Triangulieren bis zum Gipfel

Eine Sommerakademie in Südtirol

Maximilian Beyer, Judit Recknagel, Emanuel Reinecke, Mathieu Rosière und Eva Stadler

Für Franz

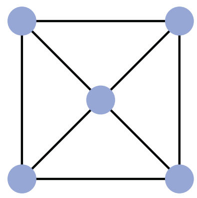
Baumwurzeln haben eine Regenwasserleitung ausgefüllt. (Mit freundlicher Genehmigung von T. Stützel.)

Sitzen 20 Mathematiker in einem Vortrag über Wurzeln. Dass sich auch die bei ihnen sitzenden ca. 120 Studenten anderer Fachrichtungen nicht langweilen, liegt daran, dass es sich um ganz besondere Wurzeln handelt, nämlich um Baumwurzeln – in Abwasserrohren. Prof. Stützel, Direktor des Botanischen Gartens der Ruhr-Universität Bochum, stellt technische und rechtliche Probleme durch Baumwurzeleinwuchs in städtischen Versorgungsleitungen vor – wie das Foto zeigt, ein durchaus beeindruckendes Thema.

Wir befinden uns auf einer Sommerakademie der Studienstiftung des deutschen Volkes im Südtiroler Olang, die den Stipendiaten die Möglichkeit bietet, in kleinen Gruppen zwei Wochen lang wissenschaftlich zu arbeiten. Dabei werden sie von Dozenten, meist Professoren, ehrenamtlich unterstützt und angeleitet. An den Abenden tragen diese Dozenten aus den eigenen Fachgebieten vor, an den Vormittagen werden die Studierenden in ihren Arbeitsgruppen selbst tätig. Während sich andere Arbeitsgruppen Themen wie „Sterben und Heilkunde", „Die Neurophilosophie von Farben und Klängen" oder auch „Vegetation und Vegetationsgeschichte als Gegenstück zu Wirtschaft, Wirtschaftsgeschichte und Migrationsströmen der Bevölkerung eines Raumes" widmen, beschäftigen wir uns in den beiden Wochen vom 4. bis 17. September 2011 unter der Leitung von Frank Lutz (TU Berlin/BTU Cottbus) und Ekkehard Köhler (BTU Cottbus) mit „Triangulierungen".

Darunter sind unterschiedliche Konzepte aus vielen verschiedenen Teilbereichen der Mathematik wie der Numerik oder der Topologie zu verstehen. Einen guten Einstieg liefert die Graphentheorie. *Triangulierte Graphen*, auch *chordale Graphen* genannt, sind solche, in denen jeder Kreis (also jeder geschlossene Kantenweg) mit mindestens vier Kanten eine weitere Kante besitzt, die in ihm zwei nicht aufeinanderfolgende Knoten verbindet.

Einen Graphen zu triangulieren bedeutet dann das Hinzufügen von Kanten solange, bis der entstehende Graph trianguliert ist. Deutlich anders sieht es dagegen bei der *Triangulierung von Punktmengen* aus. Dort geht es (z. B. in der Ebene) darum, die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge überlappungsfrei mit Dreiecken auszupflastern. Letzteres war das Thema des ersten Vortrags.

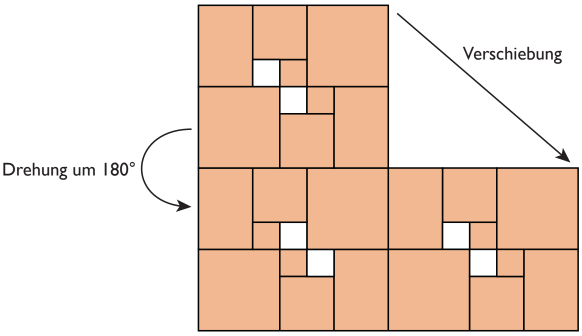


Dieser Graph ist zwar aus Dreiecken zusammengesetzt, aber nicht chordal. Man beachte den durch das Quadrat gebildeten Kreis ohne Sehne.

Auf dem Weg zum Mittagessen fällt unser Blick auf den Fußboden der Musikschule, in der sich unser Seminarraum befindet. In Gedanken noch bei dem eben gehörten Vortrag über Ornamentgruppen und Parkettierungen, können wir an diesem Muster nicht vorbeigehen, ohne kurz innezuhalten.

Aus dem Vortrag wissen wir, dass eine Symmetriegruppe G *diskret* heißt, wenn jede Translation in G ein Vielfaches einer kleinsten, vom Nullvektor verschiedenen Translation und jede Drehung in G Vielfaches einer von 0° verschiedenen minimalen Drehung ist. Eine *ebene kristallographische Gruppe* (bzw. *Ornamentgruppe*) ist eine diskrete Symmetriegruppe der euklidischen Ebene mit zwei linear unabhängigen Translationen. Insgesamt gibt es 17 verschiedene Ornamentgruppen, und wir wollen es uns natürlich nicht nehmen lassen zu bestimmen, zu welcher obiges Muster gehört. Um von einem gegebenen Ornamentmuster die zugehörige Ornamentgruppe zu ermitteln, kann man den Algorithmus (siehe nächste Seite unten) verwenden. So lässt sich schnell feststellen, dass das Bodenmuster der Musikschule zur Ornamentgruppe p2 gehört.

DOI 10.1515/dmvm-2012-0043



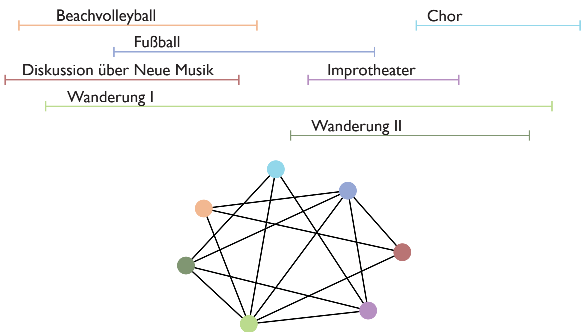
Das Bodenmuster der Musikschule

Ein *Parkett* ist eine Überdeckung der euklidischen Ebene mit Bereichen, die folgende Eigenschaften besitzen: Jeder Bereich ist topologisches Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe, kein Punkt liegt im Inneren von mehr als einem Bereich und die Bereiche sind zueinander kongruent. Ein einzelner Bereich eines Parketts heißt *Parkettstein*. Das Thema Ornamentgruppen und Parkettierungen hat eine direkte Verbindung zur aktuellen Forschung. Die Frage, ob eine aperiodische Parkettierung (Penrose-Parkettierung) mit nur einem Parkettstein möglich ist, ist bis heute ungeklärt!

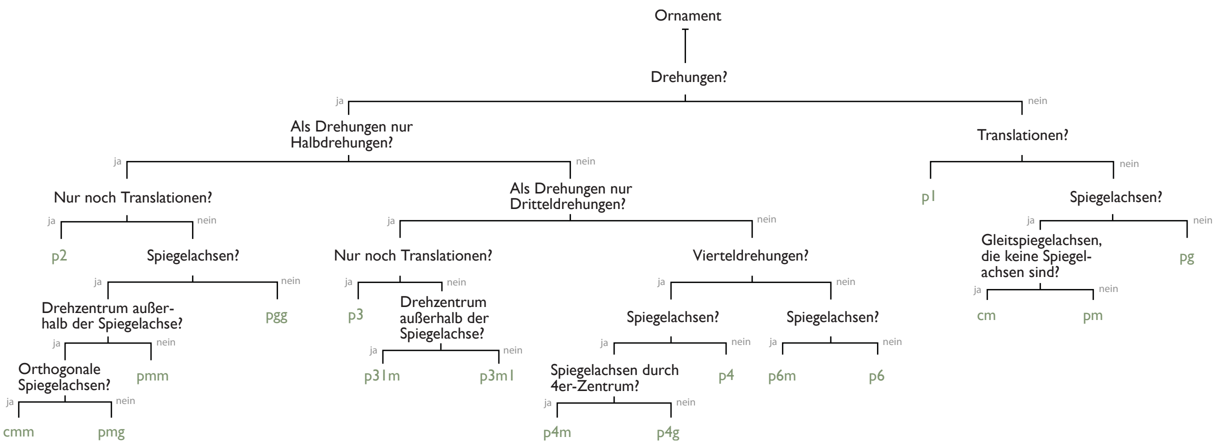
Nachdem das Muster erkannt und richtig klassifiziert wurde, setzen wir den Weg zu unserem wohlverdienten Mittagessen fort.

An den freien Nachmittagen bieten sich uns vielfältige Möglichkeiten, die von uns Stipendiaten selbst geplant und gestaltet werden. Ein Grundsatz dieser zwei Wochen ist, jeden Ausflug, jede Unternehmung und jeden Kurs der ganzen Gruppe zugänglich zu machen, sodass an manchen Abenden im Plenum eine halbe Stunde lang für die verschiedensten Angebote geworben wird. Die vorgeschlagenen Aktivitäten sind so zahlreich, dass es kaum möglich ist, alles wahrzunehmen, was man interessant findet. Um sich also einen Überblick zu verschaffen, welche Angebote sich überschneiden und welche nicht, bietet es sich für Mathematiker an, einen Graphen zu konstruieren, der jedes Freizeitangebot als Knoten darstellt und sich überschneidende Angebote durch eine Kante verbindet. So entstehende Graphen nennt man Intervallgraphen, da sie aus Schnitten von Intervallen (hier Freizeitangeboten) hervorgehen.

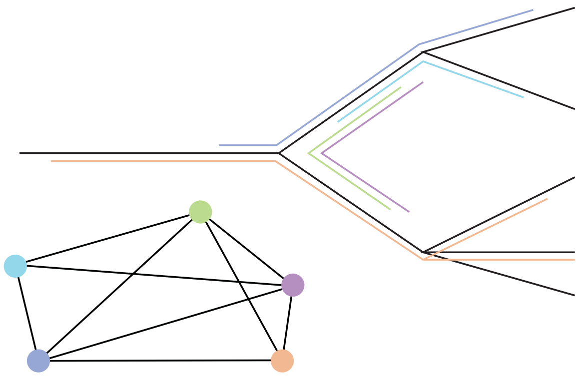
Dies führt uns zurück zu Triangulierungen, denn Intervallgraphen sind stets trianguliert, wie man auch im Beispiel unten sieht. Doch sind das alle triangulierten Graphen oder gibt es außer den Intervallgraphen noch weitere?



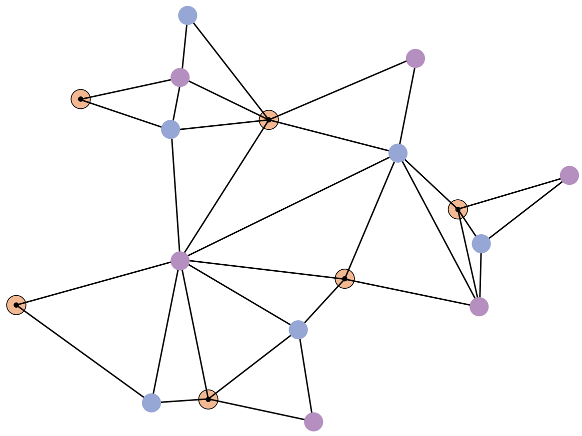
Ein typischer Nachmittag als Intervallgraph



Entscheidungsalgorithmus zur Bestimmung der Ornamentgruppe



Ein Baum mit farbig markierten Teilbäumen und dem zugehörigen Teilbaumgraph



Trianguliertes Polygon mit Dreifärbung der Polygonecken

Und tatsächlich ist die Klasse der triangulierten Graphen echt größer als die Klasse der Intervallgraphen. Die gute Nachricht ist jedoch, dass sich auch triangulierte Graphen, die keine Intervallgraphen sind, durch Schnitte beschreiben lassen, allerdings nicht von Intervallen, sondern von Teilbäumen eines Baumes. Unsere Freizeitaktivitäten können wir mit diesem Modell aber nicht mehr erfassen.

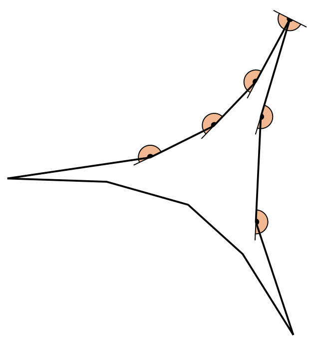
Am Wochenende unternehmen einige eine Ganztagswanderung zum 2567 Meter hohen Maurerkopf, andere genießen den Olanger Almabtrieb und eine größere Gruppe fährt nach Venedig. Neben den obligatorischen Besichtigungen von Markusplatz und Rialtobrücke besuchen manche auch die Biennale, eine der bedeutendsten Ausstellungen zeitgenössischer Kunst.

Wenn man sich den ganzen Tag mit Mathematik beschäftigt, lässt sie einen auch in der Freizeit nicht los, sodass wir beim Blick auf den Wachdienst der Biennale sofort an das bekannte Problem der Museumswächter erinnert werden. Dabei geht es darum, ein polygonales Museum mit möglichst wenigen Aufsehern an festen Positionen vollständig zu überwachen. Trianguliert man das Polygon, was immer geht, so lässt sich der resultierende Graph dreifärben. Dies liefert uns die kleinste obere Schranke von $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ benötigten Wächtern. Nützlich ist hier, den *dualen Graphen* zu betrachten, dessen Knoten die Dreiecke der Triangulierung sind, wobei benachbarte Dreiecke durch eine Kante verbunden werden. Der duale Graph eines triangulierten Polygons ist ein Baum. Legt man nun die Eckenfärbung eines beliebigen Dreiecks fest, kann man entlang des Baumes die Ecken aller anderen Dreiecke eindeutig einfärben.

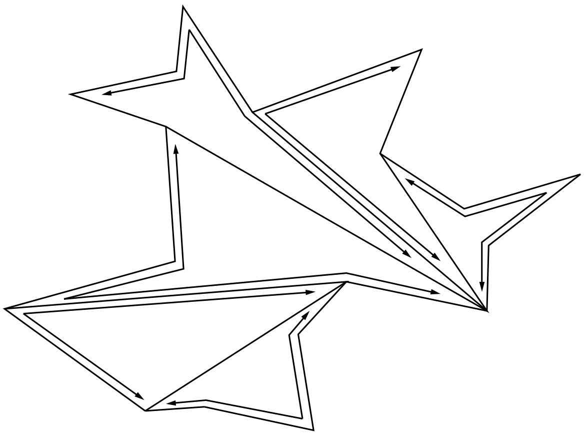
Möchten unsere Wächter aus Gründen der Bequemlichkeit auf Stühlen Platz nehmen, verringert sich ihr Blickfeld auf 180° und der Algorithmus muss der neuen Sachlage angepasst werden. Hierzu kommen *Pseudotriangulierungen* ins Spiel.

Ein *Pseudodreieck* ist ein einfaches Polygon mit genau drei konvexen Ecken. Die Kantenzüge zwischen je zwei konvexen Ecken nennt man Pseudokanten. Eine Pseudotriangulierung eines Polygons ist dann eine Zerlegung in Pseudodreiecke, deren Innere paarweise disjunkt sind. Die Ecken der Pseudodreiecke müssen hierbei Ecken des Polygons sein. Induktiv kann man zeigen, dass für ein Polygon mit k konvexen Ecken die minimale Anzahl an benötigten Pseudodreiecken immer $k-2$ beträgt. Eine Pseudotriangulierung, die diese Minimalitätseigenschaft erfüllt, heißt *gespitzt*. Die Gespitztheit kann man äquivalent dadurch charakterisieren, dass jede Ecke des Polygons entweder konvex oder eine konkave Ecke eines Pseudodreiecks in der Pseudotriangulierung ist. Im Folgenden betrachten wir nur noch gespitzte Pseudotriangulierungen.

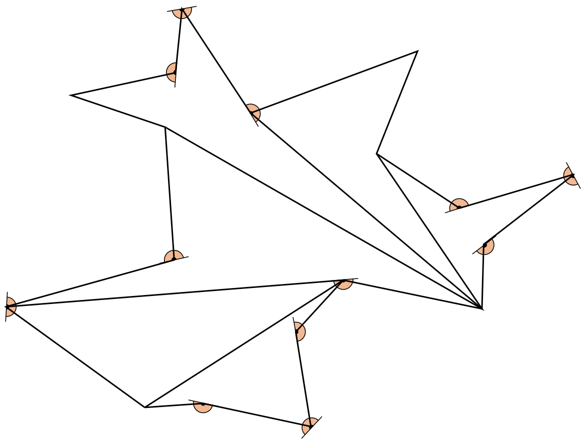
Man stellt schnell fest, dass ein einzelnes Pseudodreieck mit m Ecken mit $\lfloor \frac{2m-3}{3} \rfloor$ sitzenden Wächtern überwacht werden kann. Zur Überwachung ist es ausreichend, Wächter in einer konvexen Ecke und den konkaven Ecken der beiden anliegenden Pseudokanten aufzustellen. Während der Wächter in der konvexen Ecke nach innen schaut, werden die Wächter in den konkaven Ecken so nach außen gerichtet, dass sie den von den vorherigen Wächtern nicht mehr erfassten Bereich überblicken. Wählt man die konvexe Ecke, die einer Pseudokante mit einer maximalen Anzahl an konkaven Ecken gegenüberliegt, benötigt man maximal $1 + \lfloor \frac{2}{3}(m-3) \rfloor = \lfloor \frac{2m-3}{3} \rfloor$ Wächter.



Ein überwachtes Pseudodreieck



Pseudotrianguliertes Polygon mit Orientierung



Pseudotrianguliertes Polygon mit Ausrichtung der Wächter

Nun überlegen wir uns, dass die Überwachung eines Polygons mit n Ecken, von denen k konvex sind, mit $\lfloor \frac{2n-k}{3} \rfloor$ sitzenden Wächtern möglich ist. Dazu wird eine gespitzte Pseudotriangulierung des Polygons betrachtet und eine Verteilung von Wächtern gefunden, welche die einzelnen Pseudodreiecke komplett überwachen können. Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, ein einzelnes Pseudodreieck in der oben beschriebenen Art und Weise zu überwachen, je nachdem, in welcher konvexen Ecke ein Wächter positioniert wird.

Wir definieren eine Orientierung eines Pseudodreiecks, indem die Pseudokante ohne Wächter keine Richtung erhält und die beiden Pseudokanten mit Wächtern von der konvexen Ecke, in der sich ein Wächter befindet, weggerichtet werden. Somit ist aus der Richtung einer Seite schon die Orientierung des gesamten Dreiecks und die Anordnung der Wächter ersichtlich, und die Orientierung eines Dreiecks bestimmt die Orientierung aller benachbarten. Da der duale Graph der Pseudotriangulierung wieder ein Baum ist, können wir wie oben die Orientierung eines Startdreiecks festlegen, die dann vermöge der Baumstruktur eine eindeutige Orientierung und Wächterverteilung auf allen anderen Pseudodreiecken induziert. Wegen der Gespitztheit unserer Pseudotriangulierung ist jede konkave Ecke des Polygons konkave Ecke eines Pseudodreiecks. Da ein Wächter an der konkaven Ecke nach außen gerichtet ist, kann er auch die konvexen Ecken der angrenzenden Dreiecke überwachen, sodass pro Polygonecke höchstens ein Wächter notwendig ist.

Die drei Möglichkeiten, die Orientierung im Anfangspseudodreieck zu wählen, führen zu drei verschiedenen Verteilungen der Wächter auf dem Polygon. Insgesamt wird so jede konvexe Polygonecke einmal und jede konkave Ecke zweimal mit einem Wächter ausgestattet. Da jede der drei erzeugten Möglichkeiten aber eine vollständige Überwachung liefert, benötigt man insgesamt maximal $\lfloor \frac{k+2(n-k)}{3} \rfloor = \lfloor \frac{2n-k}{3} \rfloor$ sitzende Wächter.

Tatsächlich kann man mit weiteren Abschätzungen im Allgemeinen sogar eine kleinere obere Schranke von $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ benötigten sitzenden Wächtern finden.

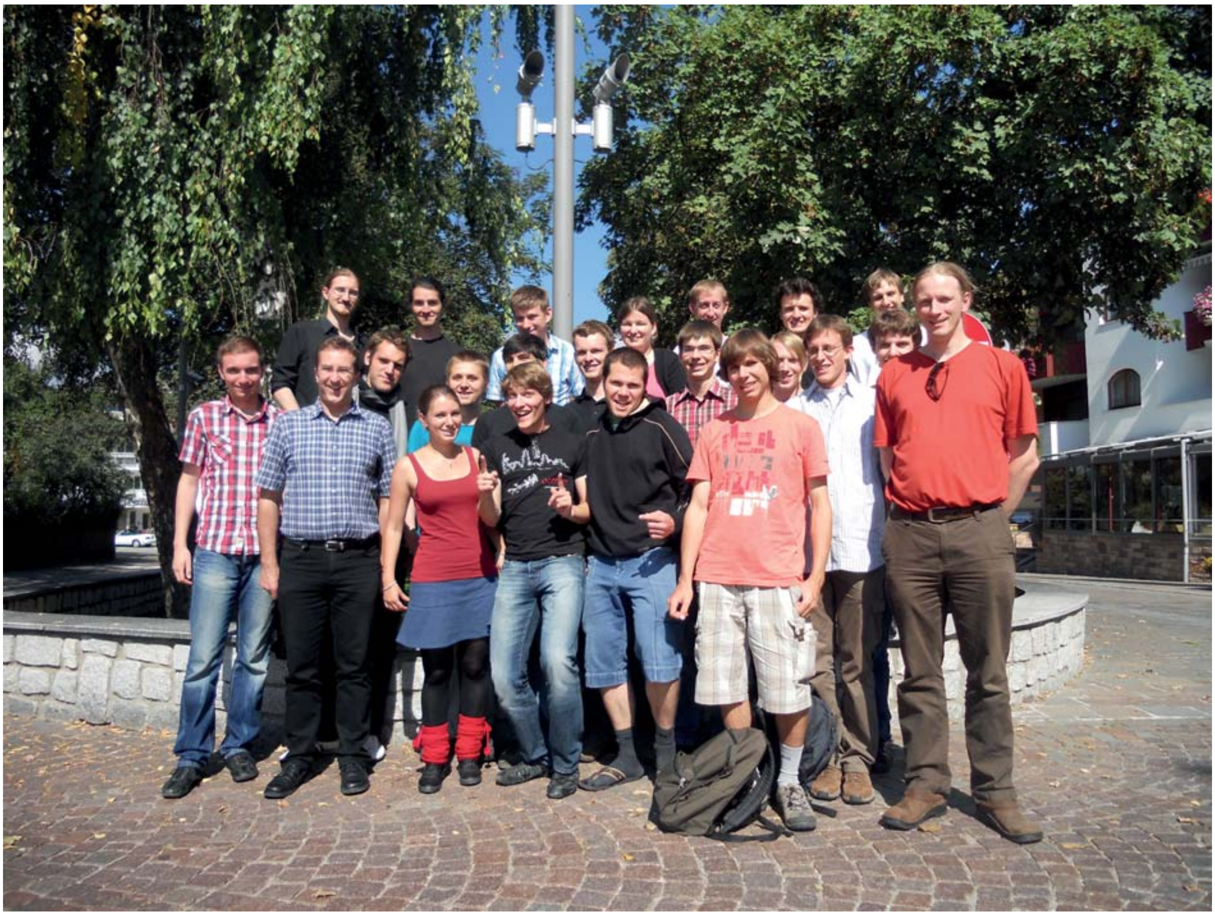
In Olang hingegen scheint man gar keine Wächter zu brauchen. Die Bar im Kongresshaus jedenfalls, die wir selbst betreiben, ist für jeden zugänglich, die Kasse offen. Trotzdem stimmt am Ende die Bilanz, und vom erwirtschafteten Überschuss gibt es am letzten Abend Freigetränke.

Und auch unsere persönliche Bilanz stimmt. Auf der fachlichen Seite haben wir uns natürlich noch mit vielen anderen Themen beschäftigt und dabei sehr viel gelernt. Zu nennen wären beispielsweise noch die Klassifikation von 2- und 3-Mannigfaltigkeiten, Simplizialkomplexe, Schälbarkeit und Färbung von Karten. Ein großer Dank gilt daher unseren beiden Arbeitsgruppenleitern Frank Lutz und Ekkehard Köhler, die uns die gesamte Zeit unterstützt, motiviert und mit spannenden Zusatzinformationen versorgt haben.

Vielleicht noch wichtiger als die fachliche ist die menschliche Seite einer solchen Sommerakademie. Wann sonst hat man die Gelegenheit zwei so unglaublich intensive Wochen mit so vielen anderen interessanten Menschen zu erleben und diese beim gemeinsamen Wandern, Fußball spielen, Musizieren, Tanzen oder gar Feuerspucken näher kennenzulernen? Wir werden diese Akademie jedenfalls in bester Erinnerung behalten und dem ein oder anderen Teilnehmer als die „TriOlangulierer" im Gedächtnis bleiben.

Literatur

[1] Golumbic, Martin Charles (2004). Algorithmic graph theory and perfect graphs. Elsevier.



Die „TriOlangulierer". Hintere Reihe von links: Maximilian Beyer, Georg Schröter, Marvin Teichmann, Eva Stadler, Ralf Kohrt, Jakob Geipel, Mathieu Rosière. Mittlere Reihe von links: Deniz Stiegemann, Federico Wadehn, Jonathan von Schroeder, Emanuel Reinecke, Stefan Toman, Johannes Tiedau, Marius Münch, Dominic Dold, Fabian Gundlach. Vordere Reihe von links: Frank Lutz (AG-Leiter), Judit Recknagel, Pascal Weinert, Franz Wolff (†), Dominik Wrazidlo, Ekkehard Köhler (AG-Leiter)

[2] Bettina Speckmann, Csaba D. Toth (2005), Allocating vertex π-guards in simple polygons via pseudo-triangulations. Discrete & Computational Geometry 33:345–364.

[3] Claus Rohrbach. Symmetrie und Ornamentik. http://claus-rohrbach.de/Symm-home vom 13. 11. 2011.

[4] Fisk, S. (1978), A short proof of Chvatal's watchman theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series B 24 (3): 374.

Maximilian Beyer, 5. Semester Physik und Mathematik, TU Cottbus, max@beyercity.de
Judit Recknagel, 5. Semester Mathematik, Universität Halle, judit.recknagel@googlemail.com
Emanuel Reinecke, 5. Semester Mathematik, Universität Bonn, emanuel.reinecke@gmail.com
Mathieu Rosière, 3. Semester Mathematik, TU Berlin, mathieu.rosiere@gmx.net
Eva Stadler, 3. Semester Mathematik, TU München, evastadler91@yahoo.de

Die fünf Autoren (geb. 1989 bis 1991) sind allesamt Stipendiaten der Studienstiftung und befinden sich mitten in ihren Bachelor-Studien. In die Studienstiftung wurden vier der Autoren aufgrund eines Schulvorschlages aufgenommen, in einem Fall war eine Selbstbewerbung erfolgreich. Die Arbeitsgruppe „Triangulierungen" auf der Sommerakademie in Olang bot ihnen die Möglichkeit, mathematische Themen an der Schnittstelle von Topologie und Diskreter Mathematik zu entdecken.

Maximilian Beyer, Judit Recknagel, Emanuel Reinecke, Mathieu Rosière und Eva Stadler (v.l.n.r.)

Die Studienstiftung des deutschen Volkes e. V. *ist mit über 12 000 Stipendiaten das größte der zwölf nationalen Begabtenförderungswerke. Ein zentraler Bestandteil der umfangreichen ideellen Förderung sind die Sommerakademien. Jedes Jahr werden etwa 3000 neue Stipendiaten nach einem Auswahlseminar aufgenommen, die dafür durch die Schule, einen Professor oder das Prüfungsamt vorgeschlagen wurden. Seit 2010 gibt es außerdem die Selbstbewerbung. Für Studierende im 1. und 2. Semester ist diese zum Februar 2013 möglich.*