

## Aschenputtel und die Perlen So etwas wie eine Buchbesprechung von Jürgen Richter-Gebert

Selten führt bei mir schon der erste Blick auf das Cover eines Mathematikbuchs zu einer gewissen Euphorie. Bei *Indras Pearls – The Vision of Felix Klein* von David Mumford, Caroline Series und David Wright ist das passiert. Neben dem viel versprechenden Titel und Untertitel waren es vor allem zwei Schlüsselreize, die meine Aufmerksamkeit erregt haben.

Erstens: Das Titelbild zeigt eine Graphik, die sehr viel Ähnlichkeit mit Bildern hat, die ich zuvor bei Computereperimenten selbst erzeugt hatte, die mich faszinierten, und deren Zustandekommen ich nie so recht verstanden hatte. Zweitens: Dass in diesem Zusammenhang bereits im Untertitel des Buches *Felix Klein* auftauchte, fand ich bemerkenswert. Immerhin stellten doch Kleins Arbeiten eine wichtige Grundlage für das Programm dar, mit dessen Hilfe ich die fraglichen Bilder erzeugt hatte. Kurz gesagt: Das Buch versprach Aufklärung. Ein Eindruck, der sich beim Hineinblättern nur noch verstärkte, phantastische Illustrationen, gepaart mit anscheinend fundierten mathematischen Erklärungen. Und das präsentiert in einer Weise, die offensichtlich recht zugänglich war und den Versuch wagt, das allgemeine Verständnis über einen streng formalen Aufbau zu stellen.

Im Folgenden berichte ich über meine Erlebnisse und Erfahrungen im Zusammenspiel von *Indras Pearls* und dem dynamischen Geometrieprogramm *Cinderella*.

### Zur Vorgeschichte

Gemeinsam mit meinem Koautor Ulrich Kortenkamp entwickle ich nun seit einigen Jahren das dynamische Geometrieprogramm *Cinderella*, über das in den *Mitteilungen* ja bereits berichtet wurde. Es geht uns dabei um die Entwicklung eines Programms, mit dem man Geometrie experimentell, spielerisch und dennoch exakt erfahren kann. Mit der Maus werden (mehr oder weniger) elementare geometrische Konstruktionen auf dem Bildschirm angefertigt; ist man

mit einer Konstruktion fertig, so kann man die freien Basis-Elemente der Konstruktion immer noch bewegen, der Rest der Konstruktion bewegt sich entsprechend der Konstruktionsvorschriften konsistent mit. Auf diese Weise kann man einer geometrischen Konstruktion wesentlich mehr Informationen und intuitive Zusammenhänge entnehmen als bei einer rein statischen Zeichnung (Abb. 1).

Unsere Zielsetzung ist es dabei, wenn immer es nötig erscheint, fortgeschrittene mathematische Konzepte zu implementieren, die letztlich garantieren, dass sich im Idealfall die Objekte auf dem Bildschirm verhalten wie „reale Objekte“ in einem fiktiven geometrischen Universum, in dem alle Zusammenhänge mathematisch fundiert und korrekt sind. So ist es kein Wunder, dass bei der Implementierung

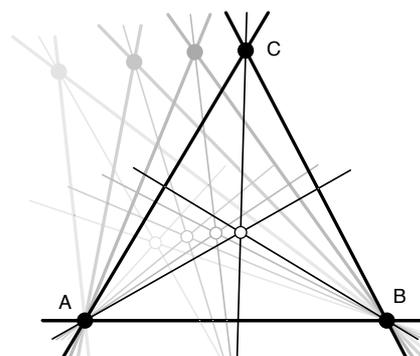


Abbildung 1. Winkelhalbierende in Bewegung

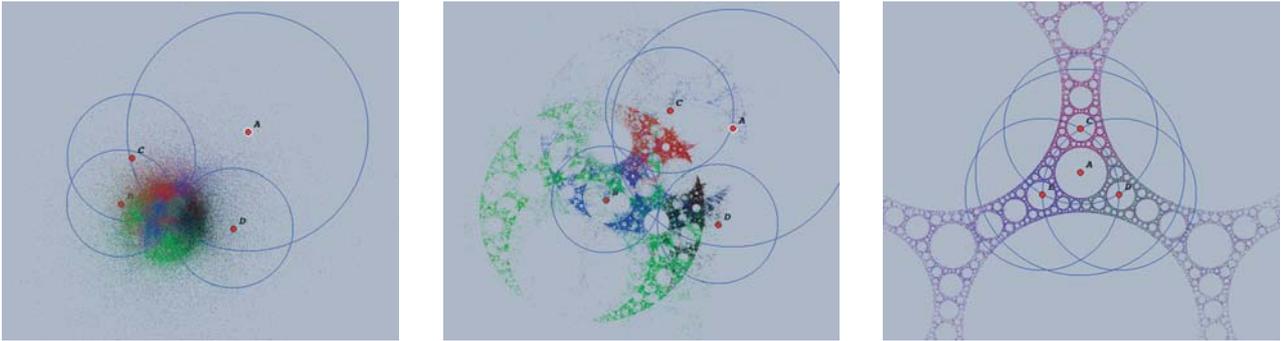


Abbildung 2. Vom Chaos zur Ordnung. Für viele Lagen der Kreise ergeben sich nur ungeordnete Punktwolken, in bestimmten Bereichen treten plötzlich kreisförmige Strukturen und Löcher auf, bei speziellen Lagen ist das IFS eine hochgradig strukturierte Kreispackung.

des Programmes Konzepte wie projektive Geometrie (zur Behandlung von unendlich fernen Elementen), komplexe Funktionentheorie (zum Umwandern geometrischer Singularitäten), Cayley–Klein-Geometrien (zur Darstellung von Metriken auch in nicht-euklidischen Geometrien) und automatische Beweistechniken (zum Sauberhalten der Datenstruktur) eine große Rolle spielen.

Derzeit arbeiten wir an der Implementierung einer neuen Version, die (unter anderem) als ein wesentliches Feature den Umgang mit Transformationen und Transformationsgruppen gestattet. In diesem Rahmen ist es möglich, sich zu einer gegebenen Menge von Transformationen ein Iteriertes Funktionen-System (IFS) zeichnen zu lassen. Solch ein IFS ist in der Regel ein Fraktal, welches gleichzeitig selbstähnlich unter allen erzeugenden Transformationen ist. Als ich nun im Sommer 2002 mit der Implementierung von Kreis inversionen und Möbius-Transformationen fertig war, reichlich übermüdet nach einer programmierintensiven Nacht, probierte ich spaßeshalber aus, wie wohl ein IFS von zwei Inversionen am Kreis aussehen würde. Erstaunlicherweise ergab sich als Figur nichts anderes als eine Punktwolke, die im Wesentlichen einen dritten Kreis senkrecht auf den beiden ersten bildete. Beim zweiten Hinsehen war dies auch nicht weiter erstaunlich: ein Kreis  $A$ , der senkrecht auf einem Kreis  $B$  steht, bleibt unter Inversion an  $B$  invariant. Also, neuer Versuch – drei Kreise! Hier ergab sich auch nicht allzu viel Spannendes. Für bestimmte Lagen ergaben sich recht chaotisch aussehende Punktwolken, für andere Lagen ergab sich ein Kreis, der senkrecht auf den drei anderen stand. Noch ein Versuch – vier Kreise! Auch hier sahen die anfänglichen Bilder nicht sehr vielversprechend aus. Für bestimmte (gar nicht so seltene) Positionen der Kreise zeichneten sich jedoch schemenhaft strukturierte Muster ab, bei denen kreisförmige Löcher in der Punktwolke mehr oder weniger deutlich zu Tage traten. Der Verdacht bestätigte sich, als ich

die Inversionskreise in annähernd symmetrische Lage zueinander brachte, und das IFS das Muster einer hochgradig strukturierten, rekursiven Kreispackung annahm (Abb. 2). Mir war zwar klar, dass diese Figur unter den vier Kreis inversionen invariant war. Es war mir aber ein vollkommenes Rätsel, wie man solche Bilder gezielt erzeugen und kontrollieren könnte, bzw. durch welche Mechanismen sie letztendlich zustande kommen.

*Grenzpunkte und Iterierte Funktionen-Systeme.* Eine Menge  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  von kontrahierenden geometrischen Transformationen auf einem vollständigem Metrischen Raum nennt man ein Iteriertes Funktionen-System. Für jedes endliche Wort  $\omega$  im Alphabet  $\{1, \dots, n\}$  hat die Hintereinanderausführung  $T_\omega = T_{\omega_1} \circ T_{\omega_2} \circ \dots \circ T_{\omega_k}$  einen eindeutigen Fixpunkt (auch Grenzpunkt genannt). Die Vereinigung aller solcher Fixpunkte ist der *Attraktor* oder die *Grenzmenge* des IFS. Der Attraktor hat die Eigenschaft, selbstähnlich unter allen Transformationen  $T_1, T_2, \dots, T_n$  zu sein. Auf einem Computer lassen sich derartige Attraktoren visuell dadurch erzeugen, dass man nach Wahl eines beliebigen Startpunktes gemäß einer randomisierten Reihenfolge die Transformationen iteriert und nach jeder Iteration den Bildpunkt zeichnet. Mit Wahrscheinlichkeit 1 erzeugt man dabei in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung eines Grenzpunktes einen Bildpunkt.



## Kleins Visionen

Vor rund 100 Jahren studierte Felix Klein gemeinsam mit Robert Fricke die *Theorie automorpher Funktionen*. In den sehr ausführlichen Untersuchungen ging es unter anderem darum, eine Systematik diskreter Transformationsgruppen (z. B. Klein'sche Gruppen oder Fuchs'sche Gruppen), zu entwickeln. In einem sehr umfangreichen mehrbändigem Werk (bei dem bereits der erste Band 634 Seiten fasst) wird versucht, unter konsequenter Einbeziehung projektiver und funktionentheoretischer Blickweisen die damals noch recht frisch bekannt gewordenen Erkenntnisse der Gruppentheorie auf geometrische Transformationen anzuwenden. Die betrachteten Transformationen sind dabei durchweg projektive Transformationen entweder in  $\mathbb{R}P^2$  oder in  $\mathbb{C}P^1$  (in  $\mathbb{C}P^1$  sind dies genau die Möbius-Transformationen). Beide Räume können im Wesentlichen als kompaktifiziertes Abbild der normalen Zeichenebene aufgefasst werden, jedoch mit unterschiedlichen Kompaktifizierungen. Bei  $\mathbb{R}P^2$  wird eine ganze reelle projektive Gerade als Gerade im Unendlichen hinzugenommen und man erhält die projektive Ebene. Bei  $\mathbb{C}P^1$  hingegen wird der Abschluss durch das Hinzufügen eines einzelnen, unendlich fernen Punktes erreicht und man erhält die Riemann'sche Zahlenkugel. Einige der in beiden Räumen betrachteten Abbildungen lassen sich im Bereich der Zeichenebene miteinander identifizieren (dies sind genau die euklidischen Abbildungen).

Sowohl mathematisch als auch ästhetisch ausgesprochen interessant sind die so genannten loxodromischen Transformationen in  $\mathbb{C}P^1$ . Dies sind die Möbius-Transformationen  $M$ , bei denen die Bahn eines Punktes unter iterierter Anwendung von  $M$  nicht auf einer kreisförmigen oder geradlinigen Bahn liegt (Abb. 3).

Im dritten Kapitel des ersten Bandes (also ab Seite 399) werden dort auch diskrete Gruppen betrachtet, die durch geeignete Verkettung von Kreis inversionen in  $\mathbb{C}P^1$  erzeugt werden, und es werden deren

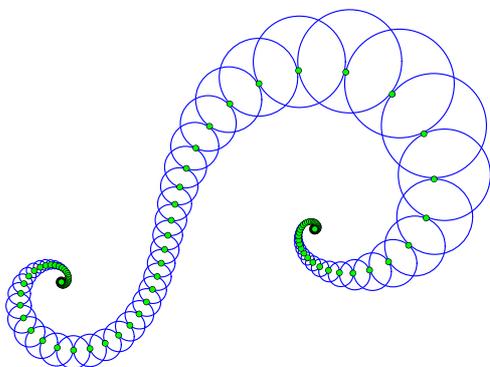


Abbildung 3. Bahn eines Punktes und eines Kreises unter einer typischen loxodromischen Transformation.

Grenzpunktmengen studiert. Klein und Fricke schreiben:

Um endlich noch eine directe, aber natürlich sehr unvollkommene Anschauung der Grenzkurve  $G$  zu geben, ist umstehend in Figur 145 ein besonderes Vierecknetz unserer Art gezeichnet und innerhalb der offengelassenen Kreise der ungefähre Verlauf der Grenzkurve angedeutet.

Das in diesem Zitat erwähnte „Vierecknetz“ bezieht sich auf die Tatsache, dass in besagter Abbildung eine Gruppe dargestellt wird, die durch Inversion an vier Kreisen erzeugt wird. Ferner sind in Kleins Beispiel die vier Kreise so gewählt, dass sich an vier Stellen Tangentialitäten ergeben, die Kreise somit ein ringförmiges Gebilde formen. Dies ist genau die Bedingung, die dafür verantwortlich ist, dass die Attraktormenge in der Tat eine Kurve ist und nicht in eine Menge disjunkter Punkte zerfällt (Abb. 4).

## Indras Pearls – das Buch

In gewisser Weise beschäftigt sich das Buch *Indras Pearls* mit der Frage „Was wäre passiert, wenn Klein und Fricke einen Computer gehabt hätten?“ Konkret geht es um eine systematische Untersuchung der Grenzpunktmengen von vier Möbius-Transformationen  $A$ ,  $A^{-1}$ ,  $B$  und  $B^{-1}$ . Hierbei wird die von  $A$  und  $B$  erzeugte Gruppe  $\langle A, B \rangle$  betrachtet. Jedes Gruppenelement in  $\langle A, B \rangle$  ist selbst wieder eine Möbius-Transformation und hat einen attraktiven Fixpunkt. Die Menge all dieser Fixpunkte ist die fragliche Grenzpunktmenge.

*Indras Pearls* widmet sich nun ausschließlich der Frage, wie diese (von nur acht komplexen Parametern abhängenden) Fixpunktmengen aussehen. Zunächst stellt man fest, dass man im generischen Fall lediglich einen unstrukturierten und chaotischen Punktehaufen erhalten wird, der in der Ebene dicht liegt. Dies passiert immer, wenn  $A$  und  $B$  nicht gewisse Kontraktionseigenschaften erfüllen. Eine nicht-dichte Punktmenge erhält man, wenn es sich bei  $\langle A, B \rangle$  um eine sogenannte Schottky-Gruppe handelt. Diese ist charakterisiert dadurch, dass vier Kreisscheiben  $c_A, c_B, c_{A^{-1}}, c_{B^{-1}}$  existieren, so dass  $A$  das Äußere der Scheibe  $c_A^{-1}$  bijektiv auf das Innere von  $c_A$  abbildet, und Entsprechendes für  $B$  und die anderen beiden Kreisscheiben gilt. Sind die Kreisscheiben disjunkt (und berühren sich nicht), so ist die Fixpunktmenge total unzusammenhängend, was die Autoren als „fraktaler Staub“ beschreiben. Die Gruppe  $\langle A, B \rangle$  ist in diesem Fall frei. Interessant wird die Situation, wenn man von disjunkten Scheiben zu einer Berührsituation übergeht und wenn für  $A$  und  $B$  zusätzlich einige Nebenbedingungen erfüllt sind. Berühren sich die Kreispaaire  $(c_A, c_B)$ ,  $(c_B, c_{A^{-1}})$ ,

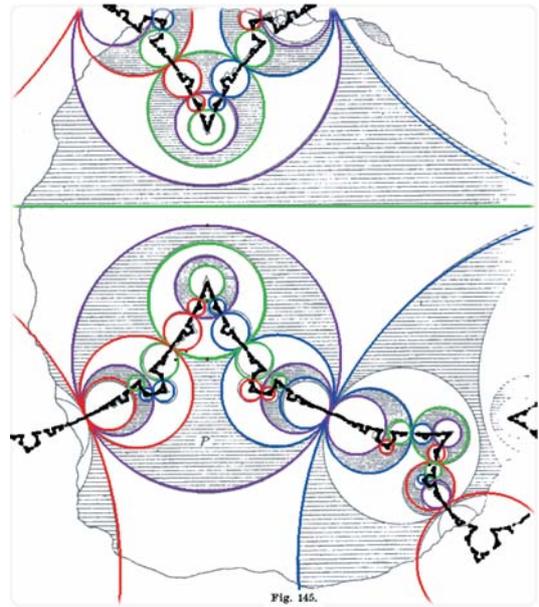
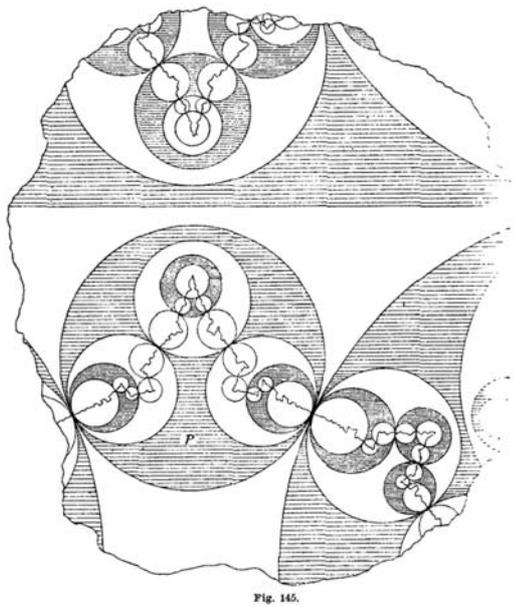


Abbildung 4. Wie gut konnten Klein und Fricke zeichnen? In der obigen Originalzeichnung ist eine iterierte Inversion an vier tangentialen Kreisen angedeutet, gemeinsam mit der Lage der Grenzlinie. Das darüber konstruierte Computerbild zeigt, dass die Lage der Kreise fast exakt getroffen wurde. Die grobe Lage der Grenzkurve wurde auch sehr gut erfasst, wohingegen einige wesentliche selbstähnliche Eigenschaften der Grenzkurve nur unzureichend wiedergegeben wurden.

$(c_{A^{-1}}, c_{B^{-1}})$ ,  $(c_{B^{-1}}, c_A)$  und sind zudem die Berührungspunkte Fixpunkte der Kompositionen  $ABA^{-1}B^{-1}$ ,  $BA^{-1}B^{-1}A$ ,  $A^{-1}B^{-1}AB$ , und  $B^{-1}ABA^{-1}$  (in dieser Reihenfolge), so hat die Grenzpunktmenge eine bemerkenswerte geometrische Eigenschaft: sie ist topologisch zu einer geschlossenen Kreislinie äquivalent. Dies ist genau die Situation der im letzten Abschnitt behandelten Zeichnung von Fricke und Klein. Kapitel 6 bis 10 (der Hauptteil des Buches) beschäftigt sich genau mit der Analyse der Formen dieser Kurven.

Dies klingt zunächst nach einem nicht zu komplizierten Unterfangen. Betrachtet man allein die Freiheitsgrade der untersuchten Objekte, so stellt man fest, dass unter Berücksichtigung aller Randbedingungen und bis auf komplexe projektive Äquivalenz genau zwei komplexe Freiheitsgrade übrig bleiben. In der bewussten Kontrolle dieser beiden Parameter verbirgt sich aber eine überaus überraschende Formenvielfalt.

An dieser Stelle sind die Leistungen der Autoren aus mehreren Gründen hervorzuheben. Erstens gelingt es ihnen, in den ersten Kapiteln eine überaus verständliche und elementare Einführung in die Thematik zu geben, die, angefangen bei Symmetrien und Symmetriegruppen, über projektive und Möbiustransformationen bis hin zu notwendigen Begriffen der Topologie, Maßtheorie und der Riemann'schen Flächen den Leser an die Thematik heranführt (Kapitel 1–3). Der mathematisch vorgebildete Leser kann diese Kapitel getrost überschlagen, wenngleich die

Lektüre durchaus angenehm ist. Der weniger vorgebildete Leser erhält alles an notwendigem Rüstzeug, um den nun folgenden durchaus nicht trivialen Ausführungen gut folgen zu können. Zweitens ist das Buch eines der schönsten mir bekannten Beispiele für die Veranschaulichung einer der Mathematik innewohnenden Ästhetik. Die Abbildungen gehören zu den qualitativ hochwertigsten Visualisierungen von mathematischen Strukturen, die derzeit erhältlich sind. Jeder, der einmal versucht hat, vergleichbare Bilder zu produzieren, weiß, wie schwierig das ist.

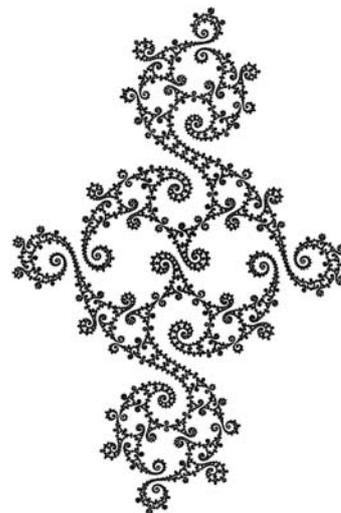


Abbildung 5. „Fraktaler Staub“ – Abbildung aus *Indras Pearls*

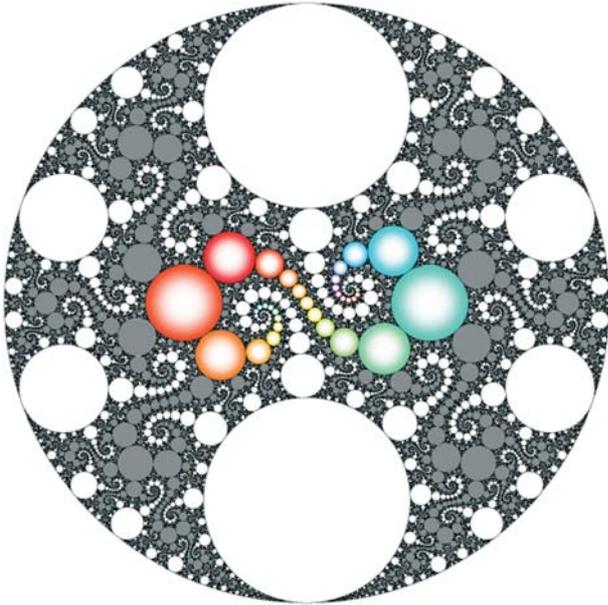


Abbildung 6. Abbildung aus *Indras Pearls*: Eine einfach geschlossene Kurve! Die Attraktorenmenge weist faszinierende strukturelle Eigenschaften und Selbstähnlichkeiten auf.

Der dritte Punkt, den ich hier hervorheben möchte, verdient besondere Beachtung, denn er verknüpft auf wunderschöne Weise die zu Grunde liegende Mathematik und die dargebotene Visualisierung:

Das Buch behandelt sehr ausführlich die Frage „Wie erzeugt man solche Bilder?“. Dabei wird klar, dass die Konstruktion der Bilder (die pixelgenau bis an die Grenzen des im Druck Darstellbaren gerechnet sind) die tiefe Kenntnis der dahinter liegenden Mathematik erfordert. Das grobe Prinzip der Erzeugung

ist dabei das folgende: Jedem unendlichen Wort im Alphabet  $\{A, B, a^{-1}, B^{-1}\}$  entspricht ein Punkt der Fixpunktmenge. Hierbei spiegelt eine gewisse Variante der lexikographischen Ordnung der Wörter genau die Nachbarschaftsbeziehungen der Kurve wieder (etwa so, wie die lexikographische Ordnung der Kommazahlen in Dezimaldarstellung die Nachbarschaftsbeziehungen auf der Zahlengerade widerspiegeln). Die Grenzpunkte der periodischen unendlichen Wörter dieses Alphabets liegen hierbei dicht in der Menge aller Grenzpunkte (analog dazu, wie die periodischen Dezimalbrüche dicht in der Menge der reellen Zahlen liegen). Um eine Kurve wie in der Abbildung 6 zu erzeugen, muss man also lediglich „viele“ derartige Grenzpunkte berechnen und „in der richtigen Reihenfolge“ miteinander durch Strecken verbinden. Der Abstand benachbarter Punkte sollte hierbei so gering sein, dass der Eindruck einer (fraktalen) Kurve entsteht.

Das Problem ist hierbei weder die Erzeugung des Grenzpunktes, der zu einem periodischem Wort gehört (dies ist nur ein Eigenwertproblem), noch das Verbinden in der richtigen Reihenfolge (die ist ja durch die Variante der lexikographische Ordnung gegeben). Das eigentliche Problem liegt darin, nicht zu wenige und nicht zu viele Punkte zu erzeugen, um einerseits den Detailreichtum der Kurve zu gewährleisten, andererseits in vertretbarem Zeitrahmen fertig zu werden. Dies ist keine leichte Aufgabe, und wird von den meisten „naiven“ Algorithmen für Grenzpunkt mengen (wie beispielsweise dem im Kasten beschriebenen randomisierten IFS-Algorithmus, der auch in Cinderella implementiert ist) in keiner

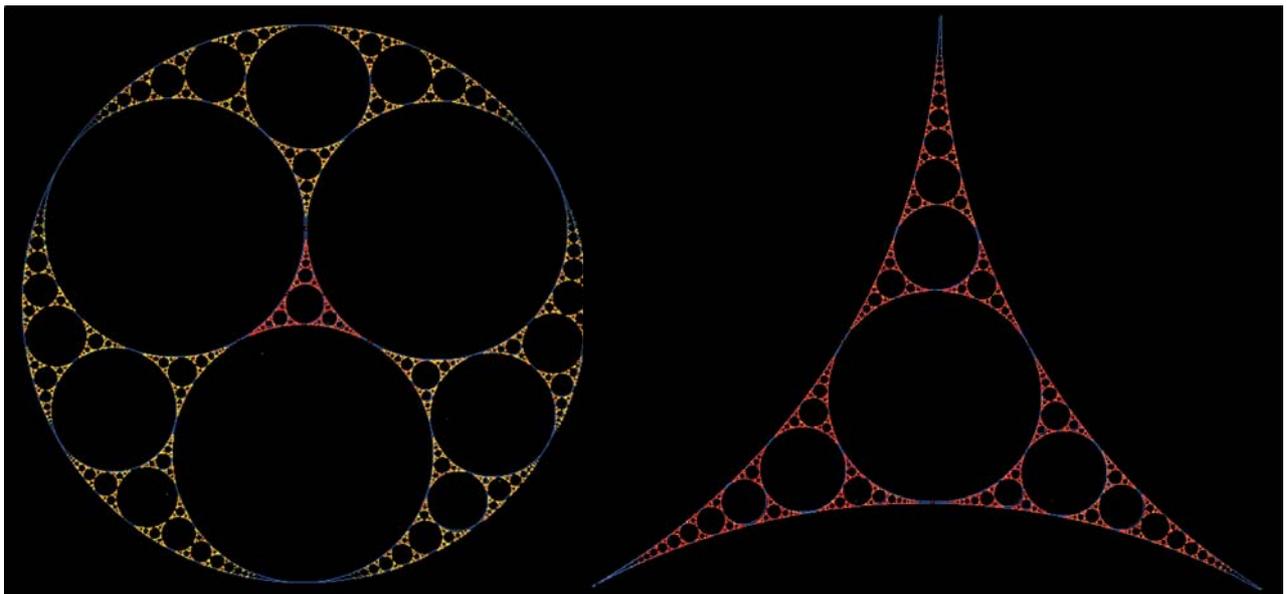


Abbildung 7. Grenzkurve in der sehr speziellen Situation, in der die Schottky-Kreise an sechs Punkten tangential sind, zusammen mit einer Ausschnittsvergrößerung der Mitte.

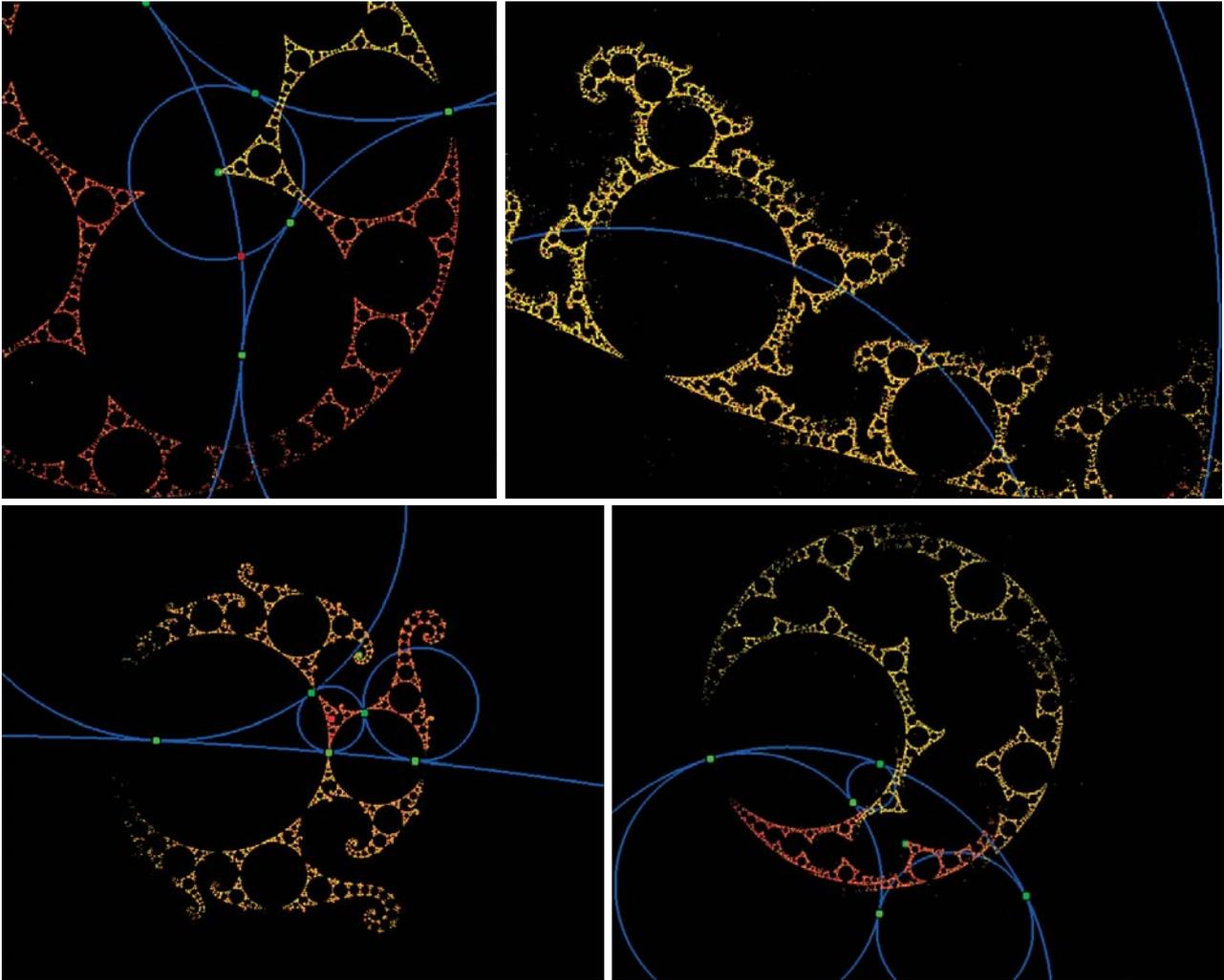


Abbildung 8. Einige Ausschnittsvergrößerungen bei speziellen Wahlen der Parameter

Weise erfüllt. Ein Blick auf die mit Cinderella erzeugte Abbildung 7 macht klar, wo das Problem liegt. Das Bild wurde künstlich durch das Hinterlegen von blauen Kreisen „geschönt“. Die eigentlichen vom IFS-Algorithmus erzeugten Grenzpunkte sind rot und gelb. Am unteren Rand der Abbildung erkennt man, dass sich das IFS optisch nicht schließt, obwohl dies der mathematischen Realität entsprechen würde.

In der Tat, wenn man nur lange genug (wohl einige Jahre) warten würde, dann würde sich auch diese Stelle des Bildes langsam mit gelben Punkten füllen. Wörter, die Punkten an diesen Stellen der Grenzpunktmenge entsprechen, sind sehr speziell: Es muss die gleiche Transformation sehr häufig hintereinander ausgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt am untersten Rand des Bildes in einer gewissen Zeitspanne zu erzeugen, sinkt exponentiell, je weiter man sich dem Rand nähert. Dies ist derselbe Effekt, wie wenn man versucht, beim Münzwerfen hundertmal hintereinander „Zahl“ zu werfen. Würde

man allerdings tatsächlich so lange warten, bis sich der Rand sichtbar mit gelben Pixeln gefüllt hätte, so würde man die meiste Rechenzeit damit verbringen, Punkte zu erzeugen, die ohnehin schon getroffen wurden.

Ein guter Algorithmus benötigt also Kontextwissen über die Konstruktion, das es ihm ermöglicht, die Rekursionstiefe selektiv zu erhöhen, wann immer die Situation des Bildes es erfordert und wieder zu verringern, wenn dies nicht der Fall ist. Die Wörter werden bei *Indras Pearls* über einen Tiefensuchenalgorithmus erzeugt, welcher gleich die richtige Reihenfolge gewährleistet. Die Formulierung des Abbruchkriteriums erfordert wiederum einige gruppentheoretische, topologische und zahlentheoretische Betrachtungen, in die der Leser aktiv einbezogen wird. Die Methoden werden im Verlauf des Buches, wenn die betrachteten Beispiele immer subtiler und mathematisch spannender werden, zunehmend ergänzt und verfeinert. Leider werden im Buch keine konkreten

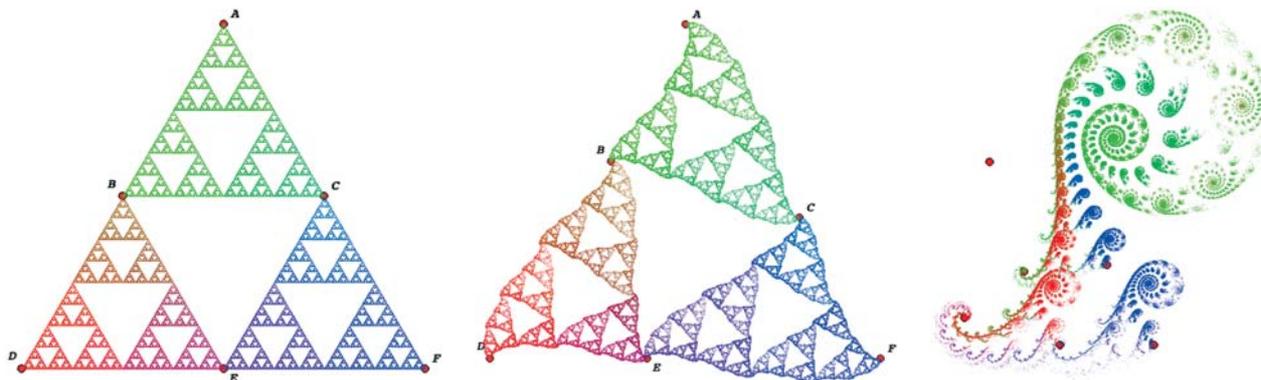


Abbildung 9. Metamorphosen eines Sierpinski-Dreiecks

Angaben über Auflösung, Rekursionszeiten und Rechenzeiten gemacht. Zum Ausgleich wird aber in speziellen Abschnitten des Buches konkreter Pseudo-Programcode angegeben, mit dem man die Algorithmen selbst nachprogrammieren kann. Für den eher informatisch orientierten Leser bietet der Code auch eine große Hilfe die mathematischen Hintergründe im Detail zu verstehen.

Sind erst einmal die Grundprinzipien und die Algorithmen erklärt, so wird im Buch untersucht, welche interessanten Effekte sich bei der speziellen Wahl von Parametern ergeben. Auch hier fließen wieder viele gruppentheoretische, topologische, und zahlen-theoretische Aspekte ein (als Stichworte erscheinen hier Teichmüller-Räume, Maskit Slices, u. v. m.), auf die aber hier nicht eingegangen werden soll. Insbesondere werden Bedingungen analysiert, unter denen in den Schattenkreisen der Grenzkurven zusätzliche Tangentialitäten entstehen, die sich nicht allein aus der Schottky-Eigenschaft erklären lassen. In gewissem Sinne erklärt *Indras Pearls* genau, wie und mit welchen Methoden man bestimmte Effekte in den Grenzpunktmengen gezielt erzeugen kann.

## Unterwegs mit einer Landkarte

Wenngleich die Algorithmen in *Indras Pearls* um ein Vielfaches ausgefeilter sind als der IFS-Algorithmus, der in *Cinderella* implementiert ist, hat doch *Cinderella* einige entscheidende Vorzüge: Der randomisierte Algorithmus sorgt dafür, dass die grossräumige Struktur des Bildes für eine konkrete Parameterwahl in Sekundenbruchteilen sichtbar wird. Diese Eigenschaft paart sich nun sehr vorteilhaft mit der Möglichkeit, ein Bild durch Ziehen an den Basiselementen interaktiv zu verändern, wodurch die Suche nach interessanten Konstellationen zu einer interaktiven Studie in experimenteller Mathematik wird. Hinzu kommt, dass sich die geometrischen Randbedingungen (wie z. B. tangential-

le Schottky-Kreise) direkt geometrisch konstruieren lassen. Dadurch ist es möglich, vollkommen ohne Programmieraufwand die Grundkonstellation

*Wie man  $\mathbb{RP}^2$  und  $\mathbb{CP}^1$  verschmilzt:*

Ein besonderes Detailproblem ergab sich bei der Implementation von Möbius-Transformationen und Kreisinvolutionen in *Cinderella*. Wie eingangs erwähnt ist das geometrische Modell hinter *Cinderella* im Wesentlichen der  $\mathbb{RP}^2$ , um das Einbeziehen von Fernelementen zu ermöglichen. Andererseits sind Möbius-Transformationen Transformationen  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Aufgrund anderer Randbedingungen, die mit der erwünschten Stetigkeit abhängiger Objekte zusammenhängen, war es notwendig, Möbius-Transformationen als analytische Funktionen auf  $\mathbb{RP}^2$  auszudrücken. Diese Abbildungen sollen auf dem Gebiet, auf dem  $\mathbb{CP}^1$  und  $\mathbb{RP}^2$  identifiziert werden, nicht degeneriert sein. Obwohl es sich bei Möbiusabbildungen nicht um projektive Abbildungen des  $\mathbb{RP}^2$  handelt, ist dies dennoch extrem elegant möglich. Jede beliebige Möbius-Transformation kann nämlich für geeignete Wahl von  $3 \times 3$  Matrizen  $A$  und  $B$  in der Form

$$p \mapsto Ap \times Bp$$

dargestellt werden, wobei  $p$  die homogenen Koordinaten eines Punktes in  $\mathbb{RP}^2$  sind. Die Matrizen  $A$  und  $B$  müssen hierbei allerdings sehr spezielle Form haben. Lässt man allgemeine derartige Transformationen zu, erhält man projektiv verzerrte Möbius-Transformationen, bzw. projektiv verzerrte Kreisinvolutionen (also Inversionen am einem Kegelschnitt).

so zu entwerfen, dass alle gewünschten Beziehungen zwischen den Kreisen konstruktiv erzwungen werden. Eine Möbius-Transformation lässt sich in *Cinderella*

2.0 einfach durch Angabe dreier Bild/ Urbild Punkt-paare definieren. Das Erzeugen eines IFS aus einer Transformationenmenge steht direkt zur Verfügung. Auf diese Weise kann man all die Experimente in *Indras Pearls* auf eine direkte geometrische Weise nachvollziehen. Für keine der für diesen Artikel erzeugten Cinderella-Bilder war es nötig, zusätzlichen Code in

Cinderella 2.0 zu implementieren.

Dem Vorteil der direkten geometrischen Manipulation steht allerdings der Nachteil gegenüber, dass es in der aktuellen Version leider nicht möglich ist, direkt die Parameter für die Möbius-Transformationen anzugeben, was das Nachvollziehen der komplexeren

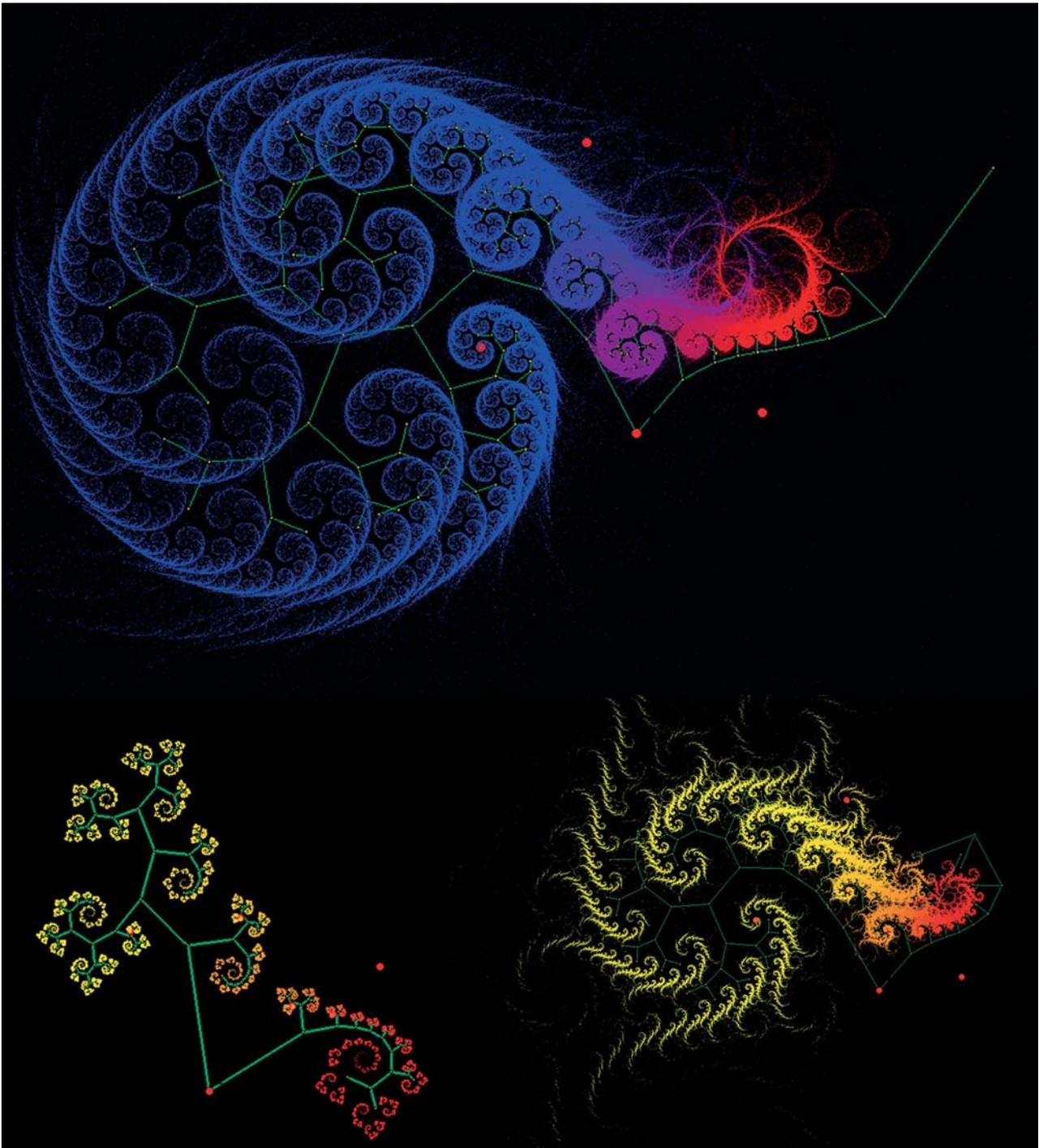


Abbildung 10. Ein IFS bestehend aus nur zwei Möbius-Transformationen ist in der Lage die obigen Grenzpunktmenge zu erzeugen.

Beispiele am Ende des Buches, bei denen genaue Zahlenwerte eine große Rolle spielen, etwas erschwert. Dennoch, die Kombination der interaktiven Möglichkeiten von Cinderella mit den durch *Indras Pearls* gelieferten Zusammenhängen stellte eine ideale Kombination dar und vermochte, die eingangs beschriebenen, eher zufällig gefundenen Effekte vollständig zu erklären (vgl. Abb. 8).

## Neue Pflanzen am Wegesrand

Tritt man einen Schritt zurück, so kann man aus *Indras Pearls* (unter anderem) zwei Meta-Lehren ziehen. Erstens: Möbius-Transformationen bergen ein immenses ästhetisches Potential. Zweitens: In der Nähe von leicht verstehbaren, relativ einfachen Fraktalen liegen oftmals ausgesprochen interessante Variationen dieser Objekte.

Abschließend wollen wir kurz andeuten, wie man mit einer solchen Philosophie interessante Bilder erzeugen kann. Nehmen wir als Beispiel ein Sierpinski-Dreieck (Abb. 9). Dieses lässt sich einfach als IFS erzeugen, indem man mit einem gleichseitigen Dreieck startet und drei Kontraktionen in Richtung der Ecken als erzeugende Abbildungen hernimmt. Diese lassen sich aber auch als Möbius Transformationen auffassen. In der Abbildung 9 sind diese Abbildungen durch die folgenden Urbild/Bild-Paare gegeben:  $(A \mapsto A, D \mapsto B, F \mapsto C)$ ,  $(D \mapsto D, F \mapsto E, A \mapsto B)$  und  $(F \mapsto F, A \mapsto C, D \mapsto E)$ . Variiert man nun die Lage der Punkte, so ergeben sich bereits in relativ naher Umgebung der Ausgangslage faszinierende Grenzgebilde.

Abbildung 10 zeigt eine weitere Struktur, die sich aus nur zwei Möbius-Transformationen (ohne deren Inverses) ergibt. Die verschiedenen Bilder spiegeln lediglich verschiedene Positionen der Ausgangspunkte wieder.

## Webtips

Über *Indras Pearls* gibt es mittlerweile im Internet einiges an interessantem Material. Zu erwähnen ist hierbei insbesondere die von den Autoren betriebene Buch-Homepage <http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls>. Dort gibt es neben vielen spektakulären Graphiken insbesondere auch Filme zum Herunterladen, die sich stetig verändernde Grenzkurven zeigen. Man kann dort auch den FORTRAN-Code für die Programme finden.

Bemerkenswert ist auch eine durch *Indras Pearls* inspirierte Seite des Mathematikünstlers Jos Ley, auf der man einige qualitativ hochwertige Darstellungen (auch 3D) von Grenzpunktmengen finden kann (siehe <http://www.josleys.com/creatures42.htm> bis <http://www.josleys.com/creatures47.htm>).

Unter <http://www.cinderella.de/Indra> kann man die in diesem Artikel verwendeten Bilder (und weitere) herunterladen. Es gibt dort auch einige Seiten zum interaktiven Experimentieren mit den hier beschriebenen Fraktalen.

## Literatur

- [1] R. Fricke & F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie Automorpher Funktionen*, Bd. 1, Leipzig 1897.
- [2] D. Mumford, C. Series & D. Wright, *Indras Pearls. The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press 2002.
- [3] J. Richter-Gebert & U. Kortenkamp, *Cinderella – The Interactive Geometry Software*, Springer 1999; see also <http://www.cinderella.de>.

## Adresse des Autors

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert  
Zentrum Mathematik  
Technische Universität München  
Boltzmannstraße 3  
85747 Garching  
[richter@ma.tum.de](mailto:richter@ma.tum.de)