Die Beweise des Sommers

von Folkmar Bornemann und Günter M. Ziegler

Wer behauptet „Es tut sich Nichts!“ in der Mathematik? Ganz im Gegenteil: man hat den Eindruck, dass die Leute gerade in diesem Sommer wirklich Sturm laufen auf die großen Probleme der Mathematik, in der Hoffnung auf Ruhm und Ehre.
Unter den Problemen, die dadurch diesen Sommer zumindest kurz ins Rampenlicht kamen, waren auch einige der „ganz großen“, sogar zwei der Millenniums-Probleme. Die folgende Übersicht ist ganz bewusst kurz und knapp (und ein klein bisschen polemisch) geraten, und hält sich auch mit (vielleicht teilweise voreiligen) Bewertungen nicht zurück …

Kepler

Vor sechs Jahren, am 19. August 1998 hat Tom Hales (damals Michigan, jetzt Pittsburg) seinen Beweis der Kepler-Vermutung angekündigt, und die Preprints dazu ins Netz gestellt. Sein Beweis, dass die „offensichtlich“ dichtest-mögliche Packungen gleicher Kugeln im 3-dimensionalen Raum wirklich nicht verbessert werden kann, basierte auf über 250 Seiten Aufsatz, Computerprogrammen von mehr als drei Gigabyte, und jahrelanger Arbeit. Das Ganze war natürlich auch eine harte Nuss für die Referenten der beteiligten Zeitschriften. Über den aktuellen Stand der Dinge hat die *New York Times* kürzlich berichtet – siehe Seite 178.
Hinter den Kulissen ist zu hören, dass der aufwändige und hindernisreiche Revisionsprozess auf dem Weg in die Zielgeraden sei: Eine kurze Fassung soll in den *Annals of Mathematics* erscheinen, die ausführliche Version in *Discrete & Computational Geometry.* Happy end in Sicht?

Riemann

Spiegel-online lieferte am 11. Juni 2004 auf der Hauptseite (!) die Schlagzeile „Jahrhundertproblem möglicherweise gelöst“.

Das *Jahrhundertproblem* ist die Riemann'sche Vermutung über die nicht-trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion. Das *gelöst* bezieht sich auf Louis de Branges von der Purdue University, von dem man weiß, dass er seit vielen Jahren an der Riemann'schen Vermutung arbeitet. Die derzeitige Version seiner Arbeit „Riemann zeta functions“, vom 16. Juni 2004, ist 121 Seiten lang, und gilt wohl nicht als endgültig: “The manuscript will be revised until a full treatment of the applications of the Riemann hypothesis is obtained.” Man fragt sich also, warum die Pressestelle der Purdue University gerade jetzt (mal wieder?) eine Presseerklärung dazu herausposaunt:

`http://news.uns.purdue.edu/UNS/html4ever/2004/040608.DeBranges.Riemann.html`.

Dabei erinnert man sich an de Branges' Lösung der Bieberbach-Vermutung (*Acta Math.* 154 (1985), 137–152) in den Achtzigerjahren: damals hatte de Branges ein 385-seitiges Buchmanuskript vorgelegt, mit dem Beweis der Bieberbach-Vermutung im letzten Kapitel, den zunächst keiner wirklich durcharbeiten und glauben wollte (auch weil Fehler drin waren). Letztlich kam es zu einem legendären Seminar in Leningrad, April bis Juni 1984, das de Branges bestätigte: die russischen Experten gaben grünes Licht. Und das Verdienst von de Branges wurde auch nicht dadurch geschmälert, dass die Russen wie auch Carl FitzGerald und Christian Pommerenke substantielle Vereinfachungen fanden, so dass man den Beweis heute auf drei Seiten skizzieren kann (siehe den Aufsatz von Pommerenke im *Mathematical Intelligencer* **7**, No. 2, pp. 23–25, 32).

Derselbe de Branges arbeitet nun also seit vielen Jahren an der Riemann'schen Vermutung – mit einem Ansatz, den die Experten schon seit Jahren betrachtet und verworfen hatten, letztlich deshalb, weil er nicht nur für die Riemann'sche Zeta-Funktion, sondern auch für ganze Klassen von ähnlichen Funktionen mit Funktionalgleichung vom selben Typ gelten würde, für die aber das Analogon der Riemann'schen Vermutung nicht stimmt. De Branges hat über die Jahre immer neue Beweis-Versionen vorgelegt. Conrey und Li haben schon mal ein Gegenbeispiel zu einem Ansatz von de Branges publiziert (*Internat. Math. Research Notes* **18** (2000), 929–940; `math.NT/9812166`), so dass man seiner jetzt angekündigten Lösung gegenüber wohl doch sehr skeptisch sein muss.

Aber wer weiß: Offenbar arbeitet de Branges hartnäckig und mit Biss; vielleicht überrascht er uns am Ende doch damit, dass er die Million Dollar der Clay-Foundation und den entsprechenden Ruhm abzuräumt?

Riemann II

Übrigens: Dies war ja nicht der einzige Versuch, diesen Sommer die Riemann'sche Vermutung abzuräumen. Ein gewisser Jailton C. Ferreira hat am 27. Mai ein Manuskript „The non-trivial zeros of Riemann's zeta-function" ins arXiv gestellt (`math.GM/0405531`), inklusive

> **Theorem 2.1** *The non-trivial zeros of $\zeta(s)$ have real part equal to $\frac{1}{2}$.*

Nun, der Aufsatz von Herrn Ferreira hatte in der Originalversion überhaupt nur zwei Seiten (plus zwei Referenzen) und sieht auch nicht kompliziert aus, er sollte also leicht zu überprüfen sein.

Die Skeptiker, die hier schreiben, haben dies nicht getan, sondern verweisen nur darauf, dass hier offenbar sehr sehr klassische analytische Zahlentheorie ohne neue Hilfsmittel betrieben wird, und dass das „so einfach, wie es hier aussieht, gar nicht sein kann". Vielleicht ist das eine schöne Übungsaufgabe für eine Vorlesung in analytischer Zahlentheorie, da den Denkfehler herauszufischen. Noch ein Indiz: Die Arbeit wurde am 27. Mai ins Netz gestellt, am 16. Juni war man schon bei Version 5: Wieso gibt es in einer 2-seitigen Arbeit so viel zu revidieren? Am Donnerstag, dem 1. Juli, stand dann schon Version 10 im Netz mit dem Kommentar „9 pages. Minor correction in the equation (85). Comments are welcome".

Poincaré

Von dem Anlauf, den der St. Petersburger Mathematiker Grisha Perelman seit November 2002 auf die Poincaré-Vermutung genommen hat, gibt es, trotz überflüssiger *Spiegel-Online*-Meldung vom 8. September., „nichts entscheidend Neues", und vielleicht ist das gut so. Perelman hatte im November 2002 seinen ersten Aufsatz „The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications" als Preprint frei gegeben (im Preprint-Archiv `www.arXiv.org` zugänglich als `arXiv:math.DG/0211159`). Basierend auf einem Ansatz von Richard Hamilton zielt er damit auf die volle Geometrisierungs-Vermutung von Thurston, die die Poincaré-Vermutung als Spezialfall enthält.

Inzwischen liegen im arXiv drei Preprints von Perelman vor, der letzte davon mit Datum vom Juli 2003. Die Experten sind am Lesen und Durcharbeiten, Nachrechnen und Überprüfen, und obwohl offizielle Statements dazu nicht zu bekommen sind, scheint die Zusammenfassung zu sein: „Wir sind noch nicht durch, aber bis jetzt sieht alles sehr gut aus!" So war in etwa auch Richard Hamilton (Columbia University) zu verstehen, der im Mai dieses Jahres an der FU Berlin darüber vortrug. Weiter gilt also der wunderbare Satz aus einem Bericht der *New York Times* vom 15. April 2003 (nachdem Perelman am MIT und in Stony Brook über seine Arbeiten vorgetragen hatte):

> Dr. Perelman declined to be interviewed, saying publicity would be premature.

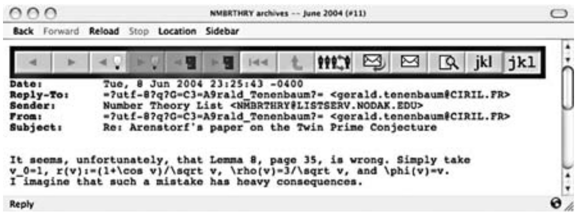
Primzahlen

Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge wie 3 und 5, 11 und 13, 17 und 19, etc. gibt, ist alt, vielleicht sogar griechisch. Dazu die Email eines Kollegen, vom 2. Juni:

> Richard Arenstorf hat am 26.5. ein Paper ins ArXiv gestellt, dass den Titel „There Are Infinitely Many Prime Twins" trägt. Tatsächlich will er sogar eine stärkere Vermutung von Hardy und Littlewood mit Mitteln der klassischen analytischen Zahlentheorie bewiesen haben. Hier der Link zum Paper:

> `http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0405/0405509.pdf`
>
> Arenstorf ist schon etwas älter: er ist 1962 bekannt geworden mit dem (computergestützten) Nachweis, dass das 3-Körper-Problem der Himmelsmechanik periodische Orbits zu lässt (heute Arenstorf-Orbits genannt).
>
> Es dürfte ganz interessant sein, in den nächsten Wochen ab und zu einen Blick in das moderierte Diskussionsforum
>
> `http://listserv.nodak.edu/archives/nmbrthry.html`
>
> zu werfen. Die Leute dort sind typischerweise äußerst zurückhaltend.

Nun, das ist doch spannend. Also sehen wir rein in das Diskussionsforum, und finden dort einen Eintrag von Gérald Tenenbaum vom 8. Juni:


NMBRTHRY archives -- June 2004 (#11)

Back Forward Reload Stop Location Sidebar

Date: Tue, 8 Jun 2004 23:25:43 -0400
Reply-To: =?utf-8?q?G=C3=A9rald_Tenenbaum?= <gerald.tenenbaum@CIRIL.FR>
Sender: Number Theory List <NMBRTHRY@LISTSERV.NODAK.EDU>
From: =?utf-8?q?G=C3=A9rald_Tenenbaum?= <gerald.tenenbaum@CIRIL.FR>
Subject: Re: Arenstorf's paper on the Twin Prime Conjecture

It seems, unfortunately, that Lemma 8, page 35, is wrong. Simply take
v_0=1, r(v):=(1+\cos v)/\sqrt v, \rho(v)=3/\sqrt v, and \phi(v)=v.
I imagine that such a mistake has heavy consequences.

Reply

> It seems, unfortunately, that Lemma 8, page 35, is wrong. Simply take $v_0 = 1, r(v) := (1 + \cos v)/\sqrt{v}, \rho(v) = 3/\sqrt{v}$, and $\phi(v) = v$. I imagine that such a mistake has heavy consequences.

Wenn dies die zurückhaltende Formulierung ist, dann sieht's nicht gut aus. Und in der Tat, noch am selben Tag hat Arenstorf seinen Preprint aus dem arXiv zurück gezogen, mit dem lapidaren Satz: „A serious error has been found in the paper, specifically, Lemma 8 is incorrect."

Schade – aber das braucht ja noch nicht das Ende der Geschichte zu sein. Einerseits kann man hoffen, dass Arenstorf die Lücke wieder geschlossen kriegt (so wie Wiles seinen Fermat), andererseits enthält sein Ansatz vielleicht doch die Ideen zu einem späteren Durchbruch?

Man denke dabei an den im letzten Jahr groß beachteten „Beweis" zur Häufigkeit kleiner Primzahllücken von Daniel Goldston und Cem Yildirim. Er war falsch, enthielt aber originelle methodische Ideen, auf denen andere jetzt aufbauen, wie etwa Ben Green and Terence Tao in ihrem vielbeachteten Beweis (vom April dieses Jahres: `math.NT/0404188`) der Existenz beliebig langer arithmetischer Folgen von Primzahlen. (199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 ist eine solche Folge der Länge 10; die längsten explizit bekannten Folgen bestehen aus 22 Primzahlen; der Green–Tao Beweis ist nicht konstruktiv, wird uns also keine längeren Folgen liefern).

Auch der Beweis von Green und Tao wird noch geprüft, er könnte irgendwo einen fatalen Fehler enthalten, wird aber von vielen schon jetzt wegen der Fülle an neuen Ideen für einen wesentlichen Beitrag gehalten. Vielleicht sollten wir auf Beweisversuche und -ankündigungen positiver und flexibler reagieren, etwa mit Doron Zeilberger: „Partial and Inconclusive Proofs are Welcome!" (`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion39.html`). Auch sie können eine Fülle interessanter Ideen enthalten, die unsere Wissenschaft vorantreiben. Und wie viele solcher Ideen haben Autoren mit ins Grab genommen, die selbst festgestellt haben, dass Lemma 8 falsch ist?

Mersenne

In den *DMV-Mitteilungen* 4–2003 hatten wir über neue Primzahlrekorde berichtet, darunter über die Entdeckung der 40. Mersenne'schen Primzahl, die damals eben auch die größte bekannte Primzahl war.

Dieser Rekord ist schon jetzt wieder eingestellt worden: eine 41. Mersenne'sche Primzahl, $2^{24036583} - 1$, wurde – wieder im Rahmen des GIMPS-Projekts (`www.mersenne.org`) – gefunden und nach Überprüfung am 28. Mai dieses Jahres bekannt gegeben. Sie hat mehr als 7 Millionen Dezimalstellen, fast eine Million mehr als ihr Vorgänger. Damit befindet sich das GIMPS-Projekt auf gutem Wege, irgendwann in näherer Zukunft den 100.000-Dollar-Preis der Electronic Frontier Foundation abzuräumen, der für die erste Primzahl mit 10 Millionen Stellen ausgesetzt ist. The search continues . . .

Adresse der Autoren
Prof. Dr. Folkmar Bornemann
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
85747 Garching bei München
`bornemann@ma.tum.de`

Prof. Günter M. Ziegler
Institut für Mathematik, MA 6-2
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
`ziegler@math.tu-berlin.de`