

ZUR BERECHNUNG VON SCHWINGUNGEN LINEARER UND SELBSTERREGTER SYSTEME MIT DER LAPLACE-TRANSFORMATION

E. Terhardt

Lehrstuhl für Elektroakustik der Technischen Universität München

1. EINLEITUNG

Für die Berechnung von "Einschwingvorgängen", insbesondere falls sich das System am Beginn der Beobachtung bereits in angeregtem Zustand befindet, wird die Laplace-Transformation (LT) gemeinhin als besonders geeignet angesehen /1,2/. Ein wesentlicher Grund dafür ist, daß die übliche Ableitungsregel der LT auf der Bildseite sogenannte Anfangswerte des Zeitsignals enthält, welche bei LT einer linearen Differentialgleichung (DGL) in deren Bildgleichung eingehen und zur Berücksichtigung des System-Anfangszustandes benutzt werden. Wie seit langem bekannt, sind aber die derart mathematisch spezifizierten Anfangswerte nicht in allen Fällen im Einklang mit den physikalischen Gegebenheiten /3/. Mancherlei Ursachen dieses Widerspruchs wurden in Betracht gezogen; die Existenzberechtigung des Anfangswerts der Ableitungsregel wurde jedoch offenbar bisher nicht bezweifelt. Erst vor kurzem wurde vom Autor darauf hingewiesen, daß der Anfangswert fehl am Platze ist /4-6/.

Durch das Wegfallen des Anfangswerts der Ableitungsregel wird die Berücksichtigung von System-Anfangszuständen vereinfacht und von den erwähnten Widersprüchen befreit, weil die physikalischen Gegebenheiten ohne formal vorweggenommene Beschränkungen berücksichtigt werden können /7/. Dies wird im folgenden am Beispiel eines einfachen Modells eines Reibungsschwingers demonstriert.

2. DAS SCHWINGERMODELL

Der Reibungsschwinger kann seinerseits als Musterbeispiel derjenigen Klasse selbsterregter Systeme aufgefaßt werden, welche durch das Zusammenwirken einer nichtlinearen Kennlinie mit negativer Steigung (Fig.1) und einem linearen Resonator gekennzeichnet ist (Musikal. Streich- und Blasinstrumente /8/; Reibungsschwingungen in Bremsen und Antrieben /9/).

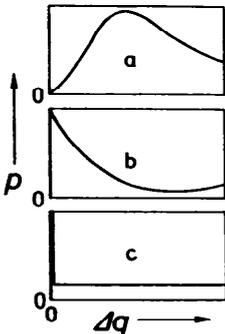


Fig.1. Beispiele für Kennlinien selbsterregter Schwinger. a: Schallfluß p als Funktion der Druckdifferenz Δq (Blasinstrumente). b: Kraft p als Funktion der Relativgeschwindigkeit Δq (Reibungsschwinger). c: Schematische Vereinfachung von b.

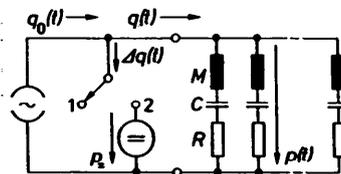


Fig.2. Elektrisches Analogon des Reibungsschwingers. Der Schalter wechselt von 1 nach 2, wenn $p=p_{max}$ und zurück, wenn $\Delta q=0$. Damit wird der Wechsel von Haft- und Gleitreibung nach Kennlinie Fig.1c nachgebildet.

Im vorliegenden Modell werden die Reibungskennlinie durch die Charakteristik nach Fig.1c und der lineare Resonator durch seine Eigenschwingungen gekennzeichnet. Fig.2 zeigt das elektrische Analogon. Das System wird durch die ein-

geprägte Schwingungsgröße $q_0(t)$ (beispielsweise die Schnelle eines Geigenbogens) angeregt. Die parallelgeschalteten Reihenschwingkreise repräsentieren die Beiträge der Eigenschwingungen des linearen Resonators (z.B. der Geigensaite) zur Eingangsimpedanz bzw. Admittanz. Die letztere ergibt sich bei N Eigenschwingungen durch LT der DGL zu

$$Y_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{s}{M_n(s-s_n)(s-s_n^*)} \quad ; \text{ wobei} \quad (1)$$

$$s_n, s_n^* = \sigma_n \pm j\omega_n; \quad \sigma_n = -R_n/(2M_n); \quad \omega_n = +\sqrt{(M_n C_n)^{-1} - R_n^2/(2M_n)^2}. \quad (2)$$

Die Reibungskennlinie Fig.1c wird durch folgende Vorschrift nachgebildet:

(a) Der Schalter wechselt von 1 nach 2, wenn $p(t)$ (z.B. die Kraft zwischen Saite und Bogen) einen festen Maximalwert P_{\max} erreicht; (b) wenn $\Delta q(t)=0$ (z.B. verschwindende Relativgeschwindigkeit zwischen Saite und Bogen), erfolgt Umschalten von 2 nach 1. Die Gleichspannungsquelle p_+ repräsentiert die geschwindigkeitsunabhängige Kraft im Falle $\Delta q(t) > 0$ gemäß Fig.1c, wobei $p_+ < P_{\max}$ vorausgesetzt wird.

Die Aufgabe besteht darin, die Schwingungsgrößen $p(t)$ und $q(t)$ als Funktion der Zeit zu bestimmen, wobei $q_0(t)$ als eingepreßt gilt. Solange der Schalter in einer Position verbleibt, ist das System linear und zeitinvariant. Daher können die Vorgänge abschnittsweise mit der LT berechnet werden, wobei der am Beginn jedes Zeitabschnitts vorhandene Zustand aus dem Endzustand des vorhergehenden Abschnitts ermittelt werden muß.

Der Übersichtlichkeit und Kürze halber wird die Berechnung im folgenden unter der Annahme $N=1$ durchgeführt.

3. BERECHNUNG

Schalter in 1 (Beginn). In dieser Phase muß $p(t)$ aus $q_0(t)$ bestimmt werden. Es wird angenommen, daß $q_0(t)$ ab $t=0$ wirksam wird und der Kondensator in diesem Zeitpunkt ungeladen ist (neutrales System). Für die Bildfunktion $P(s)$ gilt dann mit (1) und $N=1$

$$P(s) = Q_0(s)/Y_1(s) = Q_0(s)M_1[s-2\sigma_1+(\sigma_1^2+\omega_1^2)/s]. \quad (3)$$

Durch Anwendung der anfangswertfreien Ableitungsregel (Multiplikation mit s entspricht Ableitung) sowie der Integrationsregel (Division durch s entspricht Integral) erhält man aus (3)

$$p(t) = M_1 \left[\dot{q}_0(t) - 2\sigma_1 q_0(t) + (\sigma_1^2 + \omega_1^2) \int_0^t q_0(\tau) d\tau \right]. \quad (4)$$

Das Integral über $q_0(t)$ erfaßt die Kondensatorspannung $p_C(t)$. In $t=0$ ist dieselbe gleich Null, weil voraussetzungsgemäß das System am Beginn neutral und $q_0(t)$ kausal ist.

Umschaltung 1 - 2. Das Umschalten beim Erreichen des Kriteriums $p(t)=P_{\max}$ hat zur Folge, daß $q_0(t)$ vollständig vom Resonator abgetrennt wird. Danach ergibt sich $q(t)$ durch Überlagerung eines "erregten" Anteils, welcher durch p_+ verursacht wird, und eines "spontanen" Anteils, welcher durch die Kondensatorladung bedingt ist //'. Beide Anteile werden unabhängig voneinander berechnet und am Schluß addiert. Bezeichnet man den Umschaltzeitpunkt mit t_{12} ,

so lautet die LT des erregten Anteils

$$Q_e(s) = p_- s^{-1} e^{-st_{12}} Y_1(s) = p_- e^{-st_{12}} [M_1(s-s_1)(s-s_1^*)]^{-1}. \quad (5)$$

Daraus bekommt man mittels einer LT-Tabelle die zugehörige Zeitfunktion:

$$q_e(t) = p_-(\omega_1 M_1)^{-1} e^{\sigma_1(t-t_{12})} \sin \omega_1(t-t_{12}). \quad (6)$$

Die LT des spontanen Anteils läßt sich durch die Formel

$$Q_s(s) = \frac{q_{s12+} s - 2\sigma_1 q_{s12+} + \dot{q}_{s12+}}{(s-s_1)(s-s_1^*)} e^{-st_{12}} \quad (7)$$

ausdrücken /1,7/. Darin sind q_{s12+} bzw. \dot{q}_{s12+} die Werte, welche $q(t)$ bzw. $\dot{q}(t)$ unmittelbar nach dem Umschalten annehmen; sie müssen aus physikalischen Überlegungen hergeleitet werden. Inverse Transformation von (7) liefert

$$q_s(t) = e^{\sigma_1(t-t_{12})} \left[q_{s12+} \cos \omega_1(t-t_{12}) + \omega_1^{-1} (\dot{q}_{s12+} - \sigma_1 q_{s12+}) \sin \omega_1(t-t_{12}) \right]. \quad (8)$$

Der Anfangswert q_{s12+} ergibt sich daraus, daß im Umschaltzeitpunkt $q(t)$ wegen M_1 nicht springen kann, so daß $q(t_{12+}) = q_0(t_{12})$. Da nach (6) $q_e(t)$ in t_{12} keinen Beitrag zu $q(t)$ leistet, ergibt sich

$$q_{s12+} = q_0(t_{12}). \quad (9)$$

Der Wert \dot{q}_{s12+} läßt sich mittels (4) aus der Tatsache ableiten, daß die Kondensatorspannung p_C im Umschaltzeitpunkt stetig ist. Es ergibt sich

$$\dot{q}_{s12+} = \dot{q}_0(t_{12}) - M_1^{-1} (p_{\max} + p_-). \quad (10)$$

Durch Einsetzen von (9) und (10) in (8) und Addition von (6) und (8) erhält man das Signal $q(t)$ in Schalterstellung 2. Wenn $q(t) = q_0(t)$ erreicht wird, ist $\Delta q = 0$ und es erfolgt vereinbarungsgemäß die Umschaltung von 2 nach 1.

Umschaltung 2 - 1. Im Umschaltzeitpunkt t_{21} ist voraussetzungsgemäß q gleich q_0 , d.h. stetig. Die Kondensatorspannung p_C ist im allgemeinen in t_{21} von Null verschieden. Deshalb gilt nach dem Umschalten:

$$p(t) = M_1 \left[\dot{q}_0(t) - 2\sigma_1 q_0(t) + (\sigma_1^2 + \omega_1^2) \int_{t_{21}}^t q_0(\tau) d\tau \right] + p_C(t_{21}). \quad (11)$$

Dieser Ausdruck entspricht bis auf den Anfangswert $p_C(t_{21})$ völlig (4). Da $p_C(t)$ in t_{21} stetig ist, kann $p_C(t_{21})$ aus dem Zustand berechnet werden, welcher unmittelbar vor dem Umschalten herrscht:

$$p_C(t_{21}) = p_- - M_1 [\dot{q}(t_{21}) - 2\sigma_1 q(t_{21})]. \quad (12)$$

Darin ist dem Umschaltkriterium $\Delta q=0$ entsprechend $q(t_{21})=q_0(t_{21})$, und $\dot{q}(t_{21})$ wird aus den Ableitungen von (6) und (8) durch Einsetzen von t_{21} gewonnen.

Wenn $p(t)=p_{\max}$ erreicht wird, erfolgt erneut die Umschaltung von 1 nach 2, und so fort. Fig.3 illustriert das Ergebnis für den Fall, daß $q_0(t)$ in $t=0$ von null auf einen konstanten Wert springt.

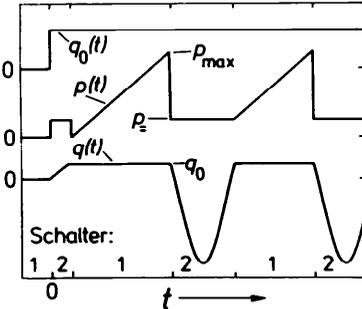


Fig.3. Schwingungsgrößen des Einfachresonators ($N=1$), welcher durch eine Sprungfunktion $q_0(t)$ angeregt wird. Der Sprungeinsatz bewirkt sofortigen Übergang in die Gleitphase (Sch. in 2); das System wird zuerst durch p_{\pm} angeangeregt. Stationäre Schwingungen kommen nur zustande, wenn die Amplitude von $q_0(t)$ einen durch Gl.6 bestimmten Wert nicht überschreitet.

4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Zumindest im Falle des zugrundegelegten Modells kann man mit der beschriebenen "halbanalytischen" Methode offenbar nicht nur die Schwingungsgrößen wirkungsvoll berechnen, sondern wertvolle Einsichten in die Wirkung der verschiedenen Parameter - einerseits des linearen Resonators, andererseits der nichtlinearen Mechanismen - gewinnen. Die "anfangswertfreie Laplace-Transformation" erweist sich dabei als außerordentlich nützlich, weil die Vorteile der LT (bequeme netzwerktheoretische Rechenmethoden) in vollem Umfange zum Tragen kommen, während die Berücksichtigung der physikalischen Übergangszustände des zeitvariablen Systems frei von vorweggenommenen formalen Beschränkungen bleibt.

Weil zur numerischen Berechnung der Zeitfunktionen in der Regel ein Digitalrechner benutzt wird, ist es ferner außerordentlich nützlich zu wissen, daß es dafür ein Verfahren gibt, welches unmittelbar mit der Laplace-Bildfunktion arbeitet /10/, so daß in vielen Fällen die formale Rücktransformation überhaupt nicht vorgenommen werden muß.¹ Der System-Anfangszustand kann dabei in derselben Weise berücksichtigt werden wie im vorliegenden Beispiel.

Die vorliegende Arbeit entstand im Sonderforschungsbereich 204 "Gehör", München, gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Schrifttum

- /1/ Doetsch, G., Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser, Basel (1958). /2/ Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A., Taschenbuch der Mathematik. 22. Aufl., Harri Deutsch, Frankfurt (1985). /3/ Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation. Birkhäuser, Basel (1955), S. 324 ff. /4/ Terhardt, E., ntzArchiv 8, 39-43 (1986). /5/ Forster, U. und Unbehauen, R., ntzArchiv 8, 173-176 (1986). /6/ Terhardt, E., ntzArchiv 8, 177-178 (1986). /7/ Terhardt, E. Acustica, im Druck (1987). /8/ McIntyre, M.E., Schumacher, R.T., und Woodhouse, J., J. Acoust. Soc. Am. 74, 1325-1345 (1983). /9/ Brandenburg, G., Koch, D. und Unger, H., VDI-Berichte Nr.598, 53-69 (1986). /10/ Gaver, D.P., Operational Research 14, 444-459 (1966).

¹ Den Hinweis auf diese Tatsache verdankt der Autor Herrn Prof. Dr. E. Schuon (Eningen).