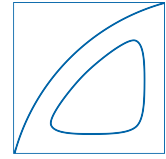


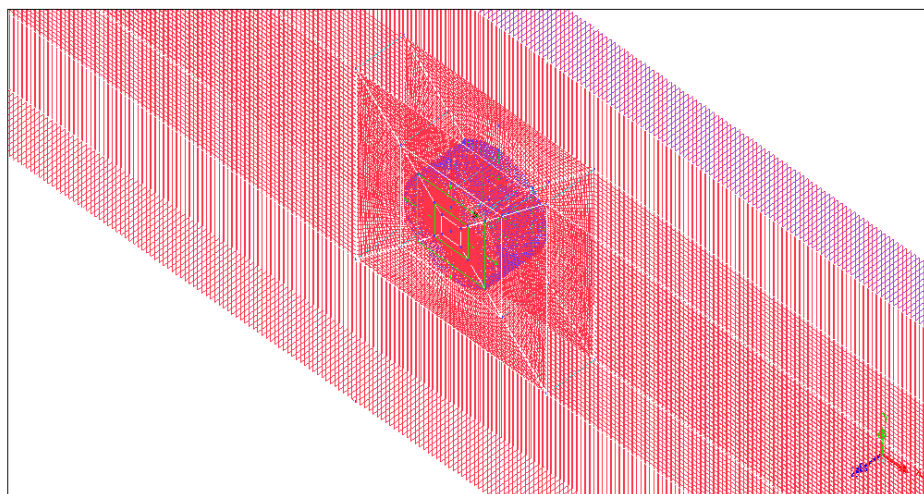


Technische Universität München
Fakultät Maschinenwesen
Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik
Fachgebiet Strömungsbeeinflussung und Aeroakustik
Prof. Dr.-Ing. Hans-Jakob Kaltenbach



Bachelor's Thesis

Simulation akustischer Wellenausbreitung durch ruhende und rotierende Rechengebiete in ANSYS CFX



Verfasser: Thomas Herrmann
Matrikelnummer: 03637133
E-Mail: thomas.herrmann@tum.de
Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Hans-Jakob Kaltenbach
Ausgegeben am: 26. März 2015
Abgegeben am: 02. September 2015

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfe Dritter angefertigt zu haben. Gedanken und Zitate, die ich aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommen habe sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und wurde bisher nicht veröffentlicht.

Hiermit erkläre ich mich damit einverstanden, dass die Arbeit durch den Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden kann.

Garching, den _____

Name

Name: Thomas Herrmann

Matrikelnummer: 03637133

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	III
1. Einführung	1
1.1. Hintergrund & Motivation	1
1.2. Vorarbeiten	2
1.3. Fragestellung & Ziele	3
2. Grundlagen	5
2.1. Von Navier-Stokes zu linearen Advektionsgleichungen	5
2.1.1. Linearisierte Euler-Gleichung	5
2.1.2. Linearisierte Kontinuitätsgleichung	6
2.1.3. Fehlender Upwind-Term der linearisierten Gleichungen	6
2.1.4. Lineare Advektionsgleichung als Testgleichung	7
2.2. Semidiskretisierung in Ort oder Zeit	7
2.2.1. Modifizierte Wellenzahl	8
2.2.2. Dahlquist-Gleichungen	9
2.3. Starrkörperrotation eines Gases	11
2.4. Definition der Simulationsparameter	11
2.4.1. Definitionen der Zeit	11
2.4.2. Akustische CFL -Zahl und Schallgeschwindigkeit c_0	12
2.4.3. Definitionen des Raums	12
2.4.4. Eigenschaften der Welle	12
2.5. Berechnung von Amplituden- und Phasenfehlern sowie Amplituden- und Phasenverhältnissen	13
3. Analyse der verwendeten Diskretisierungsverfahren anhand der linearen Advektionsgleichung	15
3.1. Von Neumann Analysen	15
3.1.1. Übersicht über die verwendeten Diskretisierungsverfahren	15
3.1.2. Darstellung der Von Neumann Analysen	18
3.2. Ergebnisse aus Simulationen mit der linearen Advektionsgleichung in $1D$	24

4. Wellenpropagation in 1D und 2D auf äquidistanten Gittern bei kompressibler Strömung	29
4.1. Simulationen mit eindimensionaler Propagation	29
4.1.1. Beschreibung der Testumgebungen	29
4.1.2. Grenzfall 1: Semi-diskret in der Zeit	32
4.1.3. Grenzfall 2: Semi-diskret im Raum	40
4.1.4. Zusammenfassung beider Grenzfälle	45
4.2. Simulationen mit zweidimensionaler Propagation	50
5. Wellenpropagation durch Schnittstellen zwischen festen und rotierenden Gittern	53
5.1. Auswahl eines Testsetups für die Schnittstellen zu einem rotierenden Rechengebiet	54
5.1.1. Umrechnungen der Amplituden- und Phasenfehler in Amplituden- und Phasenverhältnisse	54
5.1.2. Testsetups und deren Eigenschaften	54
5.2. Schnittstellen zwischen festen und rotierenden Gittern	58
5.2.1. Rechteckgebiet mit zylindrischer Schnittstelle	59
5.2.2. 3D-Zylinder mit rotierendem Mittelstück	72
6. Zusammenfassung & Ausblick	79
6.1. Zusammenfassung	79
6.2. Ausblick	80
A. Grenzfall 1: Semi-diskret in der Zeit; Zusatzmaterial Wellenpaket	83
B. Auszug einer .out-Datei	86
Literaturverzeichnis	103

Symbolverzeichnis

Lateinische Zeichen

A_0	[Pa]	Ausgangsamplitude
\tilde{A}	[Pa]	Restamplitude
C	[–]	Skalar
\hat{C}	[–]	Ausgangsamplitude des passiven Skalars
CFL	[–]	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
M	$[\frac{g}{mol}]$	Molare Masse
N_K	[–]	Knotenanzahl
N_T	[–]	Zeitschrittzahl
N_λ	[ppw]	räumliche Auflösung einer Welle in points-per-wavelength
R_0	$[\frac{J}{mol \cdot K}]$	Allgemeine Gaskonstante
R_{air}	$[\frac{J}{kg \cdot K}]$	Spezifische Gaskonstante Luft
T_0	[s]	Referenzzeit
T_Σ	[s]	Gesamtsimulationszeit ($8T_0$)
T_E	[K]	Umgebungstemperatur
c	$[\frac{m}{s}]$	Schallgeschwindigkeit
d	[m]	Durchmesser
f	$[\frac{1}{s}]$	Frequenz
\underline{f}	$[\frac{m}{s^2}]$	Vektor der verteilten spezifischen Volumenkraft
h	[m]	Gitterweite, Raumschrittweite
i	[–]	imaginäre Einheit
j	[–]	Zählindex im Raum
l	[m]	Länge
n	[–]	Zeitlicher Zählindex; Anzahl an Wellenlängen in eine Raumrichtung
p	[Pa]	Druck
p_0	[Pa]	Referenzdruck
p'	[Pa]	Druckverteilung
\hat{p}	[Pa]	Druckamplitude
r	[m]	Radius
t	[s]	Zeit
\underline{u}	$[\frac{m}{s}]$	Geschwindigkeitsvektor

\underline{u}'	$[\frac{m}{s}]$	künstlich induzierter Geschwindigkeitsvektor
\hat{u}	$[\frac{m}{s}]$	Maximaler Betrag der Geschwindigkeitsverteilung
x, y, z	$[m]$	3D-Raumrichtungen
\underline{x}	$[m]$	Ortsvektor

Griechische Zeichen

Ω	$[\frac{1}{s}]$	Winkelgeschwindigkeit
Ω^*	$[\frac{1}{s}]$	Winkelgeschwindigkeit bei node-to-node matching
α	$[^\circ]$	Winkelgrad
γ	$[-]$	Isentropenexponent
δ	$[-]$	Amplituden- und Phasenverhältnis nach von Neumann
$\tilde{\delta}$	$[-]$	Amplituden- und Phasenverhältnis inkompressibler Strömung in ANSYS CFX
δ'	$[-]$	Amplituden- und Phasenverhältnis kompressibler Strömung in ANSYS CFX
ε'	$[\%]$	Amplituden- und Phasenfehler kompressibler Strömung in ANSYS CFX
λ	$[m]$	Wellenlänge
λ_p	$[-]$	Vorfaktor
λ_i	$[-]$	Eigenwert
μ	$[\frac{kg}{m \cdot s}]$	dynamische Viskosität
ξ	$[\frac{1}{m}]$	Wellenzahl
$\underline{\xi}$	$[\frac{1}{m}]$	Wellenzahlenvektor
$\tilde{\xi}$	$[\frac{1}{m}]$	modifizierte Wellenzahl
π	$[-]$	Kreiszahl
ρ	$[\frac{kg}{m^3}]$	Dichte
σ	$[-]$	Verstärkungsfaktor
τ	$[s]$	Zeitschrittweite
ϕ	$[-]$	mit der Schrittweite h normierte Wellenzahl
ω	$[\frac{1}{s}]$	Kreisfrequenz

Hochgestellter Index

n	Zählindex in der Zeit
-----	-----------------------

Tiefgestellte Indizes

A	Amplitude
Ph	Phase
<i>Rechteck</i>	auf Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh bezogen
PW	periodische Welle

<i>STN</i>	... im globalen, ortsfesten Koordinatensystem
<i>Zylinder</i>	auf $3D$ -Gebiet mit rotierendem Mittelstück bezogen
<i>h</i>	Diskretisierung im Raum
<i>j</i>	Zählindex im Raum
<i>k</i>	beliebige Raumrichtung in x , y oder z
<i>max</i>	maximal
x, y, z	Wellenzahl in tiefgestellte $3D$ -Raumrichtung
λ	Amplituden- oder Phasenfehler nach einer Propagationsdistanz von $\Delta x = \lambda$
τ	Diskretisierung in der Zeit

Operatoren

$\frac{D}{D}$	totales Differential
<i>D.u.</i>	Diskretisierungsschema
$\frac{\partial}{\partial}$	partielle Ableitung
Δ	Laplace-Operator, Delta
∇	Nabla-Operator
\mathcal{O}	Ordnung
\Re	Realteil
\Im	Imaginärteil
$ \cdot $	Betrag
\cdot	erste Ableitung nach der Zeit
$\ddot{\cdot}$	zweite Ableitung nach der Zeit

1. Einführung

1.1. Hintergrund & Motivation

Die numerische Simulation stellt heute die Grundlage der Auslegung und Berechnung in technischen Disziplinen dar. Speziell bei der Konstruktion lärmabstrahlender Maschinen - erwähnt seien hierbei zukünftige Überschallpassagierflugzeuge und offene Rotoren an Helikoptern (vgl. [14]) - oder auch von Bauwerken wie z.B. Tunneln kommt hierbei der technischen Aeroakustik und damit der Vorhersage der Entstehung und Ausbreitung von Schall eine besondere Bedeutung zu, um z.B. die Lärmbelastung auf die Umwelt zu mindern oder komplett zu vermeiden. Für einige akademische Spezialfälle existieren zwar analytische Lösungen der Vorhersage der Schallausbreitung, jedoch stößt man damit spätestens bei komplexeren Geometrien an Grenzen.

Da die numerische Aeroakustik ein Teilgebiet der numerischen Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics - CFD) darstellt, besteht die grundsätzliche Möglichkeit, die Ausbreitung und Entstehung von Schall und Akustik mittels der Techniken der CFD, die bereits weite Verbreitung auch in der Industrie, z.B. durch die Software ANSYS CFX gefunden hat, vorherzusagen (vgl. [18]). Allerdings ist die CFD hauptsächlich deswegen entstanden, aerodynamische und fluiddynamische Probleme zu lösen; die Anforderungen an numerische Berechnungen der Aeroakustik unterscheiden sich dabei aber in folgenden grundlegenden Punkten, die eine differenzierte Betrachtung von aeroakustischen gegenüber aero- und fluiddynamischen Problemstellungen verlangen: Die Aeroakustik, v.a. die Propagation von aeroakustischen Wellen ist zeitabhängig, wogegen die Aero- und Fluidmechanik meist zeitlich unabhängig berechnet werden kann. Auch treten in der Aeroakustik oft nur kleine Amplituden auf, was dazu führt, dass ein numerisches Rauschen der Berechnungsmethode selbst extrem klein ausfallen muss, um Simulationsergebnisse möglichst nicht zu verfälschen (vgl. Tam [20]). Laut Lele [14] soll deshalb zur Simulation aeroakustischer Probleme nicht einfach eine favorisierte CFD-Software zum Einsatz kommen, sondern z.B. auch hybride Verfahren, die die Vorhersage der Schallabstrahlung durch eine Strömung mittels akustischer Theorie innerhalb eines begrenzten Raumes mit der Berechnung der Strömungsfelder selbst koppeln.

Die aeroakustische Theorie basiert hierbei auf den Lighthill-Gleichungen in der Formulierung von Ffowcs, Williams und Hawkings [15]. Um einen umströmten Körper können demnach virtuelle permeable Flächen gelegt werden, innerhalb derer die Entstehung und Ausbreitung von Strömungsschall durch die hydrodynamische, kompressible Strömung um den Körper beschrie-

ben werden.

Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen - und damit den für die Beschreibung akustischer Problemstellungen essentiellen Gleichungen - ist allerdings immer fehlerbehaftet. Diese grundsätzlichen, bei der numerischen Berechnung der akustischen Wellenausbreitung auftretenden Fehler, teilt man hauptsächlich in den Amplituden- (dissipativ) sowie den Phasenfehler (dispersiv) ein (siehe Tam [20]), die in der numerischen Aeroakustik möglichst gering ausfallen sollen [25].

1.2. Vorarbeiten

Wie bereits in Abschnitt (1.1) beschrieben, entstehen bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen Fehler. Daher fanden bereits Untersuchungen zur Neuentwicklung und Analyse bereits bestehender Diskretisierungsverfahren statt, um die Abweichungen der Rechnerlösungen von den analytisch exakten zu reduzieren.

Bereits Bailly et al. [6] linearisierte die zweidimensionale Euler-Gleichung um eine konstante Grundströmung und diskretisierte mit einem Sieben-Punkte-Stern räumlich sowie dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung in der Zeit und findet dabei sehr gute Ergebnisse in Genauigkeit, Stabilität und Rechenaufwand seines Verfahrens bei der Vorhersage der Schallpropagation ausgelöst durch Unterschallströmungen.

Auch Berland et al. [7] entwickelte nicht-zentrale Differenzen für Randbedingungen über die Minimierung des Amplituden- und Phasenfehlers bei einer minimalen räumlichen Auflösung der Wellen. Dabei werden Verfahren erzielt, die bei einer sehr geringen Anzahl von Knotenpunkten pro Wellenlänge und damit optimalen Rechenzeiten eine akzeptable Wellenpropagationen darstellen.

Die Herausforderungen und Erfolge numerischer Simulation der Schallabstrahlung durch turbulente Strömungen fasst Colonius et al. [8] zusammen. In diesem Artikel werden sowohl räumliche als auch zeitliche, für aeroakustische Berechnungen adäquate Diskretisierungsschemata analysiert, einschließlich der Effekte künstlicher Dispersion und Dissipation auf äqui- sowie nicht-äquidistanten Gittern. Großer Wert wird dabei auf das Auflösungsvermögen der jeweiligen Diskretisierungsschemata sowie deren Recheneffizienz gelegt.

Mit Rumsey [17], Efraimsson et al. [10] sowie Eliasson et al. [24] wurden die Untersuchungen von stationären an bewegten, v.a. im Turbomaschinenbau Anwendung findenden Rechengittern, fortgeführt. Von Bedeutung sind dabei die Effekte der sich bewegenden Rechengitter auf die Wellenpropagation, der Interpolation zwischen beiden Gitterstrukturen sowie die Bedeutung der Struktur der Rechengitter und die räumliche Lage ihrer Gitterknoten zueinander zu jedem berechneten Zeitschritt.

Die aufgeführten Artikel beschäftigen sich mit der Analyse bestehender sowie der Entwicklung fehlerdezipierender Diskretisierungsverfahren zur Berechnung aeroakustischer Problemstellungen. Großes Augenmerk liegt dabei auf der Beschreibung der entstehenden Fehler durch ein

solches Diskretisierungsverfahren gegenüber analytisch darstellbaren Lösungen sowie der Effizienz eines Löserverfahrens hinsichtlich seiner benötigten Rechenzeit.

Ähnliche Untersuchungen sollen nun auch an der Software ANSYS CFX durchgeführt werden, um deren spezifische Rechenfehler bei der Simulation propagierender Wellen durch ruhende sowie bewegte Rechengebiete im Vergleich zu analytischen Signalverläufen darzustellen. Dabei sei auch Stuhlpfarrer [19] erwähnt, dessen Diplomarbeit nach dem Verfassen dieser Bachelor's Thesis bekannt wurde und auch einen in der vorliegenden Arbeit ausgearbeiteten Effekt aus ANSYS CFX beschreibt.

1.3. Fragestellung & Ziele

Aktuell besteht zwar die Möglichkeit mit speziellen Akustiklösern wie z.B. LMS SysNois, einer Finite-Elemente-Software zur Lösung der Helmholtz-Gleichungen, die Wellenpropagation im Fernfeld zu berechnen. Allerdings muss auch ein CFD-Löser bei hybriden Verfahren [22], bei denen zumindest die akustische Schallausbreitung im Nahfeld - und damit bis zur Übergabe der Lösung an einen Fernfeldlöser - dargestellt werden soll, Anforderungen an eine korrekte Darstellung der Wellenpropagation eines aeroakustischen Quellprozesses über Ausbreitungsdistanzen von mehreren Wellenlängen λ erfüllen. Daher sollen in dieser Arbeit folgende Untersuchungen stattfinden, um den Strömungslöser „ANSYS CFX - Release 15.0“, der nicht als Wellenlöser konzipiert ist, hinsichtlich der Vorhersage der Wellenpropagation zu untersuchen.

Das grundsätzliche Ziel der Arbeit besteht in der Bestimmung der Fehler bei der Prognose von Wellenausbreitung mit ANSYS CFX sowie deren Vergleich mit theoretischen Analysen der Raum- und Zeitdiskretisierung.

Nach der Darstellung der Grundgleichungen sowie der Einführung der verwendeten Definitionen der Simulationsparameter wird die Analyse der theoretisch zu erwartenden Amplituden- und Phasenfehler der in ANSYS CFX verwendeten Diskretisierungsmethoden durchgeführt, welche anhand bestimmter Programmeinstellungen wie der zusätzlichen Auswahl der Advektionsgleichung für einen passiven Skalar nachgewiesen werden. Danach wird der Einfluss sowohl der räumlichen als auch der zeitlichen Diskretisierungen für kompressible Strömungen anhand von $1D$ - und $2D$ -Problemen anhand der zwei Grenzfälle „semi-diskret in der Zeit“ bzw. „semi-diskret im Ort“ getestet. Hierfür werden reine Anfangswertprobleme betrachtet, um einen Einfluss der Ränder auf das Ergebnis auszuschließen.

Ist die Schallquelle nun beispielsweise ein zweistufiges Gebläse, sollen die Tests auch an sich bewegenden Gittern durchgeführt werden, da diese für die Definition von rotierenden Koordinatensystemen von großer Bedeutung sind. Die Testfälle stammen aus dem Teilgebiet der Aeroakustik, d.h. die Lösung ist immer kompressibel als Teil der Gasdynamik. Anschließend werden also Fehleruntersuchungen an verschiedenen sogenannten sliding-mesh Konfigurationen, d.h. sich bewegenden Rechengittern, durchgeführt und hinsichtlich ihrer Propagationsfehler sowie zusätzlich auftretender Effekte wie z.B. der Ablenkung der Strömung durch das sliding-

mesh (vgl. umströmten Autoreifen in Haag [12]) analysiert. Hierfür sollen die Einstellungen bezüglich der Rechengebiete sowie spezifischer akustischer Parameter verwendet werden, die sich zuvor in den Anfangswertproblemsimulationen als am wenigsten fehlerbehaftet erwiesen haben.

2. Grundlagen

2.1. Von Navier-Stokes zu linearen Advektionsgleichungen

Da in ANSYS CFX die Navier-Stokes-Gleichungen implementiert sind, folgt eine Analyse dieser Gleichungen sowie deren Linearisierung. In späteren Simulationen werden die Einschränkungen dieser Linearisierung berücksichtigt. Aus der so erhaltenen linearen Euler-Gleichung in 1D sowie der linearisierten Kontinuitätsgleichung kann ein System entkoppelter Differentialgleichungen angegeben werden, woraus zwei linearisierte Advektionsgleichungen gebildet werden können. An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass trotz der beschriebenen Transformation auf einfachere Testgleichungen die Navier-Stokes-Gleichungen in ANSYS CFX gelöst werden, was einen entscheidenden Einfluss auf die Erklärung des Verhaltens der späteren Lösung besitzt.

2.1.1. Linearisierte Euler-Gleichung

Für die Lösung spezieller akustischer Probleme kann die Navier-Stokes-Gleichung auf ein stark reduziertes System bestehend aus der Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichung sowie der Energiegleichung reduziert werden. Die Kontinuitäts- und Impulsgleichung lauten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} + \nabla p = 0. \quad (2.2)$$

Nach Ehrenfried (2004) [11] können die drei Feldgrößen - Druck p , Dichte ρ und akustische Schallschnelle \underline{u} - in zwei Teile zerlegt werden, den Ruheanteil und den Schwankungsanteil:

$$p = p_0 + p', \quad (2.3)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (2.4)$$

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}', \quad (2.5)$$

wobei

$$\underline{u} \equiv \underline{u}' \quad (2.6)$$

für ein im zeitlichen Mittel ruhendes Fluid ($\underline{u}_0 = 0$).

Beim Einsetzen der Gleichungen (2.3), (2.4) und (2.5) in die Impulsgleichung (2.2) ergibt sich

$$(\rho_0 + \rho') \left[\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u}' \cdot \nabla \underline{u}' \right] = -\nabla(p_0 + p'). \quad (2.7)$$

Daraus folgt die lineare Eulergleichung zu

$$\rho_0 \frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i}, \quad (2.8)$$

da die Produkte des Schwankungsanteils von \underline{u} und dessen Ableitung nach den Koordinatenrichtungen $\nabla \underline{u}'$ [5] sowie aus $\rho' \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t}$ vernachlässigbar sind und die Ableitung des Drucks p_0 nach x_i ($\frac{\partial p_0}{\partial x_i}$) Null ist.

2.1.2. Linearisierte Kontinuitätsgleichung

Bei der Linearisierung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (2.9)$$

mit (2.4) kann folgendes Ergebnis erzielt werden:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \underline{u}'] = 0. \quad (2.10)$$

Da die Zeitableitung des Gleichanteils der Dichte ρ_0 Null ist

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

und dadurch, dass der sehr kleine Skalar ρ' , multipliziert mit den Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen des Schwankungsanteils der Schallschnelle \underline{u}' ungefähr Null ist

$$\rho' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \approx 0, \quad (2.12)$$

kann die linearisierte Kontinuitätsgleichung geschrieben werden ($\underline{u}_0 = 0$ (2.5)) als:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.13)$$

2.1.3. Fehlender Upwind-Term der linearisierten Gleichungen

Diese reduzierten Gleichungen - die linearisierte Euler-Gleichung (2.8) sowie die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.13) - die als die von ANSYS CFX für den Grenzfall kleiner Störungen ($p' \ll p_0$) im freien Raum unter Vernachlässigung von Reibungseffekten gelöst betrachtet

werden können, enthalten keinen Upwind-Term. Daher ist in den späteren Simulationen zu erwarten, dass neben der in ANSYS CFX zu wählenden Diskretisierungsmethode des Ortes „Upwind 1. Ordnung“ über „Blend Factor“ = 0.0 die beiden Diskretisierungsmethoden „Upwind 2. Ordnung“ über „Blend Factor“ = 1.0 oder „Zentrale Differenz 2. Ordnung“ die exakt gleichen Ergebnisse liefern. Denn eine Rolle in der Ortsdiskretisierung spielen nur die räumlichen Diskretisierungen der Terme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

sowie

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.15)$$

Ist daher in der folgenden Arbeit nur beschrieben, mit welchem Zeitdiskretisierungsverfahren gearbeitet wird, soll die Raumdiskretisierung über die Auswahl „Blend Factor“ = 1 oder „Zentrale Differenz“ von 2. Ordnung genau sein.

2.1.4. Lineare Advektionsgleichung als Testgleichung

Als Testgleichung für die theoretisch zu erwartenden numerischen Fehler nach von Neumann soll eine lineare Advektionsgleichung dienen, da aus der linearisierten Euler- (2.8) sowie Kontinuitätsgleichung (2.13) ein System zweier entkoppelter Advektionsgleichungen gebildet werden kann. Nach Ehrenfried (2004) [11] kann aus Gleichungen (2.8) und (2.13) die Wellengleichung angegeben werden:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0. \quad (2.16)$$

Mit der Einführung eines Systems gekoppelter partieller Differentialgleichungen für die Wellengleichung und anschließender Entkopplung dessen über die Berechnung der Schallgeschwindigkeiten $\pm c$ als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des gekoppelten Systems folgen diese linearen Advektionsgleichungen in 1D mit den Invarianten

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2c} \left(-\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

zu

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \pm c \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

2.2. Semidiskretisierung in Ort oder Zeit

In diesem Kapitel sollen die zu erwartenden numerischen Fehler der einzelnen Diskretisierungsmethoden anhand der linearen Advektionsgleichung (2.19) an zwei Grenzfällen betrachtet werden, die in den späteren Simulationen nachgestellt werden: Der erste der beiden Grenzfälle soll

nur die räumlichen Ableitungen approximieren und eine numerisch fehlerfreie Berechnung der Zeitableitungen annehmen. Die mathematische Formulierung erfolgt über die modifizierte Wellenzahl in Abschnitt (2.2.1). Die Theorie der Dahlquistgleichungen stellt den Inhalt des zweiten Grenzfalles dar (2.2.2), der einen analytischen Verlauf der Ortsableitung voraussetzt und eine Beschreibung numerischer Fehler durch diskrete Zeitableitungen erlaubt.

2.2.1. Modifizierte Wellenzahl

Die aus den numerischen Verfahren resultierenden Amplituden- und Phasenfehler werden im Grenzfall der zeitlichen Auflösung einer Periode bei einer unendlich kleinen Zeitschrittweite τ

$$\tau \longrightarrow 0 \quad (2.20)$$

durch die modifizierte Wellenzahl $\tilde{\xi}(\xi)$ ausgedrückt. Im Folgenden sollen daher die modifizierten Wellenzahlen $\tilde{\xi}(\xi)$ der Semidiskretisierungsverfahren „Zentrale Differenz 2. Ordnung“ und „Upwind 2. Ordnung“ über den Ansatz $u = \hat{u}e^{i\xi jh}$ [13] für die Modellgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{D_h u}{Dh} = 0 \quad (2.21)$$

mit $c_0 > 0$ analysiert werden.

2.2.1.1. Upwind 1. Ordnung

Für das Diskretisierungsverfahren „Upwind 1. Ordnung“

$$D_{Up1} u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \quad (2.22)$$

kann die modifizierte Wellenzahl

$$\tilde{\xi}h = \sin \xi h + i(-1 + \cos \xi h) \quad (2.23)$$

angegeben werden.

2.2.1.2. Upwind 2. Ordnung

Das Diskretisierungsverfahren „Upwind 2. Ordnung“

$$D_{Up2} u_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2h} \quad (2.24)$$

ergibt die modifizierte Wellenzahl

$$\tilde{\xi}h = 2\sin \xi h - \frac{1}{2}\sin 2\xi h + i\left(-\frac{3}{2} + 2\cos \xi h - \frac{1}{2}\cos 2\xi h\right). \quad (2.25)$$

2.2.1.3. Zentrale Differenz 2.Ordnung

Die Analyse der zentralen Differenz 2. Ordnung im Raum

$$D_{CT2}u_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \quad (2.26)$$

ergibt

$$\tilde{\xi}h = \sin \xi h \quad (2.27)$$

2.2.1.4. Vergleich der modifizierten Wellenzahlen

Diese Plots ergeben sich aus den in Gleichungen (2.23), (2.25) und (2.27) berechneten modifizierten Wellenzahlen: Abbildung (2.1). Die Realteile spiegeln die Phasenfehler und Imaginärteile die Fehler der Amplitude wider.

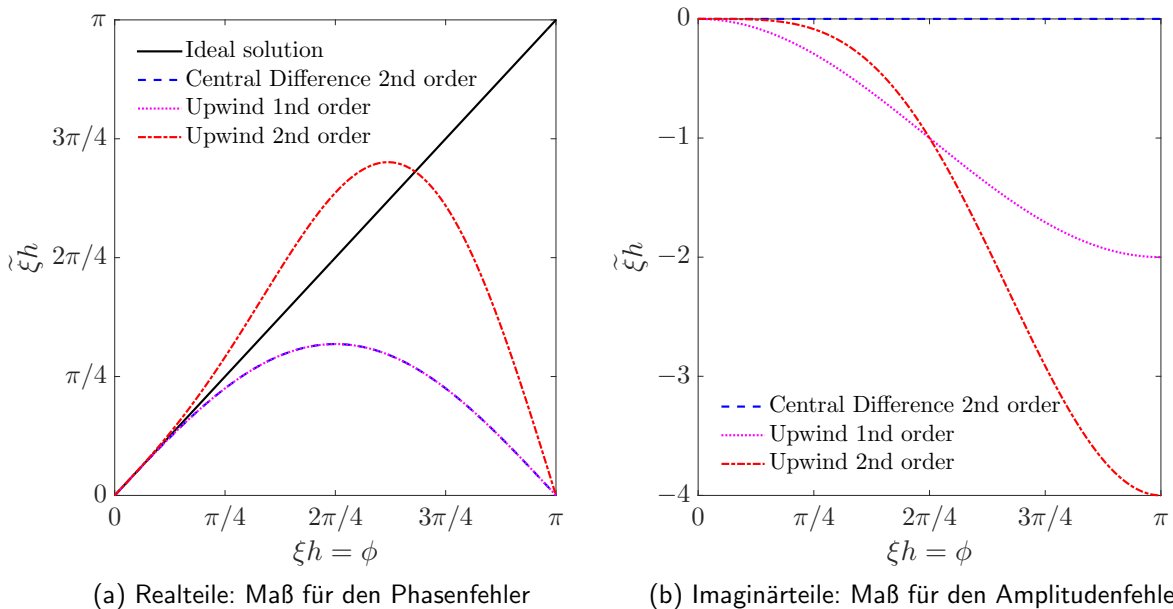


Abbildung 2.1.: Modifizierte Wellenzahlen Upwind 1. sowie 2. Ordnung und Zentrale Differenz 2. Ordnung

2.2.2. Dahlquist-Gleichungen

Analog zur modifizierten Wellenzahl kann nun der Grenzfall der räumlichen Auflösung bei unendlich kleiner Gitterweite h

$$h \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

betrachtet werden. Die lineare Advektionsgleichung (2.19) lässt sich nun in der Form

$$\frac{D_\tau u}{D\tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial h} = 0 \quad (2.29)$$

bzw. für beliebige räumliche Diskretisierungen schreiben als [1]

$$\frac{d\underline{u}}{dt} + \underline{M}\underline{u} = \underline{g}. \quad (2.30)$$

Unter der Annahme des homogenen Falls ($\underline{g} = 0$) und einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix \underline{M} folgen die p entkoppelten Dahlquist-Gleichungen

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} = -\lambda_p v_p \quad (2.31)$$

mit

$$\underline{v} = \underline{R}^{-1}\underline{u} \quad (2.32)$$

und \underline{R}^{-1} als inverse Eigenvektormatrix der Koeffizientenmatrix \underline{M} als Modellgleichungen für die reine Zeitdiskretisierung. Für hyperbolische Probleme sind die Eigenwerte der Diskretisierungsmatrix imaginär und deren Anzahl strebt für $h \rightarrow 0$ gegen unendlich. Im Weiteren wird der reine Fehler aus der Zeitdiskretisierung anhand des Verhaltens der diskretisierten Dahlquistgleichung für ein imaginäres λ betrachtet.

Für z.B. ein Schwingungsproblem der Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.33)$$

mit den rein imaginären Eigenwerten $\lambda_{1/2} = \pm i\omega$ können nun für das Euler-Rückwärtsverfahren erster sowie zweiter Ordnung die Verstärkungsfaktoren berechnet werden.

Euler-Rückwärts 1. Ordnung Mit der zeitlichen Diskretisierung der Dahlquist-Testgleichung

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \lambda u^{n+1} \quad (2.34)$$

folgt der Verstärkungsfaktor

$$\sigma_{BDF1} = \frac{1}{1 + \tau\lambda} \quad (2.35)$$

und darüber hinaus mit der Zeitschrittweite τ (2.44) und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ der Betrag

$$|\sigma_{BDF1}| = \left| \frac{1}{1 + \tau\lambda} \right| = \left| \frac{1}{1 + i\tau\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi CFL}{N_\lambda}\right)^2}} \quad (2.36)$$

Euler-Rückwärts 2. Ordnung Mit

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau} = \lambda u^{n+1} \quad (2.37)$$

folgen die Verstärkungsfaktoren aus den Eigenwerten der Verstärkungsmatrix als

$$\sigma_{1/2, BDF2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2(\frac{3}{2} - \tau\lambda)}}{2(\frac{3}{2} - \tau\lambda)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2(\frac{3}{2} - i2\pi\frac{CFL}{N_\lambda})}}{2(\frac{3}{2} - i2\pi\frac{CFL}{N_\lambda})} \quad (2.38)$$

mit N_λ als Anzahl der Gitterpunkte pro Wellenlänge λ und der Raumschrittweite h und damit

$$N_\lambda = \frac{\lambda}{h}. \quad (2.39)$$

Die CFL -Zahl soll mit der Schallgeschwindigkeit c_0 gebildet werden (siehe Gleichung (2.45)).

2.3. Starrkörperrotation eines Gases

Bei der Betrachtung eines idealen Gases in einem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Kreiszyylinder mit Radius r^* lautet die radiale Komponente der differentiellen Impulsbilanz

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\Omega^2 r. \quad (2.40)$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung für den Druckverlauf im Zylinder:

$$p(r) = e^{\frac{M\Omega^2 r^2}{2R_0 T_E}} p(0), \quad (2.41)$$

wobei M die molare Masse des Gases und R_0 die allgemeine Gaskonstante beschreibt.

2.4. Definition der Simulationsparameter

Im folgenden Abschnitt werden die speziell für die Beschreibung der Simulationsparameter eingeführte Nomenklatur sowie deren äquivalente Symbole erläutert.

2.4.1. Definitionen der Zeit

Die Gesamtsimulationszeit T_Σ für eine Propagation über eine Distanz von acht Wellenlängen λ und der Frequenz f kann über die als Referenzzeit verwendete Periodendauer

$$T_0 = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c_0} \quad (2.42)$$

einer harmonischen, akustischen Schwingung angegeben werden zu

$$T_\Sigma = 8T_0 = 8\frac{\lambda}{c_0} = 8\frac{1}{f} \quad (2.43)$$

bei einer Zeitschrittweite von

$$\tau = CFL \frac{h}{c_0}, \quad (2.44)$$

wobei die CFL -Zahl nicht der *Courant*-Zahl in ANSYS CFX, sondern dem akustischen CFL entspricht (siehe nächsten Abschnitt (2.4.2)).

Des Weiteren stellt N_T einen Integer-Wert für die Beschreibung des Zeitschritts dar.

2.4.2. Akustische CFL -Zahl und Schallgeschwindigkeit c_0

Die akustische CFL -Zahl wird berechnet über

$$CFL = c_0 \frac{\tau}{h} \quad (2.45)$$

und mit $\gamma = 1.4$, $R_{air} = \frac{8314.47}{28.97} \frac{m^2}{s^2K}$ und der Umgebungstemperatur $T_E = 293.15 K$ folgt die Schallgeschwindigkeit

$$c_0 = \sqrt{\gamma R_{air} T_E} \approx 346.12 \frac{m}{s}. \quad (2.46)$$

Die hochgestellten Indizes n stellen die zeitlichen Zählindizes der Diskretisierungsmethoden dar.

2.4.3. Definitionen des Raums

Die in den Simulationen variierenden Anzahlen der Knotenpunkte in die jeweiligen Raumrichtungen $k = x$ und $k = y$

$$N_{K, k} = \frac{l_{Domain, k}}{h} + 1, \quad (2.47)$$

sind abhängig von den Längen des Rechengebiets $l_{Domain, k}$ in den Koordinatenrichtungen und bestimmen in x - bzw. y -Richtung die Gitterweite von

$$h = \frac{c_0}{N_\lambda f}, \quad (2.48)$$

wobei die Anzahl

$$N_\lambda = \frac{\lambda}{h} \quad (2.49)$$

der räumlichen Auflösung einer Wellenlänge in $1D$ entspricht und in den Simulationen Werte zwischen 8 und 1024 Punkten pro Wellenlänge annehmen wird.

Ein tiefgestellter Index j beschreibt den Zählindex der räumlichen Diskretisierung.

2.4.4. Eigenschaften der Welle

Der Betrag der Wellenzahl ist

$$|\underline{\xi}| = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{f}{c_0} \quad (2.50)$$

mit den Wellenzahlen in die zwei Raumrichtungen

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = |\underline{\xi}| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

wobei α den Winkel zwischen Wellenzahlenvektor $\underline{\xi}$ und der x -Achse [16] beschreibt. Die Wellenlänge wird ausgedrückt durch

$$\lambda = \frac{c_0}{f}. \quad (2.52)$$

2.5. Berechnung von Amplituden- und Phasenfehlern sowie Amplituden- und Phasenverhältnissen

Hier sollen Formeln zur Umrechnung der Amplituden- und Phasenfehler ε'_A bzw. ε'_{ph} der Simulationen des Anfangswertproblems der periodischen Welle über die Simulationszeit von $t = T_0$ aus Abschnitt (4.1.4) auf Amplituden- sowie Phasenverhältnisse δ' angegeben werden, um diese Werte mit denen der verschiedenen Testsetups in Kapitel (5.1.2) zu vergleichen. Bei den Untersuchungen zum Einfluss der *CFL*-Zahl auf die Genauigkeit ist es nämlich zunächst sinnvoller, nicht den Fehler pro Zeitschritt N_T , sondern für einen festen Zeitabschnitt Δt oder eine Propagationsstrecke Δx zu vergleichen. Hinsichtlich der absoluten Genauigkeiten eines Diskretisierungsverfahrens sind allerdings die Amplituden- sowie Phasenverhältnisse δ interessant.

Amplitudenfehler Der Amplitudenfehler ε'_A kompressibler Strömung in ANSYS CFX wird berechnet über

$$\varepsilon'_A = \frac{\tilde{A} - A_0}{A_0} \quad (2.53)$$

mit A_0 als Variable für den Anfangs- und \tilde{A} für den Ergebniswert der Amplitude einer Simulation nach einer bestimmten Simulationszeit.

Phasenfehler Ein positiver Wert des Phasenversatzes ε'_{ph} bedeutet, dass die Welle laut Berechnung schneller als mit der Schallgeschwindigkeit c_0 propagiert, wobei 100% einem Phasenversatz von $\pi = \frac{1}{2}\lambda$ entsprechen.

Amplitudenverhältnisse der periodischen Welle aus 1D $\delta'_{A, PW}$ sowie anderer durchgeführter Tests in ANSYS CFX $\tilde{\delta}'_A$ bzw. δ'_A werden wie folgt berechnet:

$$1 + \varepsilon'_A = 1 \cdot [\delta'_{A, PW}]^{N_T} \Rightarrow \delta'_{A, PW} = e^{\frac{1}{N_T} \ln(1 + \varepsilon'_A)} \quad (2.54)$$

$$\tilde{A} = A_0 [\delta'_A]^{N_T} \Rightarrow \delta'_A = e^{\frac{1}{N_T} \ln(\frac{\tilde{A}}{A_0})}, \quad (2.55)$$

$$\tilde{\delta}'_A = e^{\frac{1}{N_T} \ln \frac{\tilde{A}}{A_0}}, \quad (2.56)$$

2.5. Berechnung von Amplituden- und Phasenfehlern sowie Amplituden- und Phasenverhältnissen

wobei A_0 als Symbol für den Anfangs- und \tilde{A} für den Ergebniswert der Amplitude einer Simulation nach der jeweiligen gewählten Simulationszeit mit der Anzahl an Zeitschritten N_T steht. Auch

Phasenverhältnisse $\delta'_{Ph, PW}$ sowie $\tilde{\delta}_{Ph}$ bzw. δ'_{Ph} können gewonnen werden:

$$-\varepsilon'_{Ph} \frac{\lambda}{2} = 8\lambda - 8\lambda \delta'_{Ph, PW} \Rightarrow \delta'_{Ph, PW} = 1 + \frac{\varepsilon'_{Ph}}{2} \quad (2.57)$$

$$\Delta x_{Propagation} = \frac{\Delta T}{T_\Sigma} \cdot 8\lambda \cdot \delta'_{Ph} \Rightarrow \delta'_{Ph} = \frac{\Delta x_{Propagation}}{\frac{\Delta T}{T_\Sigma} \cdot 8\lambda} \quad (2.58)$$

$$\tilde{\delta}_{Ph} = \frac{\Delta x_{Propagation}}{\frac{\Delta T}{T_\Sigma} \cdot 8\lambda} \quad (2.59)$$

mit der zurückgelegten Gesamtstrecke des propagierenden Mediums $\Delta x_{Propagation}$ nach einer Simulationszeit $t = \Delta T$.

3. Analyse der verwendeten Diskretisierungsverfahren anhand der linearen Advektionsgleichung

3.1. Von Neumann Analysen

Nun sollen die von Neumann Analysen der einzelnen Diskretisierungsverfahren der linearen Advektionsgleichung (2.19) durchgeführt werden, um später die in ANSYS CFX auftretenden numerischen Fehler mit den theoretisch zu erwartenden zu vergleichen. Hierfür werden in Kapitel (3.1.1) zuerst die verschiedenen Raum- und Zeitdiskretisierungen durchgeführt und anschließend deren Verstärkungsfaktoren/-matrizen, Eigenwerte, Amplituden- und Phasenverhältnisse berechnet und tabellarisch (siehe Tabellen (3.1) und (3.2)) gelistet. Die jeweiligen Verstärkungsfaktoren/-matrizen werden zur Veranschaulichung ihrer graphischen Verläufe für bestimmte CFL -Zahlen von $\frac{1}{32}$ bis 5 ausgewertet und über der Anzahl der Gitterpunkte pro Wellenlänge N_λ bzw. dem Argument ξh in Abschnitt (3.1.2) geplottet.

Zu beachten ist hierbei, dass die zeitliche Diskretisierungsmethode Rückwärts-Euler 2. Ordnung zu zwei Eigenwerten führt.

Die auftretenden Amplitudenverhältnisse $\tilde{\delta}_A$ im Strömungslöser ANSYS CFX entsprechen weitestgehend den Erwartungen (siehe Abbildung (3.7)); im Falle der örtlichen Upwind-Diskretisierung 2. Ordnung bei beliebiger zeitlicher Berechnungsvorschrift weicht das Phasenverhältnis $\tilde{\delta}_{ph}$ vor allem bei niedriger Auflösung einer Wellenlänge N_λ stark vom von Neumann-Wert δ_{ph} ab (siehe Abbildung (3.8)). Detailliertere Ergebnisse und Erläuterungen finden sich in Kapitel (3.2).

3.1.1. Übersicht über die verwendeten Diskretisierungsverfahren

In Tabellen (3.1) und (3.2) sind die Diskretisierungen, deren Verstärkungsfaktoren sowie Verstärkungsmatrizen - bei Verwendung von drei Zeitebenen $n-1, n$ und $n+1$ - als auch deren dazugehörige Eigenwerte aufgeführt.

Im nächsten Unterkapitel (3.1.2) werden die im Folgenden analytisch hergeleiteten Eigenschaften der jeweiligen Verfahren mit MATLAB numerisch ausgewertet.

Tabelle 3.1.: Diskretisierungsverfahren: Rückwärts-Euler 1. Ordnung zeitlich

Diskretisierungsverfahren	Verstärkungsfaktor	Amplituden/-Phasenverh.
Rückwärts-Euler 1.Ordnung zeitlich, Upwind 2. Ordnung räumlich	$\hat{G}_{BDF1UP2}(\xi h) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -c_0 \frac{3u_j^{n+1} - 4u_{j-1}^{n+1} + u_{j-2}^{n+1}}{2h}$	$\delta_{A,BDF1UP2} = \frac{1}{\sqrt{(1+CFL(\frac{3}{2}-2\cos\xi h+\frac{1}{2}\cos 2\xi h))^2+(CFL(2\sin\xi h-\frac{1}{2}\sin 2\xi h))^2}}$
Rückwärts-Euler 1.Ordnung zeitlich, Zentrale Differenz 2. Ordnung räumlich	$\hat{G}_{BDF1CR2}(\xi h) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -c_0 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h}$	$\delta_{A,BDF1CR2} = \frac{1}{\sqrt{1+CFL^2 \sin^2 \xi h}}$ $\delta_{Ph,BDF1CR2} = \frac{\arctan(-CFL \sin \xi h)}{-CFL \xi h}$

Tabelle 3.2.: Diskretisierungsverfahren: Rückwärts-Euler 2. Ordnung zeitlich

Diskretisierungsverfahren	Verstärkungsmatrix	Eigenwerte	Amplituden/- Phasenverh.
Rückwärts-Euler 2.Ordnung zeitlich, Upwind 1. Ordnung räumlich $\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} = -c_0 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h}$	$\hat{G}_{BDF2Up1}(\xi h) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + CFL - CFL e^{-i\xi h} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2(\frac{3}{2} + CFL - CFL e^{-i\xi h})}}{2(\frac{3}{2} + CFL - CFL e^{-i\xi h})}$	$\delta_{A,BDF1Cr2} = \lambda_{1/2} $ $\delta_{Ph,BDF1Cr2} = \frac{\arctan(\frac{\Im\{\lambda\}}{\Re\{\lambda\}})}{-CFL\xi h}$
Rückwärts-Euler 2.Ordnung zeitlich, Upwind 2. Ordnung räumlich $\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} = -c_0 \frac{3u_{j-1}^{n+1} - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^{n+1}}{2h}$	$\hat{G}_{BDF2Up1}(\xi h) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + CFL(\frac{3}{2} - 2e^{-i\xi h} + \frac{1}{2}e^{-i2\xi h}) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2(\frac{3}{2} + CFL(\frac{3}{2} - 2e^{-i\xi h} + \frac{1}{2}e^{-i2\xi h}))}}{2(\frac{3}{2} + CFL(\frac{3}{2} - 2e^{-i\xi h} + \frac{1}{2}e^{-i2\xi h}))}$	$\delta_{A,BDF2Cr2} = \lambda_{1/2} $ $\delta_{Ph,BDF2Cr2} = \frac{\arctan(\frac{\Im\{\lambda\}}{\Re\{\lambda\}})}{-CFL\xi h}$
Rückwärts-Euler 2.Ordnung zeitlich, Zentrale Differenz 2. Ordnung räumlich $\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} = -c_0 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h}$	$\hat{G}_{BDF2Cr2}(\xi h) = \begin{bmatrix} \frac{3}{3 + CFL e^{i\xi h} - CFL e^{-i\xi h}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 + i2CFL \sin \xi h)}}{2(3 + i2CFL \sin \xi h)}$	$\delta_{A,BDF2Cr2} = \lambda_{1/2} $ $\delta_{Ph,BDF2Cr2} = \frac{\arctan(\frac{\Im\{\lambda\}}{\Re\{\lambda\}})}{-CFL\xi h}$

3.1.2. Darstellung der Von Neumann Analysen

Hier sollen zum Vergleich und zur Veranschaulichung der Amplituden- sowie Phasenverhältnisse δ der Von Neumann Analysen der einzelnen Diskretisierungsmethoden die jeweiligen Plots dargestellt werden. Die kleinste CFL -Zahl ist jeweils $1/32$, bis hin zu $CFL = 5$.

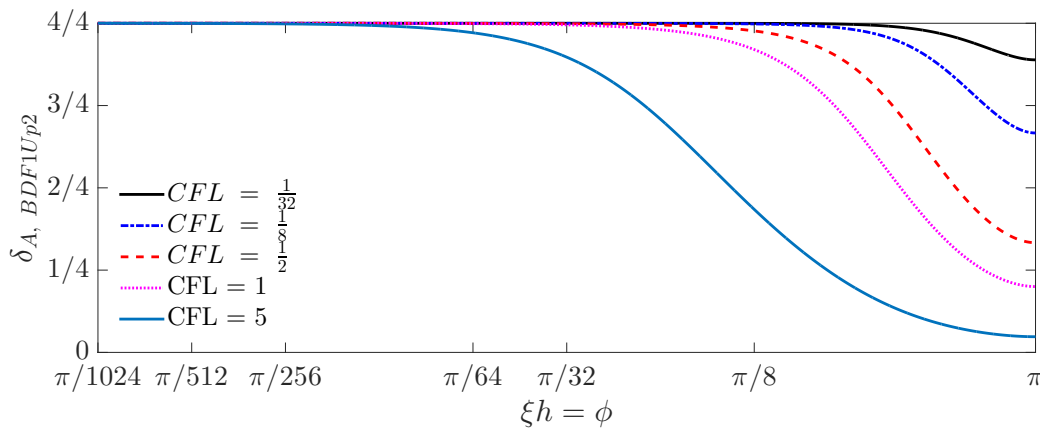
Die Skala der x -Achse wird logarithmisch aufgetragen, wobei $\xi h = \frac{2\pi}{ppw}$ und damit

$$ppw = \frac{2\pi}{\xi h}, \quad (3.1)$$

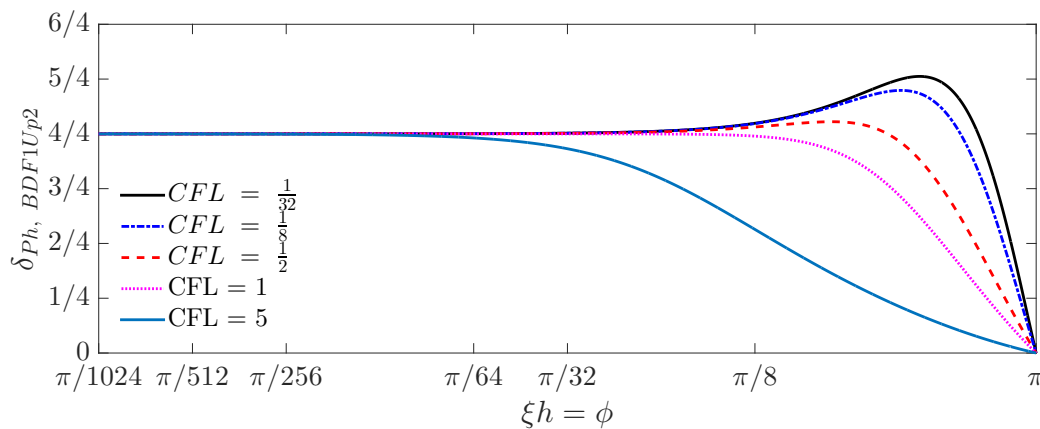
siehe Tabelle (3.3). In Abschnitt (3.2) wird die alternative Darstellung der Abszissen der Plots mit Punkten pro Wellenlänge (ppw) gewählt.

Tabelle 3.3.: Points per wavelength (ppw) und ξh

ξh	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$...
ppw	2	4	8	...

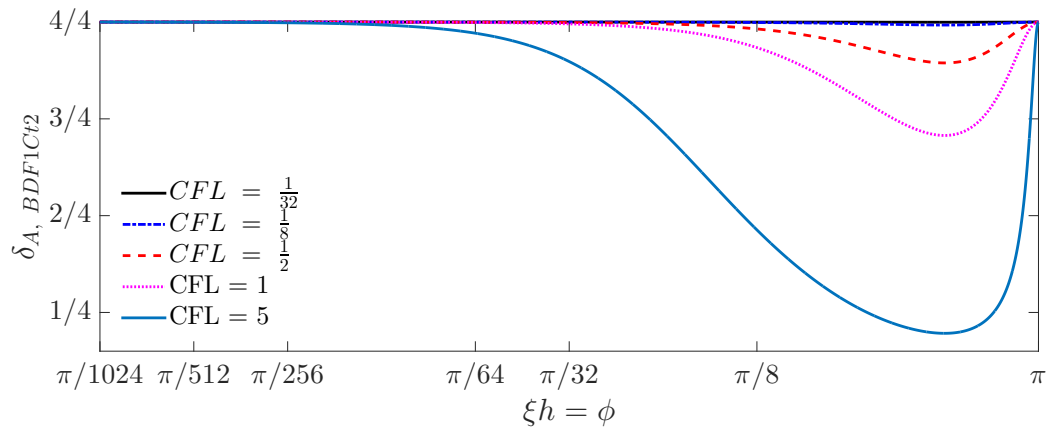


(a) Amplitudenverhältnis

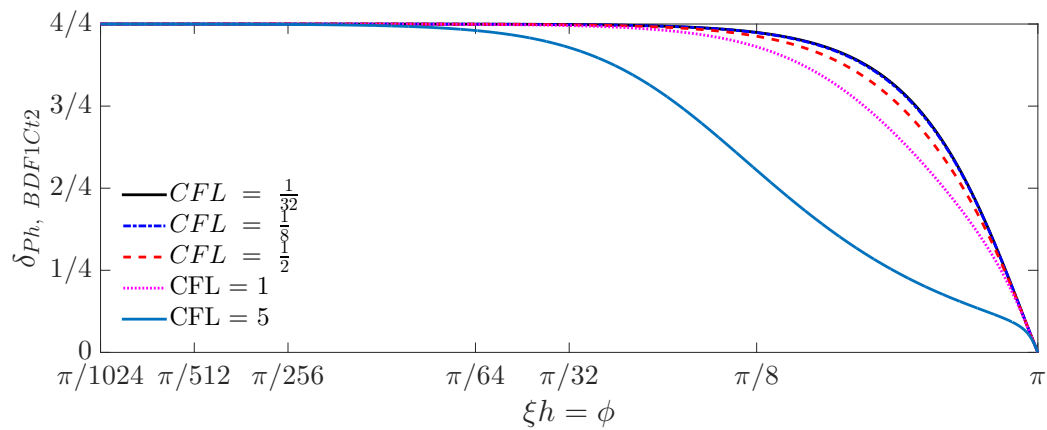


(b) Phasenverhältnis

Abbildung 3.1.: Rückwärts-Euler 1. Ordnung in der Zeit und Upwind 2. Ordnung im Raum



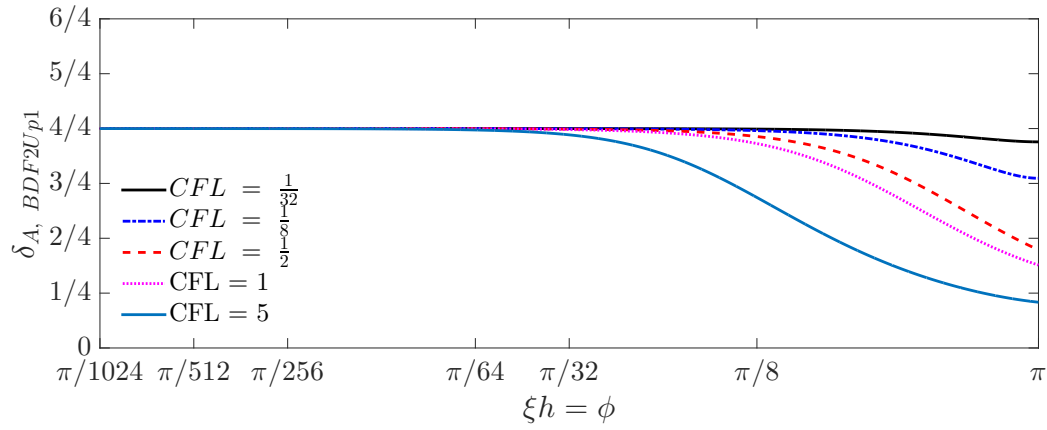
(a) Amplitudenverhältnis



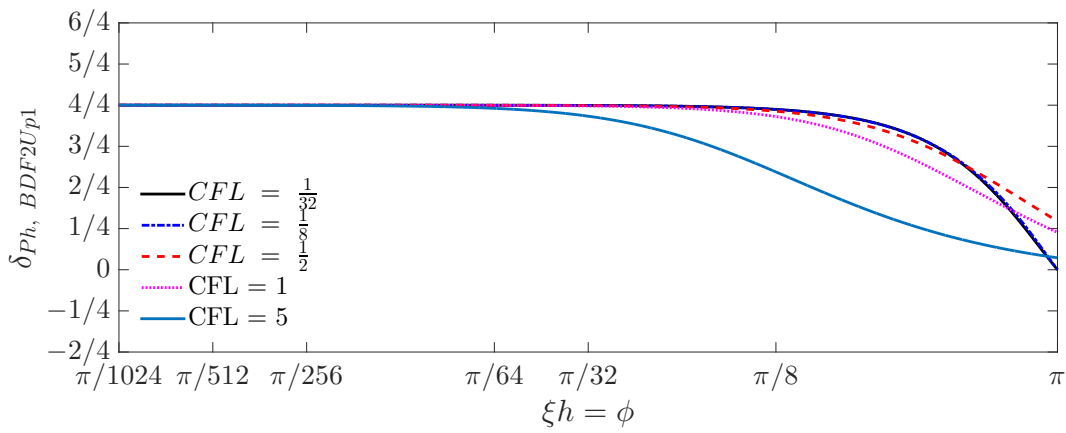
(b) Phasenverhältnis

Abbildung 3.2.: Rückwärts-Euler 1. Ordnung in der Zeit und Zentrale Differenz 2. Ordnung im Raum; die Kurven für $CFL = \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{32}$ überdecken sich nahezu

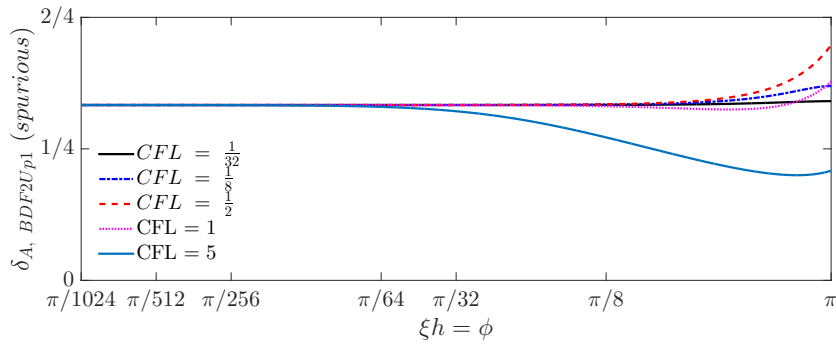
3.1. Von Neumann Analysen



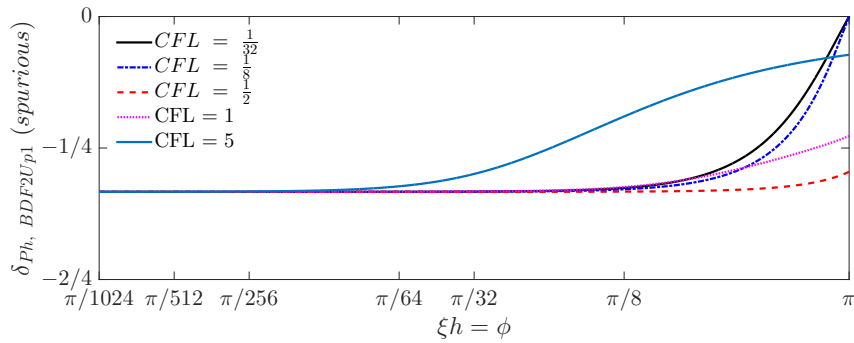
(a) Amplitudenverhältnis



(b) Phasenverhältnis

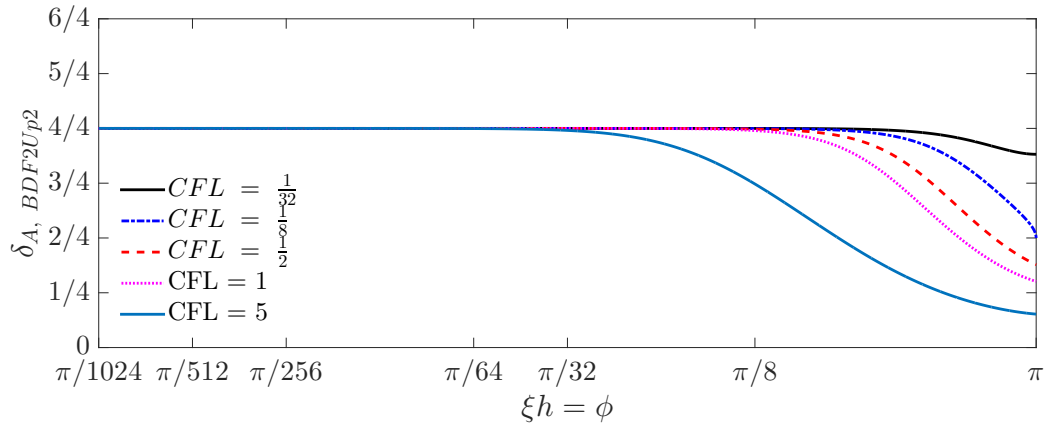


(c) Amplitudenverhältnis

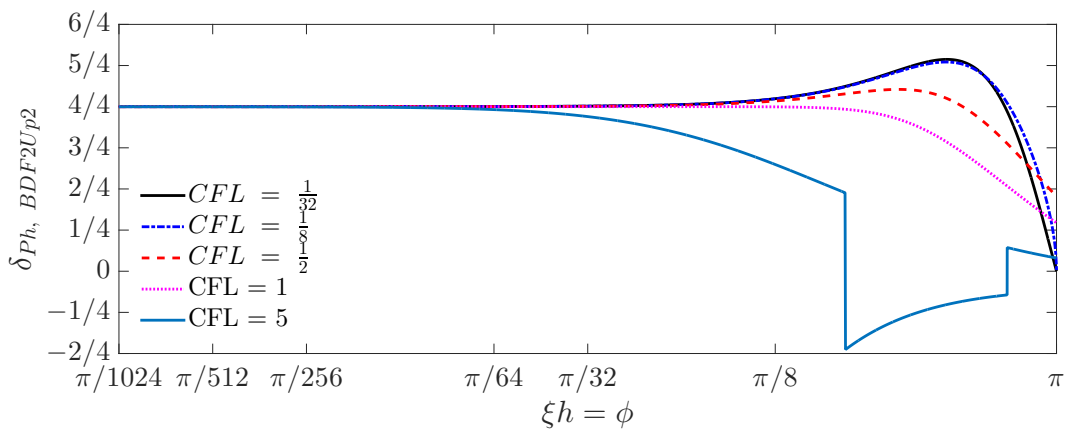


(d) Phasenverhältnis

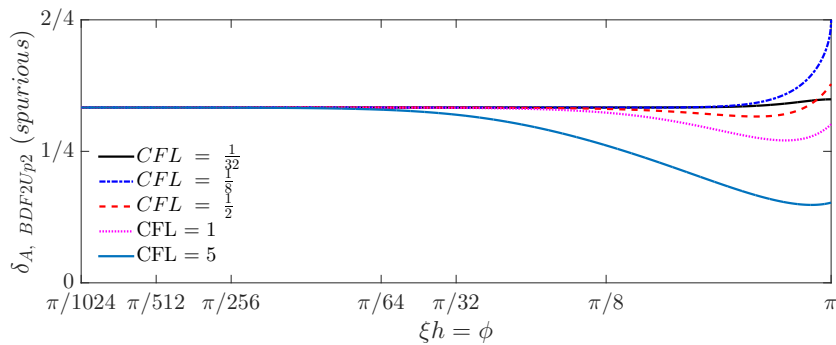
Abbildung 3.3.: Rückwärts-Euler 2. Ordnung in der Zeit und Upwind 1. Ordnung im Raum mit Lösungen der unphysikalischen Eigenwerte (spurious)



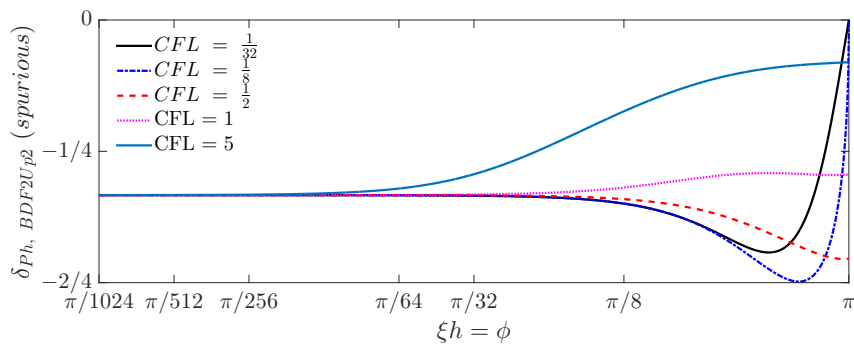
(a) Amplitudenverhältnis



(b) Phasenverhältnis



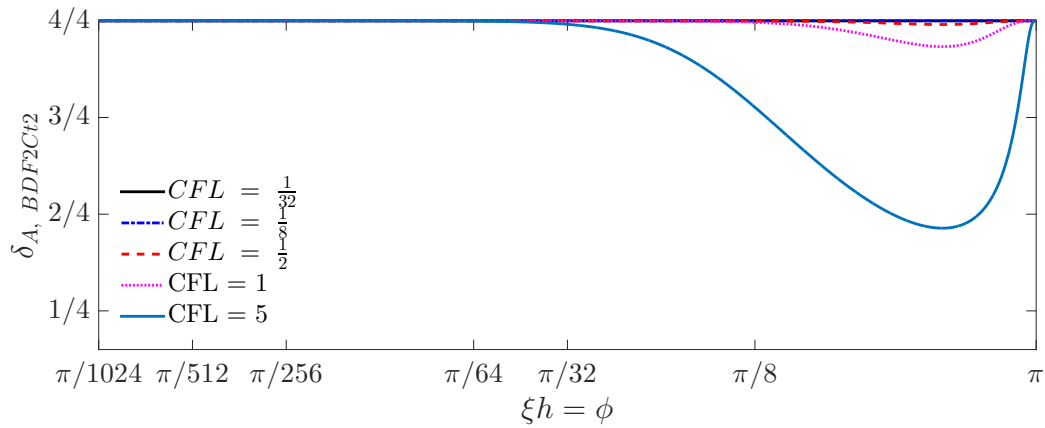
(c) Amplitudenverhältnis



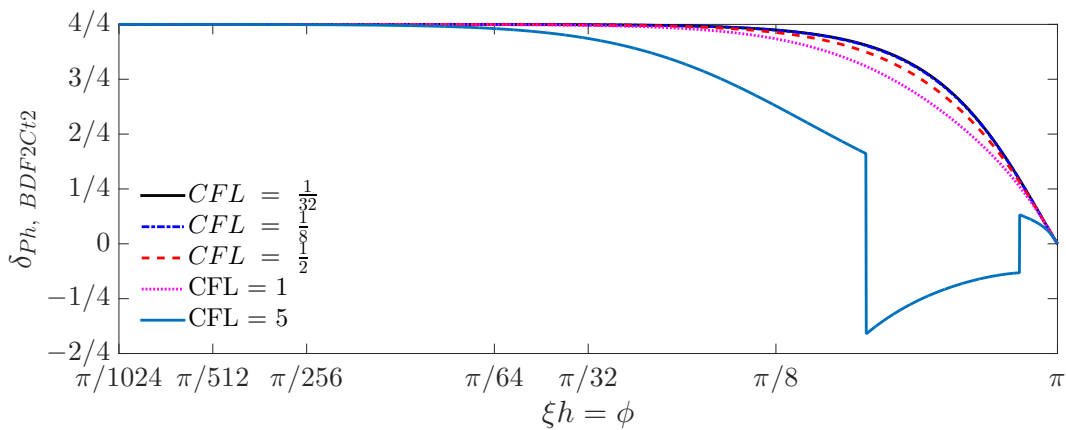
(d) Phasenverhältnis

Abbildung 3.4.: Rückwärts-Euler 2. Ordnung in der Zeit und Upwind 2. Ordnung im Raum mit Lösungen der unphysikalischen Eigenwerte (spurious)

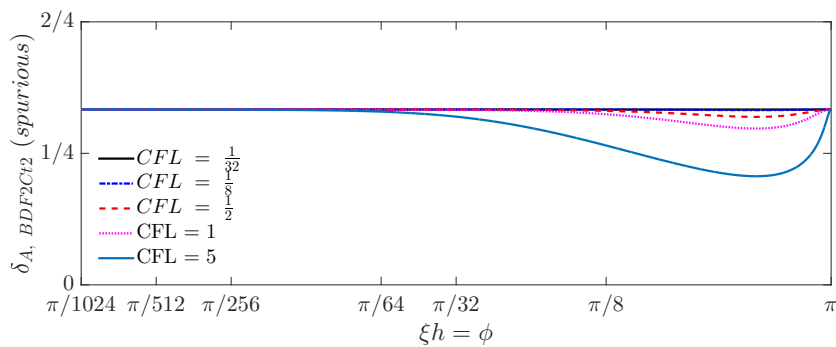
3.1. Von Neumann Analysen



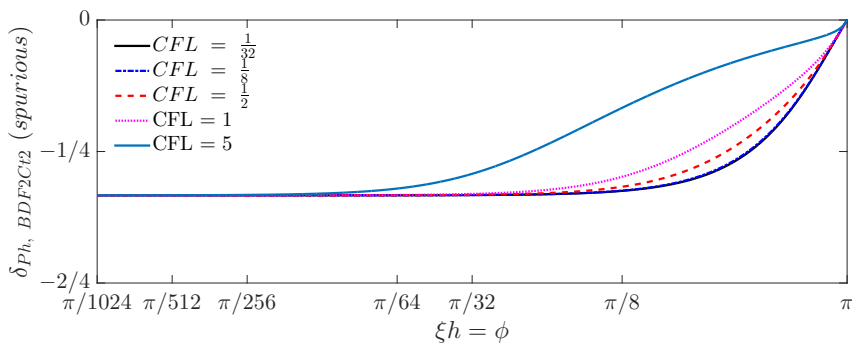
(a) Amplitudenverhältnis



(b) Phasenverhältnis



(c) Amplitudenverhältnis



(d) Phasenverhältnis

Abbildung 3.5.: Rückwärts-Euler 2. Ordnung in der Zeit und Zentrale Differenz 2. Ordnung im Raum mit Lösungen der unphysikalischen Eigenwerte (spurious); die Kurven für $CFL = \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{32}$ überdecken sich nahezu

Die von Neumann Analyse zeigt, dass bei einer Diskretisierung mit der Zentralen Differenz 2. Ordnung im Raum kein Vorseilen eines numerisch vorhergesagten Signals möglich ist, da das Phasenverhältnis $\delta_{ph} \leq 1$ bei jeder gewählten Gitterauflösung. Aus den hier vorgestellten Verfahren kann dieses Verhalten lediglich bei Upwind 2. Ordnung räumlich und einer zeitlichen Euler-Rückwärts-Diskretisierung auftreten. Bei der Amplitude tritt bei den beschriebenen Diskretisierungsmethoden keine Zunahme auf, da sich die Verfahren Euler 1./2. Ordnung in der Zeit als unbedingt stabil erweisen [13].

Bemerkenswert ist die deutliche Genauigkeitszunahme durch die Anwendung des zeitlichen Euler-Rückwärts-Verfahrens 2. Ordnung gegenüber 1. Ordnung, die sich mit abnehmender *CFL*-Zahl deutlich ausprägt.

Die sogenannten „spurious-solutions“, die in Kombination mit einer Rückwärts-Euler-Diskretisierung 2. Ordnung entstehen (siehe auch Hirsch [13]), lassen sich auf den zweiten, unphysikalischen Eigenwert der Verstärkungsmatrizen \hat{G} zurückführen.

3.2. Ergebnisse aus Simulationen mit der linearen Advektionsgleichung in 1D

Ein passiver Skalar wird sinusförmig als Anfangswertproblem mit der Anfangsamplitude von $\hat{C} = 10$ in einem Rechengebiet mit in x -Richtung periodischen Rändern und einer Länge von $l_{Domain, x} = 2\lambda$ modelliert und mit einer Geschwindigkeit von $u_x = c_0$ durch das Rechengebiet transportiert. Diese Wahl der Transportgeschwindigkeit u_x erfolgt zur besseren Vergleichbarkeit mit späteren Simulationen - der tatsächliche Wert spielt für die Problemstellung keine Rolle. Bedeutend ist nur das dimensionslose Verhältnis CFL , in das die Transportgeschwindigkeit u_x eingeht. In Abbildung (3.6) ist der Sachverhalt dargestellt, wobei die Signalverläufe der Konzentrationen des passiven Skalars zu drei verschiedenen Zeitpunkten $t = 0, 0.6 T_\Sigma, T_\Sigma$ im Vergleich zu den analytischen Lösungen zu denselben Zeitpunkten geplottet sind. Phasen- sowie Amplitudenfehler können direkt abgelesen werden.

Bei der Implementierung wird explizit die lineare Advektionsgleichung als zusätzliche Transportgleichung für den mit konstanter Geschwindigkeit transportierten passiven Skalar in ANSYS Pre ausgewählt. Die Existenz des Druckgradienten-Terms (siehe auch Kapitel (2.1.3))

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

wird damit durch das inkompressible Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen ausgeschlossen und die Vergleichbarkeit dieser Tests mit den theoretischen Überlegungen aus Kapitel (3.1) wird sichergestellt.

Die Gesamtsimulationszeit der transienten Rechnung ist T_Σ , wobei das in ANSYS CFX auftretende Amplitudenverhältnis pro Zeitschritt über die Anfangsamplitude A_0 und die verbleibende Amplitude \tilde{A} des sinusförmig modellierten passiven Skalars nach den Zeitschritten N_T über Formel (2.56) berechnet werden kann. Zu beachten ist, dass sich dieser Fehler potenziert. Auch das Phasenverhältnis nach ANSYS CFX kann mit Formel (2.59) angegeben werden mit der durch die räumliche Position des Nulldurchgangs oder des Maximums der Konzentrationsverteilung zurückgelegten Strecke $\Delta x_{Propagation}$ in einer bestimmten Zeit Δt .

In den Plots (Abbildungen (3.7) und (3.8)) sollen die Amplituden- sowie Phasenverhältnisse dargestellt werden, die mit Simulationen in ANSYS CFX im Vergleich zu den Werten durch Berechnungen mit der Theorie nach von Neumann erhalten werden.

Auffallend sind die starken Abweichungen der Phasenverhältnisse, die mittels CFX erreicht werden und sich nach der Theorie von Neumanns ergeben müssten für die räumliche Diskretisierung Upwind $\mathcal{O}(h^2)$. Das mit abnehmender CFL -Zahl zu erwartende Vorseilen der „Welle“ stellt sich in keiner der Simulationen ein, $\tilde{\delta}_{ph}$ scheint hier auf den Maximalwert von 1 begrenzt zu sein. Einen möglichen Grund hierfür kann eine Beschränkung des Massenflusses \dot{m} darstellen, da ANSYS CFX zur Kategorie der Finiten-Volumen-Löser zählt und daher auch Fluidströme über Zellgrenzen hinweg kalkuliert. Das unphysikalische Vorseilen einer „Welle“

- wie laut von Neumann vorhergesagt - wird damit unterbunden. Kein Phasenvorauslaufen ist im Falle der räumlichen zentralen Differenz $\mathcal{O}(h^2)$ zu erwarten, wobei sich hierbei sehr gute Übereinstimmungen der Phasenverhältnisse δ_{ph} und $\tilde{\delta}_{ph}$ von ANSYS CFX zur Theorie ergeben. Auch die Raumdiskretisierung Upwind $\mathcal{O}(h^1)$, die laut ihrer modifizierten Wellenzahl identisch zum Realteil der modifizierten Wellenzahl der zentralen Differenz $\mathcal{O}(h^2)$ ist (siehe Abbildung (2.1)), liefert plausible Ergebnisse für den semi-diskreten Grenzfall der räumlichen Diskretisierung für mit der Advektionsgeschwindigkeit der Transportgleichung gebildete CFL -Zahlen $\ll 1$. Die sich ergebenden Werte der Phasenverhältnisse $\tilde{\delta}_{ph}$ aus ANSYS CFX dieser beiden Diskretisierungsmethoden sind demnach fast identisch (siehe Abbildung (3.8)).

Die Amplitudenverhältnisse (Abbildung (3.7)) sämtlicher dargestellter Diskretisierungsmethoden stimmen ab einer räumlichen Auflösung der „Welle“ von $N_\lambda \geq 16$ ppw sehr gut mit den Werten nach der Theorie von Neumanns überein.

Zusammenfassend zeigt das Testbeispiel des passiven Skalartransports, dass die in ANSYS CFX implementierte Diskretisierung für advective Prozesse hinsichtlich Phasen- und Amplitudenfehler weitgehend mit der Theorie der Finite-Differenzen-Diskretisierungen erklärbar ist.

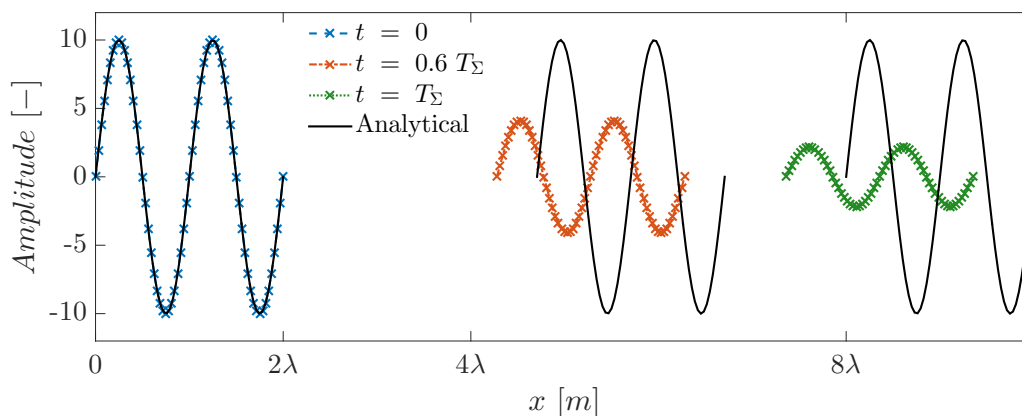
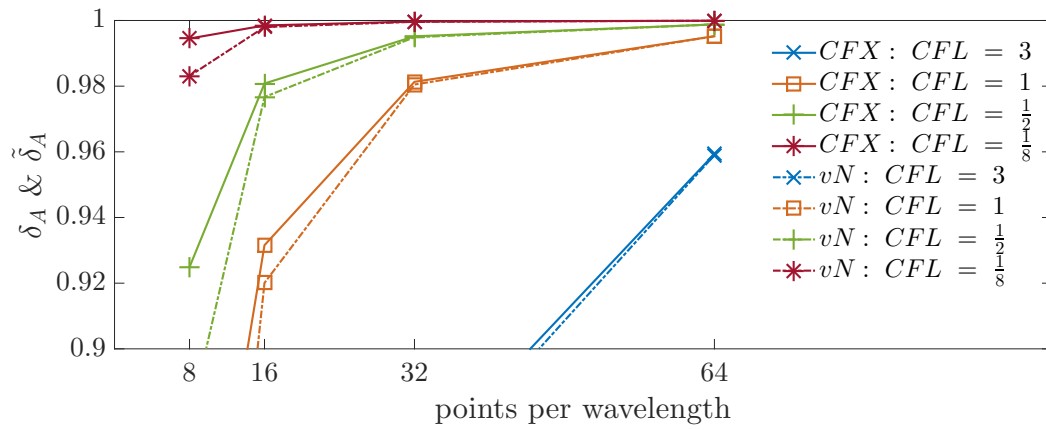
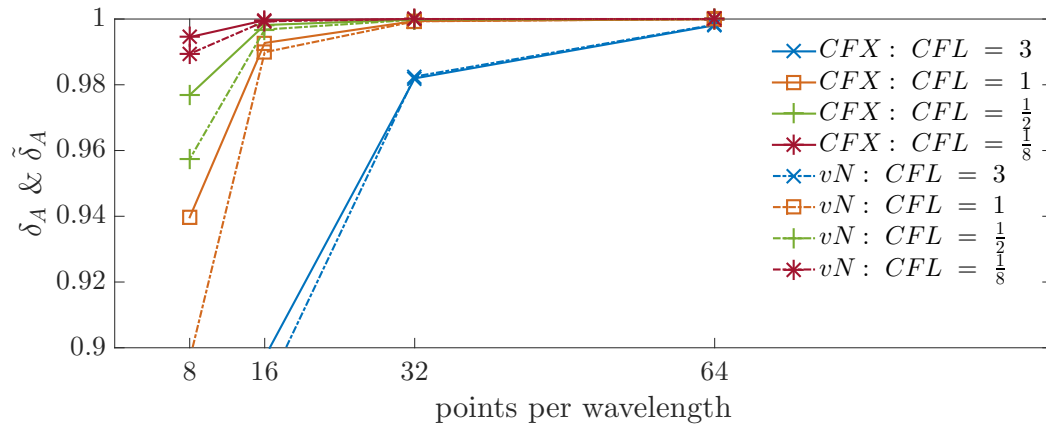


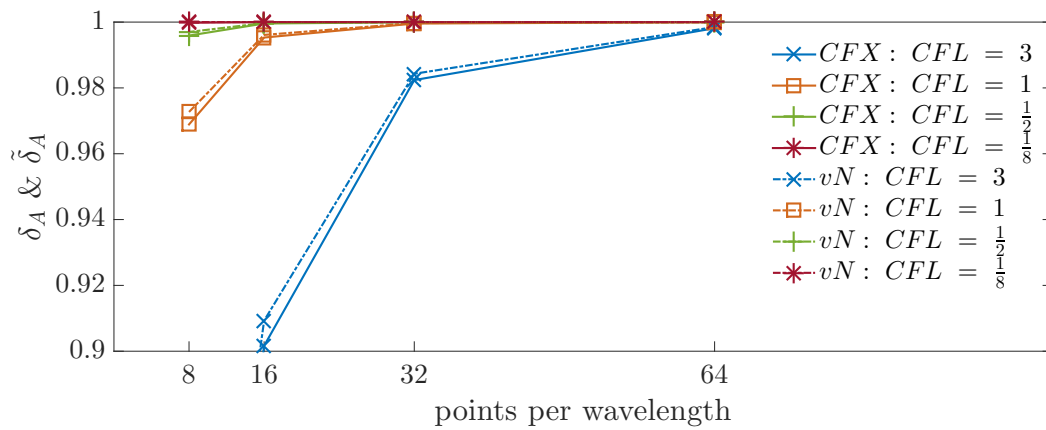
Abbildung 3.6.: Signalverläufe der Konzentrationen des passiven Skalars zu drei verschiedenen Zeitpunkten $t = 0, 0.6 T_\Sigma, T_\Sigma$ für $CFL = 3$ und 32 ppw im Vergleich zu den analytischen Lösungen



(a) Upwind $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^1)$

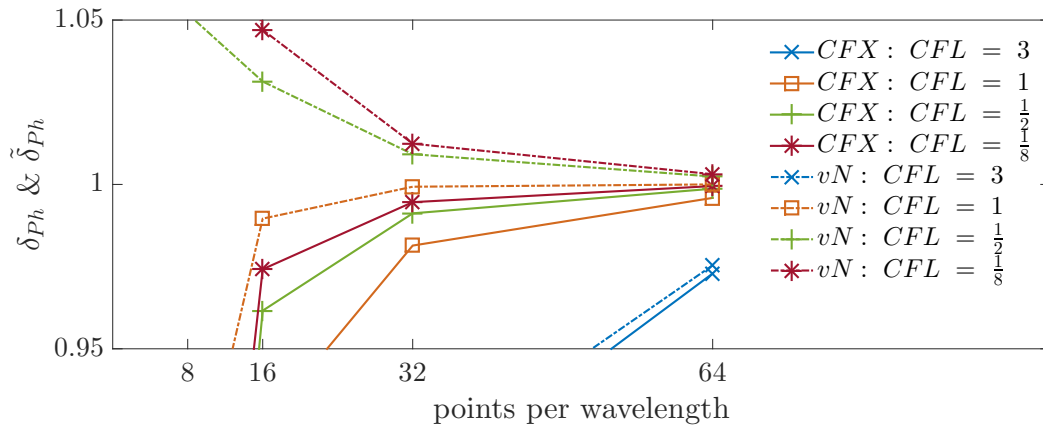


(b) Upwind $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$

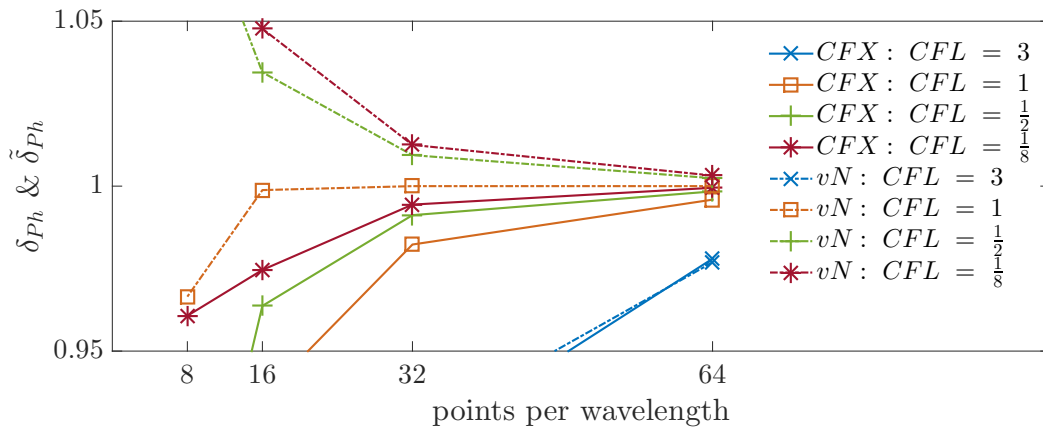


(c) Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$

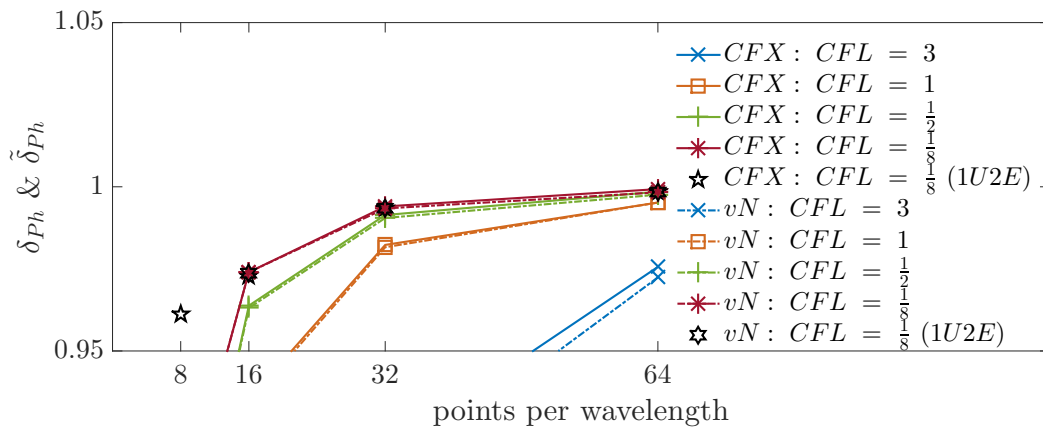
Abbildung 3.7.: Amplitudenverhältnisse des passiven Skalars nach den jeweiligen Diskretisierungsmethoden im Vergleich zu von Neumann



(a) Upwind $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^1)$



(b) Upwind $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$



(c) Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$, Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$ sowie Upwind $\mathcal{O}(h^1)$ und Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$ zur Überprüfung des Grenzfalles der räumlichen Semidiskretisierung

Abbildung 3.8.: Phasenverhältnisse des passiven Skalars nach den jeweiligen Diskretisierungsmethoden im Vergleich zu von Neumann

4. Wellenpropagation in 1D und 2D auf äquidistanten Gittern bei kompressibler Strömung

4.1. Simulationen mit eindimensionaler Propagation

Um zunächst eine Testumgebung in ANSYS CFX zu schaffen, die die Propagation von Schallwellen in einer Dimension möglichst fehlerfrei, d.h. mit in bestimmten Grenzen liegenden numerischen Fehlern wiedergibt, sollen zunächst Simulationen jeweils im zeitlich und räumlich aufgelösten Grenzfall durchgeführt werden. Betrachtet werden Wellenpakete sowie simple 1D-Wellen, wobei durch die Verwendung von räumlich periodischen Randbedingungen ein reines Anfangswertproblem betrachtet wird, jeweils propagierend in positiver x -Richtung.

Die genauere Beschreibung und Interpretation der Beobachtungen an den durch ANSYS CFX erzeugten Resultaten dieser beiden Testfälle erfolgt differenziert nach den Diskretisierungsmethoden „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^1)$ und „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^2)$, da in den kompressiblen Simulationen mit den Ortsdiskretisierungsmethoden „Upwind 1. Ordnung“, „Upwind 2. Ordnung“ und „Zentrale Differenz 2. Ordnung“ gleiche Ergebnisse erzielt werden und damit die anfänglich angenommene Irrelevanz der Ortsdiskretisierung 2. Ordnung des konvektiven Terms (siehe Kapitel (2.1.3)) bestätigen.

4.1.1. Beschreibung der Testumgebungen

Die Geometrie der Berechnungsgebiete ist hierbei sehr einfach als quasi-eindimensionaler Quader mit lediglich zwei Knoten in jeweils y - und z -Richtung gewählt. In x -Richtung wurde die Anzahl der Knotenpunkte variiert, um den Einfluss der räumlichen Auflösung der Welle zu untersuchen. Die Abmessungen betragen daher 0.1 m in y - sowie 0.01 m in z -Richtung und unterschiedliche Längen in x .

Als Material des Fluids wird „Air Ideal Gas“ bei einer kompressiblen Rechnung gewählt, wobei als Referenzdruck in der kompletten Domain $p_0 = 101325\text{ Pa}$ vorherrscht und die Temperatur zu Beginn der Rechnungen der Umgebungstemperatur von $T_E = 293.15\text{ K}$ entspricht.

Die maximale Anzahl der inneren Iterationen wird auf 35 festgelegt, um alle nötigen Rechenschritte bei einem maximalen Residuum von 10^{-9} unter der Einstellung „double precision“

zuzulassen, um Fehler aus Rechenungenauigkeiten ausschließen zu können. In Anhang (B) kann am Beispiel eines .out-Skripts der Verlauf der Residuen während der Rechnung sowie die Anzahl der durchgeführten inneren Iterationen pro Zeitschritt überprüft werden.

Als Diskretisierungsverfahren werden die Advektions-Schemata „Blend Factor“ = 1.0 - was formal einer Upwind-Differenz 2. Ordnung [3] [4] im Raum entspricht - oder das zentrale Differenzenverfahren über das Turbulenzmodell „LES Smagorinsky“ mit einer Smagorinsky-Konstante von 10^{-4} gewählt. Die Zeitdiskretisierungen sind entweder Rückwärts-Euler 1. Ordnung oder Rückwärts-Euler 2. Ordnung genau mit der Option „Previous Timestep“.

Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Situationen betrachtet, die sich hinsichtlich der Anfangsbedingung und der Randbedingungen unterscheiden, nämlich eine periodisch fortgesetzte Welle und ein räumlich begrenztes Wellengebiet. Es zeigt sich, dass beide Konfigurationen zu identischen Ergebnissen führen. Mit dem Testfall „Wellenpaket“ lassen sich dann später andere Situationen wie die Propagation durch ein sliding-mesh-interface leichter untersuchen als mit der periodisch fortgesetzten Anfangslösung.

4.1.1.1. Periodische Welle

In x -Richtung wird die Länge gemäß

$$l_{Domain, x} = 2\lambda = 2\frac{c_0}{f} \quad (4.1)$$

gewählt, um genau 2 Wellenlängen als Startlösung vorzugeben. Der Ausbreitungsweg entspricht der Gesamtsimulationszeit T_{Σ} über eine Propagationsstrecke von 8λ bei der Frequenz $f = 3000 \text{ Hz}$. Am „Ein-“ und „Auslass“, d.h. den yz -Flächen, werden translational-periodische Randbedingungen unter einer Gittervernetzung von 1 : 1 an den jeweiligen Rändern definiert (siehe Abbildung (4.2)).

Zur Initialisierung der Simulation wird über Expressions in CFX Pre die Druckverteilung [16]

$$p'_{periodisch}(x, t) = \Re\{\hat{p} e^{i(\xi_x x - \omega t)}\} \Rightarrow p'_{periodisch}(x, 0) = \hat{p} \cos \xi_x x \quad (4.2)$$

sowie die Schallschnelle u' zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben:

$$u'_{periodisch}(x, 0) = \hat{u} \cos \xi_x x \quad (4.3)$$

mit $\hat{p} = 0.1 \text{ Pa}$ bzw. $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$ und $\hat{u} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0}$ [16]. Proportional zur Druckstörung existiert dabei auch eine Temperaturstörung, die wegen ihres kleinen Betrags gegenüber T_E vernachlässigbar ist. Die ebenfalls zu p' proportionale Dichtestörung wird aus der Druckstörung über das ideale Gasgesetz berechnet.

In Abbildung (4.1) ist die Propagation der periodischen Welle über eine Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = 8\lambda$ zu den drei Zeitpunkten $t = 0$, $t = 0.6 T_{\Sigma}$, $t = 1 T_{\Sigma}$ im Vergleich zu den

analytischen Lösungen geplottet. Die x -Achse wurde hierbei zur besseren Vorstellung verlängert, da sich in der tatsächlichen Simulation die Welle nur in einem in x -Richtung periodischen Gebiet der Länge $\Delta x = 2\lambda$ bewegt.

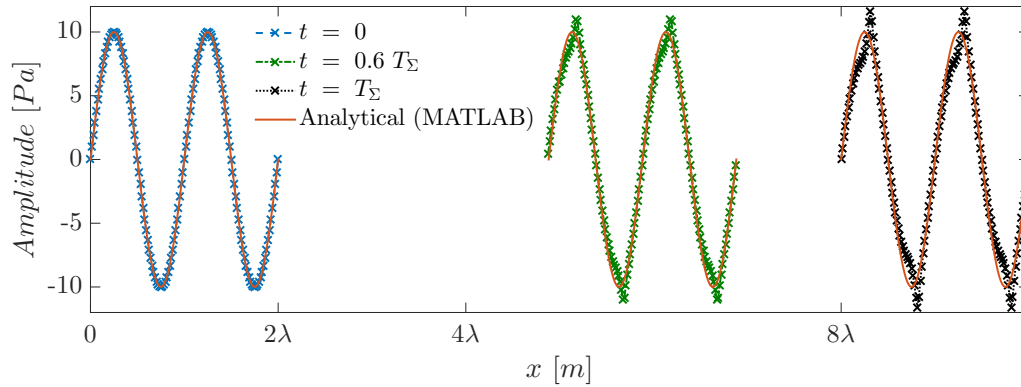


Abbildung 4.1.: Signalverläufe der periodischen Welle zu drei verschiedenen Zeitpunkten $t = 0, 0.6 T_{\Sigma}, T_{\Sigma}$ für $CFL = \frac{1}{32}$ und 64 ppw im Vergleich zu den analytischen Lösungen

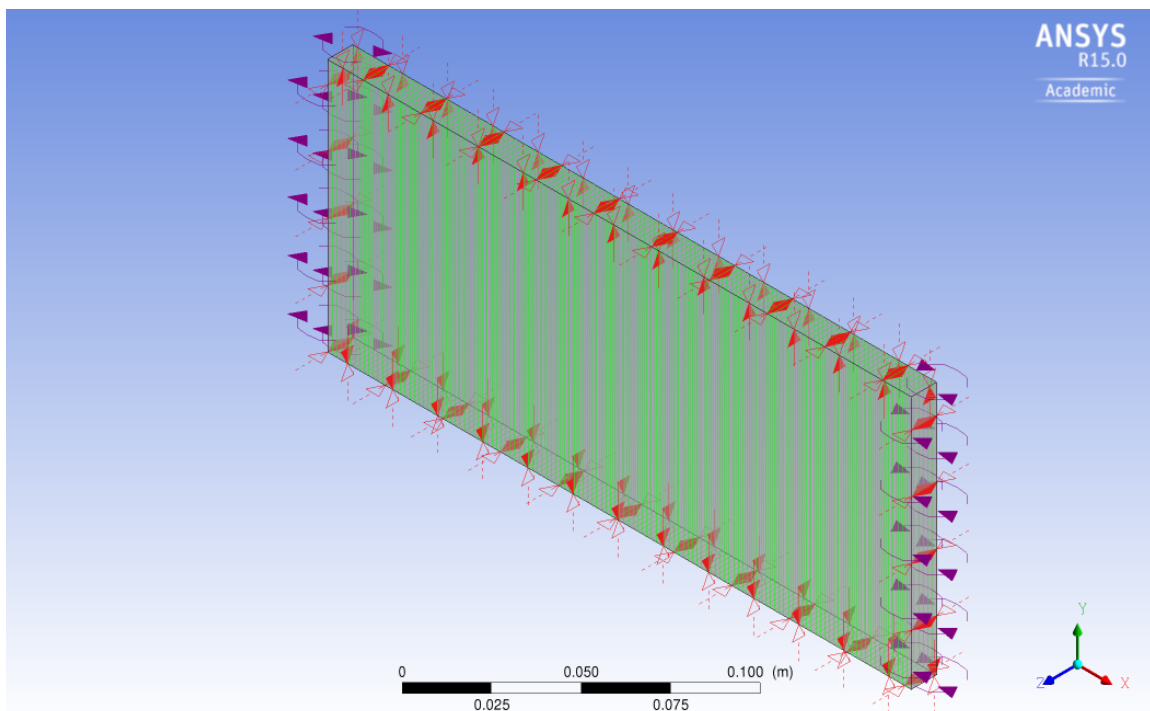


Abbildung 4.2.: Periodisches Rechengebiet aus ANSYS CFX-Pre für 1D-Simulationen mit Randbedingungen und Darstellung der Vernetzung

4.1.1.2. Wellenpaket

Die Länge des Rechengebiets in x -Richtung beträgt $2 m$, um eine Ausbreitung eines Wellenpakets, das sich anfangs in der Nähe des linken Rands des Rechengebiets befindet, über eine Distanz von $8\lambda \approx 8 \cdot 0.115 m$ bei einer Frequenz f von $3000 Hz$ sowie der Schallgeschwindigkeit c_0 zu ermöglichen.

Die Randbedingungen werden an den xy - sowie an den xz -Flächen jeweils auf „Symmetrie“ gesetzt. Am Ein- als auch am Auslass werden die Randbedingung „Opening“ gewählt für ein subsonisches „Flow Regime“ und den Optionen „Opening Pressure“ mit dem Wert $p_0 = 0 Pa$ relativem Druck, sowie der Opening-Temperature von $T_E = 293.15 K$.

Die Initialisierung der Rechnung erfolgt mit Angabe der Gleichungen des Wellenpakets für Druckverteilung p' sowie Schallschnelle u' zum Zeitpunkt $t = 0$. Beide Parameter müssen bei einer propagierenden Welle in Phase sein [16]:

$$p'_{Wellenpaket}(x, 0) = \hat{p} e^{-\frac{0.319}{\lambda^2}(x-(x_{min}+0.5(x_{max}-x_{min})))^2} \sin \xi_x x \quad (4.4)$$

$$u'_{Wellenpaket}(x, 0) = \hat{u} e^{-\frac{0.319}{\lambda^2}(x-(x_{min}+0.5(x_{max}-x_{min})))^2} \sin \xi_x x \quad (4.5)$$

mit $\hat{p} = 0.1 Pa$ bzw. $\hat{p} = 10 Pa$ und $\hat{u} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0}$ [16].

Diese Parameter des Wellenpakets werden mittels einer *if*-Anweisung nur zwischen $x_{min} = \lambda$ und $x_{max} = 8\lambda$ gesetzt, die restlichen Anfangswerte der Druck- und Schnelleverteilung in der Domain sind Null (siehe Abbildung (A.1)).

Zur Veranschaulichung sei hierbei auch auf Plot (4.1) verwiesen; an Stelle der periodischen Welle propagiert ein Wellenpaket.

4.1.2. Grenzfall 1: Semi-diskret in der Zeit

Bei diesen Simulationen wird untersucht, ob ein Grenzfall erreicht werden kann, bei dem ein so kleiner Zeitschritt τ gewählt wird, dass annähernd davon ausgegangen werden kann, die Lösung „analytisch“ in der Zeit zu approximieren, damit die Fehler aus der zeitlichen Diskretisierung sehr klein gegenüber denen aus der räumlichen Diskretisierung ausfallen. Hierfür muss die *CFL*-Zahl entsprechend klein gewählt werden, dass das Verhältnis von zeitlicher zu räumlicher Diskretisierung entsprechend gering wird. Das Verhalten der Lösung sollte sich in diesem semi-diskreten Grenzfall mit der modifizierten Wellenzahl der räumlichen Finite-Differenzen-Approximation beschreiben lassen. Jedoch werden in sämtlichen Simulationen dieses Grenzfalls sich bildende Unstetigkeiten in den Verläufen der Lösungen beobachtet, die solch ein zu erwartendes Ergebnis verhindern.

4.1.2.1. Periodische Welle

Euler-Rückwärts 1. Ordnung Mit dieser Diskretisierung wird nach der Gesamtsimulationszeit T_Σ und einer Auflösung N_λ von 64 Punkten pro Wellenlänge bei einer CFL -Zahl von $\frac{1}{32}$ und entsprechendem Zeitschritt τ sowie den Anfangsdruckamplituden von $\hat{p} = 10 Pa$ bzw. $\hat{p} = 0.1 Pa$ das in Abbildung (4.3) visualisierte Ergebnis erzielt:

Klar erkennbar sind die Deformationen bzw. Unstetigkeiten in der Ableitung an den lokalen Maxima der Druckverteilung p' der periodischen Welle. Um einen eventuellen Einfluss von Nichtlinearitäten hierfür durch den Term $\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$ der Euler-Gleichung auszuschließen wurde die Simulation mit der um den Faktor 100 kleineren Amplitude durchgeführt (Abbildung (4.3)). Eine qualitative Änderung des Ergebnisses durch die Verringerung der Anfangsamplitude \hat{p} kann jedoch nicht beobachtet werden. Es folgt ein Vergleich der Simulation der periodischen Welle wie beschrieben jedoch mit einer räumlich acht- und sechzehnfach höheren Auflösung und damit 512 als auch 1024 Punkten pro Wellenlänge. Wird die CFL -Zahl im Fall mit 512 ppw bzw. 1024 ppw verringert, bilden sich wie im vorigen Fall mit 64 ppw im Bereich der Amplitudenmaxima unsymmetrische Deformationen des Signalverlaufs aus. Deshalb wird die *Courant*-Zahl im folgenden Vergleich zu $\frac{1}{8}$ gewählt, da der Effekt der erhöhten räumlichen Auflösung demonstriert werden soll und ein CFL von $\frac{1}{32}$ sehr starke Unstetigkeiten und ein unbegrenztes Anwachsen der Lösung zur Folge hat (Abbildung (4.5)).

Als Schlussfolgerung lässt sich hieraus ziehen, dass der semi-diskrete räumliche Fall bereits zu einem unerwarteten Ergebnis führt, da mit kleiner werdendem Zeitschritt τ bei gleicher räumlicher Auflösung kein immer mehr die analytische Lösung approximierender Grenzfall generiert werden kann. Offenbar kann somit das Verhalten des Löser nicht im Sinne der oben genannten Semi-Diskretisierung beschrieben werden. Eine Instabilität im Sinne von Neumanns ist allerdings auszuschließen, da die implizite Zeitdiskretisierung durch die Diskretisierungsverfahren „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^1)$ oder $\mathcal{O}(\tau^2)$ unbedingst stabil ist, d.h. auch für Fälle mit rein imaginären Eigenwerten stabile Lösungen liefern sollte.

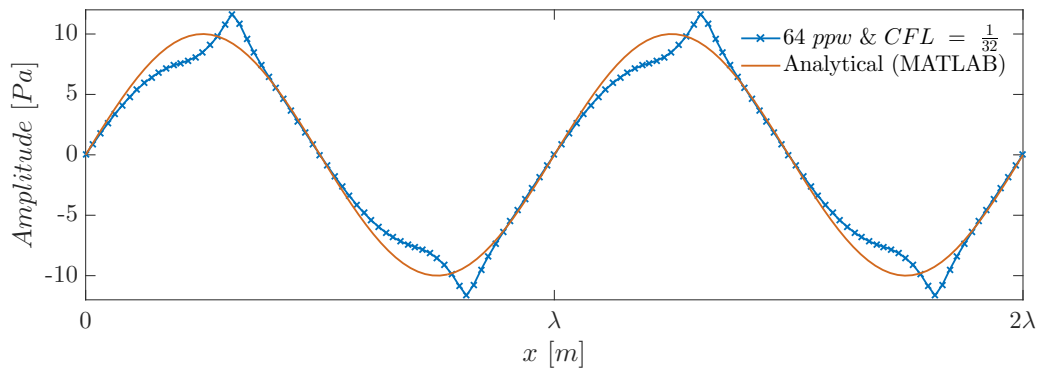
Zur besseren Möglichkeit der Interpretation der Plots wird auch die erste sowie die zweite Ableitung des Druckverlaufs p' nach x aus den diskreten Werten der Plots aus ANSYS CFX sowie deren analytischer Verlauf berechnet (Gleichungen (4.8) und (4.10)): Aus

$$p'_{periodisch}(x, T_\Sigma) = \hat{p} \sin \xi_x x \quad (4.6)$$

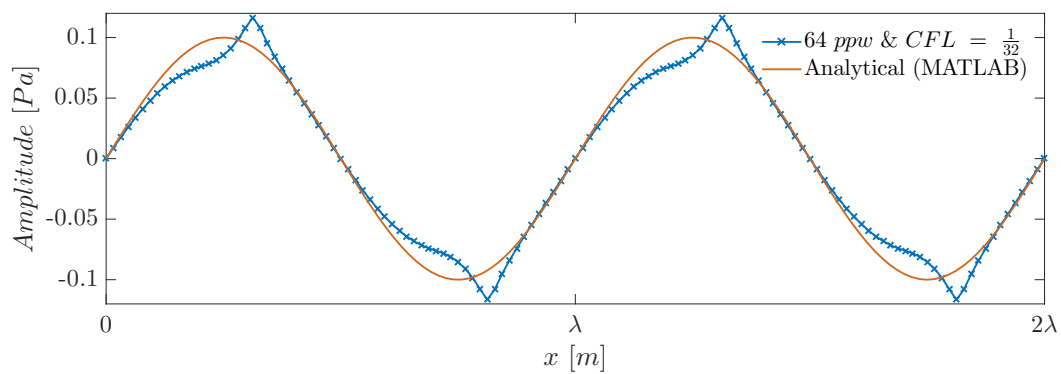
folgen die ersten beiden Ableitungen des Druckverlaufs zu

$$\frac{dp'}{dx} = \hat{p} \xi_x \cos \xi_x x \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2 p'}{dx^2} = -\hat{p} \xi_x^2 \sin \xi_x x \quad (4.8)$$



(a) Lösung mit Anfangsamplitude $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$



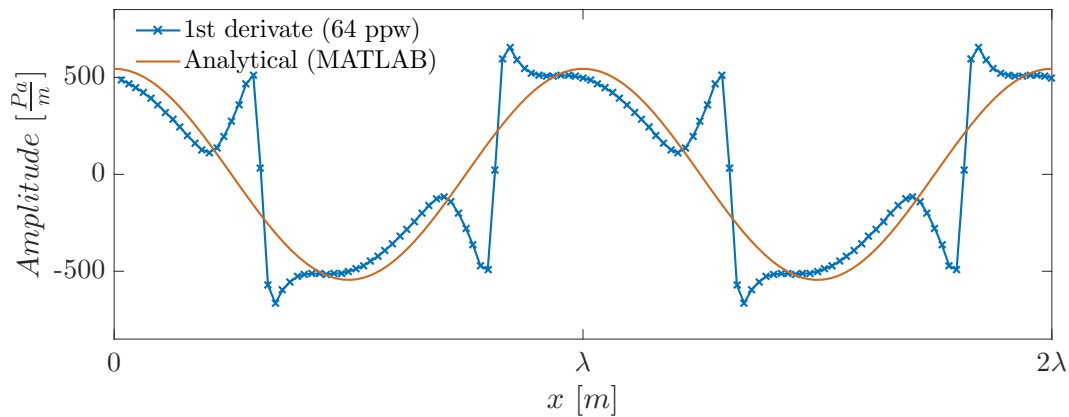
(b) Lösung mit Anfangsamplitude $\hat{p} = 0.1 \text{ Pa}$

Abbildung 4.3.: Darstellung der Lösungen zur Zeit $t = T_\Sigma$ der periodischen Welle für die Amplituden $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$ und $\hat{p} = 0.1 \text{ Pa}$ im Vergleich zur analytischen Lösung

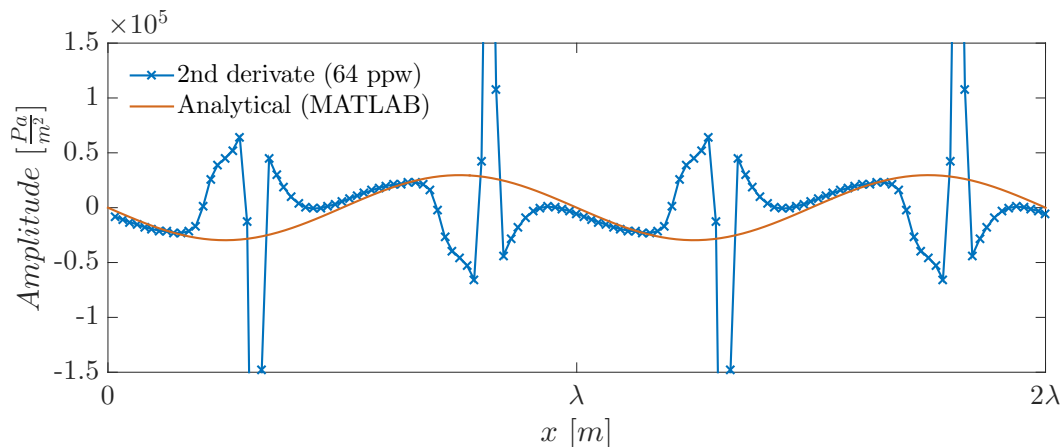
$$\frac{dp'}{dx}\Big|_j = \frac{p'_{j+1} - p'_{j-1}}{2h} \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2p'}{dx^2}\Big|_j = \frac{p'_{j+1} - 2p'_j + p'_{j-1}}{h^2} \quad (4.10)$$

und werden anschließend geplottet (Abbildung (4.4)). Aus der zweiten Ableitung des Druck-



(a) Erste Ableitung des Druckverlaufs p'

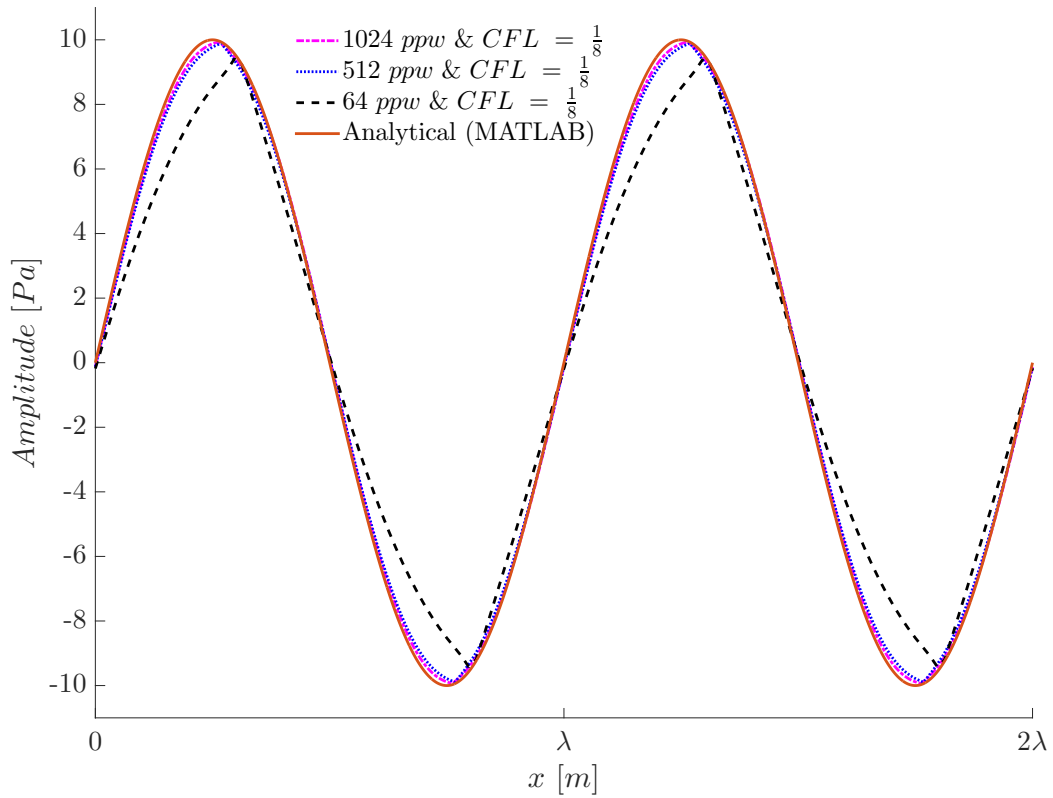


(b) Zweite Ableitung des Druckverlaufs p'

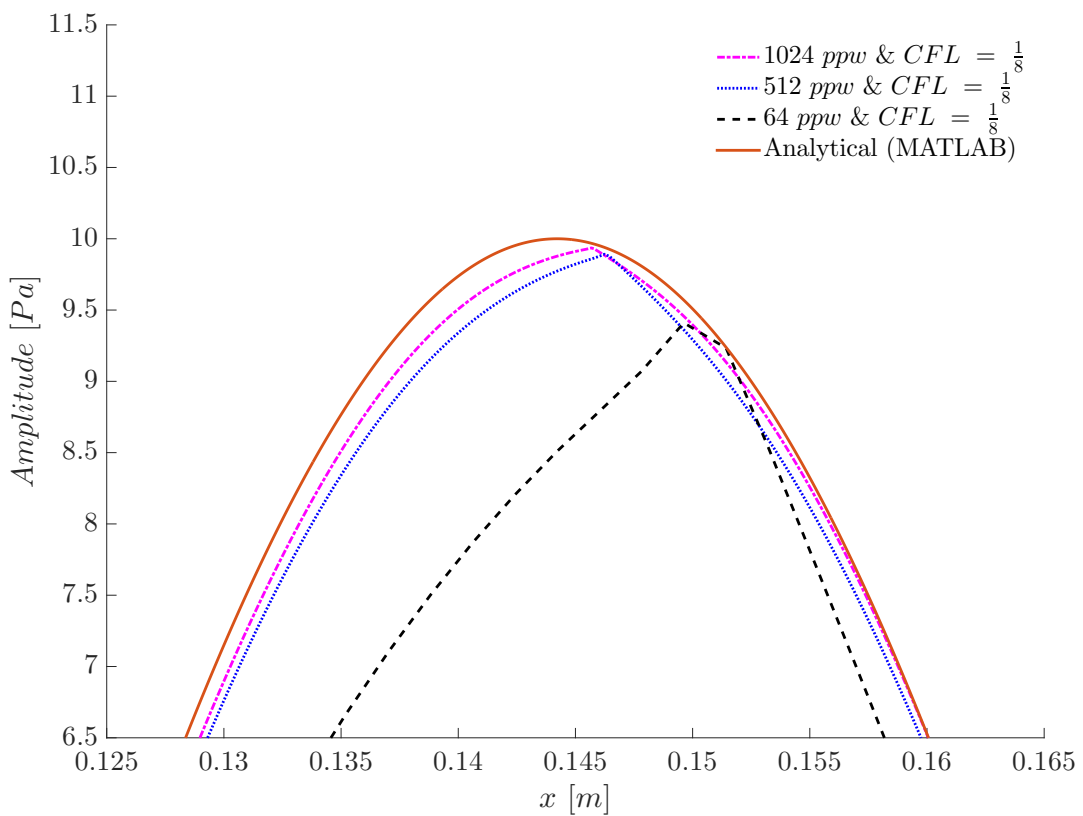
Abbildung 4.4.: Darstellung der ersten beiden Ableitungen des Druckverlaufs p' aus den diskreten Werten aus ANSYS CFX sowie die analytischen Lösungen hierfür

verlaufs p' ist ersichtlich, dass die numerische Lösung eine Art „Oberschwingung“ im Bereich der Maxima erzeugt, da die Krümmung hier mehrere unphysikalische Nulldurchgänge aufweist.

Wie auch am Beispiel des Wellenpakets in Abbildung (A.3) ist bei einer Erhöhung der räumlichen Auflösung bei sehr kleiner CFL -Zahl eine Annäherung der numerischen Lösung an die analytische zu erkennen. Es handelt sich hierbei jedoch um vollkommen unpraktikabel hohe räumliche Auflösungen N_λ einer Wellenlänge λ . Eine fast exakte Annäherung des Simulationsergebnisses an die analytische Kurve ist trotz des kleinen Raumschritts h nicht möglich. Besonders auffällig ist der in Bild (4.5) gezeigte Detailverlauf im Bereich des Amplitudenmaximums. Unabhängig von der räumlichen Auflösung zeigen alle Kurven die Entstehung eines „Knicks“, d.h. einer Unstetigkeit in der ersten Ableitung (Gleichungen (4.7), (4.9) und Abbil-



(a) Effekt der Erhöhung der räumlichen Auflösung der periodischen Welle bei $CFL = \frac{1}{8}$ Gesamtansicht



(b) Effekt der Erhöhung der räumlichen Auflösung der periodischen Welle bei $CFL = \frac{1}{8}$ Vergrößerung

Abbildung 4.5.: Effekt der Erhöhung der räumlichen Auflösung der periodischen Welle bei $CFL = \frac{1}{8}$

dung (4.4)), in der ansonsten glatten Lösung an.

Euler-Rückwärts 2. Ordnung Nun soll ein Zeitdiskretisierungsverfahren höherer Ordnung verwendet werden ($\mathcal{O}(\tau^2)$), um dessen Einfluss auf die Simulation der Propagation der Welle zu untersuchen. Es werden Plots unterschiedlich hoher räumlicher Auflösung N_λ sowie den *CFL*-Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{32}$ betrachtet und in einer zeitlichen Abfolge dargestellt, um den Verlauf des Anwachsens sowie der Bildung von Unstetigkeiten der Wellen betrachten zu können. Die Anfangsdruckamplitude beträgt $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$.

Um die Lösung dieser Diskretisierung veranschaulichen zu können, sind zwei komplett dargestellte Plots zu den Zeitpunkten $T = 0.781 T_0$ und $T = 3.12 T_0$ zu finden (Abbildung (4.6)). Aus den Plots sind jeweils die lokalen Maxima der Wellen vergrößert dargestellt (Abbildung (4.7)).

Je kleiner die Wahl der *Courant*-Zahl ausfällt, desto stärker kann der unphysikalische Effekt der Deformation der Welle beobachtet werden. Die niedrigere räumliche Auflösung der Welle N_λ von 64 *ppw* verstärkt hierbei zusätzlich das Anwachsen der Amplitude gegenüber $N_\lambda = 512 \text{ ppw}$. Eine ausgeprägtere qualitative Verformung an den Extrema der periodischen Welle erfolgt jedoch bei einem N_λ von 512 *ppw*.

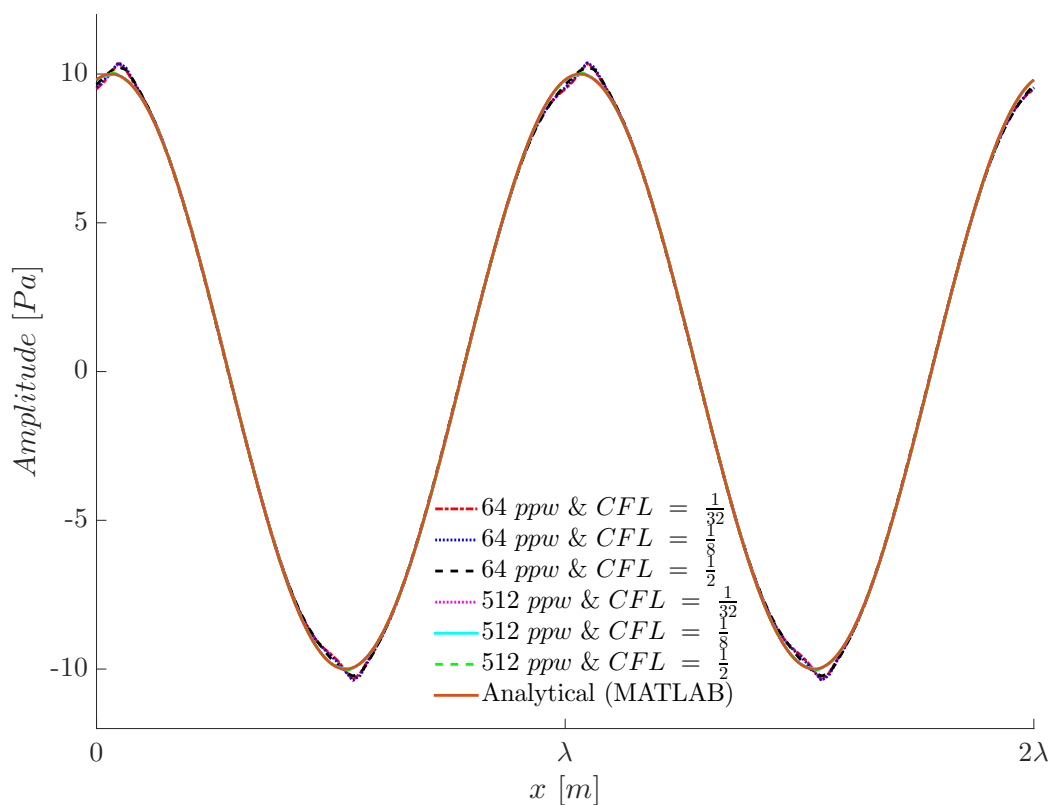
Die Ursache des unphysikalischen Effekts der Deformation der Welle liegt in der Rhee-Chow-Kopplung, der bereits in Stuhlpfarrer [19] für kleine akustische *CFL* beschrieben wird. Stuhlpfarrers [19] Diplomarbeit wurde erst nach Abschluss der in dieser Arbeit detailliert durchgeführten Untersuchungen zum Zeitschritteinfluss bekannt.

4.1.2.2. Wellenpaket

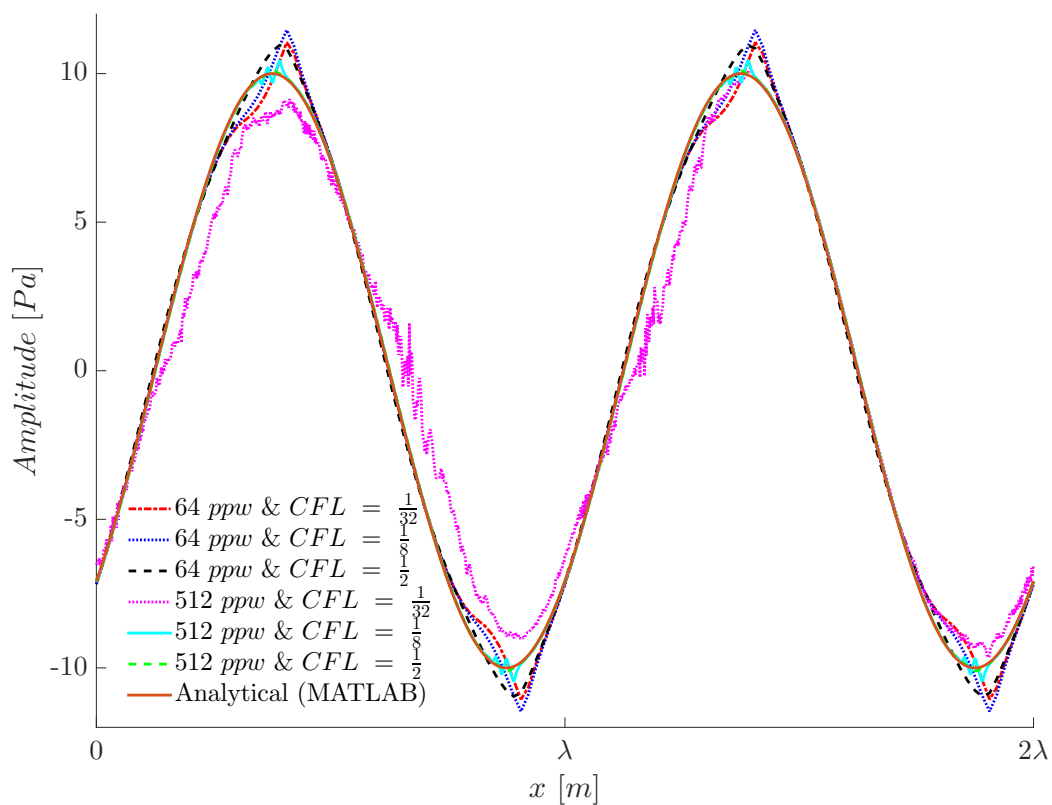
Euler-Rückwärts 1. Ordnung Auch hier wird identisch zu den Rechnungen der periodischen Welle mit einer räumlichen Auflösung von 64 Punkten pro Wellenlänge und einer *Courant*-Zahl von $\frac{1}{32}$ sowie den Anfangsdruckamplituden von $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$ bzw. $\hat{p} = 0.1 \text{ Pa}$ gearbeitet, um die Vergleichbarkeit beider Ansätze zu gewährleisten. Nach der Zeit $t = T_\Sigma$ werden Ergebnisse mit den wie in Kapitel (4.1.2.1) beobachteten Deformationen der lokalen Maxima erzeugt (siehe Abbildungen (A.1) und (A.2)).

Abschließend wird wiederum ein Vergleich unterschiedlicher Auflösungen einer Wellenlänge mit 64 und 512 Gitterpunkten bei sonst gleichen Bedingungen und einer *CFL*-Zahl von $\frac{1}{8}$ durchgeführt, um eine darstellbare Lösung ohne unbegrenztes Anwachsen des Signalverlaufs zu generieren (Abbildung (A.3)).

Euler-Rückwärts 2. Ordnung Mit der Erhöhung der Genauigkeit der Zeitdiskretisierung ändert sich das Verhalten nicht grundsätzlich. Wie bereits am Fall der periodischen Welle als Anfangslösung in Abschnitt (4.1.2.1) gezeigt, wird auch hier für kleine Zeitschritte τ eine Verschlechterung der Lösungsqualität bis hin zum Instabilwerden beobachtet.



(a) Zeitschritt $T = 0.781 T_0$



(b) Zeitschritt $T = 3.12 T_0$

Abbildung 4.6.: Lösungen der Diskretisierung Euler-Rückwärts 2. Ordnung zu verschiedenen Zeitpunkten T

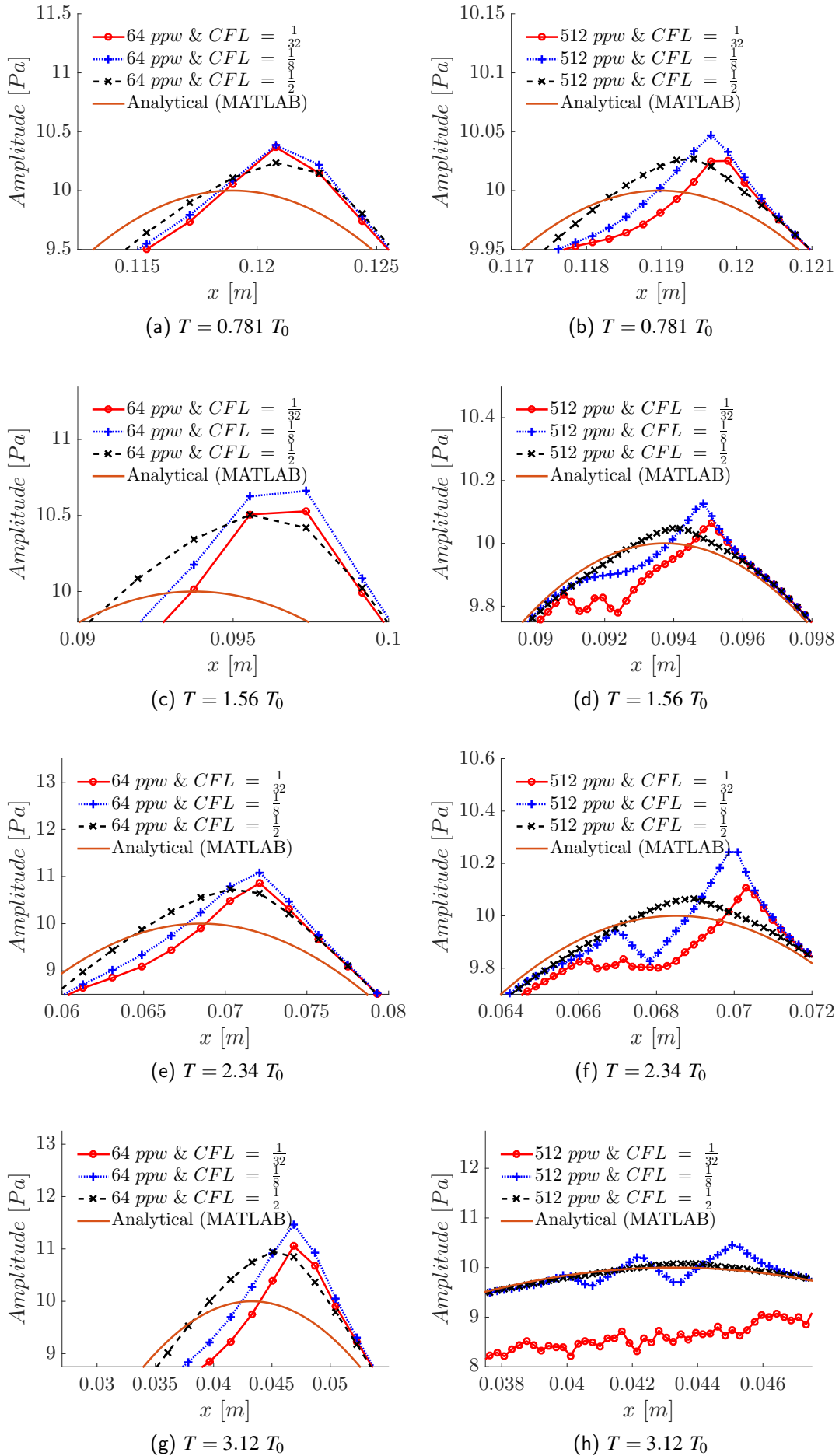


Abbildung 4.7.: Zeitlicher Verlauf der Amplitudendeformation der Diskretisierung Euler-Rückwärts 2. Ordnung 39

4.1.3. Grenzfall 2: Semi-diskret im Raum

Untersucht werden soll nun, ob eine Simulation mit großer CFL -Zahl im Grenzfall einer hohen räumlichen Auflösung, d.h. $\lambda \gg h$ und dementsprechend großem Zeitschritt τ gegenüber der Raumschrittweite h eine sich durch Variation der Zeitschrittgröße τ verändernde Lösung ergibt. Das Ergebnis soll sich im Idealfall mit entkoppelten Dahlquist-Gleichungen und deren Verstärkungsfaktoren für die jeweiligen zeitlichen Diskretisierungsmethoden interpretieren lassen.

Die Simulationen werden nur im periodischen Rechengebiet durchgeführt, da bereits aus „Grenzfall 1“ (siehe(4.1.2)) ersichtlich ist, dass auch beim Wellenpaket die selben Effekte auftreten und daher keine Fehler in ANSYS CFX bei der Verknüpfung der beiden periodischen Ränder erfolgen.

Euler-Rückwärts 1. Ordnung In Abbildung (4.8) sind die Druckverläufe am Monitor-Punkt am „Einlass“ - d.h. dem linken Rand in der yz -Fläche - für die *Courant*-Zahlen 5, 3 und 1 mit einer räumlichen Auflösung N_λ von 1024 Punkten pro Wellenlänge zu finden. Außerdem sind die Einhüllenden der Druckamplituden, berechnet über die Beträge der Verstärkungsfaktoren der Dahlquist-Testgleichung (Gleichungen (2.35) und (2.36)) zusätzlich in rot dargestellt. Diese ergeben sich zu:

$$|\sigma_{BDF1}(CFL = 5)| \approx 0.99953, \quad (4.11)$$

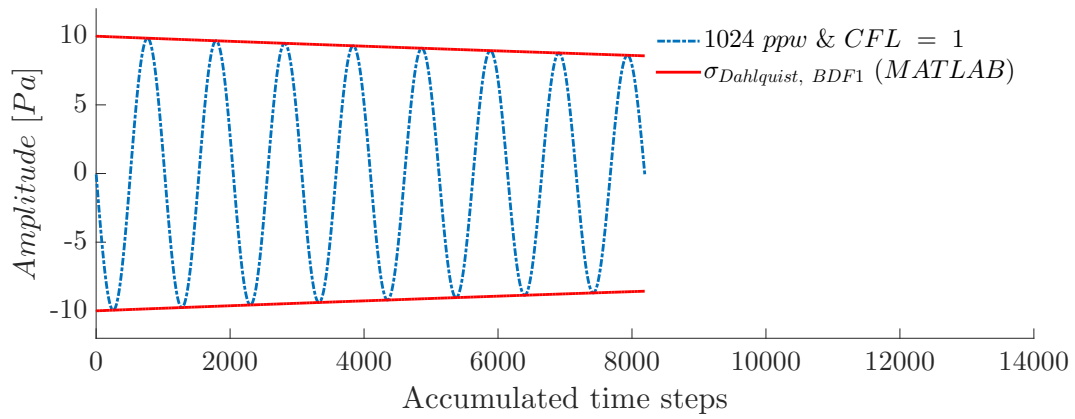
$$|\sigma_{BDF1}(CFL = 3)| \approx 0.99983, \quad (4.12)$$

$$|\sigma_{BDF1}(CFL = 1)| \approx 0.99998. \quad (4.13)$$

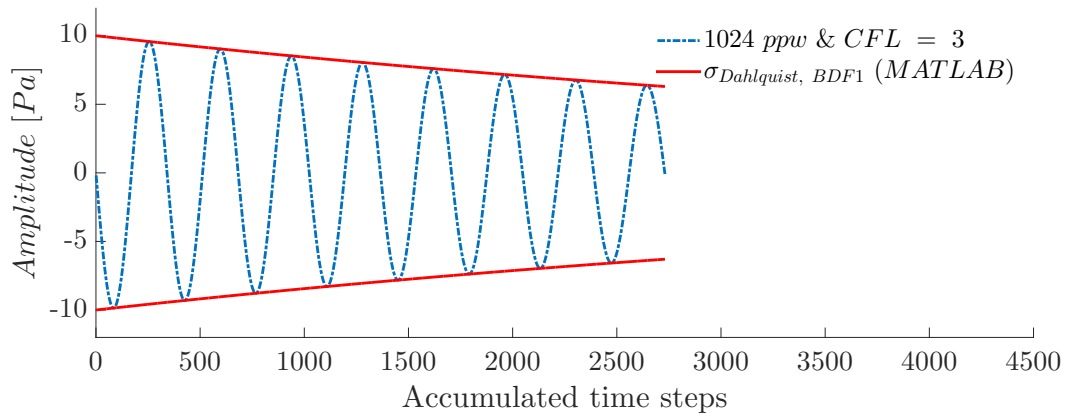
Die Gleichung für die Einhüllenden lautet damit:

$$f(N_T) = \hat{p} [\sigma_{BDF1}(CFL)]^{N_T} \quad (4.14)$$

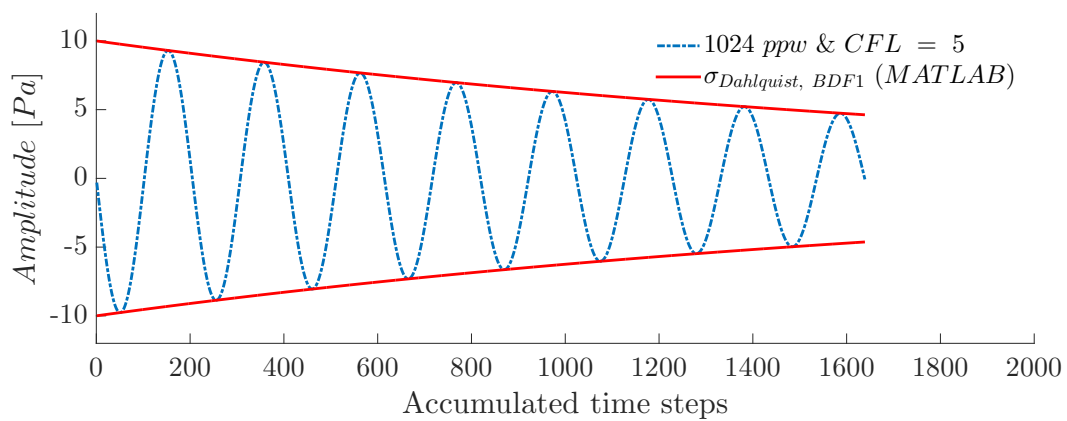
mit $\hat{p} = 10$ Pa.



(a) 1024ppw & CFL = 1



(b) 1024ppw & CFL = 3



(c) 1024ppw & CFL = 5

Abbildung 4.8.: Verlauf der Druckamplituden am Einlass des periodischen Rechengebiets und Dahlquist-Einhüllende

Darüber hinaus folgen Vergrößerungen der letzten Zeitschritte N_T der vorhergehenden Plots, um die genauen Abweichungen der numerischen Lösung aus ANSYS CFX von den Verläufen der Dahlquist-Einhüllenden besser erkennen zu können (siehe Abbildung (4.9)).

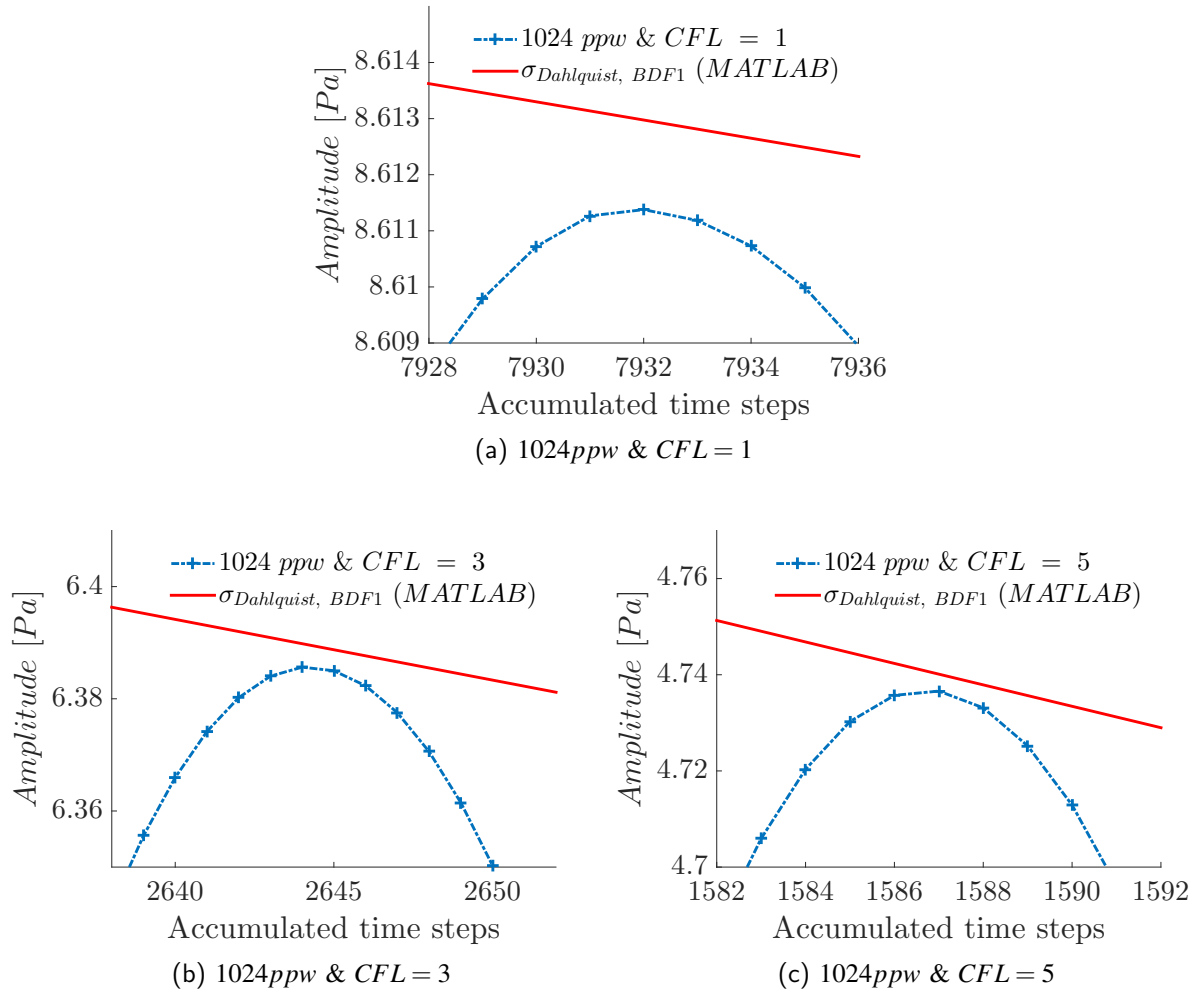


Abbildung 4.9.: Verlauf der Druckamplituden und Dahlquist-Einhüllende für Euler-Rückwärts 1. Ordnung: Vergrößerungen der jeweils letzten Zeitschritte N_T

Euler-Rückwärts 2. Ordnung Ebenfalls sind hier Vergrößerungen der Aufnahmen der Druckverläufe am Monitor-Punkt am linken Rand in der yz -Fläche für die *Courant*-Zahlen 5, 3 und 1 mit einer räumlichen Auflösung von 1024 Punkten pro Wellenlänge dargestellt (siehe Abbildung (4.10)). Eine komplette Abbildung der Amplitudenverläufe der Druckverteilung p' im Ort ist hier nicht nötig, da die Veränderung der Amplitude gegenüber der Startlösung auf solchen Plots optisch nicht mehr ersichtlich ist. Auch die Einhüllenden der Druckamplituden, wiederum berechnet über die Beträge der Verstärkungsfaktoren der Dahlquist-Testgleichung (Gleichung (2.38)), sind abgebildet und besitzen nachstehende Werte:

$$|\sigma_{1, BDF2}(CFL = 5)| \approx 0.999999779037280 \quad (4.15)$$

$$|\sigma_{1, BDF2}(CFL = 3)| \approx 0.999999971320146 \quad (4.16)$$

$$|\sigma_{1, BDF2}(CFL = 1)| \approx 0.999999999645661 \quad (4.17)$$

Die Gleichung für die Einhüllenden lautet ähnlich zu Rückwärts-Euler erster Ordnung:

$$f(N_T) = \hat{p} [\sigma_{1, BDF2}(CFL)]^{N_T}, \quad (4.18)$$

wobei $\hat{p} = 10$ Pa.

Klar ersichtlich ist, dass die höherwertige Zeitdiskretisierung durch Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$

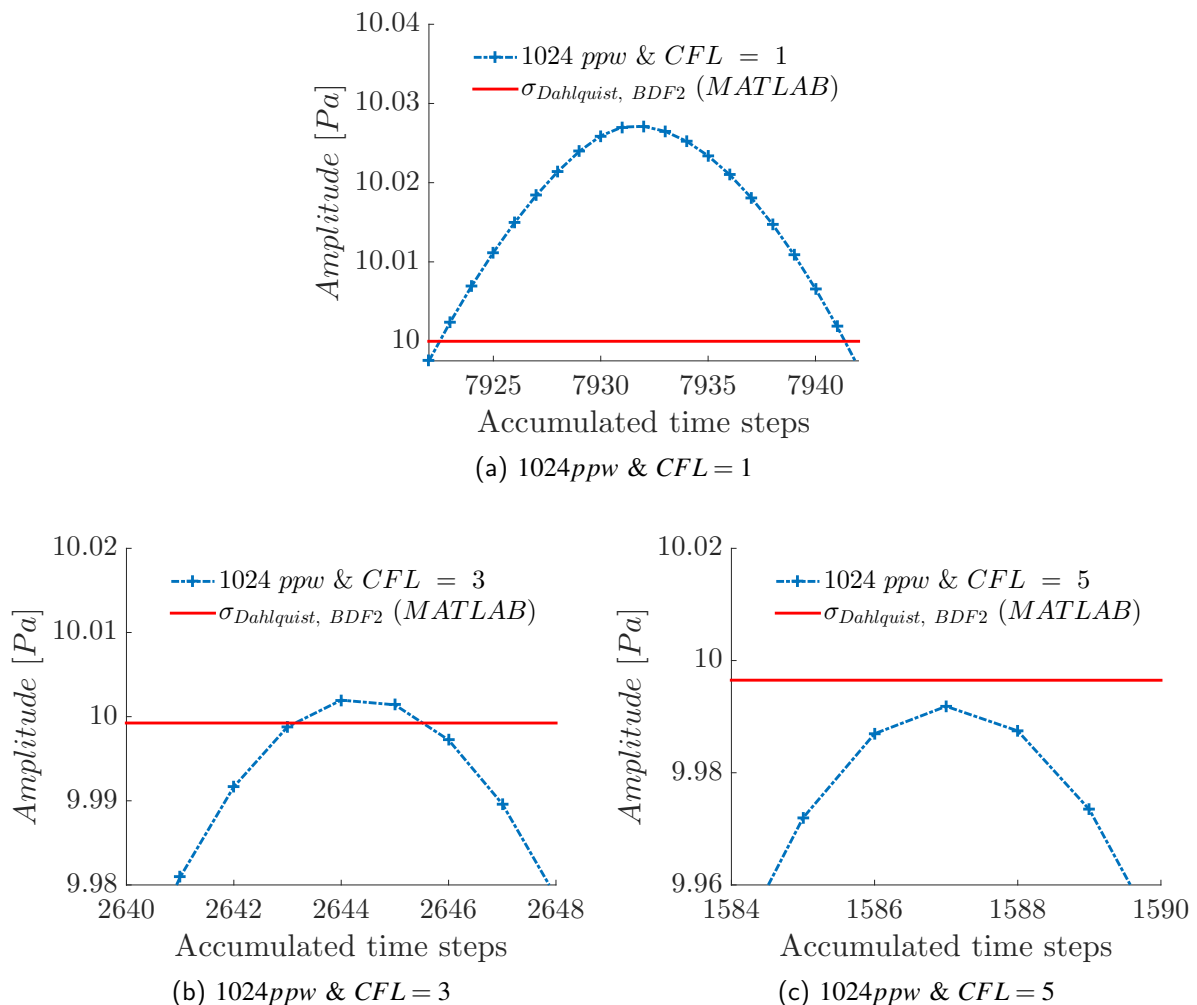


Abbildung 4.10.: Verlauf der Druckamplituden und Dahlquist-Einhüllende bei Euler-Rückwärts 2. Ordnung: Vergrößerung der jeweils letzten Zeitschritte N_T

den Amplitudenfehler gegenüber Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$ signifikant reduziert. Allerdings ist die theoretische Beschreibung des Amplitudenfehler bei dieser höherwertigen Zeitdiskretisierung nicht mehr möglich, da statt einer Amplitudenabnahme eine Amplitudenzunahme bei $CFL \leq 3$ auftritt. Möglicherweise dominiert hierbei bereits wieder die Raumdiskretisierung das Verhalten des Fehlers der Lösung oder Rundungsfehler machen sich durch den sehr kleinen berechneten Amplitudenfehler pro Zeitschritt N_T bemerkbar.

Die mit der Diskretisierungsmethode „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^1)$ gewonnenen Ergebnisse lassen sich mit der zu Grunde liegenden Theorie der Dahlquist-Gleichungen annähernd gut beschreiben. Für „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^2)$ tritt jedoch ein unerwartetes Anwachsen der Amplitude auf. Unstetigkeiten an den Maxima der Signalverläufe, die im Grenzfall der räumlichen Diskretisierung in Abschnitt (4.1.2) bei kleinen *CFL*-Zahlen entstehen, können hier jedoch nicht beobachtet werden.

4.1.4. Zusammenfassung beider Grenzfälle

Bei der Simulation der Ausbreitung von Schallwellen in einem ruhenden Medium stellt sich in ANSYS CFX folgendes unerwartetes, durch die Rhie-Chow-Kopplung (Kapitel (4.1.2.1)) ausgelöstes Verhalten ein:

Ein semi-diskreter Grenzfall der Form (siehe Gleichung (2.21))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{D_h u}{Dh} = 0 \quad (4.19)$$

lässt sich *nicht* erzeugen. Bei kleinen CFL -Zahlen, d.h. $CFL < 1$, beginnt sich der Signalverlauf der Druckverteilung p' der Lösung aus ANSYS CFX unphysikalisch an den lokalen Maxima zu deformieren. Auch Unstetigkeiten in den Signalverläufen und ein unbeschränktes Wachstum der Amplituden kann beobachtet werden. Bei der höherwertigen Zeitdiskretisierung „Euler-Rückwärts“ $\mathcal{O}(\tau^2)$ treten diese Effekte sogar deutlicher und bereits zu früheren Zeitschritten T im Vergleich zu „Rückwärts-Euler“ $\mathcal{O}(\tau^1)$ auf. Der Einfluss der zeitlichen Diskretisierung auf den Verlauf der Lösung ist demnach signifikant.

Dagegen verhält sich das andere semi-diskrete Extrem (siehe Gleichung (2.29))

$$\frac{D_\tau u}{D\tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

bei dem nur der Fehler der Zeitdiskretisierung betrachtet wird, entsprechend dem Fehler aus der Zeitdiskretisierung „Rückwärts-Euler“ $\mathcal{O}(\tau^1)$ und lässt sich hierfür mittels der Theorie der Dahlquist-Gleichungen (Absatz (2.2.2)) beschreiben. Jedoch kann im Falle der zeitlichen Diskretisierung „Rückwärts-Euler“ $\mathcal{O}(\tau^2)$ das in Kapitel (4.1.3) beobachtete Anwachsen der Amplitude über den vorgegebenen Anfangswert von $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$ nach der Gesamtsimulationszeit T_Σ nicht erklärt werden. Unstetigkeiten können allerdings in den Lösungskurven in diesem Grenzfall der „analytischen“ räumlichen Auflösung bei beiden Ordnungen der Zeitdiskretisierung nicht beobachtet werden.

Da sich also bei kleiner werdenden *Courant*-Zahlen ein Anwachsen der Lösung ergibt, allerdings bei großen Zeitschrittweiten τ im Vergleich zur räumlichen Gitterweite h eine die analytische Lösung sehr genau approximierende Wellenpropagation darstellbar ist, soll nun eine Auflistung der Amplituden- sowie Phasenfehler ε'_λ nach der normierten Ausbreitungsdistanz $\Delta x = \lambda$ von verschiedenen Simulationen aus ANSYS CFX erfolgen. Die CFL -Zahl variiert hierbei von $\frac{1}{32}$ bis zu 5 bei räumlichen Auflösungen von jeweils 16 bis zu 1024 Gitterpunkten pro Wellenlänge. Betrachtet werden die drei Diskretisierungsverfahren Euler-Rückwärts 1. sowie 2. Ordnung und Euler-Rückwärts 2. Ordnung mit explizit erwähnter Zentraler Differenz 2. Ordnung.

Die Ergebnisse sind in Tabelle (4.1) sowie Abbildung (4.11) zu finden, eine Vergrößerung dieser Plots enthält Abbildung (4.12). Der Amplitudenfehler wird gemäß Gleichung (2.53) berechnet. Ein positiver Wert des Phasenversatzes bedeutet, dass die Welle laut Berechnung schneller als mit der Schallgeschwindigkeit c_0 propagiert, wobei 100% einem Phasenversatz von $\pi = \frac{1}{2}\lambda$

entsprechen.

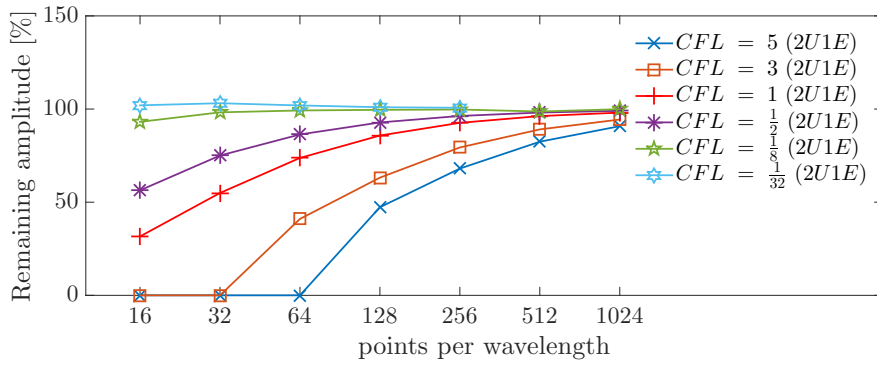
Bei der Diskretisierung der konvektiven Terme spielt dessen Art, ob „Upwind“ 2. Ordnung oder „Zentrale Differenz“ 2. Ordnung, tatsächlich keine Rolle. Dies wurde bereits in Abschnitt (2.1.3) theoretisch erläutert. Auch die Ergebnisse der inkompressiblen Rechnungen mit der linearen Advektionsgleichung und passivem Skalar aus Kapitel (3.2) bestätigen, dass sich die Berechnung des Druckgradienten in ANSYS CFX auf die unerwarteten Signalverläufe der Lösung auswirkt. Ein Anwachsen der Amplitude bzw. Unstetigkeiten der Ableitungen oder Deformationen der Lösungskurven können bei der numerischen Lösung der linearen Advektionsgleichung nämlich nicht beobachtet werden.

Aus den Ergebnissen dieser Zusammenfassung wird deutlich, dass der geringste Fehler mit der zeitlichen Diskretisierung „Rückwärts-Euler“ $\mathcal{O}(\tau^2)$ bei einer akzeptablen räumlichen Auflösung N_λ der Welle bei den Parametern $CFL \approx 3$ und einer für die Rechengeschwindigkeit akzeptablen räumlichen Auflösung von $N_\lambda \geq 128$ *ppw* erzeugt wird, um die sich bei kleineren CFL-Zahlen bildenden Unstetigkeiten im Signalverlauf selbst nach dem Ausbreitungsweg von $\Delta x = 8\lambda$ noch nicht beobachten zu können. Die Amplitudenabnahme beträgt hier 4.91% bei einem Phasenversatz von 7.38% nach der Gesamtsimulationszeit T_Σ . Im Vergleich zu Standardverfahren der Computational Aeroacoustic (CAA) nach z.B. Tam [20] oder Berland [7] ist dieser Amplituden- ($0.15 \cdot 10^{-1}\%$) sowie Phasenfehler ($4.6 \cdot 10^{-1}\%$) pro Zeitschritt bei einer derart hohen räumlichen Auflösung der Welle von $N_\lambda = 128$ *ppw* immer noch sehr groß.

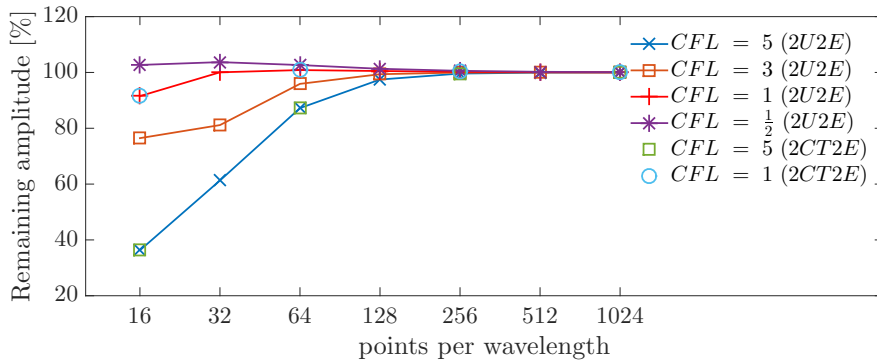
Tabelle 4.1.: Werte des Amplituden- sowie Phasenfehlers ϵ'_λ nach einer normierten Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ bei 1D-Propagation einer ebenen Welle mit unterschiedlichen CFL und räumlichen Auflösungen der Welle

ppw/CFL	Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$						Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$						
	5	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	5	3	1	$\frac{1}{2}$	5	1	
1024	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-9.19	-5.62	-1.91	-0.95	-0.08	inf	-0.01	0.004	0.03	0.11	-0.01	0.03
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	?	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05
512	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-17.53	-10.93	-3.78	-1.88	-1.32	inf	-0.06	0.005	0.10	0.23		
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	0.00	0.06	0.04	0.05	0.06	?	0.00	0.06	0.04	0.05		
256	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-31.95	-20.62	-7.40	-3.71	-0.25	0.67	-0.40	-0.04	0.24	0.58	-0.40	0.24
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	-0.74	-0.20	0.02	0.04	0.05	0.09	-0.72	-0.21	0.01	0.04	-0.72	0.01
128	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-52.71	-36.82	-14.22	-7.19	-0.43	0.98	-2.54	-0.63	0.51	1.31		
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	-3.61	-0.95	-0.08	0.04	0.05	0.03	-3.42	-0.92	-0.14	-0.01		
64	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-100	-58.99	-26.25	-13.64	-0.76	1.93	-12.78	-4.09	0.85	2.65	-12.78	0.85
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	-14.03	-4.96	-0.44	0.03	0.10	0.00	-11.19	-4.60	-0.43	-0.15	-11.19	-0.43
32	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-100	-100	-45.06	-24.95	-1.77	3.13	-38.71	-18.86	0.05	3.70		
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	?	-18.75	-1.81	0.03	0.48	0.28	-31.08	-14.58	-1.86	-0.05		
16	$\epsilon'_{A, \lambda}$ [%]	-100	-100	-68.38	-43.63	-6.87	2.00	-63.72	-23.54	-8.48	2.69	-63.72	-8.48
	$\epsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	?	?	-7.53	-0.31	1.38	1.32	-69.68	-40.07	-6.48	-0.81	-69.68	-6.48

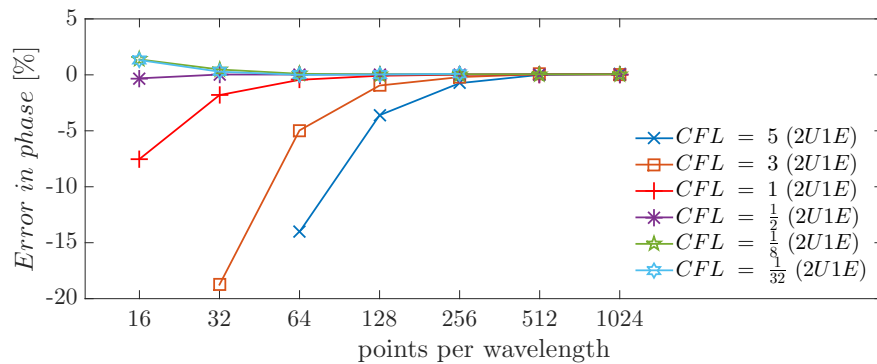
4.1. Simulationen mit eindimensionaler Propagation



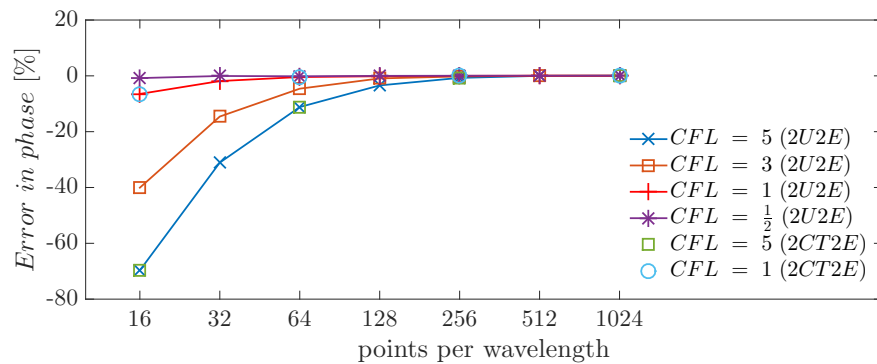
(a) Amplitude Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$



(b) Amplitude Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$

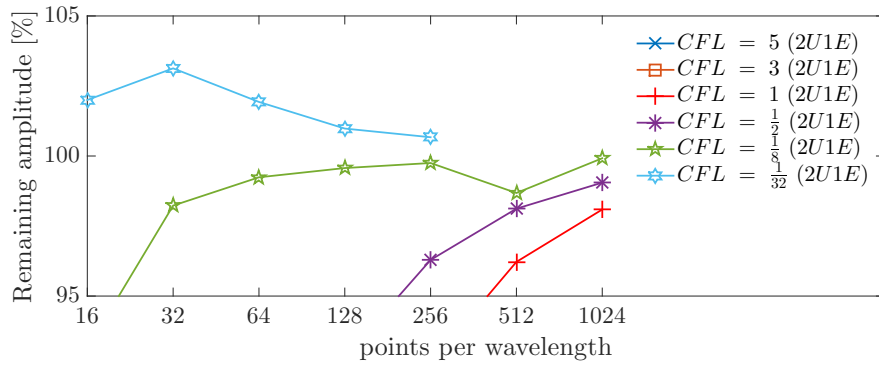


(c) Phase Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$

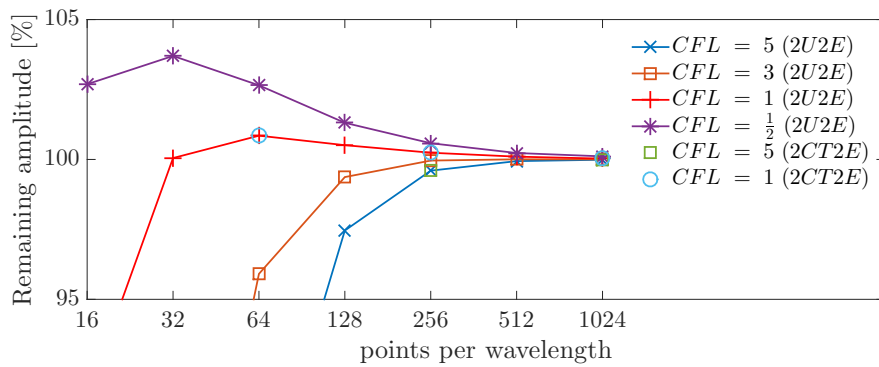


(d) Phase Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$

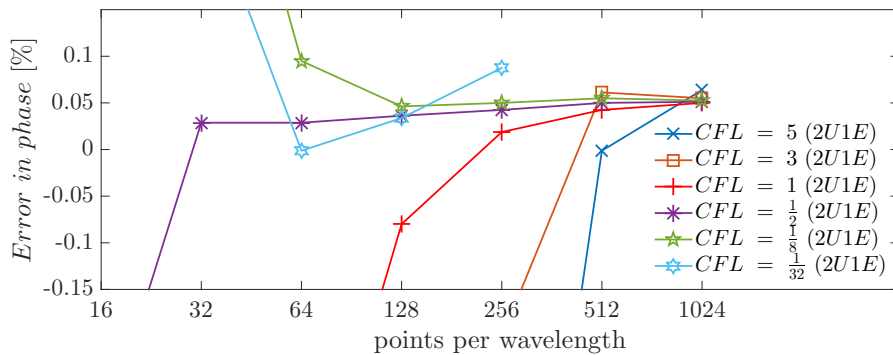
Abbildung 4.11.: Darstellung der Werte der Restamplitude sowie des Phasenversatzes nach einer normierten Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ bei 1D-Propagation einer ebenen Welle mit unterschiedlichen CFL und räumlichen Auflösungen der Welle



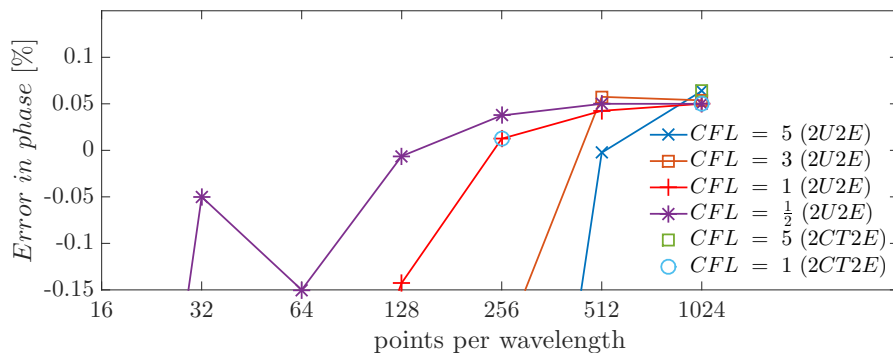
(a) Amplitude Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$



(b) Amplitude Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$



(c) Phase Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^1)$



(d) Phase Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(\tau^2)$ und Zentrale Differenz $\mathcal{O}(h^2)$

Abbildung 4.12.: Vergrößerte Darstellung der Werte der Restamplitude sowie des Phasenversatzes nach einer normierten Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ bei 1D-Propagation einer ebenen Welle mit unterschiedlichen CFL und räumlichen Auflösungen der Welle

4.2. Simulationen mit zweidimensionaler Propagation

In diesem Kapitel sollen nun auch die Auswirkungen einer schräg propagierenden Welle in einem zweidimensionalen, vollperiodischen Rechengebiet, welches in x und y äquidistant vernetzt ist, untersucht werden. Die Tests werden mit den drei Neigungswinkeln $\alpha = 15^\circ$, 30° und 45° der Wellenfront gegenüber der Horizontalen durchgeführt werden. Sämtliche Einstellungen bezüglich der Umgebungsbedingungen oder der Art der Initialisierung des Startfeldes werden aus dem 1D-Testfall der periodisch propagierenden Welle übernommen. Für diese Simulationen werden nur die beiden Konfigurationen $N_\lambda = 64 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ und $N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ ausgewählt, da sich diese im eindimensionalen Testfall als stabil gegenüber anderen Effekten als denen der Propagationsfehler, die hierbei noch akzeptabel ausfallen, erwiesen haben (Tabelle (4.1)). Lediglich die Randbedingung in die y -Richtung wird zusätzlich auf translatorische Periodizität gesetzt.

Die Längen der Rechengebiete in beide Raumrichtungen bestimmen sich gemäß

$$l_{Domain, k} = n_k \frac{c_0}{f \cos \alpha}, \quad (4.21)$$

wobei n_k die Anzahl der in das Gebiet in Raumrichtung k passenden Wellenlängen λ darstellt. Die Anzahl der Gitterknoten in die jeweilige Raumrichtung bestimmt sich gemäß der aus dem 1D-Fall bekannten Formel (2.47).

In Abbildung (4.13) sind die drei unterschiedlichen Testsetups skizziert.

Darstellung (4.14) beinhaltet die Ergebnisse der Fehler in Amplitude und Phase ϵ'_λ der zwei-

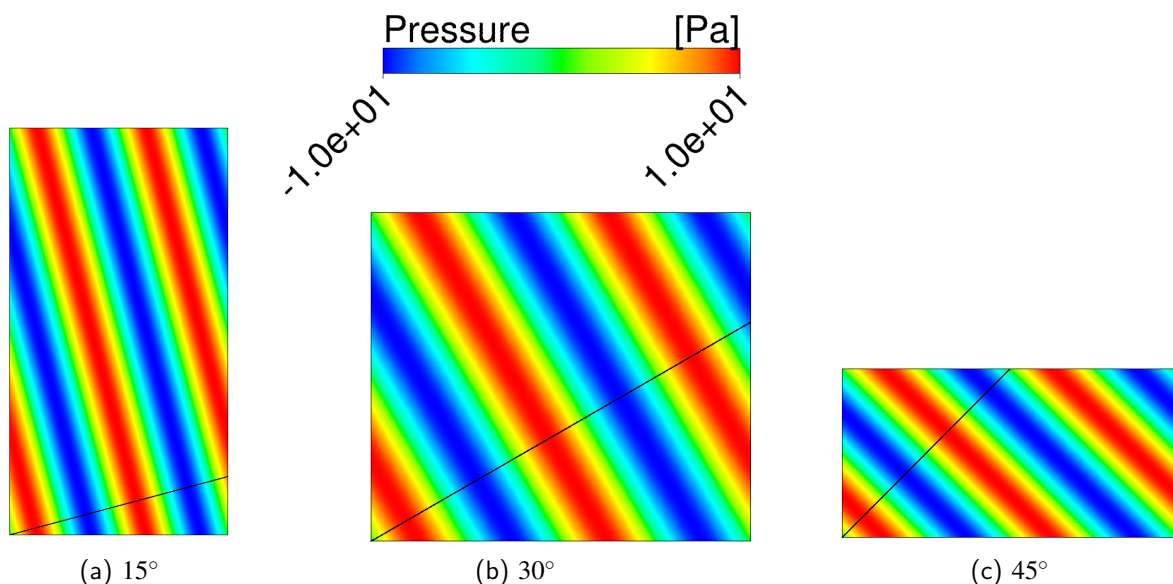


Abbildung 4.13.: Darstellung der Rechengebiete der zweidimensionalen Propagation einer Welle als Anfangswertproblem mit Angabe der Winkel zwischen der Horizontalen und der Richtung der Wellenausbreitung

dimensionalen Wellenpropagation in ANSYS CFX, die nach einer Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ angegeben werden. $\epsilon'_{A, \lambda}$ bezieht sich dabei auf seine Ausgangsamplitude A_0 , $\epsilon'_{Ph, \lambda}$ wird mit der Kreiszahl π normiert. Der Vergleich der Ergebnisse aus 2D findet mit denen unter den selben Simulationseinstellungen der eindimensionalen Wellenpropagation erhaltenen statt. Man erkennt deutlich, dass mit zunehmendem Aufwand der Auflösung der Welle und damit bei stärkerem Neigungswinkel α die Propagationsfehler ϵ' abnehmen und sogar unter die Werte der 1D periodischen Wellenpropagation fallen. Dieses Verhalten ist laut [21] zumindest für den Phasenfehler ϵ'_{Ph} zu erwarten, da für eine gegebene Wellenzahl $|\xi|$ der Fehler in der Phasengeschwindigkeit dann am kleinsten ist, wenn die Welle auf einem äquidistanten Gitter (d.h. $h_x = h_y$) in Richtung $\alpha = 45^\circ$ propagiert.

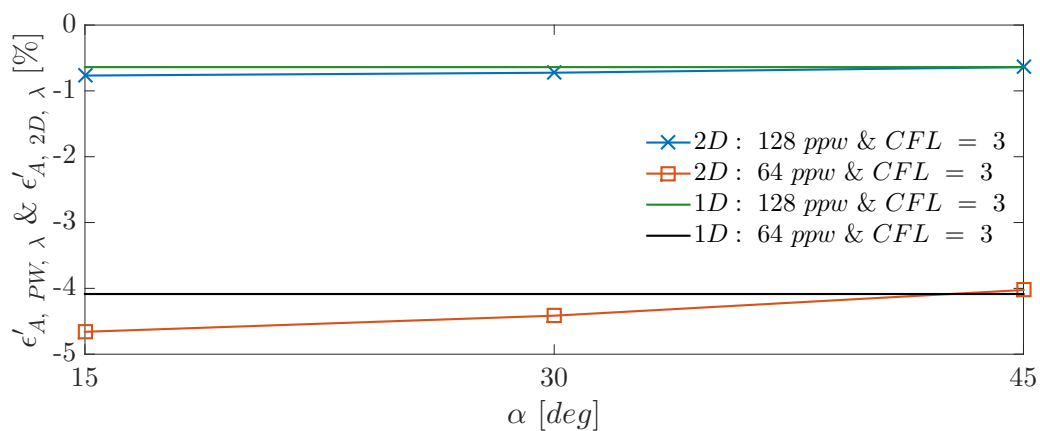
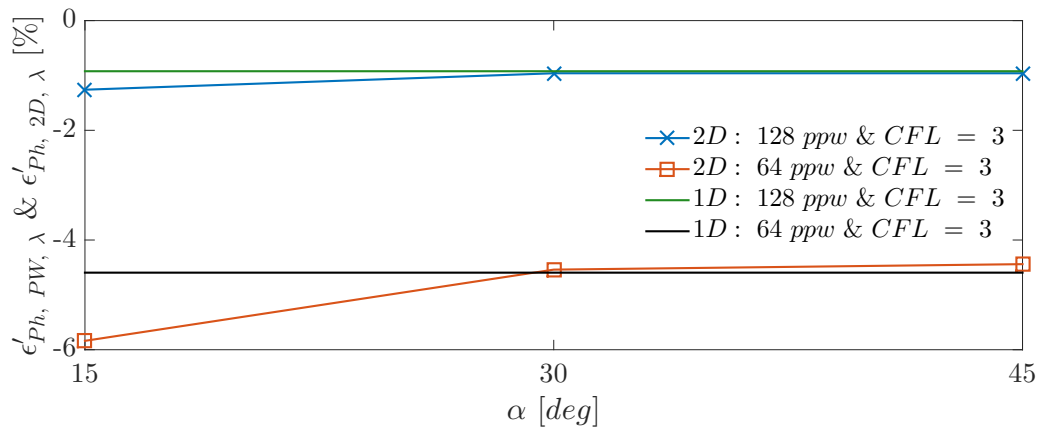
(a) Amplitudenfehler $\epsilon'_{A, \lambda}$ (b) Phasenfehler $\epsilon'_{Ph, \lambda}$

Abbildung 4.14.: Darstellung der Amplituden- und Phasenfehler nach einer Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ in 2D für unterschiedliche Winkel α

5. Wellenpropagation durch Schnittstellen zwischen festen und rotierenden Gittern

In diesem Kapitel sollen die Auswirkungen eines rotierenden Rechengitters, im Folgenden „sliding-mesh“ genannt, auf die Propagation eines Wellenpakets in positive x -Richtung untersucht werden. Hierfür werden die zwei unterschiedlichen Gitterkonstruktionen „Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh interface“ (siehe Skizze (5.1)) sowie ein kompletter 3D-Zylinder mit einem rotierenden Mittelstück (siehe Skizze (5.2)), der speziell für Turbomaschinen relevanter ist, untersucht. Aus den beiden Skizzen (5.1) und (5.2) wird bereits der Hauptunterschied beider Anordnungen deutlich: Im Rechteckgebiet trifft das Wellenpaket auf die Umfangsfläche des rotierenden Rechengebiets auf, beim 3D-Zylinder auf die Grundfläche des rotierenden Mittelabschnitts. Die zum rotierenden Gitter hinführende „O“-Grid-Vernetzung in der Rechteckanordnung ist in der Skizze (5.1) über das Viereck mit Kantenlänge 0.34λ (0.04 m) angedeutet.

Zunächst soll nun die Auswahl eines Testsetups für die Untersuchungen an rotierenden Re-

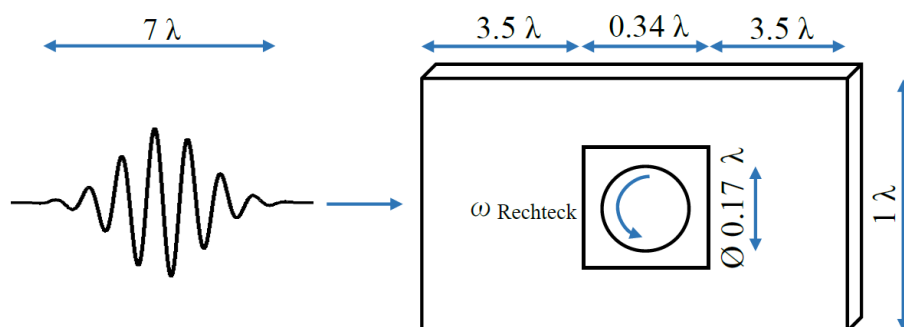


Abbildung 5.1.: Skizze „Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh interface“ mit charakteristischen Abmaßen, $\lambda = 0.12\text{ m}$

chengittern aus den bisher gewonnenen Ergebnissen der letzten Kapitel durchgeführt werden.

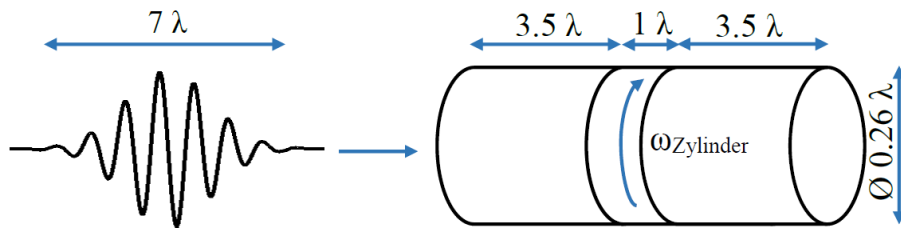


Abbildung 5.2.: Skizze des 3D-Zylinders mit rotierendem Mittelstück mit charakteristischen Abmaßen, $\lambda = 0.12 \text{ m}$

5.1. Auswahl eines Testsetups für die Schnittstellen zu einem rotierenden Rechengebiet

5.1.1. Umrechnungen der Amplituden- und Phasenfehler in Amplituden- und Phasenverhältnisse

Nach der Umrechnung der Amplituden- und Phasenfehler ε'_A bzw. ε'_{ph} der Simulationen des Anfangswertproblems der periodischen Welle über die Simulationszeit von $t = T_0$ aus Abschnitt (4.1.4) auf Amplituden- sowie Phasenverhältnisse δ' erfolgt der Vergleich dieser Werte mit denen der verschiedenen Testsetups in Kapitel (5.1.2). Die Umrechnungen erfolgen mit den Gleichungen aus Kapitel (2.5). Mit diesen Ergebnissen soll anschließend eine optimale Testeinstellung für das Problem des sliding-mesh interfaces gefunden werden.

5.1.2. Testsetups und deren Eigenschaften

Beschrieben werden nun eine „Forcing Sponge“- sowie eine „Druckgradienten“-Methode, um eine propagierende Welle in einem bestimmten Anregungsbereich innerhalb eines begrenzten Rechengebiets zu erzeugen. Damit soll ein von der Initialisierung unabhängiges Setup geschaffen werden, mit dem die eingeschwungene Lösung für eine harmonische Welle gerechnet werden kann, bei der keine periodischen Randbedingungen mehr verwendet werden können. Auch die Initialisierung eines Wellenpakets als Anfangswertproblem der Domain soll hinsichtlich auftretender zusätzlicher Fehler neben den bei der Propagation entstehenden und in Kapitel (4.1) ausgearbeiteten untersucht werden.

Bei diesen Simulationen werden jeweils nur die zwei unterschiedlichen Konfigurationen $N_\lambda = 32 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 1$ und $N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ bei den Diskretisierungen Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$ betrachtet, da sich diese in den Simulationen der 1D-Propagation der periodischen Welle als brauchbar hinsichtlich der erzeugten Fehler in Amplitude und Phase nach einer festgelegten Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = 8\lambda$ (siehe Tabelle (4.1)) erwiesen haben.

Die Simulationen werden gestoppt, sobald die Wellenfronten das linke oder rechte Ende in x -Richtung der Rechengebiete erreichen, um keine Reflexionen an den Rändern zuzulassen.

5.1.2.1. Vergleich unterschiedlicher Anregungs-Methoden einer propagierenden Welle zur 1D periodischen Wellenpropagation

Das Rechengebiet besitzt jeweils eine Länge von insgesamt 20λ (2.31 m) in x -Richtung bei einer y -Höhe von 1λ (0.12 m) und einer Tiefe in z von 0.09λ (0.01 m). In der Mitte des Rechengebiets, d.h. von der x -Koordinate 9λ (1.04 m) bis 11λ (1.27 m), erfolgt die Anregung der periodischen Welle über Volumenkräfte (Abbildung (5.3)).

Sämtliche Einstellungen bezüglich Randbedingungen oder den Umgebungsgrößen im Rechengebiet werden aus den Rechnungen mit 1D-Propagation aus Abschnitt (4.1.1) übernommen.

Forcing Sponge-Methode In der Forcing-Zone wird die x -Komponente u der Schallschnelle \underline{u} über den Quellterm S_x [3] in der x -Impulsbilanz als reine Volumenkraft

$$S_x = -C[u - \hat{u} \cos(\omega t - |\underline{\xi}| x)] \quad (5.1)$$

mit $C = 1e^5 \left[\frac{kg}{m^3s} \right]$ und $\hat{u} = \frac{10 Pa}{\rho_0 c_0}$ festgelegt.

In Abbildung (5.3) sind die Signalverläufe der Druckverteilung zum letzten Zeitpunkt der jeweiligen Rechnungen $t = T_{\Sigma}$ und damit nach einer Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = 8\lambda$ dargestellt, um Reflexionen durch die Ränder des Rechengebiets auszuschließen. Gekennzeichnet sind die Forcing-Zonen zwischen den Stellen $x = 9\lambda$ und $x = 11\lambda$ sowie die Wellenpeaks Nummer 1, 2 und 3, welche in dieser Reihenfolge durch Propagation in positive x -Richtung die Anregungszone verlassen haben. Bei der Konfiguration $N_{\lambda} = 32 ppw$ & $CFL = 1$ beginnen sich die lokalen Maxima des Druckverlaufs bereits leicht zu deformieren wie bereits in Abschnitt (4.1.2) beschrieben und die Amplitude unphysikalisch über den direkt nach Verlassen der Forcingzone erreichten Wert von 10 Pa anzuwachsen.

Druckgradienten-Methode Die Schallschnelle u kann alternativ vorgegeben werden über die Volumenkraft

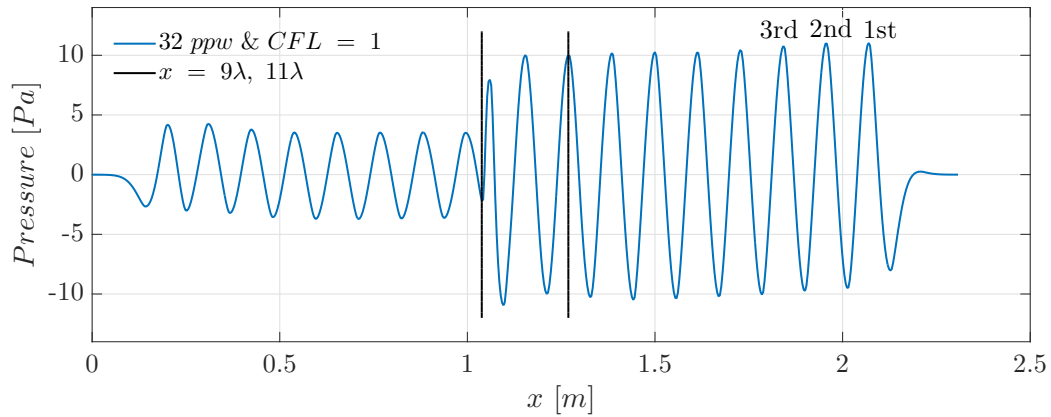
$$S_x = \rho_0 \omega \hat{u} \cos(\omega t - |\underline{\xi}| x), \quad (5.2)$$

als rechte Seite der linearisierten Euler-Gleichung (2.8), nämlich dem negativen zeitlichen Druckgradienten $-\frac{\partial p}{\partial t}$ mit der Druckverteilung

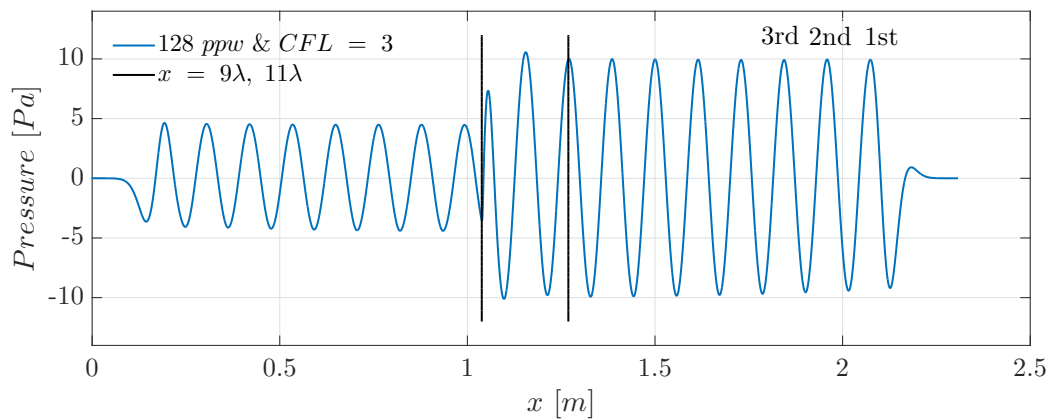
$$p = \hat{p} \cos(\omega t - |\underline{\xi}| x) \quad (5.3)$$

und $\hat{u} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0}$ [16]. Der Phasenversatz zwischen sin- und cos-Funktion soll hierbei unberücksichtigt bleiben.

Da sich der Signalverlauf der Lösung bei der Konfiguration $N_{\lambda} = 32 ppw$ & $CFL = 1$ bei beiden Forcing-Methoden bereits unphysikalisch verhält, unterliegen auch die Amplituden- und Phasenverhältnisse δ'_A bzw. δ'_{Ph} zwischen den einzelnen Wellenbergen Schwankungen (siehe Abbildung (5.4)).



(a) 32ppw & CFL = 1



(b) 128ppw & CFL = 3

Abbildung 5.3.: Druckverlauf im Rechengebiet erzeugt mit der Forcing-Sponge-Methode, Anregungszone und jeweilige Nummern der Wellenpeaks gekennzeichnet

Konstante Fehlerverhältnisse im kompletten Wellenzug, d.h. unabhängig von erstem, zweitem oder drittem Wellenpeak, ergeben sich nur bei der Wellenanregung mit den Einstellungen $N_\lambda = 128 \text{ ppw}$ & $CFL = 3$ und der Forcing-Sponge-Methode. Die hierbei berechneten Fehlerwerte bezogen auf einen Zeitschritt liegen bis auf eine maximale Abweichung von 0.25% in der Phase pro Zeitschritt nahe bei den Werten der eindimensionalen Propagation der periodischen Welle und fluktuieren dabei nicht (Abbildung (5.4)).

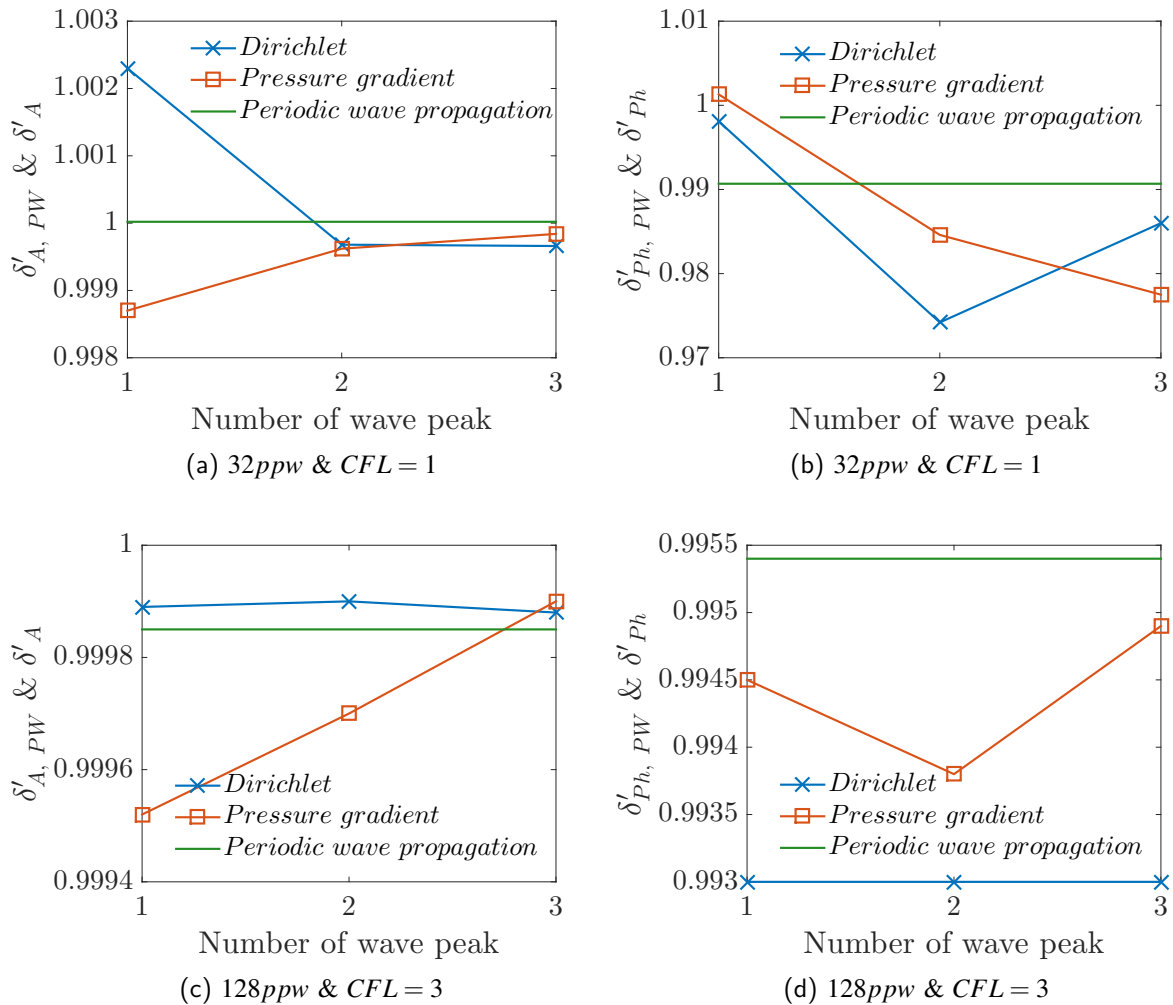


Abbildung 5.4.: Amplituden- und Phasenverhältnisse δ'_A bzw. δ'_{Ph} der 1D periodischen Welle nach der Gesamtsimulationszeit von $t = T_\Sigma$ im Vergleich zu den Forcing-Methoden „Forcing-Sponge“ und „Druckgradient“ über den ersten drei Wellenpeaks

5.1.2.2. Vergleich einer Anfangswertinitialisierung eines Wellenpakets zur 1D periodischen Wellenpropagation

In diesem Abschnitt sollen die bei der Propagation eines Wellenpakets entstehenden Fehler, welches wie bereits in Kapitel (4.1.1.2) beschrieben in der Domain über seine Druck- und

Schnelleverteilung p' bzw. u' zum Zeitpunkt $t = 0$ initialisiert wird, mit denen der eindimensionalen, periodischen Welle (Abschnitt (4.1)) verglichen werden. Erwartungsgemäß stellen sich hierbei nahezu exakt die selben Amplituden- und Phasenfehler pro berechnetem Zeitschritt ein. In Tabelle (5.1) sind die einzelnen Fehlerwerte aufgelistet, dabei entsprechen die Symbole δ' den Fehlern pro Zeitschritt sowie ε'_λ den Fehlern nach einer normierten Ausbreitungsdistanz von einer Wellenlänge, $\Delta x = \lambda$; dabei ist der Amplitudenfehler $\varepsilon'_{A, \lambda}$ auf seine Amplitude A_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie der Phasenfehler $\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ auf π bezogen, um die Vergleichbarkeit der Angaben mit Tabelle (4.1) zu gewährleisten.

Die noch vorhandenen minimalen Abweichungen bei den Phasenfehlern des Wellenpakets zu denen der periodischen Welle (δ'_{Ph} zu $\delta'_{Ph, PW}$) bei Konfiguration $N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ sind über Ableseungenauigkeiten an den Graphen der Druckverläufe zu erklären.

Tabelle 5.1.: Vergleich der Propagation eines Wellenpakets mit der 1D propagierenden, periodischen Welle; ε'_λ jeweils nach der Lauflänge $\Delta x = \lambda$, wobei $\varepsilon'_{A, \lambda}$ auf seine Amplitude A_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ bezogen und $\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ relativ zu π angegeben

	$N_\lambda = 32 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 1$	$N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$
δ'_A	1.00003	0.99985
$\delta'_{A, PW}$	1.00002	0.99985
$\varepsilon'_{A, \lambda}$ [%]	0.096	-0.63
$\varepsilon'_{A, PW, \lambda}$ [%]	0.05	-0.63
δ'_{Ph}	0.98970	0.9951
$\delta'_{Ph, PW}$	0.99068	0.9954
$\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	-2.06	-0.98
$\varepsilon'_{Ph, PW, \lambda}$ [%]	-1.86	-0.92

Aus den dargestellten Ergebnissen wird deutlich, dass für die folgenden Untersuchungen an einem sliding-mesh interface ein Wellenpaket mit der Konfiguration $N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ verwendet werden sollte, da sich hierbei die besten Übereinstimmungen der bereits an den Simulationen der eindimensionalen, periodischen Welle berechneten Fehler ergeben und kein unphysikalisches Anwachsen des Amplitudenmaximums wie bei Konfiguration $N_\lambda = 32 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 1$ beobachtet werden kann. Die Erzeugung eines sich störungsfrei ausbreitenden Wellenzugs wird durch die im Rechengebiet wirkenden Volumenkräfte zu stark beeinflusst (Abbildung (5.4)).

5.2. Schnittstellen zwischen festen und rotierenden Gittern

Zunächst müssen für beide Gitterstrukturen Simulationen mit dem Analysetyp „Steady State“ durchgeführt werden, um gute Konvergenz und Löserstabilität [3] während der darauf folgenden

transienten Rechnung, die mit den Lösungen der vorhergehenden Steady-State-Rechnungen als Initialwerte gestartet werden müssen, zu erhalten.

Um die Bewegung des Rechengitters zu ermöglichen werden jeweils bei der Gittererstellung in ICEM CFD zwei verschiedene „Bodies“ erstellt, denen die einzelnen stationären bzw. rotierenden „O-Grid“-Blöcke zuzuordnen sind. Einer dieser Körper wird später in ANSYS PRE einer eigenen, zusätzlich eingefügten Domain zugeteilt, der eine Bewegung der Art „Rotating“ zugeordnet werden soll.

Dem „Einlass“, der Fläche bei $x = 0$ in der YZ -Ebene wird die Randbedingung „Inlet“ sowie dem „Auslass“, der Fläche bei $x = x_{Ende}$ in der YZ -Ebene, die Randbedingung „Opening“ mit einem Relativdruck von 0 Pa zum in der Domain vorherrschenden Umgebungsdruck von $p_0 = 1 \text{ atm}$ und einer Opening-Temperatur von $T_E = 293.15 \text{ K}$ zugeordnet. Andere Randbedingungsarten als diese nun zugewiesenen führen im gesamten Rechengbiet zu leichten Schnelle- und Druckschwankungen, welche die Konvergenz der Rechnungen negativ beeinflussen. Die weiteren Definitionen der Randbedingungen sind im jeweiligen Unterabschnitt zu finden.

Als Fluidmaterial wird „Air Ideal Gas“ in einer kompressiblen Rechnung gewählt, wobei die Temperatur zu Beginn der Rechnungen der Umgebungstemperatur $T_E = 293.15 \text{ K}$ entspricht. Die akustischen Courant-Zahl soll in jeder der Simulationen den Wert 3 annehmen, da sich die Konfiguration $N_\lambda = 128 \text{ ppw} \ \& \ CFL = 3$ bei der Vorgabe eines Anfangswerts eines Wellenpakets als fehlerfrei gegenüber dem einfachen Fall der eindimensionalen Wellenpropagation erwiesen hat (Kapitel (5.1.2.2)). Wird die Gitterauflösung in den folgenden Tests von 128 ppw auf 64 ppw bzw. 32 ppw bei konstanter CFL-Zahl vergrößert, bedeutet dies zwar größere Fehler in Amplitude und Phase, jedoch wird die Stabilität des Verfahrens durch den größeren Zeitschritt τ positiv beeinflusst.

Die Diskretisierungsmethoden sind Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ sowie Rückwärts-Euler $\mathcal{O}(\tau^2)$.

5.2.1. Rechteckgebiet mit zylindrischer Schnittstelle

Die Länge des Rechengbiets in x -Richtung beträgt 3.5λ (0.404 m) vom Einlass zum sliding-mesh interface, wobei dieses selbst einen Durchmesser von 0.173λ (0.02 m) besitzt. Der Abstand direkt nach dem sliding-mesh zum Auslass beträgt wiederum 3.5λ (0.404 m). Die Tiefe in z -Richtung ist 0.087λ (0.01 m) (Abbildung (5.5)). Die Anzahl der Gitterknoten in x - und y -Richtung variiert hierbei durch die unterschiedlichen Auflösungen einer Welle mit $N_\lambda = 32 \text{ ppw}$, 64 ppw bzw. $N_\lambda = 128 \text{ ppw}$. Am sliding-mesh wurde die Knotenanzahl in radialer Richtung ebenfalls gemäß der aus Kapitel (2.4.3) bekannten Formel

$$N_{K, r} = \frac{r+h}{h} \quad (5.4)$$

berechnet, um auch dessen räumliche Auflösung ähnlich dem restlichen Rechengbiet schrittweise zu erhöhen. In Umfangsrichtung wird die Knotenanzahl durch die Auflösung in y bestimmt.

Der Zeitschritt τ wird durch die Vorgabe einer akustischen *CFL*-Zahl festgelegt. Neben der Inlet- sowie Opening-Randbedingung am Ein- und Auslass wird eine periodische Verknüpfung der Ränder in y -Richtung gewählt. In z -Richtung besteht Symmetrie. Außerdem wird eine weitere Schnittstelle als Verbindung zwischen der stationären sowie der rotierenden Domain geschaffen.

Steady-State Unter „Frame Change“ ist die Option „Frozen Rotor“ und keinem „Pitch Change“ oder „Interface Model“ für die Verknüpfung der beiden Domains anzuwählen. Für den Typ der Steady-State-Rechnung wird ein Zielresiduum von $\text{MAX } 1 \cdot 10^{-4}$ bei doppelter Rechengenauigkeit vorgegeben, das nach einer Anzahl von maximal $5 \cdot 10^5$ Iterationsschritten erreicht wird.

Die Bewegung der rotierenden Domain wird auf „Rotating“ - um die Mittelachse des sliding-meshes parallel zur globalen z -Achse - gesetzt, mit einer noch festzulegenden Winkelgeschwindigkeit Ω . Diese beläuft sich in den folgenden Tests auf $\Omega = 446.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ bzw. $\Omega = 893.60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, da diese Winkelgeschwindigkeiten Ω 10% und 20% der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_{\text{Rechteck}}^*$ des Spezialfalls bei einer räumlichen Gitterauflösung in x von $N_\lambda = 128 \text{ ppw}$ entsprechen, bei der sich ein node-to-node matching gemäß

$$\Omega_{\text{Rechteck}}^* = \frac{2\pi}{N_{K, \theta} \tau} = 4468.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (5.5)$$

einstellt, sich also zu jedem Zeitschritt die Knoten genau gegenüberstehen. $N_{K, \theta}$ beschreibt hier die Anzahl der Knoten verteilt in Umfangsrichtung des sliding-mesh interfaces.

Am Einlass wird zunächst für diese Steady-State-Simulation die Fluidgeschwindigkeit $\underline{u}' = \underline{0}$ bei der statischen Temperatur $T_E = 293.15 \text{ K}$ gewählt, da zunächst eine auskonvergierte Lösung für ein Rechengebiet mit ruhendem Fluid benötigt wird, um die anschließenden transienten Rechnungen starten zu können.

5.2.1.1. Geschwindigkeits- und Druckverteilung im rotierenden Gebiet bei ruhendem Fluid

Die Einbettung eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Bereichs in ein ruhendes Fluid führt zu einer künstlichen Fluidbewegung, die derjenigen einer Starrkörperrotation ähnelt. Dieses Artefakt aus der Domainrotation wird im Folgenden näher untersucht. Dazu wird das Geschwindigkeitsfeld (bzw. dessen Betrag) im ruhenden und im bewegten Koordinatensystem untersucht. Um das im globalen, ortsfesten Koordinatensystem entstehende Geschwindigkeitsfeld \underline{u}'_{STN} innerhalb der rotierenden Domain, die sich als auskonvergierte Lösung und damit als Initialwert zum Zeitpunkt $t = 0$ der später folgenden transienten Rechnung einstellt, zu untersuchen, werden zunächst Contourplots des Betrags des Geschwindigkeitsvektors \underline{u}'_{STN} erstellt (Abbildung (5.6)). Diese lassen einen annähernd linearen Zuwachs der Geschwindigkeit \underline{u}'_{STN} vom Mittelpunkt des sliding-mesh bei der Koordinate $x_M = 3.68\lambda$ (0.424 m) und

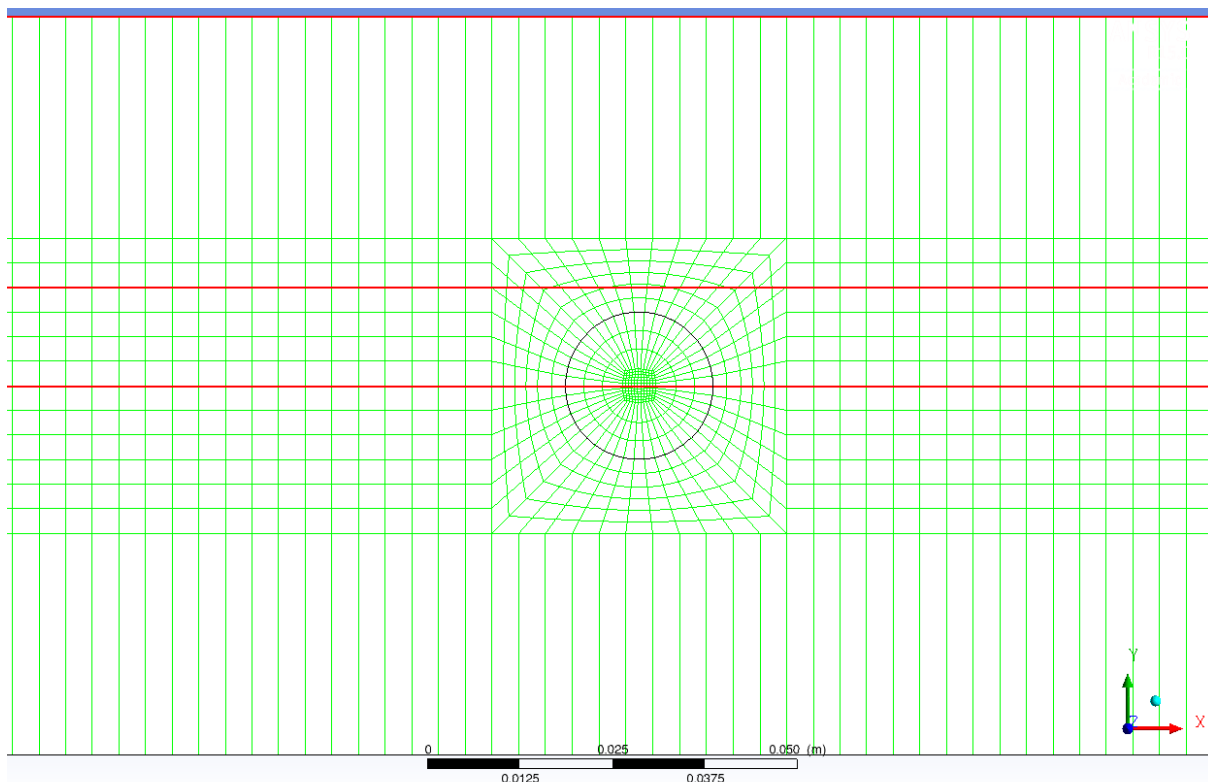


Abbildung 5.5.: Vernetzung des zylindrischen sliding-mesh interfaces innerhalb eines rechteckigen 1D-Gebiets für die räumliche Gitterauflösung von 32 ppw

$y_M = 4.33\lambda$ (0.434 m) zum äußeren Rand hin, ähnlich der Geschwindigkeit \underline{u}' im bewegten Koordinatensystem des rotierenden Rechengebiets, erkennen. Außerdem ist die artifizielle Fluidbewegung rotationssymmetrisch und ihr Maximum wird am Außenrand der rotierenden Domain erreicht. Zum Vergleich der Geschwindigkeiten \underline{u}'_{STN} , welche eigentlich nicht vorhanden sein sollten, bzw. \underline{u}' innerhalb des sliding-mesh, werden nun die Umfangsgeschwindigkeiten am Außenrand $|\underline{\hat{u}}'|$ des rotierenden Gebiets für beide Winkelgeschwindigkeiten Ω über $|\underline{\hat{u}}'| = \Omega r_{max}$ angegeben:

$$|\underline{\hat{u}}'|_{0.1\Omega_{Rechteck}^*} = 0.1\Omega_{Rechteck}^* ((x_M + d_{sliding}) - x_M) = 4.47 \frac{m}{s} \quad (5.6)$$

$$|\underline{\hat{u}}'|_{0.2\Omega_{Rechteck}^*} = 0.2\Omega_{Rechteck}^* ((x_M + d_{sliding}) - x_M) = 8.94 \frac{m}{s} \quad (5.7)$$

mit dem Durchmesser des rotierenden Gebiets von $d_{sliding} = 0.173\lambda$ (0.02 m).

Offensichtlich hängt der Fehler aus der Gebietsrotation stark von der räumlichen Auflösung ab und beträgt für $N_\lambda = 128$ ppw nur noch 0.82% bzw. 1.40% der Umfangsgeschwindigkeiten $|\underline{\hat{u}}'|_{0.1\Omega_{Rechteck}^*}$ bzw. $|\underline{\hat{u}}'|_{0.2\Omega_{Rechteck}^*}$ ($\underline{u}'_{STN} \stackrel{!}{=} 0$). Je größer die Gittergenauigkeit, desto größer fallen die Beträge der Scheingeschwindigkeit \underline{u}'_{STN} innerhalb der rotierenden Domain aus. Auch die gewählte Winkelgeschwindigkeit Ω scheint Einfluss auf deren Betrag zu nehmen. Demnach fällt der Betrag der numerisch eingebrachten Geschwindigkeit \underline{u}'_{STN} mit zunehmendem Ω auch größer aus. Die graphischen Darstellungen der Verläufe (5.7) des Geschwindigkeitsfeldes \underline{u}'_{STN} , aufgeteilt in die Anteile u'_{STN} und v'_{STN} in Richtung y und x , lassen ebenfalls die angesprochenen

Unterschiede der Winkelgeschwindigkeiten Ω , der Gitterauflösungen sowie das lineare Verhalten ähnlich dem zu erwartenden Signalverlauf im mitbewegten Koordinatensystem des sliding-mesh erkennen. Tabelle (5.2) gibt einen Überblick über das Verhältnis der maximalen künstlich induzierten Geschwindigkeiten \underline{u}'_{STN} im rotierenden Gebiet zur Umfangsgeschwindigkeit an dessen Außenrand $|\underline{\hat{u}}'|$.

Tabelle 5.2.: Verhältnis der maximalen künstlich induzierten Geschwindigkeiten \underline{u}'_{STN} im rotierenden Gebiet zur Umfangsgeschwindigkeit am Außenrand $|\underline{\hat{u}}'|$

	$0.1\Omega^*_{Rechteck}$	$0.2\Omega^*_{Rechteck}$
	[%]	[%]
32 <i>ppw</i>	84.3	85.6
64 <i>ppw</i>	53.2	5.81
128 <i>ppw</i>	0.82	1.40

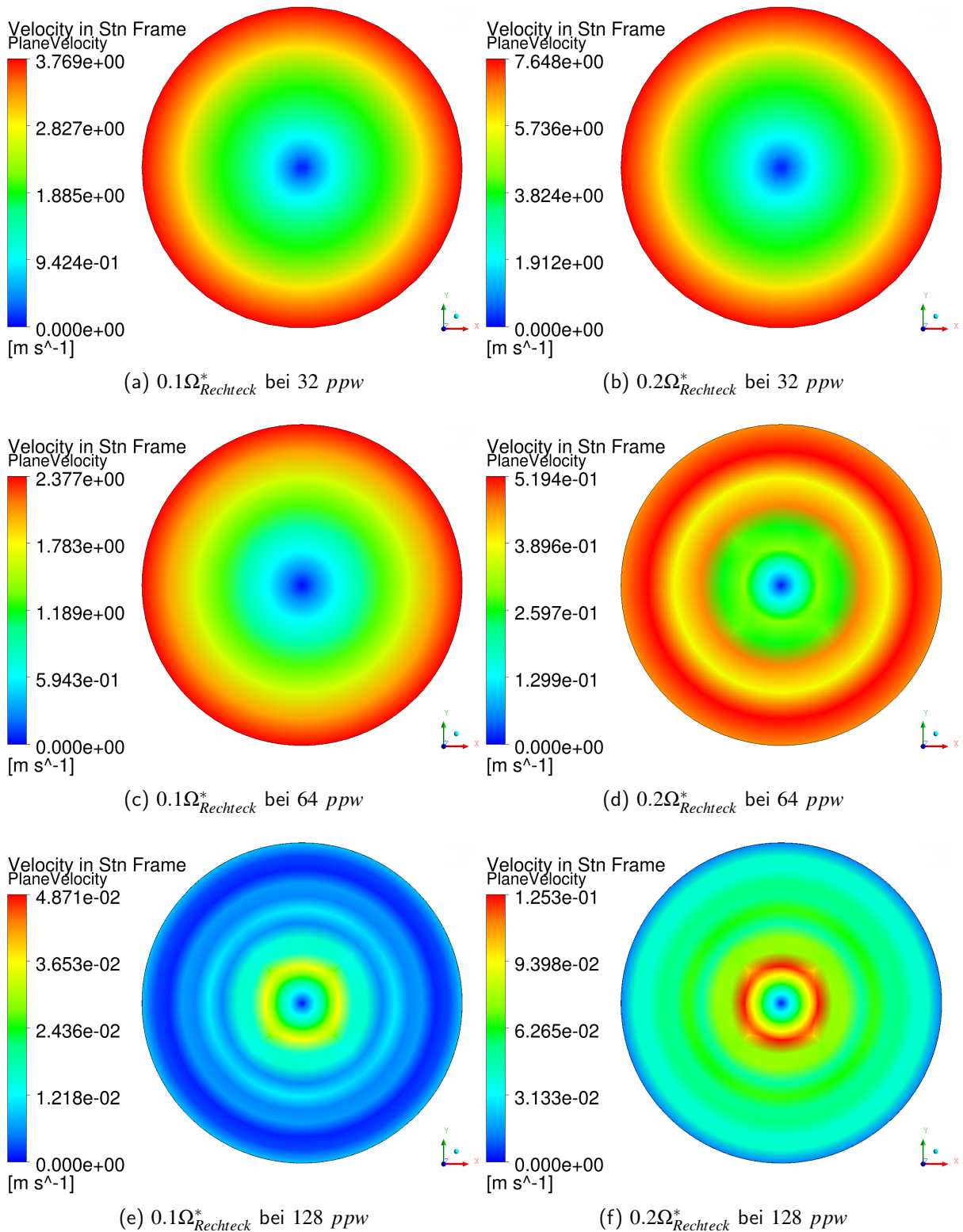
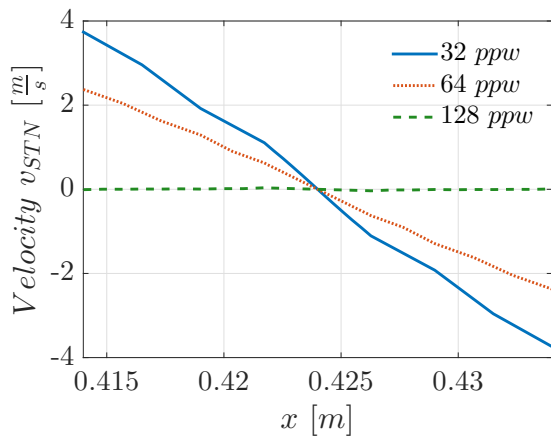
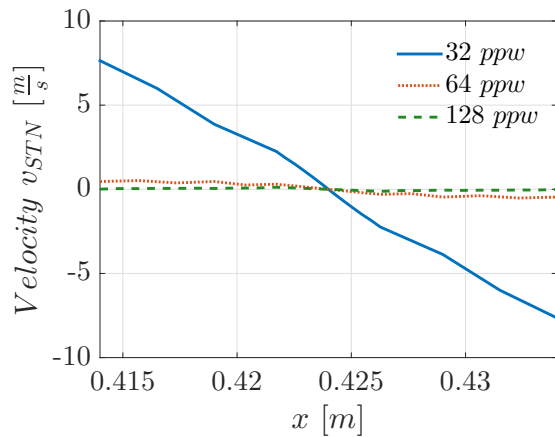


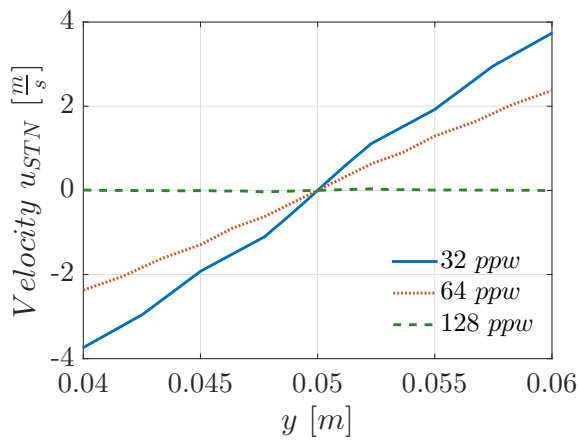
Abbildung 5.6.: Contourplots des Betrags der durch die Gebietsbewegung induzierten künstlichen Geschwindigkeit \underline{u}'_{STN} in der rotierenden Domain (definiert in Bezug auf das ruhende Koordinatensystem „Stn Frame“) bei unterschiedlichen räumlichen Auflösungen N_λ und beiden Winkelgeschwindigkeiten Ω



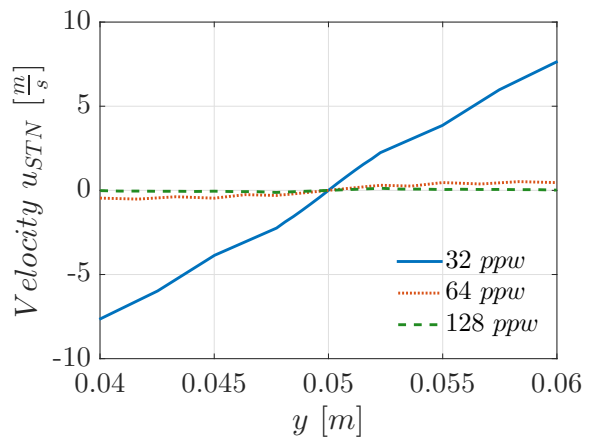
(a) Geschwindigkeitskomponente v , $0.1\Omega^*_{Rechteck}$



(b) Geschwindigkeitskomponente v , $0.2\Omega^*_{Rechteck}$



(c) Geschwindigkeitskomponente u , $0.1\Omega^*_{Rechteck}$



(d) Geschwindigkeitskomponente u , $0.2\Omega^*_{Rechteck}$

Abbildung 5.7.: Graphische Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten u_{STN} und v_{STN} in y und x in der rotierenden Domain bezüglich des festen, globalen Koordinatensystems „Stn Frame“ bei unterschiedlichen räumlichen Auflösungen N_λ und beiden Winkelgeschwindigkeiten Ω

Die Druckverteilung p' , welche unabhängig von einer Koordinatentransformation ist, wird für die drei räumlich unterschiedlich aufgelösten Gitter sowie beiden Winkelgeschwindigkeiten Ω in Abbildungen (5.8) dargestellt. Zum Vergleich wird die Druckverteilung p' eingezeichnet, die sich für ein Gas in einem mit konstanter Geschwindigkeit $\Omega = const.$ rotierenden Behälter ergeben würde. Diese wurden mit Hilfe der Formel (2.41)

$$p(r) = e^{\frac{M\Omega^2 r^2}{2R_0 T_E}} p(0) \quad (5.8)$$

geplottet, wobei für $p(0)$ der minimale Druckwert an der Stelle $x = x_M = 0.375\lambda$ (0.424 m) des jeweiligen dargestellten, zu einer Gitterauflösung gehörigen Verlaufs angenommen wird. Außerdem sind weitere analytische Verläufe des Drucksignals bei variablem $\Omega \neq const.$ dargestellt. Hierbei wurde die Winkelgeschwindigkeit Ω über das numerisch eingebrachte Geschwindigkeitsfeld \underline{u}'_{STN} berechnet und an jedem Gitterknoten in Formel (2.41) für den analytischen Druckverlauf p' in radialer Richtung eingesetzt. Zu erkennen ist eine gute Übereinstimmung für die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 0.1\Omega_{Rechteck}^*$ beider analytisch berechneter Signalverläufe (Abbildung (5.8)).

Die Druckverläufe können in drei Bereiche aufgeteilt werden: Im ersten Bereich um $x = x_M$ ist kein starker Gradient zu erkennen, der berechnete Druckverlauf verhält sich ähnlich den analytischen. Der zweite Bereich umfasst den jeweils deutlichsten, bei niedrigen Gitterauflösungen N_λ am stärksten ausgeprägten Gradienten im approximierten Druckverlauf, der jedoch in der analytischen Lösung nicht vorhanden ist. Die Werte des Druckverteilung p' in ANSYS CFX erreichen am Ende dieses Bereichs positive Werte. Im letzten Abschnitt bis hin zum Ende in x -Richtung entlang der Mittellinie der rotierenden Domain stimmen zwar die simulierten Werte der Druckverteilung p' nicht mit den analytischen überein, jedoch die Druckgradienten.

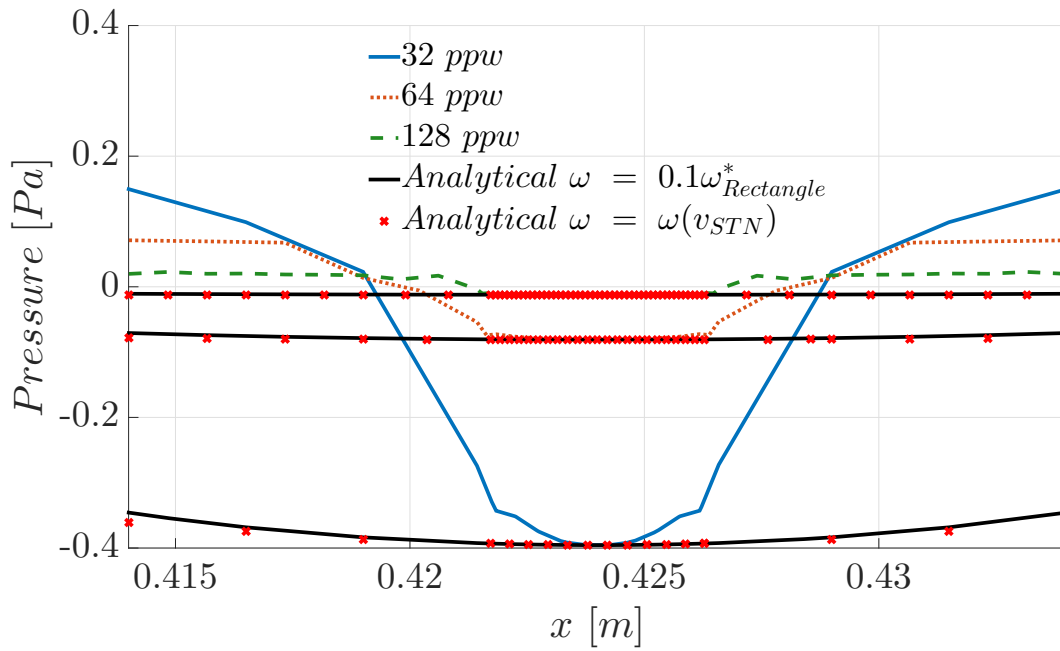
Die exaktesten Approximationen hinsichtlich des Druckverlaufs aus ANSYS CFX und den analytischen ergeben sich wie bereits am Geschwindigkeitsvektor \underline{u}' beschrieben, bei der räumlich feinsten Gitterauflösung $N_\lambda = 128$ *ppw*.

Zusammenfassend zeigen diese Tests, dass durch die Gitterrotation in ANSYS CFX eine artifizelle Strömung induziert wird, deren Stärke bei hinreichender Gitterverfeinerung auf Werte unterhalb von 0.82% der Umfangsgeschwindigkeit am Außenrand $|\hat{u}'|$ abnimmt. Als Begleiterscheinung stellt sich im rotierenden Gebiet ein radialer Druckgradient ein.

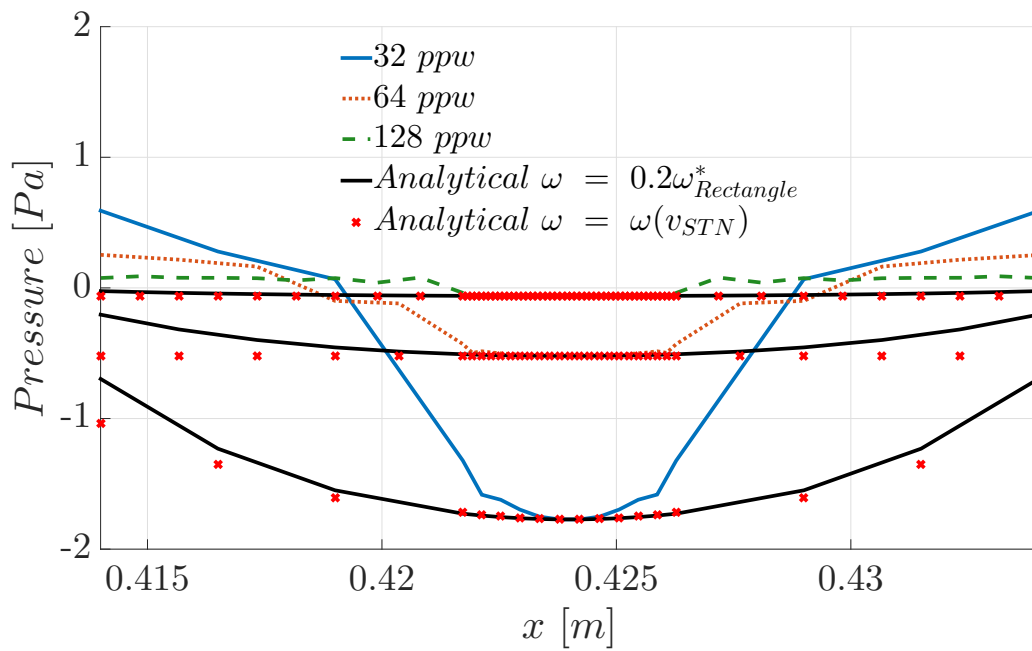
Transient Der Analysetyp wird von „Steady State“ auf „Transient“ mit der Gesamtsimulationszeit (siehe Formel (2.43)) von

$$t = 10T_0 = 10\frac{\lambda}{c_0} = 10\frac{1}{f}, \quad (5.9)$$

umgestellt, um eine Initialisierung des Wellenpakets am Inlet sowie dessen Propagation durch das sliding-mesh zuzulassen. Diese Art der „Einspeisung“ des Wellenpakets am Rand des Re-



(a) Druckverteilung p' , $0.1\Omega_{\text{Rechteck}}^*$



(b) Druckverteilung p' , $0.2\Omega_{\text{Rechteck}}^*$

Abbildung 5.8.: Plots der Druckverteilungen p' innerhalb der rotierenden Domain mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten

chengebiets ist nötig, da als Startfeld die Lösung der „Steady-State“-Rechnung verwendet werden muss, um Konvergenz zu erreichen [3]. Somit kann die Initialisierung des Wellenpakets als Anfangsbedingung stromauf des rotierenden Gebiets nicht erfolgen.

Die Frequenz f beträgt unverändert 3000 Hz mit der Wellenlänge $\lambda = 0.115 \text{ m}$. Auch die Option „Frozen Rotor“ unter „Frame Change“ wird durch die Auswahl „Transient Rotor Stator“ ersetzt.

Am Einlass kann nun die Schallschnelle eines Wellenpakets vorgegeben werden, das als Funktion der Zeit am Ort $x = 0$ aufgebaut wird:

$$u'_{\text{Wellenpaket}}(0, t) = \hat{u} e^{-\frac{0.319}{\lambda^2}(3.5\lambda - tc_0)^2} \sin \xi_x(3.5\lambda - tc_0) \quad (5.10)$$

mit der maximalen Amplitude der Schallschnelle $\hat{u} = \frac{10 \text{ Pa}}{\rho_0 c_0}$. Am Auslass wurde die Option „Opening Pres. and Dirn“ gewählt. Ein Teil der Abweichungen der Ergebnisse aus Abbildung (5.9) entstammt der fehlenden Vorgabe einer zeitabhängigen Druckverteilung p' am Einlass. Dieser Effekt konnte allerdings nicht mehr separat getestet werden.

5.2.1.2. Propagationsfehler „Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh“

Die Auswertung dieser Simulationen erfolgt anhand der in Abbildung (5.5) eingezeichneten drei roten Linien. Dabei stellt die Mittellinie die „Line Middle“, die darüber liegende die „Line Upper“ und die oberste die „Line Edge“ dar. Die Mittellinie ist dabei so gewählt, dass sie das sliding-mesh genau mittig schneidet, „Line Upper“ noch durch die sich verändernde, feinere Vernetzung zum sliding-mesh hin führt, allerdings schon im ruhenden Rechengebiet liegt und „Line Edge“ in der stationären, äquidistant vernetzten Domain liegt. Zu beachten ist hierbei, dass sich in Querrichtung zwischen „Line Upper“ und „Line Edge“ ein relativ großer Sprung in der Vernetzung des Rechengitters befindet.

In Abbildung (5.9) werden die bei der Propagation des Wellenpakets auftretenden Amplituden- und Phasenfehler ε' , bezogen auf eine Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$, bei den Winkelgeschwindigkeiten $0.1\Omega_{\text{Rechteck}}^*$ bzw. $0.2\Omega_{\text{Rechteck}}^*$ deutlich. Bis auf die Amplitude der Simulation mit den Einstellungen $N_\lambda = 64 \text{ ppw}$ & $CFL = 3$ entstehen durch das rotierende Gebiet innerhalb der Rechteckdomain grundsätzlich zusätzliche Propagationsfehler ε' , die mit abnehmender Gitterauflösung N_λ schnell zunehmen. Zu klären bleibt, ob durch die zeitabhängige Einspeisung des Wellenpakets ein Teil dieser Abweichungen der Propagationsfehler vom 1D-periodischen Fall entsteht. Da der auf der Mittellinie ausgewertete Phasenfehler ε'_{ph} im Vergleich zu „Line Upper“ sowie „Line Edge“ am geringsten ausfällt, kann daraus geschlossen werden, dass sich die zunehmend feinere räumliche Gittervernetzung innerhalb des sliding-mesh positiv auf diesen Fehlertyp auswirkt. Ein ähnlicher Trend in der Amplitude ist hingegen nur im Fall $N_\lambda = 64 \text{ ppw}$ & $CFL = 3$ zu beobachten.

Anzumerken ist, dass die an „Line Edge“ ausgewerteten Fehler ε' schwierig zu interpretieren sind. Hier sollten sich durch die Lage dieser Linie im äquidistant vernetzten Gitter exakt

identische Fehlerwerte ε' zu denen der Propagation der eindimensionalen, periodischen Welle einstellen. Die großen Abweichungen lassen sich auf die relativ weiten Abstände der Gitterknoten in y -Richtung ab dem sliding-mesh bis zum oberen Rand des Rechengebiets zurückführen. Das in ANSYS CFX implementierte Verfahren zu sich bewegenden Rechengittern scheint optimal umgesetzt zu sein, da sich trotz der doppelten Winkelgeschwindigkeit $0.2\Omega_{Rechteck}^*$ die gemessenen Fehlerwerte nach der Propagationsdistanz von $\Delta x = \lambda$ sehr ähnlich zueinander verhalten.

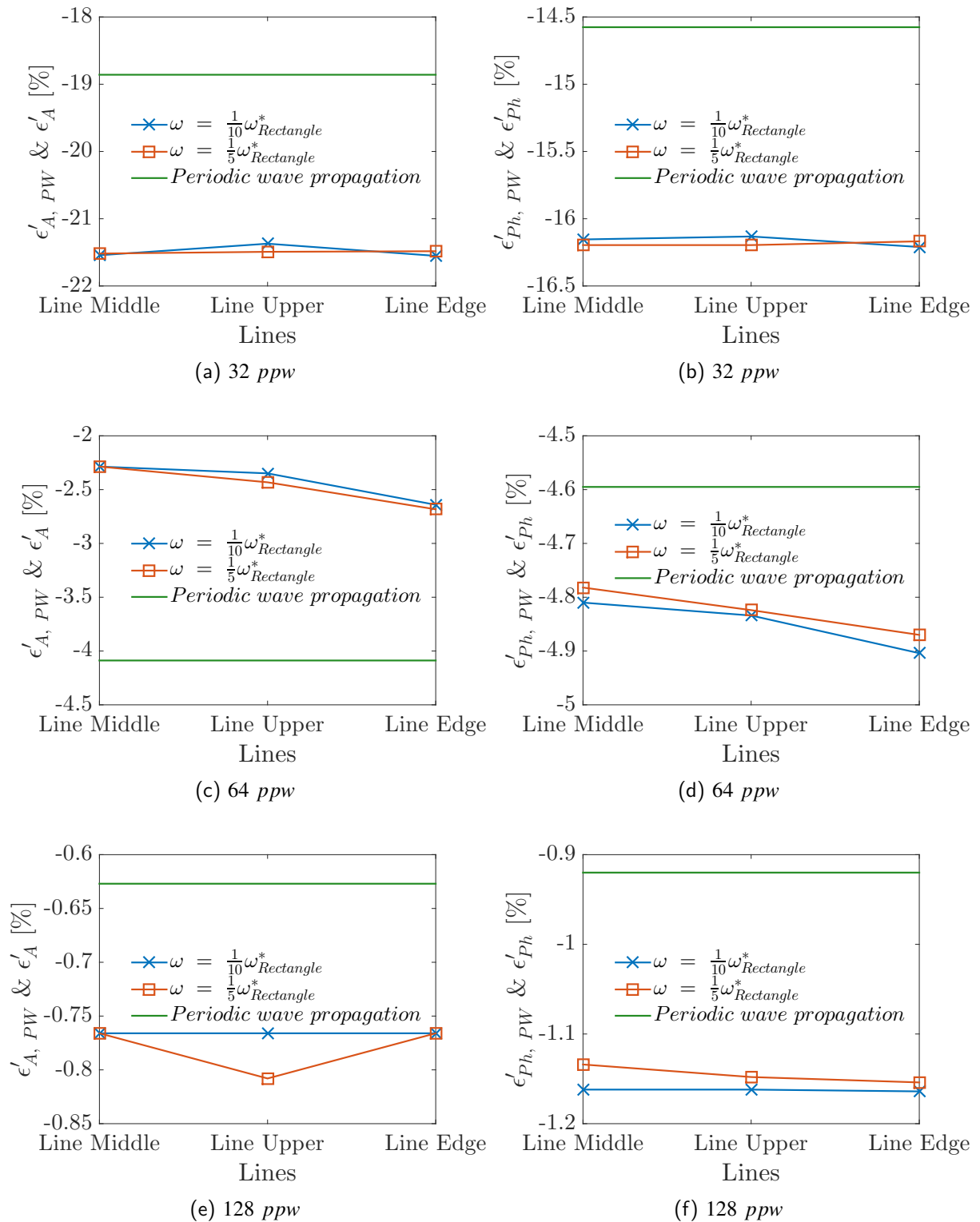


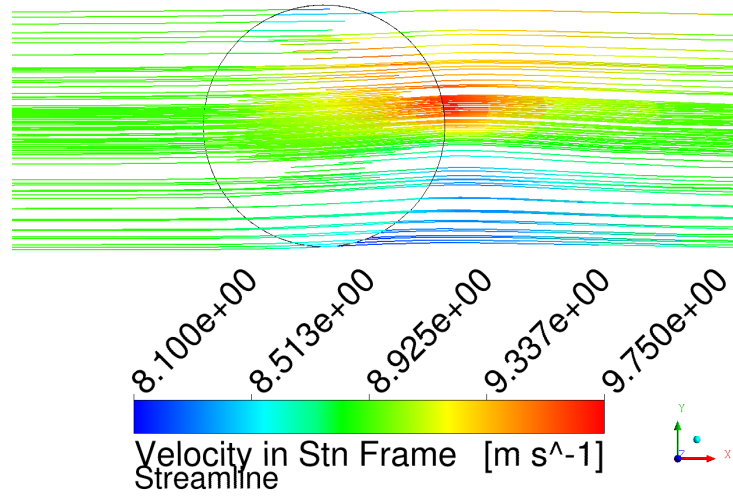
Abbildung 5.9.: Propagationsfehler in Amplitude und Phase im Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh bei $CFL = 3$ bezogen auf eine Ausbreitungsdistanz von $\Delta x = \lambda$ im Vergleich zur periodischen Wellenpropagation

5.2.1.3. Ablenkungstests

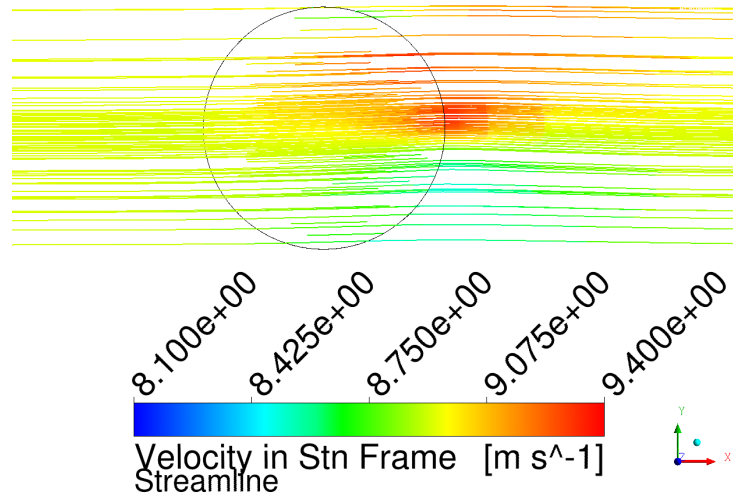
In dieser Art von Tests soll die Ablenkung einer konstanten Grundströmung (ähnlich [12]), welche vom Einlass zum Auslass in x -Richtung des Rechteckgebiets verläuft, beim Durchlaufen der rotierenden Domain getestet werden. Als Strömungsgeschwindigkeit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.94 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$ wird die Umfangsgeschwindigkeit des rotierenden Rechengitters $u_{\Omega} = 0.2\Omega_{Rechteck}^* r_{max}$ vorgegeben. In Abbildung (5.10) ist der Stromlinienverlauf der Geschwindigkeit u_{STN} im globalen, festen Koordinatensystem für die drei unterschiedlichen Gitterauflösungen von $N_{\lambda} = 32, 64$ und 128 *ppw* dargestellt. Bei allen drei Gitterkonfigurationen stellt sich im auskonvergierten, stationären Zustand die vorgegebene Sollgeschwindigkeit ein. Klar erkennbar sind die Überhöhungen der Variable u_{STN} am rechten Rand des rotierenden Gebiets, welche bei der niedrigsten Gittergenauigkeit am stärksten und damit um bis zu 10 % über dem Sollgeschwindigkeitswert von $u_{STN} = 8.94 \frac{m}{s}$ ausfällt. Das Anwachsen der Geschwindigkeit u_{STN} in diesem Bereich in der Simulation mit dem feinsten der drei Gitter beträgt hier lediglich 3 %. Zu beachten sind auch die Verringerungen von u_{STN} im unteren und oberen Bereich des sliding-mesh, die jeweils im gleichen Prozentbereich wie die der Überhöhungen ausfallen.

Auch die Strömungsrichtung wird beeinflusst. Nach wie vor treten bei den Rechnungen mit dem größten Gitter die stärksten Abweichungen des Stromlinienverlaufs gegenüber der Horizontalen auf, welche sich aber im weiteren Verlauf der Stromlinien nach dem sliding-mesh wieder abschwächen und die horizontale Richtung nach einer Laufstrecke von $\Delta x \approx 0.5\lambda$ hinter dem rotierenden Gebiet einnehmen. Wird die Gitterauflösung erhöht, findet nahezu keine Ablenkung der Strömung durch das rotierende Rechengitter mehr statt, die Stromlinien kehren nach einer Ausbreitungsdistanz von $\Delta x \approx 0.1\lambda$ wieder in die Horizontale zurück.

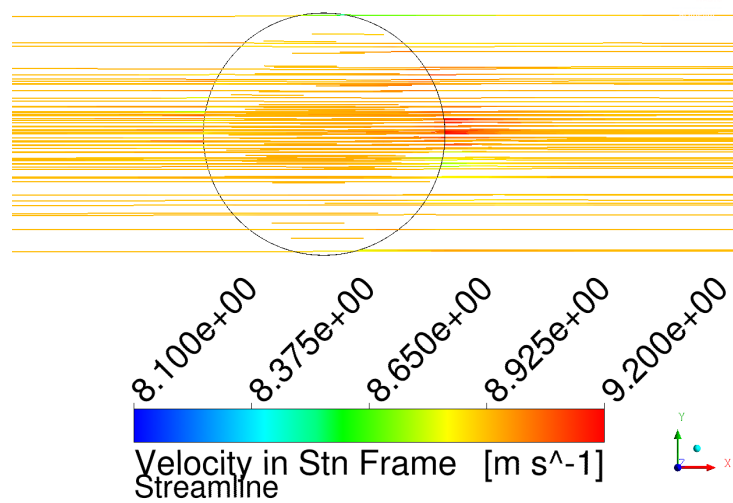
Der Ablenkungstest bestätigt auch die im vorigen Abschnitt (5.2.1.1) gemachten Beobachtungen: Bei grober Gitterauflösung induziert das numerische Verfahren im rotierenden Rechenggebiet eine unphysikalische Sekundärströmung.



(a) 32 *ppw*



(b) 64 *ppw*



(c) 128 *ppw*

Abbildung 5.10.: Stromlinien des Geschwindigkeitsfelds \underline{u}'_{STN} im globalen, ruhenden Koordinatensystem „Stn Frame“

5.2.2. 3D-Zylinder mit rotierendem Mittelstück

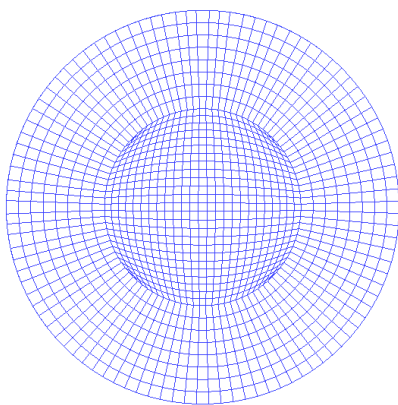
In x -Richtung besitzt das zylindrische Rechengebiet eine Gesamtlänge von 8λ (0.92 m), wobei sich diese aufteilt in die Distanzen 3.5λ (0.404 m) vom Einlass zum sliding-mesh interface, 1λ (0.115 m) für die Länge des sliding-meshes selbst sowie weitere 3.5λ (0.404 m) zum Ende des Zylinders. Der Durchmesser misst 0.26λ (0.03 m) (Abbildungen (5.2) und (5.11)) [2]. Die Auflösung der in x -Richtung äquidistant verteilten Gitterknoten beträgt $N_\lambda = 128\text{ ppw}$ bei der bekannten Frequenz $f = 3000\text{ Hz}$. In radialer sowie Umfangsrichtung beträgt die Knotenanzahl

$$N_{K, k} = \frac{l + h}{h}; \quad (5.11)$$

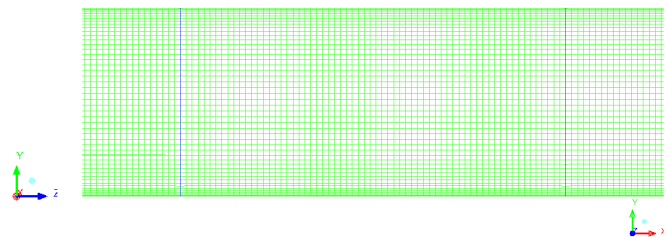
damit ergibt sich für die räumliche Auflösung des Zylinderumfangs ein $N_{K, \theta}$ von 100. Dementsprechend würde ein wie in Kapitel (5.2.1) ausgelegtes $\Omega_{Zylinder}^* = 8042.5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ betragen, das die Konvergenz der Simulationen in die Länge zieht. Daher wurde eine Winkelgeschwindigkeit Ω für diese Simulation von $\Omega_{Zylinder} = \frac{1}{20}\Omega_{Zylinder}^* = 402.12\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ gewählt, die damit der kleinsten Winkelgeschwindigkeit Ω des Falls „Rechteckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh interface“ aus Abschnitt (5.2.1) entspricht.

Neben der Inlet- sowie Opening-Randbedingung an den abschließenden Grundflächen des Zylinders der YZ -Ebene an den Stellen $x = 0$ bzw. $x = x_{Ende}$ wird die Zylindermantelfläche als adiabate Wand unter freiem Schlupf definiert. Außerdem werden zwei weitere Schnittstellen als Verbindungen zwischen den stationären sowie dem rotierenden Zylinderabschnitt erstellt. Die Rotation der mittleren Domain erfolgt um die globale x -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_{Zylinder}$.

Sämtliche andere hier nicht erwähnte Einstellungen sind identisch zum Testfall „Rechteckgebiet“ (5.2.1).



(a) Ansicht Inlet des 3D-Zylinders



(b) Ansicht Seite des rotierenden Mittelstücks des 3D-Zylinders

Abbildung 5.11.: Vernetzung des 3D-Zylinders am Inlet sowie der Zylindermantelfläche; das rotierende Gebiet ist an einem Ausschnitt des ganzen Zylinders in der Seitenansicht (b) blau gekennzeichnet

Steady-State Für die beiden Verbindungsflächen wird „Frozen Rotor“ ohne „Pitch Change“ gewählt, das Zielresiduum soll $\text{MAX } 1 \cdot 10^{-4}$ bei doppelter Rechengenauigkeit und einer maximalen Anzahl von $6 \cdot 10^4$ Iterationsschritten erreichen.

5.2.2.1. Geschwindigkeiten im rotierenden Gebiet bei ruhendem Fluid

Um wiederum den im globalen Koordinatensystem entstehende Geschwindigkeitsvektor \underline{u}'_{STN} im sliding-mesh, die sich als auskonvergierte Lösung und damit als Startwert zum Zeitpunkt $t = 0$ der später folgenden transienten Rechnung einstellt, zu analysieren, werden zunächst sowohl ein Contourplot der Größe \underline{u}'_{STN} als auch Graphen der einzelnen Geschwindigkeiten v_{STN} und w_{STN} in die Richtungen y bzw. z erstellt (Abbildung (5.12)). Diese lassen nun zunächst einen Verlauf der des Betrags des Geschwindigkeitsvektors \underline{u}'_{STN} nahe dem Sollwert von $0 \frac{m}{s}$ vom Zylindermittelpunkt hin zu den kartesischen Koordinaten von $z/y = 0.065\lambda = 0.0075m$ und damit dem Ende der Vernetzung des inneren „O-Grids“ erkennen. Ab diesem Radius bis hin zum äußeren Rand des Zylinders steigen die Geschwindigkeiten \underline{u}'_{STN} exponentiell an bis auf einen Wert von ca. $0.5 \frac{m}{s}$. Zur besseren Einschätzung der Größenordnung des numerisch eingebrachten Geschwindigkeitsfelds \underline{u}'_{STN} soll auch hier der maximale Betrag der Umfangsgeschwindigkeit am Außenrand $|\underline{u}'|$ angegeben werden:

$$|\underline{u}'|_{\Omega_{Zylinder}} = \Omega_{Zylinder} r_{max} = 6.03 \frac{m}{s}. \quad (5.12)$$

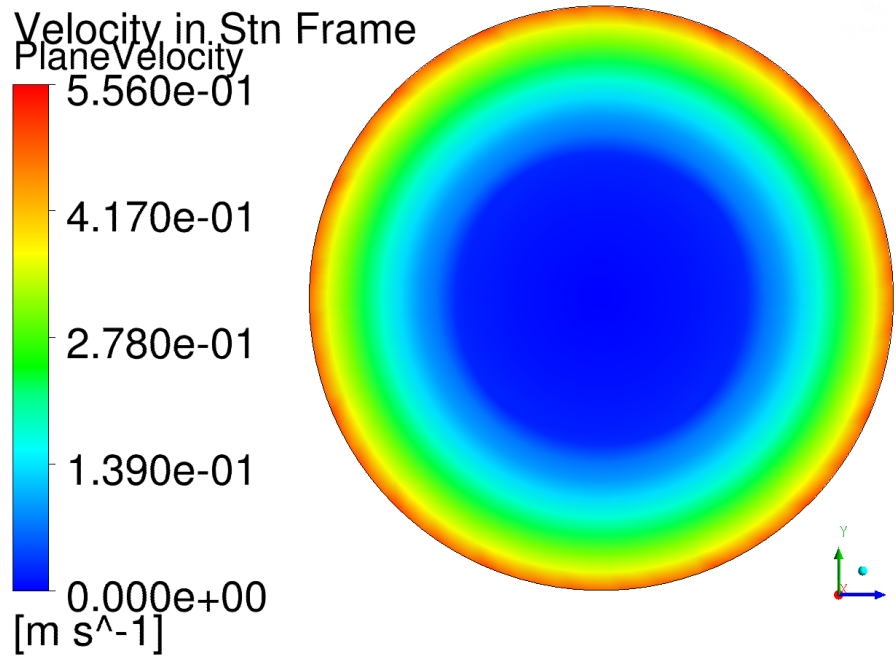
Auch bei dieser Gitterkonfiguration des 3D-Zylinders wird offenbar ein Geschwindigkeitsfeld \underline{u}'_{STN} in das rotierende Gebiet über numerische Approximationsfehler eingebracht, die am äußeren Rand des Rechengebiets wie auch in der Rechteckkonfiguration ca. 1 – 2 % der Geschwindigkeit der Starrkörperrotation des sliding-mesh trotz hoher Gitterauflösung von $N_\lambda = 128 \text{ ppw}$ entsprechen.

Transient Der Analysetyp wird nun von „Steady State“ auf „Transient“ mit der Gesamtsimulationszeit (siehe Formel (2.43))

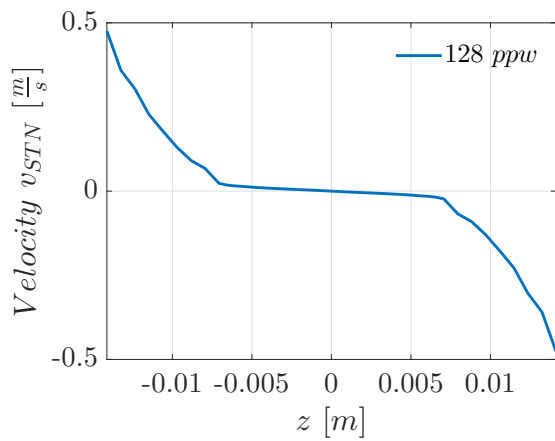
$$t = 9T_0 = 9 \frac{\lambda}{c_0} = 9 \frac{1}{f} \quad (5.13)$$

umgestellt, um die Initialisierung des Wellenpakets sowie dessen Propagation durch das sliding-mesh zuzulassen. Diese Art der „Einspeisung“ des Wellenpakets am Rand des Rechengebiets ist wie im Fall des Rechteckgebiets nötig, da als Startfeld die Lösung der „Steady-State“-Rechnung verwendet werden muss, um Konvergenz zu erreichen [3]. Die Option „Frozen Rotor“ unter „Frame Change“ wird wiederum auf „Transient Rotor Stator“ umgestellt.

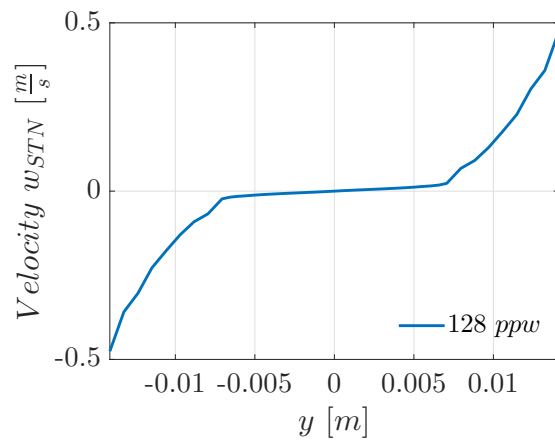
Am Einlass wird wie beim rechteckigen Rechengebiet mit zylindrisch eingebettetem sliding-mesh die Schnelleverteilung \underline{u}' eines Wellenpakets vorgegeben, die als Funktion der Zeit am



(a) Contourplot des Betrags des Geschwindigkeitsvektors \underline{u}'_{STN}



(b) Geschwindigkeitskomponente v_{STN}



(c) Geschwindigkeitskomponente w_{STN}

Abbildung 5.12.: Geschwindigkeitsfeld \underline{u}'_{STN} der rotierenden Domain des 3D-Zylinders im festen Koordinatensystem

Ort $x = 0$ aufgebaut wird:

$$u'_{\text{Wellenpaket}}(0, t) = \hat{u} e^{-\frac{0.319}{\lambda^2} (3.5\lambda - tc_0)^2} \sin \xi_x(3.5\lambda - tc_0) \quad (5.14)$$

mit der maximalen Amplitude der Schnelle $\hat{u} = \frac{10 \text{ Pa}}{\rho_0 c_0}$. Am Auslass wurde die Option „Opening Pres. and Dirn“ gewählt.

5.2.2.2. Propagationsfehler Zylinder

Die entlang dreier Linien ähnlich dem Testfall „Rechteckgebiet“ aus obigem Abschnitt (5.2.1) ausgewerteten Propagationsfehler des Zylinders je Zeitschritt und nach einer Ausbreitungsdi-
stanz $\Delta x = \lambda$ in Amplitude und Phase δ' und ε' sind in Tabelle (5.3) aufgelistet. „Line Middle“
entspricht der Mittelachse des Zylinders, „Line Upper“ liegt in der Seitenansicht (5.11) mittig
zwischen der oberen Kante und der Mittelachse und „Line Edge“ verläuft entlang des oberen
Rands des Zylinders. Dabei ist ε'_A auf seine Ausgangsamplitude A_0 und ε'_{Ph} auf π bezogen.
Verglichen werden diese mit den Propagationsfehlern, die anhand der Auswertungen an der
Mittellinie „Line Middle“, die als einzige durch das rotierende Gebiet der Simulationen „Recht-
eckgebiet mit zylindrischem sliding-mesh interface“ verläuft, bestimmt wurden, sowie denen
der eindimensionalen, periodischen Welle (Kapitel (4.1.4)).

Zwar fällt der Amplitudenfehler an der äußersten ausgewerteten Linie geringer aus als bei
der Propagation des Wellenpakets durch das Rechteckgebiet, der Phasenfehler ist allerdings
größer. Im Vergleich zur periodischen Wellenpropagation werden im Zylinder mit rotierendem
Mittelstück größere Abweichungen in Amplitude und Phase beobachtet.

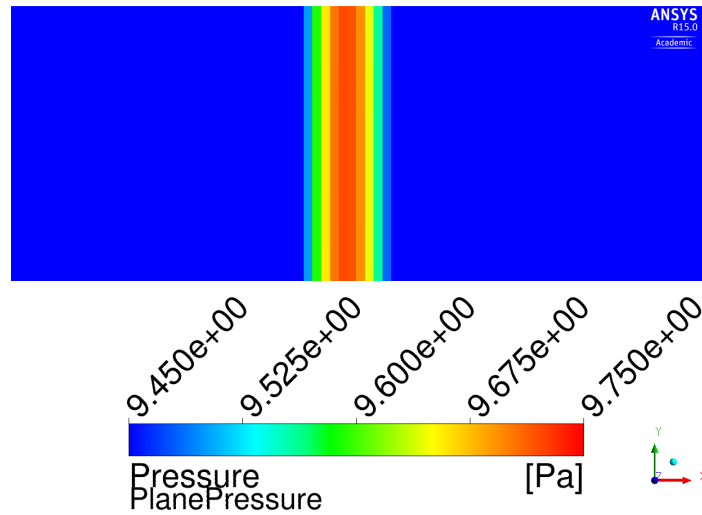
Tabelle 5.3.: Propagationsfehler des Zylinders pro Zeitschritt und nach einer Ausbreitungsdi-
stanz $\Delta x = \lambda$ im Vergleich

	Zylinder		Rechteck		Periodische Welle	
	$\varepsilon'_{A, \lambda}$ [%]	$\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	$\varepsilon'_{A, \lambda}$ [%]	$\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]	$\varepsilon'_{A, \lambda}$ [%]	$\varepsilon'_{Ph, \lambda}$ [%]
Line Middle	-0.807	-1.344	-0.766	-1.162	—	—
Line Upper	-0.807	-1.340			-0.627	-0.92
Line Edge	-0.765	-1.324			—	—

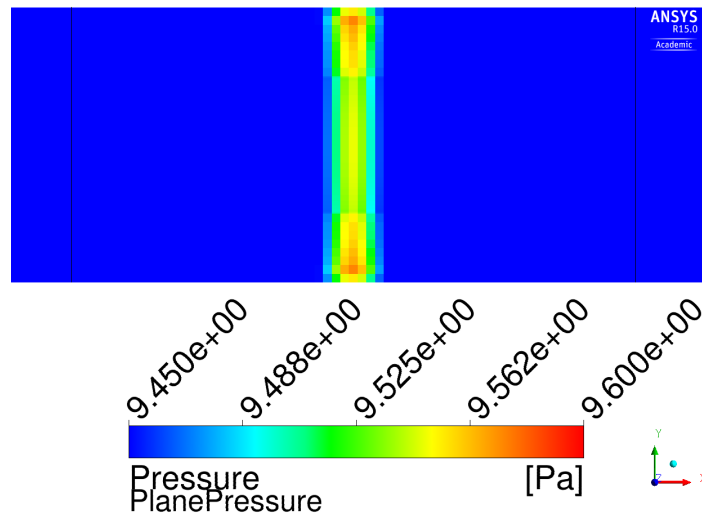
Anhand der drei Contourplots der Druckverteilung p' im 3D-Zylinder zu den Zeitpunkten
„Druckmaximum vor sliding-mesh“, „Druckmaximum innerhalb sliding-mesh“ und „Druckmaxi-
mum nach sliding-mesh“ werden die Propagationsfehler dieses Kapitels noch einmal illustriert
(Darstellung (5.13)). Dabei wird nur das globale Maximum der Druckverteilung p' des pro-
pagierenden Wellenpakets zu den drei verschiedenen Zeitpunkten betrachtet. Die Plots werden
mit der Option „Flat shading“ in CFX-Post erstellt, um den Druck p' in jeder Zelle ohne Weich-

zeichnen anzuzeigen.

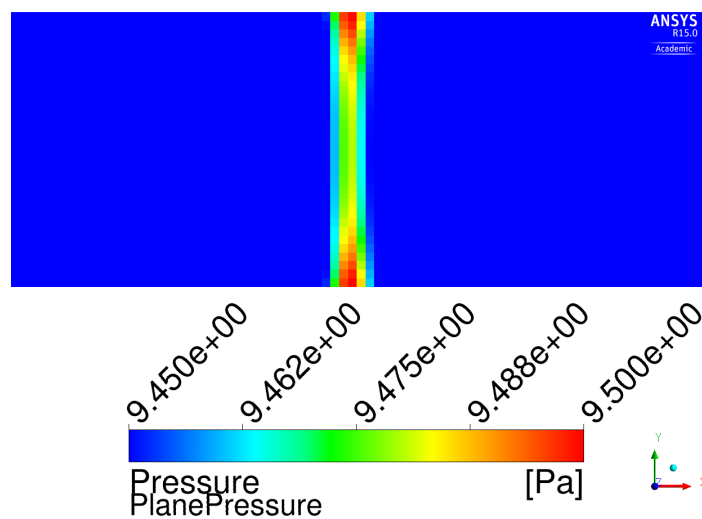
Befindet sich das Druckmaximum des Wellenpakets noch vor dem rotierenden Mittelstück und hat damit noch keine Propagationsstrecke Δx zurückgelegt, ist eine gleichmäßige Druckverteilung p' über den Querschnitt zu beobachten. Innerhalb des rotierenden Gitters des 3D-Zylinders hat sich das Druckmaximum bereits leicht verformt, der maximale Betrag des Drucks p' ist dort zu beobachten, wo der Propagationsfehler der Amplitude am geringsten ausfällt, nämlich am Rand des Zylinderrechengebiets. Auch ein konkaver Effekt der Wölbung des Druckverlaufs p' nach innen deutet sich an, da das Wellenpaket am äußeren Rand laut Tabelle (5.3) schneller, d.h. weniger fehlerbehaftet, propagiert als auf der Mittelachse. Diese Effekte verstärken sich noch mit zunehmender Laufstrecke Δx des Wellenpakets, was zum Zeitpunkt „Druckmaximum nach sliding-mesh“ ersichtlich ist.



(a) Druckmaximum vor sliding-mesh



(b) Druckmaximum innerhalb sliding-mesh



(c) Druckmaximum nach sliding-mesh

Abbildung 5.13.: Globales Maximum der Druckverteilung p' des propagierenden Wellenpakets im 3D-Zylinder zu drei verschiedenen Zeitpunkten mit dem globalen Druckmaximum des Wellenpakets vor, innerhalb und nach dem rotierenden Mittelstück

6. Zusammenfassung & Ausblick

6.1. Zusammenfassung

Wie bereits in Abschnitt (1.1) beschrieben, entstehen bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen - und damit den für die Beschreibung akustischer Problemstellungen essentiellen Gleichungen - Fehler. Viele Untersuchungen bereits bestehender Diskretisierungsverfahren beschäftigen sich daher mit der Beschreibung der entstehenden Fehler durch solche Diskretisierungsverfahren gegenüber analytisch darstellbaren Lösungen (siehe (1.2)). Deshalb wurden in der vorliegenden Arbeit ähnliche Untersuchungen an der Software ANSYS CFX - Release 15.0, die nicht als Wellenlöser konzipiert ist, durchgeführt, um deren spezifische Rechenfehler hinsichtlich der Vorhersage der Wellenpropagation durch ruhende sowie bewegte Rechengebiete im Vergleich zu mathematisch exakten Signalverläufen und theoretischen Analysen der Raum- und Zeitdiskretisierungen zu untersuchen. Dabei wurde die Analyse der theoretisch zu erwartenden Amplituden- und Phasenfehler der in ANSYS CFX verwendeten Diskretisierungsmethoden durchgeführt und simulativ erprobt. Auch der Einfluss sowohl der räumlichen als auch der zeitlichen Diskretisierungen für kompressible Strömungen anhand von $1D$ - und $2D$ -Problemen wurde getestet. Zusätzlich fanden Fehleruntersuchungen an verschiedenen sich bewegenden Rechengittern statt, welche hinsichtlich ihrer Propagationsfehler sowie zusätzlich auftretender Effekte bewertet wurden (vgl. (1.3)).

Bei den in dieser Arbeit erfolgten Untersuchungen zur Ausbreitung von Schallwellen in einem ruhenden Medium stößt man nun zunächst auf ein unerwartetes Verhalten: In den Bereichen der lokalen Extrema einer eindimensional propagierenden Welle treten Verformungen der Signalverläufe der Druckverteilung p' der Lösung auf (Kapitel (4.1)), falls die mit der Schallgeschwindigkeit c_0 gebildete CFL -Zahl < 1 gewählt wird und damit die Zeitschrittweite τ sehr klein gegenüber der Raumschrittweite h ausfällt (Gleichung (2.45)). Sogar ein unbeschränktes Wachstum der Amplituden kann beobachtet werden. Bei der Wahl der höherwertigen Zeitdiskretisierung „Rückwärts-Euler“ $\mathcal{O}(\tau^2)$ treten diese Effekte deutlicher und zu früheren Zeitpunkten während der Simulationen auf. Der Einfluss der zeitlichen Diskretisierung auf den Verlauf der Lösung ist demnach signifikant.

Dieses Verhalten resultiert nicht aus der Art der Diskretisierung der Advektionsterme (Abschnitt (4.1.4)), da diese Terme bei der Lösung kleiner akustischer Störungen im freien Raum unter Vernachlässigung von Reibungseffekten komplett entfallen oder nur sehr geringen Einfluss besitzen (Abbildung (4.3)). Im $1D$ -Testfall der periodisch propagierenden Welle aus Kapitel

(4.1) werden lediglich die Kontinuitäts-, die Impuls- sowie die Energiegleichung, die sich als reduzierter Satz an Gleichungen aus Navier-Stokes betrachten lassen, gelöst. Dieser Effekt der unphysikalischen Lösung bei kleinen Werten der CFL -Zahl wurde allerdings bereits in Stuhlpfarrer [19] beobachtet und dort auf eine Schwäche der Rhie-Chow-Interpolation zurückgeführt. In weiteren Testreihen (Abschnitt (3)), in denen tatsächlich die lineare Advektionsgleichung (2.19) als zusätzliche Transportgleichung mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit für einen passiven Skalar gelöst wird, fallen die Ergebnisse jedoch erwartungsgemäß aus. Die Existenz des Druckgradienten-Terms $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ wird damit durch inkompressibles Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen ausgeschlossen. Deren Simualtionsergebnisse hinsichtlich der Propagationsfehler können über die Theorie der modifizierten Wellenzahlen aus Abschnitt (2.2.1) erklärt werden. Da bei der Wahl einer größeren akustischen CFL -Zahl für die Simulationen eine mit der Theorie der Dahlquist-Gleichungen übereinstimmende Lösung generiert werden kann, damit jedoch die erzeugten Propagationsfehler in ANSYS CFX stark anwachsen (4.1), kann nun eine optimale Konfiguration einer akustischen Simulation angegeben werden: Die akustische CFL -Zahl sollte demnach über dem Wert 1 (hier: 3) liegen bei einer räumlichen Auflösung von mindestens 64 Punkten pro Wellenlänge, um akzeptable Genauigkeiten zu erreichen.

Unter diesen Einstellungen verhält sich die zweidimensionale Wellenpropagation nach der sie beschreibenden Theorie, wobei sich für einen Neigungswinkel α der Wellenfront um $\frac{\pi}{4}$ gegenüber der Horizontalen die geringsten Propagationsfehler einstellen.

Die Einbettung eines rotierenden Teilgebiets in ein stationäres Rechengebiet führt sowohl im ruhenden Fluid als auch in einem homogen durchströmten Gebiet zur Entstehung einer artifiziellen Druckverteilung p' sowie einer Sekundärströmung, die einer Starrkörperrotation ähnelt. Der Betrag der Sekundärströmung nimmt proportional mit dem Radius r zu. Diese nur numerisch eingebrachten Werte, die von $0 \frac{m}{s}$ bzw. $0 Pa$, betrachtet im globalen, ortsfesten Koordinatensystem, abweichen, hängen von der Winkelgeschwindigkeit Ω ab und verstärken sich mit zunehmender Vergrößerung der Gitterauflösung. Auch die Ablenkung und Überhöhung der Strömungsgeschwindigkeit u_{STN} eines quer zur Rotationsrichtung des sliding-mesh strömenden Fluids nimmt mit zunehmender Gittergenauigkeit ab.

Trotzdem ist das Verfahren zu rotierenden oder sich allgemein bewegenden Rechengebieten gut in ANSYS CFX umgesetzt, da sich die betrachteten Propagationsfehler eines Wellenpakets in den sliding-mesh-Rechennetzen ähnlich denen der eindimensionalen, periodischen Welle verhalten und zunehmende Winkelgeschwindigkeiten Ω der rotierenden Gebiete keinen Einfluss auf die Ausbreitungsfehler besitzen (Kapitel (5)).

6.2. Ausblick

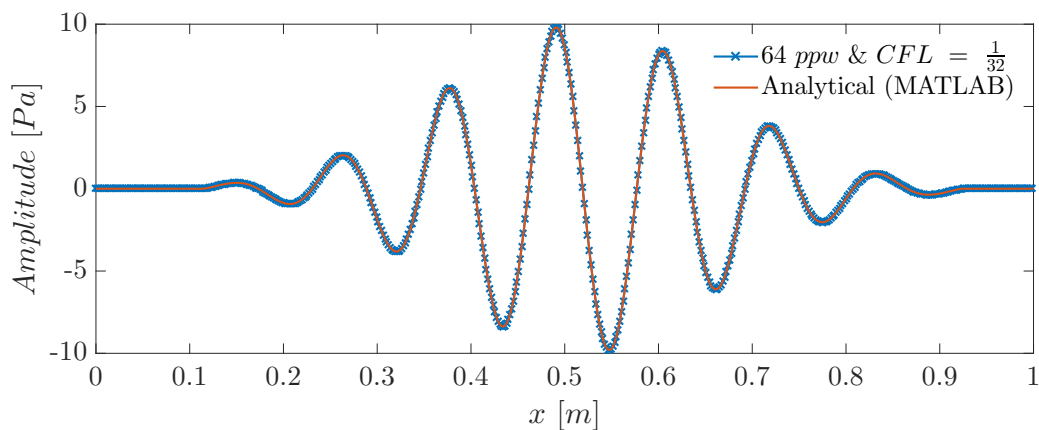
Aufgrund der dargestellten Ergebnisse wird vermutet, dass der angesprochene unerwartete Signalverlauf bei der eindimensionalen Wellenpropagation aus der Diskretisierung der Konti-

nuitätsgleichung in Kombination mit der Impulslösung und darüber mit der Druck - Geschwindigkeitskopplung des druckbasierten Löser in ANSYS CFX entsteht.

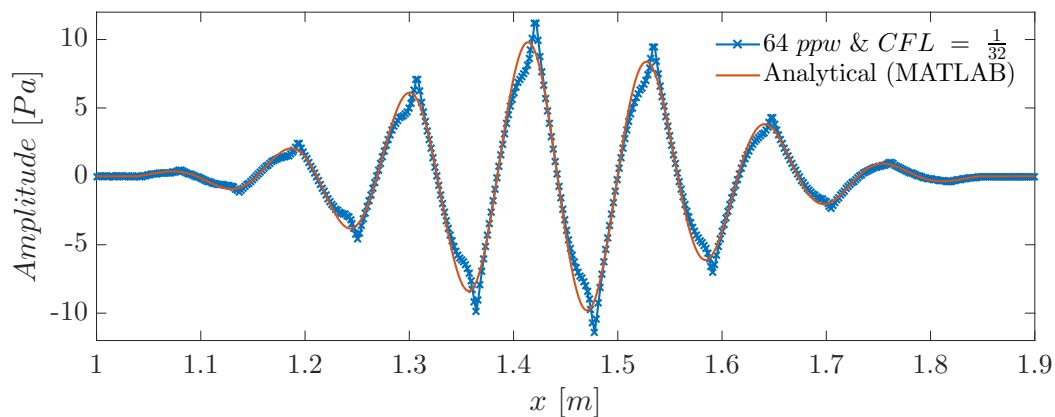
Das unerwartete Verhalten kann möglicherweise durch den Einsatz eines dichte-basierten Löser, wie er z.B. in FLUENT zum Einsatz kommt, vermieden werden. Auch über die Möglichkeit der Einstellung der „Experten“-Parameter kann die Interpolationsgenauigkeit des Rhie-Chow-Terms erhöht werden.

Zusätzlich kann eine Optimierung der Rechengitter der Simulationen mit bewegten Schnittstellen zwischen festen und rotierenden Domains durchgeführt werden, um die ausgearbeiteten Artefakte der Schnelle- und Druckverteilung \underline{u}'_{STN} bzw. p' in den Initialwerten der mit strömendem Fluid durchgeführten sliding-mesh-Simulationen zu beeinflussen. Diese vermindern sich bereits deutlich mit zunehmend feinerer Gitterauflösung, wobei auch die Ablenkung eines mit konstanter Geschwindigkeit \underline{u}_{STN} strömenden Fluids durch das bewegte Rechenetz reduziert wird.

A. Grenzfall 1: Semi-diskret in der Zeit; Zusatzmaterial Wellenpaket



(a) Startlösung zu $t = 0$



(b) Lösung zu $t = T_\Sigma$

Abbildung A.1.: Darstellung sowohl der Initialisierung als auch der Lösung des Wellenpakets zu $t = T_\Sigma$ aus ANSYS CFX mit $CFL = \frac{1}{32}$ und 64 *ppw* sowie der Anfangsdruckamplitude von $\hat{p} = 10 \text{ Pa}$ im Vergleich zur analytischen Lösung

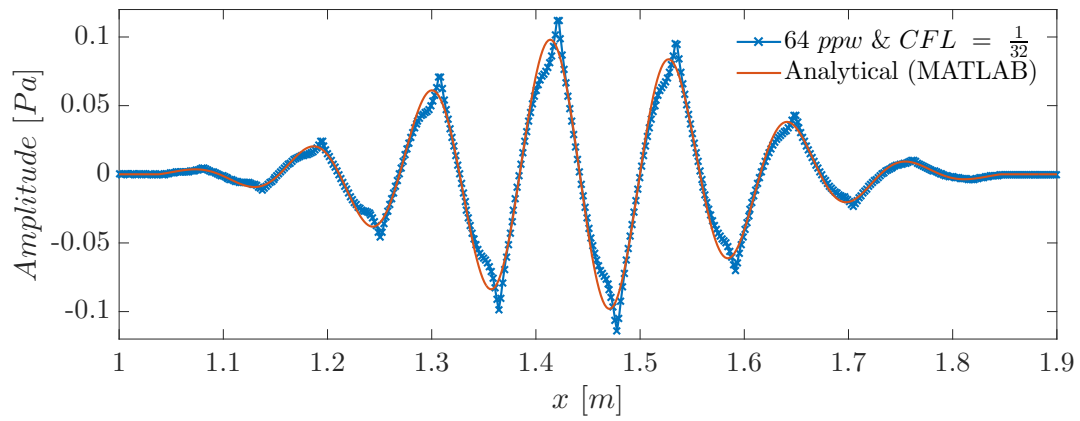
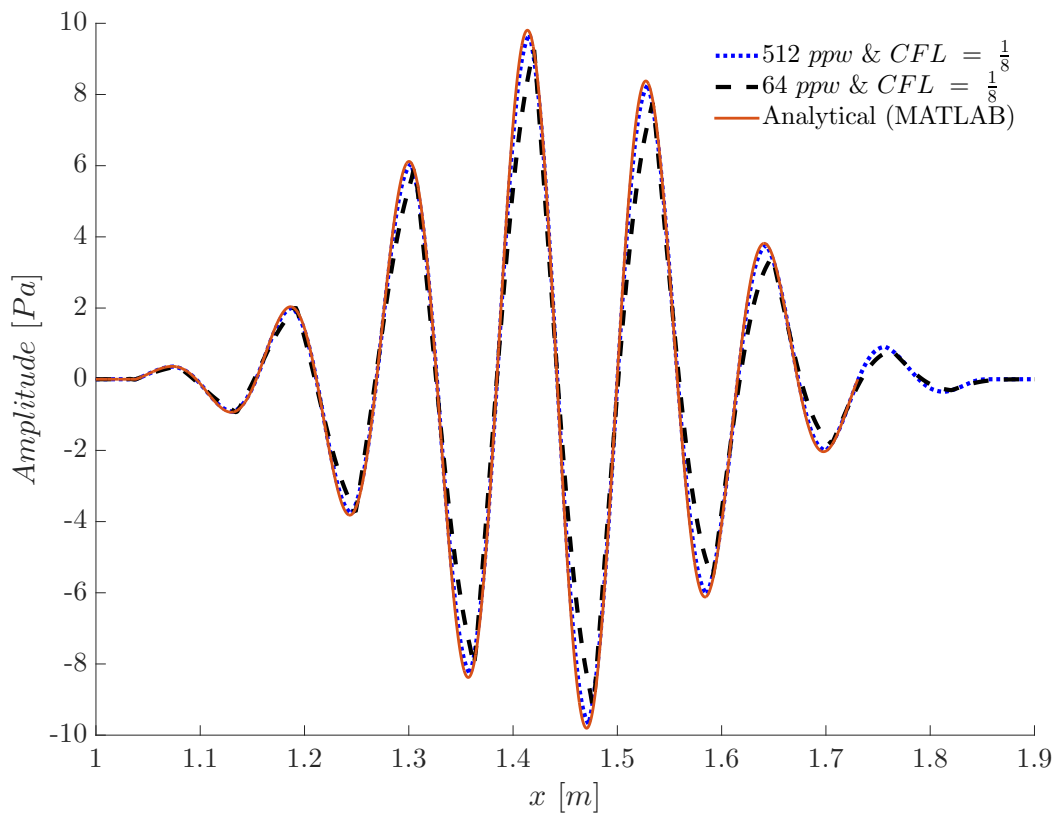
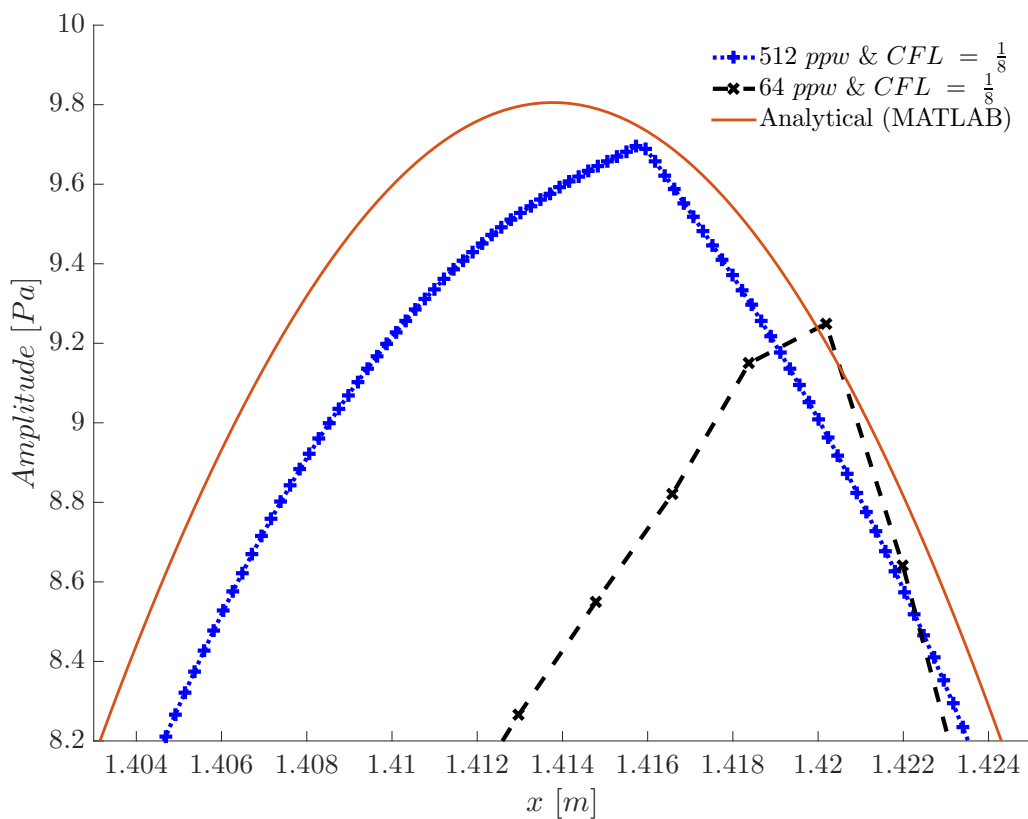


Abbildung A.2.: Darstellung der Lösung aus ANSYS CFX mit $CFL = \frac{1}{32}$ und 64 *ppw* mit einer um den Faktor 100 geringeren Amplitude von 0.1 Pa nach $t = T_{\Sigma}$ im Vergleich zur analytischen Lösung



(a) Gesamtdarstellung



(b) Vergrößerung eines lokalen Maximums

Abbildung A.3.: Effekt der Erhöhung der räumlichen Auflösung des Wellenpakets bei $CFL = \frac{1}{8}$ nach der Simulationszeit T_{Σ}

B. Auszug einer .out-Datei

Auszug einer .out-Datei aus ANSYS CFX für den Fall Euler-Rückwärts $\mathcal{O}(h^2)$ zeitlich und Upwind $\mathcal{O}(h^2)$ räumlich der periodischen Welle

This run of the CFX-15.0 Solver started at 10:07:10 on 22 May 2015 by user therrmann on rika.aer.mw.tum.de (intel_xeon64.sse2_linux2.12) using the command:

```
/global/ANSYS/v150/CFX/bin/cfx5solve -stdout-comms -batch -ccl -
```

Point Releases and Patches installed:

```
ANSYS, Inc. Products 15.0
ANSYS Mechanical Products 15.0
ANSYS, Inc. License Manager 15.0
ANSYS CFX (includes ANSYS CFD-Post) 15.0
ANSYS Fluent (includes ANSYS CFD-Post) 15.0
```

Setting up CFX Solver run ...

```
+-----+
|
|          CFX Command Language for Run
|
+-----+
```

LIBRARY:

CEL:

EXPRESSIONS:

CFL = 1

PInitWave = pamplitude*sin(kwave*x)

PropagationLength = 8*lambda

Rspecair = R/mwair


```
SimulationTime = PropagationLength/c0
T0 = 298.15 [K]
TimeStepSize = CFL*h/c0
UInitWave = uamplitude*sin(kwave*x)
c0 = sqrt(gammaair*Rspecair*T0)
cpconst = Specific Heat Capacity at Constant Pressure
forceymax = maxVal(y)@INLET
forceymin = 0 [mm]
frequency = 3000 [Hz]
gammaair = 1.4
h = c0/(32*frequency)
kwave = 2*pi/lambda
lambda = c0/frequency
mwair = 28.97 [g/mol]
omega = 2*pi*frequency
p0 = 101325 [Pa]
pamplitude = 10 [Pa]
qdt = 1/TimeStepSize
rho0 = p0/(Rspecair*T0)
uamplitude = pamplitude/(rho0*c0)
xmax = 2*lambda

END

END

MATERIAL: Air Ideal Gas
Material Description = Air Ideal Gas (constant Cp)
Material Group = Air Data, Calorically Perfect Ideal Gases
Option = Pure Substance
Thermodynamic State = Gas
PROPERTIES:
Option = General Material
EQUATION OF STATE:
Molar Mass = 28.96 [kg kmol-1]
Option = Ideal Gas
END
SPECIFIC HEAT CAPACITY:
Option = Value
Specific Heat Capacity = 1.0044E+03 [J kg-1 K-1]
Specific Heat Type = Constant Pressure
END
```

```
REFERENCE STATE:
  Option = Specified Point
  Reference Pressure = 1 [atm]
  Reference Specific Enthalpy = 0. [J/kg]
  Reference Specific Entropy = 0. [J/kg/K]
  Reference Temperature = 25 [C]
END
DYNAMIC VISCOSITY:
  Dynamic Viscosity = 1.831E-05 [kg m^-1 s^-1]
  Option = Value
END
THERMAL CONDUCTIVITY:
  Option = Value
  Thermal Conductivity = 2.61E-2 [W m^-1 K^-1]
END
ABSORPTION COEFFICIENT:
  Absorption Coefficient = 0.01 [m^-1]
  Option = Value
END
SCATTERING COEFFICIENT:
  Option = Value
  Scattering Coefficient = 0.0 [m^-1]
END
REFRACTIVE INDEX:
  Option = Value
  Refractive Index = 1.0 [m m^-1]
END
END
END
END
FLOW: Flow Analysis 1
  SOLUTION UNITS:
    Angle Units = [rad]
    Length Units = [m]
    Mass Units = [kg]
    Solid Angle Units = [sr]
    Temperature Units = [K]
    Time Units = [s]
  END
```

```
ANALYSIS TYPE:
  Option = Transient
EXTERNAL SOLVER COUPLING:
  Option = None
END
INITIAL TIME:
  Option = Automatic with Value
  Time = 0 [s]
END
TIME DURATION:
  Option = Total Time
  Total Time = SimulationTime
END
TIME STEPS:
  Option = Timesteps
  Timesteps = TimeStepSize
END
END
DOMAIN: Default Domain
  Coord Frame = Coord 0
  Domain Type = Fluid
  Location = FLUID
BOUNDARY: PeriodicInterface Side 1
  Boundary Type = INTERFACE
  Location = OUTLET
BOUNDARY CONDITIONS:
  HEAT TRANSFER:
    Option = Conservative Interface Flux
  END
  MASS AND MOMENTUM:
    Option = Conservative Interface Flux
  END
END
END
BOUNDARY: PeriodicInterface Side 2
  Boundary Type = INTERFACE
  Location = INLET
BOUNDARY CONDITIONS:
  HEAT TRANSFER:
```

```
    Option = Conservative Interface Flux
  END
  MASS AND MOMENTUM:
    Option = Conservative Interface Flux
  END
END
END
BOUNDARY: sides
  Boundary Type = SYMMETRY
  Location = SIDES
END
BOUNDARY: topbot
  Boundary Type = SYMMETRY
  Location = TOPBOT
END
DOMAIN MODELS:
  BUOYANCY MODEL:
    Option = Non Buoyant
  END
  DOMAIN MOTION:
    Option = Stationary
  END
  MESH DEFORMATION:
    Option = None
  END
  REFERENCE PRESSURE:
    Reference Pressure = p0
  END
END
FLUID DEFINITION: Fluid 1
  Material = Air Ideal Gas
  Option = Material Library
  MORPHOLOGY:
    Option = Continuous Fluid
  END
END
FLUID MODELS:
  COMBUSTION MODEL:
    Option = None
```

```
END
HEAT TRANSFER MODEL:
  Option = Total Energy
END
THERMAL RADIATION MODEL:
  Option = None
END
TURBULENCE MODEL:
  Option = Laminar
END
END
INITIALISATION:
  Option = Automatic
INITIAL CONDITIONS:
  Velocity Type = Cartesian
  CARTESIAN VELOCITY COMPONENTS:
    Option = Automatic with Value
    U = UInitWave
    V = 0 [m s-1]
    W = 0 [m s-1]
  END
  STATIC PRESSURE:
    Option = Automatic with Value
    Relative Pressure = PInitWave
  END
  TEMPERATURE:
    Option = Automatic with Value
    Temperature = T0
  END
END
END
SUBDOMAIN: Subdomain 1
  Coord Frame = Coord 0
  Location = FLUID
END
END
DOMAIN INTERFACE: PeriodicInterface
  Boundary List1 = PeriodicInterface Side 1
  Boundary List2 = PeriodicInterface Side 2
```

```
Interface Type = Fluid Fluid
INTERFACE MODELS:
  Option = Translational Periodicity
  MASS AND MOMENTUM:
    Option = Conservative Interface Flux
  MOMENTUM INTERFACE MODEL:
    Option = None
  END
END
END
MESH CONNECTION:
  Option = Direct
END
END
OUTPUT CONTROL:
  MONITOR OBJECTS:
    MONITOR BALANCES:
      Option = Full
    END
    MONITOR FORCES:
      Option = Full
    END
    MONITOR PARTICLES:
      Option = Full
    END
    MONITOR POINT: mp1lambda
      Cartesian Coordinates = 0.1153 [m], 0.05 [m], 0.005 [m]
      Coord Frame = Coord 0
      Option = Cartesian Coordinates
      Output Variables List = Absolute Pressure,Pressure,Velocity,Velocity \
        u,Velocity v
    MONITOR LOCATION CONTROL:
      Interpolation Type = Nearest Vertex
    END
    POSITION UPDATE FREQUENCY:
      Option = Initial Mesh Only
    END
  END
  MONITOR POINT: mpInlet
```

```
Cartesian Coordinates = 0 [m], 0.05 [m], 0.005 [m]
Coord Frame = Coord 0
Option = Cartesian Coordinates
Output Variables List = Pressure,Absolute Pressure,Velocity \
  u,Velocity v,Velocity
MONITOR LOCATION CONTROL:
  Interpolation Type = Nearest Vertex
END
POSITION UPDATE FREQUENCY:
  Option = Initial Mesh Only
END
END
MONITOR POINT: mpOutlet
  Cartesian Coordinates = 0.2307 [m], 0.05 [m], 0.005 [m]
  Coord Frame = Coord 0
  Option = Cartesian Coordinates
  Output Variables List = Absolute Pressure,Pressure,Velocity,Velocity \
    u,Velocity v
  MONITOR LOCATION CONTROL:
    Interpolation Type = Nearest Vertex
  END
  POSITION UPDATE FREQUENCY:
    Option = Initial Mesh Only
  END
END
MONITOR RESIDUALS:
  Option = Full
END
MONITOR TOTALS:
  Option = Full
END
END
RESULTS:
  File Compression Level = Default
  Option = Standard
END
TRANSIENT RESULTS: Transient Results 1
  File Compression Level = Default
  Include Mesh = Off
```

```
Option = Selected Variables
Output Variables List = Absolute \
    Pressure,Pressure,Temperature,Velocity u,Velocity v
OUTPUT FREQUENCY:
    Option = Timestep Interval
    Timestep Interval = 1
END
END
END
SOLVER CONTROL:
ADVECTION SCHEME:
    Blend Factor = 1.0
    Option = Specified Blend Factor
END
CONVERGENCE CONTROL:
    Maximum Number of Coefficient Loops = 35
    Minimum Number of Coefficient Loops = 1
    Timescale Control = Coefficient Loops
END
CONVERGENCE CRITERIA:
    Residual Target = 1e-09
    Residual Type = MAX
END
TRANSIENT SCHEME:
    Option = Second Order Backward Euler
TIMESTEP INITIALISATION:
    Option = Previous Timestep
END
END
END
COMMAND FILE:
    Version = 15.0
    Results Version = 15.0
END
SIMULATION CONTROL:
EXECUTION CONTROL:
    EXECUTABLE SELECTION:
        Double Precision = On
```



```
END
INTERPOLATOR STEP CONTROL:
  Runtime Priority = Standard
DOMAIN SEARCH CONTROL:
  Bounding Box Tolerance = 0.01
END
INTERPOLATION MODEL CONTROL:
  Enforce Strict Name Mapping for Phases = Off
  Mesh Deformation Option = Automatic
  Particle Relocalisation Tolerance = 0.01
END
MEMORY CONTROL:
  Memory Allocation Factor = 1.0
END
END
PARALLEL HOST LIBRARY:
  HOST DEFINITION: rika.aer.mw.tum.de
  Host Architecture String = linux-amd64
  Installation Root = /global/ANSYS/v%v/CFX
END
END
PARTITIONER STEP CONTROL:
  Multidomain Option = Independent Partitioning
  Runtime Priority = Standard
EXECUTABLE SELECTION:
  Use Large Problem Partitioner = Off
END
MEMORY CONTROL:
  Memory Allocation Factor = 1.0
END
PARTITIONING TYPE:
  MeTiS Type = k-way
  Option = MeTiS
  Partition Size Rule = Automatic
  Partition Weight Factors = 0.25000, 0.25000, 0.25000, 0.25000
END
END
RUN DEFINITION:
  Run Mode = Full
```

```
Solver Input File = \  
  /work/therrmann/Documents/slab01_2d_CFLanalyzed/3000Hz/2.Upwind2.EULE\  
  R/MAX1e-9/unidirectional/PeriodicDomain/0.23m_3000Hz_2U2E_CFL1_Period\  
  icWave_32ppw.def  
END  
SOLVER STEP CONTROL:  
  Runtime Priority = Standard  
MEMORY CONTROL:  
  Memory Allocation Factor = 1.0  
END  
PARALLEL ENVIRONMENT:  
  Number of Processes = 4  
  Start Method = Platform MPI Local Parallel  
  Parallel Host List = rika.aer.mw.tum.de*4  
END  
END  
END  
END
```

...

```
+-----+  
|                                             |  
|                               Solver        |  
|                                             |  
+-----+
```

```
+-----+  
|                                             |  
|               ANSYS(R) CFX(R) Solver 15.0 |  
|                                             |  
| Version 2013.10.10-08.49-130242      Thu Oct 10 10:23:20 BST 2013 |  
|                                             |  
|               Executable Attributes      |  
|                                             |
```

```

|           double-64bit-int32-supfort-optimised-noprof-lcomp           |
|                                                                           |
| (C) 2013 ANSYS, Inc.                                                   |
|                                                                           |
| All rights reserved. Unauthorized use, distribution or duplication    |
| is prohibited. This product is subject to U.S. laws governing         |
| export and re-export. For full Legal Notice, see documentation.      |
+-----+

```

...

Domain Name : Default Domain

Total Number of Nodes	=	260
Total Number of Elements	=	64
Total Number of Hexahedrons	=	64
Total Number of Faces	=	258

Domain Interface Name : PeriodicInterface

Discretization type	=	1:1
---------------------	---	-----

...

```

+-----+
|           Reference Pressure Information           |
+-----+

```

Domain Group: Default Domain

This is a transient run with at least one compressible fluid and no boundary pressure set. The pressure level is set through the transient term in the continuity equation.

To accelerate convergence, the pressure level will also be shifted dynamically to satisfy global mass conservation.

```
+-----+
|               Average Scale Information               |
+-----+
```

Domain Name : Default Domain

Global Length	= 6.1335E-02
Minimum Extent	= 1.0000E-02
Maximum Extent	= 2.3075E-01
Density	= 1.1837E+00
Dynamic Viscosity	= 1.8310E-05
Velocity	= 1.7120E-02
Advection Time	= 3.5827E+00
RMS Courant Number	= 4.9283E-05
Maximum Courant Number	= 6.9817E-05
Reynolds Number	= 6.7884E+01
Speed of Sound	= 3.4621E+02
Mach Number	= 4.9449E-05
Thermal Conductivity	= 2.6100E-02
Specific Heat Capacity at Constant Pressure	= 1.0044E+03
Specific Heat Capacity at Constant Volume	= 7.1730E+02
Specific Heat Ratio	= 1.4003E+00
Prandtl Number	= 7.0462E-01

```
+-----+
|               Checking for Isolated Fluid Regions               |
+-----+
```

No isolated fluid regions were found.

```
+-----+
|               The Equations Solved in This Calculation               |
+-----+
```

Subsystem : Momentum and Mass

U-Mom

V-Mom
W-Mom
P-Mass

Subsystem : Heat Transfer

H-Energy

CFD Solver started: Fri May 22 10:07:19 2015

```

+-----+
|              Convergence History              |
+-----+

```

```

+-----+
| Writing transient file 0.trn                    |
| Name   : Transient Results 1                  |
| Type   : Selected Variables                  |
| Option : Timestep Interval                  |
+-----+

```

```

=====
|              Timestepping Information              |
+-----+
|      Timestep      | RMS Courant Number | Max Courant Number |
+-----+-----+-----+
|      1.0417E-05    |          0.00      |          0.00      |
+-----+-----+-----+

```

```

=====
TIME STEP =      1 SIMULATION TIME = 1.0417E-05 CPU SECONDS = 7.359E+00
+-----+
COEFFICIENT LOOP ITERATION =      1          CPU SECONDS = 7.359E+00
+-----+

```

```

|      Equation      | Rate | RMS Res | Max Res | Linear Solution |
+-----+-----+-----+-----+-----+
| U-Mom              | 0.00 | 7.0E-02 | 9.8E-02 |      2.4E-05 OK|

```

6.2. Ausblick

V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	OK
P-Mass	0.00	1.6E-02	2.3E-02	9.0	4.1E-05 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+					
H-Energy	0.00	3.6E-01	5.0E-01	5.5	6.4E-17 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+					

COEFFICIENT LOOP ITERATION = 2 CPU SECONDS = 7.624E+00

Equation	Rate	RMS Res	Max Res	Linear Solution
U-Mom	0.00	1.8E-06	7.3E-06	4.1E-01 ok
V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
P-Mass	0.54	8.7E-03	1.2E-02	9.0 3.7E-05 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+				
H-Energy	0.34	1.2E-01	1.7E-01	5.5 6.7E-17 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+				
...				

COEFFICIENT LOOP ITERATION = 30 CPU SECONDS = 1.229E+01

Equation	Rate	RMS Res	Max Res	Linear Solution
U-Mom	0.52	2.1E-14	6.6E-14	4.9E-01 ok
V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
P-Mass	0.52	1.2E-10	1.7E-10	9.0 3.8E-05 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+				
H-Energy	0.52	1.2E-09	1.7E-09	5.5 7.8E-17 OK
+-----+-----+-----+-----+-----+				

COEFFICIENT LOOP ITERATION = 31 CPU SECONDS = 1.246E+01

Equation	Rate	RMS Res	Max Res	Linear Solution
U-Mom	0.52	1.1E-14	3.5E-14	4.9E-01 ok
V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK

P-Mass	0.52	6.0E-11	8.7E-11	9.0	3.8E-05	OK
H-Energy	0.52	6.1E-10	8.8E-10	5.5	6.3E-17	OK

...

```
=====
|                               Timestepping Information                               |
|-----|
|      Timestep      |  RMS Courant Number  |  Max Courant Number  |
|-----|-----|-----|
|  1.0417E-05      |          0.00        |          0.00        |
|-----|-----|-----|
=====
```

TIME STEP = 256 SIMULATION TIME = 2.6667E-03 CPU SECONDS = 9.186E+02

COEFFICIENT LOOP ITERATION = 1 CPU SECONDS = 9.186E+02

Equation	Rate	RMS Res	Max Res	Linear Solution
U-Mom	1.00	6.7E-02	9.0E-02	1.4E-03 OK
V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
P-Mass	1.00	2.3E-02	3.1E-02	5.0 1.7E-03 OK
H-Energy	1.34	9.4E-02	1.3E-01	5.5 7.5E-17 OK

COEFFICIENT LOOP ITERATION = 2 CPU SECONDS = 9.187E+02

Equation	Rate	RMS Res	Max Res	Linear Solution
U-Mom	0.00	9.6E-05	3.8E-04	3.0E-01 ok
V-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
W-Mom	0.00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00 OK
P-Mass	0.31	7.2E-03	9.1E-03	5.0 1.9E-03 OK

6.2. Ausblick

```
| H-Energy          | 0.32 | 3.0E-02 | 4.0E-02 | 5.5 7.4E-17 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
```

...

```
-----
COEFFICIENT LOOP ITERATION = 18          CPU SECONDS = 9.212E+02
-----
```

```
|      Equation      | Rate | RMS Res | Max Res | Linear Solution |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| U-Mom              | 0.39 | 8.4E-13 | 3.6E-12 | 2.4E-01 ok|
| V-Mom              | 0.00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 OK|
| W-Mom              | 0.00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 OK|
| P-Mass             | 0.38 | 2.0E-10 | 5.0E-10 | 5.0 4.2E-04 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| H-Energy          | 0.38 | 5.3E-10 | 1.2E-09 | 5.5 7.0E-17 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
```

```
-----
COEFFICIENT LOOP ITERATION = 19          CPU SECONDS = 9.213E+02
-----
```

```
|      Equation      | Rate | RMS Res | Max Res | Linear Solution |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| U-Mom              | 0.43 | 3.6E-13 | 1.4E-12 | 2.0E-01 ok|
| V-Mom              | 0.00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 OK|
| W-Mom              | 0.00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 | 0.0E+00 OK|
| P-Mass             | 0.37 | 7.4E-11 | 1.8E-10 | 5.0 4.6E-04 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| H-Energy          | 0.38 | 2.0E-10 | 4.2E-10 | 5.5 7.3E-17 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
```


Literaturverzeichnis

- [1] N. Adams, S. Stolz, P. Schlatter, J. Ziefle, C. Härtel, and L. Kleiser. Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik. Vorlesungsskript, 2012.
- [2] Prof. Dr.-Ing. N. A. Adams, Dipl.-Tech. Math. S. Schmidt, and Dipl.-Ing. B. Budich. Numerical Investigation of Ship-Propeller Cavitation with Full Description of Shock-Wave Dynamics. Quarterly Report 01, Technische Universität München, Institute of Aerodynamics and Fluid Mechanics, 2013.
- [3] Inc. ANSYS. *ANSYS CFX-Solver Modeling Guide*. ANSYS, Inc., release 15.0 edition, 2013.
- [4] Inc. ANSYS. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*. ANSYS, Inc., release 15.0 edition, 2013.
- [5] H. Antes, T. Meise, and T. Wiebe. Wellenausbreitung in akustischen Medien. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 54, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [6] Ch. Bailly and D. Juvé. Numerical Solution of Acoustic Propagation Problems Using Linearized Euler Equations. *AIAA Journal*, 38(1), January 2000.
- [7] J. Berland, Ch. Bogey, O. Marsden, and Ch. Bailly. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *Journal of Computational Physics*, 224(637 - 662), 2007.
- [8] T. Colonius and S. K. Lele. Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, 40(345 - 416), 2004.
- [9] A. P. Dowling and J. E. Ffowcs Williams. *Sounds and sources of sound*. E. Horwood, Chichester, 1983.
- [10] G. Efraimsson and P. Eliasson. Efficient Interpolation between Rotating and Fixed Grids in Aero Acoustic Calculations. *Colloquium EUROMECH*, 2003(449), 2003.
- [11] K. Ehrenfried. *Strömungsakustik: Skript zur Vorlesung*. Mensch-und-Buch-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] L. Haag. CFD Simulation of rotating car wheels - Evaluation of different wheel rotation modeling approaches. Diplomarbeit, 2013.

- [13] Ch. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1988.
- [14] S. K. Lele. Computational aeroacoustics - A review. *AIAA Meeting Papers*, 97(0018), 1997.
- [15] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [16] A. D. Pierce. Springer Handbook of Acoustics. In Thomas Rossing, editor, *Springer Handbook of Acoustics*, chapter Basic Linear Acoustics, pages 49–52. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2014.
- [17] Ch. L. Rumsey. Computation of acoustic waves through sliding-zone interfaces using an Euler/Navier-Stokes code. *AIAA Meeting Papers*, 96(1752), 1996.
- [18] S. A. F. Seidl. *Ein hybrides Verfahren zur numerischen Simulation des strömungsinduzierten Schalls auf Basis von akustischen Störgleichungen*. PhD thesis, Technische Universität München, Institut für Energietechnik MW7, 2013.
- [19] M. Stuhlpfarrer. Simulation of Cavitating Flows with ANSYS CFX. Diplomarbeit, 2012.
- [20] Ch. K. W. Tam. Recent advances in computational aeroacoustics. *Fluid Dynamics Research*, 38(591 - 615), 2006.
- [21] L. N. Trefethen. Group Velocity in Finite Difference Schemes. *SIAM Review*, 24(2), 1982.
- [22] M. Wang, J. B. Freund, and S. K. Lele. Computational Prediction of Flow-Generated Sound. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38(483 - 512), 2006.
- [23] V. L. Wells and R. A. Renaut. Computing aerodynamically generated noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29(161 - 99), 1997.
- [24] V. L. Wells and R. A. Renaut. Unsteady Euler computations through non-matching and sliding-zone interfaces. *AIAA Journals*, 98(0371), 1998.
- [25] M. Zhuang and Ch. Richter. *Computational AeroAcoustics and its Applications*. Michigan State University and Berlin University of Technology (TUB), Michigan, Berlin, 2008.