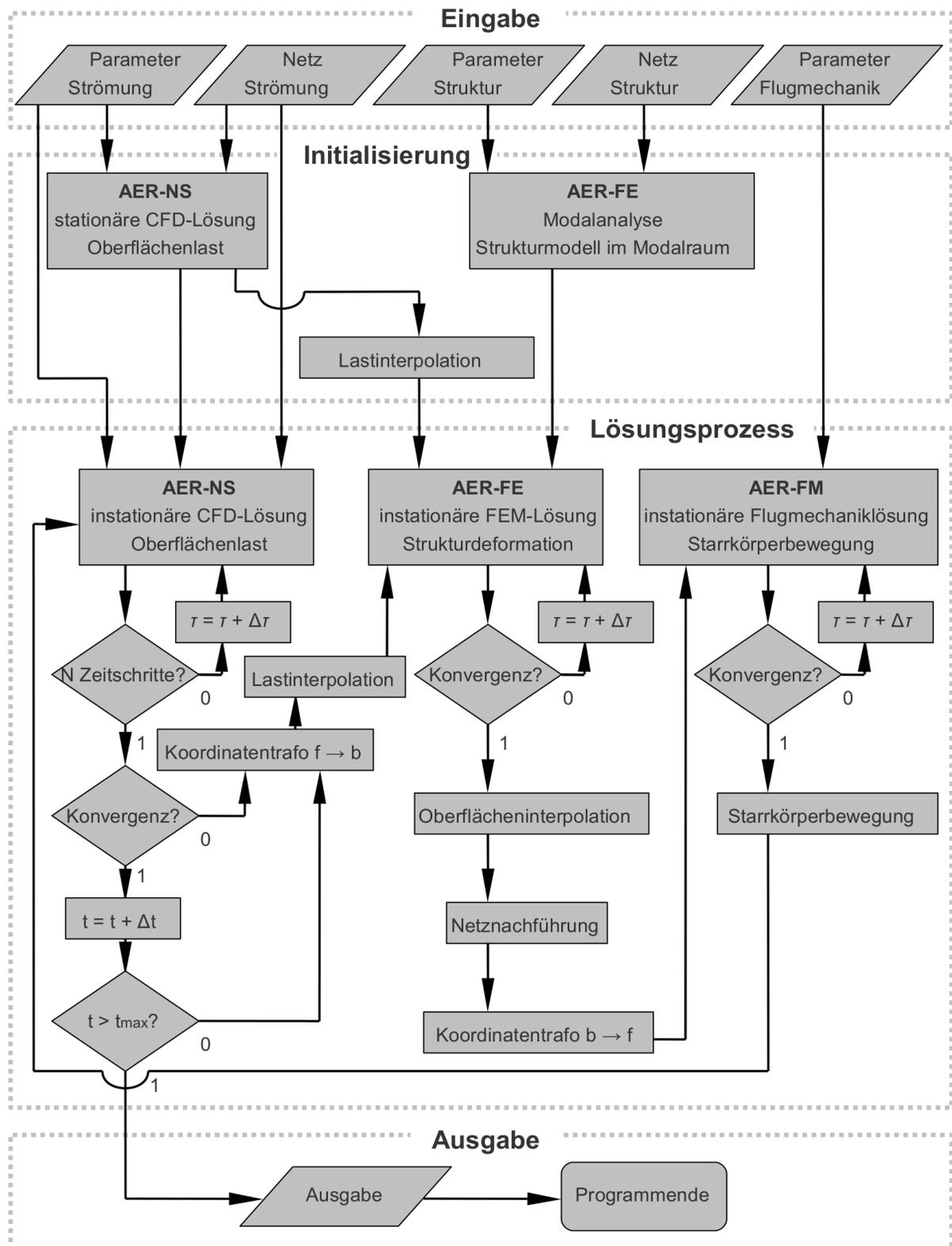


Abbildung 2.3: Programmablaufplan der gekoppelten Simulation im Zeitbereich

die Ableitungen der unbekanntenen Kräfte und Momente nach den Zustandsgrößen vernachlässigt. In allen bisherigen Anwendungen der Methode war die Konvergenz dennoch sehr gut. Die Approximation der Jakobimatrix nimmt keinen Einfluss auf die Genauigkeit des Verfahrens, weil diese nur über die rechte Seite des Gleichungssystems bestimmt wird.

In der Abbildung 2.3 ist ein Ablaufplan der programmtechnischen Umsetzung des im Zeitbereich gekoppelten Verfahrens dargestellt. An der Kopplung sind der Strömungslöser AER-NS, der Strukturlöser AER-FE und der Löser der Flugmechanikgleichungen AER-FM beteiligt. Vor Beginn des gekoppelten Simulationsprozesses muss die ungestörte Referenzströmungslösung bereitgestellt, sowie ein Strukturmodell generiert und in den Modalraum transformiert werden. Anschließend erfolgt die Lastinterpolation der Referenzströmungslösung auf die Strukturoberfläche. Im Rahmen des DTS konvergiert der Strukturlöser entsprechend dem Konvergenzkriterium vollständig in der Pseudozeit. Das Strömungsnetz muss gemäß der aktuellen Strukturverformung nachgeführt werden. Die Lage und Orientierung des Körpers wird innerhalb des Strömungs- und des Flugmechaniklösers in erdfesten beziehungsweise inertialen Koordinaten beschrieben. Der Strukturlöser hingegen, basiert auf einer körperfesten Beschreibung. Entsprechend wird eine Koordinatentransformation durchgeführt und die anschließende Lösung der flugmechanischen Bewegungsgleichungen liefert die Starrkörperbewegung des Flugkörpers, einschließlich des gesamten Strömungsnetzes. Mithilfe des Strömungslösers wird die neue Oberflächendruckverteilung der elastisch verformten und als Starrkörper bewegten Struktur ermittelt. Dabei wird allerdings nur eine vom Benutzer festgelegte Anzahl an Pseudozeitschritten ausgeführt, bevor die Informationen wieder an den Strukturlöser übergeben werden. Die Iteration zwischen den gekoppelten Lösern findet solange statt, bis der Strömungslöser und folglich auch die anderen Löser vollständig konvergiert sind. Nach Abschluss der inneren Iteration in der Pseudozeit, führen alle Löser einen physikalischen Zeitschritt durch. Dieser gesamte Lösungsprozess wird solange durchlaufen, bis eine vom Benutzer vorgegebene maximale Simulationszeit erreicht ist.

## 2.5 Lineare aeroelastische Analyse

Der Frequenzbereich repräsentiert den Bild- oder Spektralbereich eines Signals bzw. einer Funktion nach der Anwendung einer entsprechenden Transformation, wie zum Beispiel der Fourier-Transformation. Zeitlich periodische Signale lassen sich mithilfe der Fourier-Analyse in eine Anzahl diskreter harmonischer Signale zerlegen. Die unabhängige Variable ist dann nicht länger die Zeit  $t$ , sondern die Frequenz  $\omega$ . Auf diese Weise lassen sich in ihrem zeitlichen Verlauf relativ komplizierte Funktionen auf einfache Weise darstellen und mathematisch weiterverarbeiten. Jedes dynamische System, in dem eine Rückkopplung existiert, ist in der Lage, periodische Schwankungen um einen Mittelwert auszuführen und verfügt sowohl über eine Darstellung im Zeitbereich als auch über ein entsprechendes Äquivalent im Frequenzbereich. Eine neben der Fourier-Transformation ebenfalls sehr nützliche Integraltransformation ist die Laplace-Transformation. Die Laplace-Transformation ist eng verwandt mit der Fourier-Transformation und eignet sich ebenfalls als elegante Methode für die Lösung von PDG.

Ein dynamisches, aeroelastisches System kann gemäß Kapitel 2.2.2 durch folgende Glei-

chung beschrieben werden

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\bar{C}}\dot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\bar{K}}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.157)$$

Die Kräfte  $\mathbf{F}(t)$  lassen sich in aerodynamische Kräfte und sonstige äußere Kräfte aufteilen [166]. Die aerodynamischen Kräfte  $\mathbf{F}_A$  führen zu einer Rückkopplung innerhalb des aeroelastischen Systems und resultieren aus der Strukturdeformation. Folglich lassen sich diese Kräfte in Abhängigkeit der Auslenkung  $\mathbf{d}(t)$  ausdrücken, woraus ein geschlossenes dynamisches System resultiert

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\bar{C}}\dot{\mathbf{d}}(t) + \bar{\bar{K}}\mathbf{d}(t) - \mathbf{F}_A(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{F}_B(t). \quad (2.158)$$

Sonstige äußere Kräfte  $\mathbf{F}_B$  umfassen im Rahmen dieser Arbeit durch Böen induzierte aerodynamische Kräfte. Das besondere an einem geschlossenen dynamischen System ist, dass es unter bestimmten Umständen zu einer Selbsterregung kommen und das System folglich instabil werden kann. Dieses dynamische aeroelastische Stabilitätsproblem wird als Flattern bezeichnet. Die Abhängigkeit der aerodynamischen Kräfte  $\mathbf{F}_A$  von der Strukturdeformation  $\mathbf{d}(t)$  kann im allgemeinen Fall nichtlinear sein. Dieser Fall tritt speziell dann ein, wenn aerodynamische Nichtlinearitäten wie Ablösungen oder Verdichtungsstöße auftreten. Wenn nichtlineare Phänomene maßgeblich die Strömungslösung beeinflussen, müssen die Ergebnisse mithilfe einer nichtlinearen, instationären Simulation im Zeitbereich (siehe Kapitel 2.4) bestimmt werden. Der wesentliche Nachteil der Methode im Zeitbereich ist der enorme Speicherbedarf und Rechenaufwand. Allerdings wird der Großteil der Flugumhüllung durch Flugzustände charakterisiert, bei denen keine instationären, aerodynamischen Nichtlinearitäten auftreten und folglich  $\mathbf{d}(t)$  und  $\mathbf{F}_A$  proportional sind. Transformiert man die Beziehung 2.158 entsprechend Kapitel 2.2.2 mit dem Ziel der Reduktion der Freiheitsgrade und des Rechenaufwands in den Modalraum, ergibt sich

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\bar{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\bar{K}}\mathbf{q}(t) - \mathbb{F}_A(\mathbf{q}(t)) = \mathbb{F}_B(t). \quad (2.159)$$

Die Vernachlässigung von Eigenmoden höherer Ordnung wird mit der Beobachtung gerechtfertigt, dass Flattern meist aufgrund der Kopplung von niederfrequenten Eigenmoden entsteht [166]. Gleichung 2.159 kann anschließend in den Laplace-Raum transformiert werden

$$\left[ s^2\bar{\bar{M}} + s\bar{\bar{C}} + \bar{\bar{K}} - q_\infty\bar{\bar{Q}}_{ee}(s) \right] \mathbf{q}(s) = \frac{q_\infty}{U_\infty}\mathbb{Q}_{eB}(s)w_B(s). \quad (2.160)$$

Auf diese Weise wird das GDG-System in ein algebraisches Gleichungssystem in Abhängigkeit von der Laplace-Variable  $s$  umgewandelt. Die Luftkräfte sind in Form der generalisierte Luftkräfte (GAF),  $\bar{\bar{Q}}_{ee}$ ,  $\mathbb{Q}_{eB}$  dargestellt und werden im folgenden Kapitel genauer beschrieben. Die rechte Seite von Gleichung 2.160 repräsentiert die äußeren Böenkräfte, induziert durch die Böengeschwindigkeit  $w_B$ . Die zwei bedeutenden Vorteile der Formulierung 2.160 im Frequenzbereich gegenüber der Gleichung 2.158 im Zeitbereich sind eine deutliche Reduzierung der Systemfreiheitsgrade und die mathematische Beschreibung des Problems durch algebraische Gleichungen. Voraussetzung für eine Lösung dieses Problems im Frequenzbereich ist die Bereitstellung der GAF-Matrizen.

### 2.5.1 Generalisierte Luftkräfte

Mit der Einführung der GAF-Matrizen wird das Ziel verfolgt, einen linearen Zusammenhang zwischen der Strukturauslenkung  $\mathbf{d}(t)$  und den aerodynamischen Rückkopplungskräften  $\mathbf{F}_A$  entsprechend Gleichung 2.158 herzustellen. Dieser Zusammenhang lässt sich

durch ein Faltungsintegral ausdrücken, welches die zeitliche Entwicklung der Strömungsantwort gegenüber der Strukturanregung beschreibt [166]

$$\mathbf{F}_A(\mathbf{d}) = \int_0^t q_\infty \mathbf{H}(t - \tau) \mathbf{d}(\tau) d\tau. \quad (2.161)$$

Aufgrund der Rückkopplung erfolgt allerdings ebenso eine Anregung der Struktur, bedingt durch die aerodynamischen Kräfte. Anstelle der Übertragungsfunktion nutzt man in der Aeroelastik häufig die im Frequenzraum definierte Matrix der aerodynamischen Einflusskoeffizienten bzw. die sogenannten AIC-Matrix

$$\mathbf{F}_A = q_\infty \overline{\overline{\text{AIC}}}(ik_{red}) \mathbf{d}_A. \quad (2.162)$$

Hervorgehend aus den ursprünglich zur Modellierung der instationären Aerodynamik verwendeten Potentialmethoden, stellt die AIC-Matrix einen Zusammenhang zwischen der Auslenkung der aerodynamischen Kontrollpunkte und dem zugehörigen Auftrieb dar. Über die bezüglich der aerodynamischen Freiheitsgrade definierte AIC-Matrix werden alle Oberflächenelemente in gegenseitige Beziehung bzw. Abhängigkeit gestellt. Physikalisch lassen sich die Matrixeinträge als lokaler Auftriebsanstieg  $c_{A\alpha}$  interpretieren. Damit die AIC-Matrix in der Gleichung 2.160 verwendet werden kann, müssen die Matrixeinträge auf die Strukturfreiheitsgrade und anschließend in den Modalraum transformiert werden. Für die erste Transformation stehen die Oberflächen-Spline-Methoden aus Kapitel 2.4.1 zur Verfügung. Zwischen der GAF-Matrix und der AIC-Matrix ergibt sich der folgende Zusammenhang [133], [166], [23]

$$\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{ee}(ik_{red}) = \overline{\overline{\mathbf{\Phi}}}_{ee}^T \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \overline{\overline{\text{AIC}}}(ik_{red}) \overline{\overline{\mathbf{G}}}\overline{\overline{\mathbf{\Phi}}}_{ee}. \quad (2.163)$$

Die einzelnen GAF-Matrixeinträge können als Kraft interpretiert werden, die in Richtung des jeweiligen Strukturfreiheitsgrades Arbeit verrichtet. Werden für die Bestimmung der Luftkräfte lineare Methoden oder reibungsfreie, nichtlineare Methoden unter der Voraussetzung kleiner Störungen verwendet, sind die GAF-Matrizen von der Anströmmachzahl, der Körpergeometrie und der reduzierten Frequenz abhängig. Kommen reibungsbehaftete Methoden zum Einsatz, so besteht eine zusätzliche Abhängigkeit von der Reynoldszahl der freien Anströmung. Dieser Einfluss kann allerdings häufig vernachlässigt werden [98].

Traditionell werden GAF mithilfe linearer Potentialverfahren bestimmt [56], [17]. Die Vorhersagequalität dieser Methoden ist vor allem im transsonischen Geschwindigkeitsbereich mangelhaft, weil Verdichtungsstöße nicht adäquat vorhergesagt werden können. Aus diesem Grund sind in dieser Arbeit die in Kapitel 2.1 vorgestellten nichtlinearen CFD-Methoden für die GAF-Berechnung verwendet worden. Für die Luftkräfte gilt analog zu den linearen Verfahren eine lokale Linearisierungsannahme, jedoch um einen nichtlinearen Referenzzustand. Die damit verbundene Voraussetzung kleiner Störungen ermöglicht eine Überlagerung der modalen Kräfte. Für gewöhnlich werden die GAF-Matrizen auf der Basis harmonischer Schwingungen des umströmten Körpers in den modalen Eigenformen um die unverformte Gleichgewichtslage bestimmt. Die resultierenden transienten Luftkraftverläufe können anschließend, nach einer kurzen Einschwingphase, über eine Fouriertransformation in den Frequenzbereich überführt und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bzw. von höheren Harmonischen in einen Real- und Imaginärterteil aufgespalten werden. Der Realteil repräsentiert den zur Anregung gleichphasigen Anteil und der Imaginärterteil entsprechend den gegenphasigen Anteil. Das Verhältnis aus Real- und Imaginärterteil ist aufgrund der Instationarität der Strömung von der reduzierten

Frequenz abhängig. In der Praxis muss für jede betrachtete Eigenmode  $i$  und reduzierte Frequenz  $k$  eine CFD-Simulation durchgeführt werden. Die resultierende Druckverteilung wird anschließend auf alle Eigenmoden  $j$  mit der Auslenkung  $\mathbf{d}_j$  projiziert, so dass sich  $k$  quadratische GAF-Matrizen der Größe  $i$  bzw.  $j$  ergeben

$$\bar{\mathbb{Q}}_{ee,ij}(ik_{red}) = \int_S c_{p,i} \mathbf{d}_j^T d\mathbf{S}_i. \quad (2.164)$$

Die Verwendung von instationären, nichtlinearen CFD-Methoden ist sehr rechenintensiv. Weil die GAF im Rahmen der klassischen Flatteranalyse entsprechend Gleichung 2.160 formuliert sind, werden Harmonische höherer Ordnung nicht mit berücksichtigt. Deshalb eignet sich der in Kapitel 2.1.2 beschriebene lineare CFD-Löser aus Gründen der Konsistenz und Rechenzeitersparnis besonders gut für die Bestimmung der GAF-Matrizen. Dieser liefert die komplexen GAF-Einträge direkt im Frequenzbereich

$$\bar{\mathbb{Q}}_{ee,ij}(ik_{red}) = \int_S \bar{c}_{p,i} \hat{\mathbf{d}}_j^T d\hat{\mathbf{S}}_i + \int_S \Re(\hat{c}_{p,i}) \hat{\mathbf{d}}_j^T d\bar{\mathbf{S}}_i + \int_S \Im(\hat{c}_{p,i}) \hat{\mathbf{d}}_j^T d\bar{\mathbf{S}}_i. \quad (2.165)$$

Für eine harmonische Böenanregung können ebenfalls GAF berechnet werden. Im Vergleich zu den Beziehungen 2.164 und 2.165 existieren zwei bedeutende Unterschiede. Die Böenluftkräfte stehen auf der rechten Seite von Gleichung 2.160 und bilden einen Vektor. Diese Formulierung ist darin begründet, dass die GAF nur durch die äußere Böe induziert werden und nicht aus einer strukturellen Rückkopplung resultieren. Demzufolge muss nicht für jede Eigenmode eine CFD-Simulation durchgeführt werden. Die Struktureigenformen werden nur im Zuge der Modaltransformation über den Vektor der Auslenkungen  $\mathbf{d}_j$  berücksichtigt. Damit die Böenluftkräfte gemäß der Linearitätsannahme unabhängig von der Amplitude der Böengeschwindigkeit sind, werden sie zusätzlich mit dieser normiert

$$\mathbb{Q}_{eB,j}(ik_{red}) = \frac{1}{\hat{w}_B} \int_S c_p \mathbf{d}_j^T d\mathbf{S}, \quad (2.166)$$

bzw. für den linearen Löser gilt

$$\mathbb{Q}_{eB,j}(ik_{red}) = \frac{1}{\hat{w}_B} \int_S \Re(\hat{c}_p) \hat{\mathbf{d}}_j^T d\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{\hat{w}_B} \int_S \Im(\hat{c}_p) \hat{\mathbf{d}}_j^T d\bar{\mathbf{S}}. \quad (2.167)$$

## 2.5.2 Stabilitätsanalyse

Unter der dynamischen aeroelastischen Stabilitätsanalyse wird im Allgemeinen die Lösung der Flattergleichung verstanden. Weil der Aufwand einer transienten, im Zeitbereich gekoppelten Simulation sehr hoch ist, wird Gleichung 2.157 unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen der Strukturauslenkung und der aerodynamischen Kraft in ein lineares Gleichungssystem umgewandelt und in den Laplace-Bereich transformiert

$$\left[ s^2 \bar{\mathbb{M}} + \bar{\mathbb{K}} - q_\infty \bar{\mathbb{Q}}_{ee}(ik_{red}) \right] \mathbf{q} = 0. \quad (2.168)$$

Dadurch kann die Stabilitätsgrenze des aeroelastischen Systems direkt im Frequenzbereich durch Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt werden. Weil die GAF für harmonische Schwingungen der Struktur in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz ermittelt werden,

gelten diese demzufolge nur, wenn die Dämpfung des aeroelastischen Systems Null ist [166]. Zur Lösung von Gleichung 2.168 stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, die sich im Wesentlichen dadurch unterscheiden, in welcher Weise die Systemdämpfung und die GAF berücksichtigt werden [133], [134], [166]. Häufig verwendete Verfahren sind die K-, die PK- und die g-Methode. Die Grundzüge dieser Verfahren werden im Folgenden kurz erläutert.

### K-Methode

Die K-Methode wird auch "Amerikanische Methode" genannt und geht auf Theodorsen zurück [150]. Weil die GAF als komplexe Werte im Fourier-Bereich vorliegen, kann die Gleichung 2.168 ebenfalls in den Fourier-Bereich transformiert werden. Zusätzlich wird ein künstlicher Dämpfungsterm  $ig$  proportional zur Steifigkeit eingeführt, über den der harmonische Schwingungscharakter erhalten werden soll

$$\left[ -\omega^2 \bar{\mathbb{M}} + (1 + ig) \bar{\mathbb{K}} - q_\infty \bar{\mathbb{Q}}_{ee}(ik_{red}) \right] \mathbf{q} = 0. \quad (2.169)$$

Durch eine geeignete Umformung von Gleichung 2.169 und anschließender Lösung des Eigenwertproblems für verschiedene reduzierte Frequenzen, können die gesuchten Größen, Dämpfung  $g$ , Flatterfrequenz  $\omega_f$  und Flattergeschwindigkeit  $U_f$  explizit ausgerechnet werden. Das Systemverhalten ist instabil, wenn die Dämpfung positive Werte annimmt. Zu beachten ist, dass die Dämpfung  $g$  eine künstliche Hilfsgröße ist, der keine physikalische Bedeutung zukommt. Die Vorteile der K-Methode liegen in dem effizienten, robusten und expliziten Lösungsprozess.

### PK-Methode

Die PK-Methode wird aufgrund ihrer historischen Entwicklung als "Britische Methode" bezeichnet und geht in der hier vorgestellten Form, bedingt durch diverse Weiterentwicklungen, auf verschiedene Quellen zurück [80], [69], [134]. Ziel der PK-Methode ist es, bessere Dämpfungsvorhersagen des Strukturverhaltens abseits des Flatterpunktes zu ermöglichen als die K-Methode. Die Darstellung der aeroelastischen Bewegungsgleichung im Laplace-Bereich wird für die PK-Methode unter der Einführung einer dimensionslosen Laplace-Variablen  $p$  beibehalten

$$p = \frac{sl}{U_\infty} = \gamma k_{red} + ik_{red} = g + ik_{red}. \quad (2.170)$$

Substituiert man  $p$  in Gleichung 2.168, ergibt sich

$$\left[ \left( \frac{U_\infty^2}{l^2} \right) p^2 \bar{\mathbb{M}} + \bar{\mathbb{K}} - q_\infty \bar{\mathbb{Q}}_{ee}(ik_{red}) \right] \mathbf{q} = 0. \quad (2.171)$$

Die Formulierung 2.171 ist aufgrund der Vermischung von Termen gedämpfter harmonischer Bewegung im Laplace-Bereich und ungedämpfter harmonischer Bewegung im Fourier-Bereich mathematisch nicht konsistent, wird aber im Allgemeinen als zuverlässige Vorhersagemethode akzeptiert [166]. Durch Aufspaltung der generalisierten Luftkraft in die imaginäre aerodynamische Dämpfung und die reelle aerodynamische Steifigkeit folgt für Gleichung 2.171

$$\left[ \left( \frac{U_\infty^2}{l^2} \right) p^2 \bar{\mathbb{M}} + \bar{\mathbb{K}} - q_\infty \frac{\Im(\bar{\mathbb{Q}})_{ee}}{k} p - q_\infty \Re(\bar{\mathbb{Q}}_{ee}) \right] \mathbf{q} = 0. \quad (2.172)$$

Mit dieser Beziehung liegt ein quadratisches Eigenwertproblem vor, welches nach der Laplace-Variable  $p$  gelöst werden kann und über einen iterativen Prozess den Imaginärteil von  $p$  an die reduzierte Frequenz der GAF angleicht. Dafür ist es notwendig, dass die GAF-Matrizen geeignet interpoliert werden beziehungsweise an genügend diskreten Stützstellen im relevanten Frequenzbereich vorliegen. Die charakteristischen Fluttergrößen können schließlich für explizit vorgegebene Staudrücke berechnet werden.

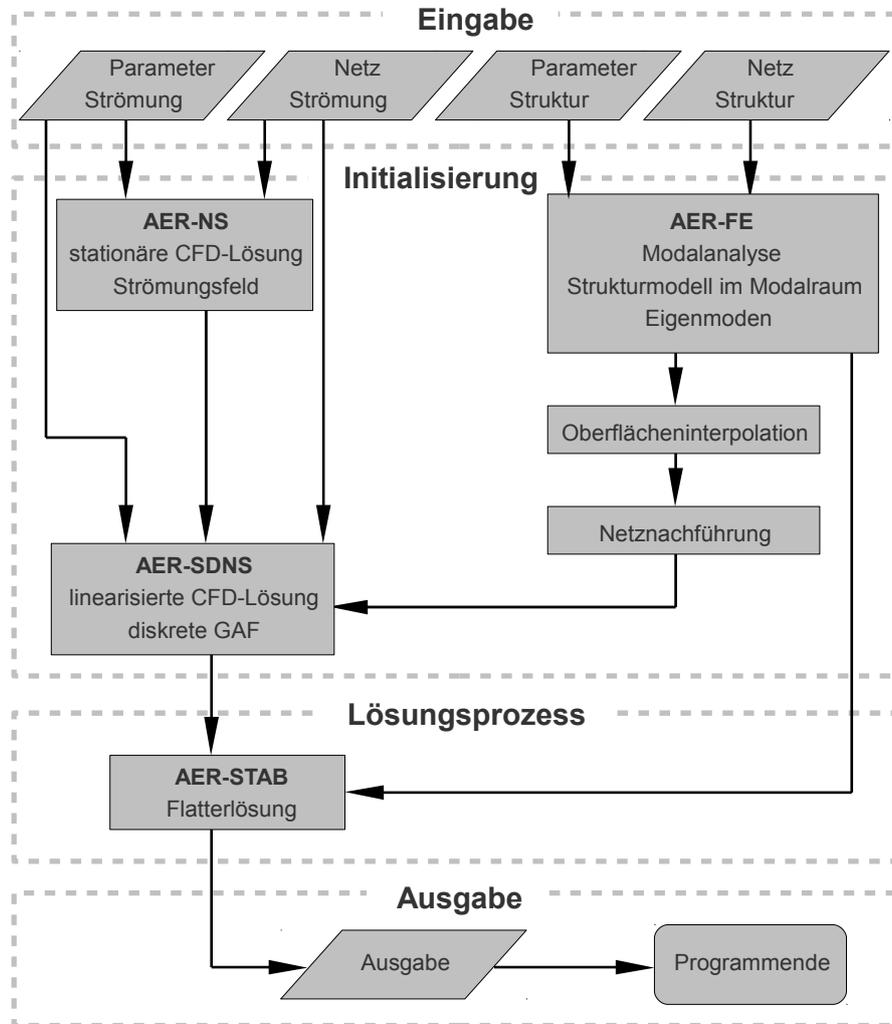


Abbildung 2.4: Programmablaufplan der Stabilitätsanalyse

### g-Methode

Die g-Methode wurde mit dem Ziel entwickelt, eine weitere Verbesserung der Dämpfungsvorhersage gegenüber der PK-Methode zu erreichen [28]. Sie adressiert die Beschränkung des Gültigkeitsbereichs der PK-Methode auf kleine reduzierte Frequenzen bzw. die Voraussetzung linearer Abhängigkeit der GAF von der reduzierten Frequenz. Dazu wird ein aerodynamischer Dämpfungsterm erster Ordnung in Gleichung 2.171 eingeführt

$$\bar{\bar{Q}}_{ee}(p) \approx \bar{\bar{Q}}_{ee}(ik_{red}) + g \left. \frac{\partial \bar{\bar{Q}}_{ee}(p)}{\partial g} \right|_{g=0} \quad \text{für } g \ll 0. \quad (2.173)$$

Weil die GAF meist im Frequenzbereich gegeben sind, kann weiterhin gezeigt werden [28],

dass

$$\bar{\bar{Q}}_{ee}(p) \approx \bar{\bar{Q}}_{ee}(ik_{red}) + g \left. \frac{d\bar{\bar{Q}}_{ee}(ik_{red})}{d(ik)} \right|_{g=0} = \bar{\bar{Q}}_{ee}(ik_{red}) + g\bar{\bar{Q}}'_{ee}(ik_{red}), \quad (2.174)$$

gilt. Die Ableitung der Luftkräfte nach der reduzierten Frequenz kann mit einem Zentrale-Differenzen-Verfahren berechnet werden. Setzt man den Dämpfungsterm 2.174 in die Grundgleichung der PK-Methode 2.171 ein, so lautet diese

$$\left[ \left( \frac{U_\infty^2}{l^2} \right) p^2 \bar{\bar{M}} + \bar{\bar{K}} - q_\infty \bar{\bar{Q}}'_{ee}(ik_{red})g - q_\infty \bar{\bar{Q}}_{ee}(ik_{red}) \right] \mathbf{q} = 0. \quad (2.175)$$

Für eine detaillierte Darstellung des Lösungsprozesses von Beziehung 2.175 sei auf die Literatur verwiesen [28].

Alle vorgestellten Flutterlöser sind im Allgemeinen sehr robust und verhältnismäßig effizient. Ein Problem der Flutterlöser ist, dass die Ergebnisse nicht zwangsläufig "matched point"-Lösungen im Sinne von zueinander passenden Luftdichten, Fluggeschwindigkeiten und Flugmachzahlen liefern. Um unter diesem Gesichtspunkt "exakte" Ergebnisse zu erhalten, ist eine weitere äußere Iteration innerhalb des Flutteranalyseprozesses notwendig. Aus Gründen der Zeitersparnis wird dieser Schritt in Abhängigkeit des jeweiligen Flutterrisikos aber teilweise vernachlässigt [70]. Der mit Abstand größte Zeitaufwand wird bei der Durchführung einer Flutteranalyse für die Bestimmung der GAF benötigt. Im Rahmen des Genehmigungsverfahrens für ein Flugzeug müssen die GAF für alle relevanten Flugzustände berechnet werden. Die Bestimmung der GAF ist demzufolge für verschiedene Flughöhen, Fluggeschwindigkeiten, Geometrie- und Massenvariationen, den daraus resultierenden Struktureigenmoden und für verschiedene reduzierte Frequenzen erforderlich. Deshalb ist es besonders bei der Berechnung der GAF wichtig, einen optimalen Kompromiss aus Effizienz und Genauigkeit der verfügbaren Methoden zu finden. Die in dieser Arbeit vorgestellten CFD-Verfahren eignen sich vorrangig für den transsonischen Geschwindigkeitsbereich, in dem aerodynamische Nichtlinearitäten auftreten.

In Abbildung 2.4 ist der Programmablaufplan einer klassischen Flutteranalyse unter Verwendung der zeitlinearisierten CFD-Verfahren dargestellt. Nach der Eingabe der erforderlichen Netze und Parameter für die Löser, muss das stationäre Referenzströmungsfeld, um das die Linearisierung stattfinden soll, bereitgestellt werden. Die Modalanalyse des Strukturmodells unter Verwendung des Löser AER-FE liefert die Modalmatrizen, Eigenfrequenzen und Eigenmoden. Mithilfe der Eigenmoden werden die Störnetze für den linearisierten Strömungslöser erzeugt. Der linearisierte Strömungslöser AER-SDNS berechnet anschließend GAF für harmonische Schwingungen der Struktur in den betrachteten Eigenmoden um einen nichtlinearen Referenzzustand. Als zeitaufwendigere Alternative zur Verwendung des linearisierten Strömungslöser kann auch der nichtlineare Löser AER-NS eingesetzt werden. In diesem Fall liegen die GAF nach der transienten Simulation in Form einer Zeitreihe vor. Die erste Harmonische kann durch die anschließende Fourier-Transformation des Zeitsignals gewonnen werden. Unabhängig vom Ursprung der GAF bilden diese zusammen mit den modalen Struktureigenschaften die Eingangsgrößen für den Flutterlöser AER-STAB. Anhand der in diesem Kapitel beschriebenen Flutterlöser kann abschließend der kritische Flutterpunkt bestimmt werden.

### 2.5.3 Antwortanalyse

Neben der Stabilitätsanalyse, die eine sehr effiziente Lösung der Flattergleichung 2.168 ermöglicht, kann die Gleichung 2.160 auch mithilfe einer Antwortanalyse gelöst werden. Unter Antwortanalyse wird im Folgenden die mit einer transienten Simulation erzeugte instationäre Lösung im Zeitbereich verstanden. Dafür muss die teilweise in Laplace- und Fourier-Bereich vorliegende Formulierung zurück in den Zeitbereich transformiert werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise zu einer Kopplung im Zeitbereich gemäß Kapitel 2.4 liegt darin, dass die zeitaufwendige Lösung der instationären Aerodynamik für die gesuchten Flugzustände im Voraus der transienten Simulation durchgeführt wird und anschließend in Form von GAF vorliegt. Das Gleichungssystem 2.160 kann nach erfolgter Rücktransformation in den Zeitbereich aufgrund der relativ geringen Anzahl von Freiheitsgraden sehr schnell numerisch integriert werden. Außerdem können die Systemantworten für beliebige Anregungssignale unter Verwendung der für einen bestimmten Referenzflugzustand erzeugten GAF-Matrizen generiert werden. Die einzige Einschränkung des Verfahrens gegenüber der Kopplung im Zeitbereich ist die der Systemmodellierung zugrundeliegende Linearitätsannahme zwischen der Strukturdeformation und der aerodynamischen Kraft auf den umströmten Körper.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Antwortanalysen konzentrieren sich vorrangig auf die aeroelastische Systemantwort in Folge von Böenanregungen. Jeder Flugkörper ist während des Fluges durch die Atmosphäre der Einwirkung von Böen ausgesetzt. Diese äußeren Krafteinwirkungen haben zur Folge, dass sowohl die elastische Struktur angeregt, als auch das Flugzeug als Starrkörper bewegt wird, was wiederum die Flugdynamik bzw. die Flugtrajektorie beeinflusst. Daraus resultieren zum einen Änderungen in der Maximalbelastung, sowie der Lebensdauer der Struktur. Neben den Anforderungen in Hinblick auf die Flugsicherheit muss auch der Flugkomfort im Entwurfsprozess berücksichtigt werden. Aus diesem Grund bildet die dynamische, elastische Analyse der Böenantwort einen Teil des Zulassungsprozesses für militärische und "große" zivile Flugzeuge [107], [43]. Grundsätzlich wird hinsichtlich der Böenanregung zwischen der diskrete Böenanregung und der Anregung in Form von kontinuierlicher, statistischer Turbulenz unterschieden [75]. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Systemantwort auf die erstgenannte Anregungsform untersucht.

Ausgehend von einer Formulierung im Laplace-Bereich und im Modalraum entsprechend der Gleichung 2.160, kann die transiente aeroelastische Systemantwort nach der durchgeführten inversen Laplace-Transformation in den Zeitbereich bestimmt werden. Wie in Kapitel 2.5.1 erläutert wird, liegen die GAF anfangs allerdings nur für diskrete reduzierte Frequenzen vor. Folglich müssen diese geeignet interpoliert und in Abhängigkeit der Laplace-Variablen ausgedrückt werden. In der Regel kommen mit diesem Ziel RFA-Methoden zum Einsatz [88], [137], [153], [147], [166]. Sie ermöglichen außerdem die Umwandlung des Gleichungssystems 2.159, in dem Ableitungsterme zweiter Ordnung nach der Zeit vorkommen, in ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell (LZZ), das nur Ableitungen erster Ordnung enthält und folglich problemlos numerisch integrierbar ist. In dieser Arbeit wird zur Interpolation der GAF die Methode nach Roger [137] verwendet, nach der die verformungsinduzierten GAF wie folgt approximiert werden können

$$\bar{\mathbf{Q}}_{ee}(p)\mathbf{q}(s) \approx \left[ \bar{\mathbf{A}}_{ee0} + \bar{\mathbf{A}}_{ee1}p + \bar{\mathbf{A}}_{ee2}p^2 + \sum_{j=3}^N \frac{\bar{\mathbf{A}}_{eej}p}{p + \gamma_{j-2}} \right] \mathbf{q}(s). \quad (2.176)$$

Mithilfe dieser Formulierung werden die komplexen aerodynamischen Luftkräfte durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate über rationale Funktionen bzw. über die entsprechenden resultierenden Matrizen  $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_{eej}$  angenähert und in den Laplace-Raum transformiert. Ein Nachteil der RFA-Techniken ist, dass zusätzliche aerodynamische Zustandsgrößen in das LZZ eingeführt werden, die sogenannten “lag states”. Die “lag states” dienen der Modellierung des Zeitverzugs bezüglich der Strömungsantwort und sind wie folgt definiert

$$\mathbf{q}_{ej}(s) = \frac{s}{s + \frac{U_\infty}{l} \gamma_{j-2}} \mathbf{q}(s). \quad (2.177)$$

Die Anzahl der “lag states” kann vom Benutzer frei gewählt werden. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen hat sich die Verwendung von vier “lag states” bewährt. Dadurch erhöht sich die Anzahl der zu lösenden Gleichungen von  $2n$  auf  $(2 + 4)n$  Gleichungen, wobei  $n$  gleich dem Rang des modalen Modells ist. Analog wird die Methode nach Roger auf die böeninduzierten GAF angewendet

$$\mathbf{Q}_{eB}(p)w_B(s) \approx \left[ \mathbf{A}_{eB0} + \mathbf{A}_{eB1}p + \sum_{j=3}^N \frac{\mathbf{A}_{eBj}p}{p + \gamma_{j-2}} \right] w_B(s), \quad (2.178)$$

mit

$$q_{Bj}(s) = \frac{s}{s + \frac{U_\infty}{l} \gamma_{j-2}} w_B(s). \quad (2.179)$$

Die Abhängigkeit des Systems von der zweiten zeitlichen Ableitung der Böengeschwindigkeit wird in Gleichung 2.178 vernachlässigt. Weil die böeninduzierten GAF in vektorieller Form gegeben sind, folgen für die “lag states” skalare Größen und das LZZ wächst um vier weitere Gleichungen. Setzt man die Beziehungen 2.176 bis 2.179 in Gleichung 2.160 ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[ s^2 \bar{\bar{\mathbf{M}}} + s \bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{K}}} \right] \mathbf{q}(s) = q_\infty \left[ \left( \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{ee0} + \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{ee1}p + \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{ee2}p^2 \right) \mathbf{q}(s) + \sum_{j=3}^N \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{eej} \mathbf{q}_{ej}(p) \right] \\ + \frac{q_\infty}{U_\infty} \left[ \left( \mathbf{A}_{eB0} + \mathbf{A}_{eB1}p \right) w_B(s) + \sum_{j=3}^N \mathbf{A}_{eBj} q_{Bj}(p) \right]. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Dieses Gleichungssystem ist im Laplace-Raum formuliert. Damit das System im Sinne einer transienten Simulation gelöst werden kann, muss die Formulierung in den Zeitbereich transformiert werden. Aufgrund dieses Zusammenhangs werden die Gleichungen schließ-

lich in eine Zustandsraumdarstellung überführt

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{e3} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_{e7} \\ \dot{q}_{B3} \\ \vdots \\ \dot{q}_{B7} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{q_\infty}{U_\infty} \bar{\mathbf{M}}' \mathbf{A}_{eB0} & \frac{q_\infty l}{U_\infty^2} \bar{\mathbf{M}}' \mathbf{A}_{eB1} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_B \\ \dot{w}_B \end{Bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mathbf{I}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{K}}' & \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{C}}' & q_\infty \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{A}}_{ee3} & \cdots & q_\infty \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{A}}_{ee7} & \frac{q_\infty}{U_\infty} \bar{\mathbf{M}}' \mathbf{A}_{eB3} & \cdots & \frac{q_\infty}{U_\infty} \bar{\mathbf{M}}' \mathbf{A}_{eB7} \\ 0 & \bar{\mathbf{I}} & -\frac{U_\infty}{l} \gamma_1 \bar{\mathbf{I}} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{\mathbf{I}} & 0 & & -\frac{U_\infty}{l} \gamma_4 \bar{\mathbf{I}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{U_\infty}{l} \gamma_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & -\frac{U_\infty}{l} \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q}_{e3} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{e7} \\ q_{B3} \\ \vdots \\ q_{B7} \end{Bmatrix}, \quad (2.181)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{M}}' &= \left[ \bar{\mathbf{M}} - \frac{q_\infty l^2}{U_\infty^2} \bar{\mathbf{A}}_{ee2} \right]^{-1}, \\
 \bar{\mathbf{C}}' &= \frac{q_\infty l}{U_\infty} \bar{\mathbf{A}}_{ee1} - \bar{\mathbf{C}}, \\
 \bar{\mathbf{K}}' &= q_\infty \bar{\mathbf{A}}_{ee0} - \bar{\mathbf{K}}.
 \end{aligned} \quad (2.182)$$

Mithilfe des resultierenden LZZ ist man in der Lage, die gekoppelte aeroelastische Antwort auf beliebige diskrete Böenanregungen und beliebig komplexe Geometrien in Rechenzeitintervallen von nur wenigen Sekunden zu bestimmen.

Optional kann das Gleichungssystem 2.181 um die Flugmechanikgleichungen erweitert werden. Grundsätzlich können sowohl die nichtlinearen Flugmechanikgleichungen 2.96, 2.103 bis 2.105 als auch die linearisierten Flugmechanikgleichungen 2.108, 2.109 verwendet werden. Von Bedeutung ist jedoch, dass die Kopplungsterme bezüglich der elastischen Verformung und der Starrkörperbewegung bei der Formulierung der generalisierten Kräfte berücksichtigt werden müssen [157], [158]. Das heißt zum einen, dass in den aeroelastischen Bewegungsgleichungen der Einfluss der Starrkörperfreiheitsgrade in Form der korrespondierenden GAF einbezogen wird. Dadurch folgt für die rechte Seite von Gleichung 2.160

$$\left[ s^2 \bar{\mathbf{M}} + s \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} - q_\infty \bar{\mathbf{Q}}_{ee}(s) \right] \mathbf{q}(s) = \frac{q_\infty}{U_\infty} \mathbf{Q}_{eB}(s) w_B(s) + q_\infty \bar{\mathbf{Q}}_{er}(s) \mathbf{r}(s). \quad (2.183)$$

Zum anderen existiert ein Einfluss der elastischen Moden auf die globalen Luftkräfte 2.106 und die Momente 2.107. In Abhängigkeit der in den linearisierten Flugmechanikgleichun-

gen berücksichtigten Beiwerte ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned}
\Delta X_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S}{2} \left( c_{W\alpha} \Delta\alpha + \sum_{j=1}^N c_{Wq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S l_\mu}{4} \left( c_{W\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + c_{Wq} \Delta q + \sum_{j=1}^N c_{W\dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \\
\Delta Y_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S}{2} \left( c_{Y\beta} \Delta\beta + \sum_{j=1}^N c_{Yq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S s}{4} \left( c_{Yp} \Delta p + c_{Yr} \Delta r + \sum_{j=1}^N c_{Y\dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \\
\Delta Z_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S}{2} \left( c_{A\alpha} \Delta\alpha + \sum_{j=1}^N c_{Aq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S l_\mu}{4} \left( c_{A\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + c_{Aq} \Delta q + \sum_{j=1}^N c_{A\dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \\
\Delta L_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S s}{2} \left( c_{L\beta} \Delta\beta + \sum_{j=1}^N c_{Lq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S s^2}{4} \left( c_{Lp} \Delta p + c_{Lr} \Delta r + \sum_{j=1}^N c_{L\dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \\
\Delta M_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S l_\mu}{2} \left( c_{M\alpha} \Delta\alpha + \sum_{j=1}^N c_{Mq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S l_\mu^2}{4} \left( c_{M\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + c_{Mq} \Delta q + \sum_{j=1}^N c_{M\dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \\
\Delta N_b &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 S s}{2} \left( c_{N\beta} \Delta\beta + \sum_{j=1}^N c_{Nq_j} q_j \right) + \frac{\rho_\infty U_\infty S s^2}{4} \left( c_{Np} \Delta p + c_{Nr} \Delta r + \sum_{j=1}^N c_{N\dot{q}_j} \dot{q}_j \right).
\end{aligned} \tag{2.184}$$

Im Vergleich zu den Flugmechanikgleichungen eines starren Körpers sind die Summenterme über die Kraftbeiträge aller elastischer Moden ergänzt worden. Damit vergrößert sich das LZZ gemäß der Gleichung 2.181 um die sechs Bewegungsgleichungen der Flugmechanik und um  $4n$  weitere Gleichungen entsprechend der "lag states", die aus der Kopplung zwischen den Starrkörpermoden und den elastischen Moden folgen. Eine Kopplung von Strömungs-, Struktur- und Flugmechanik erfolgt in dieser Formulierung ausschließlich über die GAF.

Der zugehörige Programmablaufplan des in diesem Kapitel beschriebenen Antwortanalyseprozesses ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Grundsätzlich werden für die Stabilitäts- und Antwortanalyse die gleichen Eingangsgrößen in Form der GAF und des modalen Strukturmodells benötigt. An die Stelle der Lösung eines Eigenwertproblems innerhalb der Stabilitätsanalyse tritt in der Antwortanalyse die instationäre Lösung des LZZ mit dem Programmmodul AER-RESP. Vor der eigentlichen Zeitintegration werden die diskreten GAF-Matrizen mithilfe der Rogers-Methode interpoliert. Im Rahmen der Antwortanalyse können zusätzlich die Flugmechanikgleichungen berücksichtigt werden. Der Systemausgang wird durch die Zeitverläufe der Zustandsgrößen gebildet.

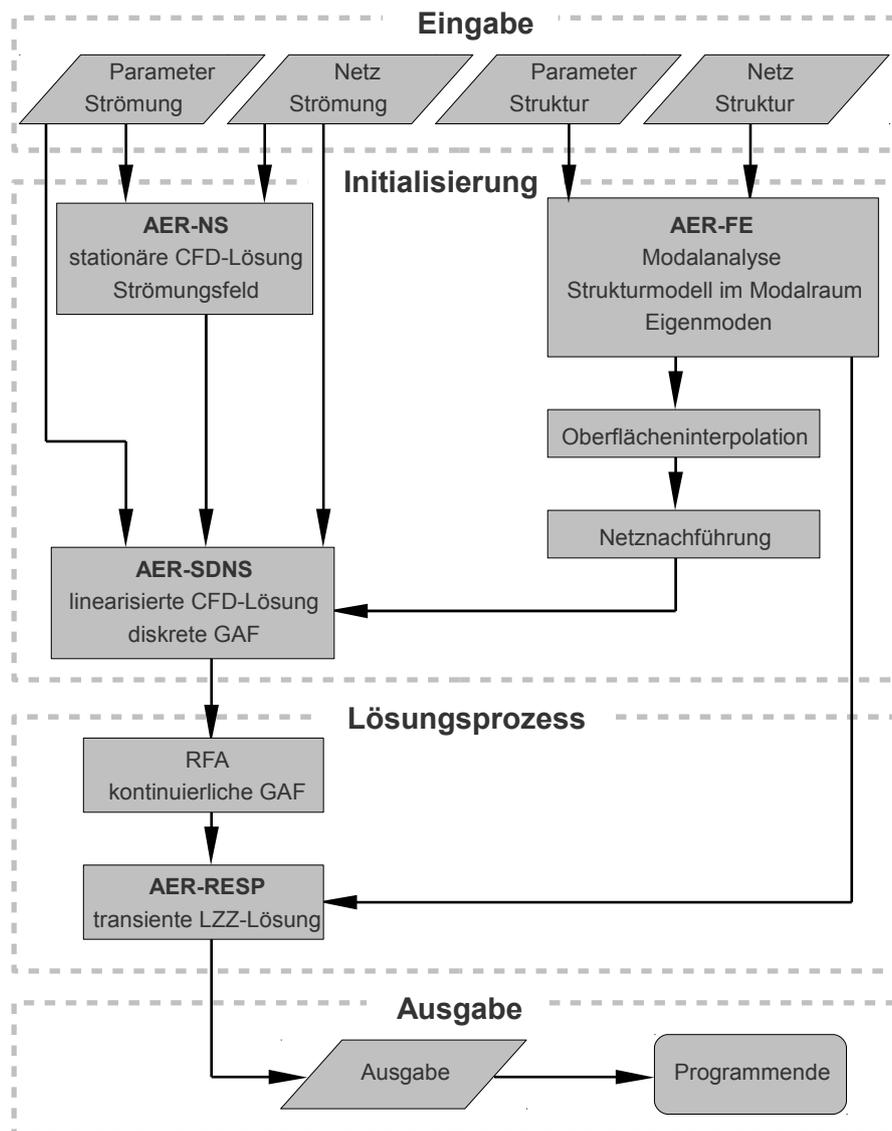


Abbildung 2.5: Programmablaufplan der Antwortanalyse



# Stabilitätsproblem - Flutteranalyse

Das wesentliche Ziel der Flutteranalyse ist die Vorhersage der kritischen Flutterbedingungen, über die sich die Grenze zwischen stabilem und instabilem Verhalten des aeroelastischen Systems definiert. In den folgenden Unterkapiteln werden die im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit diesem Ziel entwickelten Programme an zwei Testfällen validiert, für die sowohl ein aerodynamisches Modell, als auch ein Strukturmodell entwickelt wurden. Der erste Testfall ist ein Flügel kleiner Streckung (Windkanalmodell AGARD 445.6), der für supersonische Anströmgeschwindigkeiten ausgelegt ist. Für dieses Modell wurde die Stabilitätsanalyse auf Basis einer klassischen Flutteranalyse im Frequenzbereich und in Form von nichtlinearen, im Zeitbereich gekoppelten Simulationen für einen großen Machzahlbereich durchgeführt. Der zweite Testfall ist ein Flügel großer Streckung (Windkanalmodell HIRENASD), der für transsonische Anströmgeschwindigkeiten ausgelegt ist. Für diese Konfiguration stellt sich unter den gewählten transsonischen Anströmbedingungen eine bedeutende statische Verformung ein. Aufbauend auf diesem Ergebnis wird die Vorhersagequalität des linearisierten und des nichtlinearen Strömungslösers für einen dynamischen Schwingungsvorgang untersucht. Abschließend kommen auch für diesen Testfall lineare und nichtlineare Methoden mit dem Ziel zum Einsatz, das Stabilitätsverhalten des untersuchten aeroelastischen Systems beurteilen zu können. Die Ergebnisse werden in beiden Testfällen mit experimentell ermittelten Daten verglichen.

## 3.1 Flügel kleiner Streckung

In den 1960er Jahren wurden im Transonic Dynamics Tunnel des NASA Langley Research Centers in Hampton, Virginia, Flutteruntersuchungen durchgeführt, die unter dem Namen "AGARD 445.6 dynamic aeroelastic test cases" bekannt sind [163]. Im Rahmen dieser Experimente sind sowohl subsonische, als auch supersonische Windkanalversuche in den Strömungsmedien Luft und Freon-12 an verschiedenen Konfigurationen ausgewertet worden. Der AGARD 445.6-Testfall ist ein gepfeilter Flügel kleiner Streckung, der fest in der Windkanalwand eingespannt ist. Der Anstellwinkel gegenüber der freien Anströmung beträgt  $\alpha = 0^\circ$ . Die Geometrie des AGARD 445.6-Flügels ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Profilform des Windkanalmodells entspricht über die gesamte Spannweite einem NACA65A004-Profil. Dieses Profil ist symmetrisch und verfügt über eine relative Dicke von  $d/c = 4\%$ . Der Pfeilungswinkel der 1/4-Punkt-Linie beträgt  $\phi_{1/4} = 45^\circ$ . Weitere geometrische Eigenschaften des AGARD 445.6-Flügels sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Ergebnisse gelten ausschließlich für den "weakened model 3"-Testfall in Luft. Dieses Windkanalmodell wurde aus laminierten Mahagoni-Lagen gefertigt und anschließend mit Bohrungen versehen, um die Steifigkeit des Modells zu reduzieren. Damit die aerodynamischen Eigenschaften des Flügels erhalten bleiben, sind die Löcher mit einem Schaum ausgefüllt. Die Faserrichtung der Mahagoni-

Lagen ist unter einem Winkel von  $45^\circ$  bezüglich der Flügelwurzel verdreht, was in Folge der orthotropen Materialeigenschaften des Werkstoffs bei der Modellierung der Struktur zu berücksichtigen ist. Die Materialeigenschaften beruhen teilweise auf den mithilfe eines Optimierungsalgorithmus an die modalen Eigenschaften der realen Struktur angepassten Werten aus [92], sowie den im Experiment ermittelten Daten [163] und sind in Tabelle 3.2 aufgelistet. Für den “weakened model 3”-Testfall wurden Anströmmachzahlen von  $M_\infty = 0,499$  bis  $M_\infty = 1,141$  untersucht.

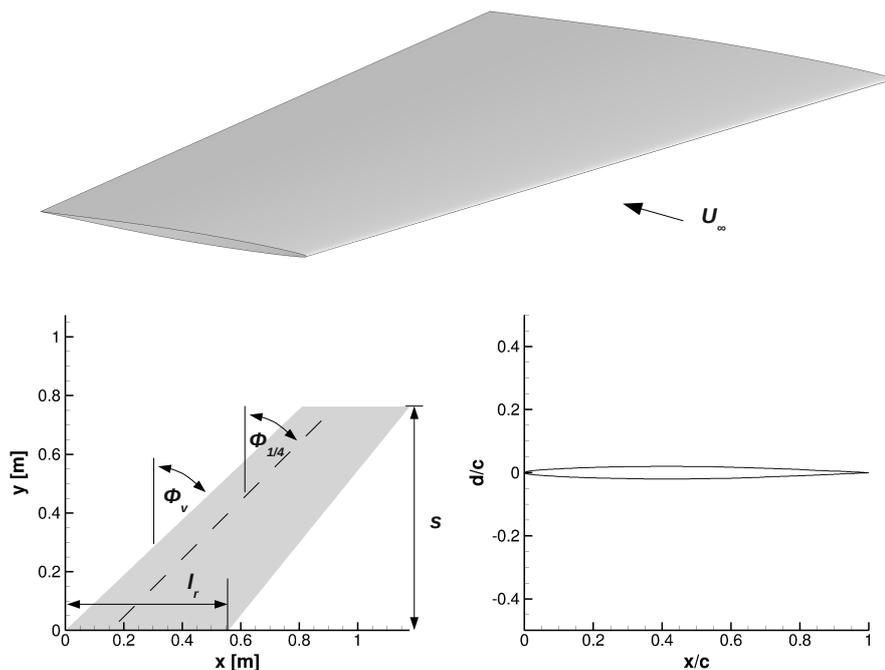


Abbildung 3.1: Geometrie des AGARD 445.6-Flügels [53]

Halbspannweite $s$	762 mm
Flügeltiefe an der Flügelwurzel $l_r$	558,7 mm
Streckung $\Lambda$	1,65
Zuspitzung $\lambda$	0,66
Vorderkantenpfeilung $\phi_v$	$46,3^\circ$
Pfeilung der 1/4-Punkt-Linie $\phi_{1/4}$	$45^\circ$
relative Profildicke $d/c$	4 %

Tabelle 3.1: Geometrische Eigenschaften des AGARD 445.6-Flügels [163], [53]

### 3.1.1 Numerische Modellierung

Voraussetzung für die Durchführung von aeroelastischen Simulationen ist die Bereitstellung geeigneter numerischer Modelle. Zur Erstellung des Strukturmodells wird der Löser AER-FE verwendet. Dieser liefert ein Modell im Modalraum und ermöglicht somit eine effiziente Beschreibung der dynamischen elastischen Systemeigenschaften. Der AGARD

Elastizitätsmodul in Faserlängsrichtung $E_{11}$	3,1511 GPa
Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserlängsrichtung $E_{22}$	0,4162 GPa
Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserlängsrichtung $E_{33}$	0,4162 GPa
Winkel der Faserrichtung gegenüber der freien Anströmung $\phi$	45°
Schubmodul $G$	0,4392 GPa
Querdehnzahl $\nu$	0,31
Dichte $\rho$	381,98 kg/m <sup>3</sup>

Tabelle 3.2: Materialeigenschaften des AGARD 445.6-Flügels [163], [92], [53]

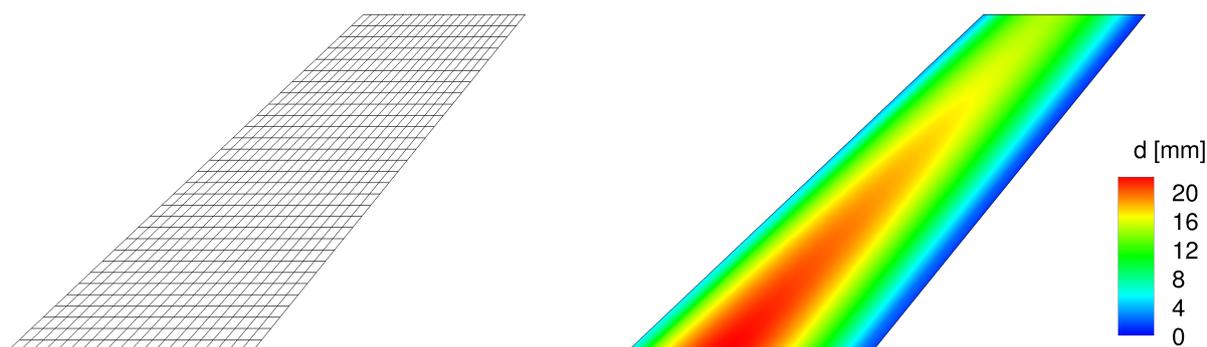


Abbildung 3.2: Diskretisierung des AGARD 445.6-Strukturmodells; links: FEM-Netz; rechts: Dickenverteilung

445.6-Flügel wird mit 600 Kirchhoff-Plattenelementen entsprechend Abbildung 3.2 diskretisiert. Die Dickenverteilung des Flügels ist an die geometrische Dickenverteilung der Tragflächenprofilform angepasst worden, wobei die resultierende Gesamtmasse des numerischen Strukturmodells mit  $m = 1,86 \text{ kg}$  exakt der Masse des Windkanalmodells entspricht. Die reale Struktur wird mithilfe der fünf ersten Eigenmoden, basierend auf der in Tabelle 3.2 gegebenen, teilweise durch Optimierungsalgorithmen angepassten [92] Materialeigenschaften, numerisch abgebildet. Der AGARD 445.6-Flügel ist am mittleren Abschnitt der Flügelwurzel eingespannt, das heißt, die Knoten an der Vorder- und an der Hinterkante bleiben frei beweglich. Es resultieren 3190 Modellfreiheitsgrade, die im Rahmen der Modalanalyse auf fünf generalisierte Freiheitsgrade reduziert werden. Die Abbildungen 3.3 bis 3.6 zeigen die Verformungen der ersten vier Eigenmoden und in Tabelle 3.3 sind die korrespondierenden Eigenfrequenzen aufgelistet. Als Ergebnis der Modalana-

Mode	Schwingungsform	Eigenfrequenz in [Hz]	
		Experiment [163]	FEM
1	1. Schlagbiegung	9,60	9,64
2	1. Torsion	38,17	37,88
3	2. Schlagbiegung	48,35	48,84
4	2. Torsion	91,54	97,74
5	3. Schlagbiegung	118,11	123,49

Tabelle 3.3: Eigenfrequenzen des AGARD 445.6-Flügels [53]

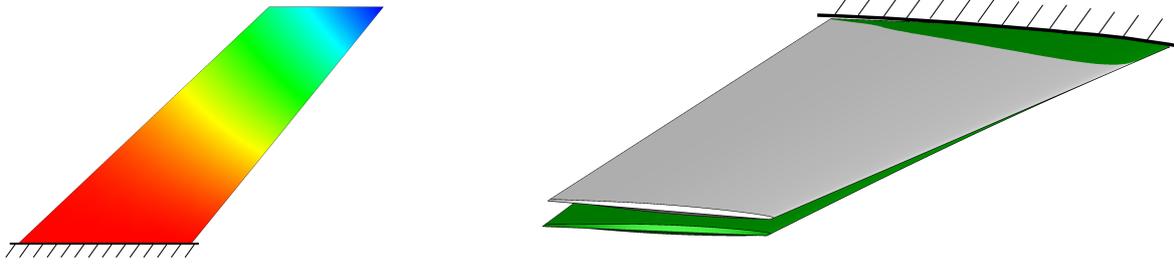


Abbildung 3.3: 1. Biegemode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53]

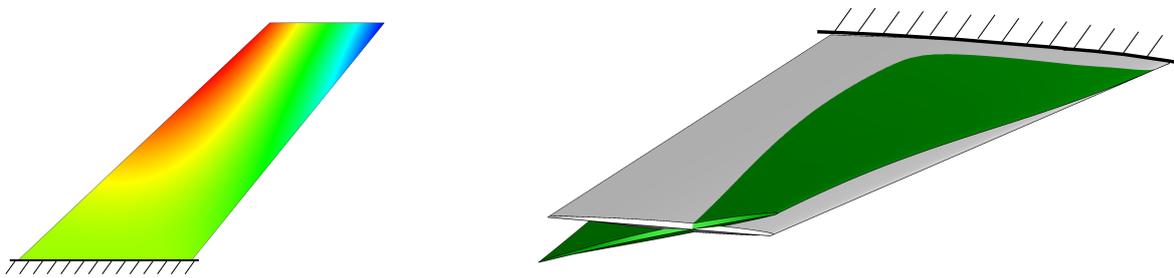


Abbildung 3.4: 1. Torsionsmode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53]

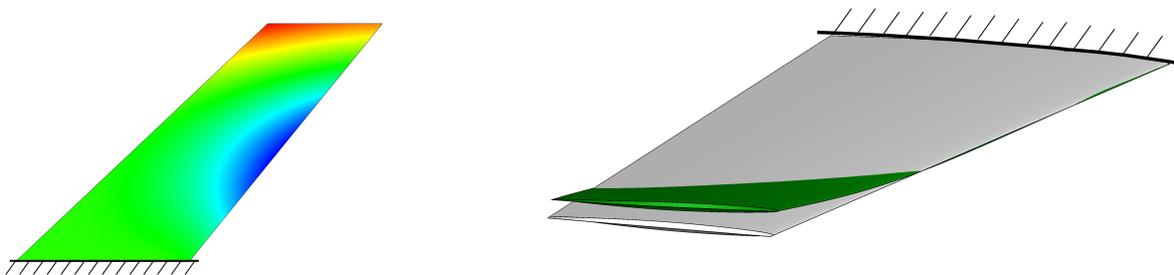


Abbildung 3.5: 2. Biegemode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53]

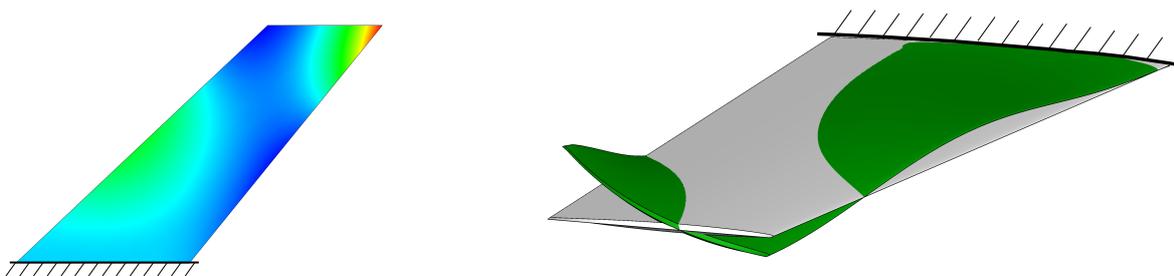


Abbildung 3.6: 2. Torsionsmode des AGARD 445.6-Strukturmodells [53]

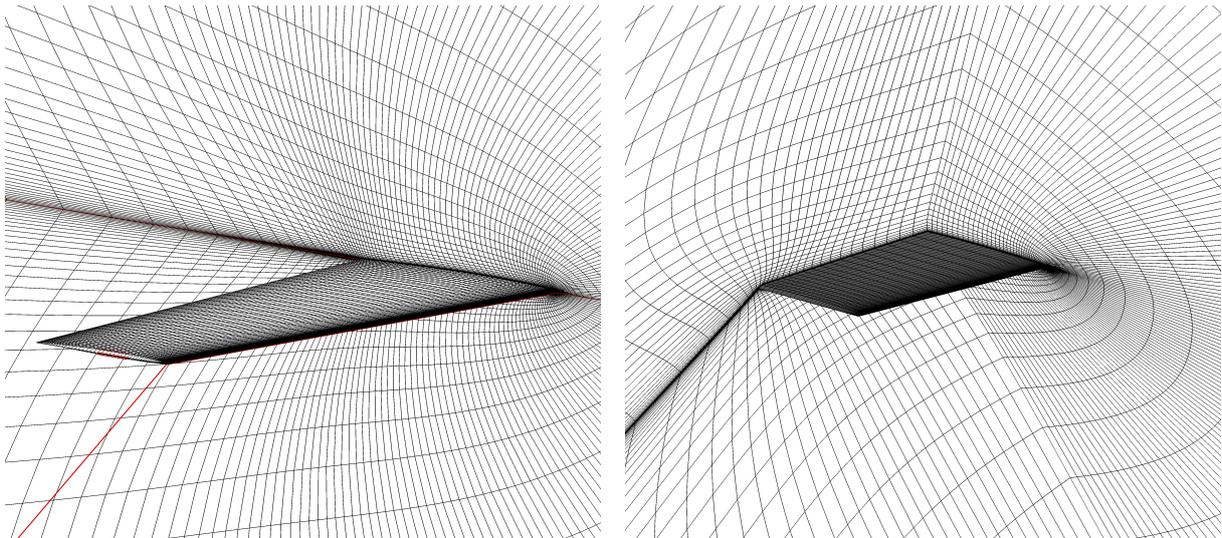


Abbildung 3.7: Diskretisierung des Strömungsraums um die AGARD 445.6-Konfiguration; links: Netztopologie und Oberflächennetz; rechts: Netzschnitt und Oberflächennetz im Bereich der Tragflügelspitze [53]

lyse ergeben sich die ersten drei Schlagbiegemoden und die ersten zwei Torsionsmoden. Die linke Seite der Abbildungen 3.3 bis 3.6 zeigen eine Falschfarbendarstellung der Auslenkungen normal zur Flügelebene. Auf den rechten Seiten der Abbildungen wurden die Eigenmoden auf das CFD-Oberflächennetz projiziert (grün) und mit der unausgelenkten Referenzlage verglichen. Die zugehörigen Eigenfrequenzen sind in ihren Absolutwerten deutlich voneinander getrennt. Der Vergleich der Eigenfrequenzen mit experimentellen Daten [163] liefert eine sehr gute Übereinstimmung. Lediglich die Eigenfrequenz der zweiten Torsionsmode wird etwas überschätzt.

Um für die AGARD 445.6-Konfiguration Strömungssimulationen durchführen zu können, müssen die Strukturoberfläche und der angrenzende Strömungsraum diskretisiert werden. Die Oberflächegeometrie des realen Windkanalmodells möglichst genau zu erfassen, stellt im Gegensatz zur Strukturmodellierung ein primäres Ziel dar. Folglich ergeben sich zwei voneinander abweichende Oberflächendiskretisierungen. Damit die vom Strukturlöser, als auch vom Strömungslöser benötigten Größen zwischen beiden Modellen ausgetauscht werden können, findet die Oberflächeninterpolation mithilfe der TPS-Methode Anwendung. Die Netznachführung wird mit der TFI-Methode realisiert. Das strukturierte CFD-Volumennetz besteht aus zwei Blöcken, die den AGARD 445.6-Flügel mit einer C-H-Topologie umschließen. Dazu ist das Tragflächenprofil an der Flügelspitze mit einem keilförmigen Abschluss geschlossen worden. Die in Abbildung 3.7 dargestellte Flügeloberfläche wird mit  $144 \times 48$  Zellen aufgelöst, was bei einer für das Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell geforderten Grenzschichtauflösung von  $y^+ < 6$  zu einer Gesamtanzahl von ca. 559000 Netzpunkten führt. Die an die Flügelwurzel angrenzende Fläche ist mit einer Symmetrierandbedingung beaufschlagt und der Abstand der Fernfeldbegrenzung beträgt etwa zehn Halbspannweiten von der Flügeloberfläche. Eine entsprechende Netzkonvergenzstudie ist in [50] zu finden.

### 3.1.2 Statische Analyse

Für den AGARD 445.6-Flügel liegen sowohl bei subsonischen, als auch bei trans- und supersonischen Strömungsbedingungen experimentell ermittelte Flutterpunkte vor [163]. Eine in dieser Arbeit untersuchte Auswahl der Anströmbedingungen, für die experimentelle Daten des Testfalls “weakened model 3” verfügbar sind, ist in Tabelle 3.4 gegeben. In diesem Kapitel werden zunächst die stationären Simulationsergebnisse diskutiert, bevor diese in den dynamischen Simulationen als Referenz- oder Anfangslösungen weiterverwendet werden. In den Abbildungen 3.8 und 3.9 sind die Verläufe des Druckbeiwerts in den drei Profilschnitten  $\eta = 0,3$ ,  $\eta = 0,6$  und  $\eta = 0,9$  für die in Tabelle 3.4 aufgelisteten Machzahlen dargestellt. Die angegebenen Reynoldszahlen sind mit der Flügelwurzeltiefe  $l_r$  gebildet worden.

Machzahl $M_\infty$	Dichte $\rho_\infty$ in $kg/m^3$	Reynoldszahl $Re$
0,499	0,4278	2244905
0,678	0,2082	1494972
0,901	0,0995	968456
0,960	0,0634	661977
1,072	0,0551	641039
1,141	0,0783	983704

Tabelle 3.4: Anströmbedingungen der für den AGARD 445.6-Flügel untersuchten Testfälle [53]

Verglichen wird jeweils die Lösung der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Simulation. Aufgrund der symmetrischen Tragflächenprofilform und dem Anstellwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  bildet sich keine statische aeroelastische Verformung aus. Demzufolge sind die Druckverläufe auf der Tragflügelober- und -unterseite für alle Graphen identisch. Bedingt durch die geringe Profildicke können bis einschließlich der Machzahl  $M_\infty = 0,901$  keine Überschallgebiete beobachtet werden und die resultierenden Druckverläufe sind folglich qualitativ sehr ähnlich. Auch der Reibungseinfluss ist nur unmittelbar an der Flügelhinterkante erkennbar, wo sich für die reibungsfreie Lösung etwas größere Drücke ergeben. Ab einer Machzahl  $M_\infty = 0,960$  wird der kritische Druckbeiwert unterschritten, so dass lokale Überschallgebiete auftreten. Abbildung 3.10 zeigt diese Überschallgebiete für die reibungsbehaftete Lösung in drei Flügelschnitten und außerhalb der Grenzschicht nahe der Flügeloberfläche. Auf dem inneren Flügelabschnitt formiert sich bei etwa 70% der lokalen Flügeltiefe ein gerader Verdichtungsstoß. Für die reibungsfreie Lösung ist dieser Stoß stärker als im reibungsbehafteten Fall und es ergeben sich stromabwärts Unterschiede im Druckverlauf. Im äußeren Flügelabschnitt erfolgt die Rekompensation stoßfrei. In Abbildung 3.9 sind die Druckverteilungen bei supersonischer Anströmgeschwindigkeit über die Profiltiefe aufgetragen. Die Rekompensation erfolgt für  $M_\infty = 1,072$  auf dem kompletten Flügel über einen schiefen Verdichtungsstoß. Dieser ist bei der Flügelwurzel direkt an der Hinterkante positioniert und wandert in Richtung der Flügelspitze stromaufwärts, bis auf ca. 50% der lokalen Flügeltiefe. Im reibungsbehafteten Fall ist der Stoß auf der Flügeloberfläche deutlich weniger stark ausgeprägt als im reibungsfreien Fall. Bei der höchsten simulierten Machzahl von  $M_\infty = 1,141$  nimmt die Stoßstärke weiter zu und der Stoß wandert in Richtung der Tragflügelhinterkante. Dementsprechend sind stromab der Stoßlage auch die Unterschiede zwischen den Lösungen größer.

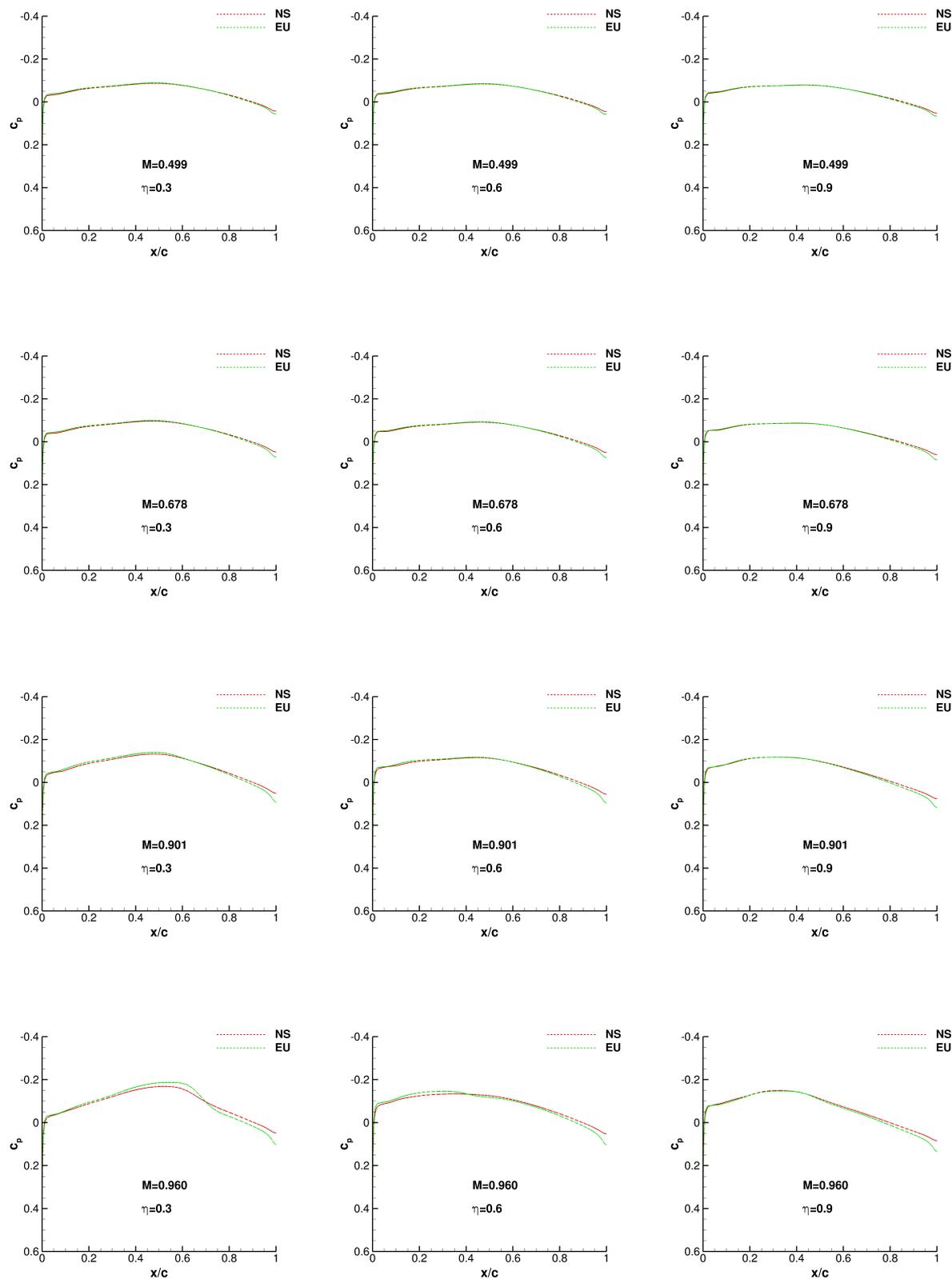


Abbildung 3.8: Vergleich der stationären Druckverteilungen in drei verschiedenen Profilschnitten  $\eta$  am AGARD 445.6-Flügel zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Simulation für verschiedene Machzahlen  $M_\infty < 1$  bei  $\alpha = 0^\circ$

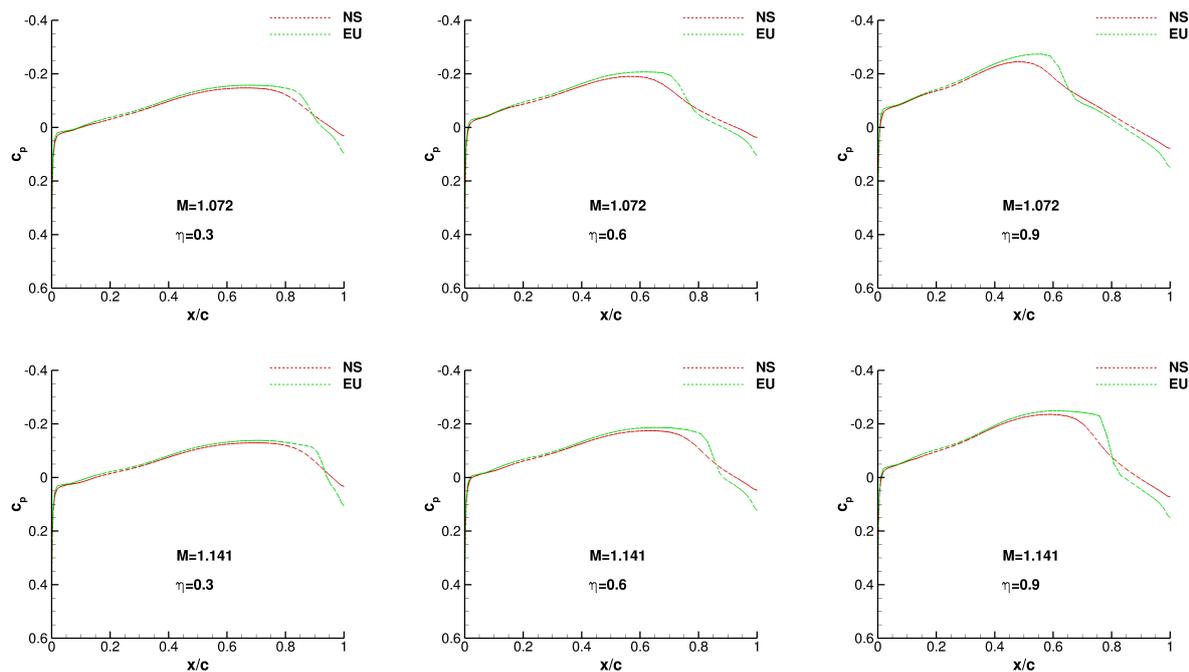


Abbildung 3.9: Vergleich der stationären Druckverteilungen in drei verschiedenen Profilschnitten  $\eta$  am AGARD 445.6-Flügel zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS) Simulation für verschiedene Machzahlen  $M_\infty > 1$  bei  $\alpha = 0^\circ$

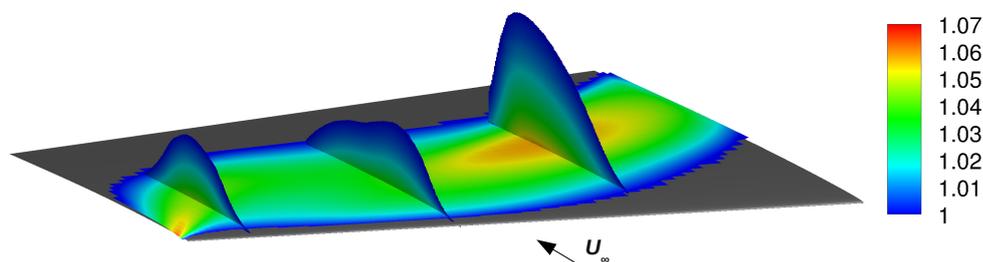


Abbildung 3.10: Überschallgebiet am AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,960$  und  $\alpha = 0^\circ$

### 3.1.3 Flatteranalyse im Zeit- und Frequenzbereich

Die Flatteranalyse kann zum einen in Anlehnung an den klassischen linearisierten Analyseprozess im Frequenzbereich (siehe 2.5.2) und zum anderen anhand von nichtlinear gekoppelten Simulationen im Zeitbereich (siehe 2.4) erfolgen. Beide Vorgehensweisen werden im Folgenden angewendet, um die dynamische aeroelastische Stabilitätsgrenze des AGARD 445.6-Flügels zu ermitteln. Die Bewertung der einzelnen Methoden erfolgt auf der Grundlage des Vergleichs mit experimentell ermittelten Flatterpunkten für die in Tabelle 3.4 aufgelisteten Anströmbedingungen.

Der klassische Flatteranalyseprozess, wie er in Abbildung 2.4 dargestellt ist, beinhaltet die Bestimmung der auf den elastischen Struktureigenmoden basierenden GAF. Die GAF sind im Rahmen dieser Arbeit mit vier verschiedenen Simulationsmethoden zur Modellierung der instationären Strömungsmechanik berechnet worden. Diese Methoden umfassen die Lösung der reibungsfreien Eulergleichungen (EU) und die Lösung der reibungsbe-

hafteten RANS-Gleichungen (NS). Außerdem sind jeweils linearisierte Simulationen im Frequenzbereich unter Verwendung des Löser AER-SDNS (EU SD, NS SD) und nichtlineare Simulationen im Zeitbereich unter Verwendung des Löser AER-NS (EU, NS) mit anschließender Fourieranalyse durchgeführt worden. Berücksichtigt werden die ersten fünf Struktureigenmoden entsprechend Tabelle 3.3. In den Abbildungen 3.11 bis 3.16 sind die Verläufe der GAF für alle sechs untersuchten Machzahlen über die reduzierte Frequenz aufgetragen. Die reduzierte Frequenz wurde in dieser Darstellung mit der Bezugslänge  $l_{ref} = 1\text{ m}$  gebildet. In dem für Flattererscheinungen relevanten Frequenzbereich  $k_{red} < 1$  ist die Frequenzschrittweite kleiner gewählt worden. Die entsprechend der Eigenformen ausgelenkten Netze dienen als Auslenkungsamplitude für den linearisierten Strömungslöser, beziehungsweise für den linearen Interpolationsalgorithmus im nichtlinearen Strömungslöser. Weil die aus der Modalanalyse resultierenden Struktureigenformen frei skalierbar sind und die Annahme kleiner Störungen erfüllt sein muss, ist die maximale lokale Auslenkung der Eigenmoden normal zur Flügelfläche auf ca. 3% der Flügelwurzeltiefe beschränkt. Die in den Abbildungen 3.11 bis 3.16 dargestellten GAF sind im Anschluss an die Strömungssimulation wieder so skaliert worden, dass sie zu den massennormierten Eigenvektoren passen. Die abgebildeten GAF sind auf die Kopplungsterme zwischen der ersten Biege- und Torsionsmode beschränkt, weil der Flatterprozess durch die Kopplung dieser beiden Moden eingeleitet wird. Grundsätzlich lässt sich für alle Graphen beobachten, dass die GAF quantitativ in der gleichen Größenordnung liegen. Die Übereinstimmung der linearisierten Methoden kleiner Störungen mit den nichtlinearen Zeitschrittverfahren ist über den kompletten Machzahlbereich sehr gut. Das liegt vor allem an der geringen Dicke des AGARD 445.6-Profiles und der damit verbundenen linearen Stoßwanderung, die durch den linearen Löser erfasst wird. Der Vergleich der reibungsfreien und reibungsbehafteten Methoden zeigt für beide Löser dieselben Charakteristiken. Für die Machzahl  $M_\infty = 0,499$  stimmen die Realteile der GAF sehr gut überein. Mit zunehmender Machzahl werden die Unterschiede analog zu den Beobachtungen bei den stationären Ergebnissen größer. Dieser Trend tritt vor allem für die GAF auf, die aus der Simulation harmonischer Schwingungen in der ersten Torsionsmode stammen. Der Grund dafür liegt zum einen in den größeren Stoßbewegungen in Folge der Anstellwinkeländerung und zum anderen in der Tatsache, dass im stationären Fall hauptsächlich Unterschiede bezüglich der Stoßintensität, bedingt durch Viskositätseffekte, festgestellt wurden. Zum anderen wandert der Neutralpunkt des Flügels im Überschallbereich nach hinten, was zu einer Abnahme des Realteils von GAF 22 führt [99]. Im Fall der RANS-Lösung wird dieser Effekt verzögert. Der Imaginärteil der GAF stimmt für die reibungsfreie und die reibungsbehaftete Lösung bei den relevanten reduzierten Frequenzen  $k_{red} < 1$  sehr gut überein. Für größere reduzierte Frequenzen werden die Abweichungen mit abnehmender Machzahl etwas größer, wobei man insgesamt sowohl für den Realteil, als auch für den Imaginärteil von guter Übereinstimmung aller Methoden sprechen kann. Für den funktionalen Zusammenhang der GAF bezüglich der reduzierten Frequenz lässt sich für Frequenzen  $k_{red} > 2$  eine streng monotone Abhängigkeit aller betrachteten GAF beobachten. Dabei kommt es im Realteil von GAF 11 und von GAF 22 mitunter zu Vorzeichenwechseln. Bei reduzierten Frequenzen  $k_{red} < 2$  ergibt sich vor allem im Fall von GAF 21 ein nichtmonotoner Verlauf über der reduzierten Frequenz.

Bestätigt werden die diskutierten Ergebnisse durch die in Abbildung 3.17 exemplarisch für  $k_{red} = 1,0$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0,960$  (links) und  $M_\infty = 1,141$  (rechts) dargestellten Lissajousfiguren. Man sieht, dass die Strömungsantwort auf die Strukturschwingung nach der ersten Schwingungsperiode eingeschwungen ist und deren Form einer Ellipse gleicht. Diese Form kann durch die erste Harmonische der Fourieranalyse exakt abgebildet wer-

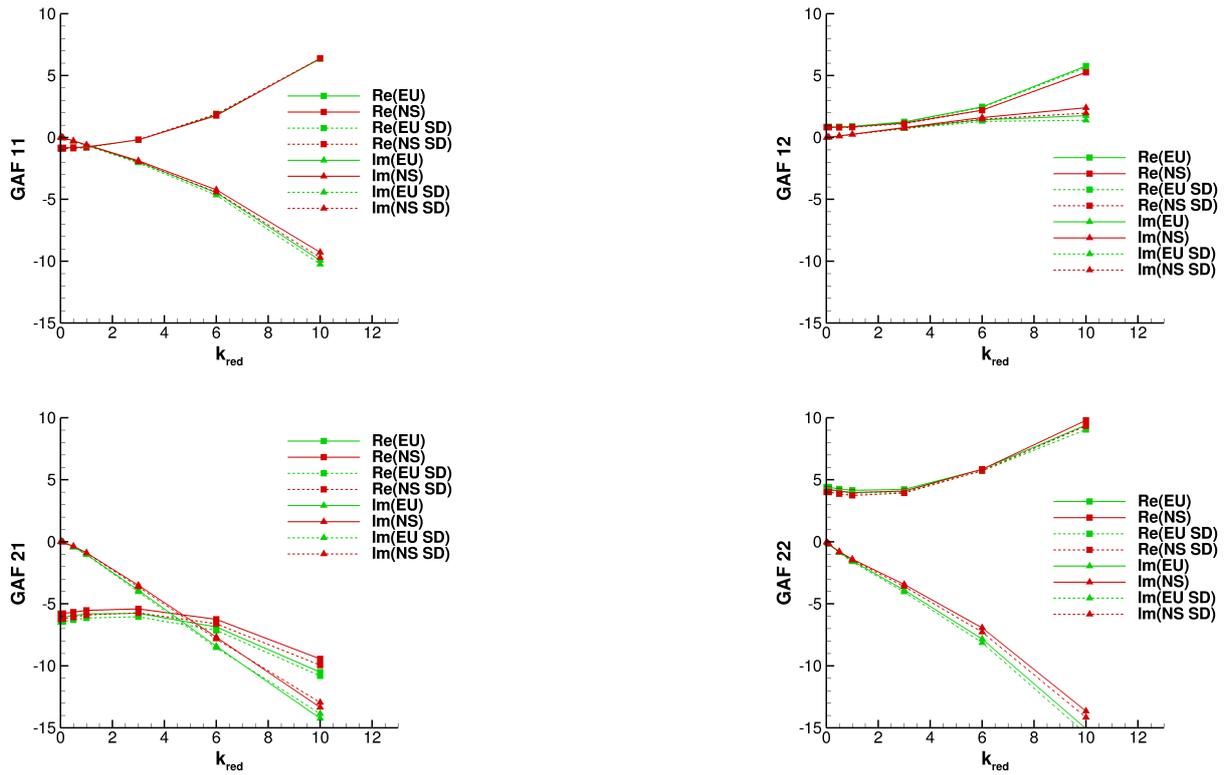


Abbildung 3.11: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,499$  und  $\alpha = 0^\circ$

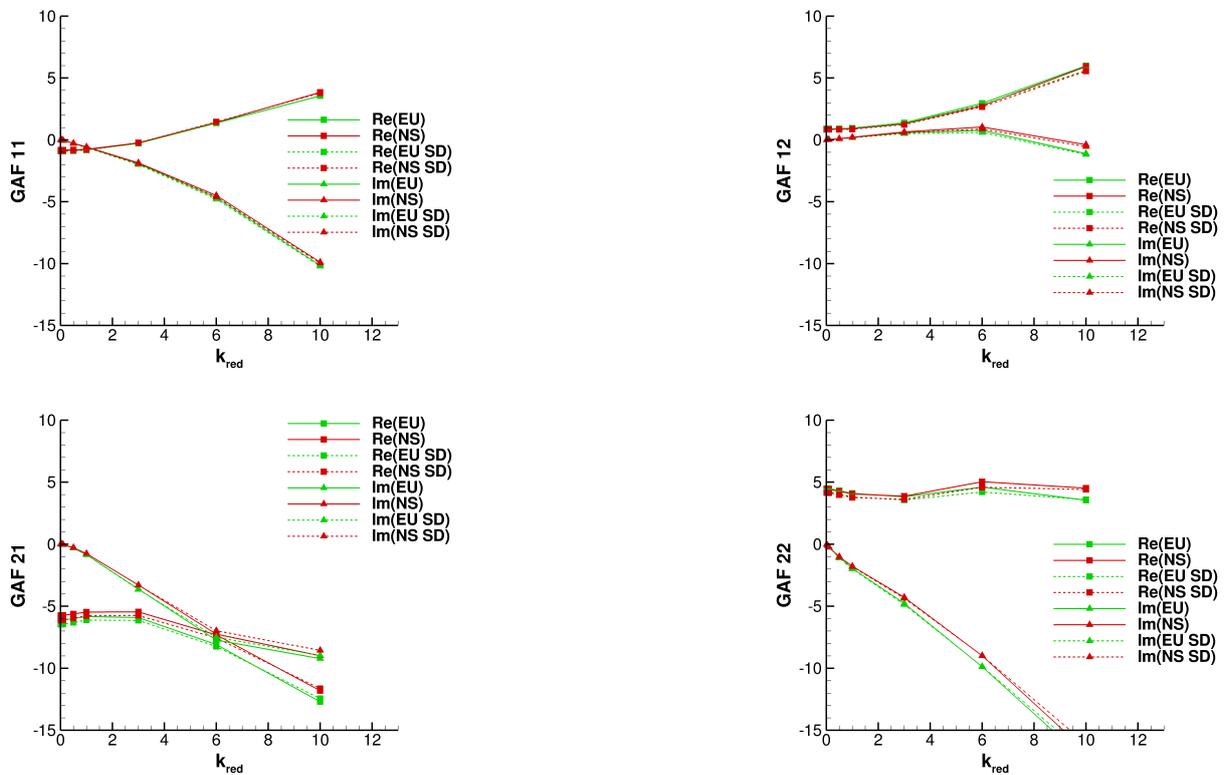


Abbildung 3.12: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,678$  und  $\alpha = 0^\circ$

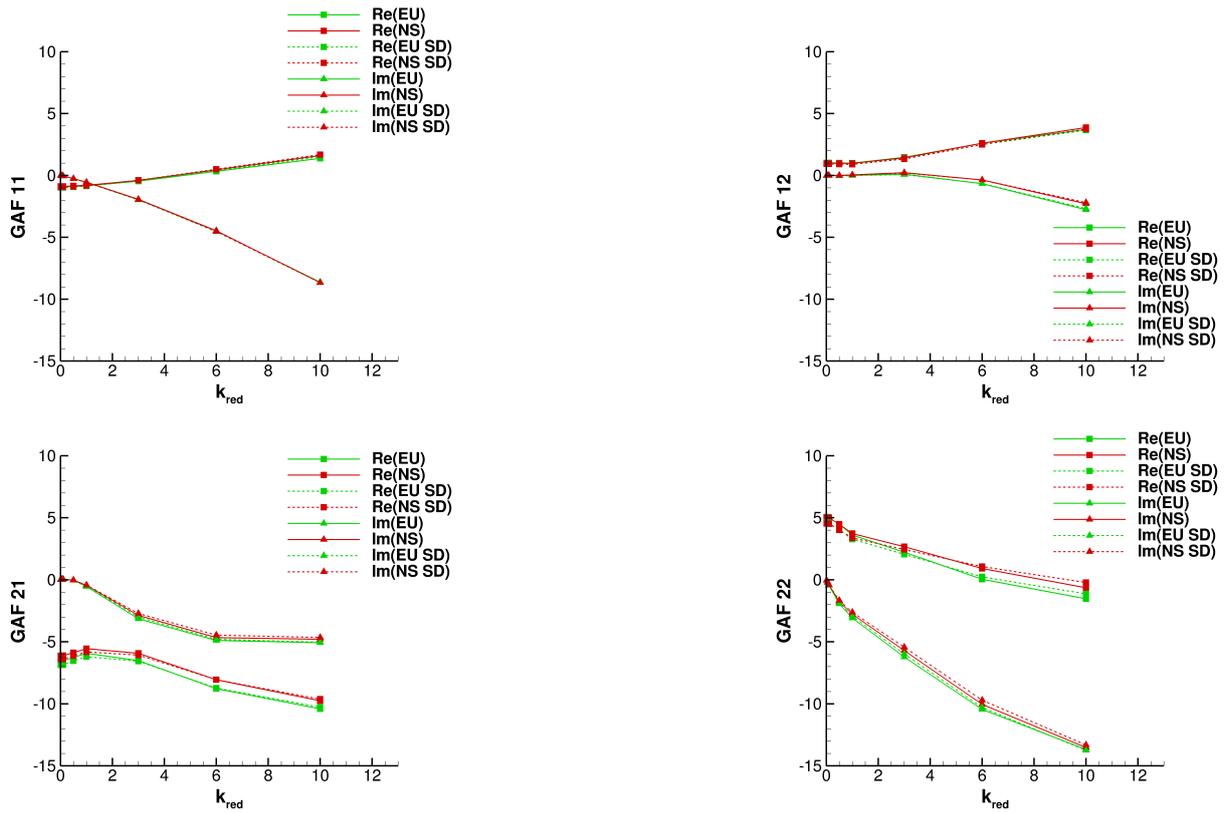


Abbildung 3.13: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,901$  und  $\alpha = 0^\circ$

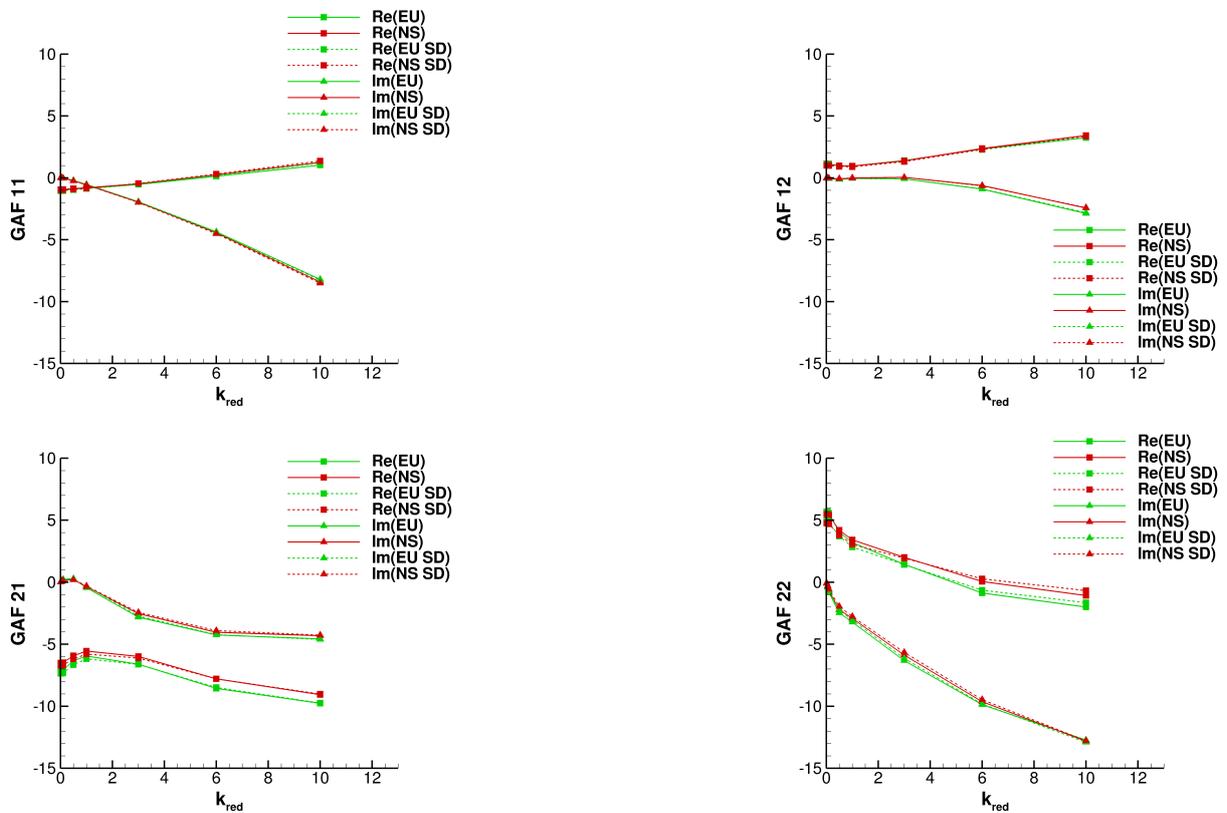


Abbildung 3.14: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,960$  und  $\alpha = 0^\circ$

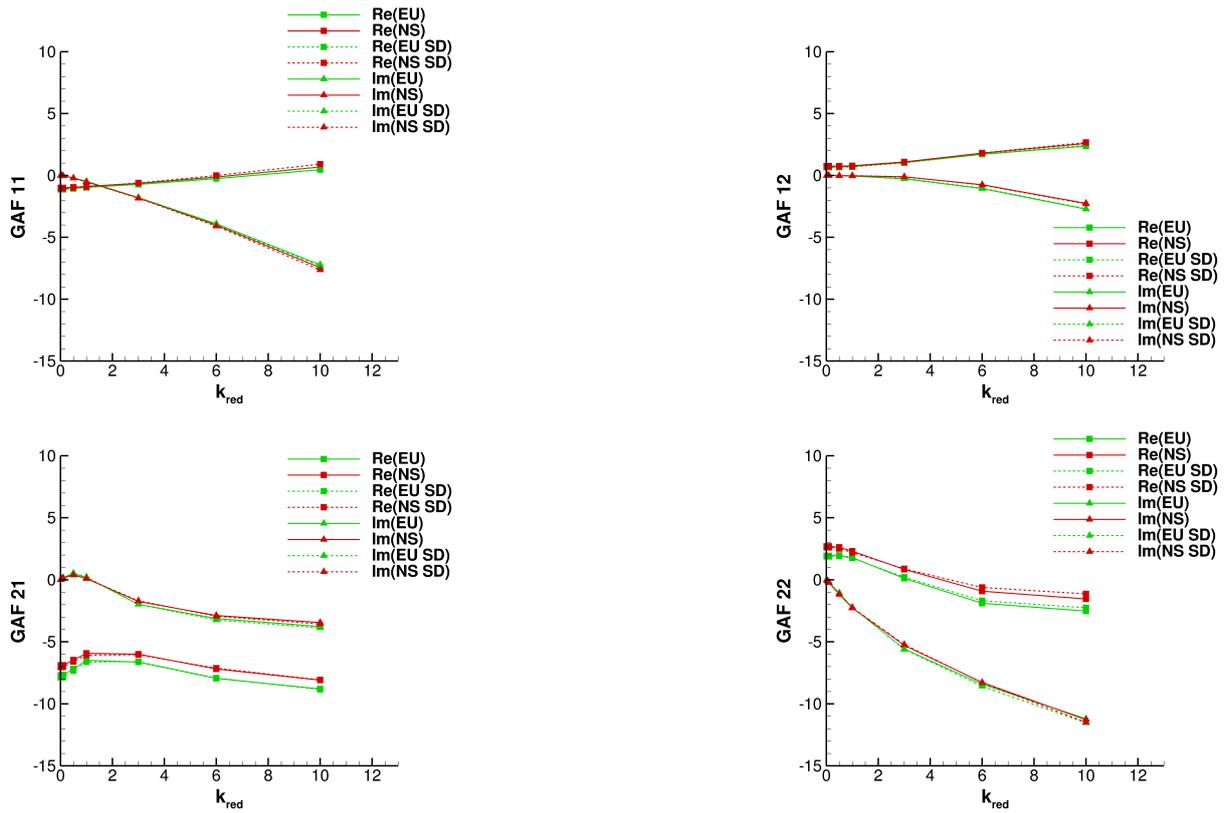


Abbildung 3.15: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 1,072$  und  $\alpha = 0^\circ$

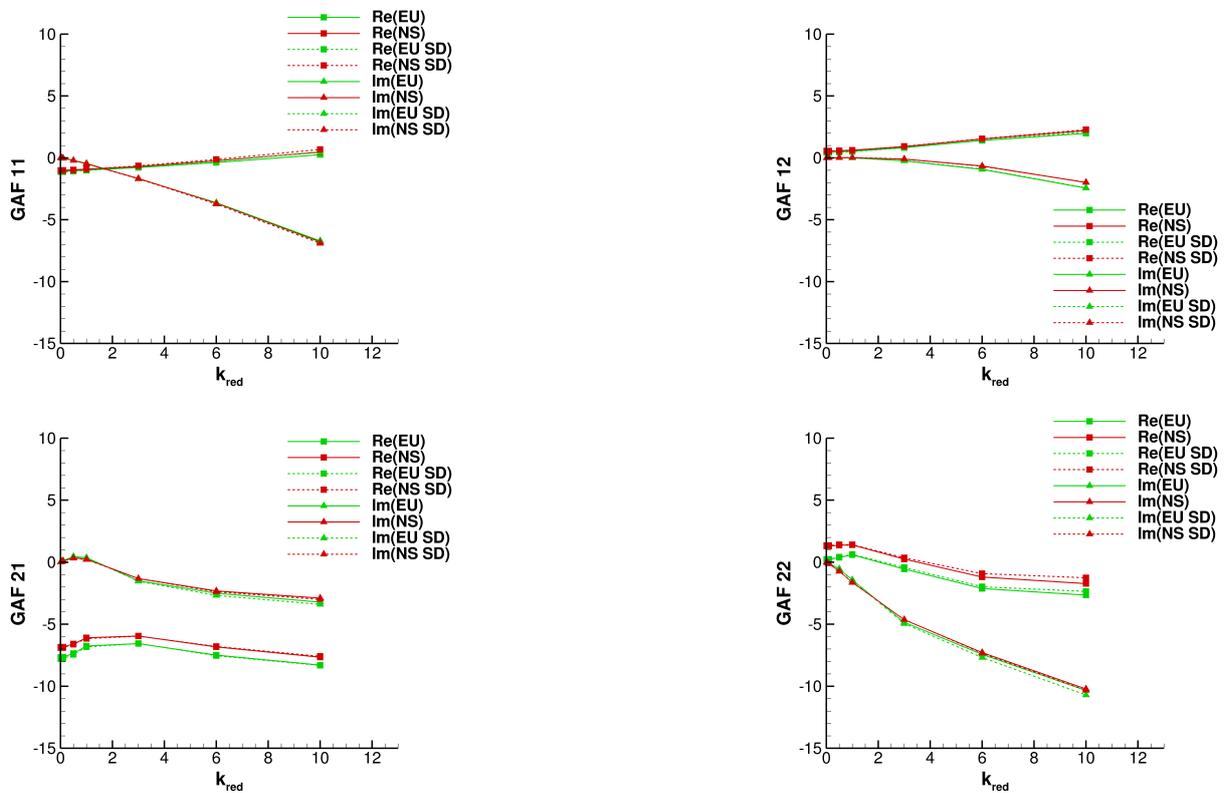


Abbildung 3.16: GAF der ersten Biege- und Torsionsmode in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 1,141$  und  $\alpha = 0^\circ$

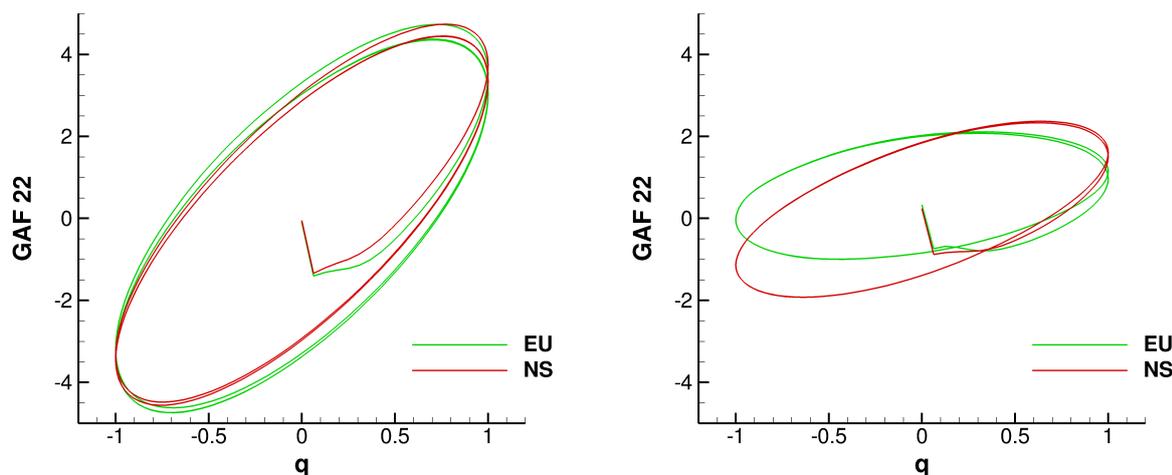


Abbildung 3.17: Lissajousfigur von den GAF der ersten Torsionsmode für den AGARD 445.6-Flügel bei  $k_{red} = 1,0$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0,960$  (links) und  $M_\infty = 1,141$  (rechts)

den, was die gute Übereinstimmung zwischen den nichtlinearen und den linearisierten Simulationsergebnissen bestätigt. Außerdem ist die Amplitude der Schwingung bei der größeren Machzahl deutlich kleiner, was sich in der Abnahme des Luftkraftrealteils widerspiegelt. Der Einfluss von Reibungseffekten auf Real- und Imaginärteil der GAF im Überschallbereich ist deutlich zu sehen.

Die GAF bilden zusammen mit der modalen Massen- und Steifigkeitsmatrix die Eingangswerte für den Flutterlöser. Weil keine experimentellen Daten bezüglich der strukturellen Dämpfung vorliegen, wird diese in den Simulationen vernachlässigt. Mit dem Flutterlöser können anschließend die kritischen Flattergeschwindigkeiten bestimmt werden. Eine Voraussetzung für die Genauigkeit der Vorhersage ist, dass die GAF unter Anströmbedingungen ermittelt wurden, die möglichst nah bei den kritischen Flatterbedingungen liegen. Das heißt, die gegebene Machzahl und Luftdichte sollten zusammen mit der Flattergeschwindigkeit möglichst die thermodynamische Zustandsgleichung erfüllen. Für die klassische Flatteranalyse am AGARD 445.6-Flügel ist die g-Methode eingesetzt worden. Die Abbildung 3.18 zeigt die typischen Geschwindigkeits-Dämpfungs- (V-g-) und Geschwindigkeits-Frequenz- (V-f-) Diagramme am Beispiel der Machzahl  $M_\infty = 0,901$ . Bei sehr kleinen Anströmgeschwindigkeiten entsprechen die Schwingungsfrequenzen der fünf betrachteten Eigenmoden den aus der Modalanalyse resultierenden Eigenfrequenzen. Mit zunehmender Anströmgeschwindigkeit verschieben sich die Frequenzen kontinuierlich zu anderen Werten. Die Frequenzverläufe der ersten und der zweiten Mode nähern sich ab einer Geschwindigkeit von  $V = 200 \text{ m/s}$  einander an, bis sie bei ca.  $V = 400 \text{ m/s}$  mit der gleichen Frequenz schwingen. Aus dieser Annäherung der Frequenzen folgt eine Kopplung zwischen der ersten Biege- und der ersten Torsionsmode. Der Verlauf der Dämpfung über der Anströmgeschwindigkeit weist einen Nulldurchgang der Dämpfung bei einer Geschwindigkeit von  $V = 286 \text{ m/s}$  auf. Ab dieser Anströmgeschwindigkeit nimmt die Struktur genug Energie aus der Strömung auf, dass es zu einer Anfachung der Strukturschwingung kommt. Da die Kopplung zwischen der ersten Biege- und der ersten Torsionsmode erfolgt, liegt für den AGARD 445.6-Flügel klassisches Biege-Torsions-Flattern vor. Die V-g- und V-f-Diagramme der übrigen in Tabelle 3.4 gegebenen Machzahlen zeigen einen qualitativ

ähnlichen Verlauf von Dämpfung und Frequenz über der Geschwindigkeit. Folglich liegt für alle betrachteten Machzahlen der gleiche Flattermechanismus zugrunde.

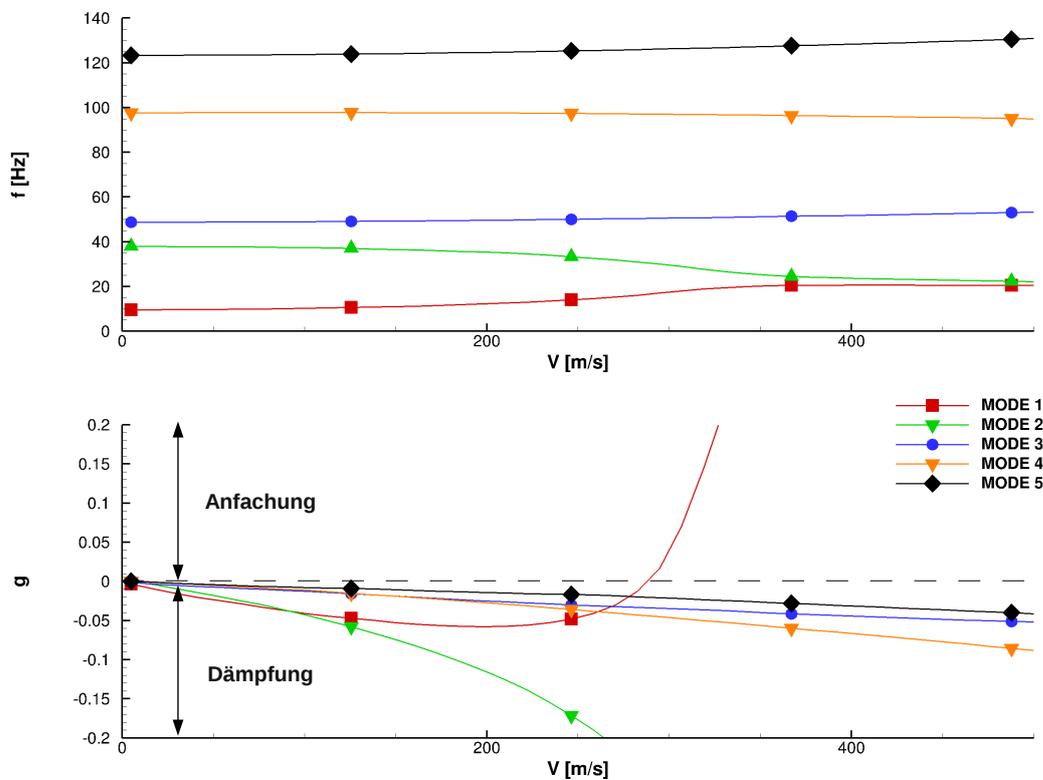


Abbildung 3.18: V-f- und V-g-Diagramm für den AGARD 445.6-Flügel bei  $M_\infty = 0,901$ ,  $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$  und  $\alpha = 0^\circ$ , ermittelt mit AER-NS (reibungsbefahtet) und der g-Methode

In Abbildung 3.19 sind die kritische Flattergeschwindigkeit und die kritische Flatterfrequenz in Abhängigkeit der Machzahl aufgetragen. Alle Kurven beruhen auf Auswertungen mithilfe der g-Methode und die GAF sind mit verschiedenen CFD-Verfahren bestimmt worden. Verglichen werden nichtlineare reibungsfreie (EU), reibungsbefahdete (NS), sowie linearisierte (SD) Ergebnisse mit experimentellen Daten (EXP). Die kritische Flattergeschwindigkeit ist in Abbildung 3.19 in Form des Flutter Speed Index (FS) gegeben, der wie folgt definiert ist

$$FS = \frac{2V}{l_r \omega_\alpha \sqrt{\mu}}. \quad (3.1)$$

Die Flattergeschwindigkeit wird dabei mit der Kreisfrequenz der ersten Torsionsmode  $\omega_\alpha$ , der Flügeltiefe an der Flügelwurzel  $l_r$  und dem Massenverhältnis  $\mu$  normiert. Das Frequenzverhältnis (FR) ist ebenfalls auf die Kreisfrequenz der ersten Torsionsmode bezogen

$$FR = \frac{\omega}{\omega_\alpha}. \quad (3.2)$$

Sowohl der FS, als auch das FR haben qualitativ ähnliche Verläufe. Im Unterschallbereich nehmen beide Größen kontinuierlich mit steigender Machzahl ab, bis sie ein Minimum im transsonischen Machzahlbereich bei  $M_\infty = 0,96$  erreichen. Dieses Phänomen wird auch als "transonic dip" bezeichnet und ist eine Folge von Kompressibilitätseffekten in der Form von

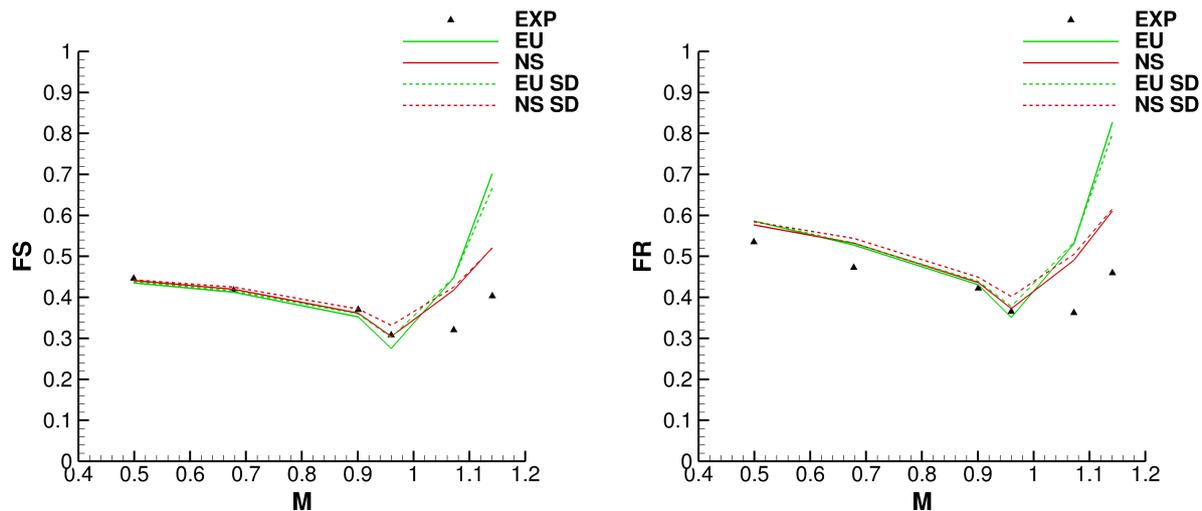


Abbildung 3.19: FS (links) und FR (rechts) ermittelt mit der g-Methode für den AGARD 445.6-Flügel in Abhängigkeit der Machzahl im Vergleich zu experimentellen Daten [163] bei  $\alpha = 0^\circ$  [53]

stark ausgeprägten Stoßwanderungen im transsonischen Geschwindigkeitsbereich. Speziell in der Nähe des "transonic dip" ist die Vorhersagequalität der CFD-Methoden deutlich besser als die von Potentialverfahren, weil letztere nicht in der Lage sind, Stoßwanderungen vorherzusagen. Im Überschallbereich steigen der FS und das FR mit wachsender Machzahl an. Für den FS liefern alle numerischen Methoden im Unterschall sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell gemessenen Flattergeschwindigkeiten. Auch im transsonischen Bereich stimmt die vorhergesagte Flattergeschwindigkeit gut mit der Messung überein. Zwischen den Resultaten der einzelnen CFD-Verfahren ergeben sich aber kleine Unterschiede. Grundsätzlich folgen in diesem Machzahlbereich aus den reibungsfreien Simulationen kleinere Flattergeschwindigkeiten als aus den reibungsbehafteten Simulationen und aus den nichtlinearen Simulationen kleinere Flattergeschwindigkeiten als aus den linearisierten Simulationen. Im Überschallbereich weichen die Lösungen stärker vom Experiment ab. Der linearisierte Löser kann die Ergebnisse des nichtlinearen Löfers sehr gut approximieren. Reibungseinflüsse können jedoch nicht vernachlässigt werden, weil sie, wie schon anhand der stationären Druckverläufe gezeigt wurde, einen bedeutenden Einfluss auf die Stoßstärke haben. In der Literatur wurde gezeigt, dass eine Berücksichtigung der strukturellen Dämpfung, eine bessere Annäherung der experimentell ermittelten Ergebnisse im Überschall ermöglicht [99]. Das FR wird im Unter- und im Überschallbereich etwas überschätzt. Im transsonischen Bereich ist die Vorhersage gut. Der Vergleich der unterschiedlichen CFD-Methoden liefert die gleichen Trends, die auch für den FS beobachtet werden.

Die Stabilität des aeroelastischen Systems kann auch mithilfe von nichtlinearen, gekoppelten Simulationen im Zeitbereich überprüft werden. Dabei ist für jede Anströmbedingung, bei der das Systemverhalten von Interesse ist, die Durchführung einer rechenintensiven, instationären, gekoppelten Simulation notwendig. Der Vorteil der Methode liegt darin, dass nichtlineare Effekte berücksichtigt werden können und dass nicht für jede Eigenmode und für mehrere reduzierte Frequenzen die GAF zu berechnen sind. Das heißt, auch wenn keine nichtlinearen Effekte auftreten, bietet sich diese Methode in den Fällen an, wo das Stabilitätsverhalten nur an wenigen ausgewählten Punkten der Flugenveloppe ge-

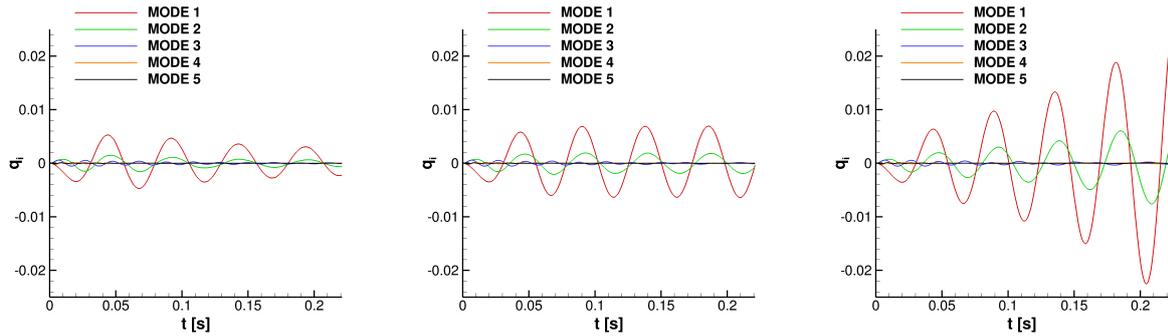


Abbildung 3.20: Antwort der generalisierten Koordinaten des AGARD 445.6-Flügel auf eine initiale Störung bei  $M_\infty = 0,678$ ,  $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha = 0^\circ$  und  $q_\infty = 5296 \text{ Pa}$  (links),  $q_\infty = 5575 \text{ Pa}$  (Mitte),  $q_\infty = 5853 \text{ Pa}$  (rechts) [53]

sucht ist, oder wenn bereits genügend Informationen über das Stabilitätsverhalten des Systems bekannt sind, so dass sich der zu untersuchende Bereich stark eingrenzen lässt. Trifft der zweite Fall zu, so kann man wie folgt verfahren: Ausgehend von einer ersten Schätzung bezüglich des Flutterpunktes wird bei gegebener Dichte und Machzahl je eine Simulation etwas oberhalb und etwas unterhalb des kritischen Staudrucks durchgeführt. Zur Bestimmung dieser Punkte werden hier die Ergebnisse aus der klassischen Flutteranalyse verwendet und der Staudruck um 5% angehoben bzw. gesenkt. Das Resultat ist in Abbildung 3.20 beispielhaft für eine reibungsbehaftete Simulation bei  $M_\infty = 0,678$  dargestellt. Als initiale Störung wirkt im ersten Zeitschritt der Simulation eine Kraft in Auftriebsrichtung und ein Torsionsmoment an der Flügelspitze. Die Wahl des physikalischen Zeitschritts  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$  beruht auf den Schlussfolgerungen der in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas. Im linken Diagramm ist die Strukturantwort gedämpft, das mittlere Diagramm zeigt die neutrale Antwort und rechts ist die Strukturantwort angefacht. Berechnet man für die gedämpfte und die angefachte Lösung die Dämpfung und trägt diese, wie in Abbildung 3.21 mit der Bezeichnung "interpoliert" dargestellt, über den Staudruck auf, so entspricht der Flutterpunkt dem resultierenden Nulldurchgang der Geraden. Zum Vergleich ist der aus der nichtlinearen, gekoppelten Simulation mit neutraler Antwort stammende Staudruck im Diagramm unter dem Pseudonym "direkt" eingezeichnet. Dieser Punkt weicht nur 0,4 % von dem mithilfe der Interpolationsmethode bestimmten Staudruck ab und rechtfertigt folglich diese Vorgehensweise.

Berechnet man den FS und das FR aus den auf Basis der aus den nichtlinearen, gekoppelten Simulationen und der Interpolationsmethode gewonnenen Flutterpunkten und trägt diese über die Machzahl auf, ergeben sich die Kurven entsprechend Abbildung 3.22. Bezüglich des FS resultieren speziell aus der gekoppelten, reibungsbehafteten, nichtlinearen Simulationen annähernd identische Flattergeschwindigkeiten wie durch die g-Methode in Kombination mit dem nichtlinearen Löser vorhergesagt worden sind. Die mit reibungsfreien, nichtlinearen Methoden bestimmten Flattergeschwindigkeiten liegen im Überschallbereich näher an den experimentellen Ergebnissen als die reibungsfreien Ergebnisse auf Basis der klassischen Methoden. Für das FR ergeben sich qualitativ ähnliche Verläufe wie im Fall der klassischen Methoden. Quantitativ werden die im Experiment gemessenen Schwingungsfrequenzen im sub- und transsonischen Bereich aber noch stärker überschätzt als in der linearen Analyse.

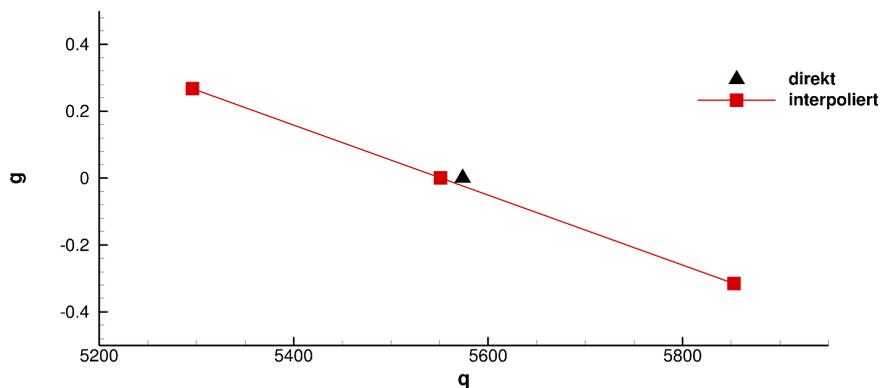


Abbildung 3.21: Dämpfung der Strukturantwort des AGARD 445.6-Flügel in Abhängigkeit des Staudrucks bei  $M_\infty = 0,678$ ,  $\rho_\infty = 0,0995 \text{ kg/m}^3$  und  $\alpha = 0^\circ$

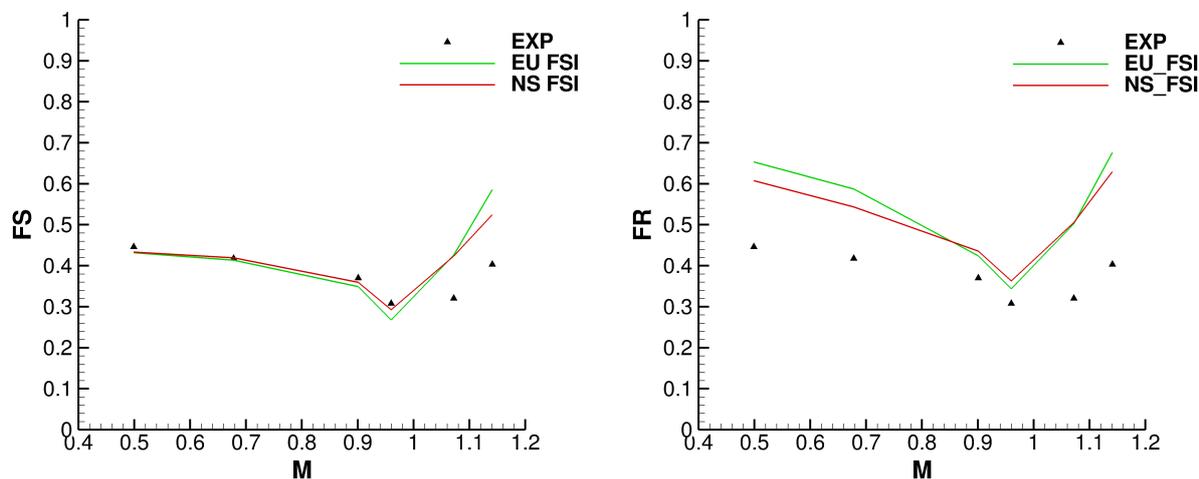


Abbildung 3.22: FS (links) und FR (rechts) für den AGARD 445.6-Flügel, ermittelt mit nichtlinearen, gekoppelten Methoden in Abhängigkeit der Machzahl im Vergleich zu experimentellen Daten [163] bei  $\alpha = 0^\circ$  [53]

## 3.2 Flügel großer Streckung

Die Durchführung des High Reynolds Number Aerostructural Dynamics (HIRENASD)-Projekts ist im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 401 beschlossen worden. Ziel des Projekts ist die Bereitstellung experimenteller Daten für eine Transportflugzeugkonfiguration bei realistischen Reynoldszahlen im Reiseflug. Im Vordergrund stehen dabei der Wissens- und Verständnissgewinn bezüglich dynamischer aeroelastischer Phänomene im transsonischen Geschwindigkeitsbereich bei hohen Reynoldszahlen, sowie die frei zugängliche Verfügbarkeit von experimentellen Daten für die Forschung. Die Experimente wurden von Mitarbeitern der RWTH Aachen im Europäischen Transsonischen Windkanal (ETW) durchgeführt [4], [5]. Der ETW ist ein kryogener, transsonischer Windkanal Göttinger Bauart und wird mit Stickstoff betrieben. Der Querschnitt der Messstrecke beträgt  $2 \text{ m} \times 2,4 \text{ m}$ . Unter kryogenen Windkanalbedingungen konnten für die HIRENASD-Konfiguration Machzahlen bis  $M_\infty = 0,88$ , Reynoldszahlen bis  $Re = 73 \cdot 10^6$  und Stau-

drücke bis  $q_\infty = 0,127 \text{ MPa}$  realisiert werden. Ein weiterer Vorteil des ETW ist, dass die Anströmbedingungen unabhängig voneinander variabel einstellbar sind.

In Abbildung 3.23 ist die HIRENASD-Konfiguration in der Dreiseitenansicht dargestellt. Das HIRENASD-Windkanalmodell besteht aus einem elastischen Flügel, der durch einen externen Anregungsmechanismus bewegt werden kann und einer starren Rumpfschale entsprechend dem Horizontalschnitt aus Abbildung 3.24, die keinen Kraftfluss zwischen dem Flügel und dem Rumpf ermöglicht. Die Grundrissform des Flügels ist der eines typischen Transportflugzeugs nachempfunden. Die Spannweite des Windkanalmodells beträgt  $1375 \text{ mm}$ . Der ungeschränkte Flügel ist durch eine Vorderkantenpfeilung von  $34^\circ$  und eine mittlere Flügeltiefe von  $l_m = 344,5 \text{ mm}$  gekennzeichnet. Die Hinterkante wird durch 2 Knicke in 3 Abschnitte unterteilt, wobei die einzelnen Abschnitte durch eine lineare Abnahme der Sehnenlänge charakterisiert sind. Als Profilform wird das superkritisch ausgelegte BAC 3-11/RES/30/21-Profil verwendet [111]. Dieses Profil besitzt eine relative Profildicke  $d/c = 11 \%$ . Der innenliegende Abschnitt ist in Richtung der Flügelwurzel auf eine relative Profildicke  $d/c = 15 \%$  linear zunehmend verdickt. Weil im ETW Temperaturen von  $110 \text{ K}$  bis  $310 \text{ K}$  auftreten, wurde das Windkanalmodell aus einem C200 martensitgehärteten Stahl gefertigt [5]. Die wichtigsten geometrischen und materiellen Eigenschaften des Flügels sind in den Tabellen 3.5 und 3.6 zusammengefasst.

Der Anregungsmechanismus des Flügels besteht aus vier Piezoaktuatoren, die in den Spannflansch für die Befestigung an der Windkanalwaage integriert wurden. Sie sind in spannweitischer Richtung platziert und wirken im Sinne von zwei Kräftepaaren. Die Übertragung der Kräfte wird über an der Flügelwurzel befindliche Hebel ermöglicht. Der Flügel wurde mit Drucksensoren, Dehnmessstreifen und Beschleunigungssensoren versehen. Die Drucksensoren sind in 7 spannweitischnitten positioniert. Außerdem wurde ein optisches System zur Messung der Flügelverformung installiert. Statische Messungen sind bei verschiedenen Machzahlen, Staudrücken, Reynoldszahlen und Anstellwinkeln durchgeführt worden. Für einen Teil der Messungen war das Windkanalmodell mit Transitionstreifen versehen [5]. Diese befanden sich bei  $12 \%$  bzw.  $15 \%$  der Flügeltiefe auf der Saugseite und bei  $5 \%$  der Flügeltiefe auf der Druckseite. Aufgrund der Pfeilung und der aerodynamischen Belastung des elastischen Flügels konnte eine statische Verformung des Flügels beobachtet werden. Neben einer Vielzahl von statischen Testfällen wurden auch dynamische Messreihen für fremderregte Schwingungen in drei Eigenmoden aufgenommen.

Halbspannweite $s$	$1285,71 \text{ mm}$
Flügeltiefe an der Flügelwurzel $l_r$	$549,37 \text{ mm}$
mittlere Flügeltiefe $l_m$	$344,5 \text{ mm}$
Streckung $\Lambda$	$8,42$
Zuspitzung $\lambda$	$0,27$
Vorderkantenpfeilung $\phi_v$	$34^\circ$
Hinterkantenpfeilung innerer Abschnitt $\phi_{h,i}$	$6,55^\circ$
Hinterkantenpfeilung mittlerer Abschnitt $\phi_{h,m}$	$21,40^\circ$
Hinterkantenpfeilung äußerer Abschnitt $\phi_{h,a}$	$25,61^\circ$
relative Profildicke innerer Abschnitt $(d/c)_i$	$15 \%$
relative Profildicke mittlerer, äußerer Abschnitt $(d/c)_{m,a}$	$11 \%$

Tabelle 3.5: Geometrische Eigenschaften des HIRENASD-Windkanalmodells [5]

Elastizitätsmodul $E$	181,3 $GPa$
Schubmodul $G$	68 $GPa$
Querdehnzahl $\nu$	0,264
Dichte $\rho$	7920 $kg/m^3$

Tabelle 3.6: Materialeigenschaften des HIRENASD-Windkanalmodells bei  $T = 293 K$  [5]

### 3.2.1 Numerische Modellierung

Zur Erzeugung eines Strukturmodells, welches die dynamischen Schwingungseigenschaften des HIRENASD-Windkanalmodells auf Basis der verfügbaren Daten bestmöglich wiedergibt, wurde der Strukturlöser AER-FE verwendet. Ziel ist die Erstellung eines FEM-Modells, auf dessen Grundlage eine Modalanalyse durchgeführt und ein numerisches Modell im Modalraum bereitgestellt werden kann. In [125] wurde gezeigt, dass das strukturdynamische Verhalten des HIRENASD-Windkanalmodells sowohl mit Timoshenko-Balkenelementen, als auch mit tetra- oder hexaederförmigen Volumenelementen in annähernd gleicher Güte bestimmbar ist. Auch in [21] konnten keine aus dreidimensionalen Spannungszuständen folgende lokale Änderungen der Profilform und daraus resultierende Unterschiede in der CFD-Lösung festgestellt werden. Aus diesem Grund sind in dieser Arbeit Reissner-Mindlin-Plattenelemente als Kompromiss bezüglich der Komplexität der Strukturmodellierung bzw. der entsprechenden Elementtypenwahl verwendet worden. Der Flügel, einschließlich dem Einspannbereich, wurde mit 501 vierknotigen Plattenelementen diskretisiert und ist in Abbildung 3.25 links dargestellt. Aus dieser FEM-Modellierung resultieren 3885 Freiheitsgrade. Weil das reale Windkanalmodell einige Stege bzw. dazwischenliegende Hohlräume für die Unterbringung der Messtechnik enthält [5], ist die Dicke der einzelnen Plattenelemente entsprechend Abbildung 3.25 rechts in Anlehnung an das Originalmodell angepasst worden. Im Rahmen dieser Modellierung ist zu berücksichtigen, dass die absolute Dicke des Flügels lokal abnimmt und folglich zu einer leichten Verringerung der Torsionssteifigkeit führt. Aufgrund der zufriedenstellenden Ergebnisse in Folge dieser Modellierung wurde von einer deutlich aufwendigeren Modellierung des Flügels mithilfe von zwei Schalensegmenten abgesehen. Die dem FEM-Modell zugeordneten Materialeigenschaften sind in Tabelle 3.6 aufgelistet, wurden aber zusätzlich an die im jeweiligen Versuch vorherrschenden Windkanaltemperaturen angepasst. Als Verschiebungsrandbedingung sind alle Freiheitsgrade der sich im Einspannflansch des Flügels befindenden Knoten gesperrt. In allen aeroelastischen Simulationen für die HIRENASD-Konfiguration wurden die zu den sieben kleinsten Eigenfrequenzen zugehörigen Eigenmoden berücksichtigt. Tabelle 3.7 gibt einen Überblick über die numerisch ermittelten Eigenmoden, deren Eigenfrequenzen und wo vorhanden, den experimentell bestimmten Referenzwert. Die ersten beiden Eigenmoden werden durch die erste und zweite Schlagbiegung repräsentiert und sind in den Abbildungen 3.26 und 3.27 in geeigneter Skalierung dargestellt. Für die dreidimensionalen Darstellungen auf den rechten Seiten der Abbildungen wurden die Eigenmoden durch Anwendung der TPS-Methode zur besseren Veranschaulichung auf das CFD-Oberflächennetz projiziert. Die zugehörigen Biegeeigenfrequenzen sind höher als die experimentell ermittelten Eigenfrequenzen. Dieser Trend bezüglich der im Rahmen der Modalanalyse bestimmten Eigenfrequenzen wurde auch in anderen Arbeiten festgestellt [125], [4], [5], [68]. Eine detaillierte Untersuchung zu diesem Resultat ist in [125] mit dem Ergebnis veröffentlicht worden, dass es notwendig ist, sowohl den Anregungsmechanismus, als auch die Windkanalwaage und den Windkanaladapter im

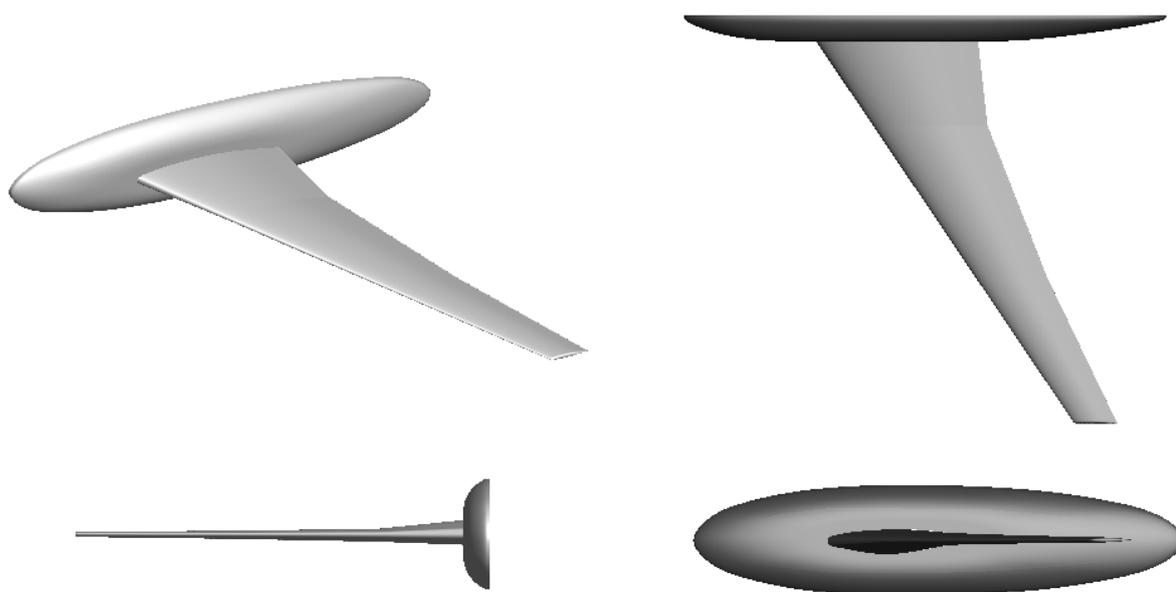


Abbildung 3.23: Dreiseitenansicht des HIRENASD-Modells [52]

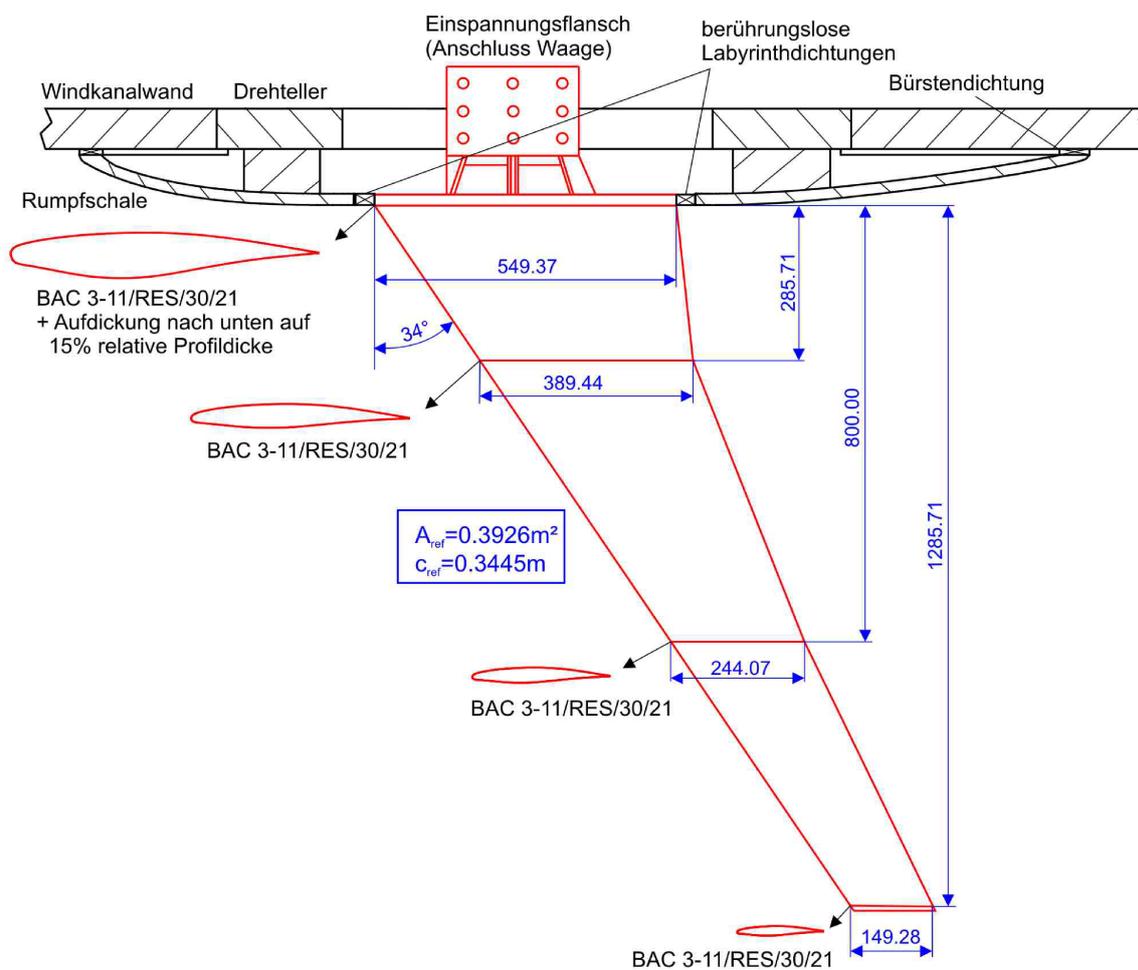


Abbildung 3.24: Flügelquerschnittsgeometrie und bemaßte Draufsicht des HIRENASD-Windkanalmodells in Millimetern [21]

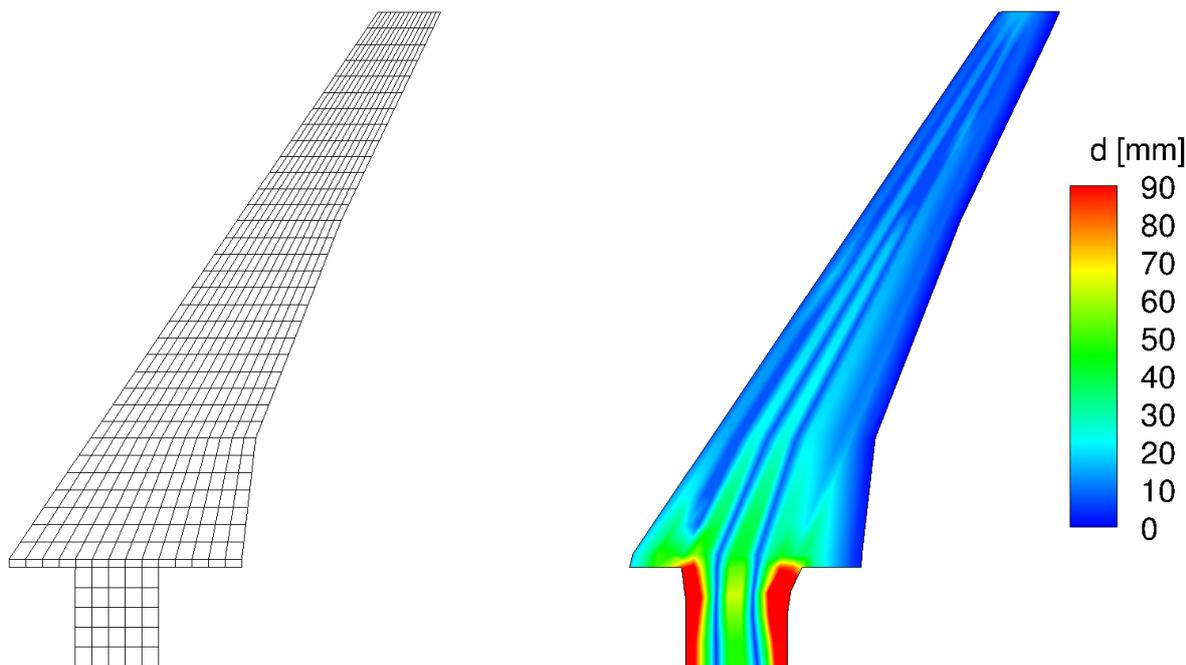


Abbildung 3.25: Diskretisierung des HIRENASD-Strukturmodells; links: FEM-Netz; rechts: Dickenverteilung [52]

FEM-Modell zu berücksichtigen, um sehr gute Übereinstimmung zwischen den experimentell und numerisch ermittelten Eigenfrequenzen der Biegemoden zu erreichen. Leider lagen genaue Informationen zu den Struktureigenschaften von Anregungsmechanismus, Windkanalwaage und Windkanaladapter bei der Erstellung des Strukturmodells für diese Arbeit nicht vor. Die dritte Eigenform ist eine Biegemode in der Flügelebene. Diese konnte im Experiment nicht beobachtet werden, weil die Anregung einer derartigen Mode durch den installierten Anregungsmechanismus nicht vorgesehen ist. Die vierte und sechste Eigenmode sind weitere Schlagbiegemoden. Die fünfte ermittelte Eigenform repräsentiert in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment die erste Torsionsmode. Diese Mode ist in Abbildung 3.28 dargestellt. Als siebte Mode wird in den Simulationen eine weitere Torsionsmode einbezogen.

Mode	Schwingungsform	Eigenfrequenz in [Hz]	
		Experiment [21]	FEM [52]
1	1. Schlagbiegung	25,75	29,06
2	2. Schlagbiegung	71,11	95,71
3	1. Biegung in der Ebene	nicht beobachtet	221,51
4	3. Schlagbiegung	keine Angabe	222,03
5	1. Torsion	263,15	266,74
6	4. Schlagbiegung	keine Angabe	373,85
7	2. Torsion	keine Angabe	480,24

Tabelle 3.7: Eigenfrequenzen des HIRENASD-Modells bei  $T_\infty = 293\text{ K}$  [52]

Basierend auf der in Abbildung 3.23 dargestellten Geometrie, ist ein strukturiertes Multi-block-Netz für die CFD-Löser AER-NS und AER-SDNS erstellt worden. Die zugrundelie-

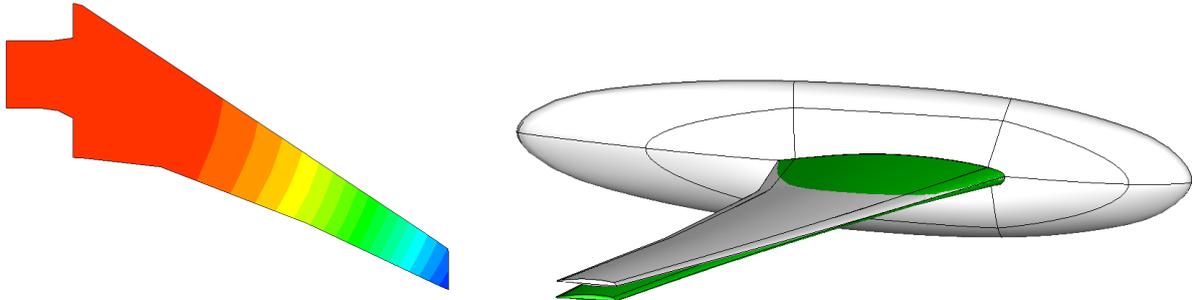


Abbildung 3.26: 1. Biegemode des HIRENASD-Strukturmodells [52]

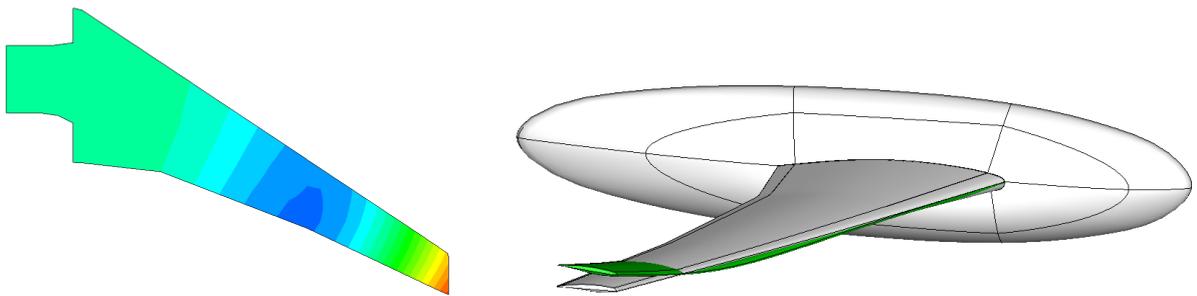


Abbildung 3.27: 2. Biegemode des HIRENASD-Strukturmodells [52]

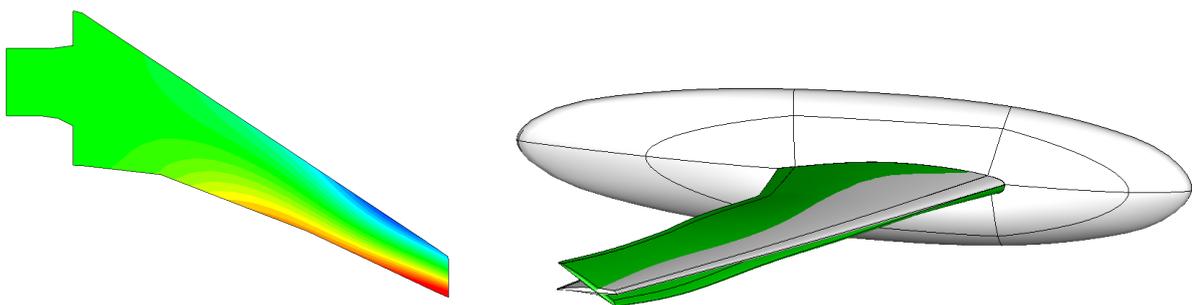


Abbildung 3.28: 1. Torsionsmode des HIRENASD-Strukturmodells [52]

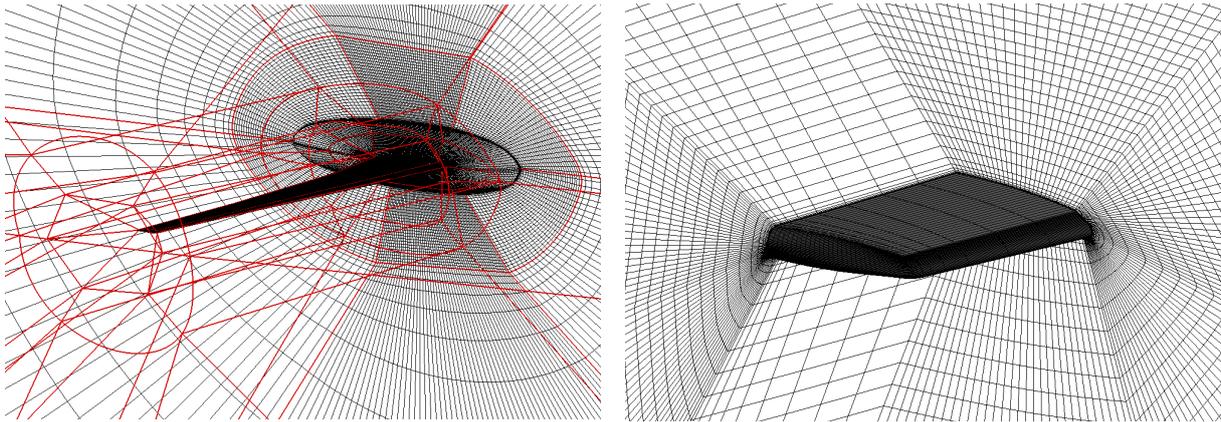


Abbildung 3.29: Diskretisierung des Strömungsraums um die HIRENASD-Konfiguration; links: Netztopologie und Oberflächennetz; rechts: Netzschnitt und Oberflächennetz im Bereich der Tragflügelspitze [52]

gende Blocktopologie ist eine O-Topologie um den Flügel und die Rumpfschale entsprechend der rot hervorgehobenen Blockkanten in Abbildung 3.29 links. Als Randbedingungen sind auf der Körperoberfläche Festkörperrandbedingungen und im Fernfeld charakteristische Fernfeldrandbedingungen vorgegeben. Der Fernfeldabstand beträgt etwa zehn Halbspannweiten vom Tragflügel. An die Rumpfschale grenzt im Experiment die Windkanalwand. Für den CFD-Löser wird diese Fläche mit einer Symmetrierandbedingung versehen, weil die im Windkanal entstehende Wandgrenzschicht aufgrund der Rumpfschale nur vernachlässigbaren Einfluss auf die Tragflügelumströmung nimmt. Die erforderliche Netzauflösung wurde im Rahmen einer Netzkonvergenzstudie untersucht [161]. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass die in Abbildung 3.29 gezeigte Diskretisierung angemessen ist, um alle relevanten Strömungsphänomene ausreichend gut aufzulösen. Das resultierende Netz verfügt über ca. drei Millionen Knoten und die Tragflügeloberfläche ist mit  $240 \times 74$  Zellen aufgelöst. Die Höhe der körper nächsten Zellreihe beträgt maximal  $3 \cdot 10^{-6} l_m$ , hat damit für die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen einen Wandabstand von  $y^+ \approx 1$  und erfüllt somit die notwendige Bedingung  $y^+ < 6$  für die Anwendung des Spalart-Allmaras-Turbulenzmodells.

### 3.2.2 Statische aeroelastische Analyse

Zur Beurteilung der Vorhersagequalität der stationären Simulationsvariante des Löser AER-NS wird die sich in Folge der aeroelastischen Verformung des HIRENASD-Flügels einstellende Strömungslösung für ausgewählte Beispiele mit experimentellen Daten verglichen. Zusätzlich dient die stationäre aeroelastische Gleichgewichtslage als Anfangs- oder Referenzlösung für dynamische Simulationen. Die ungestörten Anströmbedingungen zur Validierung der statischen aeroelastischen Verformung sind in Tabelle 3.8 zusammengefasst. Bei den transsonischen Anströmbedingungen ist das Strömungsfeld durch einen starken Verdichtungsstoß auf der Saugseite, im Bereich von 25% bis 75% der Flügeltiefe, gekennzeichnet. Die als Folge der lokalen Überschallgebiete resultierende Stoßlage ist auf der Flügeloberfläche und in drei spannweitig angeordneten Schnitten entsprechend der Druckverteilung in Abbildung 3.30 dargestellt. Der Staudruck sowie der Anstellwinkel sind so gewählt worden, dass deutliche aeroelastische Verformungen zu beobachten sind. In Abbildung 3.30 sind sowohl die als Ergebnis der generierten Auftriebskraft nach

oben ausgelenkte Tragfläche mit der Oberflächendruckverteilung, als auch die unverformte Referenzlage in grau dargestellt. Einen detaillierten Vergleich der Biegelinien von der Flügelvorderkante (VK) und der Flügelhinterkante (HK) mit experimentell ermittelten Messwerten liefert Abbildung 3.31. Der Vergleich erfolgt zwischen dem aeroelastisch gekoppelten (FSI) Euler- (EU) und Navier-Stokes- (NS) Verfahren und den experimentellen Daten (EXP). Die Ergebnisse der reibungsbehafteten Simulation stimmen gut mit der gemessenen Verformung überein. Die maximale Auslenkung der Hinterkante beträgt  $\Delta z = 39\text{mm}$ . Der reibungsfreie Löser überschätzt die Durchbiegung um ca. 20%. Aus Abbildung 3.31 ist weiterhin ersichtlich, dass der Flügel zusätzlich tordiert wird. Im Windkanalexperiment wurde an der Flügelspitze ein lokaler Verwindungswinkel von  $\Delta\alpha = -1,20^\circ$  gemessen. Dieses Ergebnis konnte mit einem Winkel von  $\Delta\alpha = -1,17^\circ$  sehr gut durch die reibungsfreie Simulation vorhergesagt werden. Die reibungsbehaftete Simulation liefert mit einem lokalen Verwindungswinkel von  $\Delta\alpha = -1,07^\circ$  einen etwas zu geringen Wert.

Anströmmachzahl $M_\infty$	0,8
Anstellwinkel $\alpha$	$3^\circ$
Verhältnis $q_\infty/E$	$0,48 \cdot 10^{-6}$
Reynoldszahl $Re$	$14 \cdot 10^6$
Temperatur $T_\infty$	297 K

Tabelle 3.8: Anströmbedingungen zur Validierung der statischen aeroelastischen Verformung der HIRENASD-Konfiguration [52]

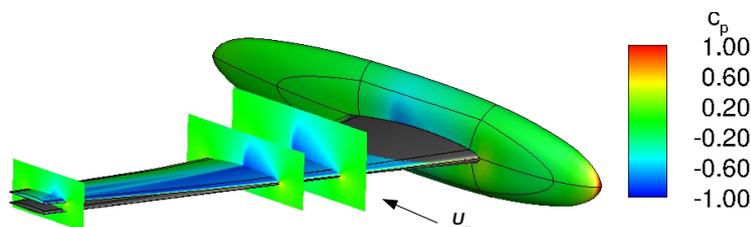


Abbildung 3.30: Starrer Flügel (grau) und aeroelastisch verformter Flügel der HIRENASD-Konfiguration mit Oberflächendruckverteilung in der statischen Gleichgewichtslage bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 3^\circ$ ,  $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 14 \cdot 10^6$  [52]

Globale Beiwerte in Form der Auftriebs- und Nickmomentenpolare sind in Abhängigkeit des Anstellwinkels in Abbildung 3.32 aufgetragen. Verglichen werden jeweils die mithilfe der reibungsbehafteten und der reibungsfreien Simulation bestimmten Beiwerte der starren und der aeroelastisch verformten Konfiguration mit experimentell ermittelten Daten. Betrachtet wird der Anstellwinkelbereich von  $\alpha = -1^\circ$  bis  $\alpha = 3^\circ$ . Alle numerischen Verfahren liefern in Analogie zum Experiment einen linearen Verlauf der Beiwerte, wobei für  $\alpha = 3^\circ$  ansatzweise der Übergang in den nichtlinearen Bereich beobachtet werden kann. Die mit der reibungsbehafteten, aeroelastisch gekoppelten Simulation (NS FSI) berechneten Auftriebsbeiwerte stimmen sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen überein. Für den Nickmomentenverlauf werden die experimentellen Ergebnisse am besten durch die reibungsbehaftete, nicht gekoppelte Simulation (NS) approximiert. Für beide Beiwertverläufe resultiert die aeroelastische Kopplung in einer betragsmäßigen Verringerung der Beiwerte um etwa 10 %. Dennoch ist der Approximationsfehler bezüglich der Windkanalmessungen, welcher für die HIRENASD-Konfiguration im Falle einer Vernachlässigung

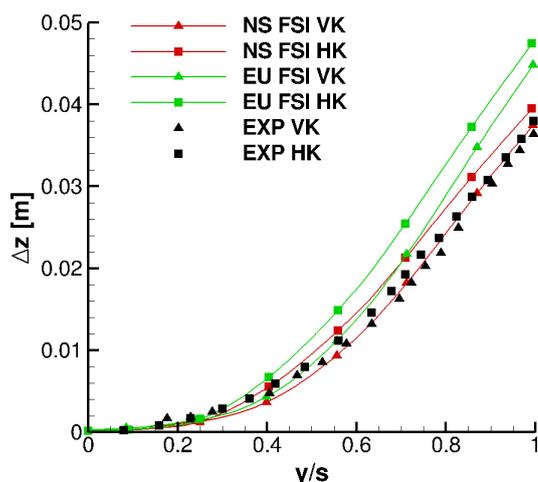


Abbildung 3.31: Vergleich der Biegelinien der Flügelvorderkante (VK) und der Flügelhinterkante (HK) der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten [114] bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 3^\circ$ ,  $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 14 \cdot 10^6$  [52]

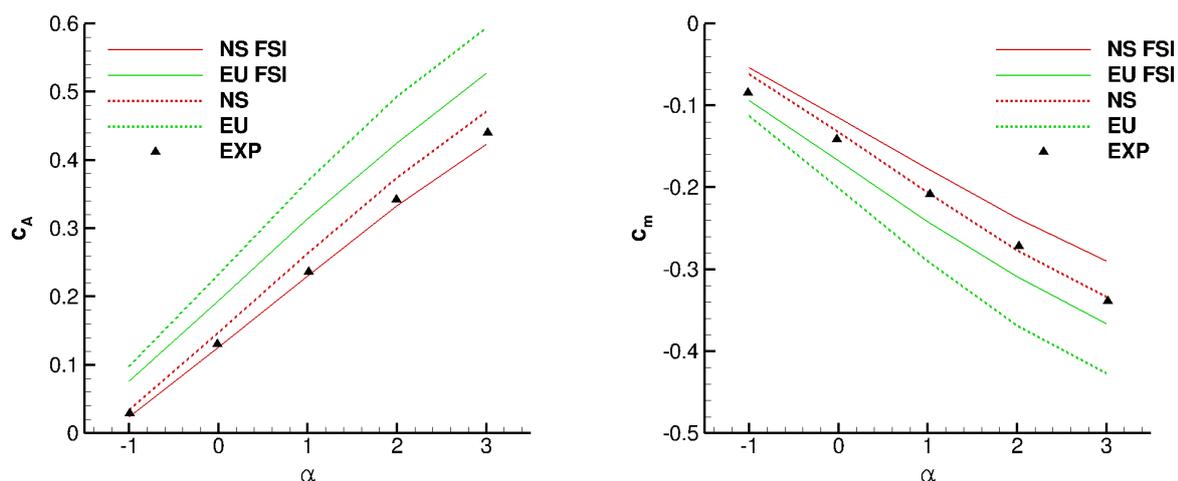


Abbildung 3.32: Vergleich der Auftriebs- (links) und der Nickmomentenpolare (rechts) der HIRENASD-Konfiguration in Abhängigkeit des Anstellwinkels  $\alpha$  mit experimentellen Daten (EXP) [114] bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 14 \cdot 10^6$

von Reibungseffekten (EU) entsteht, größer, als der ebenso bedeutende Approximationsfehler in Folge einer Vernachlässigung der aeroelastischen Verformung.

In Abbildung 3.33 sind die Verläufe des Druckbeiwerts in drei ausgewählten, spanntweitig angeordneten Profilschnitten in Abhängigkeit der entdimensionalisierten lokalen Profiltiefe abgebildet. Die Positionen der jeweiligen Profilschnitte  $\eta = 0,14$  beziehungsweise  $\eta = 0,32$ ,  $\eta = 0,46$  und  $\eta = 0,95$  entsprechen den in Abbildung 3.30 abgebildeten spanntweitigen Flügelschnitten. Die drei zugehörigen Druckverläufe sind jeweils sowohl für die reibungsfreie (EU) als auch für die reibungsbehaftete Strömung (NS) um den starren und den aeroelastisch verformten (FSI) Tragflügel im Vergleich zu den experimentell gemess-

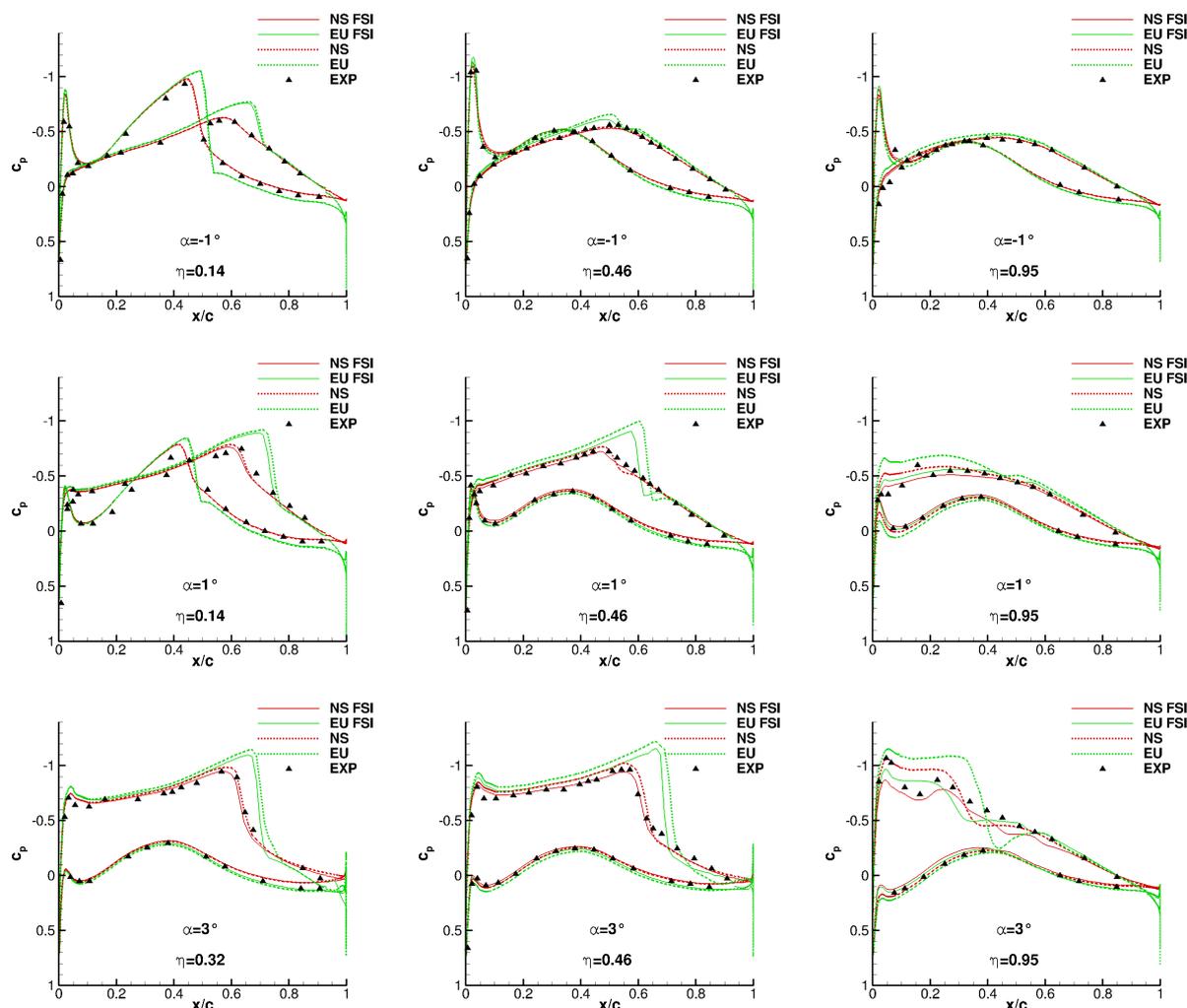


Abbildung 3.33: Vergleich der stationären Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten  $\eta$  zwischen dem starren und dem aeroelastisch verformten (FSI) Tragflügel der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten (EXP) [114] für drei verschiedene Anstellwinkel  $\alpha$  und bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $q_\infty/E = 0,48 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 14 \cdot 10^6$  [52]

senen Werten (EXP) für drei verschiedene Anstellwinkel  $\alpha = -1^\circ$ ,  $\alpha = 1^\circ$  und  $\alpha = 3^\circ$  aufgetragen. Der Fall  $\alpha = -1^\circ$  liegt in der Nähe des Nullauftriebswinkels. Aus diesem Grund ergeben sich keine nennenswerten Unterschiede in Folge der aeroelastischen Verformung in der Druckverteilung. Die Ergebnisse der reibungsbehafteten Simulation stimmen sehr gut mit dem Druckverlauf im Experiment überein. Aufgrund der nicht vorhandenen Grenzschicht und der fehlenden Dissipation in Folge von Reibungseffekten, enthält die reibungsfreie Lösung deutlich stärkere Verdichtungsstöße auf der Flügeloberseite und im inneren Flügelbereich sagt sie einen Stoß auf der Flügelunterseite voraus. Begünstigt durch die Torsion des Flügels hin zu kleinen lokalen Profilanstellwinkeln, ist der äußere Flügelbereich stoßfrei und die Unterschiede, bedingt durch viskose Effekte, sind nur gering. Für den Fall  $\alpha = 1^\circ$  setzen sich die Trends der bereits beschriebenen Beobachtungen fort. Die sich für die reibungsfreie Simulation ergebenden stärkeren Stöße sind folglich bedeutend weiter stromabwärts positioniert und wirken sich entsprechend stark auf die globalen Beiwerte aus. Im äußeren Profilschnitt  $\eta = 0,95$  lassen sich im vorderen Flügelbereich erstmals eindeutige aeroelastische Effekte beobachten. Die experimentell gemessene

Druckverteilung wird durch die reibungsbehaftete gekoppelte Simulation sehr gut wiedergegeben. Für den Anstellwinkel  $\alpha = 3^\circ$  hat die aerodynamische Last vor allem im äußeren Flügelbereich erhebliche elastische Flügelverformungen zur Folge. Auf der Druckseite stimmen die Lösungen aller Simulationen gut mit den experimentellen Daten überein. Die Stöße auf der Flügeloberseite werden durch die reibungsfreien Methoden wiederum um einiges überschätzt. Im äußeren Flügelschnitt ergeben sich auch beträchtliche Unterschiede bedingt durch die Verformung der Tragfläche. Es bilden sich zwei Verdichtungsstöße aus und folglich ändert sich damit die Lösung auch qualitativ. Die reibungsbehaftete, gekoppelte Lösung (NS FSI) liefert das beste Ergebnis in Hinblick auf den qualitativen und quantitativen Verlauf der Messwerte, lediglich direkt an der Flügelvorderkante wird die Saugspitze in der Druckverteilung, bedingt durch den etwas kleineren Torsionswinkel, unterschätzt.

Anströmmachzahl $M_\infty$	0,8
Anstellwinkel $\alpha$	$1,5^\circ$
Verhältnis $q_\infty/E$	$0,22 \cdot 10^{-6}$
Reynoldszahl $Re$	$7 \cdot 10^6$
Temperatur $T_\infty$	279 K
Frequenz $f$	78,9 Hz
reduzierte Frequenz $k_{red}$	0,66
Amplitude $\Delta z$	3,9 mm
Zeitschritt $\Delta t$	$1,27 \cdot 10^{-4}$
Eigenmode	2. Schlagbiegung

Tabelle 3.9: Anströmbedingungen zur Validierung der dynamischen aeroelastischen Verformung der HIRENASD-Konfiguration [52]

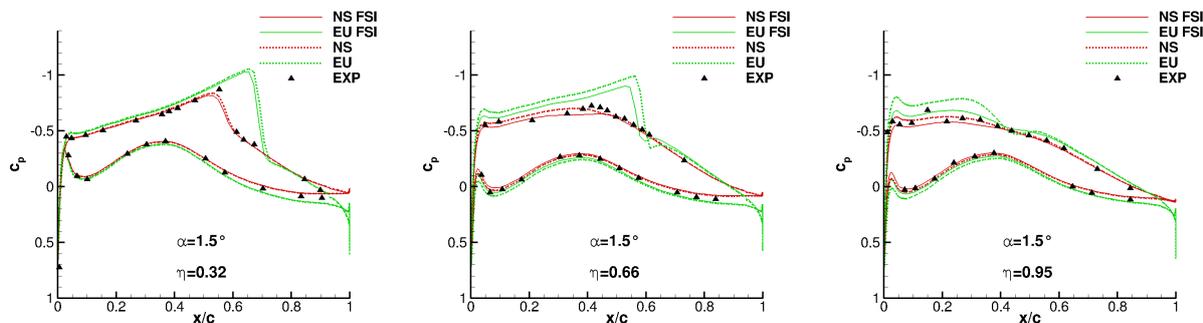


Abbildung 3.34: Vergleich der stationären Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten  $\eta$  zwischen dem starren und dem aeroelastisch verformten (FSI) Tragflügel der HIRENASD-Konfiguration mit experimentellen Daten (EXP) [114] bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$ ,  $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 7 \cdot 10^6$  [52]

Die Anströmbedingungen für die in den folgenden Kapiteln beschriebenen dynamischen Untersuchungen an der HIRENASD-Konfiguration weichen in Anlehnung an häufig in der Literatur verwendete Bedingungen [114], [68], [29], [140] von dem bisher herangezogenen Beispiel entsprechend Tabelle 3.8 ab. Die Anströmbedingungen zur Validierung der dynamischen Vorhersagequalität der Löser sind in Tabelle 3.9 gegeben. Die statische aeroelastische Gleichgewichtslage dient als Referenzlösung für die darauffolgenden dynamischen Betrachtungen. In den beiden äußeren Flügelschnitten können aufgrund einer

maximalen Auslenkung der Flügelspitze von  $12,5\text{ mm}$  im viskosen Fall Änderungen in der resultierenden Druckverteilung beobachtet werden. In diesem Tragflächenabschnitt liefert die aeroelastisch gekoppelte Simulation Ergebnisse, die besser mit den experimentellen Daten übereinstimmen.

### 3.2.3 Dynamische Analyse erzwungener Schwingungen

Zur Einschätzung der Vorhersagequalität des zeitlinearisierten Lösers AER-SDNS und des nichtlinearen Lösers AER-NS bezüglich der Anwendung auf dynamische, instationäre Strömungsprobleme an der HIRENASD-Konfiguration, werden Simulationen für harmonische Schwingungen konstanter Amplitude in der zweiten Biegemode durchgeführt. Die mit dem nichtlinearen Löser AER-NS numerisch ermittelten Zeitreihen der Oberflächendruckverteilung werden in den Frequenzbereich transformiert und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Zur Ermittlung der experimentellen Vergleichsdaten wurde der Flügel mit einer Frequenz von  $f = 78,9\text{ Hz}$  im Bereich der Flügelwurzel periodisch angeregt. Das entspricht einer mit der mittleren Flügeltiefe gebildeten reduzierten Frequenz von  $k_{red} = 0,66$ . Aus der Anregung resultiert eine maximale Auslenkungsamplitude von  $\Delta z = 3,9\text{ mm}$ . Diese Auslenkung entspricht ca. 1% der mittleren Flügeltiefe, rechtfertigt somit die Annahme kleiner Störungen und folglich die Anwendung des linearisierten Strömungslösers AER-SDNS. Dieser Löser liefert die erste Harmonische des komplexen Druckbeiwertes direkt im Frequenzbereich, so dass die Ergebnisse direkt mit den Fourieranalysierten Zeitreihen des nichtlinearen Lösers vergleichbar sind. Für die experimentellen Daten liegt die Amplituden- und Phaseninformation der Strömungsantwort vor, welche direkt in die hier verwendete komplexe Darstellung überführt werden kann. Die Randbedingungen der erzwungenen Schwingung sind in Tabelle 3.9 aufgelistet. Der physikalische Zeitschritt ist so gewählt worden, dass eine Schwingungsperiode mit 100 Zeitschritten aufgelöst wird. Die Referenzlage der vorgeschriebenen harmonischen Schwingung entspricht der am Ende von Kapitel 3.2.2 ermittelten aeroelastischen Gleichgewichtslage. Die Oberflächendruckverteilung wird in vier Flügelschnitten  $\eta = 0,46$ ,  $\eta = 0,59$ ,  $\eta = 0,66$  und  $\eta = 0,80$  ausgewertet. Die Ergebnisse der reibungsfreien (EU), reibungsbehafteten (NS), nichtlinearen und linearisierten (SD) Simulationen sind in Real- und Imaginärteil des Druckbeiwertes in Abbildung 3.35 dargestellt. Der Realteil repräsentiert den zur Anregung gleichphasigen Anteil der Druckvariation bzw. den quasistationären Anteil und der Imaginärteil repräsentiert den zur Anregung gegenphasigen Anteil der Druckvariation bzw. den instationären Anteil. Im Wesentlichen entsprechen die Trends bezüglich des Reibungseinflusses und der damit in Verbindung stehenden Stoßstärke und -position den Beobachtungen für die stationären Simulationen entsprechend Kapitel 3.2.2. Unter Vernachlässigung von viskosen Effekten ergibt sich eine zu weit stromab positionierte Stoßlage und die Absolutwerte des Druckbeiwertes in Stoßnähe sind sowohl im Real- als auch im Imaginärteil deutlich zu hoch. Im reibungsbehafteten Fall wird die Stoßstärke ausreichend gut abgebildet, wobei die Stoßposition im inneren Flügelbereich etwas zu weit stromauf liegt. Alle Simulationsergebnisse können die im Experiment gemessenen, relativ starken Druckschwankungen im Vorderkantenbereich nicht zufriedenstellend erfassen. Der nichtlineare, reibungsbehaftete Löser liefert die insgesamt beste Approximation der experimentell bestimmten Druckverteilung. In der unmittelbaren Stoßumgebung ist diese numerische Methode allerdings etwas zu dissipativ. Abseits der Stoßposition stimmen die komplexen Druckverläufe des nichtlinearen und linearisierten Lösers sehr gut überein. In Stoßnähe wird die Stoßamplitude im reibungsbehafteten, linearisierten Fall etwas unterschätzt, die

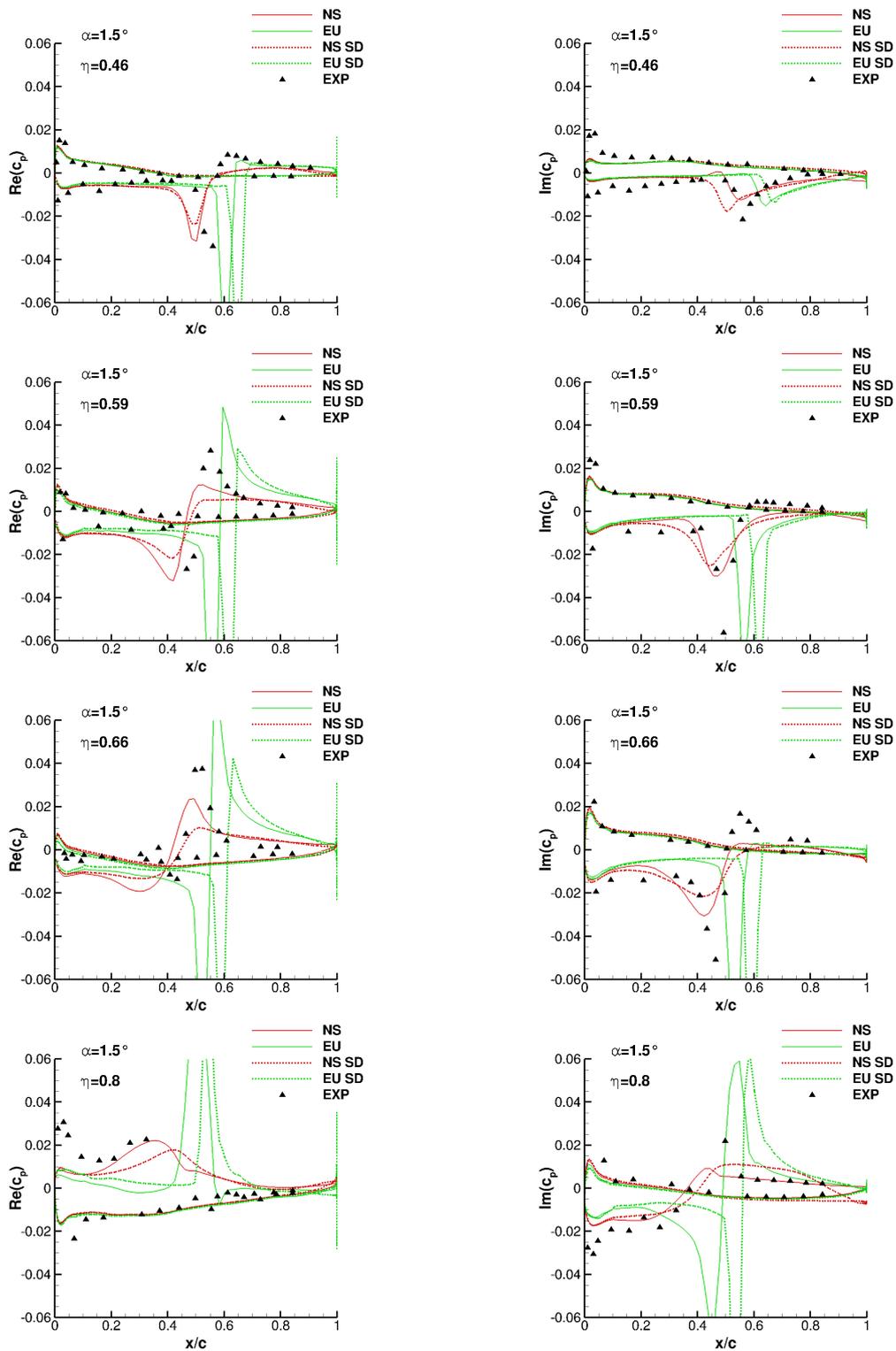


Abbildung 3.35: Vergleich der komplexen Druckverteilungen in verschiedenen Profilschnitten  $\eta$  für erzwungene harmonische Schwingungen der HIRENASD-Konfiguration in der zweiten elastischen Eigenmode mit experimentellen Daten [114] bei  $\alpha = 1,5^\circ$ ,  $k_{red} = 0,66$ ,  $\Delta z = 0,0039 \text{ m}$ ,  $M_\infty = 0,8$ ,  $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 7 \cdot 10^6$  [52]

Position wird aber vergleichsweise gut wiedergegeben. Im reibungsfreien, linearisierten Fall befindet sich der Stoß auch im Vergleich zum reibungsfreien, linearisierten Fall zu weit stromabwärts. Dieser Unterschied zu den viskosen Methoden hängt wahrscheinlich damit zusammen, dass die reibungsfreie, nichtlineare Lösung aufgrund unphysikalischer, numerisch bedingter kleiner Ablösegebiete an der stumpfen Hinterkante auch nach Simulationszeiten von mehr als fünf Schwingungsperioden keinen stationär eingeschwungenen Zustand erreicht hat.

### 3.2.4 Dynamische Analyse freier Schwingungen

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit dem freien, dynamischen Antwortverhalten der HIRENASD-Konfiguration, welches hauptsächlich durch die instationären Wechselwirkungen zwischen der Struktur und der Strömung geprägt ist. Mithilfe aeroelastisch gekoppelter Simulationen können Aussagen über das Dämpfungsverhalten des umströmten Körpers in Abhängigkeit der Anströmparameter getroffen werden. Die initiale Anregung aller elastischer Eigenmoden des Systems wird realisiert, indem sich der HIRENASD-Flügel zu Beginn der Simulation in der unverformten Referenzlage befindet. Im Fall einer gedämpften transienten Strukturantwort, nähert sich der Flügel daraufhin der statischen aeroelastischen Gleichgewichtslage. Abbildung 3.36 zeigt beispielhaft den Ausschwingvorgang der ersten (EU FSI 1), zweiten (EU FSI 2) und fünften (EU FSI 5) normierten Modalcoordinate einer reibungsfreien Simulation. Die Simulationsparameter und Anströmbedingungen entsprechen abgesehen vom physikalischen Zeitschritt, der hier  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} s$  beträgt, den Werten aus Tabelle 3.9. Die Kopplung zwischen dem Strukturlöser und dem Strömungslöser erfolgt im Sinne einer starken Kopplung, wobei die Löser jeweils nach 100 Pseudozeitschritten Informationen austauschen. Zur Interpolation der Strukturdeformation auf das CFD-Oberflächennetz kommt die TPS-Methode und für die Netznachführung eine Kombination aus der TFI und der "Spring-Analogy" zum Einsatz. Offensichtlich liegt im dargestellten Fall eine gedämpfte Schwingung vor, deren Amplitude nach einer Zeit von  $t = 0,5 s$  bereits auf ca. 10% des Anfangswertes abgeklungen ist. Vor allem in der Torsionsmode, also der 5. Eigenmode (EU FSI 5), ist eine deutlich aerodynamische Kopplung mit den ersten Biegemoden zu beobachten. Aus der Strukturantwort lässt sich das Dämpfungsmaß  $D$  und die Schwingungsfrequenz  $f$  der oben genannten Eigenmoden bestimmen. Das Dämpfungsmaß wird auf Basis des logarithmischen Dekrements  $\delta$  berechnet

$$D = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}, \quad (3.3)$$

wobei das logarithmische Dekrement wie folgt definiert ist

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta q_i}{\Delta q_{i+n}}. \quad (3.4)$$

Der Index  $i$  bezieht sich auf die jeweilige Schwingungsperiode,  $n$  ist die Anzahl der Perioden und  $\Delta q_i$  ist die Auslenkungsamplitude.

In der Abbildung 3.37 sind die Schwingungsfrequenzen und die Dämpfungswerte der betrachteten Eigenmoden in Abhängigkeit des Staudrucks der freien Anströmung aufgetragen. Der Staudruck wurde zwischen  $10 kPa$  und  $100 kPa$  variiert. Bei noch höheren Staudrücken treten große Verformungen der Struktur auf, die eine Modellierung mithilfe

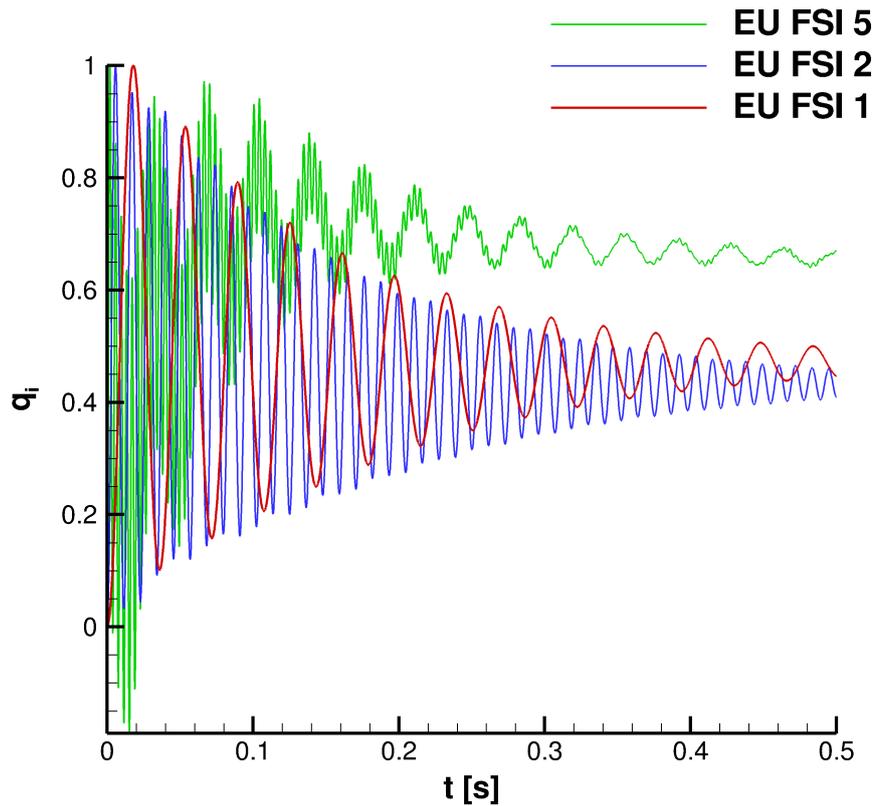


Abbildung 3.36: Zeitlicher Verlauf der normierten Modalkoordinaten von 1., 2. und 5. Eigenmode der anfangs unverformten HIRENASD-Konfiguration bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$ ,  $q_\infty/E = 0,22 \cdot 10^{-6}$  und  $Re = 7 \cdot 10^6$

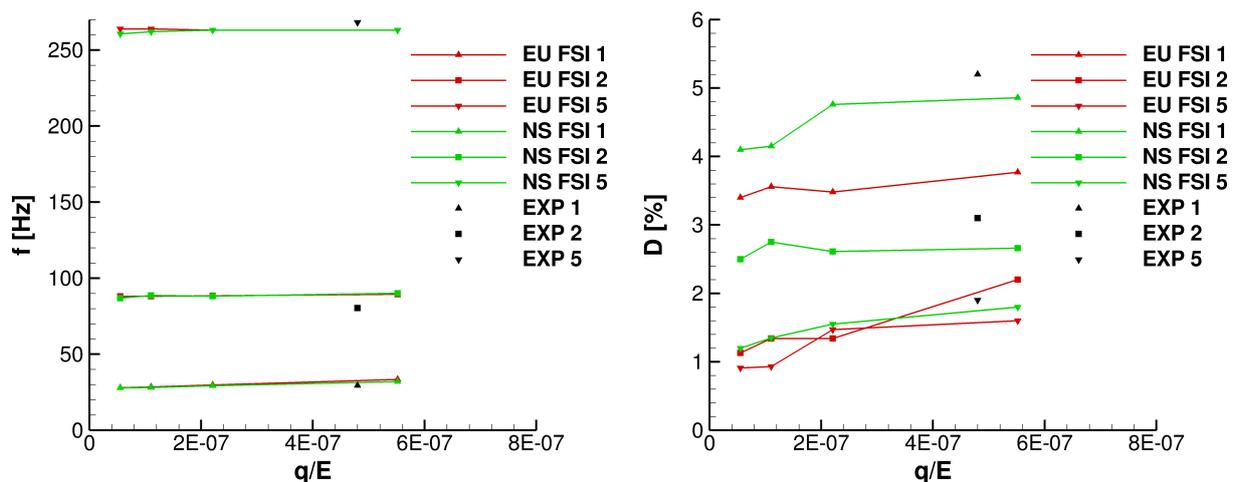


Abbildung 3.37: Frequenzverlauf (links) und Dämpfungsverlauf (rechts) in Abhängigkeit des entdimensionalisierten Staudrucks  $q_\infty/E$  von 1., 2. und 5. Eigenmode der anfangs unverformten HIRENASD-Konfiguration bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$  und  $Re = 7 \cdot 10^6$  und Vergleich mit experimentellen Daten [125]

von geometrisch linearen FEM nicht mehr zulässt. Verglichen werden die Frequenz und das Dämpfungsmaß beruhend auf den Ausschwingkurven der generalisierten Modalkoordinaten für reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömung mit experimentellen Daten [125]. Die verfügbaren experimentellen Vergleichswerte sind zwar für die Machzahl  $M_\infty = 0,83$  und den Anstellwinkel  $\alpha = -1,34^\circ$  gemessen worden, in [21] wurde aber gezeigt, dass der Machzahl- und der Anstellwinkeleinfluss auf die untersuchten Größen in diesem Bereich sehr gering ist und diese Daten folglich eine grobe Beurteilung der Simulationsergebnisse zulassen. Die ermittelten Schwingungsfrequenzen aus der reibungsfreien und der reibungsbehafteten Simulation zeigen kaum Unterschiede auf und stimmen unter den gegebenen Anströmbedingungen deutlich besser mit den experimentellen Werten überein, als die ohne Strömung bestimmten Eigenfrequenzen aus Tabelle 3.7. Die Frequenz der Torsionsmode ist annähernd indifferent gegenüber einer Staudruckvariation, während die Frequenzen der ersten und zweiten Biegemode im betrachteten Bereich mit zunehmendem Staudruck um ca.  $4\text{ Hz}$  bzw.  $2\text{ Hz}$  linear ansteigen. Bezüglich des Dämpfungsverhaltens lässt sich grundsätzlich feststellen, dass bei allen durchgeführten Simulationen gedämpftes, stabiles Verhalten vorliegt. Die Dämpfung des Systems nimmt mit zunehmendem Staudruck ebenfalls zu. Die reibungsbehafteten Simulationen liefern ein erwartungsgemäß höheres Dämpfungsmaß als die reibungsfreien Simulationen. Gegenüber den experimentellen Beobachtungen ist das Dämpfungsmaß stets etwas geringer, wobei bei Abweichungen kleiner  $0,5\%$  im reibungsbehafteten Fall von guter Übereinstimmung gesprochen werden kann. Dabei ist die materielle Dämpfung vernachlässigt worden.

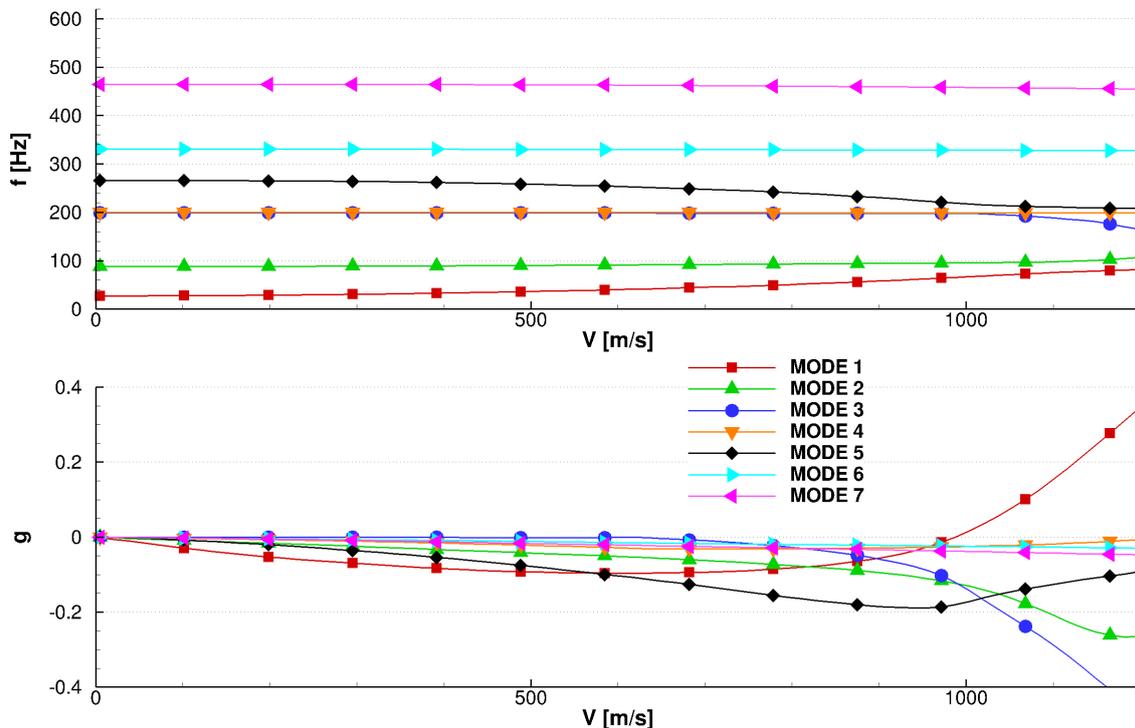


Abbildung 3.38: V-f- und V-g-Diagramm für die HIRENASD-Konfiguration bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$  und  $\rho_\infty = 1,259\text{ kg/m}^3$ , ermittelt mit AER-SDNS (reibungsfrei) und der g-Methode [52]

Um eine Stabilitätsaussage zum Schwingungsverhalten der HIRENASD-Konfiguration bei wesentlich höheren Staudrücken treffen zu können, wurde für die in Tabelle 3.9 gegebenen Bedingungen eine klassische Flatteranalyse durchgeführt. Die in Kapitel 3.2.3 dis-

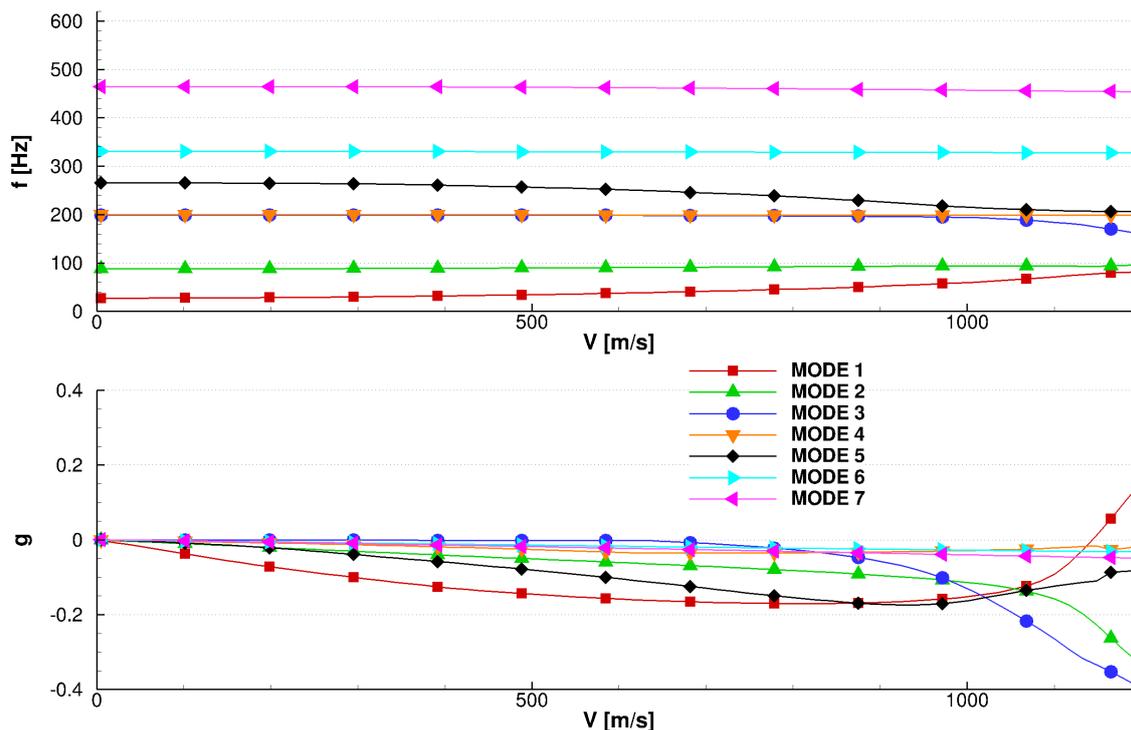


Abbildung 3.39: V-f- und V-g-Diagramm für die HIRENASD-Konfiguration bei  $M_\infty = 0,8$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$ ,  $Re = 7 \cdot 10^6$  und  $\rho_\infty = 1,259 \text{ kg/m}^3$ , ermittelt mit AER-SDNS (reibungsbefahet) und der g-Methode [52]

kutierten Ergebnisse haben gezeigt, dass der linearisierte, sehr effiziente Strömungslöser AER-SDNS verwendet werden kann, um die GAF als Eingangsgrößen für den Flatterlöser AER-STAB zu bestimmen. GAF-Matrizen wurden für neun reduzierte Frequenzen zwischen  $k_{red} = 0$  und  $k_{red} = 5,17$  berechnet. Anschließend werden die GAF-Matrizen zusammen mit der modalen Massen- und Steifigkeitsmatrix an die g-Methode übergeben, welche die in den Abbildungen 3.38 und 3.39 dargestellten Frequenz- und Dämpfungskurven in Abhängigkeit der Anströmgeschwindigkeit ausgibt. In Abbildung 3.38 sind die Ergebnisse der reibungsfreien Stabilitätsanalyse und in Abbildung 3.39 sind die Ergebnisse der reibungsbehafteten Stabilitätsanalyse dargestellt. Die Frequenzverläufe beider Methoden sind nahezu identisch und stimmen im entsprechenden Geschwindigkeitsbereich gut mit den nichtlinearen, im Zeitbereich gekoppelten Simulationen überein. Eine Annäherung der Frequenzgänge ist für die erste (MODE 1) und zweite Biegemode (MODE 2), sowie für die erste Torsionsmode (MODE 5) an die dritte Biegemode (MODE 3) zu beobachten. Daraus folgt für den reibungsfreien Fall ein Nulldurchgang der zur ersten Biegemode gehörenden Dämpfungskurve bei einer kritischen Flattergeschwindigkeit von  $U_{\infty,f} = 988 \text{ m/s}$ . Die viskose Simulation liefert eine kritische Flattergeschwindigkeit von  $U_{\infty,f} = 1144 \text{ m/s}$ , was einem Staudruck  $q_{\infty,f} \approx 800 \text{ kPa}$  entspricht. Diese Ergebnisse zeigen in Übereinstimmung mit den nichtlinear gekoppelten Resultaten, dass instabiles aeroelastisches Verhalten erst bei sehr hohen Totaldrücken zu erwarten ist, die weit über den möglichen Betriebszuständen des ETW liegen.



# Antwortproblem - Böenanalyse

Im Gegensatz zur Stabilitätsanalyse, die in den Kapiteln 2.5.2 und 3 näher behandelt wird und deren Ziel es ist, eine Aussage über das Systemverhalten in Hinblick auf die Stabilität treffen zu können, wird im Fall der Antwortanalyse die zeitabhängige Systemantwort gesucht. Im Rahmen der Antwortanalyse sind zum Beispiel Manöverlasten oder Böenlasten von besonderem Interesse. Als ein Teil des Zulassungsprozesses ist unter anderem der Nachweis zu erbringen, dass das Einwirken von diskreten und kontinuierlichen Böenlasten keine Gefährdung der Flugsicherheit darstellt. Systemantworten in Folge von diskreten Böenanregungen werden in dieser Arbeit mithilfe von numerischen Modellen im Zeit- und Frequenzbereich untersucht. Das primäre Ziel ist die Validierung des als Teil dieser Arbeit entwickelten linearisierten Böenmodells anhand von analytischen Lösungen und nichtlinearen Vergleichsrechnungen. Im folgenden Abschnitt wird das in Kapitel 2.1.4 beschriebene linearisierte Böenmodell mit der analytisch hergeleiteten Sears-Funktion [59] verglichen. Anschließend erfolgt eine Analyse bezüglich der zeitlichen Kopplungsparameter am Beispiel des AGARD 445.6-Flügels. Für eine Auswahl realistischer Böenanregungen gemäß der Vorschrift CS-25 [43] werden die Ergebnisse der nichtlinearen Kopplung im Zeitbereich mit den Ergebnissen aus der linearisierten Kopplung im Frequenzbereich für den AGARD 445.6-Flügel gegenübergestellt. Abschließend findet ein entsprechender Vergleich der Methoden aus Frequenz- und Zeitbereich für eine generische Gesamtflugzeugkonfiguration unter Berücksichtigung der Flugmechanik statt.

## 4.1 Zweidimensionaler Testfall

Die experimentelle Untersuchung des elastischen Antwortverhaltens von Flugzeugen auf eine Böenanregung ist sehr aufwendig. Aus diesem Grund sind frei zugängliche, experimentelle Daten für eine Validierung der Böenmodelle nicht verfügbar. Um dennoch eine Abschätzung der Vorhersagequalität der in den Kapiteln 2.1.3 und 2.1.4 vorgestellten Böenmodelle zu ermöglichen, wird der durch eine harmonische Böe an verschiedenen symmetrischen NACA-Profilen induzierte instationäre Auftriebsbeiwert mit einem analytisch bestimmten Referenzergebnis verglichen. Die durch eine harmonische Böe an einer ebenen, reibungsfreien Platte unendlicher Spannweite in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz induzierte Anstellwinkel beträgt

$$\alpha_B(t, x, z) = \hat{\alpha}_B(t, x, z) e^{i\omega \left( t - \frac{x - x_{ref}}{U_\infty} \right)}. \quad (4.1)$$

Die Sears-Funktion  $S(k_{red})$  repräsentiert einen Ausdruck für die komplexe Darstellung der korrespondierenden induzierten Auftriebskraft in inkompressibler Strömung [139], [59], [56]

$$S(k_{red}) = \frac{c_{A\alpha_B}(k_{red})}{2\pi} = \frac{2}{\pi k_{red} (H_0^2(k_{red}) - iH_1^2(k_{red}))}. \quad (4.2)$$

Die Funktionen  $H_n^2$  sind Hankel-Funktion der zweiten Art und der  $n$ -ten Ordnung, welche aus Linearkombination von Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung gebildet werden. Trägt man den Imaginärteil des auf  $2\pi$  normierten Auftriebsbeiwertes über den entsprechenden Realteil auf, so ergibt sich für einen in der Platten- bzw. Profilmittte befindlichen Referenzpunkt  $x_{ref} = c/2$  die in Abbildung 4.1 dargestellte Sears-Funktion in Abhängigkeit der mit der halben Plattenlänge gebildeten reduzierten Frequenz. Für  $k_{red} = 0$  stellt sich der rein reelle, quasistationäre Auftriebsanstieg  $c_{A\alpha} = 2\pi$  ein. Mit ansteigender Frequenz fällt die Auftriebsamplitude annähernd hyperbolisch ab und läuft für sehr große Frequenzen gegen Null. Der Phasenwinkel hingegen wächst mit steigender reduzierter Frequenz linear an und strebt gegen Unendlich. Aus diesen Eigenschaften resultiert der spiralförmige Kurvenverlauf gemäß Abbildung 4.1. Diese Kurvencharakteristik ergibt sich in Abhängigkeit von der Wahl des Referenzpunktes und muss besonders in Hinblick auf die Interpolation von diskreten Luftkräften, die nur für ausgewählte reduzierte Frequenzen bestimmt werden können, berücksichtigt werden. Für kleine reduzierte Frequenzen ähnelt der Verlauf der Sears-Funktion sehr stark dem Verlauf der Theodorsen-Funktion [56], welche bei der Beschreibung des bewegungsinduzierten Auftriebs einer harmonisch schwingenden, ebenen Platte Verwendung findet. Bei kleineren Wellenlängen relativ zur Plattenlänge, also größeren reduzierten Frequenzen, ist die induzierte Vertikalgeschwindigkeit nicht mehr annähernd konstant über die Plattenlänge und beide Funktionen liefern deutlich unterschiedliche Ergebnisse.

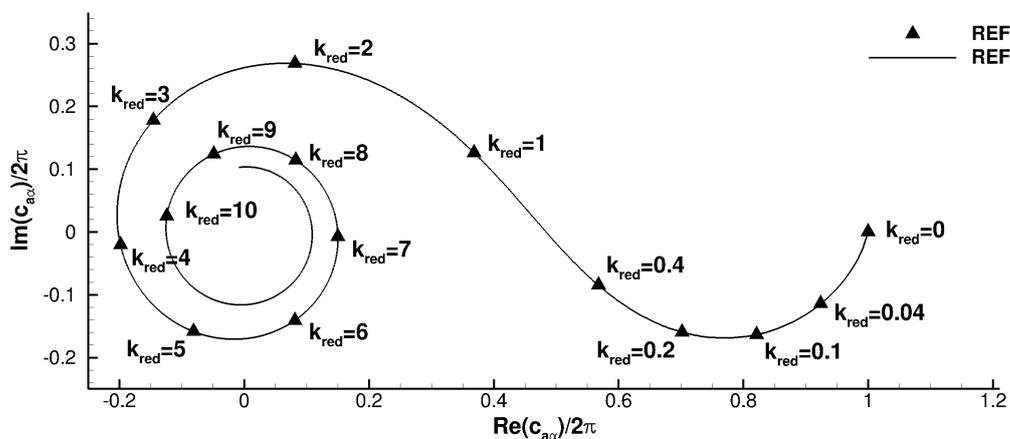


Abbildung 4.1: Sears-Funktion in der komplexen Ebene

Aufgrund der Tatsache, dass bedingt durch die spitze Vorderkante der ebenen Platte und der damit verbundenen stark ausgeprägten Nasensingularität, die Simulation mithilfe von CFD-Methoden zu numerischen Problemen führen kann, werden die folgenden Simulationen an symmetrischen NACA-Profilen variabler Dicke durchgeführt. Die zugehörigen Netze sind in Abbildung 4.2 abgebildet. Alle Netze besitzen  $384 \times 96$  Knoten, wobei die Profiloberfläche mit 256 Punkten diskretisiert ist. Der Fernfeldabstand beträgt zehn Profilschneidweiten und der Abstand der profilmächsten Zellreihe misst ca.  $10^{-5}$  Profilschneidweiten. Die relative Profildicke variiert zwischen  $d/l = 3\%$  und  $d/l = 12\%$ . Um zusätzlich nichtlineare Effekte und Kompressibilitätseffekte ausschließen zu können, wird eine Parametervariation der Böenamplitude und der ohnehin sehr klein gewählten Machzahl durchgeführt. Zur Vermeidung des Machzahleinflusses sind die resultierenden Luftkräfte anschließend mithilfe der Prandtl-Glauert-Transformation korrigiert worden.

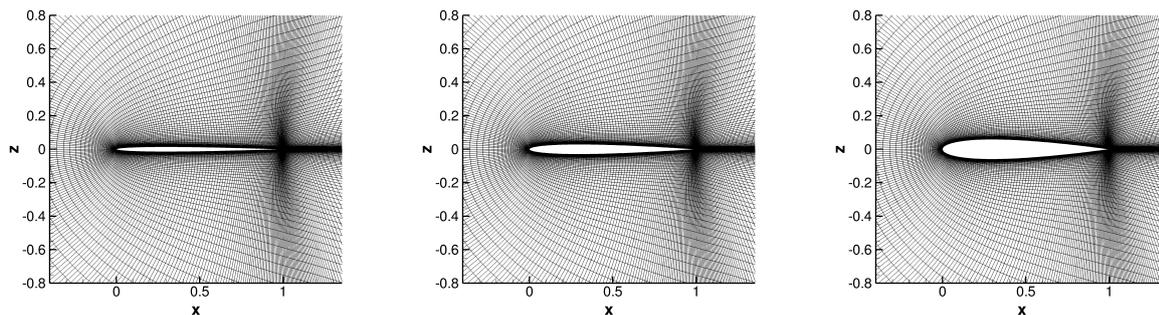


Abbildung 4.2: Diskretisierung des Strömungsraums für NACA-Profile variabler Dicke, links: NACA0003, Mitte: NACA0006, rechts: NACA0012

Ein Überblick bezüglich der Eigenschaften des festgelegten Basisfalls, um den die Parametervariationen erfolgen, ist in Tabelle 4.1 gegeben.

Machzahl $M_\infty$	0,2
Anstellwinkel $\alpha$	$0^\circ$
relative Profildicke $d/l$	6 %
induzierter Böenanstellwinkel $\hat{\alpha}_B$	$1^\circ$
Position des Böenreferenzpunktes $x_B$	0,5

Tabelle 4.1: Anströmbedingungen und Eigenschaften des NACA0006-Basisfalls

Der Vergleich des normierten, komplexen Auftriebanstiegs erfolgt jeweils für den reibungsfreien, linearisierten Löser AER-SDNS (SD EU) und den reibungsfreien, nichtlinearen Löser AER-NS (NL EU) mit der analytischen Referenzlösung. In Abbildung 4.3 sind die resultierenden Beiwerte für das nichtlineare “Artificial-Velocity”-Böenmodell in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für drei unterschiedliche Profildicken in der komplexen Ebene dargestellt. Neben dem NACA0006-Basisprofil mit einer relativen Profildicke von  $d/l = 6\%$  ( $d/16$ ) werden ebenfalls die entsprechenden NACA-Profile mit  $d/l = 3\%$  ( $d/13$ ) und  $d/l = 12\%$  ( $d/112$ ) Profildicke untersucht. Das Ziel dieser Vorgehensweise ist das Erfassen von Abhängigkeiten bezüglich der Profildicke, welche einen Vergleich mit der analytischen Lösung für die ebene Platte ermöglichen. Qualitativ zeigen alle drei Kurven sehr ähnliche Verläufe und geben den charakteristischen Verlauf der analytischen Sears-Funktion gut wieder. Anhand der Darstellung in der komplexen Ebene lässt sich aber keine eindeutige Aussage über den Einfluss der Profildicke erkennen. Trägt man die Amplitude über der reduzierten Frequenz entsprechend Abbildung 4.4 auf, so lässt sich bezüglich der Referenzlösung für alle Profile ein schnelleres Abklingen der Amplitude bei reduzierten Frequenzen größer als  $k_{red} = 5$  beobachten. Dieser Effekt lässt sich durch die mit ansteigender Frequenz an Bedeutung gewinnenden numerischen Dissipation der reibungsfreien CFD-Simulation begründen und tritt verstärkt mit wachsender Profildicke auf. Die in Abbildung 4.5 dargestellte Phasenlage zeigt, dass die Phase für reduzierte Frequenzen kleiner als  $k_{red} = 5$  sehr gut vorhergesagt wird. Bei größeren reduzierten Frequenzen wird unabhängig von der Profildicke eine Verschiebung der Phasenlage zu größeren Frequenzen beobachtet.

Die Ergebnisse der Dickenvariation für den reibungsfreien, linearisierten CFD-Löser im Frequenzbereich und die analytische Sears-Funktion sind in Abbildung 4.6 gegenüberge-

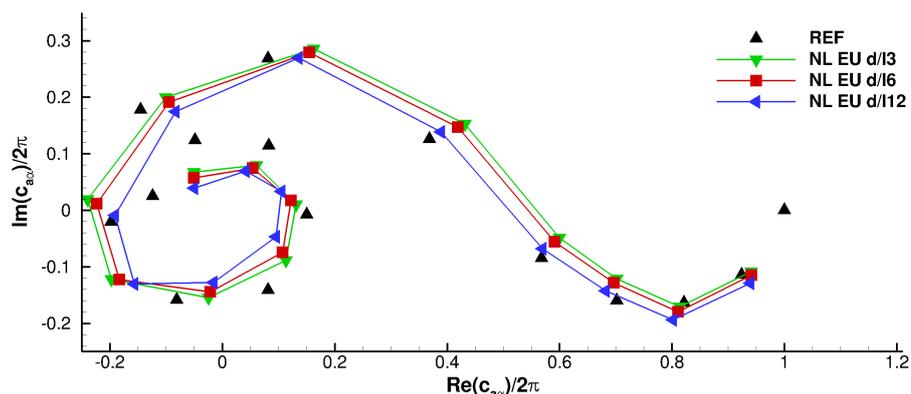


Abbildung 4.3: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Profile NACA0003 (d/13), NACA0006 (d/16), NACA0012 (d/112), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU),  $M_\infty = 0,2$ ,  $\hat{\alpha}_B = 1^\circ$

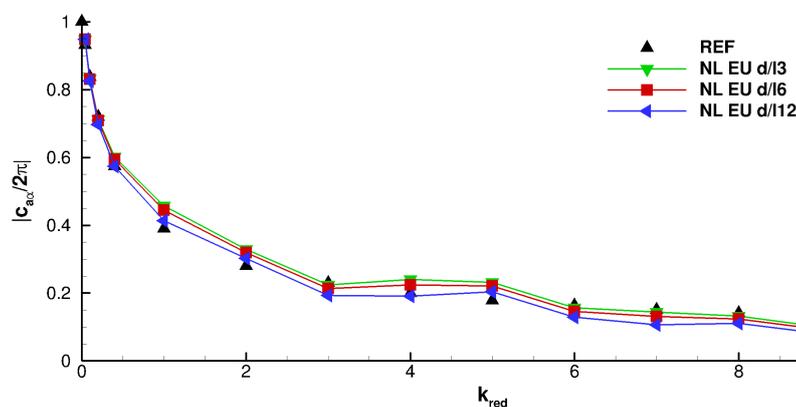


Abbildung 4.4: Amplitude des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Profile NACA0003 (d/13), NACA0006 (d/16), NACA0012 (d/112), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU),  $M_\infty = 0,2$ ,  $\hat{\alpha}_B = 1^\circ$

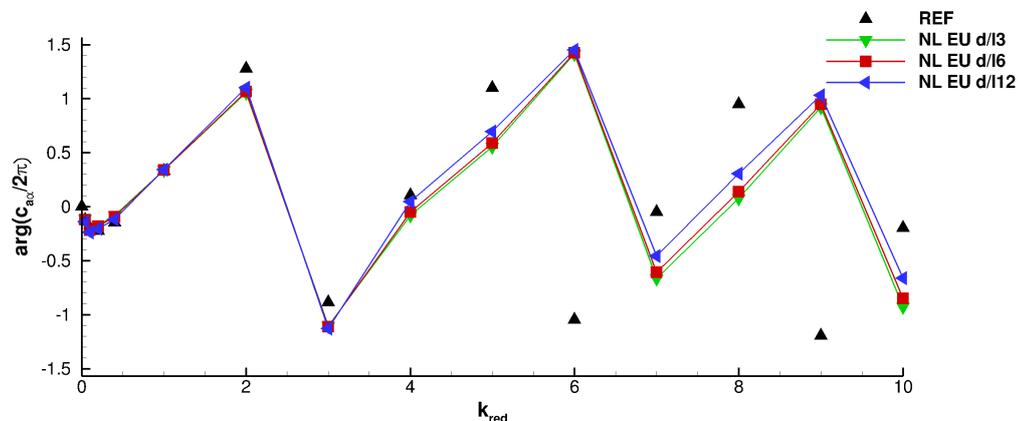


Abbildung 4.5: Phasenlage des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Profile NACA0003 (d/13), NACA0006 (d/16), NACA0012 (d/112), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU),  $M_\infty = 0,2$ ,  $\hat{\alpha}_B = 1^\circ$

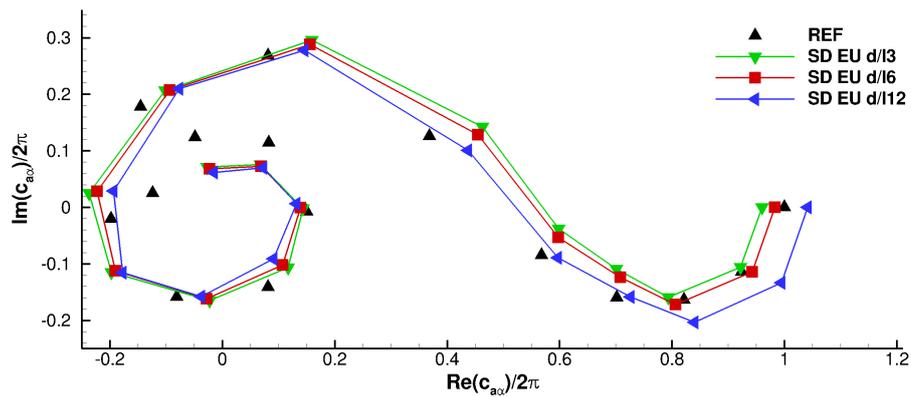


Abbildung 4.6: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Profile NACA0003 (d/13), NACA0006 (d/16), NACA0012 (d/112), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU),  $M_\infty = 0,2$ ,  $\hat{\alpha}_B = 1^\circ$

stellt. Die Übereinstimmung mit den nichtlinearen Simulationen im Zeitbereich ist sehr gut. Im Wesentlichen werden die gleichen Charakteristiken beobachtet, lediglich die Amplitude des Auftriebsanstiegs wird für das NACA0012-Profil in Verbindung mit sehr kleinen reduzierten Frequenzen etwas überschätzt.

Die Sears-Funktion ist unter der Annahme inkompressibler Strömungseigenschaften hergeleitet worden. Weil die hier eingesetzten CFD-Methoden die kompressiblen Strömungsgleichungen lösen, wird im Folgenden der Machzahleinfluss untersucht. Die übrigen Anström- und Profilparameter entsprechen dem in Tabelle 4.1 beschriebenen Basisfall. Die Abbildungen 4.7 bis 4.9 zeigen die komplexe Ebene, die Amplitude und die Phasenlage des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Machzahlen  $M_\infty = 0,1$  (M0.1),  $M_\infty = 0,2$  (M0.2) und  $M_\infty = 0,4$  (M0.4) der nichtlinearen Simulation im Zeitbereich. Obwohl die grundsätzliche, qualitative Form der Sears-Funktion für alle subsonischen Anströmmachzahlen wiedergegeben wird, sind trotz der durchgeführten Prandtl-Glauert-Korrektur deutliche Unterschiede zwischen den Lösern zu erkennen. Im Amplitudenverlauf zeichnet sich ab, dass die Amplitude bei der Machzahl  $M_\infty = 0,1$  leicht überschätzt wird, während die Amplitude bei  $M_\infty = 0,4$  und größeren reduzierten Frequenzen zu stark gedämpft ist. Auffällig ist außerdem, dass dem abklingenden Kurvenverlauf im Fall der kleinen Machzahl eine Oszillation überlagert ist, die sich vor allem auf den mittleren betrachteten Frequenzbereich auswirkt. Bezüglich der Phasenlage liefert die Simulation bei  $M_\infty = 0,1$  deutlich bessere Übereinstimmung mit dem inkompressiblen Referenzergebnis, als die Simulationen bei höheren Machzahlen. Das zugehörige, mit dem linearisierten Löser berechnete Simulationsergebnis ist in Abbildung 4.10 zu sehen und stimmt für alle Machzahlen sehr gut mit der nichtlinearen Methode überein.

Die letzte Parametervariation wird hinsichtlich der induzierten Böenamplitude durchgeführt, um entsprechende Nichtlinearitäten ausschließen zu können. Die mit den induzierten Böenamplituden korrespondierenden induzierten Anstellwinkel sind  $\alpha = 0,5^\circ$  (WB05),  $\alpha = 1^\circ$  (WB1) und  $\alpha = 2^\circ$  (WB2). Alle anderen Anström- und Profilparameter entsprechen auch hier dem in Tabelle 4.1 beschriebenen Basisfall. Die entsprechenden Abbildungen 4.11 der nichtlinearen und 4.12 der linearisierten Lösung zeigen keine Unterschiede, so dass dieser Einfluss im untersuchten Amplitudenbereich vernachlässigt werden kann.

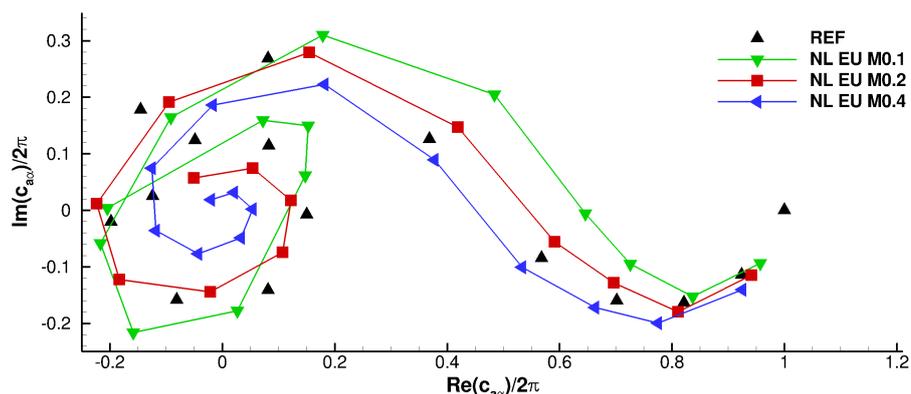


Abbildung 4.7: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Machzahlen  $M_\infty = 0,1$  (M0.1),  $M_\infty = 0,1$  (M0.4),  $M_\infty = 0,4$  (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006,  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$

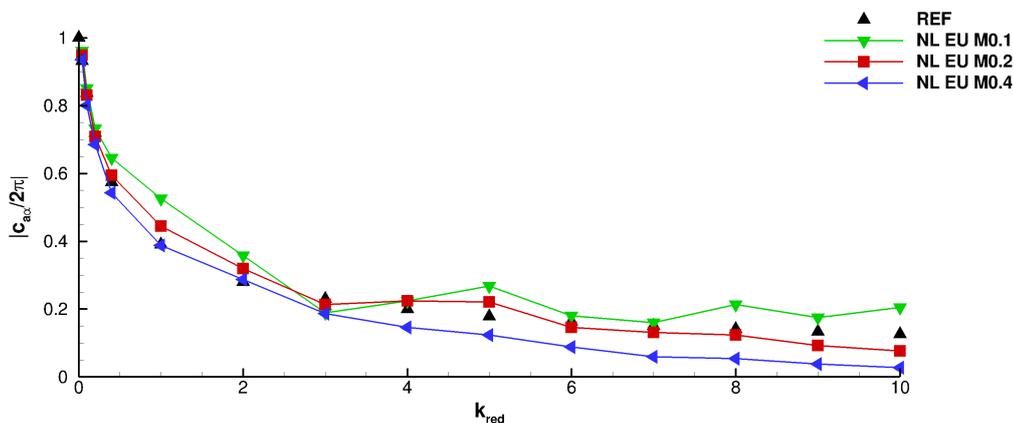


Abbildung 4.8: Amplitude des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Machzahlen  $M_\infty = 0,1$  (M0.1),  $M_\infty = 0,1$  (M0.4),  $M_\infty = 0,4$  (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006,  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$

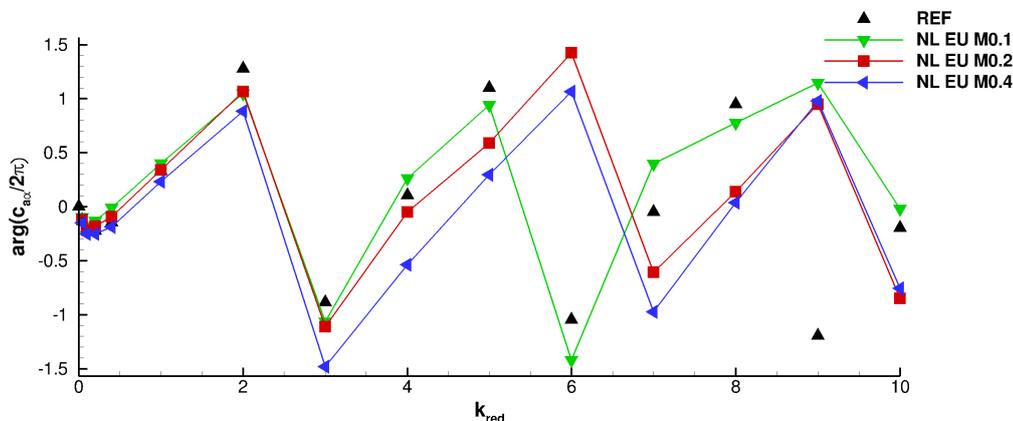


Abbildung 4.9: Phasenlage des normierten Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für die Machzahlen  $M_\infty = 0,1$  (M0.1),  $M_\infty = 0,1$  (M0.4),  $M_\infty = 0,4$  (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006,  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$

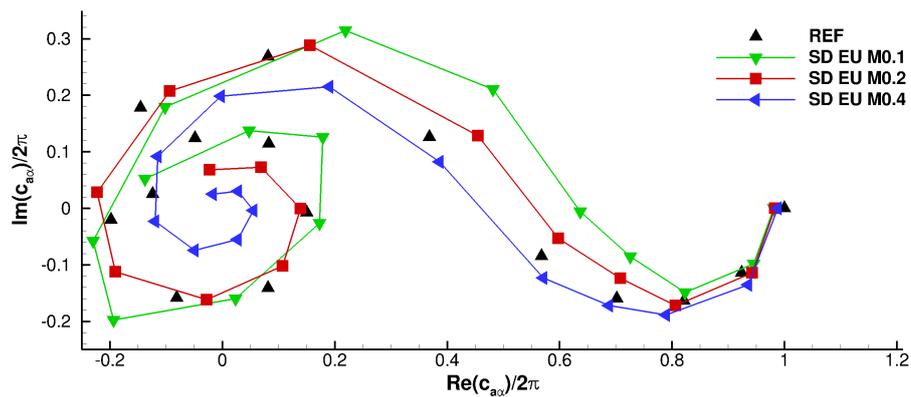


Abbildung 4.10: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Machzahlen  $M_\infty = 0,1$  (M0.1),  $M_\infty = 0,1$  (M0.4),  $M_\infty = 0,4$  (M0.4), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU), NACA0006,  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$

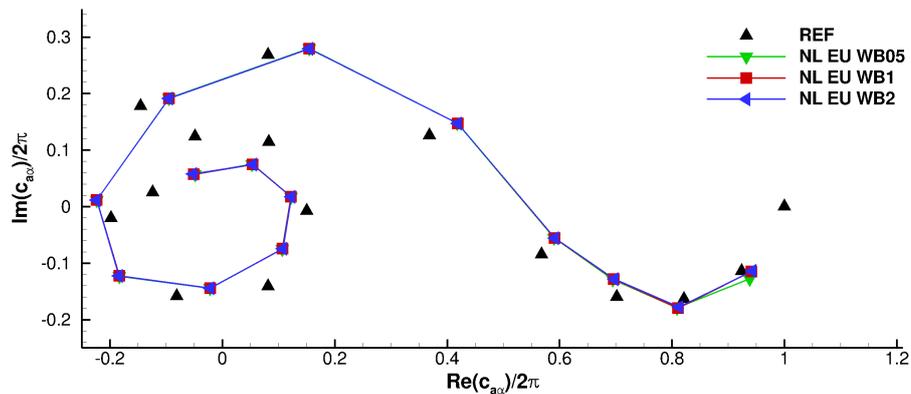


Abbildung 4.11: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Böenamplituden  $\hat{\alpha}_B=0, 5^\circ$  (WB05),  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$  (WB1),  $\hat{\alpha}_B=2^\circ$  (WB2), bestimmt mit dem reibungsfreien, nichtlinearen Löser (NL EU), NACA0006,  $M_\infty = 0,2$

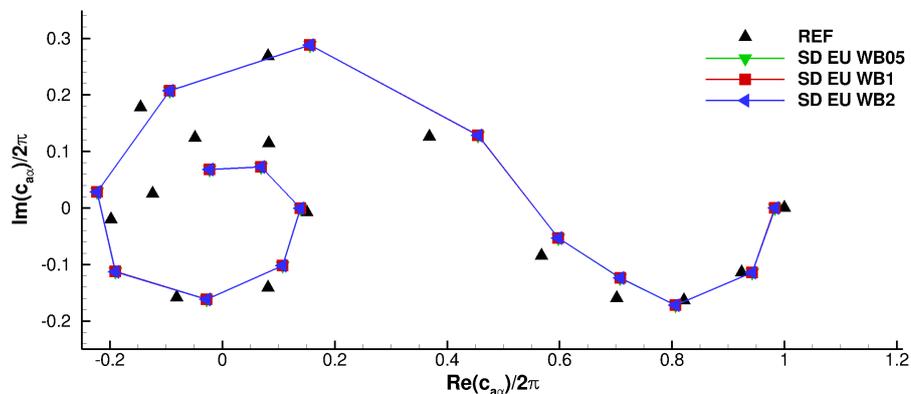


Abbildung 4.12: Sears-Funktion in der komplexen Ebene für die Böenamplituden  $\hat{\alpha}_B=0, 5^\circ$  (WB05),  $\hat{\alpha}_B=1^\circ$  (WB1),  $\hat{\alpha}_B=2^\circ$  (WB2), bestimmt mit dem reibungsfreien, linearisierten Löser (SD EU), NACA0006,  $M_\infty = 0,2$

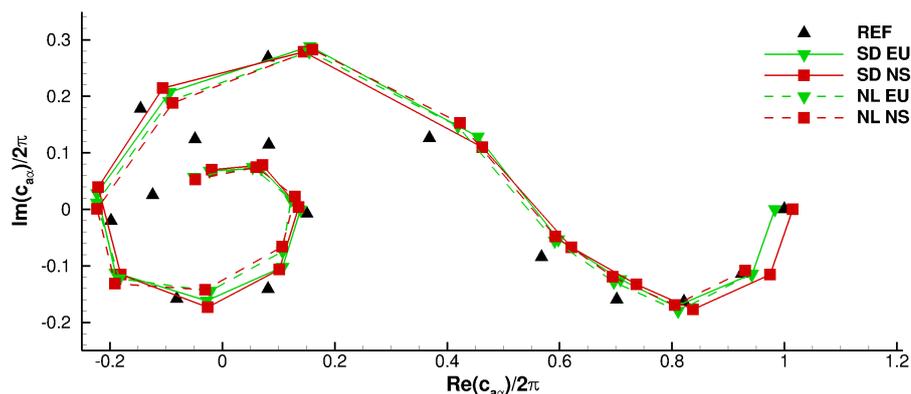


Abbildung 4.13: Sears-Funktion in der komplexen Ebene, Vergleich zwischen der reibungsfreien (EU) und der reibungsbefahdeten (NS) Lösung, sowie zwischen der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (SD) Lösung, NACA0006,  $M_\infty = 0,2$ ,  $\hat{\alpha}_B = 1^\circ$

Abschließend sind die Ergebnisse der reibungsfreien und der reibungsbefahdeten Methoden in Abbildung 4.13 einander gegenübergestellt worden, um beurteilen zu können, ob die Böenmodelle auch für reibungsbefahdete Simulationen anwendbar sind. Auch hier stimmen die Resultate gut überein. Für die verwendete subsonische Machzahl  $M_\infty = 0,2$  fallen die Unterschiede in Folge von Reibungseinflüssen noch kleiner aus, als die Unterschiede in Folge der Linearisierung.

## 4.2 Flügel kleiner Streckung

Nachdem im vorangehenden Kapitel sowohl das nichtlineare als auch das linearisierte Böenmodell erfolgreich für einen zweidimensionalen Testfall eingesetzt und mit analytischen Ergebnissen verglichen wurde, sollen im Folgenden beide Modelle unter realistischen Bedingungen auf einen dreidimensionalen Testfall angewendet werden. Als Testfall bietet sich der AGARD 445.6-Flügel an, da dieser im Rahmen der Stabilitätsanalyse bereits über den gesamten Machzahlbereich untersucht worden ist. Die Geometrie und das numerische Modell des AGARD 445.6-Flügels wurde in Kapitel 3.1 ausführlich vorgestellt und kommt auch hier in unveränderter Form zur Anwendung. Im Vordergrund der folgenden Untersuchungen steht der Vergleich zwischen der Modellierung im Zeit- und Frequenzbereich. Vor der Analyse von Systemantworten auf diverse Böenanregungen werden Simulationsergebnisse ausgewertet, die eine Beurteilung des numerischen Kopplungsschemas im Zeitbereich bezüglich Genauigkeit und Effizienz ermöglichen.

### 4.2.1 Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas

In Kapitel 2.4.4 ist ausführlich beschrieben worden, wie der Informationsaustausch zwischen den Lösern organisiert ist. Zwei frei wählbare Variablen, die durch den Anwender vorgegeben werden müssen, sind der physikalische Zeitschritt und die Anzahl der Pseudo-

zeitschritte, nach denen ein Informationsaustausch zwischen den Lösern stattfindet. Beide Parameter nehmen in gegensätzlicher Weise direkten Einfluss auf die Effizienz und die Genauigkeit der gekoppelten Simulation. Aufgrund dieses Zielkonfliktes ist die Wahl geeigneter Größen von besonderer Bedeutung und soll im Folgenden näher untersucht werden. Als Testfall dient die reibungsfreie aeroelastische Antwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Böe im Unterschallbereich. In Tabelle 4.2 sind die Anströmbedingungen und die Eigenschaften der einwirkenden Böe zusammengefasst. Die Anströmgeschwindigkeit ist kleiner als die kritische Flattergeschwindigkeit, wodurch eine gedämpfte Strukturantwort zu erwarten ist. In Anströmrichtung entspricht das Böenprofil einer "1-cos"-Vertikalböe, die einen maximalen Anstellwinkel von  $\alpha = 2,87^\circ$  am Tragflügel induziert. Die in spannungsweitiger Richtung induzierte Böengeschwindigkeit ist konstant.

Machzahl $M_\infty$	0,499
Anströmgeschwindigkeit $U_\infty$	100 m/s
Luftdichte $\rho_\infty$	0,4278 kg/m <sup>3</sup>
Staudruck $q_\infty$	2139 Pa
Anstellwinkel $\alpha$	0°
Böengeschwindigkeit $\hat{w}_B$	5 m/s
zeitliche Böenlänge $t_B$	0,1 s
räumliche Böenlänge bezogen auf die Profilmurzeltiefe $l_B/l_r$	17,93

Tabelle 4.2: Anströmbedingungen und Eigenschaften der "1-cos"-Vertikalböe für die Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas am AGARD 445.6-Flügel

Zur Beurteilung des Kopplungsschemas wird zum einen der physikalische Zeitschritt zwischen  $\Delta t = 0,0001$  s und  $\Delta t = 0,01$  s variiert. Das entspricht einer Auflösung von 1000 bzw. 10 Zeitschritten pro Schwingungsperiode der ersten Eigenmode. Bezüglich der Kopplungsart wird zwischen einer starken Kopplung und einer schwachen Kopplung unterschieden. Die Bezeichnung "schwache Kopplung" bedeutet hier, dass nur am Anfang jedes physikalischen Zeitschritts ein Informationsaustausch zwischen den Lösern stattfindet. Unter "starker Kopplung" wird hier verstanden, dass der Informationsaustausch jeweils nach 10 abgeschlossenen Pseudozeitschritten des CFD-Lösers erfolgt. Bedingt durch das vorgegebene Abbruchkriterium, einem maximalen RMS-Dichteresiduum von  $10^{-4}$ , findet der Informationsaustausch für den kleinen Zeitschritt mindestens zweimal und für den großen Zeitschritt mindestens zehnmal pro physikalischem Zeitschritt statt.

Testfall	physikalischer Zeitschritt $\Delta t$ in [s]	Kopplungsart	Anzahl der Pseudozeitschritte	Rechenzeit $t$ in [s]
0001w	0,0001	schwach	84168	190546
0001s	0,0001	stark	83112	237532
001w	0,001	schwach	50400	95931
001s	0,001	stark	44867	118759
01w	0,01	schwach	48381	87252
01s	0,01	stark	17014	45024

Tabelle 4.3: Testfälle und Rechenzeitbedarf für die Analyse des zeitlichen Kopplungsschemas am AGARD 445.6-Flügel

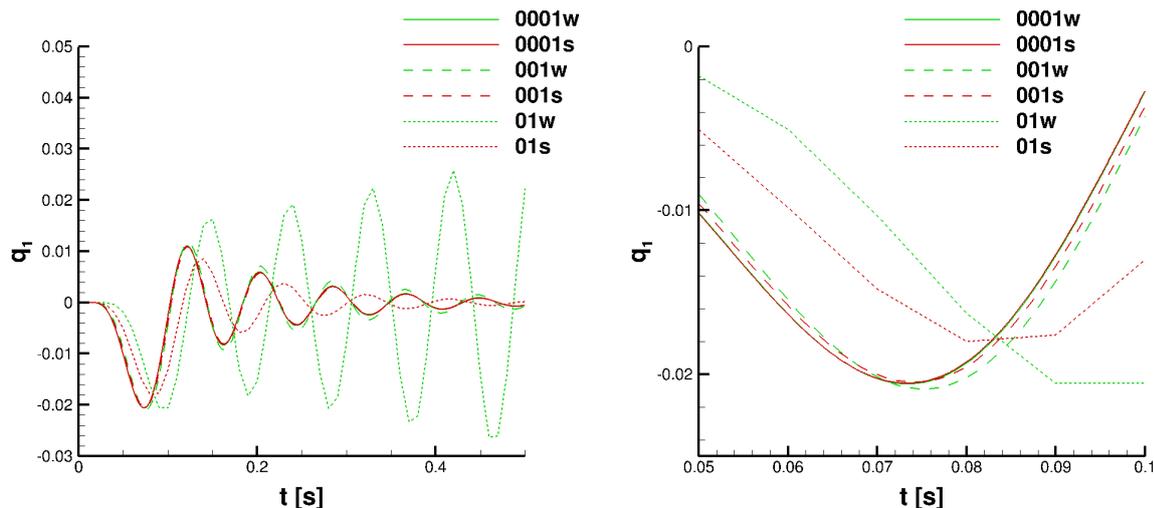


Abbildung 4.14: Vergleich der Böenantworten der ersten generalisierten Koordinate des AGARD 445.6-Flügels für starke (s) und schwache (w) zeitliche Kopplungsschemata variablen Zeitschritts, bestimmt mit dem nichtlinearen, reibungsfreien Löser,  $M_\infty = 0,499$ ,  $q_\infty = 2139$  Pa,  $\hat{w}_B = 5$  m/s,  $t_B = 0,1$  s; rechts: vergrößerte Ansicht der ersten Auslenkungsamplitude

In der Tabelle 4.3 sind die Kombinationen der zeitlichen Auflösung und der Kopplungsart aller durchgeführten Simulationen aufgelistet. Zur Auswertung der Effizienz der einzelnen Kopplungsschemata sind zusätzlich die Anzahl der Pseudozeitschritte und die benötigte Rechenzeit erfasst worden. Alle Simulationen wurden auf jeweils einem Prozessor (8-way Opteron, Dual-Core, 2.6 GHz) durchgeführt. Zum Vergleich der Genauigkeit der Kopplungsarten ist das Ausschwingverhalten der ersten generalisierten Koordinate über eine Simulationszeit von  $t = 0,5$  s in Abbildung 4.14 links dargestellt. Das Diagramm auf der rechten Seite zeigt eine vergrößerte Ansicht der ersten Auslenkungsamplitude. Aus dem Vergleich der starken (0001s) und der schwachen (0001w) Lösung für den kleinen Zeitschritt  $\Delta t = 0,0001$  s resultieren keine Unterschiede im zeitlichen Verlauf der Strukturantwort. Der Zeitschritt ist in diesem Fall klein genug, dass die schwache Kopplung identische Ergebnisse zur starken Kopplung liefert. Die entsprechende Strukturantwort soll im Folgenden als Referenzlösung für die Bewertung der anderen Parametervariationen gemäß Tabelle 4.3 gelten. Der wesentliche Nachteil des kleinen physikalischen Zeitschritts spiegelt sich in der großen benötigten Rechenzeit wider. Für die starke Kopplung ist die Rechenzeit aufgrund des häufigen Informationsaustauschs, welcher die Interpolation der Oberfläche und der Kräfte, sowie die Netznachführung umfasst, deutlich größer. Im Fall des mittleren Zeitschritts  $\Delta t = 0,001$  s (001s) verkürzt sich die Rechenzeit um den Faktor zwei. Obwohl der physikalische Zeitschritt um den Faktor zehn größer ist, halbiert sich die Anzahl der Pseudozeitschritte, weil die Struktur je physikalischem Zeitschritt eine größere Deformation erfährt und der Löser folglich mehr Pseudozeitschritte braucht, um das Konvergenzabbruchkriterium zu erreichen. Ein Blick auf die korrespondierenden Kurven in Abbildung 4.14 zeigt, dass der Verlauf anfangs sowohl durch die starke, als auch die schwache Kopplung zufriedenstellend erfasst wird. Erst nach zwei Schwingungsperioden lassen sich im Fall der schwachen Kopplung kleine Abweichungen in den Amplituden feststellen. Der große Zeitschritt  $\Delta t = 0,01$  s (01s) liefert erwartungsgemäß die kürzesten Rechenzeiten. Das Dämpfungsverhalten der Schwingung wird durch die starke Kopplung befriedigend vorhergesagt, die Phasenlage ist allerdings falsch. Für die schwache Kopplung

ergibt sich ein komplett anderes Antwortverhalten. Der Löser sagt eine instabile Strukturantwort voraus und auch die Phasenlage ist verschoben. Dieses Beispiel zeigt sehr eindrucksvoll, wie wichtig die Wahl der Kopplungsart in Kombination mit der Zeitschrittweite ist, um das korrekte Systemverhalten abzubilden. Das optimale Ergebnis aus Effizienz und Genauigkeit liefert für diesen Testfall die Simulation mit starker Kopplung und dem mittleren Zeitschritt  $\Delta t = 0,001s$  (001s). Eine weitere Effizienzsteigerung ließe sich durch eine Reduzierung der Löserkommunikationen pro physikalischem Zeitschritt, das heißt eine Erhöhung der vom Strömungslöser durchgeführten Pseudozeitschritte bevor es zum Informationsaustausch zwischen den Lösern kommt, realisieren. Aus den beschriebenen Ergebnissen zur Genauigkeit der zeitlichen Kopplungsschemata lässt sich schlussfolgern, dass der physikalische Zeitschritt im Fall einer starken Kopplung der Löser so gewählt werden sollte, dass die höchste Strukturschwingungsfrequenz, die berücksichtigt werden soll, mit ca. 100 physikalischen Zeitschritten pro Schwingungsperiode aufgelöst wird. Im Fall einer schwachen Kopplung sollten ca. 1000 physikalische Zeitschritte bezogen auf die kürzeste Schwingungsperiodendauer der Struktur gewählt werden. Im Allgemeinen ist es aber ratsam, für jedes neue Problem eine vergleichbare Studie durchzuführen, weil der optimale Zeitschritt sehr stark von der untersuchten Konfiguration und den auftretenden Strömungsphänomenen abhängt und entsprechend variieren kann.

### 4.2.2 Böenantwort im Zeit- und Frequenzbereich

Weil für den AGARD 445.6-Flügel keine experimentell ermittelten Böenantworten vorliegen, beschränkt sich die Bewertung der Ergebnisse auf einen Vergleich der linearisierten Frequenzbereichsmethoden und der nichtlinearen Zeitbereichsmethoden untereinander. Untersucht wurden je eine subsonische  $M_\infty = 0,499$ , eine transsonische  $M_\infty = 0,960$  und eine supersonische  $M_\infty = 1,141$  Machzahl. Die zugehörige Luftdichte kann aus Tabelle 3.4 entnommen werden und für den geometrischen Anstellwinkel gilt stets  $\alpha = 0^\circ$ . Als Voraussetzung für eine Formulierung der relevanten Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich müssen neben den modalen Strukturmatrizen und den bewegungsinduzierten GAF auch die böeninduzierten GAF bestimmt und bereitgestellt werden. Die Berechnung erfolgt mithilfe des linearisierten Löser AER-SDNS für die oben genannten Machzahlen und mehrere reduzierten Frequenzen im Bereich der strukturellen Eigenfrequenzen. Die Böenluftkräfte sind abhängig von der reduzierten Frequenz und dem Böenreferenzpunkt, aber prinzipiell unabhängig von den dynamischen Struktureigenschaften. Diese werden im Zuge der Generalisierung berücksichtigt, bei der die durch die Böenbeaufschlagung induzierte Druckverteilung mit den Struktureigenmoden multipliziert wird. Um das im Frequenzbereich formulierte Modell einer Lösung als Antwortproblem im Zeitbereich zugänglich zu machen, müssen die GAF in den Laplace-Bereich transformiert und geeignet interpoliert werden.

Die Abbildungen 4.15 bis 4.17 zeigen den Real- (RE) und Imaginärteil (IM) der GAF der ersten Biege- (GAF 1) und Torsionsmode (GAF 2) als Resultat der reibungsfreien (EU) und der reibungsbehafteten (NS), sowie der nichtlinearen fourieranalytischen und der linearisierten (SD) Simulation für die ausgewählten Machzahlen. Der Böenreferenzpunkt liegt an der Flügelvorderkante am Ort der Flügelwurzel. Die reduzierte Frequenz wurde mit der Referenzlänge  $l_{ref} = 1 m$  gebildet. Die Kurven zeigen den mithilfe der Methode nach Roger [137] interpolierten Verlauf der GAF in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz. Aufgrund des oszillierenden Verlaufs aller Böen-GAF lässt sich wieder der

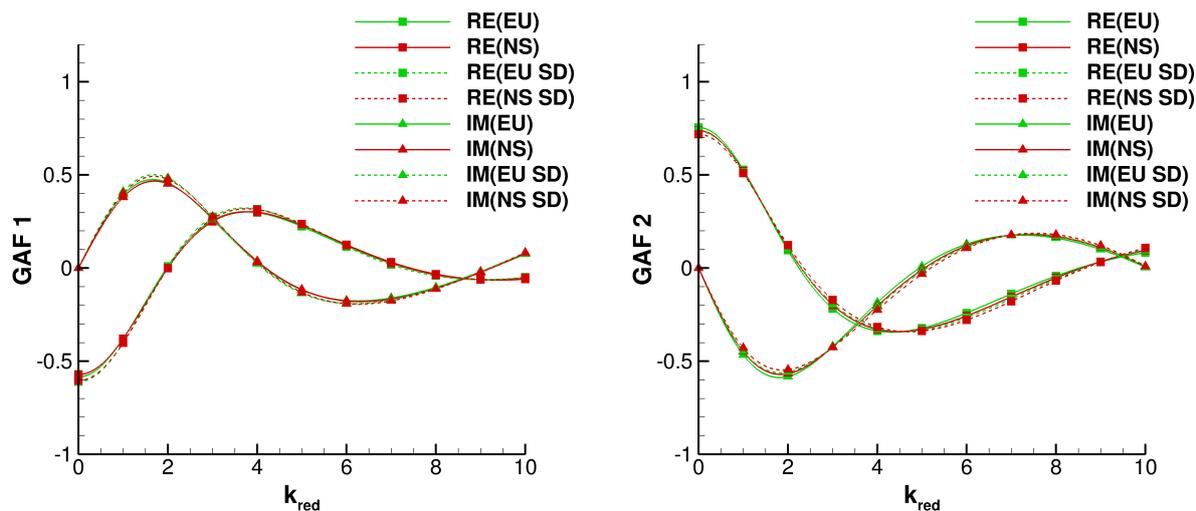


Abbildung 4.15: Böen-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für  $M_\infty = 0,499$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

typische, im Rahmen der zweidimensionalen Untersuchungen bereits beobachtete spiralförmige Kurvencharakter nachweisen. Der qualitative Verlauf der Kurven bleibt für alle Machzahlen unverändert. Quantitativ sind sowohl im Real- als auch im Imaginärteil Unterschiede zu erkennen. Vor allem im transsonischen Geschwindigkeitsbereich sind die Absolutwerte der GAF betragsmäßig etwas größer. Die Übereinstimmung aller numerischer Methoden ist sehr gut. Wie schon für die bewegungsinduzierten GAF anhand der Strukturanalyse gezeigt wurde, können die dynamischen Eigenschaften des Systems ausreichend gut durch die linearisierten Verfahren abgebildet werden. Aus diesem Grund sind die GAF-Verläufe als Ergebnis des nichtlinearen und des linearisierten Lösers nahezu identisch. Geringfügige Unterschiede können in Folge von Reibungseinflüssen beobachtet werden, speziell im Überschallbereich und bei kleinen reduzierten Frequenzen.

Die Wahl bezüglich der Form und Stärke der Böenanregung wurde entsprechend der Richtlinien CS-25 [43] und MIL-F-8785C [107] getroffen. Die ausgewählte Böenform entspricht einer “1-cos”-Funktion. Der Vorteil dieser Wahl liegt darin, dass die Struktur nach der Böenbeaufschlagung um die Ausgangslage schwingt bzw. im gedämpften Fall in diese zurückkehrt. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit wurde mit  $U_\infty$  so gewählt, dass für alle Machzahlen eine gedämpfte Systemantwort resultiert. In Tabelle 4.4 sind die Eigenschaften der vier vorgegebenen “1-cos”-Vertikalböen zusammengefasst. Für jede der drei untersuchten Machzahlen ist die Antwort auf je eine kurze Böe mit  $l_B = 5 \text{ m}$  Länge und eine lange Böe mit  $l_B = 50 \text{ m}$  Länge bestimmt worden. Diese Böenlängen korrespondieren mit den Anregungszeiten von  $t = 0,05 \text{ s}$  und  $t = 0,5 \text{ s}$ . Außerdem wurde die Böenamplitude zwischen einer schwachen Böe mit  $\hat{w}_B = 2 \text{ m/s}$  und einer starken Böe mit  $\hat{w}_B = 10 \text{ m/s}$  variiert. Diese induzierten Geschwindigkeiten entsprechen einem induzierten Anstellwinkel von  $\hat{\alpha} = 1,15^\circ$  beziehungsweise  $\hat{\alpha} = 5,71^\circ$ . Die ausgewählten Eigenschaften der “1-cos”-Böe stellen realistische Böenbeaufschlagungen dar, die im Rahmen des Zulassungsprozesses unter anderem geprüft werden.

In den Abbildungen 4.18 bis 4.23 ist jeweils die Antwort der ersten (MODE1) und zweiten (MODE2) generalisierten Koordinate über eine Dauer von  $t = 1 \text{ s}$  dargestellt. Verglichen werden die reibungsfreie (EU), die reibungsbehaftete (NS), die nichtlineare (FSI) und die

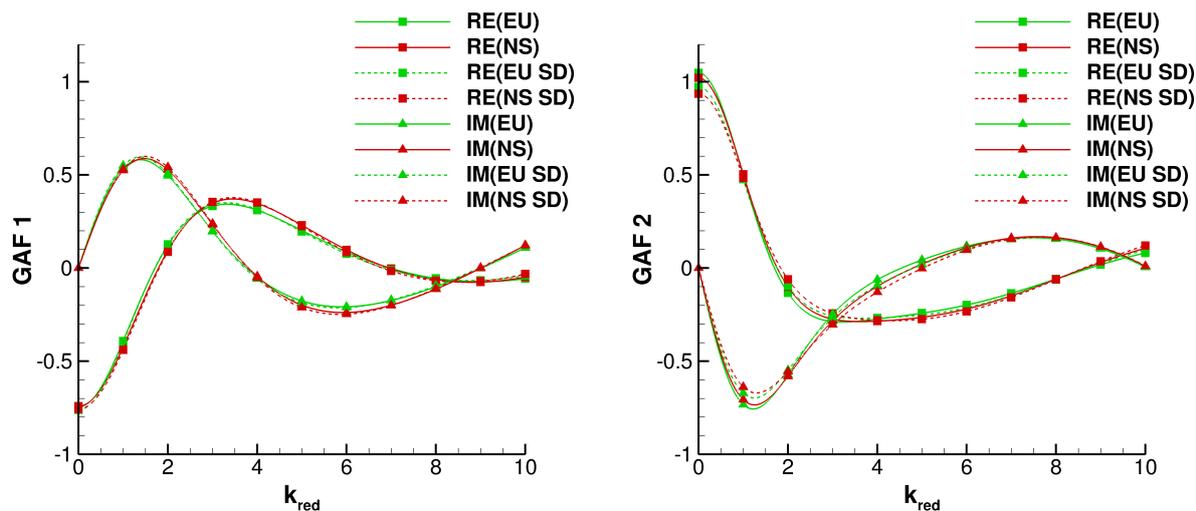


Abbildung 4.16: Bően-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für  $M_\infty = 0,960$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

Anströmgeschwindigkeit $U_\infty$ in $m/s$	Böenlänge $l_B$ in $m$	Böenamplitude $\hat{w}_B$ in $m/s$
100	50	2
100	50	10
100	5	2
100	5	10

Tabelle 4.4: Eigenschaften der am AGARD 445.6-Flügel untersuchten “1-cos”-Böen [53]

linearisierte (LZZ) Methode. Für die nichtlineare Simulation wurde eine starke Kopplung mit einem physikalischen Zeitschritt von  $\Delta t = 0,001 s$  gewählt. In Abbildung 4.18 ist das Simulationsergebnis für die Beaufschlagung durch eine lange Böe variabler Böenstärke bei der Machzahl  $M_\infty = 0,499$  dargestellt. In Folge des durch die Böe induzierten zusätzlichen Anstellwinkels resultiert vor allem für die erste generalisierte Koordinate in Form der ersten Biegemode eine erhebliche Auslenkung. Die maximale Auslenkung entspricht für die schwache Böe 2,3 % der Flügelwurzeltiefe und im Fall der starken Böe 11,5 % der Flügelwurzeltiefe, was in etwa mit der maximalen Auslenkung vergleichbar ist, für die die Verwendung geometrisch linearer FEM-Methoden noch zulässig ist. Ein Vergleich der Auslenkungsamplituden zeigt, dass die Böenantworten für beide Böenstärken nahezu exakt linear skalierbar sind. Dieses Ergebnis ist eine logische Konsequenz für die Anwendung linearer Methoden (LZZ). Im Fall der nichtlinearen Kopplung (FSI) können sich jedoch Unterschiede aufgrund von aerodynamischen Nichtlinearitäten ergeben. Unmittelbar nachdem die Böe den Flügel verlassen hat, schwingt die Struktur sehr stark gedämpft weiter. Nach einer Zeit von  $t = 0,8 s$  ist die Schwingung fast vollständig abgeklungen. Der Vergleich der linearen und nichtlinearen Methoden liefert eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung der Methoden. Für die nichtlinearen Methoden ist die Auslenkungsamplitude etwas geringer und die Böenantwort ist zeitlich bis zu  $\Delta t = 0,01 s$  verzögert, weil eine gewisse Zeit vergeht, bis sich der zusätzliche Auftrieb in Folge der Böeneinwirkung aufbauen kann. Der mit nichtlinearen Methoden bestimmte Ausschwingvorgang ist aufgrund dissipativer numerischer Effekte etwas stärker gedämpft

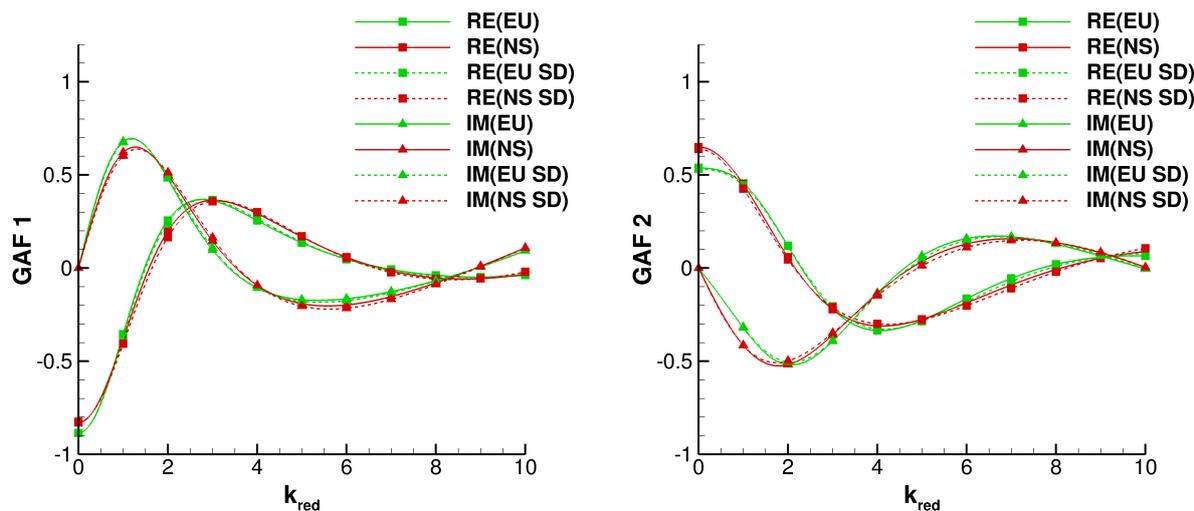


Abbildung 4.17: Böen-GAF der ersten Biege- und Torsionsmode des AGARD 445.6-Flügels in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz für  $M_\infty = 1,141$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

als die lineare Lösung. Reibungseffekte spielen beim AGARD 445.6-Flügel im Unterschallbereich eine untergeordnete Rolle, wie auch schon die Stabilitätsanalyse gezeigt hat.

In der Abbildung 4.19 ist die Antwort auf die kurze Böe bei zwei unterschiedlichen Böenstärken dargestellt. Aufgrund der kürzeren Anregungszeit, welche näher an der ersten Struktureigenfrequenz liegt, wird die erste Biegemode der Flügelstruktur wesentlich stärker angeregt. Die Systemantwort ist zwar ebenfalls gedämpft, aber als Folge der Anregungszeit schwingt das System länger nach. Die mit den beschriebenen Methoden gewonnenen Ergebnisse stimmen sehr gut überein. Kleine Abweichungen können in Analogie zu der Anregung durch die lange Böe beobachtet werden.

Die Abbildungen 4.20 und 4.21 zeigen die korrespondierenden Böenantworten für den transsonischen Machzahlbereich mit  $M_\infty = 0,960$ . Besonders für die Antwort auf die lange Böe mit kleiner Amplitude sind deutliche Unterschiede zwischen der nichtlinearen und der linearisierten Simulation erkennbar. Bei der nichtlinearen Simulation wird die Schwingung der erste Eigenmode in der zugehörigen Eigenfrequenz wesentlich stärker angeregt als unter Verwendung der linearisierten Methoden. Diese Schwingung in der ersten Eigenfrequenz ist der Antwort auf die lange Böe folglich überlagert. Weiterhin ist zu beobachten, dass die Struktur nach der Böeneinwirkung nicht genau um die Ausgangslage des symmetrischen Flügels schwingt. Dieses Ergebnis ist ausschließlich auf kleine Unsymmetrien im numerischen Modell und daraus folgende numerische Abweichungen zurückzuführen. Diese Ungenauigkeiten sind bei der Machzahl  $M_\infty = 0,960$  deutlicher sichtbar, weil die maximale Auslenkung für die schwache Böenbeaufschlagung nur etwa 0,5 % der Flügelwurzeltiefe beträgt und die Abweichungen in Folge der numerischen Modellierung ca. 0,04 % der Flügelwurzeltiefe betragen. Diese Schlussfolgerungen werden durch die Böenantwort auf die lange, starke Böe bestätigt, weil die überlagerte Schwingung der ersten Biegemode die gleiche Amplitude beibehält wie im eben beschriebenen Fall und nicht mit der Böenstärke skaliert. Für die stärkere Böenanregung weist die Strukturantwort im nichtlinearen Fall eine deutlich größere Amplitude auf, als das linearisierte Ergebnis. Diese Beobachtung beruht auf aerodynamischen Nichtlinearitäten und kann von den linearen Methoden, die für kleine Störungen gelten, nicht abgebildet werden. Reibungseinflüsse

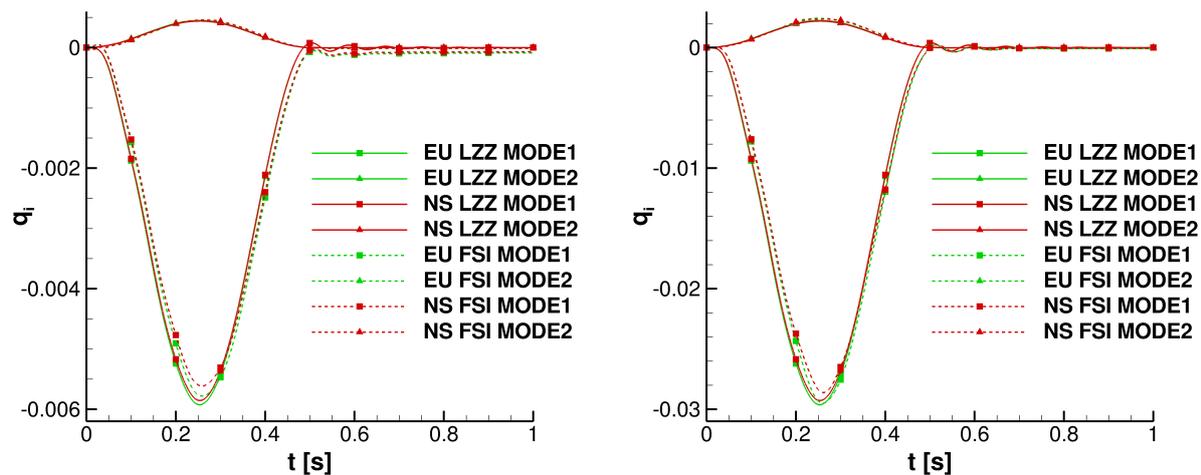


Abbildung 4.18: Bößenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine “1-cos“-Vertikalböe mit  $l_B = 50 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 2 \text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10 \text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 0,499$ ,  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

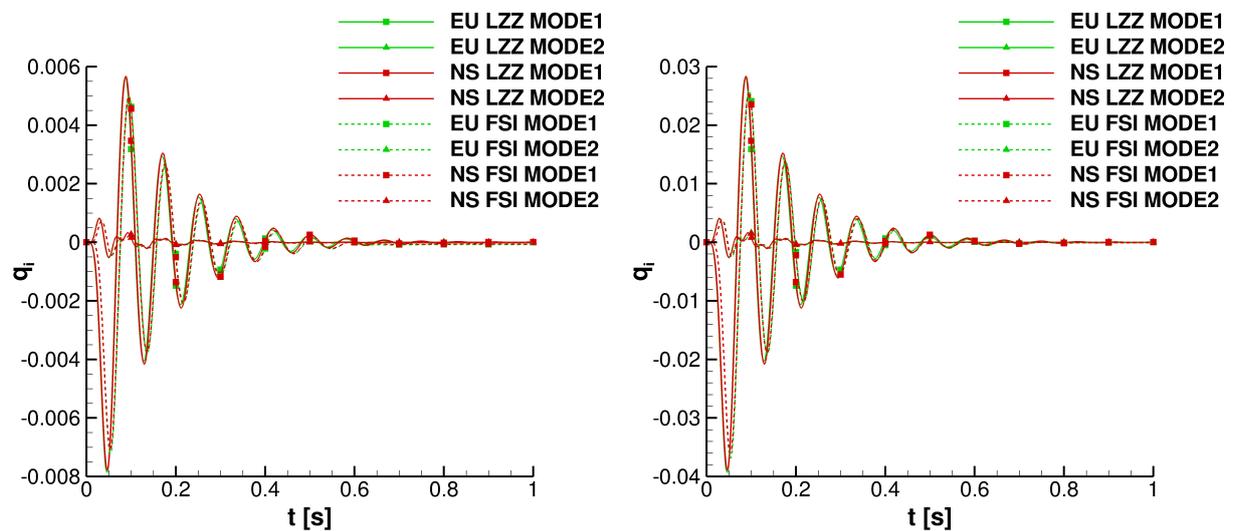


Abbildung 4.19: Bößenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine “1-cos“-Vertikalböe mit  $l_B = 5 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 2 \text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10 \text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 0,499$ ,  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

sind nur im Bereich der maximalen Auslenkung für die nichtlinearen Methoden relevant.

Die Bößenantworten auf die kurze Böe sind im transsonischen Bereich wesentlich schwächer gedämpft, obwohl die Anströmgeschwindigkeit weiter von der kritischen Flattergeschwindigkeit entfernt ist, als bei den subsonischen Resultaten. Weil auch hier die Gleichgewichtslage der ersten generalisierten Koordinate etwas von der Ausgangslage abweicht, kann vor allem bezüglich der negativen Amplitude eine Differenz zwischen den Lösungen der nichtlinearen und der linearisierten Methode beobachtet werden. Dieser numerische Fehler ist für die starke Böe weniger bedeutend, womit für diesen Fall eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse folgt. Auffallend ist auch die etwas höhere Schwingungsfrequenz der mithilfe der nichtlinearen Kopplung erzeugten Antworten in Übereinstimmung zu den Untersuchungen der Stabilitätsanalyse.

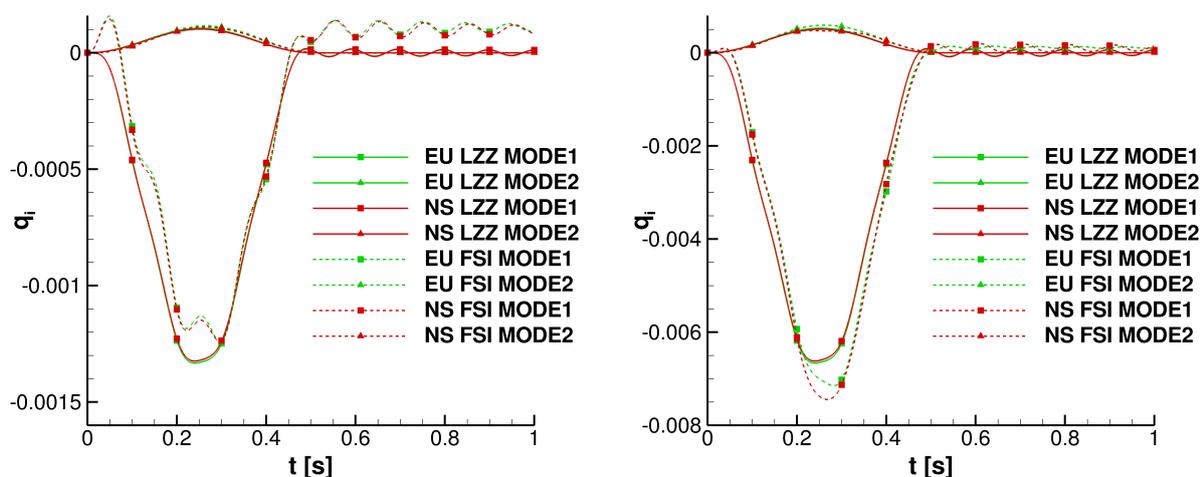


Abbildung 4.20: Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit  $l_B = 50\text{m}$ ,  $\hat{w}_B = 2\text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10\text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 0,960$ ,  $U_\infty = 100\text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

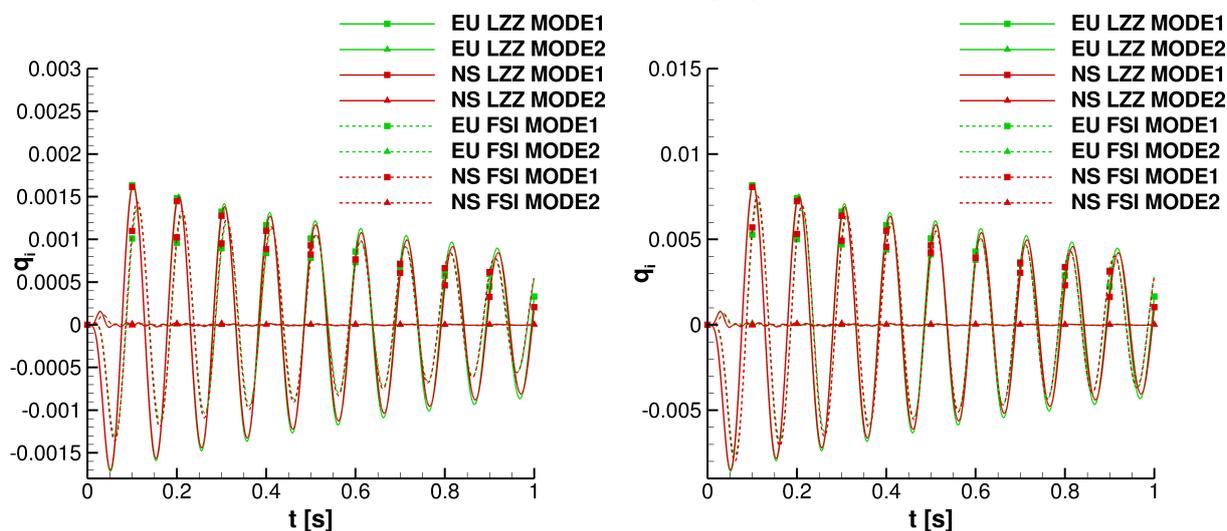


Abbildung 4.21: Böenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit  $l_B = 5\text{m}$ ,  $\hat{w}_B = 2\text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10\text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 0,960$ ,  $U_\infty = 100\text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

Abschließend sind entsprechende Böenantworten für die Überschallmachzahl  $M_\infty = 1,141$  erzeugt und in den Abbildungen 4.22 und 4.23 dargestellt worden. Die Ergebnisse ähneln sowohl qualitativ, als auch quantitativ stark den transsonischen Resultaten. Auch hier können im Bereich der Auslenkungsamplitude, verursacht durch die lange, starke Böe, nichtlineare Effekte nachgewiesen werden. In Analogie zu den Beobachtungen im Rahmen der Stabilitätsanalyse kommt den Reibungseffekten im Überschallbereich eine größere Bedeutung zu. So ergeben sich für reibungsfreie Methoden größere Luftkräfte und entsprechend größere elastische Verformungen.

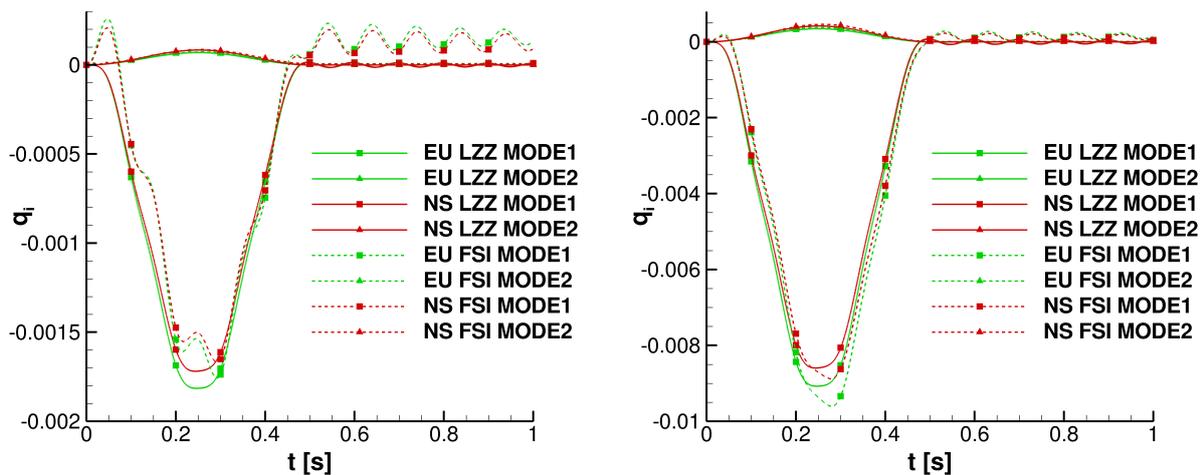


Abbildung 4.22: Bönenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit  $l_B = 50 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 2 \text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10 \text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 1,141$ ,  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

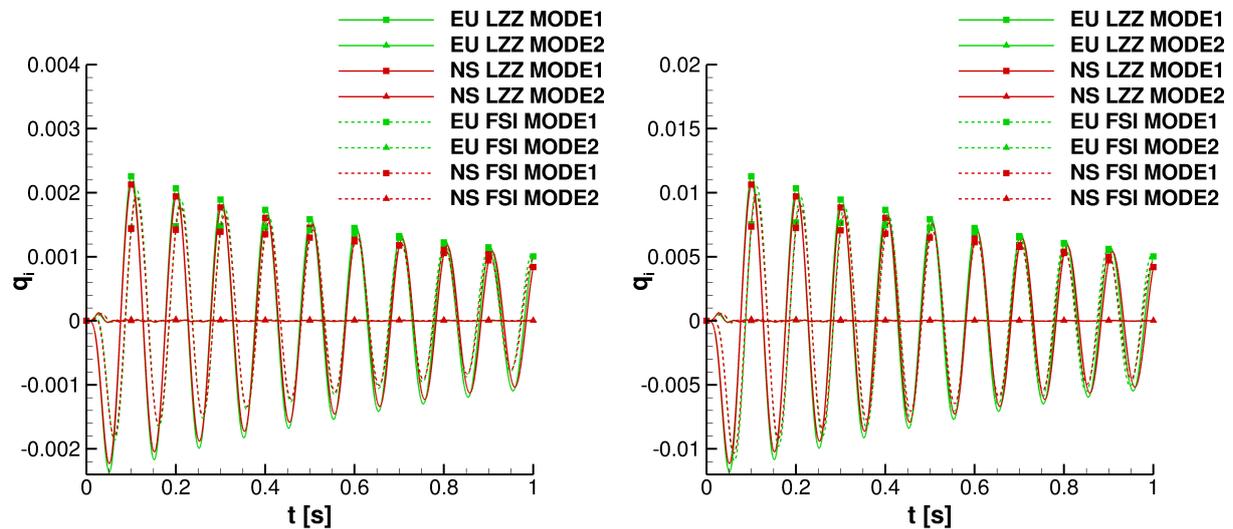


Abbildung 4.23: Bönenantwort des AGARD 445.6-Flügels auf eine "1-cos"-Vertikalböe mit  $l_B = 5 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 2 \text{ m/s}$  (links) und  $\hat{w}_B = 10 \text{ m/s}$  (rechts) bei  $M_\infty = 1,141$ ,  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  und  $\alpha = 0^\circ$  [53]

### 4.3 Generisches Modellflugzeug

Nachdem in den vorangehenden Kapiteln sowohl die nichtlineare, als auch die linearisierte Modellierungsmethodik zur Bestimmung der elastischen Systemantwort auf verschiedene Böenanregungen erfolgreich getestet wurde, sollen im Folgenden zusätzlich die Bewegungsgleichungen der Flugmechanik einbezogen und gelöst werden. Dabei wird das nichtlineare Modell um die nichtlinearen Flugmechanikgleichungen 2.96, 2.103 bis 2.105 und das linearisierte Modell entsprechend um die linearisierten Flugmechanikgleichungen 2.108 und 2.109 erweitert. Geeignete, frei zugängliche Testfälle oder Messdaten sind aufgrund der Komplexität des Problems sehr schwer zu finden. Aus diesem Grund ist für die Untersuchungen ein einfaches generisches Modellflugzeug betrachtet worden, für das die nichtlinearen und die linearisierten Verfahren verglichen werden. Bei der Wahl der

Konfiguration, speziell der geometrischen und materiellen Eigenschaften, wurde vor allem darauf Wert gelegt, dass die Konfiguration das dynamische Verhalten eines gängigen Kleinflugzeugs besitzt, nennenswerte elastische Strukturverformungen auftreten und die numerische Modellierung mit vertretbarem Aufwand realisierbar ist. Die Geometrie des generischen Modellflugzeugs entspricht der Konfiguration aus [127] und ist in Abbildung 4.24 dargestellt. Das Strukturmodell wurde allerdings etwas modifiziert und ist in Kapitel 4.3.1 genauer beschrieben. Die Konfiguration ist ein Mitteldecker mit einer Flügelstreckung von  $\Lambda_F = 6,26$  und einer Zuspitzung  $\lambda_F = 0,40$ . Die Tragflächen besitzen keine V-Stellung und sind weder geschränkt noch gepfeilt. Der Massenschwerpunkt der Konfiguration liegt noch vor der Flügelvorderkante. Vor allem in Hinblick auf die Vernetzung und dem damit verbundenen Rechenaufwand besitzt die verwendete Profilform eine spitze Vorder- und Hinterkante. Außerdem ist das Profil nicht gewölbt und verfügt über eine relative Dicke von  $(d/c)_F = 10,4\%$ . Weitere relevante Eigenschaften sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst. Damit eine Trimmung des Flugzeugs möglich ist, ist das Höhenleitwerk mit Höhenrudern versehen worden.

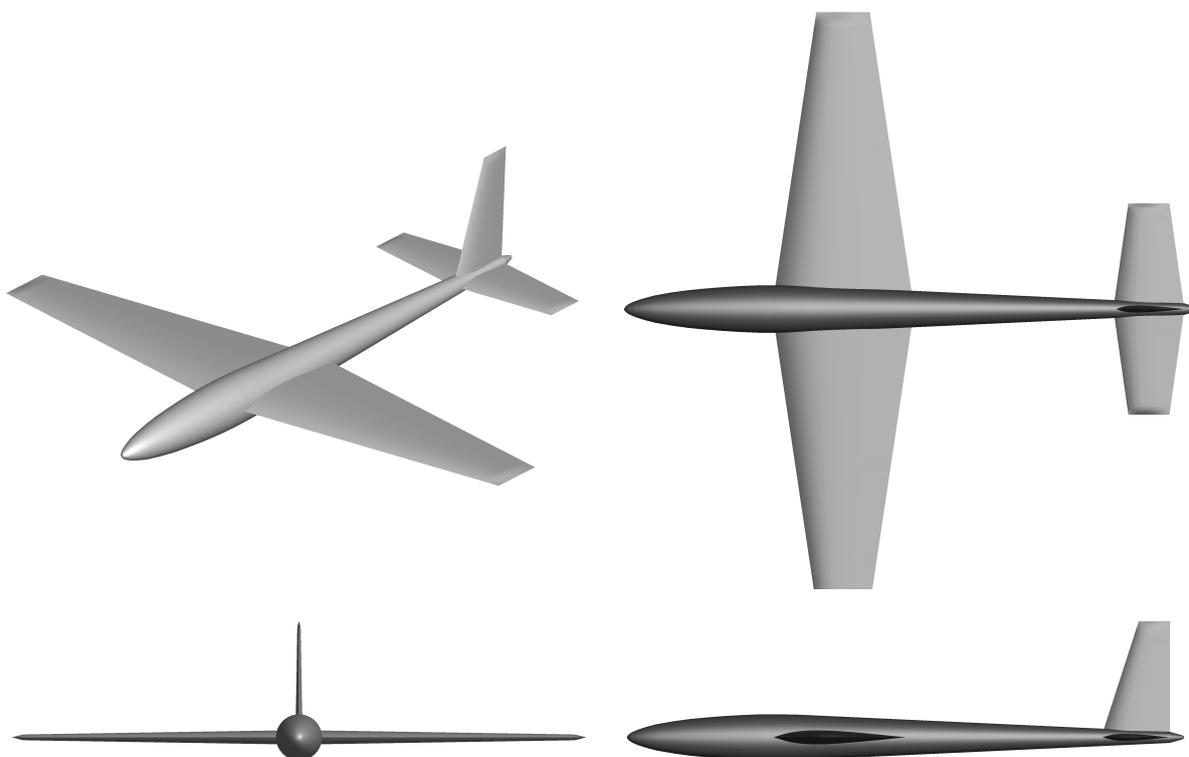


Abbildung 4.24: Geometrie und Dreiseitenansicht des generischen Modellflugzeugs

### 4.3.1 Numerische Modellierung

Die elastische Struktur des generischen Modellflugzeugs wurde mithilfe eines FEM-Modells beschrieben. Der Rumpf besteht aus Euler-Bernoulli-Balkenelementen, die Tragflächen und Leitwerke werden durch Kirchhoff-Plattenelemente konstanter Dicke repräsentiert. Die zugehörigen, konstanten Materialeigenschaften sind in Tabelle 4.6 aufgeführt. Die

Halbspannweite Flügel $s_F$	1,04 m
Halbspannweite Höhenleitwerk $s_H$	0,37 m
Halbspannweite Seitenleitwerk $s_S$	0,40 m
Flügeltiefe an der Flügelwurzel $l_{rF}$	0,48 m
Flügeltiefe an der Höhenleitwerkswurzel $l_{rH}$	0,25 m
Flügeltiefe an der Seitenleitwerkswurzel $l_{rS}$	0,25 m
Streckung Flügel $\Lambda_F$	6,26
Streckung Höhenleitwerk $\Lambda_H$	3,80
Streckung Seitenleitwerk $\Lambda_H$	4,44
Zuspitzung Flügel $\lambda_F$	0,40
Zuspitzung Höhenleitwerk $\lambda_H$	0,59
Zuspitzung Seitenleitwerk $\lambda_S$	0,44
Pfeilung Flügel $\phi_{F1/4}$	0°
Pfeilung Höhenleitwerk $\phi_{H1/4}$	0°
Pfeilung Seitenleitwerk $\phi_{S1/4}$	15°
relative Profildicke Flügel $(d/c)_F$	10,4 %
relative Profildicke Höhenleitwerk $(d/c)_H$	10,4 %
relative Profildicke Seitenleitwerk $(d/c)_S$	10,4 %
Länge $l$	2,02 m
maximaler Rumpfradius $r$	0,083 m
Lage des Schwerpunkts vor der 1/4-Linie des Flügels $\Delta x$	0,14 m
Masse $m$	19,81 kg
Trägheitsmoment $I_{xx}$	1,65 kgm <sup>2</sup>
Trägheitsmoment $I_{yy}$	4,26 kgm <sup>2</sup>
Trägheitsmoment $I_{zz}$	5,87 kgm <sup>2</sup>
Trägheitsmoment $I_{xz}$	-0,12 kgm <sup>2</sup>

Tabelle 4.5: Geometrische Eigenschaften des generischen Modellflugzeugs

Diskretisierung der Struktur mit insgesamt 744 Elementen ist jeweils auf der linken Seite der Abbildungen 4.25 bis 4.32 dargestellt. Damit sich das generische Modellflugzeug im Rahmen der Freiflugsimulation unbeschränkt im Raum bewegen kann, ist dieses nicht gelagert. Dadurch resultieren in Folge der Modalanalyse neben den elastischen Eigenmoden sechs Starrkörpermoden. Die ersten acht symmetrischen, elastischen Eigenformen der insgesamt 26 berücksichtigten Eigenformen sind in den Abbildungen 4.25 bis 4.32 dargestellt. Die Abbildungen beschränken sich auf symmetrische Moden, weil die Antwortanalyse nur für symmetrische Vertikalböen durchgeführt wird und bezüglich der Flugzeuglängsebene unsymmetrische oder antisymmetrische Eigenmoden folglich nicht an der Strukturdeformation beteiligt sind. Unsymmetrien ergeben sich vorrangig in Form von lateralen Rumpf- oder Seitenleitwerkseigenmoden. Die unsymmetrischen und antisymme-

Elastizitätsmodul $E$	100,00 GPa
Schubmodul $G$	37,31 GPa
Querdehnzahl $\nu$	0,34
Dichte $\rho$	2000 kg/m <sup>3</sup>

Tabelle 4.6: Materialeigenschaften des generischen Modellflugzeugs



Abbildung 4.25: 1. Mode des generischen Modellflugzeugs

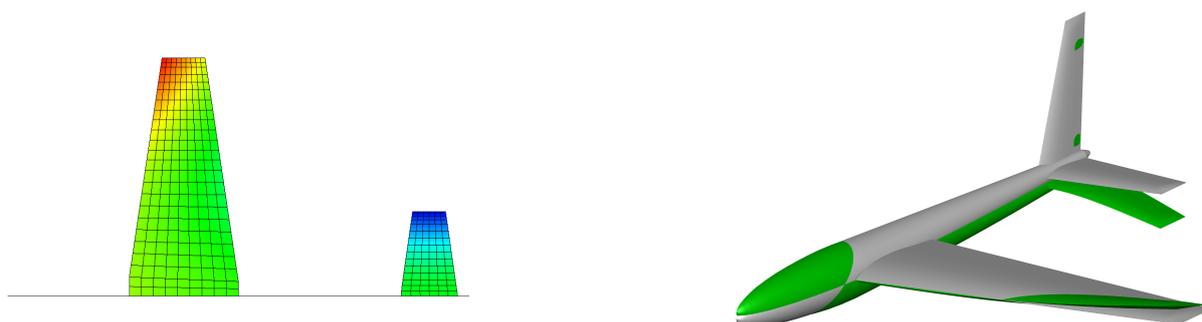


Abbildung 4.26: 3. Mode des generischen Modellflugzeugs

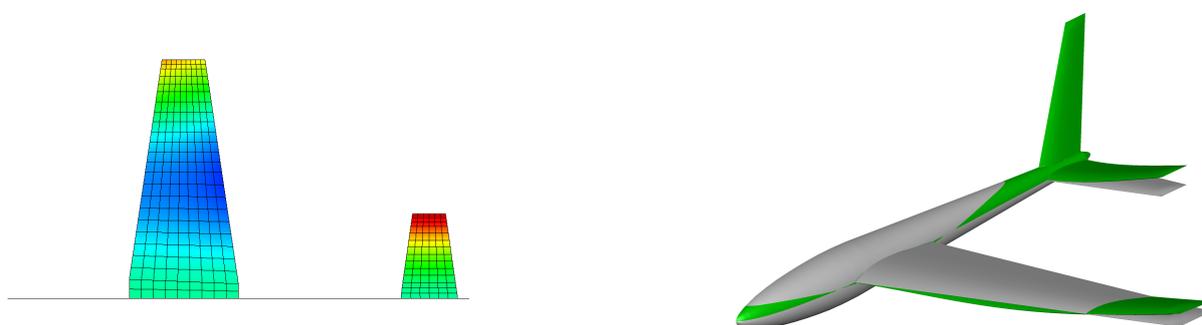


Abbildung 4.27: 5. Mode des generischen Modellflugzeugs

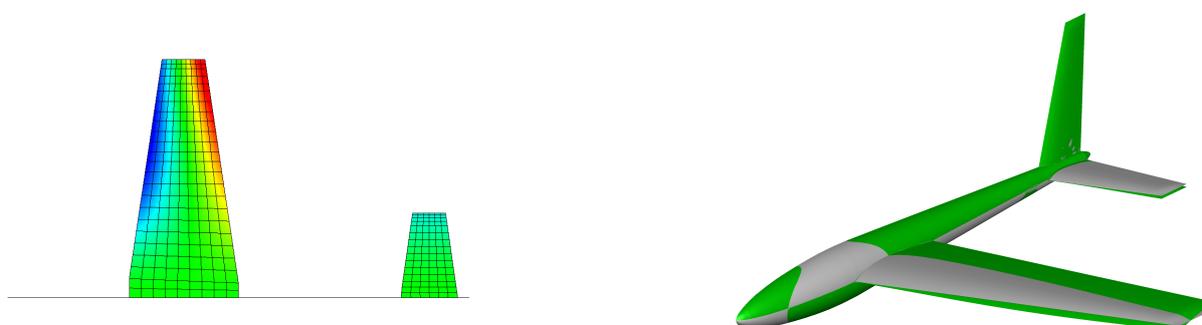


Abbildung 4.28: 7. Mode des generischen Modellflugzeugs

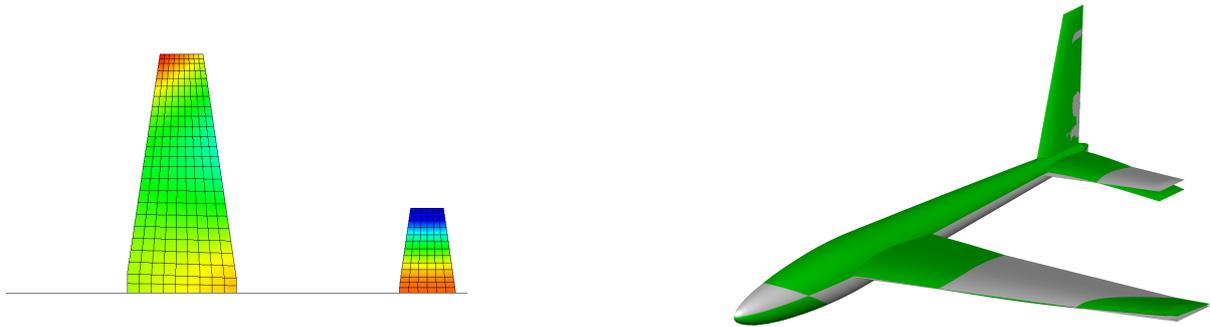


Abbildung 4.29: 9. Mode des generischen Modellflugzeugs

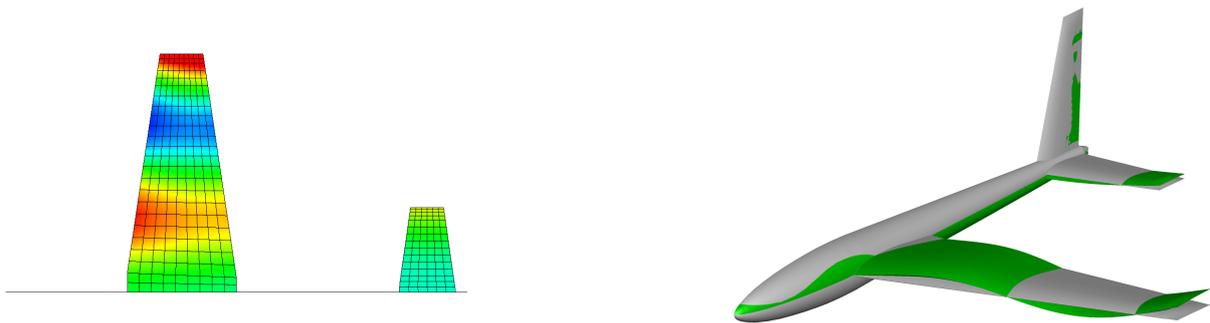


Abbildung 4.30: 11. Mode des generischen Modellflugzeugs

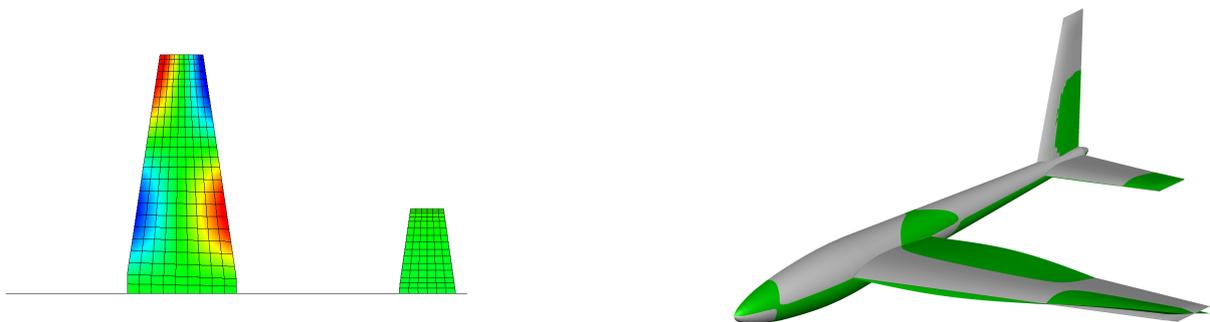


Abbildung 4.31: 14. Mode des generischen Modellflugzeugs

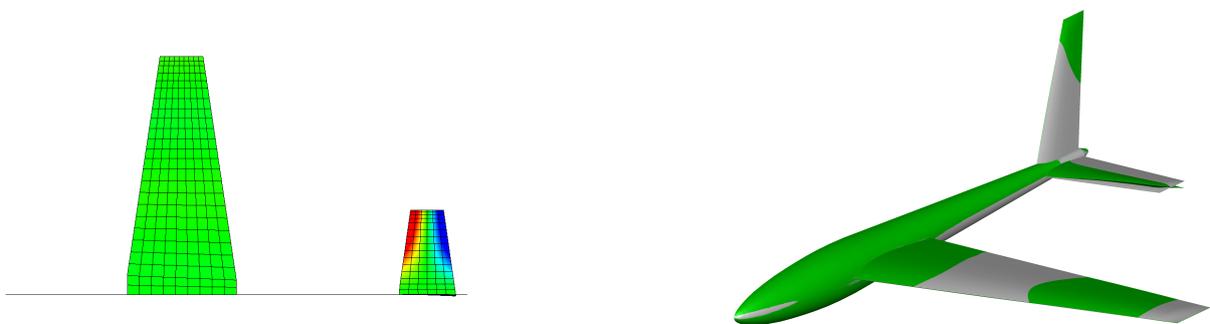


Abbildung 4.32: 17. Mode des generischen Modellflugzeugs

Mode	Schwingungsform	Eigenfrequenz in [Hz]
1	1. Flügelbiegung	6,19
2	unsymmetrisch	17,53
3	1. Flügeltorsionsbiegung, 1. Höhenleitwerksbiegung	23,88
4	antisymmetrisch	29,80
5	2. Flügelbiegung, 1. Höhenleitwerksbiegung	29,94
6	antisymmetrisch	30,58
7	1. Flügeltorsion, 1. Höhenleitwerksbiegung	30,68
8	unsymmetrisch	32,79
9	2. Flügeltorsionsbiegung, 1. Höhenleitwerksbiegung	42,61
10	unsymmetrisch	63,68
11	3. Flügelbiegung, 1. Höhenleitwerksbiegung	81,68
12	unsymmetrisch	87,69
13	antisymmetrisch	91,15
14	2. Flügeltorsion	91,44
15	unsymmetrisch	111,73
16	antisymmetrisch	112,19
17	1. Höhenleitwerkstorsion	112,24
18	unsymmetrisch	118,70
19	unsymmetrisch	142,24
20	4. Flügelbiegung, 2. Höhenleitwerksbiegung	143,33
21	antisymmetrisch	160,02
22	unsymmetrisch	164,78
23	unsymmetrisch	165,29
24	5. Flügelbiegung, 2. Höhenleitwerksbiegung	166,56
25	unsymmetrisch	177,73
26	unsymmetrisch	194,70

Tabelle 4.7: Eigenfrequenzen des generischen Modellflugzeugs

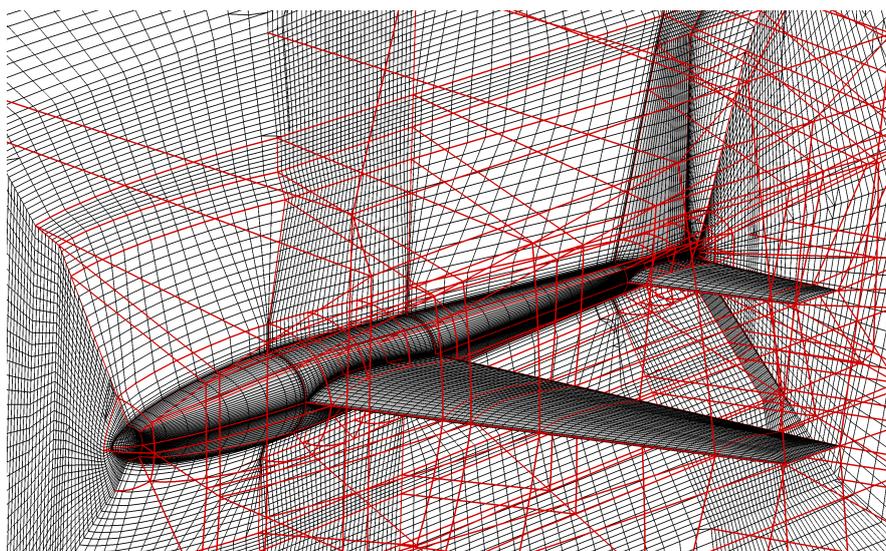


Abbildung 4.33: Diskretisierung des Strömungsraums um das generische Modellflugzeug

trischen Eigenformen sind trotzdem im numerischen Modell enthalten. Die abgebildeten symmetrischen Moden umfassen diverse Kombinationen aus Biege- und Torsionsmoden der Tragflächen und des Höhenleitwerks. Jede Eigenmode wird auch von einer Biegung des Flugzeugrumpfes begleitet, die aber klein gegenüber der Auslenkungen der auftriebs-erzeugenden Elemente ausfällt. Die Eigenfrequenzen der ersten 26 elastischen Moden und die Schwingungsformen der symmetrischen Moden sind in Tabelle 4.7 zusammengefasst.

Die Aerodynamik des generischen Modellflugzeugs wird mithilfe der reibungsfreien Varianten des nichtlinearen CFD-Lösers AER-NS bzw. des linearisierten CFD-Lösers AER-SDNS simuliert. Das erforderliche strukturierte Netz ist in Abbildung 4.33 dargestellt. Zu sehen ist das Oberflächennetz und das Netz in der Flugzeugsymmetrieebene. Die Blockgrenzen sind durch rote Linien gekennzeichnet. Entgegen der Abbildung, auf der nur das Halbmodell sichtbar ist, wurde die Gesamtflugzeugkonfiguration vernetzt und simuliert. Die Grundtopologie des Netzes entspricht einem O-Netz, welches den kompletten Rumpf umschließt. Um die Flügelprofile ergibt sich eine H-Topologie. Das Netz besitzt ca. 1,4 Millionen Volumen- und ca. 31000 Oberflächenpunkte. Der Fernfeldabstand beträgt zehn Halbspannweiten und die Höhe der ersten Zellreihe 0,2 % der Sehnenlänge an der Flügelwurzel. Zur Interpolation des Strukturoberflächennetzes auf das Strömungsoberflächennetz kommt die IPS-Methode und zur Netznachführung die TFI-Methode zum Einsatz.

### 4.3.2 Statische aeroelastische Analyse

Damit die Analyse und Beurteilung des Antwortverhaltens auf eine Störung in der Flugbahn vereinfacht wird, ist es von Vorteil, wenn sich das Flugzeug anfangs in einem stationären Flugzustand befindet. Die Ergebnisinterpretation wird zusätzlich erleichtert, wenn als Anfangszustand der stationäre Geradeausflug vorausgesetzt wird. Eine notwendige Bedingung für den stationären, horizontalen Geradeausflug ist die vorherige Trimmung des Flugzeugs um die Flugzeuglängsachse. Dabei müssen im Wesentlichen drei Bedingungen erfüllt werden. Zum einen muss das Nickmoment um den Flugzeugschwerpunkt zu Null werden und zum anderen muss sowohl das Kräftegleichgewicht in Flugrichtung, als auch in der Richtung des Auftriebsvektors erfüllt sein. Das heißt, der Triebwerksschub gleicht den Flugzeugwiderstand aus und der Auftrieb muss im Betrag gleich der Gewichtskraft sein, aber dieser entgegen wirken. Die Trimmung für das generische Modellflugzeug soll über die Höhenruder erfolgen. Die Abbildung 4.34 zeigt das Fluidoberflächennetz am Höhenleitwerk in der getrimmten Position. Aufgrund des für Längsstabilität notwendigen Kriteriums, dass sich die Lage des Flugzeugschwerpunktes vor dem Neutralpunkt befindet, ist zur Trimmung der Konfiguration ein Ausschlag des Höhenruders nach oben notwendig. Dieser Ausschlag hat ein positives Nickmoment zur Folge, welches im Betrag so gewählt sein sollte, dass es das durch den resultierenden Auftriebsvektor erzeugte negative Nickmoment ausgleicht. Eine Herausforderung stellt die realistische Modellierung des Höhenruderausschlags auf Seiten der strukturierten Vernetzung des Strömungsraums dar. Durch den Höhenruderausschlag entsteht eine Diskontinuität im CFD-Oberflächennetz, die im Rahmen der strukturierten Vernetzung nur unter sehr großem Aufwand berücksichtigt werden kann. Besonders problematisch ist der Fall, wenn sich die Steuerflächen während einer instationären Simulation bewegen sollen, weil sich in der Folge die Blocktopologie ändern müsste. Mögliche Abhilfen sind die Verwendung von "Chimera"-Techniken, bei denen sich Netze überlappen können [11], oder die Verwendung von "non-matching

meshes“ [13]. Eine weitere, wesentlich einfachere Möglichkeit ist, das Oberflächennetz entsprechend der Ruderauslenkung unter Erhaltung der Netzkonnektivität kontinuierlich zu verformen [124]. Das letztgenannte Verfahren wird aufgrund seiner Einfachheit und der ausreichenden Genauigkeit für die beabsichtigte Anwendung in dieser Arbeit gewählt.

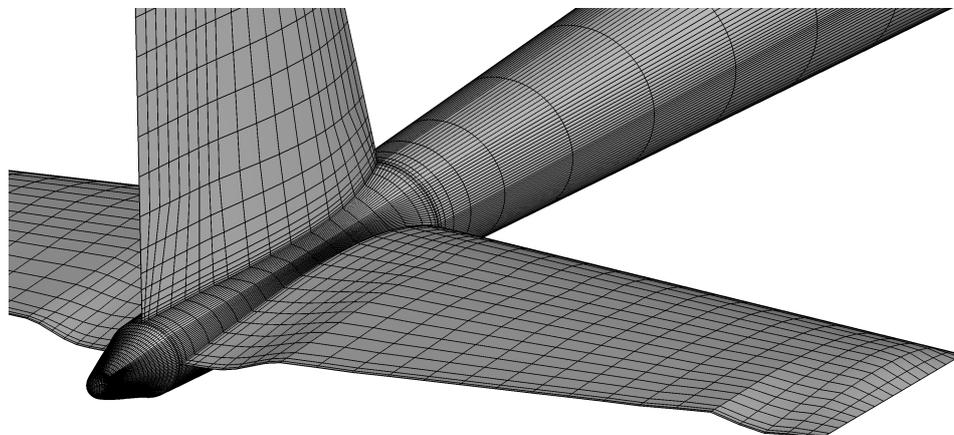


Abbildung 4.34: Auslenkung des Höhenruders zur Trimmung des generischen Modellflugzeugs

Bezüglich des Böenantwortverhaltens findet im nachfolgenden Kapitel ein Vergleich des zeitlichen Verlaufs der Starrkörperfreiheitsgrade der Längsbewegung für das elastische und das starre Flugzeug statt. Weil sich für das elastisch verformbare Flugzeug andere Trimmbedingungen ergeben als für das starre Flugzeug, werden die entsprechenden Größen für beide Fälle ermittelt und zusammen mit den Anströmbedingungen in Tabelle 4.8 aufgelistet. In beiden Fällen ergibt sich der gleiche Ausschlag des Höhenruders von  $\eta = 2, 90^\circ$ , aber der Anstellwinkel ist für die elastisch verformte Konfiguration kleiner, weil sich die Tragflächen unter der aerodynamischen Last so stark tordieren, dass sich der lokale Anstellwinkel in Richtung der Flügelspitze deutlich vergrößert.

	starr	elastisch
Anströmmachzahl $M_\infty$	0,2	0,2
Anströmgeschwindigkeit $U_\infty$	68 m/s	68 m/s
Staudruck $q_\infty$	2837,2 Pa	2837,2 Pa
Anstellwinkel $\alpha$	1,30°	0,88°
Höhenruderwinkel $\eta$	2,90°	2,90°

Tabelle 4.8: Anströmbedingungen der starren und der elastischen generischen Modellflugzeugkonfiguration im getrimmten Flugzustand

Die entsprechende elastische Verformung einschließlich der Oberflächendruckverteilung ist im Vergleich zur grau eingefärbten starren Konfiguration in der Abbildung 4.34 dargestellt. Beide Konfigurationen sind im körperfesten Koordinatensystem dargestellt. Das heißt, die unterschiedlichen Anstellwinkel sind in der Darstellung nicht berücksichtigt. Die elastische Konfiguration im getrimmten Zustand erfährt eine deutliche Tragflächenbiegung in Auftriebsrichtung und ein leichtes Aufdrehen der Tragflächen in Richtung der Flügelspitzen.

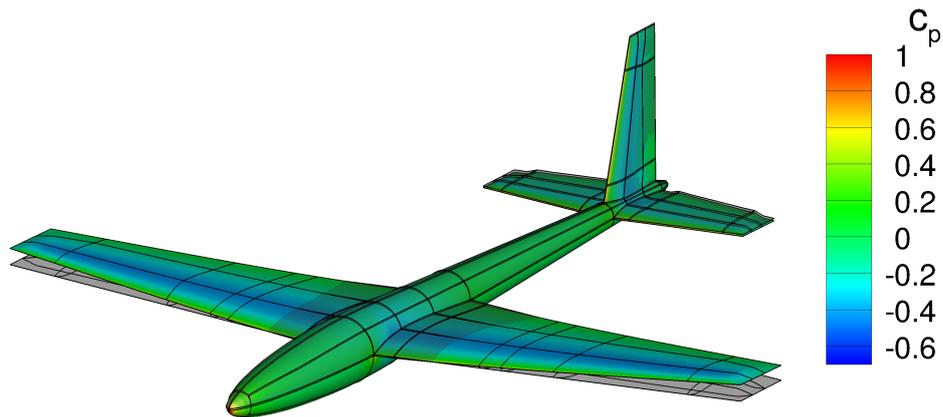


Abbildung 4.35: Aeroelastische Verformung des generischen Modellflugzeugs im getrimmten Flugzustand, bestimmt mit dem reibungsfreien Löser,  $M_\infty = 0,2$ ,  $q_\infty = 2837,2 Pa$ ,  $\alpha = 0,88^\circ$

Die maximale Auslenkung an der Flügelvorderkante beträgt 4% der Halbspannweite und der maximale Torsionswinkel beträgt  $\alpha = 1,16^\circ$ .

In der Abbildung 4.36 sind die Verläufe des Druckbeiwerts in drei verschiedenen Profilschnitten bei  $\eta = 0,3$ ,  $\eta = 0,6$  und  $\eta = 0,9$  für die elastisch verformte (EU FSI) und die starre (EU) Konfiguration über der Flügeltiefe aufgetragen. Im inneren Profilschnitt resultieren in Folge der Verformung nahezu keine Unterschiede im Druckverlauf. In den beiden äußeren Schnitten kann aufgrund der lokalen Verwindung des Flügels eine größere Druckdifferenz zwischen der Flügelober- und der Flügelunterseite beobachtet werden. Qualitativ sind die Verläufe des Druckbeiwerts sehr ähnlich. Zusammenfassend lässt sich schlussfolgern, dass die elastische Verformung für die behandelte Konfiguration nicht vernachlässigt werden kann, weil sich Änderungen in der Oberflächendruckverteilung und folglich ein deutlich abweichender Anstellwinkel für die Trimmung ergeben.

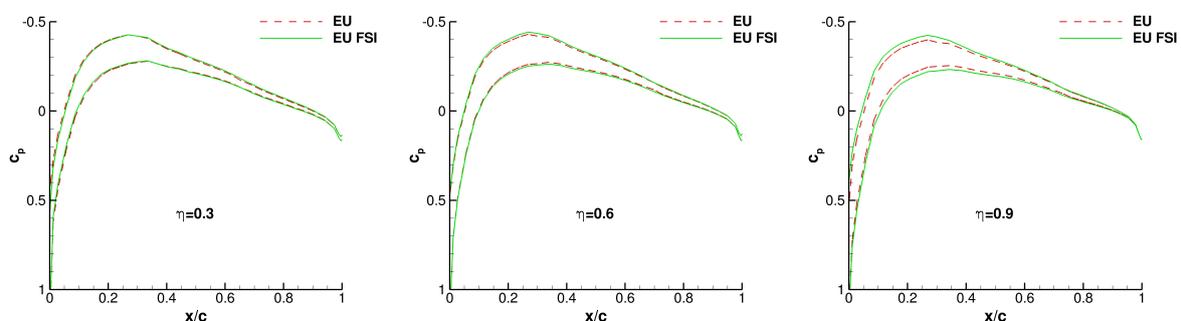


Abbildung 4.36: Druckbeiwert in drei Tragflächenschnitten des elastischen (FSI) und des starren generischen Modellflugzeugs im getrimmten Flugzustand, bestimmt mit dem reibungsfreien Löser,  $M_\infty = 0,2$ ,  $q_\infty = 2837,2 Pa$

### 4.3.3 Dynamische aeroelastische Böenantwort unter Berücksichtigung der Flugmechanik

Die dynamische Antwort eines ungelagerten elastischen Flugzeugs auf transiente Böenlasten kann maßgeblich durch die Wechselwirkung von elastischen Freiheitsgraden mit Starrkörperfreiheitsgraden geprägt sein. Das primäre Ziel des nachfolgenden Kapitels ist die Analyse dieses Kopplungseinflusses, sowohl auf die flugmechanische Antwort, als auch auf die Strukturantwort des Flugzeugs. Untersucht wird das Antwortverhalten des in den vorangehenden Kapiteln beschriebenen generischen Modellflugzeugs auf je eine "1-cos"-Böe der Länge  $l_B = 3\text{ m}$  und  $l_B = 20\text{ m}$

$$w_B(x, t) = \frac{\hat{w}_B}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi U_\infty}{l_B} \left( t - \frac{x}{U_\infty} \right) \right) \right). \quad (4.3)$$

Die Eigenschaften der Böen sind in Tabelle 4.9 zusammengefasst.

Bezeichnung	B3	B20
Böenlänge $l_B$	3 m	20 m
auf Flugzeuglänge normierte Böenlänge $l_B/l$	1,49	9,90
Böengeschwindigkeit $\hat{w}_B$	5 m/s	5 m/s
maximaler induzierter Anstellwinkel $\hat{\alpha}_B$	4,20°	4,20°

Tabelle 4.9: Eigenschaften der "1-cos"-Böenanregungen für das generische Modellflugzeug

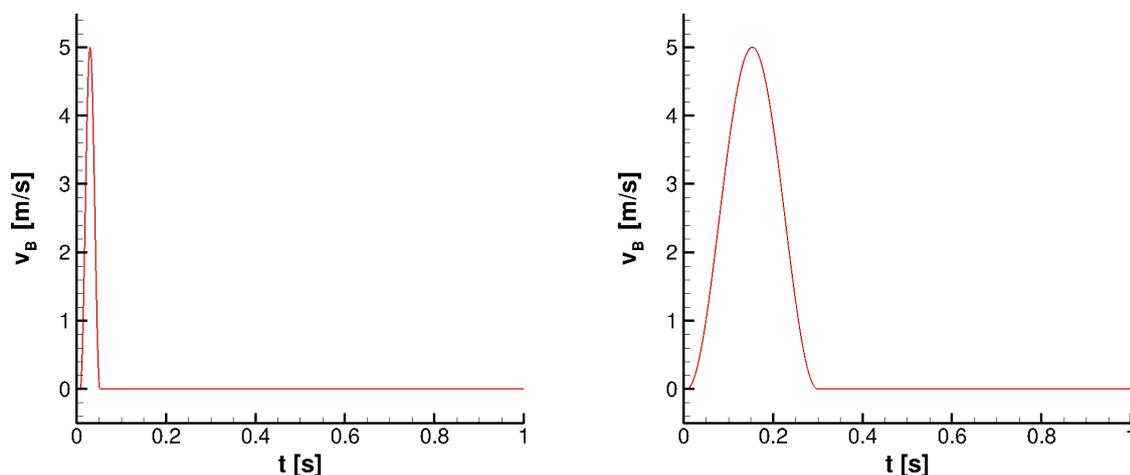


Abbildung 4.37: Zeitlicher Verlauf der an der 1/4-Punktlinie der Tragfläche des generischen Modellflugzeugs induzierten Böengeschwindigkeit für die Böen B3 (links) und B20 (rechts) bei  $U_\infty = 68\text{ m/s}$

Der entsprechende zeitliche Verlauf der an der 1/4-Punktlinie der Tragfläche induzierten Böengeschwindigkeit ist für die in Tabelle 4.8 gegebenen Anströmbedingungen in der Abbildung 4.37 dargestellt. Bei der gegebenen Anströmgeschwindigkeit von  $U_\infty = 68\text{ m/s}$  induziert die kurze Böe B3 für eine Dauer von 0,044 s und die lange Böe B20 für 0,294 s an jedem Punkt des Flugzeugs einen zusätzlichen lokalen Anstellwinkel. Die Länge der beiden Böen wurde so gewählt, dass die Böenfrequenz im Bereich der ersten elastischen

Eigenfrequenzen liegt und instationäre aerodynamische Effekte beobachtet werden können. Die Länge der kurzen Böe B3 beträgt ca. das 1,5-fache einer Flugzeuglänge, wobei die lange Böe B20 in etwa zehnmal der Länge des generischen Modellflugzeugs entspricht.

Die Böenantworten werden jeweils mit einem linearisierten und einem nichtlinearen numerischen Modell beschrieben. Die linearisierte Methode basiert auf dem in Kapitel 2.5.3 vorgestellten LZZ. Die aerodynamischen Luftkräfte werden in Form von GAF für die unverformte Referenzkonfiguration mit dem linearisierten CFD-Löser AER-SDNS ermittelt. Die Modellierung der Flugmechanik erfolgt durch die Lösung der linearisierten flugmechanischen Bewegungsgleichungen. Dabei werden die aerodynamischen Beiwerte in Abhängigkeit der flugmechanischen Freiheitsgrade  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  und  $q$ , sowie in Abhängigkeit der elastischen Freiheitsgrade  $q_i$  und  $\dot{q}_i$  berücksichtigt. Der Einfluss der Starrkörperfreiheitsgrade auf die elastische Strukturantwort wird ebenfalls durch GAF modelliert, die mithilfe einer RFA in das LZZ integriert worden sind. Das resultierende LZZ besitzt insgesamt 172 Gleichungen. Neben den bewegungsinduzierten Luftkräften werden in gleicher Weise die böeninduzierten Luftkräfte einbezogen. Bei der Bestimmung der flugmechanischen Freiheitsgrade bezüglich der Böenanregung ist zu beachten, welcher reduzierten Anregungsfrequenz die Böenlänge entspricht.

Die nichtlineare Methode basiert auf den in Kapitel 2.4 vorgestellten Kopplungsmethoden, die zur Kopplung des modalen Strukturmodells, des nichtlinearen CFD-Lösers AER-NS und des nichtlinearen Flugmechaniklösers AER-FM verwendet werden. Um die zeitliche Genauigkeit der Lösung zu gewährleisten, wird eine starke Kopplungsstrategie eingesetzt. Der physikalische Zeitschritt beträgt  $\Delta t = 10^{-4} \text{s}$ . Damit müssen bei der gewählten Gesamtsimulationszeit von  $t = 1 \text{s}$  10000 Zeitschritte durchgeführt werden. Der Anfangszustand der transienten Simulation entspricht dem im vorangehenden Kapitel beschriebenen getrimmten Flugzustand. Zu Beginn der Simulation befindet sich die Böe an der Flugzeugnase und wandert im Verlauf der Simulation durch Konvektion mit der freien Anströmung nach hinten. Während sich das Flugzeug in der Realität relativ zum Boden, zu der Strömung und zu der Position der Böe bewegt, befindet es sich im Rahmen der Simulation abgesehen von Störungen des stationären, getrimmten Flugzustandes an einer konstanten Position innerhalb des CFD-Netzes und die Strömung bewegt sich einschließlich der Böe relativ zum Flugzeug.

Weil die GAF bezüglich der unverformten Ausgangskonfiguration des generischen Modellflugzeugs ermittelt wurden, ist es von Bedeutung beurteilen zu können, ob aufgrund der statischen aeroelastischen Verformung nichtlineare Effekte in der Böenantwort der starren Konfiguration auftreten. Dementsprechend zeigt Abbildung 4.38 einen Vergleich der Böenantworten der starren, unverformten (UNDEF) und der statisch, aeroelastisch verformten Konfiguration auf die Anregung durch die Böe B3. Verglichen werden die Vertikalbeschleunigung des Flugzeugschwerpunktes  $d^2 z_f / dt^2$ , die Nickgeschwindigkeit  $q$ , die Änderung der Flughöhe  $\Delta z_f$ , sowie der Nickwinkel  $\Theta$  in erdfesten Koordinaten. Die Lösungen sind mit der nichtlinearen Methode (NL) ermittelt worden. Die zeitlichen Verläufe der Beschleunigung und der Nickgeschwindigkeit sind für die verformte und die unverformte Konfiguration nahezu identisch. Diese Beobachtung bestätigt die Annahme, dass die in Folge kleiner Störungen generierten Luftkräfte bezüglich beider Referenzzustände übereinstimmen sollten. Für den Verlauf des Nickwinkels wird ebenfalls für beide Konfigurationen der gleiche charakteristische Verlauf vorhergesagt. Die Kurven besitzen einen konstanten Abstand, der durch die statische elastische Verformung und den damit in Verbindung stehenden abweichenden Anstellwinkel im getrimmten Flugzustand zusammenhängt. Kleine

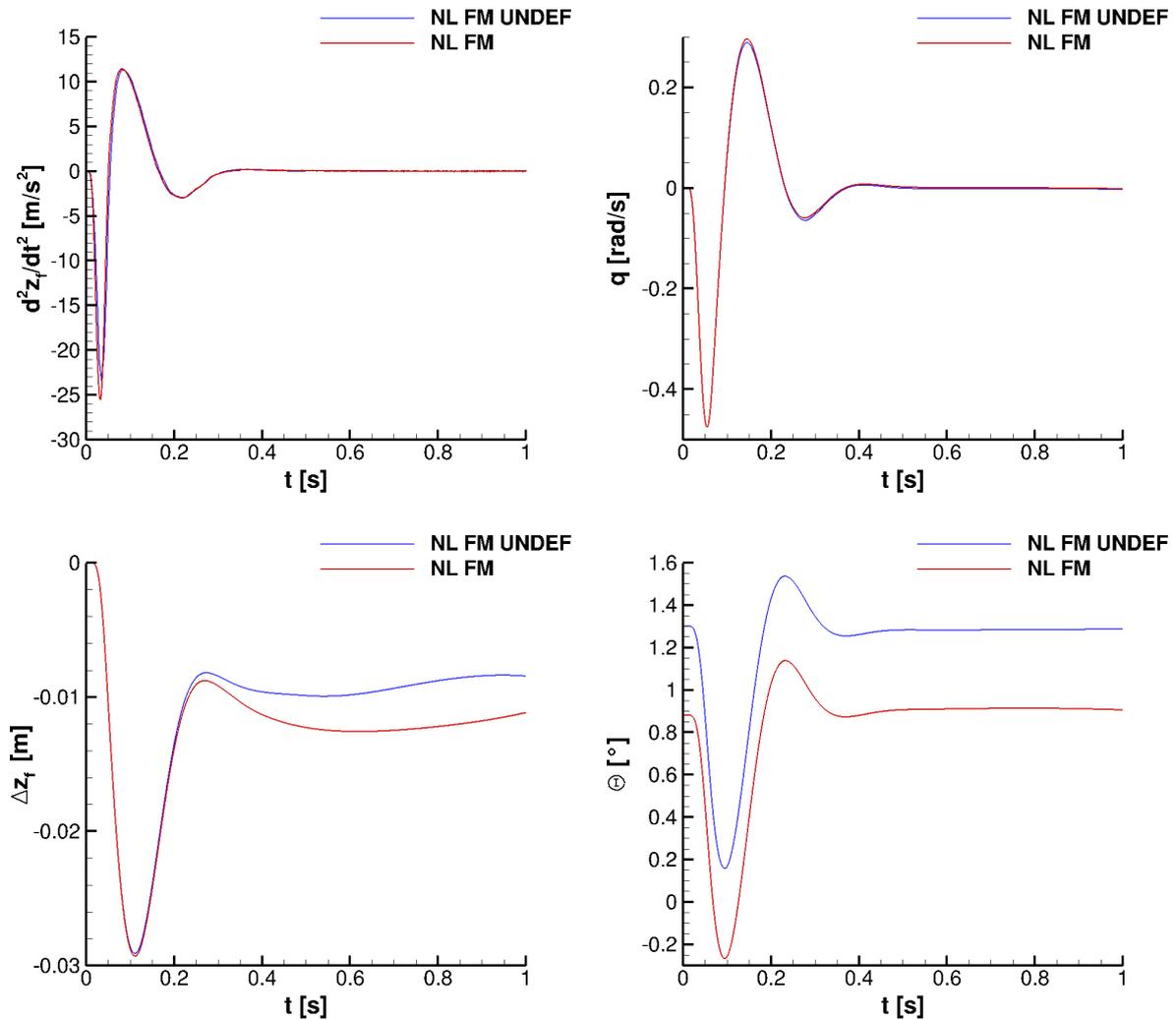


Abbildung 4.38: Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böen Anregung B3, bestimmt mit der nichtlinearen Methode (NL) für die starre Referenzkonfiguration (UNDEF) und die statisch, elastisch verformte Konfiguration,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 3 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

Unterschiede können in der sich endgültig einstellenden Flughöhe beobachtet werden. Diese Größe ist allerdings sehr sensibel gegenüber geringen Schwankungen in den anderen flugmechanischen Zustandsvariablen. Allgemein kann die Böenantwort des generischen Modellflugzeugs wie folgt beschrieben werden. Die Böe benötigt ca.  $0,0076 \text{ s}$  um von der Flugzeugnase bis zur Tragfläche zu wandern. Anschließend erhöht sich bedingt durch den induzierten, zusätzlichen Anstellwinkel der Auftrieb an der Tragfläche des Flugzeugs. Dementsprechend wird dieses in Auftriebsrichtung beschleunigt und gewinnt an Flughöhe. Bedingt durch die geringe Trägheit des generischen Flugzeugs sind die Beschleunigungswerte betragsmäßig sehr groß. Nach etwa  $0,05 \text{ s}$  erreicht die Böenamplitude das Höhenleitwerk, wodurch ein negatives Moment um die Flugzeugquerachse erzeugt wird. Folglich nimmt der Nickwinkel negative Werte an, der Auftrieb verringert sich und das Flugzeug beginnt der ursprünglichen Bewegung entgegengesetzt nach unten zu beschleunigen. Zu diesem Zeitpunkt hat die Böe bereits das Flugzeug verlassen, so dass keine Störung bzw. Fremderregung mehr wirkt. Aufgrund der erfüllten notwendigen Bedingungen für statische

Längsstabilität kehrt das Flugzeug in Folge der relativ großen Nickdämpfung schnell in die getrimmte Ausgangslage zurück. Während die Vertikalbeschleunigung, die Nickgeschwindigkeit und der Nickwinkel wieder ihre Ausgangswerte einnehmen, bleibt ein Nettogewinn an Flughöhe erhalten. Am Verlauf der Nickgeschwindigkeitskurve erkennt man weiterhin, dass die charakteristische Anregungsfrequenz der Böe von  $11,4\text{ Hz}$  deutlich größer als die aus Abbildung 4.38 ersichtliche Antwortfrequenz der Nickschwingung von  $3,6\text{ Hz}$  ist.

In der Abbildung 4.39 ist die korrespondierende Antwort des generischen Modellflugzeugs auf die lange Böe B20 dargestellt. Die Übereinstimmung der Lösungen für die starre, unverformte (UNDEF) und die statisch, aeroelastisch verformte Konfiguration ist ähnlich gut wie für die Ergebnisse der Böe B3. Grundsätzlich ergibt sich das gleiche charakteristische Antwortverhalten. Wesentliche Unterschiede werden für die Extrema der dargestellten Zustandsvariablen beobachtet. Das liegt zum einen daran, dass die Anregungszeit der Böe wesentlich länger ist. Zum anderen lässt sich im Verlauf der Nickgeschwindigkeit erkennen, dass die Böenfrequenz in etwa der Nickfrequenz entspricht und entsprechend eine stärkere Erregung des Nickfreiheitsgrades zur Folge hat. Weitere Unterschiede können in Bezug auf die instationären aerodynamischen Eigenschaften und den damit verbundenen Zeitverzug der Systemantwort beobachtet werden. Während die Nickgeschwindigkeit im Fall der Böe B3 ihr betragsmäßiges Maximum erst erreicht, wenn die Böe das Flugzeug bereits passiert hat, wird im Fall der Böe B20 die maximale Nickgeschwindigkeit ungefähr dann erreicht, wenn sich die Böenamplitude an der Tragfläche befindet. Die relative Abnahme der Flughöhe in Folge der Nickwinkelreduzierung im Verhältnis zu der maximalen Flughöhenzunahme ist deutlich geringer als für die kurze Böe B3.

Im Folgenden werden die Antworten auf die Böenanregungen B3 und B20 unter Einbeziehung der dynamischen Aeroelastik diskutiert. Die zugehörigen Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.40 und 4.42 dargestellt. Verglichen werden die transienten Antworten der Starrkörperfreiheitsgrade in Folge der elastischen Modellierung (FSI) mit den Antworten der starren Modellierung. Außerdem findet eine Bewertung der mithilfe der linearen Modellierung (LIN) ermittelten Ergebnisse bezüglich der unter Verwendung von nichtlinearen (NL) Methoden bestimmten Lösung statt. Zuerst konzentriert sich die Analyse auf Unterschiede in den Lösungen zwischen der starren, linearen und der starren, nichtlinearen Methode gemäß Abbildung 4.40. In Anbetracht der Komplexität der Simulationen stimmen die Resultate von beiden Methoden qualitativ und quantitativ gut überein. Gegenüber der linearisierten Lösung liefert die nichtlineare Simulation vor allem in dem translatorischen Freiheitsgrad einen kleinen Phasenverzug in der Böenantwort. Weiterhin sind die Ergebnisse der nichtlinearen Methode deutlich stärker gedämpft. Vergleicht man die Antwort der nichtlinearen Methode (NL) für das starre Flugzeug mit der Antwort des elastischen Flugzeugs, können deutliche Kopplungseffekte in der Vertikalbeschleunigung und in der Nickgeschwindigkeit beobachtet werden. Offensichtlich existiert eine starke Anregung der ersten Flügeltorsionsmode mit einer Eigenfrequenz von  $30\text{ Hz}$ . Neben der Zunahme der Antwortamplituden und der Abnahme der Dämpfung ist außerdem eine Verringerung der Starrkörpereigenfrequenz in Folge der elastischen Kopplung festgestellt worden. Die Antwort der aeroelastisch gekoppelten, linearisierten Methode (LIN FSI) weist in der Lösung einige Unterschiede zu der aeroelastisch gekoppelten, nichtlinearen Methode (NL FSI) auf. Eine Kopplung der Starrkörperfreiheitsgrade mit der ersten Torsionsmode ist hier im Verhältnis zur Kopplung mit der ersten Biegemode deutlich schwächer ausgebildet. Die Kopplung mit der ersten Biegemode führt analog zur Lösung der nichtlinearen Methode dazu, dass die Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade durch eine schwächere Dämpfung und eine Vergrößerung der Antwortamplituden gekennzeichnet ist, allerdings ist die

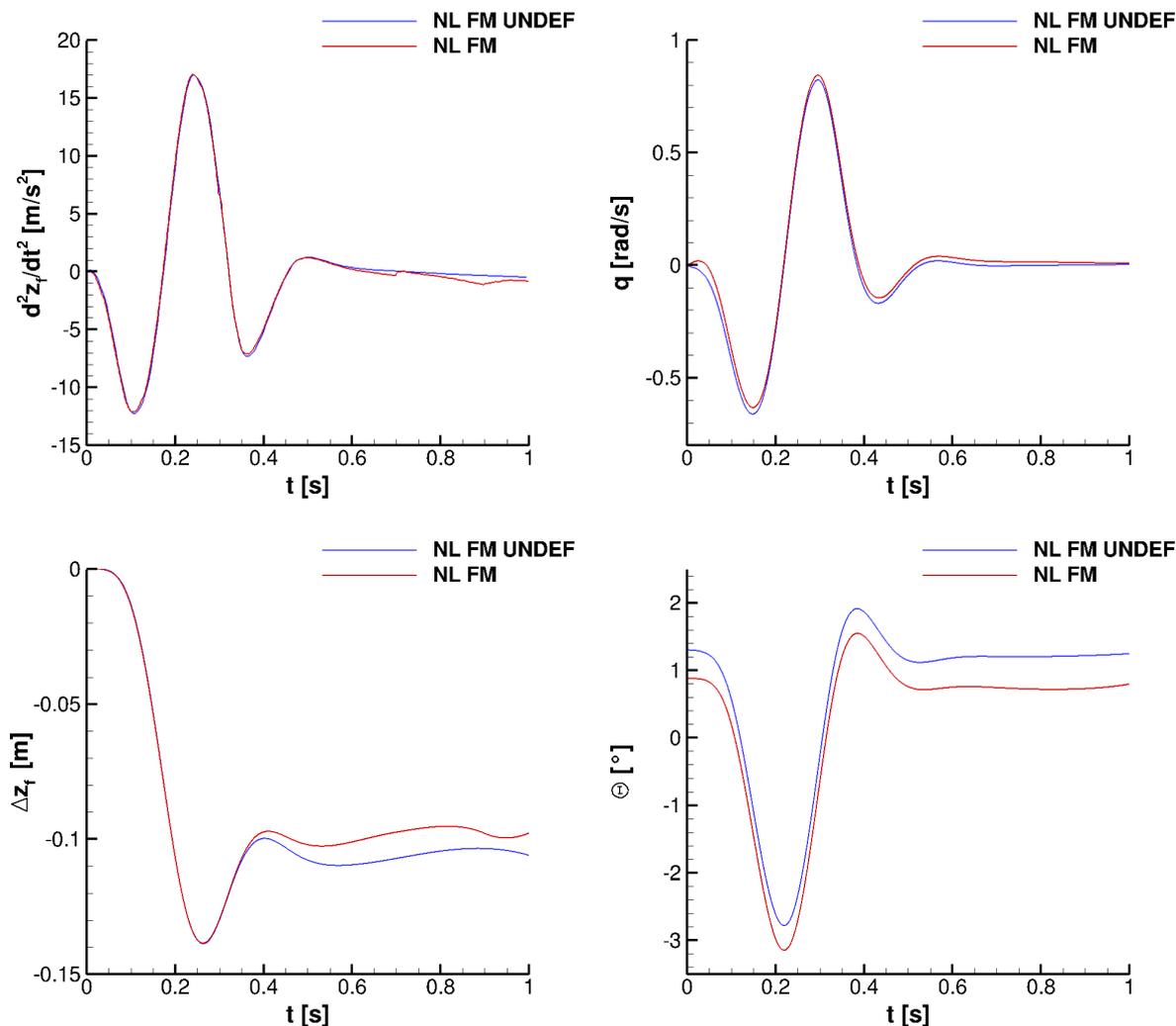


Abbildung 4.39: Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böenanstregung B20, bestimmt mit der nichtlinearen Methode (NL) für die starre Referenzkonfiguration (UNDEF) und die statisch, elastisch verformte Konfiguration,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 20 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

Dämpfung wesentlich kleiner im Vergleich zur nichtlinearen Methode. Die Änderung der Starrkörpereigenfrequenz ist gegenüber der Antwort der starren Konfiguration nur gering.

Die zugehörigen Auslenkungsamplituden der elastischen Freiheitsgrade sind in der Abbildung 4.42 dargestellt. Neben dem Vergleich der linearisierten (LIN) mit den nichtlinearen (NL) Verfahren werden auch die Auswirkungen einer Berücksichtigung der Starrkörperfreiheitsgrade (FM) untersucht. Die Ergebnisse in Folge der Kopplung zeigen für beide Lösungsmethoden identische Trends. Die Starrkörperbewegung des Flugzeugs bewirkt eine Abminderung der durch die Böe auf der Struktur induzierten aerodynamischen Maximallast. Nachdem die Böe das Flugzeug verlassen hat, sind die Auslenkungsamplituden bedingt durch die Kopplung mit den Starrkörperfreiheitsgraden schwächer gedämpft als im Fall einer Vernachlässigung der Flugmechanik. Zusätzlich kann auch hier eine kleine Abnahme der elastischen Eigenfrequenzen der gekoppelten Simulation beobachtet werden. Die im linearen Fall deutlich geringere Dämpfung repräsentiert den wesentlichen

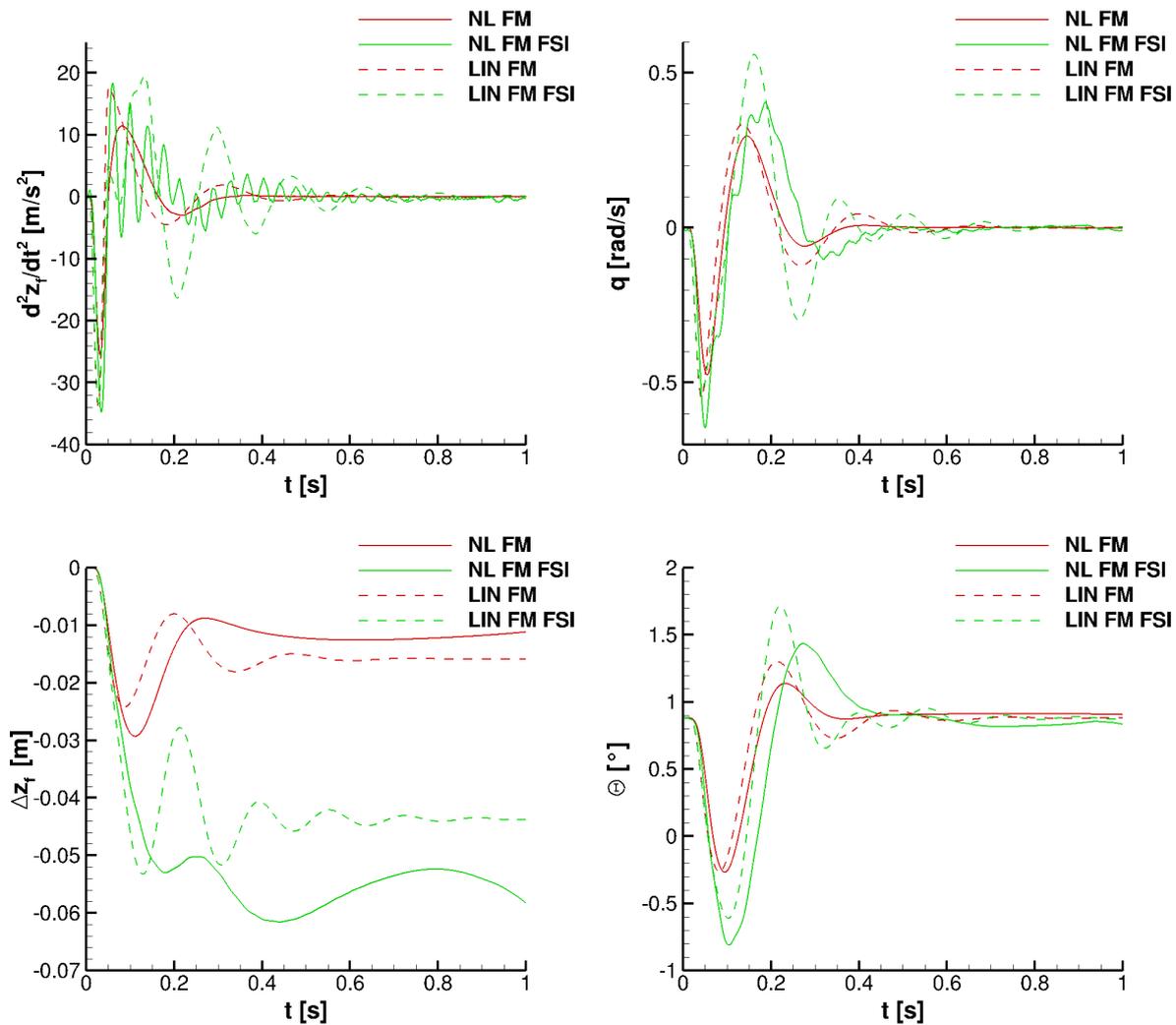


Abbildung 4.40: Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böenexcitation B3, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (LIN) Methode für die starre und die dynamisch, elastisch verformte (FSI) Konfiguration,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 3 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

Unterschied zwischen der linearisierten und der nichtlinearen Methode. Die größten Auslenkungsamplituden werden für alle Simulationen in der ersten Biege- und der ersten Torsionsmode festgestellt.

Die Antworten der elastischen und der flugmechanischen Freiheitsgrade auf die lange Böe B20 sind in den Abbildungen 4.41 und 4.43 dargestellt. Die Lösungen für das starre Modell stimmen für die lineare (LIN) und die nichtlineare (NL) Methode bezüglich der flugmechanischen Freiheitsgrade gut überein. In Analogie zur Antwort auf die kurze Böe ist im linearen Fall ein Phasenverzug und eine etwas schwächere Dämpfung feststellbar. Vergleicht man die Antworten der elastischen Konfiguration mit den Antworten der starren Konfiguration, kann für die lineare und die nichtlineare Methode aufgrund der elastischen Strukturdeformation ein deutliches Anwachsen der böeninduzierten Amplituden beobachtet werden. Wie schon im Fall der kurzen Böe sagt die nichtlineare Methode eine Kopplung mit der elastischen Torsionsmode voraus, die vor allem im Beschleunigungsver-

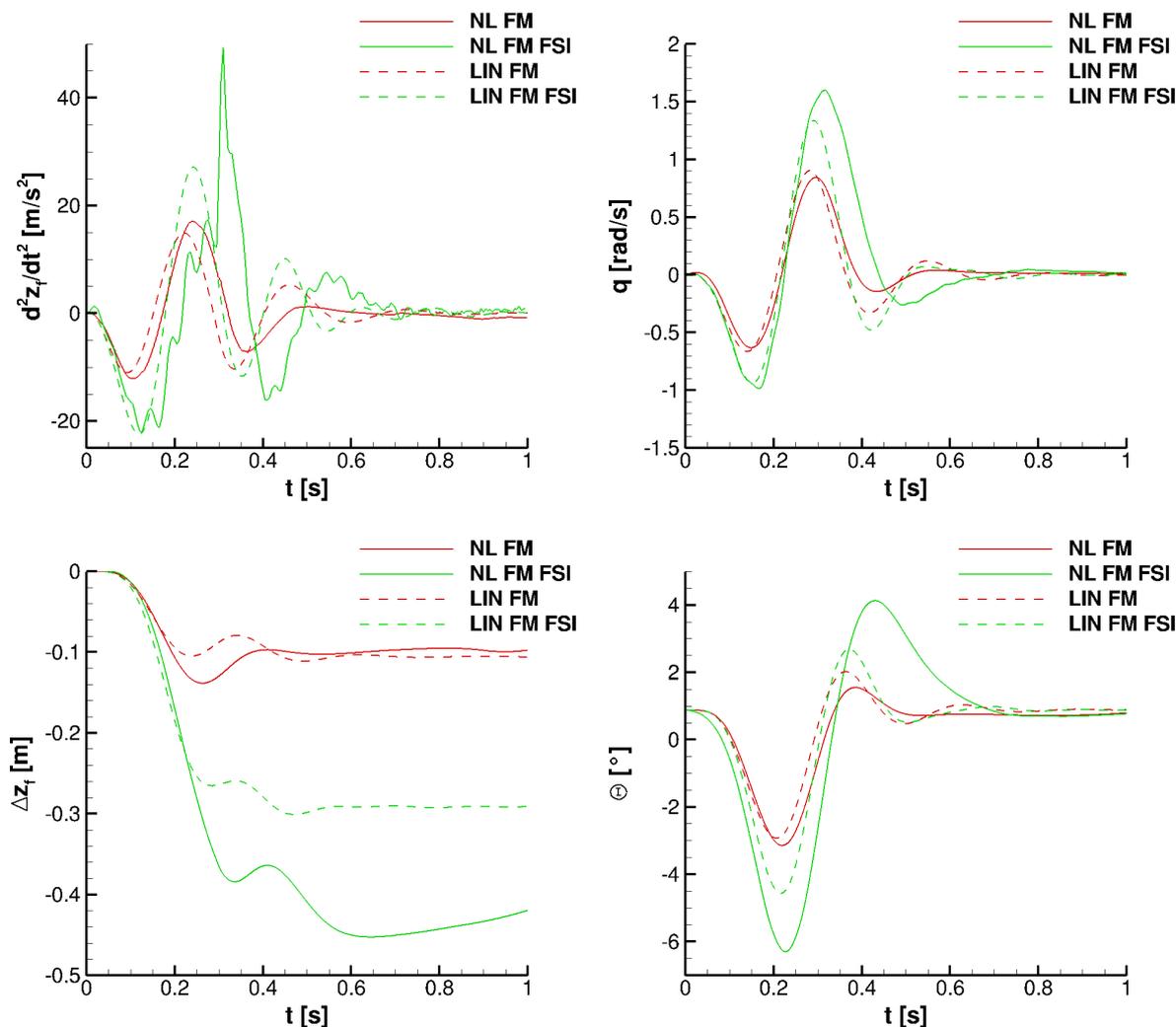


Abbildung 4.41: Antwort der flugmechanischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böenanstregung B20, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) und der linearisierten (LIN) Methode für die starre und die dynamisch, elastisch verformte (FSI) Konfiguration,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 20 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

lauf des Flugzeugschwerpunktes spürbar ist. Während die lineare, gekoppelte Methode für die Böe B3 zum Teil größere Antwortamplituden als die nichtlineare Methode vorhersagt, wird für die Böe B20 das Gegenteil beobachtet. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die mit dem linearisierten CFD-Löser berechneten instationären Derivative im Verhältnis zu den quasistationären Beiwerten betragsmäßig zu groß sind. Analog zu den Simulationen für die kurze Böe ergibt sich auch für die lange Böe im gekoppelten, nichtlinearen Fall eine bedeutende Änderung der Starrkörpereigenfrequenz, die von den linearen Methoden nicht in diesem Ausmaß erfasst wird.

Die Antwort der elastischen Freiheitsgrade auf die Böe B20 ist für die Modellierung mit Berücksichtigung (FM) und ohne Berücksichtigung der Flugmechanik in der Abbildung 4.43 dargestellt. Qualitativ stimmen die von der linearen und der nichtlinearen Methode vorhergesagten Ergebnisse gut überein. Wie schon für die Böe B3 ist die mithilfe der linearen Methode bestimmte Antwort stärker ausgeprägt. Im Dämpfungsverhalten

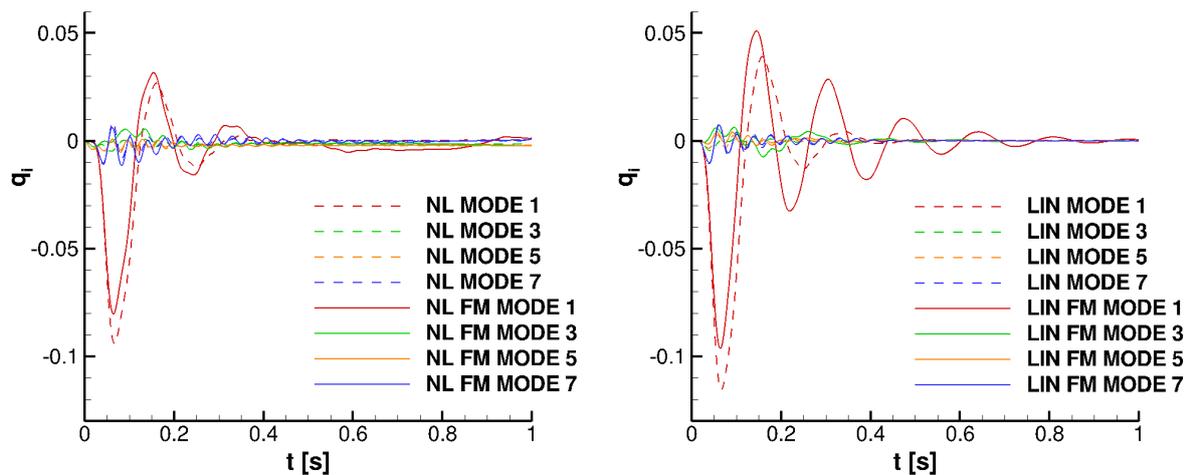


Abbildung 4.42: Antwort der symmetrischen, elastischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böenexcitation B3, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) (links) und der linearisierten (LIN) (rechts) Methode mit (FM) und ohne Berücksichtigung der Starrkörperfreiheitsgrade,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 3 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

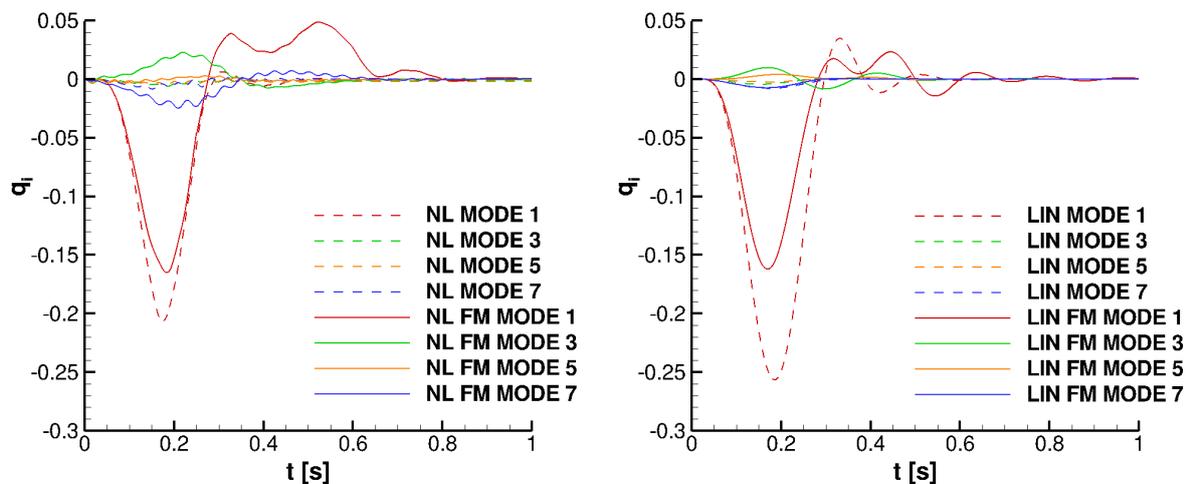


Abbildung 4.43: Antwort der symmetrischen, elastischen Freiheitsgrade des generischen Modellflugzeugs auf die Böenexcitation B20, bestimmt mit der nichtlinearen (NL) (links) und der linearisierten (LIN) (rechts) Methode mit (FM) und ohne Berücksichtigung der Starrkörperfreiheitsgrade,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 20 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

sind hier keine nennenswerten Unterschiede zwischen den Methoden erkennbar. Auffällig ist wiederum die große Änderung der ersten Eigenfrequenz im Ausschlagverhalten der Struktur für die gekoppelte Simulation mit der nichtlinearen Methode. Interessanterweise sagen beide Methoden im Fall der Berücksichtigung der Flugmechanik eine betragsmäßig geringere maximale Auslenkung der ersten Biegemode, aber eine größere Auslenkung aller anderer Moden voraus. Nachdem die Böenamplitude das Flugzeug passiert hat, ist die erste Biegemode aufgrund der aerodynamischen Kopplungseffekte deutlich schwächer gedämpft, als unter Vernachlässigung der Flugmechanik.

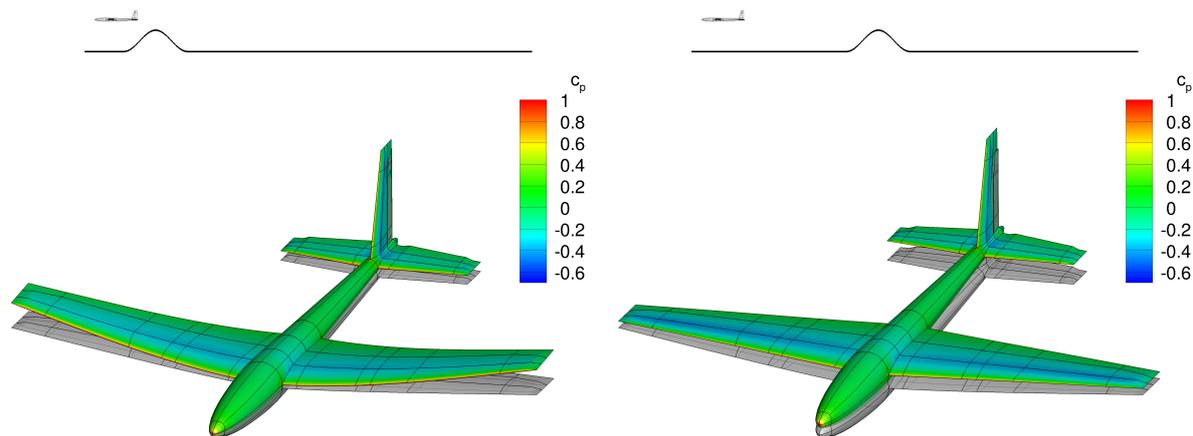


Abbildung 4.44: Oberflächendruckverteilung, Position und Verformung des generischen Modellflugzeugs während der elastischen Antwort auf die Böenanstregung B3 zum Zeitpunkt  $t = 0,064s$  (links) und  $t = 0,144s$  (rechts) im Vergleich zur ungestörten Konfiguration (grau), bestimmt mit dem nichtlinearen Löser,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 3 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

Die Abbildung 4.44 zeigt die Oberflächendruckverteilung, die Position und die Verformung des generischen Modellflugzeugs zu zwei diskreten Zeitpunkten für die Böenanstregung B3. Die Ergebnisse sind mithilfe der vollständig gekoppelten Simulation, das heißt unter Berücksichtigung des nichtlinearen CFD-Lösers, des Strukturlösers und des nichtlinearen Flugmechaniklösers ermittelt worden. Die dargestellten Zeitpunkte entsprechen jeweils der maximalen positiven und der maximalen negativen Tragflächenbiegung. Zur besseren Visualisierung der Positions- und Formänderung des Flugzeugs ist zum Vergleich die Referenzkonfiguration in der ungestörten, getrimmten Ausgangsposition in grauer Farbe abgebildet. Zusätzlich ist am oberen Rand der Abbildung die Position der Böe zu dem jeweiligen diskreten Zeitpunkt relativ zum Flugzeug dargestellt. Die maximale Durchbiegung der Tragflächen in Folge des durch die Böe induzierten Zusatzanstellwinkels wird erst zum Zeitpunkt  $t = 0,064s$  erreicht. Zu dieser Zeit befindet sich die Böe bereits hinter dem Flugzeug. Folglich biegen sich die Tragflächen aufgrund der Massenträgheit und der im Voraus durch die Böe übertragenen kinetischen Energie noch weiter nach oben, obwohl die Böe keinen Auftrieb mehr induziert. Wenn der untere Tiefpunkt der ersten Eigenmode zum Zeitpunkt  $t = 0,144s$  erreicht wird, befindet sich die Böe weit hinter dem Flugzeug.

Die korrespondierenden Momentaufnahmen bezüglich der Antwort auf die lange Böe B20 sind in der Abbildung 4.45 dargestellt. In diesem Fall ergeben sich wesentlich größere Verformungen und Änderungen in der Flugbahn als für die kurze Böe. Sowohl die linearen FEM, als auch die reibungsfreien CFD-Methoden erreichen zum Zeitpunkt der maximalen Durchbiegung bei  $t = 0,184s$  ihre Gültigkeitsgrenzen. Schließlich sind an den Tragflügelspitzen bedingt durch die große lokale Anstellwinkelerhöhung in Folge der Flügeltorsion und des Böenaufwindes kleine Ablösegebiete zu erkennen. Diese Ablösegebiete beruhen auf dissipativen, numerischen Effekten des Lösers und besitzen daher keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Der Einfluss auf die Böenantwort ist im vorliegenden Fall aber als vernachlässigbar anzusehen. Die Änderung der Druckverteilung lässt auf einen deutlich erhöhten Lastfaktor schließen. Auffällig ist weiterhin, dass sich die Böe im Gegensatz zum Fall B3 zum Zeitpunkt der maximalen Durchbiegung noch direkt am Flugzeug befindet.

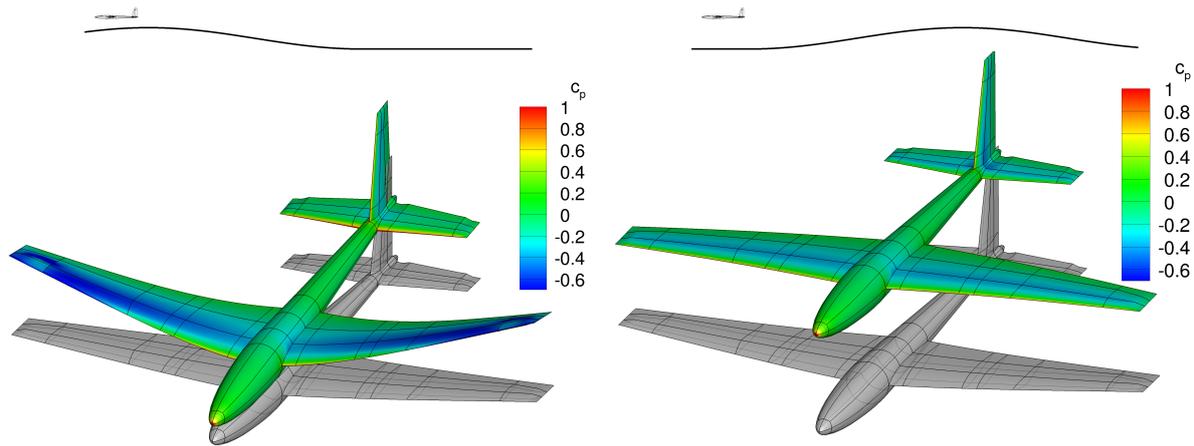


Abbildung 4.45: Oberflächendruckverteilung, Position und Verformung des generischen Modellflugzeugs während der elastischen Antwort auf die Böenanregung B20 zum Zeitpunkt  $t = 0,184s$  (links) und  $t = 0,327s$  (rechts) im Vergleich zur ungestörten Konfiguration (grau), bestimmt mit dem nichtlinearen Löser,  $U_\infty = 68 \text{ m/s}$ ,  $q_\infty = 2837,2 \text{ Pa}$ ,  $l_B = 20 \text{ m}$ ,  $\hat{w}_B = 5 \text{ m/s}$

In der linken Abbildung ist der negative Nickwinkel als Resultat der kopfflastigen Nickbewegung sehr gut zu erkennen. Zum Zeitpunkt  $t = 0,327s$  hat die Böe das Flugzeug verlassen, die Tragflächen sind leicht nach unten durchgebogen und ein deutlicher Gewinn an Flughöhe ist erkennbar.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Ergebnisse der linearen und der nichtlinearen Methoden qualitativ gut übereinstimmen. Als Einschränkung ist zu erwähnen, dass die Kopplung der einzelnen elastischen Moden unterschiedlich stark ausfällt. Beträgsmäßig gibt es Differenzen in den Lösungen. Bezüglich der Starrkörperfreiheitsgrade liegen diese für die starre Konfiguration im Bereich von maximal 10 % und für die elastische Konfiguration bei bis zu 30 %. Die Verringerung der Starrkörpereigenfrequenz in Folge der elastischen Kopplung kann von den linearen Methoden nicht korrekt vorhergesagt werden. Die Antwort der elastischen Freiheitsgrade zeigt für beide Methoden die gleichen Tendenzen in Folge einer Berücksichtigung der Flugmechanik. Beträgsmäßig sind die mit den linearen Methoden bestimmten Auslenkungsamplituden der elastischen Moden um bis zu 20 % größer. Insgesamt konnte gezeigt werden, dass es zu Kopplungseffekten zwischen den elastischen Freiheitsgraden und den Starrkörperfreiheitsgraden kommen kann, die auf keinen Fall im Entwurfsprozess vernachlässigt werden dürfen. Während die maximale Strukturdeformation in Folge der Berücksichtigung von Starrkörperfreiheitsgraden abnimmt, wird die flugmechanische Antwort in Folge der elastischen Modellierung verstärkt und verzögert.



# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden aeroelastisch gekoppelte Stabilitäts- und Antwortprobleme numerisch untersucht. In diesem Rahmen sind sowohl ein transientes, gekoppeltes Verfahren zur Lösung nichtlinearer Systeme, als auch ein linearisiertes, sehr effizientes Verfahren zur Lösung dynamisch linearer Systeme entwickelt worden. Beide Verfahren eignen sich besonders zur Anwendung auf transsonische Problemstellungen, da im Gegensatz zu den bisher standardmäßig zur Beschreibung der instationären Aerodynamik eingesetzten Potentialmethoden auch nichtlineare Phänomene wie Verdichtungsstöße korrekt vorhergesagt werden können. Bezüglich der Stabilitätsanalyse konzentriert sich die Diskussion der Ergebnisse auf das klassische Flutterproblem. Mithilfe der Antwortanalyse sind dynamische Systemantworten auf diskrete Böenregungen bestimmt und ausgewertet worden.

Zur Kopplung der individuellen Löser im Zeitbereich wurden neben einem linearen Finite-Elemente-Methoden- (FEM)-Strukturlöser und einem nichtlinearen Flugmechaniklöser auch diverse Methoden für den Last- und Verformungstransfer zwischen den Lösern, die Netznachführung und die zeitechte Kopplung implementiert und getestet. Der Verformungstransfer funktioniert für die in dieser Arbeit präsentierten Anwendungen sowohl mit der linearen Thin-Plate-Spline- (TPS)-Methode als auch mit der nichtlinearen Constant-Volume-Tetrahedron- (CVT)-Methode sehr gut. Bezüglich des Lasttransfers produzieren die "Spline-basierten" Methoden an Gebietsrändern oder in der Nähe von Unstetigkeiten unphysikalische Oszillationen. Aus diesem Grund kommt eine Methode zum Einsatz, bei der die Oberfläche mithilfe von FEM-Formfunktionen interpoliert wird. Die Nachführung der strukturierten Netze erweist sich für komplexe Konfigurationen als kritischer Punkt innerhalb des Kopplungsprozesses. Die besten Ergebnisse konnten mit einer kombinierten Anwendung der "Spring-Analogy" zur Bewegung der Blockeckpunkte und der Transfiniten Interpolations- (TFI)-Methode zur Bewegung der Zelleckpunkte innerhalb der Blöcke erzielt werden. Nachteile der Methode ergeben sich dadurch, dass Blöcke nicht beliebig zusammengefasst werden können, wodurch deren Anzahl ansteigt. Um die zeitliche Genauigkeit der Simulation gewährleisten zu können, wurde ein implizites Dual-Time-Stepping (DTS) als starkes Kopplungsschema eingesetzt.

Für die Prozesskette der linearen Simulationsumgebung, die auf einer Formulierung im Frequenzbereich basiert, wurden Flutterlöser zur Durchführung der Stabilitätsuntersuchungen implementiert. Die Durchführung von Antwortanalysen konnte durch die Überführung der Formulierung in ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell im Zeitbereich mithilfe eines Rational-Function-Approximation- (RFA)-Verfahrens realisiert werden. Die instationäre Aerodynamik wird in der linearen Modellierung durch generalisierte Luftkräfte (GAF) approximiert. Die generalisierten Luftkräfte werden mithilfe von zeitlinearisierten Computational-Fluid-Dynamics- (CFD)-Verfahren bezüglich eines nichtlinearen Referenzzustandes sehr effizient im Frequenzbereich berechnet. Damit auch die Bestimmung von Böenantworten ermöglicht wird, ist die Bereitstellung von entsprechenden generalisierten Böenluftkräften erforderlich. Mit diesem Ziel ist eine neue Formulierung

zur Modellierung harmonischer Böen erfolgreich in den zeitlinearisierten Löser integriert worden. Die Zeitersparnis gegenüber der transienten, harmonischen Böensimulation liegt analog zur Berechnung von bewegungsinduzierten Luftkräften im Bereich von einer Größenordnung.

Die Validierung der aeroelastischen Kopplungsmethoden erfolgte an geeigneten experimentellen Daten. Für einen Flügel kleiner Streckung mit symmetrischem Überschallprofil sind kritische Fattergrößen für verschiedene sub- trans- und supersonische Anströmbedingungen berechnet und mit experimentellen Daten verglichen worden. Für einen typischen Transportflugzeugflügel großer Streckung mit superkritischem Profil konnten statische aeroelastische Verformungen bei transsonischen Anströmbedingungen an experimentellen Daten validiert werden. Außerdem sind instationäre Druckverteilungen für harmonische Schwingungen um den statischen aeroelastischen Gleichgewichtszustand ermittelt und verglichen worden. Die Validierung der implementierten Böenmodelle erfolgte an einem zweidimensionalen, analytischen Ergebnis. Zur Beurteilung der Vorhersagequalität der linearisierten Methode bezüglich des dynamischen Böenantwortverhaltens des Flügels kleiner Streckung und einer generischen Flugzeugkonfiguration dient der Vergleich mit der nichtlinearen Referenzlösung. Die Böenantworten der generischen Flugzeugkonfiguration sind unter Berücksichtigung der Flugdynamik ermittelt und diskutiert worden.

Die Ergebnisse der Flutteranalyse für den Flügel kleiner Streckung zeigen sowohl mit der linearisierten Methode, als auch mit der nichtlinearen Methode im sub- und transsonischen Geschwindigkeitsbereich sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell gemessenen Referenzdaten. Die typische Abnahme der kritischen Flattergeschwindigkeit bei transsonischen Anströmgeschwindigkeiten kann qualitativ und quantitativ vorhergesagt werden. Aufgrund der kleinen Flügeldicke ergibt eine Vernachlässigung von Reibungseffekten keine nennenswerte Verminderung der Ergebnisqualität. Im Überschallbereich kann die Stoßposition und -stärke von den reibungsfreien Methoden nicht korrekt wiedergegeben werden, was in diesem Fall zu einer deutlichen Überschätzung der Flattergeschwindigkeit führt. Bedingt durch die schwingungsinduzierte, nichtlineare Stoßoszillation liefern die nichtlinearen, im Zeitbereich gekoppelten Verfahren etwas bessere Ergebnisse. Dennoch kann die kritische Flattergeschwindigkeit bei supersonischen Anströmgeschwindigkeiten nicht exakt vorhergesagt werden. Andere Arbeiten haben gezeigt, dass die Vernachlässigung der strukturellen Dämpfung ein wesentlicher Grund dafür ist.

Die statische aeroelastische Analyse des Transportflugzeugflügels großer Streckung hat ergeben, dass sowohl die elastische Verformung, als auch die Reibung einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Oberflächendruckverteilung nehmen. Das aus Plattenelementen bestehende Strukturmodell ist in der Lage, die im Experiment beobachteten statischen Verformungen korrekt wiederzugeben. Ausgehend von erzwungenen, harmonischen Schwingungen in der zweiten Struktureigenmode sind mithilfe des linearisierten und des nichtlinearen CFD-Lösers ermittelte instationäre Druckverteilungen auf der Flügeloberfläche mit experimentellen Daten verglichen worden. Die qualitative Übereinstimmung ist für beide Methoden zufriedenstellend, quantitativ sind in der direkten Umgebung des Verdichtungsstoßes Abweichungen feststellbar. Ein möglicher Grund für diesen Unterschied ist die Vernachlässigung des komplexen Anregungsmechanismus bei der Erstellung des Strukturmodells. Größere Abweichungen werden für die Lösung der reibungsfreien Methoden beobachtet. Die Analyse der freien Schwingungen und die Flutteranalyse liefern plausible Ergebnisse, können aber wegen fehlender experimenteller Vergleichsdaten nicht vollends beurteilt werden.

Zur Validierung der Böenmodelle diene ein inkompressibler, zweidimensionaler Testfall, für den analytische Ergebnisse in Form der Sears-Funktion vorliegen. Der qualitative Charakter des instationären Auftriebsanstiegs in Abhängigkeit der harmonischen Böenfrequenz ist von der linearisierten und der nichtlinearen CFD-Methode sehr gut erfasst worden. Quantitativ existieren kleine Unterschiede, die auf die mangelnde Vergleichbarkeit des kompressiblen CFD-Lösers mit der inkompressiblen analytischen Lösung, sowie die Annäherung der ebenen Platte durch ein symmetrisches NACA-Profil zurückzuführen sind. Durch die Parametervariation der Machzahl und der Profildicke des NACA-Profiles konnte ein starker Einfluss dieser Größen auf die Lösung bestätigt werden. Eindeutige Trends über den gesamten Frequenzbereich konnten allerdings nicht abgeleitet werden.

Das nichtlineare und das linearisierte Böenmodell sind anschließend für den Flügel kleiner Streckung anhand von Böenantworten auf "1-cos"-Vertikalböen variabler Länge und Amplitude über einen großen Machzahlbereich getestet worden. Die Ergebnisse der nichtlinearen und der linearisierten Modellierung stimmen für alle untersuchten Fälle und Methoden sehr gut überein. Im trans- und supersonischen Geschwindigkeitsbereich konnten für die lange Böe mit großer Amplitude nichtlineare Effekte festgestellt werden. Für die nichtlineare Methode haben Konvergenzstudien gezeigt, dass ein optimales Verhältnis aus der physikalischen Zeitschrittweite und der Anzahl der Kommunikationen zwischen den Lösern in Hinblick auf die Genauigkeit und die Effizienz des Kopplungsschemas existiert.

Abschließend sind die linearisierte und die nichtlineare Simulationsmethode durch die Berücksichtigung von Starrkörperfreiheitsgraden erweitert und auf ein generisches Modellflugzeug angewendet worden. Gegenstand der Untersuchung ist die Antwort auf je eine kurze und eine lange "1-cos"-Vertikalböe im horizontalen Geradeausflug. Als notwendige Voraussetzung wurden die starre und die elastisch verformbare Konfiguration erfolgreich getrimmt. Ein Vergleich findet jeweils zwischen der linearisierten und der nichtlinearen Methode, sowie zwischen der starren und der elastisch verformbaren Konfiguration statt. Insgesamt konnte gezeigt werden, dass es zu Kopplungseffekten zwischen den elastischen Freiheitsgraden und den Starrkörperfreiheitsgraden kommen kann. Während die maximale Strukturdeformation in Folge der elastischen Modellierung abnimmt, wird die flugmechanische Antwort verstärkt. Die Kopplung bewirkt eine Abnahme der Schwingungsfrequenzen und eine Abnahme der Dämpfung in den Antworten der Starrkörperfreiheitsgrade. Die Berücksichtigung der Flugmechanik kann bezüglich der Amplituden der einzelnen elastischen Freiheitsgrade sowohl verstärkend, als auch abschwächend wirken, wobei die Dämpfung der Antwort auch hier abnimmt. Die Ergebnisse der linearen und der nichtlinearen Methoden stimmen qualitativ gut überein. Abweichungen wurden in der Stärke der Kopplung der einzelnen elastischen Moden festgestellt, was sich auch auf den Betrag der Antwortamplituden auswirkt. Die beobachtete Änderung der Starrkörpereigenfrequenz in Folge der elastischen Kopplung kann von den linearen Methoden nicht korrekt vorhergesagt werden.

Hinsichtlich zukünftiger Arbeiten könnte eine weitere Effizienzsteigerung des linearisierten CFD-Lösers durch die Verwendung von Krylov-Unterraum-Verfahren zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems erreicht werden. Um nichtlineare Anwendungsfälle mithilfe der linearisierten Methoden besser modellieren zu können, wäre es vorteilhaft, höherharmonische Luftkraftanteile optional zu berechnen und innerhalb der weiteren Prozesskette zu berücksichtigen. Bezüglich der nichtlinearen Kopplungsmethodik resultieren gegebenenfalls Einschränkungen aus der aufwendigen Netzgenerierung sowie der in komplexen Anwendungsfällen unzureichend robusten Netznachführung. Um zukünftig größere

Netzverformungen und Netzrelativbewegungen zu ermöglichen und den Vernetzungsaufwand zu reduzieren, sollten Chimera-Methoden in Betracht gezogen werden. Eine vielversprechende Möglichkeit zur Verbesserung der Flexibilität und Kontrolle bezüglich der Netznachführung bietet die Verwendung von linear verformbaren FEM-Balkentragwerken zur Modellierung der Gitterblockkanten. Der Modellierungsaufwand dieses Ansatzes ist allerdings deutlich höher als die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren. Durch die Implementierung einer Schnittstelle zu einem externen Strukturlöser könnten in Zukunft auch auf Seiten der Strukturmodellierung komplexere Anwendungsbeispiele behandelt werden. In Hinblick auf die Lösung der linearisierten Flugmechanikgleichungen wurde teilweise ein erheblicher Einfluss der instationären dynamischen Beiwerte und der entsprechenden aeroelastischen Kopplungsderivative festgestellt, der in einer weiteren Studie ausführlicher untersucht und bewertet werden sollte.

# Literaturverzeichnis

- [1] Albano, E., Rodden, W. P., *A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows*, AIAA Journal, Vol. 7, No. 2, 1969.
- [2] Alonso, J. J., Jameson, A., *Fully Implicit Time-Marching Aeroelastic Solutions*, AIAA-Paper 94-0056, 1994.
- [3] Ashley, H., *Role of shocks in the sub-transonic flutter phenomena*, Journal of Aircraft, Vol. 17, No. 3, 1980.
- [4] Ballmann, J., Dafnis, A., Braun, C., Korsch, H., Reimerdes, H.-G., Olivier, H., *The HIRENASD Project: High Reynolds Number Aero-Structural Dynamics Experiments in the European Transonic Windtunnel (ETW)*, ICAS-Paper 2006-5.11.2, Hamburg, 2006.
- [5] Ballmann, J., Dafnis, A., Korsch, H., Buxel, C., Reimerdes, H.-G., Brakhage, K.-H., Olivier, H., Braun, C., Baars, A., Boucke, A., *Experimental Analysis of High Reynolds Number Aero-Structural Dynamics in ETW*, AIAA-Paper 2008-0841, 2008.
- [6] Bathe, K.-J., *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [7] Batina, J. T., Bennett, R. M., Seidel, D. A., Cunningham, H. J., Samuel, R. B., *Recent advances in transonic computational aeroelasticity*, NASA Technical Memorandum 100663, 1988.
- [8] Batina, J. T., *Unsteady Euler Airfoil Solutions Using Unstructured Dynamic Meshes*, AIAA Journal, Vol. 28, No. 8, 1990.
- [9] Baumhauer, A. G., Koning, C., *On the Stability of Oscillation of an Airplane Wing*, NACA TM 223, 1923.
- [10] Bendiksen, O., *Nonclassical Aileron Buzz in Transonic Flow*, 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA-Paper 93-1479, 1993.
- [11] Benek, J. A., Steger, J. L., Dougherty, F. C., *A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations*, 6th Computational Fluid Dynamics conference, 1983.
- [12] Beran, P. S., Huttshell, L. J., Buxton, B. J., Noll, C., Osswald, G., *Computational aeroelasticity techniques for viscous flow*, CEAS/AIAA/ICASE/NASA Langley International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Williamsburg, 1999.

- [13] Berger, M. J., *On the Conservation at Grid Interfaces*, SIAM Journal Numer. Anal., Vol. 24, No. 5, 1987.
- [14] Betten, J., *Finite Elemente für Ingenieure 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [15] Birnbaum, W., *Das Ebene Problem des Schlagenden Flügels*, ZAMM, Vol. 4, 1924.
- [16] Bisplinghoff, R. L., Ashley, H. *Principles of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, New York, 1962.
- [17] Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., Halfman, R. L., *Aeroelasticity*, Dover Publications, Mineola, 1996.
- [18] Blazek, J., *Investigations of the Implicit LU-SSOR Scheme*, Report, DLR-FB 93-51, Braunschweig, 1993.
- [19] Blazek, J., *A Multigrid LU-SSOR Scheme for the Solution of Hypersonic Flow Problems*, AIAA-Paper 94-0062, 1994.
- [20] Boucke, A., *Kopplungswerkzeuge für aeroelastische Simulationen*, Dissertation, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, RWTH Aachen, 2003.
- [21] Braun, C., *Ein modulares Verfahren für die numerische aeroelastische Analyse von Luftfahrzeugen*, Dissertation, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, RWTH Aachen, 2007.
- [22] Buttrill, C. S., Zeiler, T. A., Arbuckle, P. D., *Nonlinear Simulation of a Flexible Aircraft in Maneuvering Flight*, AIAA Paper 87-2501-CP, Monterey, 1987.
- [23] Byun, C., Farhangnia, M., Guruswamy, G. P., *Aerodynamic Influence Coefficient Computations Using Euler/Navier-Stokes Equations on Parallel Computers*, AIAA Journal, Vol. 37, No. 11, 1999.
- [24] Canavin, J. R., Likins, P. W., *Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft*, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, No. 12, 1977.
- [25] Cebal, J. R., Löhner, R., *Conservative Load Projection and Tracking for Fluid-Structure Problems*, AIAA Journal, Vol. 35, No. 4, 1997.
- [26] Chakravarthy, S. R., *High Resolution Upwind Formulations for the Navier-Stokes Equations*, Von Kármán Inst. Lecture Series on Computational Fluid Dynamics, VK-I 1988-05, Brüssel, 1988.
- [27] Chen, P. C., Liu, D., *A Harmonic Gradient Method for Unsteady Supersonic Flow Calculations*, Journal of Aircraft, Vol. 22, No. 5, 1985.
- [28] Chen, P. C., *A Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-Method*, AIAA Journal, Vol. 38, No. 5, 2000.
- [29] Chwalowski, P., Heeg, J., Dalenbring, M., Jirasek, A., Ritter, M., Hansen, T., *Collaborative HIRENASD Analysis to Eliminate Variations in Computational Methods*, IFASD-Paper, 2013-1D, Bristol, 2013.

- [30] Cole, H. A., Brown, S. C., Holleman, E. C., *The effects of flexibility on the longitudinal and lateral-directional response of a large airplane*, NACA Research Memorandum, NACA-RM-A55D14, Moffett Field, 1955.
- [31] Cole, H. A., Brown, S. C., Holleman, E. C., *Measured and predicted dynamic response characteristics of a flexible airplane to elevator control over a frequency range including three structural modes*, NACA Technical Note, NACA-TN-4147, Moffett Field, 1958.
- [32] Collar, A., *The first 50 years of aeroelasticity*, Aerospace, Vol. 5, No. 2, 1978.
- [33] Da Ronch, A., Ghoreyshi, M., Badcock, K. J., Görtz, S., Widhalm, M., Dwight, R. P., Campobasso, M. S., *Linear Frequency Domain and Harmonic Balance Predictions of Dynamic Derivatives*, AIAA-Paper 2010-4699, Chicago, 2010.
- [34] Da Ronch, A., Vallespin, D., Ghoreyshi, M., Badcock, K. J., *Computation and Evaluation of Dynamic Derivatives Using CFD*, AIAA-Paper 2010-4817, Chicago, 2010.
- [35] Davis, G. A., Bendiksen, O. O., *Unsteady Transonic Two-Dimensional Euler Solutions Using Finite Elements*, AIAA Journal, Vol. 31, No. 6, 1993.
- [36] Decker, K., Meyer, E., Breitsamter, C., *Glätten von strukturierten Multiblockgittern über Blockgrenzen*, Bericht FLM-1999/02, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1999.
- [37] DEF STAN 00-970, *Ministry of Defense Standard 00-970 Design and Airworthiness Requirements for Service Aircraft*, UK Defense Standardization.
- [38] De Silva, C. W., *Vibration - Fundamentals and Practice*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
- [39] Dowell, E. H., Edwards, J., Strganac, T., *Nonlinear Aeroelasticity*, Journal of Aircraft, Vol. 40, No. 5, 2003.
- [40] Dowell, E. H., Hall, K. C., *Modeling of fluid-structure interaction*, Annual Review of Fluid Mechanics, 33, 2001.
- [41] Duchon, J. P., *Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces*, Constructive Theory of Functions of Several Variables, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [42] Dusto, A. R., et al., *A Method for Predicting the Stability Characteristics of an Elastic Airplane*, Vol. 1-FLEXSTAB Theoretical Description, NASA CR-114712, 1974.
- [43] EASA, *Certification Specifications for Large Aeroplanes CS-25*, European Aviation Safety Agency, 2010.
- [44] Etkin, B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, Mineola, 2005.
- [45] FAA, *Part 25 - Airworthiness Standards, Transport Category Airplanes*, Federal

- Aviation Administration Department of Transportation.
- [46] Farhat, C., Lesoinne, M., Le Tallec, P., *Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 157, 1998.
- [47] Farhat, C., Lesoinne, M., *Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 182, 2000.
- [48] Farhat, C., Pierson, K., Degand, C., *Multidisciplinary simulation of the maneuvering of an aircraft*, Engineering with Computers, Vol. 17, 2001.
- [49] Fleischer, D., Förster, M., Breitsamter, C., *Efficient CFD-Based Unsteady Aerodynamics Analysis*, IFASD-Paper, 2011-39, Paris, 2011.
- [50] Fleischer, D., *Verfahren reduzierter Ordnung zur Ermittlung instationärer Luftkräfte*, Dissertation, Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik, TU München, 2014.
- [51] Förster, M., Fleischer, D., Breitsamter, C., *Computation of Unsteady Aerodynamic Derivatives Using a Small Disturbance Euler-/Navier-Stokes-Method*, RTO AVT-189 Paper, Portsmouth West, 2011.
- [52] Förster, M., Breitsamter, C., *Computational Aeroelastic Analysis in Time and Frequency Domain Using Non-Linear and Linearized Euler-/Navier-Stokes-Methods*, IFASD-Paper, 2013-1C, Bristol, 2013.
- [53] Förster, M., Breitsamter, C., *Aeroelastic Prediction of Discrete Gust Loads Using Nonlinear and Time-Linearized CFD-Methods*, Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics, Vol. 3, No. 3, 2015.
- [54] Frank Pai, P., *Highly Flexible Structures: Modeling, Computation and Experimentation*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, 2007.
- [55] Frazer, R. A., Duncan, W. J., *The Flutter of Aeroplane Wings*, R&M 1155, 1929.
- [56] Fung, Y., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Dover Publications, Mineola, 1969.
- [57] Garrick, I. E., *On some reciprocal relations in the theory of nonstationary flows*, NACA Technical Report, NACA-TR-629, 1938.
- [58] Garrick, I. E., Reed III, W. H., *Historical Development of Aircraft Flutter*, Journal of Aircraft, Vol. 18, No. 11, 1981.
- [59] Giesing, J. P., Rodden, W. P., Stahl, B., *Sears Function and Lifting Surface Theory for Harmonic Gust Fields*, Journal of Aircraft, Vol. 7, No. 3, 1970.
- [60] Glauert, H., *The Force and Moment on an Oscillating Aerofoil*, R&M 1242, 1929.

- [61] Goura, G. S. L., *Time Marching Analysis of Flutter Using Computational Fluid Dynamics*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Glasgow, 2001.
- [62] Guruswamy, G., *Coupled Finite-Difference/Finite-Element Approach for Wing-Body Aeroelasticity*, AIAA-Paper 92-4680-CP, 1992.
- [63] Hall, K. C., *A Linearized Euler Analysis of Unsteady Flows in Turbomachinery*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
- [64] Hall, K. C., Thomas, J. P., Dowell, E. H., *Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows*, AIAA Journal, Vol. 38, No. 10, 2000.
- [65] Hall, K. C., Thomas, J. P., Clark, W. S., *Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique*, AIAA Journal, Vol. 40, No. 5, 2002.
- [66] Harder, R. L., Desmarais, R. N., *Interpolation Using Surface Splines*, AIAA Journal, Vol. 9, No. 2, 1972.
- [67] Hase, R., *Einfluss der Fernfeldrandbedingungen auf die numerische Lösung der instationären Eulergleichungen für umströmte Körper*, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1993.
- [68] Hassan, D., Ritter, M., *Assessment of the ONERA/DLR Numerical Aeroelastic Prediction Capabilities on the HIRENASD Configuration*, IFASD-Paper, 2011-109, Paris, 2011.
- [69] Hassig, H. J., *An Approximate True Damping Solution of the Flutter Equation by Determinant Iteration*, Journal of Aircraft, Vol. 8, No. 11, 1971.
- [70] Henshaw, M. J. de C., Badcock, K. J., Vio, G. A., Allen, C. B., Chamberlain, J., Kaynes, I., Dimitriadis, G., Cooper, J. E., Woodgate, M. A., Rampurawala, A. M., Jones, D., Fenwick, C., Gaitonde, A. L., Taylor, N. V., Amor, D. S., Eccles, T. A., Denley, C. J., *Non-linear aeroelastic prediction for aircraft applications*, Journal of Progress in Aerospace Sciences 43, 2007.
- [71] Heinrich, R., *Comparison of Different Approaches for Gust Modeling in the CFD Code TAU*, IFASD-Paper, Bristol, 2013.
- [72] Heller, G., *Aerodynamik von Deltaflügelkonfigurationen bei Schieben und Gieren*, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1997.
- [73] Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., *Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, 1977.
- [74] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 1 and 2*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [75] Hoblit, F. M., *Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications*, AIAA Education

- Series, Washigton, D.C., 1988.
- [76] Hoffmann, K. A., Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics, Volume I, II and III, Fourth Edition*, Engineering Education System, Wichita, 2000.
- [77] Hübner, A. R., *Experimentelle und numerische Bestimmung der dynamischen Derivative*, DLR Forschungsbericht 2009-26, 2009.
- [78] Hughes, T. J. R., *The Finite Elemente Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Mineola, 2000.
- [79] Iatrou, M., *Ein Navier-Stokes-Verfahren kleiner Störungen für instationäre Vorgänge - Anwendung auf Transportflugzeuge*, Dissertation, Lehrstuhl für Aerodynamik, TU München, 2010.
- [80] Irwin, C. A., Guyett, P. R., *The Subcritical Response and Flutter of a Swept Wing Model*, Technical Report 65186, Royal Aircraft Establishment, 1965.
- [81] Isogai, K., *Calculation of unsteady transonic flow over oscillating airfoils using the full potential equations*, Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 1977.
- [82] Jameson, A., Turkel, E., *Implicit Schemes and LU-Decompositions*, Journal Mathematics of Computation, Vol. 37, No. 156, 1981.
- [83] Jirasek, A., *CFD-Analysis of Gust Using Two Different Gust Models*, RTO AVT-189 Paper, Portstown West, 2011.
- [84] Jones, T. J., *The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio*, NACA Technical Report, NACA-TR-681, 1939.
- [85] Juang, J. N., Pappa, R. S., *An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction*, Journal of Guidance, Vol. 8, No. 5, 1984.
- [86] Juang, J. N., Phan, M., Horta, L. G., Longman, R. G., *Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 2, 1993.
- [87] von Kármán, T., Sears, W. R., *Airfoil theory for non-uniform motion*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 5, No. 10, 1938.
- [88] Karpel, M., *Design for Active Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State-Space Aeroelastic Modeling*, Journal of Aircraft, Vol. 19, No. 3, 1982.
- [89] Katz, J., Plotkin A., *Low speed aerodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- [90] Kehoe, M. W., *A Historical Overview of Flight Flutter Testing*, NASA Technical Memorandum 4720, 1995.
- [91] Kim, T., *Frequency Domain Karhunen-Loeve Method and its Application to Linear Dynamic Systems*, AIAA Journal, Vol. 36, No. 11, 1998.

- [92] Kolonay, R. M., *Unsteady Aeroelastic Optimization in the Transonic Regime*, Ph.D. Thesis, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Purdue Univ., Lafayette, 1996.
- [93] Kreiselmaier, E., *Berechnung instationärer Tragflügelumströmungen auf Basis der zeitlinearisierten Eulergleichungen*, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1998.
- [94] Küssner, H. G., *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Tragflügeln*, Luftfahrtforschung, Vol. 13, 1936.
- [95] Küssner, H. G., *General Airfoil Theory*, Luftfahrtforschung, Vol. 17, 1940.
- [96] Laschka, B., *Zur Theorie der harmonisch schwingenden Fläche bei Unterschallströmung*, Zeitschrift für Flugwissenschaften, 11, 1963.
- [97] Laschka, B., *Unsteady Flows - Fundamentals and Application*, AGARD Conference Proceedings, No. 386, Göttingen, 1985.
- [98] Lee-Rausch, E. M., Batina, J. T., *Calculation of AGARD Wing 445.6 Flutter Using Navier-Stokes Aerodynamics*, AIAA-Paper 93-3476, 1993.
- [99] Lee-Rausch, E. M., Batina, J. T., *Wing Flutter Computations Using an Aerodynamic Model Based on the Navier-Stokes Equations*, Journal of Aircraft, Vol. 33, No. 6, 1996.
- [100] Leishman, J. G., Nguyen, K. Q., *State-Space Representation of Unsteady Airfoil Behavior*, AIAA Journal, Vol. 28, No. 5, 1990.
- [101] Leveque R. J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [102] Lucia, D. J., Beran, P. S., Silva, W. A., *Reduced-order modeling: new approaches for computational physics*, Progress in Aerospace Sciences 40, 2004.
- [103] Marques, F. D., Anderson, J., *Modeling and identification of non-linear unsteady aerodynamic loads by neural networks and genetic algorithms*, ICAS-Paper 96-7.1.1, 1996.
- [104] Massjung, R., *Numerical Schemes and Well-Posedness in Nonlinear Aeroelasticity*, Dissertation, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, RWTH Aachen, 2002.
- [105] Mauermann, T., *Flexible Aircraft Modelling for Flight Loads Analysis of Wake Vortex Encounters*, Forschungsbericht 2010-37, Institute of Aeroelasticity, Göttingen, 2010.
- [106] Mialon, B., Khrabrov, A. N., Khelil, S. B., Huebner, A., Da Ronch, A., Badcock, K. J., Cavagna, L., Eliasson, P., Zhang, M., Ricci, S., Jouhaud, J.-C., Roge, G., Hitzel, S., Lahuta, M., *Validation of numerical prediction of dynamic derivatives: The DLR-F12 and the Transcruiser test cases*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 47, Issue 8, Cambridge, 2011.

- [107] *Military Specification - Flying Qualities of Piloted Airplanes*, Technical Report MIL-F-8785C, 1980.
- [108] *Military Specification - Airplane Strength and Rigidity*, Technical Report MIL-A.
- [109] Milne, R. D., *Some remarks on the Dynamics of Deformable Bodies*, AIAA Journal, Vol. 6, No. 3, 1968.
- [110] Meyer, E., *Eulerrechnungen zur Aerodynamik von Verkehrsflugzeugen bei der Seitenbewegung*, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 2001.
- [111] Moir, I.-R. M., *Measurements on a twodimensional airfoil with high-lift devices*, AGARD-AR-303, Vol. II, 1994.
- [112] Morton, S. A., Melville, R. B., Visbal, M. R., *Accuracy and Coupling Issues of Aeroelastic Navier-Stokes Solutions on Deforming Meshes*, Journal of Aircraft, Vol. 35, No. 5, 1998.
- [113] Nelles, O., *Nonlinear System Identification*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [114] Neumann, J., Ritter, M., *Steady and Unsteady Aeroelastic Simulations of the HI-RENASD Wind Tunnel Experiment*, IFASD-Paper, Seattle, 2009.
- [115] Newmark, N. M., *A Method of Computation for Structural Dynamics*, ASCE Journal of Engineering and Mechanics Division, Vol. 85, No. EM3, 1959.
- [116] Nguyen, N., *A Integrated Flight Dynamic Modelling of Flexible Aircraft with Inertial Force-Propulsion-Aeroelastic Coupling*, AIAA-Paper, AIAA-2008-194, Reno, 2008.
- [117] Pechloff, A., Laschka, B., *Small Disturbance Navier-Stokes Method: Efficient Tool for Predicting Unsteady Air Loads*, Journal of Aircraft, Vol. 43, No. 1, 2006.
- [118] Phillips, W. F., *Mechanics of Flight*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2004.
- [119] Piperno, S., *Explicit/Implicit Fluid/Structure Staggered Procedures with a Structural Predictor and Fluid Subcycling for 2D Inviscid Aeroelastic Simulations*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 25, 1997.
- [120] Piperno, S., Farhat, C., *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - Part II: energy transfer analysis and three-dimensional applications*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 190, 1999.
- [121] Possio, C., *Aerodynamic Forces on an Oscillating Profile in a Compressible Fluid at Subsonic Speeds*, Aerotecnica, Vol. 18, 1938.
- [122] Possio, C., *Aerodynamic Forces on an Oscillating Profile in a Compressible Fluid at Supersonic Speeds*, Pontificia Accademia Scientiarum Acta, Vol. 1, No. 11, 1937.
- [123] Prandtl, L., *Wing Theory in a Compressible Medium*, Luftfahrtforschung, Vol. 13, 1936.

- [124] Rampurawala, A. M., *Aeroelastic analysis of aircraft with control surfaces using CFD*, PhD Thesis, University of Glasgow, 2006.
- [125] Reimer, L., Boucke, A., Ballmann, J., Behr, M., *Computational Analysis of High Reynolds Number Aero-Structural Dynamics (HIRENASD) Experiments*, IFASD-Paper 2009-130, Seattle, 2009.
- [126] Reschke, C., *Integrated Flight Loads Modelling and Analysis for Flexible Transport Aircraft*, PhD Thesis, University of Stuttgart, 2006.
- [127] Ritter, M., Dillinger, J., *Nonlinear Numerical Flight Dynamics for the Prediction of Maneuver Loads*, IFASD-Paper 2011-143, Paris, 2011.
- [128] Rausch, R. D., Batina, J. T., Yang, H. T. Y., *Three-Dimensional Time-Marching Aeroelastic Analysis Using an Unstructured-Grid Euler Method*, AIAA Journal, Vol. 31, No. 9, 1993.
- [129] Raveh, D. E., Karpel, M., Yaniv, S., *Nonlinear design loads for maneuvering elastic aircraft*, Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 2, 2000.
- [130] Raveh, D. E., *Reduced-Order Models for Nonlinear Unsteady Aerodynamics*, AIAA Journal, Vol. 39, No. 8, 2001.
- [131] Raveh, D. E., *Identification of Computational-Fluid-Dynamics Based Unsteady Aerodynamic Models for Aeroelastic Analysis*, Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 3, 2004.
- [132] Robinson, B. A., Batina, J. T., Yang, H. T. Y., *Aeroelastic Analysis of Wings using the Euler Equations with a Deforming Mesh*, Journal of Aircraft, Vol. 28, No. 11, 1991.
- [133] Rodden, W. P., Johnson, E. H., *MSC/NASTRAN Aeroelastic Analysis User's Guide*, Macneal-Schwendler Corp., Los Angeles, 1994.
- [134] Rodden, W. P., Harder, R. L., Bellinger, E. D., *Aeroelastic Addition to NASTRAN*, NASA CR 3094, 1979.
- [135] Rodden, W. P., Love, J. R., *Equations of Motion of a Quasi-Steady Flight Vehicle Utilizing Restrained Static Aeroelastic Characteristics*, Journal of Aircraft, Vol. 22, No. 9, 1985.
- [136] Roe, P. L., *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*, Journal of Computational Physics, Vol. 43, No. 2, 1981.
- [137] Roger, K. L., *Airplane Math Modeling Methods and Active Aeroelastic Control Design*, AGARD-CP-228, 1977.
- [138] Rugh, W. J., *Nonlinear System Theory, the Volterra-Wiener Approach*, The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [139] Sears, W. R., *Some Aspects of Non-Stationary Airfoil Theory and Its Practical Applications*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 8, No. 3, 1941.

- [140] Sens, A.-S., Raveh, D. E., *Comparison of Aeroelastic Solutions on the HIRENASD Model*, IFASD-Paper, 2013-6D, Bristol, 2013.
- [141] Shang, J. S., *Three decades of accomplishments in computational fluid dynamics*, Progress in Aerospace Sciences, Vol. 40, No. 3, 2004.
- [142] Sickmüller, U., *Instationäre Luftkräfte höherer Ordnung auf Basis der Eulergleichungen bei kleinen Störungen*, Dissertation, Lehrstuhl für Aerodynamik, TU München, 2005.
- [143] Silva, W. A., *Identification of Nonlinear Aeroelastic Systems Based on the Volterra Theory: Progress and Opportunity*, Nonlinear Dynamics, Vol. 39, No. 1-2, 2005.
- [144] Silva, W. A., Raveh, D. E., *Development of aerodynamic/aeroelastic state-space models CFD-based pulse responses*, AIAA-Paper 01-1213, Seattle, 2001.
- [145] Skoog, R. B., *An Analysis of the Effects of Aeroelasticity on Static Longitudinal Stability and Control of a Swept Wing Airplane*, NACA Technical Report, 1298, 1957.
- [146] Smith, M. J., Hodges, D. H., Cesnik, C. E. S., *An Evaluation of Computational Algorithms to Interface between CFD and CSD Methodologies*, Wright-Patterson Air Force report, WL-TR-96-3055, 1995.
- [147] Smith, T. A., Hakanson, J. W., Nair, S. S., *State-Space Model Generation for Flexible Aircraft*, Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 6, 2004.
- [148] Soloway, D. I., Bialasiewicz, J. T., *Neural network modeling of nonlinear systems based on volterra series extension of a linear model*, International Symposium on Intelligent Control, Glasgow, 1992.
- [149] Spalart, P. R., Allmaras, S. R., *A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*, AIAA-Paper 92-0439, 1992.
- [150] Theodorsen, T., *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Report 496, 1935.
- [151] Toro, E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [152] Tsai, H. M., Wong, A. S. F., Cai, J., Zhu, Y., Liu, F., *Unsteady Flow Calculations with a Parallel Multiblock Moving Mesh Algorithm*, AIAA Journal, Vol. 39, No. 6, 2001.
- [153] Vepa, R., *Finite state modelling of aeroelastic systems*, PhD Thesis, Department of Applied Mechanics, Stanford University, 1975.
- [154] Vidy, C., Förster, M., Iatrou, M., Breitsamter, C., *Dynamic Stability and Response Analysis Using a Small-Disturbance CFD Method*, IFASD-Paper 2013-25B, Bristol, 2013.
- [155] Wagner, H., *Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln*,

- Z.F.A.M.M., Vol. 5, No. 1, 1925.
- [156] Wall, W. A., *Finite Elemente*, Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Numerische Mechanik, TU München, 2007.
- [157] Waszak, M. R., Schmidt, D. K., *Flight Dynamics of Aeroelastic Vehicles*, Journal of Aircraft, Vol. 25, No. 6, 1988.
- [158] Waszak, M. R., Buttrill, C. S., *Modeling and Model Simplification of Aeroelastic Vehicles: An Overview*, NASA Technical Memorandum 107691, 1992.
- [159] Weishäupl, C., *Tragflügelprofile in inhomogener Strömung*, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1998.
- [160] Wilson, E. L., *A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures*, Div. of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, SESM Report No. 68-1, Berkeley, 1968.
- [161] Winter, M., *Numerische Flatteranalyse im Frequenzbereich*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik, TU München, 2012.
- [162] Wissmann, J., Sarnes, K.-D., *Finite Elemente in der Strukturmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [163] Yates, E. C., Jr., *AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response. Candidate Configuration I.-Wing 445.6*, AGARD, Report No. 765, 1987.
- [164] Yurkovitch, R., *Status of unsteady aerodynamic prediction for flutter of high performance aircraft*, Journal of Aircraft, Vol. 40, No. 5, 2003.
- [165] Zaide, A., Raveh D., *Numerical Simulation and Reduced Order Modeling of Airfoil Gust Response*, AIAA-Paper 2005-5128, Toronto, 2005.
- [166] ZONA, *ZAERO Theoretical Manual, Engineers' Toolkit for Aeroelastic Solutions*, ZONA Technology Inc., Scottsdale, 2008.
- [167] Zhang, W., Wang, B., Ye, Z., Quan, J., *Efficient Method for Limit Cycle Flutter Analysis by Nonlinear Aerodynamic Reduced-Order Models*, AIAA Journal, Vol. 50, No. 5, 2012.
- [168] Zhang, Z., Liu, F., Schuster, D. M., *An Efficient Euler Method on Non-Moving Cartesian Grids with Boundary-Layer Correction for Wing Flutter Simulations*, AIAA-Paper 2006-0884, Reno, 2006.