

Fakultät für Maschinenwesen

---

Name der promotionsführenden Einrichtung

Echtzeit-Simulation des Rotorabwinds von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen mit der Lattice-Boltzmann Methode

---

Titel der wissenschaftlichen Abhandlung

Ludwig Maximilian Friedmann

---

Vorname und Name

Vollständiger Abdruck der von der promotionsführenden Einrichtung

Fakultät für Maschinenwesen

der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr. Thomas Sattelmayer

Prüfende/-r der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Manfred Hajek

---

2. apl. Prof. Dr.-Ing. Christian Breitsamter

---

Die Dissertation wurde am 07.11.2016 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die promotionsführende Einrichtung Fakultät für Maschinenwesen am 05.02.2017 angenommen.



## **Danksagung**

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Lehrstuhls für Hubschraubertechnologie der Technischen Universität entstanden. Mein Dank gilt daher insbesondere dem Leiter des Lehrstuhls Herrn Prof. Dr.-Ing. Manfred Hajek, der mir ein spannendes und abwechslungsreiches Arbeiten ermöglicht hat.

In erster Linie möchte ich Herrn Hajek für die ausgezeichnete Betreuung in seiner Rolle als Doktorvater danken. Seine Anregungen, seine Ideen und sein breites Fachwissen lieferten wertvolle Impulse für die vorliegende Arbeit. Ebenso möchte ich Herrn apl. Prof. Dr.-Ing. Christian Breitsamter dafür danken, dass er sich als Zweitprüfer für diese Arbeit zur Verfügung gestellt hat.

Mein besonderer Dank gilt außerdem den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Hubschraubertechnologie. Sie hatten mit ihrer fachlichen und persönlichen Unterstützung großen Anteil am Gelingen dieser Arbeit und an der hervorragenden Arbeitsatmosphäre am Lehrstuhl. Insbesondere die gemeinsame Zeit mit meinen Kollegen Simon Radler, Dominik Schicker und Sören Süße bleibt unvergessen. Neben den Mitarbeitern des Lehrstuhls möchte ich auch meinen Studenten danken, vor allem Phillip Ohmer, der mit seinem großen Engagement einen wertvollen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hat.

Weiterhin möchte ich meinen Eltern dafür danken, dass sie mich auf meinem bisherigen Lebensweg in allen Bereichen vorbehaltlos unterstützt und an mich geglaubt haben. Der größte Dank gebührt jedoch meiner Freundin Annika. Sie bot mir Rückhalt in den wichtigsten Stunden der Promotion und war nie um aufmunternde und ermutigende Worte verlegen. Beim Korrekturlesen meiner Arbeit zeigte sie unermüdlichen Einsatz und großes Durchhaltevermögen und trug so große Stücke zum Gelingen der Arbeit bei.



## **Kurzfassung**

Rotorabwind von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen birgt im bodennahen Flug erhebliche Risiken. Bei losem oder staubigem Untergrund besteht die Gefahr der Aufwirbelung dichter Staub-, Sand- oder Schneewolken. Diese als Brownout oder Whiteout bekannten Phänomene führen zu einer erschwerten Einschätzung der Lage und Orientierung des Luftfahrzeugs durch den Piloten und somit zu einer Vielzahl verschiedener Flugunfälle. Auch die aus Rotorabwind resultierenden Strömungskräfte bergen ein erhebliches Gefährdungspotential für nahestehende Personen und Objekte.

Ungeachtet seiner Relevanz ist Rotorabwind in Trainingssimulatoren nur unzureichend implementiert. Der Einfluss des modellierten Luftfahrzeugs und der Geometrie von überflogenem Terrain und Objekten bleibt weitestgehend unberücksichtigt. Pilot und Besatzung lernen den Umgang mit den aus dem Abwind resultierenden Gefahren erst im Einsatz kennen.

Um diesem Missstand Abhilfe zu schaffen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neuartiges Modell entwickelt, das durch seine effiziente, parallelisierte Implementierung eine echtzeitfähige Strömungssimulation des Rotorabwinds von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen ermöglicht. Das Modell kann weiterhin komplexe Randbedingungen zur Simulationslaufzeit erfassen und diese in der Strömungssimulation abbilden. Den Modellausgang bilden diskrete Strömungsgrößen, die für Visualisierungszwecke, für die Berechnung von Strömungskräften und die Rotor-aerodynamikmodellierung genutzt werden können.

Hierbei erlaubt die parallelisierte Implementierung der Lattice-Boltzmann Methode die Modellierung der Interaktion des Abwinds mit dem betrachteten Luftfahrzeug, mit nahestehenden Objekten und dem Terrain. In einem dem Luftfahrzeug anhaftenden, von nicht-reflektierenden Randbedingungen abgegrenzten Rechenraum ermöglichen Ray-Tracing Algorithmen die Erfassung von generischer Objekt- und Terraingometrie. Die Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs wird mit Hilfe des Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Ansatzes in der Strömungssimulation des Modells abgebildet.

Die Verifikation des Modellverhaltens erfolgt anhand einer Gegenüberstellung der im Modell berechneten Strömungsgeschwindigkeiten und des zugehörigen Strahlverlaufs mit den Ergebnissen etablierter Referenzmodelle. Um die Echtzeitfähigkeit des Modells zu prüfen, wird im Rahmen der Verifikation zudem eine Untersuchung des Laufzeitverhaltens durchgeführt. Auf die Verifikation folgt eine Validierung der Simulationsergebnisse anhand von im Flugversuch ermittelten Daten.

Die Untersuchungen zeigen, dass das entwickelte Modell die Echtzeit-Simulation von Rotorabwind unter Berücksichtigung sämtlicher Randbedingungen erlaubt. Ferner wird deutlich, dass das Modell Ergebnisse aus Referenzmodellierungen und Flugversuchen in guter Übereinstimmung abbildet.



## **Abstract**

Downwash of helicopters and tiltrotor aircraft poses significant dangers in flight close to terrain. In areas of loose or dusty ground, rotorcraft downwash entrains dense clouds of dust, sand or snow. These phenomena, known as Brownout or Whiteout, degrade the pilot's assessment of the rotorcraft's position and orientation and cause numerous flight accidents. Moreover, nearby persons and objects are severely endangered by aerodynamic forces deriving from rotorcraft downwash.

Regardless of its relevance, rotorcraft downwash has not been implemented in flight training simulators in an adequate manner yet. Rotorcraft specific properties and the influence of the exact geometry of overflowed terrain and objects remain unconsidered in current implementations. Pilots and crews have to familiarize themselves with the dangers resulting from rotorcraft downwash in midair.

This thesis presents the development of a novel, real-time capable downwash simulation model, which addresses this deficit in simulation fidelity. Due to its efficient parallel implementation, the model is able to capture complex boundary conditions and incorporate their effects in its rotorcraft specific flow field calculation at simulation runtime. The model's output provides discrete flow velocities, which can be used for visualization purposes, for the determination of fluid forces, and as an input for rotor aerodynamic modelling.

Using a parallel implementation of the Lattice-Boltzmann method, the downwash's interaction with the specific rotorcraft, nearby obstacles and the terrain is modelled. The corresponding computation domain is enclosed by non-reflecting boundary conditions, remaining fixed to the simulated rotorcraft at all times. Generic object and terrain geometries are captured by ray-tracing algorithms. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) approach incorporates the considered rotorcraft's movement in the model's flow field computation.

In order to formally verify the model behavior, both, flow values and the corresponding wake contraction calculated within the model, are compared to results from established reference models. In addition, the model's run-time behavior is examined in order to determine its real-time capabilities. Finally, a validation of the simulation results is accomplished based on flight test data.

Results from both verification and validation demonstrate that the model is well able to simulate rotorcraft downwash in real-time, incorporating all relevant boundary conditions. Further, it is shown that the model's calculation results are in good agreement with reference calculations and flight test data.





## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
1.1	Zielsetzung und Abgrenzung.....	2
1.2	Stand der Technik.....	4
1.3	Handlungsfelder.....	12
2	Rechenraum.....	15
2.1	Koordinatensysteme.....	15
2.2	Transformationen.....	18
2.3	Diskretisierung.....	19
3	Randbedingungen.....	23
3.1	Strömungshindernisse.....	23
3.2	Rotoraerodynamik.....	28
3.3	Flugmechanik.....	29
4	Modellbildung.....	31
4.1	Navier-Stokes Gleichungen.....	31
4.2	Lattice-Boltzmann Methode.....	33
4.3	Strömungshindernisse.....	44
4.4	Rotoraerodynamik.....	48
4.5	Flugmechanik.....	49
4.6	Rechenraumränder.....	52
5	Implementierung.....	59
5.1	Abwindsimulationsmodell.....	59
5.2	Randbedingungserfassung.....	61
5.3	Strömungssimulation.....	62
6	Verifikation.....	67
6.1	Schwebeflug.....	69
6.2	Vorwärtsflug.....	77
6.3	Zeitverhalten.....	86
7	Validierung.....	91
8	Schlussfolgerungen und Ausblick.....	97
9	Literaturverzeichnis.....	103

---

A	Anhang.....	113
A.1	Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit im Schwebeflug .....	113
A.2	Induzierte Geschwindigkeit im Vorwärtsflug .....	119
A.3	Radiale Abwindgeschwindigkeit im bodennahen Schwebeflug .....	127

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1: Ursachen für Hubschrauberunfälle ohne Feindeinwirkung nach [1].....	1
Abbildung 1-2: Forschungssimulator des Lehrstuhls für Hubschraubertechnologie.....	3
Abbildung 1-3: Integration des Simulationsmodells im Forschungssimulator [14] .....	4
Abbildung 1-4: Walljet Modellierung von Rotorabwind nach [17].....	5
Abbildung 1-5: Bereichsunterteilung in Walljet Modellen nach [17].....	6
Abbildung 1-6: Modellierung von Rotorabwind in Bodennähe mit Punktquellen nach [12]....	7
Abbildung 1-7: Modellierung von Rotorabwind in Bodennähe mit Ringquellen nach [12].....	8
Abbildung 1-8: Prescribed Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [25] .....	9
Abbildung 1-9: Free Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [35] .....	10
Abbildung 1-10: Fast Free Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [41].....	11
Abbildung 1-11: Handlungsfelder der Modellentwicklung .....	12
Abbildung 2-1: Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) Koordinatensystem nach [46] .....	16
Abbildung 2-2: North-East-Down (NED) Koordinatensystem nach [46] .....	16
Abbildung 2-3: Body-Fixed (BF) Koordinatensystem.....	17
Abbildung 2-4: Rotorkoordinatensystem .....	17
Abbildung 2-5: Kartesische Diskretisierung des Rechenraums .....	21
Abbildung 3-1: Schnittpunktermittlung mit baryzentrischen Koordinaten nach [56] .....	24
Abbildung 3-2: Transformation in das baryzentrische Koordinatensystem [55].....	25
Abbildung 3-3: Diskretisierung des Luftfahrzeugs mittels Ray-Tracing.....	26
Abbildung 3-4: Voxelisierte Geometrie des Luftfahrzeugs .....	26
Abbildung 3-5: Diskretisierung von Terrain und Objekten mittels Ray-Tracing .....	27
Abbildung 3-6: Voxelisierte Geometrie von Terrain und Objekten .....	27
Abbildung 3-7: Linearisierte Schubverteilung einer Aktuatorscheibe.....	28
Abbildung 3-8: Geschwindigkeit und Raten des betrachteten Luftfahrzeugs.....	29
Abbildung 4-1: Hexagonaler Diskretisierungsansatz des FHP Modells nach [62].....	36
Abbildung 4-2: Kollisionsschritt des FHP Modells [62] .....	37
Abbildung 4-3: $D2Q9$ und $D3Q19$ Diskretisierungsgitter nach [61] .....	38
Abbildung 4-4: Abbildung eines ebenen Strömungshindernisses.....	45
Abbildung 4-5: Abbildung eines komplexen Strömungshindernisses nach [43].....	46
Abbildung 4-6: Stützpunkte der trilinearen Interpolation .....	51
Abbildung 4-7: Implementierung von PML Randbedingungen nach [97] .....	53
Abbildung 4-8: Reflexionsbedingung im $D3Q19$ -Gitter .....	56
Abbildung 5-1: Implementierung des Abwindsimulationsmodells nach [14] .....	60
Abbildung 5-2: Implementierung der Randbedingungserfassung nach [14] .....	61
Abbildung 5-3: Datenverarbeitung auf CPUs und GPUs [106].....	62
Abbildung 5-4: Organisation von GPU-Threads in NVIDIA CUDA [106] .....	63
Abbildung 5-5: Flache 3D Texturen nach [14] .....	64
Abbildung 5-6: Implementierung der Strömungssimulation nach [14] .....	65
Abbildung 6-1: Sikorsky CH-53E [17] .....	68

Abbildung 6-2: Bell XV-15 [17] .....	68
Abbildung 6-3: Sikorsky SH-60B [17] .....	69
Abbildung 6-4: Schwebeflugmodellierung in der Strahltheorie nach [35] .....	70
Abbildung 6-5: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E (1/2).....	73
Abbildung 6-6: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E (2/2).....	74
Abbildung 6-7: Diskretisierung der Strahleinschnürung .....	75
Abbildung 6-8: Longitudinaler Verlauf der induzierten Geschwindigkeit nach [35] .....	77
Abbildung 6-9: Abstromwinkel des Rotorabwinds nach [35] .....	78
Abbildung 6-10: Vorwärtsflugmodellierung in der Strahltheorie [35] .....	79
Abbildung 6-11: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E, $\mu=0,1$ .....	81
Abbildung 6-12: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E, $\mu=0,2$ .....	82
Abbildung 6-13: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E, $\mu=0,3$ .....	83
Abbildung 6-14: Rechenzeitbedarf der Relativgeschwindigkeitsberechnung .....	87
Abbildung 6-15: Rechenzeitbedarf der Hinderniserfassung .....	87
Abbildung 6-16: Rechenzeitbedarf der Strömungssimulation .....	88
Abbildung 6-17: Gesamtrechenzeitbedarf der Abwindsimulation.....	88
Abbildung 7-1: Ermittlung des Heckrotorschubs.....	92
Abbildung 7-2: Radiale Abwindgeschwindigkeit CH-53E, $H=1,949$ , $\psi=270^\circ$ , $r=1,251$ ....	93
Abbildung 7-3: Radiale Abwindgeschwindigkeit CH-53E, $H=1,949$ , $\psi=270^\circ$ , $r=1,501$ ....	94
Abbildung 8-1: Echtzeit-Simulation des Rotorabwinds eines Kipprotor-Flugzeugs.....	97
Abbildung 8-2: Echtzeit-Simulation von Schiffslandungen .....	100
Abbildung 8-3: Simulation des Rotorabwinds eines Kipprotor-Flugzeugs, $N=128$ .....	101

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 4-1: Partikelgeschwindigkeiten im $D2Q9$ Diskretisierungsschema .....	38
Tabelle 4-2: Partikelgeschwindigkeiten im $D3Q19$ Diskretisierungsschema.....	39
Tabelle 4-3: Gewichtungsfaktoren des $D2Q9$ Diskretisierungsschemas .....	41
Tabelle 4-4: Gewichtungsfaktoren im $D3Q19$ Diskretisierungsschemas .....	41
Tabelle 4-5: Entdimensionalisierung der Größen des Lattice-BGK Modells .....	42
Tabelle 4-6: Kodierung der approximierten Normalenvektorrichtung [44][81] .....	48
Tabelle 6-1: Technische Daten Sikorsky CH-53E, Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B .....	67
Tabelle 6-2: Parameter der Standardatmosphäre ISA (MSL) [46].....	67
Tabelle 6-3: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E.....	76
Tabelle 6-4: Induzierte Geschwindigkeit und longitudinaler Steigungskoeffizient CH-53E ..	85
Tabelle 7-1: Flughöhe und azimutale Orientierung der Validierungsmessungen.....	91
Tabelle 7-2: Radiale Position der Validierungsmessungen.....	91
Tabelle 7-3: Gemittelte Abweichung der radialen Abwindgeschwindigkeit CH-53E.....	96



## Abkürzungsverzeichnis

<b>Abkürzung</b>	<b>Beschreibung</b>
ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
BF	Body-Fixed
BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
CHARM	Comprehensive Hierarchical Aeromechanics Rotorcraft Model
CPU	Central Processing Unit
CUDA	Compute Unified Device Architecture
ECEF	Earth-Centered Earth-Fixed
GPU	Graphics Processing Unit
ISA	Internationale Standardatmosphäre
LBM	Lattice-Boltzmann Methode
LODI	Local One-Dimensional Inviscid
MRT	Multiple Relaxation Time
MSL	Mean Sea Level
NED	North-East-Down
PML	Perfectly Matched Layer
SRT	Single Relaxation Time
TOW	Take Off Weight
WGS	World Geodetic System





## Zeichenverzeichnis

<b>Symbol</b>	<b>Variablenname</b>
<b><i>a</i></b>	Körperkraft
<i>c<sub>0</sub></i>	Mittlere thermische Partikelgeschwindigkeit
<i>c<sub>s</sub></i>	Isotherme Schallgeschwindigkeit
<b><i>d</i></b>	Gitterkonstante, Auflösungsvermögen oder Dimensionalität des Phasenraums
<b><i>d</i></b>	Normierter Einflussfaktor
<b><i>e</i></b>	Partikelgeschwindigkeit
<i>f</i>	Geschwindigkeitsverteilungsfunktion
<i>f<sub>p</sub></i>	Bildwiederholfrequenz des Projektionssystems
<i>f<sup>eq</sup></i>	Gleichgewichtsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion
<i>f*</i>	Ungleichgewichtsanteil einer Geschwindigkeitsverteilungsfunktion
<i>g</i>	Gravitationskonstante
<b><i>g</i></b>	Gravitationsbeschleunigung
<i>i</i>	Zählindex
<i>j</i>	Zählindex
<i>k</i>	Zählindex
<i>k<sub>x</sub></i>	Longitudinaler Steigungskoeffizient
<i>k<sub>B</sub></i>	Boltzmannkonstante
<i>l</i>	Zählindex oder Länge
<i>m</i>	Masse
<i>n</i>	Zeitschrittindex oder Anzahl CPU-Threads
<b><i>n</i></b>	Oberflächennormale
<i>p</i>	Druck, Rollrate oder Subgitterindex
<i>p<sub>0</sub></i>	Thermodynamischer Druckanteil
<i>p'</i>	Hydrodynamischer Druckanteil
<i>q</i>	Nickrate oder Anzahl diskreter Bewegungsrichtungen
<i>r</i>	Radiale Position, radiale Koordinate oder Gierrate
<b><i>r</i></b>	Position im Phasenraum
<i>s</i>	Skalarer (Stütz-)Wert
<i>t</i>	Skalarer Suchstrahlparameter oder Zeitpunkt
<i>t<sub>c</sub></i>	Zeitintervall zwischen zwei Kollisionen
<i>t<sub>p</sub></i>	Subgitter-spezifischer Gewichtungsfaktor
<i>u</i>	x-Komponente der lokalen Strömungsgeschwindigkeit, baryzentrische Koordinate, x-Komponente der Fluggeschwindigkeit oder Texturkoordinate
<b><i>u</i></b>	Lokale Strömungsgeschwindigkeit
<i>v</i>	y-Komponente der lokalen Strömungsgeschwindigkeit, baryzentrische Koordinate, y-Komponente der Fluggeschwindigkeit oder Texturkoordinate
<i>v<sub>0</sub></i>	Stützwert der induzierten Strömungsgeschwindigkeit im Vorwärtsflug
<i>v<sub>h</sub></i>	Induzierte Strömungsgeschwindigkeit im Schwebeflug
<i>v<sub>i</sub></i>	Induzierte Strömungsgeschwindigkeit
<i>w</i>	z-Komponente der lokalen Strömungsgeschwindigkeit, baryzentrische Koordinate, z-Komponente der Fluggeschwindigkeit oder Teilungsverhältnis
<i>x</i>	Vektorkomponente in x-Richtung
<b><i>x</i></b>	Koordinatenachse in x-Richtung oder Position im kartesischen Raum
<i>y</i>	Vektorkomponente in y-Richtung
<b><i>y</i></b>	Koordinatenachse in y-Richtung

$z$	Vektorkomponente in z-Richtung
$\mathbf{z}$	Koordinatenachse in z-Richtung
$B$	Index für körperfestes Body-Fixed Koordinatensystem oder Index für generisches Koordinatensystem
$C$	Smagorinsky Konstante
$D_0$	Freiheitsgrade eines Partikels
$\mathbf{D}$	Richtungsvektor eines Suchstrahls
$E$	Energie
$\mathbf{E}$	Tensor der Deformationsrate
$F$	Diskreter Kraftterm
$\mathbf{F}$	Kraft
$H$	Höhe über dem Referenzellipsoid oder Flughöhe über Grund
$I$	Index für inertiales ECEF Koordinatensystem oder Impedanz
$\mathbf{I}$	Einheitstensor
$\mathbf{J}$	Impuls
$L$	Kantenlänge des Rechenraums
$L_0$	Charakteristische Länge
$Ma$	Machzahl
$\mathbf{M}$	Transformationsmatrix
$N$	Index für North-East-Down Koordinatensystem, Rechengitterauflösung oder Partikelanzahl
$N_A$	Avogadrokonstante
$\mathbf{O}$	Koordinatenursprung
$P$	Rotorleistung
$\mathbf{P}$	Punkt im kartesischen Raum
$Q$	Rotordrehmoment
$R$	Rotorradius, Index für Rotorkoordinatensystem oder Gaskonstante
$R_{eq}$	Äquivalenter Rotorradius
$R_\infty$	Radius des ausgeprägten Abwindstrahls
$\mathbf{R}$	Punkte eines Suchstrahls
$S$	Oberfläche oder Intensität des Spannungstensors
$\mathbf{S}$	Ursprung eines Suchstrahls
$T$	Temperatur, eindimensionaler Rotorschub oder Index für Heckrotor
$T_0$	Konstante Komponente der Schubverteilung
$T_c$	Longitudinale Komponente der Schubverteilung
$T_s$	Laterale Komponente der Schubverteilung
$\mathbf{T}$	Schnittpunkt, Spannungstensor oder Rotorschub
$U$	Geschwindigkeit eines eindimensionalen Massenstroms
$U_0$	Charakteristische Geschwindigkeit
$V$	Volumen
$\mathbf{V}$	Eckpunkt eines Dreiecks
$V_\infty$	Anströmgeschwindigkeit
$W$	Energie
$(\partial_t f)_{Koll}$	Kollisionsoperator
$(\partial_t f)_{Koll,BGK}$	Kollisionsoperator der Boltzmann-BGK Gleichung
$\alpha$	Index für diskrete Bewegungsrichtung oder aerodynamischer Anstellwinkel
$\delta t$	Zeitschritt
$\delta x$	Ortsschritt in x-Richtung
$\delta y$	Ortsschritt in y-Richtung
$\delta z$	Ortsschritt in z-Richtung

---

$\epsilon$	Knudsen-Zahl
$\zeta$	Richtungsindikator
$\mu$	Dynamische Viskosität oder Fortschrittsgrad
$\nu$	Kinematische Viskosität
$\xi$	Kodierungsindex
$\rho$	Dichte
$\rho_0$	Thermodynamischer Dichteanteil
$\rho_r$	Referenzdichte
$\rho'$	Hydrodynamischer Dichteanteil
$\sigma$	Schubspannungstensor
$\sigma(\Omega)$	Differentieller Wirkungsquerschnitt einer Kollision
$\tau$	Relaxationszeit
$\tau_s$	Smagorinsky Relaxationszeit
$\chi$	Gewichtungsfaktor oder Abstromwinkel
$\psi$	Rotorumlaufwinkel
$\Delta$	Teilungsverhältnis
$\Theta$	Nickwinkel
$\Pi$	Spannungstensor im Ungleichgewicht
$\Phi$	Rollwinkel
$\Psi$	Gierwinkel
$\Omega$	Rotor-Drehgeschwindigkeit



# 1 Einleitung

Rotorabwind von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen birgt insbesondere im bodennahen Flug erhebliche Gefahren. Auf nahestehende Personen, Objekte und Fahrzeuge wirken große Strömungskräfte. Bei losem oder staubigem Untergrund besteht die Gefahr des Brownouts oder Whiteouts, der Aufwirbelung von Staub, Sand oder Schnee durch den Abwind. Es entsteht eine dichte Wolke, die das Luftfahrzeug einhüllt und der Luftfahrzeugbesatzung und den Piloten die Einschätzung der Lage und Orientierung desselben erschwert oder gar unmöglich macht.

Diese extremen Bedingungen führen häufig zu durch die Piloten geführten Kollisionen mit dem Gelände oder nahestehenden Objekten, dem kontrollierten Flug ins Gelände (engl. Controlled Flight into Terrain) [1]. Im zweiten Irakkrieg zählten in den Jahren 2001-2008 Brownout und der Controlled Flight into Terrain auf Seiten der Vereinigten Staaten von Amerika zu den Hauptursachen katastrophaler Hubschrauberunfälle ohne Feindeinwirkung (vgl. Abbildung 1-1). Unter Piloten zählt die Landung unter Brownout-Bedingungen zu den gefährlichsten Flugmanövern [2].

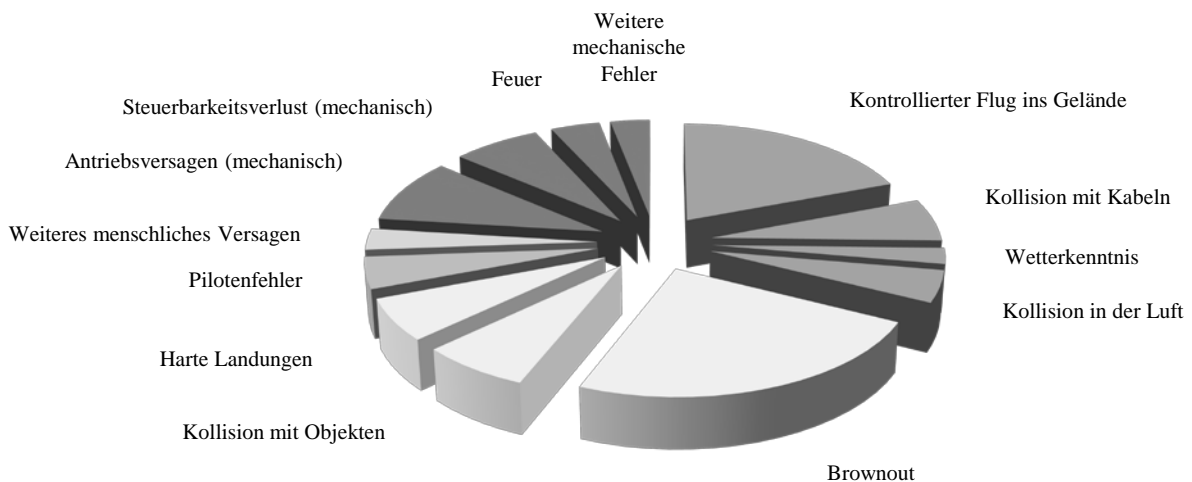


Abbildung 1-1: Ursachen für Hubschrauberunfälle ohne Feindeinwirkung nach [1]

Auch im zivilen Hubschrauberflug kommt es durch Verlust der Sicht, verursacht durch Brownout oder Whiteout, immer wieder zu katastrophalen Unfällen. Im Jahr 2013 landete ein Hubschrauber bei einer Übung der Bundespolizei am Berliner Olympiastadion aufgrund von Whiteout und der dadurch stark eingeschränkten Pilotensicht einseitig und kippte um. Der noch drehende Rotor des Hubschraubers schlug in einen nahestehenden, zuvor gelandeten Hubschrauber ein. Bei diesem Vorfall wurde eine Person tödlich, vier weitere schwer verletzt [3].

Eine Vorbereitung der Piloten auf diese gefährlichen Situationen in Trainingssimulatoren scheitert an der Tatsache, dass realitätsnahe Simulationen von Rotorabwind in Bodennähe aufgrund des hohen Rechenaufwands nicht in Echtzeit durchgeführt werden können [4-8]. Der Echtzeitanspruch und realitätsnahe Simulationsmodelle stellen hohe Anforderungen an Rechenkapazität und Rechenzeit. Deshalb wurden durch Rotorabwind, Brownout und Whiteout bedingte Phänomene bisher nicht oder nur unzureichend in der Trainingssimulation implementiert. Stattdessen wird zumeist auf unphysikalische graphische Effekte und eine kontinuierliche Verdunkelung der Simulationsaußensicht zurückgegriffen. Der fehlende Realitätsbezug ist während des Trainings nicht wahrnehmbar und kann zu einem falschen Sicherheitsgefühl verleiten [9].

Bereits existierende höherwertige Modelle für die Echtzeit-Simulation von Rotorabwind im bodennahen Flug [10-12] nutzen ebene Untergrundmodellierungen oder vorberechnete Nachbildungen spezifischer komplexer Szenarios. Sie ermangeln der Möglichkeit, generische Geometrien zur Laufzeit zu erfassen. Dieser Umstand verhindert ihren Einsatz in der Simulation von Missionen im Umfeld generischer Objekte und komplexer Terrainformen, wo eine ernstzunehmende Interaktion zwischen Objekt- und Terrainumströmung und dem Rotorabwind vorliegen kann [13].

Im Rahmen dieser Arbeit soll, basierend auf Voruntersuchungen [14], ein Simulationsmodell entwickelt werden, das sich dieser Unzulänglichkeiten annimmt. Hierzu wird im folgenden Abschnitt die konkrete Zielsetzung formuliert. Nach der Darlegung des aktuellen Technikstands in der echtzeitfähigen Abwindsimulation im darauf folgenden Abschnitt werden Handlungsfelder für die Entwicklung und Validierung des Modells formuliert, die zugleich die Gliederung der weiteren Kapitel der Arbeit festlegen.

## 1.1 Zielsetzung und Abgrenzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Modell zur Echtzeit-Simulation des Rotorabwinds von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen im terrain- und hindernisnahen Flug zu entwickeln. Dieses Modell soll folgende Merkmale aufweisen:

- Das Modell soll generische, komplexe Terrain- und Objektgeometrie in Echtzeit erfassen und deren Einfluss auf den Rotorabwind berechnen können. Der Einfluss bewegter Objekte soll ebenfalls berücksichtigt werden können.
- Anzahl und Ausgestaltung der Rotoren und der aerodynamisch wirksamen Flächen des betrachteten Luftfahrzeugs sollen nicht vom Modell vorgeschrieben werden.
- Die Simulation soll in einem begrenzten, am betrachteten Luftfahrzeug anhaftenden Rechenraum erfolgen. Dessen Ränder dürfen die Abwindströmung nicht beeinflussen. Die Größe des Rechenraums soll die Abbildung aller relevanten Strömungsbereiche von auf den Boden auftreffendem Rotorabwind erlauben.

- Das Modell soll geeignete Schnittstellen für die Integration in den Forschungssimulator des Lehrstuhls für Hubschraubertechnologie der Technischen Universität München (vgl. Abbildung 1-2) aufweisen. Der Simulator verfügt über ein hochauflösendes, sphärisches Sichtsystem für die Außensichtdarstellung und wurde für die Nachstellung von Flug bei erschwerten Sichtbedingungen entwickelt [15].



**Abbildung 1-2: Forschungssimulator des Lehrstuhls für Hubschraubertechnologie**

- Für die Integration des Modells in den Simulator sind die Modelleingangsgrößen aus den Ausgangsgrößen des Flugphysikmodells des Simulators (Lage, Orientierung und Schubverteilung der Rotoren des betrachteten Luftfahrzeugs) abzuleiten (vgl. Abbildung 1-3). Weiterhin dienen in der Gelände- und Objektdatenbank des Simulators gespeicherte Geometriedaten und die Rumpfgeometrie des betrachteten Luftfahrzeugs als Eingangsgröße des Modells.
- Für den Einsatz im Simulator ist es zudem erforderlich, dass die Rechenergebnisse eines Simulationsschritts des Abwindsimulationsmodells innerhalb der Bildwiederholfrequenz  $f_p=60\text{Hz}$  der Außensichtdarstellung des Simulators bereitgestellt werden. Um diese Anforderung an die verfügbare Rechenkapazität anpassen zu können, soll das Auflösungsvermögen des Modells skalierbar gestaltet werden.
- Ausgang des Modells sollen diskrete Geschwindigkeitswerte bilden. Diese können im Rahmen weiterführender Forschungsprojekte in einem Post-Prozessierungs-Schritt beispielsweise für hochauflösende Brownout- oder Whiteout-Simulationen [16] oder für die Ermittlung von auf nahestehende Personen und Objekte wirkende Strömungskräften [17] genutzt werden.

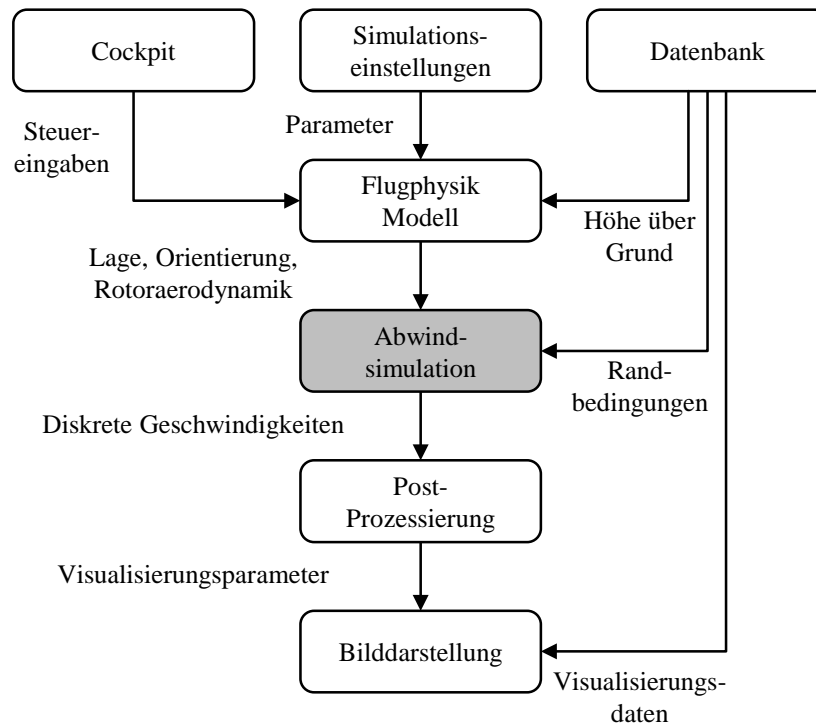


Abbildung 1-3: Integration des Simulationsmodells im Forschungssimulator [14]

- Die für die Echtzeit-Simulation des Rotorabwinds von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen maßgeblichen Modellcharakteristika, d.h. die Skalierbarkeit des Modells, das Laufzeit- und das Modellverhalten, sollen im Rahmen einer Verifikation überprüft werden. Die diskreten Geschwindigkeitswerte, die den Ausgang des Modells bilden, sollen anhand von Flugversuchsdaten validiert werden.

Im folgenden Abschnitt wird unter Berücksichtigung der genannten Anforderungen der Stand der Technik verfügbarer echtzeitfähiger Modelle für die Simulation von Rotorabwind erarbeitet. Bestehende Modelle werden hinsichtlich ihrer Eignung für die Nachbildung von bodennahem Flug im Umfeld generischer, komplexer Terrain- und Objektgeometrie bewertet. Die Ergebnisse der Untersuchungen finden Eingang in die Formulierung von Handlungsfeldern für die Modellentwicklung im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

## 1.2 Stand der Technik

Die Geschichte der Entwicklung von Modellen zur Simulation von Rotorabwind reicht bis in die fünfziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts zurück. Aufgrund der hohen Anforderungen an Rechenleistung und -zeit wurden erst zu Beginn des einundzwanzigsten Jahrhunderts Modelle dediziert für den Echtzeiteinsatz entwickelt. Frühe Modelle eignen sich jedoch aufgrund ihres einfachen Aufbaus und der aktuell verfügbaren Rechenleistung meist ebenfalls für den Echtzeiteinsatz.



Im Folgenden werden Abwindsimulationsmodelle verschiedener Epochen vorgestellt und auf ihre Eignung für die echtzeitfähige Abbildung bodennaher Flugzustände untersucht. Die Modelle werden hierzu theoretisch beleuchtet. Außerdem wird ihre Eignung zur Abbildung verschiedener Flugzustände und Strömungsbereiche im bodennahen Flug geprüft und ihr Validierungsgrad bewertet. Zu den untersuchten Abwindsimulationsmodellen zählen:

- Walljet Modelle
- Potentialtheoretische Modelle
- Prescribed Wake Modelle
- Free Wake Modelle
- Fast Free Wake Modelle

Insbesondere die beiden letztgenannten Modelle wurden erst in jüngerer Vergangenheit durch den Zuwachs an verfügbarer Rechenleistung und der zunehmenden Parallelisierung für die Echtzeitsimulation nutzbar.

**Walljet Modelle** beschreiben das Auftreffen eines Freistrahls auf eine ebene Wand und die daraus resultierende Umlenkung [18]. Die Modellierung lässt sich auf in Bodennähe schwebende Hubschrauber und Kipprotor-Flugzeuge übertragen (vgl. Abbildung 1-4). Im vergangenen Jahrhundert wurden sie für die Planung von Start- und Landeplätzen und die Einschätzung von Gefährdungspotential durch Rotorabwind und Brownout eingesetzt [17] [19-20].

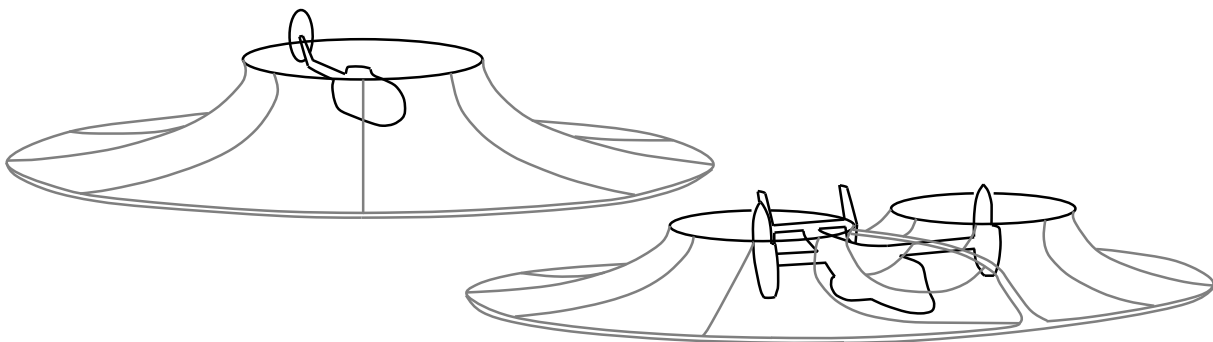


Abbildung 1-4: Walljet Modellierung von Rotorabwind nach [17]

Das charakteristische Strömungsbild eines auf eine Ebene auftreffenden, radialsymmetrischen Freistrahls, der den Abwind eines in der Höhe  $H$  über Grund schwebenden Rotors mit Radius  $R$  modelliert, lässt sich in drei Bereiche gliedern: Freistrahlsbereich, Übergangsbereich und Wandströmungsbereich [17]. Während sich der Freistrahlsbereich (vgl. Abbildung 1-5: Region I) von der Rotorebene bis zur ersten wahrnehmbaren Beeinflussung des Strahls durch die Bodenebene erstreckt, bildet der Übergangsbereich (vgl. Abbildung 1-5: Region II) die Umlenkung des Strahls durch die Bodenebene ab.

Bei der Umlenkung des Strahls aus seiner ursprünglich axialen in eine radiale Richtung nimmt der statische Druck in der Strömung, der am Lotpunkt des Rotors sein Maximum erreicht, kontinuierlich ab. In dem Punkt, in dem der statische Druck den Wert des

Umgebungsdrucks erreicht, beginnt der Wandströmungsbereich (vgl. Abbildung 1-5: Region III). In diesem Bereich bleibt der statische Druck weitestgehend konstant, die Strömung breitet sich nahezu oberflächenparallel mit der radialen Koordinate  $r$  aus, bis sie dissipiert.

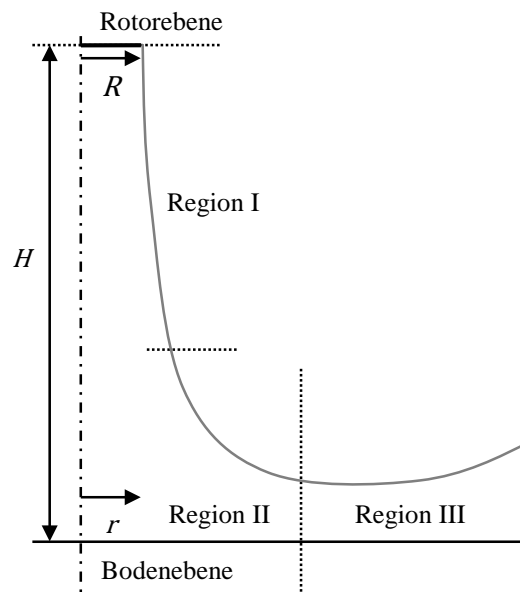


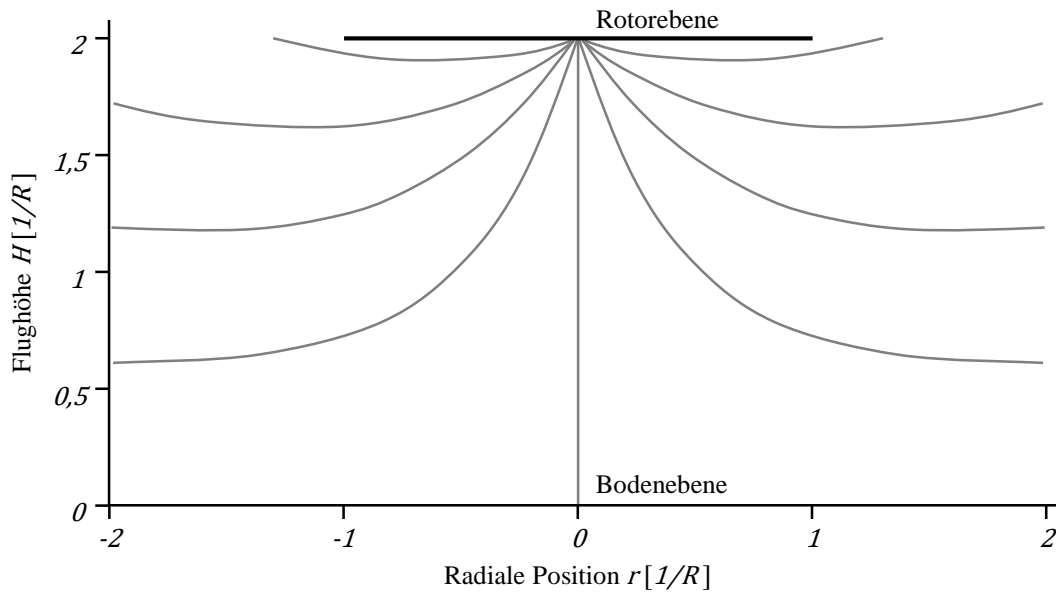
Abbildung 1-5: Bereichsunterteilung in Walljet Modellen nach [17]

Die für die Dissipation der Strömungsgeschwindigkeit verantwortlichen Reibungseffekte werden in Walljet Modellen durch empirische Faktoren abgebildet. Mit Hilfe dieser Faktoren lassen sich für den Übergangs- und den Wandströmungsbereich gültige Beziehungen für die Berechnung diskreter Geschwindigkeitswerte in Bodennähe aufstellen.

Obwohl Walljet Modelle im Laufe der Zeit mit weiteren Modellierungsansätzen kombiniert wurden, die auch Strömungsbereiche außerhalb der reibungsbehafteten Grenzschicht [20] und weitere Flugzustände abdecken sollten [17], wurden nur die Ergebnisse für oberflächenparallele Strömungsanteile im Übergangs- und Wandströmungsbereich anhand von Schwebeflugversuchen hinreichend validiert [17][21]. Eine Erweiterung des modellierten Strömungsfelds kann durch eine Zusammenführung mit validierten Strahlmodellen, die den Übergangsbereich modellieren [22], erfolgen.

Walljet Modelle eignen sich aufgrund ihres einfachen Aufbaus ohne weitere Modifikationen für die Echtzeitsimulation. Sie sind jedoch auf die Simulation von Flügen über ebenem Untergrund beschränkt. Weitere Flugzustände sind nicht implementiert oder nur unzureichend validiert. Die Einflüsse des Hubschrauberrumpfs, generischer Objekte und Terrainformen auf den Rotorabwind können in diesen Modellen nicht erfasst werden.

Im Gegensatz zu Walljet Modellen werden **potentialtheoretische Modelle** für die Ermittlung des Einflusses des Bodens auf den Schub- und Leistungsbedarf niedrigfliegender Hubschrauber, des Bodeneffekts, eingesetzt. Dieser wird mit Hilfe der Potentialtheorie und diskreter Quellströmungen [23-24] modelliert (vgl. Abbildung 1-6).



**Abbildung 1-6: Modellierung von Rotorabwind in Bodennähe mit Punktquellen nach [12]**

Hierbei wird die als Punktquelle modellierte Rotordurchströmung an der Bodenebene gespiegelt. Wie in der vorangegangenen Abbildung 1-6 zu sehen ist, nähert sich im resultierenden Strömungsbild die von den punktförmigen Quellen ausgehende, zunächst radial verlaufende Strömung tangential der Bodenebene an. Insbesondere der quellnahe, radiale Strömungsverlauf widerspricht jedoch der zur Rotorebene orthogonal induzierten Strömung eines schwebenden Rotors.

Für die Echtzeit-Abwindsimulation entwickelte Ringquellen-Potentialströmungsmodelle [12] beschreiben die Rotordurchströmung daher mit ringförmigen, konzentrischen Quellen. Die Überlagerung der Wirkung mehrerer, radial äquidistant auf der Rotorscheibe verteilter Quellen führt dabei zu einem nahezu parallelen Strömungsverlauf unter dem Rotor. Eine lineare Variation der Quellstärke der Ringquellen entsprechend ihrer radialen Koordinate ermöglicht weiterhin die Abbildung einer radial mit der lokalen Rotationsgeschwindigkeit der Rotorblätter anwachsenden Strömungsgeschwindigkeit.

Analog zu potentialtheoretischen Punktquellen-Modellen ermöglicht eine Spiegelung der Ringquellen an der Bodenebene die Abbildung des Bodeneffekts auf die Rotordurchströmung. Die Auswertung des überlagerten Einflusses der an der Simulation beteiligten Quellen erlaubt die Berechnung des zugehörigen Strömungsfelds (vgl. Abbildung 1-7).

Die Validierung der Simulationsergebnisse von Ringquellen-Potentialströmungsmodellen anhand experimentell ermittelter Daten ist noch nicht abgeschlossen [12]. Die echtzeitfähige Modellierung eignet sich für die Nachstellung von Schwebeflugsituationen über ebenem Untergrund. Die Abbildung weiterer Flugzustände und des Einflusses von unebenen Terrain, Objekten oder dem Hubschrauberrumpf sind bislang nicht in der Modellierung vorgesehen.

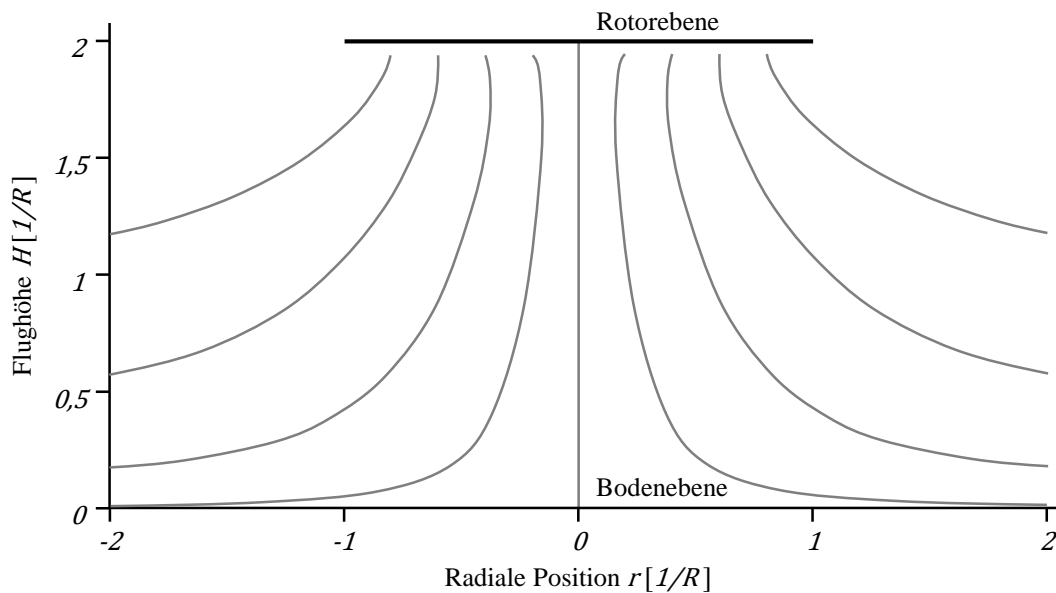


Abbildung 1-7: Modellierung von Rotorabwind in Bodennähe mit Ringquellen nach [12]

In der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts begann, basierend auf potentialtheoretischen Überlegungen, die Modellierung des Rotorabwinds mit Hilfe diskreter Wirbelmodelle. Zu den bekanntesten Vertretern dieser Gattung zählen **Prescribed Wake Modelle** [25-27]. Diese modellieren den Rotorabwind durch einen geometrisch festgelegten Nachlauf aus diskreten Wirbelelementen.

In Prescribed Wake Modellen werden der Nachlauf der Blattspitzen und der Nachlauf der Rotorblätter unterschieden (vgl. Abbildung 1-8). Während der Blattspitzennachlauf maßgeblich für die Einschnürung des Abwindstrahls verantwortlich ist, erlaubt die zusätzliche Betrachtung des Blattnachlaufs eine Berechnung diskreter Geschwindigkeitswerte.

Die Geometrie des Blattspitzennachlaufs und des Blattnachlaufs wird in den Modellen durch experimentell validierte, empirische Gleichungen festgelegt. Diese beschreiben die radialen und axialen Koordinaten der diskreten Wirbelelemente in Abhängigkeit des Zeitpunkts, zu dem sich die Wirbelelemente von den Rotorblättern abgelöst haben. Parameter der Gleichungen bilden, neben empirischen Faktoren, der Rotor Schub und Größen der Rotor- und der Blattgeometrie. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes [28], der Position und der Wirbelstärke der Wirbelelemente kann die resultierende Strömungsgeschwindigkeit an beliebigen diskreten Punkten im Raum integriert werden.

Im Laufe der Zeit wurden Prescribed Wake Modelle entwickelt, die neben dem Schwebeflug auch weitere Flugzustände abbilden können [27][29]. Mit Hilfe von Versuchsergebnissen [30] wurden die der Modellierung zugrundeliegenden empirischen Gleichungen für die Abbildung von bodennahem Schwebeflug erweitert [31].

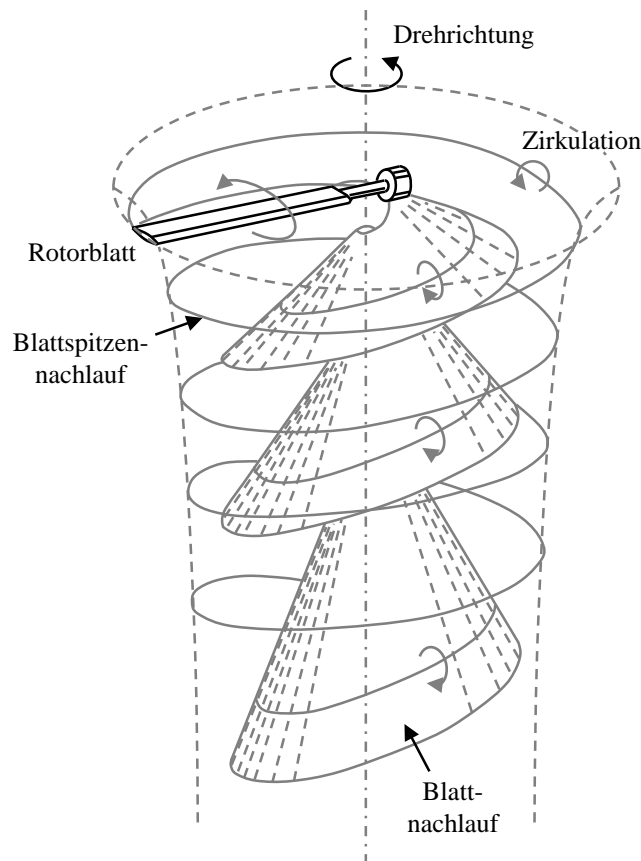


Abbildung 1-8: Prescribed Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [25]

Der einfache Aufbau der Modelle ermöglicht deren Einsatz in der Echtzeit-Simulation ohne weitere Modifikationen. Auch der Einfluss des Hubschrauberrumpfs [32-33], sowie bewegter Objekte und deren Wirbelnachlauf [34] auf den Rotorabwind wurde bereits in Prescribed Wake Modellen implementiert. Diese Maßnahmen bedürfen jedoch situationsspezifischer, vorab durchgeführter Rechnungen und sind daher nicht für die Nachbildung des Flugs im Umfeld generischer Objekt- und Terraingometrie unter Echtzeitbedingungen geeignet.

Als weiterer Vertreter der diskreten Wirbelmodelle erlauben **Free Wake Modelle** die Veränderung der relativen Lage und Orientierung der diskreten Wirbelelemente aufgrund deren gegenseitiger Beeinflussung. Die Modelle basieren nicht auf empirischen Formulierungen, sondern auf physikalischen [35-36]. Jedes Wirbelelement übernimmt bei der Ablösung von einem Rotorblatt dessen gebundene Zirkulation (vgl. Abbildung 1-9). Diese lässt sich mit Hilfe des Rotorschubs und Größen der Rotor- und Blattgeometrie bestimmen.

Free Wake Modelle ermitteln in jedem Simulationsschritt die Beeinflussung sämtlicher geradliniger oder gekrümmter Wirbelelemente durch die Rotorblätter, benachbarte Wirbelelemente, Bewegungen des Luftfahrzeugs und Böen. Mit diesen Ergebnissen wird die Geometrie des Rotornachlaufs iterativ neu berechnet. Entsprechend der aktuellen Nachlaufgeometrie und der damit verknüpften Lage der Wirbelelemente können diskrete Geschwindigkeiten für das gesamte Strömungsfeld berechnet werden.

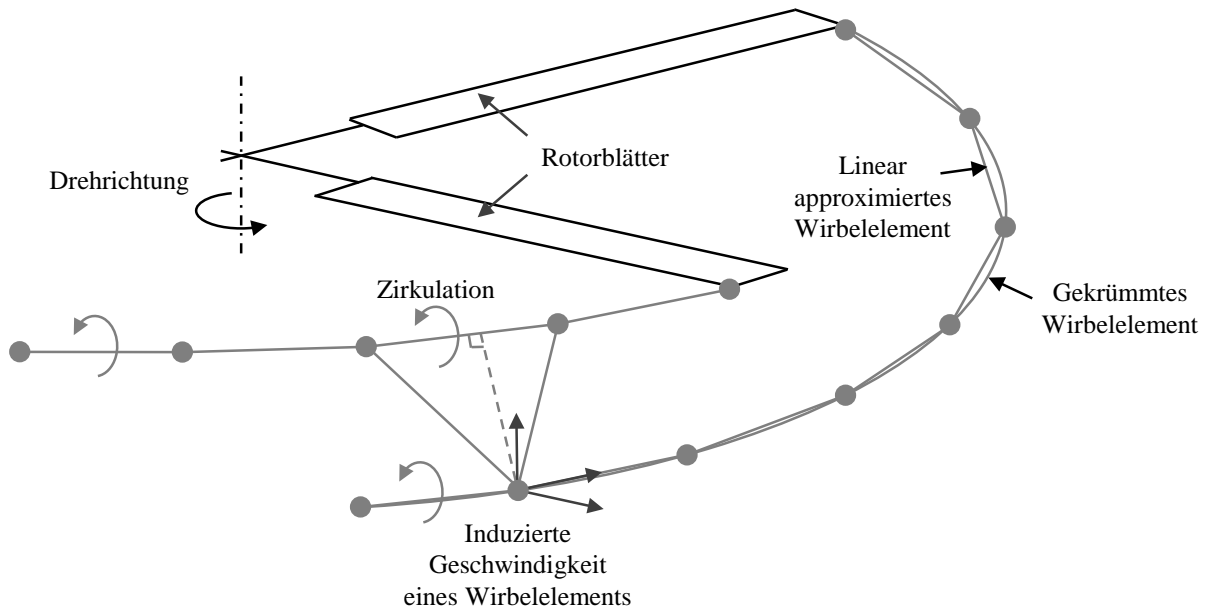


Abbildung 1-9: Free Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [35]

Free Wake Modelle erlauben die Abbildung sämtlicher relevanter Flugzustände des Hubschrauberflugs. Die rechenzeitaufwendige, iterative Vorgehensweise der Modelle verhinderte lange Zeit ihren Einsatz in der Echtzeit-Simulation. Die Firma Continuum Dynamics Inc. entwickelte jedoch, basierend auf dem Free Wake Modell CHARM (Comprehensive Hierarchical Aeromechanics Rotorcraft Model) [36], ein echtzeitfähiges Modell reduzierter Ordnung [37]. In diesem Modell wird eine verminderte Anzahl diskreter, gekrümmter Wirbelemente in adaptiven Baumstrukturen organisiert, um deren iterative Auswertung zu optimieren. Die Auswertung der Elemente wird durch den Einsatz optimierter Algorithmen weiter beschleunigt. In Studien wurden außerdem Modellparameter identifiziert, die bei einer Verringerung der Rechenzeit eine weitestgehende Erhaltung der Simulationsgüte erlauben [38].

Der Einfluss eines ebenen, bewegten Untergrunds wird, entsprechend der Potentialtheorie, in diesem Modell durch eine Spiegelung von Wirbelementen an der Bodenebene abgebildet [39]. Für die Modellierung des Einflusses bewegter, komplexer Objekte auf den Rotorabwind bedient sich das Modell der Panelmethode [10][40]. Diese Maßnahme ermöglicht die Abbildung von Objekten und Untergrund als Strömungshindernisse. Um die Umströmung bewegter Objekte oder zeitlich veränderlicher Strömungen (z.B. Wind, Wirbelnachlauf) in der Modellierung zu berücksichtigen, bedarf das Modell zusätzlich vorberechneter, tabellierter Strömungslösungen [10][40].

Das echtzeitfähige Free Wake Modell wird bereits für die Nachstellung von Brownout Situationen [39] und Schiffslandungen [40] in der Echtzeitsimulation eingesetzt. Es wurde umfangreich anhand von Flugversuchsdaten validiert und im Rahmen von Pilotenstudien bewertet. Die Nachstellung des bodennahen Flugs im Umfeld komplexer Objekt- und Terraingeometrie erfordert jedoch stets spezifische, vorberechnete Strömungslösungen.

Eine Sonderform der Free Wake Modelle bildet das von der Firma Agusta Westland und der Universität Mailand entwickelte **Fast Free Wake Modell** [11][41]. Statt geradliniger oder gekrümmter Wirbelelemente verwendet das Modell für die Abbildung des Rotornachlaufs eine über den Simulationsverlauf konstant gehaltene Anzahl kreisförmiger Wirbelringe, die sich in definierten Zeitabständen vom Rotor ablösen (vgl. Abbildung 1-10). Der Einfluss diskreter Rotorblätter wird im Rahmen dieser Modellierung nicht berücksichtigt. Den sich vom Rotor ablösenden Wirbelringen wird stattdessen eine vom Rotorschub, von der Blatt- und Rotorgeometrie sowie von empirischen Faktoren beeinflusste, konstante Wirbelstärke zugeordnet.

Die Interaktion der Wirbelringe, deren Beeinflussung durch Bewegungen des betrachteten Luftfahrzeugs und die daraus resultierende Deformation der Nachlaufgeometrie wird durch eine Verschiebung oder radiale Streckung der Ringe abgebildet. Diese vereinfachte Modellierung und die daraus resultierenden reduzierten Anforderungen an Rechenkapazität und -zeit prädestinieren das Modell für den Echtzeiteinsatz.

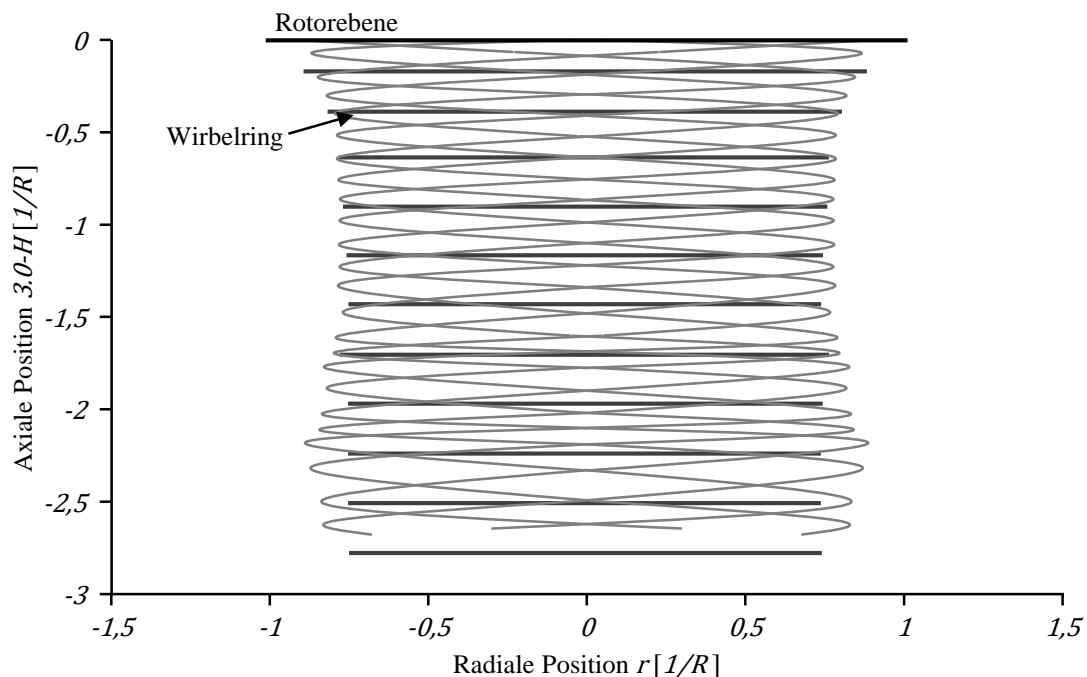


Abbildung 1-10: Fast Free Wake Modellierung des Rotorabwinds nach [41]

Das Fast Free Wake Modell erlaubt die Abbildung aller relevanten Flugzustände. Der Einfluss von ebenem Untergrund wird im bodennahen Flug durch eine Spiegelung von Wirbelringen an der Bodenebene abgebildet. Der qualitative Vergleich des Fast Free Wake Modells mit validierten Modellen und die quantitative Validierung der Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten zeigen eine gute Näherung der zugrundeliegenden physikalischen Phänomene [41]. Die Abbildung des Einflusses komplexer Terrain- und Objektgeometrie auf den Abwind ist in diesem Modell aber bislang nicht vorgesehen.

Als eine der jüngsten Entwicklungen schließt das Fast Free Wake Modell den Überblick über echtzeitfähige Modelle für die Simulation von Rotorabwind ab. Bei der Erarbeitung dieser

Übersicht wurde ersichtlich, dass keines der betrachteten Modelle den Anforderungen der in Kapitel 1.1 formulierten Zielsetzung entspricht. So erlauben nur einige diskrete Wirbelmodelle die Abbildung aller relevanten Flugzustände. Eine Berücksichtigung komplexer Geometrien und deren Einfluss auf den Abwind ermöglichen diese Modelle jedoch nur unter Zuhilfenahme der Panelmethode. Diese erfordert zusätzliche, geometriespezifische Vorberechnungen. Die Erfassung des Einflusses von Wirbelnächläufen bewegter Objekte und zeitlich veränderlicher Strömungen bedarf ebenfalls vorberechneter Lösungen. Dieser Mangel an Flexibilität verhindert den Einsatz der vorgestellten Modelle zur Lösung des in der Zielsetzung dieser Arbeit beschriebenen Problems.

### 1.3 Handlungsfelder

Entsprechend der in Kapitel 1.1 formulierten Zielsetzung soll im Rahmen dieser Arbeit ein echtzeitfähiges Modell geschaffen werden, das die Simulation von Rotorabwind im terrain- und hindernisnahen Flug erlaubt. Die Aufarbeitung des aktuellen Technikstands in Kapitel 1.2 zeigt, dass verfügbare Modelle diese Aufgabenstellung nicht oder nur teilweise lösen können. Deshalb ist die Entwicklung eines eigenständigen Modells zielführend. Der Entwicklungsvorgang umfasst mehrere Teilaspekte, die die Handlungsfelder der Modellentwicklung und die Gliederung der vorliegenden Arbeit bilden:

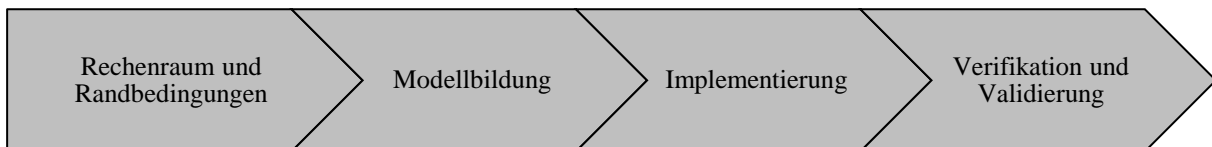


Abbildung 1-11: Handlungsfelder der Modellentwicklung

Die Festlegung des **Rechenraums** erfordert die Definition sämtlicher relevanter Koordinatensysteme sowie die räumliche Abgrenzung des betrachteten Raums. Es sind Vorschriften für die Diskretisierung von Randbedingungen und Simulationsgleichungen festzulegen. Bei der Diskretisierung handelt es sich um die Approximation kontinuierlicher Gleichungen oder Geometrien an diskreten Orten in Raum und Zeit [42]. Während die zeitliche Diskretisierung durch die Simulationsschrittweite des Forschungssimulators vorgegeben ist (vgl. Kapitel 1.1), gilt es für die räumliche Diskretisierung des Rechenraums noch ein geeignetes Rechengitter festzulegen. Weiterhin sind Transformationsvorschriften zu formulieren, die es ermöglichen, Eingangsgrößen des Modells gemäß dem festgelegten Rechengitters zu diskretisieren. Diese Vorgänge beschreibt das zweite Kapitel.

Es sind durch die Simulationsumgebung und das betrachtete Luftfahrzeug vorgegebene **Randbedingungen** zu erfassen und zu diskretisieren. Hierfür sind geeignete echtzeitfähige Verfahren zu entwickeln. Relevante Randbedingungen, wie zeitlich veränderliche Größen der Rotor-aerodynamik und der Flugmechanik des betrachteten Luftfahrzeugs, sind zu identifizieren, in Orientierung und Betrag zu erfassen, in geeignete Koordinatensysteme zu transformieren



ren und entsprechend des festgelegten Rechengitters zu diskretisieren. Weiterhin bilden das betrachtete Luftfahrzeug, das überflogene Terrain und nahestehende Objekte Strömungshindernisse für die Abwindsimulation. Auch diese sind zu erfassen, in das Koordinatensystem der Abwindsimulation zu transformieren und zu diskretisieren. Der Umsetzung der Randbedingungserfassung ist das dritte Kapitel gewidmet.

Im Rahmen der **Modellbildung** ist ein Algorithmus zu entwickeln, der diskrete strömungsmechanische Größen im betrachteten Rechenraum zur Simulationslaufzeit berechnet. In Voruntersuchungen wurde die Lattice-Boltzmann Methode (LBM) [43] unter verschiedenen Modellierungsansätzen als Basis für die Entwicklung dieser Strömungssimulation ausgewählt [14][44]. Für die Abbildung der Randbedingungen des terrain- und hindernisnahen Flugs von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen sind jedoch weitreichende Modifikationen der Methode erforderlich. So ist diese für die Nachbildung subsonischer, turbulenter Strömungsvorgänge anzupassen. Weiterhin ist die Methode um Mechanismen zur Verarbeitung der erfassten Randbedingungen zu ergänzen. Eine Beschreibung des entwickelten Algorithmus findet sich im vierten Kapitel.

Da die Randbedingungserfassung und die Strömungssimulation zur Simulationslaufzeit stattfinden, müssen diese Prozesse in Echtzeit erfolgen. Bei deren **Implementierung** ist auf eine effektive Nutzung der vorhandenen Rechenkapazitäten zu achten. Daher sollen Methoden zur Vorabberechnung statischer Größen und Verfahren zur Parallelisierung eingesetzt werden. Zudem ist die Modellauflösung in der Implementierung skalierbar zu gestalten, um diese an vorhandene Rechenkapazitäten anpassen zu können. Die Umsetzung wird im fünften Kapitel beschrieben.

Im Rahmen der **Verifikation** eines Simulationsmodells wird sichergestellt, dass bei der Modellierung vorgenommene mathematische Näherungen zulässig sind [45]. Für die Verifikation des Zeit- und Modellverhaltens des entwickelten Abwindsimulationsmodells sind hierfür zunächst geeignete Referenzmodelle zu identifizieren. Anhand charakteristischer Testfälle sind die Ergebnisse des Abwindsimulationsmodells mit den Referenzlösungen zu vergleichen. Zudem ist die Erfüllung des formulierten Echtzeitanspruchs zu prüfen. Das angewandte Vorgehen wird im sechsten Kapitel erläutert.

In der **Validierung** eines Simulationsmodells wird die Zulässigkeit von im Rahmen der Modellbildung vorgenommenen physikalischen Annahmen überprüft [45]. Die Validierung der Rechenergebnisse des Abwindsimulationsmodells erfolgt mit Hilfe von in Flugversuchen experimentell ermittelten Daten. In Testfällen wird anhand dieser Daten die physikalische Exaktheit des Modells bewertet. Die Modellvalidierung wird im siebten Kapitel beschrieben.

Den Abschluss der Arbeit bildet das achte Kapitel mit einer Bewertung der Ergebnisse, Aussagen zur Einsetzbarkeit des entwickelten Modells und Empfehlungen für weiterführende Forschungsvorhaben.



## 2 Rechenraum

Begrenzte Rechenzeit erfordert in der Simulation die räumliche Abgrenzung des betrachteten Rechenraums. Weiterhin beeinflusst die limitierte Rechenzeit die Diskretisierung des Raums. Dies impliziert eine Beschränkung der Lösungen der Modellgleichungen auf einen endlichen Wert und bietet zugleich die Möglichkeit zur Steuerung des Modellauflösungsvermögens. Um die Zahl der anfallenden Koordinatentransformationen zu reduzieren, ist die Einführung modelleigener Koordinatensysteme zweckmäßig. Die Transformation von Modelleingangsgrößen in diese Systeme erfordert die Formulierung geeigneter Rechenvorschriften.

Im Folgenden werden zunächst in der Luftfahrt und der Flugsimulation gebräuchliche Koordinatensysteme vorgestellt. Weiterhin wird ein körperfestes Modellkoordinatensystem für die Abwindsimulation eingeführt. Anschließend werden die für die Umrechnung der Modelleingangsgrößen in dieses Koordinatensystem erforderliche Transformationen erläutert. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Beschreibung des Rechengitters, auf dem die räumliche Diskretisierung des modelleigenen Rechenraums erfolgt.

### 2.1 Koordinatensysteme

Zu den in der Luftfahrt und der Flugsimulation gebräuchlichen Koordinatensystemen zählen das geozentrische Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) System, das North-East-Down (NED) System und das körperfeste Body-Fixed (BF) System betrachteter Luftfahrzeuge [46]. Während das ECEF System vorwiegend für Navigationszwecke und die Notation von Positionen relativ zur rotierenden Erde genutzt wird, dient das NED System als Referenz für die Beschreibung der Orientierung von Luftfahrzeugen. Im körperfesten BF System werden Geschwindigkeiten, Drehraten, Kräfte und Momente relativ zu den Körperachsen betrachteter Luftfahrzeuge beschrieben. Für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Abwindsimulationsmodell wurde neben den genannten Koordinatensystemen ein weiteres, dem betrachteten Rechenraum anhaftendes System eingeführt. Die Koordinatensysteme und deren Bedeutung für die Abwindsimulation werden im Folgenden kurz vorgestellt.

Der Ursprung  $O_I$  des der Erddrehung folgenden ECEF Systems liegt im Erdmittelpunkt. Die Koordinatenachsen  $(x, y, z)_I$  des Systems bilden ein Rechtssystem (vgl. Abbildung 2-1). Die z-Achse des Systems bildet die auf den Nordpol deutende Erdrotationsachse. Die x-Achse liegt in der Äquatorialebene und deutet auf den Nullmeridian der Erde. Das Rechtssystem wird vervollständigt durch die ebenfalls in der Äquatorialebene liegende y-Achse. Neben seinem Einsatz in der Navigation wird das ECEF Koordinatensystem in der Luftfahrt und der Flugsimulation für die Notation der Position von Luftfahrzeugen, Landmarken und Objekten verwendet. In der Simulation bildet es zudem ein Inertialsystem für die Beschreibung der Geometrie von Terrain und Objekten.

Die Notation von Positionen  $P_I$  im ECEF System erfolgt entweder in kartesischen Koordinaten oder den in der Navigation gebräuchlichen World Geodetic System (WGS) 84 Koordinaten. Letztere beschreiben eine Position anhand ihrer geodätischen Breite  $\mu$ , ihrer Länge  $\lambda$  und ihrer Höhe  $h$  über dem WGS 84 Referenzellipsoid [46].

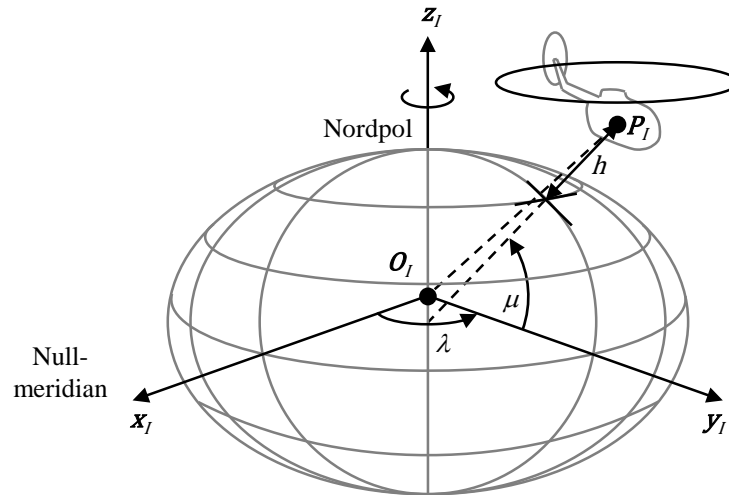


Abbildung 2-1: Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) Koordinatensystem nach [46]

Das NED Koordinatensystem hingegen dient in der Luftfahrt und der Simulation als Referenzsystem für die Beschreibung der räumlichen Orientierung eines Luftfahrzeugs. Der Ursprung des Systems  $O_N$  haftet an dessen Referenzpunkt (vgl. Abbildung 2-2). Die Ausrichtung der zugehörigen Koordinatenachsen  $(x, y, z)_N$  orientiert sich an der lokalen Geoid-Oberfläche unter dem Luftfahrzeug. Während die x-Achse des Systems parallel zur Oberfläche verläuft und in Richtung des Nordpols deutet, bildet die z-Achse ein Lot auf die Oberfläche. Die y-Achse verläuft parallel zur Oberfläche und vervollständigt das Rechtssystem.

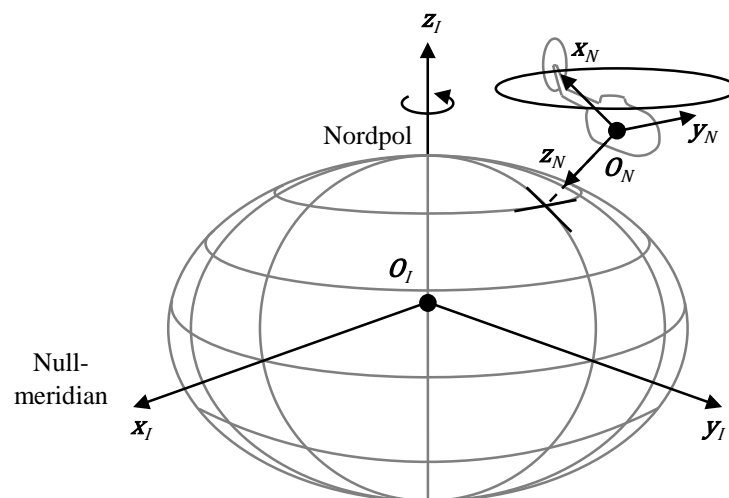


Abbildung 2-2: North-East-Down (NED) Koordinatensystem nach [46]

Der Ursprung  $O_B$  des körperfesten BF Koordinatensystems kommt ebenfalls im Referenzpunkt des Luftfahrzeugs zu liegen. Die Ausrichtung der Achsen des Systems  $(x, y, z)_B$  orientiert sich zeitlich invariant an der Geometrie des Luftfahrzeugs (vgl. Abbildung 2-3). So zeigt die x-Achse entlang der Längsachse des Luftfahrzeugs nach vorne. Die z-Achse deutet in der Symmetrieebene des Luftfahrzeugs nach unten. Das Rechtssystem wird vervollständigt durch die in Steuerbordrichtung deutende y-Achse. Im BF System werden unter anderem Geschwindigkeiten und Drehraten des betrachteten Luftfahrzeugs notiert. Diese zählen zu den Eingangsgrößen des Abwindsimulationsmodells.

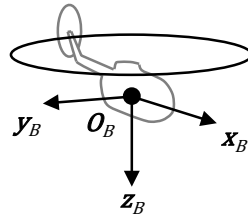


Abbildung 2-3: Body-Fixed (BF) Koordinatensystem

Für die effiziente Diskretisierung von Strömungsgrößen und Randbedingungen des Abwindsimulationsmodells wurde das der Hauptrotornabe des betrachteten Luftfahrzeugs anhaftende Rotorkoordinatensystem eingeführt (vgl. Abbildung 2-4). Bei Luftfahrzeugen mit zwei tragenden Rotoren ist der Koordinatenursprung  $O_R$  des Systems zwischen den Rotoren zentriert.

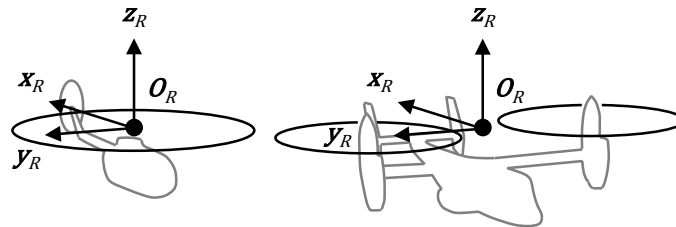


Abbildung 2-4: Rotorkoordinatensystem

Die Ausrichtung der Achsen des Systems  $(x, y, z)_R$  orientiert sich an in der Rotoraerodynamik gebräuchlichen Systemen [47] und bleibt über den Simulationsverlauf unverändert: Während die z-Achse des Systems in Richtung des Rotorschubs deutet und senkrecht auf der Rotorebene steht, liegen die x- und die y-Achse in der Rotorebene. Die x-Achse deutet entlang der Längsachse des betrachteten Luftfahrzeugs nach hinten, die y-Achse vervollständigt das Rechtssystem und zeigt nach Steuerbord.

In der Simulation von Luftfahrzeugen mit gegenüber dem BF Koordinatensystem invarianten Rotorachsen erlaubt das Rotorkoordinatensystem die transformationsfreie Berücksichtigung von Größen der Rotoraerodynamik als Simulationsrandbedingung. Zugleich ermöglicht es eine effiziente Erfassung und Diskretisierung von aus der Geometrie des betrachteten Luftfahrzeugs resultierenden Randbedingungen. Bei der Simulation von Kipprotorflugzeugen erfordert das Neigen der Rotorachsen die Transformation der Lage und Orientierung des Rotorgrößen und der Rotorgondeln (vgl. Kapitel 3).

## 2.2 Transformationen

Um Eingangsgrößen im Abwindsimulationsmodell zu berücksichtigen, die nicht in dem in Kapitel 2.1 eingeführten Rotorkoordinatensystem notiert sind, bedarf es deren Umrechnung in das modelleigene Koordinatensystem. Im Folgenden werden zunächst die Grundlagen der Koordinatentransformation im dreidimensionalen Raum erläutert. Anschließend wird die Transformation von im erdfesten ECEF Koordinatensystem vorliegenden Größen in das BF Koordinatensystem beschrieben. Den Abschluss dieses Unterkapitels bildet die Umrechnung von im BF System notierten Größen in das Rotorkoordinatensystem.

Um einen Einblick in die Grundlagen der Koordinatentransformation zu gewähren, sollen im Folgenden beispielhaft zwei generische, dreidimensionale Koordinatensysteme  $A$  und  $B$  betrachtet werden. Die beiden kartesischen Systeme unterscheiden sich in Ursprung und Orientierung. Ein in Koordinatensystem  $A$  notierter Punkt  $P$  ist definiert durch seine Komponenten  $x$ ,  $y$  und  $z$ :

$$\mathbf{P}_A = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_A \quad (2-1)$$

Ist der Punkt in Koordinatensystem  $B$  mit Ursprung  $\mathbf{O}_B$  notiert, so muss dessen Lage und Orientierung für eine Notation im Koordinatensystem  $A$  transformiert werden. Dies erfordert den Einsatz einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{AB}$ :

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{R}_{AB} \cdot \mathbf{P}_B + \mathbf{O}_{B_A} \quad (2-2)$$

Die Rotationsmatrix bildet im dreidimensionalen kartesischen Raum drei aufeinanderfolgende Rotationen ab. Die Orientierung der Achsen des Koordinatensystems  $B$  wird mit Hilfe der nichtkommutativen Rotationen um die Koordinatenachsen  $x$ ,  $y'$  und  $z''$  auf die des Koordinatensystems  $A$  abgebildet. Die Hochstriche weisen bei dieser Schreibweise auf die ein- bzw. zweimalige Auslenkung der Achsen  $y'$  und  $z''$  aus ihrer ursprünglichen Lage hin. Die Winkel dieser Drehfolge sind in der Luftfahrt entsprechend dem Index der Rotationsachsen als 1-2-3 Eulerwinkel bzw. als Rollwinkel  $\Phi$ , Nickwinkel  $\Theta$  und Gierwinkel  $\Psi$  bekannt [46]:

$$\mathbf{R}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

Die Umrechnung eines im Koordinatensystem  $A$  vorliegenden Punkts in das Koordinatensystem  $B$  verläuft analog. Die Abbildung der Orientierung des Koordinatensystems  $A$  auf das Koordinatensystem  $B$  erfolgt mit Hilfe einer Drehmatrix  $\mathbf{R}_{BA}$ , die der transponierten Matrix der Matrix  $\mathbf{R}_{AB}$  entspricht:

$$\mathbf{R}_{BA} = \mathbf{R}_{AB}^T \quad (2-4)$$

Auch die Transformation von im erdfesten ECEF Koordinatensystem vorliegenden Größen in das BF Koordinatensystem folgt diesem Prinzip. Für die Bestimmung der Lage und Orientierung des BF Systems gegenüber dem ECEF System muss zunächst die Lage und Orientierung des NED Koordinatensystems bestimmt werden. Anschließend kann, basierend auf den Lagewinkeln des betrachteten Luftfahrzeugs, das NED System auf dem BF System abgebildet werden.

Für die Abbildung eines im ECEF Koordinatensystems notierten Punkts  $P_I$  im NED System müssen die WGS 84 Koordinaten des Referenzpunkts des betrachteten Luftfahrzeugs bekannt sein, insbesondere dessen geodätische Länge und Breite. Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen wird abgebildet durch eine Rotation um die Achse  $z_I$  mit dem Winkel der Länge  $\lambda$ , gefolgt von einer Rotation um die Achse  $y_N$  mit dem Winkel der Breite  $\mu$  [46]:

$$\mathbf{R}_{NI} = \begin{bmatrix} -\sin\mu & 0 & \cos\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\mu & 0 & -\sin\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Die Abbildung des NED Koordinatensystems auf das BF Koordinatensystem erfolgt mit Hilfe der Eulerwinkel des betrachteten Luftfahrzeugs gemäß den Formeln 2-3 und 2-4 [46]:

$$\mathbf{R}_{BN} = \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\Psi & \cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Theta \\ \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi & \sin\Phi\cos\Theta \\ \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Die Transformation eines Punkts aus dem ECEF Koordinatensystem in das BF Koordinatensystem beschreibt folgende Gleichung:

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{R}_{BN} \cdot \mathbf{R}_{NI} \cdot (\mathbf{P}_I - \mathbf{O}_{B_I}) \quad (2-7)$$

Sollen schließlich Größen aus dem BF System in das Rotorkoordinatensystem transformiert werden, so ist der Referenzpunkt des betrachteten Luftfahrzeugs in den Ursprung des Rotors zu verschieben. Anschließend erfolgen zwei Rotationen mit dem Winkel  $\Pi$  um die Achsen  $z_B$  und  $x_B$ :

$$\mathbf{P}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Pi & \sin\Pi \\ 0 & -\sin\Pi & \cos\Pi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Pi & \sin\Pi & 0 \\ -\sin\Pi & \cos\Pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{P}_B - \mathbf{O}_{R_B}) \quad (2-8)$$

### 2.3 Diskretisierung

Die Abgrenzung des betrachteten Rechenraums und dessen Diskretisierung beeinflussen maßgeblich das räumliche Auflösungsvermögen und den Rechenzeitbedarf des entwickelten Abwindsimulationsmodells. Mit der Größe des Rechenraums wächst bei gleichbleibender Auflösung auch der Rechenaufwand. Nichtsdestotrotz soll der Raum gemäß der in Kapitel 1.1 formulierten Zielsetzung ausreichend groß dimensioniert werden, um die relevanten

Strömungsbereiche, die sich bei der Interaktion des Rotorabwinds eines niedrigfliegenden Hubschraubers oder Kipprotor-Flugzeugs mit dem überflogenen Terrain ausbilden, abbilden zu können.

In den folgenden Absätzen wird zunächst die Abgrenzung des in der Abwindsimulation betrachteten Rechenraums beschrieben. Es folgt eine Beschreibung des für die Diskretisierung des betrachteten Raums gewählten Ansatzes. Gemeinsam mit den Abmessungen des Rechenraums bestimmt dieser das Auflösungsvermögen und die Skalierbarkeit des Abwindsimulationsmodells.

Für die Abgrenzung des Rechenraums der Abwindsimulationsmodells werden die in der Entwicklung der Walljet Modelle gewonnenen Erkenntnisse herangezogen. Hier wurde insbesondere die Umlenkung des Rotorabwinds an ebenen Oberflächen umfassend untersucht (vgl. Kapitel 1.2). Charakteristisch für die Ablenkung des Abwinds eines schwebenden Rotors durch den Untergrund sind der Freistrah-, der Übergangs- und der Wandströmungsbereich (vgl. Abbildung 1-5). Im Wandströmungsbereich liegt eine radiale, vorwiegend oberflächenparallele Strömung vor, die bereits mit empirischen Modellen mit guter Übereinstimmung modelliert werden kann [17].

Im Freistrah- und im Übergangsbereich hingegen finden komplexe Strömungsvorgänge statt, insbesondere, wenn es sich beim betrachteten Untergrund um eine generische Geometrie handelt. Aus diesem Grund definieren diese beiden Bereiche die Mindestabmessungen des betrachteten Rechenraums. Die kleinstmögliche radiale Ausdehnung des Rechenraums um die Rotorachse entspricht der radialen Distanz bis zum Beginn des Wandströmungsbereichs. Dieser Wert wird in der Literatur mit zwei Rotorradien angegeben [17]. Die kleinstmögliche axiale Ausdehnung des Rechenraums orientiert sich hingegen am Wirkungsbereich des Bodeneinflusses. Dieser tritt bei der Unterschreitung einer Flughöhe von etwa drei Rotorradien über Grund auf [48]. Dieser Wert bestimmt den axialen Mindestabstand zwischen der Rotorebene und der unteren Begrenzung des Rechenraums.

Das beschriebene radialsymmetrische Modell kann prinzipiell auch für die Abgrenzung des Abwinds von Luftfahrzeugen mit zwei tragenden Rotoren verwendet werden. Die komplexe Geometrie birgt jedoch erhöhten Rechenaufwand für die Diskretisierung und erfordert während der Simulationslaufzeit zusätzliche Transformationen. Für das entwickelte Abwindsimulationsmodell wurde daher ein kubisches Modell für die Abgrenzung des Rechenraums gewählt. Dessen Abmessungen orientieren sich an einem Referenzmaß, dem äquivalenten Rotorradius  $R_{eq}$ . Dieses Maß entspricht in der Simulation konventioneller Hubschrauber mit einem Haupt- und einem Heckrotor dem Hauptrotorradius  $R$ . Bei der Betrachtung von Luftfahrzeugen mit zwei tragenden Rotoren wird in der Berechnung des Werts zusätzlich der Abstand  $s$  zwischen den Rotornaben berücksichtigt:

$$R_{eq} = \begin{cases} R & \text{Konventionelle Hubschrauber} \\ R + s/4 & \text{Luftfahrzeuge mit zwei tragenden Rotoren} \end{cases} \quad (2-9)$$



Mit dem äquivalenten Rotorradius wird die Kantenlänge  $L$  des kubischen Rechenraummodells festgelegt (vgl. Formel 2-10). Der so begrenzte Raum bildet den Freistrah- und den Übergangsbereich der Walljetmodellierung ab.

$$L = 4 \cdot R_{eq} \quad (2-10)$$

Die Diskretisierung des Raums kann mit strukturierten oder unstrukturierten Rechengittern erfolgen [42]. In strukturierten Gittern bildet eine durchgängige, ganzzahlige Indizierung  $(i,j,k)$  die Lage der Gitterzellen im physikalischen Raum ab. Den einfachsten Fall bildet dabei eine kartesische Topologie. Kartesische Gitter sind aus kubischen Zellen der Kantenlänge  $d$  aufgebaut:

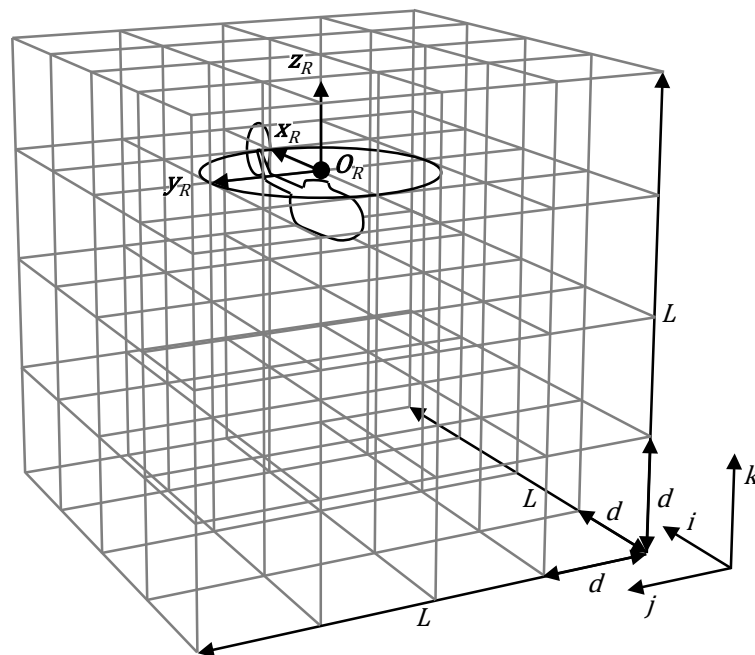


Abbildung 2-5: Kartesische Diskretisierung des Rechenraums

Die durchgängige, räumliche Indizierung in strukturierten Gittern bedingt zeitinvariante Nachbarschaftsbeziehungen  $(i\pm 1, j\pm 1, k\pm 1)$  zwischen den Zellen. Diese erleichtern die Implementierung und vereinfachen die Lösung der Modellgleichungen. Bei der Diskretisierung von schrägen oder krummlinigen Geometrien führt diese Topologie jedoch zu Approximationen, welche insbesondere bei groben Gitterauflösungen zu Fehlern führen können.

Im Umfeld komplexer Geometrien werden daher oft unstrukturierte Rechengitter eingesetzt. Zellenform, -größe und -anordnung können in diesen Gittern frei variiert werden. Auf diese Weise wird eine lokale Erhöhung der Gitterauflösung sowie eine Anpassung an vorliegende Geometrien erzielt. Die direkte Abbildung des physikalischen Raums durch die Zellentopologie und die einfache Zuordenbarkeit der Nachbarzellen ist jedoch nicht mehr gewährleistet. Zelllagen und Nachbarschaftsbeziehungen müssen in einer eigens erstellten Datenstruktur vorliegen. Die Erstellung der Gitter erfolgt mit Hilfe von automatischen Algorithmen. Dieser Vorgang führt mit der Erhöhung der Komplexität der Nachbarschaftsbeziehungen zu einem erhöhten Rechenzeitbedarf beim Einsatz unstrukturierter Gitter.

Da im Rechenraum des Abwindsimulationsmodells zeitlich veränderliche Geometrien vorliegen, ist beim Einsatz unstrukturierter Rechengitter in jedem Simulationsschritt eine automatisierte Gittergenerierung erforderlich. Der einhergehende Rechenzeitbedarf verbietet den Einsatz dieser Rechengitter für eine Echtzeitsimulation. Für die Diskretisierung des Rechenraums wird daher auf das in Abbildung 2-5 schematisch dargestellte kartesische Rechengitter zurückgegriffen. Dieses Gitter verfügt über  $N^3$  kubische Gitterzellen. Das skalierbare Auflösungsvermögen  $d$  des Abwindsimulationsmodells beträgt daher

$$d = \frac{L}{N} \quad (2-11)$$

Dieser Wert beeinflusst maßgeblich das Auflösungsvermögen der Randbedingungserfassung und der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells sowie dessen Rechenzeitbedarf und Stabilitätsverhalten.

### 3 Randbedingungen

Randbedingungen der Abwindsimulation bilden den Abwind beeinflussende Strömungshindernisse, die Rotor aerodynamik und die Flugmechanik des betrachteten Luftfahrzeugs. Die Randbedingungen können hinsichtlich ihres Zeitverhaltens gegliedert werden. Neben zeitlich invarianten Randbedingungen, wie der Verdeckung des Rechenraums durch das Luftfahrzeug existieren auch zeitlich veränderliche Randbedingungen. Zu letzteren zählen die Flugmechanik des betrachteten Luftfahrzeugs, dessen Rotor aerodynamik und die Verdeckung des Rechenraums durch überflogenes Terrain und Objekte.

Im Folgenden werden die Randbedingungen und die im Rahmen der vorliegenden Arbeit für deren Erfassung und Diskretisierung entwickelten Verfahren beschrieben. Basierend auf dem Zeitverhalten der Randbedingungen werden zudem Empfehlungen für eine ressourcenschonende Implementierung (vgl. Kapitel 5) der Verfahren formuliert.

#### 3.1 Strömungshindernisse

Das zu entwickelnde Abwindsimulationsmodell soll generische, komplexe Terrain- und Objektgeometrien erfassen und deren Einfluss als Strömungshindernisse des Abwinds berücksichtigen können (vgl. Kapitel 1.1). Hierfür müssen die Geometrien gemäß des im zweiten Kapitel dieser Arbeit vorgestellten Rechengitters diskretisiert werden. Basierend auf interpolierten Geometriepunkten werden geometrische Repräsentationen der erfassten Geometrien erstellt, die sich durch die Volumina der Gitterzellen abbilden lassen. Dieser Vorgang wird auch als Voxelisierung, die Überführung von zusammenhängenden Geometrien in eine diskrete Zahl von Voxeln auf einem regelmäßigen Gitter, bezeichnet [49]. Die durch die Voxelisierung entstehenden geometrischen Repräsentationen ermöglichen den Einsatz schneller, effizienter Algorithmen zur Ermittlung des Einflusses der Hindernisse auf den Abwindverlauf [50].

Die Diskretisierung der Geometrien erfolgt mit Such- und Interpolationsalgorithmen. Für das entwickelte Abwindsimulationsmodell wird hierbei auf Ray-Tracing Suchalgorithmen zurückgegriffen. Diese beschreiben das Aussenden und Verfolgen von Suchstrahlen in einer virtuellen Welt. Durchdringt ein Suchstrahl auf seinem Weg die Oberfläche eines Geometrieobjekts, so ermittelt der zugrundeliegende Algorithmus des Verfahrens die Koordinaten des Schnittpunkts und die zugehörige Oberflächennormale. Das Verfahren wird unter anderem für die Berechnung von Beleuchtungseffekten, für Sichtbarkeitsüberprüfungen und die Kollisionsüberprüfung eingesetzt [51].

Für den Echtzeiteinsatz von Ray-Tracing in komplexen Umgebungen ist es zwingend erforderlich, die Komplexität der vorliegenden Objekte zunächst zu reduzieren und nicht

relevante Objekte von der Kollisionsprüfung auszuschließen [52]. Hierfür werden hierarchisch organisierte, kugel- oder quaderförmige Hüllkörper eingesetzt. Diese einfachen Geometrien können effizient auf Schnittpunkte mit den Suchstrahlen überprüft werden. Schneidet ein Suchstrahl einen Hüllkörper, so wird die Schnittpunktbestimmung auf Geometrieebene fortgesetzt.

Ray-Tracing Algorithmen sind wie die genannten Mechanismen zur Komplexitätsreduzierung bereits in der Softwareumgebung des Forschungssimulators, in der die Entwicklung des vorgestellten Abwindsimulationsmodells stattfindet, implementiert [53-54]. Daher wird im Folgenden nur beispielhaft der elementarste Schritt des Verfahrens, die Kollisionsüberprüfung auf Geometrieebene mit Hilfe des Möller-Trumbore Algorithmus [55], vorgestellt:

Der Möller-Trumbore Algorithmus ermittelt den Schnittpunkt eines Suchstrahls  $R(t)$  mit einer Dreiecksfläche eines triangulierten Objekts. Die auf dem Strahl liegenden Punkte werden beschrieben durch den Ursprung des Strahls  $O$ , dessen normierte Orientierung  $D$  und den skalaren Parameter  $t$ :

$$R(t) = O + tD \quad (3-1)$$

Die Punkte eines Dreiecks  $T(w,u,v)$  können mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten  $u$ ,  $v$  und  $w$  beschrieben werden [51][55-56]. Diese skalaren Gewichtungsfaktoren stellen die Punktmenge in Abhängigkeit der Eckpunkte des Dreiecks,  $V_0$ ,  $V_1$  und  $V_2$  dar:

$$T(w, u, v) = wV_0 + uV_1 + vV_2 \quad (3-2)$$

Damit ein derart beschriebener Punkt innerhalb eines Dreiecks liegt, muss die Summe der drei Gewichtungsfaktoren den Wert Eins bilden. Außerdem müssen die Faktoren positive Werte annehmen, die diesen Betrag nicht überschreiten:

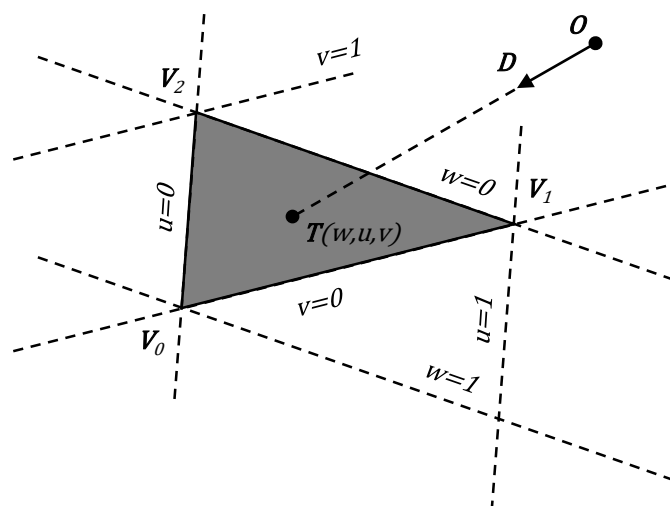


Abbildung 3-1: Schnittpunkttermittlung mit baryzentrischen Koordinaten nach [56]

Um die Berechnung des Schnittpunkts zu vereinfachen, wird einer der Gewichtungsfaktoren durch die beiden anderen substituiert, im vorliegenden Beispiel  $w=1-u-v$ . Der Schnittpunkt

des Strahls mit der Dreiecksfläche kann so durch Gleichsetzen der Gleichungen 3-1 und 3-2 beschrieben werden:

$$\mathbf{O} + t\mathbf{D} = \mathbf{T}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{V}_0 + u\mathbf{V}_1 + v\mathbf{V}_2 \quad (3-3)$$

Durch Umstellen dieser Formel wird ein lineares Gleichungssystem mit einer Transformationsmatrix  $\mathbf{M}$  gebildet. Lösung dieses Gleichungssystems bilden die baryzentrischen Koordinaten  $u$  und  $v$  sowie der skalare Parameter  $t$  des Suchstrahls:

$$[-\mathbf{D}, \quad \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0] \begin{Bmatrix} t \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} t \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0 \quad (3-4)$$

Eine geometrische Repräsentation des Gleichungssystems bildet die Verschiebung des Dreiecks in den Ursprung, gefolgt von einer Transformation in das durch die Substitution entstandene zweidimensionale baryzentrische Koordinatensystem (vgl. Abbildung 3-2). Durch diese Umrechnung kommen die beiden Dreiecksseiten  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0$  und  $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0$  auf den Achsen  $u$  und  $v$  zu liegen, der Suchstrahl verläuft parallel zur verbleibenden Achse des Systems.

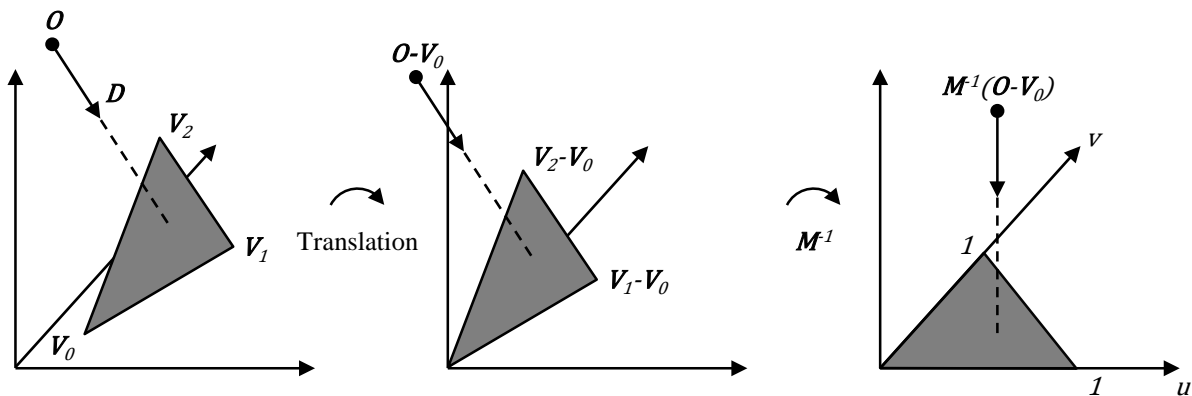


Abbildung 3-2: Transformation in das baryzentrische Koordinatensystem [55]

Algebraisch wird das System durch eine Multiplikation mit der inversen Matrix  $\mathbf{M}^{-1}$  gelöst:

$$\begin{Bmatrix} t \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{(\mathbf{D} \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0))(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)} \begin{Bmatrix} ((\mathbf{O} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0))(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0) \\ (\mathbf{D} \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0))(\mathbf{O} - \mathbf{V}_0) \\ ((\mathbf{O} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0))\mathbf{D} \end{Bmatrix} \quad (3-5)$$

Für die Voxelisierung von geometrischen Objekten wird dieses Verfahren parallelisiert eingesetzt. So werden in dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Abwindsimulationsmodell Strömungshindernisse durch die Aussendung paralleler, äquidistant verteilter Ray-Tracing Suchstrahlen diskretisiert. Von den Randflächen des Rechengitters aus werden jeweils  $N \cdot N$  in den Gitterzellen zentrierte Suchstrahlen orthogonal in den Rechenraum hineingesandt. Die erfassten Schnittpunkte der Suchstrahlen mit der Oberfläche der erfassten Objektgeometrie werden in das Rotorkoordinatensystem transformiert und mittels linearer Interpolation entsprechenden Gitterzellen zugeordnet. Diese Zellen bilden die Voxel der Strömungshindernisse ab.

Aus dem Rumpf oder den Tragflächen des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende Strömungshindernisse ändern ihre Lage gegenüber dem kartesischen Rechengitter im Verlauf der Simulation nicht. Aufgrund dieses Zeitverhaltens werden sie einmalig diskretisiert und in voxelisierter Form als zeitinvariante Strömungshindernisse gespeichert. Für die Erfassung dieser Strömungshindernisse werden paarweise Suchstrahlen von gegenüberliegenden Seiten des Rechenraums ausgesandt:

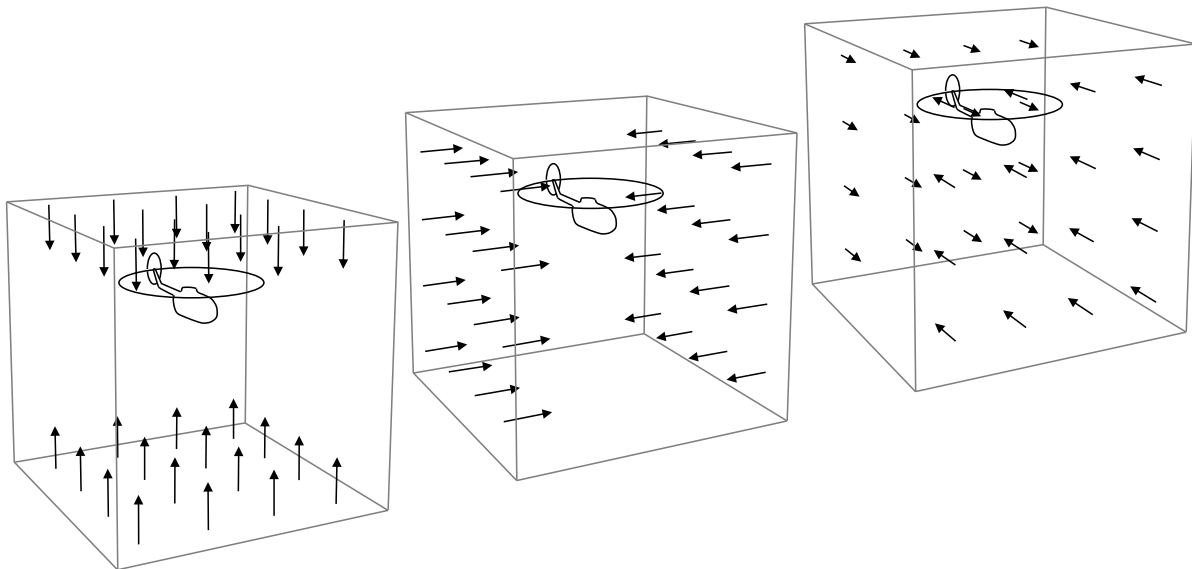


Abbildung 3-3: Diskretisierung des Luftfahrzeugs mittels Ray-Tracing

Mit linearen Interpolationsverfahren werden diejenigen Zellen des Rechengitters ermittelt, die Schnittpunkte der Suchstrahlen mit der Geometrie des betrachteten Luftfahrzeugs enthalten. Diese Gitterzellen bilden die voxelisierte Außenhaut des Luftfahrzeugs ab. Gitterzellen, die sich im Inneren dieses diskreten Hüllvolumens befinden, können ebenfalls den Voxeln des diskretisierten Luftfahrzeugs zugeordnet werden. Auch bewegliche Komponenten des Luftfahrzeugs, wie Steuerklappen oder neigbare Triebwerksgondeln, werden mit dem beschriebenen Verfahren einmalig diskretisiert. Hierbei werden äquidistant über den zulässigen Auslenkungsbereich der Komponente verteilte Lagen erfasst. Zur Simulationslaufzeit wird die voxelisierte Geometrie des betrachteten Luftfahrzeugs geladen (vgl. Abbildung 3-4). Die diskrete Geometrie beweglicher Komponenten wird entsprechend ihrer aktuellen Lage aus den gespeicherten Zuständen gewählt.

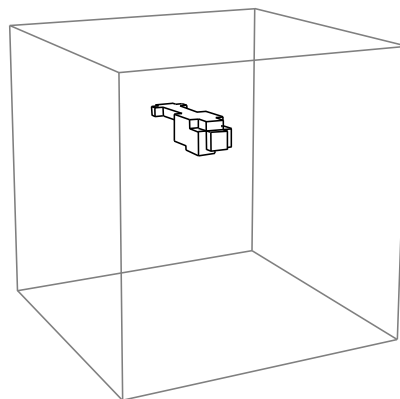
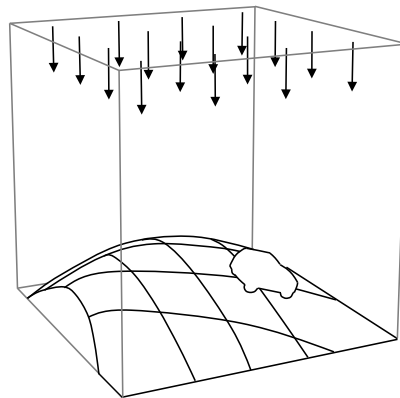


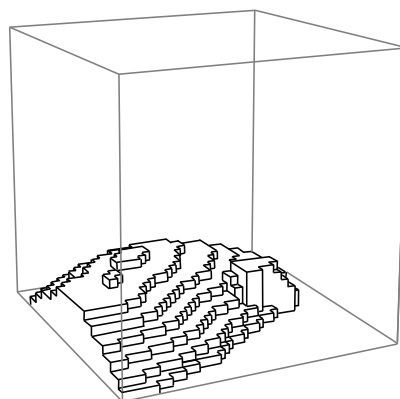
Abbildung 3-4: Voxelisierte Geometrie des Luftfahrzeugs

Lage und Orientierung von überflogenem Terrain und Objekten variiert in der Simulation gegenüber dem Rotorkoordinatensystem. Daher muss die voxelisierte Repräsentation dieser Geometrien stets aktualisiert werden. Um den erforderlichen Rechenzeitaufwand zu begrenzen, wird im Abwindsimulationsmodell für die Diskretisierung dieser Geometrien auf ein vereinfachtes Verfahren zurückgegriffen (vgl. Abbildung 3-5). Statt Suchstrahlen von allen sechs Seiten des Rechenraums auszusenden, werden lediglich  $N \cdot N$  Suchstrahlen orthogonal von der oberen Begrenzungsfläche des Rechenraums in selbigen hineingesandt. Dieses Vorgehen vernachlässigt Überhänge und Hinterschneidungen zu Gunsten eines reduzierten Rechenzeitaufwands.



**Abbildung 3-5: Diskretisierung von Terrain und Objekten mittels Ray-Tracing**

Mittels linearer Interpolation werden abermals diejenigen Zellen des Rechengitters ermittelt, die Schnittpunkte der Suchstrahlen mit der Terrain- oder Objektgeometrie beinhalten. Diese Zellen bilden die Oberfläche der erfassten Geometrien in voxelisierter Form ab. Gitterzellen, die sich zwischen dieser Oberfläche und der unteren Begrenzungsfläche des Rechenraums befinden, werden ebenfalls den Voxeln der diskretisierten Geometrien zugeordnet:



**Abbildung 3-6: Voxelisierte Geometrie von Terrain und Objekten**

Überlagert mit der diskreten Repräsentation des Luftfahrzeugs bildet die voxelisierte Geometrie von Terrain und Objekten sämtliche für die Abwindsimulation relevanten Strömungshindernisse im Rechenraum ab.

### 3.2 Rotor-aerodynamik

Die Größen der Rotor-aerodynamik des betrachteten Luftfahrzeugs werden im Flugphysikmodell des Forschungssimulators berechnet. Der zeitlich veränderliche, durch die Rotoren verursachte Drucksprung bzw. eine entsprechende Schubverteilung zählt zu den Eingangsgrößen des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Abwindsimulationsmodells (vgl. Kapitel 1.1). Im Folgenden wird deren Diskretisierung gemäß des kartesischen Rechengitters der Abwindsimulation erläutert.

Im Flugphysikmodell werden Rotoren als Aktuatorscheiben modelliert. Hierbei wird eine unendliche Zahl an Rotorblättern angenommen. Der Rotor wird auf diese Weise zur schub-erzeugenden Scheibe. Die Variation des Schubs  $T$  über der Scheibe kann linear approximiert werden:

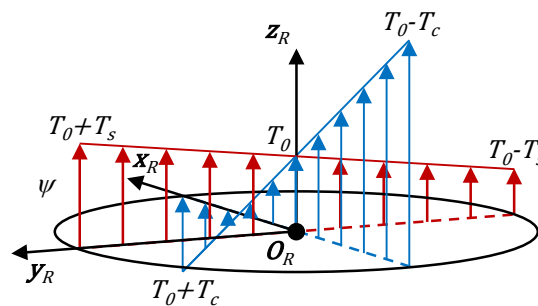


Abbildung 3-7: Linearisierte Schubverteilung einer Aktuatorscheibe

Die lineare Approximation basiert auf einem in der Rotor-aerodynamik für die Durchflussmodellierung verwendeten, periodischen Ansatz [35][57]. Dieser erlaubt eine Beschreibung des Schubs an der radialen Position  $r$  in Abhängigkeit des Rotorumlaufwinkels  $\psi$ . Dessen Nullpunkt fällt mit der  $x$ -Achse des Rotorkoordinatensystems zusammen. Der Schubverlauf wird weiter beschrieben durch die konstante Komponente  $T_0$  und die periodischen Komponenten  $T_s$  und  $T_c$ :

$$T(\psi, r) = T_0 + T_c r \cos \psi + T_s r \sin \psi \quad (3-6)$$

Für die Diskretisierung des Rotorschubs im Abwindsimulationsmodell wird die Modellierung in dessen kartesisches Rechengitter überführt. Dieser Vorgang wird im Folgenden am Beispiel eines Rotors des Radius  $R$  beschrieben. Dieser liegt in der  $x_R y_R$ -Ebene des Rotorkoordinatensystems und ist in  $O_R$  zentriert. Für den differentiellen Schubanteil  $dT$  einer dieser Aktuatorscheibe zugehörigen Gitterzelle mit Index  $i, j, k$  gilt:

$$dT(i, j, k) = \left( T_0 + \frac{\sqrt{i^2 + j^2} \cdot d}{R} \cdot (T_c \cdot i + T_s \cdot j) \right) \cdot \frac{d^2}{R^2 \pi} \quad (3-7)$$



Die Diskretisierung der Schubverteilung abweichender Rotorlagen (z.B. bei Luftfahrzeugen mit mehreren Rotoren oder Kipprotor-Flugzeugen) erfordert eine Transformation der zugehörigen Lage und Orientierung in das Rotorkoordinatensystem (vgl. Kapitel 2.2).

### 3.3 Flugmechanik

Die Größen der Starrkörper-Flugmechanik des betrachteten Luftfahrzeugs haben einen elementaren Einfluss auf die Abwindsimulation. Der zeitinvariant mit dem Luftfahrzeug verbundene Rechenraum der Abwindsimulation erfährt translatorische und rotatorische Bewegungen des Luftfahrzeugs als äußere Gitterbewegung. Um den Einfluss selbiger in der Abwindsimulation zu berücksichtigen, werden die im körperfesten BF Koordinatensystem notierten Größen der Starrkörper-Flugmechanik in das Rotorkoordinatensystem überführt und anhand des Rechengitters des Abwindsimulationsmodells diskretisiert.

Zu den Größen der Starrkörper-Flugmechanik zählen die kollinear zu den Koordinatenachsen  $\mathbf{x}_B$ ,  $\mathbf{y}_B$  und  $\mathbf{z}_B$  des BF Systems notierten translatorischen Geschwindigkeitskomponenten  $u_B$ ,  $v_B$ , und  $w_B$  sowie die Roll-, Nick- und Gierrate des Luftfahrzeugs,  $p_B$ ,  $q_B$ , und  $r_B$ :

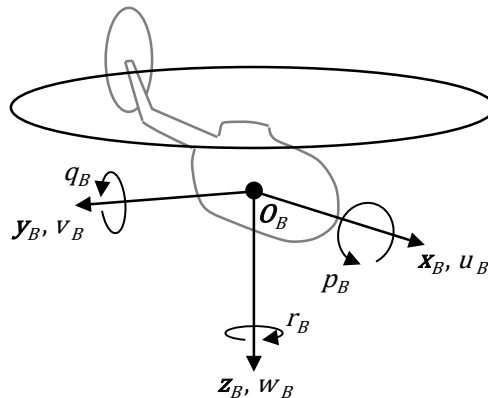


Abbildung 3-8: Geschwindigkeit und Raten des betrachteten Luftfahrzeugs

Während die Diskretisierung der translatorischen Geschwindigkeitskomponenten lediglich eine Transformation derselben in das Rotorkoordinatensystem erfordert (vgl. Kapitel 2.2), muss der Einfluss von rotatorischen Bewegungen des betrachteten Luftfahrzeugs zellspezifisch berechnet werden. Dies wird im Folgenden am Beispiel der Rollrate erläutert.

Für die in das Rotorkoordinatensystem transformierte Rollrate wird ein zellspezifischer Einflussfaktor  $\mathbf{d}_p$  berechnet. Für eine Zelle, deren Mittelpunkt an der Position  $\mathbf{x}(i,j,k)$  zu liegen kommt, lautet dieser:

$$\mathbf{d}_p(i, j, k) = \frac{\mathbf{x}_B \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{B_R})}{|\mathbf{x}_B \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{B_R})|} = \frac{-\mathbf{x}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{B_R})}{|-\mathbf{x}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{B_R})|} \quad (3-8)$$

Analog zum Einflussfaktor der Rollrate werden die Faktoren der Nick- und der Gierrate  $\mathbf{d}_q$  und  $\mathbf{d}_r$  berechnet und normiert:

$$\mathbf{d}_q(i, j, k) = \frac{\mathbf{y}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{BR})}{|\mathbf{y}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{BR})|} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{d}_r(i, j, k) = \frac{-\mathbf{z}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{BR})}{|-\mathbf{z}_R \times (\mathbf{x}(i, j, k) - \mathbf{O}_{BR})|} \quad (3-10)$$

Die normierten Einflussfaktoren sind zeitlich invariant. Daher genügt es, deren Berechnung einmalig durchzuführen. Basierend auf diesen Werten kann unter geringem Rechenaufwand die zeitlich veränderliche, aus der Starrkörper-Flugmechanik des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{V}_\infty$  für individuelle Zellen des Rechengitters bestimmt werden:

$$\mathbf{V}_\infty(i, j, k) = \begin{Bmatrix} -u_K \\ v_K \\ -w_K \end{Bmatrix} + p_B \cdot \mathbf{d}_p + q_B \cdot \mathbf{d}_q + r_B \cdot \mathbf{d}_r \quad (3-11)$$

## 4 Modellbildung

In den Zellen des Rechengitters des Abwindsimulationsmodells sollen in jedem Simulationszeitschritt diskrete Strömungsgeschwindigkeiten berechnet werden. Zu diesem Zweck muss das Modell den Strömungsverlauf beschreibende Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der erfassten Randbedingungen an diesen diskreten Orten lösen. Die Gleichungen sind auch als Navier-Stokes Gleichungen bekannt.

Nach einer Einführung in die Navier-Stokes Gleichungen und deren Vereinfachungen gemäß den für diese Arbeit gültigen Vorgaben (vgl. Kapitel 1.1) wird in diesem Kapitel die für die echtzeitfähige Lösung der Gleichungen angepasste Lattice-Boltzmann Methode vorgestellt. Es folgt eine Beschreibung der für die Berücksichtigung der Randbedingungen der Abwindsimulation erforderlichen Erweiterungen der Methode.

Neben den im dritten Kapitel dieser Arbeit beschriebenen Randbedingungen beeinflussen auch die offenen Ränder des betrachteten Rechenraums die Strömungssimulation. Eine Erläuterung der verwendeten Modellierung für deren Berücksichtigung im Abwindsimulationsmodell bildet den Abschluss dieses Kapitels.

### 4.1 Navier-Stokes Gleichungen

Bei den Navier-Stokes Gleichungen handelt es sich um ein System nichtlinearer Differentialgleichungen, das aus den grundlegenden Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik ableitbar ist [14][42][44]. Das Gleichungssystem beschreibt für ein räumlich begrenztes Strömungsgebiet, ein Kontrollvolumen, die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie. Im Folgenden wird zunächst die allgemeine Form dieser Gleichungen für isotherme Betrachtungen erläutert. Anschließend werden die Gleichungen für die Abwindsimulation vereinfacht.

Bei der Nachbildung isothermer Vorgänge wie der Entstehung und Ausbildung von Rotorabwind sind nur die Massen- und die Impulserhaltungsgleichung von Relevanz [42]. Die **Massenerhaltung** ist in der Kontinuitätsgleichung formuliert. Diese beschreibt in ihrem ersten Term die zeitliche Änderung der im Volumen  $V$  des Kontrollvolumens vorliegenden Masse in Abhängigkeit der Dichte des betrachteten Fluids  $\rho$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4-1)$$

Der zweite Term der Gleichung bilanziert durch die Kontrollvolumenoberfläche  $S$  mit der Normale  $\mathbf{n}$  ein- und austretende Massenströme der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$ . Unter Zuhilfenahme des Satzes von Gauß lässt sich das in der Gleichung vorliegende Oberflächenintegral in ein

Volumenintegral umwandeln. Mit der Annahme eines Kontrollvolumens infinitesimaler Ausdehnung lässt sich die Kontinuitätsgleichung so in differentieller Form schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4-2)$$

Schließlich kann die rechte Seite der Gleichung ebenso als totales Differential geschrieben werden [58]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4-3)$$

Die zweite elementare Erhaltungsgleichung der Strömungsmechanik bildet die **Impulserhaltung**. Diese bilanziert räumliche und zeitliche Änderungen des Strömungsimpulses im betrachteten Kontrollvolumen mit den auf das Fluid wirkenden Kräften  $\mathbf{F}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \sum \mathbf{F} \quad (4-4)$$

Für newtonsche Fluide kann die rechte Seite der Gleichung in Abhängigkeit des Spannungstensors  $\mathbf{T}$  und den auf eine Masseneinheit normierten Körperkräften  $\mathbf{a}$  geschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{a} dV \quad (4-5)$$

Abermals lässt sich unter Anwendung des Satzes von Gauss und der Annahme eines infinitesimal kleinen Kontrollvolumens die Differentialform der Gleichung aufstellen:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{a} \quad (4-6)$$

Während die linkseitigen Terme der Gleichung analog zur Kontinuitätsgleichung die Änderung des Impulses im Kontrollvolumen sowie ein- und ausgehende Impulsströme beschreiben, bilden die Terme der rechten Seite der Gleichung Oberflächenkräfte (Druck, Normal-, Scher- und Oberflächenspannungen) und Körperkräfte (Gravitations-, Zentrifugal- und Corioliskräfte) ab [42]. Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$ , der die Transportrate des Impulses beschreibt, wird in Abhängigkeit des Drucks  $p$  und der dynamischen Viskosität  $\mu$  des Fluids geschrieben zu

$$\mathbf{T} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (4-7)$$

Weitere Größen der Gleichung sind der Einheitstensor  $\mathbf{I}$  und der Deformationsratentensor  $\mathbf{E}$ . Letzterer bildet ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der das betrachtete Fluid an einem spezifischen Ort und Zeitpunkt gedehnt oder gestaucht wird:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (4-8)$$

Durch Ausschreiben des Spannungstensors in der Impulserhaltungsgleichung und die Vernachlässigung sämtlicher vorliegender Körperkräfte ausgenommen der Gravitation  $\mathbf{g}$  lässt sich die **allgemeine Form der Navier-Stokes Gleichung** herleiten:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left[ - \left( p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \right] + \rho \mathbf{g} \quad (4-9)$$

Diese Gleichung kann analog zur Kontinuitätsgleichung als totales Differential geschrieben werden:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \mathbf{E} \right] + \rho \mathbf{g} \quad (4-10)$$

Die Gleichungen 4-3 und 4-10 lassen sich unter der Annahme einer konstanten dynamischen Viskosität  $\mu$  deutlich vereinfachen. Diese Annahme begründet sich auf der direkten Abhängigkeit zwischen der Viskosität und der Fluidtemperatur. Letztere unterliegt im betrachteten Kontrollvolumen nur geringen Schwankungen und kann daher als konstant angenommen werden. Für Strömungen, in denen die größten auftretenden Geschwindigkeiten eine Machzahl von  $Ma=0.3$  nicht überschreitet, kann weiterhin ein inkompressibles Strömungsverhalten angenommen werden [42]. Unter dieser Annahme können zeitliche Änderungen der Fluidichte vernachlässigt werden. Eine Anwendung der Vereinfachung auf Formel 4-3 liefert die inkompressible Form der Massenerhaltungsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4-11)$$

Diese Gleichung bildet gemeinsam mit der Annahme einer konstanten dynamischen Viskosität  $\mu$  und Formel 4-10 die Basis für die **inkompressible Form** der aus der Impulserhaltung hergeleiteten **Navier-Stokes Gleichung**. Diese bildet die Grundlage für die Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (4-12)$$

In der Simulation gasförmiger Fluide kann auch der Einfluss der Gravitation  $\mathbf{g}$  aufgrund der geringen Fluidichte vernachlässigt werden.

## 4.2 Lattice-Boltzmann Methode

Wie zuvor beschrieben sind die der Strömungssimulation zugrundeliegenden Navier-Stokes Gleichungen nichtlinearer Natur. Eine analytische Lösung der Gleichungen ist nur in Ausnahmefällen möglich. Methoden der numerischen Strömungsmechanik müssen daher zumeist auf rechenzeitintensive iterative Ansätze zurückgreifen. Die Lattice-Boltzmann

Methode hingegen verfolgt einen gaskinetischen Ansatz, um diesen zeitaufwendigen Lösungsweg zu umgehen.

Nachfolgend soll ein Einblick in die Entstehung, die physikalischen Grundlagen und die numerische Umsetzung der Lattice-Boltzmann Methode gewährt werden. Dieser Überblick basiert, sofern nicht anders angegeben, auf den Ausführungen in [59]. Für eine umfassende Beschreibung der Methode sei an dieser Stelle auf erweiterte Literatur verwiesen [60-62].

Der Modellierungsansatz der Lattice-Boltzmann Methode fußt auf der Diskretisierung eines Kontinuums mikroskopischer Fluidpartikelbewegungen in den Zellen eines Rechengitters mit Hilfe gewichteter Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen. Ursprung dieses gaskinetischen Ansatzes bildet die von Ludwig Boltzmann 1872 begründete **Boltzmann-Gleichung** oder Boltzmann-Transportgleichung [63]. Diese beruht auf molekularen Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen  $f=f(\mathbf{r},\mathbf{e},t)$ , die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit einzelner Gaspartikel im Phasenraum abbilden. Während  $\mathbf{e}$  die Geschwindigkeit eines betrachteten Partikels beschreibt, gibt  $\mathbf{r}$  seine Position im Phasenraum und  $t$  den betrachteten Zeitpunkt an. Die Funktionen sind so definiert, dass  $N=[f \cdot d^3\mathbf{r} \cdot d^3\mathbf{e}]$  die Anzahl der Partikel beschreibt, die sich in einem begrenzten Teil des Raums  $[d^3\mathbf{r} \cdot d^3\mathbf{e}]$  befinden. Die Boltzmann-Gleichung bildet den Transport und die kollisionsbasierte Interaktion der Verteilungsfunktionen ab:

$$(\partial_t + \mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{e}}) \cdot f = (\partial_t f)_{Koll} \quad (4-13)$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt Transportvorgänge, die von auf die Partikelmasse normierten äußeren Kräften  $\mathbf{a}$  beeinflusst werden. Auf der rechten Seite der Gleichung bildet der Kollisionsoperator  $(\partial_t f)_{Koll}$  den intrazellulären Impulsaustausch zwischen den Partikeln ab.

Um den Kollisionsoperator explizit beschreiben zu können, wurden von Boltzmann zwei Annahmen getroffen: Unter Berufung auf das vorliegende molekulare Chaos wird angenommen, dass die Geschwindigkeit eines Partikels unabhängig von seiner aktuellen Position ist. Weiterhin ist die Gültigkeit der Formulierung auf binäre Kollisionen beschränkt. Dies impliziert eine Beteiligung von genau zwei Partikeln an betrachteten Kollisionen. Diese Einschränkung wird gestützt durch die Annahme einer vergleichsweise niedrigen Partikel-dichte in gasförmigen Fluiden. Für eine binäre Kollision  $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}^{(0)}\} \rightarrow \{\mathbf{e}, \mathbf{e}^{(0)}\}$  kann so der Kollisionsoperator in Abhängigkeit vom differentiellen Wirkungsquerschnitt der binären Kollision  $\sigma(\Omega)$  geschrieben werden:

$$(\partial_t f)_{Koll} = \int d\Omega \int d^3 \mathbf{e}^{(0)} \sigma(\Omega) |\mathbf{e} - \mathbf{e}^{(0)}| (f' f'^{(0)} - f f^{(0)}) \quad (4-14)$$

Unter Einsetzen des Kollisionsoperators lässt sich die Boltzmann-Gleichung schreiben zu

$$(\partial_t + \mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{e}}) \cdot f = \int d\Omega \int d^3 \mathbf{e}^{(0)} \sigma(\Omega) |\mathbf{e} - \mathbf{e}^{(0)}| (f' f'^{(0)} - f f^{(0)}) \quad (4-15)$$

Die nichttriviale Lösung der Integrale des Kollisionsoperators, die die auftretenden Kollisionsereignisse aufsummieren, wird durch das von Boltzmann formulierte **H-Theorem** [63] deutlich vereinfacht. Dieses folgt dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik: Die Entropie in einem geschlossenen Raum kann nur zunehmen oder stagnieren, jedoch niemals abnehmen. Um dieser Gesetzmäßigkeit zu entsprechen, muss die Anzahl der Kollisionsvorgänge in einem ungestörten Kontinuum im Laufe der Zeit kontinuierlich abnehmen, bis sich ein Gleichgewichtszustand  $f^{eq}$  der Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen einstellt. Dieser Zustand lässt sich mit der **Maxwell-Verteilung** in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade des Partikels  $D_0$ , der Gaskonstante  $R$  und der Fluidtemperatur  $T$  schreiben (vgl. Formel 4-16). Für die Anzahl der Freiheitsgrade eines einatomigen Partikels kann  $D_0=3$  angenommen werden [59].

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D_0/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{e} - \mathbf{u})^2}{2RT}\right] \quad (4-16)$$

Durch eine lineare Approximation des Verlaufs der Änderung der Geschwindigkeitsverteilungswerte über den Verlauf einer Relaxationszeit  $\tau$  kann der Kollisionsoperator deutlich vereinfacht werden. Diese Annahme liegt dem von Bhatnagar, Gross und Krook eingeführten BGK-Kollisionsoperator  $(\partial_t f)_{Koll,BGK}$  zugrunde [64]:

$$(\partial_t f)_{Koll,BGK} = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (4-17)$$

Ein Einsetzen des BGK-Operators in die Gleichung 4-15 liefert die **Boltzmann-BGK Gleichung**:

$$(\partial_t + \mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{e}}) \cdot f = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (4-18)$$

Um basierend auf dieser expliziten Gleichung die makroskopische Lösung der Navier-Stokes Gleichungen zu erlangen, bedarf es der Integration über die vorliegenden Geschwindigkeitsverteilungen. Auf diese Weise werden die Fluidichte  $\rho$ , der Impuls  $\rho\mathbf{u}$  und die kinetische Energie  $\rho E$  des Fluids berechnet:

$$\rho = \int f d\mathbf{e} = \int f^{eq} d\mathbf{e} \quad (4-19)$$

$$\rho\mathbf{u} = \int (f\mathbf{e}) d\mathbf{e} = \int (f^{eq}\mathbf{e}) d\mathbf{e} \quad (4-20)$$

$$\rho E = \frac{1}{2} \int (f(\mathbf{e} - \mathbf{u})^2) d\mathbf{e} = \frac{1}{2} \int (f^{eq}(\mathbf{e} - \mathbf{u})^2) d\mathbf{e} \quad (4-21)$$

Die in Gleichung 4-21 auftretende Energie  $E$  lässt sich hierbei in Abhängigkeit der Boltzmannkonstante  $k_B$  oder der Avogadrokonstante  $N_A$  definieren:

$$E = \frac{D_0}{2} k_B T = \frac{D_0}{2} \frac{RT}{N_A} \quad (4-22)$$

Analog zu den Formeln 4-19 bis 4-21 lässt sich eine Gleichung für den Impuls- und Spannungstensor aufstellen [62]. Diese schreibt sich für den dreidimensionalen Fall in Abhängigkeit der Indizes  $i, j=1,2,3$ . Im Gleichgewichtszustand verschwinden die Schubspannungen ( $\sigma_{ij}=0$ ):

$$\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \sigma_{ij} = \int f e_i e_j d\mathbf{e} = \int f^{eq} e_i e_j d\mathbf{e} \quad (4-23)$$

Für die **numerische Umsetzung** der Boltzmann-Gleichung muss diese in der Zeit, im physikalischen Raum und im Phasenraum diskretisiert werden. Grundlage der Diskretisierung bildet das von Frisch, Hasslacher und Pomeau veröffentlichte und nach den Autoren benannte **FHP Modell** [65]. Dieses basiert auf zellulären Zustandsautomaten, den Lattice Gas Automata, welche einen gaskinetischen Ansatz auf den Zellmittelpunkten eines hexagonalen, zweidimensionalen Rechengitters diskretisieren (vgl. Abbildung 4-1). Für die Diskretisierung von Partikelbewegungen existieren in jeder Zelle des Gitters sechs diskrete, die Zellmittelpunkte von Nachbarzellen verbindende Bewegungsrichtungen  $\alpha$ . Die Bewegungsfreiheit der betrachteten Partikel ist bei einheitlich festgelegter Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_\alpha$  auf diese diskreten Richtungen beschränkt. Dabei darf jede Bewegungsrichtung nur durch maximal einen Partikel belegt sein. Die größtmögliche Zahl  $N_\alpha$  der in einer Gitterzelle befindlichen Partikel beträgt daher sechs.

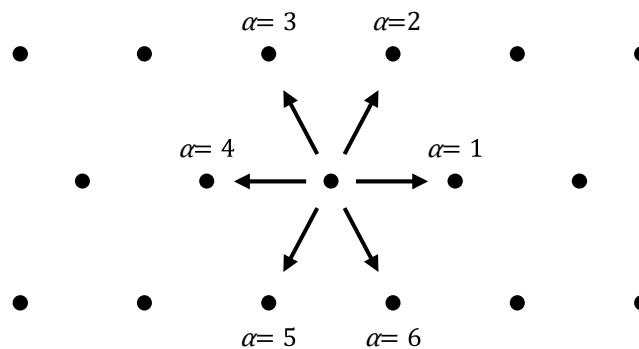


Abbildung 4-1: Hexagonaler Diskretisierungsansatz des FHP Modells nach [62]

Der zugrundeliegende Algorithmus des FHP Modells umfasst zwei konsekutive Schritte, die während jedes Simulationszeitschritts abgearbeitet werden, den **Propagationsschritt** und den **Kollisionsschritt**. Während ersterer den Transport der Partikel entlang ihrer jeweiligen Bewegungsrichtung in die Nachbarzellen beschreibt, bildet der darauf folgende Kollisionsschritt die intrazelluläre Interaktion der Partikel ab, die in einer Neuordnung der diskreten Bewegungsrichtungen resultiert. Da diese allein auf der Impulserhaltung beruht, sind in einigen Fällen mehrere Ergebnisse gültig (vgl. Abbildung 4-2). Unter diesen wählt der Algorithmus zufällig aus.



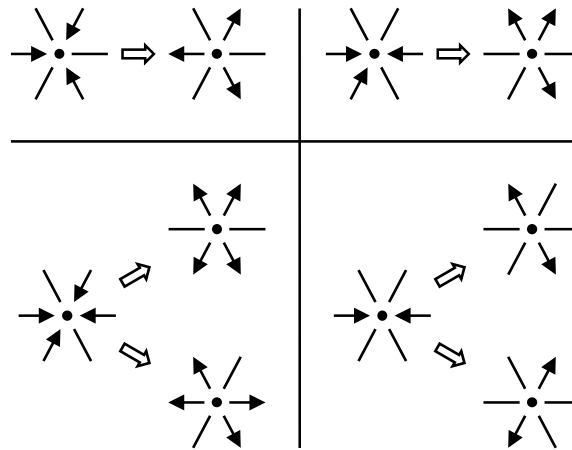


Abbildung 4-2: Kollisionsschritt des FHP Modells [62]

Unglücklicherweise führt die Betrachtung von Einzelpartikeln mit ganzzahliger Einheitsgeschwindigkeit insbesondere in grob aufgelösten Simulationen zu einer Fluktuation in den Rechenergebnissen. Weiterhin mangelt es dem FHP Modell an Galileier (rotatorischer) Invarianz [62] und der Erweiterbarkeit für dreidimensionale Problemstellungen [60].

Die in dieser Arbeit eingesetzte **Lattice-Boltzmann Methode** oder Gitter-Boltzmann Methode basiert daher auf einer Erweiterung des FHP Modells [66]. Die Betrachtung von Einzelpartikeln wird ersetzt durch die Beschreibung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Partikeln mittels variabler, diskreter Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen  $f(\mathbf{e}_\alpha) = f_\alpha$ . Diese diskretisieren die kontinuierlichen Verteilungsfunktionen und Partikelgeschwindigkeiten der Boltzmann-Gleichung:

$$f \rightarrow f_\alpha \quad (4-24)$$

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}_\alpha \quad (4-25)$$

Auch der hexagonale Diskretisierungsansatz des FHP Modells wird in der Lattice-Boltzmann Methode erweitert [62]. Um Galilei-Invarianz und Isotropie zu erzielen, werden die diskreten Bewegungsrichtungen des Modells um weitere Richtungen ergänzt. Für die korrekte, geschwindigkeitsunabhängige Repräsentation des Drucks wird zusätzlich eine Nullrichtung eingeführt. Weiterhin wird der Diskretisierungsansatz des FHP Modells auf äquidistante, kartesische Gitter der Gitterkonstante  $d = \delta x = \delta y = \delta z = konst.$  übertragen. Bewegungsrichtungen  $\alpha$  indizieren in diesem Gitter diskret orientierte variable Partikelgeschwindigkeiten  $\mathbf{e}_\alpha$ , deren kartesische Komponenten  $e_0$  so gewählt werden, dass Partikel in einem Zeitschritt  $\delta t$  genau die Nachbarzellen des Gitters erreichen:

$$e_0 = \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\delta z}{\delta t} \quad (4-26)$$

Geeignete kartesische **Diskretisierungsgitter** werden durch das Schema  $DdQq$  beschrieben [67]. Hierbei beschreibt  $d$  die Dimensionalität des Phasenraums und  $q$  die Anzahl der Bewegungsrichtungen. Die folgende Abbildung zeigt zwei der gebräuchlichsten Vertreter dieser Gattung, das zweidimensionale  $D2Q9$ -Gitter und das dreidimensionale  $D3Q19$ -Gitter:

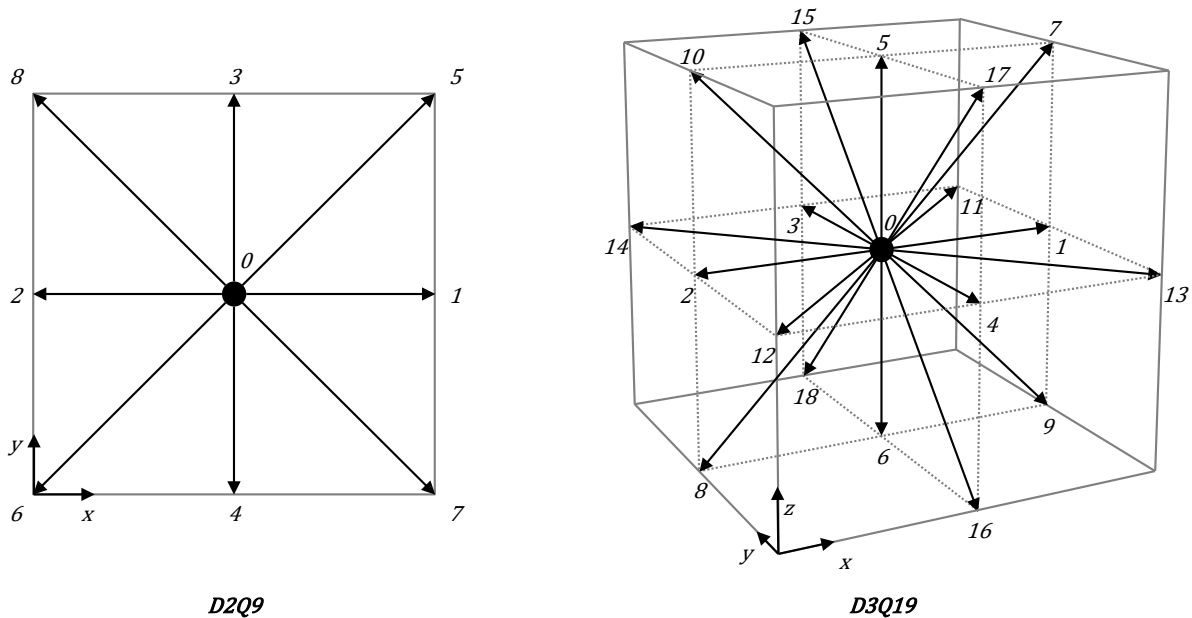


Abbildung 4-3:  $D2Q9$  und  $D3Q19$  Diskretisierungsgitter nach [61]

Beispielhaft sind in den Tabellen 4-1 und 4-2 die diskreten Geschwindigkeiten  $\mathbf{e}_\alpha$  für die in Abbildung 4-3 dargestellten Diskretisierungsgitter angegeben. Wie den Tabellen zu entnehmen ist, sind für die beiden Diskretisierungsgitter jeweils drei normierte Geschwindigkeitsbeiträge  $p$  möglich [62], die eine Untergliederung der  $DdQq$  Diskretisierungsgitter in Subgitter erlauben:

$$p = \left( \frac{\mathbf{e}_\alpha}{e_0} \right)^2 = 0,1,2 \quad (4-27)$$

Bewegungsrichtung $\alpha$ [-]	Geschwindigkeit $\mathbf{e}_\alpha$ [ $e_0, e_0$ ]	Subgitterindex $p$ [-]
0	(0,0)	0
1-2	( $\pm 1, 0$ )	1
3-4	(0, $\pm 1$ )	1
5-8	( $\pm 1, \pm 1$ ) $\cdot \sqrt{2}$	2

Tabelle 4-1: Partikelgeschwindigkeiten im  $D2Q9$  Diskretisierungsschema

Bewegungsrichtung $\alpha$ [-]	Geschwindigkeit $\mathbf{e}_\alpha$ [ $e_0, e_0, e_0$ ]	Subgitterindex $p$ [-]
0	(0,0,0)	0
1-2	( $\pm 1, 0, 0$ )	1
3-4	(0, $\pm 1, 0$ )	1
5-6	(0,0, $\pm 1$ )	1
7-10	( $\pm 1, 0, \pm 1$ ) $\cdot\sqrt{2}$	2
11-14	( $\pm 1, \pm 1, 0$ ) $\cdot\sqrt{2}$	2
15-18	(0, $\pm 1, \pm 1$ ) $\cdot\sqrt{2}$	2

 Tabelle 4-2: Partikelgeschwindigkeiten im *D3Q19* Diskretisierungsschema

Mit Hilfe des *DdQq* Diskretisierungsschemas kann die Boltzmann-BGK Gleichung (vgl. Formel 4-18) in der Zeit, im physikalischen Raum und im Phasenraum diskretisiert werden. Mit Hilfe einer expliziten Euler-Integration [61] lässt sich die Gleichung für einen Zeitschritt  $\delta t$  und einen über  $\mathbf{e}_\alpha \delta t$  festgelegten Ortschaft unter Vernachlässigung äußerer Kräfte schreiben [62]:

$$f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{f_\alpha(\mathbf{r}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}, t)}{\tau} \delta t \quad (4-28)$$

Diese Gleichung ist auch als diskrete **Lattice-BGK Gleichung** bekannt. Die beiden Seiten der Gleichung bilden die beiden konsekutiven Schritte des vom FHP Modell übernommenen Zustandsalgorithmus ab. Die linke Seite der Gleichung beschreibt den Transport von Partikeln und kann als diskreter Propagationsschritt verstanden werden, die rechte Seite beschreibt intrazelluläre Partikelkollisionen im diskretisierten Gaskontinuum und die darauf einwirkenden äußeren Kräfte.

Mit den diskreten Verteilungsfunktionen und den zugehörigen Geschwindigkeiten können die integralen Gleichungen 4-19 bis 4-21 zur Erlangung der makroskopischen Strömungsgrößen als Summen formuliert werden:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \quad (4-29)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \mathbf{e}_\alpha \quad (4-30)$$

$$\rho E = \frac{1}{2} \sum_\alpha f_\alpha (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{u})^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha f_\alpha^{eq} (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{u})^2 \quad (4-31)$$

Diese Schreibweise lässt sich auch auf die Integrale zur Bestimmung des Spannungs- und des Impulstensors (vgl. Gleichung 4-23) anwenden [62]:

$$\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \sigma_{ij} = \sum_\alpha f_\alpha e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} \quad (4-32)$$

Damit die vorgestellten Beziehungen die Navier-Stokes Gleichungen exakt lösen, müssen auch die Gleichgewichtszustände  $f_\alpha^{eq}$  der Boltzmannschen Betrachtung (vgl. Gleichung 4-16)

diskretisiert werden. Für kleine Machzahlen  $Ma$  und kleine thermische Schwankungen kann dies mit Hilfe der Chapman-Enskog-Entwicklung, einer Taylor-Reihen-Entwicklung, erfolgen [62]. Hierfür wird eine Referenzgeschwindigkeit  $c_s = \sqrt{RT}$  eingeführt, die als isotherme Schallgeschwindigkeit verstanden werden kann. Die Machzahlenforderung lässt sich damit schreiben zu

$$Ma = \frac{|\mathbf{u}|}{c_s} \ll 1 \quad (4-33)$$

Die Gleichgewichtszustände  $f^{eq}$  lassen sich so als Taylor-Reihe nach  $Ma$  entwickeln. In der folgenden Gleichung wird ein Fehler  $O(Ma^3)$  zugelassen. Dieses Vorgehen beschränkt die Anwendbarkeit des Ansatzes auf Phänomene mit kleinen Machzahlen [62]:

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi c_s^2)^{D_0/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{e}^2}{2c_s^2}\right) \cdot \left[1 + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2}\right] \quad (4-34)$$

Für die Diskretisierung der Gleichgewichtsverteilungsfunktionen wird der vorgestellte Term dieser Gleichung in einem subgitterspezifischem Gewichtungsfaktor  $t_p$  zusammengefasst:

$$f_\alpha^{eq} = \rho \cdot t_p \cdot \left[1 + \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2}\right] \quad (4-35)$$

Die Formel 4-35 beschreibt die diskreten **Gleichgewichtszustände des Lattice-BGK Modells**. Für die folgenden Erläuterungen zur Bestimmung des Gewichtungsfaktors  $t_p$  lässt sie sich in Tensorschreibweise in drei Dimensionen unter Zuhilfenahme der Zählindizes  $i, j = 1, 2, 3$  schreiben [62]:

$$f_\alpha^{eq} = \rho \cdot t_p \cdot \left[1 + \frac{e_{\alpha,i} \cdot u_i}{c_s^2} + \frac{u_i \cdot u_j}{2c_s^2} \left(\frac{e_{\alpha,i} \cdot e_{\alpha,j}}{c_s^2} - \delta_{ij}\right)\right] \quad (4-36)$$

Der Gewichtungsfaktor  $t_p$  muss entsprechend des vorliegenden Diskretisierungsschemas so gewählt werden, dass die Summen der Gleichgewichtsverteilungsfunktion die Gleichungen 4-29 bis 4-32 exakt lösen. Durch die vorliegende Einschränkung auf die Betrachtung isothermer Phänomene kann die Gleichung 4-31 hierbei vernachlässigt werden. Aufgrund der Symmetrie der vorgestellten Diskretisierungsgitter (vgl. Abbildung 4-3) entfallen Summen ungerader Potenzen der Geschwindigkeitskomponenten:

$$\sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i}^{2n+1} = 0 \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4-37)$$

Die Gleichungen der Dichte, des Impulses und des Impulstensors lassen sich unter Einsetzen der diskreten Gleichgewichtszustände mit den Indizes  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  schreiben zu [62]

$$\rho = \sum_{\alpha} f_\alpha^{eq} = \rho \sum_{\alpha} t_p + \frac{\rho u_i u_j}{2c_s^2} \left(\frac{1}{c_s^2} \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} - \delta_{ij} \sum_{\alpha} t_p\right) \quad (4-38)$$

$$\rho u_i = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha,i} = \frac{\rho u_i}{c_s^2} \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} \delta_{ij} \quad (4-39)$$

$$\begin{aligned} \rho u_i u_j + p \delta_{ij} &= \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} = \\ &= \rho \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} + \frac{\rho u_i u_j}{2c_s^2} \left( \frac{1}{c_s^2} \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} - \delta_{ij} \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} \right) \end{aligned} \quad (4-40)$$

Mit den Gleichungen 4-37 bis 4-40 lassen sich die Summen der Produkte aus den Gewichtungsfaktoren und den Potenzen der Geschwindigkeitskomponenten für die vorgestellten Diskretisierungsgitter beschreiben [62]:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} t_p &= 1, \\ \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} &= 0, \\ \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} &= c_s^2 \delta_{ij}, \\ \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} &= 0, \\ \sum_{\alpha} t_p e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} &= c_s^4 (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (4-41)$$

Basierend auf diesen Gleichungen können unter Variation der Indizes  $i, j, k$  und  $l$  die subgitter-spezifischen Gewichtungsfaktoren  $t_p$  und das Verhältnis  $c_s/e_0$  ermittelt werden [62]. In den folgenden Tabellen finden sich die Ergebnisse für die in Abbildung 4-3 vorgestellten Diskretisierungsgitter [61]:

Subgitterindex $p$ [-]	Gewichtungsfaktor $t_p$ [-]	Verhältnis $(c_s/e_0)^2$ [-]
0	4/9	1/3
1	1/9	1/3
2	1/36	1/3

Tabelle 4-3: Gewichtungsfaktoren des *D2Q9* Diskretisierungsschemas

Subgitterindex $p$ [-]	Gewichtungsfaktor $t_p$ [-]	Verhältnis $(c_s/e_0)^2$ [-]
0	1/3	1/3
1	1/18	1/3
2	1/36	1/3

Tabelle 4-4: Gewichtungsfaktoren im *D3Q19* Diskretisierungsschemas

Aus den Gleichungen 4-39 und 4-40 lässt sich weiterhin eine Beziehung für den makroskopischen **Druck** im Lattice-BGK Modell herleiten. Dieser kann in einen thermodynamischen Anteil  $p_0$  und einen hydrodynamischen Anteil  $p'$  zerlegt werden [62]:

$$p = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} c_s^2 = \rho c_s^2 = \rho RT = p_0 + Ma^2 \cdot p' \quad (4-42)$$

Während sich der hydrodynamische Anteil des Drucks proportional zum Staudruck verhält, ist der thermodynamische Anteil  $p_0 = \rho_0 RT$  durch die Gasgleichung bestimmt [62]. Er kann als räumlich und für das vorliegende offene System auch zeitlich konstant angenommen werden.

Analog lässt sich der thermodynamische Anteil  $\rho_0$  der **Dichte**  $\rho$  bestimmen [62]. Der hydrodynamische Dichtenanteil  $\rho'$  wird in Abhängigkeit von  $p'$  berechnet (vgl. Formel 4-43). Bei der Betrachtung einer inkompressiblen, isothermen Strömung, wie sie im Fall der Abwind-simulation vorliegt, können  $\rho_0$ ,  $p_0$  und  $T$  konstant angenommen werden.

$$\rho = \rho_0 + Ma^2 \cdot \rho' = \rho_0 + Ma^2 \cdot \frac{p'}{c_s^2} \quad (4-43)$$

Eine weitere elementare Strömungsgröße bildet die **kinematische Viskosität**  $\nu$  des betrachteten Fluids. Diese lässt sich in Abhängigkeit der Relaxationszeit  $\tau$  formulieren. Dieser Zusammenhang ermöglicht die Bestimmung der Relaxationszeit in Abhängigkeit der gegebenen Fluidviskosität [62]:

$$\nu = \left( \tau - \frac{\delta t}{2} \right) c_s^2 \quad (4-44)$$

Für die **Entdimensionalisierung** der verwendeten Größen sind drei Skalierungsparameter einzuführen: Die charakteristische Länge  $L_0$ , die charakteristische Geschwindigkeit  $U_0$  und die Referenzdichte  $\rho_r$ . Die Entdimensionalisierung der Relaxationszeit  $\tau$  erfordert weiterhin die Einführung einer Zeitkonstante  $t_c$  (vgl. Tabelle 4-5). Diese lässt sich von der Knudsen-Zahl  $\epsilon$  ableiten, welche das Verhältnis der freien Weglänge zwischen zwei Partikelkollisionen und der charakteristischen Länge  $L_0$  beschreibt. Die Zeitkonstante  $t_c$  beschreibt die Zeit, die zwischen zwei Kollisionen verstreicht:

$$\epsilon = t_c \cdot \frac{U_0}{L_0} \Leftrightarrow t_c = \epsilon \cdot \frac{L_0}{U_0} \quad (4-45)$$

Beschreibung	Ausgangsgröße	Entdimensionalisierungsfaktor
Geschwindigkeitsverteilungsfunktion	$f_{\alpha}$	$1/\rho_r$
Partikelgeschwindigkeit	$\mathbf{e}_{\alpha}$	$1/U_0$
Zeit	$t$	$U_0/L_0$
Ort	$\mathbf{r}$	$1/L_0$
Dichte	$\rho$	$1/\rho_r$
Druck	$p$	$1/(\rho_r \cdot (U_0)^2)$ [62]
Strömungsgeschwindigkeit	$\mathbf{u}$	$1/U_0$
Schallgeschwindigkeit	$c_s$	$1/U_0$
Relaxationszeit	$\tau$	$1/t_c$
Kinematische Viskosität	$\nu$	$1/(U_0 \cdot L_0)$

Tabelle 4-5: Entdimensionalisierung der Größen des Lattice-BGK Modells

Mit Hilfe der Faktoren aus Tabelle 4-5 lässt sich die diskrete Lattice-BGK Gleichung (vgl. Formel 4-28) in ihrer dimensionslosen Form schreiben. Durch die Wahl einer Zeitschrittgröße  $\delta t$  vom Betrag der Kollisionszeit  $t_c$  lässt sich die **dimensionslose Lattice-BGK Gleichung** schreiben zu

$$\hat{f}_\alpha(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_\alpha \delta \hat{t}, \hat{t} + \delta \hat{t}) - \hat{f}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) = - \frac{\hat{f}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) - \hat{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, \hat{t})}{\hat{t}} \quad (4-46)$$

Lösungen der Lattice-BGK Gleichung approximieren die Ergebnisse der Navier-Stokes Gleichung für inkompressible Fluide mit einer räumlichen und zeitlichen Genauigkeit zweiter Ordnung [62]. Die Gleichung 4-46 bildet die Grundlage für alle folgenden Abschnitte dieser Arbeit. Der Index ( $\hat{\ast}$ ), der in der Gleichung die entdimensionalisierten Größen kennzeichnet, wird aufgrund der besseren Lesbarkeit im Folgenden nicht weiter aufgeführt.

Aufgrund der getroffenen Annahmen ist der Einsatz der Lattice-BGK Methode auf die Simulation inkompressibler Strömungen beschränkt. Wie aus der Gleichung 4-44 hervorgeht, muss weiterhin die Dauer der Relaxationszeit  $\tau$  den Wert  $\frac{1}{2}$  übersteigen, um ungültige Viskositätswerte auszuschließen. Diese Bedingung bildet eine **Stabilitätsgrenze** [59][62], die insbesondere bei der Simulation niederviskoser Fluide, wie beispielsweise Luft, an Bedeutung gewinnt.

Ebenso nähert sich die Lattice-BGK Methode dieser Stabilitätsgrenze mit Anwachsen der simulierten Strömungsgeschwindigkeit, beispielsweise bei der Simulation turbulenter Strömungen wie Rotorabwind, an. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bildet eine Verkleinerung des Zeit- oder Ortsschritts der Simulation [59]. Beide Ansätze eignen sich aufgrund der vorliegenden Rechenzeitbeschränkung nur bedingt für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte echtzeitfähige Abwindsimulationsmodell.

Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens der Lattice-Boltzmann Methode bildet die Approximation des Kollisionsoperators der Boltzmann-Gleichung mit Hilfe empirischer Faktoren und multipler Relaxationszeiten (engl. multiple relaxation time, MRT) [68-69]. MRT Modelle bieten im Vergleich zu Modellen mit einfacher Relaxationszeit (engl. single relaxation time, SRT) wie dem vorgestellten BGK Modell eine Verbesserung des Stabilitätsverhaltens, insbesondere bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten [68-69]. Weiterhin ermöglichen sie die Abbildung thermischer Variationen in der Simulation. Durch den mit der komplexeren Approximation einhergehenden Mehraufwand übersteigt die von MRT Modellen benötigte Rechenzeit jedoch die von SRT Modellen um 10-20% [68-69].

Eine effiziente Alternative zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens der Lattice-Boltzmann Methode bildet die Implementierung eines Turbulenzmodells, beispielsweise des **Smagorinsky Turbulenzmodells** [70-71]. Das Modell zählt zu den Subgittermodellen. Diese Modelle werden in der numerischen Strömungssimulation für die Approximation von Strömungsstrukturen genutzt, deren Größe die Auflösung des verwendeten Rechengitters unterschreitet. Nichtaufgelöste Strömungsstrukturen werden auch für Instabilitäten in der Lattice-BGK Methode verantwortlich gemacht [71].

Die Implementierung des Smagorinsky Modells setzt auf einer zellspezifischen Adaption der Relaxationszeit der Lattice-BGK Methode auf und wurde bereits in echtzeitfähigen Anwendungen im Umfeld komplexer Geometrien evaluiert [72-73]. Aufgrund der positiven Ergebnisse wurde das Modell als stabilitätsverbessernde Maßnahme für das Abwindsimulationsmodell gewählt.

Im Folgenden wird die Adaption der Relaxationszeit der Lattice-BGK Methode mit Hilfe des Smagorinsky Modells nach [74] beschrieben. Die Formulierung der zugehörigen Relaxationszeit  $\tau_s$  beruht dabei auf dem lokalen Spannungstensor  $\Pi$  im Ungleichgewicht:

$$\Pi_{i,j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) \quad (4-47)$$

Mit der Smagorinsky Konstante  $C$  und der zweiten Varianz des Vektors wird dessen Intensität  $S$  berechnet. Für die diskrete Lattice-BGK Gleichung lässt sich diese schreiben zu

$$S = \frac{\sqrt{\nu^2 + 18C^2 \sqrt{\Pi_{i,j} \Pi_{i,j}} - \nu}}{6C^2} \quad (4-48)$$

Die Größe ermöglicht die Bestimmung der entdimensionalisierten Smagorinsky Relaxationszeit, die die Relaxationszeit des Lattice-BGK Modells ersetzt:

$$\tau_s = 3(\nu + C^2 S) + \frac{1}{2} \quad (4-49)$$

Da die Intensität des Spannungstensors stets positive Werte annimmt, wächst mit ihrem Betrag die positive Differenz zwischen der Relaxationszeit und der Stabilitätsgrenze  $\tau_s = \frac{1}{2}$ . Der Wert der Smagorinsky Konstante ist für den Einsatz des Turbulenzmodells als stabilitätsverbessernde Maßnahme für die Lattice-BGK Methode nicht fest definiert. Stattdessen existieren in der Literatur geometrie- und geschwindigkeitsspezifische Empfehlungen [71].

### 4.3 Strömungshindernisse

Im betrachteten Strömungsgebiet befindliche Geometrien bilden als Strömungshindernisse Randbedingungen der Lattice-BGK Methode. Unter der Annahme einer nicht zu vernachlässigenden Oberflächenrauheit muss an deren Oberfläche für die lokale Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  sowohl eine Undurchdringlichkeitsbedingung als auch eine Haftbedingung erfüllt sein. Während die Undurchdringlichkeitsbedingung eine verschwindende Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit an der Randbedingung impliziert, eliminiert die Haftbedingung tangential Geschwindigkeitskomponenten an diesem Punkt.

Die beiden Bedingungen lassen sich für einfache, gitterparallele Geometrien mit Hilfe von **Reflexionsbedingungen** (engl. bounce-back) für die diskreten Verteilungsfunktionen  $f_{\alpha}$  der



Lattice-BGK Methode realisieren [62][75]. Obwohl Reflexionsbedingungen für die Abwindsimulation im Umfeld komplexer Strömungshindernisse aufgrund der genannten Einschränkung keine praktische Relevanz haben, bilden sie die Grundlage für die Implementierung von Randbedingungen in der Lattice-BGK Methode und werden daher an dieser Stelle erläutert.

Reflexionsbedingungen basieren auf der Annahme, dass Verteilungsfunktionen  $f_\alpha$  der Lattice-BGK Methode mit ihrer Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_\alpha$  von oberflächennahen Fluidzellen  $\mathbf{x}_f$  zu oberflächennahen Zellen des Strömungshindernisses  $\mathbf{x}_b$  transportiert und von diesen Zellen in Richtung der Oberflächennormalen  $\mathbf{n}$  mit umgekehrtem Vorzeichen zurückreflektiert werden. Die Oberfläche des Hindernisses liegt stets mittig zwischen den Zellen:

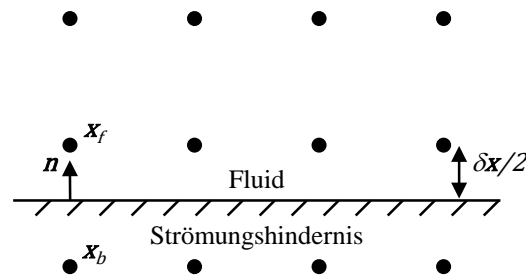


Abbildung 4-4: Abbildung eines ebenen Strömungshindernisses

Die Implementierung von Reflexionsbedingungen gliedert sich in zwei Schritte [62]: Im Propagationsschritt der Lattice-BGK Methode werden zunächst die Verteilungsfunktionen  $f_\alpha$  der Fluidzellen längs ihrer korrespondierenden Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_\alpha$  in die benachbarten Hinderniszellen transportiert (vgl. Kapitel 4.2):

$$f_\alpha(\mathbf{x}_b, t + \delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}_f, t + \delta t) \quad (4-50)$$

Anschließend werden die neuen Verteilungsfunktionen  $f_{\alpha'}$  mit invertierten Geschwindigkeiten  $\mathbf{e}_{\alpha'} = -\mathbf{e}_\alpha$  in die Fluidzellen zurückgeschrieben (vgl. Formel 4-51). Auf der Oberfläche des Strömungshindernisses stellt sich damit die Haft- und die Undurchdringlichkeitsbedingung ein:

$$f_{\alpha'}(\mathbf{x}_f, t + \delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}_f, t + \delta t) \quad (4-51)$$

Mit der Reflexionsbedingung lassen sich auch reibungsfreie Oberflächen sowie Strömungshindernisse mit Ecken und Kanten als Randbedingungen abbilden [62][75]. Um komplexe und krummlinige Strömungshindernisse abbilden zu können, ohne die Genauigkeit der Lattice-BGK Methode zu reduzieren, ist jedoch eine Erweiterung des Ansatzes erforderlich.

Die Implementierung von **Randbedingungen für komplexe und krummlinige Geometrien** erfolgt durch die Festlegung makroskopischer Strömungsgrößen und die Formulierung extrapolierter Gleichgewichtszustände auf deren Oberfläche. Diese Form der Randbedingungsimplementierung wurde erstmals in [76-77] beschrieben. Eine stabilitätsoptimierte Überarbeitung des Ansatzes erfolgte in [78]. Letztere wird im Folgenden anhand der Ausführungen in [43] erläutert.

Für oberflächennahe Fluidzellen  $\mathbf{x}_f$  wird zunächst das durch den Schnitt mit der Oberflächengeometrie in  $\mathbf{x}_w$  entstehende Teilungsverhältnis  $\Delta$  der zelleigenen Verteilungsfunktionen ermittelt:

$$\Delta = \frac{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_w|}{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b|} \quad (4-52)$$

Wie Abbildung 4-5 zu entnehmen ist, nimmt das Teilungsverhältnis  $\Delta$  stets Werte zwischen 0 und 1 an. Neben diesem Verhältnis ist für die Berechnung der Gleichgewichtszustände die Oberflächengeschwindigkeit  $\mathbf{u}_w$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{ff}$  an der Stützstelle  $\mathbf{x}_{ff}$  zu bestimmen. Während  $\mathbf{u}_{ff}$  die lokale Strömungsgeschwindigkeit der benachbarten Rechengitterzelle in entgegengesetzter Richtung der betrachteten Verteilung widerspiegelt, erlaubt die Oberflächengeschwindigkeit  $\mathbf{u}_w$  die Abbildung von Bewegungen der betrachteten Geometrie.

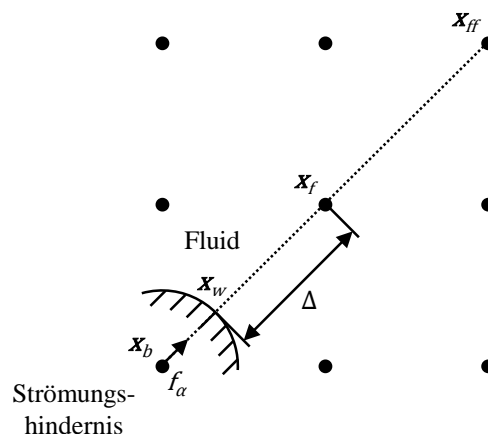


Abbildung 4-5: Abbildung eines komplexen Strömungshindernisses nach [43]

Aus dem Teilungsverhältnis, den genannten Geschwindigkeiten und der Relaxationszeit  $\tau$  können ein Gewichtungsfaktor  $\chi$  und eine virtuelle Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{bf}$  bestimmt werden. Hierbei wird eine Unterscheidung anhand der Größe des Teilungsverhältnisses  $\Delta$  vorgenommen. So gilt für Werte von  $\Delta < 1/2$

$$\mathbf{u}_{bf} = \mathbf{u}_{ff} \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 2} \quad (4-53)$$

Hingegen erfolgt die Ermittlung des Gewichtungsfaktors und der virtuellen Geschwindigkeit für größere Werte des Teilungsverhältnisses mit Hilfe der folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{u}_{bf} = \left(1 - \frac{3}{2\Delta}\right) \mathbf{u}_f + \frac{3}{2\Delta} \mathbf{u}_w \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau + 1/2} \quad (4-54)$$

Mit den genannten Parametern lassen sich Gleichgewichtszustände  $f_\alpha^{eq}$  (vgl. Gleichung 4-35) für die oberflächennahen Zellen der betrachteten Geometrie  $\mathbf{x}_b$  berechnen:

$$f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_b) = \rho \cdot t_p \cdot \left[ 1 + \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_{bf}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_f)^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}_f^2}{2c_s^2} \right] \quad (4-55)$$

Ebenso werden aus den Gleichgewichtszuständen die Verteilungsfunktionen  $f_{\alpha}$  interpoliert:

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}_b) = (1 - \chi) \cdot f_{\alpha}(\mathbf{x}_f) + \chi \cdot f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_b) + 2 \cdot \rho \cdot t_p \cdot \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_w}{c_s^2} \quad (4-56)$$

Der beschriebene Ansatz eignet sich für nahezu beliebig komplexe Strömungshindernisse. Eine Implementierung erfordert jedoch Informationen zur lokalen Oberflächengeometrie [79], die durch die in Kapitel 3.1 beschriebenen Verfahren zur Randbedingungserfassung nicht bereitgestellt werden können. Der Ansatz erfordert daher weitere Operationen zur Geometrieerfassung, die den an das Modell gestellten Echtzeitanspruch gefährden [80]. Aus diesem Grund wird die beschriebene Randbedingungsimplementierung für komplexe und krummlinige Geometrien für das Abwindsimulationsmodell vereinfacht. Dazu werden folgende Annahmen getroffen [44]:

- Die Auflösung, mit der Strömungshindernisse nach dem in Kapitel 3.1 vorgestellten Verfahren als Randbedingungen erfasst und diskretisiert werden, entspricht der Gitterauflösung.
- Die Kennzeichnung von Strömungshindernissen zugehörigen Gitterzellen erfolgt mit Hilfe einer binären Kodierung, die in der Randbedingungserfassung vorgenommen wird.
- Die Oberfläche von Strömungshindernissen wird durch eine Fläche  $S$  approximiert, die durch die Zellmittelpunkte der oberflächennahen Gitterzellen  $\mathbf{x}_b$  beschrieben wird ( $\mathbf{x}_b \in S$ ).
- Die Ausrichtung des Normalenvektors der Oberfläche  $\mathbf{n}_s$  wird mit Hilfe der Kodierungsindizes der umliegenden Gitterzellen approximiert.

Die Approximation des Normalenvektors basiert auf der binären Kodierung von Fluidzellen und Strömungshindernissen anhand ihres Index  $\xi$  [44][81]:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{Fluid} \\ 0 & \text{Strömungshindernis} \end{cases} \quad (4-57)$$

Basierend auf den Kodierungsindizes einer Zelle  $\mathbf{x}_b$  und ihrer Nachbarzellen im kartesischen Rechengitter wird der Wert eines Richtungsindikators  $\zeta$  bestimmt [44][81]:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}_b) = & 64 \cdot \xi(\mathbf{x}_b) + \xi(\mathbf{x}_b + \delta\mathbf{x}) + 2 \cdot \xi(\mathbf{x}_b - \delta\mathbf{x}) + 8 \cdot \xi(\mathbf{x}_b + \delta\mathbf{y}) + 4 \\ & \cdot \xi(\mathbf{x}_b - \delta\mathbf{y}) + 16 \cdot \xi(\mathbf{x}_b + \delta\mathbf{z}) + 32 \cdot \xi(\mathbf{x}_b - \delta\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (4-58)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= (1 \quad 0 \quad 0)^T \\ \text{mit } \delta\mathbf{y} &= (0 \quad 1 \quad 0)^T \\ \delta\mathbf{z} &= (0 \quad 0 \quad 1)^T \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses für den dreidimensionalen Fall ermittelten Richtungsindikators lassen sich 27 Richtungen approximieren:

Vektor $\mathbf{n}_s$	Indikator $\zeta$	Vektor $\mathbf{n}_s$	Indikator $\zeta$	Vektor $\mathbf{n}_s$	Indikator $\zeta$
$(0,0,0)$	0, 64	$(0,0,1)$	16, 31	$(0,0,-1)$	32, 47
$(1,0,0)$	1, 61	$(1,0,1)$	17	$(1,0,-1)$	33
$(-1,0,0)$	2, 62	$(-1,0,1)$	18	$(-1,0,-1)$	34
$(0,1,0)$	8, 59	$(0,1,1)$	24	$(0,1,-1)$	40
$(0,-1,0)$	4, 55	$(0,-1,1)$	20	$(0,-1,-1)$	36
$(1,1,0)$	9	$(1,1,1)$	25	$(1,1,-1)$	41
$(-1,-1,0)$	6	$(-1,-1,1)$	22	$(-1,-1,-1)$	38
$(1,-1,0)$	5	$(1,-1,1)$	21	$(1,-1,-1)$	37
$(-1,1,0)$	10	$(-1,1,1)$	26	$(-1,1,-1)$	42

Tabelle 4-6: Kodierung der approximierten Normalenvektorrichtung [44][81]

Unter der getroffenen Annahme, dass die geometrischen Mittelpunkte oberflächennaher Gitterzellen ( $\mathbf{n}_s \neq (0,0,0)$ ) die Oberfläche  $S$  von Strömungshindernissen approximieren, wird für das Teilungsverhältnis der Gleichungen 4-53 und 4-54 der feste Wert  $\Delta=1$  angenommen. Die Gleichungen werden durch die folgenden Beziehungen ersetzt [44]:

$$\mathbf{u}_{bf} = \left(1 - \frac{3}{2}\right) \mathbf{u}_f + \frac{3}{2} \mathbf{u}_w \quad \chi = \frac{1}{\tau + 1/2} \quad (4-59)$$

Die Adaption der Gleichgewichtszustände und der diskreten Verteilungsfunktionen  $f_\alpha$  wird im vorgestellten Ansatz nur für oberflächennahe, Strömungshindernissen zugehörige Gitterzellen durchgeführt ( $\mathbf{n}_s \neq (0,0,0)$ ). Weiterhin wird das Verfahren nur auf nicht-oberflächenparallele Verteilungsfunktionen angewendet [44]:

$$\mathbf{n}_s(\mathbf{x}_b) \cdot \mathbf{e}_\alpha \neq 0 \quad (4-60)$$

Durch die Anwendung auf einwärts- und auswärtsgerichtete Verteilungen kann gewährleistet werden, dass zwischen den Zellen des Fluids und den Zellen von Strömungshindernissen kein Massenaustausch stattfindet [44].

#### 4.4 Rotor aerodynamik

Rotorschub kann als Verteilung einer auf das betrachtete Fluid wirkenden äußeren Kraft  $\mathbf{F}$  beschrieben werden [82]. Äußere Kräfte werden in der Lattice-Boltzmann Methode und der Lattice-BGK Methode durch einen Kraftterm abgebildet [62]. Der Kollisionsoperator der diskreten Lattice-BGK Gleichung (vgl. Formel 4-46) wird so um einen entlang der Bewegungsrichtungen diskretisierten Kraftterm  $F_\alpha$  erweitert [62][82-83]:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau} + F_\alpha \quad (4-61)$$

Der diskrete Kraftterm  $F_\alpha$  kann in Abhängigkeit einer vorliegenden Kraftverteilung  $\mathbf{F}=\rho\mathbf{a}$  formuliert werden. Beispiele für Kraftverteilungen bilden Gravitationsfelder oder Druckgradienten. Der Kraftterm lässt sich mit der diskreten Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_\alpha$  als Reihe entwickeln und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung schreiben [82][83]:

$$F_\alpha = t_p \cdot \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}}{c_s^2} \quad (4-62)$$

Hierbei handelt es sich um einen in der Literatur gebräuchlichen Ansatz, der jedoch die grundlegenden Erhaltungsgleichungen der Masse und des Impulses nicht erfüllt [82-83]. Eine exakte Lösung der Navier-Stokes Gleichungen durch die Lattice-BGK Methode erfordert gemäß den Ausführungen in [82-83] die Berücksichtigung von Termen zweiter Ordnung in der Berechnung des Kraftterms. Laut [82-83] ist der Term weiterhin in der Berechnung der makroskopischen Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  zu berücksichtigen.

In [83] wird zudem gezeigt, dass zeitliche Änderungen der Kräfte in die Berechnung der Gleichgewichtszustände eingehen müssen, um die korrekte Einhaltung der Impulserhaltung zu gewährleisten. Die in diesem Ansatz vorgestellte und für die Entwicklung des Abwindsimulationsmodells gewählte Beziehung zur Berechnung des diskreten Kraftterms lautet

$$F_\alpha = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \cdot t_p \cdot \left[ \frac{\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c_s^4} \cdot \mathbf{e}_\alpha \right] \cdot \mathbf{F} \quad (4-63)$$

Diese Formulierung erlaubt unter Einsetzen des zellspezifischen, normierten Kraftterms  $\mathbf{F}=d\mathbf{T}/\rho$  die Abbildung von Rotorschubverteilungen (vgl. Kapitel 3-2). Um den Einfluss des Kraftterms auch in der Berechnung der Gleichgewichtszustände und der makroskopischen Strömungsgeschwindigkeit zu berücksichtigen, wird eine entsprechend angepasste Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{u}^*$  eingeführt [83]:

$$\rho\mathbf{u}^* = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{F} \cdot \frac{\delta t}{2} \quad (4-64)$$

Diese Beziehung ersetzt die in Gleichung 4-30 vorgestellte Berechnung der makroskopischen Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$ . Die adaptierte Strömungsgeschwindigkeit nimmt Eingang in die Berechnung der Gleichgewichtszustände (vgl. Gleichung 4-35):

$$f_{\alpha}^{eq} = \rho \cdot t_p \cdot \left[ 1 + \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}^*}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}^*)^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*}{2c_s^2} \right] \quad (4-65)$$

## 4.5 Flugmechanik

Die Abwindsimulation erfolgt in einem begrenzten, am betrachteten Luftfahrzeug anhaftenden Rechenraum (vgl. Kapitel 1.1). Um die aus der Flugmechanik des Luftfahrzeugs resultierenden Bewegungen in der Strömungssimulation abzubilden, wird in dieser Arbeit der

Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Ansatz gewählt. In dieser Modellierung erfolgt die Strömungssimulation in einer ortsfesten (eulerschen) Betrachtung auf einem bewegten Rechengitter. Die Bewegung des Gitters wird in einer bewegten (lagrangeschen) Betrachtung modelliert.

Der ursprünglich für die Abbildung der Navier-Stokes Gleichungen auf bewegten Gittern [84] vorgestellte Ansatz verfügt über keinerlei Einschränkungen bezüglich der betrachteten Strömungsgeschwindigkeit und lässt sich auf die Lattice-BGK Methode übertragen [85-87]. Neben dem ALE Ansatz wurde auch der Einsatz von Quelltermen für die Abbildung der aus in rotierenden Gittern auftretenden Beschleunigungen in der Lattice-BGK Methode untersucht [88-89]. Dieser Ansatz kann jedoch zellspezifische Variationen der Beschleunigungswerte, wie sie durch die Flugbewegung eines Luftfahrzeugs entstehen, nicht fehlerfrei abbilden [87].

Im Folgenden soll daher die Implementierung des ALE Ansatzes im Abwindsimulationsmodell erläutert werden. Der Ansatz erlaubt eine Formulierung der diskreten Lattice-BGK Gleichung in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit, die die Zellen des bewegten Rechengitters erfahren. Um Bewegungen des betrachteten Luftfahrzeugs in der Abwindsimulation abzubilden, lässt sich die Gleichung unter Berücksichtigung der zellspezifischen, aus der Flugbewegung resultierenden Geschwindigkeit  $\mathbf{V}_\infty(\mathbf{x})$  (vgl. Kapitel 3.3) schreiben [85-87]:

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{V}_\infty) \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau} \quad (4-66)$$

In der für beliebige Gitterbewegungen gültigen Gleichung wurden aus der Rotor aerodynamik resultierende Quellterme (vgl. Kapitel 4.4) zu Gunsten der Übersichtlichkeit vernachlässigt. Mit Hilfe des in [87] vorgestellten Ansatzes zweiter Ordnung lässt sich die Gleichung zeitlich diskretisieren:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{V}_\infty \delta t, t) = -\frac{f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{V}_\infty \delta t, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \mathbf{V}_\infty \delta t, t)}{\tau} \quad (4-67)$$

Diese **ALE-LBM Gleichung** [87] gleicht der in Kapitel 4.2 vorgestellten Lattice-BGK Gleichung bis auf den von der Geschwindigkeit  $\mathbf{V}_\infty$  bestimmten Ortsterm. Die durch den Term beschriebene Position im Raum kongruiert nicht zwangsläufig mit den Koordinaten eines Zellmittelpunktes im Rechengitter. Dieser Umstand erfordert den Einsatz eines Interpolationsverfahrens für die Ermittlung der Eingangsgrößen der ALE-LBM Gleichung. In dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Abwindsimulationsmodell wird für diese Aufgabe ein effizientes trilineares Verfahren [90] eingesetzt.

Zunächst werden die skalaren Stützwerte der jeweils gesuchten Verteilungsfunktion  $s_{000}$ ,  $s_{001}$ ,  $s_{010}$ ,  $s_{011}$ ,  $s_{100}$ ,  $s_{101}$ ,  $s_{110}$ ,  $s_{111}$  an den acht benachbarten Zellmittelpunkten der Position  $\mathbf{x} + \mathbf{V}_\infty \delta t$  im kartesischen Rechengitter ermittelt (vgl. Abbildung 4-6). Nicht im Rechengitter enthaltenen Punkten werden Standardwerte zugewiesen.

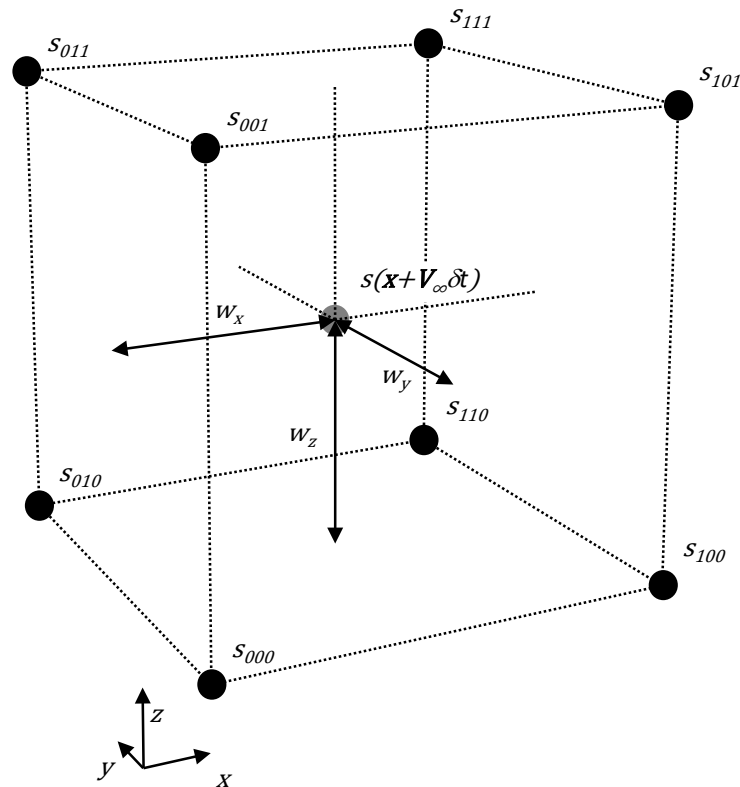


Abbildung 4-6: Stützpunkte der trilinearen Interpolation

Anschließend werden, basierend auf den Teilungsverhältnissen  $w_x$ ,  $w_y$  und  $w_z [0; \dots; 1]$ , sieben Interpolationen entlang der Koordinatenachsen durchgeführt. Vier Interpolationen entlang der x-Achse dienen der Ermittlung der Zwischenergebnisse  $s_{x00}$ ,  $s_{x01}$ ,  $s_{x10}$  und  $s_{x11}$ :

$$\begin{aligned}
 s_{x00} &= s_{000} + w_x(s_{100} - s_{000}) \\
 s_{x01} &= s_{001} + w_x(s_{101} - s_{001}) \\
 s_{x10} &= s_{010} + w_x(s_{110} - s_{010}) \\
 s_{x11} &= s_{011} + w_x(s_{111} - s_{011})
 \end{aligned} \tag{4-68}$$

Es folgen zwei Interpolationen entlang der y-Achse. Diese erlauben die Bestimmung der Zwischenergebnisse  $s_{xy0}$  und  $s_{xy1}$ :

$$\begin{aligned}
 s_{xy0} &= s_{x00} + w_y(s_{x10} - s_{x00}) \\
 s_{xy1} &= s_{x01} + w_y(s_{x11} - s_{x01})
 \end{aligned} \tag{4-69}$$

Eine letzte Interpolation entlang der z-Achse liefert schließlich den skalaren Wert  $s(\mathbf{x} + \mathbf{V}_{\infty} \delta t)$  an der gesuchten Position:

$$s(\mathbf{x} + \mathbf{V}_{\infty} \delta t) = s_{xy0} + w_z \{s_{xy1} - s_{xy0}\} \tag{4-70}$$

## 4.6 Rechenraumränder

Gemäß der in Kapitel 1.1 formulierten Zielsetzung sollen die Ränder des im vorliegenden Abwindsimulationsmodell betrachteten Rechenraums das Strömungsbild nicht beeinflussen und das ungehinderte Zu- und Ausströmen von Fluid erlauben. Die Implementierung derartiger Randbedingungen ist nicht trivial. Zwar existieren effiziente Implementierungen für Zu- und Ausström-Randbedingungen in der Lattice-BGK Methode, die unter Zuhilfenahme der Reflexionsbedingung (vgl. Kapitel 4.3) konstante Werte physikalischer Größen, z.B. die Geschwindigkeit oder den Druck, auf die Strömung aufprägen [91-93]. Insbesondere bei kleinen räumlichen Distanzen zwischen Zu- und Ausström-Randbedingungen, wie sie in der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Abwindsimulation vorliegen, leidet diese Form der Implementierung jedoch unter einem reflektierenden Verhalten gegenüber Druckwellen [94-95]. Letzteres hat eine Verfälschung des Strömungsbilds und eine Verschlechterung des Modellkonvergenzverhaltens zur Folge.

Eine Reduktion der Reflexionen kann durch eine auf der Extrapolation von Verteilungsfunktionen aus dem Strömungsgebiet basierenden Implementierung von Ausström-Randbedingungen erzielt werden [94-95]. Diese Implementierung verbietet jedoch die Festlegung des Umgebungsdrucks in der Randbedingung. Bei der Untersuchung transienter Strömungsphänomene konnte dieser Form der Randbedingungsimplementierung weiterhin eine deutliche Beeinflussung des Strömungsbildes im betrachteten Strömungsgebiet nachgewiesen werden [96].

Eine Alternative zur Abbildung von offenen Ein- und Ausstromrändern eines räumlich begrenzten Strömungsgebiets bilden **nicht-reflektierende Randbedingungen**. Diese wurden entwickelt, um randbedingungsinduzierte Störungen des Strömungsbilds und der numerischen Simulation so weit wie möglich zu reduzieren [97-98].

Um dieses Ziel zu erreichen, werden verschiedene Ansätze verfolgt. Diese werden im Folgenden kurz erläutert und anhand ihrer Eignung für den Einsatz in der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Abwindsimulation bewertet.

Eine einfache Möglichkeit zur Implementierung nicht-reflektierender Randbedingungen bildet die Eliminierung von hochfrequenten Reflexionen mit Hilfe von **Tiefpassfiltern**. Dieser Ansatz eignet sich insbesondere für randbedingungsinduzierte Störungen, die einem bestimmten Frequenzbereich zuzuordnen sind. Dies ist beispielsweise in der Betrachtung akustischer Phänomene von Relevanz [98]. In der Abwindsimulation ist der Einsatz von Tiefpassfiltern jedoch aufgrund des breiten Frequenzspektrums der betrachteten Strömungsphänomene nicht zielführend.

Weitere bedeutende Vertreter der nicht-reflektierenden Randbedingungen sind die **charakteristischen Randbedingungen** [99]. Diese beruhen auf der Tatsache, dass sich Störungen in den Lösungen hyperbolischer partieller Differentialgleichungen in Wellen ausbreiten. Unter Vernachlässigung von Reibung lassen sich auch die Erhaltungsgleichungen der Strömungs-



mechanik derart formulieren [97]. Die entstehenden Gleichungen sind auch als Eulergleichungen bekannt. In einer isothermen Betrachtung kann die Energieerhaltung ebenfalls vernachlässigt werden. Werden weiterhin alle transversalen Terme eliminiert, so entstehen die Local One-Dimensional Inviscid (LODI) [97-100] Gleichungen. Dieses Gleichungssystem lässt sich an einer Randbedingung in Abhängigkeit der charakteristischen Strömungsgrößen Geschwindigkeit, Dichte und Energie sowie einer Koeffizientenmatrix formulieren. Anhand der Eigenwerte der Matrix werden in das Strömungsfeld gerichtete Wellen identifiziert und eliminiert. LODI Randbedingungen wurden bereits erfolgreich in der Lattice-BGK Methode implementiert [97-98][100]. Bei der Untersuchung von orthogonalen Reflexionen an diesen Randbedingungen wurde eine merkliche Reduktion von reflexionsbedingten Störungen im Strömungsgebiet beobachtet. Auch eine Verbesserung des Stabilitäts- [97] und des Konvergenzverhaltens [100] der zugrundeliegenden Simulation ließ sich dabei nachweisen. Bei der zweidimensionalen Untersuchung von Reflexionen zeigte sich jedoch eine signifikante Abhängigkeit zwischen der reflexionsunterdrückenden Wirkung der Randbedingungsimplementierung und dem Einfallswinkel auftreffender Störungen [98]. Diese Eigenschaft verbietet den Einsatz von LODI Randbedingungen für die Eingrenzung des Rechenraums in der Abwindsimulation, da hier komplexe Strömungsverläufe vorliegen.

Eine weitere Möglichkeit zur Implementierung nicht-reflektierender Randbedingungen bieten **absorbierende Randbedingungen**. Zu dieser Form der Randbedingungsimplementierung zählen Perfectly Matched Layer (PML) Randbedingungen, die ursprünglich für die numerische Simulation der freien Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entwickelt wurden [101]. In PML-Randbedingungsimplementierungen wird eine den Rechenraum einhüllende Randschicht festgelegt (vgl. Abbildung 4-7). Für diese Randschicht werden eine entsprechende Dicke und ein zugehöriges Medium definiert. Der Wellenwiderstand dieses Mediums, die Impedanz, wird derart adaptiert, dass den Rechenraum verlassende Wellen in der Randschicht reflexionsfrei absorbiert werden.

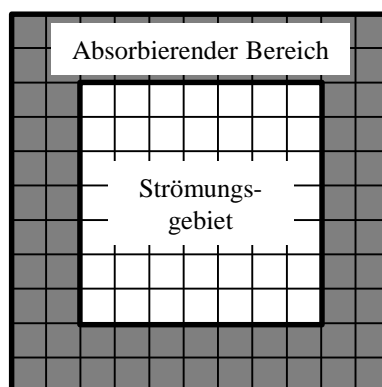


Abbildung 4-7: Implementierung von PML Randbedingungen nach [97]

Der einfallungsrichtungs- und frequenzunabhängige Ansatz wurde bereits erfolgreich auf Schallwellen, modelliert durch die linearisierten Eulergleichungen der numerischen Strömungsmechanik [102], und die Lattice-BGK Methode [97-98][103] übertragen. In der Untersuchung der Ausbreitung beliebig orientierter Wellen im zweidimensionalen Raum

wurde dabei eine maßgebliche Reduktion von reflexionsbedingten Störungen im Strömungsgebiet bei stabilem Systemverhalten beobachtet.

In dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Abwindsimulationsmodell werden die PML-Randbedingungen aufgrund ihrer allgemeingültigen Eigenschaften Tiefpassfiltern und LODI-Randbedingungen für die Abbildung der offenen Rechenraumränder vorgezogen. Im Folgenden wird der in [98] für die Implementierung einfallstrichtungsunabhängiger PML-Randbedingungen in der inkompressiblen Lattice-BGK Methode vorgestellte Ansatz erläutert. Aufgrund seiner Unabhängigkeit von räumlichen Gradienten und seiner erforderlichen Randschichtdicke von lediglich einer Gitterzelle bietet dieser Ansatz die Grundlagen für eine effiziente Implementierung und eine bestmögliche Nutzung des Rechenraums. Die zweidimensionale Formulierung des Ansatzes kann zudem unter geringem Mehraufwand auf den vorliegenden dreidimensionalen Fall der Abwindsimulation übertragen werden:

In dem in [98] beschriebenen Ansatz für die Implementierung nicht-reflektierender PML-Randbedingungen basiert die Formulierung der Impedanz  $I_b$  auf der Impulsbilanz einer als geschlossenes Kontrollvolumen CV modellierten Randschichtzelle mit der einschließenden Oberfläche  $S$ . In dieser Randschichtzelle findet genau dann eine Absorption der durch eintretende Druckwellen (engl. pressure waves, PW) verursachten Impulsänderung  $\partial J_{PW}/(\partial A \partial t)$  statt, wenn die Änderung des Impulses im Kontrollvolumen  $\partial J_{CV}/(\partial A \partial t)$  diese vollständig ausgleicht:

$$I_b := \frac{\partial J_{CV}}{\partial S \partial t} + \frac{\partial J_{PW}}{\partial S \partial t} = 0 \quad (4-71)$$

Für die isotrope Absorption von Druckwellen in einer PML Randbedingung der inkompressiblen Lattice-BGK Methode kann diese Bedingung in Abhängigkeit des vorliegenden Umgebungsdrucks (ausgedrückt durch die Dichte,  $\rho_0$ ), der Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und der zeitlichen Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit  $d\mathbf{u}$  formuliert werden (vgl. Gleichung 4-72). Die Vorzeichen der rechtsseitigen Terme der Gleichung lassen sich hierbei vom Vorzeichen der in das Strömungsgebiet gerichteten Oberflächennormalen der Randbedingungsgrenzfläche ableiten.

$$I_b := \frac{\partial J_{CV}}{\partial S \partial t} + \frac{\partial J_{PW}}{\partial S \partial t} = \mp d\rho c_s^2 \mp \frac{1}{2} \rho_0 (d\mathbf{u})^2 + d\mathbf{u} \rho_0 c_s = 0 \quad (4-72)$$

Mit Hilfe eines iterativen Verfahrens kann die oberflächennormale Komponente der lokalen Strömungsgeschwindigkeit in iterativen Schritten  $k$  derart angepasst werden, dass die Gleichung 4-72 erfüllt ist. Für eine linksseitige Randbedingungsgrenzfläche orthogonal zur x-Achse und die achsparallele Geschwindigkeitskomponente  $u$  lässt sich so unter Zuhilfenahme des Newton-Raphson-Verfahrens schreiben:

$$u_{k+1} = u_k - \frac{I_b(u_k)}{\frac{\partial I_b}{\partial u}(u_k)} \quad (4-73)$$

Die iterative Lösung der Gleichung 4-72 erfordert jedoch eine Vorabbestimmung der lokalen Dichte, der transversalen Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit und der zugehörigen Gradienten in der betreffenden Zelle des Rechengitters. Da die Verteilungsfunktionen  $f_\alpha$  der Lattice-BGK Methode am Rand des Rechenraums nicht vollständig definiert sind [92], können die unbekanntenen Strömungsgrößen nicht mit den Gleichungen 4-29 und 4-30 bestimmt werden. Stattdessen muss ein alternativer Ansatz basierend auf der Reflexionsbedingung verwendet werden [92]. Dieser Ansatz wird im Folgenden am Beispiel einer linksseitigen, zur x-Achse orthogonalen Randbedingungsgrenzfläche im  $D3Q19$ -Gitter erläutert. Eine ausführliche Erläuterung der Bestimmung der unbekanntenen Größen an den verbleibenden Seitenflächen, Ecken und Kanten des  $D3Q19$ -Gitters findet sich in [92].

Die in der Gleichung 4-72 enthaltene zeitliche Änderung der Dichte  $d\rho$  lässt sich als Differenz der Werte des betrachteten Zeitschritts  $n$  und des vorangegangenen Zeitschritts  $n-1$  der Simulation schreiben:

$$d\rho = \rho^{(n)} - \rho^{(n-1)} \quad (4-74)$$

Neben der Dichteänderung zählt auch die zeitliche Änderung der Strömungsgeschwindigkeit  $du$  zu den Parametern der Gleichung 4-72. Deren Betrag muss gemäß dem in [98] vorgestellten Ansatz auf die Oberflächennormale der Randbedingungsgrenzfläche projiziert werden [98]:

$$du = \text{sgn}(du) \|du\| = \text{sgn}(du) \sqrt{(du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2} \quad (4-75)$$

Die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten können analog zur lokalen Dichte bestimmt werden (vgl. Gleichungen 4-76). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in den weiteren Gleichungen dieses Abschnitts der Zeitschrittindex  $n$  nicht weiter aufgeführt.

$$du = u^{(n)} - u^{(n-1)} \quad dv = v^{(n)} - v^{(n-1)} \quad dw = w^{(n)} - w^{(n-1)} \quad (4-76)$$

Bei bekannter lokaler Dichte  $\rho$  lassen sich die in den Gleichungen enthaltenen Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit im aktuellen Zeitschritt bestimmen [92]:

$$u = \frac{1}{\rho} \cdot (f_1 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_{13} - (f_2 + f_8 + f_{10} + f_{12} + f_{14})) \quad (4-77)$$

$$v = \frac{1}{\rho} \cdot (f_3 + f_{11} + f_{14} + f_{15} + f_{18} - (f_4 + f_{12} + f_{13} + f_{16} + f_{17})) \quad (4-78)$$

$$w = \frac{1}{\rho} \cdot (f_5 + f_7 + f_{10} + f_{15} + f_{17} - (f_6 + f_8 + f_9 + f_{16} + f_{18})) \quad (4-79)$$

Sind die Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen wie im betrachteten Fall nicht vollständig definiert, so sind weitere Bedingungen für die Lösung der Gleichungen 4-77 bis 4-79 erforderlich. Unter Zuhilfenahme der Reflexionsbedingung können die Beträge der unbekannt, in das Strömungsgebiet gerichteten Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen am Rechenraumrand von den auswärts gerichteten Verteilungsfunktionen abgeleitet werden [92]. Die korrespondierenden Paare sind in der folgenden Abbildung für den vorliegenden Fall einer zur x-Achse orthogonalen Randbedingungsgrenzfläche illustriert:

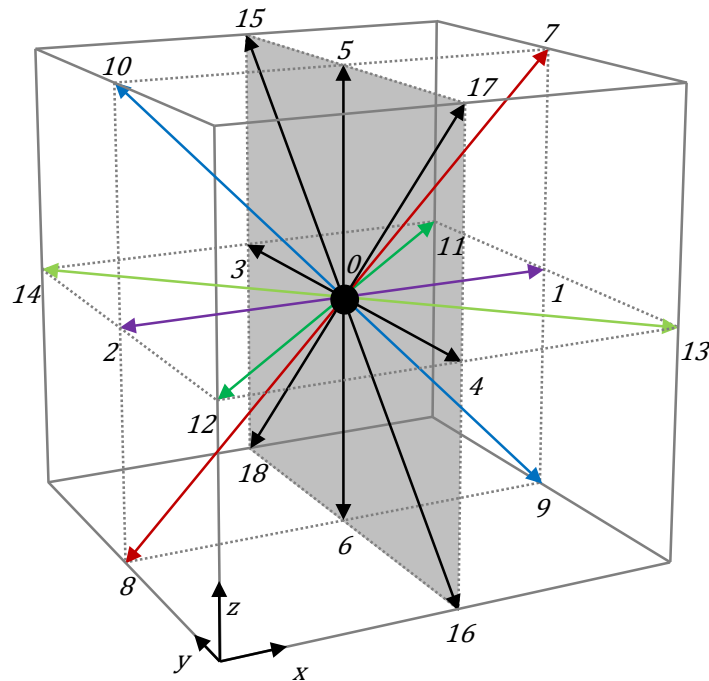


Abbildung 4-8: Reflexionsbedingung im  $D3Q19$ -Gitter

Für den betrachteten Fall der linksseitigen, zur x-Achse orthogonalen Randbedingungsgrenzfläche lässt sich so die Dichte  $\rho$  bestimmen [92]:

$$\rho = f_0 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_{15} + f_{16} + f_{17} + f_{18} + 2 \cdot (f_2 + f_8 + f_{10} + f_{12} + f_{14}) \quad (4-80)$$

Neben der Dichte müssen auch die transversalen Geschwindigkeitskomponenten und die unbekannt Verteilungsfunktionen an der Grenzfläche bestimmt werden. Die Berechnung dieser Größen erfolgt basierend auf der in [92] beschriebenen Reflexionsbedingung für die Ungleichgewichtsanteile  $f^*$  der Verteilungsfunktionen. Diese lassen sich als Differenz der Gleichgewichtszustände und der Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen schreiben:

$$f_\alpha^* = f_\alpha - f_\alpha^{eq} \quad (4-81)$$

Analog zur Reflexionsbedingung für Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen können auch deren entgegengesetzt orientierte Nichtgleichgewichts-Anteile an den Grenzen des Rechenraums gleichgesetzt werden [92]. Für den vorliegenden Fall gilt so

$$f_\alpha^* = f_\alpha - f_\alpha^{eq} = f_{\alpha+1} - f_{\alpha+1}^{eq} = f_{\alpha+1}^* \quad \alpha = 1,7,9,11,13 \quad (4-82)$$

Diese Abhängigkeit erlaubt unter Einbeziehung der Gleichgewichtszustände der Lattice-BGK Methode (vgl. Gleichung 4-35) und den Bedingungen  $\mathbf{e}_{\alpha+1} = -\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\|\mathbf{e}_{\alpha+1}\| = \|\mathbf{e}_\alpha\|$  die Bestimmung der unbekanntenen Verteilungsfunktionen. Auf diese Weise wird die unbekanntene Verteilungsfunktion  $f_1$  berechnet zu

$$f_1 = f_2 - f_2^{eq} + f_1^{eq} = f_2 + \frac{2t_p}{c_s^2} \rho u = f_2 + \frac{1}{3} \rho u \quad (4-83)$$

Analog lassen sich mit Hilfe der Reflexionsbedingung die verbleibenden unbekanntenen Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen ermitteln:

$$\begin{aligned} f_7 &= f_8 + \frac{1}{6} \rho (u + w) \\ f_9 &= f_{10} + \frac{1}{6} \rho (u - w) \\ f_{11} &= f_{12} + \frac{1}{6} \rho (u + v) \\ f_{13} &= f_{14} + \frac{1}{6} \rho (u - v) \end{aligned} \quad (4-84)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen in die Gleichungen 4-78 und 4-79 können die transversalen Geschwindigkeitskomponenten für den betrachteten Fall berechnet werden:

$$\begin{aligned} v &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\rho} (f_3 + f_{15} + f_{18} - (f_4 + f_{16} + f_{17})) \\ w &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\rho} (f_5 + f_{15} + f_{17} - (f_6 + f_{16} + f_{18})) \end{aligned} \quad (4-85)$$

Damit sind alle Unbekannten für die iterative Bestimmung der orthogonalen Komponente der Geschwindigkeit gemäß der Gleichung 4-73 definiert. Eine Startlösung für das iterative Verfahren wird mit Hilfe einer Vereinfachung der Impedanzbeziehung (vgl. Gleichung 4-72) und deren Auflösung nach der gesuchten Geschwindigkeitskomponente bestimmt [98]:

$$u_{k=0}^{(n)} = u^{(n-1)} - (c_s^2 + c_s) + \sqrt{(c_s^2 + c_s)^2 + 2c_s^2 \left( \frac{\rho^{(n-1)}}{\rho_0} - u^{(n-1)} - \frac{\rho}{\rho_0} \right)} \quad (4-86)$$

Mit Hilfe der iterativ bestimmten orthogonalen Geschwindigkeitskomponente sind abschließend die unbekanntenen Verteilungsfunktionen festzulegen (vgl. Gleichungen 4-84), um die Implementierung einer nicht-reflektierenden PML-Randbedingung zur Eingrenzung des Rechenraums der Abwindsimulation abzuschließen.



## 5 Implementierung

Das in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellte Abwindsimulationsmodell wurde in der objektorientierten Programmiersprache C++ implementiert. Der Funktionsumfang der Programmiersprache wurde für die dreidimensionale Darstellung von Luftfahrzeugen, Terrain und Objekten und die Erfassung von Strömungshindernissen (vgl. Kapitel 3.1) durch die Open-Source Bibliothek OpenSceneGraph [104] ergänzt.

Um den Rechenzeitbedarf des Modells zur Simulationslaufzeit zu minimieren, wurde der Funktionsumfang von C++ zudem mit Hilfe von Bibliotheken ergänzt, die eine Parallelisierung des Programmcodes ermöglichen. Die Open-Source Bibliothek OpenThreads [105] wurde für die parallelisierte Randbedingungserfassung auf Mehrkernprozessoren (engl. central processing units, CPUs) eingesetzt. Die Parallelisierung der Strömungssimulation erfolgt mit Hilfe der Bibliothek NVIDIA CUDA (Compute Unified Device Architecture) [106] auf Grafikprozessoren (engl. graphics processing units, GPUs).

Die folgenden Abschnitte gewähren einen Einblick in den Aufbau der parallelisierten Implementierung des Abwindsimulationsmodells. Hierzu wird zunächst der zeitliche Ablauf der Simulation in Phasen und Teilprozesse untergliedert. Anschließend erfolgt eine detaillierte Beschreibung der Implementierung der Randbedingungserfassung und der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells.

### 5.1 Abwindsimulationsmodell

Die Teilprozesse des Abwindsimulationsmodells sind einem von zwei zeitlichen Abschnitten der Simulation zugeordnet, der zu Beginn der Simulation erfolgenden Initialisierungsphase oder der darauf folgenden Laufzeitphase (vgl. Abbildung 5-1).

Während der **Initialisierung** des Modells werden grundlegende Simulationsparameter, wie beispielsweise relevante technische Daten des betrachteten Luftfahrzeugs, gesetzt. Außerdem werden in dieser Phase die Abmessungen des Rechenraums, relevante Koordinatensysteme und die Auflösung des für die Simulation verwendeten Rechengitters festgelegt. Ebenso erfolgt während der Initialisierung die **Diskretisierung des Rechenraums** (vgl. Kapitel 2). Sind diese beiden Vorgänge abgeschlossen, so werden zeitinvariante **Teilprozesse der Randbedingungserfassung** vorberechnet (vgl. Kapitel 3) und das Strömungsfeld initialisiert.

In den auf die Initialisierungsphase folgenden Simulationszeitschritten werden zunächst **variable Parameter** des Abwindsimulationsmodells aktualisiert. Zu diesen zählen neben globalen Simulationsparametern auch die Ausgangsgrößen des Flugphysikmodells (Lage, Orientierung und Rotorschubverteilung des betrachteten Luftfahrzeugs) und in der Gelände-

und Objektdatenbank der Simulationsumgebung gespeicherte Geometriedaten (vgl. Kapitel 1.1).

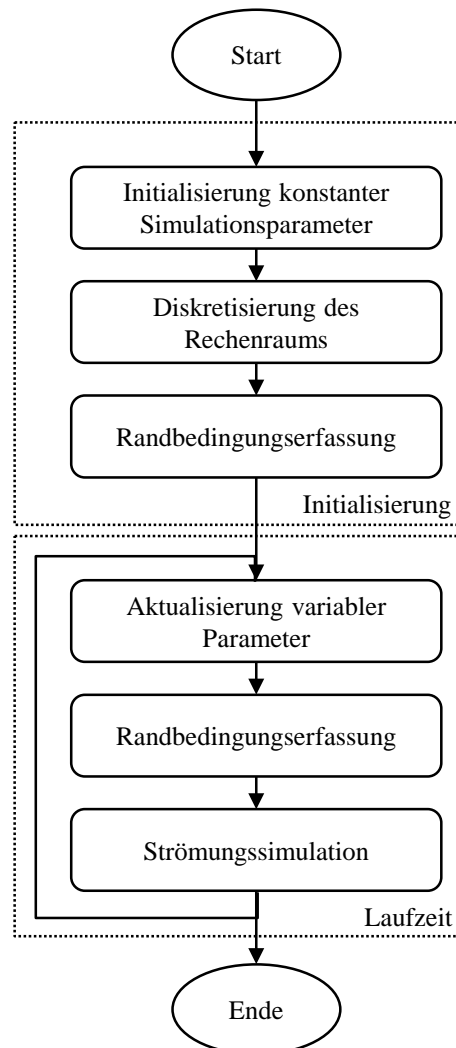


Abbildung 5-1: Implementierung des Abwindsimulationsmodells nach [14]

Nach der Aktualisierung der variablen Parameter des Simulationsmodells werden in jedem Simulationszeitschritt **zeitlich veränderliche Randbedingungen** der Abwindsimulation erfasst (vgl. Kapitel 3). Hierzu zählen neben Strömungshindernissen auch die Flugbewegung und die Rotor aerodynamik des betrachteten Luftfahrzeugs.

Mit den Ergebnissen der Randbedingungserfassung erfolgt in jedem Simulationszeitschritt ein Zeitschritt der **Strömungssimulation** des Abwindsimulationsmodells (vgl. Kapitel 4). Deren Eingangsgrößen bilden die Ergebnisse der Randbedingungserfassung. Ausgangsgrößen der Strömungssimulation sind diskrete Strömungsgeschwindigkeiten, die für Visualisierungszwecke genutzt oder für weitere Anwendungen aufbereitet werden (vgl. Kapitel 1.1).

Die genannten Prozesse werden in jedem Zeitschritt der Simulation erneut ausgeführt. Um den in der Zielsetzung dieser Arbeit formulierten Echtzeitanpruch (vgl. Kapitel 1.1) zu erfüllen, werden die Simulationszeitschritte der Abwindsimulation im Takt der durch die Simulationsumgebung vorgegebenen Bildwiederholfrequenz  $f_P$  angestoßen.



## 5.2 Randbedingungserfassung

Die Erfassung von aus Strömungshindernissen und der Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs resultierenden Randbedingungen unter gleichzeitiger Beachtung des in der Zielsetzung dieser Arbeit formulierten Echtzeitanspruchs stellt besondere Anforderungen an die Implementierung.

Der für den Abschluss eines Simulationszeitschritts erforderliche Rechenaufwand ist weitestmöglich zu minimieren. Daher werden zeitinvariante Prozesse der Randbedingungserfassung, wie die **Berechnung von normierten Drehrateneinflüssen** aus der Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs (vgl. Kapitel 3.3) und die **Erfassung von dessen Rumpfgeometrie** als Strömungshindernis (vgl. Kapitel 3.1), bereits in der Initialisierungsphase der Simulation durchgeführt:

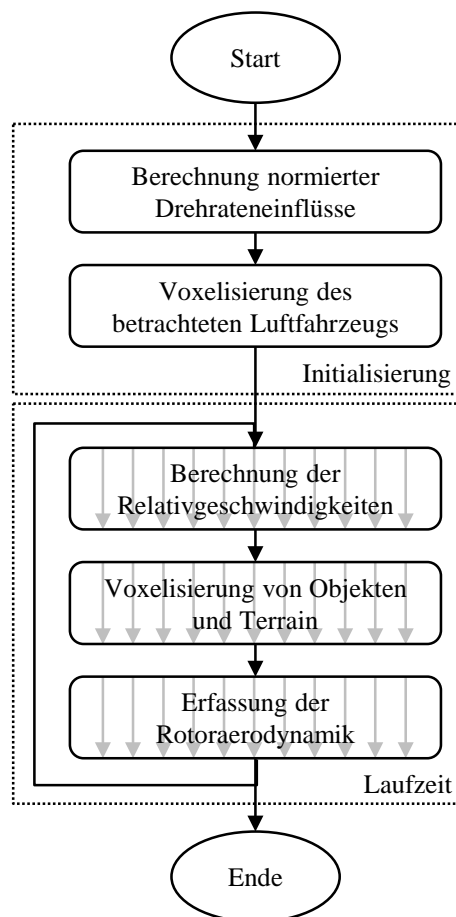


Abbildung 5-2: Implementierung der Randbedingungserfassung nach [14]

Zeitlich veränderliche Randbedingungen wie die zellspezifische, aus der Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende **Relativgeschwindigkeit** (vgl. Kapitel 3.3) oder aus Objekten und dem Terrain resultierende **Strömungshindernisse** (vgl. Kapitel 3.1) müssen in jedem Simulationszeitschritt aktualisiert werden. Ebenso sind aus der **Rotoraerodynamik** des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende Randbedingungen zu diesem Zeitpunkt zu erfassen (vgl. Kapitel 3.2).

Um den Rechenzeitaufwand der zur Simulationslaufzeit ablaufenden Prozesse der Randbedingungserfassung weiter zu reduzieren, werden diese Aufgaben in parallelen Ausführungssträngen (engl. threads) implementiert. Sie werden parallelisiert auf der Mehrkern-CPU des verwendeten Simulationsrechners abgearbeitet.

Für die parallelisierte Implementierung der Prozesse wird auf die Programmierbibliothek OpenThreads zurückgegriffen. Die Bibliothek bietet alle erforderlichen Funktionen für die Bereitstellung, die Aktualisierung und die Synchronisierung einer beliebigen Zahl von CPU-Threads. Der Umfang und die Ausgestaltung dieser Funktionalitäten werden an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt. Stattdessen wird für ein vertieftes Verständnis der Bibliothek OpenThreads auf die zugehörige Projekt-Webseite [105] verwiesen.

### 5.3 Strömungssimulation

Die große Zahl an lokalen Berechnungsaufgaben und die nicht-iterative Struktur einer auf der Lattice-Boltzmann Methode basierenden Strömungssimulation prädestinieren diese für eine parallelisierte Implementierung.

Da in einer auf der Lattice-Boltzmann Methode basierenden Strömungssimulation die Zahl der erforderlichen arithmetischen Operationen jene der Speicheroperationen um ein Vielfaches übersteigt, können schnelle Zwischenspeicher und effiziente Speicherverwaltungsmechanismen, wie sie in Mehrkern-CPU's implementiert sind, nur bedingt zur Beschleunigung der Problemlösung beitragen [106]. Stattdessen kann die für den Speicherzugriff erforderliche Zeit durch die Parallelisierung des Problems mit einer möglichst großen Anzahl an Rechenkernen kompensiert werden. Hierfür bieten sich GPUs, die über tausende, Multithreading-fähige Koprozessoren verfügen, an:

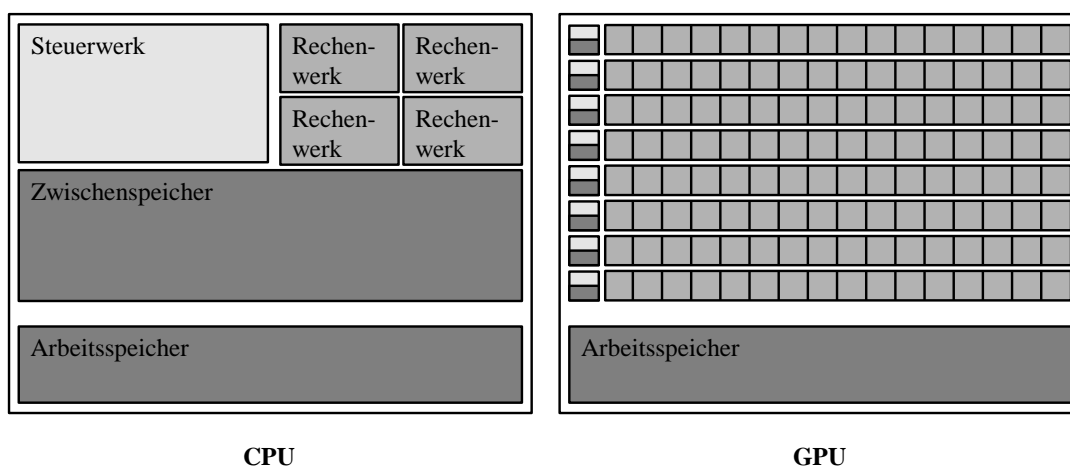


Abbildung 5-3: Datenverarbeitung auf CPUs und GPUs [106]

Mit der Programmierbibliothek CUDA erschloss der Hersteller NVIDIA im Jahr 2006 die Nutzung der Hardwarearchitektur der firmeneigenen GPUs für die parallelisierte Lösung von

Berechnungsaufgaben [106]. Neben NVIDIA CUDA existieren weitere, herstellerunabhängige Bibliotheken, die die Nutzung von GPUs für die parallelisierte Lösung derartiger Problemstellungen erlauben. Zu deren bekanntesten Vertretern zählt die Bibliothek OpenCL [107]. In Leistungsvergleichen konnten OpenCL-Implementierungen aufgrund mangelnder hardwarespezifischer Optimierung jedoch nicht die Ergebnisse von CUDA-Implementierungen erreichen [108]. Aus diesem Grund wurde für die Implementierung der Strömungssimulation des vorliegenden Abwindsimulationsmodells NVIDIA CUDA gewählt.

Diese Bibliothek erlaubt die parallele Ausführung tausender GPU-Threads. Hierfür werden selbige in ein- bis dreidimensionalen Blöcken zusammengefasst. Thread-Blöcke wiederum werden in ein- bis dreidimensionalen Gittern organisiert (vgl. Abbildung 5-4). Während die Anzahl der zu einem Block zusammenfassbaren Threads je nach verwendeter GPU auf 256 oder 1024 beschränkt ist, kann die Gesamtanzahl der in einem Gitter verwendeten Threads entsprechend der zu bearbeitenden Problemstellung gewählt werden [106].

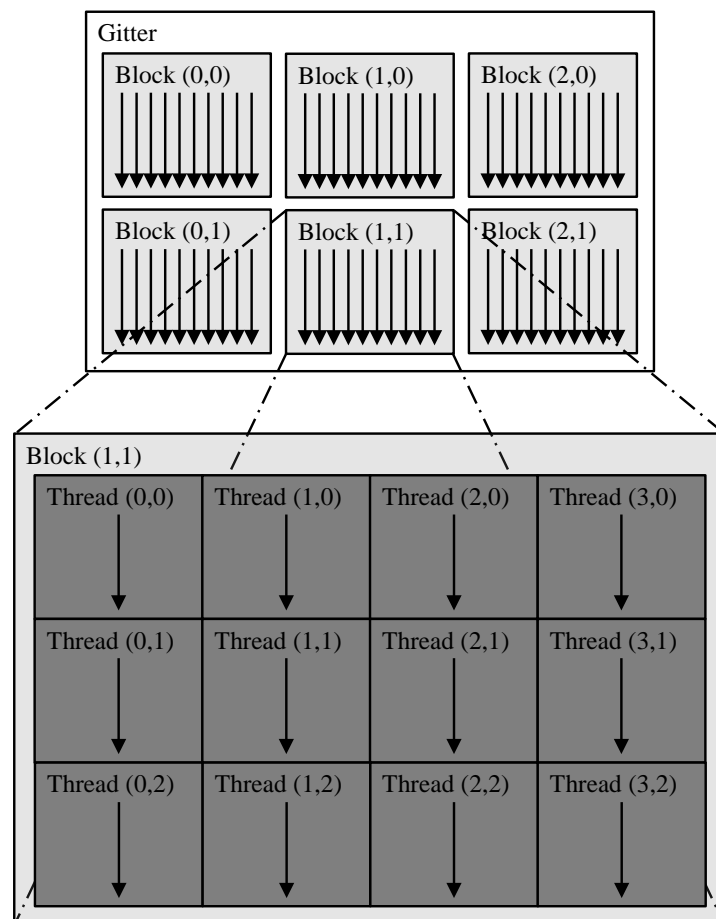


Abbildung 5-4: Organisation von GPU-Threads in NVIDIA CUDA [106]

Eng mit der Organisation der GPU-Threads verknüpft ist die der Bibliothek NVIDIA CUDA zugrundeliegende Speicherverwaltung [106]. So verfügt jeder Thread über einen dedizierten Speicherbereich. Außerdem ist jedem Block ein Speicherbereich zugeordnet, den zugehörige Threads gemeinsam nutzen können. Weiterhin existieren ein globaler, von allen Threads des Gitters nutzbarer Speicher, sowie der konstante Speicher und der Texturspeicher des Grafikprozessors. Letzterer wird von der GPU zwischengespeichert. Dies trägt insbesondere bei

räumlich zusammenhängenden Speicherzugriffen zur Reduktion zeitintensiver Speicheroperationen und damit zur Minimierung des erforderlichen Rechenzeitaufwands einer Anwendung bei [106]. Aus diesem Grund wurde der Texturspeicher der GPU für die Implementierung der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells verwendet. Um die dreidimensionale Problemstellung der Abwindsimulation auf zweidimensionale Texturen zu übertragen und zugleich die räumliche Kohärenz von Speicherzugriffen zu gewährleisten, wurde hierbei auf flache 3D Texturen zurückgegriffen [14][44][79][81]. Das dreidimensionale Rechengitter des Abwindsimulationsmodells wird entlang der z-Achse des Rotorkoordinatensystems in Schichten der Stärke einer Gitterzelle unterteilt. Größen dieser Schichten werden nebeneinanderliegend in zweidimensionalen Texturen gespeichert und mit Hilfe zweier Texturkoordinaten  $u$  und  $v$  adressiert:

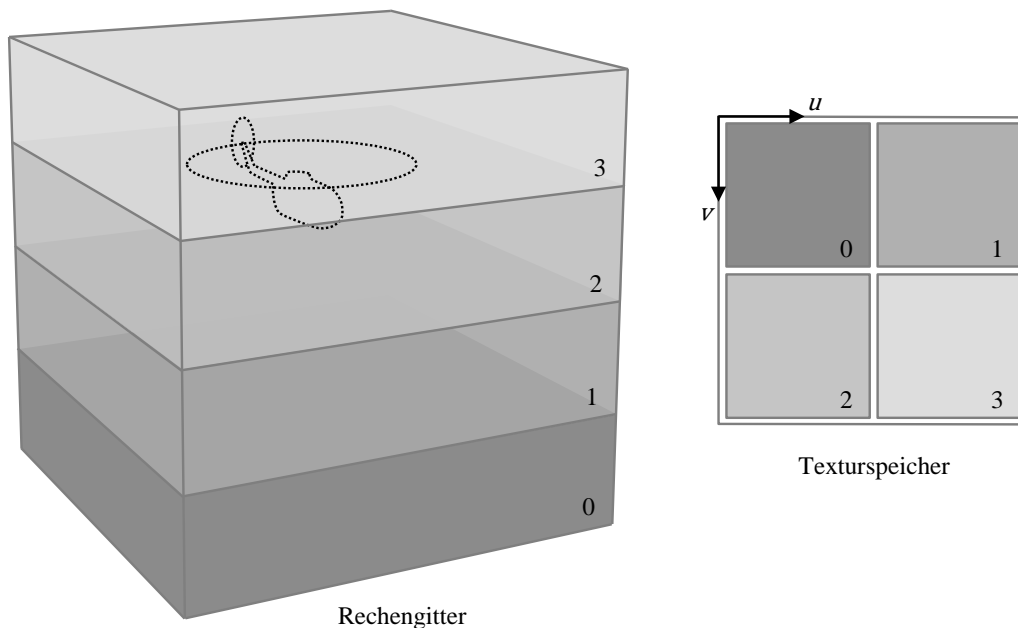


Abbildung 5-5: Flache 3D Texturen nach [14]

Ein weiteres in der Implementierung der Strömungssimulation angewandtes Konzept bildet die effiziente Speicherung skalarer Größen im Texturspeicher [14][44][79]. In der Strömungssimulation werden die vier skalaren Speicherkanäle, die gewöhnlich der Abbildung der Farbwerte Rot, Grün und Blau und eines Opazitätswertes dienen, für die Speicherung der makroskopischen Strömungsgrößen und der diskreten Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen der Lattice-BGK Methode (vgl. Kapitel 4.2) genutzt. Auf diese Weise werden im Propagationsschritt der Methode mit zwei Speicheroperation bis zu vier Werte geladen oder gespeichert. Weiterhin werden entgegengesetzt orientierte Verteilungsfunktionen stets in einer gemeinsamen Textur gespeichert. Dieses Vorgehen ermöglicht eine Reduktion von Speicherzugriffen in reflexionsbasierten Randbedingungsimplementierungen (vgl. Kapitel 4.3 und 4.6).

Bei der Implementierung von auf der Bibliothek NVIDIA CUDA basierenden Anwendungen müssen Rechengrößen zwischen dem CPU- und dem GPU-Speicher ausgetauscht werden. Im Fall der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells müssen so nach der Initialisierung der **makroskopischen Strömungsgrößen** und der **diskreten Verteilungsfunktionen**

der Lattice-BGK Methode in jedem Simulationszeitschritt zunächst die Ergebnisse der Randbedingungserfassung **in den GPU-Texturspeicher übertragen** werden:

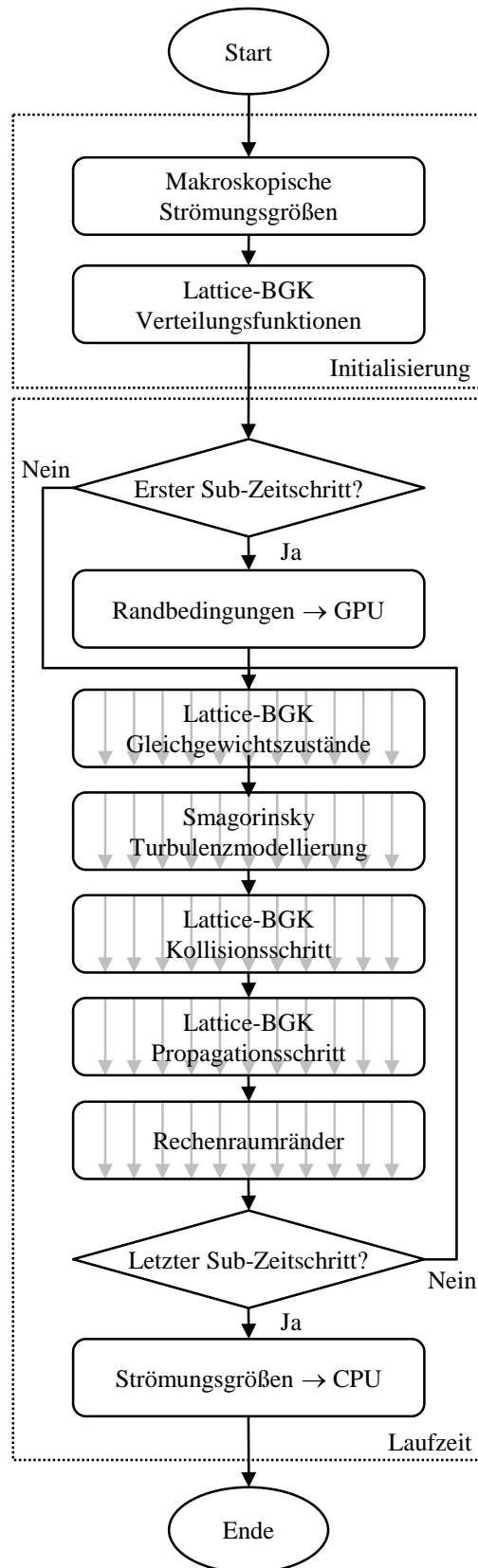


Abbildung 5-6: Implementierung der Strömungssimulation nach [14]

Wie aus Abbildung 5-6 hervorgeht, wurde bei der Implementierung der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells eine Unterteilung der Simulationszeitschritte in Sub-Zeitschritte vorgenommen. Die Speicherübertragung findet im jeweils ersten Sub-Zeitschritt jedes Simulationszeitschritts statt. Mit der Einführung der Sub-Zeitschritte wird gewährleistet, dass die lokale Strömungsgeschwindigkeit die isotherme Schallgeschwindigkeit der Lattice-BGK Methode nicht übersteigt [14][44]. Da die Randbedingungserfassung des Abwindsimulationsmodells nicht von dieser Unterteilung betroffen ist, genügt es, deren Ergebnisse im jeweils ersten Sub-Zeitschritt zu aktualisieren.

Nach der Übertragung der Randbedingungsinformationen werden die Berechnungen der Strömungssimulation in Threads auf der GPU abgearbeitet. Zunächst werden die **Gleichgewichtszustände** der Lattice-BGK Methode (vgl. Formel 4-35) unter Berücksichtigung der vorliegenden Randbedingungen durch Strömungshindernisse und die Rotor aerodynamik des betrachteten Luftfahrzeugs ermittelt (vgl. Kapitel 4.3 und 4.4). Liegt eine aus der Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende Relativgeschwindigkeit des Rechenraums vor, so ist eine Interpolation der Eingangswerte der Gleichungen erforderlich (vgl. Kapitel 4.5)

Anschließend wird die Relaxationszeit des **Smagorinsky Turbulenzmodells** bestimmt (vgl. Formel 4-49), auf deren Basis die diskreten Post-Kollisions-Verteilungsfunktionen berechnet werden können. In diesem **Kollisionsschritt** (vgl. Formel 4-46) muss analog zur Berechnung der Gleichgewichtsfunktionen der Einfluss der Rotoren des betrachteten Luftfahrzeugs berücksichtigt werden (vgl. Kapitel 4.4). Ebenso ist bei einer vorliegenden Flugbewegung eine Interpolation der Eingangsgrößen erforderlich (vgl. Kapitel 4.5)

Auf den Kollisionsschritt der Lattice-BGK Methode folgt der **Propagationsschritt** (vgl. Formel 4-46), der Transport der diskreten Verteilungsfunktionen in die benachbarten Rechengitterzellen. In der Strömungssimulation des Abwindsimulationsmodells wird dieser Schritt gefolgt von der Abbildung des Einflusses der **Rechenraumränder** auf das Strömungsfeld (vgl. Kapitel 4.6).

Ist der letzte Sub-Zeitschritt eines Simulationszeitschritts abgeschlossen, so werden die makroskopischen Größen des Strömungsfeldes **vom GPU-Texturspeicher in den CPU-Speicher übertragen**. Sie stehen dann für Visualisierungszwecke oder eine nachgelagerte Post-Prozessierung zur Verfügung.

## 6 Verifikation

Die Verifikation des Modellverhaltens der Abwindsimulation erfolgt für ausgewählte Flugzustände durch einen Vergleich der Rechenergebnisse mit den Ergebnissen etablierter Modelle. Zudem wird das Zeitverhalten des Modells für verschiedene Rechengitterauflösungen in Abhängigkeit des Parallelisierungsgrads der Implementierung (vgl. Kapitel 5) untersucht. Anhand der gewonnenen Erkenntnisse wird die in der Zielsetzung der Arbeit (vgl. Kapitel 1.1) geforderte Erfüllung des Echtzeitanspruchs bewertet.

Die Untersuchung des Modellverhaltens erfolgt am Beispiel zweier konventioneller Hubschrauber und eines Kipprotor-Flugzeugs. Aus Gründen der Verfügbarkeit von technischen Daten und Messdaten aus Flugversuchen wurden für die folgenden Vergleiche der Hubschrauber Sikorsky CH-53E (vgl. Abbildung 6-1), das experimentelle Kipprotor-Flugzeug Bell XV-15 (vgl. Abbildung 6-2) und der Hubschrauber Sikorsky SH-60B (vgl. Abbildung 6-3) gewählt.

Eingangsgrößen der in den Untersuchungen herangezogenen Referenzmodelle bilden die Rotorkenngrößen der betrachteten Luftfahrzeuge. Die Ermittlung des über die Rotorscheibe(n) konstant angenommenen Schubbedarfs  $T$  erfordert weiterhin die Kenntnis des jeweiligen Abfluggewichts (engl. take off weight,  $TOW$ ) der Luftfahrzeuge. Diese Daten sind in der folgenden Übersicht zusammengefasst:

Größe	Sikorsky CH-53E [109]	Bell XV-15 [110]	Sikorsky SH-60B [109]
Hauptrotor-Radius $R$ [m]	12,040	3,810	8,178
Rotor-Drehgeschwindigkeit $\Omega$ [1/s]	18,532	48,000	27,022
Abfluggewicht $TOW$ [kg]	31751,466 [17]	5658,565 [17]	9094,527 [17]

Tabelle 6-1: Technische Daten Sikorsky CH-53E, Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B

Neben den technischen Daten sind die atmosphärischen Umgebungsbedingungen der nachgebildeten Flugzustände festzulegen. Für die folgenden Untersuchungen wird eine Umgebung trockener Luft der Temperatur  $15^\circ$  Celsius ( $288,15K$ ) gemäß der internationalen Standardatmosphäre ISA auf mittlerer Meereshöhe (engl. mean sea level, MSL) angenommen:

Größe	Wert
Druck $p$ [hPa]	1013,25
Dichte $\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1,225
Temperatur $T_0$ [K]	288,15
Gravitation $g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9,80665
Kinematische Viskosität $\nu$ [m <sup>2</sup> /s]	$14,6072 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 6-2: Parameter der Standardatmosphäre ISA (MSL) [46]

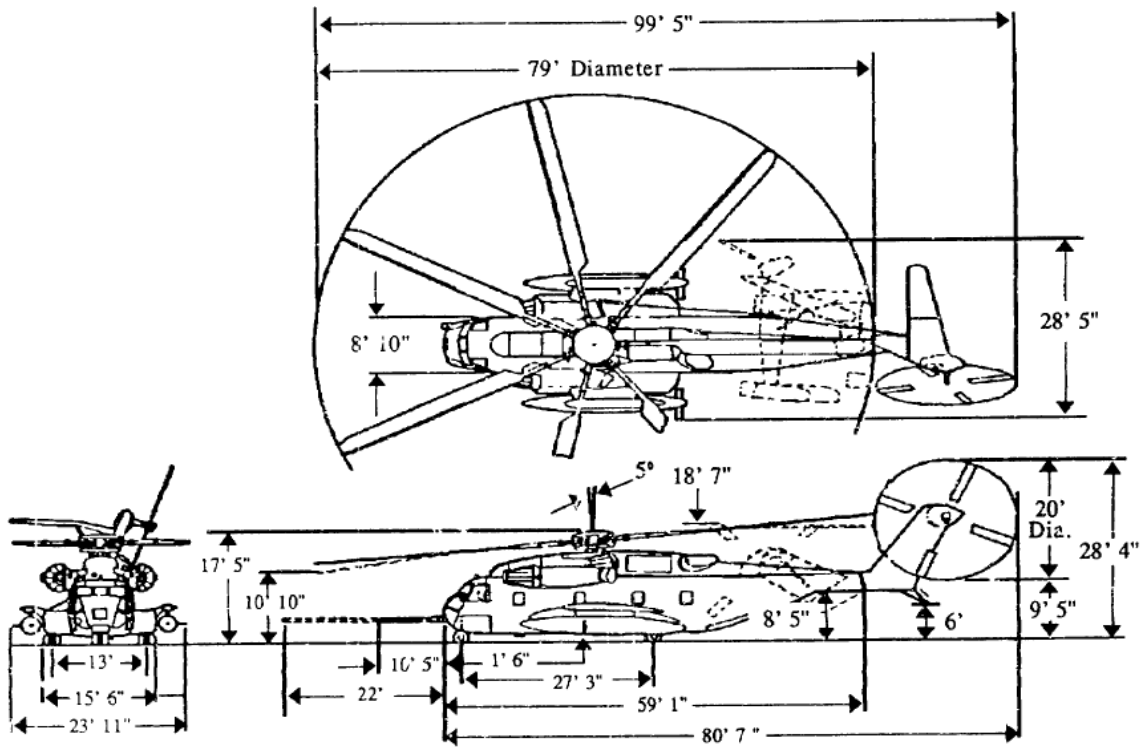


Abbildung 6-1: Sikorsky CH-53E [17]

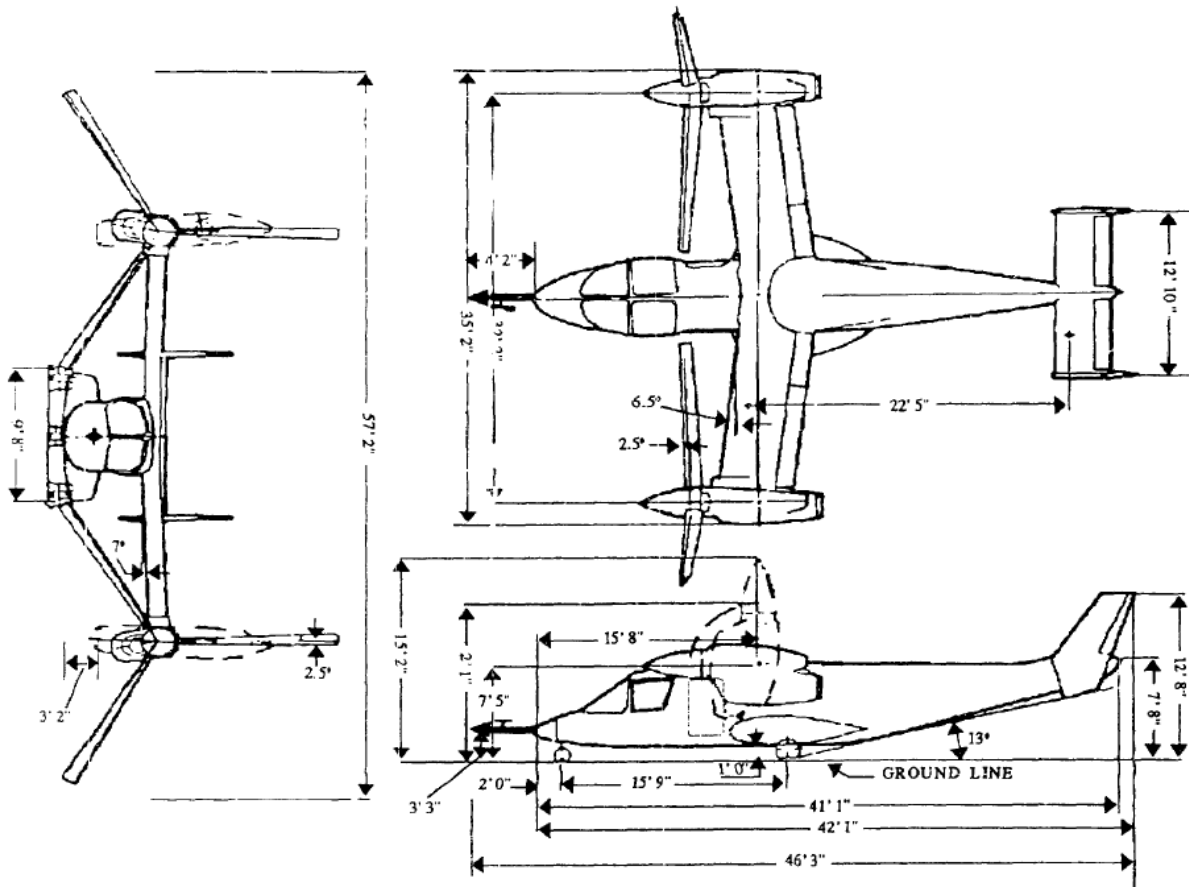


Abbildung 6-2: Bell XV-15 [17]



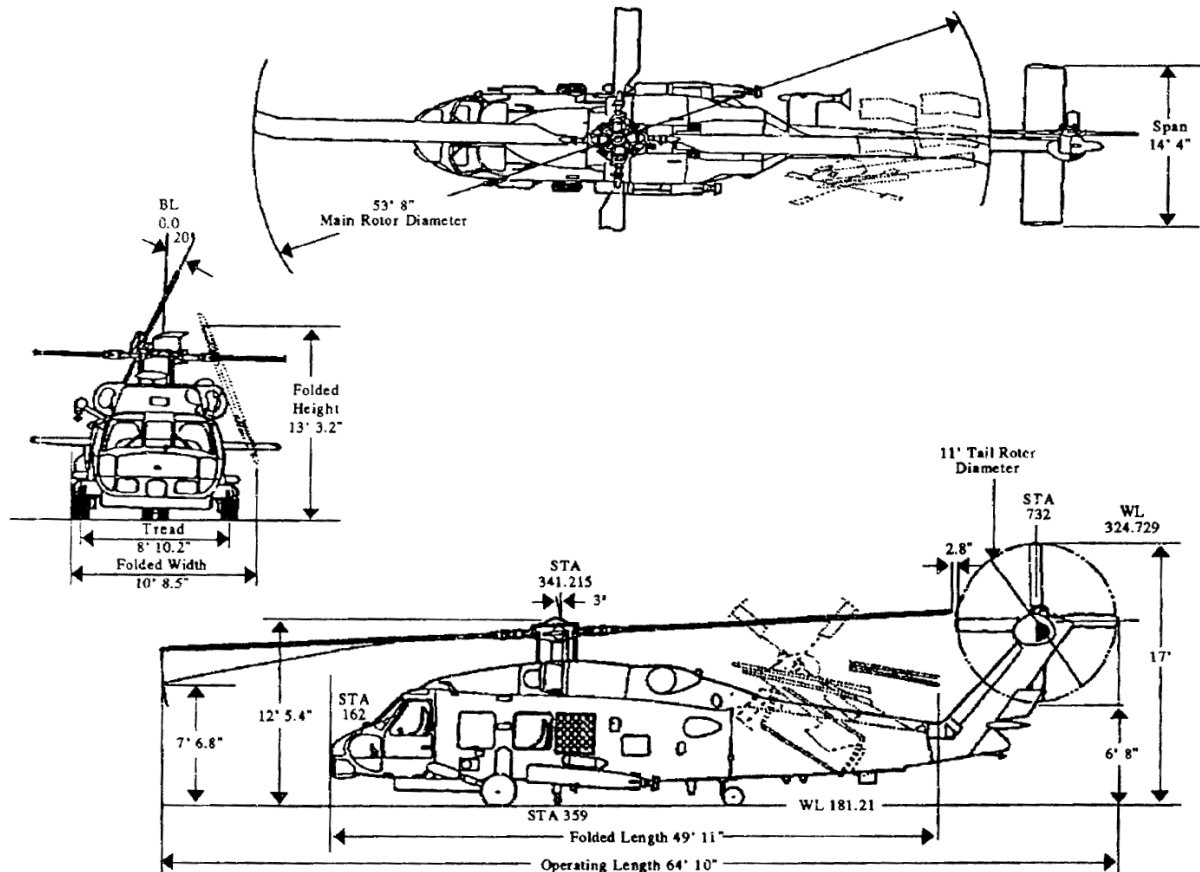


Abbildung 6-3: Sikorsky SH-60B [17]

In der in Tabelle 6-2 beschriebenen Umgebung wird in den folgenden Unterkapiteln das Modellverhalten des entwickelten Abwindsimulationsmodells am Beispiel der drei vorgestellten Luftfahrzeuge verifiziert. Für die Untersuchungen wird der Einfluss von Strömungshindernissen oder eines Heckrotors, sofern vorhanden, nicht berücksichtigt, da dieser von den verwendeten Referenzmodellen nicht abgebildet werden kann. Ebenso wird bei Kipprotor-Flugzeugen nur ein alleinstehender Rotor betrachtet, analog zur Modellierungsgüte der Referenzmodelle.

## 6.1 Schwebeflug

Im Folgenden soll das Abwindsimulationsmodell hinsichtlich seiner Eignung für die Abbildung des Schwebeflugs von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen untersucht werden. Hierfür wird der für den Schwebeflug charakteristische Zuwachs der induzierten Strömungsgeschwindigkeit im Rotorabwind und die damit einhergehende Einschnürung des Abwindstrahls anhand der energiebasierten Strahltheorie [35] überprüft.

Der Abwind eines freistehenden, schwebenden Rotors mit Radius  $R$  wird in der Strahltheorie als axialsymmetrischer, zur Rotorebene orthogonaler Strahl beschrieben (vgl. Abbildung 6-4). Die Modellierung des Strahls erfolgt stationär, inkompressibel und reibungsfrei. Durch die

Annahme konstanter Verhältnisse in rotorparallelen Ebenen erfolgt die Betrachtung des Strömungsverlaufs eindimensional. Das in Abbildung 6-4 durch die Ebene  $0$  einströmende Fluid wird durch die Erzeugung des Schubs  $T$  im Rotor beschleunigt. Die induzierte axiale Strömungsgeschwindigkeit  $w$  hat in der Rotorebene den Wert  $v_i$ . Nach dem Verlassen der Ebene wächst die Geschwindigkeit kontinuierlich an, bis sie im ausgeprägten Strahl in der Ebene  $\infty$  ihren Maximalwert  $v_{i\infty}$  erreicht. Mit dem Anwachsen der Strömungsgeschwindigkeit verjüngt sich der Abwindstrahl von der Rotorebene bis zu diesem Punkt, in dem der Strahlradius den Wert  $R_\infty$  einnimmt.

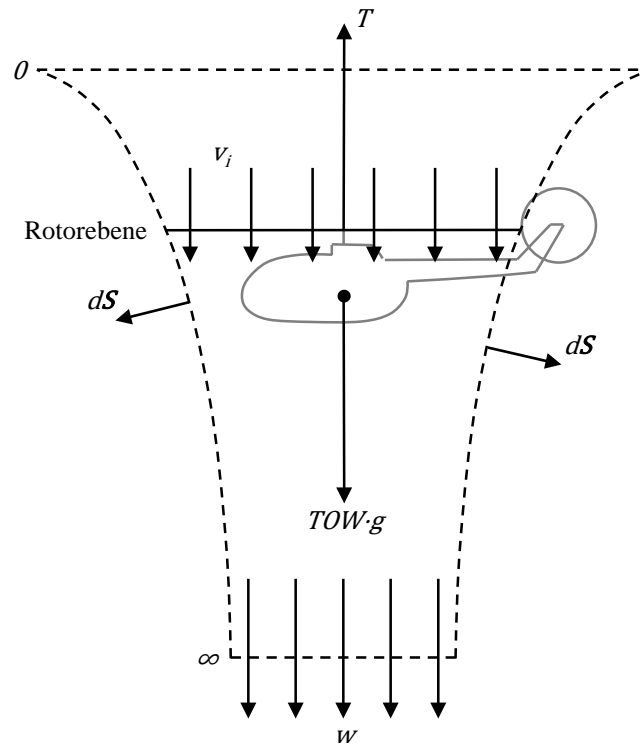


Abbildung 6-4: Schwebeflugmodellierung in der Strahltheorie nach [35]

Die in der Darstellung abgebildete Stromröhre mit der Oberfläche  $S$  und deren flächennormierten Normalenvektor  $d\mathbf{S}$  bildet das Kontrollvolumen der strahltheoretischen Betrachtung des Schwebeflugs, für das die Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik aufgestellt werden [35]. So wird der zugehörige Massenstrom  $\dot{m}$  geschrieben zu

$$\dot{m} = \oiint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6-1)$$

Diese Gleichung, die auch als allgemeine Massenerhaltung bekannt ist, kann aufgrund der Annahme der Inkompressibilität und der stationären, eindimensionalen Betrachtung in der Strahltheorie deutlich vereinfacht werden. Für die Rotorebene und die Ebene  $\infty$  wird die Massenerhaltung wie folgt formuliert [35]:

$$\dot{m} = \rho R^2 \pi v_i = \rho R_\infty^2 \pi v_{i\infty} \quad (6-2)$$

Auch die Impulserhaltung der Strömungsmechanik wird unter Berücksichtigung äußerer Kräfte für das vorliegende Kontrollvolumen in ihrer allgemeinen Form aufgestellt:

$$\mathbf{F} = \iint_S p d\mathbf{S} + \iint_S (\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{u} \quad (6-3)$$

Für die eindimensionale Schuberzeugung wird diese Gleichung unter Annahme einer ungestörten Strömung stromaufwärts des Rotors ebenso vereinfacht wie die Massenerhaltung [35]:

$$T = \rho R_\infty^2 \pi v_{i\infty}^2 - \rho R^2 \pi v_{i0}^2 \stackrel{v_{i0}=0}{=} \rho R_\infty^2 \pi v_{i\infty}^2 = \dot{m} v_{i\infty} \quad (6-4)$$

Die dritte Erhaltungsgleichung der Strömungsmechanik, die Energieerhaltung, schreibt sich für das betrachtete Kontrollvolumen zu

$$W = \iint_S \frac{1}{2} (\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{u}^2 \quad (6-5)$$

Der in der Gleichung enthaltene Energieterm  $W$  wird in der Strahltheorie der eingebrachten idealen Rotorleistung  $P$  gleichgesetzt [35]:

$$P = T v_i = \frac{\rho}{2} R_\infty^2 \pi v_{i\infty}^3 - \frac{\rho}{2} R^2 \pi v_{i0}^3 \stackrel{v_{i0}=0}{=} \frac{\rho}{2} R_\infty^2 \pi v_{i\infty}^3 = \frac{1}{2} \dot{m} v_{i\infty}^2 \quad (6-6)$$

Durch Einsetzen der Gleichung 6-4 in die Gleichung 6-6 wird eine Beziehung zwischen den induzierten Geschwindigkeiten in der Rotorebene und im ausgeprägten Strahl hergestellt:

$$v_{i\infty} = 2v_i \quad (6-7)$$

Eingesetzt in die Massenerhaltung der Strahltheorie (vgl. Gleichung 6-2) ermöglicht diese Beziehung eine Aussage bezüglich der aus der Beschleunigung der Luftmassen resultierenden Strahleinschnürung [35]:

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (6-8)$$

Der in den Gleichungen 6-4 und 6-6 auftretende, ideale Schubwert  $T$  wird für den Schwebeflug in Abhängigkeit des Abfluggewichts des betrachteten Luftfahrzeugs  $TOW$  und der vorliegenden Gravitationsbeschleunigung bestimmt. Eine gegenseitige Beeinflussung der Rotoren wird hierbei nicht berücksichtigt:

$$T = \begin{cases} TOW \cdot g & \text{Hubschrauber in Haupt-/Heckrotorkonfiguration} \\ 0,5 \cdot TOW \cdot g & \text{Luftfahrzeuge mit zwei tragenden Rotoren} \end{cases} \quad (6-9)$$

Dies erlaubt unter Zuhilfenahme der Gleichungen 6-4, 6-7 und 6-8 die analytische Berechnung der induzierten Geschwindigkeit in der Rotorebene des beschriebenen Schwebeflugsfalls [35]:

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho R^2 \pi}} = \sqrt{\frac{TOW \cdot g}{2\rho R^2 \pi}} \quad (6-10)$$

Den mit Hilfe der Strahltheorie berechneten Abwindgeschwindigkeiten und der zugehörigen Strahleinschnürung werden im Folgenden die Ergebnisse der Abwindsimulation in der Modellierung der drei in Tabelle 6-1 aufgeführten Luftfahrzeuge im Schwebeflug gegenübergestellt. Um Abhängigkeiten zwischen dem Simulationsverhalten, der Smagorinsky Konstante  $C$  und der gewählten Gitterauflösung  $N$  bewerten zu können, werden die beiden Parameter im Wertebereich  $[0,06;...;0,165]$  und  $[16;32;64;128]$  variiert.

Die beiden Abbildungen 6-5 und 6-6 zeigen die Verläufe der Abwindgeschwindigkeit und der Strahleinschnürung für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E. Entsprechende Graphen für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.1). Die in den Abbildungen dargestellten Ergebnisse des Abwindsimulationsmodells sind ebenso wie die axiale Koordinate  $z$  auf die Referenzergebnisse der Strahltheorie  $v_f$  und  $R$  normiert, um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Als weitere Referenzgröße ist in den Abbildungen die strahltheoretische Annahme für den Radius des ausgeprägten Strahls  $R_\infty$  eingezeichnet.

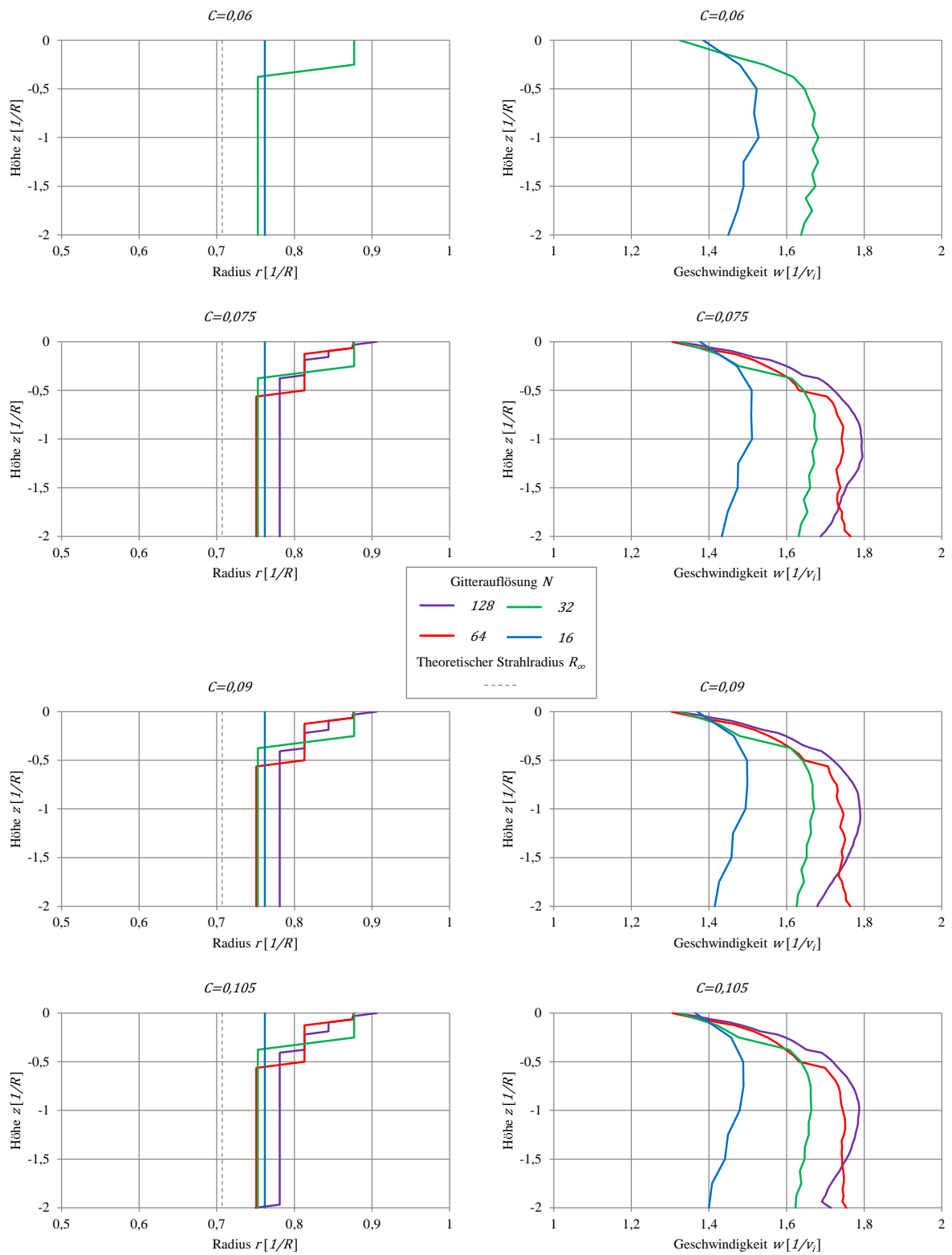


Abbildung 6-5: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E (1/2)

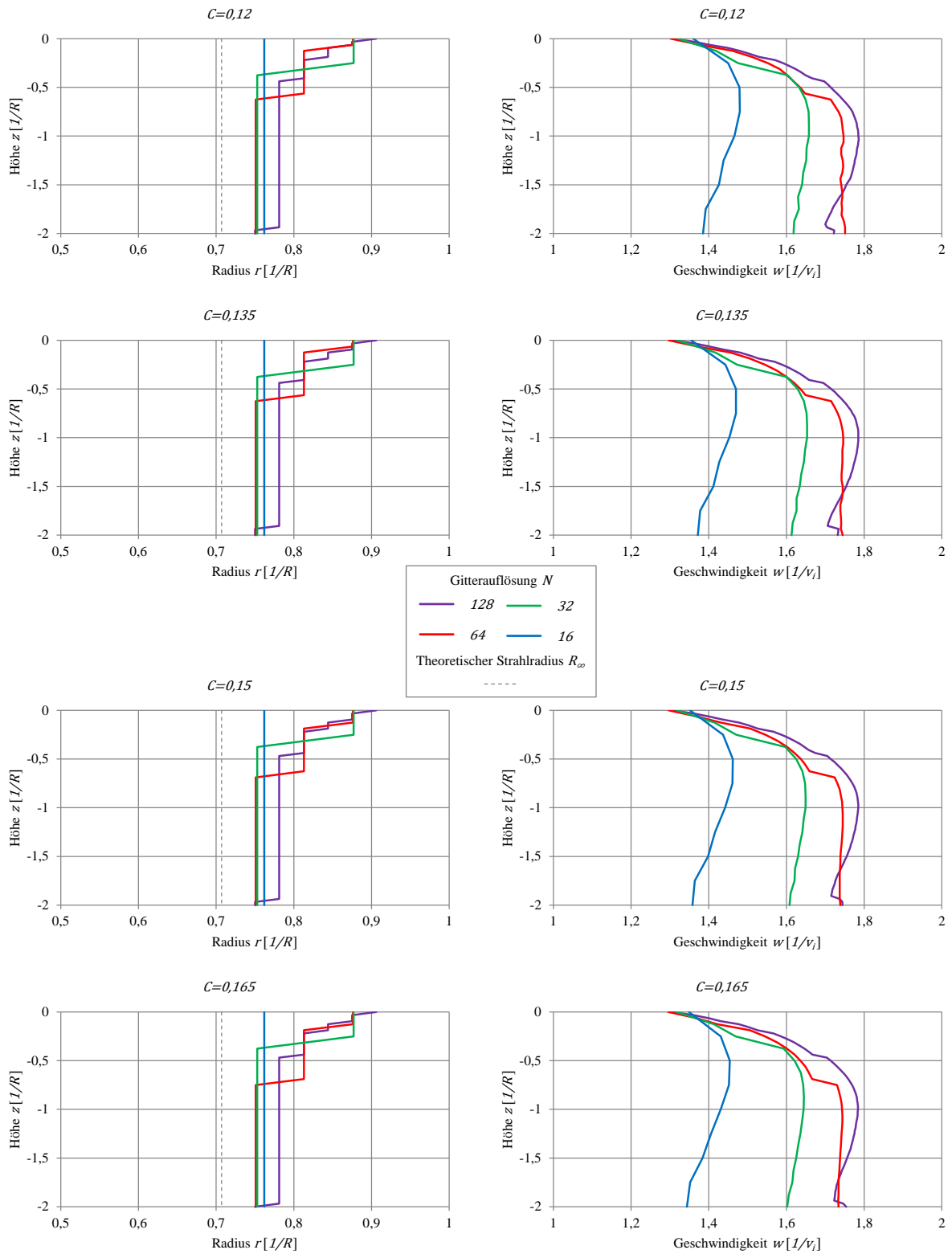


Abbildung 6-6: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E (2/2)

Die in den Darstellungen abgebildeten Verläufe der Strahleinschnürung und der Strömungsgeschwindigkeit zeichnen für die betrachteten Luftfahrzeuge ein weitestgehend einheitliches Bild. Insbesondere zeigen sich die Eigenschaften einer **reibungsbehafteten, mehrdimensionalen Strömungssimulation**. So bildet sich die Strahleinschnürung unter der Rotorebene aus, der Strahl wird jedoch bereits in der Rotorebene durch das aus der Umströmung der Rotorscheibe entstehende Wirbelsystem eingengt. Auch erreicht der Radius des ausgeprägten Strahls nicht den in den Abbildungen gestrichelt eingezeichneten Wert  $R_\infty=1/\sqrt{2}$  der Strahltheorie. Vielmehr nähert er sich mit Erhöhung der Gitterauflösung dem experimentell belegten Wert  $0,78$  [35] an, der auch in der Implementierung von Prescribed Wake Modellen [25-26] Verwendung findet. Mit zunehmender Entfernung von der Rotorebene nimmt die Strömungsgeschwindigkeit unter dem Einfluss des reibungsbehafteten Fluids ab.

Die gewählte **Rechengitterauflösung** prägt das Stetigkeitsverhalten der Graphen. Die Diskretisierung radialer Positionen führt zu einer stufenförmigen Strahleinschnürung (vgl. Abbildung 6-7). Insbesondere bei groben Rechengitterauflösungen zeichnen sich die Stufen in der Strahleinschnürung auch in den Verläufen der Strömungsgeschwindigkeit ab.

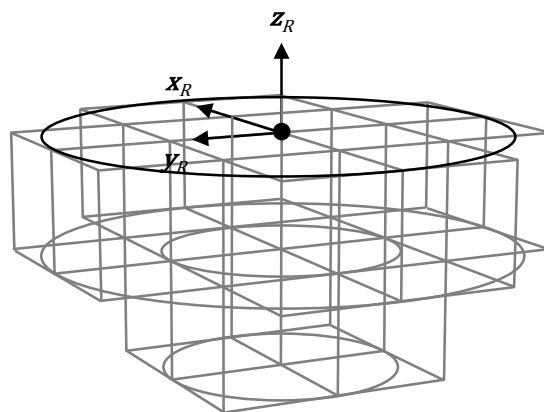


Abbildung 6-7: Diskretisierung der Strahleinschnürung

Mit einer sprunghaften Verringerung des Strahlquerschnitts geht ein sprunghafter Anstieg der Strömungsgeschwindigkeit einher. Bei besonders grob aufgelösten Rechengittern ist die Strahleinschnürung gar nicht mehr auflösbar. Dies zeigt sich insbesondere beim Kipprotorflugzeug Bell XV-15. Aufgrund der prinzipbedingt niedrigen Auflösung der Rotoren bei Kipprotorflugzeugen (vgl. Kapitel 2.3) zeigt sich bei niedrigen Auflösungen gar eine Strahlaufweitung. Aufgrund der mangelnden Einschnürung bleibt auch der Zuwachs der axialen Strömungsgeschwindigkeit hinter den Ergebnissen der Strahltheorie zurück.

Der Einfluss der **Smagorinsky Konstante** zeigt sich insbesondere in den Beträgen der Strömungsgeschwindigkeit: Durch die bereits beschriebene schlechte Auflösbarkeit von rotations-symmetrischen Geometrien in kartesischen Rechengittern lässt sich eine Wechselwirkung des Konstantenwerts mit der Strahleinschnürung nur bedingt ausmachen. Der Betrag der Geschwindigkeit, der unabhängig vom Wert der Konstante bei einem Abstand von etwa einer Radiuslänge unter der Rotorebene sein Maximum erreicht, wird hingegen von einem niedrigen Konstantenwert begünstigt. Auch der Rückgang des Betrags der Strömungsgeschw-

indigkeit mit zunehmender Entfernung von der Rotorebene verhält sich proportional zum Wert der Konstante. Ein hoher Konstantenwert führt zu einem stärkeren Rückgang der Strömungsgeschwindigkeit. Neben dem Einfluss des reibungsbehafteten Fluids sind diese Beobachtungen auf das durch die Konstante gesteuerte Maß an Dämpfung in der Simulation zurückzuführen. Mit der Erhöhung des Konstantenwerts geht eine künstliche Erhöhung der Viskosität des betrachteten Fluids einher.

Eine **quantitative Darstellung** dieser Ergebnisse findet sich in der folgenden Tabelle für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E. Entsprechende Tabellen für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.1).

		$z [1/R]$					
		0		-1		-2	
$N [-]$	$C [-]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$
128	0,06	-	-	-	-	-	-
	0,075	0,906	1,312	0,781	1,793	0,781	1,687
	0,09		1,313		1,789		1,679
	0,105		1,311		1,787	0,750	1,714
	0,12		1,307		1,785		1,722
	0,135		1,308		1,785		1,732
	0,15		1,307		1,785		1,744
	0,165		1,306		1,784		1,754
0,06	-		-		-		-
0,075	0,876	1,305	0,751	1,742	0,751	1,765	
0,09		1,303		1,742		1,764	
0,105		1,306		1,745		1,754	
0,12		1,302		1,747		1,751	
0,135		1,297		1,746		1,745	
0,15		1,297		1,744		1,739	
0,165		1,296		1,743		1,734	
0,06		0,877		1,325		0,753	1,682
0,075	1,322		1,678	1,631			
0,09	1,323		1,671	1,626			
0,105	1,322		1,664	1,623			
0,12	1,321		1,658	1,618			
0,135	1,319		1,653	1,613			
0,15	1,318		1,649	1,608			
0,165	1,317		1,644	1,602			
0,06	0,762	1,385	0,762	1,528	0,762	1,450	
0,075		1,377		1,511		1,433	
0,09		1,370		1,494		1,415	
0,105		1,365		1,479		1,400	
0,12		1,360		1,466		1,385	
0,135		1,355		1,453		1,372	
0,15		1,352		1,442		1,358	
0,165		1,349		1,431		1,344	

Tabelle 6-3: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit CH-53E



Wie den Tabellen zu entnehmen ist, bildet der Wert  $C=0,06$  die Untergrenze des Wertebereichs der Smagorinsky Konstante in der Abwindsimulation. Bei der Abbildung großer Rotor Schubwerte, wie sie bei der Simulation des Hubschraubers Sikorsky CH-53E auftreten, wird ein stabiles Simulationsverhalten erst ab einem Wert von  $C=0,075$  gewährleistet.

## 6.2 Vorwärtsflug

Um die Abbildung von Vorwärtsflugzuständen durch das Abwindsimulationsmodell zu verifizieren, wird die Variation der induzierten Geschwindigkeit über der Rotorscheibe der betrachteten Luftfahrzeuge in diesen Flugzuständen untersucht. Trotz deren komplexer physikalischer Natur kann der Verlauf für den Vorwärtsflug linear approximiert werden. Diese Näherung stützt sich auf umfangreiche experimentelle Untersuchungen und findet namensgebend in einer ganzen Klasse aerodynamischer Modelle, den Linear Inflow Modellen [35], Anwendung.

In diesen Modellen wird die lineare Variation der induzierten Geschwindigkeit  $v_i$  in Abhängigkeit der radialen Koordinate  $r$  und des Rotorumlaufwinkels  $\psi$  angegeben. Basierend auf empirisch bestimmten Steigungskoeffizienten wird der Verlauf der Geschwindigkeit entlang der Achsen eines körperfesten Koordinatensystems über die Rotorebene beschrieben. Im Folgenden soll lediglich der longitudinale Verlauf der induzierten Geschwindigkeit basierend auf einem Steigungskoeffizienten  $k_x$  betrachtet werden [35]:

$$v_i(r, \psi) = v_0(1 + k_x r \cos \psi) \quad (6-11)$$

Diese Darstellung basiert auf einem in der Rotormitte definierten Stützwert  $v_0$ , dem Mittelwert der induzierten Geschwindigkeit:

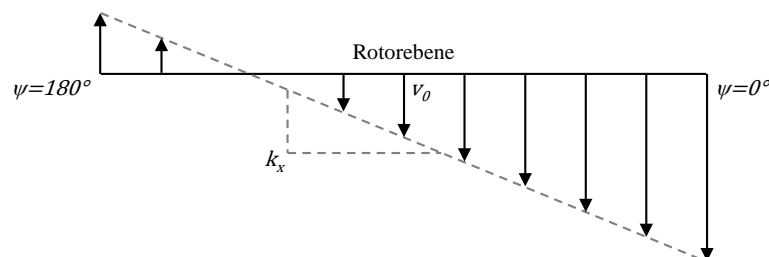


Abbildung 6-8: Longitudinaler Verlauf der induzierten Geschwindigkeit nach [35]

Die Bestimmung des ebenfalls in Gleichung 6-11 enthaltenen Steigungskoeffizienten  $k_x$  unterscheidet die Linear Inflow Modelle. Zumeist beruht die Berechnung der empirischen Konstante auf dem Abstromwinkel  $\chi$  des Rotorabwinds im Vorwärtsflug [35]:

$$\chi = \tan^{-1} \left( \frac{V_{\infty, x}}{V_{\infty, z} + v_i} \right) \quad (6-12)$$

Die kartesischen Komponenten  $V_{\infty,x}$  und  $V_{\infty,z}$  beschreiben die aus der Flugbewegung  $V_{\infty}$  des betrachteten Luftfahrzeugs resultierende Anströmgeschwindigkeit tangential und orthogonal zur Rotorscheibe:

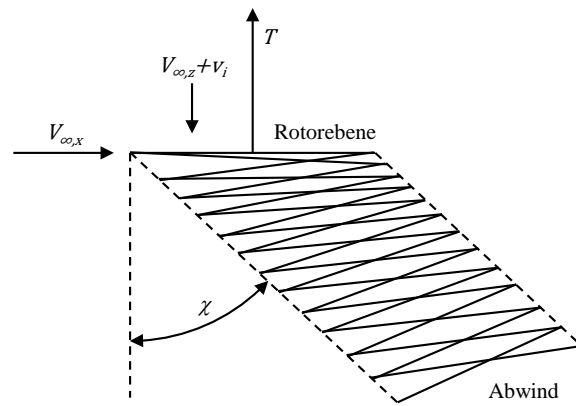


Abbildung 6-9: Abstromwinkel des Rotorabwinds nach [35]

Für einen horizontalen Vorwärtsflug mit einem nicht gegen die Flugrichtung angestellten Rotor kann die Gleichung 6-12 entsprechend vereinfacht werden zu

$$\chi = \tan^{-1} \left( \frac{V_{\infty,x}}{v_i} \right) \quad (6-13)$$

Mit Hilfe dieses Wertes kann der Steigungskoeffizient  $k_x$  berechnet werden. Zu diesem Zweck wurden im Laufe der Jahre vielerlei empirische Zusammenhänge entwickelt. Einen der Ansätze, der im Vergleich mit experimentell ermittelten Daten eine hohe Übereinstimmung zeigt, bildet das Linear Inflow Modell nach Drees [35]:

$$k_x = \frac{4}{3} \cdot \left( 1 - \cos\chi - 1,8 \left( \frac{|V_{\infty}|}{\Omega R} \right)^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{\sin\chi} \right) \quad (6-14)$$

Für die Beschreibung des longitudinalen Verlaufs der induzierten Geschwindigkeit über die Rotorscheibe ist neben diesem Koeffizienten auch der Stützwert  $v_0$  zu bestimmen (vgl. Gleichung 6-11). Die Berechnung dieses Wertes mit Hilfe der Strahltheorie wird für den Vorwärtsflug im Folgenden anhand der Ausführungen in [35] beschrieben. Für die Abbildung des Vorwärtsflugs in der Strahltheorie wird ein konstanter Massenstrom über die Rotorscheibe angenommen:

$$\dot{m} = \rho R^2 \pi U \quad (6-15)$$

Die Geschwindigkeit des Massenstroms  $U$  ist im Vorwärtsflug geprägt von der Überlagerung der induzierten Geschwindigkeit  $v_i$  und der Anströmgeschwindigkeit  $V_{\infty}$  (vgl. Abbildung 6-10).

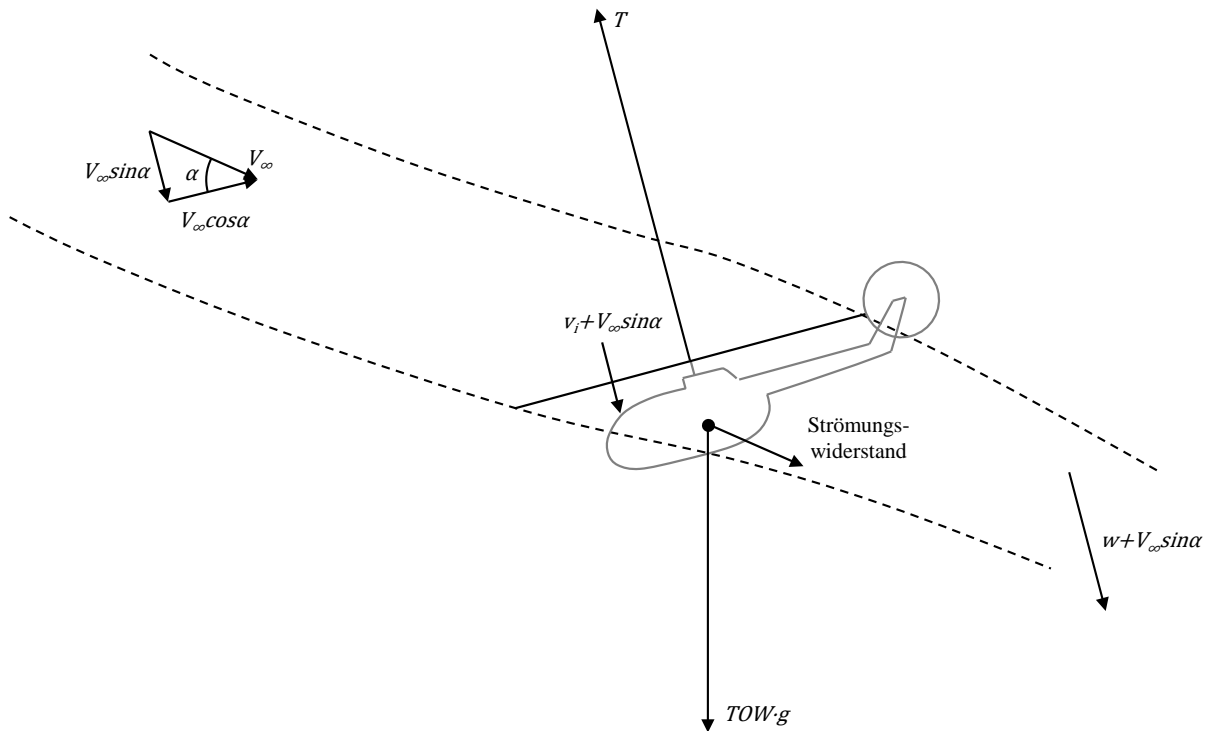


Abbildung 6-10: Vorwärtsflugmodellierung in der Strahltheorie [35]

Die Überlagerung der Geschwindigkeiten im Massenstrom lässt sich in Abhängigkeit des zwischen der Rotorebene und der Anströmgeschwindigkeit vorliegenden Anstellwinkels  $\alpha$  beschreiben:

$$U = \sqrt{(V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_\infty \sin \alpha + v_i)^2} \quad (6-16)$$

Die Gleichung erlaubt, gemeinsam mit der Definition des Massenstroms, die Formulierung der Impulserhaltung orthogonal zur Rotorscheibe:

$$T = \dot{m}(V_\infty \sin \alpha + w) - \dot{m}V_\infty \sin \alpha = \dot{m}w \quad (6-17)$$

Analog zur Impulserhaltung wird die Energieerhaltung über die Rotorscheibe formuliert:

$$P = T(V_\infty \sin \alpha + v_i) = \frac{1}{2} \dot{m}(V_\infty \sin \alpha + w)^2 - \frac{1}{2} \dot{m}V_\infty^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \dot{m}(2V_\infty w \sin \alpha + w^2) \quad (6-18)$$

Einsetzen der Gleichung 6-17 in die Gleichung 6-18 bestätigt das Ergebnis der Strahltheorie für den Schwebeflug (vgl. Gleichung 6-7):

$$w = 2v_i \quad (6-19)$$

Basierend auf dieser Erkenntnis kann eine Abhängigkeit zwischen dem idealisierten Schubbedarf im Vorwärtsflug und der korrespondierenden induzierten Geschwindigkeit aufgezeigt werden:

$$T = \dot{m}2v_i \quad (6-20)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 6-15 und 6-16 lässt sich die Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$  in diese Betrachtung einbeziehen:

$$T = 2(\rho R^2 \pi U) v_i = 2\rho R^2 \pi v_i \sqrt{(V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_\infty \sin \alpha + v_i)^2} \quad (6-21)$$

Wird diese Gleichung dem äquivalenten Zusammenhang für den Schwebeflug (vgl. Gleichung 6-10) gleichgesetzt, so kann eine Beziehung zwischen der induzierten Geschwindigkeit im Schwebeflug, fortan als  $v_h$  bezeichnet, und der induzierten Geschwindigkeit im Vorwärtsflug  $v_i$  aufgestellt werden:

$$v_i = \frac{v_h^2}{\sqrt{(V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_\infty \sin \alpha + v_i)^2}} \quad (6-22)$$

Diese Gleichung wird iterativ für beliebige Vorwärtsfluggeschwindigkeiten und Anstellwinkel gelöst. In den folgenden Betrachtungen soll jedoch ein horizontaler Vorwärtsflug bei einem nicht gegen die Flugbewegung angestellten Rotor ( $\alpha=0^\circ$ ) untersucht werden. Dies ermöglicht eine Vereinfachung der Gleichung zu

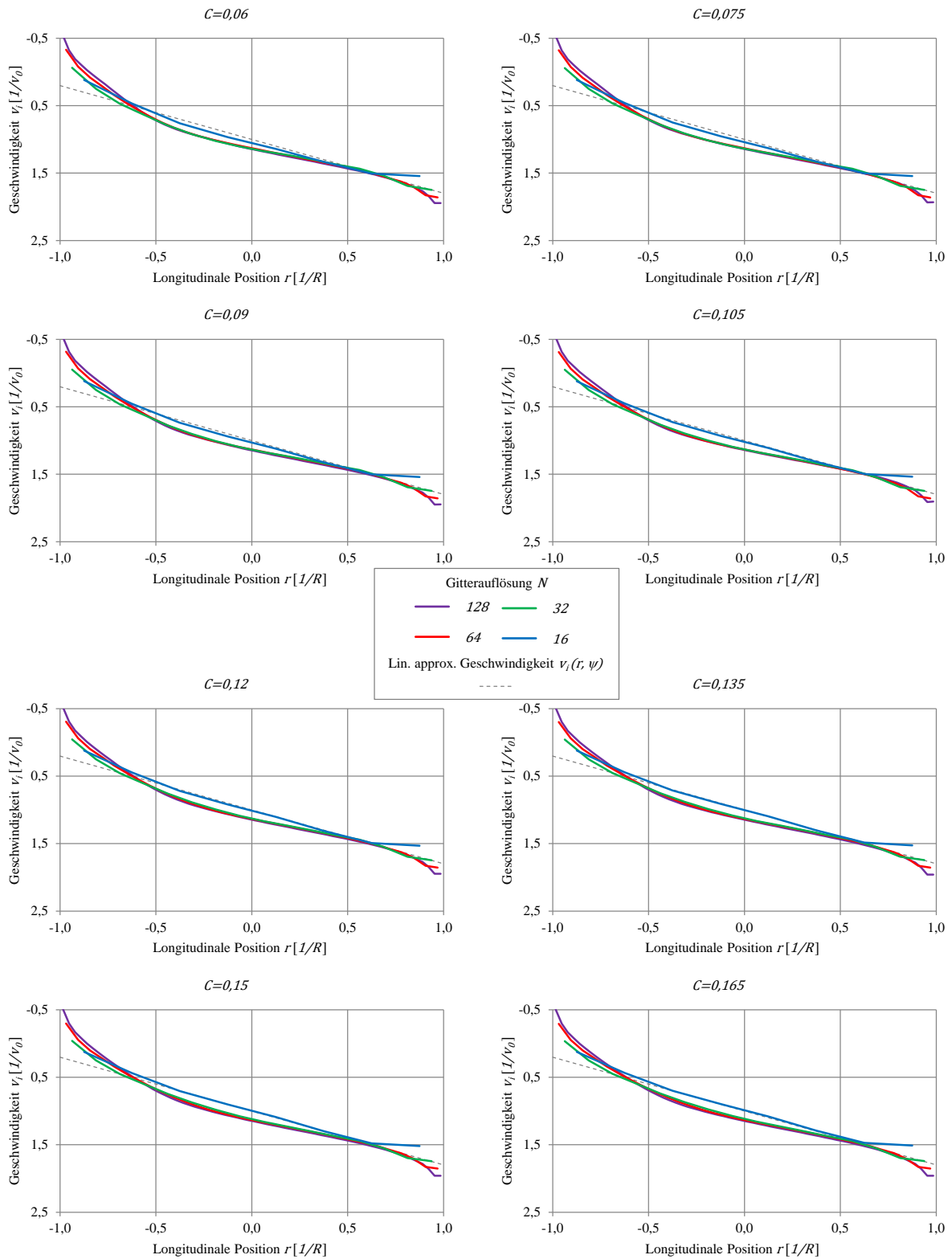
$$v_i = \frac{v_h^2}{\sqrt{V_\infty^2 + v_i^2}} \quad (6-23)$$

Die Formel kann nun derart umgestellt werden, dass eine analytische Lösung für beliebige Werte der Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$  möglich ist:

$$\frac{v_i}{v_h} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{V_\infty}{v_h}\right)^4 + 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_\infty}{v_h}\right)^2} \quad (6-24)$$

Nach dem vorgestellten Verfahren berechnete Werte des Stützwerts der induzierten Geschwindigkeit  $v_0$  beschreiben gemeinsam mit dem Steigungskoeffizienten  $k_x$  nach Drees (vgl. Gleichung 6-14) die longitudinale Variation der induzierten Geschwindigkeit über die Rotorscheibe (vgl. Gleichung 6-11). Diese theoretische Modellierung wird im Folgenden den Ergebnissen des Abwindsimulationsmodells gegenübergestellt. Zu diesem Zweck werden horizontale Vorwärtsflüge mit nicht-angestellten Rotoren und einem Fortschrittsgrad  $\mu = V_\infty / \Omega R$  von 0,1, 0,2 und 0,3 für die in Tabelle 6-1 aufgeführten Luftfahrzeuge untersucht.

Um die Beeinflussung der Simulationsergebnisse durch die Smagorinsky Konstante  $C$  und die Gitterauflösung  $N$  abzubilden, werden diese beiden Parameter im Bereich  $[0,06; \dots; 0,165]$  bzw.  $[16; 32; 64; 128]$  variiert. Die folgenden Abbildungen zeigen die longitudinalen Verläufe der induzierten Geschwindigkeit für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E. Geschwindigkeitsverläufe für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.2). Aus Gründen der Vergleichbarkeit sind die Graphen auf den Stützwert des Linear Inflow Modells  $v_0$  normiert. Ebenso ist die radiale Koordinate  $r$  auf den Rotorradius  $R$  normiert


 Abbildung 6-11: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E,  $\mu=0,1$

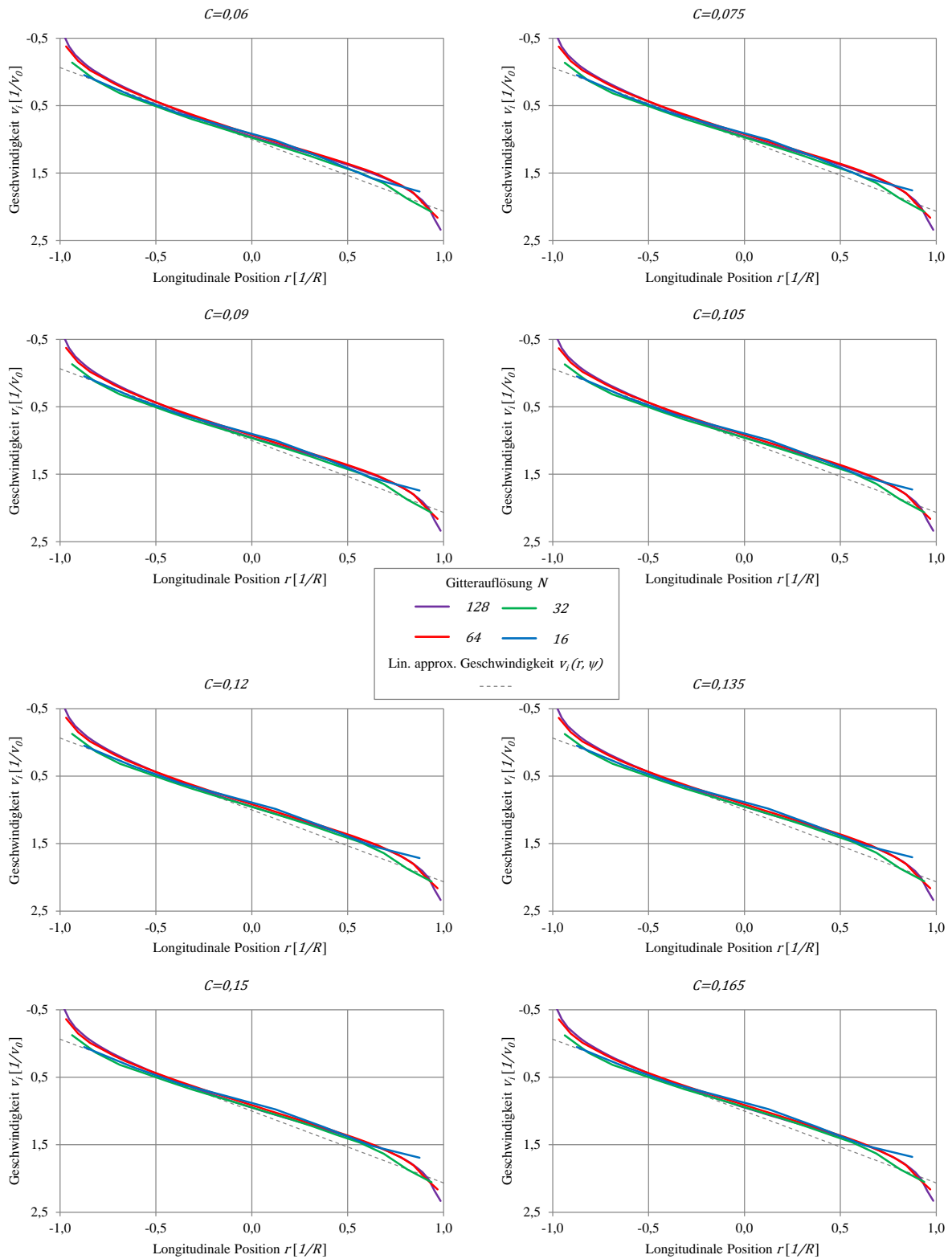
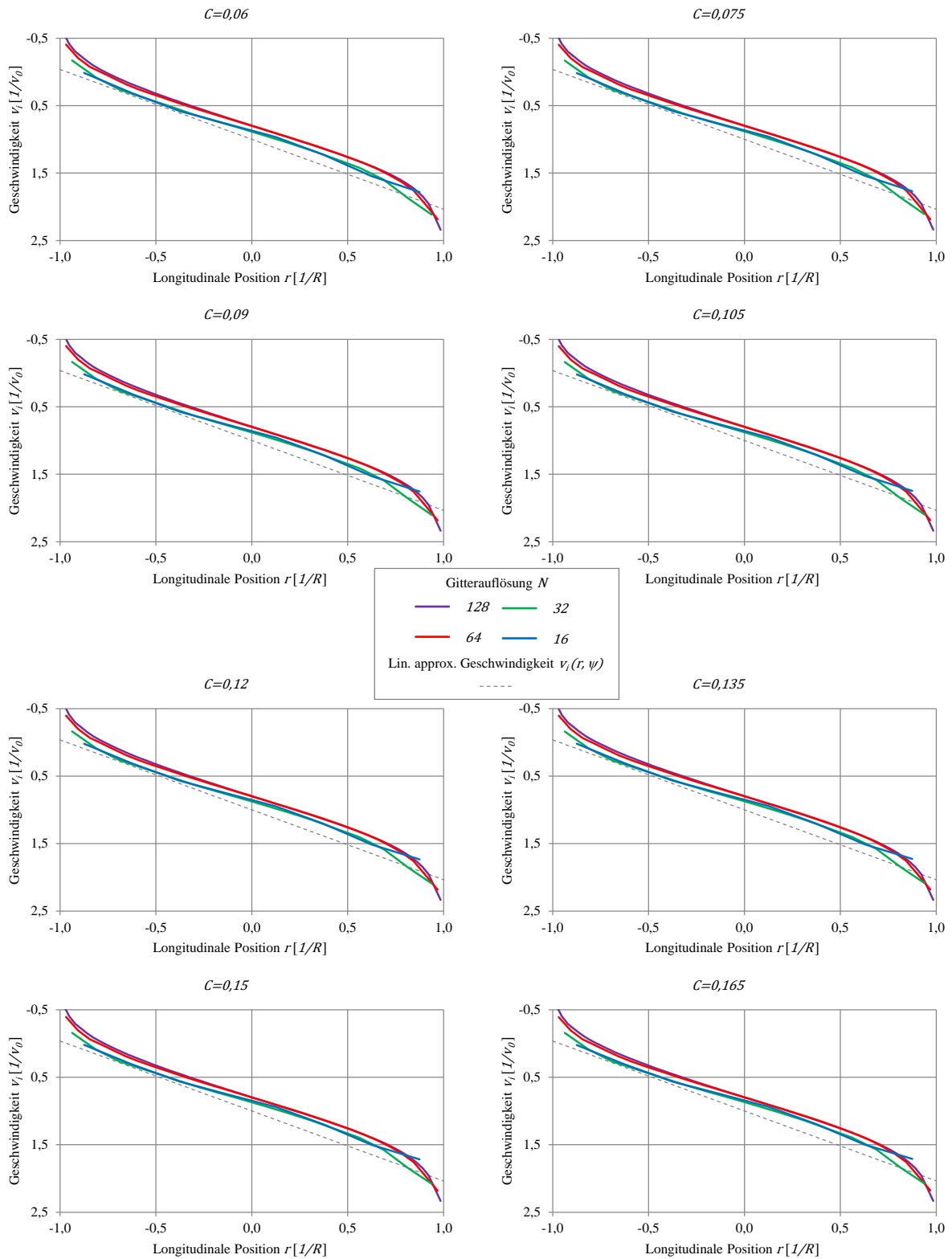


Abbildung 6-12: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E,  $\mu=0,2$


 Abbildung 6-13: Induzierte Geschwindigkeit CH-53E,  $\mu=0,3$

Wie den Abbildungen zu entnehmen ist, kann das Abwindsimulationsmodell den gestrichelt eingezeichneten Verlauf der induzierten Geschwindigkeit nach Drees in allen betrachteten Vorwärtsflugfällen in guter Übereinstimmung abbilden. Für alle drei betrachteten Luftfahrzeuge zeigt sich hierbei ein ähnliches Bild.

Während sich die Beträge der im Abwindsimulationsmodell berechneten Geschwindigkeiten für einen **Fortschrittsgrad**  $\mu=0,1$  mit den Werten des Linear Inflow Modells in ihrem Betrag nahezu decken, fallen sie mit zunehmendem Fortschrittsgrad hinter selbige zurück. Die Ursache dieses Umstands findet sich im mit der Geschwindigkeit anwachsenden Einfluss von Konvektion auf die im Rotor induzierte Strömung.

Die **Rechengitterauflösung** beeinflusst die Ergebnisse nicht maßgeblich. Eine Ausnahme bildet die Simulation des Kipprotor-Flugzeugs Bell VX-15. Die prinzipbedingt niedrige Auflösung der Rotoren bei Kipprotor-Flugzeugen (vgl. Kapitel 2.3) führt zu merklichen Abweichungen des Geschwindigkeitsverlaufs bei einer Rechengitterauflösung von  $N=16$ .

Auch der Einfluss der **Smagorinsky Konstante** zeigt sich im Vorwärtsflug weniger ausgeprägt als im Schwebeflug. Eine Erhöhung des Konstantenwerts führt jedoch, analog zu den Beobachtungen im Schwebeflug (vgl. Kapitel 6.1), zu einer Erhöhung der systemimmanenten Dämpfung und damit zu einem Rückgang des Betrags der induzierten Geschwindigkeit. Mit diesem Rückgang verringert sich auch der lineare Steigungskoeffizient der Geschwindigkeitsverteilung.

Neben den genannten Parametern macht sich auch der Einfluss der **Rotorbelastung** im Verlauf der Graphen bemerkbar: Während hoch belastete Rotoren, wie sie der Hubschrauber Sikorsky CH-53E und das Kipprotor-Flugzeug Bell XV-15 besitzen, zu ausgeprägten Randwirbeln und damit Überhöhungen der induzierten Geschwindigkeit an den Rändern der Rotorscheibe neigen, sind die Verläufe der induzierten Geschwindigkeit für den Hubschrauber Sikorsky SH-60B weitestgehend linear.

Für die **quantitative Bewertung** der Ergebnisse des Abwindsimulationsmodells im Vorwärtsflug sind diese in der folgenden Tabelle 6-4 für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E aufgeführt. Entsprechende Tabellen für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.2).

Der vom Abwindsimulationsmodell für die induzierte Geschwindigkeit in Rotormitte  $v_i(0)$  berechnete Wert ist in den Tabellen auf den Stützwert  $v_0$  des Linear Inflow Modells normiert. Ebenso ist aus Gründen der Vergleichbarkeit der Gradient  $\partial v_i(0)/\partial r$  der Geschwindigkeitsverläufe an diesem Punkt auf den Steigungskoeffizienten  $k_x$  der Modellierung nach Drees normiert.



		$\mu [-]$					
		0,1		0,2		0,3	
$N$ [-]	$C$ [-]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]
128	0,06	1,144	0,758	0,959	0,826	0,796	0,877
	0,075	1,143	0,762	0,957	0,831	0,796	0,877
	0,09	1,146	0,769	0,955	0,831	0,796	0,877
	0,105	1,141	0,755	0,954	0,836	0,796	0,877
	0,12	1,144	0,769	0,952	0,836	0,796	0,869
	0,135	1,146	0,773	0,951	0,841	0,796	0,862
	0,15	1,146	0,773	0,949	0,841	0,797	0,862
64	0,06	1,130	0,713	0,925	0,836	0,800	0,839
	0,075	1,132	0,713	0,923	0,838	0,799	0,836
	0,09	1,133	0,717	0,921	0,838	0,799	0,836
	0,105	1,133	0,720	0,919	0,841	0,799	0,832
	0,12	1,134	0,726	0,917	0,838	0,799	0,832
	0,135	1,134	0,731	0,915	0,838	0,799	0,828
	0,15	1,133	0,740	0,913	0,838	0,798	0,828
32	0,06	1,140	0,677	0,976	0,841	0,885	0,825
	0,075	1,138	0,711	0,970	0,835	0,883	0,819
	0,09	1,135	0,739	0,965	0,829	0,880	0,813
	0,105	1,131	0,765	0,960	0,824	0,878	0,812
	0,12	1,128	0,786	0,955	0,821	0,875	0,808
	0,135	1,124	0,805	0,951	0,816	0,873	0,804
	0,15	1,120	0,822	0,946	0,814	0,871	0,800
16	0,06	1,054	0,879	0,916	0,740	0,870	0,733
	0,075	1,041	0,894	0,909	0,736	0,865	0,730
	0,09	1,030	0,906	0,902	0,733	0,861	0,727
	0,105	1,020	0,914	0,896	0,730	0,857	0,725
	0,12	1,011	0,920	0,890	0,728	0,853	0,723
	0,135	1,003	0,924	0,885	0,726	0,850	0,722
	0,15	0,995	0,927	0,881	0,725	0,847	0,720
	0,165	0,988	0,929	0,877	0,724	0,844	0,720

Tabelle 6-4: Induzierte Geschwindigkeit und longitudinaler Steigungskoeffizient CH-53E

Die Tabellen belegen die zuvor getroffenen Aussagen bezüglich des Einflusses der Rechengitterauflösung, des Werts und der Smagorinsky Konstante und des Fortschrittsgrads auf den Betrag der induzierten Geschwindigkeit. Zudem verdeutlichen die gezeigten Werte, dass die Steigungskoeffizienten der in der Abwindsimulation berechneten Geschwindigkeitsverläufe nur bedingt mit den theoretischen Werten übereinstimmen. Dies ist auf die nichtlineare Gestalt der Verläufe zurückzuführen. Eine Übereinstimmung zeigt sich jedoch in der Abhängigkeit der Koeffizienten vom Fortschrittsgrad. So erreichen die Steigungskoeffizienten bei einem Fortschrittsgrad  $\mu \approx 0,2$  ihren Maximalwert, mit einer weiteren Erhöhung der Flugeschwindigkeit nimmt ihr Betrag langsam ab [35].

### 6.3 Zeitverhalten

In diesem Abschnitt wird der Rechenzeitaufwand des entwickelten Abwindsimulationsmodells, dessen Zusammensetzung und Beeinflussbarkeit untersucht. Insbesondere wird der Einfluss der parallelisierten Implementierung auf den Rechenzeitaufwand eines Simulationszeitschritts betrachtet. Den Abschluss der Untersuchungen bildet die Überprüfung der Erfüllung des in Kapitel 1.1 formulierten Echtzeitanpruchs.

Bevor die Rechenergebnisse eines Simulationszeitschritts des Abwindsimulationsmodells bereitgestellt werden können, müssen drei rechenzeitintensive Teilschritte abgeschlossen werden (vgl. Kapitel 5): Die Berechnung von aus der Flugbewegung resultierenden Relativgeschwindigkeiten, die Erfassung von Strömungshindernissen und die auf der Lattice-BGK Methode basierende Strömungssimulation. Der für den Abschluss der Teilschritte erforderliche Rechenzeitbedarf soll im Folgenden gemäß eines bereits in Voruntersuchungen [14] angewandten Vorgehens untersucht und schließlich zum Gesamtrechenzeitbedarf der Abwindsimulation aufaddiert werden.

Die beiden Teilschritte der Randbedingungserfassung werden auf dem Mehrkernprozessor des Simulationsrechners parallelisiert ausgeführt (vgl. Kapitel 5.2). Bei dem verwendeten Rechner handelt es sich um einen Desktop-Computer mit Intel Core i7-4930K CPU. Dieser Mehrkernprozessor verfügt über sechs physikalische Rechenkerne [111]. Mit Hilfe der Intel Hyper Threading Technologie können weiterhin sechs virtuelle Rechenkerne genutzt werden, sodass in Summe zwölf Rechenkerne für die parallele Lösung von Teilproblemen in CPU-Threads bereitstehen [111]. Wird eine höhere Zahl an CPU-Threads gewählt, so werden diese Teilprobleme auf die Rechenkerne des Prozessors verteilt und teilweise sequentiell abgearbeitet. Der Rechenzeitbedarf der beiden Teilschritte der Randbedingungserfassung variiert daher in Abhängigkeit der eingesetzten CPU-Threads und der Rechengitterauflösung.

In den folgenden Abbildungen 6-14 und 6-15 ist die eben beschriebene Abhängigkeit für Auflösungen  $N=[16;32;64;128]$  und  $n=[1;4;16;64]$  CPU-Threads dargestellt. Die Graphen zeigen, dass eine nicht-parallelisierte Implementierung der Randbedingungserfassung nur bis zu einer Rechengitterauflösung von  $N=32$  im Rahmen der durch  $f_p$  festgelegten Rechenzeitbegrenzung eingesetzt werden kann. Weiterhin geht aus den Abbildungen hervor, dass sich eine hohe Zahl an CPU-Threads bei niedrigen Rechengitterauflösungen negativ auf den Rechenzeitbedarf auswirkt. Dies ist auf den zusätzlichen Rechenaufwand zurückzuführen, der mit der Verwaltung der Threads einhergeht. Die Abbildungen zeigen zudem, dass eine Threadzahl, die die Anzahl der verfügbaren Rechenkerne übersteigt, auch bei hohen Rechengitterauflösungen keinen merklichen Einfluss auf den Rechenzeitaufwand hat. Dies ist auf die sequentielle Abarbeitung der überzähligen Threads auf den verfügbaren Prozessorkernen zurückzuführen.

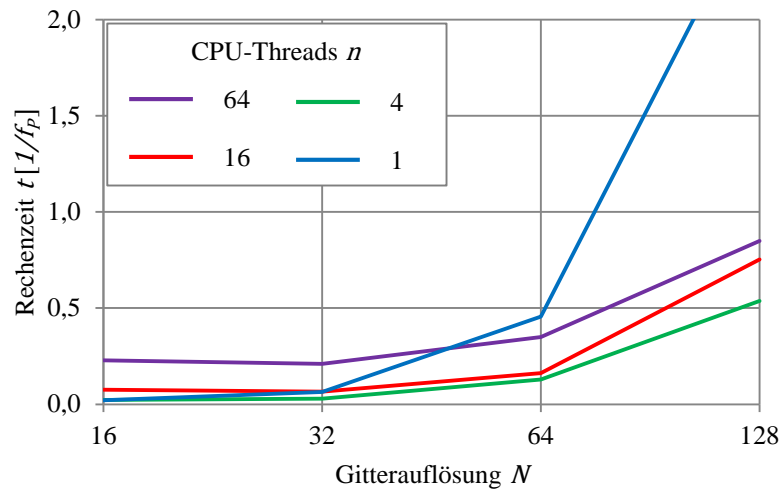


Abbildung 6-14: Rechenzeitbedarf der Relativgeschwindigkeitsberechnung

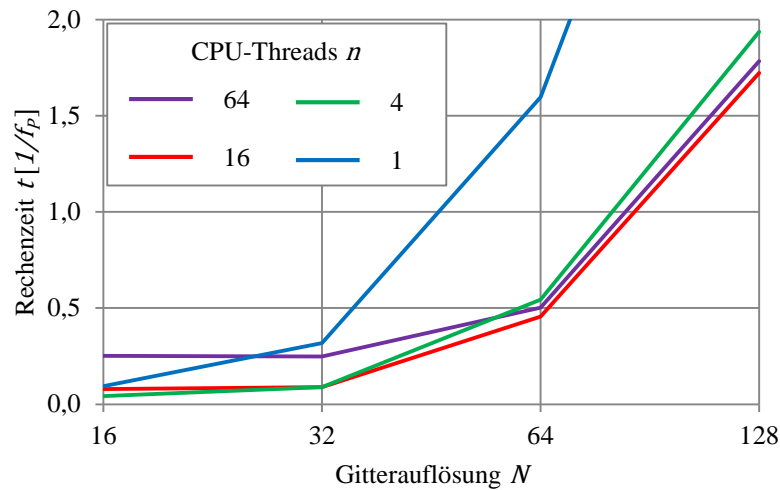


Abbildung 6-15: Rechenzeitbedarf der Hinderniserfassung

Neben der Erfassung der Randbedingungen erfolgt in jedem Simulationszeitschritt des Abwindsimulationsmodells die Strömungssimulation. Diese ist parallelisiert auf dem Grafikprozessor des Simulationsrechners implementiert (vgl. Kapitel 5.3). Für die Strömungssimulation werden alle verfügbaren Koprozessoren des Grafikprozessors genutzt. In den folgenden Untersuchungen erfolgt die Simulation unter Nutzung der 2880 Recheneinheiten des Prozessors einer Grafikkarte vom Typ NVIDIA Geforce GTX 780 Ti [112]. Der entstehende Rechenzeitbedarf ist in der folgenden Abbildung in Abhängigkeit der untersuchten Rechengitterauflösung  $N=[16;32;64;128]$  dargestellt. Ebenfalls abgebildet ist die gestrichelt eingezeichnete, durch die Bildwiederholfrequenz  $f_p$  begrenzte Rechenzeit eines Simulationszeitschritts:

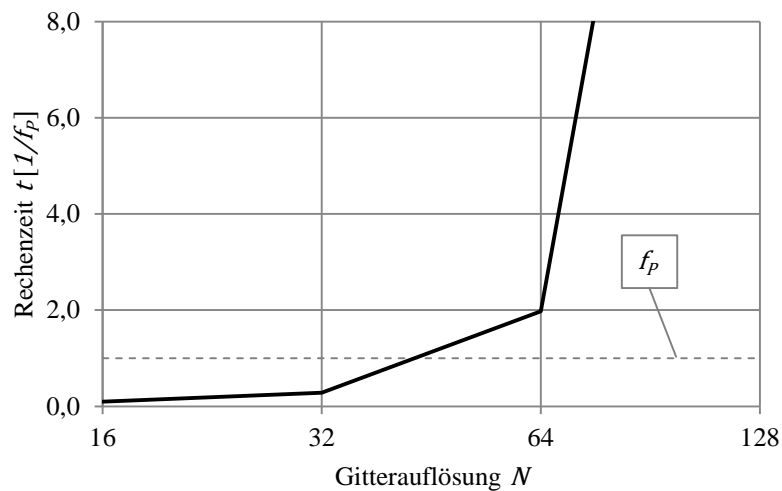


Abbildung 6-16: Rechenzeitbedarf der Strömungssimulation

Wie der Abbildung 6-16 zu entnehmen ist, überwiegt der erforderliche Rechenaufwand der Strömungssimulation deutlich den der Randbedingungserfassung. Nichtsdestotrotz ist auf dem verwendeten Simulationsrechner eine Strömungssimulation für Gitterauflösungen  $N=32$  innerhalb der geforderten Frequenz  $f_p$  möglich. Eine Verdopplung der Gitterauflösung erfordert jedoch bereits eine Verdopplung der durch die Frequenz begrenzten Rechenzeit. Die Abbildung einer Rechengitterauflösung von  $N=128$  vervielfacht den erforderlichen Rechenaufwand der Simulation um das Achtundzwanzigfache.

Aufgrund der sequentiellen Abfolge der drei in den vorgehenden Absätzen beschriebenen Prozesse während jedes Zeitschritts der Abwindsimulation lässt sich der Gesamtrechenaufwand eines Simulationsschritts durch eine Addition ermitteln. Die kumulierte Rechenzeit der Einzelprozesse für einen Simulationszeitschritt ist in der folgenden Abbildung für Gitterauflösungen  $N=[16;32;64;128]$  und  $n=[1;4;16;64]$  CPU-Threads dargestellt:

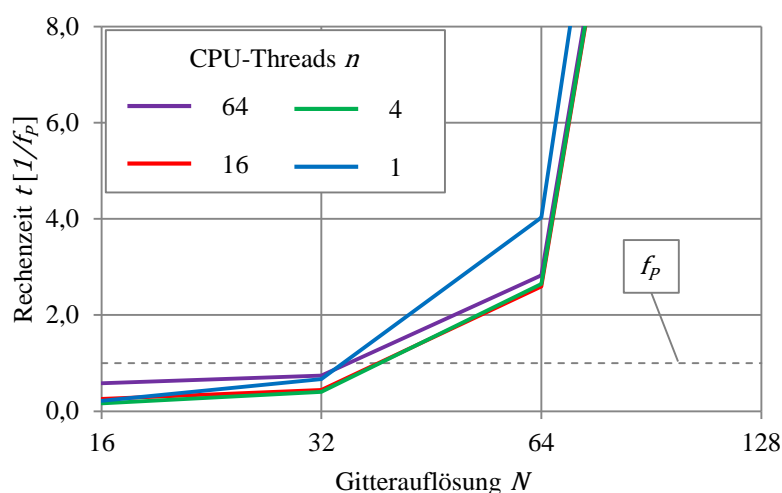


Abbildung 6-17: Gesamtrechenaufwand der Abwindsimulation

Die Abbildung zeigt, dass Rechenergebnisse mit der verwendeten Simulationshardware bei einer Gitterauflösung von  $N=32$  unter Verwendung von vier CPU-Threads innerhalb von  $0,4$  durch die Bildwiederholfrequenz  $f_p$  definierten Simulationszeitschritten bereitgestellt werden können. Der in der Zielsetzung dieser Arbeit (vgl. Kapitel 1.1) formulierte Echtzeitanspruch an das Abwindsimulationsmodell ist damit erfüllt.

Mit der verwendeten Simulationshardware ist eine Verdopplung der Rechengitterauflösung ( $N=64$ ) unter Einsatz von mindestens vier CPU-Threads im Rahmen von drei durch  $f_p$  begrenzten Zeitschritten möglich. Der Rechenzeitbedarf einer Simulation bei einer Gitterauflösung von  $N=128$  hingegen beträgt, abhängig von der Anzahl der eingesetzten CPU-Threads, annähernd das Dreissigfache der durch  $f_p$  limitierten Rechenzeit.



## 7 Validierung

Nach der Verifikation des Modellverhaltens werden die Rechenergebnisse des Abwindsimulationsmodells in diesem Kapitel anhand von experimentell ermittelten Ergebnissen validiert. Zu diesem Zweck wird auf in [17] veröffentlichte Flugversuchsdaten zurückgegriffen. Bei den Daten handelt es sich um unter schwebenden Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen aufgezeichnete, untergrundparallele Strömungsgeschwindigkeiten. Diese wurden in Schwebeflugversuchen der Flughöhe  $H$  an definierten azimuthalen und radialen Positionen aufgezeichnet und zeitlich gemittelt.

Für die Validierung wurden aus [17] jeweils zwei Messungen aus Flugversuchen der drei im sechsten Kapitel dieser Arbeit vorgestellten Luftfahrzeuge herangezogen (vgl. Tabelle 6-1) und zeitlich gemittelten Rechenergebnissen des Abwindsimulationsmodells gegenübergestellt. Die durch die untersuchte Flughöhe, die radiale Distanz  $r$  und die azimuthale Orientierung  $\psi$  beschreibbaren Messpositionen sind den beiden folgenden Tabellen zu entnehmen:

Azimutale Orientierung $\psi$ [°]	Flughöhe $H$ [1/R]		
	Sikorsky CH-53E	Bell XV-15	Sikorsky SH-60B
0	-	3,000	-
90	-	-	-
180	-	-	1,018;1,390
270	1,949	-	-

Tabelle 7-1: Flughöhe und azimuthale Orientierung der Validierungsmessungen

Luftfahrzeug	Flughöhe $H$ [1/R]	Erste radiale Position $r$ [1/R]	Zweite radiale Position $r$ [1/R]
Sikorsky CH-53E	1,949	1,251	1,501
Bell XV-15	3,000	2,088	2,536
Sikorsky SH-60B	1,018	1,305	-
	1,390	-	1,305

Tabelle 7-2: Radiale Position der Validierungsmessungen

Die Notation der azimuthalen Orientierung folgt hierbei der des in Kapitel 3.2 vorgestellten Rotorumlaufwinkels. Der Abstand der radialen Positionen  $r$  zur Rotornabe des tragenden Rotors bzw. der tragenden Rotoren des betrachteten Luftfahrzeugs wurde jeweils als Distanz entlang der entsprechenden Koordinatenachse des in Kapitel 2.1 eingeführten Rotorkoordinatensystems bemessen und auf einen Rotorradius normiert.

In den Untersuchungen wurden die Beeinflussung der Strömungssimulation durch Strömungshindernisse, wie beispielsweise dem Rumpf des betrachteten Luftfahrzeugs und der Bodenebene, sowie der Einfluss vorhandener Heckrotoren, berücksichtigt.

Während der Rotorschub tragender Rotoren analog zu den Untersuchungen im sechsten Kapitel dieser Arbeit gemäß der Formel 6-9 bestimmt und über die Rotorscheibe(n) konstant angenommen wird, ist der Heckrotorschub  $T_T$  so gewählt, dass er eine Stabilisierung des

betrachteten Hubschraubers gegenüber unerwünschten Gierbewegungen um dessen Hochachse ermöglicht:

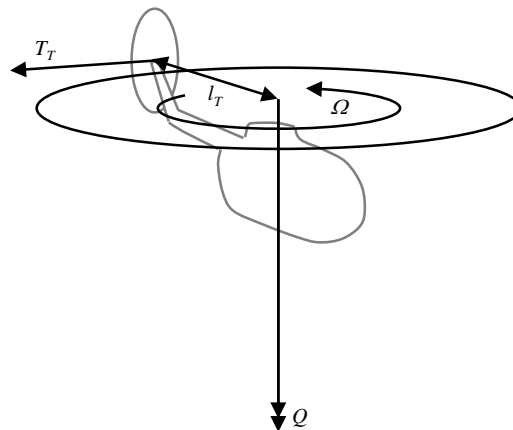


Abbildung 7-1: Ermittlung des Heckrotorschubs

Über den in Abbildung 7-1 eingezeichneten Abstand zwischen dem unter der Hauptrotornabe befindlichen Schwerpunkt des Hubschraubers und der Heckrotornabe  $l_T$  kann der Heckrotorschub ein Momentengleichgewicht um die Gierachse gewährleisten. Unter Vernachlässigung von Trägheit lässt sich dieses in Abhängigkeit des am Hauptrotor erbrachten Moments  $Q$  oder der zugehörigen Leistung  $P$  beschreiben [35]:

$$T_T = \frac{Q}{l_T} = \frac{P/\Omega}{l_T} \quad (7-1)$$

Mit der Abhängigkeit zwischen Schub und Leistung (vgl. Gleichung 6-6) lässt sich der Schubbedarf des Heckrotors im Schwebeflug so berechnen zu

$$T_T = \frac{T v_i / \Omega}{l_T} \quad (7-2)$$

Für die Berechnung des Heckrotorschubs in den Validierungsuntersuchungen wird die in der Abwindsimulation berechnete, gemittelte induzierte Strömungsgeschwindigkeit in der Rotorscheibe herangezogen. In den Untersuchungen werden in Ermangelung exakter meteorologischer Daten zu den Umgebungsbedingungen der Validierungsmessungen Bedingungen der internationalen Standardatmosphäre bei trockener Luft der Temperatur  $15^\circ$  auf Meereshöhe (vgl. Tabelle 6-2) angenommen. Um den Einfluss der Smagorinsky Konstante  $C$  und der gewählten Gitterauflösung  $N$  auf die Validierungsergebnisse abzubilden, werden diese Parameter wie im sechsten Kapitel im Bereich  $[0,06; \dots; 0,165]$  bzw.  $[16; 32; 64; 128]$  variiert.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Verläufe der radialen Komponente der Abwindgeschwindigkeit für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E. Entsprechende Graphen für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.3).



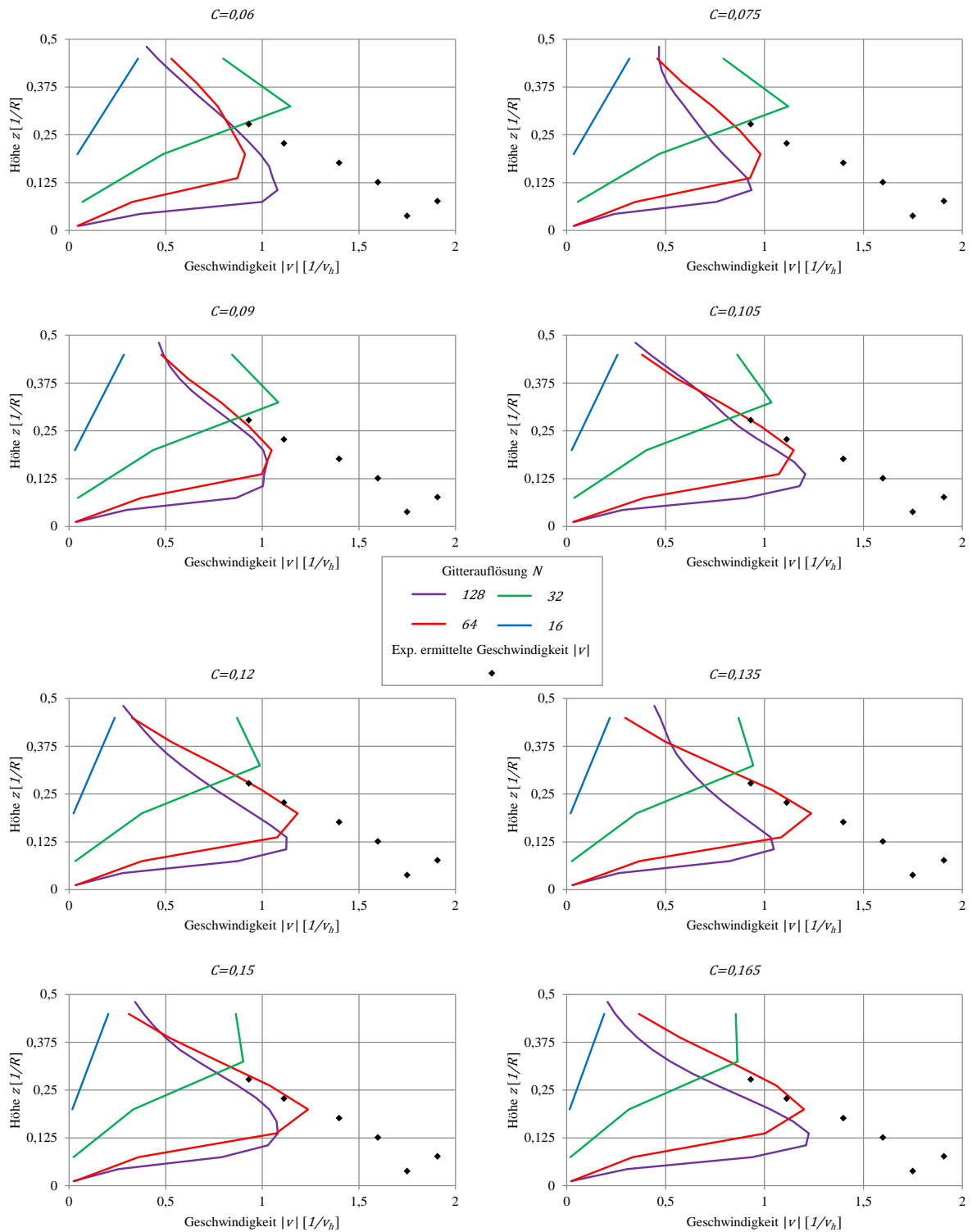


Abbildung 7-2: Radiale Abwindgeschwindigkeit CH-53E,  $H=1,949$ ,  $\psi=270^\circ$ ,  $r=1,251$

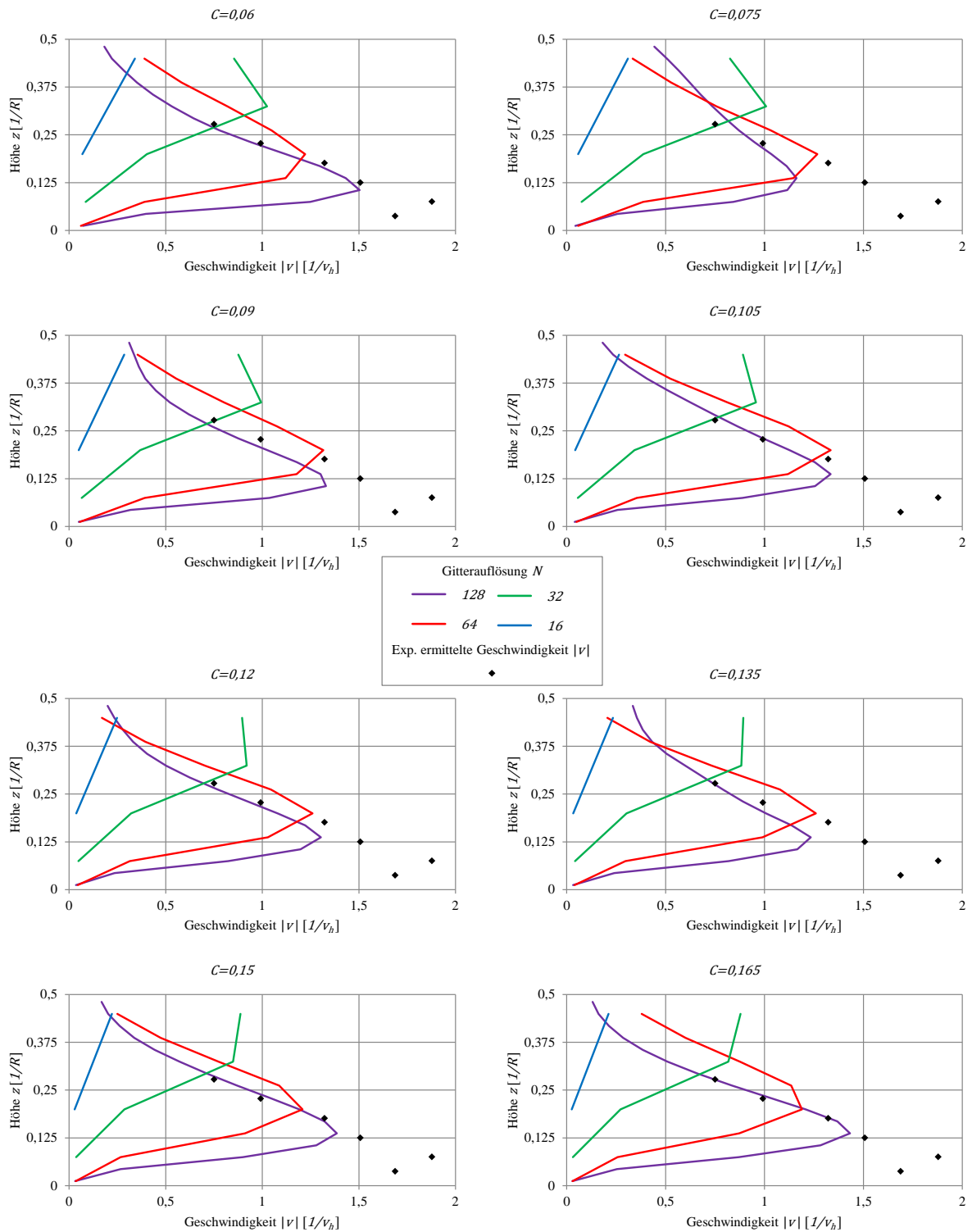


Abbildung 7-3: Radiale Abwindgeschwindigkeit CH-53E,  $H=1,949$ ,  $\psi=270^\circ$ ,  $r=1,501$

In den Abbildungen zeichnet sich abermals ein weitestgehend einheitliches Bild für die drei betrachteten Luftfahrzeuge ab. So wird deutlich, dass die Rechenergebnisse der Abwindsimulation die durch schwarze Rauten dargestellten Messergebnisse aus Flugversuchen in ihrer Größenordnung gut wiedergeben können. Unter der Verwendung feiner Rechengitterauflösungen kann teils auch die durch die Messwerte belegte charakteristische Kontur der sich an der Bodenebene ausbildenden Randschicht abgebildet werden. In ihrem Betrag liegen die Ergebnisse der Abwindsimulation jedoch hinter den Messergebnissen zurück.

Die beobachteten Abweichungen zwischen den Messergebnissen und den Rechenergebnissen der Abwindsimulation können auf die der numerischen Strömungssimulation immanente numerische Dissipation und den dämpfenden Einfluss des **Smagorinsky Turbulenzmodells** zurückgeführt werden. Insbesondere bei niedrigen Gitterauflösungen sind die bereits im sechsten Kapitel dieser Arbeit beschriebenen Auswirkungen des Turbulenzmodells auf die Strömungssimulation zu erkennen. So führen große Werte der Smagorinsky Konstante zu einer erhöhten Viskosität des betrachteten Fluids und damit zu reduzierten Abwindgeschwindigkeiten. Die erhöhte Dämpfung begünstigt zudem das Konvergenzverhalten der Simulation.

Bei hohen **Rechengitterauflösungen** ( $N=128$ ) gewinnt der reflektierende Einfluss der als Strömungshindernis fungierenden Bodenebene an Bedeutung. Unter den schwebenden Luftfahrzeugen stellt sich kein stationärer Strömungszustand ein. Im stattdessen vorliegenden turbulenten Strömungszustand ist die im vorangegangenen Absatz beschriebene Abhängigkeit zwischen dem Wert der Smagorinsky Konstante und dem Betrag der beobachteten Strömungsgeschwindigkeiten trotz der vorgenommenen zeitlichen Mittelung der Ergebnisse nicht so deutlich zu beobachten wie im Fall niedrigerer Rechengitterauflösungen. Die Verschlechterung des Konvergenzverhaltens ist auf die mit einer Verkleinerung der Rechengitterzellen einhergehende Reduktion der Eigendämpfung der Strömungssimulation zurückzuführen. Nichtsdestotrotz ermöglichen erst hohe Rechengitterauflösungen eine hinreichend genaue Abbildung der Strahlumlenkung und des Randschichtprofils an der Bodenebene.

Neben dem Wert der Smagorinsky Konstante und der verwendeten Rechengitterauflösung beeinflusst auch die **Rumpfgeometrie der betrachteten Luftfahrzeuge** die Ergebnisse der Modellvalidierung. Dies wird insbesondere beim Vergleich der Simulationsergebnisse mit den vor- bzw. hinter dem Luftfahrzeug gemessenen Daten aus den Flugversuchen der Sikorsky SH-60B und der Bell XV-15 deutlich. Der Rumpf der beiden Luftfahrzeuge verliert aufgrund der kartesischen Diskretisierung des Abwindsimulationsmodells seine strömungsoptimierte Form. Der bei der Umströmung der diskretisierten Geometrie auftretende erhöhte Widerstand zeigt sich in den deutlich hinter den Flugversuchsdaten zurückfallenden Simulationsergebnissen.

Eine **quantitative Darstellung** der Validierungsergebnisse findet sich in der folgenden Tabelle 7-3 für den Hubschrauber Sikorsky CH-53E. Entsprechende Tabellen für die Luftfahrzeuge Bell XV-15 und Sikorsky SH-60B finden sich im Anhang dieser Arbeit (vgl. Kapitel A.3). Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in den Tabellen nicht die absoluten Beträge der vom Abwindsimulationsmodell berechneten radialen Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$

aufgeführt, sondern über die verfügbaren Messwerte gemittelte Abweichung  $\overline{\Delta|u|}$  bzw.  $\overline{\Delta|v|}$ . Die Berechnung der Abweichungen erfolgt anhand von im Abwindsimulationsmodell interpolierten Geschwindigkeitswerten.

		Validierungsmessung	
		$H=1,949, \psi=270^\circ, r=1,251$	$H=1,949, \psi=270^\circ, r=1,501$
$N[-]$	$C[-]$	$\overline{\Delta v } [1/v_h]$	$\overline{\Delta v } [1/v_h]$
128	0,06	0,586	0,361
	0,075	0,760	0,535
	0,09	0,626	0,468
	0,105	0,568	0,470
	0,12	0,643	0,504
	0,135	0,698	0,526
	0,15	0,626	0,454
	0,165	0,590	0,444
64	0,06	0,802	0,670
	0,075	0,768	0,660
	0,09	0,720	0,663
	0,105	0,670	0,694
	0,12	0,666	0,704
	0,135	0,670	0,725
	0,15	0,676	0,754
	0,165	0,704	0,778
32	0,06	1,067	1,033
	0,075	1,083	1,040
	0,09	1,105	1,048
	0,105	1,127	1,063
	0,12	1,147	1,080
	0,135	1,164	1,095
	0,15	1,180	1,108
	0,165	1,194	1,120
16	0,06	1,398	1,290
	0,075	1,405	1,299
	0,09	1,411	1,306
	0,105	1,415	1,311
	0,12	1,419	1,316
	0,135	1,422	1,320
	0,15	1,424	1,323
	0,165	1,427	1,326

Tabelle 7-3: Gemittelte Abweichung der radialen Abwindgeschwindigkeit CH-53E

Die Tabellen bestätigen die zuvor getroffenen Aussagen. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Abwindsimulation und den Messwerten werden mit zunehmend feiner Rechengitterauflösung und abnehmendem Wert der Smagorinsky Konstante kleiner. Für hohe Gitterauflösungen stellen sich die geringsten Abweichungen ein, hier zeigen sich jedoch insbesondere bei hochbelasteten Rotoren, kleinen Konstantenwerten und geringen Flughöhen die Einflüsse eines zunehmend instationären Strömungsverhaltens. Diese Beobachtung deckt sich mit den Ergebnissen der Verifikation im sechsten Kapitel dieser Arbeit.

## 8 Schlussfolgerungen und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein neuartiges echtzeitfähiges Modell für die Simulation des Rotorabwinds von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen im terrain- und hindernisnahen Flug entwickelt (vgl. Abbildung 8-1). Das Modell schreibt weder die Geometrie noch die Anzahl oder die Ausgestaltung der Rotoren und der aerodynamisch wirksamen Flächen des betrachteten Luftfahrzeugs vor. Ebenso erlaubt es die Abbildung der Interaktion des Abwinds mit generischen, komplexen Strömungshindernissen ohne auf vorberechnete Lösungen zurückgreifen zu müssen. Diese Eigenschaften bilden Alleinstellungsmerkmale zum aktuellen Stand der Technik (vgl. Kapitel 1.2).

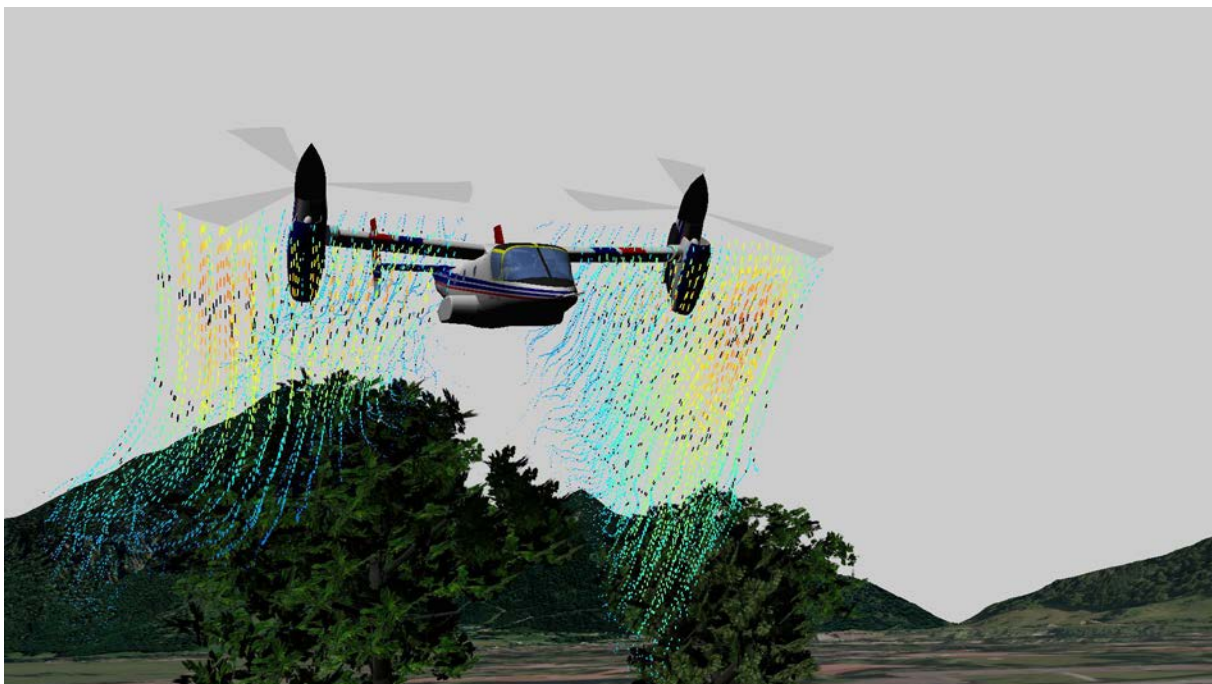


Abbildung 8-1: Echtzeit-Simulation des Rotorabwinds eines Kipprotor-Flugzeugs

Das der Simulation zugrundeliegende, dem betrachteten Luftfahrzeug anhaftende **Rechengitter** ist in seiner räumlichen Ausdehnung und in seiner Auflösung skalierbar gestaltet. Auf diese Weise kann das Modell an verfügbare Rechenkapazitäten angepasst werden (vgl. Kapitel 2). In dem beschriebenen Rechenraum werden generische Terrain- und Objektgeometrien mit Hilfe von Ray-Tracing Algorithmen erfasst und diskretisiert. Ebenso bilden die Rotoraerodynamik des betrachteten Luftfahrzeugs und die aus dessen Flugbewegung resultierende Relativbewegung zu erfassende **Randbedingungen** des Abwindsimulationsmodells (vgl. Kapitel 3).

Mit den Ergebnissen der Randbedingungserfassung erfolgt eine auf der Lattice-Boltzmann Methode basierende **Strömungssimulation** (vgl. Kapitel 4). Für die Berücksichtigung der Randbedingungen der Abwindsimulation wurde die Methode erweitert. So wurden neben der Einbindung eines Turbulenzmodells zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens geeignete Algorithmen für die Abbildung von Strömungshindernissen, der Rotoraerodynamik und der

Flugbewegung des betrachteten Luftfahrzeugs implementiert. Dies erforderte neben der Einbindung von zusätzlichen Quelltermen die Implementierung des ALE-Ansatzes. Auch die Berücksichtigung der für die Strömungssimulation durchlässigen Ränder des Rechenraums stellte erweiterte Anforderungen an die Implementierung. Mit Hilfe von PML-Randbedingungen konnten störende Reflektionen an den Rechenraumrändern wirkungsvoll unterbunden werden.

Um den Rechenzeitbedarf der Abwindsimulation zu minimieren, wurde auf eine parallelisierte **Implementierung** zurückgegriffen (vgl. Kapitel 5). So wurde die Randbedingungserfassung parallelisiert auf dem Mehrkernprozessor des verwendeten Simulationsrechners implementiert. Auch der Rechenzeitbedarf der Strömungssimulation wurde durch eine parallelisierte Implementierung minimiert. Aufgrund der großen Anzahl parallel auszuführender Rechenoperationen wurde hierbei eine den Grafikprozessor des verwendeten Simulationsrechners nutzende Implementierung auf Basis von NVIDIA CUDA gewählt.

Die **Verifikation** des Modellverhaltens der Abwindsimulation erfolgte in der Nachbildung ausgewählter Luftfahrzeuge und Flugzustände (vgl. Kapitel 6). Die Ergebnisse der Auswertung von diskreten Strömungsgeschwindigkeiten und der für Rotorabwind charakteristischen Strahleinschnürung wurden den Ergebnissen etablierter Modelle gegenübergestellt. Auch die Erfüllung der in der Zielsetzung dieser Arbeit formulierten Echtzeitanforderung an das Abwindsimulationsmodell wurde im Rahmen der Verifikation untersucht.

Für die **Validierung** der Rechenergebnisse des Modells wurden experimentell ermittelte Flugversuchsdaten herangezogen (vgl. Kapitel 7). Bei den Daten handelt es sich um untergrundparallele Strömungsgeschwindigkeiten, die unter schwebenden Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen aufgezeichnet und im Rahmen der Validierung den Ergebnissen des Abwindsimulationsmodells gegenübergestellt wurden.

In den folgenden Paragraphen erfolgt eine **Zusammenfassung der Verifikations- und der Validierungsergebnisse**. Eine persönliche Bewertung, Aussagen zur Einsetzbarkeit des Abwindsimulationsmodells und Empfehlungen für weiterführende Forschung schließen die Arbeit ab.

- In der Verifikation des Abwindsimulationsmodells wurde in Schwebeflugzuständen zweier Hubschrauber und eines Kipprotor-Flugzeugs gezeigt, dass das Modell nahezu unabhängig von der verwendeten Rechengitterauflösung die von Referenzmodellen berechneten Strömungsgeschwindigkeiten und die zugehörige Strahleinschnürung gut wiedergeben kann. Für die drei betrachteten Luftfahrzeuge zeichnet sich dabei ein einheitliches Bild ab. Die feinste Rechengitterauflösung führte in den Untersuchungen stets zu den besten Rechenergebnissen.
- Variationen des Werts der empirischen Konstante des verwendeten Turbulenzmodells, der Smagorinsky Konstante, beeinflussen die Ergebnisse der Abwindsimulation. Ein hoher Konstantenwert begünstigt das Stabilitätsverhalten der Simulation, bewirkt aber zugleich ein unphysikalisches Anwachsen der Dämpfung im betrachteten Rechenraum

und damit zu niedrige Abwindgeschwindigkeiten. Der Wert der Konstante ist geometriespezifisch und muss entweder basierend auf den Ergebnissen des sechsten Kapitels dieser Arbeit oder individuell bestimmt werden. Bestmögliche Ergebnisse wurden jedoch durchgehend mit einem Konstantenwert erzielt, der gerade so groß war, dass die Simulation ein stabiles Systemverhalten aufwies.

- Im Rahmen der Verifikation wurde auch die Einhaltung des in der Zielsetzung der Modellentwicklung formulierten Echtzeitanpruchs untersucht. Dabei wurde deutlich, dass das Modell bis zu einer Rechengitterauflösung von  $N=32$  unter Verwendung der zur Verfügung stehenden Simulationshardware in der Echtzeitsimulation einsetzbar ist. Eine Erhöhung der Rechengitterauflösung auf  $N=64$  ist bislang nur bei einer Verdreifachung der zur Verfügung stehenden Rechenzeit möglich.
- In der Validierung des Modells wurden dessen Simulationsergebnisse experimentell unter schwebenden Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen ermittelten Abwindgeschwindigkeiten gegenübergestellt. Dabei zeigte sich, dass das Modell die experimentell ermittelten Werte in ihrer Größenordnung für alle drei betrachteten Luftfahrzeuge gut abbilden kann. Die Genauigkeit der Übereinstimmung von Geschwindigkeitsbeiträgen und -gradienten profitiert dabei von einer Erhöhung der Gitterauflösung. Mit der Erhöhung der Auflösung wird jedoch auch die systemimmanente Dämpfung der Simulation reduziert. Dieser Umstand kann bei besonders hohen Gitterauflösungen ein instationäres Strömungsverhalten begünstigen.

Nach den Ergebnissen der Verifikation und der Validierung folgt eine **persönliche Bewertung** des entwickelten Abwindsimulationsmodells durch den Autor. Basierend auf dieser Einschätzung werden **Empfehlungen** für den Einsatz und die Erweiterung des Modells ausgesprochen.

- Das entwickelte Modell bietet vor dem Hintergrund des aktuellen Technikstands erstmalig die Möglichkeit, das Strömungsfeld unter fliegenden Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen im Umfeld generischer Hindernis- und Terraingometrie in Echtzeit zu berechnen. Dies eröffnet die Möglichkeit zum Einsatz des Modells in der realitätsnahen **Whiteout- und Brownout-Simulation** sowie in der Berechnung von auf nahe-stehende Personen und Objekte wirkenden Strömungskräften und einer daraus resultierenden **Gefährdungsbeurteilung**. In diesen Anwendungen können die Ergebnisse des Modells zu einer Erhöhung der Simulationsgüte in der Ausbildung und damit zu einer besseren Vorbereitung von Piloten und Besatzungen auf gefährliche Situationen beitragen. Daher wird der Einsatz des Abwindsimulationsmodells für weitere Forschung auf diesen Gebieten ausdrücklich empfohlen.
- Die in der Verifikation des Modells beobachtete gute Übereinstimmung rotornaher Abwindgeschwindigkeiten mit den Ergebnissen von Referenzmodellen eröffnete bereits weitere Anwendungen für das Abwindsimulationsmodell. So wird das Modell im Rahmen von Anschlussprojekten mit der Rotor aerodynamik des Flugmechanik-Codes gekoppelt, welcher am Lehrstuhl für Hubschraubertechnologie der Technischen Universität München zum Einsatz kommt. Dies ermöglicht die Simulation der **Inter-**

**aktion eines partiellen Bodeneffekts mit dem Flugverhalten** von Hubschraubern und Kipprotor-Flugzeugen, wie sie beispielsweise bei Manövern im Umfeld von Schiffen oder Windkraftanlagen auftritt (vgl. Abbildung 8-2). Dieser Forschungsbereich bietet ebenfalls zahlreiche Einsatzmöglichkeiten für das Abwindsimulationsmodell.

- Auch **externe Strömungsfelder** und der Wirbelnachlauf umströmter Objekte können im entwickelten Abwindsimulationsmodell abgebildet werden. Dieses Potential eröffnet neue Forschungsfelder, wie beispielsweise die Planung von Anflugtrajektorien in Offshore-Windparks. Ein entsprechendes Forschungsprojekt befindet sich am Lehrstuhl für Hubschraubertechnologie der Technischen Universität München in der Planungsphase.
- Neben den bereits genannten Forschungsbereichen birgt auch der Einsatz des Abwindsimulationsmodells in der Berechnung von **Strömungskräften im Flug mit Außenlasten und im Windenbetrieb** großes Potential. Eine Rückkopplung der auf die Außenlast wirkenden Strömungskräfte mit der Flugmechanik des Hubschraubers und eine Gefährdungseinschätzung des Windenbetriebs stehen hierbei im Vordergrund.

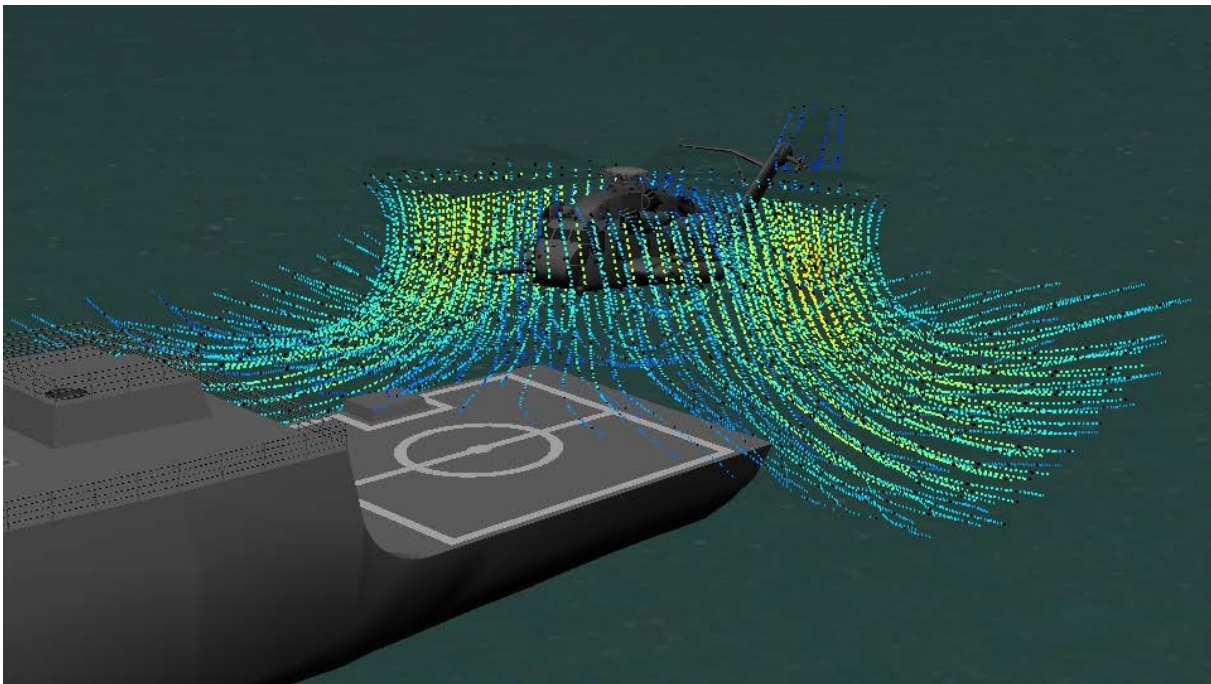


Abbildung 8-2: Echtzeit-Simulation von Schiffslandungen

Zusammengefasst bietet das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell erstmals die Möglichkeit, den Rotorabwind beliebiger Hubschrauber und Kipprotor-Flugzeuge im Umfeld generischer, komplexer Geometrien realitätsnah in Echtzeit zu simulieren. Dies eröffnet eine Vielzahl neuartiger Simulationsanwendungen, die bislang mangels spezifischer vorberechneter Lösungen oder einer geeigneten Modellierung nicht realisierbar waren. Mit der Rechenkapazität kommender Hardwaregenerationen wird das Modell, das unter Verwendung der aktuell zur Verfügung stehenden Hardware echtzeitfähige Simulationen mit einer Rechengitterauflösung von  $N=32$  erlaubt, noch feiner aufgelöste Echtzeit-Simulationen ermöglichen (vgl. Abbildung 8-3).



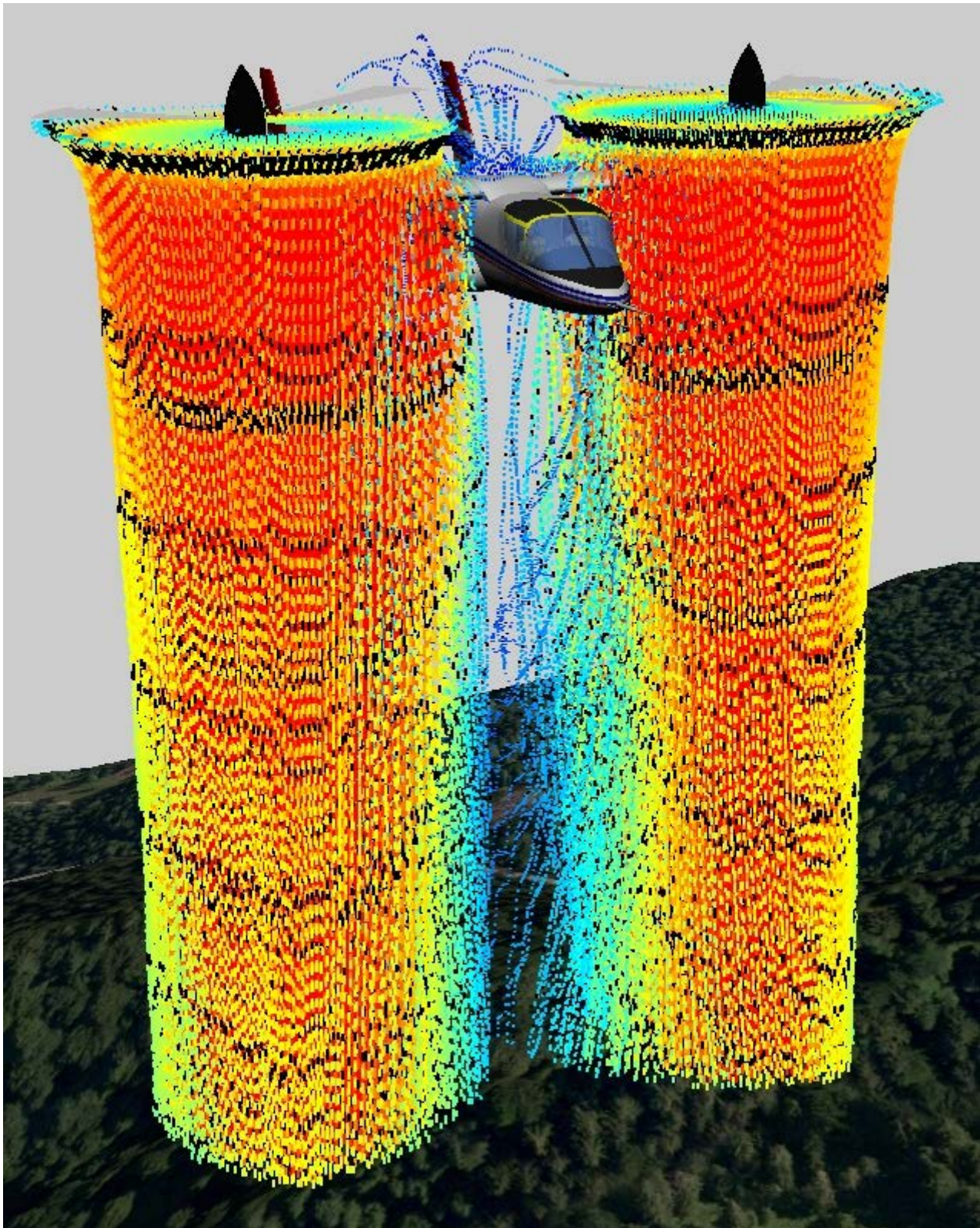


Abbildung 8-3: Simulation des Rotorabwinds eines Kipprotor-Flugzeugs,  $N=128$



## 9 Literaturverzeichnis

- [1] **S. Colby**, “Survivability Report”, *Rotor & Wing Magazine*, vol. 44, no. 7, pp. 50-51, Jul. 2010.
- [2] **S. Liewer**, “Desert landings rattle pilots' nerves”, *Stars and Stripes European Edition*, Apr. 2003. [Online]. Available: <http://www.stripes.com/news/desert-landings-rattle-pilots-nerve-1.4377>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [3] **Bundesstelle für Flugunfalluntersuchung**, “Untersuchungsbericht BFU 3X010-13“, März 2013. [Online]. Available: [http://www.bfu-web.de/DE/Publikationen/Untersuchungsberichte/2013/Bericht\\_13\\_3X010\\_HeliKollision\\_Berlin.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](http://www.bfu-web.de/DE/Publikationen/Untersuchungsberichte/2013/Bericht_13_3X010_HeliKollision_Berlin.pdf?__blob=publicationFile), Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [4] **A. Phillipone et al.**, “Helicopter Wakes Models in the Presence of Ground Obstacles”, GARTEUR HC/AG-17 TP-174, Apr. 2012.
- [5] **G. T. Jasion**, “Toward a Physics Based Entrainment Model for Simulation of Helicopter Brownout”, Ph.D. thesis, University of Southampton, Southampton, England, 2013.
- [6] **S. Thomas**, “A GPU-Accelerated, Hybrid FVM-RANS Methodology for Modeling Rotorcraft Brownout”, Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, MD, USA, 2013.
- [7] **S. Ghosh**, “Configurational effect on dust cloud formation and brownout”, M.S. thesis, Iowa State University, Ames, IA, USA, 2010.
- [8] **D. P. Pulla**, “A Study of Helicopter Aerodynamics in Ground Effect”, Ph.D. thesis, Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2006.
- [9] **NATO Science and Technology Organization**, “Rotary-Wing Brownout Mitigation: Technologies and Training”, RTO Technical Report HFM-162, Jul. 2012.
- [10] **J. D. Keller, D. A. Wachspress and J.C. Hoffler**, “Real Time Free Wake and Ship Airwake Model for Rotorcraft Flight Training Applications”, presented at the AHS 71<sup>st</sup> Annual Forum, Virginia Beach, VA, USA, May 5-7, 2015.
- [11] **F. Palo**, “Wake Models for Real-Time Rotorcraft Simulation”, presented at the PEGASUS-AIAA Student Conference VIII Edition, Poitiers, France, Apr. 12, 2012.
- [12] **C. G. Hooi, F. D. Lagor and D. A. Paley**, “Flow Sensing, Estimation and Control for Rotorcraft in Ground Effect”, presented at the IEEE Aerospace Conference, Sky, MT, USA, Mar. 7-14, 2015.

- [13] **J. F. Horn, J. D. Keller, G. R. Whitehouse and R.M. McKillip**, “Analysis of Urban Airwake Effects on Heliport Operations at the Chicago Children’s Memorial Hospital”, Final Report Submitted to Illinois Department of Transportation, Mai 2011.
- [14] **L. Friedmann, P. Ohmer and M. Hajek**, “Real-Time Simulation of Rotorcraft Downwash in Proximity of Complex Obstacles using Grid-Based Approaches”, presented at AHS 70<sup>th</sup> Annual Forum, Montréal, Canada, May 20-22, 2014.
- [15] **F. Viertler and M. Hajek**, “Requirements and Design Challenges in Rotorcraft Flight Simulations for Research Applications”, presented at AIAA SciTech - Modeling and Simulation Technologies Conference, Kissimmee, FL, USA, Jan. 5-9, 2015.
- [16] **C. Phillips, H. W. Kim and R. E. Brown**, “Helicopter brownout - Can it be modelled?”, *Aeronautical Journal*, vol. 115, no. 1164, pp. 123-133, Feb. 2011.
- [17] **S. W. Ferguson**, “Rotorwash Analysis Handbook, Volume I – Development and Analysis”, Research and Development Service, US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Washington D.C., USA, DOT/FAA/RD-93/31, Jun. 1994.
- [18] **M. B. Glauert**, “The wall jet”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 1, no. 6, pp. 625-643, Dec. 1956.
- [19] **M. M. George**, “Downwash Impingement Design Criteria for VTOL Aircraft”, U.S. ARMY Transportation Research Command, Fort Eustis, VA, USA, TRECOM Technical Report 64-48, Aug. 1964.
- [20] **M. M. George, E. Kisielowski and D. S. Douglas**, “Investigation of the Downwash Environment generated by V/STOL Aircraft operating in Ground Effect”, US ARMY Aviation Materiel Laboratories, Fort Eustis, VA, USA, USAAVLABS Technical Report 68-52, Jul. 1968.
- [21] **M. P. Sullivan**, “Characteristics, Causes, and Evaluation of Helicopter Particulate Visual Obstruction”, M.S. thesis, Air Force Air University, Wright-Patterson Air Force Base, OH, USA, 2012.
- [22] **Z. Xu, H. Hangan and P. Yu**, “Analytical Solutions for a Family of Gaussian Impinging Jets”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 75, no. 2, pp. 021019-1 - 021019-12, Mar. 2008.
- [23] **G. D. Padfield**, *Helicopter Flight Dynamics*. Oxford, England: Blackwell Science, 1996.
- [24] **I. C. Cheeseman and W. E. Bennett**, “The Effect of the Ground on a Helicopter Rotor in Forward Flight”, Ministry of Supply, London, England, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda No. 3021, Sep. 1955.

- [25] **A. J. Landgrebe**, “The Wake Geometry of a Hovering Helicopter Rotor and its Influence on Rotor Performance”, presented at AHS 28<sup>th</sup> Annual Forum, Washington, D.C., USA, May 17-19, 1972.
- [26] **J. D. Kocurek and J. L. Tangler**, “A Prescribed Wake Lifting Surface Hover Performance Analysis”, presented at AHS 32<sup>nd</sup> Annual Forum, Washington, D.C., USA, May 10-12, 1976.
- [27] **B. van der Wall**, “Analytische Formulierung der instationären Profilbeiwerte und deren Anwendung in der Rotorsimulation“, Deutsche Forschungsanstalt für Luft und Raumfahrt, Braunschweig, Germany, GOR 17006 DLR-FB 90-28, Mar. 1990.
- [28] **K. Wieghardt**, “Theoretische Strömungslehre” in *Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik Bd. 2*, 2<sup>nd</sup> ed. Andreas Dillmann, Ed. Göttingen, Germany: Universitätsverlag Göttingen, 2005, pp. 62.
- [29] **T. A. Egolf and A. J. Landgrebe**, “Helicopter Rotor Wake Geometry and its Influence in Forward Flight Vol. 1”, NASA Contractor Report 3726, Oct. 1983.
- [30] **T. E. Lee, J. G. Leishman and M. Ramasamy**, “Fluid Dynamics of Interacting Blade Tip Vortices With a Ground Plane”, presented at AHS 64<sup>th</sup> Annual Forum, Montréal, Canada, Apr. 28-May 1, 2008.
- [31] **M. Gilad**, “Evaluation of Flexible Rotor Hover Performance in Extreme Ground Effect”, M.S. thesis, University of Maryland, College Park, MD, USA, 2011.
- [32] **P. F. Lorber and T. A. Egolf**, “An Unsteady Helicopter Rotor-Fuselage Interaction Analysis”, NASA Contractor Report 4178, Sep. 1988.
- [33] **B. G. van der Wall, A. Bauknecht, S. N. Jung and Y. H. You**, “Enhancement of Prescribed Wake Codes With a CFD-Based Model of The Fuselage-Induced Velocities”, presented at 39<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Moscow, Russia, Sep. 3-6, 2013.
- [34] **J. V. R. Prasad and L. N. Sankar**, “Ground Effect Models for Rotorcraft/Ship Dynamic Interface Study”, Naval Air Warfare Center, Warminster, PA, USA, Project E-16-M07 Final Report, Apr. 1996.
- [35] **J. G. Leishman**, *Principles of Helicopter Aerodynamics*, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2006.
- [36] **D. A. Wachspress, T. R. Quackenbush, and A. H. Boschitsch**, “First-Principles Free-Vortex Wake Analysis for Helicopters and Tiltrotors”, presented at AHS 59<sup>th</sup> Annual Forum, Phoenix, AZ, USA, Mai 6-8, 2003.
- [37] **T. R. Quackenbush, D. A. Wachspress, J. D. Keller and A. H. Boschitsch**, “Full Vehicle Flight Simulation with Real Time Free Wake Methods”, presented at AHS

- Aerodynamics, Acoustics, and Test and Evaluation Technical Specialists Meeting, San Francisco, CA, USA, Jan. 23-25, 2002.
- [38] **J. F. Horn, D. O. Bridges, D. A. Wachspress and S. L. Rani**, “Implementation of a Free-Vortex Wake Model in Real-Time Simulation of Rotorcraft”, *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication*, vol. 3, no. 3, pp. 93-114, Mar. 2006.
- [39] **J. D. Keller, G. R. Whitehouse, D. A. Wachspress, M. E. Teske and T. R. Quackenbush**, “A Physics-Based Model of Rotorcraft Brownout for Flight Simulation Applications”, presented at AHS 62<sup>nd</sup> Annual Forum, Phoenix, AZ, USA, May 9-11, 2006.
- [40] **J. D. Keller, D. A. Wachspress, J.C. Hoffler, N. J. Kachman and J. Nichols**, “Application of a Real Time Free Wake Induced Velocity Model in a Naval Rotorcraft Flight Trainer”, presented at AHS 67<sup>th</sup> Annual Forum, Virginia Beach, VA, USA, May 3-5, 2011.
- [41] **F. Palo, R. Bianco Mengotti, F. Scorcelletti and L. Vigevano**, “Fast Free Wake: A possible Approach to Real-Time Rotor Wake Simulation”, presented at 37<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Gallarate, Italy, Sep. 13-15, 2011.
- [42] **J. H. Ferziger and M. Perić**, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2002.
- [43] **X. Wei, W. Li, K. Mueller and A. E. Kaufman**, “The Lattice-Boltzmann Method for Simulating Gaseous Phenomena”, *IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics*, vol. 10, no. 2, pp. 164-176, Mar./Apr. 2004.
- [44] **P. Ohmer**, “Development of a Fluid Solver for the Simulation of Rotorcraft-related Downwash in Real-time”, unpublished term thesis, Institute of Helicopter Technology, Technische Universität München, Munich, Germany, 2012.
- [45] **H. Herwig and B. Schmandt**, *Strömungsmechanik*, 3<sup>rd</sup> ed. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2015.
- [46] **F. Holzapfel**, “Vorlesung - Flugsystemdynamik I“, unpublished scriptum, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Munich, Germany, Oct. 2009.
- [47] **I. Chopra**, “Helicopter Dynamics”, unpublished scriptum, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park, MA, USA, Mar. 2001.
- [48] **M. Hajek**, “Flugphysik der Hubschrauber 1“, unpublished scriptum, Institute of Helicopter Technology, Technische Universität München, Munich, Germany, Oct. 2014.

- [49] **D. Cohen-Or and A. Kaufman**, “Fundamentals of Surface Voxelization”, *Graphical Models and Image Processing*, vol. 57, no. 6, pp. 453-461, Nov. 1995.
- [50] **T. Frühauf**, *Graphisch-Interaktive Strömungsvisualisierung*, Berlin, Germany: Springer Verlag, 1997.
- [51] **E. Lengyel**, *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics*, 2<sup>nd</sup> ed. Boston, MA, USA: Course Technology Cengage Learning, 2004.
- [52] **J. Eckstein**, “Echtzeitfähige Kollisionserkennung für Virtual Reality Anwendungen“, Ph.D. thesis, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany, 1998.
- [53] **OpenSceneGraph**, *osgUtil::LineSegmentIntersector Class Reference*. [Online]. Available: <http://trac.openscenegraph.org/documentation/OpenSceneGraphReferenceDocs/a00477.html>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [54] **OpenSceneGraph**, *osg::kdTree Class Reference*. [Online]. Available: <http://trac.openscenegraph.org/documentation/OpenSceneGraphReferenceDocs/a00446.html>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [55] **T. Möller and B. Trumbore**, “Fast, Minimum Storage Ray/Triangle Intersection”, *Journal of Graphics Tools*, vol. 2, no. 1, pp. 21-28, Oct. 1997.
- [56] **T. Akenine-Möller, E. Haines and N. Hoffman**, *Real-Time Rendering*, 3<sup>rd</sup> ed. Natick, MA, USA: A K Peters Ltd/CRC Press, 2008.
- [57] **W. Johnson**, *Rotorcraft Aeromechanics*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2013.
- [58] **I. J. de Albuquerque Macêdo Júnior**, “On the simulation of fluids for computer graphics”, M.S. thesis, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicadas, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [59] **R. R. Nourgaliev, T. N. Dinh, T. G. Theofanous and D. Joseph**, “The Lattice Boltzmann Equation Method: Theoretical Interpretation, Numerics and Implications”, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 29, no. 1, pp. 117-169, Jan. 2003.
- [60] **D. A. Wolf-Gladrow**, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction*. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2005.
- [61] **S. Succi**, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford, England: Oxford University Press, 2001.
- [62] **D. Hänel**, *Molekulare Gasdynamik – Einführung in die kinetische Theorie der Gase und Lattice-Boltzmann-Modelle*. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2004.

- [63] **L. Boltzmann**, “Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen”, in *Kinetische Theorie, Band II Irreversible Prozesse*, S.G. Brush, Ed. Braunschweig, Germany: Vieweg Verlag, 1970, pp. 115-224.
- [64] **P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook**, “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems”, *Physical Review*, vol. 94, no. 3, pp. 511-525, May 1954.
- [65] **U. Frisch, B. Hasslacher and Y. Pomeau**, “Lattice Gas Automata for the Navier-Stokes-Equation”, *Physical Review Letters*, vol. 56, no. 14, pp. 1505-1508, Apr. 1986.
- [66] **H. Chen, S. Chen and W. H. Matthaeus**, “Recovery of the Navier-Stokes Equations using a Lattice-Gas Boltzmann Method”, *Physical Review A*, vol. 45, no. 8, pp. 5339-5342, Apr. 1992.
- [67] **Y. H. Quian, D. d’Humières and P. Lallemand**, “Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation”, *Europhysics Letters*, vol. 17, no. 6, pp. 479-484, Jan. 1992.
- [68] **P. Lallemand and L. S. Luo**, “Theory of the Lattice Boltzmann Method: Dispersion, Dissipation, Isotropy, Galilean Invariance, and Stability”, *Physical Review E*, vol. 61, no. 6, pp. 6546-6562, Jun. 2000.
- [69] **D. D’Humières, I. Ginzburg, M. Krafzyk, P. Lallemand and L. S. Luo**, “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions”, *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, vol. 360, pp. 437-451, Mar. 2002.
- [70] **J. Smagorinsky**, “General Circulation Experiments with the Primitive Equations”, *Monthly Weather Review*, vol. 91, no. 3, pp. 99-164, Mar. 1963.
- [71] **S. Hou, J. Sterling, S. Chen and G. D. Doolen**, “A Lattice Boltzmann Subgrid Model for High Reynolds Number Flow” in *Pattern Formation and Lattice gas Automata*, R. Kapral and A. T. Lawniczak, Eds., Fields Institute Communications, vol. 6, pp. 151-166, Dec. 1995.
- [72] **N. Delbosc, J. L. Summers, A. Khan, N. Kapur and C. J. Noakes**, “Optimised Implementation of the Lattice Boltzmann Method on a Graphics Processing Unit towards Real-Time Fluid Simulation”, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 67, no. 2, pp. 462-475, Feb. 2014.
- [73] **A. Khan, N. Delbosc, C. J. Noakes and J. L. Summers**, “Real-time flow simulation of indoor environments using Lattice Boltzmann Method”, *Building Simulation*, vol. 8, no. 4, pp. 405-414, Aug. 2015.
- [74] **N. Thürey**, “Physically based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method”, Ph.D. thesis, Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen, Germany, 2007.



- [75] **R. S. Maier, R. S. Bernard and D. W. Grunau**, “Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method”, *Physics of Fluids*, vol. 8, no. 7, pp. 1788-1801, Jul. 1996.
- [76] **O. Filippova and D. Hänel**, “Grid Refinement for Lattice-BGK Models”, *Journal of Computational Physics*, vol. 147, no. 1, pp. 219-228, Nov. 1998.
- [77] **O. Filippova and D. Hänel**, “Boundary-Fitting and Local Grid Refinement for Lattice-BGK Models”, *International Journal of Modern Physics C*, vol. 9, no. 8, pp. 1271-1279, Dec. 1998.
- [78] **R. Mei, L.-S. Luo and W. Shyy**, “An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice-Boltzmann Method”, *Journal of Computational Physics*, vol. 155, no. 2, pp. 307-330, Nov. 1999.
- [79] **W. Li, Z. Fan, X. Wei and A. Kaufman**, “Flow Simulation with Complex Boundaries” in *GPU Gems 2: Programming Techniques for High-Performance Graphics and General Purpose Computation*, M. Pharr Ed. Addison-Wesley, NJ, USA, 2005, pp. 747-764.
- [80] **A. Monitzer**, “Fluid Simulation on the GPU with Complex Obstacles Using the Lattice Boltzmann Method”, diploma thesis, Technische Universität Wien, Vienna, Austria, 2008.
- [81] **Y. Liu, X. Liu and E. Wu**, “Real-Time 3D Fluid Simulation on GPU with Complex Obstacles”, in *Proceedings of the 12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG'04)*, IEEE Computer Science, Washington D.C., USA, 2004, pp. 247-265.
- [82] **A. J. C. Ladd and R. Verberg**, “Lattice-Boltzmann Simulations of Particle-Fluid Suspensions”, *Journal of Statistical Physics*, vol. 104, no. 5-6, pp. 1191-1251, Sep. 2001.
- [83] **Z. Guo, C. Zheng and B. Shi**, “Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method”, *Physical Review E*, vol. 65, no. 4, pp. 1-6, Apr. 2002.
- [84] **C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook**, “An arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds”, *Journal of Computational Physics*, vol. 135, no. 2, pp. 203-216, Aug. 1997.
- [85] **A. Tamura and M. Tsutahara**, “Direct Simulation of Aeolian tones emitted from a circular cylinder in transonic flows using the finite difference Lattice Boltzmann”, *Fluid Dynamics Research*, vol. 42, no. 1, Feb. 2010.
- [86] **K. Akumatsu and M. Tsutahara**, “Analysis of tunnel compression wave generation and distortion by the lattice Boltzmann method” in *Advances in Fluid Mechanics VIII Vol. 69*, M. Rahman and C.A. Brebbin, Eds. Southhampton, England: WIT Press, 2010, pp. 169-180.

- [87] **M. Meldi, E. Vegnault and P. Sagaut**, “An arbitrary Lagrangian-Eulerian approach for the simulation of immersed moving solids with Lattice Boltzmann Method”, *Journal of Computational Physics*, vol. 235, no. 6, pp. 182-198, Feb. 2013.
- [88] **R. Zhang et al.**, “Lattice Boltzmann Approach for Local Reference Frames”, *Communications in Computational Physics*, vol. 9, no. 5, pp. 1193-1205, May 2011.
- [89] **Y. Li**, “An improved volumetric LBM boundary approach and its extension for sliding mesh simulation”, Ph.D. thesis, Iowa State University, Ames, IA, USA, 2012.
- [90] **S. Hill**, “Tri-linear Interpolation” in *Graphics Gems IV*, P. S. Heckbert, Ed. London, England: Academic Press, 1994, pp. 521-525.
- [91] **Q. Zou and X. He**, “On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model”, *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1591-1598, Jun. 1997.
- [92] **M. Hecht and J. Harting**, “Implementation of on-site velocity boundary conditions for D3Q19-lattice Boltzmann simulations”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2010, no. 1, Jan. 2010.
- [93] **M. Hecht and J. Harting**, “Erratum: Implementation of on-site velocity boundary conditions for D3Q19-lattice Boltzmann simulations”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2013, no. 2, Feb. 2013.
- [94] **D. Yu, R. Mei and W. Shyy**, “Improved treatment of the open boundary in the method of Lattice Boltzmann equation”, *Progress in Computational Fluid Dynamics*, vol. 5, no. 1-2, pp. 3-12, Jan. 2005.
- [95] **S. Izquierdo, P. Martínez-Lera and N. Fueyo**, “Analysis of open boundary effects in unsteady lattice Boltzmann simulations”, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 58, no. 5, pp. 914-921, Sep. 2009.
- [96] **Z. Yang**, “Analysis of Lattice Boltzmann Boundary Conditions”, Ph.D. thesis, Universität Konstanz, Konstanz, Germany, 2007.
- [97] **S. J. B. Stoll**, “Lattice Boltzmann Simulation of Acoustic Fields, with Special Attention to Non-reflecting Boundary Conditions”, M.S. thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2014.
- [98] **M. B. Schlaffer**, “Non-reflecting Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method”, Ph.D. thesis, Technische Universität München, Munich, Germany, 2013.
- [99] **T. J. Poinso and S. K. Lele**, “Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 101, no. 1, pp. 104-129, Jul. 1992.

- [100] **S. Izquierdo and N. Fueyo**, “Characteristic nonreflecting boundary conditions for open boundaries in lattice Boltzmann methods”, *Physical Review E*, vol. 78, no. 4, pp. 5339-5342, Oct. 2008.
- [101] **J.-P. Bérenger**, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves”, *Journal of Computational Physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185-200, Sep. 1994.
- [102] **F. Q. Hu**, “On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer”, *Journal of Computational Physics*, vol. 129, no. 1, pp. 201-219, Nov. 1996.
- [103] **A. Najafi-Yazdi and L. Mongeau**, “An absorbing boundary condition for the lattice Boltzmann method based on the perfectly matched layer”, *Computers & Fluids*, vol. 68, pp. 203-218, Sep. 2012.
- [104] **OpenSceneGraph**, *The OpenSceneGraph Project Website*. [Online]. Available: <http://www.openscenegraph.org>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [105] **OpenThreads**, *OpenThreads*, [Online]. Available: <http://openthreads.sourceforge.net>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [106] **NVIDIA Corporation**, *CUDA C Programming Guide*. [Online]. Available: <http://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/index.html#axzz4LH8pNA8x>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [107] **OpenCL**, *OpenCL – The open standard for programming of heterogenous systems*. [Online]. Available: <https://www.khronos.org/ocl/>, Accessed on: Sep. 12, 2016.
- [108] **K. Komatsu, K. Sato, Y. Arai, K. Koyama, H. Takizawa and H. Kobayashi**, “Evaluating Performance and Portability of OpenCL Programs”, presented at 5<sup>th</sup> International Workshop on Automatic Performance Tuning, Berkeley, CA, USA, Jun. 21, 2010.
- [109] **R. W. Prouty**, *Helicopter Performance, Stability, and Control*. Malabar, FL, USA: Krieger Publishing Company, 2005.
- [110] **M. Maisel**, “NASA/ARMY XV-15 Tilt-Rotor Research Aircraft Familiarization Document”, NASA Ames Research Center and US Army Air Mobility R&D Laboratory, Moffet Field, CA, USA, Rep. No. NASA TM X-62, 407, Jan. 1975.
- [111] **Intel Corporation**, *Intel® Core™ i7 Processor Family LGA-2011 Socket Datasheet*, Vol. 1. [Online]. Available: <http://www.intel.de/content/www/de/de/processors/core/core-i7-lga-2011-datasheet-vol-1.html>, Accessed on Sep. 12, 2016.
- [112] **Gainward Co. Ltd.**, *Gainward GeForce GTX 780 Ti 3Gb – The fastest single-GPU card on the planet*. [Online]. Available: [http://www.gainward.com/main/product/vga/pro/p00921/p00921\\_datasheet\\_5465271cc8730a45.pdf?s=923](http://www.gainward.com/main/product/vga/pro/p00921/p00921_datasheet_5465271cc8730a45.pdf?s=923), Accessed on Sep. 12, 2016.



## A Anhang

### A.1 Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit im Schwebeflug

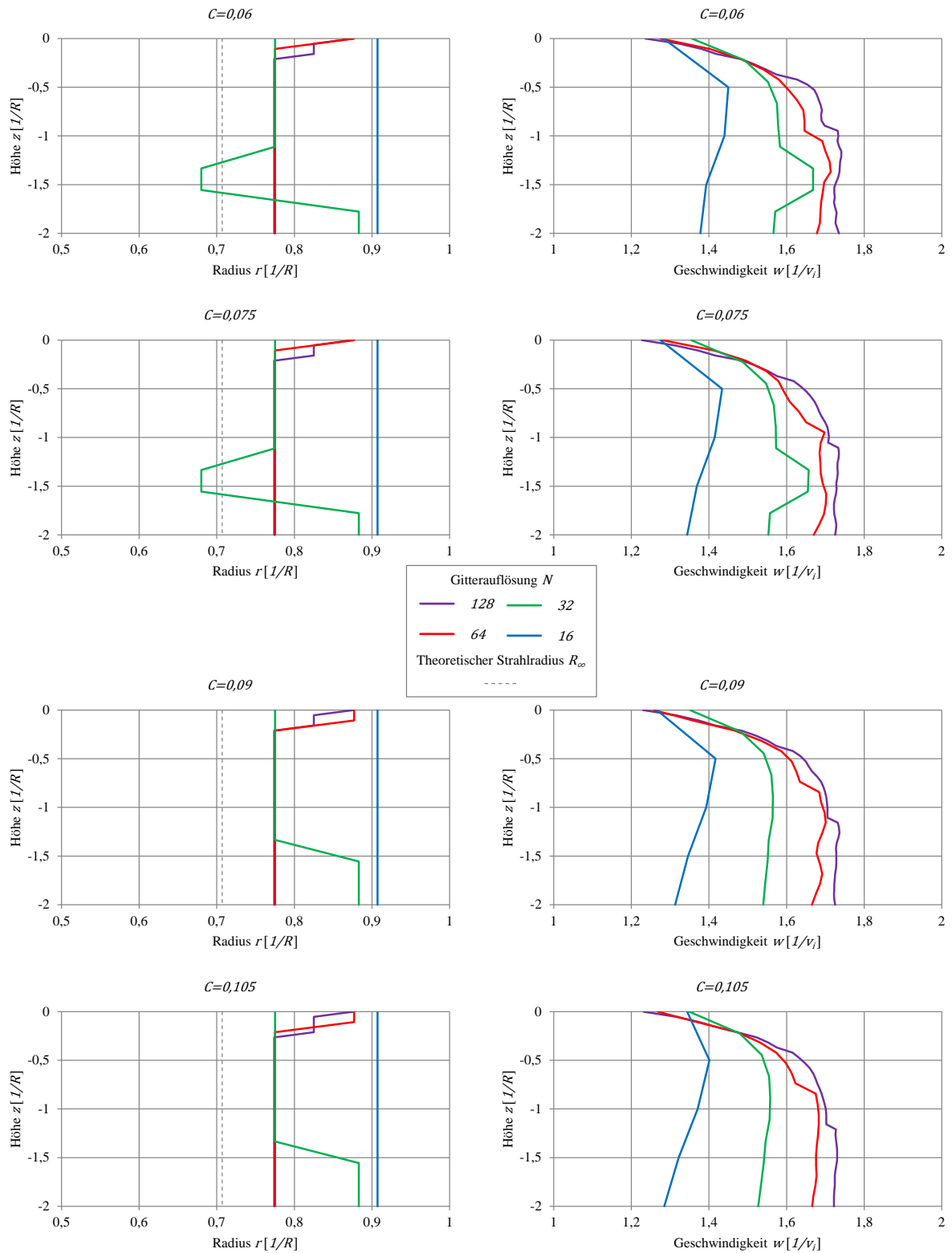


Abbildung A-1: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit XV-15 (1/2)

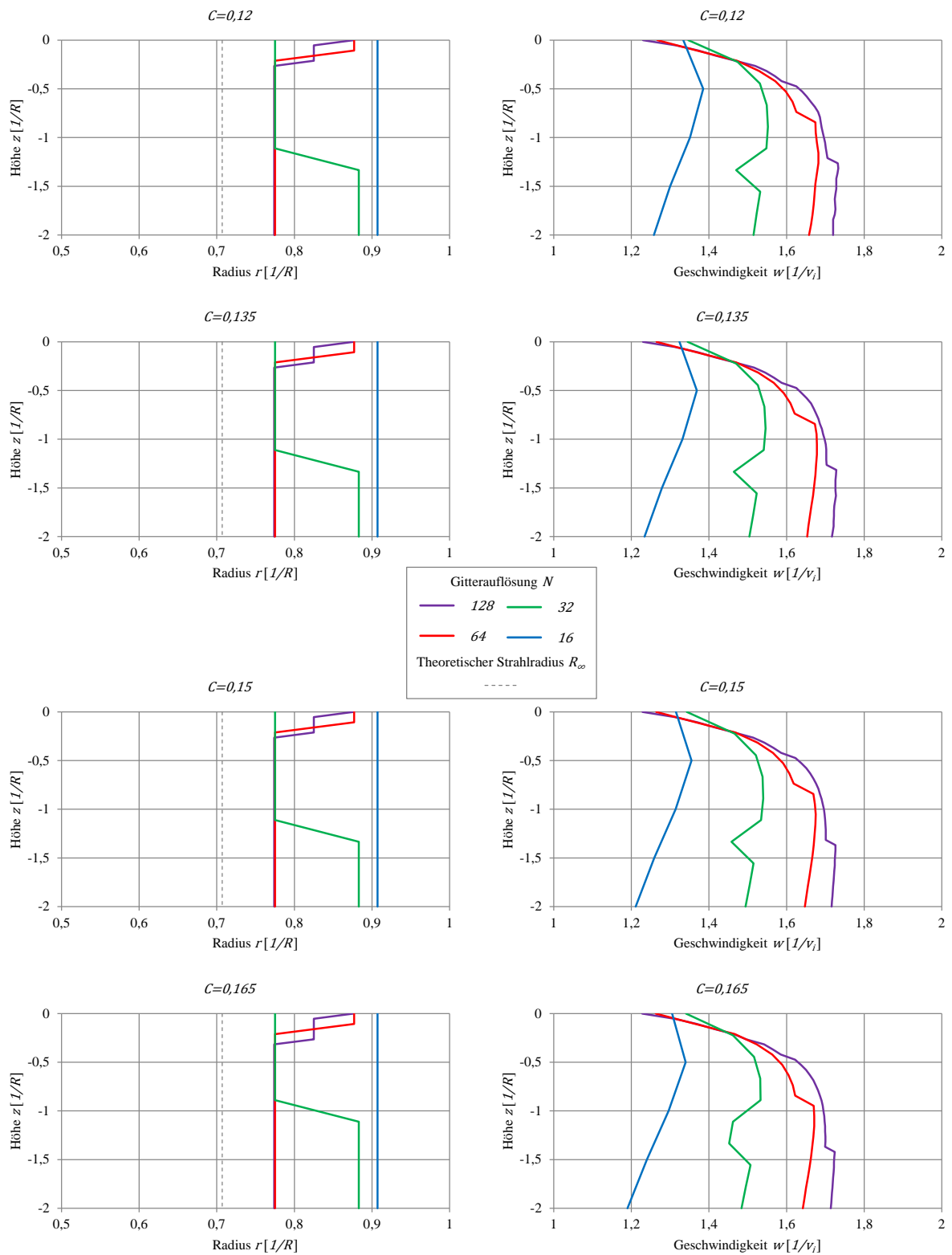


Abbildung A-2: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit XV-15 (2/2)

		$z [1/R]$					
		0		-1		-2	
$N [-]$	$C [-]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$
128	0,06	0,876	1,236	0,774	1,733	0,774	1,735
	0,075		1,227		1,709		1,725
	0,09		1,230		1,705		1,725
	0,105		1,231		1,701		1,722
	0,12		1,230		1,696		1,720
	0,135		1,230		1,698		1,717
	0,15		1,229		1,696		1,716
	0,165		1,228		1,695		1,714
64	0,06	0,877	1,275	0,775	1,669	0,775	1,678
	0,075		1,280		1,693		1,670
	0,09		1,258		1,694		1,665
	0,105		1,268		1,682		1,666
	0,12		1,267		1,677		1,658
	0,135		1,265		1,678		1,653
	0,15		1,264		1,674		1,647
	0,165		1,263		1,671		1,642
32	0,06	0,775	1,356	0,775	1,581	0,883	1,566
	0,075		1,354		1,573		1,553
	0,09		1,351		1,565		1,540
	0,105		1,349		1,557		1,527
	0,12		1,347		1,550		1,515
	0,135		1,345		1,544		1,504
	0,15		1,343		1,537		1,494
	0,165		1,341	0,829	1,498		1,484
16	0,06	0,907	1,283	0,907	1,440	0,907	1,378
	0,075		1,275		1,415		1,344
	0,09		1,266		1,393		1,313
	0,105		1,344		1,371		1,285
	0,12		1,334		1,351		1,258
	0,135		1,324		1,332		1,234
	0,15		1,315		1,314		1,211
	0,165		1,305		1,296		1,190

Tabelle A-1: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit XV-15

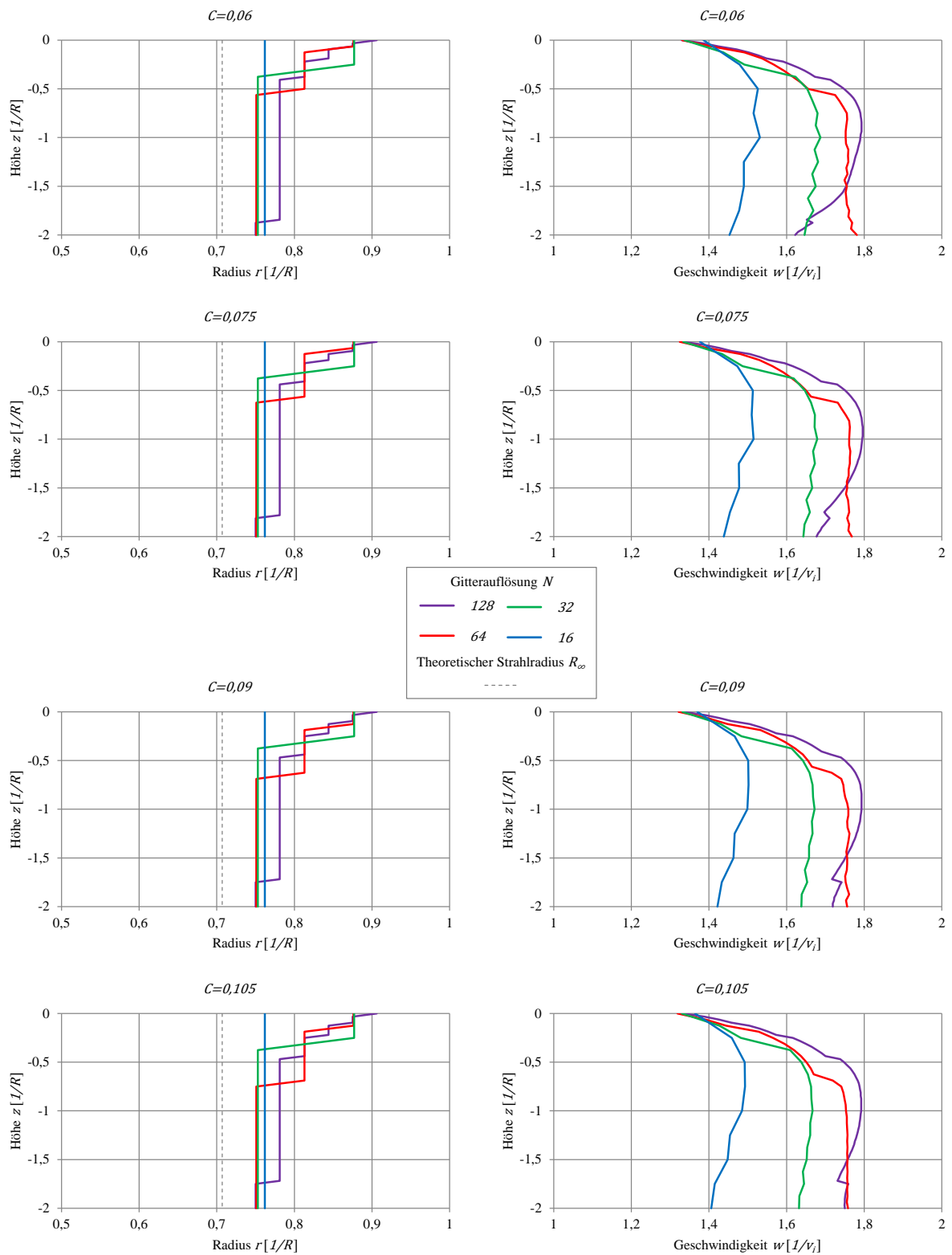


Abbildung A-3: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit SH-60B (1/2)



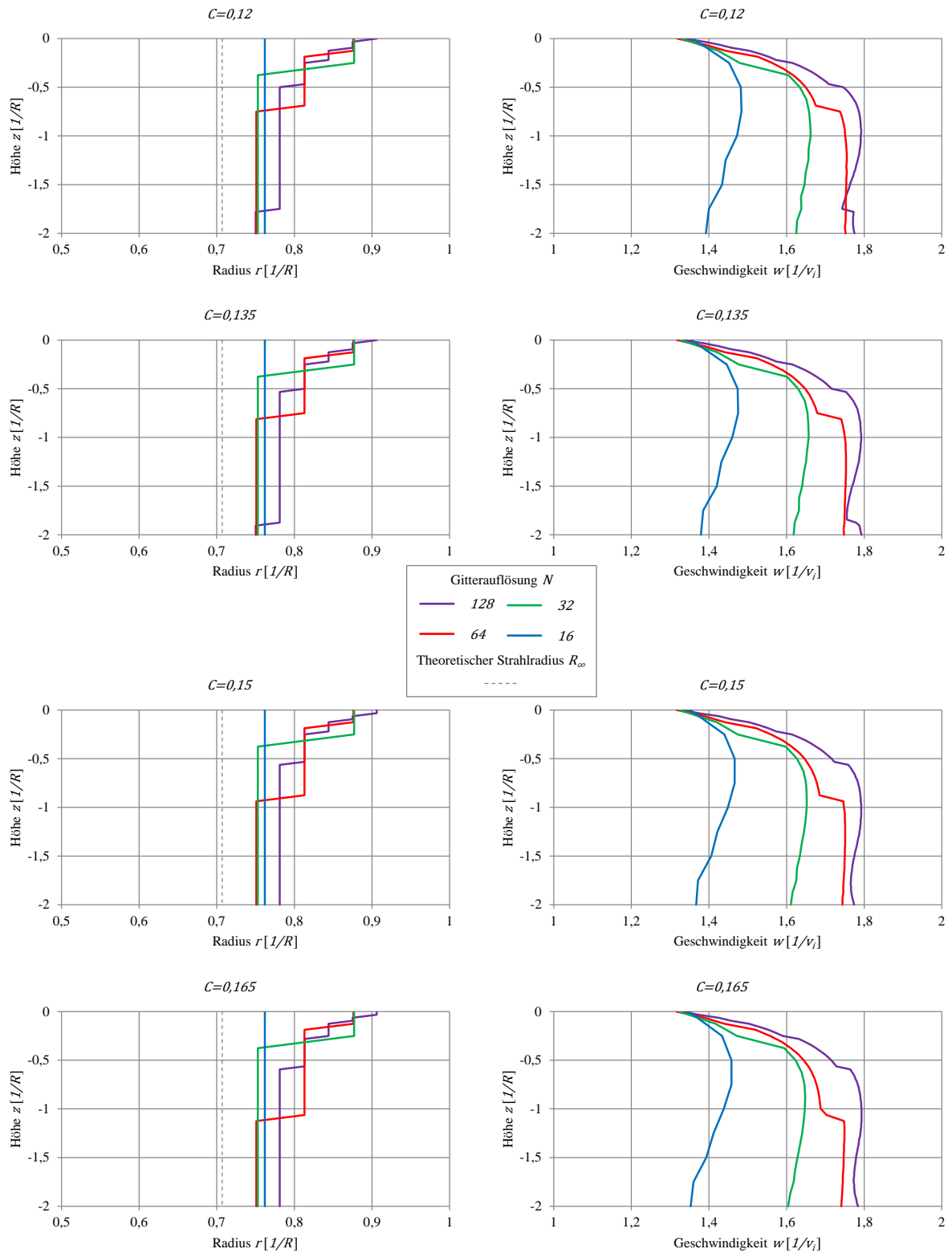


Abbildung A-4: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit SH-60B (2/2)

		$z [1/R]$					
		0		-1		-2	
$N [-]$	$C [-]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$	$r [1/R]$	$w [1/v_i]$
128	0,06	0,906	1,330	0,781	1,790	0,750	1,622
	0,075		1,333		1,795		1,677
	0,09		1,333		1,793		1,719
	0,105		1,333		1,792		1,750
	0,12		1,333		1,791		1,775
	0,135		1,332		1,792		1,793
	0,15		1,332		1,792		1,774
	0,165		1,332		1,793	0,781	1,784
64	0,06	0,876	1,331	0,751	1,752	0,751	1,781
	0,075		1,325		1,761		1,768
	0,09		1,322		1,759		1,756
	0,105		1,319		1,753		1,758
	0,12		1,318		1,751		1,752
	0,135		1,318		1,750		1,748
	0,15		1,317		1,748		1,744
	0,165		1,316	0,813	1,688	1,741	
32	0,06	0,877	1,337	0,753	1,687	0,753	1,646
	0,075		1,334		1,679		1,643
	0,09		1,332		1,672		1,638
	0,105		1,330		1,667		1,632
	0,12		1,328		1,662		1,625
	0,135		1,326		1,657		1,618
	0,15		1,324		1,652		1,611
	0,165		1,323		1,647		1,604
16	0,06	0,762	1,386	0,762	1,531	0,762	1,453
	0,075		1,377		1,515		1,438
	0,09		1,370		1,499		1,422
	0,105		1,364		1,485		1,406
	0,12		1,359		1,472		1,392
	0,135		1,355		1,460		1,379
	0,15		1,352		1,449		1,367
	0,165		1,348		1,438		1,353

Tabelle A-2: Strahleinschnürung und Strömungsgeschwindigkeit SH-60B

## A.2 Induzierte Geschwindigkeit im Vorwärtsflug

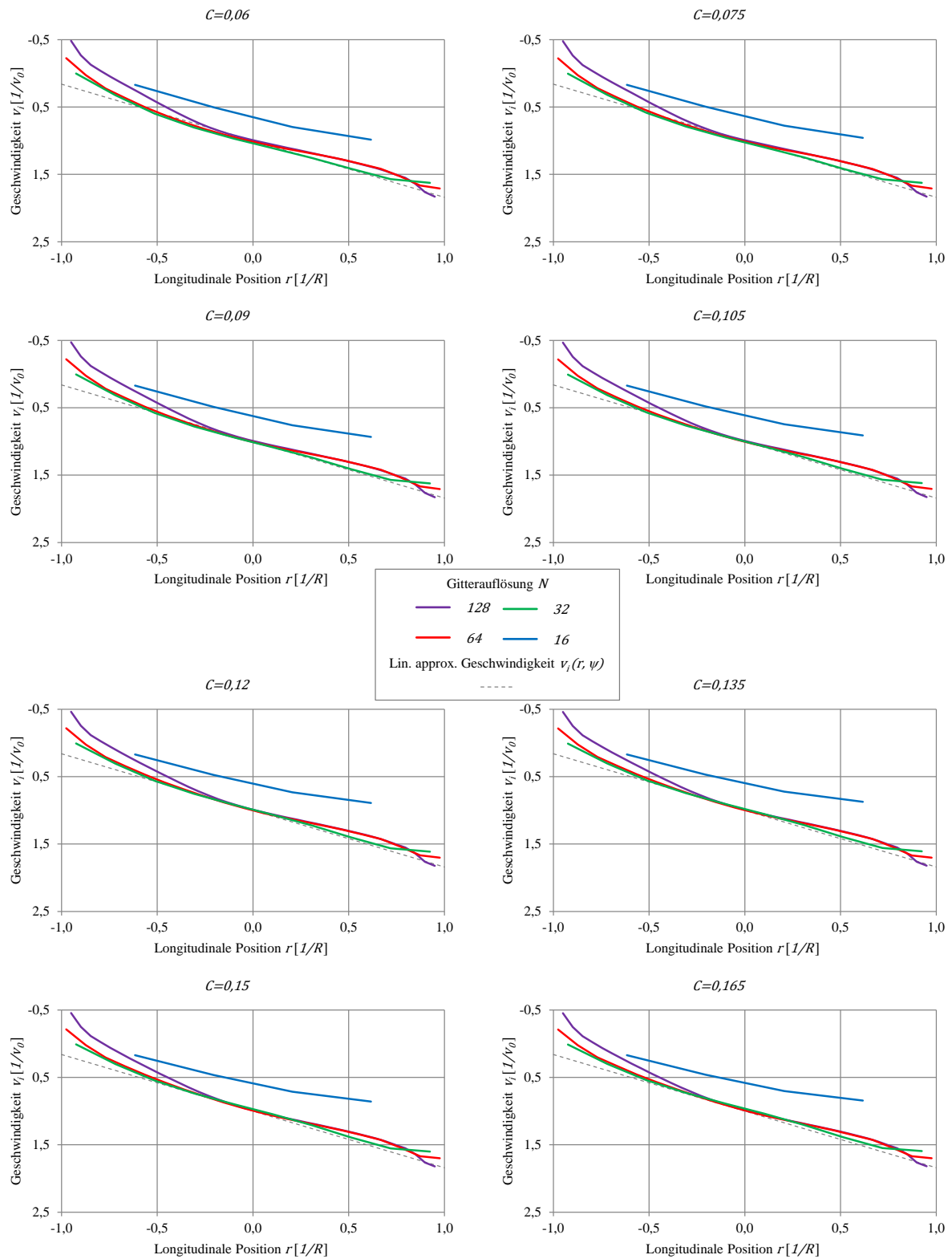


Abbildung A-5: Induzierte Geschwindigkeit XV-15,  $\mu=0,1$

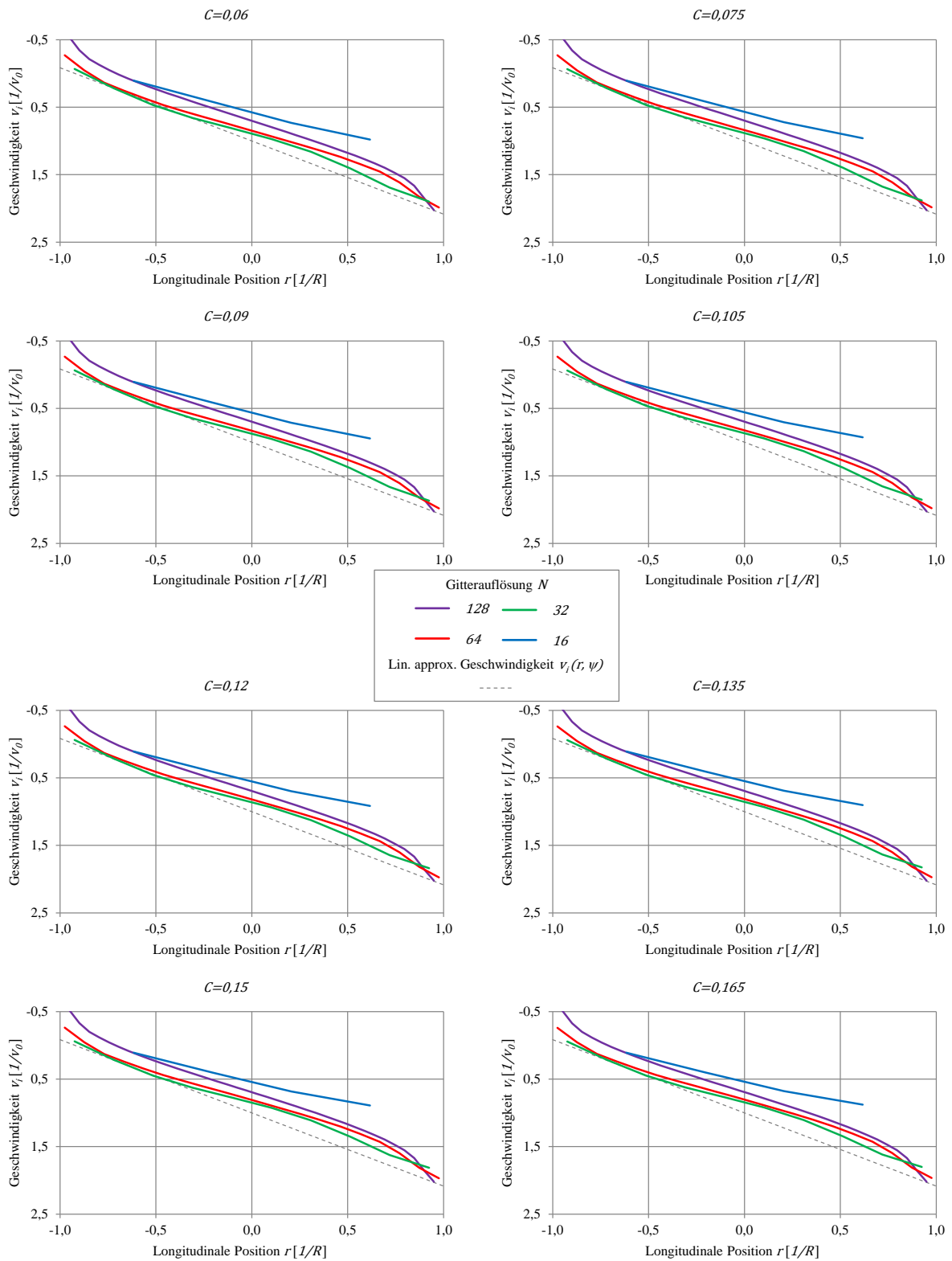


Abbildung A-6: Induzierte Geschwindigkeit XV-15,  $\mu=0,2$

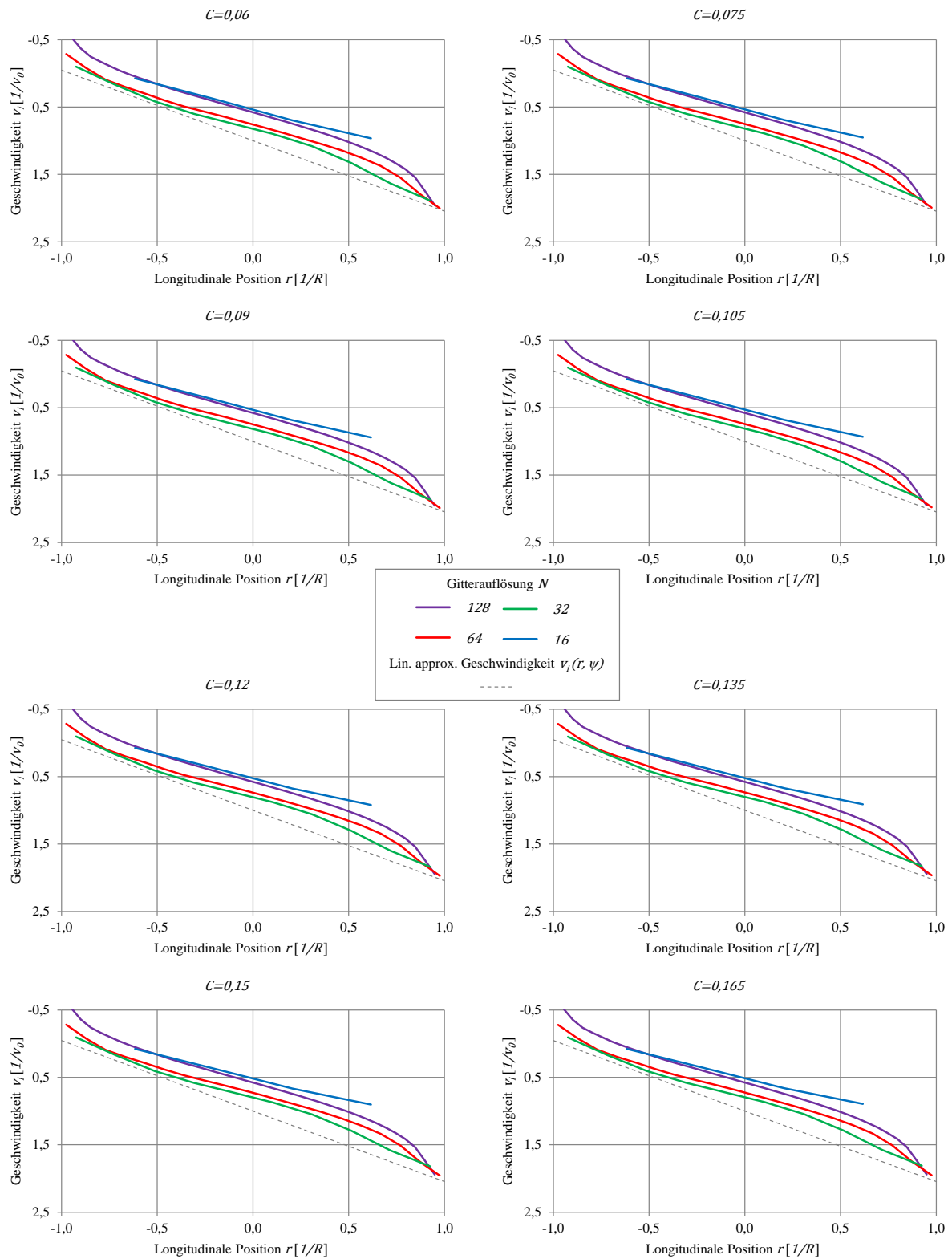


Abbildung A-7: Induzierte Geschwindigkeit XV-15,  $\mu=0,3$

		$\mu [-]$					
		0,1		0,2		0,3	
$N$ [-]	$C$ [-]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]	$v_i(0)$ [1/v <sub>0</sub> ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/k <sub>x</sub> ]
128	0,06	0,992	0,785	0,701	0,848	0,578	0,767
	0,075	0,992	0,804	0,698	0,842	0,577	0,762
	0,09	0,992	0,824	0,697	0,838	0,577	0,757
	0,105	0,991	0,843	0,695	0,835	0,576	0,757
	0,12	0,990	0,859	0,694	0,832	0,576	0,757
	0,135	0,989	0,873	0,694	0,825	0,576	0,757
	0,15	0,988	0,887	0,693	0,825	0,576	0,757
64	0,06	1,015	0,768	0,849	0,753	0,759	0,742
	0,075	1,011	0,801	0,840	0,750	0,753	0,737
	0,09	1,008	0,828	0,832	0,746	0,747	0,732
	0,105	1,004	0,849	0,825	0,745	0,742	0,727
	0,12	1,000	0,867	0,819	0,743	0,737	0,724
	0,135	0,997	0,882	0,813	0,741	0,733	0,722
	0,15	0,993	0,895	0,808	0,741	0,728	0,717
32	0,06	1,039	0,828	0,893	0,703	0,825	0,691
	0,075	1,025	0,844	0,884	0,696	0,820	0,687
	0,09	1,012	0,856	0,876	0,691	0,815	0,682
	0,105	1,000	0,865	0,869	0,686	0,810	0,679
	0,12	0,990	0,872	0,862	0,683	0,806	0,675
	0,135	0,980	0,877	0,856	0,681	0,802	0,672
	0,15	0,971	0,881	0,850	0,678	0,797	0,670
16	0,06	0,649	0,847	0,576	0,700	0,538	0,742
	0,075	0,636	0,817	0,569	0,686	0,534	0,733
	0,09	0,623	0,791	0,563	0,673	0,530	0,723
	0,105	0,613	0,769	0,558	0,661	0,527	0,715
	0,12	0,604	0,749	0,552	0,649	0,524	0,706
	0,135	0,595	0,731	0,548	0,639	0,520	0,699
	0,15	0,588	0,715	0,543	0,630	0,517	0,691
	0,165	0,581	0,701	0,539	0,621	0,514	0,684

Tabelle A-3: Induzierte Geschwindigkeit und longitudinaler Steigungskoeffizient XV-15

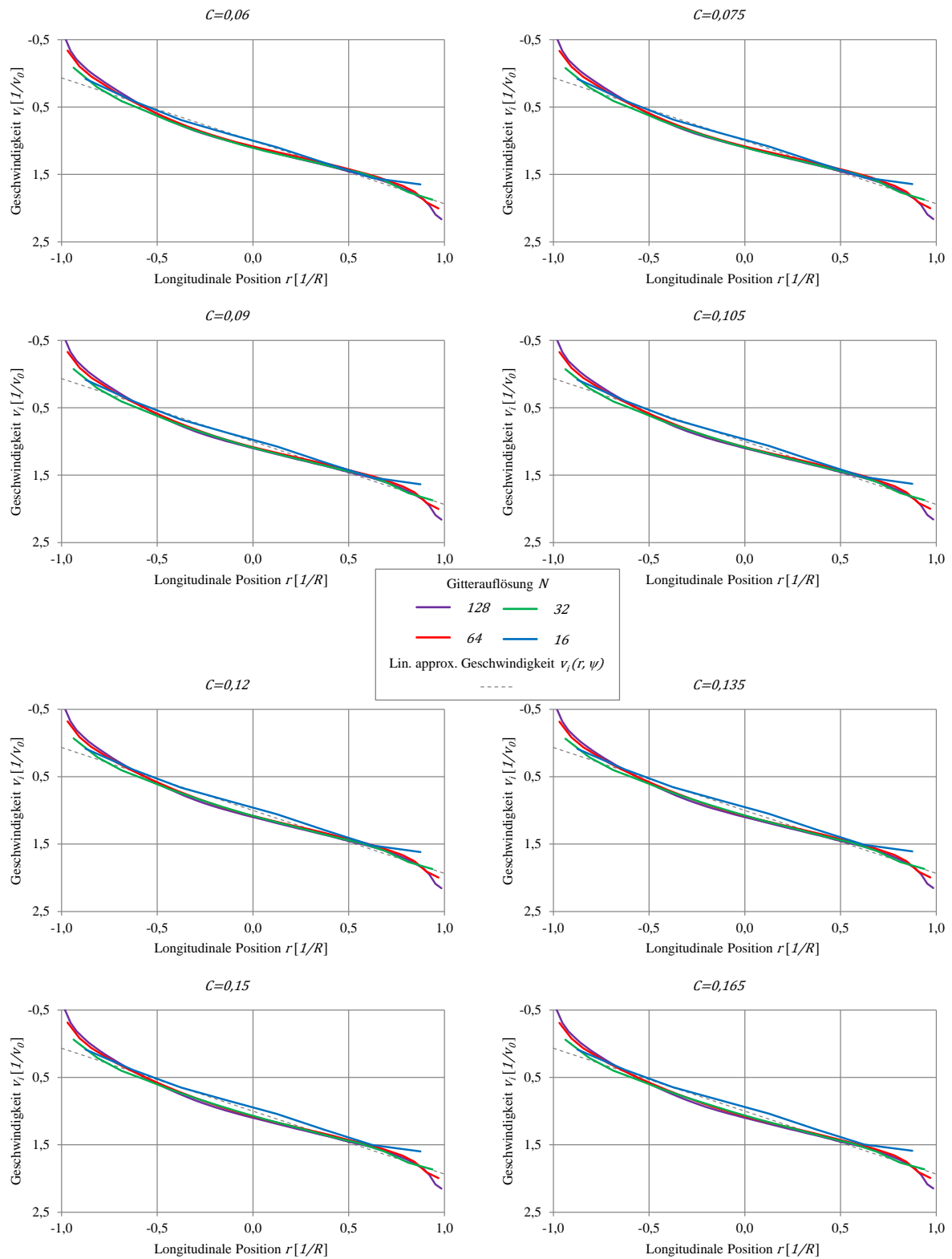


Abbildung A-8: Induzierte Geschwindigkeit SH-60B,  $\mu=0,1$

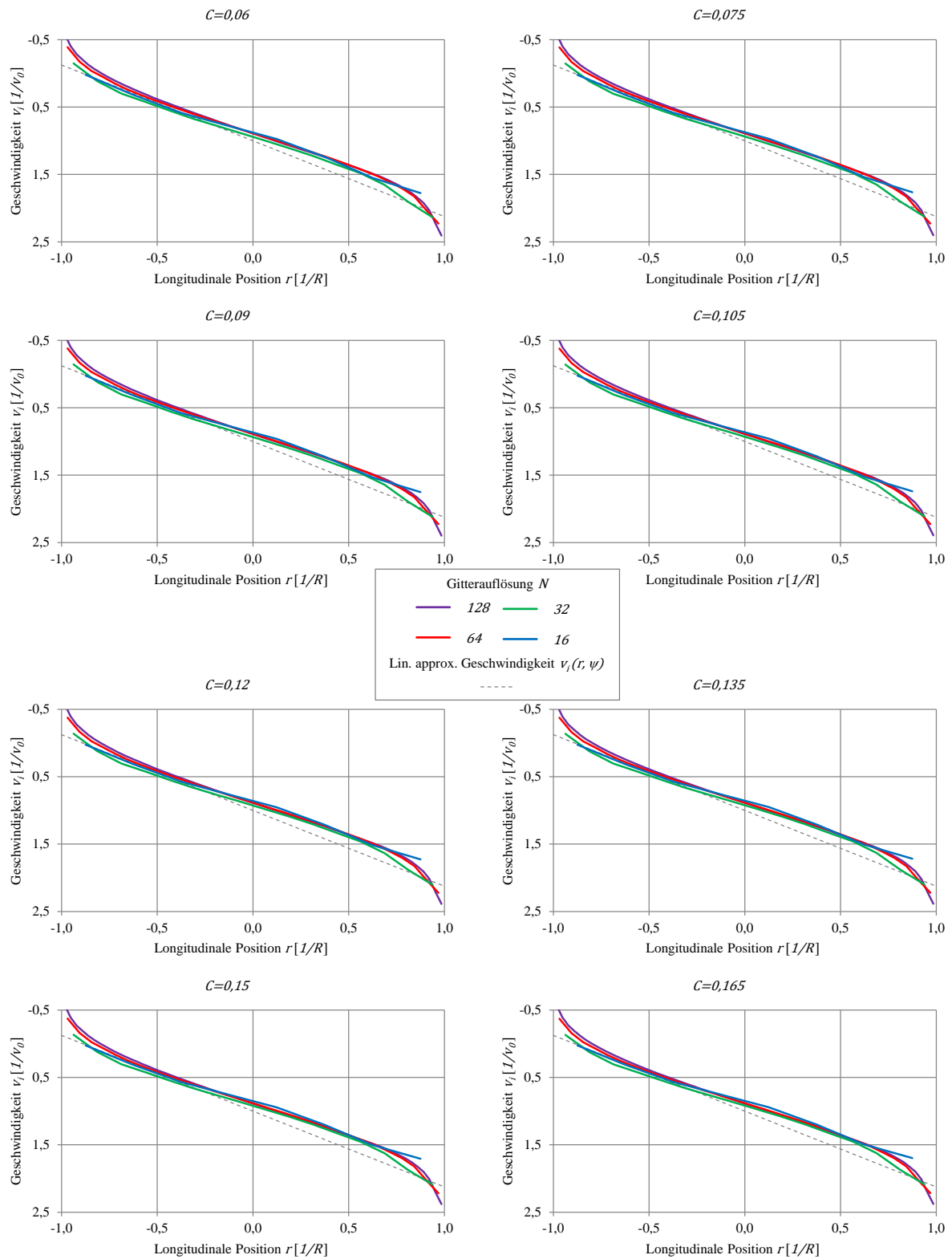


Abbildung A-9: Induzierte Geschwindigkeit SH-60B,  $\mu=0,2$



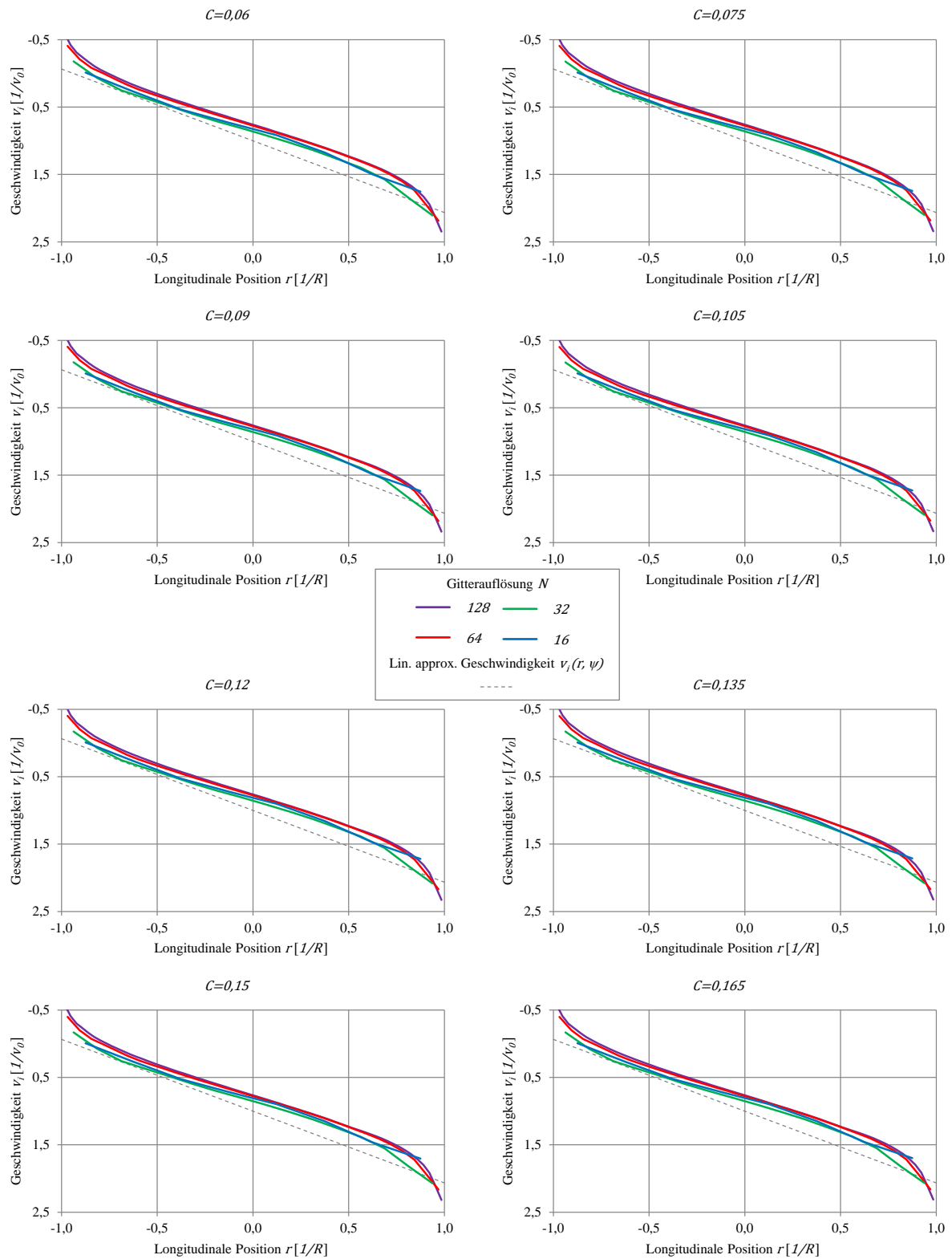


Abbildung A-10: Induzierte Geschwindigkeit SH-60B,  $\mu=0,3$

<i>N</i> [-]	<i>C</i> [-]	$\mu$ [-]					
		<i>0,1</i>		<i>0,2</i>		<i>0,3</i>	
		$v_i(0)$ [1/ $v_0$ ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/ $k_x$ ]	$v_i(0)$ [1/ $v_0$ ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/ $k_x$ ]	$v_i(0)$ [1/ $v_0$ ]	$\partial v_i(0)/\partial r$ [1/ $k_x$ ]
128	0,06	1,098	0,795	0,891	0,847	0,760	0,829
	0,075	1,098	0,790	0,891	0,847	0,761	0,829
	0,09	1,099	0,785	0,890	0,839	0,762	0,829
	0,105	1,099	0,785	0,889	0,832	0,762	0,829
	0,12	1,099	0,781	0,889	0,832	0,763	0,818
	0,135	1,100	0,781	0,888	0,832	0,764	0,818
	0,15	1,100	0,785	0,888	0,832	0,765	0,818
64	0,06	1,083	0,737	0,888	0,803	0,776	0,806
	0,075	1,083	0,753	0,887	0,799	0,777	0,806
	0,09	1,083	0,767	0,886	0,799	0,777	0,800
	0,105	1,082	0,783	0,886	0,795	0,777	0,800
	0,12	1,081	0,795	0,885	0,792	0,777	0,800
	0,135	1,079	0,808	0,884	0,788	0,778	0,800
	0,15	1,078	0,822	0,883	0,788	0,778	0,800
32	0,06	1,106	0,800	0,942	0,786	0,863	0,786
	0,075	1,099	0,820	0,938	0,781	0,861	0,780
	0,09	1,092	0,834	0,934	0,775	0,859	0,777
	0,105	1,086	0,845	0,931	0,770	0,858	0,774
	0,12	1,080	0,856	0,927	0,766	0,856	0,774
	0,135	1,074	0,863	0,924	0,764	0,854	0,771
	0,15	1,069	0,870	0,921	0,761	0,853	0,766
16	0,06	0,998	0,833	0,878	0,682	0,825	0,689
	0,075	0,986	0,834	0,873	0,680	0,822	0,685
	0,09	0,976	0,834	0,868	0,677	0,819	0,682
	0,105	0,967	0,834	0,863	0,675	0,816	0,682
	0,12	0,959	0,834	0,859	0,672	0,813	0,679
	0,135	0,951	0,834	0,855	0,671	0,810	0,679
	0,15	0,944	0,833	0,851	0,671	0,808	0,676
	0,165	0,938	0,832	0,848	0,669	0,805	0,676

Tabelle A-4: Induzierte Geschwindigkeit und longitudinaler Steigungskoeffizient SH-60B

### A.3 Radiale Abwindgeschwindigkeit im bodennahen Schwebeflug

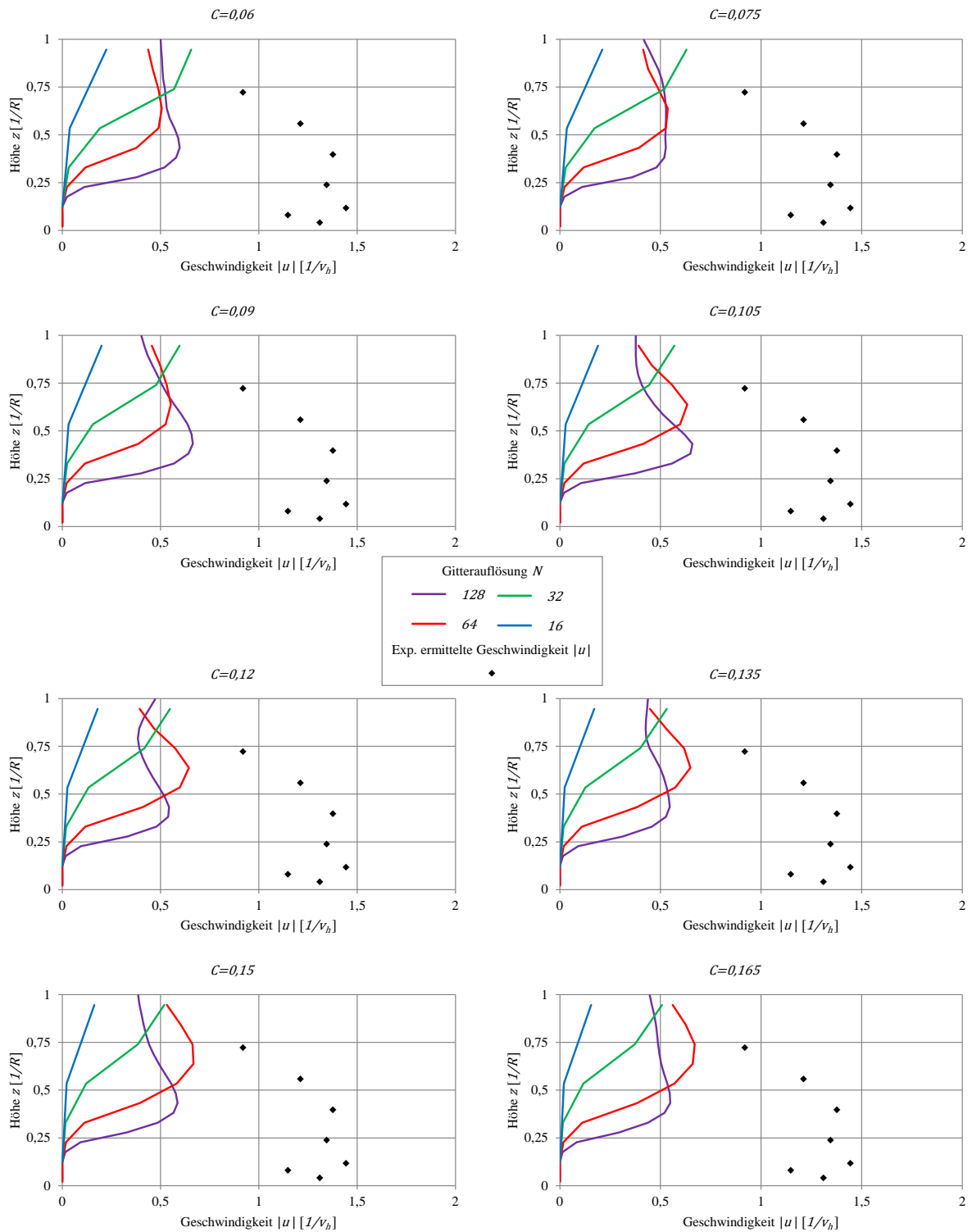


Abbildung A-11: Radiale Abwindgeschwindigkeit XV-15,  $H=3,000$ ,  $\psi=0^\circ$ ,  $r=2,088$

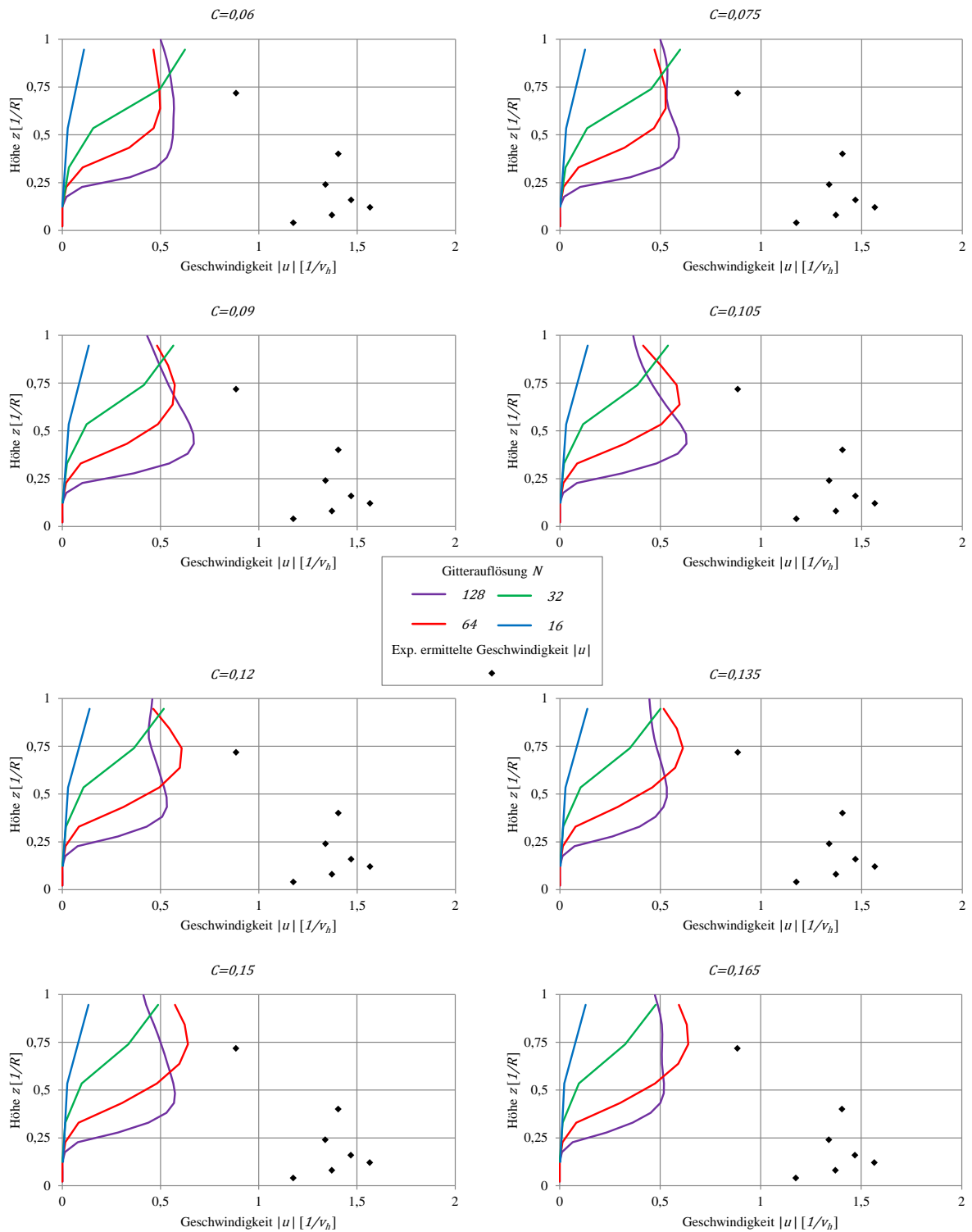


Abbildung A-12: Radiale Abwindgeschwindigkeit XV-15,  $H=3,000$ ,  $\psi=0^\circ$ ,  $r=2,536$

		Validierungsmessungen	
		$H=3,000, \psi=0^\circ, r=2,088$	$H=3,000, \psi=0^\circ, r=2,536$
$N[-]$	$C[-]$	$\overline{\Delta u } [1/v_h]$	$\overline{\Delta u } [1/v_h]$
128	0,06	0,987	1,132
	0,075	1,003	1,132
	0,09	0,969	1,117
	0,105	0,997	1,139
	0,12	1,027	1,155
	0,135	1,014	1,157
	0,15	1,007	1,144
	0,165	1,011	1,159
64	0,06	1,064	1,201
	0,075	1,056	1,200
	0,09	1,051	1,192
	0,105	1,033	1,192
	0,12	1,031	1,190
	0,135	1,031	1,193
	0,15	1,023	1,187
	0,165	1,025	1,188
32	0,06	1,126	1,235
	0,075	1,137	1,243
	0,09	1,147	1,250
	0,105	1,155	1,255
	0,12	1,161	1,258
	0,135	1,165	1,261
	0,15	1,169	1,263
	0,165	1,172	1,265
16	0,06	1,220	1,302
	0,075	1,222	1,299
	0,09	1,224	1,298
	0,105	1,226	1,297
	0,12	1,228	1,298
	0,135	1,229	1,299
	0,15	1,231	1,299
	0,165	1,232	1,300

Tabelle A-6: Gemittelte Abweichung der radialen Abwindgeschwindigkeit XV-15

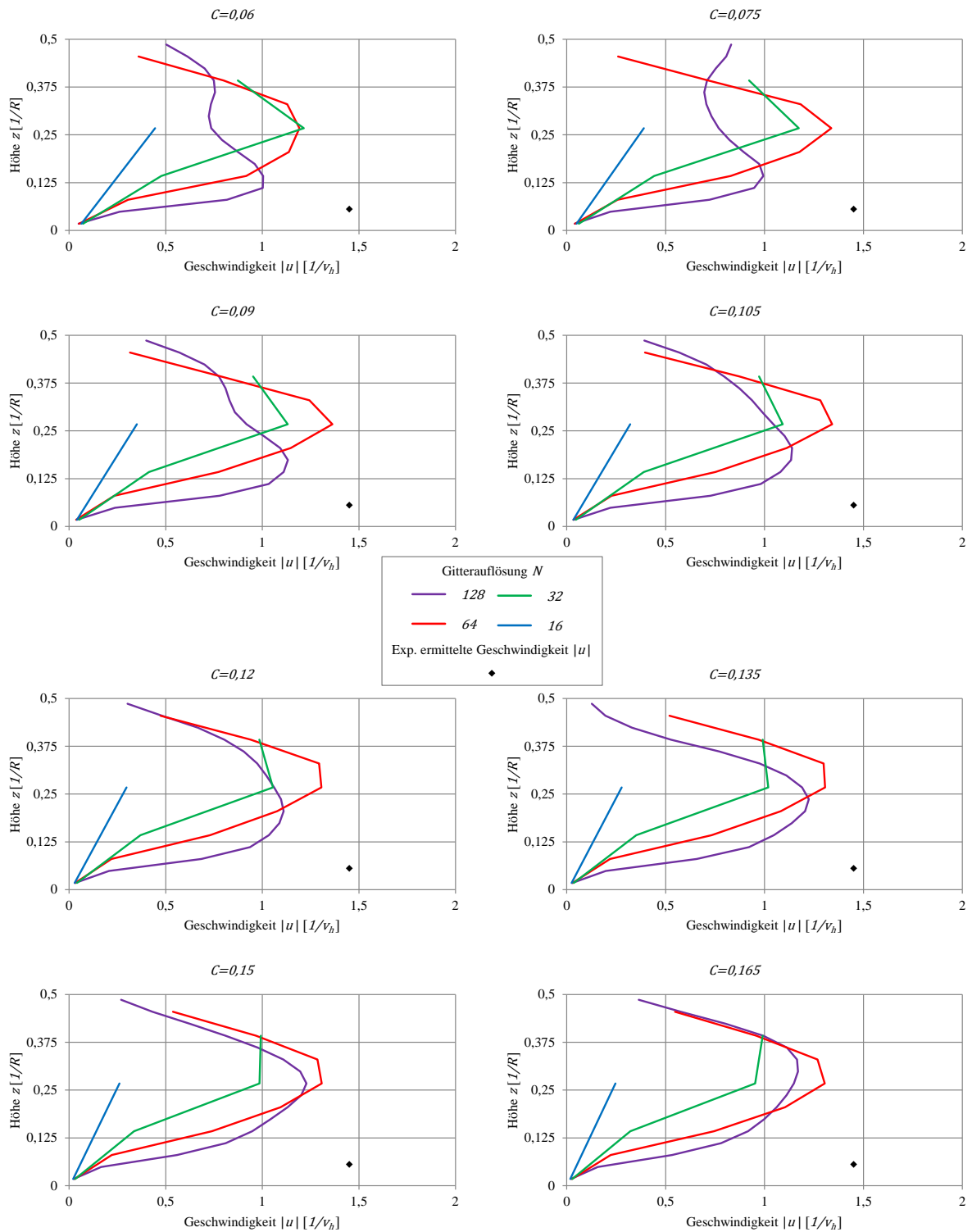


Abbildung A-13: Radiale Abwindgeschwindigkeit SH-60B,  $H=1,018$ ,  $\psi=180^\circ$ ,  $r=1,305$

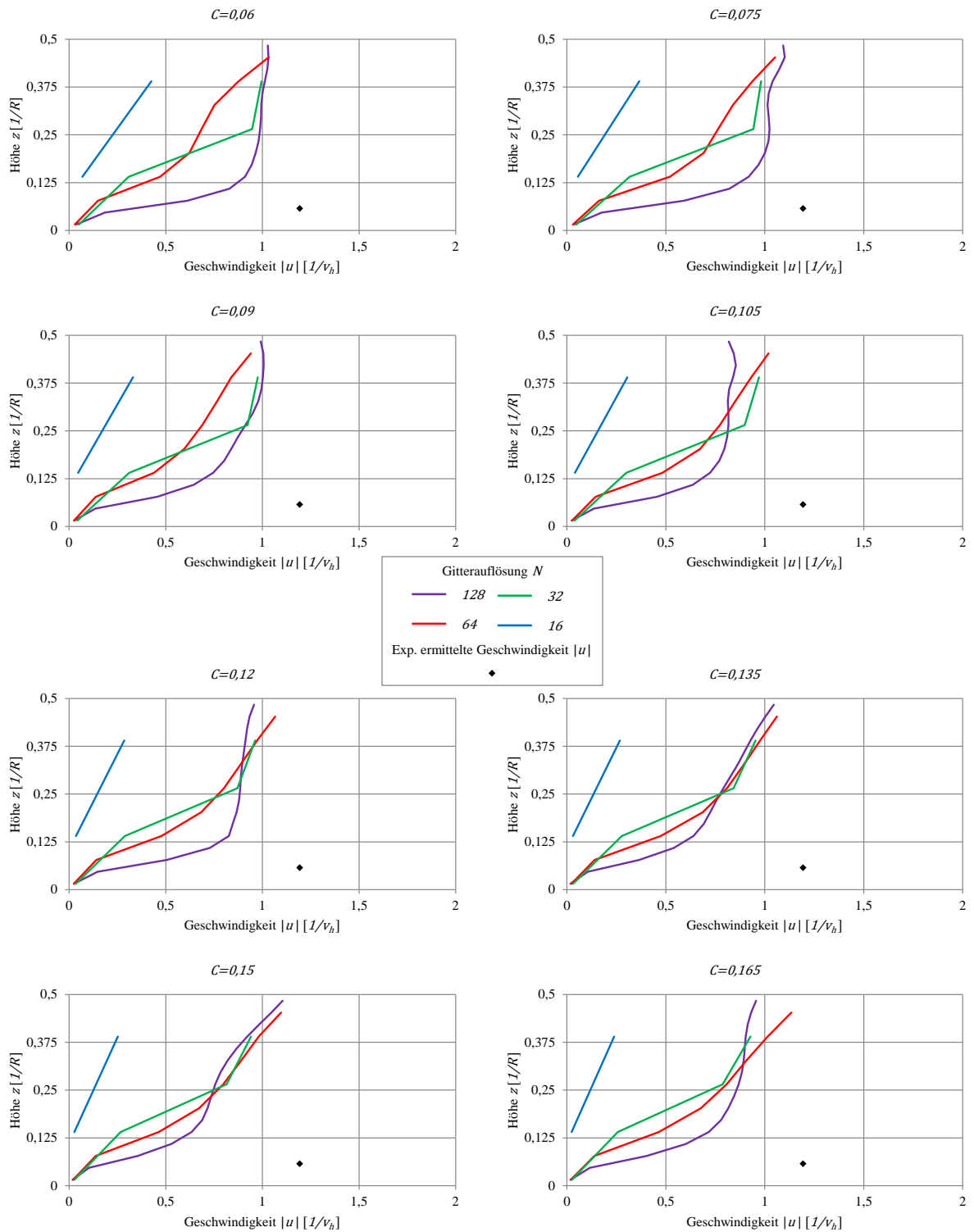


Abbildung A-14: Radiale Abwindgeschwindigkeit SH-60B,  $H=1,390$ ,  $\psi=180^\circ$ ,  $r=1,305$

		Validierungsmessung	
		$H=1,018, \psi=180^\circ, r=1,305$	$H=1,390, \psi=180^\circ, r=1,305$
$N[-]$	$C[-]$	$\overline{\Delta u } [1/v_h]$	$\overline{\Delta u } [1/v_h]$
128	0,06	0,179	0,144
	0,075	0,188	0,146
	0,09	0,183	0,158
	0,105	0,188	0,158
	0,12	0,191	0,154
	0,135	0,193	0,166
	0,15	0,201	0,167
	0,165	0,203	0,163
64	0,06	0,208	0,181
	0,075	0,213	0,179
	0,09	0,216	0,182
	0,105	0,217	0,181
	0,12	0,218	0,182
	0,135	0,218	0,182
	0,15	0,218	0,182
	0,165	0,218	0,182
32	0,06	0,209	0,176
	0,075	0,212	0,176
	0,09	0,215	0,177
	0,105	0,217	0,178
	0,12	0,218	0,179
	0,135	0,220	0,180
	0,15	0,221	0,181
	0,165	0,222	0,182
16	0,06	0,208	0,194
	0,075	0,215	0,195
	0,09	0,220	0,196
	0,105	0,224	0,196
	0,12	0,227	0,196
	0,135	0,229	0,197
	0,15	0,231	0,197
	0,165	0,232	0,197

Tabelle A-6: Gemittelte Abweichung der radialen Abwindgeschwindigkeit SH-60B