

Lehrstuhl für Flugsystemdynamik
Technische Universität München

Entwicklung und Verifizierung eines Konzepts zur Robusten Regelung der Seitenbewegung zukünftiger Kleinflugzeuge

Dipl.-Ing. (Univ.) Christoph Thaddäus Baier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh

Prüfer der Dissertation:

1. Affiliate Professor Dr.-Ing. Matthias Heller
(Rudolf Diesel Industry Fellow of TUM-IAS)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dieter Moormann
(Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen)
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 07.11.2016 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 31.05.2017 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik der Technischen Universität München in den Jahren 2008 bis 2016.

Ich danke dem Lehrstuhlinhaber Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel für die Unterstützung bei dieser Arbeit sowie die Übernahme des Drittgutachtens. Bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dieter Moormann bedanke ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei Affiliate Professor Dr.-Ing. Matthias Heller (Rudolf Diesel Industry Fellow of TUM-IAS) für die Anregung zu dieser Arbeit und deren umfangreicher Betreuung. Das sehr gute Arbeitsumfeld und insbesondere die vielen Stunden gemeinsamer Arbeit und Diskussion waren die Grundlage zum Gelingen dieser Promotion.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Simon Hecker danke ich für die Unterstützung und das Interesse an dieser Arbeit.

Mein Dank gilt allen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik für das gute Arbeitsklima. Hierbei möchte ich mich vor allem bei Dr.-Ing. Leonhard Höcht, Dr.-Ing. Benjamin Braun, Dipl.-Ing. Philip Spiegel, M.Sc. Christoph Krause und M.Sc. Felix Biertümpfel für die Unterstützung und Hilfsbereitschaft sowie das fidele Arbeitsumfeld bedanken.

Meinen Freunden Edmund Ernst und Prof. Winfried Radtke danke ich für die Motivation an ingenieur- und naturwissenschaftlichen Fragestellungen und die detaillierte Durchsicht dieser Arbeit.

Besonderer Dank gilt jedoch meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, Rosa und Volker, deren uneingeschränkte Unterstützung Zeit meines Lebens diese Arbeit überhaupt erst ermöglichten, und meiner Freundin Johanna für das verständnisvolle, unterstützende sowie motivierende Umfeld und den allgegenwärtigen Rückhalt.

Zürich, 2016

Thaddäus Baier

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Themenstellung	1
1.1	Erhöhtes Unfallrisiko in der Allgemeinen Luftfahrt – Problematik und Motivation.....	1
1.2	Zielsetzung der Arbeit.....	2
1.3	Aufbau der Arbeit.....	5
2	Modellierung und Erprobungsinfrastruktur	7
2.1	Modellierung.....	7
2.1.1	Das experimentelle Koordinatensystem.....	7
2.1.2	Nichtlineare Starrkörperbewegungsgleichungen.....	9
2.1.3	Linearisierte Bewegungsgleichungen.....	11
2.1.4	Modellierung der Aktuatordynamik.....	13
2.2	Erprobungs- und Entwicklungsinfrastruktur.....	14
2.2.1	<i>D-SIM-42</i> Flugsimulator.....	15
2.2.2	Fliegender Erprobungsträger – <i>OE-FSD</i>	16
3	Analyse der unregelmäßigen Flugdynamik	23
3.1	Inhärente Stabilitätseigenschaften.....	23
3.2	Inhärente Steuerungseigenschaften.....	28
4	Entwurfsziele und Regelungsstrategie	31
4.1	Entwurfsziele.....	31
4.2	Regelungsstrategie.....	34
5	Reglerstruktur	37
5.1	Konzeption der Reglerstruktur.....	37
5.2	Steuerkoordinierung und entkoppelte virtuelle Steuergrößen.....	40
5.3	Vorverarbeitung der Führungsgrößen.....	44
5.4	Regler für die Rollachse.....	45
5.5	Regler für die Gierachse.....	46
5.6	Messgrößen und Schätzung der Anströmwinkel.....	48
6	Reglersynthese (<i>MR DEA</i>)	51
6.1	Grundgedanke und Randbedingungen der Reglersynthese.....	51
6.2	Anforderungen an die Flugdynamik des geregelten Flugzeugs.....	54
6.3	Eigenstrukturvorgabe.....	59
6.3.1	Klassische Eigenstrukturvorgabe.....	59
6.3.2	Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe (<i>MR DEA</i>).....	63

6.4	Nachgeführter Regler für den gesamten Flugbereich	69
6.5	Lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises.....	72
6.5.1	Stabilitätseigenschaften des geregelten Flugzeugs	72
6.5.2	Steuerungseigenschaften und Störverhalten des geregelten Flugzeugs.....	78
6.5.3	Folgerungen aus der <i>Linearen Analyse des geschlossenen Regelkreises</i>	81
7	Analyse und Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften	83
7.1	Einführung in die Robustheitsanalyse.....	83
7.2	<i>SISO</i> -Robustheit.....	85
7.3	<i>MIMO</i> -Robustheit	88
7.3.1	Grundlagen der <i>MIMO</i> -Robustheit und der μ -Analyse	88
7.3.2	<i>Robuste Konformität</i> und $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse	92
7.3.3	Mindestanforderungen an die Flugdynamik – Konformitätsgrenze	108
7.3.4	Unsicherheitsmodellierung und Trimpunkt-Unsicherheit	111
7.3.5	Besonderheiten von dyn. Unsicherheiten bzgl. der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse	125
7.3.6	Ergebnisse der <i>MIMO</i> -Robustheitsanalyse.....	128
8	Nichtlineare Analyse	135
8.1	Vorgehensweise und Szenarien	135
8.2	Nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs	136
8.3	Folgerungen aus der <i>Nichtlinearen Analyse</i>	156
9	Zusammenfassung und Ausblick	159
9.1	Zusammenfassung.....	159
9.2	Ausblick	162
	Literaturverzeichnis	163
A.1	Ersatzderivativa	171
A.2	Grundlegende flugmechanische Zusammenhänge	172
A.2.1	Transformationsmatrix M_{ef}	172
A.2.2	$\sin\Phi\cos\theta \approx \sin\mu\cos\gamma$ (für $\beta \approx 0$).....	172
A.2.3	$\alpha = (\theta - \gamma) / \cos\Phi$	173
A.3	Finale Reglerparameter	174
A.4	Nichtlineare Analyse	176
A.5	Eingangsrichtung	181

Nomenklatur und Bezeichnungen

Die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Symbole richten sich soweit nicht anders angegeben nach der Norm *LN 9300 Blatt 1* [1] bzw. *DIN 9300 Teil 1* [2] der Normenstelle für Luftfahrt. Zusätzlich bzw. abweichend dazu werden die in den folgenden Tabellen aufgeführten Bezeichnungen und Symbole verwendet.

Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	Einheit
t	Zeit	s
v	Geschwindigkeit	m/s
Z	Zentrifugalkraft	N
T	Zeitkonstante	s
r	relative Unsicherheit	–
T_t	Totzeit	s
T_{TD}	Verdopplungszeit	s
U_z	Zwischenkreisspannung	V
x_{cg}	Lage des Schwerpunkts in x-Richtung	m
J	Trägheitstensor	kg m ²
M	Transformationsmatrix	–
N_{λ_i}	erreichbarer Eigenvektorraum zum Eigenwert λ_i	
$N, N(s)$	charakteristisches Polynom	
Q_{λ_i}	Gewichtungsmatrix zum Eigenwert λ_i	
z, z_i	Eingangsrichtung	
g_{ij}	Übertragungsfunktion von j auf i	
\bar{q}	Staudruck	N/m ²
p_t	Totaldruck	N/m ²
p_s	statischer Druck	N/m ²
n_y	Lastvielfaches in y-Richtung	–
$x_{f \Delta i}$	Intergratorzustand der Integration von Δi	
A, \tilde{A}	Systemmatrix	
$B, \tilde{B}, \tilde{\tilde{B}}$	Eingangsmatrix	
C, C_f	Ausgangsmatrix	
D	Durchgangsmatrix	
u, \hat{u}	Eingangs- bzw. Steuervektor	
r	Führungsgrößenvektor	
x, x_f, x_{aug}	Zustandsvektor	
y	Ausgangssvektor	

k	Verstärkungsfaktor Rückführung	
h	Verstärkungsfaktor der Steuerkoordinierung	
K_P	Matrix der proportionalen Verstärkungsfaktoren	
K_I	Matrix der integralen Verstärkungsfaktoren	
H_P	Matrix der Vorsteuerfaktoren	
H_{ER}	Matrix der Verstärkungsfaktoren der Steuerkoordinierung	
I	Einheitsmatrix	–
G	LZI-System	
L	LZI-System des offenen Regelkreises	
D, U	diagonale bzw. unitäre Matrix	
$G(s)$	Übertragungsmatrix der Strecke	
$K(s)$	Übertragungsmatrix des Reglers	
$G_0(s)$	Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises $G_0(s) = G(s) K(s)$	
$W(s)$	dynamische Unsicherheitsgewichtung	
$G_{un}(s)$	unsichere Übertragungsmatrix (der Strecke)	
$M(s)$	Übertragungsmatrix der generalisierten $M\Delta$ -Struktur	
k_r	Mehrgrößen-Konformitäts-Marge	

Griechische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\delta_{St lon}$	Steuerknüppelausschlag longitudinal	–
$\delta_{St lat}$	Steuerknüppelausschlag lateral	–
δ_{Ped}	Pedalausschlag	–
$\mu, \mu_{\Delta\Gamma}$	strukturiertes Singulärwert	–
ω_0	natürliche Frequenz	rad/s
ζ	relative Dämpfung bzw. Seitenruderausschlag	–
σ	Dämpfungsexponent / absolute Dämpfung / Realteil bzw. Standardabweichung	s^{-1}
λ, λ_i	Eigenwert, i-ter Eigenwert	s^{-1}
v_i	i-ter Eigenvektor	–
ρ	Dichte bzw. Spektralradius	$kg/m^3 \mid s^{-1}$
$\Gamma, \sigma_\Gamma(\omega)$	Konformitätsgrenze	
p_k	k-ter Pol (Eigenwert)	s^{-1}
$\bar{\sigma}, \underline{\sigma}$	maximaler bzw. minimaler Singulärwert	
κ	skalare Größe bzw. Korrekturfaktor	
ω_τ	Frequenz bei der eine rel. Unsicherheit von approximativ 100% erreicht wird	rad/s
δ_{Env}	parametrische Trimpunkt-Unsicherheit	
δ_{g_i}	dynamische Unsicherheit der Übertragungsfunktion g_i	
Δ	Intervall / Abweichung z.B. Δt oder Δv_{Wind}	
δ_{k_i}	parametrische Unsicherheit des Ersatzderivativs k_i	
$\delta_{\frac{g}{V} \cos \theta}$	parametrische Unsicherheit der Rückführung $k_{i\beta} \frac{g}{V} \cos \theta \sin \phi$	
$\Delta(s)$	Unsicherheitsmatrix	

Indizes

Bezeichnung	Bedeutung
<i>Act</i>	Aktuator
<i>nom</i>	nominal
<i>R</i>	Rollbewegung bzw. Rolldynamik
<i>DR</i>	Roll-Gier-Schwingung (engl. Dutch-Roll)
<i>SP</i>	Spiralbewegung
<i>max / min</i>	maximal / minimal
<i>low / high</i>	niedrig / hoch
<i>damp</i>	zu dämpfender Anteil
<i>D, d</i>	demand (gewünscht)
<i>est</i>	estimate (geschätzt)
<i>KK</i>	koordinierter Kurvenflug / Kurvensteigflug
<i>TC</i>	Turn Coordination
$\hat{}$	geschätzte bzw. Ersatz- Größe
<i>c</i>	Führungsgröße / Kommandogröße
<i>G</i>	Schwerpunkt bzw. Gierdynamik
<i>cg</i>	Schwerpunkt
<i>K</i>	kinematisch
<i>P</i>	Schubkräfte
<i>A</i>	aerodynamische Kräfte
<i>0</i>	getrimmte / quasi-stationäre Größe
<i>aug</i>	augmented / geschlossener Regelkreis
<i>I R</i>	Rollintegrator
<i>I G</i>	Gierintegrator
<i>CL</i>	Closed Loop / geschlossener Regelkreis
<i>OL</i>	Open Loop / offener Regelkreis
<i>+</i>	Pseudoinverse bzw. Moore-Penrosesche Pseudoinverse
<i>H</i>	Hermesch adjungierte Matrix
<i>un</i>	unsicher
<i>TD</i>	Verdopplungszeit
<i>Env</i>	Envelope
<i>eff</i>	effektiv (effektive Rollzeitkonstante)

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
<i>TUM</i>	Technische Universität München
<i>IAS</i>	Institute for Advanced Study
<i>FbW</i>	Fly-by-Wire (elektronische Flugsteuerung)
<i>SAS</i>	Stability Augmentation System
<i>CSAS</i>	Control and Stability Augmentation System

<i>AL</i>	Allgemeine Luftfahrt
<i>SISO</i>	Single Input Single Output
<i>MIMO</i>	Multi Input Multi Output
<i>MR DEA</i>	Model Reference Direct Eigenstructure Assignment
<i>RFCS</i>	Research Flight Control System
<i>LZI-System</i>	lineares zeitinvariantes dynamisches System
<i>LPV-System</i>	Linear Parameter-Varying System (lineares parametervariantes System)
<i>CHR</i>	Cooper-Haper-Rating
<i>ZRD</i>	Zustandsraumdarstellung
<i>ZRM</i>	Zustandsraummodell
<i>SBW</i>	Seitenbewegung
<i>LBW</i>	Längsbewegung
<i>AHRS</i>	Attitude Heading Reference System
<i>HLGS</i>	homogenes lineares Gleichungssystem
<i>RS</i>	Robuste Stabilität
<i>RK</i>	Robuste Konformität
<i>ONERA</i>	Office national d'études et de recherches aérospatiales
<i>SMT</i>	Skew Mu Toolbox
<i>ILS</i>	Instrument Landing System (Instrumentenlandesystem)
<i>FSD</i>	Lehrstuhl für Flugsystemdynamik
<i>INS</i>	Inertialnavigationssystem
<i>GNSS</i>	Global Navigation Satellite System
<i>MIL</i>	Military Specification
<i>TAS</i>	True Airspeed
<i>CAS</i>	Calibrated Airspeed
<i>Akt</i>	Aktuator
<i>nachge.</i>	nachgeführt
<i>Tot.</i>	Totzeit
<i>Verstärk.</i>	Verstärkungsfaktoren
<i>Sim.</i>	Simulation
<i>nom.</i>	nominal
<i>pert.</i>	perturbiert
<i>KG</i>	Konformitätsgrenze

Bemerkung: Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wurde in der vorliegenden Arbeit zumeist die männliche Sprachform verwendet. Gemeint sind dabei männliche und weibliche Personen gleichermaßen.

Zusammenfassung / Abstract

Entwicklung und Verifizierung eines Konzepts zur Robusten Regelung der Seitenbewegung zukünftiger Kleinflugzeuge

Moderne Fly-by-Wire Flugregelungssysteme entlasten den Piloten durch Bereitstellung exzellenter Flugeigenschaften (sog. Flying und Handling Qualities) und können so die Flugsicherheit signifikant steigern. Um diese Vorzüge auch dem General Aviation Sektor zugänglich zu machen, wird ein ganzheitliches Regelungskonzept für die Seitenbewegung zukünftiger Kleinflugzeuge vorgeschlagen. Neben einer generalisierten Reglerstruktur wird eine intuitive Methodik zur Auslegung der Reglerparameter sowie eine Technik zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften für Qualifizierung und Zulassung entwickelt.

Development and Verification of a Concept for Robust Lateral Control of Future Small Aircraft

Modern fly-by-wire flight control systems reduce the pilot's workload by providing excellent flying and handling qualities and thus can increase the flight safety significantly. To make these benefits accessible to the general aviation sector, too, an integrated control concept for the lateral motion of Future Small Aircraft is proposed. Besides a generalized controller structure, an intuitive method for the gain design as well as a technique to proof robust stability characteristics for qualification and certification is developed.

1 Einführung in die Themenstellung

1.1 Erhöhtes Unfallrisiko in der Allgemeinen Luftfahrt – Problematik und Motivation

Sicher fliegen für Jedermann – der Traum vom Fliegen ist so alt wie die Menschheit selbst. Heutzutage nutzen diese Art der Fortbewegung und Transportmöglichkeit eine Vielzahl von Menschen in den verschiedensten Sparten: von der Privatnutzung, über die Dienstleistung im Bereich der Allgemeinen Luftfahrt (AL) bis hin zur Geschäftsfliegerei oder zur Verkehrsluftfahrt. Jedoch ist das Risiko für Sach- und Personenschäden in den verschiedenen Bereichen sehr unterschiedlich. Moderne Transportflugzeuge (Airliner), deren Flugbetrieb durch professionelle Berufspiloten erfolgt, stellen den sichersten Bereich der Luftfahrt dar. Im Vergleich dazu ist das Unfallrisiko in der Allgemeinen Luftfahrt, also im Bereich des Individualverkehrs – dazu gehören Leichtflugzeuge bis hin zum Geschäftsreiseflugzeug – um ein Vielfaches höher, vgl. [3] und [4]. Für das höhere Unfallrisiko gibt es zwei Hauptgründe:

Zum einen sind die Piloten im Bereich der Verkehrsluftfahrt im Gegensatz zur Allgemeinen Luftfahrt entschieden besser ausgebildet und geschult und haben in der Regel eine bedeutend größere Anzahl an Flugstunden, also mehr Erfahrung. Zudem sieht der Betrieb von Transportflugzeugen in den meisten Fällen zwei Piloten vor. Aus diesen Gründen ist die Wahrscheinlichkeit eines Pilotenfehlers mit fatalen Auswirkungen im Bereich der Verkehrsluftfahrt signifikant geringer im Vergleich zur Allgemeinen Luftfahrt.

Zum anderen sind moderne Verkehrsflugzeuge mit Flugregelungssystemen, die über den gesamten Flugbereich sehr gute und einheitliche Flug- und Steuerungseigenschaften (sogenannte exzellente Flug- und Steuerungseigenschaften) sicherstellen sowie mit einer Vielzahl von Assistenzsystemen, die die Flugzeugführung erheblich vereinfachen, ausgestattet. Dadurch wird die Arbeitsbelastung des Piloten vor allem in kritischen Situationen stark reduziert und somit ein bestmögliches Maß an Sicherheit garantiert. Im Vergleich dazu sind in Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt (zumeist) keine aktiven Flugsteuerungssysteme verbaut, die die Stabilitäts- und Steuerungseigenschaften nachhaltig verbessern und dadurch dem Piloten die Steuerung des Flugzeugs und somit die Führung der abgezielten Flugbahn entscheidend erleichtern würden. Die in den heutigen Transportflugzeugen integrierten fortschrittlichen Fly-by-Wire (FbW) Flugsteuerungssysteme gewährleisten aufgrund der besseren Handhabungseigenschaften (Handling) einen sicheren Betrieb mit einer deutlich geringeren Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fatalen Unfalls im Vergleich zur Allgemeinen Luftfahrt.

Aktive Flugsteuerungssysteme konnten in der Vergangenheit aufgrund ihrer Komplexität und vor allem in Folge ihrer hohen Kosten in Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt nicht integriert werden. Heutzutage ist es aufgrund der fortschreitenden technologischen Entwicklung jedoch möglich, auf sicherheitskritische Komponenten auch aus anderen Industriezweigen (z.B. Automatisierungsbranche) zurückzugreifen und dadurch die Integration aktiver Flugsteuerungssysteme in Kleinflugzeugen vorzusehen. Dabei erfüllen diese Komponenten und Baugruppen sowohl die Anforderungen an die Kostenstruktur der Allgemeinen Luftfahrt als auch den Anspruch an die Ausfallsicherheit bzw. Zuverlässigkeit. In Zukunft wird es dadurch möglich sein, kleine und mittelgroße Flugzeuge mit entsprechender Aktuatorik zur Ansteuerung der primären Steuereffektoren sowie passender Sensorik und Rechnerplattformen auszustatten und somit die Basis für aktive teil- und vollelektronische Flugsteuerungssysteme zu schaffen. Neben den Hardware-Komponenten (Aktuatoren, Sensoren und Rechnerplattformen) müssen die Software (z.B. Flugregelungsalgorithmen) sowie die entsprechenden Werkzeuge zur Entwicklung dieser bereitstehen, wobei diese ebenfalls bzgl. Entwicklungsaufwand, Komplexität und Kosten bedarfsgerecht für Hersteller von Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt sein müssen.

Motivation dieser Arbeit ist die Verbesserung der Flugsicherheit im Bereich der Allgemeinen Luftfahrt unter Beachtung des signifikant geringeren Unfallrisikos professionell betriebener moderner Transportflugzeuge. Grundlage dabei ist die fortschreitende technologische Weiterentwicklung und die Verfügbarkeit hoch sicherheitskritischer Bauteile. Insbesondere gilt dies unter Berücksichtigung eines gemäß [5] zu erwartenden Anstiegs an Flugzeugen und Flugzeugbewegungen im Bereich des Allgemeinen Luftfahrt und somit einer wachsenden Anzahl an Unfällen, die es zu vermeiden gilt.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Vor dem Hintergrund der im vorherigen Kapitel dargestellten erhöhten Unfallzahlen in der Allgemeinen Luftfahrt verglichen zur Verkehrsluftfahrt und der sich aus der fortschreitenden technischen Entwicklung ergebenden Möglichkeit, aktive Flugsteuerungssysteme im Bereich der Kleinflugzeuge zur Verbesserung der Flugsicherheit einzuführen, sollen im Rahmen dieser Arbeit die grundlegenden Fragestellungen entsprechender Flugregelungssysteme angegangen und bearbeitet werden. Ziel dieser Arbeit ist der Vorschlag eines Regelungskonzeptes für die Seitenbewegung zukünftiger Kleinflugzeuge inklusive zugehöriger Entwicklungs- und Nachweiswerkzeuge zur Gewährleistung bestmöglicher Flugeigenschaften, wobei die Entwicklungs- und Kostenrandbedingungen von Flugzeugherstellern der Allgemeinen Luftfahrt besonders berücksichtigt werden. Kleinflugzeuge sind dabei Flugzeuge bis zu einem maximalen Startgewicht von ca. 8600 kg. Diese Festlegung erfolgt in Anlehnung an die Zertifizierungsspezifikation CS-23, siehe [6], die für die Zulassung von Flugzeugen der

Allgemeinen Luftfahrt Verwendung findet. Der Prozess zur Entwicklung derartiger Flugregelungssysteme setzt sich aus folgenden Teilschritten zusammen:

- Ausarbeitung einer universellen Reglerstruktur hinsichtlich exzellenter Flugeigenschaften für die Seitenbewegung von Flugzeugen. Eine Verwendbarkeit der Reglerstruktur ist dabei sowohl für Flugzeuge mit einer FbW Steuerung als auch mit einer Hybridsteuerungen vorzusehen.
- Bereitstellung einer intuitiven, flugmechanisch motivierten und einsichtigen Methodik zur Berechnung der Reglerparameter (Verstärkungsfaktoren) für die ausgearbeitete Reglerstruktur zur Sicherstellung exzellenter Steuer- und Flugeigenschaften über den gesamten Flugbereich.
- Entwicklung eines Verfahrens zur Analyse und zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften für Qualifizierung und Zulassung.

Die dienliche Bearbeitung der Teilschritte ist die Basis für den erfolgreichen Betrieb der Regelungsalgorithmen eines aktiven Flugregelungssystems in der Allgemeinen Luftfahrt. Die Herausforderung dabei ist, Lösungen für die oben aufgeführten Entwicklungsschritte auszuarbeiten, welche den Anforderungen und Randbedingungen der Flugzeughersteller der Allgemeinen Luftfahrt gerecht werden. Das bedeutet, die Methoden und Entwicklungswerkzeuge müssen bzgl. Kosten, Anwendungsaufwand und Komplexität maßgeschneidert für Flugzeughersteller der Allgemeinen Luftfahrt sein, denen im Gegensatz zu Herstellern von Transportflugzeugen (Airliner), respektive Hochleistungsflugzeugen (Kampfflugzeugen) keine personalstarken Abteilungen für die Reglerentwicklung zur Verfügung stehen.

Die Novität der vorliegenden Arbeit ist ein Regelungskonzept nebst zugehöriger Nachweisverfahren, dessen Einsatz es ermöglicht, sehr gute Flugeigenschaften in Kleinflugzeuge zur Verbesserung der Flugsicherheit vorzusehen – bei gleichzeitiger Einhaltung der wirtschaftlichen Randbedingungen der Hersteller von Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt.

Der wissenschaftliche Betrag ergibt sich somit in der Bereitstellung einer Reglerstruktur, welche die Grundlage bestmöglicher Flugeigenschaften ist, sowie in dem zugehörigen Auslegungsverfahren der Reglerparameter (*Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe*), welches die abgezielten Flugeigenschaften abschließend sicherstellt. Reglerstruktur und Auslegungsverfahren sind dabei so konzipiert, dass die flugmechanische Wirkungsweise intuitiv begreiflich ist. Dies gilt insbesondere für die Berechnung der physikalisch interpretierbaren Reglerparameter. Dadurch kann gewährleistet werden, dass die Entwicklungs- und Kostenrandbedingungen von Flugzeugherstellern der Allgemeinen Luftfahrt eingehalten werden und nicht auf komplexe Verfahren zur Reglerauslegung zurückgegriffen werden muss, deren Bereitstellung und Verwendung personal- und somit kostenintensiv wäre. Das Verfahren zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften ($\mu_{\Delta T}$ -Analyse) ermöglicht Kleinflugzeugherstellern

die aufwandsgerechte Ausarbeitung einer entsprechenden Grundlage für Qualifizierung und Zulassung des Regelungskonzepts und stellt eine besondere wissenschaftliche Neuerung dar.

Die ersten Anwendungen aktiver Flugsteuerungssysteme erfolgte in den fünfziger und sechziger Jahren im Bereich militärischer Hochleistungsflugzeuge. Hintergrund waren die gewachsenen Anforderungen an die Flugleistung, welche durch die Installation von Strahltriebwerken bewerkstelligt wurden. Die Verbesserung der Flugleistungen, die sich positiv auf Flughöhen und Fluggeschwindigkeiten auswirkten, hatte nachteilig Einfluss auf die Flugeigenschaften (reduzierte Dämpfung der Eigenbewegungsformen). Deren Ausgleich wurde durch die Integration von Flugregelungssystemen, sogenannte *Stability Augmentation System* respektive *Control and Stability Augmentation System* erreicht. Im Rahmen des stetigen Fortschritts militärisch genutzter Flugzeuge erfolgte in den sechziger Jahren durch das Verteidigungsministerium der Vereinigten Staaten mit den *Military Specifications* die Systematische Formulierung und Dokumentation von Flugeigenschaftsforderungen. Darin wurde der Gütegrad der Flugeigenschaften in entsprechende Abstufungen unterteilt, die Aufschluss darüber geben, mit welchem Schwierigkeitsgrad eine Flugaufgabe zu bewältigen ist. Es war dadurch möglich, Anforderungen an die Flugeigenschaften quantitativ festzulegen und deren Einhaltung zu prüfen. Die kontinuierlich weiterentwickelten *Military Specifications* sind heute maßgeblich für die Entwicklung moderner Flugregelungssysteme.

Das erste zivile Transportflugzeug mit digitalem Flugregelungssystem ohne vollwertige mechanische Notsteuerung war die A320 (Erstflug 1987). Bei sehr guten Flugeigenschaften und bestem Flugkomfort wurde durch die Realisierung einer reduzierten Stabilität (sogenannte *Relaxed Stability*) um die Nickachse eine verbesserte Betriebseffizienz erreicht. Die erzielten Flugeigenschaften reduzierten die Arbeitsbelastung der Piloten merklich, was zu einer Verbesserung der Flugsicherheit führte. Durch das FbW Flugsteuerungssystem war es zusätzlich möglich, sogenannte *Protections* zu realisieren, was ein Überschreiten der Betriebsgrenzen verhinderte und somit ebenfalls zur Erhöhung Flugsicherheit beitrug. Darüber hinaus konnten durch aktive Flugsteuerungssysteme die Flugeigenschaften der verschiedenen Flugzeugtypen (A320, A330, A340) vereinheitlicht werden, wodurch der Schulungsaufwand für Piloten beim Umstieg auf einen anderen Flugzeugtyp signifikant minimiert wurde. Heute zeigt sich, dass die Verwendung aktiver Flugsteuerungssysteme in der Verkehrsluftfahrt und im Bereich militärischer Hochleistungsflugzeuge ermöglicht hat, diese leistungsfähiger sowie effizienter zu machen und darüber hinaus die Flugsicherheit signifikant zu steigern. Die Aufgabe ist, diesen Nutzen aktiver Flugsteuerungssysteme, durch die Integration ebendieser in Kleinflugzeuge, auf die Allgemeine Luftfahrt zu übertragen und infolge der gesteigerten Flugsicherheit die Zahl fataler Unfälle zu reduzieren.

Als Referenzflugzeug für die Ausarbeitung von Reglerstruktur, Auslegungsmethodik und Robustheitsnachweis wurde die *DA42 NG* gewählt, da am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik als Infrastruktur für wissenschaftliche Arbeiten folgende *DA42*-spezifische Einrichtungen zu

Verfügung stehen: *Matlab/Simulink DA42* Simulationsmodell, typenspezifischer Flugsimulator *D-SIM-42* (sogenanntes *Flight Training Device, FTD*) sowie ein fliegender Erprobungsträger *DA42 MNG* mit experimenteller FbW Steuerung (sogenannter *In-Flight Simulator*). Alle Teilschritte der Reglerentwicklung können somit durch die bereitstehende Infrastruktur wirklichkeitsnah vollzogen, verifiziert und erprobt werden.

1.3 Aufbau der Arbeit

Nachfolgend wird der Aufbau der Arbeit vorgestellt.

Kapitel 1. *Einführung in die Themenstellung.* In Kapitel 1 wird die Problematik des erhöhten Unfallrisikos in der Allgemeinen Luftfahrt im Vergleich zum Betrieb moderner Transportflugzeuge sowie die daraus resultierende Motivation zu dieser Arbeit dargestellt. Ferner wird ein Überblick über diese Arbeit gegeben.

Kapitel 2. *Modellierung und Erprobungsinfrastruktur.* Die für die Entwicklung, Verifizierung und Validierung der Regelungsalgorithmen notwendigen flugmechanischen Grundlagen – dazu gehören nichtlineare Starrkörper-Bewegungsgleichungen, linearisierte Bewegungsgleichungen, das mathematisch-physikalische Simulationsmodell sowie der für den finalen Test verwendete *D-SIM-42* Flugsimulator – werden in Kapitel 2 vorgestellt.

Kapitel 3. *Analyse der unregelmäßigen Flugdynamik.* In Kapitel 3 erfolgt die Analyse der Dynamik des unregelmäßigen Flugzeugs als essentielle Grundlage einer erfolgreichen Reglerentwicklung. Die Untersuchung wird auf Basis einer Vielzahl von repräsentativ über den gesamten Flugbereich verteilten linearen Zustandsraummodellen der Seitenbewegung durchgeführt. Dabei wird neben den Eigenbewegungsformen der Seitenbewegung zur Evaluierung der Stabilitätseigenschaften auch das Steuerungsverhalten analysiert, um somit die Defizite hinsichtlich der Flugeigenschaften der *DA42* herauszuarbeiten.

Kapitel 4. *Entwurfsziele und Regelungsstrategie.* Die Beschreibung und Diskussion der Entwurfsziele des zu entwickelnden Regelungssystems zur Gewährleistung exzellenter System- und Stabilitätseigenschaften sowie zur Sicherstellung bestmöglicher Steuerbarkeit und verbessertem Störverhalten des geregelten Flugzeugs erfolgt im ersten Teil von Kapitel 4. Im zweiten Teil wird in Anlehnung an die Entwurfsziele ein Regelungskonzept erarbeitet.

Kapitel 5. *Reglerstruktur.* Die detaillierte Beschreibung der Reglerstruktur unter Berücksichtigung der zugehörigen flugmechanischen Zusammenhänge erfolgt in Kapitel 5. Zunächst wird ein Überblick der gesamten Regelstruktur gezeigt, darauf folgt die ausführliche Erläuterung der einzelnen Teilstrukturen. Dies sind *Vorverarbeitung der Führungsgrößen*, *Rollachsenregler*, *Gierachsenregler* und *Steuerkoordinierung*. Abschließend wird auf die notwendigen Messgrößen und Abschätzungen äquivalenter Anströmungswinkel eingegangen.

Kapitel 6. *Reglersynthese (MR DEA)*. In Kapitel 6 wird die Methodik zur Berechnung der Reglerparameter unter Berücksichtigung der gegebenen Reglerstruktur mit dem Ziel bestmöglicher Flugeigenschaften dargelegt. Nach einer kurzen Einführung in die Reglersynthese werden die Anforderungen an die Eigenstruktur bzw. an die Dynamik des geregelten Flugzeugs zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften festgelegt. Basierend auf den über den gesamten Flugbereich homogen verteilten Zustandsraummodellen des unregulierten Flugzeugs, gewonnen aus der Linearisierung getrimmter Flugzustände des Simulationsmodells der *DA42*, werden die zugehörigen Verstärkungsfaktoren mittels der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe (MR DEA)* bestimmt. Anschließend wird ein finaler Regler mit über die Envelope linear nachgeführten Verstärkungsfaktoren ausgearbeitet. Zum Schluss von Kapitel 6 erfolgt zur Überprüfung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* und der bewirkten Flugdynamik des geregelten Flugzeugs eine lineare Analyse des geschlossenen Kreises.

Kapitel 7. *Analyse und Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften*. Die Basis zur Zulassung eines Flugregelungssystems ist der Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften des geregelten Flugzeugs. In Kapitel 7 erfolgt zunächst die Bestätigung ausreichender Stabilitätsreserven durch eine klassische *SISO*-Robustheitsanalyse. Dies stellt die Basis jeder behördlichen Zulassung dar. Da es sich hierbei jedoch nicht um einen hinreichenden Nachweis handelt, wird schwerpunktmäßig eine *MIMO*-Robustheitsanalyse auf Basis des maximalen Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ durchgeführt und somit die Konformität des geregelten Systems auf Grundlage einer umfänglichen Unsicherheitsmodellierung erbracht. Dabei wird direkt auf Mindestanforderungen aus den Zulassungsregularien eingegangen und deren Einhaltung auf Basis der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse nachgewiesen. Die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ist eine Weiterentwicklung der μ -Analyse.

Kapitel 8. *Nichtlineare Analyse*. In Kapitel 8 erfolgt die nichtlineare Analyse der Dynamik des geregelten Flugzeugs auf Basis des nichtlinearen *Matlab/Simulink* Simulationsmodells der *DA42* und des typenspezifischen Flugsimulators *D-SIM-42*. Durch eine separate Analyse von Roll- und Gierdynamik wird im ersten Teil die Zulässigkeit der im Rahmen der Reglerentwicklung vorgenommenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen geprüft. Dazu wird die nichtlineare Dynamik des *DA42* Simulationsmodells mit dem spezifizierten (geforderten) linearen Zielverhalten verglichen und bewertet. Im zweiten Teil erfolgt in Gegenüberstellung zum unregulierten Fluggerät die Analyse des Steuer- und Störverhaltens zur Verifikation des Reglerentwurfs und zum Nachweis der bewirkten exzellenten Flugeigenschaften. Im dritten und letzten Teil wird eine Analyse der Handhabungseigenschaften des geregelten Flugzeugs durch pilotierte Flugversuche mit dem *D-SIM-42* Flugsimulator zur Validierung und Bewertung des Reglerentwurfs vorgestellt.

Kapitel 9. *Zusammenfassung und Ausblick*. In Kapitel 9 erfolgt eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit. Dabei wird auf die Schwerpunkte der einzelnen Kapitel kurz eingegangen. Die Dissertation schließt mit einem Ausblick auf weiterführende Themen im Bereich der vorliegenden Arbeit und einer finalen Schlussfolgerung.

2 Modellierung und Erprobungsinfrastruktur

In diesem Kapitel werden die mathematisch-physikalischen Grundlagen, flugmechanischen Zusammenhänge und Modelle, die für die Entwicklung des Reglers erforderlich sind, präsentiert. Ferner erfolgt eine Vorstellung der für die Verifizierung, Validierung und Erprobung des Reglers zur Verfügung stehenden Infrastruktur.

2.1 Modellierung

Zu Beginn der Modellierung wird auf das experimentelle Koordinatensystem eingegangen, welches grundlegend für die Reglerentwicklung ist. Im Anschluss daran werden die für die Ausarbeitung der Reglerstruktur, die Auslegung der Verstärkungsfaktoren und die Durchführung der Robustheitsanalyse erforderlichen mathematisch-physikalischen Gleichungen und Ersatzmodelle dargelegt und erörtert. Dazu gehören die nichtlinearen Starrkörperbewegungsgleichungen, aus welchen entscheidende mathematische Zusammenhänge zur Ausarbeitung der Reglerstruktur abgeleitet werden. Des Weiteren wird das lineare, zeitinvariante Zustandsraummodell der Seitenbewegung des Flugzeugs vorgestellt, mittels dem sowohl die Entwicklung der Reglerstruktur als auch die Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* und der Robustheitsnachweis erfolgen. Abschließend folgt eine Beschreibung der für die lineare und nichtlineare Analyse und für die Robustheitsuntersuchung herangezogene Aktuatordynamik und deren Modellierung.

2.1.1 Das experimentelle Koordinatensystem

Alle im Rahmen dieser Arbeit notwendigen Koordinatensysteme werden in [1] und [2] angegeben, an dieser Stelle wird ausschließlich auf das experimentelle Koordinatensystem eingegangen. Dieses Koordinatensystem ist grundlegend für die Umsetzung der in Kapitel 4 beschriebenen Entwurfsziele und Regelungsstrategie. Die Realisierung des Regelungsprozesses erfolgt in Bezug auf flugdynamisch besonders geeigneten Bewegungs- und Steuerachsen, die sich mathematisch bzgl. des experimentellen Achsenkreuzes beschreiben lassen. Dadurch kann eine koordinierte Flugzeugbewegung effektiv umgesetzt werden.

Durch Drehung des flugzeugfesten Koordinatensystems (f -System) um den negativen Anstellwinkel mit der y_f -Achse als Drehachse erhält man das experimentelle Koordinatensystem (e -System). Aus einer weiteren Drehung um den Schiebewinkel bzgl. der z_e -Achse resultiert das aerodynamische Achsenkreuz (a -System). In Abbildung 2-1 sind das experimentelle

Koordinatensystem (Index e) sowie das flugzeugfeste und das aerodynamische Achsenkreuz (Index f und a) dargestellt.

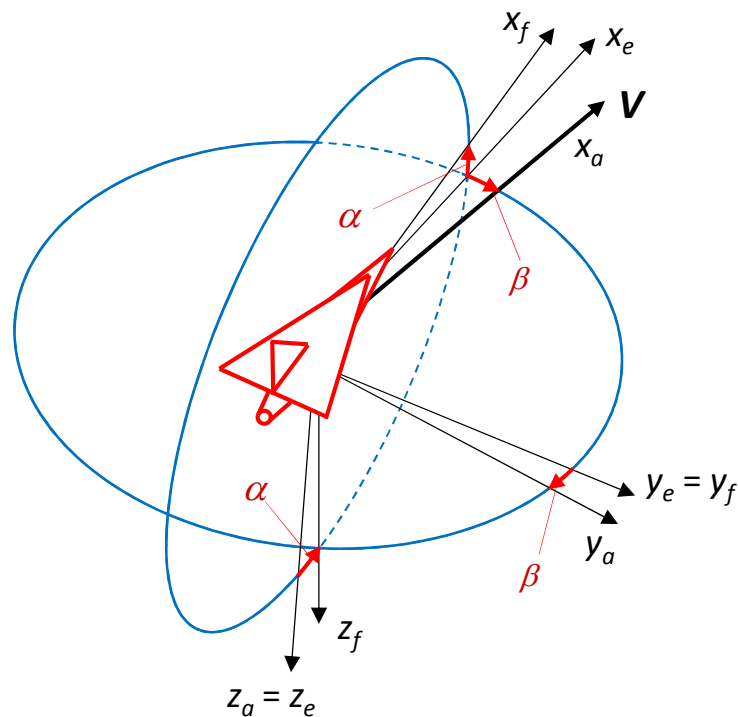


Abbildung 2-1: Experimentelles Koordinatensystem

Eine detaillierte Begründung, weshalb das experimentelle Achsenkreuz grundlegend für das Regelungskonzept ist, erfolgt in Kapitel 4 und 5. Es soll jedoch an dieser Stelle – zum besseren Verständnis – Folgendes vorweggenommen werden: In den überwiegenden Flugphasen ist ein seitenkraftfreier Flugzustand (koordinierter Flugzustand $n_{y_f} = 0$) beabsichtigt. Dabei gilt für Luftfahrzeuge konventioneller Bauart mit guter Näherung $\beta \approx 0$, vgl. [7]. Durch einen koordinierten Flugzustand ist eine wichtige Grundlage zur Erzielung exzellenter Flugeigenschaften sichergestellt, da es dadurch zu keiner ungewollten Abdrift kommt und ein hohes Maß an Komfort und Effizienz bewirkt wird. Ausgehend von einem schiebewinkelfreien bzw. seitenkraftfreien Flugzustand ($\beta \approx 0 / n_{y_f} = 0$), wie beispielsweise dem symmetrischen Geradeaus- oder Steigflug, sollte sowohl beim Ein- und Ausleiten als auch während des stationären Kurvenflugs mit guter Näherung kein Schiebewinkel β bzw. keine Seitenkraft n_{y_f} entstehen, um eine koordinierte Flugzeugbewegung sicherzustellen. Rollt ein Flugzeug, ausgehend vom symmetrischen Geradeausflug, um die x -Achse des körperfesten Koordinatensystems mit der Rollgeschwindigkeit p_f so kommt es zwangsläufig zu einem unerwünschten Schiebewinkel β und einer Änderung des Anstellwinkels. Erfolgt ausgehend vom symmetrischen Geradeausflug ($\beta \approx 0 / n_{y_f} = 0$) die Rollbewegung jedoch um die x -Achse des experimentellen Koordinatensystems mit der Rollgeschwindigkeit p_e , rollt das Flugzeug um den aerodynamischen Anströmvektor. Es entsteht dabei kein Schiebewinkel und der Anstellwinkel bleibt konstant. Das bedeutet: rollt das (geregelt) Flugzeug um die x -Achse des experimentellen Koordinatensystems (x_e -Achse), so gewährleistet dies, unter Berücksichtigung

der Anfangsbedingungen $\beta \approx 0$ und $n_{y_f} = 0$, die gewünschte koordinierte und somit schiebewinkelfreie bzw. seitenkraftfreie Flugzeugbewegung. Das experimentelle Koordinatensystem stellt somit eine fundamentale Grundlage des zu entwickelnden Regelungssystems dar.

2.1.2 Nichtlineare Starrkörperbewegungsgleichungen

Die Funktionsweise des Regelungssystems ist ortsunabhängig. Die Entwicklung erfolgt deshalb unter Betrachtung stationärer Flugzustände zur Charakterisierung der Eigendynamik ohne Berücksichtigung der Position. Es ist ausreichend, die benötigten nichtlinearen Starrkörperbewegungsgleichungen für den vereinfachten Fall einer flachen, nicht rotierenden Erde für die translatorischen, rotatorischen und lagebeschreibenden Zustände zu formulieren.

Translationsbewegung

Durch Anwendung des Impulssatzes, siehe [8] und [9], und des Bewegungsgesetzes von Newton, siehe [8], ergibt sich für die Änderung der translatorischen Zustände u , v , w eines Starrkörpers in Vektor- Matrizenschreibweise, siehe auch [9]:

$$\left(\dot{\vec{V}}_K^G\right)_f^{gf} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}_f - (\vec{\omega}^{gf})_f \times (\vec{V}_K^G)_f^g \quad (2.1)$$

Oder ausführlich:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_K \\ \dot{v}_K \\ \dot{w}_K \end{pmatrix}_f^{gf} = g \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}_f + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} X_{P+A}^G \\ Y_{P+A}^G \\ Z_{P+A}^G \end{pmatrix}_f - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_f \times \begin{pmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{pmatrix}_f^g \quad (2.2)$$

Dabei sind:

- $(\vec{V}_K^G)_f^g$ die Bahngeschwindigkeit (Index K) des Schwerpunktes (Index G) des Starrkörpers in Bezug auf den Ursprung des erdfesten g -Koordinatensystems (Index g), angegeben im flugzeugfesten Koordinatensystem (Index f). Das erdfeste g -Koordinatensystem (Index g) ist unter der Annahme einer flachen, nicht rotierenden Erde das Inertial-Koordinatensystem.
- $\left(\dot{\vec{V}}_K^G\right)_f^{gf}$ die zeitliche Änderung von $(\vec{V}_K^G)_f^g$ in Bezug auf das f -System (Index f).
- $(\vec{\omega}^{gf})_f$ die Winkelgeschwindigkeit des flugzeugfesten Koordinatensystems gegenüber dem erdfesten Koordinatensystem, angegeben im flugzeugfesten System, also die Drehraten p, q, r des Starrkörpers.
- $\sum \vec{F}_f$ (bzw. $X_{P+A}^G, Y_{P+A}^G, Z_{P+A}^G$ und Gravitationskräfte) die Summe aller äußeren Kräfte, welche am Starrkörper angreifen, angegeben im flugzeugfesten System. Diese lassen sich für ein Flugzeug im Allgemeinen in die Gravitationskraft sowie Antriebs- und aerodynamische Kräfte aufteilen (Index P für Schub bzw. *Propulsion*; Index A für Aerodynamik).

Rotationsbewegung

Mit dem Drallsatz ([8]) erhält man für die Änderung der rotatorischen Zustände p, q, r (Starrkörperdrehraten), siehe auch [9]:

$$\left(\dot{\vec{\omega}}^{gf}\right)_f^f = J^G{}^{-1} \left(\sum \vec{M}_f^G - (\vec{\omega}^{gf})_f \times J^G (\vec{\omega}^{gf})_f \right) \quad (2.3)$$

Oder ausführlich:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix}_f^f = J^G{}^{-1} \left(\begin{pmatrix} L_{P+A}^G \\ M_{P+A}^G \\ N_{P+A}^G \end{pmatrix}_f - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_f \times \left(J^G \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_f \right) \right) \quad (2.4)$$

Dabei sind:

- J^G der Trägheitstensor bzgl. des Schwerpunktes (Index G) des Starrkörpers im f -System.
- $(\vec{\omega}^{gf})_f$ die Winkelgeschwindigkeit des flugzeugfesten Koordinatensystems gegenüber dem erdfesten Koordinatensystem, angegeben im flugzeugfesten System (Index f), also die Drehraten p, q, r des Starrkörpers.
- $(\dot{\vec{\omega}}^{gf})_f^f$ die zeitliche Änderung von $(\vec{\omega}^{gf})_f$ in Bezug auf das f -System (Index f).
- $\sum \vec{M}_f^G$ (bzw. $L_{P+A}^G, M_{P+A}^G, N_{P+A}^G$) die Summe aller äußeren Momente (um den Schwerpunkt G), angegeben im flugzeugfesten System, die am Starrkörper angreifen. Diese lassen sich für ein Flugzeug im Allgemeinen in Antriebs- und aerodynamische Momente aufteilen (Index P für Schub bzw. *Propulsion*; Index A für *Aerodynamik*).

Lagedifferentialgleichung

Die Lage eines Starrkörpers im Raum wird durch die sogenannten Eulerwinkel Φ, θ, Ψ beschrieben. Stellt man die flugzeugfesten Drehraten p, q, r mittels Transformationsmatrizen der entsprechenden Koordinatensysteme in Zusammenhang mit den Änderungen der Lagewinkel $\dot{\Phi}, \dot{\theta}, \dot{\Psi}$, so erhält man die Lagedifferentialgleichung nach Gl. (2.5), siehe [7].

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \theta & \cos \Phi \tan \theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_f \quad (2.5)$$

Eine ausführliche Herleitung der Starrkörperbewegungsgleichungen, unter anderem für den Fall einer runden rotierenden Erde, ist in [9], [10] und [11] zu finden.

Eine Gleichung für die Änderung des Schiebewinkels wird im Folgenden angegeben, sie ist für die Betrachtungen zur Reglerstruktur (Kapitel 5) erforderlich. Die Beschreibung der translatorischen Bewegung kann alternativ zu den Zuständen u, v, w auch durch die Größen V, β, α beschrieben werden. Durch Substitution, Umformung und der Annahme „kein Wind“ (*windfreier Fall*) erhält man aus Gl. (2.2) die Gleichungen (2.6), siehe auch [12]. Hierbei ist zu

beachten, dass im *windfreien Fall* das gedrehte Bahnachsensystem, welches sich durch Drehung des Bahnachsensystems (k -System) mit μ (Flugwindhängewinkel) um die x -Achse ergibt, mit dem aerodynamischen Koordinatensystem (a -System) zusammenfällt.

$$\begin{aligned}\dot{V}_K^G &= g(n_{x_a} - \sin \gamma) \\ \dot{\beta}_K &= \frac{g}{V_K^G}(n_{y_a} + \sin \mu \cos \gamma) - r_a \\ \dot{\alpha}_K &= \frac{1}{\cos \beta} \left[\frac{g}{V_K^G}(-n_{z_a} + \cos \mu \cos \gamma) + q_a \right]\end{aligned}\tag{2.6}$$

(*windfreier Fall*)

Dabei bezeichnen:

- \dot{V}_K^G die zeitliche Änderung der Bahngeschwindigkeit V_K^G , wobei für den angenommenen *windfreien Fall* die aerodynamische Geschwindigkeit identisch mit der Bahngeschwindigkeit ist.
- $n_{x_a} = X_{P+A}^G/(m g)$, $n_{y_a} = Y_{P+A}^G/(m g)$, $n_{z_a} = -Z_{P+A}^G/(m g)$ die Lastfaktoren bzgl. der Achsen des aerodynamischen Koordinatensystems (Index a).
- p_a, q_a, r_a die flugzeugfesten Drehraten bzgl. des aerodynamischen Koordinatensystems (Index a).
- μ, γ der kinematische (bzw. aerodynamische) Hänge- bzw. Bahnwinkel (*windfreier Fall*) (Bemerkung: μ wird nach [1] als Flugwindhängewinkel bezeichnet).
- α_K, β_K der kinematische Anstell- bzw. Schiebewinkel, welcher für den angenommenen *windfreien Fall* identisch mit dem aerodynamischen Anstell- bzw. Schiebewinkel ist. Die zeitliche Änderung von α_K und β_K sind $\dot{\alpha}_K$ und $\dot{\beta}_K$.

2.1.3 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Zur Analyse und Bewertung der Flugeigenschaften des geregelten und unregulierten Flugzeugs, insbesondere hinsichtlich der Stabilitätseigenschaften, zur Ausarbeitung der Reglerstruktur sowie zur Umsetzung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* und zur Durchführung der Robustheitsuntersuchung ist es zweckmäßig, das dynamische Verhalten des geregelten und unregulierten Systems als lineares, zeitinvariantes Zustandsraummodell (*LZI-Systeme*) bzgl. repräsentativer Flugzustände (Trimmpunkte) wiederzugeben. Eine detaillierte Darlegung zum linearen Zustandsraummodell bzw. zur Zustandsraumdarstellung ist in [13], [14] und [15] zu finden. Das lineare, zeitinvariante Zustandsraummodell, siehe Gl. (2.7), umfasst die Zustandsgleichung zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens und die Ausgangsgleichung, welche in Abhängigkeit der Systemzustände und Eingangsgrößen die Ausgangsgrößen abbildet.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} && \text{Zustandsgleichung} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} && \text{Ausgangsgleichung}\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die Zustandsgleichung eines linearen zeitinvarianten Systems setzt sich entsprechend der Anzahl n der Systemzustände aus n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zusammen, welche die Änderung des Zustandsvektors $\dot{\mathbf{x}}$ in Abhängigkeit des Zustandsvektors \mathbf{x} und des Eingangsvektors \mathbf{u} sowie der Systemmatrix \mathbf{A} und der Eingangsmatrix \mathbf{B} wiedergeben. Die Ausgangsgleichung beschreibt als Funktion des Zustandsvektors und des Eingangsvektors mit der Ausgangsmatrix \mathbf{C} und der Durchgangsmatrix \mathbf{D} den Ausgangsvektor \mathbf{y} . Zur Bestimmung des Zustandsraummodells der Seitenbewegung des unregulierten Flugzeugs werden die nichtlinearen Starrkörperbewegungsgleichungen, die die Dynamik des unregulierten Flugzeugs beschreiben, um (quasi-) stationäre Referenzzustände, sogenannte Trimpunkte, linearisiert. In [9] und [7] ist dies detailliert beschrieben. Durch Linearisierung der Starrkörperbewegungsgleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten der äußeren Kräfte und Momente von den Zuständen p_e, r_e, β sowie Φ und der Eingangsgrößen Querruder ξ und Seitenruder ζ die Zustandsgleichung des linearen Zustandsraummodells der Seitenbewegung bzgl. des experimentellen Koordinatensystems, entsprechend Gl. (2.8), vgl. [9].

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_p & L_r & L_\beta & 0 \\ N_p & N_r & N_\beta & 0 \\ Y_p & Y_r - 1 & Y_\beta & \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 \\ \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & \frac{\sin \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \beta \\ \Phi \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_\xi & L_\zeta \\ N_\xi & N_\zeta \\ Y_\xi & Y_\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (2.8)$$

Die äußeren Kräfte und Momente resultieren dabei im Allgemeinen aus Antrieb und Aerodynamik. Die Größen L_i, N_i und Y_i mit $i = p, r, \beta, \xi, \zeta$ werden als Ersatzderivativa bezeichnet. Sie fassen Antriebs- und aerodynamische Kräfte zusammen, wobei für konventionelle Konfigurationen der Einfluss der Schubkräfte im Vergleich zu den aerodynamischen Kräften bzgl. der betrachteten Zustände klein ist. Die Angabe der Ersatzderivativa wird zur Vereinfachung der Darstellung ohne Kennzeichnung des e -Systems angegeben. Zum tieferen Verständnis der Ersatzderivativa wird exemplarisch auf N_β eingegangen das sich wie folgt zusammensetzt:

$$N_\beta = \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{x_e} C_{n\beta_e} + I_{xz_e} C_{l\beta_e}] \quad (2.9)$$

Dabei sind:

- \bar{q}_0 der Staudruck des zugehörigen Trimpunktes
- S die Bezugsflügelfläche
- s_{ref} die Bezugslänge der Seitenbewegung
- I_{i_e} bzw. I_{ij_e} ($i, j = x, y, z$) die Elemente des Trägheitstensors \mathbf{J}_e^G bzgl. des e -Systems
- $C_{n\beta_e}$ das Schiebepiermomentenderivatv bzgl. des e -Systems

- $C_{l\beta_e}$ das Schieberollmomentenderivativ bzgl. des e -Systems
- $\Delta_e = I_{x_e} I_{z_e} - I_{xz_e}^2 = \Delta = I_x I_z - I_{xz}^2$

N_β ist die statische Stabilität der Roll-Gier-Schwingung, deren Wert für konventionelle Konfigurationen größer null ist. Eine Störung des Schiebewinkels führt infolge von N_β für konventionelle Konfigurationen zu einer Gierbeschleunigung \dot{r}_e , die dem Schiebewinkel entgegen wirkt ($r_e \leftrightarrow -\dot{\beta}$). Analog zu N_β können auch die anderen Ersatzderivativa gedeutet werden, deren Darstellung entsprechend Gl. (2.9) im Anhang A.1 zu finden ist.

2.1.4 Modellierung der Aktuatordynamik

Zur Gewährleistung einer möglichst wirklichkeitsgetreuen linearen Analyse und nichtlinearen Simulation des geregelten Flugzeugs (Kapitel 6.5 und 8) und einer aussagekräftigen Robustheitsprüfung (Kapitel 7) ist es erforderlich, die zum Betrieb des reglergestützten Flugsteuerungssystems notwendige Aktuatorik, welche die Dynamik des geregelten Gesamtsystems beeinflusst, zu berücksichtigen. Die Serienversion der DA42 NG verfügt über ein rein mechanisches Steuerungssystem, bestehend aus Steuerstangen und Steuerseilen ohne aktive Unterstützungsmechanismen. Deshalb orientiert sich die Modellierung der Aktuatordynamik an den Aktuatoren des *Fliegenden Erprobungsträgers*, einer zum Forschungsflugzeug modifizierten *DA42 NG* mit experimenteller Fly-by-Wire Steuerung. Für alle Primärstellflächen (Höhen-, Quer- und Seitenruder) des Forschungsflugzeugs wurden die baugleichen Antriebseinheiten verwendet: Ein elektro-mechanischer Aktuator, der über eine redundante Drehmomentenerzeugung (redundante Wicklungen) verfügt, die im sogenannten *Aktiv-Passiv-Betrieb* eingesetzt ist. Zur Anpassung von Drehzahl und Drehmoment dient ein zweistufiges Planetengetriebe. Steuerung und Regelung einer Antriebseinheit erfolgt durch eine ebenfalls redundante Elektronik, als Eingangssignal dient ein Positionskommando. Nach [7] und [10] können derartige Systeme mit guter Näherung als lineare Systeme zweiter Ordnung abgebildet werden. Dadurch ist ein guter Kompromiss aus der Abbildung der realen Dynamik und der Komplexität der Modellierung sichergestellt. Die Übertragungsfunktion zur Modellierung der Aktuatoren von Quer- und Seitenruder ergeben sich in Anlehnung an [7] und [10] nach Gl. (2.10).

$$g_{jjc\ nom} = \frac{j(s)}{j_c(s)} = \frac{\omega_{0\ Act}^2}{s^2 + 2 \zeta_{Act} \omega_{0\ Act} s + \omega_{0\ Act}^2} \quad \text{mit } j = \xi, \zeta \quad (2.10)$$

Der Index *nom* kennzeichnet, dass es sich um die nominale Übertragungsfunktion handelt, welche im Rahmen der Robustheitsanalyse durch eine dynamische Unsicherheit erweitert wird.

Die Auswertung erster Tests der Aktuatoren des *Fliegenden Erprobungsträgers*, die vom Hersteller durchgeführt wurden, ergaben in Abhängigkeit der Zwischenkreisspannung U_z eine natürliche Frequenz von $\omega_{0\ Act} \approx 23$ rad/s bei $U_z = 10$ V und $\omega_{0\ Act} \approx 48$ rad/s bei $U_z = 24$ V, wobei die relative Dämpfung ζ_{Act} in beiden Fällen bei ca. 0,7 lag. Die

Betriebsspannung der *DA42 NG* beträgt 28 V. Durch einen sogenannten *DC-DC-Wandler* kann die Zwischenkreisspannung entsprechend den gewünschten Gegebenheiten eingestellt werden. Nach [7] kann für hydraulische Ruderstellantriebe als Richtwert eine natürliche Frequenz von $\omega_{0 Act} \approx 60 \text{ rad/s}$ und eine relative Dämpfung von $\zeta_{Act} \approx 0,4 - 0,8$ angenommen werden. Als Richtwert für elektrische Stellmotoren gibt [7] eine natürliche Frequenz $\omega_{0 Act} \approx 30 \text{ rad/s}$ bei einer relativen Dämpfung von $\zeta_{Act} \approx 0,7 - 1$ an. Eine Übersicht aller zu Verfügung stehenden Werte ist in Tabelle 2-1 gegeben.

	Aktuator <i>Fliegender Erprobungsträger</i> $U_z = 10 \text{ V}$	Aktuator <i>Fliegender Erprobungsträger</i> $U_z = 24 \text{ V}$	hydraulischer Ruderstellantrieb [7]	elektrischer Stellmotor [7]	für Reglerdesign und Analyse verwendete Werte
ζ_{Act}	$\approx 0,7$	$\approx 0,7$	$\approx 0,4 - 0,8$	$\approx 0,7 - 1,0$	$= 0,7$
$\omega_{0 Act} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	≈ 23	≈ 48	≈ 60	≈ 30	$= 35$

Tabelle 2-1: Übersicht Aktuatorkennwerte

Durch Beurteilung der vorhandenen Daten aus der Auswertung der Tests der Aktuatoren des Forschungsflugzeugs und unter Berücksichtigung der Richtwerte von [7], welche aus den neunziger Jahren stammen und somit nicht dem Stand moderner Antriebstechnik entsprechen, wurde für den gesamten Entwicklungsprozess eine natürliche Frequenz von $\omega_{0 Act} \approx 35 \text{ rad/s}$ und eine relative Dämpfung von $\zeta_{Act} \approx 0,7$ festgelegt. Die natürliche Frequenz $\omega_{0 Act}$ ist das Maß für die Bandbreite des Aktuators. Je größer der Wert, desto agiler ist der Antrieb und umso einfacher gestaltet sich das Design des Reglers, vgl. [10]. Mit einer natürlichen Frequenz von $\omega_{0 Act} \approx 35 \text{ rad/s}$ wurde unter Beachtung der Herstellerangaben und einer möglichen und zulässigen Erhöhung der Zwischenkreisspannung U_z auf 28 V, was die Bandbreite des Aktuators weiter steigert, ein zur Gewährleistung einer Auslegung auf der sicheren Seite entsprechend restriktiver Wert angenommen.

Für die Durchführung der nichtlinearen Analyse ist entsprechend der konstruktiven Ausführung der *DA42 NG* ein zulässiger Ausschlagsbereich des Querruders von $\xi = \pm 20^\circ$ und des Seitenruders von $\zeta = +27/-29^\circ$ gegeben, siehe [16]. Entsprechend der Spezifikation des Aktuators, siehe [17], und der konstruktiven Anbindung an die jeweilige Steuerfläche im Forschungsflugzeug ergibt sich eine maximale Stellgeschwindigkeit der Steuerflächen von $|\dot{\zeta}|, |\dot{\xi}| \approx 60 - 120 \text{ }^\circ/\text{s}$, dies ist insbesondere von der Zwischenkreisspannung U_z des Aktuators abhängig. Für die in Kapitel 8 durchgeführte nichtlineare Simulation des geregelten Flugzeugs wurde in Anlehnung an das Forschungsflugzeug und an [18] der konservative, niedrige Wert von $|\dot{\zeta}|, |\dot{\xi}| = 60 \text{ }^\circ/\text{s}$ angesetzt.

2.2 Erprobungs- und Entwicklungsinfrastruktur

Die *DA42 NG* ist das Referenzflugzeug der vorliegenden Arbeit. Am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik stehen für die Entwicklung und Erprobung des Regelungssystems sowohl ein *D-SIM-42* Flugsimulator als auch ein auf einer *DA42 MNG* basierender *Fliegender*

Erprobungsträger zur Verfügung. Der Flugsimulator und das Erprobungsflugzeug werden im Folgenden detailliert beschrieben.

2.2.1 *D-SIM-42* Flugsimulator

Der *D-SIM-42* Flugsimulator ist eine typenspezifische Ab- bzw. Nachbildung der *DA42 NG*. Er wurde von der *Diamond Aircraft Industries GmbH - Business Unit Simulation* entwickelt und wird bis heute in Kleinserie produziert. Es handelt es sich um einen Flugsimulator, der primär für Schulungs- und Ausbildungszwecke Anwendung findet. Der *D-SIM-42* Flugsimulator erfüllt die Anforderungen einer Zertifizierung als sogenanntes *Flight Training Device Level 5 (FTD Level 5)* nach *FAA 14 CFR Part 60*, d.h. er ist sowohl für die Basis- bzw. Grundlagenschulung als auch für die weiterführende Ausbildung von Piloten vor allem in Hinblick auf den Instrumentenflug, das Navigations- und Verfahrens- sowie Crewtraining konzipiert, vgl. [19]. Durch die Verwendung des *D-SIM-42* Flugsimulators für die Pilotenausbildung können die Anzahl der Flugstunden auf der *DA42 NG* und somit die Ausbildungskosten gesenkt werden (Flugersatzzeiten), vgl. [19]. Hardwareseitig verfügt der Simulator über ein hochwertiges dreikanaliges Sichtsystem mit einer zylindrischen Leinwand, die einen Horizontalsichtwinkel von ca. 200° ermöglicht. Als Cockpit dient der vordere Teil einer originalen *DA42 NG* Zelle. Das gesamte Interieur wie der Steuerknüppel, die Pedale, der Piloten- und Copilotensitz als auch die Instrumentierung, allen voran das Glascockpit von *Garmin*, sind ebenfalls originale Flugzeugbauteile. Softwareseitig verfügt der Simulator über ein mathematisch-physikalisches Modell, welches ein Motoren-, Propeller- und Fahrwerksmodell beinhaltet und die typenspezifische Aerodynamik und Flugzeugkonfiguration beschreibt. Das aerodynamische Modell wurde vom Simulatorhersteller in Zusammenarbeit mit dem Flugzeughersteller aus Flugversuchsdaten der *DA42 NG* mittels einer Parameteridentifikation ausgearbeitet. Der *D-SIM-42* Flugsimulator ist mit einem sogenannten *Control Loading System* ausgestattet, welches die aerodynamischen Lasten an den Stellflächen und somit die Steuerknüppelkräfte des reversiblen Steuerungssystems der *DA42* abbildet.

Zur Verwendung als Forschungsinfrastruktur für die Entwicklung und Erprobung von Flugregelungsalgorithmen wurde der Simulator durch den Lehrstuhl für Flugsystemdynamik in Zusammenarbeit mit dem Simulatorhersteller mit einer Datenschnittstelle ausgestattet. Dadurch ist es zum einen möglich, alle Flugzeugparameter und Flugzustände auszulesen und zum anderen auf die Kommandogrößen der *DA42*, insbesondere den longitudinalen und lateralen Steuerknüppelausschlag, den Pedalausschlag und die Schubhebelstellung zuzugreifen. Durch die Datenschnittstelle können somit Flugregelungsalgorithmen an den Simulator angebunden und umfassende sowie aussagekräftige Analysen und Evaluierungen des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung des Piloten als aktives Glied des Piloten-Flugzeug-Regelkreises, sogenannte *Pilot-in-the-Loop* Simulationen, durchgeführt werden. In Abbildung 2-2 ist der *D-SIM-42* Flugsimulator dargestellt.

Für die Entwicklung von Regelungssystemen nebst zugehöriger Verifikation erfolgte am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik eine exakte Re-Implementierung des mathematisch-physikalischen Modells des *D-SIM-42* Flugsimulators als *DA42* Simulationsmodell in *Matlab/Simulink*. Das Simulationsmodell ermöglicht die automatische Generierung linearer, zeitinvarianter, Zustandsraummodelle der Seitenbewegung des unregulierten Flugzeugs nach Gl. (2.8). Darüber hinaus wurde durch das *DA42* Simulationsmodell in *Matlab/Simulink* die Möglichkeit geschaffen, direkt auf die Kenngrößen des Flugzeugs Einfluss zu nehmen. Im Rahmen der nichtlinearen Analyse, siehe Kapitel 8 und Anhang A.1, konnte somit auf Basis einer Manipulation der Streckendynamik durch Perturbation der Aerodynamik, die Bestätigung robuster Stabilitätseigenschaften mittels des *DA42* Simulationsmodells erbracht werden.



Abbildung 2-2: D-SIM-42 Flugsimulator (Quelle: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik)

2.2.2 Fliegender Erprobungsträger – *OE-FSD*

Der *Fliegende Erprobungsträger*, siehe Abbildung 2-3, mit dem Luftfahrzeugkennzeichen *OE-FSD*, ist ein modulares Forschungsflugzeug dessen Einsatzbereich sowohl die *Nutzung als Trägerplattform* als auch als *Entwicklungsumgebung für Flugsteuerungs- und Flugregelungssysteme* vorsieht. Als Basisflugzeug für die *OE-FSD* dient eine *DA42 MNG*. Die Modifikationen zum Forschungsflugzeug wurden vom Lehrstuhl für Flugsystemdynamik in Zusammenarbeit mit *Diamond Aircraft Industries GmbH* konzipiert, ausgearbeitet und realisiert. Die Nutzung als fliegende Trägerplattform eröffnet die Möglichkeit, Sensoren und andere Gerätschaften wie beispielsweise Kameras oder Instrumente zur Flugführung zu entwickeln und zu erproben. Durch die Automatisierung der primären und sekundären Steuerelemente ist der Erprobungsträger die ideale Basis für Entwicklung und Test von Flugsteuerungs- und Flugregelungssystemen bemannter und unbemannter Fluggeräte. Es besteht die Möglichkeit, alle

Komponenten eines Flugsteuerungssystems, wie etwa Regelalgorithmen oder auch Rechnerplattformen unter realen Umgebungsbedingungen zu erproben.



Abbildung 2-3: Fliegender Erprobungsträger – OE-FSD (Quelle: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik)

Beim Basisflugzeug, der *DA42 MNG*, handelt es sich bereits um ein Spezialflugzeug, welches auf der *DA42 NG* aufbaut. Die *DA42 NG* wird von zwei Dieselmotoren mit einer Gesamtleistung von 336 PS (247 kW) angetrieben, die maximale Reisegeschwindigkeit beträgt 338 km/h TAS. Sie verfügt über einen Piloten- sowie einen Copiloten-Arbeitsplatz im vorderen Teil der Kabine von denen aus das Flugzeug gesteuert werden kann. Die *DA42 NG* ist für den Betrieb mit nur einem Piloten zugelassen. Im hinteren Teil der Kabine befinden sich zwei Passagiersitzplätze. Das Leergewicht beläuft sich auf 1430 kg, das maximale Startgewicht ist 1900 kg. Das gesamte Flugzeug ist aus faserverstärktem Kunststoff gefertigt. In Tabelle 2-2 sind die technischen Daten der *DA42 NG* zusammenfasst.

Antrieb	2 flüssigkeitsgekühlte elektronisch geregelte, 4-Zylinder-Reihenturbodieselmotoren mit je 168 PS
Länge	8,56 m
Höhe	2,49 m
Spannweite	13,55 m
Leergewicht	1430 kg
maximales Startgewicht	1900 kg
maximale Reisegeschwindigkeit	328 km/h TAS / 177 kts TAS
maximale Flughöhe	5486 m
Stallgeschwindigkeit (clean)	126 km/h CAS / 68 kts CAS
Reichweite bei 60% Schub (Standardtank)	1335 km / 721 nm

Tabelle 2-2: Technische Daten DA42-NG – (Quelle: [20])

Die Modifikation der *DA42 NG* zur *DA42 MNG* wird durch ein Tochterunternehmen der *Diamond Aircraft Industries GmbH*, der *Diamond Airborne Sensing GmbH* durchgeführt. Die *DA42 MNG* ist ein zum multifunktionalen Sensorträger erweitertes Spezialflugzeug, es kann standardmäßig mit Unterrumpfbehältern sowie verschiedenen Nutzlastträgern an der Nase des Flugzeugs ausgestattet werden. Des Weiteren verfügt die *DA42 MNG* in ihrer Basisversion über eine zusätzliche Stromversorgung für das Missions- bzw. Experimentalequipment. Die

genannten Ausstattungsmerkmale ermöglichen eine einfache Integration von zu erprobenden Sensoren oder anderen Gerätschaften und somit die Nutzung als fliegende Trägerplattform. Für den Betrieb und die Überwachung der installierten Apparaturen ist die *DA42 MNG* mit einem Arbeitsplatz für einen Bordingenieur ausgestattet. Die *DA42 MNG* eignet sich aufgrund ihrer besonderen Ausstattungsmerkmale ideal als Basis für die Entwicklung eines Forschungsflugzeugs.

Die Weiterentwicklung und Modifikation einer *DA42 MNG* zum *Fliegenden Erprobungsträger – OE-FSD*, werden im Folgenden beschreiben. Dabei wird zunächst auf die installierte Referenzsensorik und die Nutzung als Trägerplattform eingegangen, anschließend folgt die detaillierte Darstellung der Entwicklungsumgebung für die Flugsteuerungs- und Flugregelungssysteme.

Referenzsensorik – Nutzung als Trägerplattform

Für die Erprobung neuartiger Sensoren und anderer Gerätschaften sowie für Anwendungen im Bereich der Flugregelung ist die *OE-FSD* mit einer umfassenden Referenzsensorik ausgerüstet. Zur Erfassung von Position, Geschwindigkeit und Lage im Raum ist das Flugzeug mit einem Inertialnavigationssystem (INS), auch Trägheitsnavigationssystem genannt, ausgestattet. Das Navigationsgerät kann durch Daten eines globalen Navigationssatellitensystems (GNSS) gestützt werden, zudem können die sogenannten Rohdaten, wie beispielsweise translatorische Beschleunigungen, ausgelesen werden. Zusätzlich erfolgt die Messung von Beschleunigungen und Drehraten durch eine zweite Inertialmesseinheit. Mittels eines satellitengestützten Navigationssystems (GNSS) kann sowohl die Position, als auch die Lage im Raum bestimmt werden. Dazu sind vier GNSS-Antennen über das Flugzeug verteilt montiert und ein entsprechendes Empfängersystem ist im Rumpf installiert. Des Weiteren ist der Erprobungsträger mit einem Dreiachsmagnetometer zur Bestimmung des Azimutwinkels, oftmals auch als Heading bezeichnet, ausgestattet. Die Ermittlung der aerodynamischen Kenngrößen wie Staudruck und Anströmwinkel wird mit einer Mehrlochsonde realisiert, zusätzlich erfolgt die Messung der Anströmwinkel mit einer sogenannten Fähnchensonde. Für die Bestimmung der Höhe über Grund sind im *Fliegenden Erprobungsträger* ein Radarhöhenmesser sowie ein Laserhöhenmesser verbaut. Zur Übertragung großer Datenmengen zwischen Flugzeug und einer Bodenstation ist eine bidirektional arbeitende Telemetrie vorhanden, deren Reichweite ca. 100 km beträgt. Für die Tests bzw. die Erprobung von Sensoren und anderen Gerätschaften besteht neben den Integrationsmöglichkeiten in den Nasen- und Unterrumpfbehältern des Basisflugzeugs der *DA42 MNG* auch die Option, Komponenten im Inneren der Kabine, im sogenannten Equipmentrack, zu installieren. Für die Untersuchung von Systemen im Bereich der Flugführung, für deren Betrieb eine Anzeige- bzw. Visualisierungsmöglichkeit notwendig ist, stehen im *Fliegenden Erprobungsträger* verschiedene Bildschirme (Displays) zur Verfügung. Eine Zusammenstellung der genannten Referenzsensorik ist in Tabelle 2-3 zu finden.

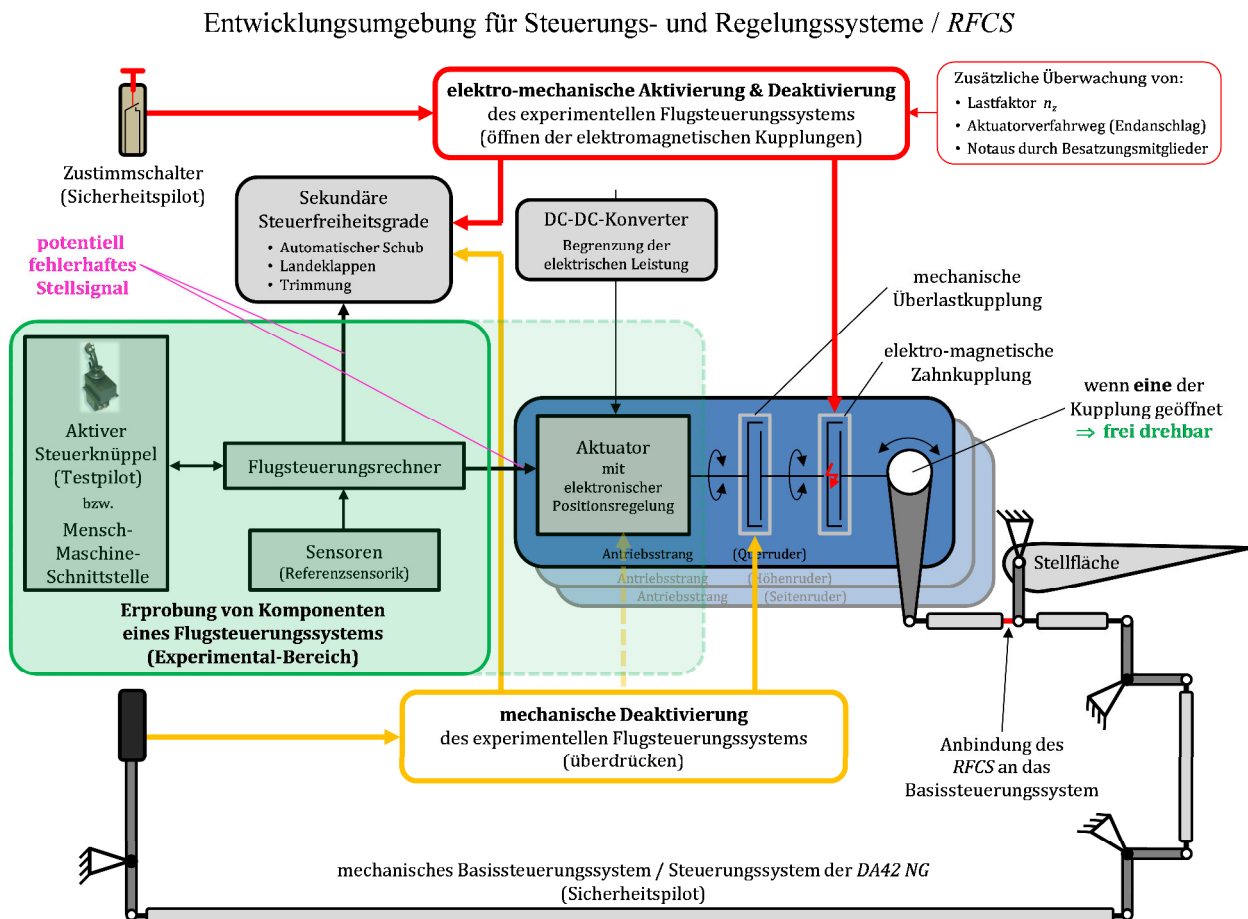
Bezeichnung	Gerätetyp	Hersteller
Inertialnavigationssystem	iNAV-RQH-1003	iMAR
Inertialmesseinheit	μ IMU	Northrop Grumman LITEF
GNSS-Antennen	G5Ant-42AT2-A2 (2 Stück) Ant-42AT2-A2 (2 Stück)	NovAtel
GNSS-Empfänger	MICROpod (2 Stück / Mehrantennensystem)	Forsberg
Dreiaxismagnetometer	Smart Digital Magnetometer HMR2300	Honeywell
Mehrlochsonde	Icasim Smart Air Data Boom	Simtec Buergel AG
Fähnchensonde	100400	SpaceAge Control
Radarhöhenmesser	RA-4500	FreeFlight Systems
Laserhöhenmesser	ILM-500	Renishaw Plc / MDL
Telemetrie	Epic Pro & M3-TR1	Satel
Bildschirme / Displays	Diverse	Diverse

Tabelle 2-3: Referenzsensorik des Fliegenden Erprobungsträgers – OE-FSD

Entwicklungsumgebung für Flugsteuerungs- und Flugregelungssysteme

Für die Entwicklung und Erprobung von Flugsteuerungs- und Flugregelungssystemen ist die *OE-FSD* mit einer experimentellen Flugsteuerung, kurz *RFCS* (Research Flight Control System), ausgestattet, siehe Abbildung 2-4. Hierbei sind sowohl die primären Steuereffektoren (Höhen-, Quer-, und Seitenruder) durch die Integration elektromechanischer Aktuatoren als auch die sekundären Steuerelemente (Schubhebelstellung, Trimmung von Höhen- und Seitenruder (Trimmradstellung) sowie Landeklappen) durch entsprechende elektrische Antriebe bzw. Schaltungen vollständig durch einen Flugsteuerungsrechner ansteuerbar. Das *RFCS* ermöglicht die Erprobung verschiedenster Komponenten eines modernen Flugsteuerungssystems bemannter und unbemannter Fluggeräte, wie beispielsweise Regelungsalgorithmen, Betriebssysteme, Rechnersysteme, Sensoren und Mensch-Maschine-Schnittstellen. Die Dynamik der installierten Antriebe der primären Steuerfreiheitsgrade des *RFCS* ist so ausgelegt, dass die Eigendynamik des Flugzeugs durch entsprechende Flugregelungsalgorithmen maßgeblich beeinflusst werden kann, dies gilt insbesondere für die schnellen Eigenbewegungsformen der Längs- und Seitenbewegung. Um einen einfachen, unkomplizierten und zeiteffizienten Erprobungsbetrieb zu ermöglichen, sieht die Nutzung des experimentellen Flugsteuerungssystems vor, dass zu erprobende Komponenten keiner zeit- und kostenintensiven Zulassung oder Qualifizierung bedürfen. Es ist deshalb von einer potentiellen Fehlfunktion der zu erprobenden Komponenten auszugehen, welche zu einem fehlerhaften Stellsignal eines oder mehrerer Steuereffektoren führen können. Aufgrund der hohen Dynamik und der Wirksamkeit der primären Steuerflächen ist eine Fehlfunktion bzgl. dieser Steuerelemente höchst sicherheitskritisch. Im ungünstigsten Fall führt eine Fehlfunktion einer zu testenden Komponente zu einer oder mehreren sich mit hoher Dynamik bewegenden (ggf. oszillierenden) oder in den Endanschlag fahrenden Primärstellfläche/-n (Höhen-, Quer-, und Seitenruder). Wird nicht zeitnah eine Korrektur der

Stellflächenposition/-en durchgeführt, kann die Fehlfunktion zum Totalverlust des Flugzeuges und der Besatzung führen. Da eine derartige Auswirkung zu verhindern ist, wurde das *RFCS* mit einem entsprechenden Sicherheitssystem ausgestattet, welches die Unversehrtheit von Flugzeug und Besatzung bei einer Fehlfunktion von zu testenden Komponenten garantiert. Dieses und der Betrieb der experimentellen Flugsteuerung werden im Folgenden näher beschrieben.



Zur Durchführung eines Flugversuches mit dem *RFCS* sind ein Sicherheitspilot und ein Bordingenieur zwingend erforderlich. Der Sicherheitspilot ist für die Sicherheit von Flugzeug und Besatzung zuständig, er ist der verantwortliche Luftfahrzeugführer. Erfolgt die Erprobung von Komponenten für bemannte Fluggeräte, so kann ein Test- bzw. Evaluierungspilot hinzugezogen werden. Der Sicherheitspilot hat den linken Pilotensitz inne, alle Bedienelemente und Eingabegeräte entsprechen denen des Basisflugzeugs, der *DA-42 NG*. Dies gilt vor allem für den Steuerknüppel und die Pedale sowie für das dazugehörige mechanische Flugsteuerungssystem. D.h. das mechanische Steuerungssystem des Basisflugzeugs zwischen Höhen-, Quer- und Seitenruder und dem Steuerknüppel bzw. den Pedalen bleibt für den Sicherheitspiloten (linker Pilotensitzplatz) funktional unverändert, dies ist in Abbildung 2-4 skizziert. Der linke hintere Sitzplatz steht dem Bordingenieur zu Verfügung, von hier aus kann er alle Komponenten, Sensoren und Systeme, allen voran das *RFCS*, überwachen sowie die Inbetriebnahme und

Abschaltung des experimentellen Flugsteuerungssystems kontrollieren. Der optionale Test- bzw. Evaluierungspilot, welcher bei der Erprobung von Flugregelungssystemen für bemannte Fluggeräte vorzusehen ist, nimmt den rechten Pilotenplatz ein. Dieser hat keine Anbindung an das mechanische Steuerungssystem des Basisflugzeugs, ist stattdessen aber mit einem aktiven Steuerknüppel ausgestattet, welcher mit dem experimentellen Flugsteuerungssystem verbunden ist, siehe Abbildung 2-4. Kommt es zum oben beschriebenen Fehlerfall, führt eine Deaktivierung des *RFCS* zur Freischaltung des mechanischen Flugsteuerungssystems des Basisflugzeugs und der Sicherheitspilot kann das Flugzeug mittels Basissteuerungssystem sicher kontrollieren. Alle Steuerelemente sind zum Zweck der Aktivierung bzw. Deaktivierung mit einem entsprechenden An-, Ab-, bzw. Freischaltssystem versehen. Die Automatisierung der sekundären Steuerelemente, wie Schubhebelstellung und Seitenrudertrimmung, erfolgte mittels einer elektro-magnetischen Reibschlusskupplung, welche zwischen Antrieb und Eingabeapparatur des Basisflugzeugs integriert wurde. Ein An- bzw. Abschalten ist somit jederzeit möglich, zusätzlich besteht die Alternative, bei einer fehlerhaften elektro-magnetischen Reibschlusskupplung den Stellantrieb zu „überdrücken“. Bereits im Basisflugzeug elektrisch angesteuerte sekundäre Steuerelemente, wie Landeklappen und Höhenrudertrimmung, werden durch parallel geschaltete Relais automatisiert. Mittels Steuerung der Versorgungsspannung der Relais ist somit eine Aktivierung bzw. Deaktivierung einfach und zuverlässig möglich. Die Anbindung der sicherheitskritischen primären Steuerelemente (Höhen-, Quer-, und Seitenruder) erfolgt durch eine mechanische Überlastkupplung und eine elektro-magnetische Zahnkupplung an das mechanische Basissteuerungssystem der *DA-42 NG*, siehe Abbildung 2-4. Die elektro-magnetischen Zahnkupplungen stellen die Hauptkupplungen des Sicherheitssystems der primären Steuerfreiheitsgrade dar. Durch das Anlegen einer elektrischen Spannung und somit den Aufbau eines Magnetfeldes werden die Verzahnungen von An- und Abtrieb aneinander gepresst, es kommt zu einer formschlüssigen Übertragung des Antriebsmoments. Bei geschlossenen elektro-magnetischen Zahnkupplungen und Überlastkupplungen ist somit die Ansteuerung der Steuerflächen durch den jeweiligen Aktuator gewährleistet. Durch Abschalten der Versorgungsspannung der elektro-magnetischen Zahnkupplungen öffnet sich diese wieder und die Ansteuerung der Steuerfläche durch das *RFCS* ist deaktiviert. Der Sicherheitspilot kann das Flugzeug durch das mechanische Basissteuerungssystem stabilisieren bzw. kontrollieren. Der Vorgang des Öffnens ist auch unter Last sichergestellt. Die Überlastkupplungen ermöglichen dem Sicherheitspiloten im Fehlerfall ebenfalls eine Deaktivierung des experimentellen Flugsteuerungssystems durch mechanisches „Überdrücken“. Infolge dessen kommt es zu einer Freischaltung des jeweiligen Steuerfreiheitsgrads der Basissteuerung. Der Sicherheitspilot kann somit das Flugzeug stabilisieren bzw. kontrollieren. Die Überlastkupplungen dienen als Redundanz und somit als zweite Sicherheitsstufe zu den elektro-magnetischen Zahnkupplungen des *RFCS*. Sollte die Überlastkupplung ausgelöst werden, muss eine grundlegende Fehlfunktion des eigentlichen Sicherheitssystems oder eine Fehlbedienung vorliegen, da eine Deaktivierung des *RFCS* im regulären Fehlerfall durch die stoßfrei arbeitenden elektro-magnetischen

Zahnkupplungen zu realisieren ist. Die Überlastkupplungen müssen nach dem Freischalten durch einen externen Eingriff manuell geschlossen werden, dazu ist es erforderlich das Flugzeug zu landen.

Eine schnelle Deaktivierung der primären und sekundären Steuerelemente des *RFCS* ist im Gefahrenfall (sowie im regulären Betrieb) durch Öffnen der elektro-magnetischen Zahnkupplungen oder durch mechanisches „Überdrücken“ der Stellantriebe bzw. der Überlastkupplungen möglich. Das Sicherheitssystem ist somit in Bezug auf die Deaktivierung des *RFCS* bzw. die Freischaltung der Basissteuerung – wie bereits angesprochen – redundant. Im regulären Betrieb erfolgt die Aktivierung wie auch die Deaktivierung durch die elektrisch angesteuerten Zahnkupplungen. Dies gilt insbesondere für die primären Steuerelemente. Sowohl im Fehlerfall als auch zur regulären Abschaltung (Deaktivierung) ist die Öffnung der elektro-magnetischen Zahnkupplung dem „Überdrücken“ der Überlastkupplung vorzuziehen, da der Vorgang stoßfrei, schnell und direkt reversibel erfolgt. Darauf wurde im Vorigen bereits eingegangen. Um darüber hinaus die Reaktionszeit zur Deaktivierung durch den Sicherheitspiloten zu minimieren und somit die zulässige Dynamik der Antriebseinheiten von Höhen-, Quer-, und Seitenruder durch Minimierung der Reaktionszeit zu maximieren, muss der Sicherheitspilot zur Beibehaltung der Aktivierung, also zur Schließung der elektro-magnetischen Kupplungen, dauerhaft einwilligen. Dies erfolgt durch einen sogenannten Zustimmschalter. Dabei handelt es sich um einen Taster, welcher dauerhaft gedrückt werden muss, siehe Abbildung 2-4. Da der Sicherheitspilot gezwungen ist, den Zustimmschalter zur dauerhaften Aktivierung in seiner Hand zu halten und im Gefahrenfall nicht erst nach diesem greifen muss, ist die Reaktionszeit zum Abschalten des *RFCS* reduziert. Zur weiteren Erhöhung der Sicherheit wird während des Betriebs des *RFCS* zum einen das Lastvielfache ständig überwacht und bei Über- bzw. Unterschreitung fester Grenzwerte erfolgt eine automatische Deaktivierung durch Öffnen der elektro-mechanischen Kupplungen. Zum anderen wird eine automatische Abschaltung des *RFCS* durch Betätigung eines Notausschalters vom Sicherheitspilot, Bordingenieur oder Testpilot, als auch durch Erreichen einer unzulässigen Endlage der Antriebseinheiten der primären Steuerfreiheitsgrade durchgeführt.

Das *RFCS* ermöglicht die unkomplizierte und zeiteffiziente Erprobung von Hard- und Softwarekomponenten eines modernen aktiven FbW Flugsteuerungssystems, welche nicht zugelassen bzw. qualifiziert sind und somit bezüglich ihrer Funktion potentiell fehlerhaft sein können. Nichtsdestotrotz sollten zu testende Komponenten nicht leichtsinnig erprobt werden, ohne diese vorher ausgiebig in sogenannten *Hardware in the Loop* Simulationen, unter anderem mit dem *D-SIM-42* Flugsimulator zu prüfen. Es ist ferner dafür zu sorgen, dass Fehlerfälle wie beispielsweise Überhitzung usw. von zu erprobenden Komponenten ausgeschlossen sind.

3 Analyse der ungeredelten Flugdynamik

Für die Modifikation des dynamischen Flugverhaltens der *DA42* durch ein geeignetes Flugregelungssystem ist es unerlässlich, tiefgreifende Kenntnis der jeweiligen (ungeredelten) Streckendynamik zu besitzen. Eine umfassende Analyse der inhärenten Dynamik des Systems ist somit Ausgangspunkt jedes Reglerentwurfs.

Grundlage der modellbasierten Entwicklung des Seitenbewegungsreglers ist das nichtlineare *Matlab/Simulink* Simulationsmodell der *DA42*, das aus dem *D-SIM-42* Flugsimulator abgeleitet wurde. Sowohl für die Analyse der Flugeigenschaften als auch für die Ausarbeitung des Reglers ist es zweckmäßig, das dynamische Verhalten eines Flugzeugs mittels linearer, zeitinvarianter Zustandsraummodelle zu beschreiben. Dadurch ist eine analytische und geschlossene Lösung und folglich eine Untersuchung der Flugeigenschaften mittels Eigenwerten und Eigenvektoren und damit eine handhabbare Reglerentwicklung gewährleistet, vgl. [7] und [21]. Die Untersuchung des Flugzeugverhaltens erfolgt somit anhand linearer zeitinvarianter Zustandsraummodelle (*LZI-Systeme*), die durch die Linearisierung um stationäre Flugzustände, sogenannte Trimpunkte, des *DA42* Simulationsmodells erzeugt wurden. Zur Gewährleistung einer adäquaten Aussage über das dynamische Verhalten des Flugzeugs für die gesamte Envelope wurden *LZI-Systeme* für ein Netz aus repräsentativen Flugzuständen über den gesamten Flugbereich der *DA42* erstellt. Dabei haben die Zustandsraummodelle die Form nach Gl. (2.8). In Anlehnung an [7] wird in den folgenden beiden Unterkapiteln auf Basis von *LZI-Systemen* die Charakterisierung der Flugeigenschaften des ungeredelten Flugzeugs durch die Untersuchung der inhärenten Stabilitätseigenschaften (Kapitel 3.1) und die Analyse der inhärenten Steuerungseigenschaften (Kapitel 3.2) durchgeführt.

3.1 Inhärente Stabilitätseigenschaften

Die inhärenten Stabilitätseigenschaften eines Flugzeugs, das als *LZI-System* beschrieben ist, lassen sich durch die Eigenmodi charakterisieren, vgl. [7]. In Bezug auf konventionelle Flugzeugkonfigurationen, denen die *DA42* zuzuordnen ist, sind diese für die Seitenbewegung die Rollbewegung, die Spiralbewegung und die Roll-Gier-Schwingung. Hierbei sei an [7] verwiesen, welcher ausführlich und in allgemeiner Weise auf die Eigenmodi konventioneller Flugzeugkonfigurationen und deren anschauliche Interpretation sowie deren quantitative Bewertung eingeht. Im Folgenden wird eine detaillierte Analyse der Eigenmodi der *DA42*, charakterisiert durch die Eigenwerte sowie deren zugehörige Eigenvektoren, durchgeführt. Die

Berechnung der Eigenwerte und der Eigenvektoren erfolgt mit den Systemmatrizen A der LZI-Systeme der Seitenbewegung der DA42, nach Gl. (3.1) (Eigenwert- Eigenvektorberechnung siehe auch [15] [22] und [23]).

$$A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{3.1}$$

Dabei ist \mathbf{v}_i der i -te Eigenvektor und λ_i der i -te Eigenwert.

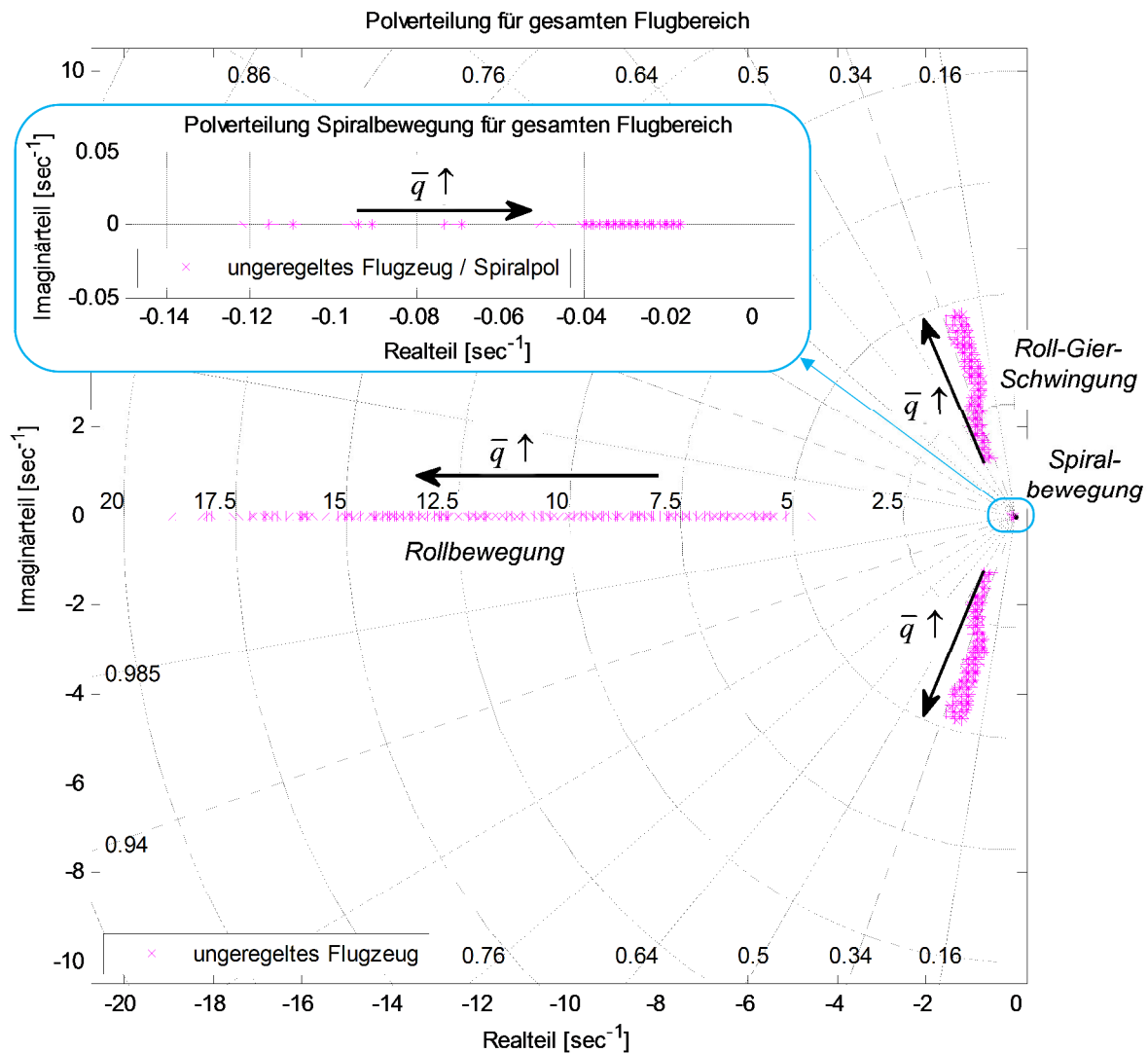


Abbildung 3-1: Eigenwerte des unregelmäßigen Flugzeugs

Für Flugzeuge konventioneller Bauart und mit einem entsprechend eingeschränkten Betriebsbereich variiert das dynamische Flugverhalten und somit die Ausprägung der Eigenmodi im Wesentlichen in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit V und der Flughöhe h . Die Flughöhe charakterisiert sich dabei durch die Dichte ρ . Dies gilt in guter Näherung auch für die DA42, was Analysen der Variation der Lage der Eigenwerte und der „Gestalt“ der Eigenvektoren bestätigen, vgl. [24]. Der Staudruck \bar{q} stellt sich unter der Annahme einer inkompressiblen Strömung, was in guter Näherung für den Geschwindigkeitsbereich der DA42 zutrifft, proportional zu dem Quadrat der Fluggeschwindigkeit V und proportional zur Dichte ρ dar, vgl. [7]. Unter Berücksichtigung des begrenzten Höhenbereichs der DA42 kann die

Dynamik des Flugzeugs über die gesamte Envelope in guter Näherungen in Abhängigkeit von \bar{q} wiedergegeben werden. In Abbildung 3-1 sind die Eigenwerte bzw. Pole der Roll-Gier-Schwingung sowie der Roll- und der Spiralbewegung in Abhängigkeit des Staudrucks für das unregelte Flugzeug dargestellt.

Die Bewertung der Flugeigenschaften erfolgt in Anlehnung an [25] (*Military Specification*) und [26], welche die Bezeichnung *Flying Qualities of Piloted Airplanes* tragen und die systematische Quantifizierung von Flugeigenschaften zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens pilotierter Flugzeuge beinhalten. In [25] wird der Gütegrad der Flugeigenschaften maßgebend durch die Lage der Eigenwerte und indirekt durch die „Gestalt“ der Eigenvektoren unter Berücksichtigung von Flugphase und Flugzeugkategorie eingestuft. Die DA42 ist dabei der Flugzeugkategorie *class I* („*small light airplanes*“, [25]) zuzuordnen. Für die Flugphase wurde in Hinblick auf die Anforderungen des Reglerentwurfs und zur Gewährleistung entsprechender Vergleichbarkeit die Kategorie *A* nach [25] ausgewählt, welche die Flugaufgabe einer präzisen Flugpfadsteuerung („*precise flight-path control*“, [25]) beinhaltet. Der Gütegrad der Flugeigenschaften wird in die Abstufungen *Level 1* bis *Level 3* unterteilt und bewertet den Aufwand und die Belastung des Piloten bei der Durchführung einer Flugaufgabe, vgl. [7]. *Level 1* entspricht dabei guten bis sehr guten Flugeigenschaften und *Level 3* unzureichendem Flugzeugverhalten zur Bewerkstelligung einer Flugaufgabe. Um im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine verfeinerte Einteilung der Flugeigenschaften nach [25] zu ermöglichen, wird der Gütegrad *exzellente Flugeigenschaften*, hier bezeichnet mit *Level 1**, eingeführt. Dieser beinhaltet die bestmögliche Erfüllung der in [25] spezifizierten Bereiche für *Level 1* Flugeigenschaften sowie die Sicherstellung einer (automatisch) koordinierten Flugzeugbewegung und bestes Steuer- und Störverhalten. Dadurch wird eine Verbesserung der Handhabungseigenschaften, insbesondere bzgl. des Steueraufwands, erzielt, was zu einer weiteren Reduzierung der Arbeitsbelastung des Piloten führt. Eine detaillierte Beschreibung exzellenter Flugeigenschaften erfolgt in Kapitel 4.

Roll-Gier-Schwingung

Die Roll-Gier-Schwingung des unregulierten Flugzeugs weist, über die Envelope betrachtet, im Mittel eine relative Dämpfung von $\zeta_{DR} \approx 0,34$ auf. Dieser Wert erfüllt den von [25] geforderten Mindestwert von $\zeta_{DR_{minMIL}} = 0,19$ für *Level 1* Flugeigenschaften. Die natürliche Frequenz ω_{0DR} der DA42, welche die statische Stabilität der Roll-Gier-Schwingung repräsentiert, liegt im Bereich von $1 < \omega_{0DR} < 5$ rad/s. Die Anforderung nach [25] an die Roll-Gier-Schwingung für *Level 1* Flugeigenschaften ist $\omega_{0DR_{minMIL}} > 1$ rad/s, diese wird von der DA42 erfüllt. Für die absolute Dämpfung σ_{DR} der DA42 gilt für den gesamten Flugbereich $\sigma_{DR} < -0,5$ s⁻¹, auch hier wird den Anforderungen an die *Level 1* Flugeigenschaften nachgekommen. Die Lage der Eigenwerte der Roll-Gier-Schwingung der DA42 erfüllt somit für alle betrachteten Flugzustände die Forderungen von [25] für *Level 1* Flugeigenschaften. Es ist jedoch festzustellen, dass für große Staudrücke die natürliche Frequenz ω_{0DR} , welche in Analogie zum Feder-Masse-Dämpfer-System die Feder repräsentiert, relativ große Werte annimmt. Daraus resultiert in

Bezug auf die Roll-Gier-Schwingung ein hochdynamisches Einschwingverhalten, welches umgangssprachlich auch als „knackig“ bezeichnet werden kann. Dies gilt besonders unter Berücksichtigung der im Vergleich zur optimalen relativen Dämpfung von $\zeta \approx 0,707$, was einem adäquaten Einschwingverhalten entspricht, verhältnismäßig geringen mittleren relativen Dämpfung von $\zeta_{DR} \approx 0,34$. Ein derartiges hochdynamisches Verhalten ist für nicht professionelle Piloten mit einer geringen Flugstundenzahl als nicht angemessen einzuordnen. Aus [26] wird ersichtlich, dass für gängige Konfigurationen im Rahmen von Flugtestkampagnen ein maximales $\omega_{0 DR max} \approx 4,5$ rad/s zumeist nicht überschritten wurde. Ferner wird in [27] eine natürliche Frequenz der Roll-Gier-Schwingung mit $\omega_{0 DR} \approx 4,5$ rad/s als größter untersuchter Wert bei Flugversuchen angegeben, welcher für Einzelfälle zu einer guten Pilotenbewertung führte, jedoch wurde den meisten untersuchten Konfigurationen mit $\omega_{0 DR} \approx 4,5$ rad/s von den Testpiloten ein weniger gutes Störverhalten attestiert. Die relative Dämpfung ζ_{DR} hat dabei im Vergleich zum optimalen Wert von $\zeta \approx 0,707$ den geringen Wert von $\zeta_{DR} \approx 0,25$ bzw. $\zeta_{DR} \approx 0,1$. Es ist zu berücksichtigen, dass sich die Untersuchungen in [27] auf Hochleistungsflugzeuge (Kampfflugzeuge) mit entsprechender Flugleistung beziehen, welche von erfahrenen Testpiloten geflogen wurden. Des Weiteren ist in [27] angegeben, dass bei Flugversuchen mit $\omega_{0 DR} \approx 2,5$ rad/s und $\zeta_{DR} = 0.25$ Testpiloten eine adäquate Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung sowie eine gute Richtungsstabilität angaben. Durch das Regelungssystem ist zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften ein adäquates Verhalten der Gierdynamik durch Bereitstellung einer geeigneten Kombination von relativer Dämpfung ζ_{DR} und natürlicher Frequenz $\omega_{0 DR}$ der Roll-Gier-Schwingung sicherzustellen, siehe Kapitel 6.2.

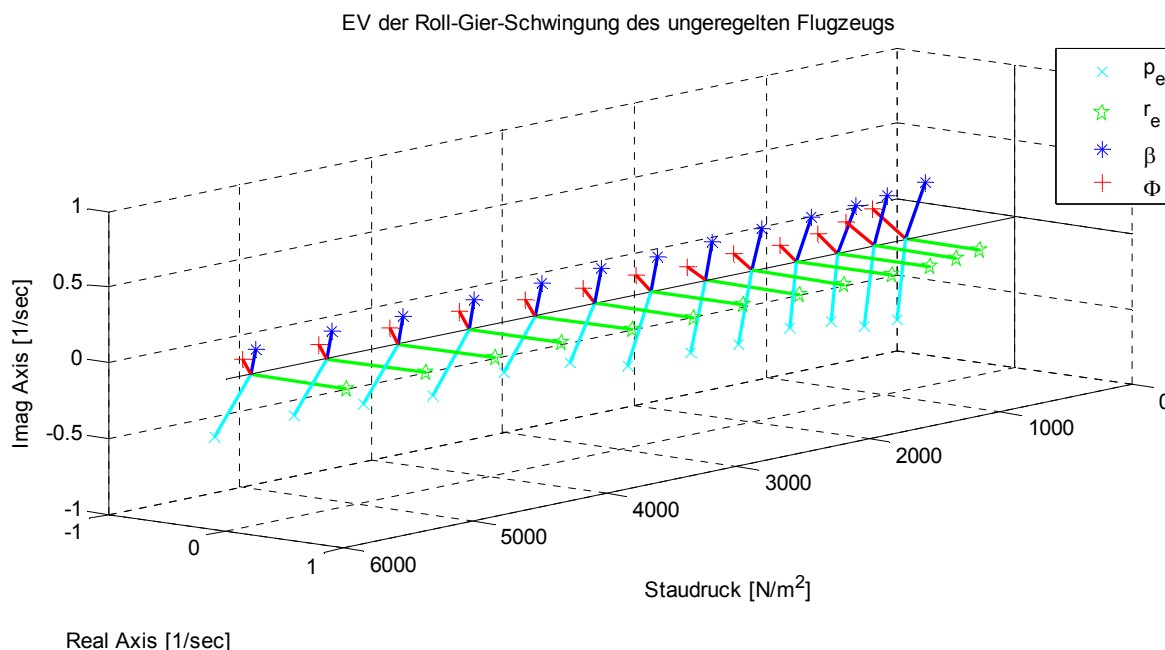


Abbildung 3-2: Eigenvektor Roll-Gier-Schwingung (ungeregeltes Flugzeug)

Neben der Lage der Eigenwerte der Roll-Gier-Schwingung in der komplexen Ebene ist ein weiteres wichtiges Kriterium zur Beurteilung der Roll-Gier-Schwingung in Bezug auf die

Flugeigenschaften die Roll-Gier-Kopplung $\left| \frac{\Phi}{\beta} \right|$. Sie lässt sich direkt aus den Eigenvektorkomponenten der Zustände Φ und β berechnen. Über die Envelope betrachtet gilt für die Roll-Gier-Kopplung der DA42 $0 < \left| \frac{\Phi}{\beta} \right| < 1$, dies kann aus der Abbildung 3-2 entnommen werden. In Abbildung 3-2 ist der Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung in Abhängigkeit des Staudrucks \bar{q} in Form von Zeitvektoren bzw. als Eigenvektorsterne (siehe [7], [9] und [10]) dargestellt. Aus der Darstellung können die jeweiligen Anteile der Seitenbewegungszustände (p_e , r_e , β , Φ) abgelesen werden. Zur Gewährleistung guter Flugeigenschaften wird nach [9] gefordert, dass $\left| \frac{\Phi}{\beta} \right| < 1,5$ ist, dieses Kriterium erfüllt das unregelmäßige Flugzeug. Im Rahmen der Reglerentwicklung ist zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften unter Berücksichtigung der modifizierten Steuerungseigenschaften (Vorgabe von Flugzuständen) das Amplitudenverhältnis $\left| \frac{\Phi}{\beta} \right|$ entsprechend anzupassen.

Rollbewegung

Der Rolleigenwert λ_R der DA42 liegt im Bereich von $-19 < \lambda_R < -4,5 \text{ s}^{-1}$, siehe Abbildung 3-1. Der Bereich der Rollzeitkonstante $T_R = -1/\lambda_R$ ergibt sich somit zu $0,053 < T_R < 0,22 \text{ s}$. Entsprechend [25] ist eine maximale Rollzeitkonstante $T_{R \max}$ von 1,0 s zur Gewährleistung von sogenannten *Level 1* Flugeigenschaften zulässig. Diese Forderung wird von der unregelmäßigen DA42 übererfüllt. Eine Forderung an die minimale Rollzeitkonstante $T_{R \min}$ ist in [25] nicht gegeben. Nach [9] führt eine zu kleine Rollzeitkonstante zu einer hohen Empfindlichkeit der Rollsteuerung. Dies ist zu vermeiden, wobei [9] für hochgradig reglergestützte Flugzeuge ein $T_{R \min}$ von 15^{-1} s fordert. Die Forderungen an eine minimale Rollzeitkonstante werden von der DA42 nicht erfüllt. Zur Gewährleistung intuitiver und antizipierbarer Steuerungseigenschaften sowie eines adäquaten Eigenverhaltens der Rolldynamik des Flugzeugs ist es sinnvoll, die Änderung der Lage des Rolleigenwertes über die Envelope durch das zu entwickelnde Steuer- und Regelungssystem auf ein adäquates Maß unter Berücksichtigung zweckmäßiger Grenzen zu reduzieren.

Spiralbewegung

Der Spiralpol bzw. der Spiraleigenwert der DA42 liegt über die Envelope betrachtet im Bereich von $-0,122 < \lambda_{SP} < -0,017 \text{ s}^{-1}$, siehe Abbildung 3-1, d.h. das Flugzeug ist für den gesamten Flugbereich spiralstabil. Die Forderungen von [25] hinsichtlich der Spiralbewegung bzw. der Lage des Spiraleigenwertes sind gegeben durch eine minimale zulässige Verdopplungszeit T_{TD} einer instabilen Spiralbewegung. Für die DA42 gilt zur Erfüllung von *Level 1* Flugeigenschaften, $T_{TD} \geq 20 \text{ s}$, daraus folgt $\lambda_{SP \max} \approx 0,0346 \text{ s}^{-1}$. Da der Spiralpol links der Imaginär-Achse liegt und somit stabil ist, erfüllt die Spiralbewegung des unregelmäßigen Flugzeugs die Mindestanforderungen zur Sicherstellung von *Level 1* Flugeigenschaften. Für die Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften (*Level 1**) muss der Spiralpol im Ursprung der komplexen Ebene liegen bzw. darf davon nur minimal abweichen, vgl. Kapitel 4 und Kapitel 6.2. Unter der Annahme eines ungestörten Flugzustands, welcher stationär erfliegbar ist, bleibt der vom Piloten eingestellte Hängewinkel Φ bei einer neutralstabilen Auslegung der Spiralbewegung

konstant, d.h. der Spiralpol liegt dann im Ursprung. Der Steueraufwand des Piloten zur Durchführung eines stationären Kurvenflugs ist somit erheblich reduziert im Vergleich zur stabilen oder instabilen Auslegung der Spiralbewegung. Durch das zu entwickelnde Steuer- und Regelungssystem ist eine neutrale Spiralbewegung zu bewirken.

3.2 Inhärente Steuerungseigenschaften

Erfolgte bis jetzt die Charakterisierung der Seitenbewegung des unregulierten Flugzeugs anhand der Eigenmodi, wird im Nachstehenden auf die Steuerungseigenschaften des unregulierten Flugzeugs eingegangen. Die Untersuchung der Steuerungseigenschaften erfolgt exemplarisch anhand des in Gl. (3.2) gegebenen *LZI*-Systems, es repräsentiert die Seitenbewegung der *DA42* bei einer Fluggeschwindigkeit von 47 m/s und einer Flughöhe von 1000 m; dies entspricht einem Staudruck von $\bar{q} = 1227,83 \text{ N/m}^2$.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -8.1882 & 2.7380 & -10.3280 & 0 \\ -0.2539 & -1.7613 & 4.1670 & 0 \\ 0.0124 & -0.9811 & -0.1248 & 0.2083 \\ 1.0019 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \beta \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -12.2482 & 0.2876 \\ 1.1166 & -2.5988 \\ 0 & 0.0463 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Im Folgenden wird zunächst auf die Steuerungseigenschaften der Rollachse infolge eines Rechteckimpuls des Querruders eingegangen, anschließend auf das dynamische Verhalten des Flugzeugs auf einen sprungförmigen Seitenruderausschlag.

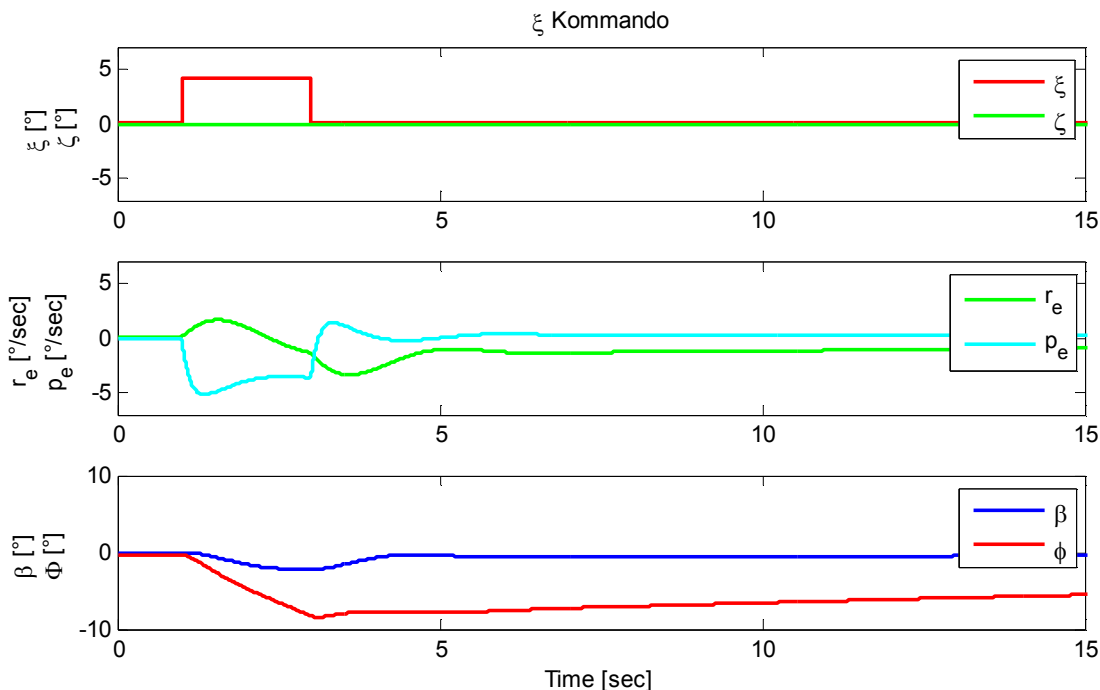


Abbildung 3-3: ξ -Kommando – unreguliertes Flugzeug

Abbildung 3-3 zeigt die zeitliche Verlauf der Zustände der Seitenbewegung infolge eines Rechteckimpuls des Querruders ξ . Es ist gut zu erkennen, dass der Querruderausschlag unmittelbar zu einer Rollrate p_e und Gierrate r_e um die x - bzw. z -Achse des experimentellen

Koordinatensystems führt. Aufgrund dessen kommt es zum Aufbau eines Hängewinkels Φ und eines Schiebewinkels β . Das Übertragungsverhalten von Querruder ξ_c auf die Rollrate p_e entspricht dabei nicht der nach [26] geforderten PT_1 -Dynamik, vgl. Kapitel 6.2. Der Aufbau eines Schiebewinkels ist im Regelfall ungewollt, da daraus eine Seitenkraft resultiert, welche eine ungewollte Abdrift bewirkt; der Pilot kann dem durch Ausschlagen des Seitenruders entgegenwirken. Ferner wirkt sich ein Schiebewinkel nachteilig auf den aerodynamischen Widerstand aus, wodurch die Effizienz eingeschränkt wird, und eine Seitenkraft ungünstig auf den Flug- bzw. Passagierkomfort. Der koordinierte Einsatz des Seitenruders, zur Sicherstellung einer Abdrift- und weitgehend schiebewinkelfreien Flugzeugbewegung, stellt für den Piloten einen Mehraufwand dar und ist durch das Regelungssystem, zur Entlastung des Piloten, auszuführen. In Abbildung 3-3 ist des Weiteren gut zu erkennen, dass sich der Hängewinkel nach Ende des Rechteckimpulses des Querruders ξ infolge der stabilen Spiralbewegung sukzessive abbaut. Für den stationären Kurvenflug mit konstantem Hängewinkel ist somit ein entsprechend abgestimmter, konstanter Querruderausschlag notwendig. Der vorgesehene Regler soll auch diesen Mehraufwand des Piloten kompensieren.

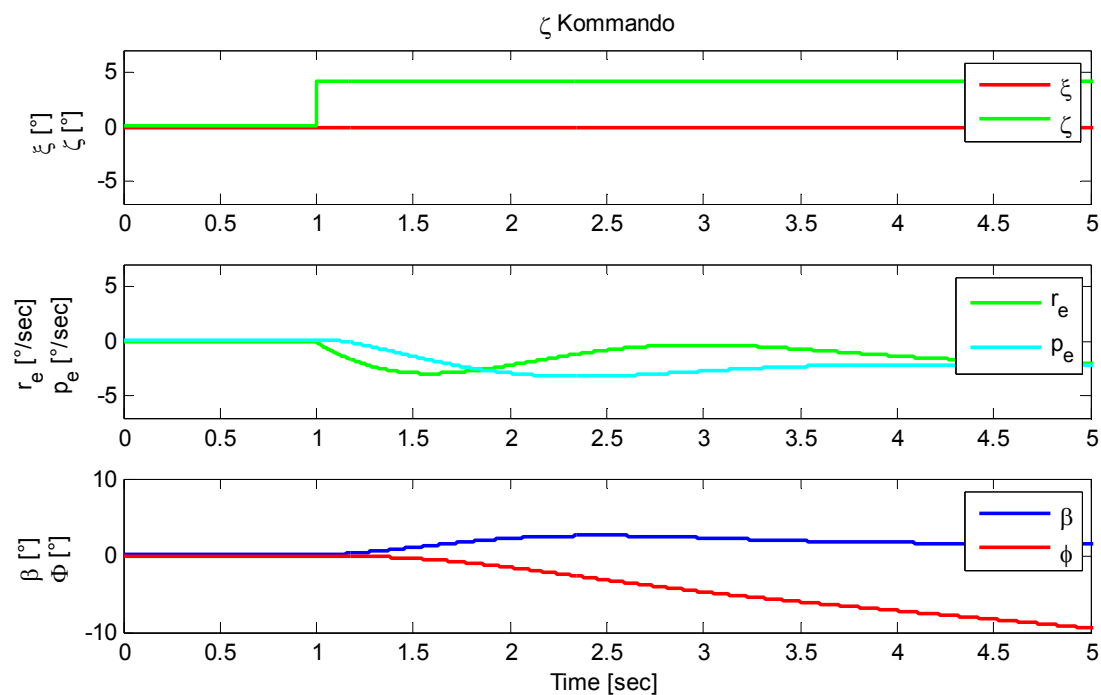


Abbildung 3-4: ζ -Kommando – ungerichtetes Flugzeug

Der zeitliche Verlauf der Zustände aufgrund eines sprunghaftigen Ausschlags des Seitenruders ζ ist in Abbildung 3-4 dargestellt. Infolge des Seitenruderausschlags kommt es direkt zu einer Gierrate r_e um die z-Achse des experimentellen Koordinatensystems und zum beabsichtigten Schiebewinkel β . Das Übertragungsverhalten von Seitenrudder ζ auf den Schiebewinkel β entspricht dabei nicht der nach [26] geforderten PT_2 -Dynamik, vgl. Kapitel 6.2. Wegen des Seitenruderrollmoments L_ζ und der Kopplung der Gierdynamik auf die Rolldynamik durch L_r und L_β , wobei L_β den größten Einfluss hat, vgl. Gl. (2.8) und Gl. (3.2), kommt es durch den

Seitenruderausschlag zur Rollbewegung und somit zum Aufbau eines Hängewinkels Φ . Für die Konfiguration (*DA42*) und unter Berücksichtigung nicht professioneller Piloten (ungeübter Pilot) ist die Rollbewegung und der damit bewirkte Hängewinkel zumeist unerwünscht (Seitenwindlandung mit Vorhaltewinkel, vgl. Kapitel 4.1). Der Pilot ist bei gewünschter horizontaler Ausrichtung des Flugzeugs gezwungen zum Seitenruderausschlag und der damit verbundenen Rollbewegung das Querruder koordiniert auszuschielen. Der abgestimmte Querruderausschlag stellt für den Piloten einen erheblichen Mehraufwand dar. Diese erhöhte Arbeitsbelastung des Piloten soll durch das Regelungssystem kompensiert werden, indem der Pilot direkt einen Schiebewinkel und somit eine reine Gierbewegung um die z -Achse des experimentellen Koordinatensystems kommandiert und es infolge dessen zu keinem Hängewinkel kommt.

4 Entwurfsziele und Regelungsstrategie

In diesem Kapitel werden die Ziele des Reglerentwurfs herausgearbeitet. Darauf aufbauend erfolgt die Ausarbeitung einer Regelungsstrategie, welche die Umsetzung der Entwurfsziele bedingt.

4.1 Entwurfsziele

Ziel der Reglerentwicklung für die Seitenbewegung der *DA42* ist die Sicherstellung adäquater Flugeigenschaften und die Bereitstellung angemessener Handhabungseigenschaften (Handling) über den gesamten Flugbereich. Die angestrebten Flugeigenschaften des geregelten Flugzeugs implizieren dabei eine Flugdynamik nach *Level 1*, was bereits in weiten Teilen der Envelope von der unregulierten *DA42* erfüllt wird. Das Handling der *DA42* ist, wie gemeinhin bei Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt, aufwendig, d.h. der (Steuerungs-) Aufwand des Piloten zum Fliegen ist groß. Durch das Flugregelungssystem soll ein hervorragendes Handling der *DA42* umgesetzt und dadurch die Arbeitsbelastung des Piloten zur Steuerung und Führung des Fluggeräts merklich reduziert werden. Somit resultiert ein Zuwachs an Sicherheit und ein signifikant verringertes Unfallrisiko. Ferner erhöht sich durch das Flugregelungssystem der Flugkomfort und die Effizienz des Flugzeugs wird gesteigert. Die abgezielten Flug- und Handlungseigenschaften werden in dieser Arbeit als exzellente Flugeigenschaften (*Level 1**) bezeichnet. Für die Konzeption neuer Flugzeugbaumuster soll, aufgrund der reglerbasierten Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften, der Fokus auf der Optimierung der Flugleistungen liegen. Dies gilt insbesondere vor dem Hintergrund, dass sich Entwurfskriterien zur Steigerung der Flugleistungen oftmals nachteilig auf die Flugeigenschaften auswirken, vgl. [28]. Durch das Flugsteuerungssystem soll beispielsweise die Ausführung der Aerodynamik zur Erhöhung der Effizienz oder die Realisierung eines erweiterten Schwerpunktgebietes, welche zu Lasten der Stabilitätseigenschaften gehen, umgesetzt und die Ausführung exzellenter Flugeigenschaften durch das aktive Flugsteuerungssystem sichergestellt werden.

Als Grundlage adäquater Stabilitäts- und Steuerungseigenschaften des Flugzeugs wird eine geeignete Lage der Eigenwerte entsprechend der Anforderungen für *Level 1* nach [25] vorgesehen. Aus den Maßnahmen folgt ein verbessertes Störverhalten des Flugzeugs, d.h. Auswirkungen von atmosphärischen Störungen, die auf das Flugzeug wirken (Böen, Turbulenz) werden verringert, zusätzlich werden Störeinflüsse durch Konfigurationsänderungen reduziert. Ein adäquates Handling des Flugzeugs wird durch eine Vorgaberegulierung, welche eine

automatische Trimmung mit sich bringt, und einen automatisch koordinierten Flugzustand bzw. eine automatisch koordinierte Flugzeugbewegung umgesetzt. Bei der Vorgaberegung werden durch einen lateralen Steuerknüppelausschlag und eine Pedaleingabe direkt entsprechende Flugzustände kommandiert, wodurch der Pilot das dynamische Übertragungsverhalten des Flugzeugs, im Gegensatz zu Flugzeugen ohne Vorgaberegung, beim Bemessen der Steuereingabe weniger vorsehen bzw. voraussehen muss. Die Vorgaberegung bzw. das Steuerungsverhalten des Flugzeugs wird dabei über die gesamte Envelope intuitiv und einheitlich ausgeführt. Die koordinierte Flugzeugbewegung gewährleistet einen seitenkraftfreien Flugzustand, was sich positiv auf den Flugkomfort sowie die Effizienz des Flugzeugs auswirkt und wodurch es zu keiner ungewollten Abdrift kommt. Durch die genannten Maßnahmen wird die Arbeitsbelastung des Piloten zur Steuerung des Fluggerätes und zur Führung der Flugbahn, insbesondere aufgrund der nicht mehr notwendigen Abstimmungen der Steuereingaben, signifikant reduziert. Zur Ausführung der geforderten koordinierten Flugzeugbewegung, unter Berücksichtigung der Führungsgrößen der Vorgaberegung, wird, durch die reglergestützte Ausprägung der Eigenmodi (bzgl. der beteiligten Zustände) und einer neutralstabilen Spiralbewegung, eine Entkopplung von Roll- und Gierdynamik umgesetzt.

Folgende Funktionalitäten des Flugreglers lassen sich als Entwurfsziele zur Umsetzung exzellenter Flugeigenschaften (*Level 1**) zusammenfassend festhalten:

- Stabilitätseigenschaften (Eigenwerte):
Die Stabilitätseigenschaften werden durch Modifikation der Lage der Eigenwerte entsprechend verbessert, d.h. Anpassung von Dämpfung, Frequenz sowie Zeitkonstanten der verschiedenen Eigenmodi zur Bereitstellung ausgezeichneter Flugeigenschaften.
- Kopplungseigenschaften – Entkopplung von Roll- und Gierdynamik (Eigenvektoren):
Erfolgt ausgehend von einem symmetrischen Flugzustand die Rollbewegung des Flugzeugs um den Geschwindigkeitsvektor, so bleibt der Anstellwinkel unverändert und es kommt zum Aufbau eines Hängewinkels ohne die Entwicklung eines Schiebewinkels. Für die beschriebene sogenannte *Geschwindigkeitsvektor-Rolle* kann bei Standardkonfigurationen, da sich kein Schiebewinkel aufbaut, mit sehr guter Näherung von einem seitenkraftfreien Flugzustand bzw. Flugzeugbewegung ausgegangen werden. Die Ausführung einer *Geschwindigkeitsvektor-Rolle* gewährleistet somit die geforderte koordinierte Flugzeugbewegung. Dadurch wird ein ungestörter aerodynamischer Flugzustand mit vollständiger Entkopplung von Längs- und Seitenbewegung sichergestellt. Die Arbeitsbelastung des Piloten zur Steuerung des Flugzeugs wird in Folge dessen stark reduziert.
Gierte das Flugzeug im horizontalen Geradeausflug (symmetrischer Flugzustand) um die zum Geschwindigkeitsvektor senkrecht nach unten gerichtete Achse, so bleibt im Gegenzug der Nickwinkel, der Anstellwinkel und insbesondere der Hängewinkel

unverändert und es baut sich ein reiner Schiebewinkel auf. Dieses im Bereich der Kleinflugzeuge und unter Berücksichtigung der charakteristischen Piloten der Allgemeinen Luftfahrt gewünschte Verhalten kann anhand einer Landung bei Seitenwind anschaulich erläutert werden: Wird eine Seitenwindlandung mit Vorhaltewinkel durchgeführt, so muss kurz vor dem Aufsetzen des Flugzeugs der Vorhaltewinkel durch eine Gierbewegung und den damit verbundenen Aufbau eines aerodynamischen Schiebewinkels abgebaut werden. Dabei ist der Aufbau eines Hängewinkels, verursacht durch die Querkopplung der Gierrate und des Schiebewinkels auf die Rollbeschleunigung (Ersatzderivativ L_r und L_β), unerwünscht, da es zu einer gefährlichen Berührung der Landebahn mit Triebwerk oder Flügelspitze kommen kann. Zur Durchführung einer reinen Rollbewegung des unregelmäßigen Flugzeugs um den Geschwindigkeitsvektor muss der Pilot zusätzlich zum Querruder entsprechend koordiniert das Seitenruder ausschlagen. Im Gegenzug muss der Pilot zum Aufbau eines Schiebewinkels infolge einer reinen Gierbewegung ohne Hängewinkelaufbau oder -änderung zum Seitenruder entsprechend koordiniert das Querruder einsetzen. Zur Verbesserung der Kopplungs- und Steuerungseigenschaften soll durch das Flugregelungssystem die Koordinierung der Flugzeugbewegung mittels Entkopplung von Roll- und Gierdynamik erfolgen, was dazu führt, dass eine entsprechende Abstimmung des Quer- und Seitenruderausschlages durch den Piloten nicht mehr erforderlich ist. Darüber hinaus soll jeder sichere, stationär erfliegbare, koordinierte Flugzustand ohne Piloteneingabe gehalten werden. Durch diese Maßnahmen wird der Steuerungsaufwand und folglich die Arbeitsbelastung des Flugzeugführers merklich reduziert.

- Steuerungseigenschaften:

Die Steuerungseigenschaften werden durch eine Vorgaberegulierung entsprechend verbessert, welche es dem Piloten ermöglicht, direkt geeignete Zustands- bzw. Vorgabegrößen zu steuern. Durch einen lateralen Steuerknüppelausschlag soll direkt eine Rollrate vorgegeben werden, was dazu führt, dass für einen losgelassenen Steuerknüppel die aktuelle Rolllage bzw. der Hängewinkel gehalten wird. Der Pedalausschlag des Piloten entspricht direkt einem seitenkraft-proportionalen Schiebewinkel, was im Falle losgelassener bzw. entlasteter Pedale zu einem seitenkraftfreien Flugzustand führt und somit einen koordinierten Flugzustand gewährleistet. Durch die Vorgaberegulierung resultiert ein besser antizipierbares und intuitives Steuerungsverhalten, da der Pilot die Eigendynamik des Flugzeugs nicht vorsehen bzw. voraussehen muss. Ferner soll durch Optimierung der Steuerempfindlichkeit ein intuitives und initial ansprechendes Kommandoverhalten des Flugzeugs gewährleistet werden.

- Störverhalten:

Störeinflüsse auf die Bewegung des Flugzeugs durch atmosphärische Störungen wie Böen und Turbulenzen sowie Konfigurationsänderungen, wie beispielsweise das Ein- und Ausfahren der Landeklappen oder der Ausfall eines Triebwerks, werden zur Minimierung der Arbeitsbelastung des Piloten und zur Verbesserung des Flugkomforts reduziert.

4.2 Regelungsstrategie

Aus den Entwurfszielen lässt sich ableiten, dass ein koordinierter Flugzustand bzw. eine koordinierte Flugzeugbewegung zur Gewährleistung adäquater Flug- und Handlungseigenschaften auszuführen und somit durch das Flugregelungssystem sicherzustellen ist. Für die folgenden Betrachtungen zur koordinierten Flugzeugbewegung gilt die Annahme *windfreier Fall*. Im koordinierten Flugzustand liegen Geschwindigkeitsvektor und Scheinlot in der x - z -Ebene des gedrehten Bahnachsensystems. Als Scheinlot wird anschaulich der spezifische Kraftvektor aus Schwer- und Zentrifugalkraft verstanden. Ein koordinierter Flugzustand (abdriftfreie Flugzeugbewegung) erfüllt somit die Bedingung für einen seitenkraftfreien Flugzustand bzgl. des gedrehten Bahnachsensystems und es gilt somit Gl. (4.1).

$$n_{y_a} = 0 \quad (4.1)$$

Das gedrehte Bahnachsensystem ergibt sich durch Drehung des Bahnachsensystems (k -System) mit μ (Flugwindhängewinkel) um die x -Achse und fällt im *windfreien Fall* mit dem aerodynamischen Koordinatensystem (a -System) zusammen.

Die im koordinierten Kurvenflug notwendige abgestimmte Gierrate ist bei konventionellen Flugzeugen durch einen Seitenruderausschlag umzusetzen. Die dabei auftretende Seitenkraft ist wiederum durch einen entsprechend angepassten marginalen Schiebewinkel (zur Realisierung eines seitenkraftfreien Flugzustand) auszugleichen. Für Flugzeuge herkömmlicher Bauart gilt für den stationären, koordinierten Flugzustand im *windfreien Fall* Gl. (4.2).

$$\beta \approx 0 \quad (4.2)$$

Die Steuerung der lateralen Flugbahn (Kurs- bzw. Richtungsänderung) erfolgt mittels einer koordinierten Flugzeugbewegung durch Rollen um den Geschwindigkeitsvektor, wodurch es zu einer Änderung des Hängewinkels kommt, ohne den Aufbau eines Schiebewinkels und ohne Änderung des Anstellwinkels. Eine Gierbewegung um die senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor in der Symmetrieebene des Flugzeugs liegende Achse führt im Gegenzug zum Aufbau eines reinen Schiebewinkels ohne Änderung des Hängewinkels und ohne Änderung des Anstellwinkels. Im koordinierten Flugzustand ($n_{y_a} = 0 / \beta \approx 0$) ist der Geschwindigkeitsvektor mit sehr guter Näherung deckungsgleich mit der x -Achse des experimentellen Koordinatensystems (e -System). Rollt das Flugzeug im koordinierten Flugzustand um die

x_e -Achse, so resultiert daraus (mit sehr guter Näherung) die abgezielte koordinierte Flugzeugbewegung. Ferner ist die Drehachse zur Gewährleistung einer reinen Gierbewegung und zur Umsetzung eines Schiebewinkels mit der z-Achse des e -Systems identisch. Zur Sicherstellung der geforderten koordinierten Flugzeugdynamik und einer entkoppelten Gierbewegung mit reinem Schiebewinkelaufbau soll reglergestützt eine Entkopplung von Roll- und Gierdynamik hinsichtlich des experimentellen Koordinatensystems durch Ausführung des Regelungsprozesses bzgl. des e -Systems realisiert werden. Als Rückführgrößen ergeben sich somit, neben Hängewinkel Φ und Schiebewinkel β , die Rollrate p_e und die Gierrate r_e bzgl. des e -Systems um die geforderte Entkopplung unter Berücksichtigung der zugehörigen Rückführverstärkungen zu bewirken. Zur reglergestützten Ansteuerung von Quer- und Seitenruder wird ein entsprechendes Vorsteuergesetz vorgesehen, welches a priori einen hinsichtlich der experimentellen Achsen abgestimmten Steuerflächenausschlag bedingt und somit die abgezielte Entkopplung von Roll- und Gierdynamik stützt. Die Führungsgrößen des Regelungsprozesses zur Realisierung der bezweckten Entkopplung von Roll- und Gierdynamik ergeben sich entsprechend der Entwurfsziele als Rollrate p_e , welche durch einen lateralen Steuerknüppelausschlag kommandiert wird ($\delta_{St\ lat} \hat{=} p_{ec}$), und als Schiebewinkel β , dessen Kommandierung durch einen Pedalausschlag erfolgt ($\delta_{Ped} \hat{=} \beta_c$).

Für die praktische Umsetzung der Forderung nach einem seitenkraftfreien Flugzustand (Index TC) ist es aufgrund der zu Verfügung stehenden Messgrößen zweckmäßig, die reglerbasierte Ausführung eines seitenkraftfreien Flugzustands bzgl. des körperfesten Koordinatensystems zu realisieren und somit Gl. (4.1) durch die Verarbeitung des Seitenkraftlastvielfachen n_{y_f} nach Gl. (4.3) zu erfüllen.

$$n_{y_f,TC} = 0 \quad (4.3)$$

Dabei ist festzuhalten, dass der Fehler durch die Verwendung des Lastvielfachen bzgl. des körperfesten Achsenkreuzes (und nicht bzgl. des aerodynamischen Koordinatensystems) aufgrund des Einflusses von n_x , welcher wegen der kleinen, stationär erreichbaren Steigwinkel (γ) der $DA42$ sehr gering ist, und des marginal auftretenden Schiebewinkels vernachlässigbar klein ist.

Ausgehend vom koordinierten Flugzustand, unter spezieller Betrachtung des stationären, koordinierten Kurvensteigflugs im *windfreien Fall*, welcher in Abbildung 4-1 dargestellt ist, lassen sich für die Entwicklung der Reglerstruktur vorab folgende wichtige flugmechanische Zusammenhänge herleiten: Durch Aufstellen des Kräftegleichgewichts im stationären, koordinierten Kurvensteigflug bzgl. des a -Systems ergibt sich Gl. (4.4) und Gl. (4.5):

$$\sum F_{y_a} : m g \cos \gamma \sin \mu = \underbrace{m \dot{\Psi} V \cos \gamma \cos \mu}_z \quad (4.4)$$

$$\sum F_{z_a} : m g \cos \gamma \cos \mu + \underbrace{m \dot{\Psi} V \cos \gamma \sin \mu}_z = A \quad (4.5)$$

Dabei ist Z die auf das Flugzeug wirkende Zentrifugalkraft. Sie wird durch die Kinetik erzeugt und ist keine äußere Kraft ($Z = m \dot{\chi} V \cos \gamma = m \dot{\Psi} V \cos \gamma$ / windfreier Fall, stationärer Flugzustand $\dot{\chi} = \dot{\Psi}$). Die flugzeugfesten Drehraten des Flugzeugs im stationären, koordinierten Kurvensteigflug, angegeben im geodätischen Koordinatensystem (g -System), ergeben sich zu $(0, 0, r_g)_g$ mit $r_g = \dot{\Psi}$. Die Flugbahn entspricht dabei einer Schraubenkurve. Durch eine Transformation der flugzeugfesten Drehraten in das aerodynamische Koordinatensystem (a -System) erhält man die körperfeste Gierrate zu $r_a = \dot{\Psi} \cos \gamma \cos \mu$ (Transformationsmatrix M_{ag} siehe [1]). Es ergibt sich aus Gl. (4.4) unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen der Gierrate r_a und der Änderung des Azimuts $\dot{\Psi}$ sowie unter dem im windfreien Fall gültigen Zusammenhang $r_a = r_e$ die körperfeste Gierrate im koordinierten Kurvensteigflug nach Gl. (4.6).

$$r_{eTC} = \frac{g}{V} \cos \gamma \sin \mu \quad (4.6)$$

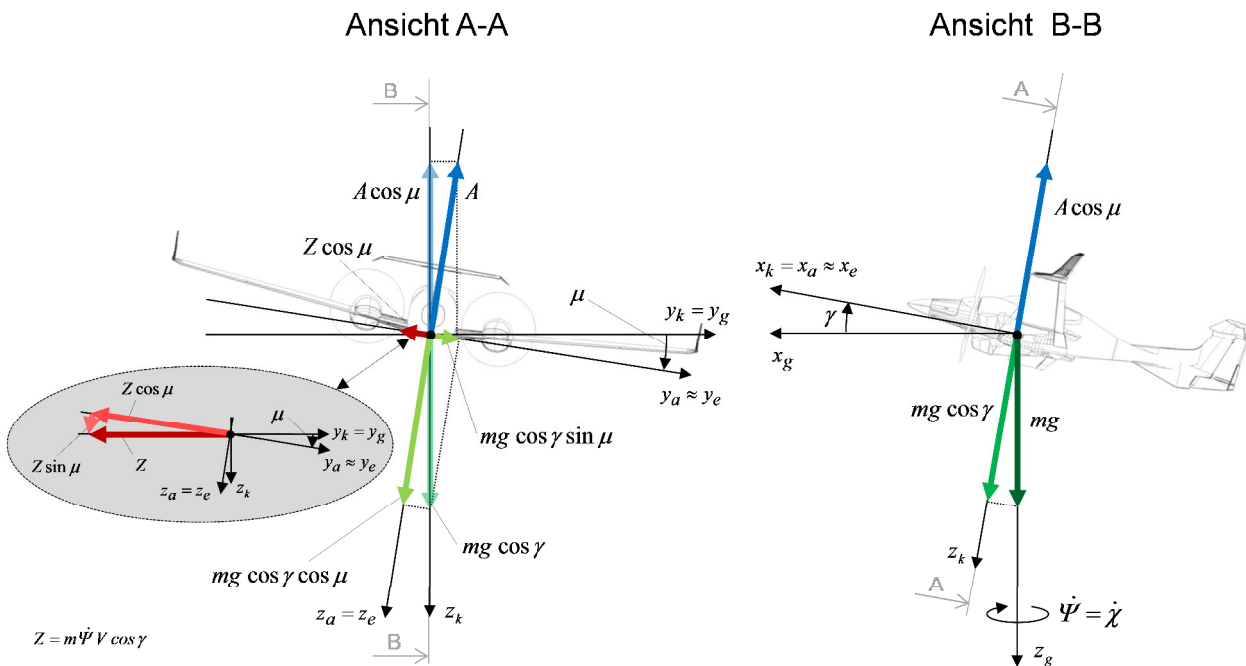


Abbildung 4-1: Kräfte im koordinierten Kurvensteigflug (windfreier Fall / $n_{y_f} = 0$ / $\beta \approx 0$)

5 Reglerstruktur

Ausgehend von den Entwurfszielen und der Regelungsstrategie erfolgt in diesem Kapitel die Ausarbeitung und die Beschreibung der Reglerstruktur. Dazu wird zunächst eine Betrachtung der gesamten Reglerstruktur durchgeführt, anschließend werden die einzelnen Teilstrukturen detailliert erörtert.

5.1 Konzeption der Reglerstruktur

Die geforderte koordinierte Flugzeugbewegung nebst entkoppelter Gierdynamik wird durch Ausführung des Regelungsprozesses bzgl. des e -Systems gewährleistet. Die Starrkörperdrehraten der Seitenbewegung, Rollrate p und Gierrate r , welche bzgl. des flugzeugfesten Koordinatensystems (f -System) erfasst werden, müssen folglich zur regelungstechnischen Verarbeitung in das e -System transformiert werden, sie ergeben sich zur Rollrate p_e und Gierrate r_e . Dies gilt auch für die Kommandogröße der Rollachse p_{ec} . Der bzgl. des e -Systems auszuführende Regelungsprozess gliedert sich in einen Teilregler für die Rollachse und einen für die Gierachse, siehe Abbildung 5-1. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Teilregler als Regelungsstrang bezeichnet. Der Regelungsstrang für die Rollachse setzt das geforderte Rollverhalten durch Aufschaltung der Rollrate p_e um und entkoppelt die Rolldynamik von der Gierdynamik durch Rückführung der Zustände β und r_e . Das Ausgangssignal des Rollachsenreglers ist ein auf I_{x_e} bezogenes Steuermoment \dot{p}_{eD} und entspricht damit der geforderten Rollbeschleunigung um die x -Achse des e -Systems (der Index D steht für Forderung „Demand“). Im Regelungsstrang der Gierachse erfolgt durch Aufschaltung der Gierachsenzustände β und r_e die Umsetzung der geforderten Gierdynamik nach *Level 1*. Die Entkopplung der Gierdynamik von der Rolldynamik erfolgt dabei durch Rückführung der Zustände der Rollachse p_e und Φ . Das Ausgangssignal des Regelungsstrangs der Gierachse ist ein auf I_{z_e} bezogenes Steuermoment \dot{r}_{eD} und repräsentiert damit die geforderte Gierbeschleunigung um die z -Achse des e -Systems. Zur Gewährleistung eines stationär ausgeführten koordinierten Flugzustands wird innerhalb des Regelungsstranges der Gierachse das Seitenkraftlastvielfache n_{y_f} über einen Integrator zurückgeführt. Der bzgl. des e -Systems durch die Regelungsstränge für Roll- und Gierachse ausgeführte Regelungsprozess ermöglicht, ausgehend vom symmetrischen Flugzustand, eine entkoppelte Rollbewegung des Flugzeugs um die x -Achse des e -Systems (*Geschwindigkeitsvektor-Rolle* / $\alpha = const.$ / $\beta = 0$) zur Gewährleistung einer koordinierten Flugzeugbewegung und einer entkoppelten Gierbewegung um die z -Achse des e -Systems. Unter Berücksichtigung der Regelungsstränge für Roll- und Gierachse und der Umsetzung der Steuermomente entsprechend der Ausgangssignale \dot{p}_{eD} und

\dot{r}_{eD} , sowie zur Ausführung intuitiver und ansprechender Steuerungseigenschaften lassen sich direkt die notwendigen Teilstrukturen zur Verwirklichung der Funktionalitäten ableiten. In der Teilstruktur *Vorverarbeitung der Führungsgrößen* werden die Piloteneingaben durch einen lateralen Steuerknüppelausschlag und einen Pedalausschlag in ein adäquates Rollratenkommando p_{ec} und Schiebewinkelkommando β_c für die darauffolgenden entkoppelten Teilstrukturen *Roll-* und *Gierachsenregler* erzeugt, siehe Abbildung 5-1. In Abhängigkeit der Kommandogrößen und der Rückführsignale werden im *Roll-* und *Gierachsenregler* die geforderten Drehbeschleunigungen \dot{p}_{eD} und \dot{r}_{eD} bzgl. des experimentellen Koordinatensystems berechnet, welche die Eingangssignale der darauffolgenden Teilstruktur *Steuerkoordinierung (Control Allocation)* sind, siehe Abbildung 5-1. Die entkoppelten Steuermomente \dot{p}_{eD} und \dot{r}_{eD} werden in der *Steuerkoordinierung* in entsprechend koordinierte Stellflächenausschläge für Quer- und Seitenruder konvertiert. In Abbildung 5-1 ist die Gesamtstruktur des Reglers mit Kennzeichnung der Teilstrukturen dargestellt.

Die für die Funktion des Reglers erforderlichen Rückführ- und Signalgrößen können aus den in Tabelle 5-1 aufgeführten Messgrößen bestimmt werden. Die für die primären Rückführgrößen notwendigen Messgrößen müssen dabei in einer entsprechend hohen Abtastrate zur Regelung der schnellen Eigenbewegungsformen zur Verfügung stehen. Signalgrößen wie Hängewinkel Φ und Nickwinkel θ , welche als nicht primäre Rückführgrößen in der Regelungsstruktur eingebunden sind und deren Verwendung wesentlichen Einfluss auf die Langzeitdynamik bzw. stationäre Flugzustände haben, wie die stationäre Gierrate für die Kurvenkoordination, können entsprechend niederfrequent erfasst werden.

hochfrequente Signalgrößen	$n_{ye} = n_{yf}, p, r$
niederfrequente Signalgrößen	$\Phi, \theta, (\hat{v}), p_t - p_s$

Tabelle 5-1: erforderliche Messgrößen

Alle mit „ $\hat{}$ “ versehenen Signalgrößen entsprechen dabei nicht direkt gemessenen Größen, sie werden geschätzt. Die Bestimmung des für die Regelung erforderlichen Anstellwinkels $\hat{\alpha}$ und des Schiebewinkels $\hat{\beta}$ aus den in Tabelle 5-1 angegebenen Messgrößen wird in Kapitel 5.6 vorgestellt. Die Transformation der flugzeugfesten Drehraten p und r ins experimentelle Koordinatensystem zur Rollrate p_e und Gierrate r_e erfolgt nach Gl. (5.1) in Abhängigkeit des Anstellwinkels $\hat{\alpha}$.

$$\begin{pmatrix} p_e \\ r_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\alpha} & \sin \hat{\alpha} \\ -\sin \hat{\alpha} & \cos \hat{\alpha} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die Messung des Staudrucks (Totaldruckdifferenz) $p_t - p_s$ ist erforderlich, um eine Nachführung des Reglers bzw. der Verstärkungsfaktoren an die sich über den gesamten Flugbereich verändernde Streckendynamik zu realisieren. Eine detaillierte Beschreibung der Nachführung der Reglerparameter ist in Kapitel 6.4 zu finden.

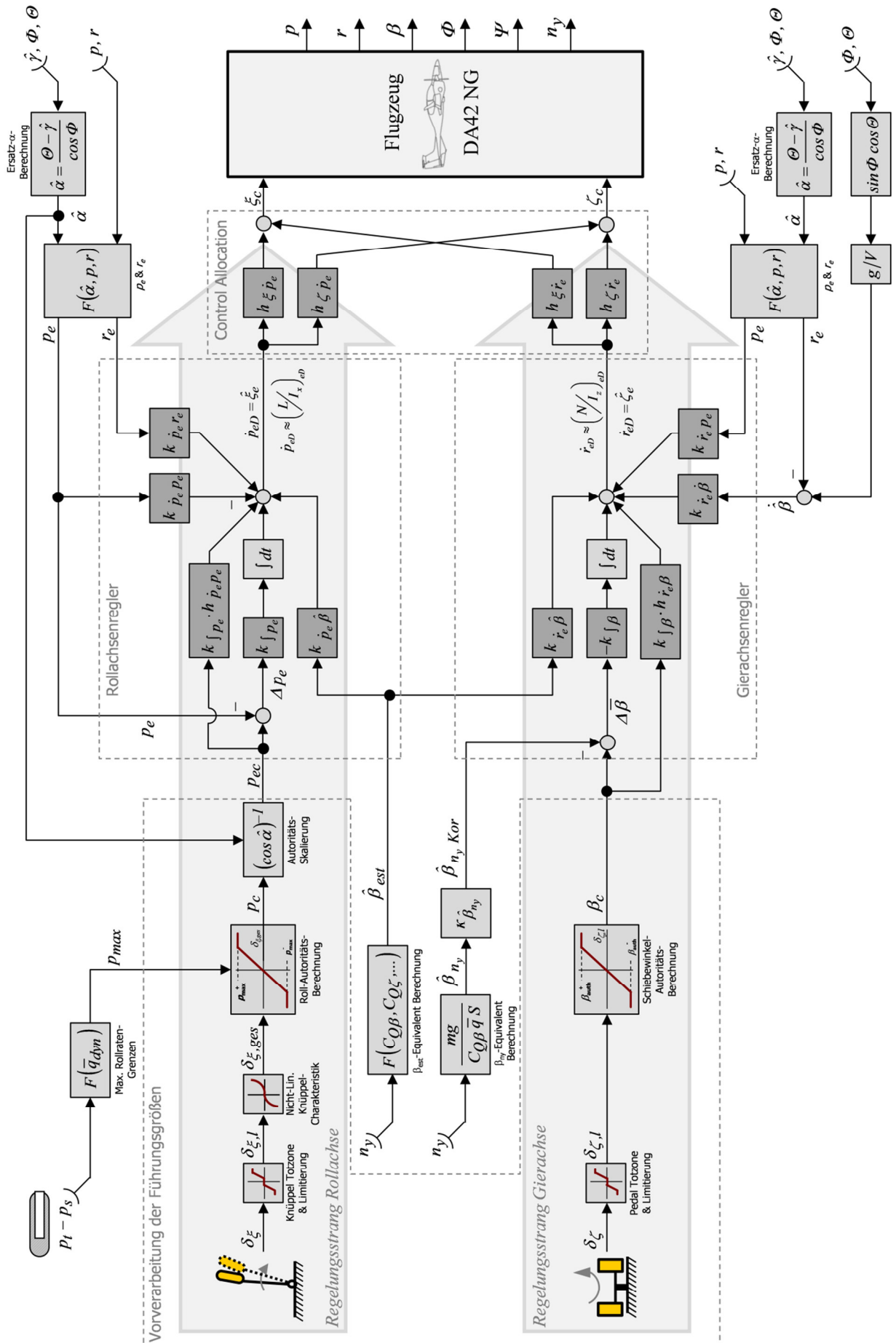


Abbildung 5-1: Reglerstruktur

Im Folgenden wird nun auf die einzelnen Teilstrukturen *Vorverarbeitung der Führungsgrößen*, *Roll- und Gierachsenregler* sowie die *Steuerkoordination* eingegangen. Eine vormalige Vorstellung der Reglerstruktur erfolgte im Rahmen einer eigenen Veröffentlichung ([29]) im Jahr 2013, die Beschreibungen in Kapitel 5 lehnen sich daran an.

5.2 Steuerkoordination und entkoppelte virtuelle Steuergrößen

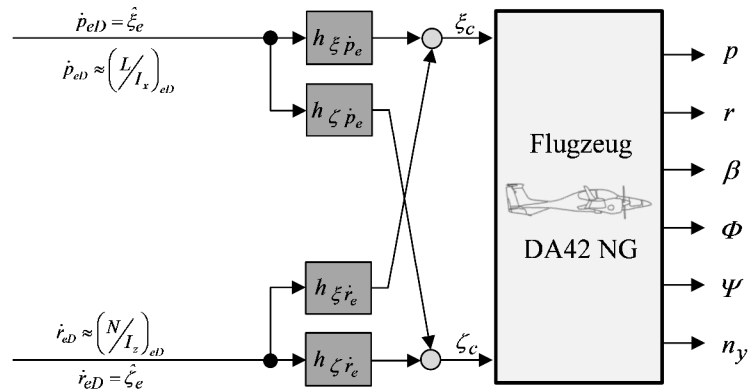


Abbildung 5-2: Steuerkoordination (Control Allocation)

Das geregelte Flugzeug soll, entsprechend den Entwurfszielen, bei einer Rolleingabe um den Geschwindigkeitsvektor rollen ($p_{ec} \rightarrow p_e$) und bei einer Giereingabe um die nach unten gerichtete Senkrechte zum Anströmungsvektor, die z-Achse des experimentellen Koordinatensystems, gieren ($\beta_c \rightarrow r_e$). Ein reiner Querruderausschlag ξ erzeugt neben einer Rollrate p_e auch eine durch das Steuerderivativ N_{ξ} erzeugte (ungewollte) Gierrate r_e und umgekehrt verursacht ein reiner Seitenruderausschlag ζ eine Gierrate r_e sowie eine durch das Steuerderivativ L_{ζ} bewirkte (unerwünschte) Rollrate p_e , siehe Kapitel 3.2. Unter Berücksichtigung des Roll- und Gierachsenreglerstrangs mit den Ausgangssignalen \dot{p}_{eD} und \dot{r}_{eD} ist es zweckmäßig, Quer- und Seitenrudder so zu koordinieren, dass entsprechend den Ausgangssignalen initial eine reine Rollbeschleunigung \dot{p}_e respektive eine reine Gierbeschleunigung \dot{r}_e durch den abgestimmten Ausschlag der Steuerflächen bewirkt wird. Die Zuordnung eines Momentenkommandos um die x- bzw. z-Achse des experimentellen Koordinatensystems (\dot{p}_{eD} , \dot{r}_{eD}) und eines abgestimmten Ausschlags von Quer- und Seitenrudder (ξ , ζ) ist in Form einer Vorsteuerung umgesetzt. Ein derartiges Steuergesetz wird auch als *Control Allocation* bezeichnet. In Abbildung 5-2 ist das Blockschaltbild der *Control Allocation* dargestellt.

Bei einem reinen Rollratenführungssignal p_{ec} des Piloten bzw. bei einem Rollmomentenkommando \dot{p}_{eD} werden durch die *Control Allocation* Quer- und Seitenrudder derart zueinander koordiniert, dass es, unter Vernachlässigung von Koppeffekten der Eigendynamik des Flugzeugs, in Folge der auf das Flugzeug wirkenden aerodynamischen Steuerkräfte und Steuermomente zu einer reinen Rollrate um die x-Achse des e-Systems kommt. D.h. ein Rollmomentenkommando \dot{p}_{eD} führt initial zu einer reinen Rollbeschleunigung \dot{p}_e und somit zu

einer reinen Rollrate p_e , ohne dass eine Gierrate r_e bzw. ein Schiebewinkel β aufgebaut wird. Bei einem Schiebewinkelführungssignal β_c bzw. einem Gierrmomentenkommando \dot{r}_{eD} sollen Seiten- und Querruder mittels *Control Allocation* so zueinander abgestimmt werden, dass die aerodynamischen Steuerkräfte und Steuermomente unter Vernachlässigung von Koppeffekten der Flugzeugeigendynamik eine reine Gierrate r_e um die z-Achse des experimentellen Koordinatensystems erzeugen. D.h. ein Gierrmomentenkommando \dot{r}_{eD} erzeugt initial ausschließlich eine Gierbeschleunigung \dot{r}_e , welche zum Aufbau einer reinen Gierrate r_e respektive eines Schiebewinkels β ohne Rollrate p_e führt. Durch die Koordinierung der Steuerflächen wird, neben der bezweckten Stützung einer koordinierten Rolldynamik und einer entkoppelten Gierbewegung, der Regelungsaufwand signifikant minimiert, da nicht erst zeitverzögert durch die entsprechenden Rückführungen des Reglers auf die jeweils nicht abgezielte Steuerflächenwirksamkeit reagiert wird.

Um die beschriebene Funktionalität zu erzeugen, werden zunächst die virtuellen, entkoppelten Steuergrößen $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$, welche auch als *Ersatzruder* oder *Ersatzsteuergrößen* bezeichnet werden, eingeführt, deren Ausschlag jeweils entkoppelt auf die Roll- bzw. Gierachse des experimentellen Koordinatensystems wirkt. Ausgangspunkt entkoppelter Steuergrößen und Grundlage zur Bestimmung der Parameter der *Control Allocation* ist die Zustandsgleichung der Seitenbewegung (*SBW*) des unregulierten Flugzeugs, angegeben bzgl. des experimentellen Achsenkreuzes (*e*-Systems) nach Gl. (2.8). Maßgeblich bei der Definition der Ersatzruder $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ ist die Steuermatrix \mathbf{B} , in deren Anlehnung sich die Steuergrößen gemäß Gl. (5.2) ergeben.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\xi}_e \\ \hat{\zeta}_e \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_{eD} \\ \dot{r}_{eD} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} L_\xi & L_\zeta \\ N_\xi & N_\zeta \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (5.2)$$

Durch Inversion von Gl. (5.2) erhält man direkt das benötigte Steuergesetz der Vorsteuerung:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{\xi p_e} & h_{\xi r_e} \\ h_{\zeta p_e} & h_{\zeta r_e} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{ER}} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_e \\ \hat{\zeta}_e \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}_{ER} = \begin{bmatrix} h_{\xi p_e} & h_{\xi r_e} \\ h_{\zeta p_e} & h_{\zeta r_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\xi & L_\zeta \\ N_\xi & N_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.3)$$

Die Verstärkungsfaktoren der *Control Allocation* zur Koordinierung der Steuerausschläge ξ und ζ in Abhängigkeit der Ersatzruderausschläge können aus Gl. (5.3) entnommen werden, vgl. Abbildung 5-2.

Die Einführung der entkoppelten Ersatzruder unterstützt darüber hinaus den Ansatz der dezentralen Teilregler (Regelungsstrang für Roll- und Gierachse). Dadurch kann insbesondere die Auslegung der Verstärkungsfaktoren der Rückführungen intuitiv und flugmechanisch einsichtig erfolgen.

Durch Einsetzen des Vorsteuergesetzes (Gl. (5.3)) in die Zustandsgleichung der *SBW* nach Gl. (2.8) erhält man die Zustandsgleichung der *SBW* mit den entkoppelten Ersatzrudern $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ gemäß Gl. (5.4). Sie ist grundlegend für die Durchführung des Reglerentwurfs, insbesondere für die Parameterauslegung in Kapitel 6.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} L_p & L_r & L_\beta & 0 \\ N_p & N_r & N_\beta & 0 \\ Y_p & Y_r - 1 & Y_\beta & \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 \\ \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & \frac{\sin \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \beta \\ \phi \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \check{Y}_\xi & \check{Y}_\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\check{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\xi}_e \\ \hat{\zeta}_e \end{pmatrix}}_{\check{u}} \quad (5.4)$$

$$\text{mit } \check{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_\xi & L_\zeta \\ N_\xi & N_\zeta \\ Y_\xi & Y_\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} h_{\xi p_e} & h_{\xi r_e} \\ h_{\zeta p_e} & h_{\zeta r_e} \end{bmatrix}}_{H_{ER}}$$

Aus Gl. (5.4) ist zu entnehmen, dass die Steuergrößen $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ bzgl. der Erzeugung einer Rotationsbeschleunigung wie gefordert entkoppelt sind. Aufgrund der fast vollständig besetzten Systemmatrix A führt ein Ausschlag von $\hat{\xi}_e$, welcher initial eine reine Rollbeschleunigung erzeugt, infolge des Aufbaus von p_e und der Eigendynamik des Flugzeugs zwangsläufig zu einer Änderung der Gierzustände. Dies gilt auch für einen Ausschlag von $\hat{\zeta}_e$, hierbei wird initial eine reine Gierbeschleunigung bewirkt, wobei es infolge des Aufbaus von r_e und der Flugzeugeigendynamik unweigerlich zu einer Änderung der Rollzustände kommt. Die durch die Eigendynamik des Flugzeuges bedingte Kopplung von Roll- und Gierdynamik wirkt sich nachteilig auf die angestrebten Entwicklungsziele aus. Durch die im Roll- und Gierachsenregler vorgesehenen Rückführungen wird eine hinreichende Entkopplung der Eigendynamik sichergestellt. Zusätzlich kommt es durch den Ausschlag der Ersatzrudder $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ aufgrund von \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ zu einer Schiebewinkeländerung bzw. zu einem Schiebewinkelaufbau. Entsprechend der Regelungsstrategie (siehe Kapitel 4.2) ist jedoch bei der Ausführung einer koordinierten Flugzeugbewegung und deren Steuerung durch den Ausschlag des Ersatzrudders $\hat{\xi}_e$ der Aufbau eines Schiebewinkels infolge von \check{Y}_ξ unerwünscht. Im Folgenden werden deshalb die Größen \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ und somit der Einfluss eines Ersatzrudderausschlags auf den Schiebewinkel analysiert:

Allgemein	Näherung	Ergebnis der Abschätzung
$\check{Y}_\xi = \frac{\begin{matrix} \approx 0 < -1 & > 0 > 0 \\ \check{Y}_\xi \check{N}_\zeta & - \check{Y}_\zeta \check{N}_\xi \end{matrix}}{\underbrace{\begin{matrix} L_\xi & N_\zeta \\ < -1 & < -1 \end{matrix}}_{< -1} \underbrace{\begin{matrix} - L_\zeta & N_\xi \\ > 1 & > 0 \end{matrix}}_{> 1}}$	$\Rightarrow \check{Y}_\xi \approx - \frac{\begin{matrix} > 0 & > 0 \\ \check{Y}_\zeta & \check{N}_\xi \end{matrix}}{\underbrace{\begin{matrix} L_\xi & N_\zeta \\ < -1 & < -1 \end{matrix}}_{< -1} \underbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} > 0 \\ \check{Y}_\zeta \end{pmatrix}}_{< -1} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} > 0 \\ \check{N}_\xi \end{pmatrix}}_{< -1} \end{matrix}}_{< 1 (> 0)} \underbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} > 0 \\ \check{Y}_\zeta \end{pmatrix}}_{< -1} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} > 0 \\ \check{N}_\xi \end{pmatrix}}_{< -1} \end{matrix}}_{ \dots < 1 (< 0)}$	$\Rightarrow \begin{matrix} \check{Y}_\xi \ll 1 \\ \check{Y}_\xi < 0 \end{matrix}$
$\check{Y}_\zeta = \frac{\begin{matrix} \approx 0 > 1 & > 0 < -1 \\ - \check{Y}_\xi \check{L}_\zeta & + \check{Y}_\zeta \check{L}_\xi \end{matrix}}{\underbrace{\begin{matrix} L_\xi & N_\zeta \\ < -1 & < -1 \end{matrix}}_{< -1} \underbrace{\begin{matrix} - L_\zeta & N_\xi \\ > 1 & > 0 \end{matrix}}_{> 1}}$	$\Rightarrow \check{Y}_\zeta \approx \frac{\begin{matrix} > 0 < -1 \\ \check{Y}_\zeta \check{L}_\xi \end{matrix}}{\underbrace{\begin{matrix} L_\xi & N_\zeta \\ < -1 & < -1 \end{matrix}}_{< -1} \underbrace{\begin{pmatrix} > 0 \\ \check{Y}_\zeta \end{pmatrix}}_{< -1}}_{ \dots < 1 (< 0)}$	$\Rightarrow \begin{matrix} \check{Y}_\zeta \ll 1 \\ \check{Y}_\zeta < 0 \end{matrix}$
Bemerkung: Abschätzung gültig für konventionelle Flugzeugkonfigurationen		wobei $ \check{Y}_\xi < \check{Y}_\zeta $

Tabelle 5-2: Qualitative Abschätzung $\check{Y}_\xi, \check{Y}_\zeta$

Für konventionelle Konfigurationen kann mittels einer qualitativen und einer quantitativen Abschätzung gezeigt werden, dass der Betrag von \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ viel kleiner als 1 und somit signifikant kleiner als die anderen Steuerderivativa der $\check{\mathbf{B}}$ -Matrix ist. Die qualitative Analyse der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ wurden auf Grundlage der Daten aus [7] sowie der physikalisch-flugmechanischen Wirkungsweise der Ersatzsteuerderivativa durchgeführt. Für die schrittweise Vernachlässigung nicht-dominanter Terme die Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ ergeben sich diese betragsmäßig sehr viel kleiner als 1. Eine Zusammenfassung hierzu sowie die analytische Zusammensetzung der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ ist in Tabelle 5-2 dargestellt.

Die quantitative Analyse wurde für zwei stationäre Flugzustände der DA42 unter Verwendung der zugehörigen Zustandsraummodelle ausgeführt. Zusätzlich sind zur Untermauerung die Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ unter Anwendung der Zahlenwerte in [7] für eine mittlere Reisegeschwindigkeit der Dornier 328 untersucht worden. Die Ergebnisse der numerischen Analyse decken sich mit denen der qualitativen. Es ergeben sich somit Beträge der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ , die sehr viel kleiner als 1 sind. Eine Übersicht der quantitativen Analyse mit Angabe der Zahlenwerte ist in Tabelle 5-3 zu finden.

	DA42 (Reiseflug) Quelle: Simulationsmodell DA42 (FSD)		Do328 (Reiseflug) Quelle: [7]
	110kts	90kts	
$\check{Y}_\xi = \frac{Y_\xi N_\zeta - Y_\zeta N_\xi}{L_\xi N_\zeta - L_\zeta N_\xi}$	$-7.49 \cdot 10^{-4}$	-0.00170	$9.205 \cdot 10^{-4}$
$\check{Y}_\zeta = \frac{-Y_\xi L_\zeta + Y_\zeta L_\xi}{L_\xi N_\zeta - L_\zeta N_\xi}$	-0.0120	-0.0179	-0.0150

Tabelle 5-3: Quantitative Abschätzung $\check{Y}_\xi, \check{Y}_\zeta$ für DA42 und Do328 (Quelle: [29])

Aufgrund der kleinen Beträge von \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ im Verhältnis zu den anderen Ersatzderivativa können diese für die weiteren Betrachtungen und die Auslegung der Reglerparameter, siehe Kapitel 6, zu null gesetzt werden. D.h. die unerwünschte Induktion einer Seitenkraft ($\sim \beta$) durch eine Ansteuerung der Ersatzrudder $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ aufgrund der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ kann somit für den Reglerentwurf vernachlässigt werden. Für die Analyse des Reglerentwurfs ist der Einfluss jedoch nochmals zu prüfen und somit die Zulässigkeit der vorgenommenen Vereinfachung nachzuweisen, siehe Kapitel 6.5 und Kapitel 8.

Bemerkung 1: Die *Control Allocation* kann im Falle des Ausfalls einzelner Rückführgrößen des Reglers als sogenanntes *Direct Law (Notfallregler)* verwendet werden. Als *Open Loop* Flugtests bezeichnete Flugversuche im D-SIM-42 Flugsimulator haben gezeigt, dass durch die Verwendung der *Control Allocation* die Steuerungseigenschaften des Flugzeugs im Vergleich zum Flugzeug ohne Vorsteuergesetz beim Einleiten des Kurvenflugs subjektiv wesentlich erleichtert wird.

Bemerkung 2: Die hier dargestellte Vorgehensweise zur Einführung der *Control Allocation* wird im Rahmen dieser Arbeit als *physikalisch motivierte Methode* bezeichnet. Die Herleitung des Vorsteuergesetzes kann auch auf Basis der *Moore-Penroseschen Pseudo-Inversen* der Steuermatrix \mathbf{B} erfolgen, diese Vorgehensweise wird als *mathematisch motivierte Methode* bezeichnet. Die Ergebnisse der beiden Herleitungsmethoden sind im Rahmen der üblichen Genauigkeiten von Rechnern identisch.

5.3 Vorverarbeitung der Führungsgrößen

Die Entwurfsziele des Reglers sehen zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften hinsichtlich der Steuerungseigenschaften die direkte Vorgabe der Rollrate p_e und des seitenkraftproportionalen Schiebewinkel β_{ny} durch den Piloten vor. Zur Sicherstellung intuitiver und ansprechender Steuerungseigenschaften ist dazu die Vorverarbeitung des Steuerknüppel- bzw. Pedalausschlags zur Generierung der Führungsgrößen p_{ec} und β_c erforderlich. Ein lateraler Steuerknüppelausschlag $\delta_{St\ lat}$ entspricht dabei der Führungsgröße der Rolldynamik p_{ec} ($\delta_{St\ lat} \rightarrow p_{ec}$). Die Führungsgröße der Gierdynamik β_c steht im direkten Zusammenhang mit dem Pedalausschlag δ_{Pet} ($\delta_{Pet} \rightarrow \beta_c$).

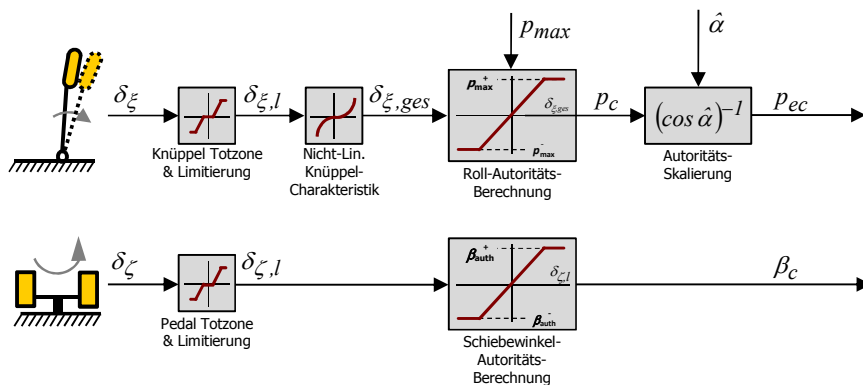


Abbildung 5-3: Vorverarbeitung der Führungsgrößen

In Abbildung 5-3 ist die Teilstruktur zur Vorverarbeitung der Piloteneingaben zur Erzeugung der Führungsgrößen dargestellt. In einem ersten Schritt werden dabei ein zulässiger Maximalausschlag und ein Minimalausschlag zum Erreichen eines Stellkommandos ungleich null, eine sogenannte *Dead Zone*, eingeführt. Zusätzlich ist für die Vorgabe der Führungsgröße der Rollachse eine nichtlineare Knüppelcharakteristik vorgesehen. Dadurch ist es möglich, im Bereich kleiner Ausschläge sehr fein zu steuern und im Bereich großer Ausschläge eine progressive Steuercharakteristik zu ermöglichen. Im zweiten Schritt erfolgt die funktionale Verknüpfung zwischen angepasster Piloteneingabe und vorzugebendem Flugzustand, d.h. für die Gierdynamik erfolgt die Zuordnung zwischen abgestimmter Pedaleingabe und Schiebewinkelkommando, dabei wird das maximal zulässige Schiebewinkelkommando begrenzt (siehe Schiebewinkelautoritätsberechnung in Abbildung 5-3). Für die Rollachse ist das die Zuordnung zwischen angepasstem lateralem Steuerknüppelausschlag und Rollratenkommando, wobei die

maximal kommandierbare Rollrate mit Zunahme des Staudrucks erhöht wird (siehe Rollautoritätsberechnung in Abbildung 5-3). Die Ausführung des Regelungsprozesses erfolgt bzgl. des e -Systems. Es ist somit für den Rollkommandopfad notwendig, die Führungsgröße der Rollachse vom Referenzsystem des Piloten, dem flugzeugfesten Koordinatensystem, in das experimentelle Achsenkreuz (e -System) zu transformieren (Autoritätsskalierung in Abbildung 5-3). Dies erfolgt in Abhängigkeit des Anstellwinkels und für Konfigurationen, welche einen hohen Anstellwinkel erreichen, ist die Führungsgröße p_{ec} entsprechend zu begrenzen. Für die in dieser Arbeit betrachtete Konfiguration ($DA42$) ist dies aufgrund der geringen erreichbaren Anstellwinkel unkritisch.

5.4 Regler für die Rollachse

Der Rollachsenregler ist ein PI -Regler, als Eingangssignal dient die vom Piloten vorgegebene Führungsgröße p_{ec} . Das Ausgangssignal ist der Ausschlag der virtuellen Ersatzsteuerfläche $\hat{\xi}_e$ und entspricht dem benötigten normierten Steuermoment \dot{p}_{eD} um die x_e -Achse. Zur Ausführung einer koordinierten Flugzeugbewegung erfolgt der Regelungsvorgang, wie in Kapitel 5.1 dargelegt, bzgl. des experimentellen Koordinatensystems. Die zurückgeführten Flugzustände sind Rollrate p_e , Gierrate r_e und der Schiebewinkel β .

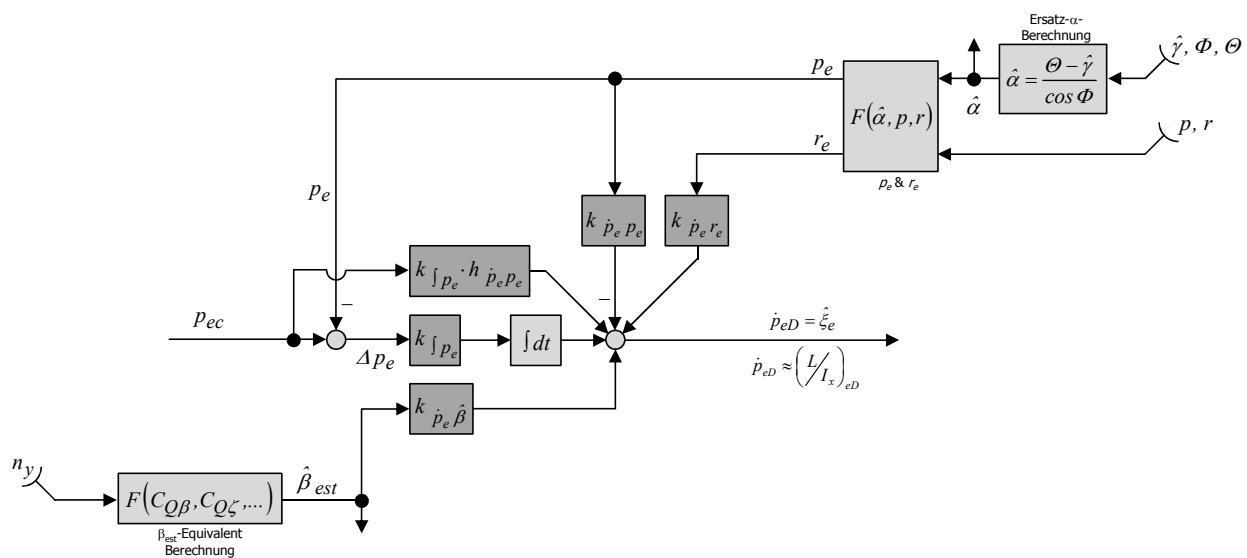


Abbildung 5-4: Rollachsenregler

Durch die Proportionalrückführung (Verstärkungsfaktor $k_{p_e p_e}$) der Rollrate p_e ist es möglich, unter grundlegender Berücksichtigung des Integrators, die Anforderungen an die Rolldynamik durch Einstellung der Rollzeitkonstante umzusetzen. Kopplungen der Zustände der Gierachse auf die Rollachsendynamik werden durch die Rückführung der Gierrate r_e und des Schiebewinkels β verhindert. Dadurch wird die koordinierte Flugzeugbewegung bzw. die Entkopplung von Roll- und Gierdynamik sichergestellt. Die stationäre Genauigkeit der Rollrate ist durch die Integration der Regeldifferenz von Rollrate p_e und Führungsgröße p_{ec}

sichergestellt. Zur Umsetzung ansprechender Steuerungseigenschaften ist der *PI*-Regler mit einem direkten Führungsgrößendurchgriff versehen. Verzögerungen durch den Integrator, die sich nachteilig auf das Steuerungsverhalten auswirken, können dadurch eliminiert werden. Die Berechnung aller Parameter des Rollachsenreglers wird in Kapitel 6 beschrieben. Die Ermittlung des (geschätzten) Anstellwinkels zur Transformation der Drehraten p und r in das experimentelle Koordinatensystem (p_e und r_e) wird in Kapitel 5.6 dargelegt. Die Reglerstruktur der Rolldynamik bedingt eine sogenannte *Rate Command / Attitude Hold (RC/AH)* Charakteristik, da der Pilot direkt die Rollrate kommandiert und bei einem losgelassenen lateralen Steuerknüppel eine Rollrate von null vorgegeben wird, wodurch der Hängewinkel konstant bleibt. In Abbildung 5-4 ist die Teilstruktur des Rollachsenreglers dargestellt.

5.5 Regler für die Gierachse

Der Gierachsenregler besteht, wie der Regler der Rollachse, aus einem *PI*-Regler mit Vorsteuerung. Eingangsgröße ist ein vom Piloten kommandierter zur Seitenkraft proportionaler Schiebewinkel β_c . Ein normiertes Steuermoment \dot{r}_{eD} um die z -Achse des experimentellen Koordinatensystems, welches äquivalent zum Ausschlag der virtuellen Steuerfläche $\hat{\zeta}_e$ ist, stellt die Ausgangsgröße dar.

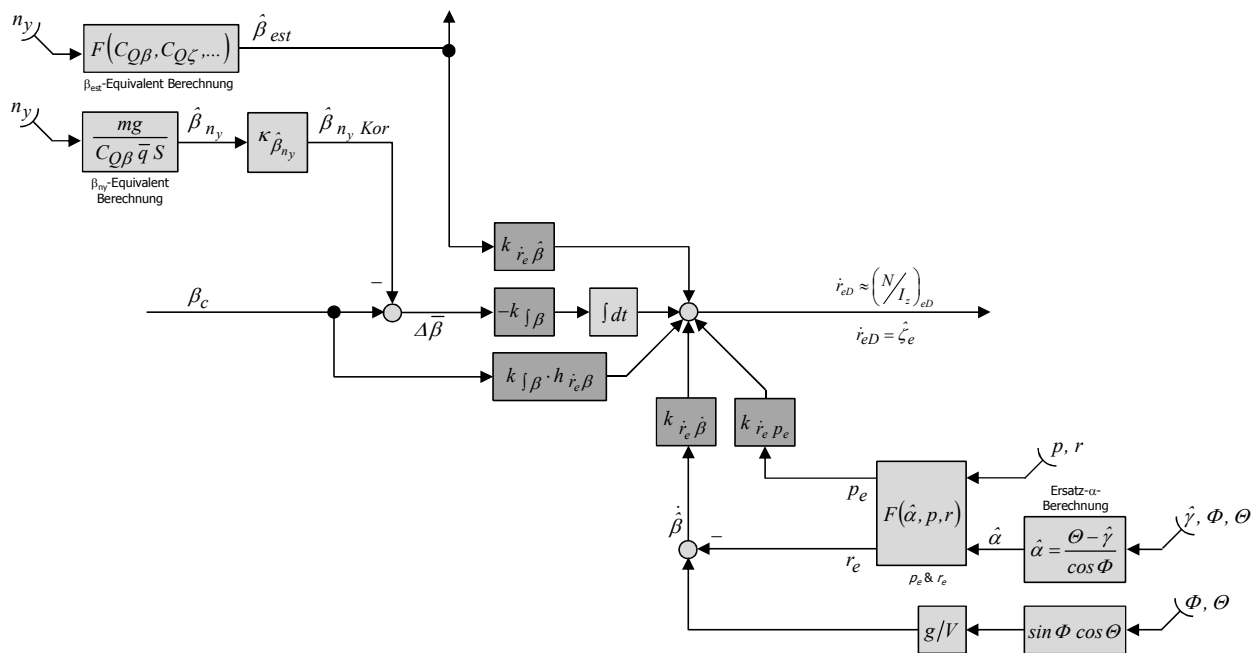


Abbildung 5-5: Gierachsenregler

In Analogie zum Rollachsenregler erfolgt auch beim Gierachsenregler die Rückführung der flugzeugfesten Drehraten bzgl. des experimentellen Koordinatensystems zur Realisierung des Regelungsprozesses im e -System. Durch die Proportionalrückführung von p_e werden Kopplungseffekte des Rollfreiheitsgrades auf die Gierachse unterbunden. Zur Einstellung von Dämpfung und Frequenz der Roll-Gier-Schwingung dienen, unter Berücksichtigung des

Einfluss der Integralrückführung, die Proportionalrückführungen des geschätzten Schiebewinkels $\hat{\beta}_{est}$ und der zu dämpfenden Gierrate $\hat{\beta}$. Die Integration der Regeldifferenz zwischen Führungsgröße β_c und seitenkraftproportionalem Schiebewinkel $\hat{\beta}_{n_y}$ gewährleistet die stationäre Genauigkeit der Gierachsensteuerung. Für den Fall $\beta_c = 0$ ist durch die integrale Rückführung des seitenkraftproportionalen Schiebewinkels $\hat{\beta}_{n_y}$ ein stationär seitenkraftfreier Flugzustand sichergestellt, wodurch eine koordinierte Flugzeugbewegung entsprechend der Entwurfsziele bewirkt wird und insbesondere im stationären Geradeausflug ein Flugzustand ohne Abdrift gewährleistet ist. Dies gilt vor allem vor dem Hintergrund möglicher Asymmetrien des Flugzeugs bzw. des Flugzustands, welche beispielsweise durch einen Schwerpunkt mit seitlicher Abweichung oder asymmetrischem Schub verursacht sein können. Die direkte Aufschaltung der Führungsgröße β_c auf das Ausgangssignal \dot{r}_{eD} (Vorsteuerung) stellt ansprechende Steuerungseigenschaften des Flugzeugs sicher, da dadurch die Verzögerungen, die durch den Integrator entstehen, aufgehoben werden.

Die Einstellung der Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften erfolgt, wie bereits oben angegeben, durch Rückführung der modifizierten Gierrate $\hat{\beta}$. Der Grund, weshalb die modifizierte Gierrate $\hat{\beta}$ und nicht die Gierrate r_e zum Einsatz kommt wird im Folgenden durch eine anschauliche Begründung sowie eine physikalisch-flugmechanischen Analyse dargelegt:

Anschauliche Begründung: Um zu verhindern, dass der Regler gegen die für den koordinierten Kurvenflug bzw. Kurvensteigflug ($n_{y_a} = 0 / \beta \approx 0$) erforderliche Gierrate $r_{e_{TC}}$ wirkt, ist es notwendig, diese vom Rückführsignal r_e abzuziehen ($r_{e\ damp} = r_e - r_{e_{TC}}$). Die Gierrate $r_{e_{TC}}$ wurde in Kapitel 4.2 hergeleitet, sie lautet gemäß Gl. (4.6). Unter Berücksichtigung des für kleine Schiebewinkel ($\beta \approx 0$) gültigen Zusammenhangs $\sin \Phi \cos \Theta \approx \sin \mu \cos \gamma$ (siehe Anhang A.2.2) ergibt sich der zu dämpfende Anteil der Gierrate $\hat{\beta}$ wie folgt:

$$\hat{\beta} = -r_{e\ damp} = -(r_e - r_{e_{TC}}) = -r_e + \frac{g}{V} \cos \Theta \sin \Phi \quad (5.5)$$

Das negative Vorzeichen ist begründet in der Definition des Schiebewinkels und der Gierrate, siehe [1]. In der Reglerstruktur älterer Flugregelungssysteme wurde diese Kompensation durch eine Hochpassfilterung der Gierrate gelöst, wobei sich dadurch beim Ein- und Ausleiten der Kurve ein für den Piloten unangenehmes Verhalten des geregelten Flugzeugs entgegen der abgezielten Gierratenänderung, der sogenannte *Hochpass Kick*, ergibt.

Physikalisch-flugmechanische Analyse: Die Gierrate r_a setzt sich nach Gl. (2.6) wie folgt zusammen:

$$r_a = \underbrace{\frac{g}{V_K} n_{y_a}}_I + \underbrace{\frac{g}{V_K} \sin \mu \cos \gamma}_{II} - \underbrace{\dot{\beta}}_{III} \quad (5.6)$$

Term *I* beschreibt die Gierrate infolge einer kinematischen Seitenbeschleunigung. Daraus resultiert eine Bahnänderung und somit eine Gierrate durch eine Seitenkraft. Eine Gierrate nach

Term *I* ergibt sich beispielsweise beim Ausführen einer sogenannten „Tellerkurve“. Dabei führt das Flugzeug durch einen abgestimmten Ausschlag von Quer- und Seitenruder einen stationären Kurvenflug ohne Hängewinkel ($\Phi = 0$) und konstanten Schiebewinkel β aus. Die für den Kurvenflug erforderliche Seitenkraft wird dabei durch den Schiebewinkel β erzeugt.

Term *II* formuliert die Gierrate, die durch einen Hängewinkel bzw. den Gravitationseinfluss verursacht ist. Führt ein Flugzeug einen stationären und koordinierten Kurvenflug ($n_{yf} = 0 / \beta \approx 0$) durch, kommt es zu einer Gierrate, diese beschreibt Term *II*.

Term *III* repräsentiert die Gierrate aufgrund einer Schiebewinkeländerung, diese kann beispielsweise durch eine seitliche Horizontalböe oder einen Seitenruderausschlag verursacht werden.

Die Dämpfung einer Gierrate infolge einer koordinierten Flugzeugbewegung bzw. im koordinierten Kurvenflug nach Term *II* in Gl. (5.6) ist nicht gewollt, da der Regler entgegen des abgezielten Flugverhaltens wirken würde. Eine Dämpfung der Gierdynamik durch den Regler ist nur für Gierratenanteile aus Term *I* und *III* von Gl. (5.6) erforderlich. Von der zurückgeführten (gesamten) Gierrate ist der Anteil nach Term *II* abzuziehen und somit ergibt sich unter Berücksichtigung des für sehr kleine Schiebewinkel ($\beta \approx 0$) gültigen Zusammenhangs $\sin \Phi \cos \theta \approx \sin \mu \cos \gamma$, vgl. Anhang A.2.2, und unter der gültigen Beziehung $r_a = r_e$, die zu dämpfende Gierrate $\hat{\beta}$ nach Gl. (5.5).

5.6 Messgrößen und Schätzung der Anströmwinkel

Für den Betrieb des Regelungssystems sind folgende flugmechanische Messgrößen erforderlich, vgl. Tabelle 5-1: Seitenkraftlastvielfaches n_{ye} ($n_{ye} = n_{yf}$), Rollrate p , Gierrate r , Hängewinkel Φ , Nickwinkel θ , (geschätzter) Bahnwinkel $\hat{\gamma}$, und Totaldruckdifferenz $p_t - p_s$.

Die normierte Seitenbeschleunigung n_{ye} , die flugzeugfesten Drehraten r und p sowie die Lagewinkel θ und Φ werden beispielsweise durch ein Kurs-Lagereferenzsystem (*Attitude Heading Reference System* kurz *AHRS*), welches heutzutage in jedem modernem Flugzeug der Allgemeinen Luftfahrt verbaut ist, erfasst und ausgegeben. Der geschätzte Bahnwinkel $\hat{\gamma}$ kann aus dem Geschwindigkeitsvektor, welcher von modernen satellitennavigationsgestützten Kurs-Lagereferenzsystemen ausgegeben wird, berechnet werden. Bei einem Ausfall des Bahnwinkels $\hat{\gamma}$ kann zur Abschätzung des Anstellwinkels mit guter Näherung ein konstanter Bahnwinkel angenommen werden. Die Funktion des Regelungssystems ist somit nicht von der Bestimmung des Bahnwinkels $\hat{\gamma}$ abhängig. Als Beispiel für ein satellitennavigationsgestütztes Kurs-Lagereferenzsystem zur Ermittlung des Bahnwinkels $\hat{\gamma}$ kann die *LCR*-Baureihe von der *Northrop Grumman LITEF GmbH* genannt werden. Zur Gewährleistung einer sicherheitskritischen Funktion des Regelungssystems muss (mit Ausnahme des Bahnwinkels) eine entsprechend redundante Messung der genannten Größen vorgesehen werden.

Infolge der hohen Kosten und Komplexität ist die direkte Messung des Anstell- und Schiebewinkels (z.B. mittels Fähnchen- oder Drucksonden) zur Verwendung als rückgeführte

Regelgröße nicht möglich, daher müssen diese für den hier vorgestellten Regler adäquat geschätzt werden.

Der Schiebewinkel β kann in Anlehnung an [30] durch folgenden Zusammenhang bestimmt werden:

$$\hat{\beta}_{est} = \left(\frac{m g n_{ye}}{\bar{q} S} - C_{Q\zeta} \zeta - C_{Qr} r - C_{Qp} p \right) \frac{1}{-C_w + C_{Q\beta}} \quad (5.7)$$

Der zur Schätzung benötigte Seitenruderausschlag ζ sollte als Sensorgröße der Aktuatorelektronik zur Verfügung stehen und kann ggf. durch einfache, kostengünstige und zuverlässig arbeitende Positionssensoren bestimmt werden. Alle anderen erforderlichen Sensorgrößen in Gl. (5.7) werden durch die Basissensorik bereitgestellt. Die notwendigen aerodynamischen Derivativa sind für die modellbasierte nichtlineare Analyse, vgl. Kapitel 8, der Aerodynamikmodellierung entnommen, sie müssen im Rahmen der Flugerprobung validiert oder ggf. neu identifiziert werden, vgl. [29].

Die Schätzung des Anstellwinkels kann mit dem bewährten Zusammenhang in Anlehnung an [30] nach Gl. (5.8) erfolgen, die Herleitung hierzu ist im Anhang A.2.3 zu finden.

$$\hat{\alpha} = \frac{\theta - \hat{\gamma}}{\cos \Phi} \quad (5.8)$$

Die benötigten Sensorgrößen werden von einem satellitennavigationsgestützten Kurs-Lagereferenzsystem, wie bereits diskutiert, ausgegeben.

Zur Gewährleistung eines stationär seitenkraftfreien Flugzustands, der die abgezielte koordinierte Flugzeugbewegung ohne seitliche Abdrift bei einer Führungsgröße von $\beta_c = 0$ sicherstellt, wird für die Integralrückführung des Gierachsenreglers der zur Seitenkraft proportionale Schiebewinkel $\hat{\beta}_{n_y}$ herangezogen. Die Berechnung von $\hat{\beta}_{n_y}$ erfolgt nach Gl. (5.9), vgl. [29]. Dabei wird der Anteil von C_w , welcher sich im Vergleich zu $C_{Q\beta}$ sehr klein ergibt, aufgrund der Integralrückführung vernachlässigt.

$$\hat{\beta}_{n_y} = \frac{m g n_{ye}}{\bar{q} S C_{Q\beta}} \quad (5.9)$$

Die erforderlichen Größen zur Bestimmung von $\hat{\beta}_{n_y}$ werden in Analogie zu Gl. (5.7) ermittelt.

Durch die angegebenen Schätzverfahren ist es möglich, den Anstell- und den Schiebewinkel sowie den seitenkraftproportionalen Schiebewinkel sowohl mit einer entsprechenden Genauigkeit als auch kostengünstig zu bestimmen und dadurch Funktionalitäten zur Sicherung exzellenter Flugeigenschaften für Flugzeuge der Allgemeinen Luftfahrt bedarfsgerecht zu verwirklichen.

6 Reglersynthese (*MR DEA*)

In diesem Kapitel erfolgt die Auslegung der Reglerparameter zur Gewährleistung adäquater Flug- und Handlingeigenschaften mittels der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* (engl. *Model Reference Direct Eigenstructure Assignment*, kurz *MR DEA*).

6.1 Grundgedanke und Randbedingungen der Reglersynthese

Zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren des Seitenbewegungsreglers kann im Vergleich zur Längsbewegung nicht auf klassische Methoden des Reglerentwurfs, wie die Polvorgabe (siehe [22]) bzw. die Polgebietsvorgabe (siehe [31], [32]) zurückgegriffen werden. Dies ist begründet in der Tatsache, dass für Flugzeuge herkömmlicher Bauart die Seitenbewegung (*SBW*) im Gegensatz zur Längsbewegung (*LBW*) über mehr als eine Primärsteuerfläche verfügt (primäre Steuergrößen *LBW*: Höhenruder / *SBW*: Quer- und Seitenruder). Werden im Bereich der (Basis-) Regelung der Längsbewegung konventioneller Flugzeuge die Rückführungen fast durchwegs auf das Höhenruder ausgeführt und der Reglerentwurf mittels Anwendung der Polgebietsvorgabe und unter Einbeziehung von Flugeigenschaftskriterien (*Flying* und *Handling Quality* Kriterien) realisiert, ist dies für die Konzeption des Seitenbewegungsreglers nicht zweckmäßig. Für die Regelung der Seitenbewegung von Flugzeugen bzw. die Regelung von Systemen mit mehr als einer Steuergröße hat sich die (klassische) Eigenstrukturvorgabe als Verfahren zur Reglersynthese bewährt (siehe [33], [34], [35], [36], [37] [38] und [39]). Die Eigenstrukturvorgabe ermöglicht neben der Vorgabe der Lage der Eigenwerte die gezielte Beeinflussung der „*Gestalt*“ der Eigenvektoren und somit die Modifikation des dynamischen Verhaltens eines Systems bzgl. seiner Stabilitätseigenschaften (Eigenwerte) sowie bzgl. der Ausprägung der Eigenmodi hinsichtlich der Anteile der Systemzustände (Eigenvektoren). Die in Kapitel 4.1 entsprechend der Entwurfsziele geforderte Entkopplung von Bewegungs- und Steuerachsen hinsichtlich Roll- und Gierdynamik kann durch die Modifikation der „*Gestalt*“ der Eigenvektoren bzw. der Anteile der beteiligten Zustände durch die Eigenstrukturvorgabe realisiert werden.

Die Festlegung einer gewünschten Eigenstruktur, bestehend aus Eigenwerten und Eigenvektoren der verschiedenen Eigenmodi, ist Ausgangspunkt der Eigenstrukturvorgabe. Die Ausarbeitung einer Eigenstruktur zur Gewährleistung adäquater *Flying* und *Handling Qualities* ist im folgenden Kapitel 6.2 dargelegt. Mittels der Eigenstrukturvorgabe wird unter Berücksichtigung der gewünschten Eigenstruktur und entsprechender Zusatzbedingungen (z.B. „*beste Lösung im quadratischen Mittel*“) die realisierbare Eigenstruktur und die zugehörigen Verstärkungsfaktoren berechnet. Dies erfolgt in den meisten Fällen mittels numerischer Verfahren und wird im

Rahmen der vorliegenden Arbeit als *klassische Eigenstrukturvorgabe* bezeichnet. Die *klassische Eigenstrukturvorgabe* ist infolge der Komplexität der Berechnungsverfahren keine intuitive und nachvollziehbare Methodik, die eine einfache und anschauliche Interpretation der Reglerparameter ermöglicht, und somit unter Berücksichtigung der Entwicklungs- und Kostenrandbedingung für Flugzeughersteller der Allgemeinen Luftfahrt ungeeignet.

Die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* ermöglicht die evidente, analytische und flugmechanisch nachvollziehbare Berechnung der Verstärkungsfaktoren zur Sicherstellung einer bestmöglichen Realisierung der geforderten Eigenstruktur. Für die Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* sind keine speziellen Werkzeuge notwendig und darüber hinaus ist aufgrund der direkt verständlichen physikalischen Wirkungsweise der Verstärkungsfaktoren ein manuelles Nachjustieren möglich. Die einfache Handhabung prädestiniert die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* für die Entwicklung von Flugregelungssystemen für Kleinflugzeuge. Im Allgemeinen betrachtet verursachen die vorgenommenen Vereinfachungen und Annahmen zur Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* für konventionelle Flugzeuge und somit auch für die DA42 einen vernachlässigbar kleinen Fehler. Dies ist bei speziellen Flugzeugkonfigurationen entsprechend zu prüfen und im Gegensatz zur *klassischen Eigenstrukturvorgabe* als Nachteil zu werten. Darüber hinaus ist eine Gewichtung von Entwurfszielen hinsichtlich der „Gestalt“ der Eigenvektoren bei der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* nicht möglich, was ebenfalls eine Einschränkung darstellt. In Kapitel 6.3.2 wird die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* beschrieben, wobei zum Vergleich der Methoden und zum besseren Verständnis in Kapitel 6.3.1 zunächst auf die *klassische Eigenstrukturvorgabe* eingegangen wird. Auf Grundlage der mit *MR DEA* berechneten Verstärkungsfaktoren erfolgt in Kapitel 6.4 die Ausarbeitung eines nachgeführten Reglers für den gesamten Flugbereich. Zur Verifikation des Reglerdesigns und zum Nachweis der Leistungsfähigkeit der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* wird in Kapitel 6.5 eine Analyse der Dynamik des geregelten Systems auf Basis linearer, zeitinvarianter Zustandsraummodelle des geschlossenen Kreises durchgeführt.

Für die Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* sowie für die Einführung der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* und für die Robustheitsanalyse des geregelten Flugzeugs ist es erforderlich, das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises in analytischer Form zu kennen, es wird im Folgenden bestimmt.

Der geschlossene Regelkreis

Entsprechend der in Kapitel 5 beschriebenen Reglerstruktur (Abbildung 5-1) lassen sich unter Berücksichtigung der entkoppelten virtuellen Steuergrößen $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ die Regelgesetze nach Gl. (6.1) und Gl. (6.2) festhalten:

$$\hat{\xi}_e = -k_{\hat{p}_e p_e} \cdot p_e + \int k_{f p_e} \underbrace{(p_{ec} - p_e)}_{=: \hat{x}_{f \Delta p}} dt + k_{f p_e} \cdot h_{\hat{p}_e p_e} \cdot p_{ec} + k_{\hat{p}_e r_e} \cdot r_e + k_{\hat{p}_e \hat{\beta}} \cdot \hat{\beta} \quad (6.1)$$

$$\hat{\zeta}_e = k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} \cdot \dot{\hat{\beta}} - \int k_{f\beta} \underbrace{(\beta_c - \hat{\beta})}_{=: \dot{x}_{f\Delta\beta}} dt + k_{f\beta} \cdot h_{\dot{r}_e \beta} \cdot \beta_c + k_{\dot{r}_e p_e} \cdot p_e + k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} \cdot \hat{\beta} \quad (6.2)$$

Dabei gilt für $\dot{\hat{\beta}}$ entsprechend Gl. (5.5) folgender nichtlinearer Zusammenhang:

$$\dot{\hat{\beta}} = -r_e + \frac{g}{V} \cos \theta \sin \phi \quad (6.3)$$

Für die weitere Betrachtung muss Gl. (6.3) linearisiert werden, sie ergibt sich für $\Phi_0 = 0$ zu:

$$\dot{\hat{\beta}} = -r_e + \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 \Phi \quad (6.4)$$

Unter Berücksichtigung der in Gl. (6.1) und Gl. (6.2) definierten Integratorzustände kann das Regelgesetz in Matrixschreibweise angegeben werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_e \\ \hat{\zeta}_e \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_{\dot{p}_e p_e} & k_{\dot{p}_e r_e} & k_{\dot{p}_e \hat{\beta}} & 0 \\ k_{\dot{r}_e p_e} & -k_{\dot{r}_e \beta} & k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} & k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \hat{\beta} \\ \Phi \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_{f p_e} & 0 \\ 0 & -k_{f \beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{f \Delta p} \\ x_{f \Delta \beta} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_{f p_e} \cdot h_{\dot{p}_e p_e} & 0 \\ 0 & k_{f \beta} \cdot h_{\dot{r}_e \beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{ec} \\ \beta_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_P \mathbf{x} + \mathbf{K}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{H}_P \mathbf{r}$$

Das Zustandsraummodell der unregelmäßigten Strecke mit dem in Kapitel 5 eingeführten Vorsteuergesetz ist durch Gl. (5.4) gegeben. Gemäß der Definition der Integratorzustände (siehe Gl. (6.1) und Gl. (6.2)) lässt sich die zugehörige Integratordynamik in Vektor- bzw. Matrixschreibweise wie folgt angeben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{f \Delta p_e} \\ \dot{x}_{f \Delta \beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \hat{\beta} \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{ec} \\ \beta_c \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{C}_f \mathbf{x} + \mathbf{I} \mathbf{r}$$

Durch Verknüpfung der Gl. (5.4), Gl. (6.5) und Gl. (6.6) unter Beachtung von $\beta \approx \hat{\beta}$ erhält man das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises der Seitenbewegung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{4 \times 1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{f \ 2 \times 1} \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{K}_P]_{4 \times 4} & [\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{K}_f]_{4 \times 2} \\ \mathbf{C}_f_{2 \times 4} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{4 \times 1} \\ \mathbf{x}_{f \ 2 \times 1} \end{pmatrix}_{6 \times 1} + \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{H}_P]_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{r}_{2 \times 1} \quad (6.7)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_{aug} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{aug} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{r}$$

In Abbildung 6-1 ist für verschwindende Anfangsbedingungen das zugehörigen Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises mit Angabe der Matrizen entsprechend Gl. (6.7) gegeben:

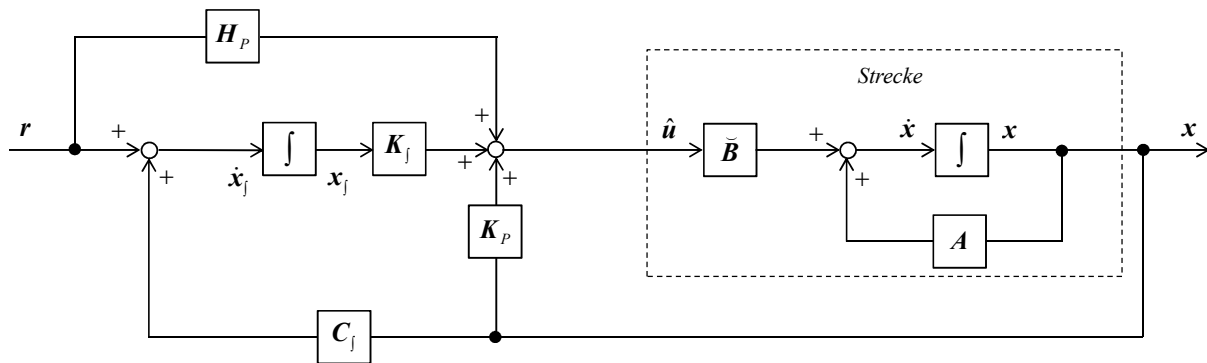


Abbildung 6-1: Gesamtstruktur

6.2 Anforderungen an die Flugdynamik des geregelten Flugzeugs

Die Anforderungen an die Flug- und Handlungseigenschaften des geregelten Flugzeugs und somit die vorgegebene Eigenstruktur teilt sich auf in Forderungen an die Lage der Eigenwerte und die Forderungen an die „Gestalt“ der Eigenvektoren. Im Folgenden werden, auf Grundlage der Entwurfsziele aus Kapitel 4.1 und der Flugeigenschaftsrichtlinien mit der Bezeichnung *Flying Qualities of Piloted Airplanes*, siehe [25] und [26], die Anforderungen an die Eigenmodi (Eigenwerte und Eigenvektoren) zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften diskutiert und festgelegt. Die Flugeigenschaftsrichtlinien [25] und [26] werden üblicherweise als Basis für eine behördliche Zulassung der Flugdynamik reglerunterstützter, bemannter Flugzeuge genutzt.

Die Entwurfsziele der Reglerentwicklung beinhalten eine Koordinierung der Bewegungsachsen durch Entkopplung von Roll- und Gierdynamik und eine neutralstabile Spiralbewegung. Für die Gierdynamik ist die Roll-Gier-Schwingung der maßgebende Eigenmode, wohingegen Eigenwert und Eigenvektor der Rollbewegung entscheidend für die Rolldynamik sind. Die Spiralbewegung ist aufgrund der neutralstabilen Auslegung ausschlaggebend für den stationären koordinierten Kurvenflug und nicht dominant bzgl. des (kurzzeitigen) dynamischen Bewegungsverhaltens des Flugzeugs. Zunächst wird auf die Anforderungen der Eigenwerte und anschließend auf die der Eigenvektoren der Eigenmodi eingegangen.

Die Spezifikation der Gierdynamik, repräsentiert durch das zugehörige Eigenwertpaar der Roll-Gier-Schwingung, erfolgt in Anlehnung an [26] als Verzögerung zweiter Ordnung (PT_2 -Dynamik). Unter Berücksichtigung der gewählten Kommandogrößen und der geforderten stationären Genauigkeit ergibt sich die Übertragungsfunktion der Gierachsen-Kommandogröße β_c auf den Schiebewinkel β gemäß Gl. (6.8) (der Index d steht für gewünscht „demand“ / der Index DR resultiert aus der englischen Bezeichnung der Roll-Gier-Schwingung *Dutch-Roll*).

$$g_{\beta\beta_c,d} = \frac{\omega_{0DR,d}^2}{s^2 + 2\zeta_{DR,d}\omega_{0DR,d}s + \omega_{0DR,d}^2} \quad (6.8)$$

Zur Gewährleistung guter Flugeigenschaften (*Level 1*) der DA42 fordert [25] für die relative Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung $\zeta_{DR} > 0,19$ und für die absolute Dämpfung $\sigma_{DR} = -\zeta_{DR}\omega_{0DR} < -0,35 \text{ s}^{-1}$. Zur Umsetzung adäquater Flugeigenschaften (*Level 1**) ist für

die relative Dämpfung des geregelten Flugzeugs $\zeta_{DR} \approx 0,707$ anzustreben, da dadurch ein optimales Einschwingverhalten sichergestellt ist, vgl. [40]. Für die Analyse des geregelten Flugzeugs wird für die relative Dämpfung zur Erfüllung exzellenter Flugeigenschaften (*Level 1**) der Wertebereich $0,53 < \zeta_{DR} < 0,88$ angenommen und somit wird eine maximale Abweichung von 25% zum Optimalwert als Auslegung auf der sicheren Seite festgelegt. Motiviert werden kann der gewählte Bereich mit der Forderung nach einer minimalen relativen Dämpfung von $\zeta_{DR} = 0,4$, welche einer Abweichung von über 40% des Optimalwerts entspricht und zur Absicherung von *Level 1*-Flugeigenschaften für Hochleistungsflugzeuge in Flugphasen signifikanten Steuerbedarfs gemäß [25] vorgegeben wird. Die Anforderung an die natürliche Frequenz ω_{0DR} der Roll-Gier-Schwingung für gute Flugeigenschaften (*Level 1*) ist entsprechend [25] $\omega_{0DR} > 1$ rad/s, diese wird von der (ungeregelten) *DA42* erfüllt, siehe Kapitel 3. Eine Obergrenze für die natürliche Frequenz ω_{0DR} wird in [25] nicht gegeben. Zur Gewährleistung sehr guter bzw. exzellenter Flugeigenschaften (*Level 1**) kann als obere Grenze der natürlichen Frequenz $\omega_{0DR} \approx 4,5$ rad/s motiviert werden. Eine entsprechende Diskussion und Argumentation ist in Kapitel 3 dargelegt. Die Forderungen an die obere Grenze der natürlichen Frequenz von $\omega_{0DR} \approx 4,5$ rad/s gelten dabei für reglergestützte Flugzeuge ohne modifiziertes Kommandoverhalten, solche Regelungssysteme werden im englischsprachigen als *Stability Augmentation System* kurz *SAS* bezeichnet. Hochgradig reglergestützte Flugzeuge, welche ein grundlegend modifiziertes Kommandoverhalten aufweisen, d.h. der Pilot kommandiert durch einen Stick- oder Pedalausschlag nicht mehr einen Steuerflächenausschlag, sondern direkt einen Flugzustand wie beispielsweise die Rollrate p_e , müssen gesondert betrachtet werden. Derartige Flugregelungssysteme werden im Englischen als *Control and Stability Augmentation Systems*, kurz *CSAS*, benannt. So wird unter Berücksichtigung der Vorgaberegulierung eine begrenzt erhöhte natürliche Frequenz ω_{0DR} als zulässig eingestuft ($\omega_{0DR} < 6$ rad/s), da es infolge des Integrators der Reglerstruktur und des zugehörigen Pols zu einer äquivalenten Verzögerung in der Eigendynamik kommt.

Der Eigenwert der Spiralbewegung sollte aus Gründen der Manövrierbarkeit gemäß [7] ursprungsnah realisiert werden. Nach [25] ist eine begrenzte Instabilität unter Vorgabe der Verdopplungszeit des Hängewinkels für gute Flugeigenschaften (*Level 1*) zulässig, so gilt gemäß [25] für die *DA42* $T_{TD} \geq 20,0$ s und somit für den Eigenwert bzw. Pol der Spiralbewegung $\lambda_{SP} \leq 0,0346$ s⁻¹. Zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften, vor allem in Bezug auf den Steueraufwand im Kurvenflug, ist eine neutrale Spiralbewegung und somit ein im Ursprung liegender Pol umzusetzen, $\lambda_{SP} \approx 0$ s⁻¹. Die Spiralbewegung entspricht somit unter Berücksichtigung der Entkopplung von Roll- und Gierdynamik mit sehr guter Näherung einer reinen Integration der Rollrate p_e . Es sei noch darauf hingewiesen, dass sich die Eigenwerte von Roll- und Spiralbewegung nach [9] zur Sicherstellung guter Manövrierbarkeit nicht zu einem konjugiert komplexen Polpaar vereinen dürfen, weil dies zu einer ungewollten Phygoide der Seitenbewegung führen würde.

Unter Berücksichtigung der geforderten Koordinierung von Roll- und Gierachse und der für exzellente Flugeigenschaften sicherzustellenden neutral ausgelegten Spiralbewegung können in Anlehnung an [26] die Anforderungen an die Dynamik der Rollachse und an den Eigenwert der Rollbewegung durch ein Übertragungsverhalten erster Ordnung (PT_1 -Dynamik) vom Rollkommando p_{ec} auf die Rollrate p_e entsprechend Gl. (6.9) spezifiziert werden:

$$g_{p_e p_{ec}, d} = \frac{1}{T_{R,d} s + 1} \quad (6.9)$$

In Bezug auf die Rollbewegung wird nach [25] zur Sicherstellung guter Flugeigenschaften (*Level 1*) für die *DA42* eine maximal zulässige Rollzeitkonstante $T_R < 1,0$ s $\Leftrightarrow \lambda_{R0} < -1,0$ s $^{-1}$ gefordert. Die Forderungen beziehen sich dabei auf Flugsteuerungssysteme ohne grundlegend modifiziertes Kommandoverhalten (*SAS*-Systeme). Für die *CSAS*-Reglerstruktur kommt es aufgrund des Integrators zu einer äquivalenten Verzögerung der Eigendynamik, welche eine merklich kleinere Rollzeitkonstante rechtfertigt. Um ein homogenes und antizipierbares Flugverhalten bzgl. der Rollbewegung zu gewährleisten, muss ferner die Streuung der Rollzeitkonstante über den Staudruck und somit über die Envelope (siehe Abbildung 3-1) durch das Regelungssystem reduziert werden.

Die Anforderungen an die Ausprägung der Eigenvektoren zur Generierung adäquater Handlingeigenschaften lassen sich aus dem in Kapitel 4.1 geforderten Entwurfsziel nach einer koordinierten Flugzeugbewegung (Rolldynamik) nebst entkoppelter Gierbewegung ableiten. So muss die Ausprägung des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung ohne Zustände der Rollachse (p_e, Φ) realisiert und der Rollbewegungs-Eigenvektor ohne Zustände der Gierachse (r_e, β) umgesetzt werden. Im Vorfeld der Festlegung der finalen Anforderungen an die Eigenvektoren und Eigenwerte wird jedoch zunächst auf bewährte Lösungen und weitere Randbedingungen zur Spezifikation der Eigenvektoren und der grundsätzlichen Vorgehensweise zur Vorgabe der finalen Eigenstruktur eingegangen.

Für angemessene Flug- bzw. Handlingeigenschaften in Bezug auf die Eigenvektoren kann nach [9], [38] und [41] eine weitgehende Entkopplung von Roll- und Gierdynamik angenommen werden. So muss der Schiebewinkelanteil im Eigenvektor der Spiralbewegung und der Rollbewegung klein bzw. null sein. Im Gegensatz dazu sollen der Hängewinkelanteil der Spiralbewegung und der Rollratenanteil bei der Rollbewegung entsprechend dominant auftreten. In Bezug auf den Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung werden bei [41] und [9] unterschiedlich priorisierte Anforderungen festgelegt. Während [41] den Schiebewinkelanteil als dominant betrachtet, einen festen Wert ungleich null für den Hängewinkelanteil fordert und Roll- und Gierratenanteil unberücksichtigt bleiben, verlangt [9] einen Hängewinkel- und Rollratenanteil von null und lässt Gierraten- und Schiebewinkelanteil unberücksichtigt, um somit die gewollte Roll-Gier-Entkopplung zu realisieren. In [42] wird für Flugzeuge mit *SAS* (reglergestützte Flugzeuge) bzgl. der Roll-Gier-Schwingung ebenfalls ein Hängewinkelanteil ungleich null und somit eine gezielte aber begrenzte Schiebewinkel-Roll-Kopplung gefordert.

Für Flugzeuge mit *CSAS* (hochgradig reglergestützte Flugzeuge) ist nach [42] eine Entkopplung der Gierdynamik von den Zuständen der Rollachse, d.h. ein Hängewinkel- und Rollratenanteil von null bzgl. des Eigenvektores der Roll-Gier-Schwingung, durchaus gewünscht. Darüber hinaus haben Flugtests mit weniger geübten Piloten im *D-SIM-42* Flugsimulator (*DA42 Flight Training Device*) gezeigt, dass insbesondere Piloten mit geringer Flugerfahrung eine Entkopplung von Roll- und Gierdynamik entsprechend den Entwurfszielen bevorzugen. Dies deckt sich mit der Forderung nach [9] an den Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung. Diese Forderung stimmt ebenfalls mit [25] überein. In [25] wird ein $L_\beta \leq 0$ für gute Flugeigenschaften gefordert und somit ist eine Roll-Gier-Kopplung $|\Phi/\beta|$, welche nach Gl. (6.10) genähert werden kann (vgl. [7], [9] und [41]), von null zur Erfüllung von *Level 1* Anforderungen zulässig.

$$\left| \frac{\Phi}{\beta} \right| \approx \left| \frac{L_\beta}{N_\beta} \right| \quad (6.10)$$

Die Festlegung der finalen Anforderungen, insbesondere an die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises, muss unter Berücksichtigung der Dynamik des unregulierten Flugzeugs, d.h. der Lage der Pole des offenen Regelkreises, sowie der zur Verfügung stehenden Stelldynamik (Aktuatorik) und Steuerautorität (Wirkungsweise der Steuerflächen) erfolgen. Aufgrund der begrenzten Stelldynamik und Steuerautorität ist es nicht möglich, die Pole des geschlossenen Regelkreises beliebig in der komplexen Ebene zu konfigurieren. Da die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* keine Auslegungsmethode ist, welche die Robustheit des Entwurfs berücksichtigt, muss die Ausarbeitung der finalen Anforderungen an die Eigenstruktur des geregelten Systems auch unter Berücksichtigung der *SISO*- und *MIMO*-Robustheitsanalyse erfolgen. Es hat sich folgende iterative Vorgehensweise zur Ausarbeitung des finalen Reglers als sinnvoll erwiesen: In einem ersten Schritt erfolgt die Definition der initialen Anforderung an die Eigenstruktur, insbesondere an die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises. Ist die Lageänderung der Eigenwerte des unregulierten Flugzeugs über den gesamten Flugbereich und somit in Abhängigkeit des Staudrucks signifikant, was auf die *DA42* für die Roll-Gier-Schwingung und die Rollbewegung zutrifft (siehe Kapitel 3), so sollte bei der Festlegung der Anforderungen eine angepasste Variation der Eigenwerte des geregelten Flugzeugs über die Envelope – aus oben genannten Gründen – vorgesehen werden. In einem zweiten Schritt erfolgt nach Bestimmung der Verstärkungsfaktoren die Berechnung der Eigenstruktur des geschlossenen Regelkreises unter Berücksichtigung der Aktuatordynamik. Werden die Anforderungen an die Flugeigenschaften erfüllt und somit die gewünschte Eigenstruktur realisiert, so ist Schritt zwei abgeschlossen. Im dritten und letzten Schritt erfolgt die *SISO*- und *MIMO*-Robustheitsanalyse. Werden hier die Anforderungen an die Robustheit nachgewiesen, so ist der finale Regler gefunden, wenn nicht, müssen entsprechend Schritt eins die Anforderungen innerhalb der angegebenen Bereiche modifiziert und der Prozess von vorne begonnen werden.

Geforderte Eigenstruktur					
Eigenform	Spiralbewegung	Rollbewegung		Roll-Gier-Schwingung	
Gewünschter Eigenwert	$\lambda_{s_d} \approx 0 \text{ s}^{-1}$	bei q_{min} λ_{R_d} $\approx (-7 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	bei q_{max} λ_{R_d} $\approx (-16 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	bei q_{min} $\omega_{0 DR_d} \approx 2,5 \text{ s}^{-1}$ $\zeta_{DR_d} \approx 0,71$	bei q_{max} $\omega_{0 DR_d} \approx 6,0 \text{ s}^{-1}$ $\zeta_{DR_d} \approx 0,71$
Gewünschter Eigenvektor	r_e	x	0	x	
	β	≈ 0	0	x	
	p_e	≈ 0	x	0	
	ϕ	x	x	0	
	$x_{f \Delta p}$	-	-	-	
	$x_{f \Delta \beta}$	-	-	-	
x \cong Eintrag mit Wert ungleich null 0 \cong Eintrag mit geforderten Wert null - \cong keine Forderung					
Gewünschter Eigenwert der Integratoren	Rollintegrator		Gierintegrator		
	bei q_{min} $\lambda_{I R_d}$ $\approx (-1,75 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	bei q_{max} $\lambda_{I R_d}$ $\approx (-4 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	bei q_{min} $\lambda_{I G_d}$ $\approx (-0,5 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	bei q_{max} $\lambda_{I G_d}$ $\approx (-1,0 \pm 0 j) \text{ s}^{-1}$	

Tabelle 6-1: Geforderte Eigenstruktur für exzellente Flugeigenschaften

In Tabelle 6-1 sind die finalen Anforderungen an die Flugdynamik für den Reglerentwurf spezifiziert. Die Festlegung der Eigenwerte von Spiral- und Rollbewegung sowie Roll-Gier-Schwingung erfolgt dabei in Übereinstimmung mit den Anforderungen an *Level 1* Flugeigenschaften, unter Beachtung der zuvor argumentierten Sachverhalte, insbesondere der speziellen Eigenschaften einer durch Integratoren modifizierten Eigendynamik. Die Spezifikation der Ausprägung der Eigenvektoren basiert auf der geforderten koordinierten Flugzeugbewegung, welche durch Entkopplung von Bewegungs- und Steuerachsen hinsichtlich des e -Systems umzusetzen ist. Dabei sind bzgl. des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung die diskutierten Randbedingungen der Flugeigenschaftsrichtlinien nach [25] zur Roll-Gier-Kopplung $|\Phi/\beta|$ zu berücksichtigen, welche mit $|\Phi/\beta| = 0$ für *Level 1* erfüllt sind. Für die Anteile der Zustände der Rollachse p_e und Φ ergibt sich somit bzgl. der Roll-Gier-Schwingung, welche der Gierachsendynamik zuzuordnen ist, ein Wert von null, siehe Tabelle 6-1. In Analogie dazu sind die Anteile der Zustände der Gierachse r_e und β bzgl. der Rollbewegung, welche der Rollachsendynamik zuzuordnen ist, auf einen Wert von null festzulegen, siehe Tabelle 6-1. Ausgehend vom horizontalen, stationären Kurvenflug ($\gamma = 0$), dessen Ausführung nach Kurveneinleiten keiner weiteren lateralen Steuereingaben bedarf, ergibt sich für den Eigenvektor der Spiralbewegung bzgl. der Anteile des Schiebewinkel β und Rollrate p_e ein Wert von null. Zur Gewährleistung eines koordinierten Kurvenflugverhaltens, d.h. ohne Abtrieb bzw. ohne Seitenkraft ($n_{y_f} = 0$), ist jedoch für Flugzeuge konventioneller Bauart aufgrund der Flugmechanik ein marginaler Schiebewinkel zum Ausgleich der Seitenkraft notwendig. Aufgrund dessen ergibt sich für die Anteile bzgl. des Schiebewinkels β und der Rollrate p_e ein

Wert von ≈ 0 , siehe Tabelle 6-1. Abschließend erfolgt die Spezifikation der Anforderungen an die Eigenwerte der Integratoren. Diese werden üblicherweise im Bereich $\lambda_l = (-1 \pm 0j) s^{-1}$ vorgesehen und gegebenenfalls zur Unterbindung möglicher konjugierter Polpaare davon (mäßig) abweichend festgelegt.

6.3 Eigenstrukturvorgabe

Die Eigenstrukturvorgabe gestattet bei Vorhandensein von mehr als einer (unabhängigen) Steuergröße, neben der Modifikation der Lage der Eigenwerte (d.h. Anpassung von Dämpfung, Frequenz sowie Zeitkonstante), die gezielte Beeinflussung der Eigenvektoren. Dadurch können direkt die aus den Anforderungen zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften motivierten Vorgaben an die Ausprägung der Eigenmodi bzgl. der Anteile der Systemzustände umgesetzt werden. In Kapitel 6.1 wurde darauf bereits detailliert eingegangen. Im Folgenden wird eine ausführliche Beschreibung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe*, mittels derer die Auslegung der Reglerparameter durchgeführt wurde, vorgestellt. Zuvor wird zum besseren Verständnis und zur Demonstration der Vorteile der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* die *klassische Eigenstrukturvorgabe* beschrieben.

6.3.1 Klassische Eigenstrukturvorgabe

In diesem Teilkapitel wird eine kurze Beschreibung der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* gegeben, die Ausführung erfolgen dabei in Anlehnung an [9], [33] und [31]. Eine Abhandlung zur Theorie der Eigenstrukturvorgabe ist in [39], [43] und [44] zu finden.

Geht man davon aus, dass die zu regelnde Strecke vollständige Zustandssteuerbarkeit besitzt, so können durch die „*Formel von J. Ackermann*“, [22] (siehe auch *Polvorgabe nach Ackermann*, [45]) mittels der Rückführung aller n Zustandsvariablen auf eine Steuergröße, alle Eigenwerte des Systems beliebig in der komplexen Ebene platziert werden. Sind mehrere unabhängige Steuergrößen k (hier Quer- und Seitenruder, $\tilde{\mathbf{B}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{B}}$ besitzen vollen Spaltenrang k) verfügbar, so kann durch die zusätzlichen Steuerfreiheitsgrade die „*Gestalt*“ der Eigenvektoren bzgl. der beteiligten Systemzustände beeinflusst werden. Da in der Realität oftmals nicht der gesamte Zustandsvektor gemessen werden kann, also nur eine Ausgangsrückführung mit l Messgrößen von n Systemzuständen möglich ist, lassen sich l der n Eigenwerte λ_i und jeweils k Elemente der zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$ modifizieren. Im Vergleich zu nur einer Stellgröße ergeben sich somit $l \cdot (k - 1)$ zusätzlich beeinflussbare Entwurfparameter, vgl. [9]. In der folgenden Betrachtung wird in Anlehnung an die Reglerstruktur die Eigenstrukturvorgabe für eine Zustandsrückführung betrachtet, somit gilt $\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Basis für die Durchführung der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* ist das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises, siehe Gl. (6.7). Zur besseren Nachvollziehbarkeit und in Analogie zum Regelgesetz nach Gl. (6.5) wird die folgende Eigenstrukturvorgabe mit expliziter

Betrachtung von Flug- und Integratorzuständen durchgeführt. Anhand der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des geschlossenen Regelkreises (siehe Gl. (6.7)) wird eine Eigenwert-/Eigenvektorberechnung (Modalanalyse) durchgeführt.

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \tilde{\mathbf{v}}_i \quad (6.11)$$

Unter Berücksichtigung der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ aus Gl. (6.7) erhält man:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{C}_f_{2 \times 4} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P_{2 \times 4} & \mathbf{K}_f_{2 \times 2} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{i_{4 \times 1}} \\ \mathbf{v}_{f_{i_{2 \times 1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{i_{4 \times 1}} \\ \mathbf{v}_{f_{i_{2 \times 1}}} \end{pmatrix} \lambda_i \quad (6.12)$$

Hierbei stehen $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{f_i})^T = \tilde{\mathbf{v}}_i^T$ und λ_i für die gewünschte vorzugebende i -te Eigenform bestehend aus Eigenwert und Eigenvektor. Durch Umformung ergibt sich:

$$\left(\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.13)$$

Es wird die Definition nach Gl. (6.14) eingeführt:

$$\mathbf{z}_i := - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Das in Gleichung (6.14) definierte \mathbf{z}_i wird auch als *Eingangsrichtung (Input Direction)* bezeichnet, da der Eingang $\mathbf{u}(t)$ (der zu regelnden Strecke) zwangsläufig in dem von den Vektoren \mathbf{z}_i ($\mathbf{z}_i = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}_i$) aufgespannten Raum (*Eingangsraum*) liegt (siehe Anhang A.5). Dabei gilt aufgrund der hier angewendeten Zustandsrückführung $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Analog zu dieser Definition ergibt sich der Ausgang $\mathbf{y}(t)$ in dem von den Vektoren $\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_i$ aufgespannten Raum (*Ausgangsraum*, siehe Anhang A.5). Unter Verwendung der Eingangsrichtung \mathbf{z}_i gemäß Gl. (6.14) erhält man aus Gl. (6.13) die Beziehung nach Gl. (6.15).

$$\underbrace{\left(\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{P}_v} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

Der Zusammenhang aus Gl. (6.15) kann in ein homogenes lineares Gleichungssystem (*HLGS*), welches „unterbestimmt“ ist, überführt werden:

$$\left[\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right]_{6 \times 8} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \\ \mathbf{z}_i \end{pmatrix}_{8 \times 1} = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

Für alle nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystem gilt,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \\ \mathbf{z}_i \end{pmatrix} \in \text{Ker} \left[\underbrace{\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_{vz}} \right], \quad (6.17)$$

d.h. alle nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystem liegen im Kern bzw. Nullraum der Matrix \mathbf{P}_{vz} .

Die Gesamtheit der nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystem spannt einen $n + k$ - bzw. 8-dimensionalen (hier $n = 6/k = 2$) Vektorraum (Nullraum von \mathbf{P}_{vz}) auf. In diesem Vektorraum

liegt ein n - bzw. 6-dimensionaler Unterraum \mathbf{N}_{λ_i} , dessen Basis die ersten n bzw. 6 Zeilen des Nullraums von \mathbf{P}_{vz} bilden (siehe [9]). Daraus, und unter Berücksichtigung von Gl. (6.17), folgt: Alle zu den Eigenwerten λ_i erreichbaren (realisierbaren) Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$ liegen in dem Vektorraum \mathbf{N}_{λ_i} .

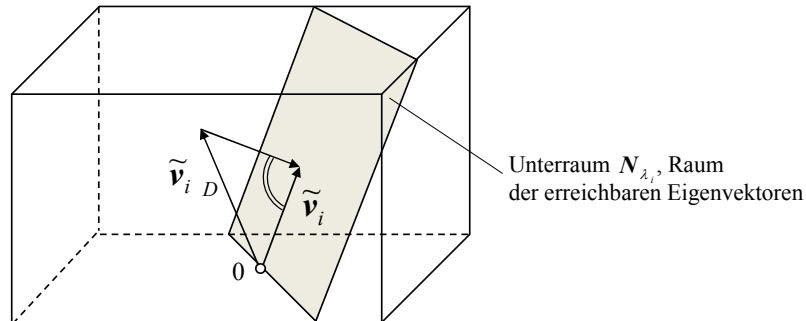


Abbildung 6-2: Unterraum \mathbf{N}_{λ_i}

Der Nullraum wird im Allgemeinen numerisch über die Singulärwertzerlegung bestimmt, vgl. [9]. Besitzt die Steuermatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ vollen Spaltenrang, die Ausgangsmatrix \mathbf{C} vollen Zeilenrang und sind die vorzugebenden Eigenwerte λ_i nicht mit einem Pol des offenen Kreises identisch, lässt sich der erreichbare Eigenvektorraum \mathbf{N}_{λ_i} analytisch berechnen, vgl. [9]. Verfügt das System über linear unabhängige Steuer- und Messgrößen, so ist die Bedingung eines vollen Spaltenrangs der Steuermatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{B}}$ und eines vollen Zeilenrangs der Ausgangsmatrix \mathbf{C} (hier $\mathbf{C} = \mathbf{I}$) erfüllt. Mit der Voraussetzung, dass die vorzugebenden Eigenwerte λ_i nicht mit einem Pol des offenen Kreises identisch sind, wird sichergestellt, dass die Matrix \mathbf{P}_v invertierbar ist. Aus Gl. (6.15) ergibt sich unter Berücksichtigung der genannten Bedingungen eine analytische Lösung nach Gl. (6.18):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{f_i} \end{pmatrix} = - \left[\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}_i \quad (6.18)$$

Durch Substitution erhält man:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i_{6 \times 1}} = \mathbf{N}_{\lambda_i_{6 \times 2}} \mathbf{z}_{i_{2 \times 1}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}_{\lambda_i} = - \left[\lambda_i \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Aus Gl. (6.19) ist ersichtlich, dass die Anzahl der unabhängigen Steuergrößen k und somit der Spaltenrang der Steuermatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ die Dimension des Unterraums \mathbf{N}_{λ_i} festlegt, vgl. [9]. Wird nun ein Eigenvektor $\tilde{\mathbf{v}}_i$ vorgegeben, welcher im Unterraum \mathbf{N}_{λ_i} liegt, kann dieser und der dazugehörige Eigenwert λ_i über die Rückführmatrix $[\mathbf{K}_p \quad \mathbf{K}_f]$ exakt dem System aufgeprägt werden, vgl. [9].

Ziel der *Eigenstrukturvorgabe* ist es jedoch, durch Anforderungen an die Flugdynamik entsprechend der Entwurfsziele und den Flugeigenschaftsrichtlinien, motivierte Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{i_D}$ (Index D steht für gewünscht, „demand“), welche im Allgemeinen nicht im Unterraum \mathbf{N}_{λ_i} liegen, umzusetzen, vgl. [9]. Als beste Näherung im quadratischen Mittel werden deshalb die

orthogonalen Projektionen der gewünschten Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{i_D}$ in den Nullraum bestimmt und dem System aufgeprägt, siehe Abbildung 6-2.

Dazu wird mittels der Pseudoinversen von \mathbf{N}_{λ_i} die Eingangsrichtung \mathbf{z}_i zum orthogonal projizierten Eigenvektor $\tilde{\mathbf{v}}_{i_D}$ bestimmt:

$$\mathbf{z}_{i_{2 \times 1}} = \mathbf{N}_{\lambda_i}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{i_{4 \times 1}} \\ \mathbf{v}_{f_{i_{2 \times 1}}} \end{pmatrix}_D \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{z}_{i_{2 \times 1}} = \mathbf{N}_{\lambda_i}^+ \tilde{\mathbf{v}}_{i_D} \quad (6.20)$$

Hierbei ist $\mathbf{N}_{\lambda_i}^+$ die Moore-Penrosesche Pseudoinverse von \mathbf{N}_{λ_i} , sie wird wie folgt berechnet:

$$\mathbf{N}_{\lambda_i}^+ = (\mathbf{N}_{\lambda_i}^H \mathbf{N}_{\lambda_i})^{-1} \mathbf{N}_{\lambda_i}^H \quad (6.21)$$

Dabei sei berücksichtigt, dass die Berechnung der (Moore-Penroseschen) Pseudoinversen (siehe [46]) mit der Zusatzbedingungen „beste Lösung im quadratischen Mittel“ erfolgt, was der Projektion des Abbildungsvektors (hier $\tilde{\mathbf{v}}_{i_D}$) in den Unterraum \mathbf{N}_{λ_i} entspricht.

Mittels der Gewichtungsmatrix \mathbf{Q}_{λ_i} ist es möglich, einzelne Elemente des gewünschten Eigenvektors zu „betonen“ (siehe [9]), somit gilt für $\mathbf{N}_{\lambda_i}^+$:

$$\mathbf{N}_{\lambda_i}^+ = (\mathbf{N}_{\lambda_i}^H \mathbf{Q}_{\lambda_i} \mathbf{N}_{\lambda_i})^{-1} \mathbf{N}_{\lambda_i}^H \mathbf{Q}_{\lambda_i} \quad (6.22)$$

Mit Gleichung (6.20) kann unter Verwendung von Gl. (6.22) bzw. Gl. (6.21), wie bereits beschrieben, die realisierbare bzw. erreichbare Eingangsrichtung \mathbf{z}_i auf Basis der gewünschten bzw. spezifizierten Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{f_i})_D^T = \tilde{\mathbf{v}}_{i_D}^T$ und Eigenwerte λ_i berechnet werden. Die dazugehörigen erreichbaren Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{f_i})^T = \tilde{\mathbf{v}}_i^T$, welche mit der berechneten Eingangsrichtung \mathbf{z}_i korrespondieren, also die zu den gewünschten Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{i_D}$ dazugehörigen realisierbaren Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$, können mit Gl. (6.18) berechnet werden.

Die Rückführverstärkung \mathbf{K} bzw. $[\mathbf{K}_P \quad \mathbf{K}_f]$ berechnet sich abschließend unter Verwendung aller erreichbaren Eingangsrichtungen \mathbf{z}_i und der zugehörigen erreichbaren Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$ gemäß Gl. (6.23).

$$[\mathbf{K}_{P_{2 \times 4}} \quad \mathbf{K}_{f_{2 \times 2}}] = -[\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_6]_{2 \times 6} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_6 \\ \mathbf{v}_{f_1} & \mathbf{v}_{f_6} \end{bmatrix}_{6 \times 6}^{-1} \quad (6.23)$$

Als letztes wird $[\mathbf{K}_P \quad \mathbf{K}_f]$ in den geschlossenen Regelkreis eingesetzt und man bestimmt die finalen Eigenvektoren und Eigenwerte, dabei ist zu berücksichtigen, dass bei der hier vorgestellten *klassischen Eigenstrukturvorgabe* ggf. einzelne Rückführungen entsprechend der spezifizierten Regelstruktur nicht vorhanden sind und das dazugehörige Element der Verstärkungsmatrix $[\mathbf{K}_P \quad \mathbf{K}_f]$ zu null gesetzt werden muss. Zieht man die in Kapitel 5 beschriebene Regelstruktur und das dazugehörige Regelgesetz nach Gl. (6.5) heran, so gilt dies für die nicht-vorhandene Rückführung des Hängewinkels auf das virtuelle „Ersatzruder“ $\hat{\xi}_e$.

Für die Durchführung der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* ist, wie bereits oben angesprochen, die rechnergestützte Bestimmung der Pseudoinversen erforderlich. Durch die Berechnung der Pseudoinversen und der durchzuführenden Nullraumprojektion ist bei Anwendung der

klassischen Eigenstrukturvorgabe der Einfluss der Verstärkungsfaktoren auf die $\tilde{\mathbf{A}}$ -Matrix des geschlossenen Regelkreises und somit auf die Stabilitäts- und Flugeigenschaftsparameter nicht direkt interpretierbar bzw. nachvollziehbar. Diese Einschränkungen wirkten sich nachteilig auf eine einfache und intuitive Handhabung aus. Des Weiteren entspricht bei der hier vorgestellten *klassischen Eigenstrukturvorgabe* die berechnete, realisierbare Eigenstruktur oftmals nicht der final umsetzbaren Eigenstruktur, da häufig nicht alle Ausgangsgrößen auf alle Steuergrößen zurückgeführt werden (hier: Φ wird nicht auf \dot{p}_{eD} zurückgeführt), d.h. ausgesuchte Elemente der \mathbf{K} -Matrix müssen in Folge der fehlenden Rückführung zu null gesetzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde aufgrund der beschriebenen Einschränkungen eine anschauliche, einfache und intuitive Methodik zur Umsetzung einer vorgegebenen Eigenstruktur entwickelt. Sie wird als *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* bzw. im englischen als *Model Reference Direct Eigenstructure Assignment* kurz *MR DEA* bezeichnet und im nächsten Kapitel vorgestellt. Sie eignet sich aufgrund ihrer direkten und anschaulichen flugmechanischen Interpretierbarkeit sowie ihrer intuitiven, zeit- und aufwandsreduzierten Umsetzung ideal für die Entwicklung von Flugregelungsalgorithmen kleiner und mittelgroßer Flugzeuge.

6.3.2 Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe (MR DEA)

In diesem Abschnitt wird die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe (MR DEA)* eingeführt und detailliert dargelegt, eine erstmalige Vorstellung erfolgte im Rahmen einer eigenen Veröffentlichung in [29], die Beschreibungen in Kapitel 6.3.2 lehnen sich daran an. Eine artverwandte Vorgehensweise zur Umsetzung der Eigenstrukturvorgabe wird von Garrard in [42] thematisiert, jedoch ist auch hierbei die Berechnung einer Pseudoinversen, in diesem Fall der Steuermatrix \mathbf{B} , erforderlich. Grundlage der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* ist das lineare, zeitinvariante Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises nach Gl. (6.7).

In Anbetracht der detaillierten Systemkenntnis im Bereich der Flugdynamik von Flugzeugen und deren Beschreibung mittels linearer, zeitinvarianter Zustandsraummodelle kann unter Berücksichtigung der in Kapitel 6.2 festgelegten Anforderungen an die Flugeigenschaften respektive der spezifizierten Eigenstruktur ein Referenzmodell bzw. eine Referenzdynamik in Form der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und der Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ des geregelten Flugzeugs erstellt werden, welches adäquate Flugeigenschaften gewährleistet.

In Gl. (6.24) ist das Zustandsraummodell der Seitenbewegung des geregelten Flugzeugs, welches sich aus Gl. (6.7) bestimmen lässt, mit nach Roll- und Gierachse geordneten Zuständen angegeben. Zur Berechnung eben dieses Zustandsraummodells wurden die Seitenkraftersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ der virtuellen Steuerflächen $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ der $\tilde{\mathbf{B}}$ Matrix zu null gesetzt. Der Betrag dieser Derivativa ist im Vergleich zu den anderen Elementen der \mathbf{A} - und $\tilde{\mathbf{B}}$ -Matrix sehr klein, siehe Kapitel 5.2, d.h. die unerwünschte Induktion einer Seitenkraft ($\sim \beta$) durch eine Ansteuerung der Ersatzrudder $\hat{\xi}_e$ und $\hat{\zeta}_e$ aufgrund der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ kann

für den Reglerentwurf vernachlässigt werden. Die Zulässigkeit der vorgenommenen Vereinfachung wird im Rahmen der linearen und nichtlinearen Analyse des geregelten Flugzeugs (Kapitel 6.5 und Kapitel 8) nochmals explizit verifiziert und bestätigt. Ferner werden für die Durchführung der linearen Reglersynthese die Abweichungen zwischen realen und geschätzten Schiebewinkeln β , $\hat{\beta}_{est}$ und $\hat{\beta}_{n_y}$ vernachlässigt und nur durch den Schiebewinkel β berücksichtigt. Die Gültigkeit dieser Vereinfachung wird ebenfalls durch die in Kapitel 8 durchgeführte nichtlineare Analyse nachgewiesen.

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{x}_{f \Delta \beta} \\ \dot{p}_e \\ \dot{\Phi} \\ \dot{x}_{f \Delta p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_r - k_{\dot{r}_e \beta} & N_\beta + k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} & -k_{f \beta} & N_p + k_{\dot{r}_e p_e} & k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 & 0 \\ Y_r - 1 & Y_\beta & 0 & Y_p & \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_r + k_{\dot{p}_e r_e} & L_\beta + k_{\dot{p}_e \hat{\beta}} & 0 & L_p - k_{\dot{p}_e p_e} & 0 & k_{f p_e} \\ \frac{\sin \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 & \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} r_e \\ \beta \\ x_{f \Delta \beta} \\ p_e \\ \Phi \\ x_{f \Delta p} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k_{f \beta} \cdot h_{r_e \beta} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_{f p_e} \cdot h_{\dot{p}_e p_e} & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \begin{pmatrix} p_{ec} \\ \beta_c \end{pmatrix}$$

Die Bestimmung des Zustandsraummodells des geregelten Flugzeugs nach Gl. (6.24) erfolgt unter Berücksichtigung der in Kapitel 5.2 eingeführten *Control Allocation*, welche in Form einer Vorsteuerung umgesetzt ist. Die Berechnung der Verstärkungsfaktoren $h_{\xi \dot{p}_e}$, $h_{\xi \dot{r}_e}$, $h_{z \dot{p}_e}$, und $h_{z \dot{r}_e}$ der Steuerkoordinierung ergibt sich nach Gl. (5.3). Im Folgenden wird nun auf die Bestimmung der proportionalen und integralen Verstärkungsfaktoren (\mathbf{K}_p - und \mathbf{K}_f -Matrix) eingegangen.

Bzgl. der in Gl. (6.24) angegebenen $\tilde{\mathbf{A}}$ -Matrix kann die gewünschte Referenzdynamik zur Generierung adäquater Flugeigenschaften spezifiziert werden und im Anschluss die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren auf Basis der sogenannten Methode der äquivalenten (Ersatz-) Derivativa, vgl. [31], durchgeführt werden. Teilt man die $\tilde{\mathbf{A}}$ -Matrix entsprechend der Roll- und Gierdynamik auf, dies ist in Abbildung 6-3 durch die gestrichelt dargestellten Linien gekennzeichnet, so können die einzelnen Teilmatrizen wie folgt interpretiert werden: Die linke obere Teilmatrix repräsentiert die Bewegung um die Gierachse z_e (Gierdynamik), zu der die Zustände r_e , β und $x_{f \Delta \beta}$ gehören. Die Einflüsse der Rollachse auf die Gierachse werden durch die rechte obere Teilmatrix wiedergegeben. Die Querkopplung der Gierbewegung auf die Rollachse repräsentiert die linke untere Teilmatrix. Die Dynamik um die Rollachse x_e (Rolldynamik) wird durch die rechte untere Matrix abgebildet, deren Zustände p_e , Φ und $x_{f \Delta p}$ sind.

Um eine Entkopplung der Rolldynamik von der Gierdynamik zu erreichen, werden die Verstärkungsfaktoren $k_{\dot{p}_e r_e}$ und $k_{\dot{p}_e \hat{\beta}}$ so gewählt, dass die Einträge $(L_r + k_{\dot{p}_e r_e})$ und $(L_\beta + k_{\dot{p}_e \hat{\beta}})$

der \tilde{A} -Matrix (bezeichnet mit 1 und 2 in Abbildung 6-3) zu null werden, sie ergeben sich somit wie folgt:

$$k_{\dot{p}_e r_e} = -L_r \quad (6.25)$$

$$k_{\dot{p}_e \hat{\beta}} = -L_\beta \quad (6.26)$$

Abbildung 6-3: Referenz \tilde{A} -Matrix des geschlossenen Regelkreises

Der Zusammenhang nach Gl. (6.25), welcher aus dem mit 1 bezeichneten Matrixelement in Abbildung 6-3 resultiert, stellt sicher, dass es in Folge einer Gierrate zu keiner Rollbeschleunigung bzw. Rollrate und somit keinem Hängewinkel kommt. Durch Gl. (6.26), welche aus dem mit 2 gekennzeichneten Matrixelement in Abbildung 6-3 resultiert, ist gewährleistet, dass ein Schiebewinkel zu keiner Rollbeschleunigung und folglich keinem Hängewinkel führt. Die bewirkte Entkopplung der Rolldynamik von den Zuständen der Gierachse kann direkt aus den Forderungen an die Eigenstruktur, vgl. Kapitel 6.2 und Tabelle 6-1, zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften abgeleitet werden. Dort ist bzgl. des Hängewinkel- und Rollratenanteils des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung ein Anteil von null festgelegt. Durch die Auslegung nach Gl. (6.25) wird die koordinierte Flugzeugbewegung bzw. der koordinierte Kurvenflug unterstützt, da es infolge der im Kurvenflug auftretenden Gierrate nicht zu einer Rollbeschleunigung kommt.

Zur Unterbindung der Querkopplung der Rollrate zur Gierbewegung wird der Verstärkungsfaktor $k_{\dot{r}_e p_e}$ so ausgelegt, dass das mit 3 bezeichnete Matrixelement in Abbildung 6-3 zu null wird. Es ergibt sich somit:

$$k_{\dot{r}_e p_e} = -N_p \quad (6.27)$$

Ziel ist es, eine mögliche Gierbeschleunigung, welche durch eine Rollrate verursacht wird, und den daraus resultierenden Schiebewinkel zu unterbinden und somit eine koordinierte Flugbewegung zu gewährleisten. Die Auslegung des Verstärkungsfaktors $k_{\dot{r}_e p_e}$ nach Gl. (6.27) ist eine wichtige Voraussetzung für die Erfüllung der Anforderungen an die Eigenvektoren der Spiral- und der Rollbewegung, bei denen bzgl. des Schiebewinkelanteils ein Wert von null spezifiziert ist (vgl. Kapitel 6.2, Tabelle 6-1).

Im Zusammenhang mit der koordinierten Flugzeugbewegung ist auch das mit 6 benannte Matrixelement in Abbildung 6-3 zu beachten. Im Gegensatz zum unregelmäßigen Flugzeug ergibt

sich aufgrund der gewählten Reglerstruktur dieser zusätzliche Eintrag in der $\tilde{\mathbf{A}}$ -Matrix des geschlossenen Regelkreises. Er erzeugt eine Querkopplung vom Hängewinkel auf die Gierbeschleunigung und sein Anteil resultiert aus dem entsprechend der Betrachtung der Gierdynamik ermittelten Wert für $k_{\dot{r}_e \beta}$ und den jeweiligen kinematischen Flugbedingungen. Der mit δ bezeichnete Matrixeintrag ist gewollt, er fördert den koordinierten Kurvenflug, da es infolge einer Hängewinkeländerung bzw. eines Hängewinkelaufbaus aufgrund einer Kurveneinleitung direkt zu einer Gierbeschleunigung und somit zu einer Gierrate kommt, welche zur Durchführung eines koordinierten Kurvenfluges erforderlich ist. Würde sich der mit δ bezeichnete Matrixeintrag nicht ergeben, müsste die im Kurvenflug erforderliche Gierrate durch den Aufbau eines Schiebewinkels erzeugt werden, was der koordinierten Flugzeugbewegung entgegen wirkt.

Für die weitere Auslegung werden, unter Berücksichtigung der bewirkten Entkopplung sowie unter Vernachlässigung der verbleibenden Kopplungseinflüsse, Roll- und Gierdynamik getrennt voneinander betrachtet. Die Zulässigkeit dieser im Rahmen des Reglerentwurfs durchgeführten Vereinfachung wird durch die lineare und nichtlineare Analyse der Flugdynamik des geregelten Flugzeugs nachgewiesen, siehe Kapitel 6.5 – *Lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises* und Kapitel 8 – *Nichtlineare Analyse*.

Die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_R$ der separierten Rolldynamik ergibt sich nach Gl. (6.28):

$$\tilde{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} L_p - k_{\dot{p}_e p_e} & 0 & k_{f p_e} \\ \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Das zur $\tilde{\mathbf{A}}_R$ -Matrix zugehörige charakteristische Polynom lautet:

$$N_{CL,R}(s) = (s^2 - (L_p - k_{\dot{p}_e p_e})s + k_{f p_e})s \quad (6.29)$$

In Anlehnung an die in Kapitel 6.2 spezifizierten Eigenwerte der Rolldynamik kann bzgl. der Rollachse das charakteristische Polynom nach Gl. (6.30) als Referenzdynamik der Rollachse vorgegeben werden.

$$\begin{aligned} N_{CL,R,d}(s) &= \left(s + \frac{1}{T_{R,d}}\right) \left(s + \frac{1}{T_{I R,d}}\right) s \quad \text{mit} \quad \frac{-1}{T_{R,d}} = \lambda_{R,d} \quad \frac{-1}{T_{I R,d}} = \lambda_{I R,d} \\ &= \left(s^2 + \frac{T_{R,d} + T_{I R,d}}{T_{R,d} T_{I R,d}} s + \frac{1}{T_{R,d} T_{I R,d}}\right) s \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die Festlegung von Gl. (6.30) erfolgt unter Berücksichtigung der Forderungen an den Eigenwert der Rollbewegung $\lambda_{R,d}$ und des zum Integrator der Rollachse zugehörigen Eigenwertes $\lambda_{I R,d}$. So gilt für die Rollzeitkonstante $T_{R,d} = -1/\lambda_{R,d}$ und für den Eigenwert des Integrators $T_{I R,d} = -1/\lambda_{I R,d}$. Ferner ergibt sich das freie s von Gl. (6.30) aufgrund der Anforderungen an eine neutralstabile Spiralbewegung, für die $\lambda_{S,d} = 0$ gilt. Durch Koeffizientenvergleich von Gl. (6.29)

und Gl. (6.30) können $k_{\dot{p}_e p_e}$ und $k_{f p_e}$ so bestimmt werden, dass die gewünschte Referenzdynamik gewährleistet ist.

$$k_{\dot{p}_e p_e} = L_p + \frac{T_{R,d} + T_{I R,d}}{T_{R,d} T_{I R,d}} \quad (6.31)$$

$$k_{f p_e} = \frac{1}{T_{R,d} T_{I R,d}} \quad (6.32)$$

Die isolierte Betrachtung der Gierdynamik basiert auf der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_G$, vgl. [29].

$$\tilde{\mathbf{A}}_G = \begin{bmatrix} N_r - k_{\dot{r}_e \dot{\beta}} & N_\beta + k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} & -k_{f \beta} \\ Y_r - 1 & Y_\beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom der Gierdynamik $N_{CL,G}(s)$ lautet:

$$N_{CL,G}(s) = s^3 + (k_{\dot{r}_e \dot{\beta}} - Y_\beta - N_r) s^2 + \left((N_r - k_{\dot{r}_e \dot{\beta}}) Y_\beta + (N_\beta + k_{\dot{r}_e \hat{\beta}})(1 - Y_r) \right) s + (1 - Y_r) k_{f \beta} \quad (6.34)$$

Auf Basis der in Kapitel 6.2 festgelegten Anforderungen an die Dynamik der Gierachse, und somit an die Vorgabe der Eigenwerte der Roll-Gier-Schwingung und des Gierachsenintegrators des geregelten Flugzeugs, kann folgendes charakteristische Polynom als Referenzdynamik für die Gierachse spezifiziert werden:

$$\begin{aligned} N_{CL,G,d}(s) &= \left(s^2 + 2 \zeta_{DR,d} \omega_{0 DR,d} s + \omega_{0 DR,d}^2 \right) \left(s + \frac{1}{T_{I G,d}} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{-1}{T_{I G,d}} = \lambda_{I G,d} \\ &= s^3 + \underbrace{\left(2 \zeta_{DR,d} \omega_{0 DR,d} + \frac{1}{T_{I G,d}} \right)}_{a_2} s^2 \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{2 \zeta_{DR,d} \omega_{0 DR,d}}{T_{I G,d}} + \omega_{0 DR,d}^2 \right)}_{a_1} s + \underbrace{\frac{\omega_{0 DR,d}^2}{T_{I G,d}}}_{a_0} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dabei ist $\zeta_{DR,d}$ die relative Dämpfung und $\omega_{0 DR,d}$ die natürliche Frequenz der Roll-Gier-Schwingung. Die Zeitkonstante $T_{I G,d}$ charakterisiert den Eigenwert des Integrators der Gierachse, dabei gilt $T_{I G,d} = -1/\lambda_{I G,d}$. Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen Gl. (6.34) und Gl. (6.35) lassen sich die Verstärkungsfaktoren $k_{\dot{r}_e \dot{\beta}}$, $k_{\dot{r}_e \hat{\beta}}$ und $k_{f \beta}$ zur Sicherstellung exzellenter Flugeigenschaften bestimmen. Sie ergeben sich wie folgt:

$$k_{f \beta} = \frac{a_0}{1 - Y_r} \quad (6.36)$$

$$k_{\dot{r}_e \dot{\beta}} = a_2 + Y_\beta + N_r \quad (6.37)$$

$$k_{\dot{r}_e \hat{\beta}} = \frac{(a_2 + Y_\beta) Y_\beta + a_1}{1 - Y_r} - N_\beta \quad (6.38)$$

Die Berechnung der Verstärkungsfaktoren der Proportional- und Integralrückführungen (\mathbf{K}_p - und \mathbf{K}_f -Matrix) des Regelgesetzes nach Gl. (6.5) ist abgeschlossen. Es folgt die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren $h_{\dot{p}_e p_e}$ und $h_{\dot{r}_e \beta}$ der Vorsteuerpfade (vgl. Abbildung 5-1: Reglerstruktur) zur Gewährleistung adäquater Steuerungseigenschaften. Die Verstärkungsfaktoren $h_{\dot{p}_e p_e}$ und $h_{\dot{r}_e \beta}$ ergeben sich in der Steuermatrix $\tilde{\mathbf{B}}$.

Zunächst wird auf die Rollsteuerung und die zugehörige Vorgabegröße p_{ec} zur Bestimmung von $h_{\dot{p}_e p_e}$ eingegangen. Das charakteristische Zustandsraummodell der Rolldynamik ergibt sich unter Berücksichtigung der Zustände p_e , Φ , $x_{f \Delta p}$ sowie der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_R$ der Rolldynamik und der zur Vorgabegröße p_{ec} zugehörigen Teilmatrix von $\tilde{\mathbf{B}}$ aus Gl. (6.24) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\Phi} \\ \dot{x}_{f \Delta p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_p - k_{\dot{p}_e p_e} & 0 & k_{f p_e} \\ \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ \Phi \\ x_{f \Delta p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{f p_e} \cdot h_{\dot{p}_e p_e} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (p_{ec}) \quad (6.39)$$

Die zur Bestimmung der Vorsteuerfaktoren notwendige Übertragungsfunktion $g_{p_e p_{ec}}$ von der kommandierten Rollrate p_{ec} auf die Rollrate p_e kann unter Verwendung der *Cramer-Regel* (siehe [47]) und unter Berücksichtigung der Zusammenhänge für $k_{\dot{p}_e p_e}$ (Gl. (6.31)) und $k_{f p_e}$ (Gl. (6.32)) berechnet werden. Die Übertragungsfunktion $g_{p_e p_{ec}}$ ergibt sich zu:

$$g_{p_e p_{ec}} = \frac{\frac{1}{T_{R,d} T_{I R,d}} h_{\dot{p}_e p_e} s \left(s + \frac{1}{h_{\dot{p}_e p_e}} \right)}{\left(s + \frac{1}{T_{R,d}} \right) \left(s + \frac{1}{T_{I R,d}} \right) s} \quad (6.40)$$

Um initial ein ansprechendes Antwortverhalten (welches im Englischen als „crisp“ bezeichnet wird) auf eine Rolleingabe zu gewährleisten, ist mittels der durch die Vorsteuerung bewirkten Nullstelle $(s + 1/h_{\dot{p}_e p_e})$ eine Kürzung des Rollintegratorpols zu realisieren und somit die Verzögerung bzgl. des Rollsteuerungsverhaltens, die durch den Integrator verursacht wird, zu eliminieren. Der Verstärkungsfaktor $h_{\dot{p}_e p_e}$ lässt sich somit wie folgt berechnen:

$$h_{\dot{p}_e p_e} = T_{I R,d} \quad (6.41)$$

Aus Gl. (6.40) ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (6.41) die in Kapitel 6.2 spezifizierte Übertragungsfunktion für die Rolldynamik nach Gl. (6.9) zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften der Rollachse.

Analog zur Rolldynamik erfolgt die Auslegung der Vorsteuerung des Gierachsenreglers anhand des separierten Zustandsraummodells der Gierdynamik. Es ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{x}_{f \Delta \beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_r - k_{\dot{r}_e \beta} & N_\beta + k_{\dot{r}_e \beta} & -k_{f \beta} \\ Y_r - 1 & Y_\beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ \beta \\ x_{f \Delta \beta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{f \beta} \cdot h_{\dot{r}_e \beta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\beta_c) \quad (6.42)$$

Die Übertragungsfunktion $g_{\beta \beta_c}$ vor kommandiertem Schiebewinkel β_c auf den Schiebewinkel β kann unter Anwendung der *Cramer-Regel*, vgl. [47], berechnet werden und ergibt sich unter Berücksichtigung der Verstärkungsfaktoren der Gierachse zu Gl. (6.43).

$$g_{\beta\beta_c} = \frac{-\frac{\omega_{0DR,d}^2}{T_{IG,d}} h_{\dot{r}_{e\beta}} \left(s - \frac{1}{h_{\dot{r}_{e\beta}}} \right)}{\left(s^2 + 2 \zeta_{DR,d} \omega_{0DR,d} s + \omega_{0DR,d}^2 \right) \left(s + \frac{1}{T_{IG,d}} \right)} \quad (6.43)$$

Zur Gewährleistung eines adäquaten Antwortverhaltens auf ein Schiebewinkelkommando ist für die Gierachse die Verzögerung infolge des Integrators durch Kürzung des Integratorpols mittels der Nullstelle $(s - 1/h_{\dot{r}_{e\beta}})$ zu kompensieren. Es ergibt sich somit:

$$h_{\dot{r}_{e\beta}} = -T_{IG,d} \quad (6.44)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (6.44) ergibt sich aus Gl. (6.43) das in Kapitel 6.2 spezifizierte Übertragungsverhalten nach Gl. (6.8) zur Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften der Gierachse.

Die Berechnung aller Verstärkungsfaktoren der Reglerstruktur ist vollständig beschrieben, sie erfolgt auf Basis des Zustandsraummodells des geschlossenen Regelkreises und kann für jeden (stationären) Flugzustand bzw. für jedes lineare, zeitinvariante, dynamische Zustandsraummodell des Flugbereiches durchgeführt werden. Im nächsten Kapitel wird die Erweiterung des Reglerentwurfs von der Betrachtung einzelner stationärer Flugzustände auf einen über den gesamten Flugbereich nachgeführten Regler durchgeführt.

Die Umsetzung der Reglersynthese und ergo die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren auf Basis der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* erfolgt rein analytisch, ermöglicht somit eine einfache Handhabung und sichert eine direkte flugmechanische Interpretierbarkeit der Verstärkungsfaktoren. Dies kann bei der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* aufgrund der durchzuführenden Berechnung der Pseudoinversen und der auszuführenden Nullraumprojektion nicht sichergestellt werden. Die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* ermöglicht folglich eine einfache und zielorientierte Realisierung des Reglerentwurfs mit beschränktem Entwicklungsaufwand und erfüllt somit die Randbedingungen von Herstellern zukünftiger Kleinflugzeuge.

6.4 Nachgeführter Regler für den gesamten Flugbereich

Die Anwendung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe*, im Folgenden *MR DEA* genannt, beschränkt sich auf einen bzw. den jeweiligen zur Auslegung gewählten Flugzustand bzw. seine Beschreibung als lineares, zeitinvariantes, dynamisches Zustandsraummodell. Zur Umsetzung adäquater Flugeigenschaften über den gesamten Betriebsbereich des Flugzeugs ist es notwendig, einen Regler mit an den jeweiligen Flugzustand angepassten Verstärkungsfaktoren auszuführen. D.h. der Regler bzw. die Reglerparameter müssen der Streckendynamik so nachgeführt werden, dass an jedem Punkt der Envelope, also für jeden Betriebspunkt die entsprechenden Verstärkungsfaktoren angewandt werden, welche adäquate Flugeigenschaften gewährleisten. Der jeweilige Betriebspunkt der Envelope charakterisiert sich über eine Vielzahl

von Parametern, im Allgemeinen sind u.a. folgende Größen entscheidend: die Fluggeschwindigkeit, die Höhe bzw. die Dichte, die Masse und der Schwerpunkt des Flugzeugs, die jeweilige Flugzeugkonfiguration und die Machzahl. Analysen haben gezeigt (vgl. Kapitel 3), dass sich für die DA42, respektive Flugzeuge mit einem entsprechend eingeschränkten Betriebsbereich, signifikante und somit entscheidende Änderungen der Flugdynamik über den gesamten Betriebsbereich als Funktion des Staudrucks \bar{q} beschreiben lassen. Somit erfolgt die Nachführung des Reglers in Abhängigkeit vom Staudruck \bar{q} . Durch die Ergebnisse der linearen und nichtlinearen Analyse in Kapitel 6.5 und Kapitel 8 wird die Zulässigkeit der vereinfachten Nachführung der Reglerparameter in Abhängigkeit des Staudrucks bestätigt. Der Staudruck \bar{q} stellt sich für den Betriebsbereich der DA42 mit sehr guter Näherung unter Vernachlässigung von Kompressibilitätseffekten ($Ma < 0,3$) als Funktion von Fluggeschwindigkeit und Dichte dar, vgl. [48].

$$p_t - p_s \approx \bar{q} = \frac{\rho}{2} V^2 \quad (6.45)$$

Die Bestimmung des Staudrucks erfolgt einfach und bewährt durch die Differenzdruckmessung von Totaldruck p_t und statischem Druck p_s mittels einer Prandtlsonde, vgl. [7].

Wie in Kapitel 1 beschrieben, ist die Gesamtkomplexität und der Entwicklungsaufwand des Regelungssystems gering zu halten, um den Kosten- und Entwicklungsrandbedingungen der Allgemeinen Luftfahrt gerecht zu werden. Aus diesem Grund ist bei der Ausarbeitung der Nachführung des Reglers darauf zu achten, einen ausgewogenen Entwurf unter Berücksichtigung der Komplexität des funktionalen Zusammenhangs zwischen dem Staudruck \bar{q} und den Verstärkungsfaktoren sowie den erreichten Flugeigenschaften des geregelten Systems zu realisieren. Die Änderung der Verstärkungsfaktoren der Proportional- und Integralrückführungen (K_p und K_f) über die Envelope lässt sich mit guter Näherung als lineare Funktion des Staudrucks \bar{q} wiedergeben. Die direkt wirkenden Verstärkungsfaktoren $h_{\xi \dot{p}_e}$ und $h_{\zeta \dot{r}_e}$ des Vorsteuergesetzes der Steuerkoordinierung (*Control Allocation*) können mit guter Näherung als lineare Funktion des invertierten Staudrucks ($1/\bar{q}$) realisiert werden. Für die überkreuz wirkenden Verstärkungsfaktoren $h_{\zeta \dot{p}_e}$ und $h_{\xi \dot{r}_e}$ der *Control Allocation* ergibt sich in guter Approximation ein linearer Zusammenhang zum invertierten Quadrat des Staudrucks ($1/\bar{q}^2$). Der inverse Zusammenhang gründet aus der Inversion der **B**-Matrix zur Berechnung der *Control Allocation* und der Abhängigkeit der Ersatzderivativa L_ξ , L_ζ , N_ξ und N_ζ vom Staudruck \bar{q} . Eine Nachführung der Verstärkungsfaktoren der Vorsteuerung $h_{\dot{p}_e v_e}$ und $h_{\dot{r}_e \beta}$, welche sich in Abhängigkeit der Eigenwerte der Integratoren des geregelten System ergeben, ist nicht erforderlich. Um den Komplexitätsgrad des gesamten Flugregelungssystems klein zu halten und um ein adäquates und sicheres Verhalten im Fehlerfall, z.B. aufgrund eines nicht detektierten fehlerhaften Staudrucksignals, zu gewährleisten, werden nur Rückführverstärkungen zugelassen, welche prinzipiell ein stabilisierendes Verhalten bewirken. Ein Vorzeichenwechsel der Verstärkungsfaktoren ist somit für den gesamten Flugbereich ausgeschlossen.

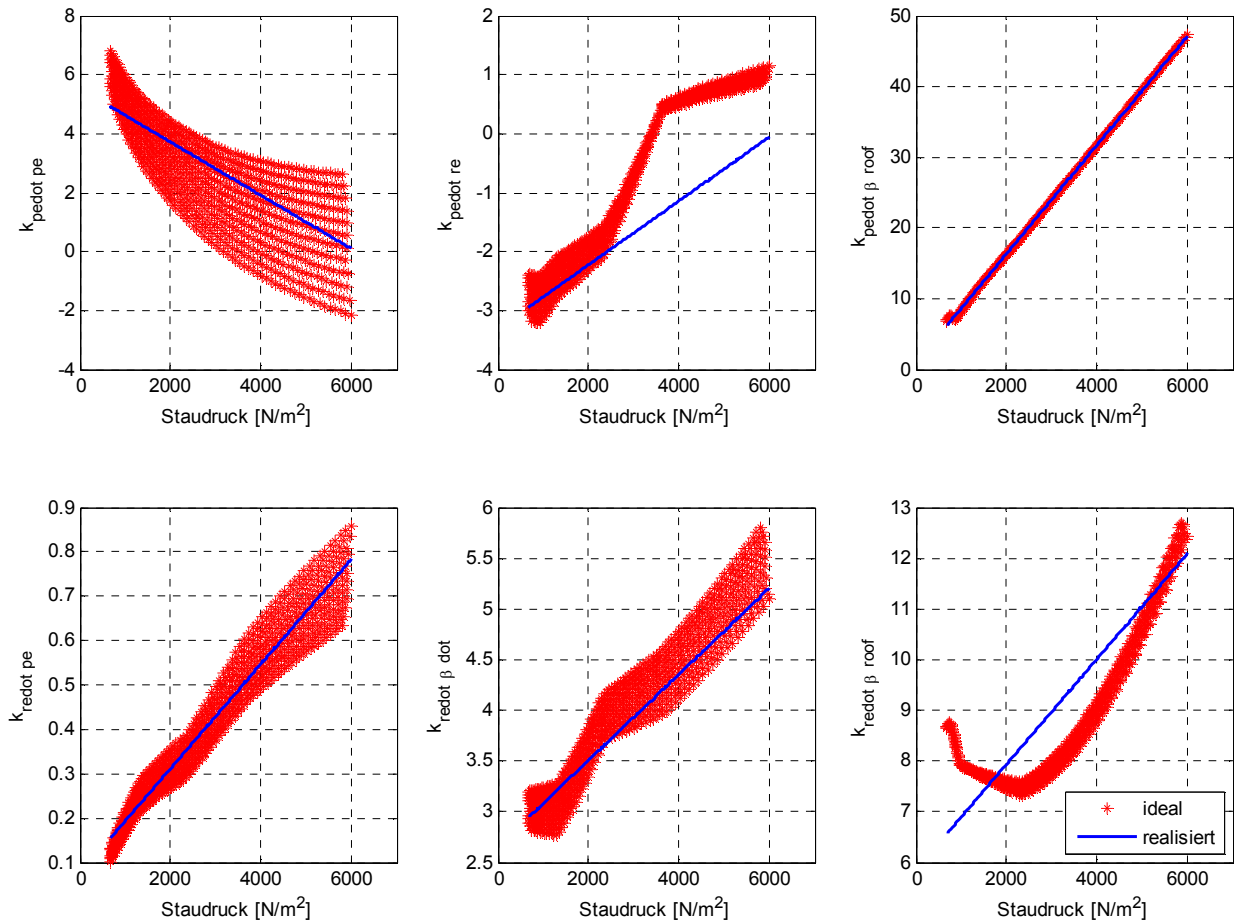


Abbildung 6-4: ideale und realisierte Verstärkungsfaktoren der K_P -Matrix

Für die finale Festlegung der Verstärkungsfaktoren wird ein engmaschiges Netz an Zustandsraummodellen der Seitenbewegung des unregulierten Flugzeugs gerastert über Geschwindigkeit und Dichte (Höhe) genutzt. Auf Basis von *MRDEA* wird für jedes Zustandsraummodell ein Satz an Verstärkungsfaktoren (\mathbf{K}_P , \mathbf{K}_f , \mathbf{H}_{ER} , \mathbf{H}_P) berechnet (ideale Verstärkungsfaktoren) und durch deren Approximation als lineare Funktionen in Abhängigkeit vom jeweiligen Funktionsargument \bar{q} , $(1/\bar{q})$ und $(1/\bar{q}^2)$ wird der nachgeführte Regler ausgearbeitet (realisierte Verstärkungsfaktoren). Dabei wird den Entwurfsrandbedingungen, wie etwa der Unterbindung eines Vorzeichenwechsels nachgeführter Verstärkungsfaktoren, entsprechend nachgekommen. Dies ist exemplarisch für die Nachführung der Verstärkungsfaktoren der Proportionalrückführungen (\mathbf{K}_P -Matrix) in Abbildung 6-4 dargestellt. Dabei sind von links nach rechts und von oben nach unten die Verstärkungsfaktoren $k_{\dot{p}_e p_e}$, $k_{\dot{p}_e r_e}$, $k_{\dot{p}_e \hat{\beta}}$, $k_{\dot{r}_e p_e}$, $k_{\dot{r}_e \hat{\beta}}$ und $k_{\dot{r}_e \beta}$ in Abhängigkeit vom Staudruck dargestellt, wobei die roten Sterne die jeweiligen idealen Verstärkungsfaktoren, welche mit *MRDEA* berechnet werden, darstellen und die in blau dargestellten Linien die daraus abgeleiteten final realisierten linear nachgeführten Verstärkungsfaktoren wiedergeben. Ferner ist in Abbildung 6-4 für den Verstärkungsfaktor $k_{\dot{p}_e r_e}$ die geforderte Unterbindung eines Vorzeichenwechsels bzgl. der final realisierten Verstärkungsfaktor-Nachführung ersichtlic. In Analogie zur Nachführung der proportionalen Verstärkungsfaktoren (\mathbf{K}_P -Matrix) ergibt sich die Nachführung der integralen Verstärkungsfaktoren (\mathbf{K}_f -Matrix) in linearer Funktion des Staudrucks ($f(\bar{q})$), die Nachführung

der Verstärkungsfaktoren der Steuerkoordinierung (\mathbf{H}_{ER} -Matrix) als lineare Funktion von $1/\bar{q}$ bzw. $1/\bar{q}^2$ und die Verstärkungsparameter der Vorsteuerung (\mathbf{H}_P -Matrix) ohne Nachführung. In Anhang A.3 sind die Verstärkungsfaktoren der Matrizen \mathbf{K}_f , \mathbf{H}_{ER} und \mathbf{H}_P dargestellt, dabei sind die in *blau* dargestellten Linien die final realisierten Verstärkungsfaktoren und in *rot* die idealen Verstärkungsfaktoren.

Im nächsten Kapitel erfolgt eine lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises unter Berücksichtigung des nachgeführten Regelungssystems zur Verifizierung der Flugeigenschaften des geregelten Flugzeugs und zur Legitimierung der durchgeführten Vereinfachungen und Näherungen. Die in Kapitel 8 präsentierten Ergebnisse der nichtlinearen Analyse des geregelten Flugzeugs bestätigen die Zulässigkeit der im Rahmen der Reglerentwicklung durchgeführten Vereinfachungen, respektive Vernachlässigungen abschließend.

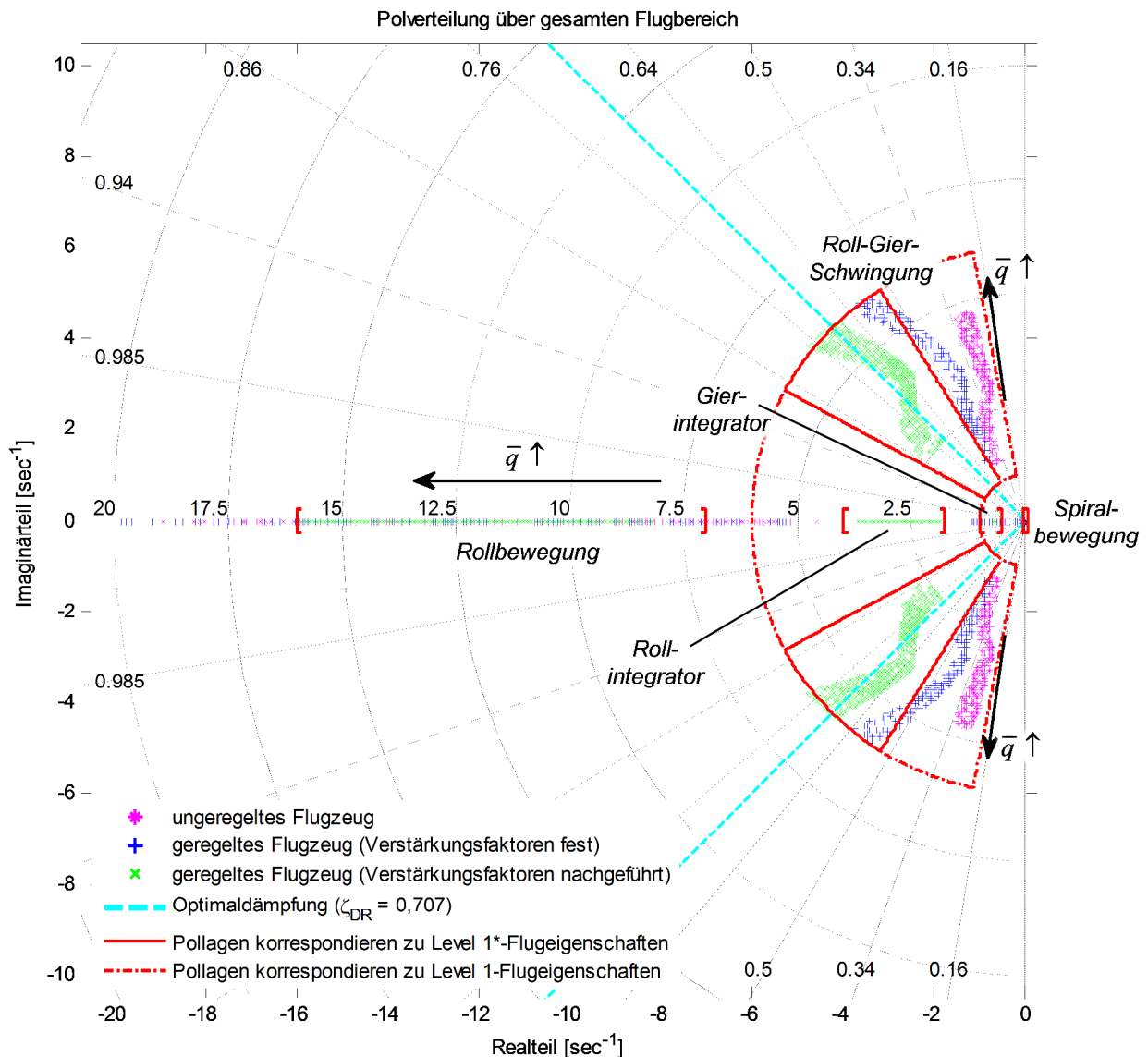
6.5 Lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises

Zur linearen Verifikation des Reglers und insbesondere zur Überprüfung und Motivation der beschriebenen Auslegungsmethode *MR DEA* wird in diesem Abschnitt auf Basis von linearen Zustandsraummodellen des geschlossenen Kreises die Dynamik des geregelten Flugzeugs untersucht. Die Berechnung der Zustandsraummodelle des geschlossenen Kreises, siehe Gl. (6.7), erfolgt dabei unter Berücksichtigung aller, für die Durchführung von *MR DEA* vernachlässigten Größen wie der Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ sowie der verbleibenden unbeachteten Kopplungseffekte, siehe Abbildung 6-3, zwischen Roll- und Gierdynamik und der final realisierten Verstärkungsmatrizen entsprechend Kapitel 6.4. Die lineare Analyse gliedert sich in eine Untersuchung der realisierten Eigenstruktur zur Prüfung der Stabilitätseigenschaften und in die Betrachtung repräsentativer linearer Simulationen zur Analyse des Steuer- und Störverhaltens im Zeitbereich. Die Untersuchung der Eigenstruktur des geregelten Systems wird durch die Prüfung der erreichten Eigenwerte und Eigenvektoren in Kapitel 6.5.1 durchgeführt, es wird dabei das Verhalten des geregelten Systems über die gesamte Envelope betrachtet. Die Untersuchung des Störverhaltens und der Steuerungseigenschaften anhand des linearen Zustandsraummodells eines repräsentativen Flugzustandes in Kapitel 6.5.2 bestätigt abschließend die Funktionsweise der Auslegungsmethode.

6.5.1 Stabilitätseigenschaften des geregelten Flugzeugs

Die Untersuchung der Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises erfolgt unter Berücksichtigung der linear nachgeführten Verstärkungsfaktoren. Für den Fall, dass eine Nachführung der Verstärkungsfaktoren nicht möglich ist, beispielsweise aufgrund eines detektierten Ausfalls des Staudruckmesssignals, steht zusätzlich ein Ersatzregler mit über den gesamten Flugbereich festen Verstärkungsfaktoren bereit (*Fix-Gain-Regler* oder *Back-Up-Regler*), auch dieser wird betrachtet. Für die Auslegung des Ersatzreglers wird die Lage der Eigenwerte nach *Level 1* als Primärziel festgelegt und die „Gestalt“ der Eigenvektoren

weitgehend unberücksichtigt gelassen. Im Anhang A.3 sind die final realisierten Verstärkungsfaktoren des Ersatzreglers angegeben.



In Abbildung 6-5 sind die Eigenwerte des geregelten Flugzeugs mit nachgeführten und festen Verstärkungsfaktoren sowie die der unregulierten DA42 dargestellt. Für die Berechnung der Eigenwerte des geregelten Systems wird das in Kapitel 2.1.4 angegebene Übertragungsverhalten der Aktuatoren einbezogen. Die in Kapitel 6.2 beschriebenen Anforderungen zur Gewährleistung exzellenter (*Level 1**) und guter (*Level 1*) Flugeigenschaften sind in Abbildung 6-5 angegeben. Ferner ist in Abbildung 6-5 die optimale relative Dämpfung von $\zeta_{DR} = 0,707$ gekennzeichnet. Die Eigenwerte der Roll-Gier-Schwingung sind durch den mit *MR DEA* ausgelegten Regler (Regler mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren) so modifiziert, dass die in Tabelle 6-1 spezifizierten Anforderungen vollständig umgesetzt werden. Bzgl. der relativen Dämpfung wird im Mittel der Idealwert von $\zeta_{DR} = 0,707$ mit sehr guter Näherung bewirkt, siehe hierzu Abbildung 6-5. Die maximale Abweichung der relativen Dämpfung ζ_{DR} zum Idealwert ($\zeta_{DR} =$

0,707) aller betrachteten Flugzustände ist dabei kleiner als 22%. Bis zu einer maximalen Abweichung von 25% können bzgl. der relativen Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung *Level 1**-Flugeigenschaften garantiert werden, dies ist in Abbildung 6-5 durch die mit *rot* dargestellten Linien wiedergegeben. Für die natürliche Frequenz der Roll-Gier-Schwingung ω_{0DR} konnte der angestrebte Verlauf über den Staudruck entsprechend den Anforderungen weitgehend erreicht werden. Lediglich im Gebiet großer Staudrücke weicht die erreichte natürliche Frequenz vom geforderten maximalen Idealwert geringfügig ab (2,5%). Die Differenz wird dabei als vernachlässigbar klein beurteilt. Für den Regler mit festen Verstärkungsfaktoren wird über den gesamten Flugbereich die relative Dämpfung ζ_{DR} gesteigert und somit eine deutliche Verbesserung im Vergleich zum unregulierten Flugzeug umgesetzt.

Die Anforderung an die Rollzeitkonstante T_R von [25] zur Sicherstellung von *Level 1*-Flugeigenschaften verlangt ausschließlich, dass $T_R < 1,0$ s. Diese Anforderung erfüllt bereits das unregulierte Flugzeug. Durch den nachgeführten Regler war es jedoch möglich, entsprechend Kapitel 6.2, die Streuung des Eigenwertes der Rollbewegung zu reduzieren und somit sehr stark gedämpfte Eigenwerte der Rollbewegung zur Unterbindung großer Steuerempfindlichkeit nach rechts zu verschieben und im Gegenzug gering gedämpfte Eigenwerte nach links zu verschieben, um somit ein homogenes und antizipierbares Flugverhalten zu gewährleisten. Der gewünschte Effekt zur Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften wird durch die Auslegung des nachgeführten Reglers auf Basis von *MR DEA* bewirkt und ist in Abbildung 6-5 klar zu erkennen. Die Rollzeitkonstante des geregelten Systems mit festen Verstärkungsfaktoren kann geringfügig reduziert werden.

Die Spiralbewegung des geregelten Systems ist wie gefordert durch Bestimmung der nachgeführten Verstärkungsfaktoren mittels *MR DEA* mit sehr guter Näherung neutralstabil umgesetzt. Die maximale Abweichung des Spiralspols vom Ursprung ist kleiner $1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Es sind somit im Vergleich zum stabilen Eigenwert des unregulierten Flugzeugs adäquate Flugeigenschaften bzgl. der Spiralbewegung generiert. Hinsichtlich des geregelten Flugzeugs mit festen Verstärkungsfaktoren kann ebenfalls ein ursprungsnaher Spiralbewegungspol mit nur geringen Abweichungen zum nachgeführten Regler ausgeführt werden.

Nach Abschluss der Analyse der Eigenwerte folgt die Untersuchung der Eigenvektoren des geschlossenen Regelkreises mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren unter Betrachtung des gesamten Flugbereichs.

Zunächst wird auf den Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung eingegangen. In Abbildung 6-6 ist der Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung des geregelten Flugzeugs (unteres Diagramm) im Vergleich zum unregulierten Flugzeug (oberes Diagramm) für den gesamten Staudruckbereich abgebildet. Die horizontalen Raumachsen mit dem Wertebereich von -1 bis 1 in Abbildung 6-6 repräsentieren den Realanteil der Eigenvektorelemente, den Imaginäranteil kennzeichnen die vertikale verlaufenden Raumachsen (Wertebereich von -1 bis 1). Die horizontalen Raumachsen

mit dem Wertebereich von 0 bis 6000 geben den Staudruck und somit die Änderung über die Envelope wieder.

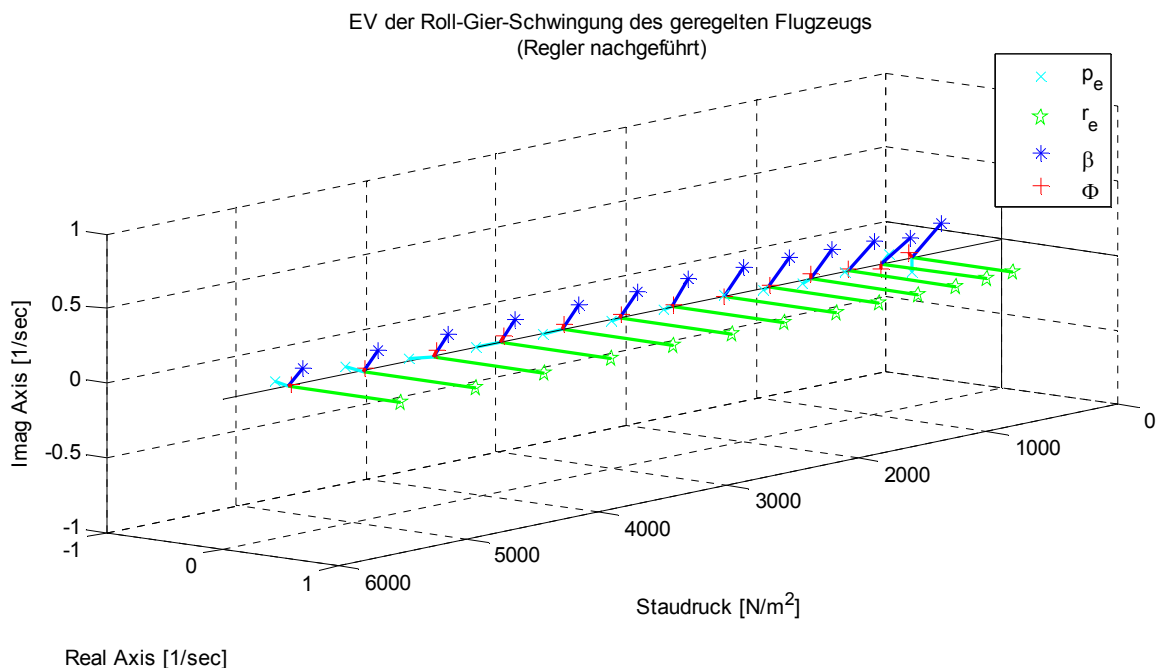
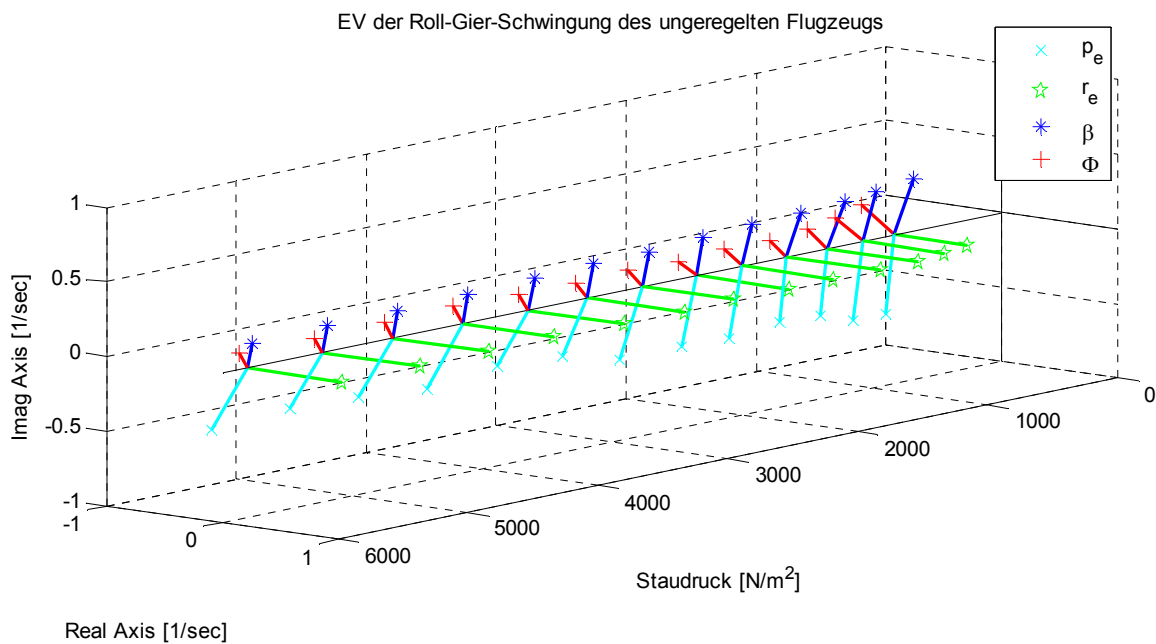


Abbildung 6-6: Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung

Im Gegensatz zum unregulierten Flugzeug ist der Anteil der Rollrate p_e des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung des geregelten Systems stark reduziert, dies gilt über den gesamten Flugbereich. Ferner nimmt der Anteil des Hängewinkels Φ mit guter Näherung den Wert von null an, dies gilt ebenfalls für den gesamten Staudruckbereich. Durch die reduzierten Anteile von p_e und Φ des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung des geregelten Flugzeugs wird die

Vorgabe der Anteile an die beteiligten Zustände der Roll-Gier-Schwingung nach Tabelle 6-1 erfüllt und der Achsenentkopplung entsprechend den Anforderungen an die Flugdynamik (siehe Kapitel 6.2) Rechnung getragen. Zusätzlich ist in Abbildung 6-7 ein repräsentativer Eigenvektor als Zeitvektor, siehe [7], [9] und [10], zur genaueren Bewertung dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Anteile der Zustände p_e und Φ für das geregelte System vernachlässigbar klein sind. Aufgrund der Reduzierung der Eigenvektoranteile von p_e und Φ wird die in Kapitel 6.2 verlangte Unterbindung der Querkopplung von Zuständen der Gierachse auf die Rolldynamik erfüllt. Die Wirksamkeit der Auslegungsmethode *MR DEA* in Bezug auf die Entkopplung zur Sicherstellung adäquaten Flugverhaltens bzgl. des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung ist somit bestätigt.

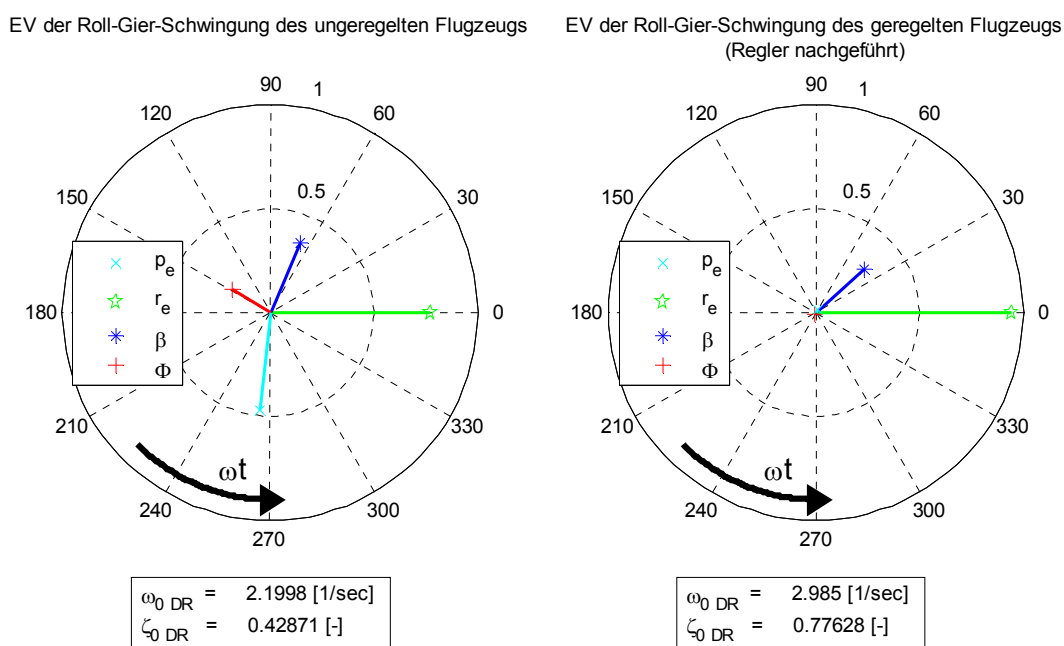


Abbildung 6-7: Eigenvektor Roll-Gier-Schwingung (Flugzustand: $\bar{q} = 1227,8274 \text{ N/m}^2$)

Im Folgenden wird die Analyse des Eigenvektors der Rollbewegung durchgeführt. In den Diagrammen von Abbildung 6-8 werden die Eigenvektoren der Rollbewegung für den unregelmäßigen und geregelten Fall dargestellt. Die Abszisse entspricht dabei dem Realanteil der Eigenvektorelemente und die Ordinate bildet den Staudruck und somit die Änderung über die Envelope ab. Die aperiodische Rollbewegung weist keinen Imaginäranteil in den Elementen des Eigenvektors auf, weshalb eine dreidimensionale Darstellung wie in Abbildung 6-6 zur Visualisierung des Eigenvektors der Roll-Gier-Schwingung nicht notwendig ist. Durch Anwendung von *MR DEA* wird der bereits geringe Anteil der Gierrate r_e der Rollbewegung (siehe Tabelle 6-1) weiter verringert und somit die Querkopplung der Rolldynamik auf die Gierachse, wie gefordert, weitgehend unterbunden, was adäquate Flugeigenschaften gewährleistet. In Abbildung 6-8 ist der reduzierte Anteil von r_e des Rolleigenvektors des geregelten Flugzeugs im Vergleich zu dem des unregelmäßigen Flugzeugs visualisiert. Die

entsprechend den Anforderungen abgezielte *Geschwindigkeitsvektor-Rolle* wird somit durch die „Gestalt“ des Eigenvektors der Rollbewegung gestützt.

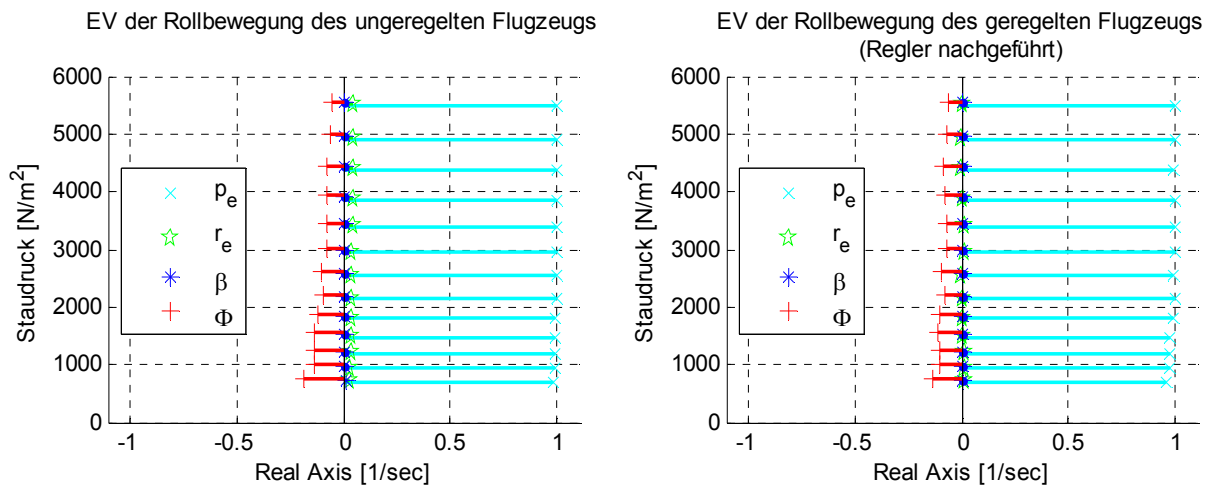


Abbildung 6-8: Eigenvektor der Rollbewegung (geregelt und ungeregelt)

Der Eigenvektor der Spiralbewegung weist für das geregelte Flugzeug mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren einen, im Vergleich zum ungeregelten System, stark reduzierten Anteil von p_e und β auf, und mit dem damit in Zusammenhang stehenden, neutralstabilen Spiraleigenwert werden somit adäquate Flugeigenschaften im stationären Kurvenflug garantiert. Grund hierfür ist, dass es infolge der vernachlässigbar kleinen Anteile von p_e und β des Spiraleigenvektors zu keiner merklichen Roll- oder Gierbeschleunigung kommt, der Flugzustand mit sehr guter Näherung unverändert bleibt und keine Abdrift resultiert, die durch entsprechende Piloteneingaben korrigiert werden müsste. Die Reduktion von p_e und β des Eigenvektors der Spiralbewegung für das geregelte Flugzeug ist in Abbildung 6-9 im Vergleich zum ungeregelten Fall dargestellt. In Analogie zu Abbildung 6-8 entspricht in Abbildung 6-9 die Abszisse dem Realanteil der Eigenvektorelemente und die Ordinate bildet den Staudruck und somit die Änderung über die Envelope ab. Die Eignung von *MRDEA* zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren wird durch die Analyse der Spiralbewegung ebenfalls bestätigt.

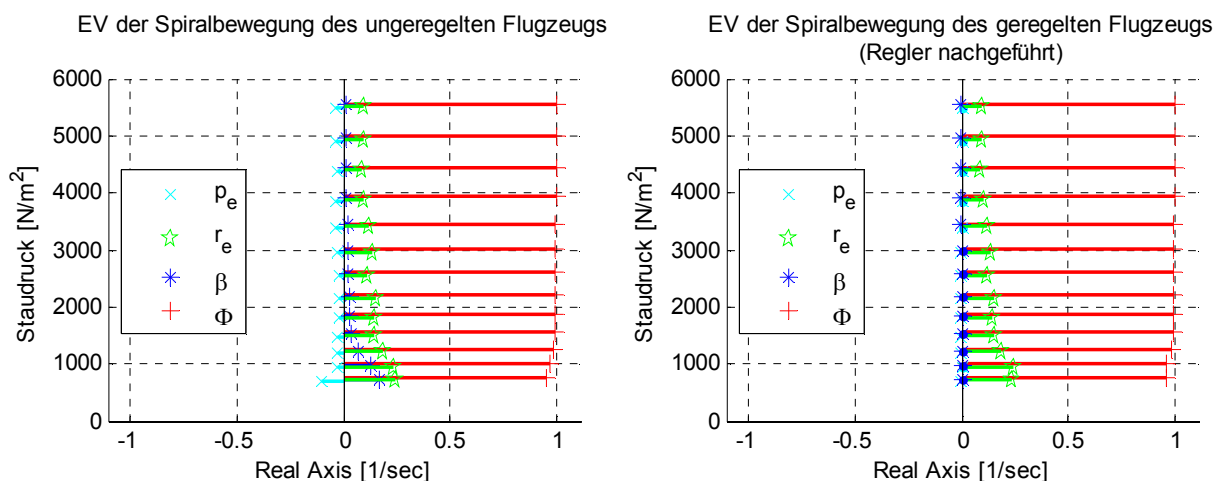


Abbildung 6-9: Eigenvektor der Spiralbewegung (geregelt und ungeregelt)

Zur weiteren Prüfung der Auslegungsmethode *MR DEA* ist das Zustandsraummodell der Seitenbewegung für das mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren geregelte Flugzeug in Gl. (6.46) gegeben sowie in Gl. (6.47) für die inhärente Flugdynamik. Die dargestellten Zustandsraummodelle repräsentieren den horizontalen Geradeausflug in einer Flughöhe von 1000 m und einer Fluggeschwindigkeit von 47 m/s, dies entspricht einem Staudruck von $\bar{q} = 1227,8274 \text{ N/m}^2$. Zum einfachen Vergleich ist in Analogie zum Zustandsraummodell des geregelten Flugzeugs das Zustandsraummodell des ungerichteten Flugzeugs mit nach Roll- und Gierachse geordneten Zuständen angegeben. In Gl. (6.46) sind im Vergleich zu Gl. (6.47) die gewünschte Entkopplung der Achsen und somit die Modifikationen entsprechend *MR DEA* klar zu erkennen. Es konnte der Einfluss auf \dot{r}_e durch p_e signifikant verkleinert und im Gegenzug der durch Φ vergrößert werden.

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{x}_{f \Delta\beta} \\ \dot{p}_e \\ \dot{\phi} \\ \dot{x}_{f \Delta p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -5.0362 & 11.5148 & -5.9889 & -0.0200 & 0.6831 & -0.0355 \\ -0.9178 & -0.2740 & 0.1076 & 0.0155 & 0.1960 & -0.0359 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0699 & 0.1065 & 0.0365 & -12.6779 & -0.0042 & 22.3211 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ \beta \\ x_{f \Delta\beta} \\ p_e \\ \Phi \\ x_{f \Delta p} \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.0154 & -7.9852 \\ -0.0156 & 0.1435 \\ 0 & 1.0 \\ 9.7048 & 0.0487 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{ec} \\ \beta_c \end{pmatrix}$$

Die Auslegungsmethode setzt außerdem eine weitgehende Unabhängigkeit der Rollratenänderung \dot{p}_e von den Zustände r_e und β um, somit ist die geforderte Entkopplung von Roll- und Gierdynamik entsprechend den Anforderungen sichergestellt.

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{p}_e \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7613 & 4.1670 & -0.2539 & 0 \\ -0.9811 & -0.1248 & 0.0124 & 0.2083 \\ 2.7380 & -10.3280 & -8.1882 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0019 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ \beta \\ p_e \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1166 & -2.5988 \\ 0 & 0.0463 \\ -12.2482 & 0.2876 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

Durch Darlegung und Diskussion der Eigenwerte und Eigenvektoren im Vergleich zwischen geregeltem und ungerichtetem Flugzeug ist die Funktionsweise von *MR DEA* geprüft. Im Folgenden wird durch verschiedene Simulationen des Steuer- und Störverhaltens mittels der linearen Zustandsraummodelle des geregelten Fluggeräts die Prüfung und Bewertung der umgesetzten Flugeigenschaften und von *MR DEA* fortgesetzt.

6.5.2 Steuerungseigenschaften und Störverhalten des geregelten Flugzeugs

Im vorigen Kapitel wurde die lineare Analyse und Prüfung des Reglerentwurfs nebst zugehöriger Auslegungsmethode (*MR DEA*) anhand der generierten Eigenstruktur, bestehend aus Eigenwerten und Eigenvektoren, beschrieben. Die folgende Untersuchung des Steuer- und Störverhaltens schließt die lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises ab. Sie erfolgt auf Basis des in Gl. (6.46) angegebenen linearen Zustandsraummodells für Sprünge in den

Kommandogrößen p_{ec} und β_c sowie auf Basis von Anfangswertstörungen in den Zuständen p_e und β . Ausgangszustand der Simulation ist dabei der getrimmte horizontale Geradeausflug.

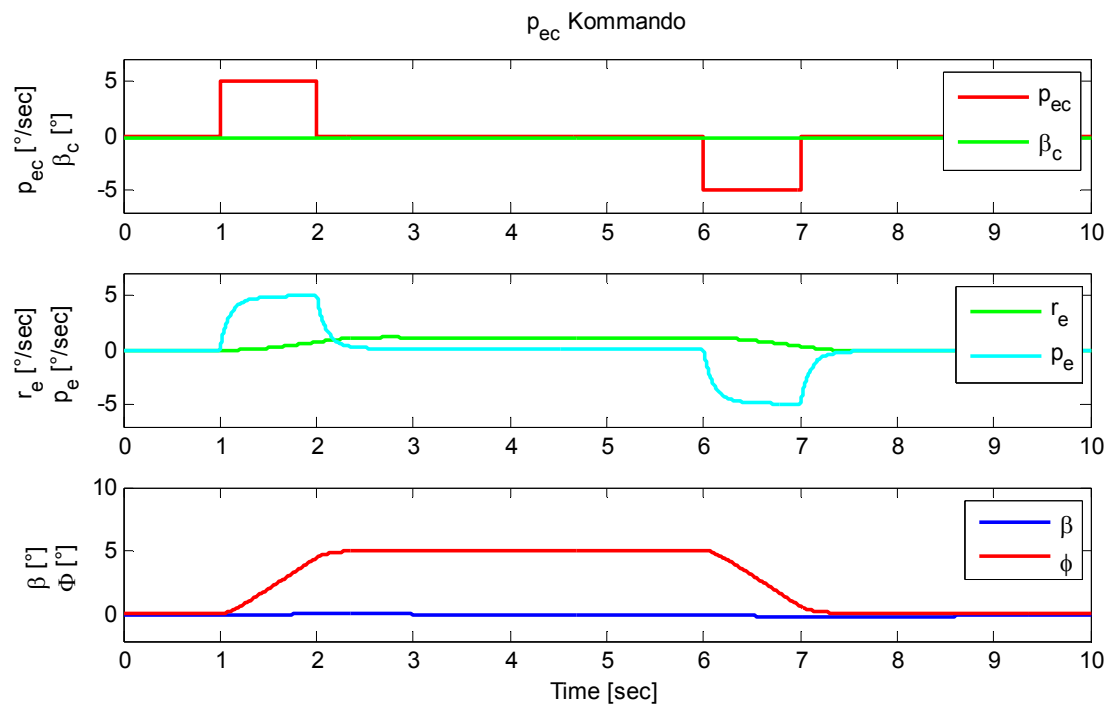
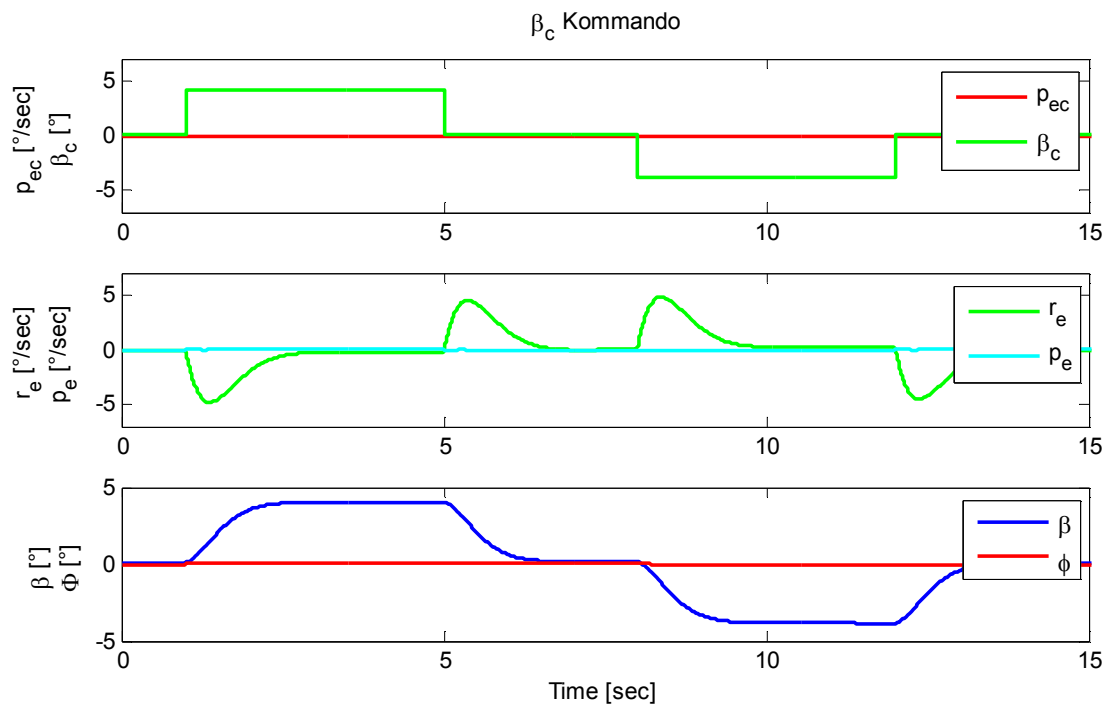


Abbildung 6-10: p_{ec} -Kommando

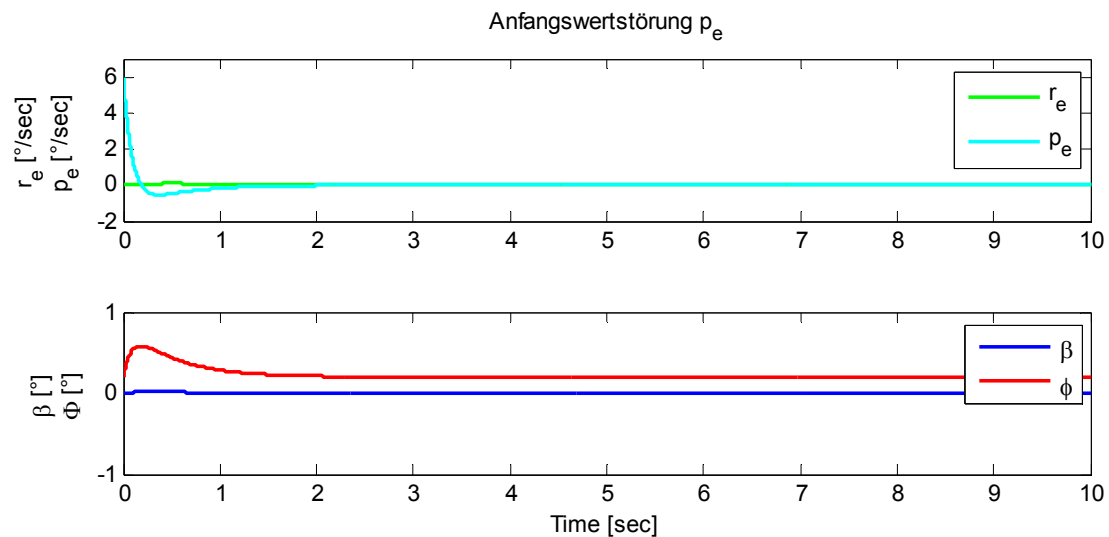
Der Verlauf der Kommandogrößen p_{ec} und β_c sowie der Zustände der Seitenbewegung (p_e, r_e, β, Φ) ist für eine unterbrochene Rechteckdoublette der Führungsgröße p_{ec} , erzeugt durch einen entsprechenden, rein lateralen Steuerknüppelausschlag, in Abbildung 6-10 dargestellt. Infolge der Entkopplung der Rollbewegung von den Zuständen der Gierachse – dies bezieht sich insbesondere auf den Schiebewinkel β – sind die Änderungen des Schiebewinkels während des Ein- und Ausleitens des Kurvenfluges vernachlässigbar gering. Die bei unregelmäßigen Flugzeugen konventioneller Bauart oftmals auftretende, aber unerwünschte Gierbewegung in oder aus der Kurvenrichtung, welche im Englischen als *Provere Yaw* oder *Adverse Yaw* bezeichnet wird, ist bei geregelten Flugzeugen nicht feststellbar. Für die unregelmäßige DA42 kann aus Abbildung 3-3 in Kapitel 3 ein *Adverse Yaw* Verhalten identifiziert werden. Im Vergleich dazu ist dies bei der geregelten DA42 entsprechend Abbildung 6-10 nicht zu erkennen. Die gewünschte Kopplung des Hängewinkels Φ auf die Gierrate r_e ist klar ersichtlich, so kommt es durch die Änderung des Hängewinkels zu einer entsprechend koordinierten Gierrate. Aufgrund der gemäß den Anforderungen neutralstabil ausgelegten Spiralbewegung und Minimierung des Schiebewinkelanteils im Spiraleigenvektor wird ein stationärer Kurvenflug ohne Steuereingabe bzw. ohne Änderung des Hängewinkels und mit $\beta \approx 0$ sichergestellt. Die Entkopplung der Dynamik der Rollachse von der Gierdynamik (Schiebewinkel β) sichert die gewünschte *Geschwindigkeitsvektor-Rolle* und bestätigt somit das Potential von MR DEA.

Abbildung 6-11: β_c -Kommando

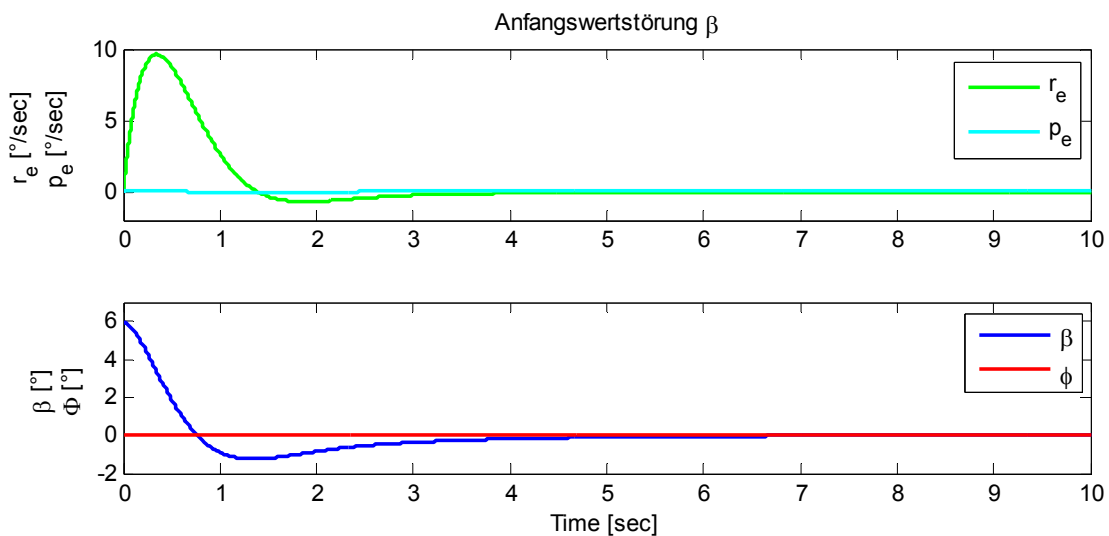
Der zeitliche Verlauf der Zustände aufgrund zweier gegensinniger Rechteckimpulse der Kommandogröße β_c durch eine reine Pedaleingabe ist in Abbildung 6-11 gezeigt. Ein β_c -Kommando führt zur Anregung der Roll-Gier-Schwingung des geregelten Flugzeugs, welche von den Zuständen der Gierachse r_e und β dominiert wird, die Anteile der Zustände der Rollachse p_e und Φ sind dabei mit sehr guter Näherung null (vgl. Abbildung 6-6: *Eigenvektor der Roll-Gier-Schwingung*). Die Simulationsergebnisse zeigen deutlich, dass die Rollrate p_e und der Hängewinkel Φ aufgrund des Reglerdesigns bei einem β_c -Kommandos unverändert bleiben und somit in Anbetracht des horizontalen Geradeausflugs als Ausgangszustand für den betrachteten Zeitraum mit guter Näherung null sind. Das geregelte Flugzeug führt zur Erzeugung des kommandierten Schiebewinkels eine reine Gierbewegung um die z_e -Achse aus. Im Vergleich dazu erzeugt beim ungeregelten Flugzeug eine reine Pedaleingabe (vgl. Abbildung 3-4), welche ausschließlich auf das Seitenruders ζ_c wirkt, sowohl eine Änderung der Gierzustände als auch eine Änderung der Rollzustände, da die Bewegungsachsen nicht voneinander entkoppelt sind. Aufgrund der vorliegenden Simulationsergebnisse bzgl. des Kommandoverhaltens der Gierachse kann der Reglerentwurf hinsichtlich des Auslegungsziels einer um die z_e -Achse entkoppelten Gierdynamik bestätigt werden.

Um abschließend die Umsetzung der Entkopplung von Roll- und Gierdynamik zu bestätigen, werden im Folgenden die Ergebnisse linearer Simulationen mit einer Anfangswertstörung in der Rollrate p_e (Abbildung 6-12) und in dem Schiebewinkel β (Abbildung 6-13) vorgestellt.

In Abbildung 6-12 wird gezeigt, dass eine Anfangswertstörung in p_e wie gefordert vernachlässigbar geringe Einflüsse auf die Zustände der Gierachse hat, so bleiben die Zustände der Gierachse r_e und β mit sehr guter Näherung unverändert.

Abbildung 6-12: Anfangswertstörung in p_e

Im Gegenzug hat eine Anfangswertstörung in β keine erkennbaren Auswirkungen auf die Zustände der Rollachse p_e und Φ , dies ist in Abbildung 6-13 ersichtlich. Die Reglerstruktur und die Berechnungsmethodik der Verstärkungsfaktoren kann somit in Bezug auf die lineare Simulation mit Anfangswertstörungen ebenfalls bestätigt werden.

Abbildung 6-13: Anfangswertstörung in β

6.5.3 Folgerungen aus der *Linearen Analyse des geschlossenen Regelkreises*

Auf Basis der *Linearen Analyse des geschlossenen Regelkreises* konnte gezeigt werden, dass die Reglerstruktur und die Auslegungsmethodik *MR DEA* die gewünschte Eigenstruktur aufprägen und das Parameterdesign bzgl. Wirksamkeit und Funktionalität der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* gleichwertig ist. Hinsichtlich Handhabbarkeit, Handhabungsaufwand und Anschaulichkeit ist die Auslegungsmethodik *MR DEA* der *klassischen Eigenstrukturvorgabe* jedoch überlegen. Ferner lässt sich feststellen, dass alle zur Realisierung des Auslegungsprozesses vorgenommenen Vernachlässigungen und Vereinfachungen auf Grundlage

der Ergebnisse, welche die Umsetzung der spezifizierten Eigenstruktur bestätigen, als zulässig einzustufen sind. Die für den Auslegungsprozess vernachlässigten Größen sind dabei die Ersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ und die verbleibenden unbeachteten Kopplungseffekte zwischen Roll- und Gierdynamik. Die Vereinfachungen beziehen sich auf die Nachführung der Verstärkungsfaktoren als lineare Funktionen und somit auf die Abweichung zwischen idealen und realisierten Verstärkungsfaktoren entsprechend Kapitel 6.4. Eine weitere Verifikation der Zulässigkeit der Vereinfachungen und Vernachlässigungen erfolgt in Kapitel 8 – *Nichtlineare Analyse*.

Im nächsten Kapitel wird auf Grundlage des Reglerentwurfs und unter Berücksichtigung von der Aktuatordynamik, der Verzögerung (Totzeit) des Rechners zur Ausführungen des Regelungsalgorithmus (Flugsteuerungsrechner) und einer umfangreichen Unsicherheitsmodellierung eine Robustheitsanalyse zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften durchgeführt. Die Unsicherheitsmodellierung erfasst dabei Abweichungen zwischen der Realität und dem für das Reglerdesign verwendeten Modell.

7 Analyse und Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften

In diesem Kapitel wird der Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften für die gesamte Envelope des geregelten Flugzeugs erbracht. Er wird durch die Prüfung *Robuster Konformität (RK)* des geschlossenen Regelkreises vorgenommen und erfolgt auf Basis des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta r}$.

7.1 Einführung in die Robustheitsanalyse

Der Reglerentwurf, bestehend aus Reglerstruktur und Auslegung der Reglerparameter mittels der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe*, sichert adäquate Flugeigenschaften und ein angemessenes Handling für die gesamte Envelope des geregelten Flugzeugs. Die Auslegung der Verstärkungsfaktoren erfolgt dabei auf Grundlage linearer Zustandsraummodelle. Das nichtlineare Simulationsmodell der *DA42*, welches als Quelle für die Erstellung der linearen Zustandsraummodelle dient, repräsentiert dabei die nominelle Streckendynamik. In Anbetracht der Tatsache, dass das für die Auslegung und Validierung verwendete nichtlineare Simulationsmodell der *DA42* trotz großer Modellierungstiefe nicht vollständig die Dynamik des realen Flugzeugs wiedergibt, muss nachgewiesen werden, dass trotz der Abweichungen zwischen Realität und Modell Mindestanforderungen an die Flugeigenschaften und das Stabilitätsverhalten des geregelten Flugzeugs gewährleistet sind. Die einzuhaltenden Mindestanforderungen sind dabei in Anlehnung an die *Military Specifications* und den Gütegrad der Flugeigenschaften (Abstufungen *Level 1* bis *Level 3*) festgelegt. Die Differenzen zwischen Realität und Modell resultieren unter anderem aus nicht abgebildeten physikalischen Phänomenen, wie etwa dem dynamischen Strukturverhalten, aus Abweichungen, beispielsweise infolge fehlerhaft oder ungenau identifizierter aerodynamischer Kenngrößen, sowie aus im Rahmen der Modellierung durchgeführten Vereinfachungen und Vernachlässigungen flugmechanischer und flugdynamischer Effekte. Die Vereinfachungen und Vernachlässigungen bzgl. der Modellierung beziehen sich dabei auf die Aerodynamik und die Triebwerksdynamik, wobei die Realität durch Systeme reduzierter Ordnung vereinfacht wiedergegeben wird und nachgeordnete Einflüsse auf die Flugdynamik vernachlässigt werden.

Zur Gewährleistung eines sicheren (Flug-) Betriebs und zur Zulassung des Regelungssystems mit den zugehörigen Regelungsalgorithmen ist ein umfassender Nachweis notwendig, der die (robuste) Einhaltung eines Mindestmaßes an geforderten Stabilitätseigenschaften für den gesamten Betriebsbereich darlegt. Dabei ist zu zeigen, dass der auf Basis von linearen

Zustandsraummodellen ausgearbeitete, nachgeführte lineare Regler mit nichtlinearen Rückführungen die Mindestanforderungen an das geregelte System trotz Abweichungen zwischen wahrer Streckendynamik und Simulationsmodell sicherstellt. Die Unterschiede zwischen dem Modell und der wahren Dynamik des Systems können durch sogenannte *Unsicherheiten* erfasst und wiedergegeben werden. Erfüllt das geregelte System die Mindestanforderungen trotz vorhandener Unsicherheiten, verfügt das Flugzeug über *robuste Stabilitätseigenschaften*.

Zum Nachweis ausreichend gesicherter Stabilitätseigenschaften wird zunächst eine Analyse der Stabilitätsreserven durch die Untersuchung von Amplituden- und Phasenrand, siehe hierzu [13], durchgeführt (*SISO*-Robustheitsanalyse). Dazu ist es notwendig, die als Zustandsraummodell (*LZI*-System) beschriebene Seitenbewegung, welche über mehr als eine Eingangsgröße sowie mehr als eine Ausgangs- bzw. Zustandsgröße verfügt (Mehrgrößensystem), durch entsprechende Eingrößensysteme (Übertragungsfunktionen) darzustellen. Eingrößensysteme sind Systeme mit nur einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße und werden im englischen Sprachgebrauch als *Single-Input-Single-Output*-Systeme, kurz *SISO*-Systeme, bezeichnet. Die *SISO*-Stabilitätsanalyse auf Basis von Amplituden- und Phasenrand hat sich in der Luftfahrt als probates und praktisches Werkzeug zum Nachweis ausreichender Stabilitätseigenschaften eines geregelten Fluggeräts bewährt. Sie stellt die Grundlage für eine behördliche Zulassung des geregelten Systems dar, aus diesem Grund wird sie hier behandelt.

Die Seitenbewegung eines Flugzeugs stellt sich als ein Mehrgrößensystem dar (mehr als eine Ein- und eine Ausgangs- bzw. Zustandsgröße), vgl. Gl. (2.8) und (6.7), im Englischen als *Multiple-Input-Multiple-Output*-System, kurz *MIMO*-System, bezeichnet. Ein Mehrgrößensystem muss zur Durchführung der *SISO*-Stabilitätsanalyse in entsprechende *SISO*-Systeme modifiziert werden. Durch die Überführung in *SISO*-Systeme bleiben multipel und verkoppelt wirkende Unsicherheiten sowie die variable Richtung des Eingangsvektors (bestehend aus Quer- und Seitenruderausschlag) ohne Berücksichtigung. Es erfolgt somit kein hinreichender Nachweis robuster Stabilität. Zur Umsetzung einer hinreichenden Robustheitsaussage ist deshalb eine *MIMO*-Robustheitsuntersuchung durchzuführen. Den notwendigen und hinreichenden Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften eines *MIMO*-Systems, unter Berücksichtigung einer vom Anwender vorgegebenen Grenze für die Stabilitätseigenschaften, ermöglicht die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse. Sie ist eine Weiterentwicklung der μ -Analyse (siehe [49]) und wird in dieser Arbeit detailliert eingeführt und hergeleitet.

In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst kurz die durchgeführte *SISO*-Robustheitsanalyse dargelegt, anschließend folgt die *MIMO*-Robustheitsanalyse ($\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse) mit vorheriger Einführung des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$.

7.2 SISO-Robustheit

Für die Zulassung eines Flugsteuerungs- und Flugregelungssystems moderner Flugzeuge ist es notwendig, robuste Stabilität des geregelten Systems zu belegen. Der Nachweis adäquaten Stabilitätsverhaltens erfolgt im Bereich der Flugregelung zumeist auf Basis von Nichols-Diagrammen, mittels derer ein ausreichender Abstand zum *kritischen Punkt -1* nachgewiesen wird. Eine ausführliche Abhandlung zum Nichols-Diagramm ist in [13] zu finden. Basis für den Stabilitätsnachweis des geschlossenen Regelkreises im Nichols-Diagramm ist das Nyquist-Kriterium, welches in Anlehnung an [22] wie folgt lautet: *Ist der offene Kreis stabil oder hat bis zu maximal zwei Ursprungspole bzw. einen instabilen Pol, so ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, wenn die Ortskurve des offenen Kreises den kritischen Punkt -1 links liegen lässt (und diesen nicht durchdringt)*. Dabei ist unter *stabil*, *asymptotisch stabil* zu verstehen. Die Definition von *stabil* (Ljapunov, 1892), vgl. [50], bzw. *asymptotisch stabil* ist wie folgt: „Der Gleichgewichtszustand eines Systems heißt stabil, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass bei beliebigem Anfangszustand $\|x_0\| < \delta$ die Bewegung des Systems $\|x(t)\| < \varepsilon$ erfüllt. Asymptotisch stabil: $\|x(t)\| = 0$ für $t \rightarrow \infty$ “, [50]. Hervorzuheben ist, dass das Nyquist-Kriterium auch im Falle vorhandener Totzeiten des offenen Kreises Gültigkeit behält. Überträgt man das Nyquist-Kriterium in das Nichols-Diagramm, so muss der kritische Punkt mit den Koordinaten 0 dB und -180° , welcher die Stabilitätsgrenze repräsentiert, rechts von dem Frequenzgang des offenen Kreises liegen, wenn man sich auf diesem von kleinen zu großen Frequenzen bewegt, damit für den geschlossenen Kreis Stabilität gewährleistet ist, vgl. [13] und [51]. Die zur Durchführung der SISO-Robustheitsanalyse notwendigen (SISO-) Übertragungsfunktionen des offenen Kreises werden für die untersuchte geregelte Flugzeugseitenbewegung (MIMO-System) durch Aufschneiden des Regelkreises, sogenannte „Bottleneck-Cuts“, erstellt, siehe hierzu [51]. Der Schnitt (Bottleneck-Cut) zur Erstellung der jeweiligen Übertragungsfunktion des offenen Kreises erfolgt üblicherweise unmittelbar vor der zu regelnden Strecke, um die Anzahl an durchzuführenden Schnitten möglichst gering zu halten, dabei ist eine berücksichtigte Aktuatordynamik als Teil der Regelstrecke zu betrachten, dies ist in Abbildung 7-1 dargestellt.

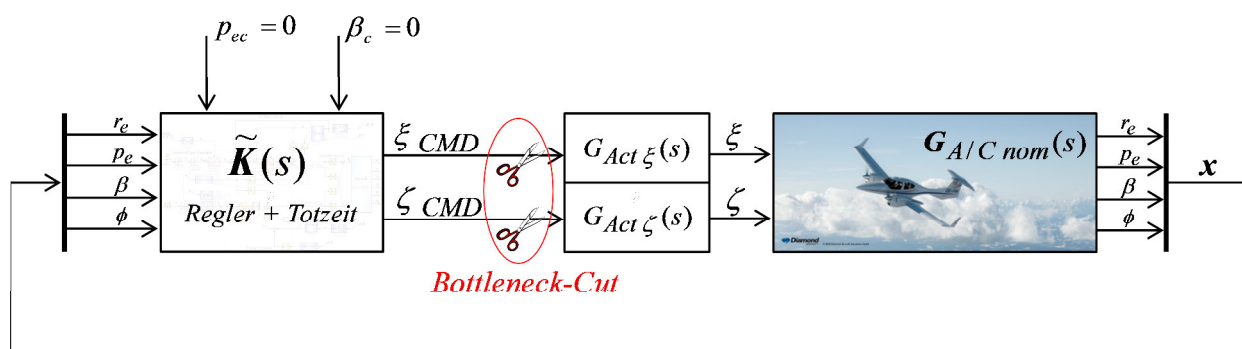


Abbildung 7-1: Bottleneck-Cut für SISO-Robustheitsuntersuchung

In Bezug auf die Seitenbewegung erfolgen je ein Schnitt für das Querruder- und einer für das Seitenruderkommandosignal, wobei der jeweils andere geschlossen verbleibt. So erhält man (*SISO*-) Übertragungsfunktionen, bei denen der Eingang das Kommandosignal des Aktuators des jeweiligen aufgeschnittenen Signalpfades ist und der Ausgang der vom Regler in Abhängigkeit des Flugzustand bestimmte Stellflächenausschlag. Die Führungsgrößen bleiben unberücksichtigt.

Zur Gewährleistung einer hinsichtlich des realen Systems aussagekräftigen *SISO*-Robustheitsanalyse wird der Regelkreis, bestehend aus der Dynamik des unregulierten Flugzeugs und des Reglerübertragungsverhaltens, um die Aktuatordynamik und eine äquivalente Totzeit T_t , die Verzögerungen durch die Sensoren, die digitale Signalverarbeitung (Filterung) und die Ausführung der Regelalgorithmen (Rechenzeit) beinhaltet, erweitert. Der verwendete Wert der Totzeit von $T_t = 30$ ms entstammt Auswertungen aus sogenannten *Hardware in the Loop* Simulationen, die am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik durchgeführt wurden und kann durch [52] und [53] als konservativer Wert bestätigt werden. Der *SISO*-Robustheitsnachweis erfolgt für einzelne Flugzustände (Trimmpunkte), welche sich feinmaschig und gleichmäßig über die Envelope verteilen, um somit eine Stabilitätsaussage für den gesamten Flugbereich sicherzustellen.

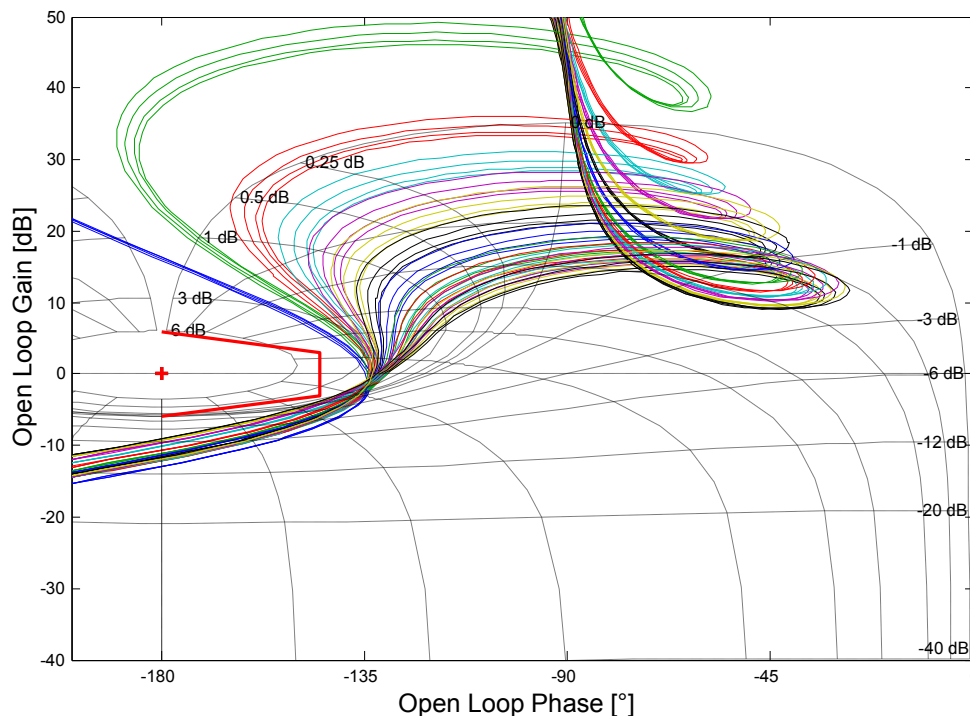


Abbildung 7-2: Bottleneck-Cut Seitenrudersignal (Quelle: [54])

Im vorliegenden Fall ist der geschlossene Kreis stabil, wenn die Ortskurve der Übertragungsfunktion im Nichols-Diagramm den kritischen Punkt (0 dB und -180° , dies entspricht „-1“ in der Gaußschen Ebene) rechts liegen lässt. Um eine Auslegung auf der sicheren Seite zu gewährleisten und somit die gewünschte robuste Stabilität sicherzustellen, wird die Einhaltung einer ausreichend großen Amplituden- und Phasenreserve in Form eines geforderten

Mindestabstands zwischen Frequenzgang und kritischem Punkt geprüft. Dieser Mindestabstand wird durch den sogenannten „*Nichols-Diamanten*“ in Anlehnung an [52], [53] und [55] festgelegt. Die Eckpunkte des Diamanten sind: ± 6 dB bei -180° und ± 3 dB bei -145° . Unter Berücksichtigung der speziellen Randbedingungen der Allgemeinen Luftfahrt kann davon ausgegangen werden, dass Modellunsicherheiten bzw. die Abweichungen des verwendeten Simulationsmodells zur Realität, aufgrund des begrenzten Entwicklungsbudgets, größer ausfallen, verglichen mit der Reglerentwicklung militärischer Hochleistungsflugzeuge oder moderner Transportflugzeuge. Um die Aussagekraft bzw. die Gültigkeit der Robustheitsuntersuchung trotz zu erwartender größerer Unsicherheiten zu gewährleisten, wurden die maßgeblich auf die Stabilität des Flugzeugs einwirkenden aerodynamischen Derivativa der Seitenbewegung ($C_{n\beta}, C_{nr}, C_{n\xi}, C_{n\zeta}, C_{Y\zeta}, C_{lp}, C_{l\xi}$) zusätzlich perturbiert. Eine detaillierte Beschreibung der durchgeführten *SISO*-Robustheitsanalyse ist in [54] zu finden. In [54] wird gezeigt, dass die geforderte *SISO*-Robustheit unter Berücksichtigung der abgezielten Stabilitätsreserven (Nichols-Diamant) und der zusätzlichen Perturbation der Aerodynamik für das Flugzeug sowohl mit nachgeführtem Regler als auch für den Fall mit dem Ersatzregler (feste Verstärkungsfaktoren) über den gesamten Flugbereich eingehalten wird.

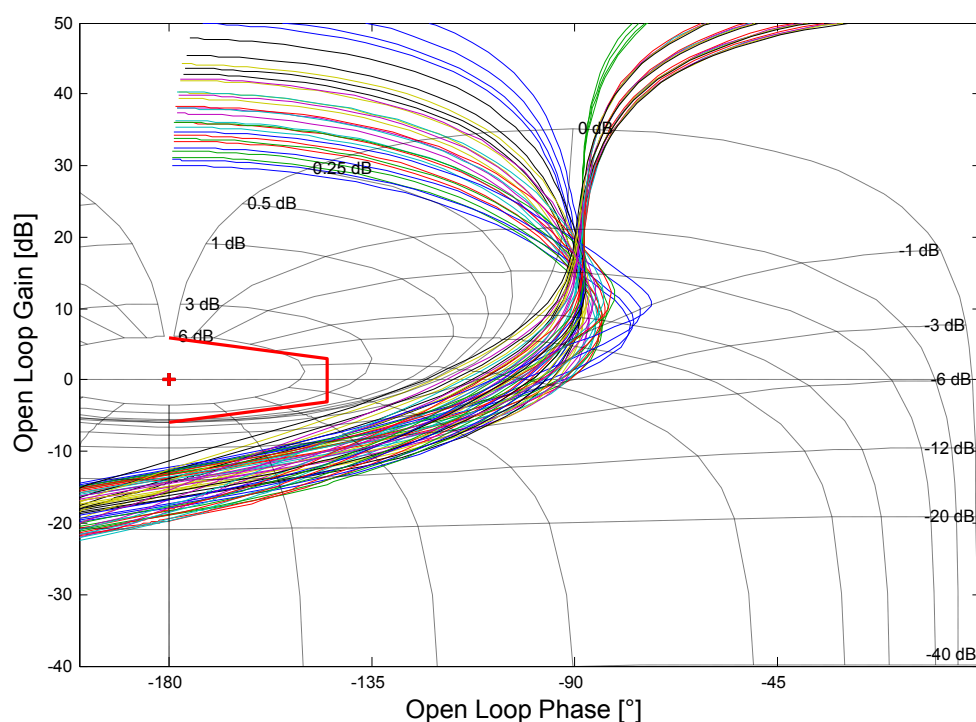


Abbildung 7-3: „Bottleneck-Cut“ Querrudersignal (Quelle: [54])

Das Nichols-Diagramm für die Übertragungsfunktionen, welches sich aus einem *Bottleneck-Cut* des Seitenrudersignals (bei geschlossenem Querruderpfad) für die ungünstigsten Kombinationen aus der Perturbation der Aerodynamik und den betrachteten Flugzuständen ergeben, ist in Abbildung 7-2 dargestellt. Es ist eindeutig zu erkennen, dass keine der Ortskurven den Nichols-Diamanten schneiden und somit das betrachtete *SISO*-System für den geschlossenen Kreis mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren als robust stabil eingestuft werden kann. Der dazugehörige

Fall für einen *Bottleneck-Cut* des Querrudersignals (bei geschlossenem Seitenruderspfad) ist in Abbildung 7-3 gezeigt, auch hier erfüllt der geschlossene Kreis mit nachgeführtem Regler die Bedingungen für robuste Stabilität.

Die *SISO*-Robustheitsanalyse ist kein hinreichender Nachweis für robuste Stabilität, deshalb wird im nächsten Kapitel eine Methodik zum notwendigen und hinreichenden Nachweis robuster Stabilität bzw. robuster Stabilitätseigenschaften vorgestellt. Dabei ermöglicht die Analyse *robuster Stabilitätseigenschaften* im Gegensatz zur Untersuchung *robuster Stabilität*, die Prüfung anwendungsspezifischer (Mindest-) Anforderungen an ein System. Im Anschluss an die Einführung der Methodik folgt der Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften der geregelten Seitenbewegung des Flugzeugs.

7.3 MIMO-Robustheit

Robuste Stabilität eines Mehrgrößensystems (*MIMO*-System) kann im Allgemeinen durch die Analyse der entsprechenden, mittels *Bottleneck-Cuts* bestimmten Eingrößensysteme (*SISO*-Systeme) nicht hinreichend nachgewiesen werden, dies geht eindeutig aus dem Beispiel „*Spinning Satellite*“ von Doyle (vgl. [49] und [56]) in [57] hervor. Grund hierfür ist, dass multiple und verkoppelt auftretende Unsicherheiten und variable Eingangsrichtungen eines Mehrgrößensystems bei der Analyse als Eingrößensystem bzw. als mehrere Eingrößensysteme unberücksichtigt bleiben. Der hinreichende Nachweis robuster Stabilität eines Mehrgrößensystems, die sogenannte *MIMO*-Robustheit, kann mittels der μ -Analyse erfolgen, siehe hierzu [49]. Die μ -Analyse wird im folgenden Unterkapitel (Kapitel 7.3.1) kurz dargelegt. Eine Beschreibung und Abhandlung zur Untersuchung *Robuster Stabilität* mittels der μ -Analyse ist in [9], [49], [58], [59], [60] und [61] zu finden. Die Darstellungen zur *MIMO*-Robustheit auf Basis des strukturierten Singulärwerts μ sollen im Rahmen dieser Arbeit als Einführung in die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse verstanden werden, welche eine innovative Weiterentwicklung der μ -Analyse ist. Die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ermöglicht den notwendigen und hinreichenden Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* unter Berücksichtigung einer vom Anwender spezifizierten Grenze, welche die Mindestanforderungen an ein System beschreibt, und basiert somit nicht auf den Eigenschaftskategorien *stabil* bzw. *nicht stabil*, welche im Rahmen der μ -Analyse geprüft werden. Die Herleitung und Beschreibung zur $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse und des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ erfolgt in Kapitel 7.3.2. Der Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* des geregelten Flugzeugs wird im Anschluss vorgestellt.

7.3.1 Grundlagen der MIMO-Robustheit und der μ -Analyse

In Anlehnung an die Definition von *stabil* bzw. *Stabilität* in Kapitel 7.2 ist ein *LZI*-System (*asymptotisch*) *stabil* bzw. erfüllt die Forderung nach *Ein-/Ausgangs-Stabilität*, wenn alle Eigenwerte links der Imaginär-Achse liegen ($Re(\lambda_i) < 0$), vgl. [13] und [50]. *Robuste Stabilität* (*RS*) eines linear zeitinvarianten dynamischen Systems ist dann erfüllt, wenn die Eigenwerte des

Systems sowohl für den nominalen Fall (*Nominelle Stabilität*), als auch unter Berücksichtigung vorgegebener Unsicherheiten links der Imaginär-Achse liegen, vgl. [49] und [59]. Der Nachweis *Robuster Stabilität* eines Mehrgrößensystems (*MIMO-Systems*) durch die μ -Analyse basiert auf dem *MIMO-Nyquist-Stabilitäts-Kriterium*, siehe hierzu [49], welches sich für den in Abbildung 7-4 dargestellten Standard-Regelkreis in Anlehnung an [49] wie folgt formulieren lässt: *Ist n_{pole} die Anzahl der instabilen Pole von $\mathbf{G}_0(s)$, mit $\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s)$, wobei es sowohl für $\mathbf{G}(s)$ und $\mathbf{K}(s)$ als auch bzgl. $\mathbf{G}_0(s)$ zu keiner Pole-Nullstellen-Kürzung kommt, so ist der geschlossene Regelkreis dann und nur dann stabil, wenn die Ortskurve von $\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s))$ den Ursprung n_{pole} -mal gegen den Uhrzeigersinn umkreist und den Ursprung nicht schneidet.*

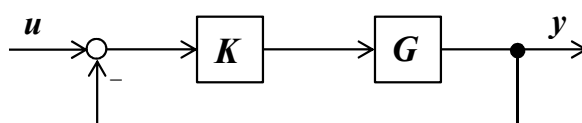


Abbildung 7-4: Standard-Regelkreis

Für den Nachweis *Robuster Stabilität* ist zu zeigen, dass das System unter Berücksichtigung der (Modell-) Unsicherheiten ebenfalls stabil ist. Dazu wird der in Abbildung 7-4 dargestellte Standard-Regelkreis (exemplarisch) um eine multiplikative, auf die Strecke $\mathbf{G}(s)$ wirkende Unsicherheit erweitert, siehe Abbildung 7-5. Dabei ist $\mathbf{W}(s)$ die dynamische Unsicherheitsgewichtung und $\mathbf{\Delta}(s)$ die Unsicherheitsmatrix.

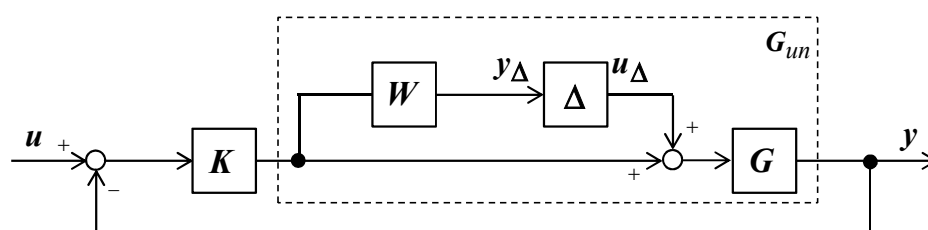


Abbildung 7-5: Regelkreis mit multiplikativer Unsicherheit

Durch Berücksichtigung der multiplikativen Unsicherheit ergibt sich die unsichere Strecke $\mathbf{G}_{un}(s)$ des in Abbildung 7-5 visualisierten Regelkreis zu:

$$\mathbf{G}_{un}(s) = \mathbf{G}(s) (1 + \mathbf{\Delta}(s) \mathbf{W}(s)) \quad (7.1)$$

In Abhängigkeit des jeweiligen Anwendungsfalls gestaltet sich abweichend vom Standard-Regelkreis in Abbildung 7-4 die spezifische Struktur des geschlossenen Regelkreises. Darauf aufbauend erfolgt die Realisierung der fallbezogenen Unsicherheitsmodellierung zur Analyse der Robustheit des Systems. Es ergibt sich somit in Abhängigkeit des regelungstechnischen Einsatzfalls sowie der zugehörigen Unsicherheitsmodellierung eine anwendungsspezifische Darstellung des unsicheren Regelkreises. Durch die zweckmäßige Transformation der jeweiligen Regelkreisstruktur in die im Bereich der *Robusten Regelung* etablierte allgemeingültige $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur, siehe Abbildung 7-6, ist gewährleistet, dass verschiedenste Regelkreise mit Unsicherheit mittels standardisierter Verfahren/Methoden auf *robuste Stabilitätseigenschaften*

geprüft werden können. Die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist eine abstrakte Darstellung unsicherer Systeme, bei der bekannte Systemteile und Unsicherheiten separiert sind. \mathbf{M} und Δ sind dabei Übertragungsmatrizen der Laplace-Variablen s . Durch die Analyse der *Robusten Stabilität* auf Grundlage der $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur können standardisierte Programme/Funktionen (Software) eingesetzt werden. Eine ausführliche Darstellung zur Transformation beliebig gearteter Regelkreise in die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist in [62] und [49] zu finden. Eine detaillierte Abhandlung zu Unsicherheiten, deren Eigenschaften und Modellierung sowie zur Unsicherheitsgewichtung ist in [49] niedergelegt.

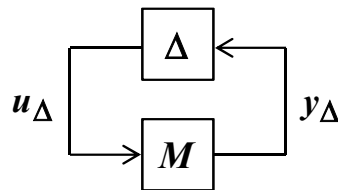


Abbildung 7-6: $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur

Unter Berücksichtigung des *MIMO*-Nyquist-Stabilitäts-Kriteriums ergibt sich nach [49] für die positiv geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur und somit als Robustheitsaussage für *MIMO*-Systeme folgende Bedingung für die *Robuste Stabilität* (RS) eines Regelkreises mit Unsicherheiten: „Unter der Annahme, dass $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ stabil sind und die Perturbation von Δ sich so verhält: Ist Δ' eine zulässige Perturbation, dann ist auch $c \Delta'$ eine zulässige Perturbation mit $|c| \leq 1$, wobei c ein reelles Skalar ist. So ist der geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Kreis für alle zulässigen Perturbationen dann und nur dann stabil, wenn die Ortskurve von $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta(s))$ für alle Δ den Ursprung nicht umkreist und nicht schneidet.“, [49].

Abweichend zur obigen Bedingung für *Robuste Stabilität* lässt sich diese auf der Grundlage des sogenannten *Small-Gain-Theorems*, siehe [49], [59] und [61], ebenfalls nachweisen. Das *Small-Gain-Theorem*, welches sich aus dem *MIMO*-Nyquist-Stabilitäts-Kriterium ableiten lässt, ermöglicht den Nachweis *Robuster Stabilität* auf Basis des maximalen Singulärwerts bzw. der H_∞ -Norm der Übertragungsmatrizen $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$. Es lautet wie folgt: *Unter der Annahme, dass $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ stabil sind, ist der geschlossene Kreis ($\mathbf{M}\Delta$ -Struktur) dann stabil, wenn*

$$\|\mathbf{M}(s)\|_\infty \|\Delta(s)\|_\infty < 1. \quad (7.2)$$

Die H_∞ -Norm einer Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(s)$ ist dabei nach [49], [58] und [59] wie folgt definiert:

$$\|\mathbf{F}(s)\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{F}(j\omega)) \quad (7.3)$$

Die H_∞ -Norm der Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(s)$ ist dabei die kleinste obere Schranke der maximalen Singulärwerte aller Matrizen $\mathbf{F}(j\omega)$ über alle Frequenzen ω .

Der Nachweis robuster Stabilität mit dem *Small-Gain-Theorem* unterliegt zumeist potentiell Konservatismus, vgl. [9] und [60], da eine mögliche blockdiagonale Struktur der Unsicherheitsmatrix unberücksichtigt bleibt. Oftmals weist die Unsicherheitsmatrix $\Delta(s)$

praktisch relevanter Systeme eine Blockdiagonalstruktur auf. Setzt sich beispielsweise ein System aus mehr als zwei Komponenten (Aktuatorik, Flugdynamik, etc.) zusammen, mit jeweils unstrukturierter Unsicherheitsmatrix, so ergibt sich für die Unsicherheitsmatrix des Gesamtsystems eine Blockdiagonalstruktur. Des Weiteren resultiert aus der Modellierung der Unsicherheiten von Kenngrößen, wie etwa aerodynamischer Derivativa, mittels parametrischer Unsicherheiten zumeist eine Blockdiagonalstruktur der Unsicherheitsmatrix. Der Nachweis *Robuster Stabilität* eines *LZI*-Systems kann zur Begrenzung des Konservatismus durch Anwendung der μ -Analyse und des strukturierten Singulärwerts μ , welcher im Folgenden angegeben wird und erstmalig von Doyle in [63] präsentiert wurde (vgl. [49], [60]), umgesetzt werden.

Sei $\underline{\Delta}$ die Menge aller strukturierten Unsicherheitsmatrizen Δ der Form

$$\underline{\Delta} = \{\text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_1, \dots, \delta_k \mathbf{I}_k, \Delta_1, \dots, \Delta_k) : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}. \quad (7.4)$$

Der strukturierte Singulärwert der Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unter Berücksichtigung der blockdiagonalen Unsicherheitsmatrix $\Delta \in \underline{\Delta}$ ist wie folgt definiert, vgl. [49]:

$$\mu(\mathbf{M}) := \begin{cases} \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0\}} \\ 0 \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) \neq 0, \forall \Delta \in \underline{\Delta} \end{cases} \quad (7.5)$$

Die Nullstellen von $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta)$ sind identisch mit den Eigenwerten bzw. Polen der geschlossenen $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur, vgl. Kapitel 7.3.2. Der strukturierte Singulärwert μ entspricht dem Inversen des kleinsten maximalen Singulärwerts $\bar{\sigma}(\Delta)$, der den Zusammenhang $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0$ erfüllt. D.h., der strukturierte Singulärwert μ – bestimmt für alle Punkte bzw. Frequenzen der Imaginär-Achse und bemessen am Inversen des kleinsten maximalen Singulärwerts $\bar{\sigma}(\Delta)$ – ist ein Maß für das kleinste $\Delta \in \underline{\Delta}$, welches mindestens einen Eigenwert bzw. Pol des nominal stabilen Systems auf die Imaginär-Achse „verschiebt“.

Die hinreichende und notwendige Bedingung für *Robuste Stabilität* eines unsicheren Regelkreises ergibt sich, in Anlehnung an das *Small-Gain-Theorem* und unter Berücksichtigung strukturierter Unsicherheiten, wie folgt, vgl. [49]: *Unter der Annahme, dass $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ stabil sind, ist der geschlossene Kreis ($\mathbf{M}\Delta$ -Struktur) dann und nur dann stabil wenn*

$$\mu(\mathbf{M}(j\omega)) \|\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.6)$$

Eine direkte Berechnung von μ ist nicht möglich. Es kann jedoch eine obere und untere Schranke bestimmt werden. Für die obere Schranke gilt nach [49] unter Berücksichtigung der mittels numerischer Optimierungsverfahren zu bestimmenden Skalierungsmatrix \mathbf{D} , (siehe [59]):

$$\mu(\mathbf{M}) \leq \min_{\mathbf{D} \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}) \quad (7.7)$$

Gemäß [49] kann die untere Schranke mit der unitären \mathbf{U} Matrix, welche durch die Lösungen eines entsprechenden Optimierungsproblems (siehe [59]) zu bestimmen ist, wie folgt berechnet werden.

$$\mu(\mathbf{M}) \geq \max_{U \in \mathcal{U}} \rho(\mathbf{M}U) \quad (7.8)$$

Eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften von $\mu(\mathbf{M})$ und der bestmöglichen Berechnung einer oberen und unteren Schranke von $\mu(\mathbf{M})$ werden in [49], [58], [59] und [61] gegeben.

Durch die μ -Analyse und den Nachweis *Robuster Stabilität* erfolgt, wie bereits beschrieben, die Prüfung, ob ein Eigenwert des nominal stabilen Systems aufgrund der angenommenen Unsicherheiten auf der Imaginär-Achse zu liegen kommt bzw. diese überschreitet. Die Mindestanforderungen an die Flugeigenschaften, deren Einhaltung durch die Robustheitsanalyse nachzuweisen sind, sind jedoch nicht an die Imaginär-Achse gebunden. So ist beispielsweise hinsichtlich der Flugeigenschaften von Flugzeugen bzgl. der Roll-Gier-Schwingung ein Mindestmaß an relativer und absoluter Dämpfung gefordert und bzgl. der Spiralbewegung sogar eine begrenzte Instabilität zulässig. Im folgenden Kapitel wird der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$, der den Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* unter Berücksichtigung einer vom Anwender spezifizierten Grenze in der komplexen Ebene ermöglicht, detailliert eingeführt.

7.3.2 Robuste Konformität und $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse

Die μ -Analyse zum Nachweis der *Robusten Stabilität (RS)* ist aus flugdynamischer Sicht nicht immer zweckmäßig, da unter Berücksichtigung der angestrebten, exzellenten Flugeigenschaften die Imaginär-Achse in vielen Fällen nicht maßgeblich für die Gewährleistung akzeptabler Stabilitäts- und Robustheitseigenschaften des geregelten Systems ist. Im Folgenden wird deshalb die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse eingeführt, welche nicht auf der Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze basiert, sondern die Stabilitätseigenschaften des Systems gegenüber einer vom Anwender definierten Grenze Γ (Vorgabe/Spezifikation) überprüft und evaluiert, siehe Abbildung 7-7.

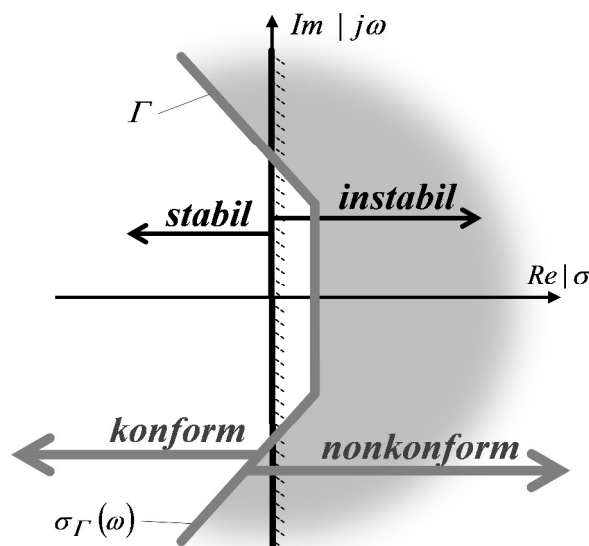


Abbildung 7-7: Systemeigenschaft: Konformität bzw. Nonkonformität sowie Veranschaulichung konformer bzw. nonkonformer Systemeigenschaften

Eine äquivalente Methodik zum Nachweis robuster Systemeigenschaften, basierend auf dem strukturierten Singulärwert μ und unter Berücksichtigung einer vom Anwender spezifizierten

Grenze, ist die sogenannte Ω -Stabilität, welche in [64] vorgestellt wurde. Dabei erfolgt die Festlegung der Eigenschaftsgrenze ausschließlich innerhalb der linken Halbebene der s -Ebene. Eine zugehörige mathematische Beweisführung zur Legitimation der Methodik ist nicht gegeben. In [65], [66] und [67] werden ebenfalls Methodiken zur Prüfung robuster Stabilitätseigenschaften unter Verwendung einer vom Anwender spezifizierten Eigenschaftsgrenze vorgestellt, wobei auch dabei die Grenzen in der linken Halbebene der komplexen Ebene betrachtet werden.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein lineares, zeitinvariantes, dynamisches System (LZI-System) \mathbf{G} mit der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

woraus sich folgende vereinfachende Notation ableitet: $\mathbf{G} \stackrel{S}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$. Die zugehörige Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ lautet:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (7.10)$$

Das System \mathbf{G} hat die n Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{A})$ und in Anlehnung an [49] werden die Pole p_i von \mathbf{G} identisch zu diesen Eigenwerten definiert: $p_i := \lambda_i(\mathbf{A})$. Für die folgende Einführung der (robusten) $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Stabilitätsanalyse wird ein strikt properes System mit $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ vorausgesetzt, weil alle praktisch relevanten bzw. physikalischen Systeme nicht sprungfähig sind, d.h.:

$$\mathbf{G} \stackrel{S}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \theta \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Die vom Anwender zu definierende Grenze für geforderte Stabilitätseigenschaften $\Gamma: \sigma_{\Gamma} = f(\omega)$, welche die Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze (der μ -Analyse) ersetzt und deshalb, in Anlehnung an diese, als stetige Funktion in $\omega \in (-\infty; +\infty)$ festzulegen ist, hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \{\omega | \omega \in (-\infty; +\infty)\}$. Da die Eigenwerte bzw. Pole eines physikalischen Systems stets rein reell oder paarweise konjugiert komplex auftreten, ist die Kurve Γ für angestrebte Stabilitätseigenschaften symmetrisch zur reellen Achse der komplexen Ebene zu wählen. Eine geschlossene Kurve Γ bzw. geschlossene Kurventeile, wie etwa ein Kreis, schließen sich entsprechend der Forderung nach einer stetigen Funktion aus. In Analogie zur Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze wird festgelegt: Liegen alle Pole p_i (bzw. Eigenwerte λ_i) des Systems \mathbf{G} links der vom Anwender spezifizierten Grenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$, so erfüllt das System die geforderten Stabilitätseigenschaften und wird fortan als **konform** bezeichnet. Der Terminus *konform* soll dabei die Erfüllung vorgegebener Anforderung an das geregelte System zum Ausdruck bringen. Liegt mindestens ein Pol p_k (bzw. Eigenwert λ_k) auf oder rechts der Grenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$, so erfüllt das System die spezifizierten Stabilitätseigenschaften nicht und wird entsprechend als **nonkonform** benannt. Die Grenzkurve $\Gamma: \sigma_{\Gamma}(\omega)$ wird in Analogie zur Stabilitätsgrenze, welche bei linearen Systemen die Imaginär-Achse repräsentiert, hier mit **Konformitätsgrenze** bezeichnet.

Aus obigen Betrachtungen lässt sich nachstehende Definition für *Konformität* bzw. *Nonkonformität* eines LZI-Systems \mathbf{G} ableiten, d.h. die Bedingung, wann ein System *konform* bzw. *nonkonform* mit den geforderten Systemeigenschaften ist.

Definition 1 „Konformität“: Sei die Konformitätsgrenze Γ eine stetige Funktion $\sigma_\Gamma(\omega)$ in der komplexen Ebene mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \{\omega | \omega \in (-\infty; +\infty)\}$, die zudem symmetrisch zur reellen Achse ist. Ein LZI-System \mathbf{G} mit den n Eigenwerten bzw. Polen $p_i := \lambda_i(\mathbf{A}) = \sigma_i + j\omega_i$ mit $\{\lambda_i(\mathbf{A})\} = \{s | \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \stackrel{!}{=} 0\}$ ist dann und nur dann konform bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$ wenn

$$\operatorname{Re}(p_i) = \operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) < \sigma_\Gamma(\omega_i), \quad \forall i \quad (7.12)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sigma_i < \sigma_\Gamma(\omega_i), \quad \forall i. \quad (7.13)$$

Aus der Definition 1 „Konformität“ lässt sich direkt die nachstehende Bedingung für die Konformität eines Systems \mathbf{G} ableiten:

Theorem 1 „Konformitätsbedingung“: Sei die Konformitätsgrenze Γ eine stetige Funktion $\sigma_\Gamma(\omega)$ in der komplexen Ebene mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \{\omega | \omega \in (-\infty; +\infty)\}$, die zudem symmetrisch zur reellen Achse ist. Ein lineares, zeitinvariantes, dynamisches System \mathbf{G} ist dann und nur dann konform (erfüllt die Konformität) bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$, wenn

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega). \quad (7.14)$$

Beweis: Die Pole bzw. Eigenwerte von \mathbf{G} sind nach [49] die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $N(s) := \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Ein LZI-System ist konform, wenn für alle i Pole bzw. Eigenwerte gilt: $\sigma_i < \sigma_\Gamma(\omega_i)$ (siehe Definition 1 / kein Eigenwert bzw. Pol auf bzw. rechts der Konformitätsgrenze) $\Rightarrow \mathbf{G}$ konform, wenn $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0, \forall s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega)$. ■

Betrachtung der positiv geschlossenen Rückführstruktur

Vor dem Hintergrund der zu prüfenden robusten Stabilitätseigenschaften des geregelten Systems wird im Folgenden die Bedingung für *Konformität* auf den positiv geschlossenen Regelkreis (siehe Abbildung 7-8) erweitert, d.h. ein System mit positiver Rückführung der Ausgangsgrößen \mathbf{y} auf die Steuergrößen \mathbf{u} betrachtet (Anmerkung: positive Rückführung aufgrund der späterer zu betrachtenden $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur).

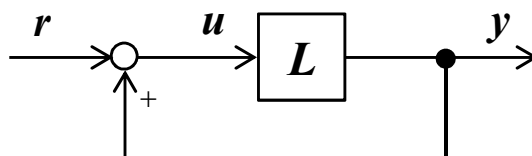


Abbildung 7-8: positiv geschlossene Rückführstruktur

Die Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s)$ beschreibt das Übertragungsverhalten des offenen Kreises und setzt sich unter Berücksichtigung des Standard-Regelkreises (siehe Abbildung 7-4) wie folgt zusammen:

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{K}(s) \quad (7.15)$$

Für die weiteren Betrachtungen der Konformität des geschlossenen Regelkreises ist der nachstehende Zusammenhang (*Lemma 1*) zwischen der Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s) = \mathbf{C}_{OL}(s\mathbf{I}_{OL} - \mathbf{A}_{OL})^{-1}\mathbf{B}_{OL}$ des offenen Kreises sowie den Matrizen der Zustandsraumdarstellung des offenen und geschlossenen Kreises notwendig:

Lemma 1: Betrachtet wird das LZI-System \mathbf{L} mit $\mathbf{L} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{OL} & \mathbf{B}_{OL} \\ \hline \mathbf{C}_{OL} & \theta \end{array} \right]$. Zwischen der Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s) = \mathbf{C}_{OL}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})^{-1}\mathbf{B}_{OL}$, den Matrizen \mathbf{A}_{OL} , \mathbf{B}_{OL} , \mathbf{C}_{OL} des offenen Kreises sowie der Systemmatrix $\mathbf{A}_{CL} = \mathbf{A}_{OL} + \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL}$ der entsprechenden Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Kreises nach Abbildung 7-8 gilt folgender Zusammenhang:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)) = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL} - \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} = \frac{N_{CL}(s)}{N_{OL}(s)} \quad (7.16)$$

Folgerung und Hinweis: Unter der Voraussetzung, dass es zu keiner Faktoren-Kürzung in $N_{CL}(s)$ und $N_{OL}(s)$ kommt, geht aus *Lemma 1* hervor, dass die Nullstellen von $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s))$ die Pole bzw. Eigenwerte des geschlossenen Kreises und die Pole von $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})$ die Pole bzw. Eigenwerte des offenen Kreises sind. Dieser Sachverhalt ist grundlegend für die in diesem Kapitel eingeführte Analyse robuster Stabilitätseigenschaften bzw. robuster Konformität von unsicheren LZI-Systemen auf Basis der $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur (siehe hierzu die Beweise zu *Theorem 2*, *Theorem 3*, *Theorem 4* und das MIMO-Nyquist-Stabilitäts-Kriterium nach [49]).

Beweis: Das strikt propere LZI-System mit der Zustandsraumdarstellung $\mathbf{L} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{OL} & \mathbf{B}_{OL} \\ \hline \mathbf{C}_{OL} & \theta \end{array} \right]$ hat die Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s) = \mathbf{C}_{OL}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})^{-1}\mathbf{B}_{OL}$, welche die Beziehung zwischen den Eingangsgrößen \mathbf{u} und den Ausgangsgrößen \mathbf{y} des Systems im Frequenzbereich beschreibt. Für den offenen Kreis gilt: Die Eigenwerte bzw. Pole des Systems sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $N_{OL}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL}) \stackrel{!}{=} 0$.

Durch positive Rückführung der Ausgangsgrößen \mathbf{y} wird der Kreis geschlossen (siehe Anmerkung 1 und Abbildung 7-8). Für den geschlossenen Kreis gilt: Die Eigenwerte bzw. Pole des geschlossenen Kreises sind gegeben durch die entsprechenden Nullstellen des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises $N_{CL}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}) \stackrel{!}{=} 0$, mit $\mathbf{A}_{CL} = \mathbf{A}_{OL} + \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL} \Rightarrow N_{CL}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL} - \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL})$.

Nach [49] gilt (unter Berücksichtigung der Schur-Determinanten-Formel, siehe [46]):

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL} - \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL}) \\ \Leftrightarrow \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} &= \det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)) \end{aligned}$$

■

Anmerkung 1: Aus $\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{y}$ eingesetzt in die ZRD von \mathbf{L} folgt für den geschlossenen Kreis: $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{OL} + \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL})\mathbf{x} + \mathbf{B}_{OL}\mathbf{r}$ und $\mathbf{A}_{CL} = \mathbf{A}_{OL} + \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL}$

Mit Hilfe von Lemma 1 lässt sich die Konformitätsbedingung für die in Abbildung 7-8 dargestellte positiv geschlossene Rückführstruktur von \mathbf{L} wie folgt formulieren:

Theorem 2 „Konformität positiver Rückführstruktur“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Ferner sei vorausgesetzt, dass der offene Kreis mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s)$ des LZI-Systems \mathbf{L} die Bedingung nach Konformität erfüllt. Die positiv geschlossene Rückführstruktur nach Abbildung 7-8 des LZI-Systems \mathbf{L} ist dann und nur dann konform (erfüllt die Konformität) bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$ wenn gilt

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \quad \text{mit} \quad \sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega) \quad (7.17)$$

Beweis: Nach Lemma 1 gilt $\frac{N_{CL}(s)}{N_{OL}(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} = \det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s))$. Unter der Voraussetzung, dass der offene Kreis konform ist, (d.h. dass \mathbf{A}_{OL} keine Eigenwerte bzw. Pole auf bzw. rechts der Konformitätsgrenze Γ hat) kommt es zu keiner Pol-Nullstellen-Kürzung auf bzw. rechts der Konformitätsgrenze Γ zwischen $N_{CL}(s)$ und $N_{OL}(s)$, somit werden alle Pole bzw. Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises auf bzw. rechts der Konformitätsgrenze Γ als Nullstellen von $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s))$ beschrieben. Ein LZI-System ist konform, wenn für alle i Pole bzw. Eigenwerte gilt: $\sigma_i < \sigma_\Gamma(\omega_i)$ (siehe Definition 1 / kein Eigenwert bzw. Pol auf bzw. rechts der Konformitätsgrenze) \Leftrightarrow Der geschlossene Kreis ist konform, wenn $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)) \neq 0, \forall s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega)$ (Bedingung: offener Kreis konform). ■

Robuste Konformität des geregelten Systems

Erfolgte bis hier die systemtheoretische Betrachtung bzgl. Konformität für den Fall des offenen und positiv geschlossenen MIMO-Kreises, findet an dieser Stelle ein Sprung hin zur Untersuchung robuster Stabilitätseigenschaften bzw. robuster Konformität von LZI-Systemen mit Unsicherheiten statt.

Für die Analyse robuster Konformität eines Systems mit festgelegten Unsicherheiten ist es notwendig, die nachstehende Definition der $H_{\infty\Gamma}$ -Norm für Übertragungsmatrizen als maximalen Singulärwert über die Frequenz ω bzgl. der vom Anwender spezifizierten Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ einzuführen.

Definition 2 „ $H_{\infty\Gamma}$ -Norm einer Übertragungsmatrix“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Die $H_{\infty\Gamma}$ -Norm einer Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ mit m Eingangsgrößen und n Ausgangsgrößen bzgl. der Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ (mit $s_\Gamma = \sigma_\Gamma(\omega) + j\omega$) ist:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\infty\Gamma} := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(\sigma_\Gamma(\omega) + j\omega)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(s_\Gamma)) \quad (7.18)$$

Für die $H_{\infty\Gamma}$ -Norm von Übertragungsmatrizen kann ferner die Eigenschaft nach *Lemma 2* angegeben werden (*induzierte Norm*).

Lemma 2 „Submultiplikativität der $H_{\infty\Gamma}$ -Norm einer Übertragungsmatrix“: Sei $\mathbf{G}(s)$ eine $n \times m$ Übertragungsmatrix mit m Eingangsgrößen und n Ausgangsgrößen und $\mathbf{R}(s)$ eine $m \times l$ Übertragungsmatrix mit l Eingangsgrößen und m Ausgangsgrößen, so gilt für die $H_{\infty\Gamma}$ -Norm der Übertragungsmatrix:

$$\|\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma} \leq \|\mathbf{G}(s)\|_{\infty\Gamma} \|\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma} \quad (7.19)$$

Beweis: Sei die Funktion der maximalen Singulärwerte von $\mathbf{G}(s)$ und $\mathbf{R}(s)$ auf der Konformitätsgrenze bezeichnet mit $g(\omega)$ und $r(\omega)$:

$$g(\omega) = \max \sigma(\mathbf{G}(s_\Gamma)) \quad (I) \quad r(\omega) = \max \sigma(\mathbf{R}(s_\Gamma)) \quad (II)$$

Das Supremum dieser Funktionen über die Frequenz ω wird wie folgt definiert:

$$\bar{g} := \sup_{\omega} g(\omega) \quad (III) \quad \bar{r} := \sup_{\omega} r(\omega) \quad (IV)$$

Es gilt somit: $g(\omega) \leq \sup_{\omega} g(\omega) := \bar{g} \quad (V) \quad r(\omega) \leq \sup_{\omega} r(\omega) := \bar{r} \quad (VI)$

Daraus folgt: $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(s_\Gamma)) \bar{\sigma}(\mathbf{R}(s_\Gamma)) \leq \bar{g} \bar{r} \quad (VII)$

Nach [49] gilt: $\bar{\sigma}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{A}) \bar{\sigma}(\mathbf{B})$ (VIII), dabei sind die $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} und die $n \times m$ -Matrix \mathbf{B} beliebige konstante komplexe Matrizen.

Aus (VII) und (VIII) folgt: $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(s_\Gamma)\mathbf{R}(s_\Gamma)) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{G}(s_\Gamma)) \bar{\sigma}(\mathbf{R}(s_\Gamma)) \leq \bar{g} \bar{r} \quad (IX)$

Da (IX) für alle Frequenzen ω gilt, folgt für die Suprema unmittelbar:

$$\sup_{\omega} (\bar{\sigma}(\mathbf{G}(\omega)) \bar{\sigma}(\mathbf{R}(\omega))) \leq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(\omega)) \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{R}(\omega)) \leq \bar{g} \bar{r} \quad (X)$$

Aus (X) und der Definition 2 „ $H_{\infty\Gamma}$ -Norm einer Übertragungsmatrix“ folgt:

$$\|\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma} \leq \|\mathbf{G}(s)\|_{\infty\Gamma} \|\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma}$$

■

Die Analyse *Robuster Konformität (RK)* eines LZI-Systems mit Unsicherheiten, wird in Anlehnung an den in Abbildung 7-8 gezeigten positiv geschlossenen Regelkreis und dem zugehörigen *Theorem 3* für *Konformität*, wobei die Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s)$ durch $\mathbf{M}(s)\mathbf{\Delta}(s)$ substituiert wird, durchgeführt. Durch die Substitution resultiert die in Abbildung 7-6 dargestellte $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur. Die Analyse *Robuster Konformität* erfolgt somit in Analogie zur Untersuchung der *Robusten Stabilität (RS)* nach [49], [59] u. a. auf Basis der standardisierten $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur. Ein LZI-System bzw. die zugehörige $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur erfüllt *Robuste Konformität (RK)*, wenn alle Pole bzw. Eigenwerte unter Berücksichtigung der zulässigen Unsicherheiten links der vom Anwender spezifizierten *Konformitätsgrenze* $\sigma_\Gamma(\omega)$ liegen. Liegt mindestens ein Pol bzw. Eigenwert auf oder rechts der *Konformitätsgrenze* $\sigma_\Gamma(\omega)$, erfüllt das System die Forderung für *Robuste Konformität (RK)* nicht. Es ergibt sich nachstehende Bedingung für *Robuste Konformität (RK)* eines LZI-Systems mit Unsicherheiten, dargestellt als $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur.

Theorem 3 „Robuste Konformität $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur (I)“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt, $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind konform, d.h. alle Eigenwerte bzw. Pole von $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ liegen links der Konformitätsgrenze Γ . Ferner gilt für die Menge der zulässigen Unsicherheiten Δ : Ist Δ' eine zulässige Unsicherheit, so ist auch $c\Delta'$ eine zulässige Unsicherheit, wenn $|c| \leq 1$. Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist dann und nur dann für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt Robuste Konformität) bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$, wenn gilt

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega), \quad \forall \Delta. \quad (7.20)$$

Beweis: Der positiv geschlossene Regelkreis, mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{L}(s)$ des offenen Kreises, ist konform, wenn $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega)$. (siehe Theorem 2). $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur entspricht positiv geschlossenem Regelkreis (Substitution von $\mathbf{L}(s)$ durch $\mathbf{M}(s)\Delta(s)$). \Rightarrow $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur RK, wenn für alle zulässigen Unsicherheiten $\Delta(s)$, $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma \geq \sigma_\Gamma(\omega)$ (Bedingung: $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ konform). ■

Es kann gezeigt werden, dass zur Gewährleistung Robuster Konformität (RK) nicht der gesamte Bereich auf und rechts der Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ (entsprechend Theorem 3) nach Nullstellen von $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s))$ untersucht werden muss, sondern unter der Voraussetzung der Konformität von $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ nur die Analyse der Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ ausreichend ist. Aus dem Theorem 3 kann somit die nachstehende Bedingung für Robuste Konformität abgeleitet werden.

Theorem 4 „Robuste Konformität $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur (II)“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt: $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind konform, d.h. alle Eigenwerte bzw. Pole von $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ liegen links der Konformitätsgrenze Γ . Ferner gilt für die Menge der zulässigen Unsicherheiten Δ : Ist Δ' eine zulässige Unsicherheit so ist auch $c\Delta'$ eine zulässige Unsicherheit, wenn $|c| \leq 1$. Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist dann und nur dann für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt Robuste Konformität) bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$ wenn gilt

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_\Gamma(\omega), \quad \forall \Delta. \quad (7.21)$$

Beweis: Aus Theorem 3 \Rightarrow Theorem 4, da das analysierte Gebiet der komplexen Ebene aus Theorem 3 das Gebiet von Theorem 4 beinhaltet.

Der Nachweis, dass, aus Theorem 4 \Rightarrow Theorem 3 gilt, wird durch Widerspruch gezeigt, d.h.: nicht Theorem 3 \Rightarrow nicht Theorem 4.

Angenommen, das Theorem 3 ist nicht erfüllt, aber das Theorem 4 schon, dann existiert ein s_1 mit $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ und $\sigma_1 > \sigma_\Gamma(\omega_1)$, d.h. s_1 rechts von Γ . Des Weiteren existiert ein $\Delta_1(\sigma_1 + j\omega_1)$ so dass

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s_1)\Delta_1(s_1)) = 0 \quad (I)$$

Wenn man zeigen kann, dass ein $s_\Gamma = \sigma_\Gamma(\omega_\Gamma) + j\omega_\Gamma$ und ein $\kappa_\Gamma \in [0; 1]$, für das gilt

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s_\Gamma)\kappa_\Gamma\mathbf{\Delta}_1(s_\Gamma)) = 0 \quad (II)$$

existieren, so ist dies ein Widerspruch zu Theorem 4, da s_Γ auf Γ und $\kappa_\Gamma\mathbf{\Delta}_1$ eine zulässige Unsicherheit ist.

Mit Einführung der Variablen κ als Funktionsargument mit $\kappa \in [0; 1]$ gilt entsprechend Lemma 1:

$$\det(\mathbf{I} - \kappa \mathbf{M}(s) \mathbf{\Delta}(s)) = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL} - \kappa \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}(\kappa))}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL})} = \frac{N_{CL}(s)}{N_{OL}(s)} \quad (III)$$

Durch Kombination von (I) und (III) folgt für $\kappa = 1$:

$$\det(s_1\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}(1)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad s_1 \in \{\lambda_i(\mathbf{A}_{CL}(1))\}.$$

Unter Berücksichtigung der hier gültigen Eigenschaft, dass Eigenwerte stetig von den Elementen der Matrix abhängen – dies geht aus der sogenannten „vollständigen Entwicklung der Determinante“ (siehe [47]) von $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{OL} - \kappa \mathbf{B}_{OL}\mathbf{C}_{OL}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}(\kappa)) \stackrel{!}{=} 0$ und $\kappa \in [0; 1]$ sowie dem resultierenden Polynom der Matrizenelemente eindeutig hervor – gilt:

$\mathbf{A}_{CL}(\kappa)$ ist stetig abhängig von $\kappa \in [0; 1]$, somit existiert eine stetige Funktion $\hat{s}(\cdot)$, die für $[0; 1]$ definiert ist und Punkte in der komplexen Ebene beschreibt. Für die Punkte gilt

$$\det(\hat{s}(\kappa)\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}(\kappa)) = 0 \quad \forall \kappa \in [0; 1],$$

wobei $\hat{s}(1) = s_1$. Die Funktion $\hat{s}(\cdot)$ gibt den Verlauf eines Eigenwerts in Abhängigkeit von κ wieder.

Eine solche Funktion kann für jeden Eigenwert bestimmt werden. Berücksichtigt man jetzt, dass für $\kappa = 0$, $\mathbf{A}_{CL}(0) = \mathbf{A}_{OL}$ ist, wobei der offene Kreis Konformität aufweist (also alle Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{A}_{OL})$ links von $\sigma_\Gamma(\omega)$ liegen), folgt: Die stetige Funktion $\hat{s}(\cdot) = \hat{\sigma}(\cdot) + j\hat{\omega}(\cdot)$ erfüllt (für den betrachteten Fall) die Bedingungen

$$\hat{\sigma}(0) < \sigma_\Gamma(\hat{\omega}(0)) \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}(1) > \sigma_\Gamma(\hat{\omega}(1)).$$

Folglich existiert ein $\kappa_\Gamma \in [0; 1]$ für das gilt:

$$\hat{\sigma}(\kappa_\Gamma) = \sigma_\Gamma(\hat{\omega}(\kappa_\Gamma)).$$

D.h. $\hat{s}_\Gamma = \hat{s}(\kappa_\Gamma)$ und κ_Γ führen zu (II), dies ist der darzulegende Widerspruch. ■

Anmerkung: Die Beweisführung erfolgt in Anlehnung an die Herleitungen bzw. Beweise zur Untersuchung robuster Stabilität nach [61].

Ergänzung: Die Funktion $\hat{s}(\cdot)$ ist in Abbildung 7-9 zur besseren Verständlichkeit des Beweises zu Theorem 4 exemplarisch dargestellt.

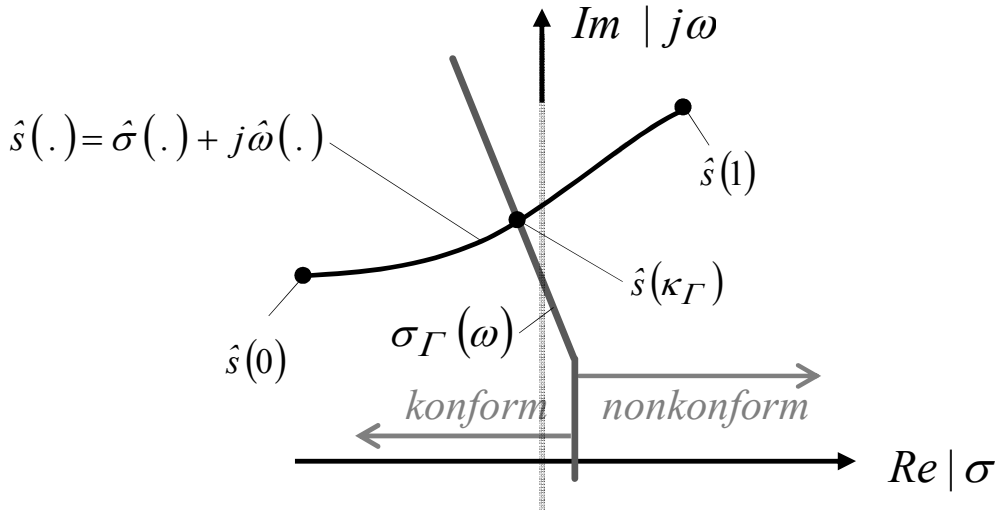


Abbildung 7-9: Funktion $\hat{s}(\cdot)$

Motiviert durch die spätere Einführung des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ und der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse wird im Folgenden die Bedingung für *Robuste Konformität (RK)* der $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur alternativ zu *Theorem 4* in den nachstehenden Theoremen formuliert. Die Bedingung für *Robuste Konformität* in Abhängigkeit der Eigenwerte der $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ergibt sich wie folgt:

Theorem 5 „Eigenwert-Bedingung für RK“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ gemäß *Definition 1* „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind konform, und
- für die Menge der zulässigen Unsicherheiten Δ gilt: Ist Δ' eine zulässige Unsicherheit, so ist auch $c \Delta'$ eine zulässige Unsicherheit, wenn $|c| \leq 1$.

Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist dann und nur dann für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt *Robuste Konformität*) bzgl. Γ bzw. $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ wenn gilt

$$\lambda_i(\mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 1, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_{\Gamma}(\omega), \quad \forall i, \quad \forall \Delta. \quad (7.22)$$

Beweis: Für die Determinante und die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} gilt $\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i(\mathbf{A})$, siehe [49]. Unter Berücksichtigung der Determinantenbedingung von *Theorem 4* folgt:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) = \prod_i \lambda_i(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0 \quad (I)$$

Ferner gilt $\lambda_i(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \alpha - \lambda_i(\mathbf{A})$, siehe [46]. Es folgt somit aus (I):

$$\prod_i \lambda_i(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) = \prod_i (1 - \lambda_i(\mathbf{M}(s)\Delta(s))) \neq 0$$

Das Produkt aus n Faktoren ist genau dann ungleich 0, wenn jeder einzelne der n Faktoren ungleich 0 ist.

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda_i(\mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0, \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(\mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 1, \quad \forall i$$

■

Abgeleitet aus *Theorem 5* kann die Bedingung für *Robuste Konformität (RK)* mittels des Spektralradius $\rho(\cdot)$ mit $\rho(\cdot) := \max_i |\lambda_i(\cdot)|$, vgl. [46], formuliert werden.

Theorem 6 „Spektralradius-Bedingung für RK“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind konform und
- für die Menge der zulässigen Unsicherheiten Δ gilt: Ist Δ' eine zulässige Unsicherheit, so ist auch $c \Delta'$ eine zulässige Unsicherheit, wenn c ein beliebiges komplexes Skalar ist, für das gilt $|c| \leq 1$.

Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist dann und nur dann für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt Robuste Konformität) bzgl. Γ bzw. $\sigma_\Gamma(\omega)$, wenn gilt

$$\rho(\mathbf{M}(s)\Delta(s)) < 1, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_\Gamma(\omega), \quad \forall \Delta. \quad (7.23)$$

Beweis: Der Spektral-Radius ρ einer Matrix \mathbf{A} ist definiert mit $\rho(\mathbf{A}) := \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})|$, siehe [46], somit folgt: aus Gl. (7.23) \Rightarrow Gl. (7.22). vgl. [49]

Dass aus Gl. (7.22), Gl. (7.23) folgt, wird nach [49] durch Widerspruch gezeigt, d.h. nicht Gl. (7.23) \Rightarrow nicht Gl. (7.22). Angenommen, es existiert eine zulässige Unsicherheit Δ' , so dass $\rho(\mathbf{M}\Delta') \geq 1$ für mindestens eine Frequenz, dann gilt aufgrund der Definition des Spektralradius $|\lambda_i(\mathbf{M}\Delta')| \geq 1$ für mindestens einen Eigenwert i und es existiert immer eine Unsicherheit Δ'' (in der Menge der zulässigen Unsicherheiten), die (bei dieser Frequenz) den Wert $c \Delta'$ annimmt, wobei c ein komplexer Skalar mit $|c| \leq 1$, so dass $\lambda_i(\mathbf{M}\Delta'') = c \lambda_i(\mathbf{M}\Delta') = 1$ (reell und positiv), vgl. [49]. $\lambda_i(\mathbf{M}\Delta'') = 1$ ist Widerspruch zu Gl. (7.22). ■

Aus der Bedingung für RK auf Grundlage des Spektralradius nach Theorem 6 kann das folgende Theorem 7 zur Analyse Robuster Konformität in Abhängigkeit des maximalen Singulärwerts $\bar{\sigma}(\cdot)$ abgeleitet werden.

Theorem 7 „Maximaler-Singulärwert-Bedingung für RK“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind konform und
- $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$.

Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt Robuste Konformität), wenn

$$\bar{\sigma}(\mathbf{M}(s)) < 1, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_\Gamma(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{M}(s)\|_{\infty\Gamma} < 1. \quad (7.24)$$

Die Bedingung aus Theorem 7 für Robuste Konformität ist die Analogie zum Small-Gain-Theorem in Zusammenhang mit der Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze (Robuste Stabilität / siehe Kapitel 7.3.1) unter Berücksichtigung, dass für die Menge aller zulässigen Unsicherheiten $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ gilt.

Beweis: Für Matrixnormen $\|\cdot\|$ quadratischer Matrizen, welche die Submultiplikativität erfüllen, gilt $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$, siehe [46], somit folgt nach Theorem 6:

$$\|\mathbf{M}(s)\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} < 1, \quad \forall \Delta \quad \Rightarrow \quad (RK) \quad (I)$$

Mit Beachtung der Submultiplikativität ($\|\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma} \leq \|\mathbf{G}(s)\|_{\infty\Gamma}\|\mathbf{R}(s)\|_{\infty\Gamma}$ siehe Lemma 2) kann die Bedingung für RK entsprechend (II) angegeben werden:

$$\|\mathbf{M}(s)\|_{\infty\Gamma} \|\mathbf{\Delta}(s)\|_{\infty\Gamma} < 1, \quad \forall \mathbf{\Delta} \Rightarrow \text{(RK) (II)}$$

Unter Berücksichtigung der Definition der $H_{\infty\Gamma}$ -Norm einer Übertragungsmatrix ergibt sich abschließend die Bedingung für RK wie folgt:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{M}(s)) \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}(s)) < 1, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_{\Gamma}(\omega), \quad \forall \mathbf{\Delta} \Rightarrow \text{(RK) (III)}$$

(Bedingung für (I), (II) und (III): $\mathbf{M}(s)$ sowie $\mathbf{\Delta}(s)$ sind konform).

■

Einführung des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$

Ein nominal konformes LZI-System kann bei gegebener (zulässiger) Unsicherheit $\mathbf{\Delta}$ auf Basis der $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur und unter Anwendung der Bedingung nach Theorem 7 auf Robuste Konformität untersucht werden. Das Ergebnis gibt jedoch nur Aufschluss darüber, ob das analysierte LZI-System *robust konform* ist oder nicht, d.h. die Frage nach *Robuster Konformität* wird nur durch *ja* oder *nein* beantwortet. Es gibt also keine Information darüber wie „nah“ das untersuchte System unter Berücksichtigung der gegebenen Unsicherheiten der *Konformitätsgrenze* ist bzw. kommt. Des Weiteren unterliegt die Analyse eines Systems durch Theorem 7 einer gewissen Konservativität, da dieses Theorem hinreichend aber nicht notwendig für *Robuste Konformität* (RK) ist. Infolge dieser Einschränkungen wird der *strukturierte Singulärwert* $\mu_{\Delta\Gamma}$ für die Untersuchung *Robuster Konformität* (RK) eingeführt. Der *strukturierte Singulärwert* $\mu_{\Delta\Gamma}$ wird (punktweise) für jedes $s_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma}(\omega) + j\omega$ der *Konformitätsgrenze* $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ betrachtet, er stellt ein Maß für die Größe der Unsicherheit dar, welche einen *konformen* Pol bzw. Eigenwert auf die *Konformitätsgrenze* an der Stelle s_{Γ} verschiebt. Zur Verdeutlichung der punktwisen Betrachtung wird der Index (s_{Γ}) eingeführt. Innerhalb der Beweise wird dieser zur Vereinfachung der Schreibweise und somit zur Wahrung der Übersichtlichkeit jedoch weggelassen. Der *strukturierte Singulärwert* $\mu_{\Delta\Gamma}$ ist wie folgt definiert:

Definition 3 „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (I)“: Sei Γ die *Konformitätsgrenze* $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ gemäß Definition 1 „*Konformität*“. Für die $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}$ und $\mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}$ sind komplexe Matrizen sowie
- $\mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})} \in \underline{\mathbf{\Delta}}$ mit $\underline{\mathbf{\Delta}} = \{\text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_1, \dots, \delta_k \mathbf{I}_k, \Delta_1, \dots, \Delta_k) \mid \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}$.

Der *strukturierte Singulärwert* $\mu_{\Delta\Gamma}$ der Matrix \mathbf{M} ist für jedes $s_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma}(\omega) + j\omega$ der *Konformitätsgrenze* $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ mit $\omega \in (-\infty; +\infty)$ (zur Untersuchung *Robuster Konformität*) wie folgt definiert:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) := \begin{cases} \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}) = 0\}} \\ 0 \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{\Delta} \in \underline{\mathbf{\Delta}} \end{cases} \quad (7.25)$$

Anmerkung: Die Einführung und Definition des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ erfolgt in Anlehnung an den strukturierten Singulärwert μ , welcher zum Nachweis *Robuster Stabilität (RS)* Verwendung findet und von *Doyle* 1982 in [63] eingeführt wurde (siehe [49], [60]).

Für eine anschauliche Interpretation, sowie eine Herleitung der Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ wird nachstehend eine zur *Definition 3* „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (I)“ gleichwertige *Definition 4* „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (II)“ eingeführt. Die Äquivalenz der beiden Definitionen wird anschließend gezeigt.

Definition 4 „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (II)“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ gemäß *Definition 1* „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}$ und $\Delta_{(s_{\Gamma})}$ sind komplexe Matrizen sowie
- $\Delta_{(s_{\Gamma})} \in \underline{\Delta}$
mit $\underline{\Delta} = \{\text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_1, \dots, \delta_k \mathbf{I}_k, \Delta_1, \dots, \Delta_k) \mid \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}$ und $\bar{\sigma}(\Delta_{(s_{\Gamma})}) \leq 1$.

Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ der Matrix \mathbf{M} ist für jedes $s_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma}(\omega) + j\omega$ der Konformitätsgrenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ mit $\omega \in (-\infty; +\infty)$ (zur Untersuchung *Robuster Konformität*) wie folgt definiert:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) := \begin{cases} \frac{1}{\min \{k_{\Gamma} \mid \det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \Delta_{(s_{\Gamma})}) = 0, \bar{\sigma}(\Delta_{(s_{\Gamma})}) \leq 1\}} \\ 0 \mid \det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \Delta_{(s_{\Gamma})}) \neq 0, \forall \Delta_{(s_{\Gamma})} \in \underline{\Delta} \end{cases} \quad (7.26)$$

Anmerkung: Der Term k_{Γ} in *Definition 4* wird in Anlehnung an die *Multivariable Stability Margin* k_m von *Safonov*, vgl. [49], als *Mehrgrößen-Konformitäts-Marge* bezeichnet und ist der Kehrwert von $\mu_{\Delta\Gamma}(k_{\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})) = \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})^{-1}$.

Beweis der Äquivalenz zwischen *Definition 3* „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (I)“ und *Definition 4* „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (II)“:

Entsprechend der *Definition 3* wird nach dem kleinsten Δ , bemessen durch $\bar{\sigma}(\Delta)$, gesucht, für welches die Bedingung $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M} \Delta) = 0$ erfüllt ist. Durch Skalierung der Unsicherheitsmatrix Δ mit dem Skalierungsfaktor $k_{\Gamma} > 0$ ergibt sich:

$$\Delta = k_{\Gamma} \hat{\Delta},$$

dieses k_{Γ} wird dabei so gewählt, dass $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$. Mit Einführung des Skalierungsfaktors k_{Γ} ist das kleinste k_{Γ} zu bestimmen, welches die Bedingung $\det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M} \hat{\Delta}) = 0$ erfüllt. Nach [49] gilt dabei, dass für das kleinste k_{Γ} jedoch immer $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) = 1$, da, wenn $\det(\mathbf{I} - k'_{\Gamma} \mathbf{M} \hat{\Delta}') = 0$ mit $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}') = b < 1$, kann k'_{Γ} nicht der kleinste Skalierungsfaktor sein und somit $k'_{\Gamma}{}^{-1}$ kein strukturierter Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ von \mathbf{M} nach *Definition 4*, weil ein kleineres k_{Γ} mit $k_{\Gamma} = k'_{\Gamma} b$ existiert, so dass $\det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M} \hat{\Delta}) = 0$ mit $\hat{\Delta}' = b \hat{\Delta}$ und $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) = 1$, siehe [49]. Unter Berücksichtigung der Homogenität von Normen ($\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$, α komplexes Skalar) und dass für den kleinsten Skalierungsfaktor k_{Γ} gilt $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) = 1$ folgt:

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \bar{\sigma}(k_{\Gamma} \hat{\Delta}) = k_{\Gamma} \bar{\sigma}(\hat{\Delta}) = k_{\Gamma},$$

Durch Weglassen von „ $\hat{\cdot}$ “ zur Vereinfachung der Schreibweise (da dies aus der Bedingung $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$ hervorgeht) ergibt sich aus *Definition 3* die *Definition 4* (für $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) \neq 0$) wie folgt:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) = [\min \{k_{\Gamma} \mid \det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M} \Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}]^{-1}$$

■

Ist die Bedingung von *Definition 4* $\det(\mathbf{I} - k_{\Gamma} \mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \Delta_{(s_{\Gamma})}) = 0$ mit $s_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma}(\omega) + j\omega$ erfüllt, wobei $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ die *Konformitätsgrenze* darstellt, liegt nach *Lemma 1* mindestens ein Pol bzw. Eigenwert auf der *Konformitätsgrenze*. Durch Einführung der Größe k_{Γ} kann für jede Frequenz ω ein Maß dafür gefunden werden, wie groß die Unsicherheit $\Delta(\sigma_{\Gamma}(\omega_i) + j\omega_i)$ sein muss, um mindestens einen Pol bzw. Eigenwert auf die *Konformitätsgrenze* zu verschieben. Entscheidend dabei ist, wann dies zum ersten Mal passiert. D.h. anschaulich: je größer k_{Γ} sein muss, damit zum ersten Mal mindestens ein Pol auf der Grenze zu liegen kommt, desto größer ist die „Distanz“, die durch die Unsicherheit Δ überwunden werden muss, und desto größer ist folglich der Abstand zur *Konformitätsgrenze* Γ . Voraussetzung dabei ist, dass keine Pole bzw. Eigenwerte von \mathbf{M} sowie von Δ auf der *Konformitätsgrenze* liegen. Da ausschlaggebend ist, wann zum ersten Mal mindestens ein Pol auf der *Konformitätsgrenze* zu liegen kommt, wird nach dem kleinsten k_{Γ} gesucht. Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})$ ist als Kehrwert der Größe k_{Γ} definiert. Die direkte Berechnung von $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})$ ist nicht möglich, deshalb werden im Folgenden die Eigenschaften von $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})$ behandelt und somit eine Möglichkeit zur Berechnung einer oberen und unteren Schranke dargelegt. Zur Bestimmung der Eigenschaften ist folgendes Lemma 3 erforderlich:

Lemma 3: Sei Γ die *Konformitätsgrenze* $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ gemäß *Definition 1* „*Konformität*“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}$ und $\Delta_{(s_{\Gamma})}$ sind komplexe Matrizen sowie
- die Unsicherheitsmatrix $\Delta_{(s_{\Gamma})}$ erfüllt $\bar{\sigma}(\Delta_{(s_{\Gamma})}) \leq 1$.

Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ der Matrix \mathbf{M} ist für jedes $s_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma}(\omega) + j\omega$ der *Konformitätsgrenze* $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ mit $\omega \in (-\infty; +\infty)$ (zur Untersuchung *Robuster Konformität*) (für $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) \neq 0$) wie folgt gegeben:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) = \max_{\Delta} \rho(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})} \Delta_{(s_{\Gamma})}) \quad (7.27)$$

Beweis: Das minimale $\bar{\sigma}(\Delta)$ der Bedingungen $\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0\}$ aus *Definition 3* und $\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \rho(\mathbf{M}\Delta) = 1\}$ sind identisch. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

1. Angenommen $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta') = 0$ und $\bar{\sigma}(\Delta')$ ist minimal, so folgt $\rho(\mathbf{M}\Delta') = 1$, da, wenn
 - $\rho(\mathbf{M}\Delta') > 1$, existiert eine komplexe Matrix $\Delta'' = c\Delta'$, wobei c komplexes Skalar mit $|c| < 1$ für die $\rho(\mathbf{M}\Delta'') = |c| \rho(\mathbf{M}\Delta') = 1$ und somit $\lambda_i(\mathbf{M}\Delta'') = |c| \lambda_i(\mathbf{M}\Delta') = 1$ daraus folgt $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta'') = 0$ (siehe Beweis *Theorem 6*).
 $\Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta'') = \bar{\sigma}(c\Delta') = |c| \bar{\sigma}(\Delta')$ da $|c| < 1 \Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta'') < \bar{\sigma}(\Delta')$
 \Rightarrow Widerspruch zur Annahme
 - $\rho(\mathbf{M}\Delta') < 1 \Rightarrow |\lambda_i(\mathbf{M}\Delta')| < 1 \Rightarrow \lambda_i(\mathbf{M}\Delta') \neq 1 \Rightarrow \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta') \neq 0$
 \Rightarrow Widerspruch zur Annahme

D.h. das minimale $\bar{\sigma}(\Delta)$ aus der Bedingung $\min\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0\}$ erfüllt $\rho(\mathbf{M}\Delta) = 1$ (I)

2. Angenommen $\rho(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}') = 1$ und $\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}')$ ist minimal, so folgt $|\lambda_i(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}')| = 1$ und es existiert immer eine Unsicherheit (in der Menge der zulässigen Unsicherheiten) $\mathbf{\Delta}'' = c \mathbf{\Delta}'$, wobei c ein komplexes Skalar mit $|c| = 1$, so dass $\lambda_i(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}'') = |c| \lambda_i(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}') = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{\Delta}'') = 0$.

D.h. das minimale $\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta})$ aus der Bedingung $\min\{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \mid \rho(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}) = 1\}$ erfüllt $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{\Delta}) = 0$ (II).

Aus (I) und (II) folgt:

$$\min\{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{\Delta}) = 0\} = \min\{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \mid \rho(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}) = 1\} \quad (\text{III}).$$

Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ kann somit (für $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) \neq 0$) unter Berücksichtigung von (III) und der Äquivalenz zwischen Definition 3 und Definition 4 wie folgt formuliert werden:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) = [\min \{k_{\Gamma} \mid \rho(k_{\Gamma} \mathbf{M}\mathbf{\Delta}) = 1, \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \leq 1\}]^{-1}$$

Es gilt $\lambda_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\lambda_i(\mathbf{A})$ (siehe [46] und [49]) und $\rho(\mathbf{A}) := \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})|$ (Definition Spektralradius, siehe [46] und [49]). Es folgt somit $\rho(\alpha\mathbf{A}) = |\alpha| \rho(\mathbf{A})$.

Für den strukturierten Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ ergibt sich deshalb (für $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) \neq 0$):

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) = \left[\min \left\{ k_{\Gamma} = (\rho(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}))^{-1}, \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \leq 1 \right\} \right]^{-1}.$$

Der gewonnene Zusammenhang ist schließlich äquivalent zu:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) = \max \{ \rho(\mathbf{M}\mathbf{\Delta}) \mid \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \leq 1 \}.$$

■

Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$

In Analogie zum strukturierten Singulärwert μ können folgende Eigenschaften von $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})$ angegeben werden:

Eigenschaft 1: Für den strukturierten Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ gilt:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\alpha\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) = |\alpha| \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) \quad (7.28)$$

Beweis: Es gilt $\lambda_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\lambda_i(\mathbf{A})$ (siehe [46] und [49]) und $\rho(\mathbf{A}) := \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})|$ (Definition Spektralradius, siehe [46] und [49]). Es folgt somit $\rho(\alpha\mathbf{A}) = |\alpha| \rho(\mathbf{A})$. Unter Berücksichtigung von Lemma 3 erhält man $\mu_{\Delta\Gamma}(\alpha\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) = |\alpha| \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})})$.

■

Eigenschaft 2: Gilt für die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{\Delta} = \delta\mathbf{I}$, wobei δ ein komplexer Skalar ist mit $|\delta| \leq 1$, so folgt:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) = \rho(\mathbf{M}_{(s_{\Gamma})}) \quad (7.29)$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3, der Eigenschaft 1 von $\mu_{\Delta\Gamma}$ und $|\delta| \leq 1$ (infolge der Maximierung von $\mathbf{\Delta}$, sowie der Bedingung $\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \leq 1$).

■

Eigenschaft 3: Ist die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}$ vollständig besetzt und komplex sowie $\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}_{(s_{\Gamma})}) \leq 1$, folgt:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) = \bar{\sigma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}). \quad (7.30)$$

Beweis: Nach [49] gilt für eine komplexe, vollständig besetzte Unsicherheitsmatrix, unter Berücksichtigung von $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$: $\max_{\Delta} \rho(\mathbf{M}\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(\mathbf{M}\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(\Delta)\bar{\sigma}(\mathbf{M}) = \bar{\sigma}(\mathbf{M})$. Es ergibt sich somit, unter Berücksichtigung von Lemma 3, Eigenschaft 3. ■

Auf Basis der Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ können eine obere und eine untere Schranke angegeben werden.

Theorem 8 „obere und untere Schranke von $\mu_{\Delta\Gamma}$ “: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ gemäß Definition 1 „Konformität“. Ferner weist $\Delta_{(s_\Gamma)}$ eine Blockdiagonalstruktur auf und es gilt $\bar{\sigma}(\Delta_{(s_\Gamma)}) \leq 1$. Der strukturierte Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ ist durch den Spektralradius und den maximalen Singulärwert vom \mathbf{M} begrenzt, es gilt somit:

$$\rho(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) \leq \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}). \quad (7.31)$$

Beweis: Folgt direkt aus Eigenschaft 2 und Eigenschaft 3 von $\mu_{\Delta\Gamma}$. ■

Nach dem Theorem 8 können für ein gegebenes \mathbf{M} und unter Berücksichtigung von $\bar{\sigma}(\Delta_{(s_\Gamma)}) \leq 1$ eine obere und eine untere Grenze von $\mu_{\Delta\Gamma}$ berechnet werden. Je kleiner der Abstand zwischen oberer und unterer Grenze, desto exakter ist $\mu_{\Delta\Gamma}$ bekannt. Analog zur μ -Analyse können durch Optimierung die obere und die untere Grenze von $\mu_{\Delta\Gamma}$ präziser berechnet werden, eine detaillierte Beschreibung dazu ist in [49], [58] und [59] zu finden, im Folgenden wird dies nur kurz beschrieben.

Verbesserte Berechnung der oberen Grenze $(\mu_{\Delta\Gamma})_O$:

Für die Matrix $\mathbf{D} \in \mathcal{D} = \{\text{diag } \mathbf{D}_i\}$ mit $\mathbf{D}_i = d_i \mathbf{I}_i$ gilt $\mathbf{D}\Delta = \Delta\mathbf{D} \forall \mathbf{D}$. Daraus folgt $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) = \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{D}\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}\mathbf{D}^{-1})$, siehe Abbildung 7-10. Die Blockdiagonalstruktur der Matrix \mathbf{D} ist dabei durch die Blockdiagonalstruktur der Unsicherheitsmatrix Δ gegeben.

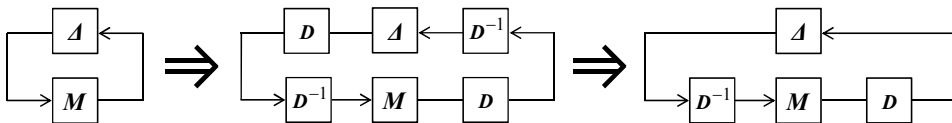


Abbildung 7-10: Verbesserte Berechnung der oberen Grenze

Die Optimierung von \mathbf{D} zur Minimierung der oberen Schranke von $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)})$ stellt ein konvexes Optimierungsproblem dar (vgl. [62]), dessen numerische Lösung in [59] beschrieben ist, es ergibt sich für die obere Grenze $(\mu_{\Delta\Gamma})_O$:

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) = \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{D}\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}\mathbf{D}^{-1}) \leq \inf_{\mathbf{D} \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}\mathbf{D}^{-1}) = (\mu_{\Delta\Gamma})_O \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}). \quad (7.32)$$

Verbesserte Berechnung der unteren Grenze $(\mu_{\Delta\Gamma})_U$:

Die unitäre Matrix $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ erfüllt die Bedingung $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}\mathbf{U}) = \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) = \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{U}\mathbf{M}_{(s_\Gamma)})$. Dabei hat \mathbf{U} die gleiche Blockstruktur wie Δ . Die Optimierung von \mathbf{U} zur Maximierung der

unteren Schranke stellt ein nicht-konvexes Optimierungsproblem dar, dessen numerische Lösung in [59] beschrieben ist. Für die untere Grenze $(\mu_{\Delta\Gamma})_U$ ergibt sich:

$$(\mu_{\Delta\Gamma})_U = \max_{\mathbf{U} \in \mathbf{U}} \rho(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)} \mathbf{U}) \leq \mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}). \quad (7.33)$$

Nach der Einführung der Bedingung für die *Robuste Konformität* eines unsicheren LZI-Systems, dargestellt als $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur (siehe *Theorem 4*), und der Definition des *strukturierten Singulärwerts* $\mu_{\Delta\Gamma}$ sowie der Herleitung von dessen Eigenschaften und von einer Möglichkeit zur Berechnung einer oberen und einer unteren Schranke von $\mu_{\Delta\Gamma}$ kann nun abschließend die Bedingung für *Robuste Konformität* auf Grundlage des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ angegeben und bewiesen werden.

Robuste Konformität mit strukturiertem Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$

Für den Nachweis der *Robusten Konformität (RK)* eines nominal konformen LZI-Systems, dargestellt als $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur, unter Berücksichtigung der Blockstruktur der Unsicherheitsmatrix Δ , kann abschließend folgende Bedingung formuliert werden:

Theorem 9 „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Bedingung für Robuste Konformität“: Sei Γ die Konformitätsgrenze $\sigma_\Gamma(\omega)$ gemäß obiger Definition 1 „Konformität“. Für die $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur gilt:

- $\mathbf{M}(s)$ und $\Delta(s)$ sind komplexe Übertragungsmatrizen, $\mathbf{M}(s)$ ist konform und $\Delta(s)$ ist stabil und konform (siehe *), und
- $\Delta(s)$ ist eine strukturierte blockdiagonale Unsicherheitsmatrix, sie erfüllt $\bar{\sigma}(\Delta(s)) \leq 1, \forall s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma = \sigma_\Gamma(\omega)$ bzw. $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$.

Die geschlossene $\mathbf{M}\Delta$ -Struktur ist dann und nur dann für alle zulässigen Unsicherheiten konform (erfüllt Robuste Konformität), wenn

$$\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_\Gamma)}) < 1 \quad \forall \omega. \quad (7.34)$$

Beweis: Nach *Theorem 4* gilt:

$$(RK) \Leftrightarrow \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0, \quad \forall s = \sigma + j\omega \text{ mit } \sigma = \sigma_\Gamma(\omega), \quad \forall \Delta.$$

(Bedingung: $\mathbf{M}(s)$ sowie $\Delta(s)$ sind konform)

Nach *Definition 4* „ $\mu_{\Delta\Gamma}$ (II)“ gilt: Wenn $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) < 1 \Leftrightarrow k_\Gamma > 1$ (mit $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$) für alle Frequenzen, d.h. für alle Punkte auf der Konformitätsgrenze gilt, so folgt: Der Zusammenhang $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) \neq 0$ ist erfüllt \Rightarrow das System ist RK.

Wenn $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}) \geq 1 \Leftrightarrow k_\Gamma \leq 1$ (mit $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$) für eine Frequenz, d.h. für mindestens einen Punkt auf der Konformitätsgrenze folgt: $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0 \Rightarrow$ das System ist nicht RK. ■

* Die hier rein formal eingeführte Forderung nach *nominaler Stabilität* von $\Delta(s)$ motiviert sich dabei aus einer regelungstheoretisch zweckmäßigen und physikalisch interpretierbaren dynamischen Unsicherheitsmodellierung in Anlehnung an [49], welche ein properes und stabiles Übertragungsverhalten (sowie eine normbeschränkte Unsicherheit) erfordert. Ferner kann die Forderung nach *nominaler Konformität* von $\Delta(s)$, welche sich aus der mathematischen Herleitung ergibt, dadurch begründet werden, dass wenn $\Delta(s)$ nicht *konform* ist, dann wäre für eine infinitesimale kleine Störung (beliebig kleine Unsicherheit) der geschlossene Kreis *nicht konform* (*nonkonform*) und dies wäre ein Widerspruch zur (geforderten) *nominalen Konformität* des geschlossenen Kreises.

7.3.3 Mindestanforderungen an die Flugdynamik – Konformitätsgrenze

Die in Kapitel 7.3.2 vorgestellte $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ermöglicht den Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* (*Robuste Konformität*) unter Berücksichtigung einer vom Anwender vorgegebenen bzw. spezifizierten Grenze in der komplexen Ebene, welche als *Konformitätsgrenze* Γ bezeichnet wird. Es ist somit möglich, anwendungsbezogene Mindestanforderungen an die Dynamik des (geregelten) Systems direkt nachzuweisen und nicht auf die Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze und somit die Prüfung *Robuster Stabilität* (*RS*) zurückgreifen zu müssen. Für die Eigenmodi eines Systems kann somit direkt die Einhaltung vorgegebener Stabilitätseigenschaften nachgewiesen werden, wie etwa ein Mindestmaß an absoluter und/oder relativer Dämpfung. Für dynamische Systeme, welche entsprechend den (nominellen) Anforderungen neutralstabile Eigenmodi aufweisen, d.h. ein oder mehrere Eigenwerte bzw. Pole liegen auf der Imaginär-Achse, ist ein Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* bzw. eine *MIMO*-Robustheitsanalyse auf Basis der μ -Analyse nicht möglich. Grund dafür ist, dass die Voraussetzungen der μ -Analyse nach einem nominal stabilen System nicht gegeben sind und somit das System die Bedingung $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0$, vgl. Gl. (7.5), bereits nominal erfüllt. Für praktisch relevante Systeme ergibt sich dies beispielsweise durch ein (rein) integrierendes Systemverhalten, welches gemäß den Anforderungen gewollt ist und zu einem Eigenwert bzw. Pol im Ursprung führt. Die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse und der damit verbundene Nachweis *Robuster Konformität* (*RK*) ermöglichen im Gegensatz zur μ -Analyse und deren Untersuchung *Robuster Stabilität* (*RS*) die Robustheitsprüfung dynamischer Systeme mit neutralstabiler bzw. (begrenzt) instabiler Eigendynamik und gestattet somit den Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* unter Berücksichtigung von praktisch relevanten Anforderungen an physikalische Systeme. Die Festlegung der *Konformitätsgrenze* motiviert sich direkt aus den Mindestanforderungen hinsichtlich der Stabilitätseigenschaften eines Systems, welche zur Gewährleistung eines adäquaten Betriebs zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein müssen. Sie sind auch dann einzuhalten, wenn sich im Rahmen der Unsicherheiten der ungünstigste Fall ergibt, d.h. die Pole bzw. Eigenwerte am weitesten rechts liegen.

Die Anforderungen an die Flugdynamik des geregelten Flugzeugs sind in Kapitel 6.2 dargelegt. Besonders hervorzuheben ist hierbei die Forderung nach einer neutralstabilen Spiralbewegung, die zur Gewährleistung adäquaten Handlings durch das Regelungssystem umzusetzen ist. Eine μ -Analyse zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften ist deshalb für die geregelte Seitenbewegung nicht möglich. Dies gilt insbesondere unter Berücksichtigung einer marginalen Variierung des Spiralpols sowohl nach rechts als auch nach links der Imaginär-Achse infolge der angenommenen Unsicherheiten.

In Anlehnung an die Anforderungen an die Flugdynamik nach Kapitel 6.2 werden im Folgenden die Mindestanforderungen und daraus die *Konformitätsgrenze* für die Robustheitsanalyse erörtert und festgelegt. Die Mindestanforderungen gewährleisten ein ausreichendes Maß an Stabilitätseigenschaften, um den Piloten eine sichere und adäquate Flugführung über den gesamten Flugbereich zu ermöglichen, weichen jedoch von den in Kapitel 6.2 angeführten Forderungen aufgrund eines ausgewogenen Reglerentwurfs hinsichtlich erzielter Flugeigenschaften und eines angemessenen Entwicklungsaufwands begrenzt ab. Für den hier vorliegenden Reglerentwurf richten sich die Mindestanforderungen an die Stabilitätseigenschaften entsprechend dem Gütegrad für Flugeigenschaften gemäß *Level 1* und *Level 2* nach [25]. Dabei gilt für *Level 1*: „*Flugeigenschaften vollständig geeignet für die Erfüllung der Flugaufgabe*“, [25]. Für *Level 2* folgt: „*Unter Berücksichtigung einer erhöhten Arbeitsbelastung des Piloten müssen die Flugeigenschaften adäquat für einen erfolgreichen Abschluss der Flugaufgabe sein*“, [25]. Für die Flugeigenschaften gemäß *Level 3* gilt: „*Das Flugzeug kann vom Piloten mit stark erhöhter Arbeitsbelastung sicher kontrolliert werden*“, [25]. Entscheidend für den Verlauf der *Konformitätsgrenze* sind die am weitesten rechts liegenden Pole bzw. Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, diese sind für die Seitenbewegung der Spiralpol und das konjugiert komplexe Polpaar der Roll-Gier-Schwingung. Der Eigenwert der Rollbewegung sowie der Roll- und Gierintegratorpol sind aufgrund ihrer Lage links des Spiralpols nicht maßgebend für die Festlegung der *Konformitätsgrenze*.

Die Mindestanforderungen an die Spiralbewegung werden gemäß [25] durch eine minimale Verdopplungszeit des Hängewinkels nach einer Hängewinkelstörung, ausgehend von einem getrimmten Geradeausflug festgelegt. Die geforderte minimale Verdopplungszeit in Abhängigkeit des Gütegrads der Flugeigenschaften nach [25] ist in Tabelle 7-1 gegeben. Unter Berücksichtigung der minimalen Verdopplungszeit kann eine maximale zulässige Instabilität des Eigenwertes bzw. Pols der Spiralbewegung spezifiziert werden. Um die Festlegung der *Konformitätsgrenze* im Bereich instabiler Eigenwerte bzw. Pole auf der sicheren Seite zu gewährleisten, wurde für die Spiralbewegung der mit *Level 1* Flugeigenschaften korrelierende Wert der Verdopplungszeit für die Festlegung der *Konformitätsgrenze* verwendet, siehe Tabelle 7-1. Es ergibt sich daher für den am weitesten rechts liegenden, zulässigen Eigenwert bzw. Pol auf der reellen Achse $\lambda_{SP \max} = 0,0346 \text{ s}^{-1}$.

Spiralstabilität: Minimale Verdopplungszeit			
Forderung der [25] (MIL-F-8785 C) Level of Flying-Qualities			Minimal zulässige Verdopplungszeit Abgeleitete Forderung für die Konformitätsgrenze der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse
1	2	3	
$T_{TD} = 20\text{ s}$	$T_{TD} = 8\text{ s}$	$T_{TD} = 4\text{ s}$	$T_{TD} = 20\text{ s}$ $\Rightarrow \lambda_{SP\ max} = 0,0346\text{ s}^{-1}$
Stabilität der Roll-Gier-Schwingung: Minimale rel. und abs. Dämpfung			
Forderung der [25] (MIL-F-8785 C) Level of Flying-Qualities	minimale rel. Dämpfung ζ_{DR}	minimale abs. Dämpfung $\sigma_{DR} = -\zeta_{DR}\omega_{nDR}$	Minimal zulässige relative und absolute Dämpfung Abgeleitete Forderung für die Konformitätsgrenze der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse
1	$\zeta_{DR\ min} = 0,08$	$\sigma_{DR\ min} = -0,15\text{ s}^{-1}$	$\zeta_{DR\ min} = 0,02$ $\sigma_{DR\ min} = -0,05\text{ s}^{-1}$
2	$\zeta_{DR\ min} = 0,02$	$\sigma_{DR\ min} = -0,05\text{ s}^{-1}$	
3	$\zeta_{DR\ min} = 0$	-	

Tabelle 7-1: Minimal-Anforderungen an Spiralbewegung und Roll-Gier-Schwingung

Die Mindestanforderungen an die Roll-Gier-Schwingung in Abhängigkeit des Gütegrades der Flugeigenschaften ist ebenfalls in Tabelle 7-1 gegeben. Für die *Konformitätsgrenze* wurden auf die mit *Level 2* korrespondierenden Werte zurückgegriffen, da dadurch ausreichende Flugeigenschaften zur erfolgreichen Absolvierung der vorgesehenen Flugaufgabe (siehe obige Angabe zu *Level 2* Flugeigenschaften) sichergestellt sind und im Gegensatz zur Spiralbewegung stabile Pole bzw. Eigenwerte vorliegen.

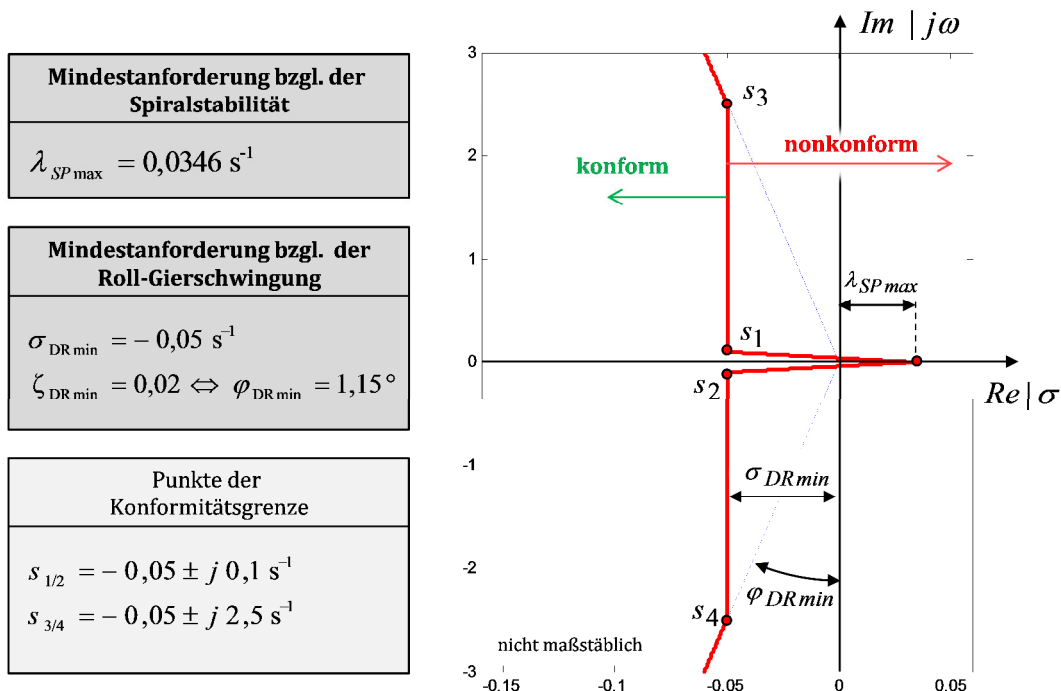


Abbildung 7-11: Definition der Grenze für Robuste Konformität

Die *Konformitätsgrenze* für den Nachweis *Robuster Konformität (RK)* kann somit unter Berücksichtigung der Mindestanforderungen an Spiralbewegung und Roll-Gier-Schwingung siehe Tabelle 7-1 spezifiziert werden. Entsprechend *Definition 1* in Kapitel 7.3.2 muss die

Konformitätsgrenze Γ eine stetige Funktion $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ in der komplexen Ebene mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \{\omega | \omega \in (-\infty; +\infty)\}$ sein. Um dem gerecht zu werden und um die Mindestanforderungen an die Spiralbewegung sowie an die absolute Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung zu realisieren, wird eine im Bereich der reellen Achse keilförmig verlaufende *Konformitätsgrenze* spezifiziert. Die Spitze liegt dabei auf der reellen Achse und wird durch die maximal zulässige Instabilität von $\lambda_{SP\ max} = 0,0346\ s^{-1}$ der Spiralbewegung festgelegt, vgl. Abbildung 7-11. Der Realanteil der Endpunkte ($s_{1/2}$, siehe Abbildung 7-11) des keilförmigen Verlaufs von $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ ist gegeben durch die minimal zulässige absolute Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung von $\sigma_{DR\ min} = -0,05\ s^{-1}$. Für die Imaginäranteile der Endpunkte des keilförmigen Verlaufs von $\sigma_{\Gamma}(\omega)$ wird eine theoretisch mögliche Konstellation eines konjugiert komplexen Polpaars innerhalb des keilförmigen Gebietes mit einer minimalen Periodendauer von ca. 62 s aufgrund der langsamen Bewegung als zulässig eingestuft, somit ergeben sich die Endpunkte des keilförmigen Gebietes mit $s_{1/2} = (-0,05 \pm j0,1)\ s^{-1}$. Der weitere Verlauf der *Konformitätsgrenze* wird durch ein parallel zur Imaginär-Achse verlaufendes Stück infolge der geforderten minimalen absoluten Dämpfung der Roll-Gier-Schwingung von $\sigma_{DR\ min} = -0,05\ s^{-1}$ festgelegt, danach folgt ein Knick, um die Forderung der relativen Dämpfung von $\zeta_{DR\ min} = 0,02$ der Roll-Gier-Schwingung zu erfüllen. Die Koordinaten der Knicke ergeben sich zu $s_{3/4} = (-0,05 \pm j2,5)\ s^{-1}$. Der gesamte Verlauf der *Konformitätsgrenze* ist in Abbildung 7-11 dargestellt.

7.3.4 Unsicherheitsmodellierung und Trimpunkt-Unsicherheit

Die Abweichungen zwischen realer Dynamik der zu regelnden Strecke und des für den Reglerentwurf verwendeten Modells werden durch sogenannte Unsicherheiten erfasst. Im Rahmen der Robustheitsanalyse ist nachzuweisen, dass die Mindestanforderungen unter Berücksichtigung der Unsicherheiten eingehalten werden. In diesem Kapitel werden die Unsicherheiten sowie deren Modellierung vorgestellt, welche die Abweichung zwischen Realität und Modell beschreiben. Die Unsicherheiten ergeben sich mitunter aufgrund nicht abgebildeter bzw. vernachlässigter physikalischer Phänomene, Abweichungen, z.B. infolge fehlerhaft erfasster Kenngrößen, sowie Vereinfachungen dynamischer Effekte, wie beispielsweise hinsichtlich der Aerodynamik und der Triebwerksdynamik, deren reales Verhalten entsprechend vereinfacht abgebildet wird. Der geschlossene Regelkreis setzt sich im Wesentlichen aus der Dynamik des Flugzeugs, dessen Abbildung auf Basis einer Vielzahl von repräsentativ über den gesamten Flugbereich verteilter *LZI*-Systeme ausgeführt wurde, den Aktuatoren für Quer- und Seitenruder, welche im Rahmen der modellbasierten Reglerentwicklung als Übertragungsfunktionen mit PT_2 -Dynamik beschrieben sind, und dem Regler zusammen.

Um eine globale Robustheitsanalyse des geregelten Systems zu ermöglichen, d.h. einen lückenlosen Robustheitsnachweis bzgl. des gesamten Betriebsbereichs durchzuführen, ist es notwendig, die Prozessdynamik, welche mittels einer Vielzahl (lokaler gültiger) *LZI*-Systeme

dargestellt ist, als kontinuierliche Funktion für den gesamten Flugbereich zu beschreiben. Dies wird mittels einer sogenannten Trimpunkt-Unsicherheit bewirkt, welche die Änderung des dynamischen Verhaltens über die Envelope in Abhängigkeit einer parametrischen Unsicherheit berücksichtigt und somit eine Beschreibung als stetige Funktion ermöglicht, vgl. [68]. Folglich ergibt sich aus der Darstellung mittels der einzelnen *LZI*-Systeme eine Beschreibung als parametervariantes lineares System, welches die Dynamik über die gesamte Envelope repräsentiert und im Englischen als sogenanntes *Linear Parameter-Varying System* (kurz *LPV*-System) bezeichnet wird. Für die vorliegende Robustheitsanalyse erfolgt die Berücksichtigung der Trimpunkt-Unsicherheit neben der Beschreibung der Dynamik des Flugzeugs über den gesamten Betriebsbereich auch für die Modellierung des über die Envelope der Flugdynamik nachgeführten Reglers.

Für die Grundlagen der Unsicherheitsmodellierung im Bereich robuster Mehrgrößenregelung sei an [49] verwiesen. Im Folgenden wird auf die spezifische Unsicherheitsmodellierung der einzelnen Regelkreiscomponenten Aktuatorik, Dynamik des Flugzeugs und Regler eingegangen.

Unsicherheitsmodellierung Aktuatorik – dynamische (frequenzabhängige) Unsicherheiten

Die Umsetzung einer physikalisch bzw. systemtechnisch motivierten Unsicherheitsmodellierung zur Erfassung mannigfaltiger dynamischer bzw. frequenzabhängiger sowie stationärer Abweichungen des Übertragungsverhaltens einzelner Regelkreisglieder (wie etwa Aktuatoren, Sensoren, etc.) des geschlossenen Regelkreises kann durch komplexe bzw. dynamische Unsicherheiten realisiert werden, siehe [49], [61] und [68]. In Anlehnung an [49] werden die Abweichungen zwischen realer und modellierter Übertragungsdynamik, erfasst als komplexe bzw. dynamische Unsicherheiten, im Rahmen einer physikalisch-systemtechnisch fundierten Unsicherheitsmodellierung für die Robustheitsanalyse als „multiplikative Störung“ berücksichtigt (siehe Gl. (7.38)). Dabei erfasst die von [49] aufgezeigte Systematik Modellabweichungen einzelner Regelkreisglieder bzgl. Amplitude und Phase, welche sich aus unabhängigen Abweichungen bzw. Unsicherheiten der Kenngrößen von Übertragungsfunktionen ergeben und mit einer einzigen komplexen bzw. dynamischen Unsicherheit mit zugehöriger Unsicherheitsgewichtung berücksichtigt werden. Diese Kenngrößen sind unter anderem Zeitkonstanten, die natürliche Frequenz, die relative Dämpfung, die Verstärkung und die Totzeit. Die Totzeit kann dabei eine adäquate Verzögerung des Gesamtkreises repräsentieren. Darüber hinaus werden Abweichungen durch vernachlässigte bzw. nicht modellierte Übertragungsdynamiken, die beispielsweise aus einer unberücksichtigten hochfrequenten Sensordynamik resultieren, mittels einer solchen dynamischen Unsicherheit erfasst. In gewissen Grenzen gilt dies auch für Nichtlinearitäten. (Wobei diese Übertragungsdynamiken im Rahmen der Analyse *robuster Konformität* der Forderung $\|\delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ bzw. $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ entsprechen müssen.)

Die Beschreibung der dynamischen (frequenzabhängigen) Unsicherheiten erfolgt für das Übertragungsverhalten eines *SISO*-Systems (Aktuator, Sensor) durch die

Unsicherheitsgewichtung $w_I(s)$, welche auch als Gewichtungsfunktion bezeichnet wird, und die komplexe bzw. dynamische Unsicherheit $\delta_I(s)$.

Die von [49] vorgeschlagene, physikalisch motivierte Vorgehensweise zur Bestimmung der Gewichtungsfunktion analysiert den maximalen relativen Fehler $l_I(\omega)$ nach Gl. (7.35), welcher sich durch die systematische Variation der unsicheren Parameter des betrachteten dynamischen Übertragungsverhaltens ergibt.

$$l_I(\omega) = \max_{g_{un} \in I} \left| \frac{g_{un}(j\omega) - g_{nom}(j\omega)}{g_{nom}(j\omega)} \right| \quad (7.35)$$

Dabei ist I die Menge aller analysierten unsicheren Übertragungsfunktionen $g_{un}(j\omega)$, welche sich aus der systematischen Variation der Kenngrößen bzw. Parameter ausgehend von der nominalen Übertragungsfunktion $g_{nom}(j\omega)$ ergeben. Das nominale Verhalten der Aktuatoren von Quer- und Seitenruder wird für den modellbasierten Reglerentwurf durch PT_2 -Übertragungsfunktionen vereinfacht abgebildet. Für die Unsicherheitsmodellierung solcher Übertragungsdynamiken kann die Bestimmung des maximalen relativen Fehlers $l_I(\omega)$ durch die systematische Variation der natürlichen Frequenz, der relativen Dämpfung, der Verstärkung und einer zusätzlich berücksichtigten Totzeit erfolgen. Daraus ergibt sich entsprechend dem charakteristischen Verhalten von Stellantrieben im Bereich niedriger Frequenzen eine geringe Abweichung (10-20%) und im Bereich hoher Frequenzen ein relativer Fehler des Übertragungsverhaltens von ca. 200%, siehe [49] und [68]. Für die Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ muss zur Erfassung aller betrachteten unsicheren Übertragungsfunktionen $g_{un}(j\omega)$ und somit zur Abdeckung des maximalen relativen Fehlers $l_I(\omega)$ im Sinne einer „Einhüllenden“ nach [49] gelten:

$$|w_I(j\omega)| \geq l_I(\omega), \quad \forall \omega \quad (7.36)$$

Allgemein kann für praktisch relevante Systeme wie etwa Aktuatoren oder Sensoren die Gewichtungsfunktion nach [49] wie folgt abgeschätzt werden:

$$w_I(s) = \frac{s + r_{low} \omega_\tau}{\frac{1}{r_{high}} s + \omega_\tau} \quad (7.37)$$

Dabei ist r_{low} die relative Unsicherheit bei kleinen Frequenzen, r_{high} die relative Unsicherheit bei großen Frequenzen und ω_τ die Frequenz bei der eine relative Unsicherheit von näherungsweise 100% erreicht wird. In Anlehnung an die dynamische Unsicherheitsmodellierung für das Verhalten von Stellantrieben nach [9], [49] und [68] wurden unter Berücksichtigung der Bandbreite der verwendeten elektromechanischen Aktuatoren des *Fliegenden Erprobungsträgers* folgende Werte festgelegt: $r_{low} = 10\%$, $r_{high} = 200\%$, $\omega_\tau = 55$ rad/s. Für den Nachweis *Robuster Konformität* nach *Theorem 9* erfüllt die dynamische Unsicherheitsgewichtung $w_I(s)$ der Quer- und Seitenruderaktuatoren unter Beachtung der vorgenommenen Parameterwahl die Forderung nach *nominaler Konformität*, da sich deren Eigenwert bzw. Pol links der spezifizierten *Konformitätsgrenze* ergibt, und ist somit für die hier

durchgeführte $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse eine zulässige Unsicherheitsgewichtung. Die Übertragungsfunktionen der Quer- und Seitenruderaktuatoren $g_{ii_c un}$ ($i = \xi, \zeta$) mit dynamischer Unsicherheit (multiplikative Störung) ergeben sich in Anlehnung an eine dynamische (frequenzabhängige) Unsicherheitsmodellierung nach [49] abschließend wie folgt:

$$g_{ii_c un} = g_{ii_c nom} (1 + \delta_{gi} w_{gi}) \quad i = \xi, \zeta \quad \text{mit} \quad \|\delta_{gi}(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1 \quad (7.38)$$

Dabei ist $g_{ii_c nom}$ die nominale Übertragungsfunktion des jeweiligen Aktuators entsprechend Kapitel 2.1.4, w_{gi} die dynamische Unsicherheitsgewichtung und δ_{gi} die Unsicherheit. In Abbildung 7-12 ist die nominale Übertragungsfunktion der Aktuatore sowie die sich im Rahmen der Unsicherheitsmodellierung ergebende obere und untere Schranke des Übertragungsverhaltens exemplarisch skizziert.

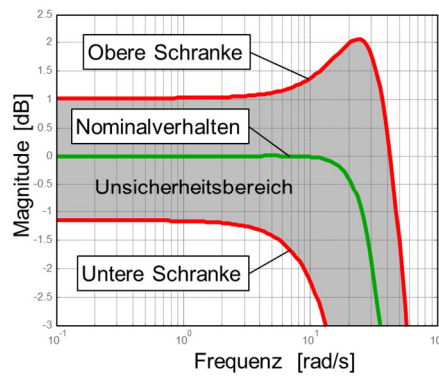


Abbildung 7-12: dynamische Unsicherheitsmodellierung der Aktuatore

Die finale Unsicherheitsmodellierung für die Aktuatorik ist in Tabelle 7-2 zusammengefasst.

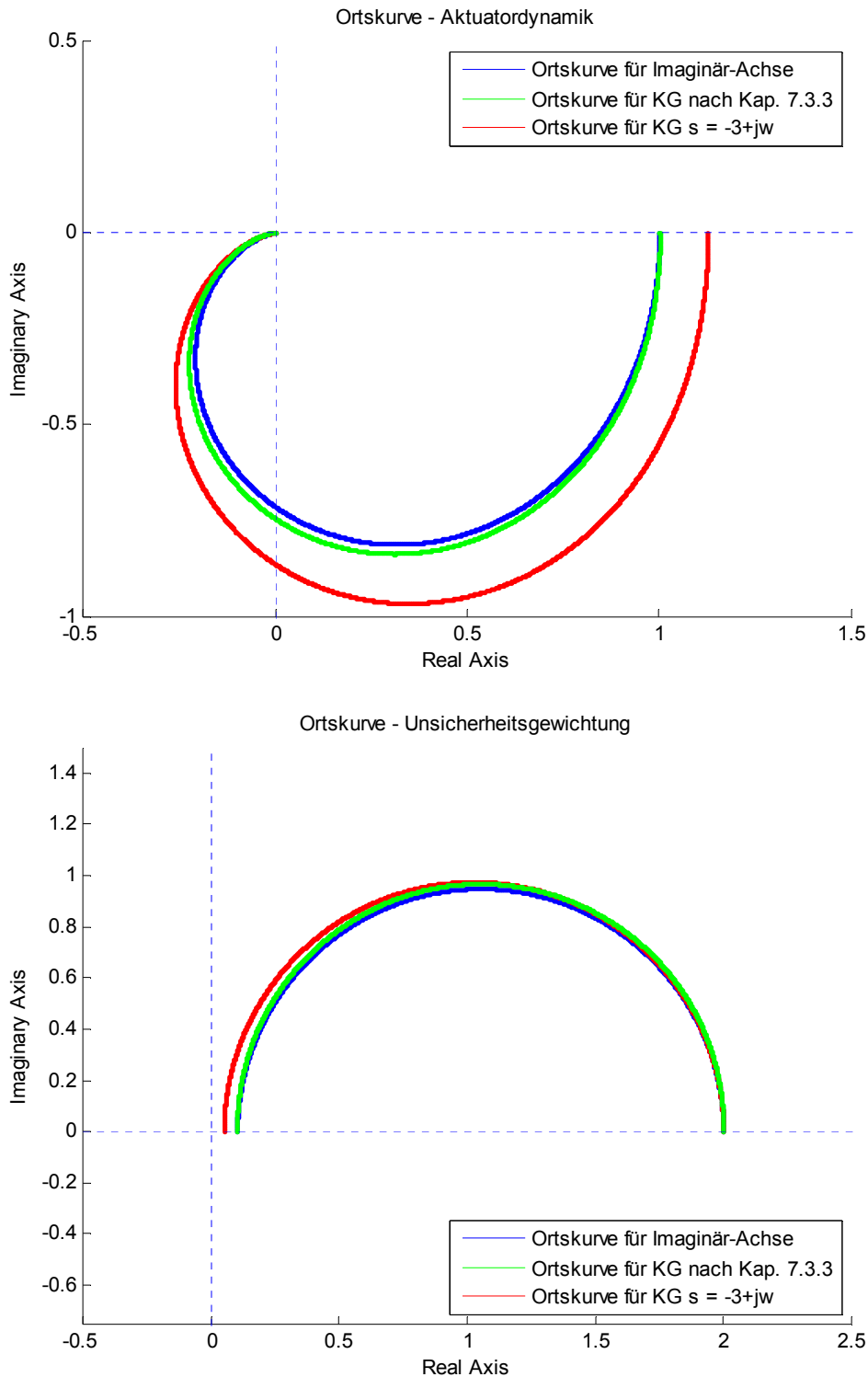
<p>Aktuatorik</p> <p>Übertragungsfunktion bzw. Übertragungsmatrix mit dynamischer Unsicherheit</p> $g_{ii_c un} = g_{ii_c nom} (1 + \delta_{gi} w_{gi}) \quad \text{mit} \quad \ \delta_{gi}(s)\ _{\infty\Gamma} \leq 1 \quad \text{und} \quad w_{gi} = \frac{0,018 s + 0,1}{0,009 s + 1} \quad i = \xi, \zeta$ $\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\xi\xi_c un} & 0 \\ 0 & g_{\zeta\zeta_c un} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_c \\ \zeta_c \end{pmatrix}$ <p>(Unsicherheitsmodellierung der Aktuatorik für die Robustheitsanalyse als LPV-System über Envelope sowie für die Robustheitsanalyse der einzelnen LZI-Systeme)</p>
--

Tabelle 7-2: Unsicherheitsmodellierung Aktuatorik

Für die vorgestellte $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse kommt es im Vergleich zur μ -Analyse aufgrund der erforderlichen Auswertung von $\mathbf{M}(s)$ und $\mathbf{\Delta}(s)$ entsprechend der $H_{\infty\Gamma}$ -Norm und einer anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze*, welche sich im Allgemeinen nicht als Imaginär-Achse ergibt, zu einer neuartigen Problemstellung: Die Auswertung der Übertragungsfunktionen von $\mathbf{M}(s)$ und $\mathbf{\Delta}(s)$ entlang der spezifischen *Konformitätsgrenze* Γ führt – im Vergleich zur Auswertung entlang der Imaginär-Achse – zu einer mehr oder weniger starken Verschiebung bzw. Verzerrung der zugehörigen Ortskurve, die sich sowohl bzgl. der Aktuatordynamik $g_{ii_c nom}$, der Gewichtungsfunktion w_{gi} als auch der Unsicherheit δ_{gi} ergibt. Aufgrund dieser Verschiebungen bzw. Verzerrungen wird die Gültigkeit angemessener Unsicherheitsgrenzen

sowie die Interpretierbarkeit der vorgestellten dynamischen Unsicherheitsmodellierung auf Basis von Frequenzgang und Sinusantwort und folglich die Ergebnisse der Robustheitsanalyse in Frage gestellt.

Abbildung 7-13 zeigt die Ortskurvenauswertung für die Aktuatordynamik $g_{ii_c nom}$, die Unsicherheitsgewichtung w_{gi} und eine beliebig angenommene Tiefpassstörung $\delta_{ex} = (0.25s + 1)^{-1}$ (welche die Bedingung $|\delta_{ex}(j\omega)| \leq 1$ erfüllt) bzgl. der Imaginär-Achse, der Konformitätsgrenze nach Kapitel 7.3.3 und der Konformitätsgrenze $s_r = -3 + j\omega$.



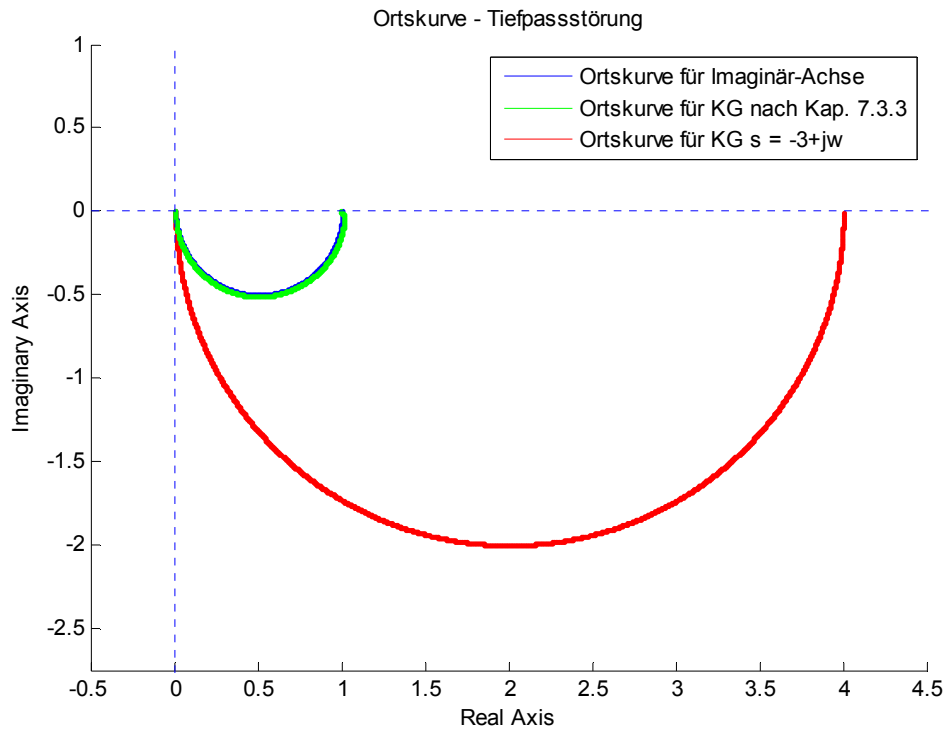


Abbildung 7-13: Verzerrung der Ortskurve

In Abbildung 7-13 ist gut zu erkennen, dass es infolge der jeweils spezifizierten *Konformitätsgrenze* zum Teil zu erheblichen Verzerrungen bzw. Verschiebungen der Ortskurve kommt, wobei die Verzerrung mit wachsendem Abstand der *Konformitätsgrenze* von der Imaginär-Achse zunimmt und die frequenzabhängige Skalierung merklich verschiebt (Abstand KG nach Kap. 7.3.3 $<$ Abstand KG $s_F = -3 + j\omega$ / für kleine bis mittlere Frequenzen). Diese Verschiebung ist insbesondere im Bereich niedrigerer Frequenzen mit wachsendem Abstand der *Konformitätsgrenze* von der Imaginär-Achse signifikant. Angesichts der Verzerrungen kann für den Wechsel von der konventionellen Ortskurve (bzgl. der Imaginär-Achse) zu einer Ortskurvenauswertung für den allgemeinen Fall einer anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* nur schwer eine geeignete und generelle Interpretation bzw. eine entsprechende Übertragbarkeit der Unsicherheitsmodellierung, die auf Basis von Frequenzgang und Sinusantwort physikalisch-systemtechnisch legitimiert ist, gegeben werden.

Darüber hinaus zeigt die Ortskurve der Tiefpassstörung, dass die Forderung $\|\delta_{ex}\|_\infty \leq 1$ bzw. $|\delta_{ex}(j\omega)| \leq 1$ für die konventionelle μ -Analyse erfüllt ist, jedoch die Forderung der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse $\|\delta_{ex}\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ bzw. $|\delta_{ex}(s_F)| \leq 1$ verletzt wird und somit ein System unter Berücksichtigung einer derartigen Störung trotz $\mu_{\Delta\Gamma}(\mathbf{M}_{(s_F)}) < 1$ ($\forall \omega$) *Robuste Konformität* nicht erfüllt. Diese Gegebenheit schränkt die Dynamik der Unsicherheit $\delta(s)$ bzw. $\mathbf{\Delta}(s)$ ein und ist bei der Diskussion und Einordnung der Ergebnisse der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse stets zu berücksichtigen, insbesondere dann, wenn $\delta(s)$ bzw. $\mathbf{\Delta}(s)$ unmittelbar als eine solche Übertragungsfunktion aufgefasst werden soll.

Ein Vorschlag für eine generelle Vorgehensweise zur Umsetzung einer dynamischen (frequenzabhängigen) Unsicherheitsmodellierung, deren physikalisch-systemtechnische

Gültigkeit trotz Auswertung bzgl. einer anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* und der daraus resultierenden Verzerrungen der Ortskurven beibehält, wird in Kapitel 7.3.5 kurz beschrieben.

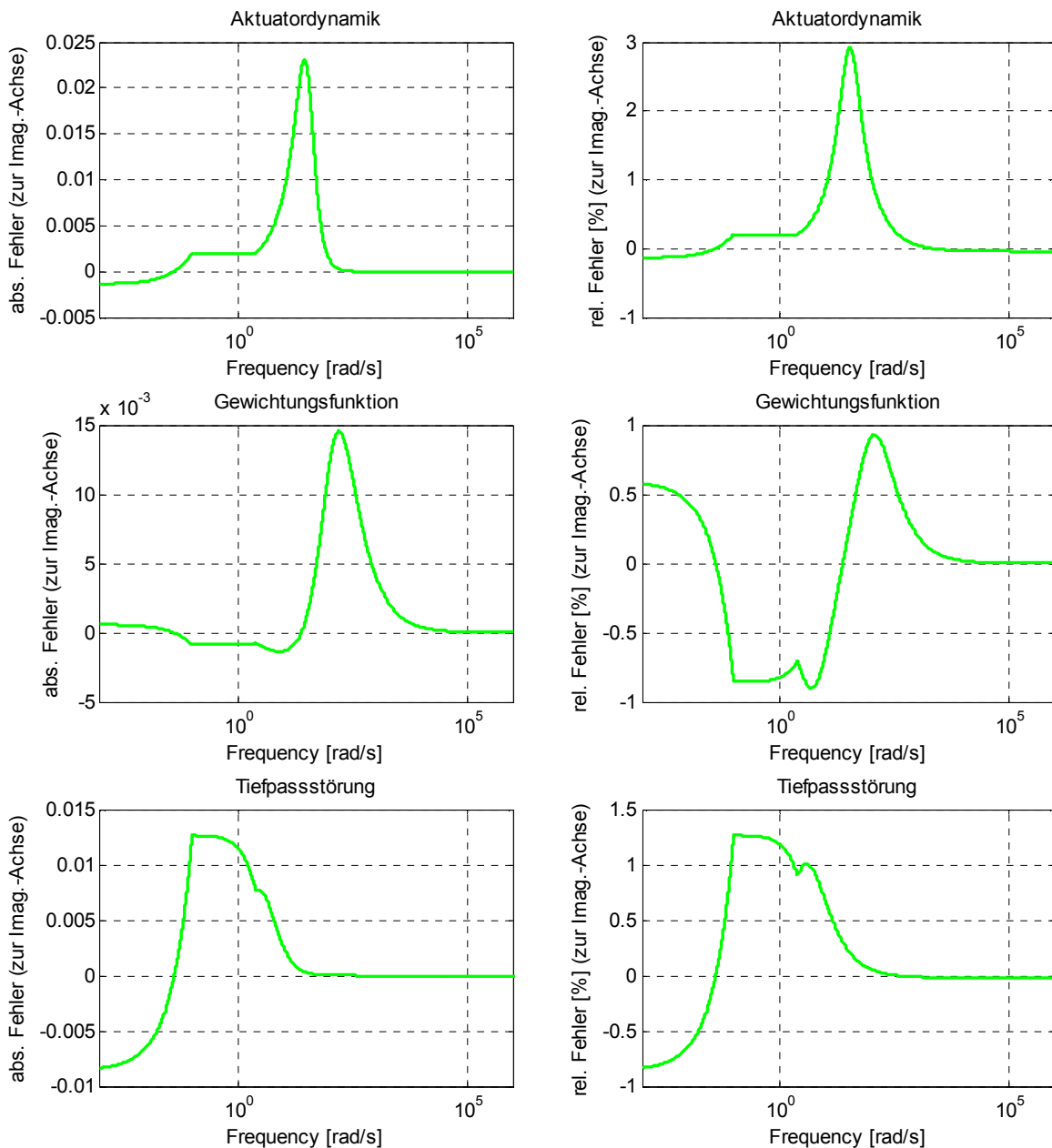


Abbildung 7-14: abs. und rel. Fehler der Ortskurven bzgl. Konformitätsgrenze nach Kapitel 7.3.3

Für den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungsfall kann dagegen gezeigt werden, dass angesichts des geringen Abstandes der nach Kapitel 7.3.3 gewählten *Konformitätsgrenze* zur Imaginär-Achse (siehe Abbildung 7-21) die Verzerrungen der Ortskurven der Aktuatordynamik $g_{ii_c nom}$, der Gewichtungsfunktion w_{gi} sowie der Unsicherheit δ_{ex} vernachlässigbar gering ausfallen. Somit ist infolge der marginalen Verzerrung der Ortskurven davon auszugehen, dass die dynamischen Unsicherheiten mit zugehöriger Gewichtungsfunktion entsprechend der von [49] aufgezeigten Systematik zur Umsetzung einer physikalisch motivierten Unsicherheitsmodellierung ihre Gültigkeit beibehalten und die Interpretierbarkeit entsprechend der

konventionellen μ -Analyse direkt herangezogen werden kann. Für den Nachweis *Robuster Konformität (RK)* eines LZI-Systems gemäß *Theorem 9* ist somit nur die Kategorie der zulässigen Unsicherheiten anzugleichen, wobei die Bedingung nach *Nominaler Konformität (NK)* sowie die Normbedingung $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ erfüllt sein müssen.

In Abbildung 7-13 sind für die nominale Aktuatordynamik $g_{ii_c nom}$, die Gewichtungsfunktion w_{gi} und die exemplarische Unsicherheit δ_{ex} (Tiefpassstörung) die zugehörigen Ortskurven als Nachweis einer vernachlässigbar geringen Verzerrung bzgl. einer Auswertung entlang der spezifizierten *Konformitätsgrenze* nach Kapitel 7.3.3 und einer konventionellen Auswertung entlang der Imaginär-Achse gegenübergestellt. Als weitere Bestätigung ist in Abbildung 7-14 der jeweilige relative und absolute Fehler in Abhängigkeit der Frequenz für die verschiedenen Ortskurven dargestellt. Die Verzerrungen der Ortskurven zeigen sich für den gesamten Frequenzbereich als sehr gering, dabei liegt der Fehler des Betrags für die Aktuatordynamik unter 3% und der Fehler des Betrags für die Unsicherheitsgewichtung unter 1%. Für die betrachtete Tiefpassstörung ergibt sich der relative Fehler infolge der Verzerrung auf unter 1,5 %.

Es kann somit für die in dieser Arbeit durchgeführte Robustheitsanalyse unter Berücksichtigung der nach Kapitel 7.3.3 spezifizierten *Konformitätsgrenze* vorausgesetzt werden, dass die entsprechend der Systematik nach [49] physikalisch-systemtechnisch spezifizierte dynamische Unsicherheitsmodellierung, unter Einhaltung der Bedingungen nach *Theorem 9*, unmittelbar für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse verwendet werden kann, folglich ihre Gültigkeit beibehält und aufgrund der geringfügigen Verzerrungen auch eine Interpretation der Unsicherheitsmodellierung auf Basis von Frequenzgang und Sinusantwort zulässig ist.

Der oben dargestellte Sachverhalt – eine vernachlässigbar kleine Verzerrung der Ortskurve bzgl. der anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* zur konventionellen Ortskurve (bzgl. der Imaginär-Achse) bei geringem Abstand zwischen *Konformitätsgrenze* und Imaginär-Achse – und somit die zulässige Anwendung der konventionellen Unsicherheitsmodellierung (μ -Analyse) für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse kann für vergleichbare Anwendungsfälle verallgemeinert werden. Allerdings ist die Zulässigkeit in Analogie zum obigen Fall für den jeweiligen Anwendungsfall durch den Beleg einer entsprechend geringen Verzerrung der Ortskurve nachzuweisen.

Unsicherheitsmodellierung Flugzeug

Die Unsicherheitsmodellierung der Flugzeugdynamik teilt sich in zwei Teilbereiche auf: Zum einen in die Unsicherheiten zur Erfassung der Abweichung zwischen realem Flugzeugverhalten und Modell (bezeichnet als Abbildungsfehler) und zum anderen in die Trimpunkt-Unsicherheit zur Berücksichtigung des sich über den gesamten Flugbereich verändernden dynamischen Verhaltens. Zunächst wird auf die Unsicherheiten zur Erfassung von Abbildungsfehlern eingegangen.

Flugzeug		
Zustandsraummodell mit parametrischer Unsicherheit der Ersatzderivativa zur Erfassung von Abbildungsfehlern (grau hinterlegt)		
$\begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{r}_e \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & L_r & L_\beta & 0 \\ N_p & N_r & N_\beta & 0 \\ Y_p & Y_r - 1 & Y_\beta & \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0 \\ \frac{\cos \gamma_0}{\cos \theta_0} & \frac{\sin \gamma_0}{\cos \theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \beta \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} L_\xi & L_\zeta \\ N_\xi & N_\zeta \\ Y_\xi & Y_\zeta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$		
Robustheitsanalyse mit Trimpunktunsicherheit (LPV-System)		
δ_{Env}	Nominalwert: 0	<i>Trimpunkt-Unsicherheit:</i> zur Abbildung des dynamischen Verhaltens über die Envelope (via Polynome 2-ter Ordnung). Basis zur Kurvenanpassung: dichtes Netz aus Zustandsraummodellen der einzelnen Flugzustände
	Wertebereich: $[-1, +1]$	
δ_{k_i} und δ_{k_j} $k = L, N, Y$ $i = p, r, \beta$ $j = \xi, \zeta$	Nominalwert: 1	<i>parametrische Unsicherheit der Ersatzderivativa zur Erfassung von Abbildungsfehlern $\pm 8\%$ (nachgeführter Regler und Regler mit festen Verstärkungsfaktoren)</i>
	Wertebereich: $[+0.92, +1.08]$	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta_{Env} & \delta_{k_i} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \delta_{Env} & \delta_{k_j} \end{pmatrix} \mathbf{u}$ mit $k = L, N, Y$; $i = p, r, \beta, \phi$; $j = \xi, \zeta$ Beispiel: $N_r = \underbrace{(\tau_{1/22} \delta_{Env}^2 + \tau_{2/22} \delta_{Env} + \tau_{3/22})}_{N_{rEnv\ nom}} \cdot \delta_{N_r}$ <i>($N_{rEnv\ nom}$ repräsentiert den über die Envelope veränderlichen Nominalwert)</i>		
Robustheitsanalyse der einzelnen LZI-Systeme		
δ_{k_i} und δ_{k_j} $k = L, N, Y$ $i = p, r, \beta$ $j = \xi, \zeta$	Nominalwert: 1	<i>parametrische Unsicherheit der Ersatzderivativa zur Erfassung von Abbildungsfehlern $\pm 35\%$ (nachgeführter Regler) $\pm 25\%$ (Regler mit festen Verstärkungsfaktoren)</i>
	Wertebereich: $[+0.65, +1.35]$ ($\pm 35\%$) $[+0.75, +1.25]$ ($\pm 25\%$)	
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta_{k_i} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \delta_{k_j} \end{pmatrix} \mathbf{u}$ mit $k = L, N, Y$; $i = p, r, \beta, \phi$; $j = \xi, \zeta$ Beispiel: $N_r = N_{r\ nom} \cdot \delta_{N_r}$ <i>(dabei ergibt sich $N_{r\ nom}$ aus der Trimmung und Linearisierung eines Flugzustands und ist das entsprechende \mathbf{A}- bzw. \mathbf{B}-Matrixelement des Zustandsraummodells)</i>		

Tabelle 7-3: Unsicherheitsmodellierung Flugzeug

Betrachtet man einen einzelnen Flugzustand (*LZI-System*), so beziehen sich die Abweichungen zwischen wahrer Streckendynamik (Flugzeugdynamik) und beschreibendem Zustandsraummodell, vgl. Gl. (2.8), auf die aerodynamischen Derivativa, wie etwa $C_{n\beta}$, sowie die Masse und die Massenverteilung. Dies kann exemplarisch an dem Ersatzderivativ N_β nach Gl. (2.9) nachvollzogen werden. Basierend auf der Zustandsraumdarstellung der Flugzeugdynamik ergeben sich durch die Abhängigkeiten der Ersatzderivativa der **A**- und **B**-Matrix von den aerodynamischen Derivativa C_{ij} (mit $i = l, n, Y$ und $j = p, r, \beta, \xi, \zeta$) sowie von der Masse (m) und von den Trägheitsmomenten (I_x, I_z, I_{xz}) 19 physikalisch parametrische Unsicherheiten. Aufgrund dieser Unsicherheiten kommt es zu einer gekoppelten Variation der 15 Ersatzderivativa k_i und k_j (mit $k = L, N, Y; i = p, r, \beta; j = \xi, \zeta$) der **A**- und **B**-Matrix des Zustandsraummodells, vgl. Tabelle 7-3. D.h. beispielsweise die Variation von N_p und L_p , siehe Anhang A.1, erfolgt u. a. in Abhängigkeit der Unsicherheiten des aerodynamischen Derivativs C_{np} , wodurch die Ersatzderivativa miteinander verkoppelt sind.

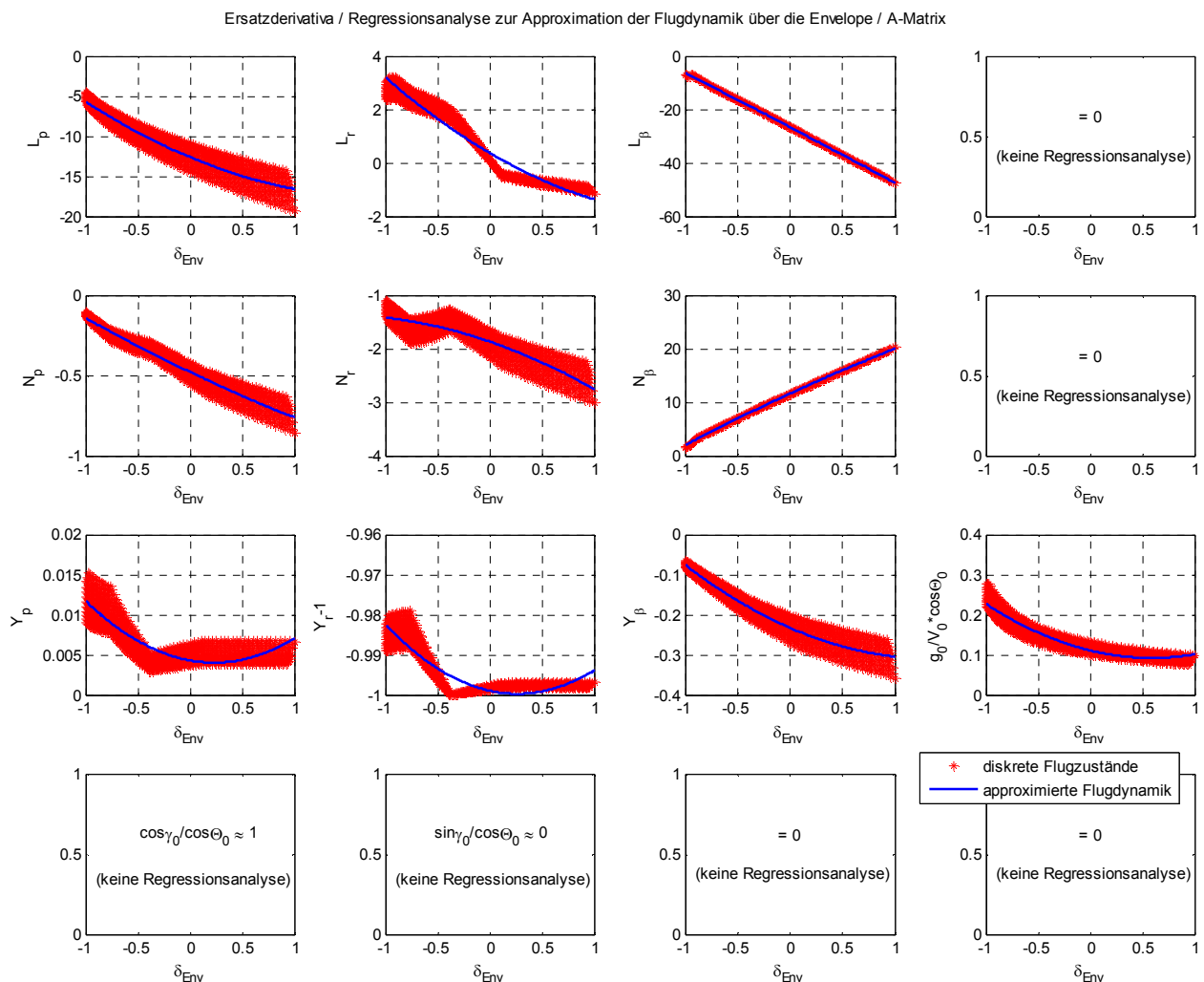


Abbildung 7-15: Regressionsanalyse zur Approximation der Flugdynamik über die Envelope / A-Matrix

Alternativ besteht die Möglichkeit, direkt bzgl. der Ersatzderivativa entsprechende parametrische Unsicherheiten einzuführen, welche sich unabhängig zueinander ergeben. Nachteilig bei einer Unsicherheitsmodellierung, die sich direkt auf die Ersatzderivativa bezieht, ist, dass infolge der Variation der einzelnen Ersatzderivativa Unsicherheitskonstellationen berücksichtigt werden, die einer physikalischen Grundlage entbehren und somit die Robustheitsuntersuchung einer gewissen Konservativität unterliegt. Ferner ist eine entsprechende Umrechnung der Unsicherheitsangaben bzgl. der aerodynamischen Derivativa, der Masse und der Trägheitsmomente auf die parametrischen Unsicherheiten der Ersatzderivativa erforderlich. Von Vorteil ist, dass die Anzahl der Unsicherheiten und somit der damit verbundene Rechenaufwand und die Rechenzeit reduziert werden. Des Weiteren wird durch die vereinfachte Unsicherheitsmodellierung eine handhabbare und intuitive Vorgehensweise mit reduziertem Komplexitätsgrad bewirkt. Aufgrund des signifikanten Einflusses der Anzahl der einzelnen Unsicherheiten auf die Rechenzeit erfolgt für die Robustheitsanalyse die Unsicherheitsmodellierung direkt bzgl. der Ersatzderivativa. Die zu den Ersatzderivativa zugehörigen parametrischen Unsicherheiten sind δ_{k_i} und δ_{k_j} (mit $k = L, N, Y$; $i = p, r, \beta$; $j = \xi, \zeta$). Für den MIMO-Robustheitsnachweis des LPV-Systems wurde eine Variation der Nominalwerte durch die parametrischen Unsicherheiten δ_{k_i} und δ_{k_j} von $\pm 8\%$ umgesetzt, vgl. Tabelle 7-3.

Zur Gewährleistung eines lückenlosen, für den gesamten Betriebsbereich des Flugzeugs gültigen Robustheitsnachweises ist es notwendig, die sich über die Envelope ändernde Dynamik der Regelkreiscomponenten (Flugzeug und nachgeführter Regler) als kontinuierliche Funktion zu beschreiben. Zu diesem Zweck wird die parametrische Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} (Wertebereich: $[-1; +1]$), in deren Abhängigkeit die Variation der Systemdynamik über die Envelope dargestellt wird, eingeführt. Die signifikanten und entscheidenden Änderungen der Flugzeugdynamik über den gesamten Betriebsbereich lassen sich für die DA42, wie bereits in Kapitel 6 dargelegt, mit guter Näherung als Funktion des Staudrucks \bar{q} beschreiben. Die Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} ist somit eine lineare Funktion des Staudrucks, welche für den kleinsten Staudruck den Wert -1 annimmt und bei maximalem Staudruck dem Wert $+1$ entspricht. Die einzelnen Einträge der **A**- und **B**-Matrix bzw. deren Änderung über die Envelope (in Abhängigkeit des Staudrucks) werden durch Polynome 2-ter Ordnung mit dem Funktionsargument δ_{Env} approximiert. In Analogie dazu erfolgt die Beschreibung des über die Envelope veränderlichen kinematischen Zusammenhangs $\frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0$. Die Abbildung 7-15 zeigt die Werte der **A**-Matrixelemente aller über die Envelope zu betrachtenden einzelnen Flugzustände in Abhängigkeit der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} (in rot) sowie die dazugehörigen approximierten Polynome 2-ter Ordnung (in blau) zur Beschreibung der Flugzeugdynamik als kontinuierliche Funktion mit dem Funktionsargument δ_{Env} . Unter Berücksichtigung der parametrischen Unsicherheiten zur Erfassung von Abbildungsfehlern ergibt sich die Zustandsgleichung mit Trimpunkt-Unsicherheit zur Beschreibung der Flugzeugdynamik als LPV-System für die gesamte Envelope nach Gl. (7.39):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta_{Env} & \delta_{k_i} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \delta_{Env} & \delta_{k_j} \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (7.39)$$

mit $k = L, N, Y; \quad i = p, r, \beta; \quad j = \xi, \zeta$

Die einzelnen Ersatzderivativa der \mathbf{A} - und \mathbf{B} -Matrix setzen sich dabei wie folgt zusammen:

$$\mathbf{A}\text{-Matrix: } k_i = \underbrace{(\tau_{1/ki} \delta_{Env}^2 + \tau_{2/ki} \delta_{Env} + \tau_{3/ki})}_{k_{iEnv nom}} \cdot \delta_{k_i} \quad k = L, N, Y; \quad i = p, r, \beta \quad (7.40)$$

$$\mathbf{B}\text{-Matrix: } k_j = \underbrace{(\tau_{1/kj} \delta_{Env}^2 + \tau_{2/kj} \delta_{Env} + \tau_{3/kj})}_{k_{jEnv nom}} \cdot \delta_{k_j} \quad k = L, N, Y; \quad i = \xi, \zeta \quad (7.41)$$

Dabei ist $k_{iEnv nom}$ bzw. $k_{jEnv nom}$ (mit $k = N, Y, L; i = p, r, \beta; i = \xi, \zeta$) der Nominalwert des sich über den Flugzeugbetriebsbereich ändernden Ersatzderivativs, der sich als stetige Funktion der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} darstellt und δ_{N_r} die parametrische Unsicherheit, welche die Abweichung zwischen der realen Flugzeugdynamik und deren Abbildung für den jeweiligen Flugzustand beschreibt. Die Größen $\tau_{1/ki}$, $\tau_{2/ki}$ und $\tau_{3/ki}$ bzw. $\tau_{1/kj}$, $\tau_{2/kj}$ und $\tau_{3/kj}$ (mit $k = N, Y, L; i = p, r, \beta; j = \xi, \zeta$) sind die konstanten Faktoren der Approximationsfunktionen 2-ter Ordnung zur Erfassung der zugehörigen Nominalwertfunktion $k_{iEnv nom}$ und $k_{jEnv nom}$, die sich aus der Kurvenanpassung auf Grundlage des jeweiligen Ersatzderivativs aller Zustandsraummodelle der Seitenbewegung ergeben. Die Robustheitsanalyse erfolgt durch die Approximation der nominalen Flugzeugdynamik mittels der Nominalwertfunktionen $k_{iEnv nom}$ und $k_{jEnv nom}$ in Abhängigkeit der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} , nicht für einzelnen Zustandsraummodelle, sondern auf Grundlage einer zusammenhängenden Beschreibung der Systemdynamik für den gesamten Flugbereich, vgl. [69] und [68], und ermöglicht somit einen globalen und lückenlosen Robustheitsnachweis. Eine Zusammenfassung der Unsicherheitsmodellierung des Flugzeugs mit Trimpunkt-Unsicherheit und parametrischen Unsicherheiten der Ersatzderivativa ist in Tabelle 7-3 zu finden.

Aufgrund der durchgeführten Regressionsanalyse zur Approximation der Flugzeugdynamik in Abhängigkeit der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} verbleiben einzelne Flugzustände unberücksichtigt. Der Nachweis *Robuster Konformität* für ein *LPV*-System, welches alle *LZI*-Systeme berücksichtigt, kann durch die Einführung von mehr als einer Trimpunkt-Unsicherheit erfolgen, da dadurch keine Funktion mit nur einer Variablen bzw. einem Parameter für die Erfassung als *LPV*-System zur Verfügung steht. Eine Regressionsanalyse zur Approximation der Flugdynamik mittels mehrerer unabhängiger Variablen bzw. Parameter würde sich beispielsweise durch die Beschreibung der Flugzeugdynamik in Abhängigkeit einer Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Dichte} , welche die Ausdehnung der Flug envelope über die Flughöhen berücksichtigt, und einer Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Gesch} , die den Geschwindigkeitsbereich des Flugzeugs erfasst, ergeben. Somit erfolgt die Beschreibung der Flugdynamik als *LPV*-System nicht auf Basis eines eindimensionalen Funktionsgraphen (Kurve), wie im Rahmen dieser Arbeit, sondern mittels eines mehrdimensionalen Funktionsgraphen (Fläche). Im vorliegenden Fall wurde die Umsetzung von mehr als einer Trimpunkt-Unsicherheit aufgrund der zur Verfügung

stehenden Rechenleistung und der damit in Zusammenhang stehenden Rechenzeit nicht realisiert. Um dennoch eine belastbare Robustheitsaussage zu gewährleisten, wurde in Anlehnung an die *SISO*-Robustheitsanalyse und an eine behördliche Zulassung ein *MIMO*-Robustheitsnachweis ($\mu_{\Delta T}$ -Analyse) für alle *LZI*-Systeme realisiert, siehe Kapitel 7.3.6. Dabei wurden für die Robustheitsanalyse der *LZI*-Systeme für das Flugzeug mit nachgeführtem Regler alle Ersatzderivativa mit einer parametrischen Unsicherheit δ_{k_i} und δ_{k_j} (mit $k = L, N, Y$; $i = p, r, \beta$; $j = \xi, \zeta$) von $\pm 35\%$ versehen und für das Flugzeug mit Ersatzregler (Regler mit festen Verstärkungsfaktoren) wurde für jedes Ersatzderivativ eine Unsicherheit von $\pm 25\%$ berücksichtigt. Eine Zusammenfassung zur Unsicherheitsmodellierung der *MIMO*-Robustheitsanalyse aller einzelnen *LZI*-Systeme ist ebenfalls in Tabelle 7-3 zu finden.

Unsicherheitsmodellierung Regler

Die Unsicherheitsmodellierung des Reglers erfolgt analog zur der des Flugzeugs unter Verwendung der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} (zur Erfassung des dynamischen Verhaltens über die Flugenvelope) und von parametrischen Unsicherheiten (zur Beschreibung von Abweichungen zwischen realem Reglerverhalten und Modell des jeweiligen Flugzustands; bezeichnet als Abbildungsfehler).

Abweichungen zwischen der realen Reglerdynamik und der linearen Abbildung des Reglers resultieren aus der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bei der Linearisierung nichtlinearer Zusammenhänge. Für den vorgestellten Reglerentwurf gilt dies für die nichtlineare Rückführung $k_{r_e\beta} \frac{g}{v} \cos \theta \sin \Phi$ (siehe Kapitel 5.5), welche zur Durchführung der Reglerentwicklung und Realisierung der Robustheitsanalyse zu linearisieren ist. Abweichungen infolge von Linearisierungsfehlern werden durch die parametrische Unsicherheit $\delta_{\frac{g}{v} \cos \theta}$ erfasst, die den Wert des linearisierten Zusammenhangs $k_{r_e\beta} \frac{g_0}{V_0} \cos \theta_0$ um $\pm 25\%$ variiert.

In Analogie zur Unsicherheitsmodellierung des Flugzeugs, bei der das sich über den gesamten Flugbereich variierende dynamische Verhalten durch die Approximation der Flugzeugdynamik mittels stetiger Funktionen erfasst wurde, ist dies für den nachgeführten Regler zu realisieren. Für den Regler mit festen Verstärkungsfaktoren ist eine entsprechende Adaption nicht erforderlich. Die Verstärkungsfaktoren des nachgeführten Reglers werden, wie in Kapitel 6 dargelegt, als Funktion des Staudrucks dem jeweiligen Flugzustand nachgeführt. Die Verläufe der Verstärkungsfaktoren bzw. der Matrizelemente von \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_f werden entsprechend ihrer linearen Abhängigkeit vom Staudruck (siehe Kapitel 6.4) durch Geraden mit der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} als Funktionsargument abgebildet, siehe Tabelle 7-4, Beispiel 1. Die Verstärkungsfaktoren der Steuerkoordinierung (*Control Allocation*, Verstärkungsmatrix \mathbf{H}_{ER}) verhalten sich linear zum invertierten Staudruck bzw. zum Quadrat des invertierten Staudrucks, die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} und den Elementen der \mathbf{H}_{ER} -Matrix müssen dabei durch Polynome höherer Ordnung approximiert werden. Gute Ergebnisse für die Kurvenanpassung der \mathbf{H}_{ER} -Matrix werden durch

Regler		
Verstärkungsmatrizen des Reglers mit parametrischer Unsicherheit (Abbildungsfehler / grau hinterlegt)		
$\mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{H}_{ER} \left[\mathbf{K}_P + \frac{1}{s} \mathbf{K}_f \mathbf{C}_f \right]}_{\mathbf{K}(s)} \begin{pmatrix} p_e \\ r_e \\ \beta \\ \Phi \end{pmatrix}$		
$\mathbf{H}_{ER} = \begin{bmatrix} h_{\xi p_e} & h_{\xi r_e} \\ h_{\zeta p_e} & h_{\zeta r_e} \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} k_{p_e p_e} & k_{p_e r_e} & k_{p_e \beta} & 0 \\ k_{r_e p_e} & -k_{r_e \beta} & k_{r_e \beta} & k_{r_e \beta} \cdot \frac{g_0}{V_{K_0}^G} \cos \theta_0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Robustheitsanalyse mit Trimpunktunsicherheit (LPV-System)		
δ_{Env}	siehe Tabelle 7-3	<i>zur Abbildung der Veränderung über die Envelope der einzelnen Matrixeinträge der \mathbf{K}_P- und \mathbf{K}_f-Matrix via Geraden bzw. der \mathbf{H}_{ER}-Matrix via Polynomen 5-ter Ordnung (nachgeführter Regler)</i>
$\delta_{\frac{g}{V} \cos \theta}$	Nominalwert: 1 Wertebereich: [+0.75, +1.25]	<i>parametrische Unsicherheit mit $\pm 25\%$ Erfassung etwaiger Linearisierungsfehler</i>
$\mathbf{K} \left(s, \delta_{Env}, \delta_{\frac{g}{V} \cos \theta} \right) = \mathbf{H}_{ER}(\delta_{Env}) \left[\mathbf{K}_P \left(\delta_{Env}, \delta_{\frac{g}{V} \cos \theta} \right) + \frac{1}{s} \mathbf{K}_f(\delta_{Env}) \mathbf{C}_f \right]$		
<p style="text-align: center;"><i>Beispiel 1:</i> $k_{p_e p_e} = \sigma_{1/11} \delta_{Env} + \sigma_{2/11}$</p> <p style="text-align: center;"><i>Beispiel 2:</i> $k_{r_e \beta} \frac{g_0}{V_{K_0}^G} \cos \theta_0 = \underbrace{(\sigma_{1/24} \delta_{Env} + \sigma_{2/24})}_{\text{unsicherer Wert}} \underbrace{\delta_{\frac{g}{V} \cos \theta}}_{\text{Nominalwert}}$</p> <p style="text-align: center;"><i>Beispiel 3:</i> $h_{\xi r_e} = \lambda_{1/12} \delta_{Env}^5 + \lambda_{2/12} \delta_{Env}^4 + \lambda_{3/12} \delta_{Env}^3 + \lambda_{4/12} \delta_{Env}^2 + \lambda_{5/12} \delta_{Env} + \lambda_{6/12}$</p>		
Robustheitsanalyse der einzelnen LZI-Systeme		
$\delta_{\frac{g}{V} \cos \theta}$	Nominalwert: 1 Wertebereich: [+0.75, +1.25]	<i>parametrische Unsicherheit mit $\pm 25\%$ Erfassung etwaiger Linearisierungsfehler</i>
$\mathbf{K} \left(s, \delta_{\frac{g}{V} \cos \theta} \right) = \mathbf{H}_{ER} \left[\mathbf{K}_P \left(\delta_{\frac{g}{V} \cos \theta} \right) + \frac{1}{s} \mathbf{K}_f \mathbf{C}_f \right]$		
$\underbrace{k_{r_e \beta} \frac{g_0}{V_{K_0}^G} \cos \theta_0}_{\text{unsicherer Wert}} = \left(\underbrace{k_{r_e \beta} \frac{g_0}{V_{K_0}^G} \cos \theta_0}_{\text{nom}} \right) \delta_{\frac{g}{V} \cos \theta}$		

Tabelle 7-4: Unsicherheitsmodellierung Regler

Polynome 5-ter Ordnung erreicht. An dieser Stelle wird exemplarisch der Verstärkungsfaktor $h_{\xi\dot{r}_e}$ der \mathbf{H}_{ER} -Matrix (siehe Kapitel 5.2) betrachtet. Er ergibt sich durch die Regressionsanalyse 5-ter Ordnung entsprechend Gl. (7.42).

$$h_{\xi\dot{r}_e} = \lambda_{1/12} \delta_{Env}^5 + \lambda_{2/12} \delta_{Env}^4 + \lambda_{3/12} \delta_{Env}^3 + \lambda_{4/12} \delta_{Env}^2 + \lambda_{5/12} \delta_{Env} + \lambda_{6/12} \quad (7.42)$$

Die Größen $\lambda_{i/12}$ mit $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind die Konstanten der Funktion 5-ter Ordnung, welche sich aus der Regressionsanalyse des Verstärkungsfaktors $h_{\xi\dot{r}_e}$ der \mathbf{H}_{ER} -Matrix ergeben.

Für den Regler mit festen Verstärkungsfaktoren wurde alleinig die parametrische Unsicherheit $\frac{\delta g}{v \cos \theta}$ zur Erfassung von Linearisierungsfehlern berücksichtigt, da die Verstärkungsmatrizen ansonsten mit über dem Flugbereich konstanten Verstärkungsfaktoren besetzt sind. Eine Zusammenfassung der Unsicherheitsmodellierung des Reglers ist in Tabelle 7-4 zu finden.

7.3.5 Besonderheiten von dyn. Unsicherheiten bzgl. der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse

In diesem Kapitel werden kurz die charakterisierten Eigenschaften der dynamischen Unsicherheitsmodellierung, deren Erstellung und die Interpretation im Zusammenhang mit der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse und einer anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* beschrieben. Konnte in Kapitel 7.3.4 gezeigt werden, dass die dynamische Unsicherheitsmodellierung der Aktuatordynamik in Anlehnung an [49] für die nach Kapitel 7.3.3 angesetzte *Konformitätsgrenze* aufgrund des geringen Abstandes zur Imaginär-Achse und der marginalen Verzerrungen der Ortskurvenauswertung ihre Gültigkeit sowie Interpretierbarkeit beibehält, gilt dies im Allgemeinen nicht. Im Folgenden wird deshalb ein Vorschlag kurz dargelegt, wie trotz einer spezifisch angesetzten *Konformitätsgrenze* (hier exemplarisch $s_{\Gamma} = -3 + j\omega$), welche der Bedingung nach einem ausreichend geringen Abstand zur Imaginär-Achse nicht nachkommt, eine physikalisch-systemtechnisch motivierte dynamische Unsicherheitsmodellierung entsprechend der Vorgehensweise nach [49] umgesetzt werden kann, deren Gültigkeit, unter Erfüllung der für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse notwendigen Bedingungen nach *nominaler Konformität* und der Normbedingung $\|\delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ (bzw. $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$), erhalten bleibt.

Zunächst wird bzgl. der Imaginär-Achse der maximale relative Fehler $l_I(\omega)$ nach Gl. (7.35), welcher sich durch die systematische Variation der Kenngrößen (parametrische Unsicherheiten) des dynamischen Systems ergibt, in direkter Anlehnung an die Vorgehensweise nach [49] bestimmt. Der maximale relative Fehler $l_I(\omega)$ entspricht einer „oberen Grenzkurve“, die alle aus der Variation der Kenngrößen hervorgehenden Permutationen erfasst. Für die hier betrachtete Aktuatordynamik sind diese Kenngrößen die natürlichen Frequenz (Bandbreite des Aktuators), die relativen Dämpfung, die Verstärkung und eine zusätzlich eingeführte Totzeit. Für das folgende Beispiel wurden die Kenngrößen im Bereich von $\pm 10\%$ variiert.

Im Anschluss daran wird nun eine Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ nach Gl. (7.37) spezifiziert, die die Forderung nach Gl. (7.36) erfüllt und somit der Bedingung nach einer (adäquaten) „Einhüllenden“ über den maximalen relativen Fehler $l_I(\omega)$ nachkommt. Die

Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ setzt somit eine frequenzabhängige Skalierung einer multiplikativen Störung bzw. Unsicherheit $\delta(s)$ (bzw. $\Delta(s)$) mit $\|\delta\|_\infty < 1$ um. Die Einheit aus Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ und dynamischer Unsicherheit $\delta(s)$ erfasst folglich alle betrachteten Kombinationen des unsicheren Übertragungsverhaltens des Aktuators, wodurch die Behauptung einer physikalisch-systemtechnisch motivierten Vorgehensweise zur Spezifikation einer dynamischen Unsicherheitsmodellierung mit zugehöriger Gewichtungsfunktion begründet ist.

Zur Umsetzung einer systemtechnisch geeigneten dynamischen Unsicherheitsmodellierung auf Basis der Systematik nach [49] für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ist die dargelegte Vorgehensweise in Analogie zur Imaginär-Achse bzgl. der anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* zu realisieren. Dabei kann infolge der Auswertung bzgl. der anwendungsspezifischen *Konformitätsgrenze* die physikalische Interpretierbarkeit als Frequenzgang und Sinusantwort nicht mehr gewährleistet werden.

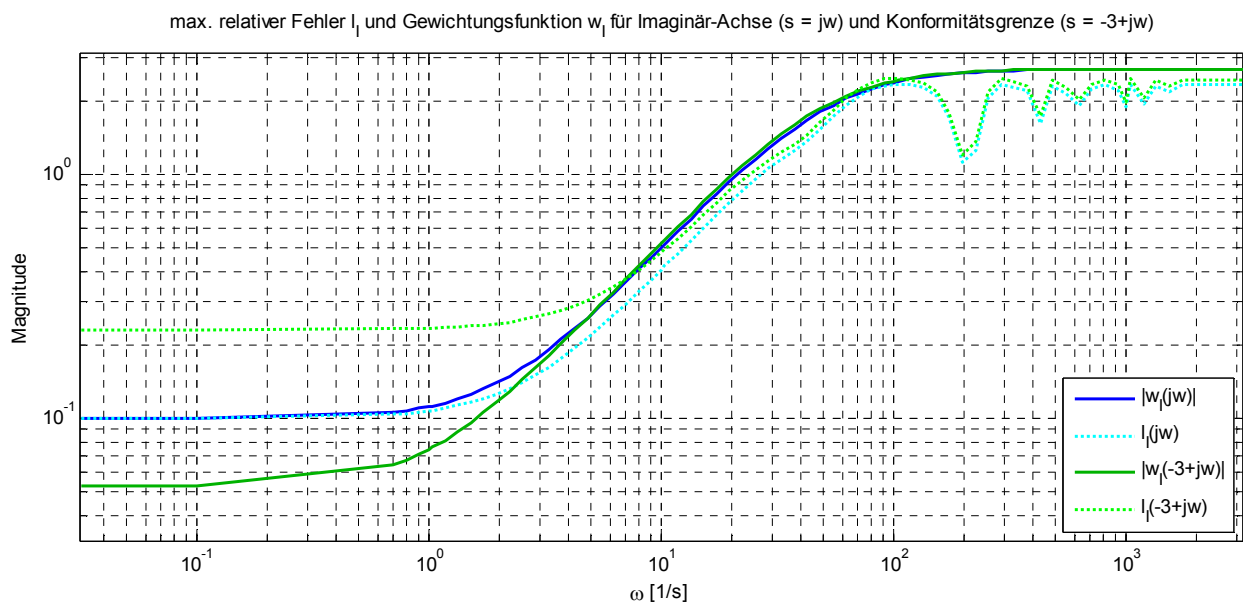


Abbildung 7-16: max. relativer Fehler l_I und Gewichtungsfunktion w_I

Aufgrund der notwendigen Betrachtung und Auswertung gegenüber der spezifizierten *Konformitätsgrenze* (hier $s_\Gamma = -3 + j\omega$) kommt es zu einer Verzerrung des maximalen relativen Fehlers $l_I(s_\Gamma)$ (gegenüber $l_I(\omega)$) und zu einer Verzerrung der Unsicherheitsgewichtung $w_I(s_\Gamma)$ (gegenüber $w_I(j\omega)$), wodurch die Unsicherheitsgewichtung $w_I(s_\Gamma)$ die Bedingung nach einer „Einhüllenden“ von $l_I(s_\Gamma)$ nicht mehr erfüllt. Die Unsicherheitsgewichtung $w_I(s_\Gamma)$ beschreibt somit keine adäquate „oberen Schranke“ und ist folglich nicht mehr angemessen für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse. Abbildung 7-16 zeigt die Unsicherheitsgewichtung $w_I(s)$ für die Auswertung bzgl. der Imaginär-Achse ($w_I(j\omega)$) und bzgl. der spezifizierten *Konformitätsgrenze* $s_\Gamma = -3 + j\omega$ ($w_I(s_\Gamma)$) sowie den maximalen relativen Fehler $l_I(s)$ für die Auswertung bzgl. der Imaginär-Achse ($l_I(\omega)$) und bzgl. der spezifizierten *Konformitätsgrenze* $s_\Gamma = -3 + j\omega$ ($l_I(s_\Gamma)$). Es ist gut zu erkennen, dass die Unsicherheitsgewichtung w_I für die Betrachtung bzgl. der Imaginär-Achse

der Forderung nach einer „Einhüllenden“ von $l_I(\omega)$ nachkommt, dies jedoch bzgl. der *Konformitätsgrenze* $s_\Gamma = -3 + j\omega$ nicht mehr erfüllt ist.

Die Spezifikation einer zweckmäßigen Unsicherheitsgewichtung $w_I(s)$, die bei der Ortskurvenauswertung bzgl. der spezifizierten *Konformitätsgrenze* s_Γ eine angemessene „Einhüllende“ für die frequenzabhängigen Abweichungen beschreibt, stellt eine in zukünftigen (Forschungs-) Arbeiten zu lösende Aufgabenstellung dar. Für den jeweiligen Anwendungsfall kann durch manuelles „Tuning“ der Kenngrößen r_{low} , r_{high} und ω_τ einer Gewichtungsfunktion $w_I(j\omega)$, die entsprechend der Systematik nach [49] bestimmt wurde, eine Gewichtungsfunktion $w_I(s_\Gamma)$ festgelegt werden, welche die Forderung nach einer „oberen Schranke“ für den maximalen relativen Fehler $l_I(s_\Gamma)$ adäquat erfüllt. Wünschenswert wäre aber eine systematische und allgemeingültige Vorgehensweise, die eine angemessene Approximationsgüte sicherstellt. Die Lösung dieser Herausforderung ist jedoch nicht Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Eine hinzukommende charakteristische Eigenschaft der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse und der dynamischen Unsicherheitsmodellierung ist die Forderung nach *nominaler Konformität* von $\mathbf{M}(s)$ und $\mathbf{\Delta}(s)$ entsprechend dem *Theorem 9*. Daraus folgt, dass nicht nur die Gewichtungsfunktion $w_I(s)$, sondern auch die dynamischen Störungen von $\mathbf{\Delta}(s)$ der Forderung nach *nominaler Konformität* nachkommen müssen, d.h. alle Pole bzw. Eigenwerte müssen links der spezifizierten *Konformitätsgrenze* Γ liegen. Bezüglich der Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ lässt sich diese Forderung dadurch erklären, dass die Gewichtungsfunktion $w_I(s)$ im Rahmen der Analyse *Robuster Konformität* eines unsicheren Systems als $\mathbf{M}\mathbf{\Delta}$ -Struktur Teil des nominalen Regelkreises (bzw. Teil des geschlossenen Kreises für den Nominal-Fall) ist, für welchen die Initialbedingung nach (*nominaler*) *Konformität* zur Analyse *Robuster Konformität* erfüllt sein muss. Die Forderung nach *nominaler Konformität* bzgl. einer dynamischen Störungen von $\mathbf{\Delta}(s)$, welche sich aus den mathematischen Betrachtungen bei der Herleitung ergibt, kann wie folgt argumentiert werden: Angenommen $\mathbf{\Delta}(s)$ ist nicht konform, dann wäre für eine infinitesimale kleine Störung (beliebig kleine Unsicherheit) der geschlossene Kreis nicht konform und dies wäre ein Widerspruch zur (geforderten) *nominalen Konformität* des geschlossenen Kreises.

Abschließend wird noch auf die Besonderheit der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse bzgl. der sich ergebenden Einschränkungen der Übertragungsdynamik frequenzabhängiger Unsicherheiten, welche bereits bei der Unsicherheitsmodellierung der Aktuatorik in Kapitel 7.3.4 kurz aufgegriffen wurden (siehe Beispiel Tiefpassstörung), eingegangen. Bei der direkten Interpretation einer dynamischen Störung $\delta(s)$ mit $\|\delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ (bzw. $\mathbf{\Delta}(s)$ mit $\|\mathbf{\Delta}(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$) als Transferfunktion kann es zu einer Fehleinschätzung kommen, da aufgrund der erforderlichen Auswertung mittels der $H_{\infty\Gamma}$ -Norm im Vergleich zur Auswertung auf Basis der H_∞ -Norm zum Teil signifikante Normverschiebungen resultieren. Für eine explizite Übertragungsfunktion $F_i(j\omega)$ einer Störung, welche bzgl. der konventionellen μ -Analyse die Bedingung $\|F_i(j\omega)\|_\infty \leq 1$ erfüllt und somit eine zulässige Unsicherheit ist, kann hinsichtlich der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse der Fall auftreten, dass eben diese Übertragungsfunktion für die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse die erforderliche Normbedingung

($\|\delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$ bzw. $\|\Delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$) nicht erfüllt, d.h. $\|F_i(s_\Gamma)\|_{\infty} > 1$. Somit gehört diese Übertragungsfunktion hinsichtlich der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse nicht zu den zulässigen Unsicherheiten. Die beschriebene Problematik wirkt sich restriktiv bzgl. der Dynamik der Unsicherheit $\Delta(s)$ aus und ist bei der Interpretation der Ergebnisse der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse stets zu beachten. Die Problematik ist vor allem dann zu berücksichtigen, wenn beispielsweise im Zuge einer Überprüfung der Ergebnisse der Robustheitsanalyse eine solche Störung als direkte Transferfunktion erfasst und durch die Integration als Regelkreisglied in ein entsprechendes Simulationsmodell vertieft analysiert wird. Motiviert sich die dynamische Unsicherheitsmodellierung jedoch aus der Variation von physikalisch-systemtechnisch unsicheren Kenngrößen einer Übertragungsfunktion, welche – entsprechend der Systematik nach [49] und der obigen Unsicherheitsmodellierung der Aktuatorik – durch eine abstrakte normbeschränkte ($\|\delta(s)\|_{\infty\Gamma} \leq 1$) Unsicherheit bzw. Störung $\delta(s)$ ohne explizite Eigendynamik und mit zugehöriger Gewichtungsfunktion repräsentiert werden, und nicht durch die Interpretation der Störung bzw. Unsicherheit als eine explizite Transferfunktion, tritt diese Problematik nicht auf. Faktisch wäre es auch möglich die unsicheren Kenngrößen direkt als parametrische Unsicherheiten im Zuge der Unsicherheitsmodellierung zu erfassen und somit der Problematik einer dynamischen Unsicherheitsmodellierung im Rahmen der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse auszuweichen, jedoch wirkt sich eine daraus resultierende signifikante Zunahme der Anzahl der einzelnen Unsicherheiten nachteilig auf Rechenaufwand bzw. Rechenzeit aus. Ferner wird durch die dynamische Unsicherheitsmodellierung auf Basis der Systematik nach [49] im Vergleich zur rein parametrischen Unsicherheitsmodellierung aufgrund der signifikant reduzierten Anzahl an einzelnen Unsicherheiten eine handhabbare und intuitive Vorgehensweise mit merklich kleinerem Komplexitätsgrad sichergestellt.

7.3.6 Ergebnisse der *MIMO*-Robustheitsanalyse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse des Regelungssystems unter Berücksichtigung der Mindestanforderungen an die Flugeigenschaften der Seitenbewegung (*Konformitätsgrenze* Γ ; siehe Kapitel 7.3.3) und der realisierten Unsicherheitsmodellierung (siehe Kapitel 7.3.4) vorgestellt. Schwerpunkt der *MIMO*-Robustheitsanalyse ist der geschlossene Regelkreis mit als Funktion des Staudrucks der Flugzeugdynamik nachgeführtem Regler. In Kapitel 6 wurde zusätzlich ein Regler mit festen Verstärkungsfaktoren (*Fix-Gain- / Back-Up-Regler*) ausgearbeitet, welcher bei Ausfall des Staudrucksignals in Betrieb geht und ebenfalls im Rahmen der Robustheitsanalyse untersucht wird. Zur Realisierung eines globalen und lückenlosen Nachweises robuster Stabilitätseigenschaften bzw. *Robuster Konformität* für die gesamte Envelope wurden, wie bereits in Kapitel 7.3.4 detailliert dargestellt, die sich über den Flugbereich verändernden Größen aller einzelnen *LZI*-Systeme durch stetig verlaufende Funktionen beschrieben und somit eine Untersuchung des geschlossenen Regelkreises als *LPV*-System über die approximierte Envelope ausgeführt. Die Robustheitsanalyse wurde für beide Reglervarianten (nachgeführte und feste Verstärkungsfaktoren), sowohl als

Robustheitsuntersuchung mit Trimpunkt-Unsicherheit (*LPV-System*) als auch für die einzelnen *LZI-Systeme*, durchgeführt. Die für das analysierte Frequenzspektrum bestimmte obere und unterer Schranke des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ der jeweiligen Analysen wurden mit der zur *Robust Control Toolbox* gehörigen Funktion *mussv* der Software *Matlab* des Herstellers *The MathWorks* berechnet, vgl. [70]. Eine Verifikation der Berechnungsmethodik des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ erfolgt mit der von *ONERA* für *Matlab* entwickelten *Skew Mu Toolbox (SMT)*, vgl. [71], deren Funktionen zur Bestimmung von $\mu_{\Delta\Gamma}$ entsprechend modifiziert wurden. Dabei konnte unter Berücksichtigung numerischer Ungenauigkeiten und algorithmischer Unterschiede die Gleichwertigkeit der Resultate festgestellt werden.

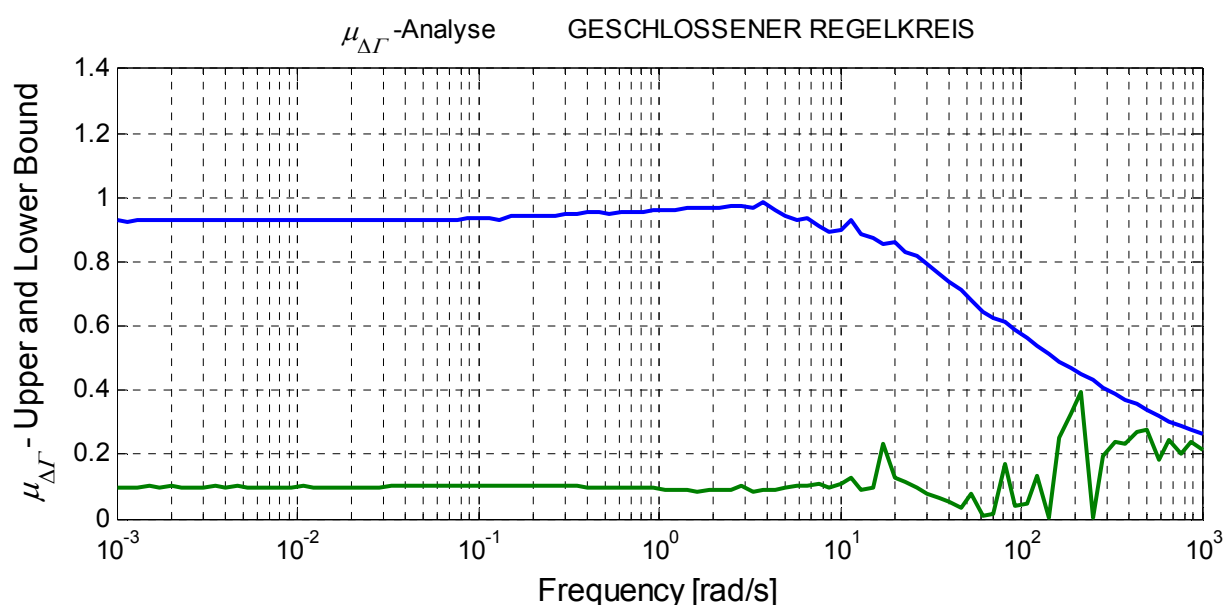


Abbildung 7-17: $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse, nachgeführter Regler, *LPV-System* (Trimpunkt-Un.)

In Abbildung 7-17 ist der Verlauf der oberen und unteren Schranke des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ für den geschlossenen Regelkreis mit nachgeführtem Regler und Trimpunkt-Unsicherheit (*LPV-System*) dargestellt. Die obere Schranke des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ erreicht über das untersuchte Frequenzspektrum den Wert eins nicht, somit gilt: $\mu_{\Delta\Gamma} < 1$. Der geschlossene Regelkreis ist für den gesamten Betriebsbereich unter Berücksichtigung der spezifizierten Mindestanforderungen (*Konformitätsgrenze Γ* ; siehe Kapitel 7.3.3) und der angenommenen Unsicherheiten *robust konform*. D.h. kein Pol bzw. Eigenwert des geregelten Systems kommt unter Berücksichtigung der angenommenen Unsicherheiten auf bzw. rechts der vorgegebenen *Konformitätsgrenze Γ* zu liegen. Der geschlossene Regelkreis erfüllt *Robuste Konformität*. Neben der Trimpunkt-Unsicherheit, welche auf Flugzeug und Regler wirkt, werden alle Ersatzderivativa des Zustandsraummodells der Strecke mit einer parametrischen Unsicherheit um $\pm 8\%$ variiert. Die Aktuatoren sind mit einer dynamischen Unsicherheit beaufschlagt. Etwaige Fehler durch die Linearisierung der nichtlinearen Rückführung $k_{\dot{r}_e\beta} \frac{g}{V} \cos \theta \sin \Phi$ des Reglers sind durch eine parametrische Unsicherheit berücksichtigt.

Für den geschlossenen Regelkreis mit Ersatzregler (Regler mit festen Verstärkungsfaktoren), beschrieben als *LPV*-System, kann, unter Berücksichtigung der Unsicherheitsmodellierung für Flugzeug, Regler und Aktuatorik, ebenfalls *Robuste Konformität* nachgewiesen werden. Für den strukturierten Singulärwert $\mu_{\Delta\Gamma}$ gilt über den analysierten Frequenzbereich $\mu_{\Delta\Gamma} < 1$, siehe Abbildung 7-18. Die Unsicherheitsmodellierung ist identisch mit der des geregelten Flugzeugs mit nachgeführtem Regler, jedoch ohne Trimpunkt-Unsicherheit für den Regler. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die erzielten Flugeigenschaften des geschlossenen Regelkreises mit festen Verstärkungsfaktoren (*Fix-Gain- / Back-Up-Regler*) weniger gut sind als die Flugeigenschaften des Flugzeugs mit nachgeführtem Regler, jedoch entscheidend besser als die des unregulierten Fluggeräts. Darauf wurde bereits in Kapitel 6.5 eingegangen. So können im Vergleich zum nachgeführten Regler die Roll- und Gierbewegung nur noch begrenzt voneinander entkoppelt und die Anforderungen an die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises für exzellente Flugeigenschaften nach Kapitel 6.2 nicht mehr vollständig erfüllt werden.

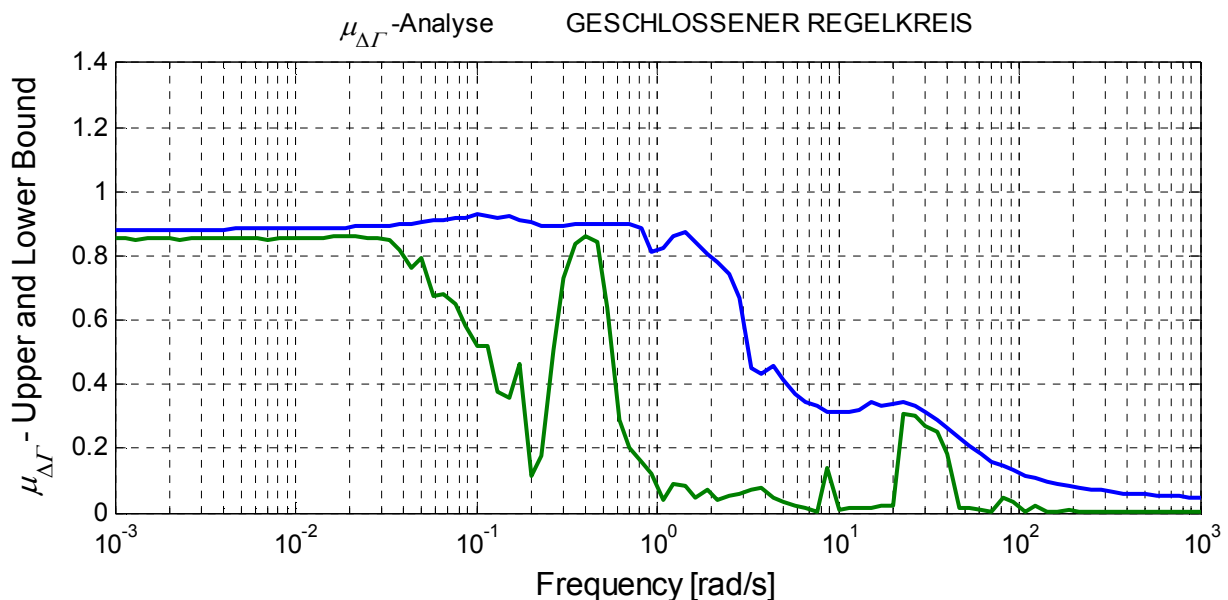


Abbildung 7-18: $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse, fester Regler, *LPV*-System (Trimpunkt-Un.)

Stellt man die beiden durchgeführten $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analysen, welche als *LPV*-System mit nachgeführten und festen Verstärkungsfaktoren ausgeführt wurden, gegenüber, so ist klar ersichtlich, dass für den Fall mit nachgeführtem Regler der mittlere Abstand zwischen oberer und unterer Schranke des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ größer ist und somit die Genauigkeit im Vergleich zum Fall mit festen Verstärkungsfaktoren geringer ist. D.h. die Toleranz des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ für das Flugzeug mit nachgeführtem Regler ist größer als die des Flugzeugs mit festen Verstärkungsfaktoren. Die beiden analysierten Fälle unterscheiden sich jedoch ausschließlich hinsichtlich der Unsicherheitsmodellierung des Reglers zur Nachführung der Verstärkungsfaktoren mittels der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} . So tritt die Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} für die Analyse des geregelten Flugzeugs mit nachgeführten Verstärkungsfaktoren annähernd doppelt so häufig auf im Vergleich zur Analyse des geregelten Flugzeugs mit festen

Verstärkungsfaktoren. Es kann somit eine Sensitivität der *Matlab*-Funktion *mussv* in Zusammenhang mit dem Komplexitätsgrad der Unsicherheitsmodellierung und der Genauigkeit (Toleranz) von oberer und unterer Schranke festgestellt werden. Diese Tatsache stützt die Forderung nach einem ausgewogenen Verhältnis zwischen dem Komplexitätsgrad der Unsicherheitsmodellierung auf der einen Seite und der Handhabbarkeit, respektive der rechnergestützten Verarbeitung auf der anderen Seite.

In Anlehnung an die *SISO*-Robustheitsanalyse und an eine behördliche Zulassung sowie zur Gewährleistung eines belastbaren *MIMO*-Robustheitsnachweises, da infolge der Approximation der Flugdynamik einzelne Flugzustände unberücksichtigt bleiben, vgl. Kapitel 7.3.4, wird im Folgenden eine $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse für alle einzelnen *LZI*-Systeme der Envelope durchgeführt.

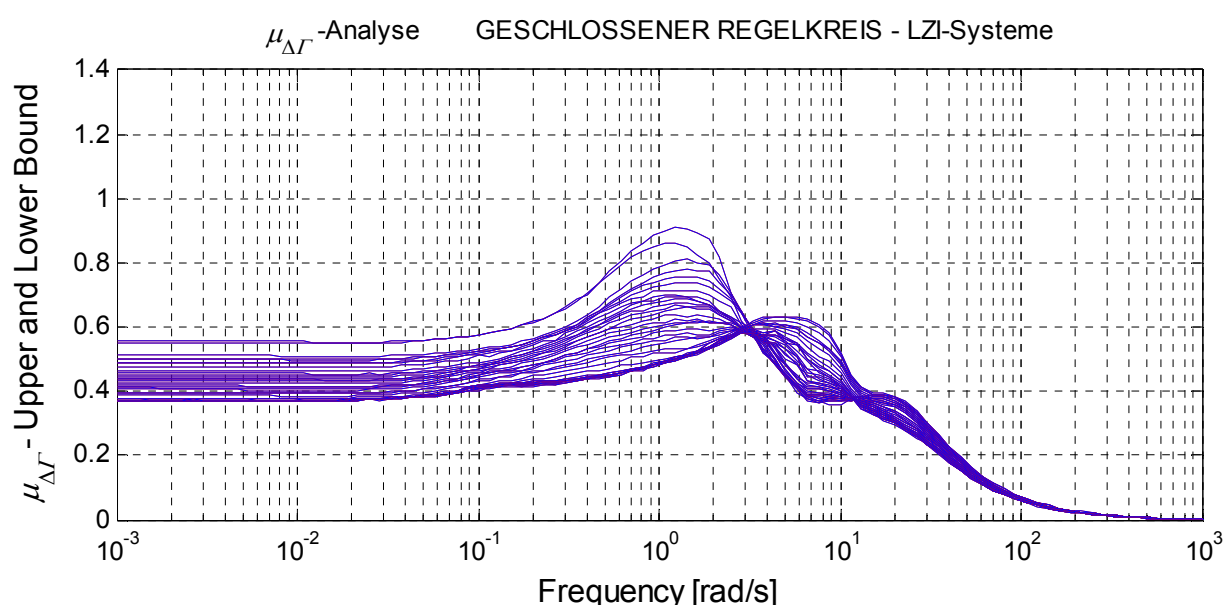


Abbildung 7-19: $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse, nachgeführter Regler, einzelne *LZI*-Systeme

In Abbildung 7-19 ist die obere Schranke des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ repräsentativer Flugzustände (*LZI*-Systeme) des geschlossenen Regelkreises mit nachgeführtem Regler dargestellt. Für die Analyse aller *LZI*-Systeme mit nachgeführtem Regler wurden mit Ausnahme der Trimpunkt-Unsicherheit, welche für die Betrachtung einzelner Flugzustände wegfällt, die Struktur der Unsicherheitsmodellierung zur Erfassung von Abbildungsfehlern von Flugzeug, Aktuatorik und Regler unverändert beibehalten. Für die konkrete Unsicherheitsmodellierung von Aktuatorik und Regler wurden auch die numerischen Werte gleichbleibend verwendet, siehe Tabelle 7-2 und Tabelle 7-4. Jedoch konnten für die Analyse der einzelnen *LZI*-Systeme mit nachgeführtem Regler die parametrischen Unsicherheiten der Ersatzderivativa des Zustandsraummodells des Flugzeugs von $\pm 8\%$ auf $\pm 35\%$, siehe Tabelle 7-3, erhöht werden. D.h. im Rahmen der Betrachtung aller einzelnen *LZI*-Systeme mit nachgeführtem Regler kann somit *Robuste Konformität* auf Basis des strukturierten Singulärwerts, bei einer maximalen Abweichung jedes einzelnen Ersatzderivativs von bis zu $\pm 35\%$ des Nominalwertes und unter Berücksichtigung der verbleibenden Unsicherheiten von Regler und Aktuator, nachgewiesen

werden. Eine entsprechende Untersuchung wurde auch für den geschlossenen Regelkreis mit festen Verstärkungsfaktoren durchgeführt. Für diesen Fall kann *Robuste Konformität* für die oben angegebene Unsicherheitsmodellierung garantiert werden, wobei die maximal zulässige Abweichung bzgl. der Ersatzderivativa der Strecke im Vergleich zur Untersuchung mit Trimpunkt-Unsicherheit von $\pm 8\%$ auf $\pm 25\%$, siehe Tabelle 7-3, erhöht werden konnte. Das Ergebnis hierzu ist in Abbildung 7-20 dargestellt.

Vergleicht man die Ergebnisse der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse für die Untersuchung als *LPV*-System für die Envelope mit einer Variation der Ersatzderivativa um $\pm 8\%$ und der Analyse aller einzelnen *LZI*-Systeme mit einer Abweichung der Ersatzderivativa um $\pm 35\%$ für die Konfiguration mit nachgeführtem Regler ($\pm 25\%$ Regler mit festen Verstärkungsfaktoren), geht eindeutig hervor, dass die Robustheitsanalyse mit dem *LPV*-System einer gewissen Konservativität unterliegt. Grund hierfür ist die erforderliche Approximation (Regressionsanalyse) der Flug- und Reglerdynamik über die Envelope mittels entsprechender Näherungsfunktionen in Abhängigkeit der Trimpunkt-Unsicherheit δ_{Env} , welche zur Abbildung der Flugphysik den Wertebereich $[-1; +1]$ annimmt. Außerhalb des festgelegten Wertebereiches der Trimpunkt-Unsicherheit, also für $\delta_{Env} < -1$ und $\delta_{Env} > +1$, entbehren die Approximationsfunktionen dabei jeglicher physikalischen Grundlage. Da jedoch auch diese Bereiche in die Berechnung des strukturierten Singulärwerts $\mu_{\Delta\Gamma}$ eingehen, wirken sich die Approximationspolynome, insbesondere aufgrund ihres oftmals starken Anstiegs respektive Abfalls restriktiv auf die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse aus. Diese Tatsache ist bei der Sichtung der Ergebnisse der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse als *LPV*-System stets zu berücksichtigen.

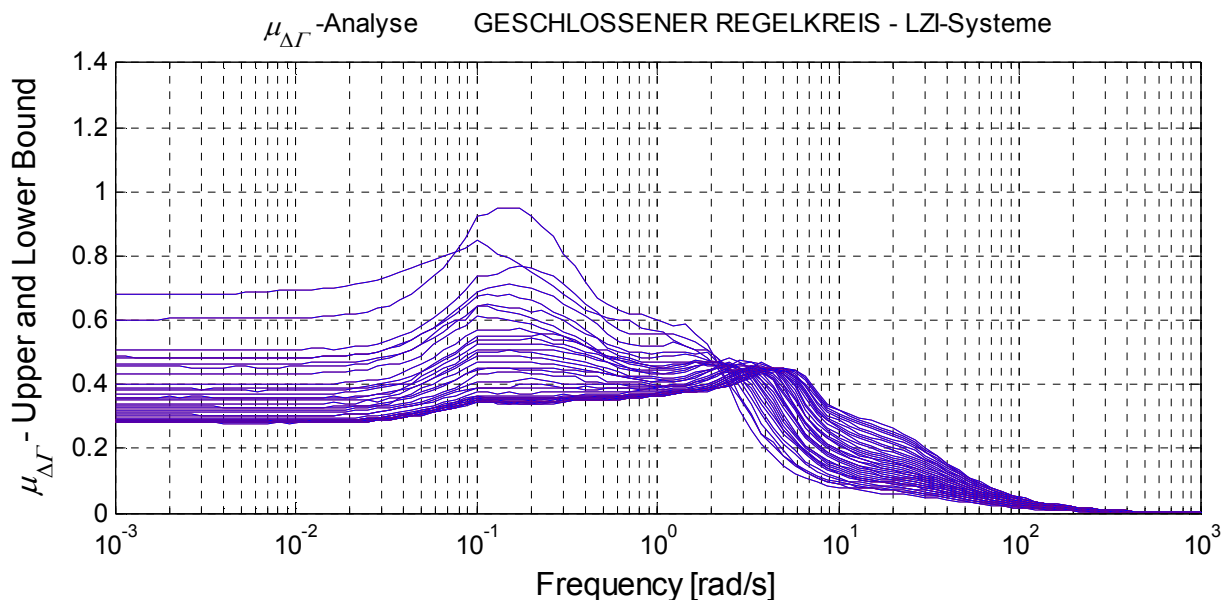


Abbildung 7-20: $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse, fester Regler, einzelne *LZI*-Systeme

In Abbildung 7-21 ist abschließend eine exemplarische Pol- bzw. Eigenwertverteilung des geschlossenen Regelkreises mit nachgeführtem Regler dargestellt. Hierbei ergeben sich die Pole bzw. Eigenwerte des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung zufällig bestimmter

Unsicherheitskonstellationen, welche innerhalb der in Kapitel 7.3.4 angegebenen Unsicherheitsmodellierung für die Analyse als *LPV*-System liegen. Die Abbildung zeigt, dass trotz der angenommenen Unsicherheiten weitestgehend die Anforderungen an exzellente Flugeigenschaften erfüllt werden und kein Eigenwert/Pol auf bzw. rechts der *Konformitätsgrenze* liegt.

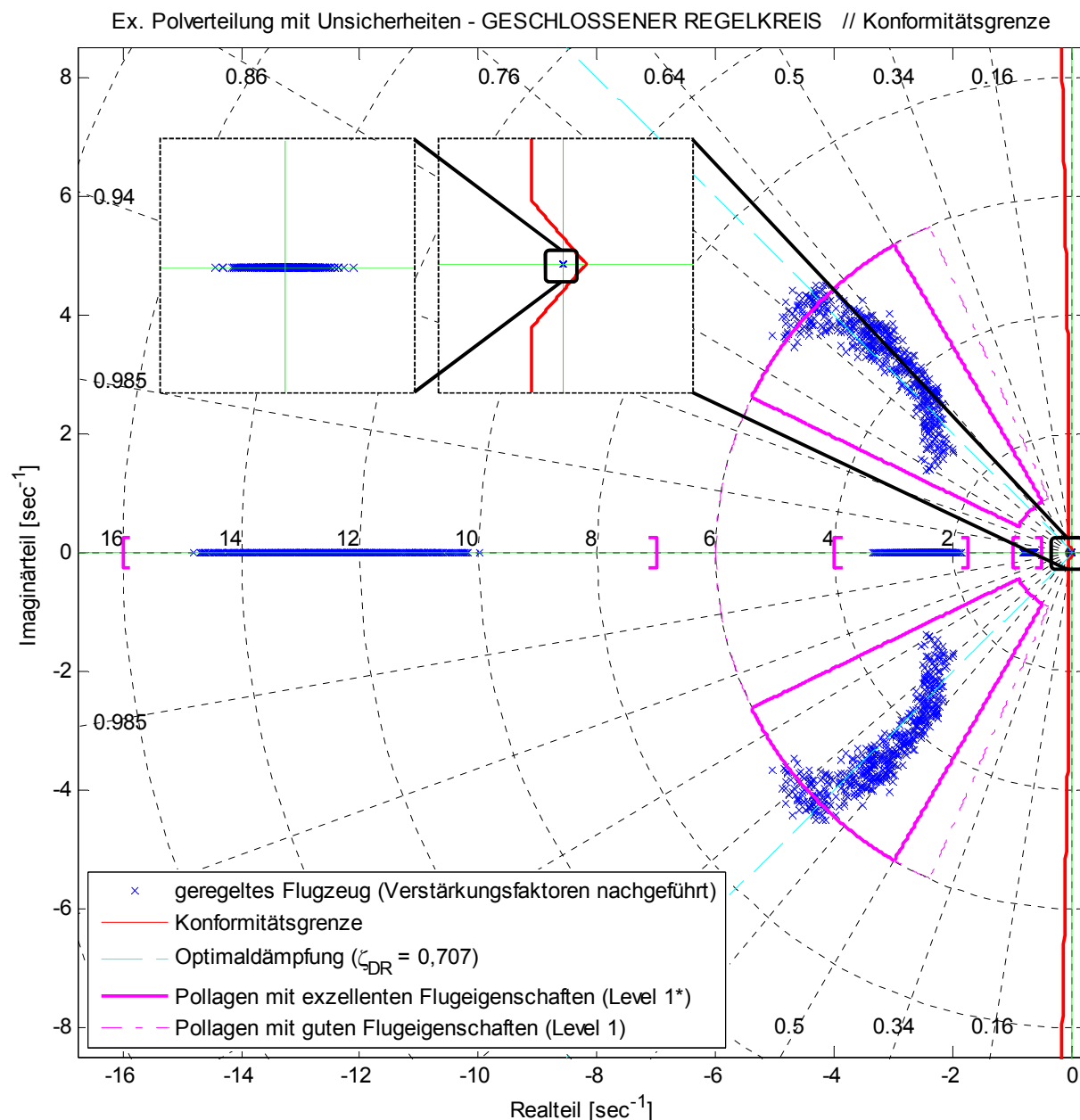


Abbildung 7-21: Exmpl. Polverteilung für nachgeführten Regler mit Trimpunktunsicherheit

Des Weiteren ist in den Detailausschnitten von Abbildung 7-21 die sich aus den zufällig gewählten Unsicherheitskonstellationen ergebende Spiralpolvariation dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass durch die angenommenen Unsicherheiten der Spiralpol sowohl links als auch rechts der Imaginär-Achse liegt, wobei der Bereich der Variation sehr klein ist ($|Re\{\lambda_{SP}\}| < 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$). Eine sinnvolle Untersuchung robuster Stabilitätseigenschaften in Bezug auf die Imaginär-Achse als Stabilitätsgrenze und somit die Analyse *Robuster Stabilität*

mittels des strukturierten Singulärwerts μ ist für den vorgestellten Reglerentwurf unter Berücksichtigung der neutralstabilen Spiralbewegung nicht möglich. Dies geht aus den Detailausschnitten von Abbildung 7-21 eindeutig hervor. Im Gegensatz dazu ermöglicht die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse den Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften bzw. *Robuster Konformität* gegenüber einer vom Anwender spezifizierten *Konformitätsgrenze*.

Es kann abschließend festgehalten werden, dass das geregelte Flugzeug, unter Berücksichtigung der vorgegebenen *Konformitätsgrenze* und der realisierten Unsicherheitsmodellierung, sowohl für den nachgeführten Regler als auch für den Regler mit festen Verstärkungsfaktoren *Robuste Konformität* für den gesamten Flugbereich erfüllt.

8 Nichtlineare Analyse

Die in diesem Kapitel durchgeführte nichtlineare Analyse bestätigt abschließend, anhand ausgewählter nichtlinearer numerischer Simulationen des geregelten Flugzeugs in Gegenüberstellung zum unregulierten, die erzielten adäquaten Flugeigenschaften der geregelten Seitenbewegung der *DA42*.

8.1 Vorgehensweise und Szenarien

Die Analyse und Evaluierung des entwickelten robusten Fly-by-Wire Seitenbewegungsreglers der *DA42* erfolgt durch die nichtlineare numerische Simulation des geregelten und unregulierten Flugzeugs mit dem in *Matlab/Simulink* implementierten *DA42* Simulationsmodell. Dieses wurde, wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, aus dem *D-SIM-42* Flugsimulator präzise abgeleitet. Die Re-Implementierung des flugdynamischen Modells des *D-SIM-42* Flugsimulators in *Matlab/Simulink* ermöglicht, neben der Erstellung linearer, zeitinvarianter Zustandsraummodelle der Seitenbewegung stationärer Flugzustände für die Reglerentwicklung, die numerische Simulation der nichtlinearen Dynamik der geregelten und unregulierten *DA42*. Die numerische Simulation erfolgt für das geregelte Flugzeug dabei unter Berücksichtigung entscheidender Regelkreiskomponenten wie Aktuatordynamik und Totzeit. Darüber hinaus gestattet das *DA42* Simulationsmodell in *Matlab/Simulink* die Perturbation der Aerodynamik und ermöglicht somit die Bestätigung gesicherter Stabilitätseigenschaften bei Modellabweichungen.

Im ersten und zweiten Abschnitt der nichtlinearen Analyse wird durch den Vergleich der geforderten linearen Dynamik mit den Ergebnissen der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs der Reglerentwurf für die getrennte Betrachtung von Roll- und Gierdynamik verifiziert. Zudem wird nachgewiesen, dass die vorgenommenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen der Auslegungsmethodik (*MR DEA*) zulässig sind. Im dritten Abschnitt wird eine detaillierte Analyse und Prüfung des Steuer- und Störverhaltens (Flugeigenschaften) des geregelten Flugzeugs für die nominale sowie perturbierete Streckendynamik vorgenommen und dem Verhalten des unregulierten Flugzeugs gegenübergestellt. Dabei wird insbesondere auf die Kopplungseffekte zwischen Roll- und Gierdynamik eingegangen. Im letzten Abschnitt erfolgt eine Analyse und Bewertung des nichtlinearen dynamischen Verhaltens des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung eines Flugzeugführers als aktives Glied des Piloten-Flugzeug-Regelkreises. Dazu wird der typenspezifische Flugsimulator *D-SIM-42*, der in Kapitel 2.2.1 beschrieben ist, genutzt. Hierbei handelt es sich um sogenannte *Pilot-in-the-Loop* Simulationen zur Evaluierung der Handlingcharakteristik (*Handling Qualities*) des geregelten Flugzeugs.

Alle nichtlinearen Simulationen und Simulator-Flugversuche des geregelten Flugzeugs zur Analyse des Seitenbewegungsreglers sind unter Berücksichtigung der in Kapitel 2.1.4 angegebenen Aktuatordynamik mit Ausschlags- und Ratenbegrenzung sowie mit einer Totzeit von 0,03 s (vgl. Kapitel 7.2) durchgeführt. Ferner erfolgt die nichtlineare Simulation des geregelten und ungeregelten Flugzeugs für die Flugversuche zur Analyse der Roll- und Gierdynamik und des Steuer- und Störverhaltens unter Verwendung eines vereinfachten Längsbewegungsreglers, um Änderungen von Fluggeschwindigkeit und Flughöhe und somit etwaige Kopplungseffekte zwischen Längs- und Seitenbewegung zu unterbinden.

8.2 Nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs

Die nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs soll abschließend den vorgestellten Reglerentwurf verifizieren und die erzielten Flugeigenschaften präsentieren. Die Anforderungen an die Dynamik des geregelten Flugzeugs zur Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften sind in Kapitel 6.2 gegeben. Neben der Analyse der geforderten Entkopplung von Roll- und Gierachse bzgl. des experimentellen Koordinatensystems, auf die später eingegangen wird (Abschnitt *Steuer- und Störverhalten*), sind die Roll- und Gierdynamik zur Sichererstellung adäquater Flugeigenschaften mittels Kenngrößen linearer Übertragungsfunktionen spezifiziert (vgl. Kapitel 6.2 – *Anforderungen an die Flugdynamik*), deren Einhaltung zunächst durch die getrennte Analyse von Roll- und Gierachsendynamik geprüft wird (vgl. Abschnitt *Rollodynamik* und Abschnitt *Gierdynamik*). Das im Rahmen der getrennten Analyse von Roll- und Gierdynamik verwendete lineare 6×6 -Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises entspricht der Form nach Gl. (6.7).

Rollodynamik

Das Übertragungsverhalten des Rollratenkommandos auf die Rollrate und somit die Dynamik der Rollachse wurde durch ein PT_1 -Verhalten mit vorgegebener staudruckabhängiger Rollzeitkonstante festgelegt, vgl. Gl. (6.9). In Abbildung 8-1 ist für ein Sprungkommando in p_{ec} (*rot*) das geforderte Sollverhalten von p_e (*blau-gestrichelt*) dargestellt. Der Verlauf von p_e (*magenta-gestrichelt*) für das lineare 6×6 -Zustandsraummodell infolge des Sprungkommandos in p_{ec} ist deckungsgleich mit dem geforderten Sollverhalten. Die Bestimmung des linearen 6×6 -Zustandsraummodells erfolgt dabei ohne die im Rahmen der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* vorgenommenen Vereinfachungen bzw. Vernachlässigungen, jedoch unter Berücksichtigung der zum Flugzustand (Trimpunkt) zugehörigen idealen Verstärkungsfaktoren (Berechnung mit *MR DEA*) und somit ohne Anwendung der in Kapitel 6.4 beschriebenen vereinfachten linearen Nachführung der Verstärkungsfaktoren. Aufgrund der Gleichheit zwischen der geforderten PT_1 -Dynamik und dem Verhalten des linearen 6×6 -Zustandsraummodells, das unter Berücksichtigung der idealen, mit *MR DEA* berechneten Verstärkungsfaktoren bestimmt wurde, kann die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* bzgl. der Rollodynamik als zweckmäßig und verifiziert betrachtet werden. Die Vereinfachungen

und Vernachlässigungen zur Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe (MR DEA)* sind somit hinsichtlich der Rolldynamik zulässig. Unter Verwendung der in Kapitel 6.4 beschriebenen vereinfachten linearen Nachführung der Verstärkungsfaktoren ergibt sich für das p_{ec} Sprungkommando des 6×6 -Zustandsraummodells der in *hellgrün* dargestellte Verlauf von p_e . Dieser weist im Vergleich zum spezifizierten Sollverhalten und zum simulierten Fall mit idealen Verstärkungsfaktoren eine größere Einschwingzeit auf. Grund hierfür ist, dass es infolge der vereinfachten linearen Nachführung der Verstärkungsfaktoren nicht zur gewünschten Kürzung des Rollintegratorpols mit der Nullstelle der Vorsteuerung kommt, vgl. [72]. Dadurch resultiert anstatt des gewünschten PT_1 -Übertragungsverhaltens eine PDT_2 -Dynamik, die jedoch mit guter Näherung dem gewünschten Sollverhalten entspricht (siehe Abbildung 8-1). Der Verlauf von p_e der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs, unter Berücksichtigung der Aktuatordynamik mit Raten- und Ausschlagsbegrenzung und der Totzeit, ist für das Sprungkommando in p_{ec} in Abbildung 8-1 in *cyan* dargestellt. Es ist dabei klar zu erkennen, dass – entgegen regelungstechnischer Intuition – die Einschwingzeit der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs mit Aktuatordynamik und Totzeit geringer ist als die spezifizierte lineare Dynamik und insbesondere der Verlauf von p_e des linearen 6×6 -Zustandsraummodells, das unter Berücksichtigung der linear nachgeführten Verstärkungsfaktoren bestimmt wurde.

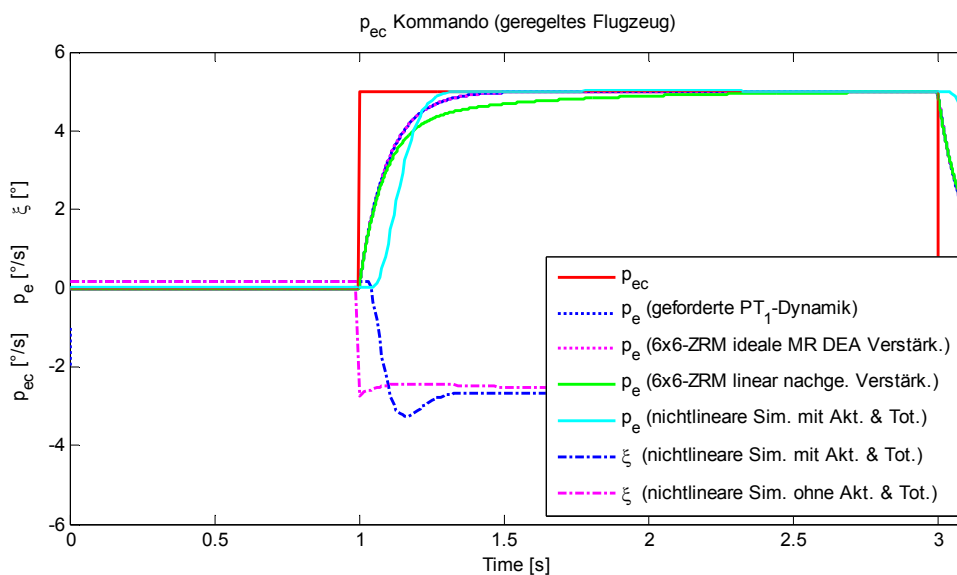


Abbildung 8-1: Vergleich Rolldynamik – geforderte lineare Solldynamik und nichtlineare Simulation

Ferner kommt es für den betrachteten Flugzustand (Trimmpunkt: $V = 57 \text{ m/s}$, $h = 1000 \text{ m}$, $x_{cg} = 2,42 \text{ m}$) neben der Schwingneigung zu keinem erkennbaren Überschwinger. Ursache hierfür ist, dass die (unerwartet) geringe Einschwingzeit des nichtlinearen Systems (geregeltes Flugzeug, Aktuator und Totzeit) aus der „Aufladung“ des Integrators aufgrund von Verzögerungen infolge von Aktuatorik und Totzeit resultiert, was zu einem größeren Querruderausschlag während des p_e -Anstiegsintervalls verglichen mit dem System ohne Aktuatorik und ohne Totzeit führt. Der durch die Aktuatordynamik und die Totzeit verursachte

größere Querruderausschlag, welcher das dynamische Verhalten positiv beeinflusst, ist in Abbildung 8-1 als *blaue* Strichpunktlinie dargestellt, in Gegenüberstellung zum Querruderausschlag ohne Aktuatorik und ohne Totzeit, der als *magentafarbige* Strichpunktlinie abgebildet ist. In diesem Zusammenhang sei noch angemerkt, dass es für die nichtlineare Simulation unter Anwendung der exakten mit *MR DEA* berechneten Verstärkungsfaktoren (ideale Verstärkungsfaktoren) ebenfalls zu einer geringen Einschwingzeit kommt, jedoch zum erwarteten Überschwingen. Zusätzlich wurden durch die Identifikation einer äquivalenten effektiven Rollzeitkonstante mittels der in [73] beschriebenen Methoden die verschiedenen untersuchten linearen und nichtlinearen Systeme verglichen. Die effektive Rollzeitkonstante T_{Reff} der nichtlinearen Simulation des geregelten Flugzeugs mit Aktuatordynamik und Totzeit weist dabei verglichen mit den Systemen ohne Aktuatordynamik und ohne Totzeit stets einen größeren Wert auf (vgl. [72]), was der regelungstechnischen Intuition entspricht. Ferner weist die Rollbeschleunigung \dot{p}_e um die x -Achse des experimentellen Koordinatensystems für die Fälle ohne Aktuatordynamik und ohne Totzeit immer größere Werte auf (vgl. [72]), was ebenfalls dem erwarteten Verhalten entspricht. Die Abweichung der identifizierten Rollzeitkonstante T_{Reff} der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs mit Aktuatorik und Totzeit zum geforderten Wert ist jedoch gering.

Die Rolldynamik des geregelten Flugzeugs kann aufgrund der obigen Analysen, die nur geringfügige Abweichungen zwischen spezifizierter Dynamik und nichtlinearer numerischer Simulation aufzeigen, als ausreichend zur Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften eingestuft werden.

Gierdynamik

Im Vorfeld der Untersuchung und Verifikation der Gierdynamik ist es erforderlich, den Korrekturfaktor $\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}$ der integralen $\hat{\beta}_{n_y}$ Rückführung der Reglerstruktur (siehe Abbildung 5-1) zu bestimmen.

Zur Gewährleistung eines seitenkraftfreien und somit koordinierten Flugzustands für $\beta_c = 0$ – insbesondere ohne laterale Abdrift im Geradeausflug ($\Phi = 0, n_y = 0$) – wird der seitenkraftproportionale Schiebewinkel $\hat{\beta}_{n_y}$ für die Integralrückführung des Gierachsenreglers genutzt. Um jedoch die in Kapitel 6.2 geforderte Gierdynamik gewährleisten zu können – dies gilt insbesondere für $\beta_c \neq 0$ – und um die Gültigkeit der linearen Betrachtungen des Reglerentwurfs sowie der Robustheitsanalyse zu erhalten, ist sicherzustellen, dass das dynamische Verhalten von $\int \hat{\beta}_{n_y}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$ gleichartig ist. Der Korrekturfaktor $\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}$ ermöglicht die Anpassung von $\int \hat{\beta}_{n_y}$ an $\int \hat{\beta}_{est}$, er kann analytisch bestimmt werden, was im Folgenden gezeigt wird.

Nach Gl. (5.7) kann der Schiebewinkel unter Vernachlässigung des Widerstandbeiwerts C_w , der im Verhältnis zum Derivat $C_{Q\beta}$ sehr klein ist, und unter Zusammenfassung der ratenabhängigen Anteile (*Rest*) wie folgt angegeben werden:

$$\hat{\beta}_{est} \approx \hat{\beta}_{n_y} - \frac{C_{Q\zeta}}{C_{Q\beta}} \zeta + Rest \quad (8.1)$$

Betrachtet man das Integral von $\hat{\beta}_{est}$, so ergibt sich Gl. (8.2). Dabei weisen die Anteile in Abhängigkeit der Drehraten einen vernachlässigbaren Einfluss auf. Dies belegt die spätere Analyse von $\int \hat{\beta}_{n_y}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$.

$$\int \hat{\beta}_{est} \approx \int \left(\hat{\beta}_{n_y} - \frac{C_{Q\zeta}}{C_{Q\beta}} \zeta \right) \quad (8.2)$$

Aus der Gleichung der Gierratenbeschleunigung \dot{r}_e des Zustandsraummodells der Seitenbewegung nach Gl. (2.8) folgt der Zusammenhang für den Seitenruderausschlag ζ . Dabei können auch hier die Anteile in Abhängigkeit der Drehraten und Drehbeschleunigung sowie die Anteile bzgl. des Querruders vernachlässigt werden, was ebenfalls durch die folgende Untersuchung gezeigt wird. Man erhält somit Gl. (8.3).

$$\int \hat{\beta}_{est} \approx \int \hat{\beta}_{n_y} \underbrace{\left(1 - \frac{C_{Q\zeta} N_\beta}{C_{Q\beta} N_\zeta} \right)^{-1}}_{\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}} \quad \text{mit} \quad \left(1 - \frac{C_{Q\zeta} N_\beta}{C_{Q\beta} N_\zeta} \right)^{-1} = \kappa_{\hat{\beta}_{n_y}} \quad (8.3)$$

Gl. (8.3) beschreibt den abgezielten Zusammenhang zwischen dem Integral des geschätzten aerodynamischen Schiebewinkels $\int \hat{\beta}_{est}$ und dem Integral des seitenkraftproportionalen Schiebewinkels $\int \hat{\beta}_{n_y}$. Abschließend ergibt sich für die integrale $\hat{\beta}_{n_y}$ -Rückführung des Gierachsenreglers Gl. (8.4).

$$\int \hat{\beta}_{n_y, Kor} = \int \hat{\beta}_{n_y} \kappa_{\hat{\beta}_{n_y}} = \int \frac{m g n_{ye}}{\bar{q} S C_{Q\beta}} \kappa_{\hat{\beta}_{n_y}} \approx \int \hat{\beta}_{est} \quad (8.4)$$

Zur Verifikation von $\hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und zum Nachweis der Zulässigkeit der Vereinfachungen sind in Abbildung 8-2 die entscheidenden Zustandsgrößen der nichtlinearen numerischen Simulation des unregulierten Flugzeugs für eine Seitenruderdoulette dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Verlauf von $\hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\hat{\beta}_{n_y}$ merklich vom Verlauf des Schiebewinkels β abweicht. Dies lässt sich mitunter durch das Allpassverhalten (siehe hierzu [22]) in der Übertragungsfunktion des Seitenruderausschlags auf das laterale Lastvielfache erklären. Vergleicht man jedoch das Verhalten von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$, $\int \hat{\beta}_{n_y}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$, so ist festzustellen, dass $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$ mit guter Näherung gleichlaufend sind und eine gleichartige Dynamik aufweisen. Die stetig wachsende Abweichung (Abdrift) zwischen $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$ lässt sich dabei mit dem im seitenkraftfreien Geradeausflug ($\Phi = 0$) auftretenden Schiebewinkel, verursacht durch Asymmetrien der Flugzeugkonfiguration (beispielsweise durch gleichlaufenden Propeller), begründen. Die Verwendung von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ für die Integratorrückführung des Gierachsenreglers zur Sicherstellung einer koordinierten Flugzeugbewegung für $\beta_c = 0$ ist aufgrund der Gleichartigkeit von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$ und der dadurch gewährleisteten Gültigkeit der linearen Betrachtungen des Reglerentwurfs sowie der Robustheitsanalyse zulässig. Dies wird durch die folgende Analyse der Gierdynamik des geregelten Flugzeugs bestätigt.

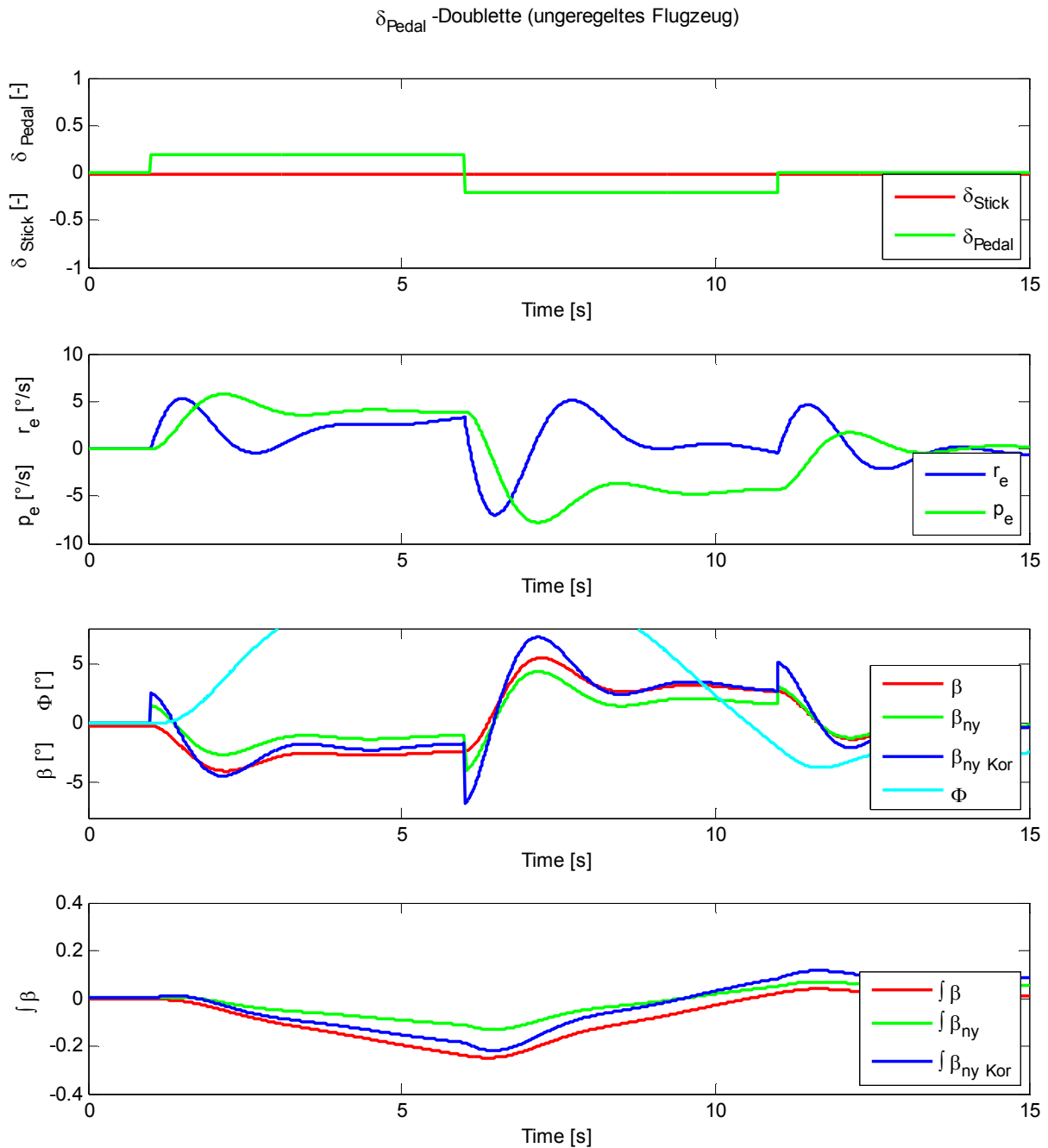


Abbildung 8-2: Seitenruderdoublette / unregelmäßiges Flugzeug

Die Untersuchung der Gierdynamik und der zugehörigen Steuerungseigenschaften zur abschließenden Verifikation der gewählten Integratorrückführung des Gierachsenreglers erfolgt durch die nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung von Aktuatordynamik und Totzeit. In Abbildung 8-3 ist für ein Sprungkommando β_c unter Verwendung von $\hat{\beta}_{ny Kor}$ für die Integratorrückführung des Gierachsenreglers der Verlauf von $\hat{\beta}_{ny Kor}$ und $\hat{\beta}_{ny}$ sowie von $\hat{\beta}_{est}$ bzw. β dargestellt. Der Schiebewinkel β weist mit sehr guter Näherung die geforderte Dynamik infolge eines Sprungkommandos von $\beta_c = 4^\circ$ auf. Eine vergleichende Analyse des geforderten linearen PT_2 -Verhaltens (Sollverhalten) mithilfe der nichtlinearen numerischen Simulation wird später angeführt. Die Abweichung des erreichten Stationärwerts von β vom Kommandosignal beträgt ca. $0,25^\circ$.

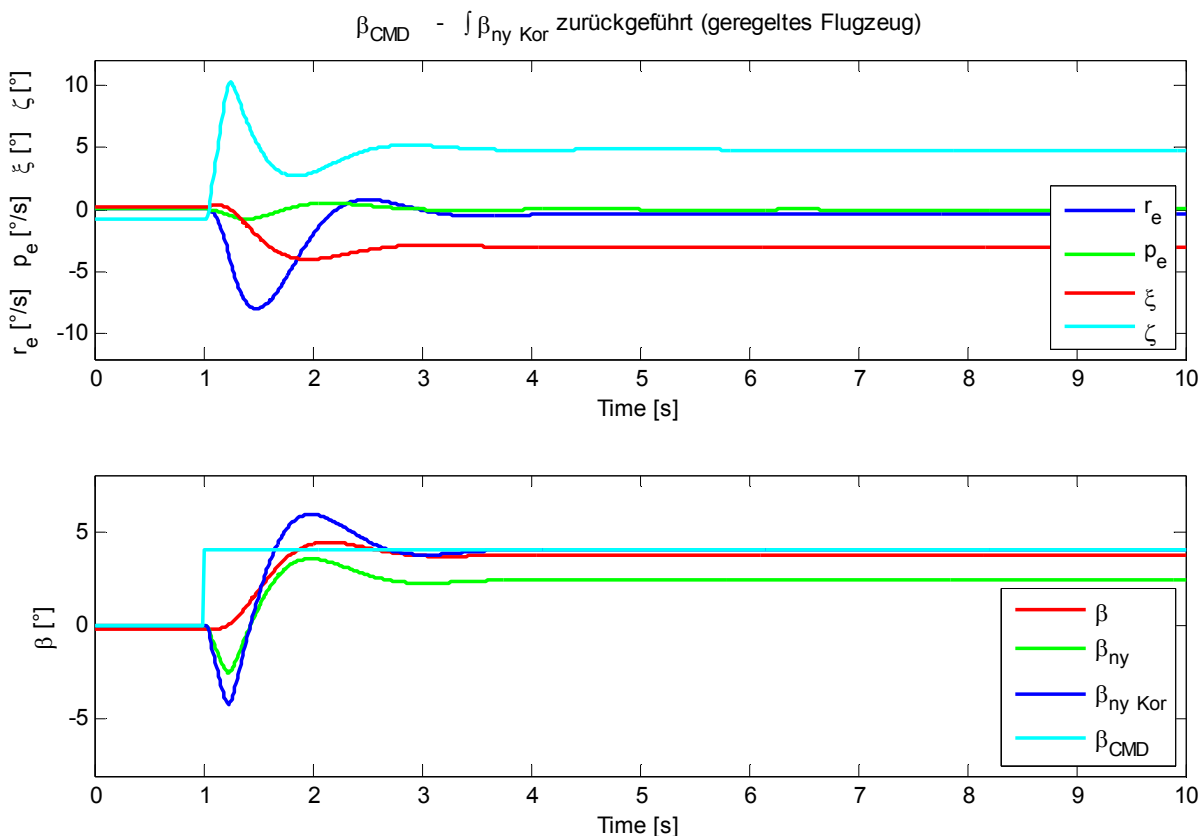


Abbildung 8-3: Sprungkommando in β / Integralrückführung durch $\hat{\beta}_{ny\ Kor}$ realisiert

Wird für die Integralrückführung des Gierachsenreglers $\hat{\beta}_{ny}$ (ohne Korrektur) herangezogen, so resultiert für ein Sprungkommando von $\beta_c = 4^\circ$ der in Abbildung 8-4 dargestellte Verlauf von β sowie von den Größen $\hat{\beta}_{ny\ Kor}$ und $\hat{\beta}_{ny}$. Es geht eindeutig hervor, dass sowohl das dynamische Einschwingverhalten als auch der Stationärwert nicht dem geforderten Verhalten entsprechen und somit durch die integrale Rückführung von $\hat{\beta}_{ny}$ keine angemessenen Flugeigenschaften bzgl. der Gierdynamik sichergestellt werden können.

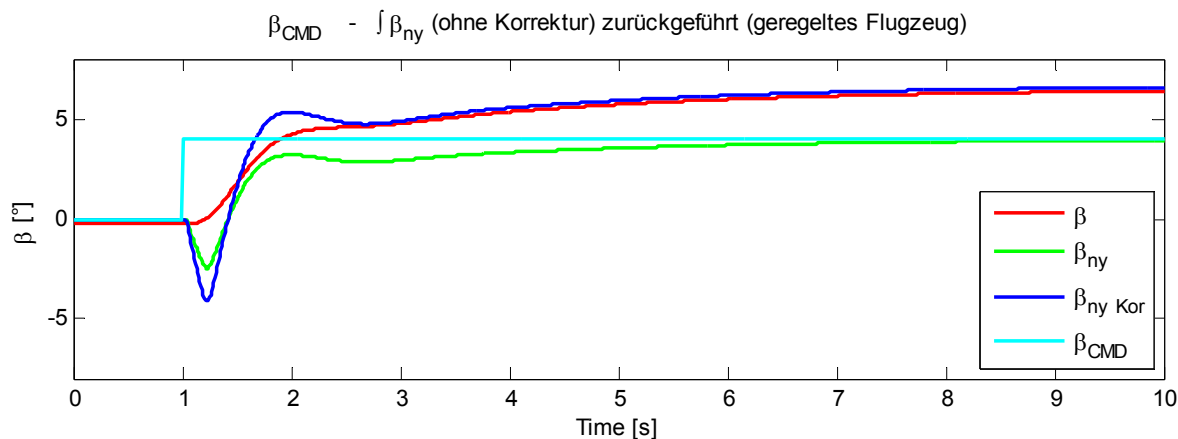


Abbildung 8-4: Sprungkommando in β / Integralrückführung durch $\hat{\beta}_{ny}$ (ohne Korrektur) realisiert

Nutzt man für die Integratorrückführung des Gierachsenreglers β bzw. $\hat{\beta}_{est}$, erhält man den in Abbildung 8-5 gezeigten Verlauf von β sowie $\hat{\beta}_{ny\ Kor}$ und $\hat{\beta}_{ny}$ infolge eines Sprungkommandos

von $\beta_c = 4^\circ$ der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs. Unter Berücksichtigung der Aktuatordynamik und der Totzeit ergibt sich somit ein adäquates dynamisches Einschwing- und Stationärverhalten. Die geforderte automatische Koordinierung der Flugzeugbewegung und somit der seitenkraftfreie Flugzustand ($n_y = 0$) für $\beta_c = 0$ kann jedoch durch die Integralrückführung von β nicht sichergestellt werden.

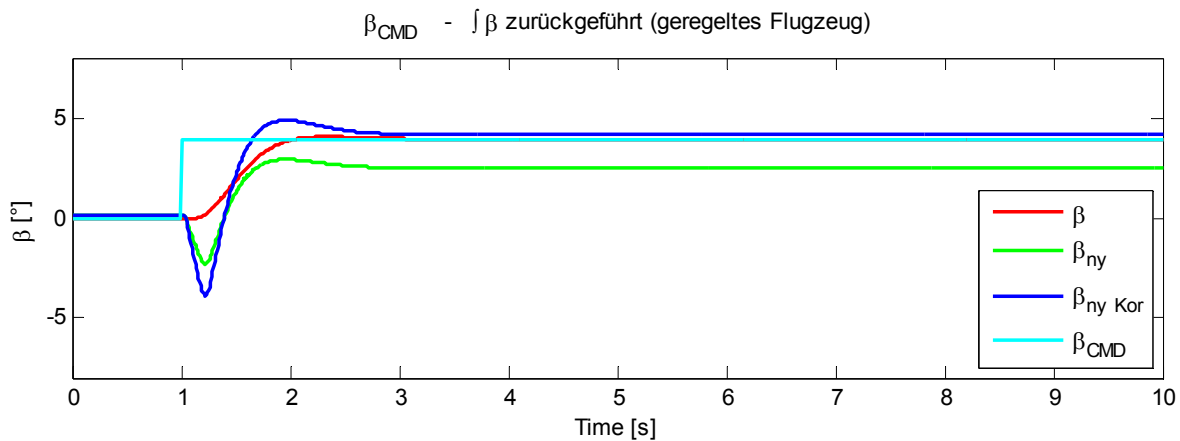


Abbildung 8-5: Sprungkommando in β / Integralrückführung durch β realisiert

Stellt man die Gierdynamik für den Fall einer Integralrückführung von $\hat{\beta}_{n_y, Kor}$ (siehe Abbildung 8-3) mit derjenigen für den Fall einer Integralrückführung von β bzw. $\hat{\beta}_{est}$ (siehe Abbildung 8-5) gegenüber, so ist für die Rückführung von $\int \beta$ sowohl bzgl. des Einschwingverhaltens als auch für den Stationärwert eine geringfügig bessere Dynamik erkennbar. Das dynamische Verhalten beider Varianten (Rückführung von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\int \beta$) ist als geeignet bzgl. der Flugeigenschaften der Gierdynamik einzuordnen. Unter Berücksichtigung der marginalen Abweichung der analysierten Fälle und der Sicherstellung einer koordinierten Flugzeugbewegung ($n_y = 0$) für $\beta_c = 0$, entsprechend der Anforderungen an die Flugdynamik (vgl. Kapitel 4), erfolgt die Nutzung von $\hat{\beta}_{n_y, Kor}$ für die integrierende Rückführung des Gierachsenreglers.

Analysen zur Bestimmung des Korrekturfaktors $\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}$ haben gezeigt, dass der für einen mittleren Punkt der Envelope im getrimmten horizontalen Geradeausflug bestimmte Korrekturfaktor $\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}$ gute Ergebnisse bzgl. der Gleichartigkeit von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ und $\int \hat{\beta}_{est}$ für den gesamten Flugbereich liefert. Eine Anpassung des Korrekturfaktors $\kappa_{\hat{\beta}_{n_y}}$ an den jeweiligen Flugzustand ist folglich nicht notwendig.

In Analogie zur Dynamik der Rollachse (siehe Abschnitt *Rollodynamik*) erfolgt die Verifikation der Auslegungsmethodik (*Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe*) bzgl. der Gierdynamik durch Gegenüberstellung der geforderten linearen Dynamik und der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung von Aktuatordynamik und Totzeit. In Abbildung 8-6 ist für ein Sprungkommando von $\beta_c = 4^\circ$ das Antwortverhalten der verschiedenen analysierten Systeme für den Referenzflugzustand (Trimpunkt: $V = 57$ m/s, $h = 1000$ m, $x_{cg} = 2,42$ m) visualisiert.

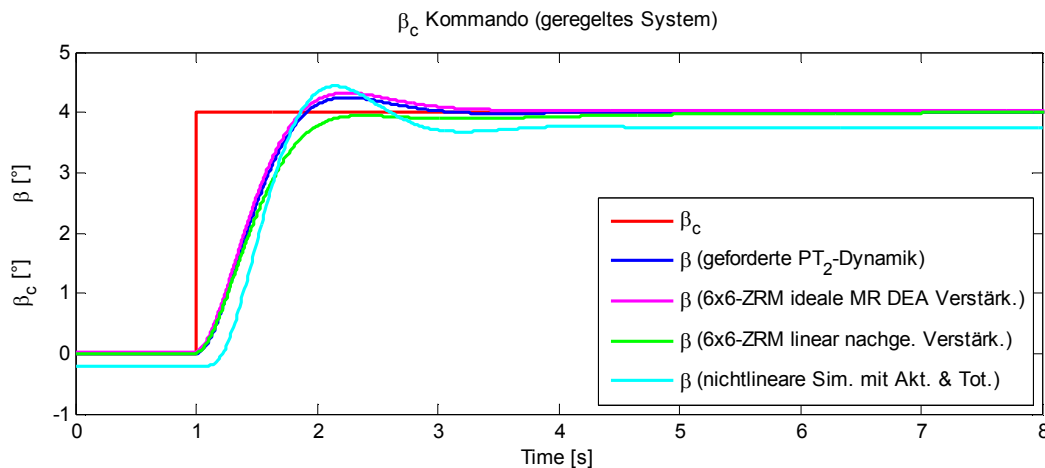


Abbildung 8-6: Vergleich Gierdynamik – geforderte lineare Solldynamik und nichtlineare Simulation

Die in Kapitel 6.2 spezifizierte PT_2 -Dynamik (Sollverhalten) zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften bzgl. der Gierdynamik ist in *blau* (Abbildung 8-6) dargestellt. Der Schiebewinkelverlauf für einen sprungförmigen β_c des linearen 6×6 -Zustandsraummodells (nach Gl. (6.7)), das unter Berücksichtigung der idealen mit *MR DEA* berechneten Verstärkungsfaktoren bestimmt wurde, ist in *magenta* abgebildet; Die Abweichung zum geforderten PT_2 -Verhalten ist marginal. Die geringfügigen Abweichung resultieren aus der zur Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* vorgenommenen Vernachlässigungen der Seitenkraftersatzderivativa \check{Y}_ξ und \check{Y}_ζ sowie der Vernachlässigung der Koppeffekte von Roll- und Gierachse (siehe Kap. 6.3.2), die als null angenommen wurden, vgl. [72]. Aufgrund der minimalen Verschiedenheit zwischen der geforderten PT_2 -Dynamik und dem Verhalten des linearen 6×6 -Zustandsraummodells, das unter Berücksichtigung der idealen mit *MR DEA* berechneten Verstärkungsfaktoren bestimmt wurde, ist die *Referenzmodellbasierte Eigenstrukturvorgabe* bzgl. der Gierdynamik als probate Methode zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren bestätigt und als verifiziert einzustufen. Die notwendigen Vereinfachungen und Vernachlässigungen zur Durchführung der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* (*MR DEA*) sind somit als zulässig anzusehen. Für das lineare 6×6 -Zustandsraummodell unter Berücksichtigung der vereinfachten linearen Nachführung der Verstärkungsfaktoren (entsprechend Kapitel 6.4) ergibt sich das in *hellgrün* dargestellte Verhalten. Aufgrund der begrenzten Differenz und des ansprechenden Einschwingverhaltens des linearen 6×6 -Zustandsraummodells mit linear nachgeführten Verstärkungsfaktoren gegenüber dem geforderten PT_2 -Verhalten ist die vereinfachte lineare Nachführung der Verstärkungsfaktoren ebenfalls als zulässig und zweckmäßig einzuordnen. Der Verlauf des Schiebewinkels aufgrund eines Sprungkommandos von $\beta_c = 4^\circ$ der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung von Aktuatordynamik und Totzeit ist in Abbildung 8-6 in *cyan* dargestellt. Die anfängliche stationäre Abweichung von β resultiert dabei aus dem im seitenkraftfreien Geradeausflug ($\Phi = 0, n_y = 0$) aufgrund von Asymmetrien des Flugzeugs auftretenden Schiebewinkel. Das ansprechende Antwortverhalten des Schiebewinkels weist eine merkliche, jedoch akzeptabel geringe Abweichung im Einschwingverhalten und bzgl. des

Stationärwerts im Vergleich zum geforderten PT_2 -Verhalten (Sollverhalten) auf. Das verstärkte Überschwingen resultiert aus der Verzögerung durch die Aktuatordynamik und die Totzeit. Die Abweichung des Stationärwerts zum Kommandowert ist mit der verwendeten Integratorrückführung von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ zu begründen. Da der Verlauf des Schiebewinkels sowohl bzgl. des Einschwingverhaltens als auch hinsichtlich des Stationärwerts nur begrenzt vom spezifizierten PT_2 -Verhalten abweicht, ist die Gierdynamik als akzeptabel zur Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften einzustufen. Dabei ist insbesondere die stationäre Abweichung von unter 10% zwischen Schiebewinkelkommando β_c und Schiebewinkel β in Relation zur mittels der Rückführung von $\int \hat{\beta}_{n_y, Kor}$ sichergestellten, koordinierten Flugzeugbewegung zu sehen, die zu einer signifikanten Verbesserung der Flugeigenschaften der Seitenbewegung beiträgt. Der Vorteil der koordinierten Flugzeugbewegung wiegt entscheidend schwerer als die begrenzte stationäre Abweichung des Schiebewinkels. Dies gilt insbesondere vor dem Hintergrund, dass der Pilot das Schiebewinkelkommando β_c mittels der Pedale aufgrund seiner Sinneswahrnehmung bemisst und ggf. korrigiert und nicht durch einen konkreten Zahlenwert vorgibt bzw. mit einem solchen vergleicht.

Die Gierdynamik des geregelten Flugzeugs ist angesichts der obigen Untersuchungen, die geringfügige Abweichungen zwischen geforderter Dynamik und nichtlinearer Simulation aufweist, als adäquat zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften einzustufen.

Steuer- und Störverhalten

Nachdem zuvor die getrennte Betrachtung von Roll- und Gierdynamik erfolgte, wird im Folgenden das Steuer- und Störverhalten der Seitenbewegung des geregelten Flugzeugs, unter gemeinsamer Betrachtung von Roll- und Gierachsendynamik und insbesondere deren Kopplung analysiert. Zur Veranschaulichung der Leistungsfähigkeit des Reglers erfolgt dies in Gegenüberstellung zum unregelmäßigen Flugzeug. Die Untersuchung des Steuer- bzw. Kommandoverhaltens des geregelten Flugzeugs wird für eine unterbrochene Rechteckdoublette bzgl. p_{ec} bzw. für ein sprungförmiges β_c -Signal durchgeführt und im Vergleich zum entsprechenden Quer- bzw. Seitenruderausschlag des unregelmäßigen Flugzeugs untersucht und diskutiert. Die Analyse des Störverhaltens beschränkt sich aufgrund des vorliegenden Entwurfs eines Seitenbewegungsreglers auf laterale atmosphärische Einflüsse, die als Seitenwindböe der sogenannten „1 – cos“-Form und als Turbulenzen unter Berücksichtigung des *Dryden*-Spektrums nachgestellt wurden. Beide Störeinflüsse werden in [25] spezifiziert und stellen oftmals die Grundlage für den Nachweis adäquaten Störverhaltens für eine behördliche Zulassung dar.

Die „1 – cos“-Böe ist eine diskrete atmosphärische Störung, die durch Böen-Länge bzw. Zeitintervall zum Aufbau der Böe und Böen-Amplitude charakterisiert wird. Die im Rahmen der Untersuchung des Seitenbewegungsreglers betrachtete laterale Windkomponente der „1 – cos“-Böe ergibt sich dabei wie folgt:

$$v_{Wind}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{v_m}{2} (1 - \cos(\omega t)) & 0 \leq t \leq \pi/\omega \\ v_m & t > \pi/\omega \end{cases} \quad (8.5)$$

Die Frequenz ω ist dabei so zu wählen, dass sich die Störung möglichst nachteilig auf die Flugdynamik auswirkt, d.h. die kritischen Eigenbewegungsformen des Flugzeugs angeregt werden. Dies ist gesichert, wenn die natürliche Frequenz der Eigenbewegungsformen mit der Frequenz ω nach Gl. (8.5) korrelieren bzw. wenn beide identisch sind. Die Windgeschwindigkeit v_m wird unter anderem in [25] vorgegeben. Für den ungünstigsten Fall gilt $v_m \approx 20,1$ m/s, siehe [25]. Da für die vorliegende Reglerentwicklung kein Lastenheft und somit keine Spezifikation diskreter atmosphärischer Störungen vorliegt, wurde im Rahmen der nichtlinearen Analyse zum Nachweis robuster Systemeigenschaften des geregelten Flugzeugs der konservative Wert von $v_m \approx 25$ m/s angenommen, der bei adäquaten Flugeigenschaften trotz Störung einen Reglerentwurf und eine Reglerauslegung auf der sicheren Seite bestätigt. Die „1 – cos“-Böe ist bzgl. des geodätischen Koordinatensystems spezifiziert. Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (8.5), welche die y-Komponente des Windvektors beschreibt, die abgezielte Seitenwindböe (West-Wind-Böe) für ein sich in Richtung Norden bewegendes Flugzeug, entsprechend Abbildung 8-7.

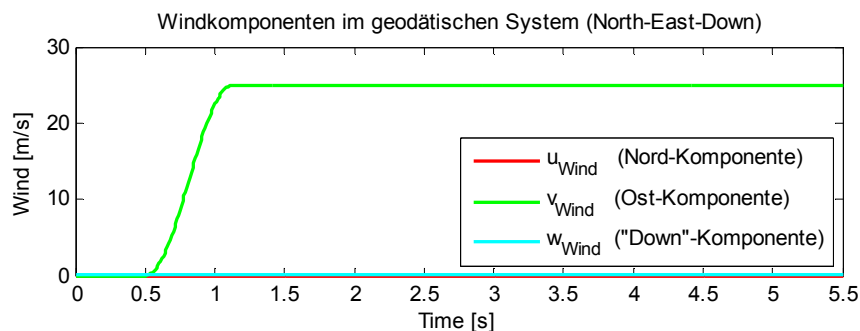


Abbildung 8-7: "1-cos"-Böe

Die mathematische Beschreibung von Turbulenz erfolgt als stochastischer Prozess. Dabei ist es üblich, die Modellierung auf Basis des Dryden-Spektrums zu realisieren, da hierbei eine gute Näherung realer Böen-Leistungsdichtespektren erreicht wird und sich die Umsetzung einfach gestaltet, vgl. [7]. Die Modellierung von Turbulenz auf Basis des Dryden-Spektrums ist in [25] beschrieben. Hierbei handelt es sich um Anforderungen, die üblicherweise für eine behördliche Zulassung herangezogen werden. Eine detaillierte Abhandlung ist in [9], [7], [25], und [74] zu finden, weshalb im Folgenden nur kurz darauf eingegangen wird.

Die Simulation der auf dem Dryden-Spektrum basierenden Turbulenz erfolgt auf Grundlage von weißem Rauschen als Quellsignal. Wird weißes Rauschen mit dem entsprechenden Formfilter, der in [25] spezifiziert ist, gefiltert, so resultiert daraus als Ausgangssignal die jeweilige Komponente des Windgeschwindigkeitsvektors. Die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten bzw. der Geschwindigkeitsvektor der Turbulenz ergibt sich bzgl. des flugzeugfesten Koordinatensystems. Der Einfluss und die Ausprägung der Turbulenz sind abhängig von der

Wahl des Formfilters bzw. dessen Kenngrößen. Diese sind für den hier betrachteten Flugzustand (mittlere Flughöhe) nach [25] in Abhängigkeit von Flughöhe, Fluggeschwindigkeit und Intensität der Turbulenz zu wählen. Die Intensität der Turbulenz wird dabei nach [25] in die Kategorien leicht, mäßig und stark (light, moderate, severe) unterteilt. Die Kategorien stehen wiederum in Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten bzw. das Überschreiten der jeweiligen Intensität. Für den hier untersuchten Flugzustand ($V = 57 \text{ m/s}$, $h = 1000 \text{ m}$, $x_{cg} = 2,42 \text{ m}$) und unter Annahme mäßiger Intensität der Turbulenz mit einer Aufttrittswahrscheinlichkeit von 10^{-3} ergeben sich nach [25]: für die Standardabweichung $\sigma \approx 3 \text{ m/s}$ und für die Skalenlänge $L = 533,4 \text{ m}$. Wie bereits oben angegeben, ist aufgrund des hier vorliegenden Seitenbewegungsreglers ausschließlich die Untersuchung lateraler Störungen von Interesse. Die Wirkung der Turbulenz ergibt sich somit bzgl. der y-Komponente des flugzeugfesten Koordinatensystems, während die x- und z-Komponenten zu null angenommen werden.

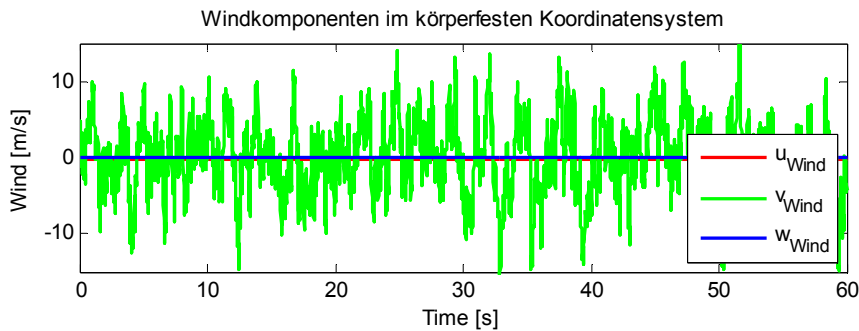


Abbildung 8-8: Turbulenz nach Dryden-Spektrum

In Abbildung 8-8 sind die Windgeschwindigkeitskomponenten bzgl. des flugzeugfesten Koordinatensystems für das Dryden-Spektrum unter Berücksichtigung der obigen Randbedingungen und des Flugzustands abgebildet.

	Steuerungseigenschaften		Störverhalten	
	p_{ec} ξ_c	β_c ζ_c	„1-cos“	Dryden-Turbulenz
nominale Streckendynamik DA42 Simulationsmodell	geregelt Fall 1 ungeregelt (LBW geregelt)	geregelt Fall 2 ungeregelt (LBW geregelt)	geregelt Fall 3 ungeregelt	geregelt Fall 4 ungeregelt
perturbierte Streckendynamik DA42 Simulationsmodell	geregelt Fall 5 ungeregelt (LBW geregelt)	geregelt Fall 6 ungeregelt (LBW geregelt)	geregelt Fall 7 ungeregelt	geregelt Fall 8 ungeregelt

Tabelle 8-1: Übersicht nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs

Die nichtlineare numerische Simulation des geregelten Flugzeugs unter Berücksichtigung von Aktuatordynamik und Totzeit zur Analyse von Steuer- und Störverhalten erfolgt für die

nominale Streckendynamik, die durch das *DA42* Simulationsmodell beschrieben wird. Um darüber hinaus die Robustheit des Reglerentwurfs zu demonstrieren, wurde zusätzlich das Steuer- und Störverhalten des geregelten Flugzeugs für eine perturbiertere Streckendynamik unter Verwendung des *DA42* Simulationsmodells durchgeführt. Eine Übersicht aller durchgeführten Flugversuche ist in Tabelle 8-1 zu finden. Die Realisierung der perturbierten Streckendynamik erfolgt durch die nachteilige bzw. destabilisierte Abänderung der aerodynamischen Derivativa um 35% nach Tabelle 8-2. Die Ergebnisse der Simulation mit perturbierter Aerodynamik sind im Anhang A.3 zu finden.

	Seitenkraft	Rollmoment	Giermoment
<i>Reduktion des Betrags um 35%</i>	$C_{Y\beta}, C_{Yr}, C_{Y\zeta}$	C_{l_p}, C_{l_ξ}	$C_{n_r}, C_{n_\beta}, C_{n_\zeta}$
<i>Erhöhung des Betrags um 35%</i>	C_{Y_p}, C_{Y_ξ}	$C_{l_\beta}, C_{l_r}, C_{l_\zeta}$	C_{n_p}, C_{n_ξ}

Tabelle 8-2: Perturbiertere Aerodynamik

Das Verhalten des geregelten und unregulierten Flugzeugs zur Analyse der Steuerungseigenschaften der Rollachse ist für die nominelle Streckendynamik in Abbildung 8-9 dargestellt. Die links dargestellte Diagrammreihe zeigt den Verlauf der Zustandsgrößen der Seitenbewegung des geregelten Flugzeugs infolge einer unterbrochenen Rechteckdoublette in p_{ec} . Im Vergleich dazu ist in der rechten Diagrammreihe der Verlauf entsprechender Signalgrößen und Zustände des unregulierten Flugzeugs für eine unterbrochene Rechteckdoublette von δ_{Stick_Lat} (lateraler Knüppelausschlag) bzw. des Querruders ξ dargestellt. Die Untersuchungen des geregelten Flugzeugs erfolgen, wie alle im Rahmen dieses Kapitels durchgeführten nichtlinearen numerischen Simulationen des geregelten Systems, unter Berücksichtigung von Aktuatordynamik und Totzeit, weshalb im zweiten Diagramm der Diagrammreihe des geregelten Flugzeugs (linke Diagrammreihe) zusätzlich die Stellraten der Aktuatoren bzw. der Stellflächen wiedergegeben sind. Das p_{ec} -Rollkommando erzeugt für das geregelte Flugzeug einen koordinierten Quer- und Seitenruderausschlag, dabei werden weder die Stellweg- noch Stellratenbegrenzung der Aktuatorik erreicht. Eine detaillierte Betrachtung und Prüfung des dynamischen Verhaltens der Rollrate p_e wurde bereits durchgeführt (siehe Abschnitt *Rollodynamik*). Aufgrund der regelgestützten Ruderausschläge kommt es für die Phasen $p_{ec} \neq 0$ neben der Rollrate p_e zu einem sukzessiven und aufeinander abgestimmten Auf- bzw. Abbau des Hängewinkels Φ und der Gierrate r_e , wodurch eine koordinierte Flugzeugbewegung sichergestellt ist. Im Gegenzug bleiben Hängewinkel Φ und Gierrate r_e während der Unterbrechung der Rechteckdoublette ($p_{ec} = 0$) konstant. Der Schiebewinkel β und der seitenkraftproportionale Schiebewinkel $\hat{\beta}_{n_y, Kor}$ ergeben sich mit guter Näherung für die gesamte Simulation – wie gefordert – zu null. Der durch das p_{ec} -Kommandosignal ausgeführte Kurvenflug mit zugehöriger Kurvenein- und -ausleitung des geregelten Flugzeugs ist aufgrund der mit guter Näherung seitenkraftfreien Bewegung ($\hat{\beta}_{n_y} \approx 0, n_y \approx 0$) wie gefordert koordiniert. Dies erfolgt (automatisch) durch den synchronisierten Quer- und

Seitenruderausschlag. Eine Anregung der Roll-Gier-Schwingung durch die Rolldynamik ist wie angestrebt minimal bzw. nicht festzustellen. Dies belegt der konstante Schiebewinkelverlauf, für den $\beta \approx 0$ gilt. Die geforderte neutralstabile Auslegung der Spiralbewegung ist aufgrund des konstanten Hängewinkelverlaufs für $p_{ec} = 0$ erfüllt. Es ist für die Ausführung eines stationären koordinierten Kurvenflugs keine laterale Steuereingabe notwendig. Die in Kapitel 4 geforderte Entkopplung ist somit für die Rollachse gewährleistet.

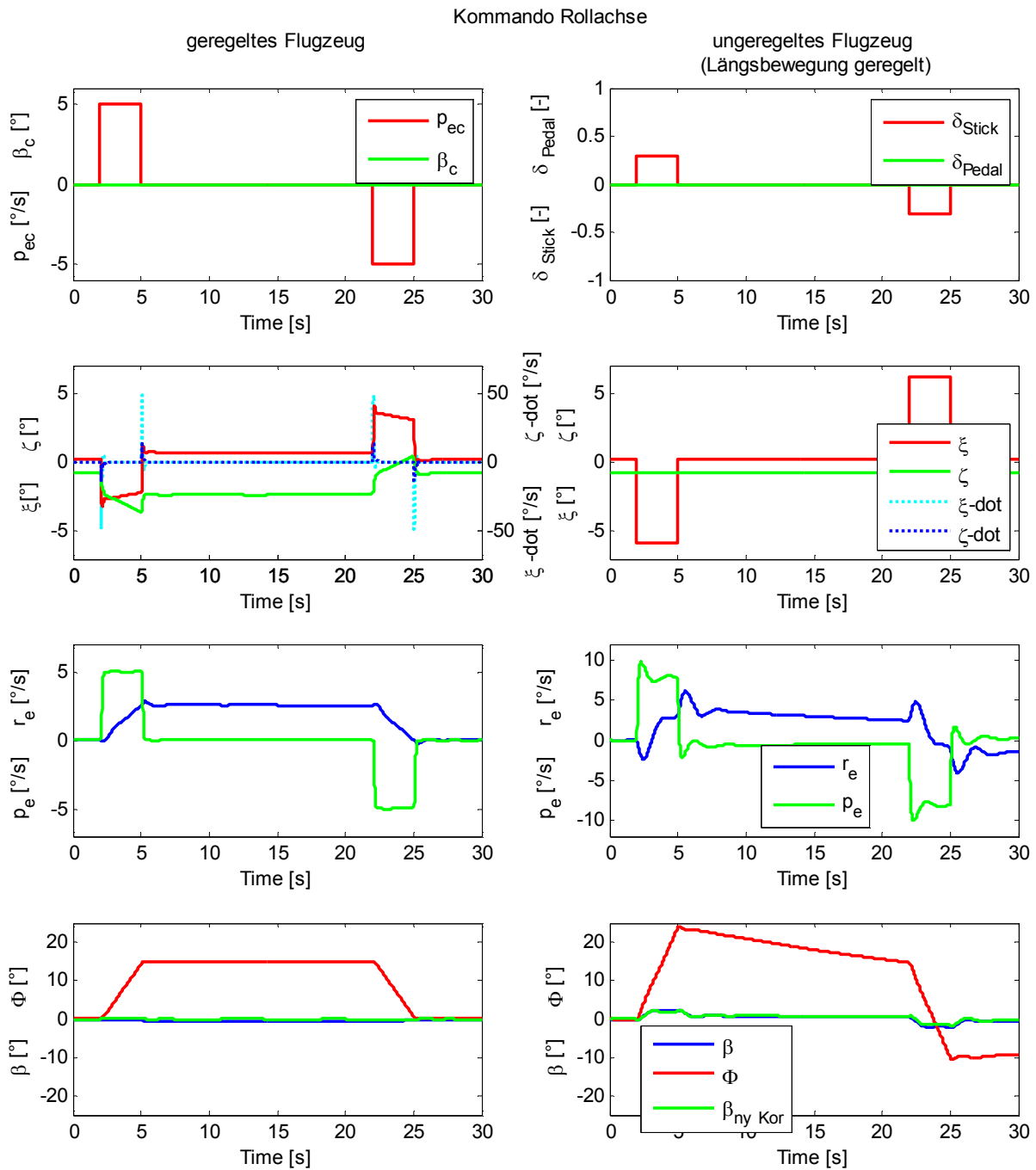


Abbildung 8-9: geregelttes und unregelttes Flugzeug / Rollsteuerung / nom. Streckendynamik

Die Simulation des unregelttes Flugzeugs (rechte Diagrammreihe in Abbildung 8-9) erfolgt unter Verwendung eines vereinfachten Längsbewegungsreglers des geregelttes Flugzeugs um

Änderungen von Fluggeschwindigkeit und Flughöhe und somit etwaige Kopplungseffekte zwischen Längs- und Seitenbewegung zu unterbinden und folglich die Vergleichbarkeit zum geregelten Flugzeug zu gewährleisten. Die Querrudereingabe des unregulierten Flugzeugs erzeugt hinsichtlich der Rollachse eine Rollrate p_e , dessen Dynamik nicht der für ein adäquates Rollverhalten gewünschten PT_I -Dynamik entspricht. Des Weiteren kommt es aufgrund der gekoppelten Wirkungsweise des Querruders auf Roll- und Gierachse sowie der verkoppelten Eigendynamik zur Anregung der Roll-Gier-Schwingung und somit neben der Gierrate r_e zu einem hinsichtlich des koordinierten Kurvenflugs unerwünschten Schiebewinkel β . Aufgrund der stabilen Spiralbewegung, die zu einer sukzessiven Reduktion des Hängewinkels Φ führt ($\delta_{St\ lat} = 0$), ist für den stationären Kurvenflug eine dauerhafte Steuereingabe notwendig.

Im abschließenden Vergleich von geregeltem und unreguliertem Flugzeug ist festzustellen, dass zum einen die Rolldynamik des geregelten Systems, insbesondere die Entkopplung von den Zuständen der Gierachse, den Anforderungen entspricht. Zum anderen, dass der Steueraufwand zur Durchführung einer koordinierten Flugzeugbewegung insbesondere im Kurvenflug für den geregelten Fall reduziert ist und im Vergleich dazu im unregulierten Flugzeug eine manuelle Koordinierung durch die Piloten einen signifikanten Mehraufwand und somit eine stark erhöhte Arbeitsbelastung darstellt. Die Funktionalität des Regelungssystems sichert hinsichtlich der Rollsteuerung unter Berücksichtigung der Ergebnisse zur Rolldynamik (siehe Abschnitt *Rolldynamik*) exzellente Flugeigenschaften bei merklich reduzierter Pilotenbelastung.

In Analogie zur obigen Untersuchung der Rollsteuerung mit Abbildung 8-9 wird im kommenden Abschnitt die Analyse der Giersteuerung des geregelten Flugzeugs im Vergleich zum unregulierten Flugzeug durchgeführt. Die zeitlichen Verläufe der Flug- und Aktuatorzustände sowie Kommandogrößen sind in Abbildung 8-10 dargestellt, wobei die linke Diagrammreihe dem geregelten Flugzeug und die rechte dem unregulierten Flugzeug zuzuordnen ist. Das β_c -Sprungkommando (beim geregelten Flugzeug) führt zu einem abgestimmten Seiten- und Querruderausschlag, dabei wird kurzzeitig die Raten-sättigung des Seitenruderaktuator von $60^\circ/s$ erreicht. Infolge des Stellflächenausschlags wird der Schiebewinkel mit guter Näherung mit der in Kapitel 6.2 geforderten Dynamik aufgebaut (siehe Abschnitt *Gierdynamik*). Der aufeinander abgestimmte Ausschlag von Seiten- und Querruder bewirkt die geforderte Achsentkopplung. So ist die Änderung der Rollrate p_e und des damit in Zusammenhang stehenden Hängewinkels Φ marginal. Der verhältnismäßig geringe Pedalausschlag δ_{pet} und der dadurch direkt bewirkte Seitenruderausschlag des unregulierten Flugzeugs (rechte Diagrammreihe in Abbildung 8-10) erzeugen eine begrenzte Wirkung bzgl. der Zustände der Gierachse r_e und β . Zusätzlich ergibt sich für das unregulierte Flugzeug aufgrund der verhältnismäßig großen Gier-Roll-Kopplung eine Rollrate p_e , die zu einem stetigen Aufbau eines Hängewinkels Φ führt. Für größere sprungförmige Pedal- respektive Seitenruderausschläge steigt die Wirkung auf die Zustände der Rollachse (p_e und Φ) an und für einen entsprechenden Seitenruderausschlag ist ein drastisches Abkippen des unregulierten Flugzeugs zur Seite

festzustellen. Für das unregelte Flugzeug ist infolge der großen Gier-Roll-Kopplung zur Steuerung der Gierdynamik, respektive zum gezielten Aufbau eines Schiebewinkels neben dem Pedalausschlag bzw. Seitenruderausschlag ein entsprechend abgestimmter Querruderausschlag durch den Piloten vorzusehen, wodurch der Steueraufwand merklich steigt.

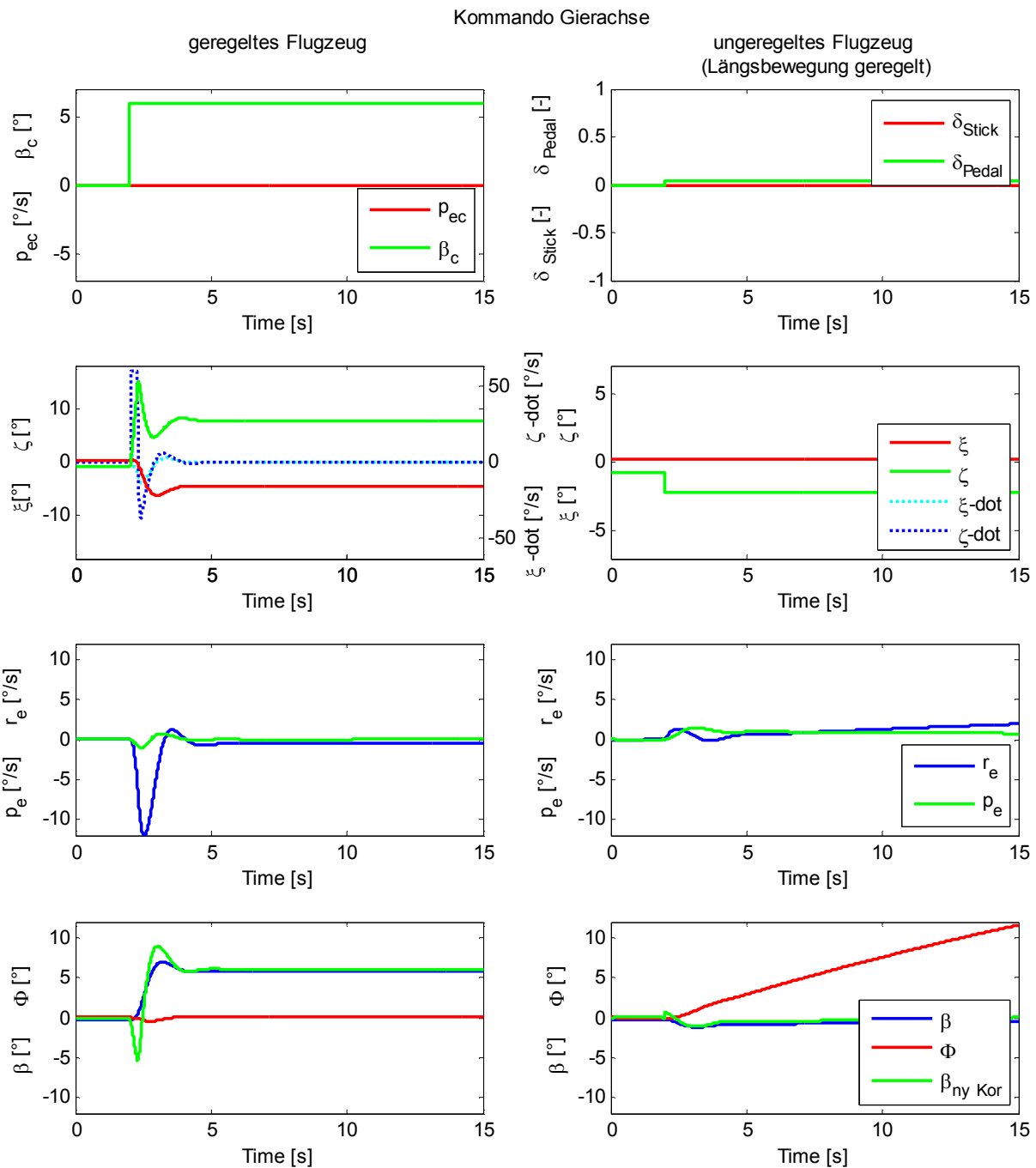


Abbildung 8-10: geregelttes und unregelttes Flugzeug / Giersteuerung / nom. Streckendynamik

Es ist abschließend hinsichtlich der Steuerungseigenschaften der Gierachse festzuhalten, dass die Arbeitsbelastung des Flugzeugführers für den reglergestützten Betrieb, insbesondere aufgrund der nicht erforderlichen Koordination der Steuereingaben bzgl. Seiten- und Querruder, im Vergleich zum unregelten Flugzeug, entscheidend geringer ausfällt. Die durch das

Regelungssystem bewirkte Giersteuerung ist unter Berücksichtigung der Ergebnisse zur Analyse der Gierdynamik (siehe Abschnitt *Gierdynamik*) angemessen.

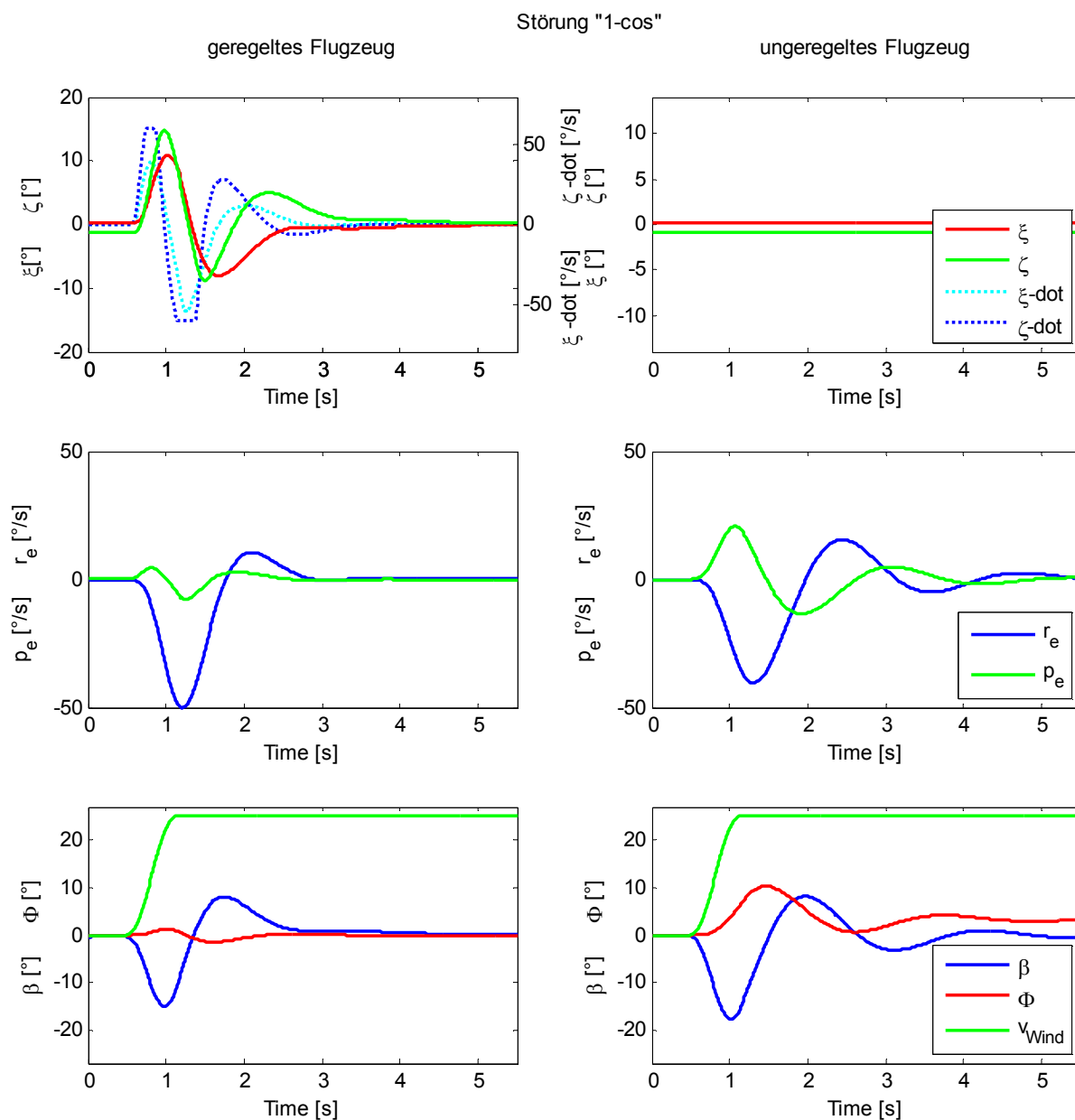


Abbildung 8-11: geregeltes und ungeregeltes Flugzeug / "1-cos"-Böe / nom. Streckendynamik

Die Auswirkung einer „1 – cos“-Böe auf das dynamische Verhalten des reglergestützten Flugzeugs im Vergleich zum unregulierten Flugzeug wird im Folgenden analysiert. In Abbildung 8-11 sind die entscheidenden Flug- und Aktuatorzustände dargestellt, in den beiden unteren Diagrammen zudem die Seitenwindkomponente v_{Wind} . Dabei ist die linke Diagrammreihe dem geregelten und die rechte Diagrammreihe dem unregulierten Flugzeug zuzuordnen. Verursacht durch die Änderung der Zustände der Seitenbewegung, insbesondere des Schiebewinkels β , infolge der Böe, kommt es beim geregelten Flugzeug zu einem aufeinander abgestimmten Ausschlag von Quer- und Seitenrudder. Dabei erreicht der Seitenrudderaktuator die Ratensättigung von 60 °/s. Aufgrund des koordinierten Stellflächenausschlags wird im Vergleich zum

ungeregelten Flugzeug der maximale Schiebewinkel begrenzt und das Einschwingverhalten bzgl. β deutlich verbessert. Ferner kommt es aufgrund der vom Regelungssystem bewirkten Stellflächenauslässe zur geforderten Achsentkopplung, d.h. der Einfluss der durch die Böe primär angeregten Gierzustände β und r_e auf die Zustände der Rollachse p_e und Φ ist reduziert. Dies wird deutlich durch den Vergleich der zeitlichen Verläufe von p_e und Φ des geregelten und ungeregelten Flugzeugs in Abbildung 8-11. Das dynamische Verhalten des geregelten Flugzeugs beim Auftreten von lateralen Böen kann hinsichtlich der Flugeigenschaften im Vergleich zum ungeregelten Flugzeug folglich als adäquat eingestuft werden. Etwaige ausgleichende Stellausschläge durch den Piloten beim ungeregelten Flugzeug zur Abminderung des Böeneinflusses werden im reglergestützten Fall automatisch generiert, was die Arbeitsbelastung des Flugzeugführers reduziert und den Flugkomfort erhöht.

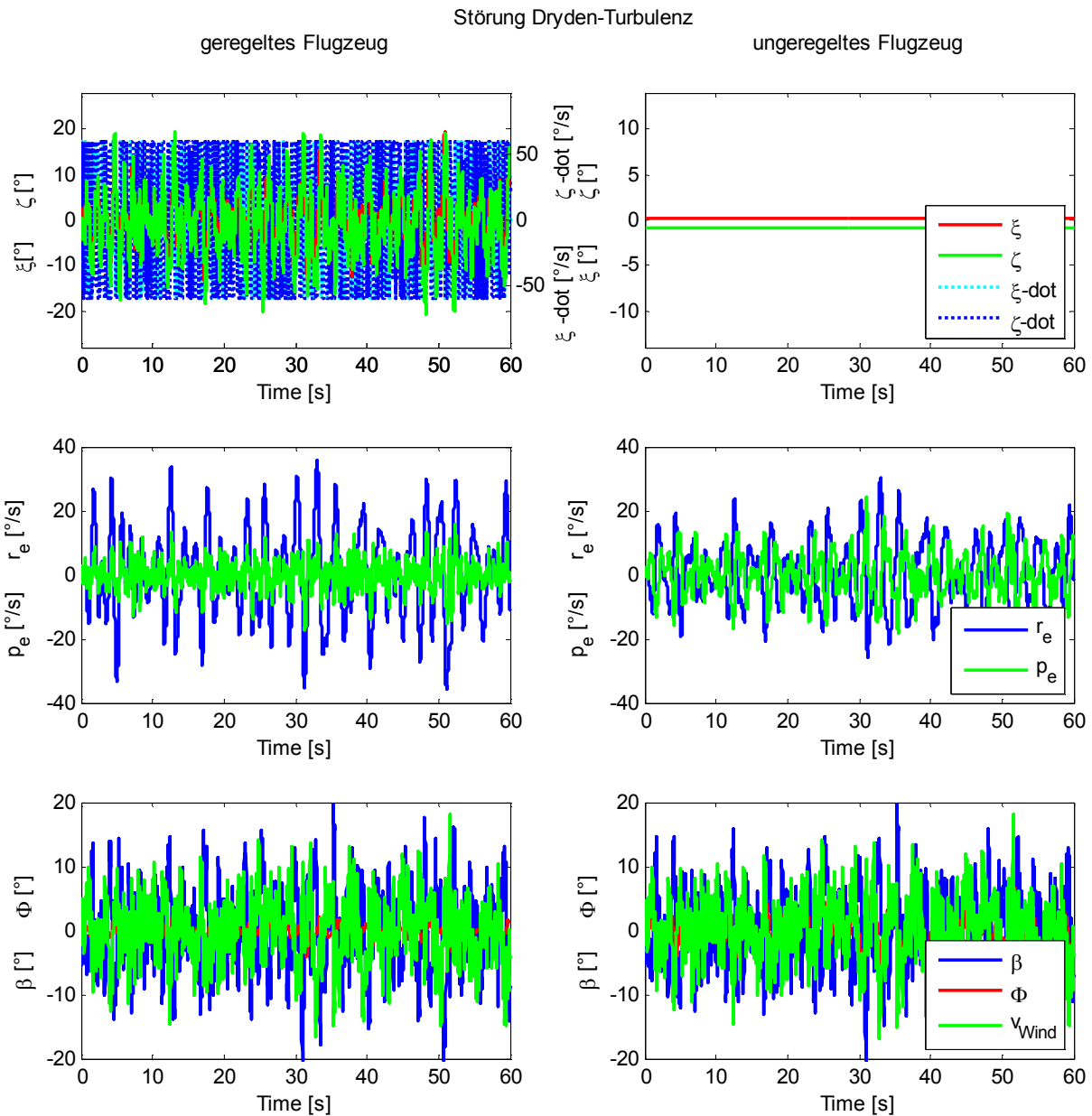


Abbildung 8-12: geregeltes und ungeregeltes Flugzeug / Dryden-Turbulenz / nom. Streckendynamik

Das Verhalten des geregelten Flugzeugs im Vergleich zum unregulierten beim Durchfliegen eines auf dem Dryden-Spektrum basierenden lateralen Turbulenzfeldes wird im Folgenden analysiert. Abbildung 8-12 teilt sich, wie bereits die obigen Abbildungen, in eine linke Diagrammreihe, die dem geregelten, und eine rechte Diagrammreihe, die dem unregulierten Flugzeug zu zuordnen ist, auf. Neben den Flugzuständen der Seitenbewegung (r_e , p_e , β , Φ) und den Stellausschlägen von Quer- und Seitenrudder werden dabei für das geregelte Flugzeug die Stellraten der Flächen bzw. der Aktuatorik angegeben. Zusätzlich wird zur besseren Nachvollziehbarkeit in den beiden unteren Diagrammen von Abbildung 8-12 die Geschwindigkeitskomponente v_{Wind} wiedergegeben. Für eine genauere Betrachtung wird in Abbildung 8-13 ein zeitlicher Detailausschnitt von Abbildung 8-12 dargestellt.

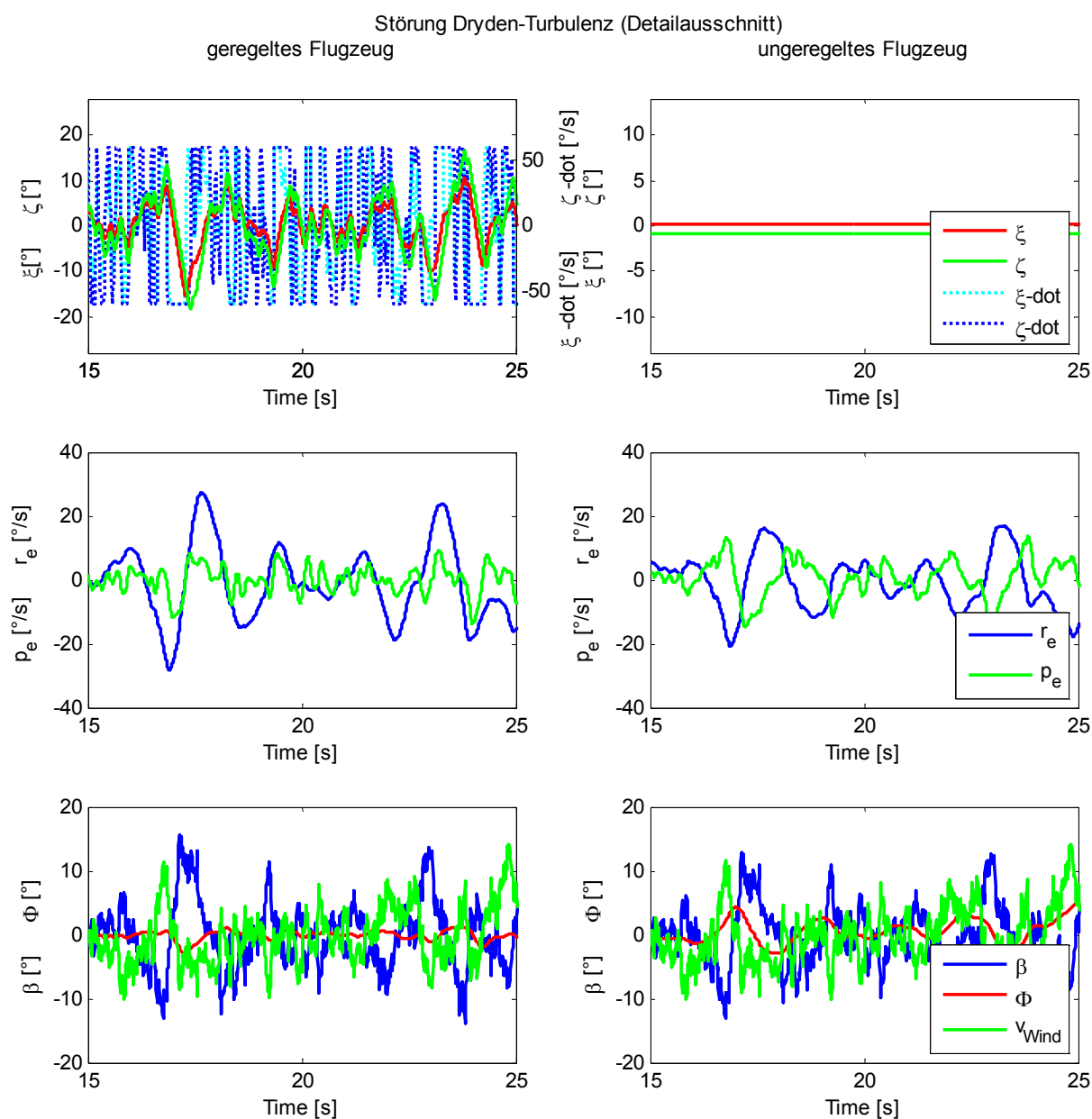


Abbildung 8-13: geregeltes und unreguliertes Flugzeug / Dryden-Turbulenz / nom. Streckendynamik
Detailausschnitt

Das Turbulenzfeld schließt Geschwindigkeitsänderungen Δv_{Wind} von über 20 m/s innerhalb eines Zeitintervalls $\Delta t \approx 0,2$ s ein, die in Relation zur Fluggeschwindigkeit von $V = 57$ m/s erheblich sind. Beim Durchfliegen des lateralen Turbulenzfeldes wird beim geregelten Flugzeug fortgesetzt die Ratensättigung der Aktuatoren von 60 °/s erreicht, dies gilt insbesondere für das Seitenruder. Der koordinierte Ruderausschlag von Quer- und Seitenruder wirkt sich aufgrund der hohen Dynamik der Turbulenz nur begrenzt auf die Zustände der Gierachse (r_e und β) aus. Aufgrund des Reglerentwurfs und insbesondere der proportionalen Schiebewinkelrückführung kommt es infolge des sich hochdynamisch ändernden Schiebewinkels β zeitweise zu einer größeren Gierrate r_e im Vergleich zum ungeregelten Flugzeug. Die Auswirkungen der Turbulenz auf die Zustände der Rollachse (p_e und Φ) können durch den Regler im Vergleich zum ungeregelten Flugzeug signifikant verringert werden. So ist beim geregelten Flugzeug die maximal auftretende Rollrate p_e stark reduziert, was sich entscheidend auf den Hängewinkel auswirkt, dessen Maximalwerte im Vergleich zum ungeregelten Flugzeug deutlich kleiner sind. Die Auswirkungen der Turbulenz auf die Rolldynamik des Flugzeugs werden aufgrund des Regelungskonzepts begrenzt und senken somit die Arbeitsbelastung des Piloten.

Handling Qualities und Pilotenbewertung

Der Pilot als kontinuierlich dynamisch wirkendes Glied des fliegenden Systems blieb in den bisherigen Untersuchungen unberücksichtigt, so konnte der Fokus auf das Eigenverhalten des reglergestützten Flugzeugs gelegt werden. Hierbei wurden im Rahmen der nichtlinearen Analyse für die geregelte Seitenbewegung des Flugzeugs angemessene Flugeigenschaften belegt. Zur vollständigen Evaluierung und abschließenden Validierung des vorgestellten Reglerentwurfs ist die Berücksichtigung des Piloten im übergeordneten Piloten-Flugzeug-Regelkreis aber unerlässlich, um die Eignung des grundsätzlich pilotierten Fluggeräts und dessen adäquater Handlingcharakteristik (sogenannte *Handling Qualities*) nachzuweisen. Der in Kapitel 2.2.1 vorgestellte DA42 spezifische Flugsimulator *D-SIM-42* des Lehrstuhls für Flugsystemdynamik ermöglicht die realitätsnahe Untersuchung des Piloten-Flugzeug-Regelkreises. Im Rahmen sogenannter *Pilot-in-the-Loop* Simulationen erfolgt die Untersuchung der *Handling Qualities* des geregelten Flugzeugs in Analogie zur bisherigen nichtlinearen Analyse in Gegenüberstellung zum Verhalten des pilotierten ungeregelten Flugzeugs. Eine umfangreiche und detaillierte Beschreibung der durchgeführten *D-SIM-42* Flugsimulator Flugversuche nebst zugehörigen Bewertungsmethoden und -kriterien sowie der anschließender Auswertung ist in [72] zu finden. Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse präsentiert:

Zur Sicherstellung einer repräsentativen Bewertung der *Handling Qualities* wird für die Durchführung der pilotierten Simulator-Flugversuche auf sieben Piloten mit zum Teil praktischer Flugerfahrung zurückgegriffen. Da das vorgestellte Regelungssystem in Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt integriert werden und insbesondere ungeübten Piloten die Steuerung und Führung des Fluggerätes erleichtern soll, ist die Berücksichtigung von Piloten mit begrenzter Flugerfahrung bei den Simulator-Flugversuchen obligatorisch. Alle Piloten müssen jeweils drei

Flugaufgaben mit dem geregelten als auch mit dem unregulierten Flugzeug absolvieren, dabei haben sie keine Kenntnis über die jeweilige Konfiguration. Die Auswertung der Flugversuche erfolgt sowohl quantitativ anhand der aufgezeichneten Flugzustände und Kommandosignalverläufe im Frequenz- und Zeitbereich als auch qualitativ mittels des bewährten *Cooper-Harper-Ratings*, vgl. [7], [75] und [76]. Bei den drei Flugaufgaben handelt es sich um zwei Versuche in denen die Piloten einem vorgegebenen Hängewinkelsignal folgen müssen und um einen *ILS*-Landeanflug, der zu Anfang sowohl eine seitliche Abdrift als auch eine Abweichung bzgl. des Steuerkurses (Heading) aufweist. Um den Fokus auf die Seitenbewegung zu richten, wird den Piloten bei den Flugversuchen mit Hängewinkelvorgabe für die longitudinale Bewegung ein rudimentärer Längsbewegungsregler mit Schubautomation zur Regelung von Flughöhe und Fluggeschwindigkeit zur Verfügung gestellt.

Die quantitative Analyse im Zeitbereich wird durch Auswertung des quadratischen Mittels der Abweichung zwischen Sollhängewinkel und geflogenem Hängewinkel realisiert. Für fast alle Flugversuche kann für die Konfiguration mit Regler ein geringeres quadratisches Mittel der Abweichung bestimmt werden, d.h. infolge der Reglerunterstützung ist es den Piloten möglich, dem vorgegebenen Hängewinkel präziser zu folgen bzw. den Hängewinkel präziser zu steuern, siehe [72].

Die quantitative Bewertung im Frequenzbereich erfolgt auf Basis des Bandbreitenkriteriums, vgl. [31], und der sogenannten Crossover-Frequenz, vgl. [77] und [78]. Das Bandbreitenkriterium analysiert und bewertet die maximale Frequenz ω_{bw} (Bandbreitenfrequenz) bis zu der das Flugzeug den Eingaben des Piloten folgen kann ohne dass die Stabilität, bemessen an Amplituden- und Phasenrand (6dB/45 °), beeinträchtigt wird. Liegt die Bandbreitenfrequenz ω_{bw} oberhalb des Frequenzbereichs innerhalb dessen der Pilot das Flugzeug steuern will, so sind die Flugeigenschaften adäquat, andernfalls nicht. In der hier vorliegenden Analyse erfolgt die Bewertung durch das Bandbreitenkriterium unter Berücksichtigung des Phasenabfalls (Gradienten) im Bereich von -180° der Übertragungsfunktion des lateralen Stickausschlags auf den Hängewinkel. Eine ausführliche Darstellung des Bandbreitenkriteriums ist in [31] und [79] zu finden. Die Auswertung aller reglergestützten Flugversuche (geregeltes Flugzeug) mit dem Bandbreitenkriterium ergibt Flugeigenschaften im Bereich *Level 1* und *Level 2*. Folglich kann die geforderte Handlingcharakteristik nicht vollständig gewährleistet werden, da *Handling Qualities* im Bereich *Level 2* Verbesserungspotenzial aufweisen. Aussagen der Piloten weisen jedoch darauf hin, dass für die reglergestützten Flugversuche im Vergleich zum unregulierten Flugzeug der Steuerknüppel über einen größeren unwirksamen Bereich, die sogenannte *Dead Zone*, verfügt. Somit werden kleine Knüppelausschläge im Flugzeugverhalten nicht berücksichtigt und der Pilot ist zu einem größeren Ausschlag gezwungen. Nachteilige Auswirkungen der *Dead Zone* des Steuerknüppels sind nicht auf den Reglerentwurf, sondern auf den Simulator bzw. die Schnittstelle zur Anbindung des Reglers an den Simulator zurückzuführen. Entsprechend ist für die spätere Flugerprobung auf dem *Fliegenden*

Erprobungsträger (siehe Kapitel 2.2.2) dafür zu sorgen, dass die Piloteneingaben ohne *Dead Zone* erfolgt.

Die Crossover-Frequenz ω_c repräsentiert die Frequenz bis zu welcher der Pilot einem Vorgabesignal (hier Hängewinkelvorgabe) adäquat folgen kann. Für die Crossover-Frequenz ω_c gilt bzgl. des Amplitudenfrequenzgangs: $|\Phi/\Phi_{soll}| \approx 0$ dB, vgl. [77] und [78]. Die Auswertung der Crossover-Frequenz der Flugversuche mit Hängewinkelvorgabe zeigt, dass das geregelte Flugzeug im Vergleich zum unregulierten eine größere Crossover-Frequenz aufweist und folglich über eine höhere Kommandofrequenz und ein angemessenes Übertragungsverhalten verfügt, siehe [72].

Die qualitative Bewertung der Flugeigenschaften mittels des in der Luftfahrt etablierten und anerkannten *Cooper-Harper-Ratings* bekräftigt die Ergebnisse der quantitativen Analysen. Die systematische Abfrage anhand der *Cooper-Harper-Bewertungsskala* über die adäquate Erfüllung einer ausgewählten Aufgabe gibt dabei Aufschluss über die *Handling Qualities* und den Arbeitsaufwand bzw. die Arbeitsbelastung. Unter Berücksichtigung der Flugversuche aller Piloten ergeben sich im Mittel nach der *Cooper-Harper-Bewertungsskala* für das geregelte Flugzeug angemessene Flugeigenschaften, siehe [72], die nach [25] der Kategorie *Level 1* zuzuordnen sind (mittleres *Pilot Rating* $\approx 2,48 \hat{=} Level 1$, vgl. [72] und [7]). Das unregulierte Flugzeug erreicht unter Bewertung aller Flugversuche hingegen im Durchschnitt nur *Level 2* Flugeigenschaften auf der *Cooper-Harper-Bewertungsskala*, siehe [72] (mittleres *Pilot Rating* $\approx 4,26 \hat{=} Level 2$, vgl. [72] und [7]).

Abschließend ist festzuhalten, dass die Analyse des geregelten Flugzeugs, unter Berücksichtigung des Piloten als kontinuierliches dynamisches Regelkreisglied, den Reglerentwurf hinsichtlich der *Handling Qualities* für geeignet bestätigt. Die Pilotenbewertung nach der *Cooper-Harper-Bewertungsskala* zeigt dies deutlich.

8.3 Folgerungen aus der *Nichtlinearen Analyse*

Die in diesem Kapitel durchgeführte nichtlineare Analyse des vorgestellten Regelungsentwurfs schließt die vorliegende Arbeit thematisch und fachlich ab. Sie fußt auf nichtlinearen numerischen Simulationen mittels des in *Matlab/Simulink* implementierten Modells des geregelten und unregulierten Flugzeugs (*DA42 Simulationsmodell*) sowie auf virtuellen Flugversuchen mit und ohne Seitenbewegungsregelung unter Verwendung des typenspezifischen Flugsimulators *D-SIM-42* (siehe Kapitel 2.2.1). Die gesamte nichtlineare Analyse teilt sich in die Abschnitte *Rollodynamik*, *Gierdynamik*, *Steuer- und Störverhalten* sowie *Handling Qualities und Pilotenbewertung* auf. Die Ergebnisse werden im Folgenden abschließend dargestellt und resümiert.

In den ersten beiden Abschnitten *Rollodynamik* und *Gierdynamik* von Kapitel 8.2 wird hinlänglich gezeigt, dass die vorgenommenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen zur Durchführung der

Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe (MR DEA) zulässig sind. Die Abweichungen zwischen geforderter linearer Solldynamik und den Ergebnissen der nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Gesamtsystems erwiesen sich im Rahmen der Analysen als sehr gering. Es kann somit für die getrennte Betrachtung der Roll- und Gierdynamik die Umsetzung des geforderten Flugzeugverhaltens zur Gewährleistung exzellenter Flugeigenschaften bestätigt werden. Dabei sei an dieser Stelle nochmals in Erinnerung gerufen, dass aufgrund der vorgenommenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen die Berechnung der Reglerparameter (*MR DEA*) analytisch und somit intuitiv und vollständig nachvollziehbar ist und ohne die Notwendigkeit eines numerischen Berechnungsverfahrens erfolgt. Somit ist im Besonderen die Verhältnismäßigkeit zwischen Regelungsergebnis und Komplexität sowie Aufwand der Auslegungsmethodik hervorzuheben.

Im dritten Abschnitt wurde das Steuer- und Störverhalten des geregelten Flugzeugs zur Bewertung der *Flying Qualities* untersucht. Hierbei wurde insbesondere auf die beim unregulierten Flugzeug auftretende unerwünschte Kopplung zwischen Roll- und Gierachse eingegangen. Es konnte unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus den ersten beiden Abschnitten gezeigt werden, dass die reglergestützte Steuerung von Roll- und Gierachse aufgrund der sichergestellten Achsentkopplung exzellente Flugeigenschaften (*Flying Qualities*) gewährleistet. Die Untersuchung der Flugdynamik für eine unterbrochene Rechteckdoublette in p_{ec} weist für das geregelte Flugzeug die geforderte Achsentkopplung bzgl. der Rollachse nach. Der durch den Regler bewirkte, aufeinander abgestimmte Stellflächenausschlag bedingt eine koordinierte Flugzeugbewegung. Dies gilt sowohl für den stationären Kurvenflug als auch für das Ein- und Ausleiten der Kurve und reduziert den Steueraufwand für den Piloten erheblich. Durch die Analyse des reglergestützten Flugverhaltens für ein β_c -Sprungkommando konnte nachgewiesen werden, dass die Auswirkungen auf die Rollachse, insbesondere auf den Hängewinkel, marginal sind. Somit wird die gewünschte Achsentkopplung bzgl. der Gierachse umgesetzt, wodurch für den Piloten ebenfalls eine Reduktion der erforderlichen Steuereingaben erreicht wird. Die nichtlineare Analyse zeigt außerdem, dass das Störverhalten des geregelten Flugzeugs im Vergleich zum unregulierten Flugzeug entscheidend verbessert und somit die Arbeitsbelastung des Piloten infolge atmosphärischer Störungen reduziert und der Flugkomfort nachhaltig gesteigert wurde.

Im vierten und letzten Abschnitt der nichtlinearen Analyse erfolgte die Untersuchung der *Handling Qualities* unter Berücksichtigung des Piloten als aktives Glied des Piloten-Flugzeug-Regelkreises. Hierbei konnten dem Reglerentwurf sowohl quantitativ als auch qualitativ eine signifikante Besserung der *Handling Qualities* des geregelten Flugzeug bestätigt werden. Die Evaluierung der *Handling Qualities* auf Basis des in der Luftfahrt bewährten und geschätzten *Cooper-Harper-Ratings* wies dem geregelten Flugzeug im Vergleich zum unregulierten Flugzeug ein um annähernd zwei Skalenpunkte besseres *Pilot Rating* nach.

Die nichtlineare Analyse attestiert dem robusten Seitenbewegungsregler abschließend exzellente Flugeigenschaften und bestätigt die Erfüllung der Forderungen nach einer verbesserten Steuerbarkeit (Handhabungseigenschaften) und nach angemessenen Stabilitätseigenschaften. Dadurch wird eine Reduzierung der Arbeitsbelastung des Piloten bei gleichzeitiger Erhöhung der Flugsicherheit erreicht.

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Moderne Fly-by-Wire Flugregelungssysteme bieten in heutigen Verkehrsflugzeugen maßgeschneiderte Flugeigenschaften und ein ausgezeichnetes Handling über den gesamten Flugbereich. Dadurch wird die Arbeitsbelastung der Piloten signifikant reduziert und folglich die Flugsicherheit gesteigert sowie das Unfallrisiko verringert. Aufgrund der fortschreitenden technologischen Entwicklung ist es heutzutage möglich, aktive Flugsteuerungssysteme auch in zukünftigen Kleinflugzeugen zu integrieren und somit im Bereich der Allgemeinen Luftfahrt die Flugsicherheit zu verbessern. Für eine typische Kleinflugzeug-Referenzkonfiguration wird ein Konzept zur Robusten Regelung der Seitenbewegung zukünftiger Kleinflugzeuge vorgestellt, welches den speziellen marktwirtschaftlichen Randbedingungen einer Entwicklung von Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt gerecht wird. Die Schwerpunkte dieser Arbeit sind die Ausarbeitung einer universellen Reglerstruktur, die Bereitstellung einer einsichtigen Methodik zur Auslegung der Reglerparameter und ein Verfahren zur Analyse und zum Nachweis robuster Stabilitätseigenschaften ($\mu_{\Delta T}$ -Analyse / *Robuste Konformität*) für Qualifizierung und Zulassung.

Zuerst wird die für die Entwicklung des Regelungssystems erforderliche Modellierung, Simulationsumgebung und Erprobungsinfrastruktur vorgestellt (Kapitel 2). Das zur Umsetzung der Regelungsstrategie maßgebliche experimentelle Koordinatensystem wird beschrieben und die für die Modellierung der Flugmechanik notwendigen nichtlinearen und linearen Bewegungsgleichungen bereitgestellt. Ferner wird die im Rahmen der linearen und nichtlinearen Analyse und zur Evaluierung des Regelungssystems berücksichtigte Aktuatordynamik vorgestellt. Die am Lehrstuhl für Flugsystemdynamik zur Verfügung stehende Erprobungsinfrastruktur für die abschließende Bewertung und den Test des Regelungskonzepts – insbesondere unter Berücksichtigung des Piloten als Teil des Piloten-Flugzeug-Regelkreises –, der *D-SIM-42* Flugsimulator und der *Fliegende Erprobungsträger*, werden ebenfalls detailliert dargelegt.

Die Analyse der Flugdynamik des unregelmäßigten Flugzeugs bzgl. der inhärenten Stabilitäts- und Steuerungseigenschaften in Kapitel 3 zeigt Defizite im Bereich der Flugeigenschaften, insbesondere hinsichtlich der Handhabungseigenschaften (Handling/Steuerungsaufwand) zur Steuerung des Fluggerätes. Die Roll-Gier-Schwingung weist eine zu geringe relative Dämpfung auf und der Roll-Eigenwert eine starke Streuung über die Envelope. Beides führt zu Einschränkungen bzgl. der Flugeigenschaften. Die stabile Spiralbewegung des unregelmäßigten Flugzeugs wirkt sich nachteilig auf den stationären Kurvenflug aus, woraus ein erhöhter

Steueraufwand im stationären Kurvenflug resultiert. Die inhärente Flugdynamik des Fluggeräts weist außerdem eine signifikante, nachteilige Kopplung zwischen Roll- und Gierachse auf. Dies ist sowohl bzgl. der Eigendynamik als auch bzgl. der Wirkung der Steuerelemente festzustellen, wodurch der Pilot zur Ausführung einer koordinierten Flugzeugbewegung eine aufeinander abgestimmte Betätigung der Steuerelemente ausführen muss. Daraus resultiert ein erhöhter Handlingaufwand zur Steuerung des Fluggeräts, wodurch die Arbeitsbelastung wesentlich steigt.

Aufbauend auf der Analyse der inhärenten Stabilitäts- und Steuerungseigenschaften der DA42 werden im darauffolgenden Kapitel 4 die Ziele des Reglerentwurfs spezifiziert und ein Regelungskonzept vorgestellt. Die Verbesserung der Stabilitäts- und Steuerungseigenschaften, die Reduktion des Störverhaltens und die Umsetzung einer koordinierten Flugzeugbewegung repräsentieren die Entwurfsziele des Seitenbewegungsreglers. Das Regelungskonzept sieht zur Umsetzung der Entwurfsziele eine Bewegung des Flugzeugs um den bzw. senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor vor, welcher sich mathematisch bzgl. des experimentellen Koordinatensystems beschreiben lässt. D.h. das Flugzeug rollt bei einem lateralen Stickausschlag ($\delta_{St\ lat} \rightarrow p_e$) um den Geschwindigkeitsvektor und giert bei einem Pedalausschlag ($\delta_{Pet} \rightarrow r_e$) senkrecht zu diesem. Dadurch wird ein ungestörter aerodynamischer Flugzustand gewährleistet und eine koordinierte Flugzeugbewegung mit vollständiger Entkopplung von Längs- und Seitenbewegung sichergestellt. Die Arbeitsbelastung des Piloten zur Steuerung des Flugzeugs wird in Folge dessen stark reduziert.

Die Reglerstruktur, die in Kapitel 5 vorgestellt wird, stellt die Grundlage zur Gewährleistung der Entwurfsziele dar. Sie setzt die Regelungsstrategie von in Bezug auf flugdynamisch besonders geeignete Bewegungs- und Steuerachsen, die sich bzgl. des experimentellen Achsenkreuzes ergeben und die abgezielte Flugzeugbewegung um bzw. senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor ermöglichen, um. Ein entsprechendes Vorsteuergesetz bedingt a priori einen hinsichtlich des experimentellen Koordinatensystems aufeinander abgestimmten Steuerflächenausschlag und stützt somit die abgezielte Entkopplung, was zusätzlich eine intuitive und anschauliche Parameterauslegung ermöglicht. Zur Modifikation der Lage der Pole bzw. Eigenwerte und zur Entkopplung der Dynamik von Roll- und Gierachse werden die Roll- und Gierrate (p_e und r_e) bzgl. des e -Systems sowie der Schiebe- und Hängewinkel ($\hat{\beta}_{est}$ und Φ) zurückgeführt. Zusätzlich erfolgt die Rückführung des Integrals des seitenkraftproportionalen Schiebewinkels $\hat{\beta}_{n_y}$ um eine stationär koordinierte Flugzeugbewegung zu gewährleisten.

Die Auslegung der Regelungsparameter wird auf Basis der *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* (engl. *Model Reference Direct Eigenstructure Assignment*, kurz *MR DEA*) zur Umsetzung der Entwurfsziele ausgeführt (Kapitel 6). Diese Methodik erlaubt eine analytische und intuitive Berechnung der Verstärkungsfaktoren. Dabei werden im Vergleich zur klassischen Eigenstrukturvorgabe nicht die gewünschten Eigenvektoren vorgegeben und anschließend durch numerische Berechnungsverfahren die bestmögliche Realisierung ermittelt, sondern durch die direkte Gestaltung der Systemmatrix \mathbf{A} und der Eingangsmatrix \mathbf{B} des

geschlossenen Regelkreises die geforderte und realisierbare Eigenstruktur umgesetzt. Unter Berücksichtigung des mittels *MR DEA* für alle einzelnen Flugzustände (Trimmpunkte) bestimmten Satzes an Verstärkungsfaktoren erfolgt die Ausarbeitung eines über die Envelope nachgeführten Reglers, der sich als Funktion des Staudrucks dem jeweiligen Flugzeugzustand adaptiert. Zusätzlich wird ein sogenannter *Back-Up-Regler* mit festen Verstärkungsfaktoren erstellt. Eine lineare Analyse des geschlossenen Regelkreises schließt die Reglersynthese ab, dabei kann die Vorgehensweise und insbesondere die Wirkungsweise der Auslegungsmethodik verifiziert und bestätigt werden.

Der Nachweis *Robuster Konformität* und somit die Bestätigung, dass Mindestanforderungen an die Stabilitätseigenschaften des geregelten Flugzeugs trotz Abweichungen zwischen realer Flugdynamik und dem für den Reglerentwurf zugrunde gelegten Modell sichergestellt sind, wird in Kapitel 7 dargelegt. In Anlehnung an die derzeit in der industriellen Luftfahrt üblichen Nachweismethoden wird der Beleg einer ausreichenden Amplituden- und Phasenreserve auf Basis vereinfachter *SISO*-Systeme kurz dargelegt. Da es sich hierbei um keinen hinreichenden Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* eines *MIMO*-Systems handelt, erfolgt der Beweis ausreichender Stabilitätseigenschaften (*Robuste Konformität*) mittels der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse. Die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ist eine im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Weiterentwicklung der μ -Analyse und stellt eine besondere wissenschaftliche Neuerung dar. Sie ermöglicht den Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* nicht gegenüber der Imaginär-Achse, sondern bzgl. einer vom Anwender spezifizierten Grenze (*Konformitätsgrenze*) in der komplexen Ebene. Es ist somit möglich, die Grenze für *robuste Stabilitätseigenschaften* unmittelbar aus den Anforderungen an die Flugeigenschaften, wie beispielsweise ein Mindestmaß an absoluter und relativer Dämpfung, abzuleiten und deren Einhaltung direkt zu prüfen und somit nicht auf die Imaginär-Achse (μ -Analyse) als Grenze *Robuster Stabilität* zurückgreifen zu müssen. Die $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse ermöglicht darüber hinaus den Nachweis *robuster Stabilitätseigenschaften* von Systemen mit neutralstabil geforderten bzw. begrenzt instabil zulässigen Charakteristiken, wie etwa einer neutralstabil ausgelegten Spiralbewegung. Eine Robustheitsanalyse dynamischer Systeme mit neutralstabilen bzw. instabilen Eigenschaften ist mit der μ -Analyse nicht möglich. In Anschluss an die Einführung und Herleitung der $\mu_{\Delta\Gamma}$ -Analyse folgt mittels dieser der Nachweis *Robuster Konformität* des geregelten Gesamtsystems unter Berücksichtigung des vorgestellten Reglerentwurfs als *LPV*-System für die gesamte Envelope und für alle betrachteten einzelnen Flugzustände (*LZI*-Systeme).

Zum Schluss der Arbeit wird in Kapitel 8 mittels einer umfangreichen, nichtlinearen numerischen Simulation des geregelten Flugzeugs die vorgestellte Reglerstruktur sowie die Auslegungsmethodik (*MR DEA*) und folglich das gesamte Regelungskonzept verifiziert und bewertet. Im Rahmen der nichtlinearen Analyse konnten, neben der Zulässigkeit der für die *Referenzmodellbasierten Eigenstrukturvorgabe* durchgeführten Vernachlässigungen und Vereinfachungen, die vorgegebenen Entwurfsziele vollständig nachgewiesen werden. Durch die

nichtlineare Analyse ist das Ziel des Regelungskonzepts – nämlich die Bestellung maßgeschneiderter Flugeigenschaften sowie ausgezeichneten Handlings über den gesamten Flugbereich – nachgewiesen und folglich ein Beitrag zur Steigerung der Flugsicherheit und Reduzierung des Unfallrisikos mittels aktiver Flugsteuerungssysteme in zukünftigen Kleinflugzeugen erbracht.

9.2 Ausblick

Die Basisentwicklung des Seitenbewegungsreglers schließt mit der im vorherigen Kapitel durchgeführten nichtlinearen Analyse (Kapitel 8), in dieser konnte gezeigt werden, dass die geforderten flugdynamischen Eigenschaften vollständig realisiert wurden. Auf Grundlage des Regelungskonzepts ist in weiterführenden Arbeiten und Erprobungsphasen die Integration des selbigen auf einer entsprechenden flugtauglichen Rechnerplattform, insbesondere die notwendige Adaption für eine diskrete Verarbeitung, zu vollziehen. Durch umfangreiche Tests und Nachweise ist die vorgegebene Funktion zu belegen.

Der Flugversuch zur Validierung des Seitenbewegungsreglers mit dem in Kapitel 2.2.2 vorgestellten *Fliegenden Erprobungsträger* ermöglicht den abschließenden Nachweis der geforderten Funktionalitäten und wird auf anschaulichste Weise den Mehrwert des konzeptionierten Regelungssystems zeigen. Dazu ist in Analogie zur vorliegenden Arbeit ein entsprechender Längsbewegungsregler zu entwickeln um etwaige Nachteile einer unregelmäßigen Längsbewegung zu unterbinden und darüber hinaus die grundlegende Verbesserung der Flugeigenschaften aufgrund der geregelten Längs- und Seitenbewegung vollständig zu demonstrieren. In [80] und [81] ist die Konzeption eines entsprechenden Längsbewegungsreglers zur Umsetzung angemessener Flugeigenschaften sowie adäquaten Handlings der Längsbewegung aufgezeigt.

Lassen sich die in dieser Arbeit theoretisch belegten adäquaten Flug- und Handlingeigenschaften praktisch bestätigen und gleiches für die Längsbewegung realisieren, so ist die Sinnhaftigkeit innovativer Regelungskonzepte zur Erhöhung der Flugsicherheit in Flugzeugen der Allgemeinen Luftfahrt nachgewiesen und ein wichtiger Schritt zur Reduzierung des Unfallrisiko im Bereich der Kleinflugzeuge geschaffen.

Literaturverzeichnis

- [1] LN 9300 Blatt 1; Flugmechanik, Begriffe Benennungen Zeichen Grundlagen, Köln: Beuth-Vertrieb GmbH, 1970.
- [2] DIN 9300 Teil1; Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik, Bewegung des Luftfahrzeuges gegenüber der Luft, Berlin: Beuth Verlag GmbH, 1990.
- [3] E. Kelly, „Australia probes high fatal accident rate in GA sector,“ *Flight International*, p. 21, 19-25 Juli 2011.
- [4] D. Learmount, „Heading in the right direction,“ *Flight International*, pp. 44-46, 14-20 Mai 2013.
- [5] U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration Aviation Policy and Plans, „FAA Aerospace Forecast Fiscal Years 2010-2030,“ Federal Aviation Administration, U.S. of America , Verfügbar unter https://www.faa.gov/data_research/aviation/aerospace_forecasts/2010-2030/ (Zugriff am 19.02.2015).
- [6] European Aviation Safety Agency, Certification Specifications for Normal, Utility, Aerobatic and Commuter Category Aeroplanes, CS-23, European Aviation Safety Agency, 2012.
- [7] R. Brockhaus, Flugregelung, 2.Auflage, Berlin: Springer, 2001.
- [8] K. Magnus und H. H. Müller, Grundlagen der Technischen Mechanik, Stuttgart: Teubner, 1990.
- [9] M. Heller, Untersuchung zur Steuerung und Robusten Regelung der Seitenbewegung von Hyperschall-Flugzeugen; Dissertation, München: Herbert Utz Verlag GmbH, 1999.
- [10] F. Holzapfel, Nichtlineare adaptive Regelung eines unbemannten Fluggerätes; Dissertation, München: Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 2004.
- [11] L. Höcht, Advances in Stability Analysis for Model Reference Adaptive Control Systems and Application to Unmanned Aerial Systems; Dissertation, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, München: Verlag Dr. Hut, 2014.

- [12] F. Holzapfel, Vorlesung - Flugsystemdynamik II, Unterlagen zur Vorlesung, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2010.
- [13] H. Unbehauen, Regelungstechnik I, Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linear kontinuierlicher Regelungssysteme, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1984.
- [14] J. Lunze, Regelungstechnik 1, Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen, 3. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.
- [15] J. Lunze, Regelungstechnik 2, Mehrgrößenregelung, Digitale Regelung, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [16] Diamond Aircraft Industries GmbH, DA42 NG - Airplane Maintenance Manual, Wiener Neustadt, Austria: Diamond Aircraft Industries GmbH, 2012.
- [17] WITTENSTEIN aerospace & simulation GmbH, System Design Description, FET Actuator, Igersheim, Deutschland: WITTENSTEIN aerospace & simulation GmbH, 2011.
- [18] D. Scholz, Berechnung maximal erforderlicher Stellgeschwindigkeiten von Steuerflächen, München: Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress, München, DGLR Jahrbuch, 1997.
- [19] Diamond Aircraft Industries GmbH, Business Unit Simulation, [Online]. Available: <http://www.diamond-simulation.com>. [Zugriff am 18. 03. 2014].
- [20] Diamond Aircraft Industries GmbH, DA42 NG - fact sheet, Version 10.April.2011, Wiener Neustadt, Austria : Diamond Aircraft Industries GmbH, 2011.
- [21] B. Stevens und F. Lewis, Aircraft Control and Simulation, United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [22] O. Föllinger, Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung, Heidelberg: Hüthig, 1994.
- [23] R. Unbehauen, Systemtheorie 1, Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme in Zeit- und Frequenzbereich, München: Oldenburg Wissenschaftsverlag, 2002.
- [24] T. Bienert, Untersuchung zum Gain Scheduling, Implementierung und Test eines aktiven Flugregelungssystems für Kleinflugzeuge, Masterarbeit, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2013.
- [25] U.S. Department of Defence, Military Specification, Flying Qualities of Piloted Airplanes, MIL-F-8785C, United States of America: U.S. Department of Defence, 1991.
- [26] U.S. Department of Defence, Department of Defence Handbook, Flying Qualities of Piloted Aircrafts, MIL-HDBK-1797, United States of America: U.S. Department of Defence, 1997.

- [27] E. Boothe und M. Parrag, Evaluation of Lateral-Directional Handling Qualities and Roll-Sideslip Coupling of Fighter Class Airplanes, Approved for Public Release, Section V, Summary of Results, United States of America, Buffalo: Air Force Flight Dynamics Laboratory, 1972.
- [28] U. Butter, Flugregelung, Skript zur Vorlesung "Flugregelung", Stuttgart: Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, 2008.
- [29] M. Heller, T. Baier und F. Schuck, „Lateral Fly by Wire Control System Dedicated to Future Small Aircraft,“ in *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*, Berlin Heidelberg, Springer, 2013, pp. 353-372.
- [30] M. Heller, S. Myschik, F. Holzapfel und G. Sachs, „Low-cost Approach based on Navigation Data for determining Angles of Attack and Sideslip for Small Aircraft,“ AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, AIAA 2003-5777, Austin, Texas, August 2003.
- [31] R. Brockhaus, Flugregelung, 3., neu bearbeitete Auflage, Berlin: Springer, 2011.
- [32] G. Sachs, M. Heller und L. Wahlberg, Robust Control of a Hypersonic Experimental Vehicle with Ramjet Engines, AIAA96-3728, San Diego, California: AIAA Guidance Navigation and Control Conference, Juli 1996.
- [33] A. Andry, E. Shapiro und J. Chung, Eigenstructure Assignment for Linear Systems, New York, NY, USA: IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, VOL. AES-19, NO. 5 (pp. 711 - 729), 1993.
- [34] C. Nieto-Wire und K. Sobel, Flight Control Design for a Tailless Aircraft Using Eigenstructure Assignment, New York: International Journal of Aerospace Engineering, Volume 2011 (2011), Article ID 549131, 13 pages, 2011.
- [35] S. Mudge und R. Patton, Analysis of the technique of robust eigenstructure assignment with application to aircraft control, New York, NY, USA: IEEE, Control Theory and Applications, IEE Proceedings D, Volume:135, Issue: 4 , pp. 275 - 281, 1988.
- [36] Y. L. Gorrec, J.-F. Magni, C. Döll und C. Chiappa, Modal Multimodel Control Design Approach Applied to Aircraft Autopilot Design, Reston (Virginia): Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 1 (1998), pp. 77-83., 1998.
- [37] L. F. Faleiro und R. W. Pratt, Multi-objective eigenstructure assignment with dynamic flight control augmentation systems, San Diego, CA: AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference, San Diego, CA, July 29-31, 1996.
- [38] F. Holzapfel, M. Heller, M. Weingartner, G. Sachs und O. da Costa, Development of

- Control Laws for the Simulation of a New Transport Aircraft, *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 309, Proc. IMechE vol. 223 Part G, 10.1243/09544100JAERO309, 2009.
- [39] L. F. Faleiro, *The Application of Eigenstructure Assignment to the Design of Flight Control Systems*, Doctoral Thesis, Loughborough University, Loughborough: Faleiro, L. F., 1998.
- [40] G. Schmidt, *Grundlagen der Regelungstechnik. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage*, Berlin: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [41] J. B. Davidson und D. Andrisani, *Lateral-Directional Eigenvektor Flying Qualities Guidelines for High Performance Aircraft*, Hampton, Virginia: National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1996.
- [42] W. L. Garrard, „Lateral Directional Aircraft Control Using Eigenstructure Assignment,“ *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 3, pp. 523-525, 1998.
- [43] B. Moore, *On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment*, New York, USA: IEEE, 1975.
- [44] S. Srinathkumar, *Eigenvalue / Eigenvector Assignment Using Output Feedback*, Hampton, Virginia: NASA, 1978.
- [45] J. Ackermann, *Robuste Regelung: Analyse und Entwurf von linearen Regelungssystemen mit unsicheren physikalischen Parametern*, Berlin: Springer, 1993.
- [46] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2005.
- [47] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1; Differential- und Integralrechnung Vektor- und Matrizenrechnung; 6. Auflage*, Berlin: Springer, 2001.
- [48] J. D. Anderson, *Introduction to Flight, Third Edition*, United States of America: McGraw-Hill, 1989.
- [49] S. Skogestad und I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design, Second Edition*, West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley & Sons Ltd., 2007.
- [50] M. Heller, *Flugdynamische Herausforderungen hochgradig-reglergestützter Konfigurationen, Kapitel 1 & 2, Vorlesungsunterlagen*, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2013.
- [51] M. Heller, *Grundlagen der Flugmechanik und Flugregelung II, Kapitel 8: Das "Nyquist-Kriterium"*, 4.Ed., Vorlesungsunterlagen, München / Graz: Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 2007.
- [52] P. Mangold, *Flugmechanische Basisauslegung moderner Kampfflugzeuge*, Manuskript-Nr.

- 3, Oberpfaffenhofen: Carl Cranz Gesellschaft e.V., Juli 1992.
- [53] P. Mangold, „Integration of Handling Quality Aspects into the Aerodynamik Design of Modern Unstable Fighters,“ in *AGARD-CP-508*, Quebec City, Canada, AGARD Flight Mechanics Panel Symposium on Flying Qualities, Oktober 1990, pp. 22-1 - 22-30.
- [54] M. Wölfel, Robustheitsuntersuchung eines geregelten Flugzeugs mit nichtlinearer Perturbation am Beispiel der DA42-Seitenbewegung, Semesterarbeit, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Januar 2014.
- [55] K. Ståhl-Gunnarsson, „Hytex stabilization study, Requirements on the stabilization function, TURCM-95.62,“ Saab Military Aircraft, Linköping, Schweden, 1995.
- [56] R. Smith und A. Packard, Notes on Robust Control, 1997.
- [57] A. Packard, J. Doyle und G. Balas, „Linear, Multivariable Robust Control with a μ Perspective,“ *Journal of Dynamics Systems Measurement and Control; Volume 115; Issue 2B*, pp. 426-438, January 1993.
- [58] K. Zhou und J. C. Doyle, Essentials of Robust Control, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [59] K. Zhou und J. C. Doyle, Robust and optimal control, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [60] L. R. Dailey, Lecture Notes for the Workshop on H^∞ and μ Methods for Robust Control, San Diego, California: 1990 American Control Conference, May, 1990.
- [61] C. Scherer, Theory of Robust Control, Delft; Netherland: Mechanical Engineering Systems and Control Group; Delft University of Technology, 2001.
- [62] S. Hecker, Generation of low order LFT Representations for Robust Control Applications, Düsseldorf: VDI Verlag, 2007.
- [63] J. Doyle, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, IEE Proc., Vol.129, Pt. D, No.6, November 1992, pp. 242-250.
- [64] G. Ferreres, A Practical Approach to Robustness Analysis with Aeronautical Applications, New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 1999.
- [65] F. Jabbari, Robustness Bounds for Linear Systems with Uncertainty: Keeping Eigenvalues in Specified Regions, Hawaii: Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control; CH2917-3/90/0000-0430\$1.00; IEEE, 1990.
- [66] T. R. Alt und F. Jabbari, Robustness Bounds for Linear Systems Under Uncertainty: Eigenvalues Inside a Wedge, Journal of Guidance, Control and Dynamics; Vol. 16, No. 4,

- July-August 1993; American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.
- [67] Y.-H. Chang und G. L. Wise, Robust gamma stability of highly perturbed systems, IEE Proc. - Control Theory Appl., Vol. 145, No. 2, 1998.
- [68] J. Löfberg, μ -Synthesis Control of Lateral Dynamics on a Hypersonic Test Vehicle, Examensarbeit, Linköping: Linköping Universtiy, 1998.
- [69] M. Herrenberger, M. Heller, R. Leitner und G. Sachs, „Fortschrittliche Unsicherheitsmodellierung und Robustheitsanalyse für den Basisregler eines modernen Trainers,“ DGLR Jahrestagung, Braunschweig, 2006.
- [70] G. Balas, R. Chiang, A. Packard und M. Safonov, Robust Control Toolbox, For Use with MATLAB, User's Guide, Version 3, Natick, Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2006.
- [71] G. Ferreres und J.-M. Biannic, Skew Mu Toolbox (SMT): a presentation, Toulouse: ONERA-CERT / DCSD, August 2003.
- [72] D. Seiferth, Evaluierung, Verifizierung und Validierung eines modernen nichtlinearen Fly-by-Wire Reglers für zukünftige Kleinflugzeuge, Semesterarbeit, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2014.
- [73] S. Armanini, Parameter Estimation of the DA-42 Aircraft from Flight Test Manoeuvres, Diplom Thesis, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2013.
- [74] The MathWorks, Aerospace Blockset, For Use with Simulink, User's Gide, Version 1, Natick, Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2004.
- [75] G. Cooper und R. Harper, The use of Pilot Rating in the Evaluation of Aircraft Handling Qualities, NASA TN D-5153, Washington, D. C.: National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [76] W. F. Phillips, Mechanics of Flight, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [77] D. T. Mc Ruer, Pilot-Induced Oscillations and Human Dynamic Behavior, NASA Contractor Report 4683, National Aeronautics and Space Administration, 1995.
- [78] D. Mc Ruer, I. Ashkenas und D. Graham, Aircraft Dynamics and Automatic Control, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973.
- [79] M. Heller, Flugdynamische Herausforderungen hochgradig-reglergestützter Konfigurationen, Kapitel 5, Vorlesungsunterlagen, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2013.
- [80] M. Wölfel, Entwurf und Evaluierung eines Fly-by-Wire Längsbewegungs-Reglers

hinsichtlich exzellenter Flugeigenschaften für zukünftige Kleinflugzeuge, Masterarbeit, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2014.

- [81] F. Biertümpfel, Implementierung und Validierung eines FbW Flugreglerkonzepts für zukünftige Kleinflugzeuge, Semesterarbeit, München: Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, 2015.

A.1 Ersatzderivativa

Die Ersatzderivativa der Zustandsgleichung des linearen Zustandsraummodells der Seitenbewegung nach Gl. (2.8) setzen sich wie folgt zusammen. Die jeweiligen Größen (aerodynamische Derivativa und Trägheitselemente) beziehen sich dabei auf das experimentelle Koordinatensystem.

$$\begin{aligned}
 L_p &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} \frac{s_{ref}}{V_0} [I_{z_e} C_{lp_e} + I_{xz_e} C_{np_e}] & N_p &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} \frac{s_{ref}}{V_0} [I_{x_e} C_{np_e} + I_{xz_e} C_{lp_e}] \\
 L_r &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} \frac{s_{ref}}{V_0} [I_{z_e} C_{lr_e} + I_{xz_e} C_{nr_e}] & N_r &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} \frac{s_{ref}}{V_0} [I_{x_e} C_{nr_e} + I_{xz_e} C_{lr_e}] \\
 L_\beta &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{z_e} C_{l\beta_e} + I_{xz_e} C_{n\beta_e}] & N_\beta &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{x_e} C_{n\beta_e} + I_{xz_e} C_{l\beta_e}] \\
 L_\xi &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{z_e} C_{l\xi_e} + I_{xz_e} C_{n\xi_e}] & N_\xi &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{x_e} C_{n\xi_e} + I_{xz_e} C_{l\xi_e}] \\
 L_\zeta &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{z_e} C_{l\zeta_e} + I_{xz_e} C_{n\zeta_e}] & N_\zeta &= \frac{\bar{q}_0 S s_{ref}}{\Delta_e} [I_{x_e} C_{n\zeta_e} + I_{xz_e} C_{l\zeta_e}]
 \end{aligned}$$

$$Y_p = \frac{\bar{q}_0 S}{mV_0} \frac{s_{ref}}{V_0} C_{yp_e}$$

$$Y_r = \frac{\bar{q}_0 S}{mV_0} \frac{s_{ref}}{V_0} C_{yr_e}$$

$$Y_\beta = \frac{\bar{q}_0 S}{mV_0} C_{y\beta_e}$$

$$Y_\xi = \frac{\bar{q}_0 S}{mV_0} C_{y\xi_e}$$

$$Y_\zeta = \frac{\bar{q}_0 S}{mV_0} C_{y\zeta_e}$$

$$\Delta_e = I_{x_e} I_{z_e} - I_{xz_e}^2$$

A.2 Grundlegende flugmechanische Zusammenhänge

A.2.1 Transformationsmatrix M_{ef}

Transformationsmatrix vom flugzeugfesten ins experimentelle Koordinatensystem

$$\mathbf{M}_{ef} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

A.2.2 $\sin \Phi \cos \Theta \approx \sin \mu \cos \gamma$ (für $\beta \approx 0$)

Die Transformation vom geodätischen ins körperfeste Koordinatensystem lässt sich sowohl in Abhängigkeit der Eulerwinkel (Lagewinkel) Ψ (Azimutwinkel), Θ (Nickwinkel) und Φ (Hängewinkel) beschreiben, als auch unter der Annahme „kein Wind“ (*windfreier Fall*) als Funktion von χ (Kurswinkel), γ (Steigwinkel), μ (Flugwindhängewinkel), β (Schiebewinkel) und α (Anstellwinkel) darstellen, siehe auch [1]. Es ergibt die zugehörige Transformationsmatrix \mathbf{M}_{fg} nach Gl. (0.2).

$$\mathbf{M}_{fg}(\Psi, \Theta, \Phi) = \mathbf{M}_{fa}(-\beta, \alpha) \mathbf{M}_{ag}(\chi, \gamma, \mu) = \mathbf{M}_{fg}(\chi, \gamma, \mu, -\beta, \alpha) \quad (0.2)$$

Dabei ist:

$$\mathbf{M}_{fg} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (0.3)$$

$$\mathbf{M}_{fa} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

$$\mathbf{M}_{ag} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ -\cos \mu \sin \chi + \sin \mu \sin \gamma \cos \chi & \cos \mu \cos \chi + \sin \mu \sin \gamma \sin \chi & \sin \mu \cos \gamma \\ \sin \mu \sin \chi + \cos \mu \sin \gamma \cos \chi & -\sin \mu \cos \chi + \cos \mu \sin \gamma \sin \chi & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

Durch Berechnung der Gl. (0.2) und Vergleich des Matrizenelements in der zweiten Zeile, dritten Spalte erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\sin \Phi \cos \Theta = -\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \mu \cos \gamma \quad (0.6)$$

Unter der Annahme $\beta \approx 0$ ergibt sich Gl. (0.7).

$$\sin \Phi \cos \Theta \approx \sin \mu \cos \gamma \quad (0.7)$$

A.2.3 $\alpha = (\theta - \gamma) / \cos \Phi$

In Analogie zur Herleitung des Zusammenhangs $\sin \Phi \cos \theta \approx \sin \mu \cos \gamma$ erfolgt die Bestimmung von $\alpha = \frac{\theta - \gamma}{\cos \Phi}$ durch Koeffizientenvergleich entsprechender Matrizenelemente der Transformationsmatrix \mathbf{M}_{gk} nach Gl. (0.8).

$$\mathbf{M}_{gk}(\gamma, \chi) = \mathbf{M}_{gf}(\Phi, \theta, \Psi) \mathbf{M}_{fk}(\mu, -\beta, \alpha) = \mathbf{M}_{gk}(\mu, -\beta, \alpha, \Phi, \theta, \Psi) \quad (0.8)$$

Dabei ist:

$$\mathbf{M}_{gk} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & -\sin \chi & \sin \gamma \cos \chi \\ \cos \gamma \sin \chi & \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (0.9)$$

$$\mathbf{M}_{gf} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & \sin \Phi \sin \theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\ \cos \theta \sin \Psi & \sin \Phi \sin \theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \sin \theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\ -\sin \theta & \sin \Phi \cos \theta & \cos \Phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (0.10)$$

$$\mathbf{M}_{fk} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \cos \mu + \sin \alpha \sin \mu & -\cos \alpha \sin \beta \sin \mu - \sin \alpha \cos \mu \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \mu & \cos \beta \sin \mu \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \cos \mu - \cos \alpha \sin \mu & -\sin \alpha \sin \beta \sin \mu + \cos \alpha \cos \mu \end{bmatrix} \quad (0.11)$$

Durch Berechnung der Gl. (0.8) und Vergleich des Matrizenelements in der dritten Zeile, erste Spalte erhält man folgenden Zusammenhang:

$$-\sin \gamma = -\sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \cos \Phi \cos \theta \sin \alpha \cos \beta \quad (0.12)$$

Unter der Annahme $\beta \approx 0$ ergibt sich Gl. (0.13).

$$\sin \theta \cos \alpha \approx \sin \gamma + \cos \Phi \cos \theta \sin \alpha \quad (0.13)$$

Führt man mit Gleichung (0.13) eine Kleinwinkelnäherung bzgl. der Winkel, welche der Längsbewegung zuzuordnen sind durch, so folgt:

$$\theta \approx \gamma + \alpha \cos \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx \frac{\theta - \gamma}{\cos \Phi} \quad (0.14)$$

A.3 Finale Reglerparameter

Finale Parameter des nachgeführten Reglers

In den folgenden Abbildung sind die zu den Matrizen K_f , H_{ER} und H_P zugehörigen idealen Verstärkungsfaktoren in *rot* wiedergegeben, welche mit *MR DEA* berechneten wurden, und die final realisierten linear-nachgeführten Verstärkungsfaktoren in *blau* darstellt. Die zugehörige Verstärkungsfaktoren der K_P -Matrix sind in Abbildung 6-4 dargestellt.

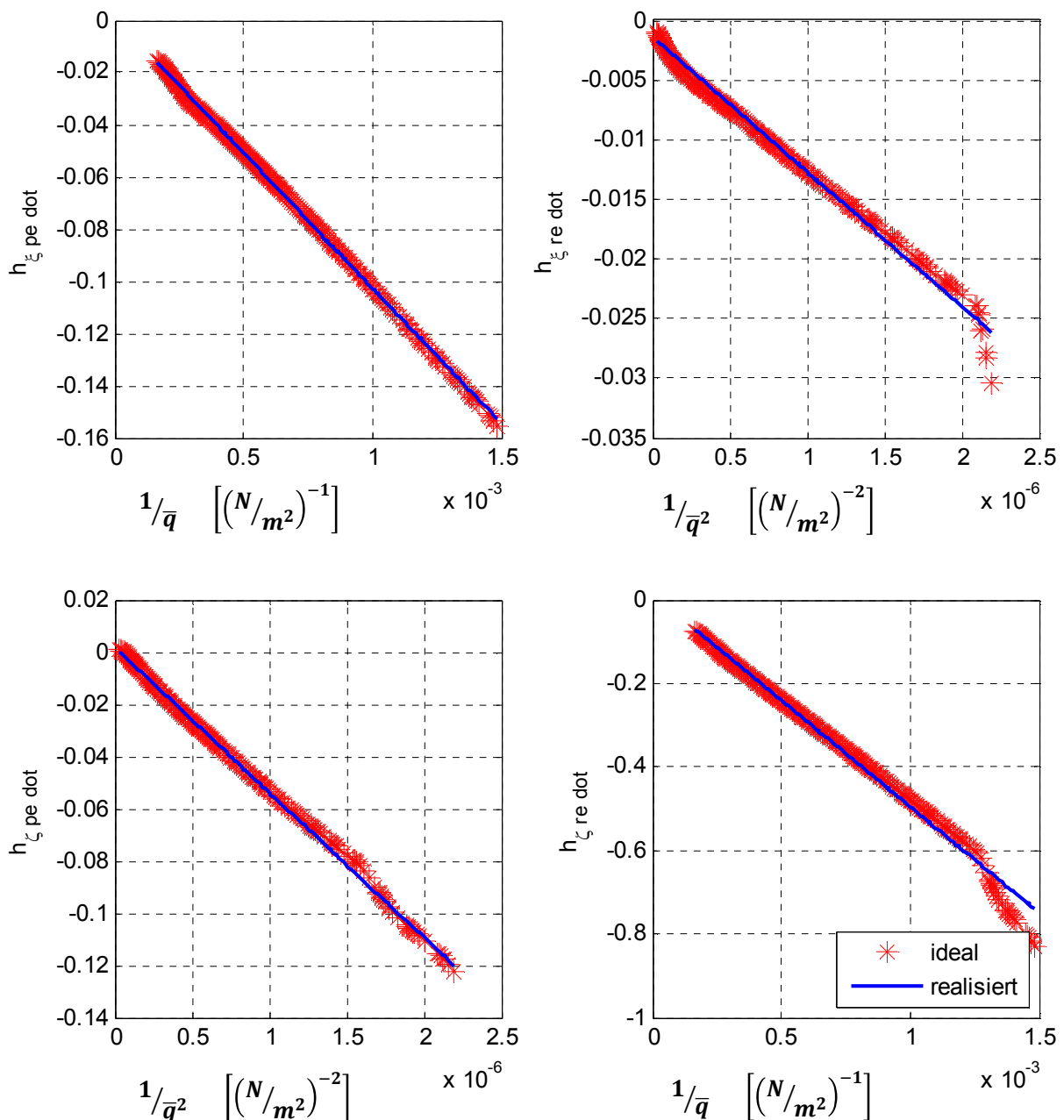


Abbildung A - 1: $h_{\xi \dot{p}_e}$, $h_{\xi \dot{r}_e}$, $h_{\zeta \dot{p}_e}$ und $h_{\zeta \dot{r}_e}$

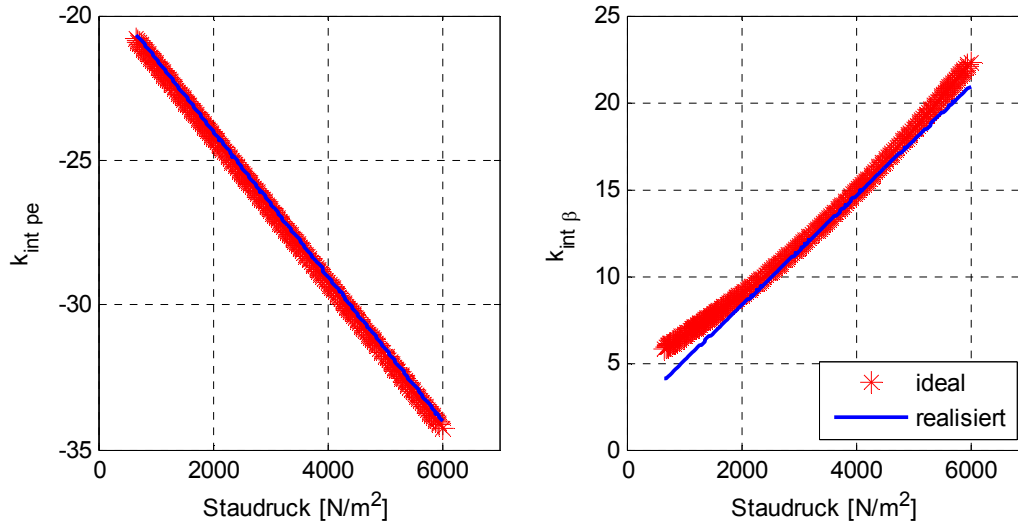


Abbildung A - 2: $k_{f p_e}$ und $k_{f \beta}$

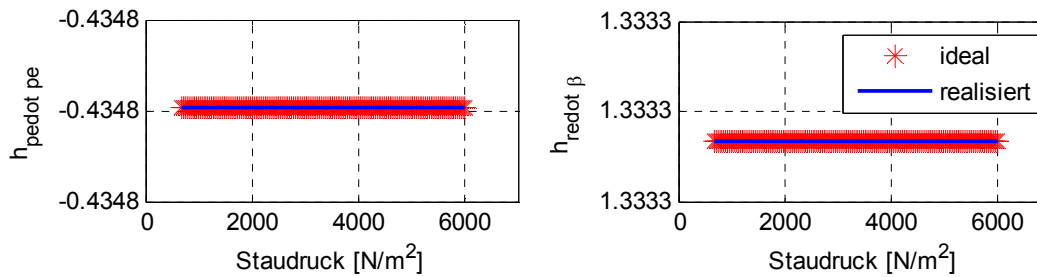


Abbildung A - 3: $h_{\dot{p}_e p_e}$ und $h_{\dot{r}_e \beta}$

Finale Parameter des Ersatzreglers (Regler mit festen Verstärkungsfaktoren)

Finale Parameter des Ersatzreglers	
$h_{\xi \dot{p}_e}$	-0.0585
$h_{\xi \dot{r}_e}$	-0.0051
$h_{z \dot{p}_e}$	-0.0167
$h_{z \dot{r}_e}$	-0.2785
$h_{\dot{p}_e p_e}$	2.1739
$k_{f p_e}$	4.6674
$k_{\dot{p}_e \beta}$	4.3067
$k_{\dot{p}_e p_e}$	0.5938
$k_{\dot{p}_e r_e}$	-0.7113
$h_{\dot{r}_e \beta}$	-6.6667
$k_{f \beta}$	1.4889
$k_{\dot{r}_e \beta}$	1.0184
$k_{\dot{r}_e \beta}$	2.3003
$k_{\dot{r}_e p_e}$	0.0843

Tabelle A-1 Finale Parameter des Ersatzreglers

A.4 Nichtlineare Analyse

Im Folgenden sind die Abbildungen der nichtlinearen Analyse des Steuer- und Störverhaltens (siehe Kapitel 8.2, Tabelle 8-1) für die perturbierte Aerodynamik (Streckendynamik) nach Tabelle 8-2 dargestellt.

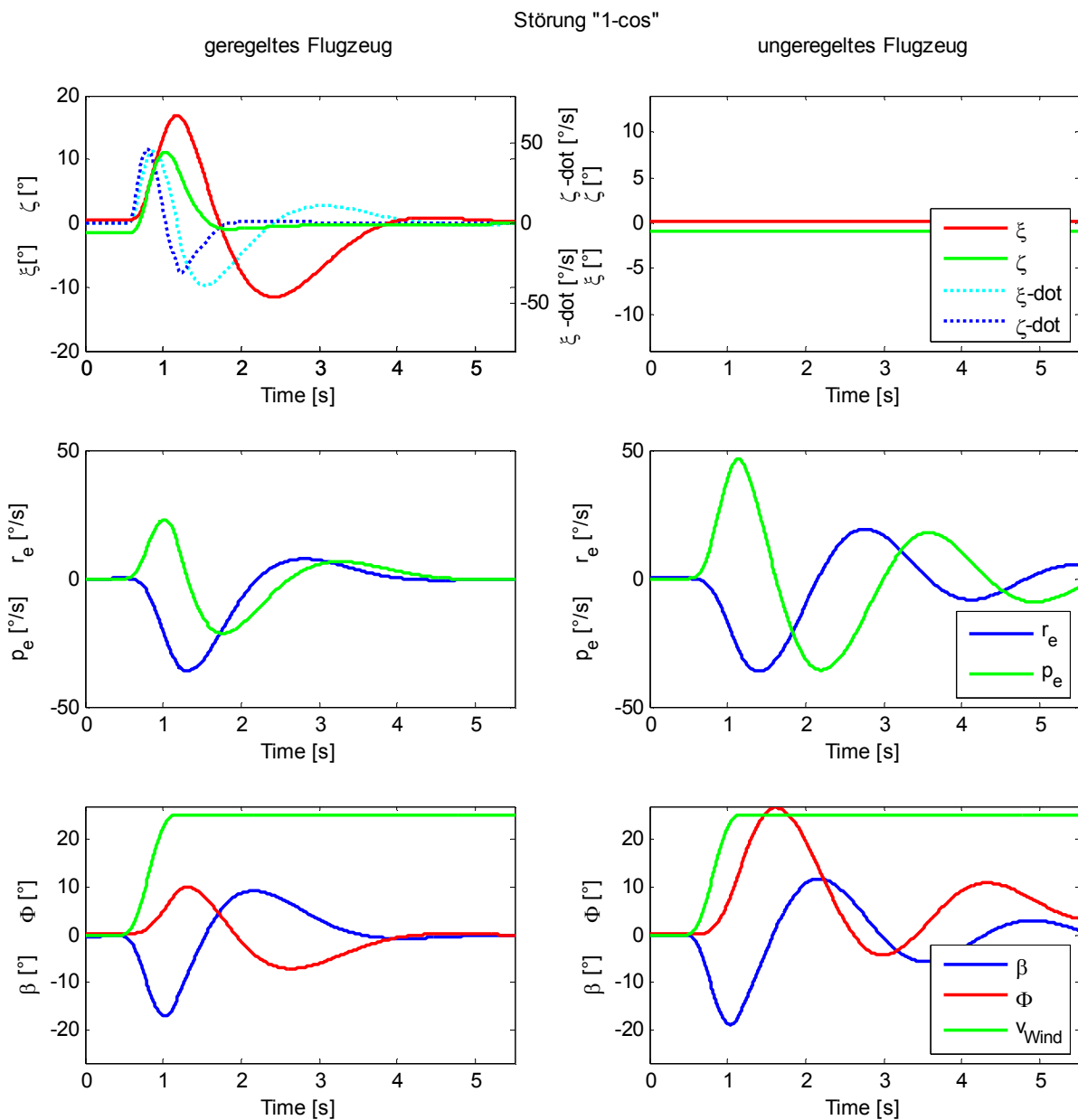


Abbildung A - 4: geregelter und ungeregelter Flugzeug / "1-cos"-Böe / pert. Streckendynamik

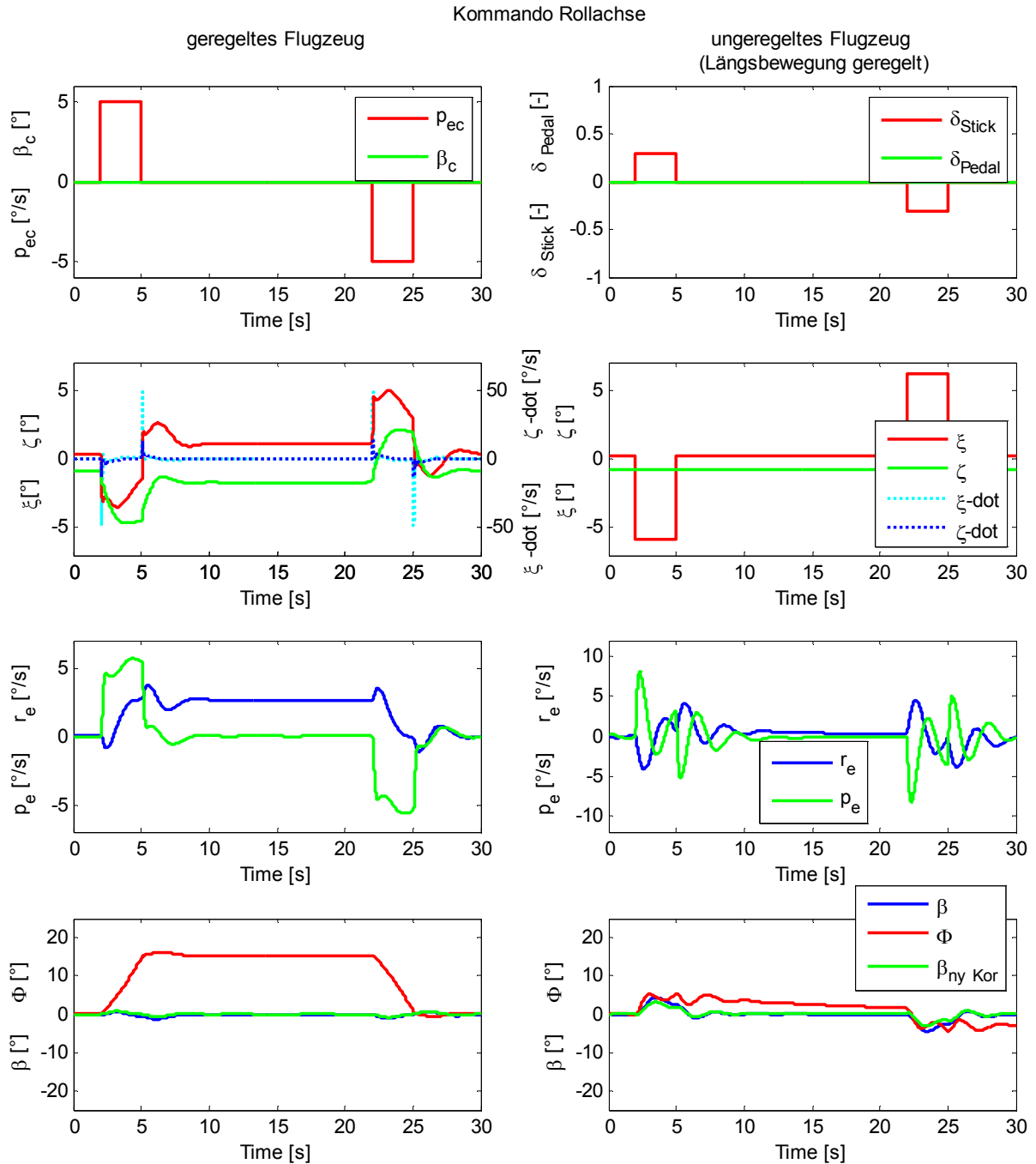


Abbildung A - 5: geregelttes und ungeregelttes Flugzeug / Rollsteuerung / pert. Streckendynamik

Kommando Gierachse

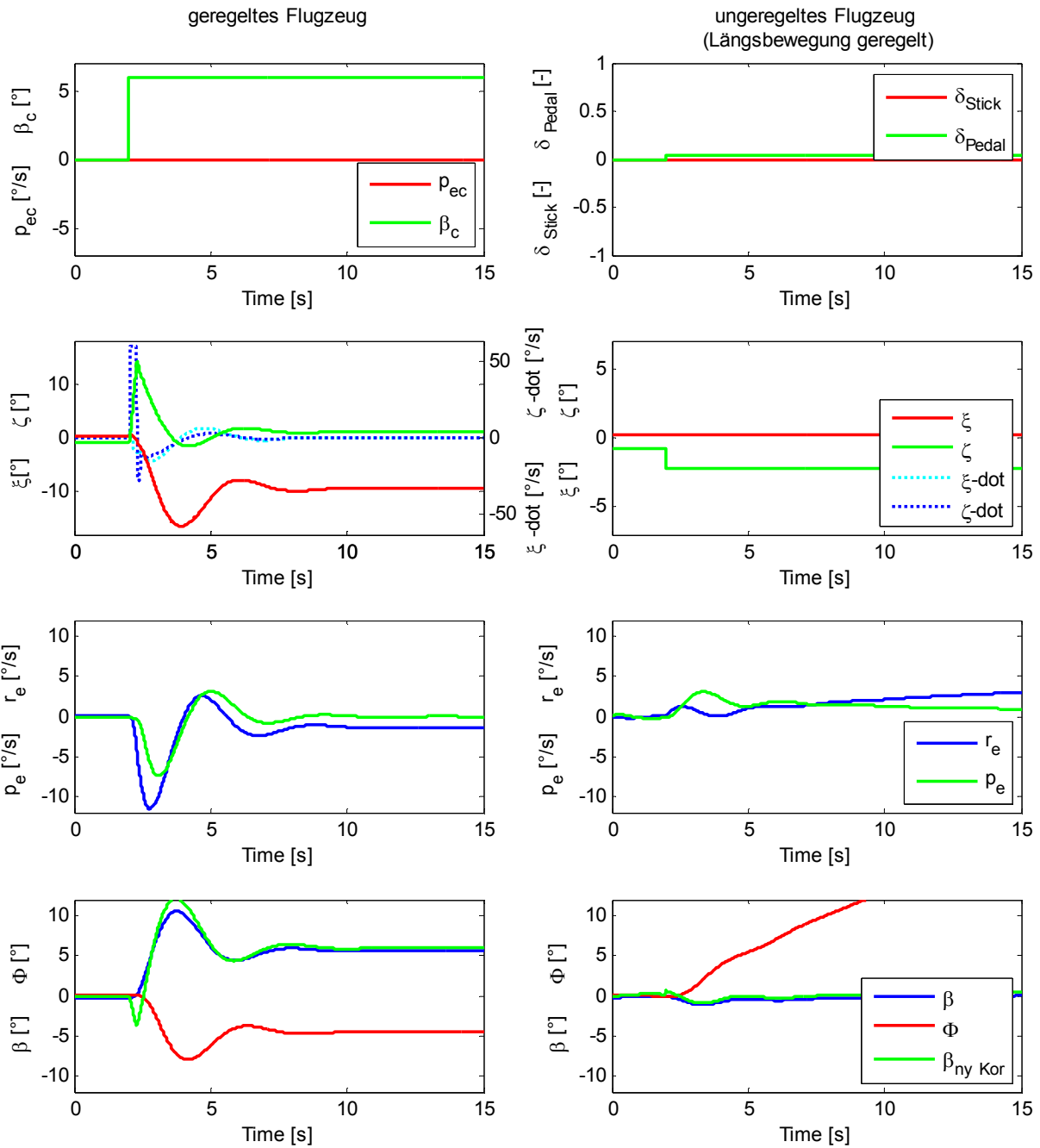


Abbildung A - 6: geregelttes und ungeregelttes Flugzeug / Giersteuerung / pert. Streckendynamik

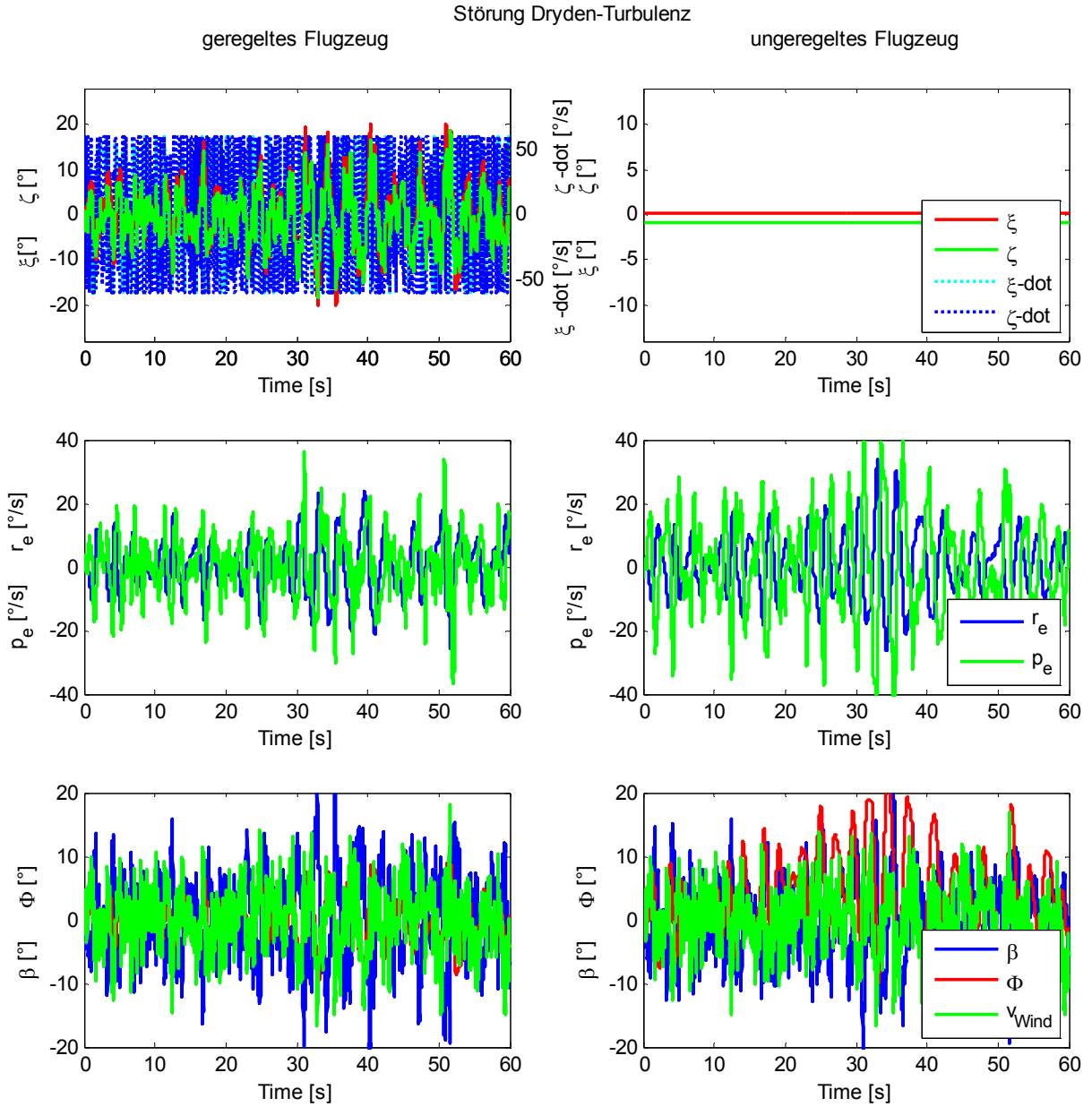


Abbildung A - 7: geregelter und ungeregelter Flugzeug / Dryden-Turbulenz / pert. Streckendynamik

Störung Dryden-Turbulenz (Detailausschnitt)
 geregeltes Flugzeug ungerichtetes Flugzeug

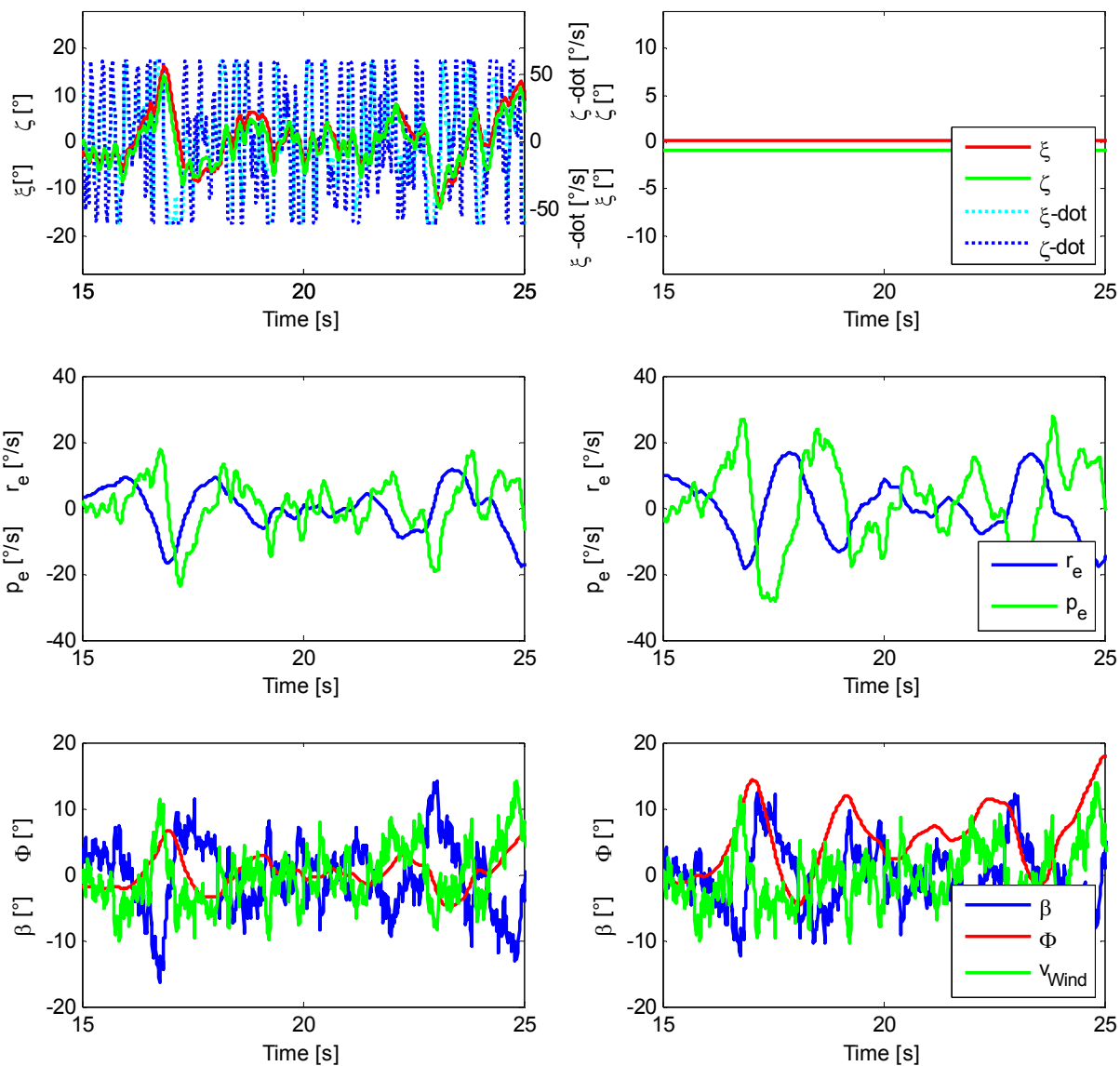


Abbildung A - 8: geregeltes und ungerichtetes Flugzeug / Dryden-Turbulenz / pert. Streckendynamik
 Detailausschnitt

A.5 Eingangsrichtung

Betrachtet wird das Zustandsraummodell eines beliebigen *LZI*-Systems mit $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). Geht man nun davon aus, dass die Eigenwerte λ_i der Systemmatrix \mathbf{A} jeweils paarweise verschieden sind, so existieren n linear unabhängige Eigenvektoren.

Erfolgt die Regelung des Systems durch eine Ausgangsrückführung und der Vorgabe von Führungsgrößen \mathbf{r} , so ergibt sich das Regelgesetz zu:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{r} \quad (0.15)$$

Für den geschlossenen Regelkreis erhält man somit:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{r} \quad (0.16)$$

Für den Fall, dass $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ergibt sich die Lösung der Zustandsgleichung (0.16) des geschlossenen Regelkreises nach Gl. (0.17), vgl. [22]:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i c_i \quad \text{mit } c_i = \text{const} \quad (0.17)$$

D.h. jeder Systemzustand kann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt werden. Daraus folgt, dass der Raum der Zustandsvektoren durch die Eigenvektoren \mathbf{v}_i des Systems $\mathbf{A}_{aug} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})$ aufgespannt wird (Bemerkung: die Eigenvektoren sind im Allgemeinen nicht orthogonal zueinander).

Aufgrund des Zusammenhangs bzgl. des Systemausgangs $\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$ (für $\mathbf{D} = \mathbf{0}$), kann der Ausgangsvektor wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i c_i \quad \text{mit } c_i = \text{const} \quad (0.18)$$

Der Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ des Systems stellt sich somit als Linearkombination der Abbildung der Eigenvektoren dar. Daraus folgt, dass die Vektoren \mathbf{y}_i den Raum aller möglichen Ausgangsvektoren aufspannen (Ausgangsraum):

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (0.19)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich auch für den Eingang des Systems angeben:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{C} \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i c_i \quad \text{mit } c_i = \text{const} \quad (0.20)$$

Der Raum aller Eingangsvektoren wird in Analogie zu Gl. (0.19) durch die Vektoren \mathbf{z}_i nach Gl. (0.21) aufgespannt (Eingangsraum):

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (0.21)$$

In der Abbildung A - 6 werden die neu eingeführten Begriffe (Eingangs- und Ausgangsraum) abschließend anschaulich verdeutlicht: Alle möglichen Zustände eines Systems liegen im Zustandsraum, dieser wird von den Eigenvektoren aufgespannt. Aufgrund der Zusammenhänge aus Gl. (0.19) und (0.21) können die Vektoren, welche den Aus- und Eingangsraum aufspannen entsprechend berechnet werden.

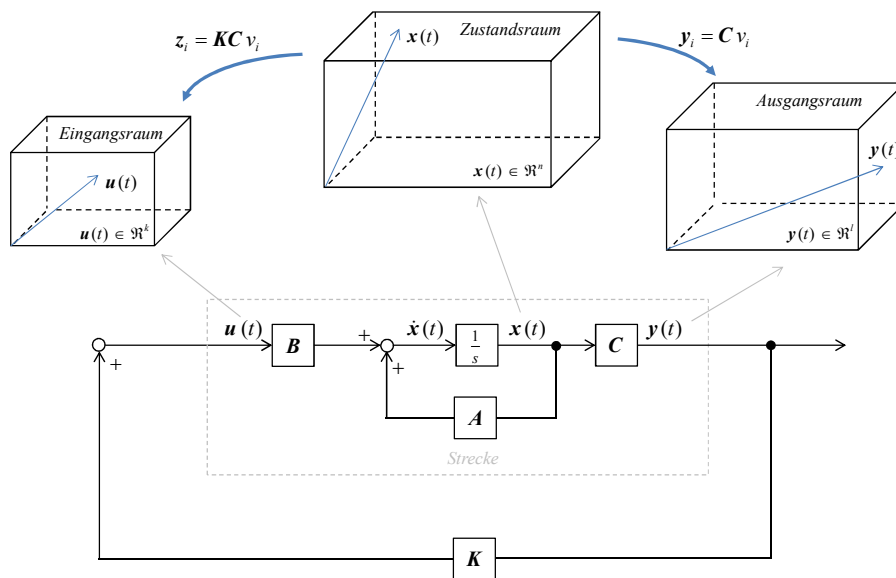


Abbildung A - 6: Eingangs-, Zustands- und Ausgangsraum