

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Leichtbau

**Ordnungsreduzierte Simulationsmodelle und  
Berücksichtigung der additiven Fertigung in der  
mathematischen Optimierung mechanischer Strukturen**

Dipl.-Ing. Univ. Bernhard Maximilian Sauerer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Prof. Dr.-Ing. Veit Senner

Prüfer der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Horst Baier

2. Prof. Dr.-Ing. Oskar J. Haidn

Die Dissertation wurde am 27.04.2017 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 21.10.2017 angenommen.



---

# Danksagung

Diese Arbeit ist das Ergebnis meiner gut vierjährigen Forschungstätigkeit am Lehrstuhl für Leichtbau der Technischen Universität München. Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Horst Baier bedanken, der mir die Gelegenheit gegeben hat im Bereich der Strukturoptimierung zu forschen und für die Unterstützung, die er mir hierbei zukommen ließ. Mein Dank gilt im speziellen meinen Eltern, die mir meine Ausbildung ermöglicht und mich immer unterstützt haben. Ferner möchte ich mich bei den Kollegen bedanken, die mit ihren Hinweisen und Ratschlägen zum Gelingen beigetragen haben. Danken möchte ich allen Studenten, die durch ihre Studienarbeiten das Entstehen dieser Arbeit unterstützt haben. Im Besonderen sind dies bei der parametrisierten Modellordnungsreduktion Christoph Wölfle, bei der angewandten Topologieoptimierung Katharina Gerstberger und Christoph Zellner und für die Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen in der Topologieoptimierung Thomas Lumpe und Andreas Uhl.



---

# Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Methoden für die Optimierung mechanischer Strukturen entwickelt und untersucht, die auf die Verbesserung der Recheneffizienz und die Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen abzielen.

Anhand generischer mechanischer Systeme werden projektive Modellordnungsreduktionsverfahren betrachtet und deren Zusammenwirken mit gradientenbasierter Optimierung bewertet. Ausgehend von den Erkenntnissen aus diesen Voruntersuchungen wird ein Optimierungsvorgehen entwickelt, welches eine hohe Rechenzeiterparnis im Kontext evolutionärer Algorithmen ermöglicht. Dies wird durch die Identifikation und Ausnutzung von Synergien des Optimierungsverfahrens und der Reduktionsmethodik erreicht.

Eine weitere Herausforderung bei Strukturoptimierungen ist die Überführung von Topologieoptimierungsergebnissen zu herstellbaren Konstruktionen. Oft erfolgen die dazu notwendigen Anpassungen manuell und sind damit einerseits zeitaufwändig und machen andererseits erneute Analysen zur Absicherung der Festigkeit notwendig. Um diesen Problemen zu begegnen, wird die direkte Einbettung von Fertigungsrestriktionen in das Optimierungsproblem am Beispiel der additiven Fertigung näher untersucht. Dieser Fertigungsprozess ermöglicht die Herstellung komplexer Geometrien, wie es Topologieoptimierungsergebnisse im Allgemeinen sind. Damit ergeben sich für die Kombination von Optimierungs- und Herstellungsverfahren vielversprechende Potentiale. Einschränkungen liegen allerdings für geometrisch überhängende Bereiche vor, die die Verwendung von Stützstrukturen notwendig machen können. Auf Grundlage der Materialverteilung im Bauraum werden drei Penalisiertungsverfahren zur Steuerung der Hilfsstrukturen entwickelt. In Folge kann die Ergebnistopologie in die gewünschte Richtung im Entwurfsraum gelenkt und die Vor- und Nachteile des jeweiligen Ansatzes können aufgezeigt werden.

Anhand der Optimierung der Tragstruktur des Elektrofahrzeugs *VisioM*, das in Zusammenarbeit mit der *BMW GROUP* entwickelt wurde, werden Aspekte der Konzeptoptimierung bei sehr vielen Optimierungsvariablen und Restriktionen aufgezeigt. Zur Lösungsfindung wurde eine sukzessive Optimierungsstrategie entwickelt und angewendet, die Topologieoptimierungen und Dimensionierungen beinhaltet und so dem Konkretisierungsgrad in den Projektphasen folgt. Durch die feine Diskretisierung des Bauraumes und die vielen Lastfälle ergeben sich grundlegende anwendungsspezifische Herausforderungen wie beispielsweise die schlechte numerische Konvergenz hin zu einer Lösung und Ergebnistopologien, für deren Interpretation aufwändige Vergleiche von Einzellastfallergebnissen erforderlich sind. Für die genannten Aspekte werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Optimierungsergebnisse für die praktische Strukturkonzeptermittlung nutzbar gemacht werden können. Abschließend werden die Möglichkeiten der Anwendung von Resultaten der vorangegangenen Untersuchungen der Modellordnungsreduktion und der additiven Fertigung für den praktischen Anwendungsfall diskutiert.



---

# Abstract

In this work, methods in the context of optimization of mechanical structures are developed and investigated, which aim at improving the efficiency of the numerical calculation and taking manufacturing constraints into account.

With regard to improving the efficiency of numerical calculations, generic models were used in combination with chosen projective model order reduction methods to investigate their interaction with optimization. Starting from this initial experiments, an optimization procedure was developed, which led to a substantial decrease of computational time in the context of evolutionary algorithms. This was achieved by identification and exploitation of synergies between both the optimization method and the model order reduction procedure.

Another challenge of structural optimization is the transfer of topology optimization results into producible structures. Typically, the necessary adaptations are performed manually and thus are time consuming and lead to new simulations for verifying the stability of the construction. To cope with this problem, the attempt was made to include manufacturing constraints from the additive manufacturing process directly into the optimization. The production process enables the creation of complex geometries as they occur with topology optimization. In this way, promising potentials arise from the combination of topology optimization and additive manufacturing. However, due to accuracy reasons, there are also restrictions for geometrical overhangs, which require support structures. Based on the material distribution within the design space, three penalization methods to control these support structures were implemented and investigated. In this way, the resulting topologies could be forced towards the preferred geometrical features. In accordance with the results, the advantages and disadvantages of this approach are demonstrated.

Within the project *VisioM* an electrical vehicle's spaceframe was developed. This development was supported by optimizations, in which specific practical challenges were identified and addressed accordingly. The used model is characterized by a fine finite element mesh and numerous technical requirements. For the solution process a successive strategy was applied, which contained topology and sizing optimizations, following the developments during the project phases. Because of the high number of optimization variables and load cases, fundamental application-specific challenges such as bad numerical convergence and difficult-to-interpret solutions occurred. For the identified challenges methods were developed to successfully apply the optimization's results to the mechanical construction. In the end, based on the above-mentioned application scenario, the investigated model order reduction procedures and the integration of manufacturing constraints into the optimization are discussed.





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Kontext der Forschungsarbeit</b>	<b>1</b>
1.1. Kontext und Motivation der Forschung . . . . .	1
1.2. Stand der Technik . . . . .	3
1.3. Vorgehensweise und Arbeitsschritte . . . . .	5
<b>2. Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1. Optimierung . . . . .	7
2.1.1. Die Optimierungsaufgabe - Mathematische Formulierung . . . . .	7
2.1.2. Das duale Problem - Die <i>Lagrange</i> -Funktion . . . . .	10
2.1.3. Eigenschaften von Optimierungsproblemen . . . . .	12
2.1.4. Arten von Strukturoptimierungsaufgaben . . . . .	13
2.1.5. Einordnung und Unterteilung von Optimierungsalgorithmen . . . . .	15
2.1.6. Konvergenz . . . . .	17
2.1.7. Sensitivitätsanalyse . . . . .	18
2.1.8. Mehrzieloptimierung . . . . .	20
2.1.9. Grundlagen der Topologieoptimierung . . . . .	21
2.2. Finite Elemente Methode . . . . .	24
2.2.1. Diskretisierte Feldgleichungen und Gleichungssysteme . . . . .	25
2.2.2. Lösung linearer Gleichungssysteme - Inverse Matrizen . . . . .	26
2.3. Systemtheoretische Grundlagen . . . . .	27
2.3.1. Lineare Bewegungsdifferentialgleichung - Zustandsraummodell . . . . .	28
2.3.2. Systemeigenschaften . . . . .	28
2.3.3. Übertragungsverhalten . . . . .	29
2.4. Vektorräume und Grundlagen der linearen Algebra . . . . .	30
2.4.1. Matrizeneigenschaften . . . . .	30
2.4.2. Basisdarstellungen und Vektorräume . . . . .	31
2.4.3. Projektionsabbildungen . . . . .	32
2.4.4. Wahl des Orthonormierungsverfahrens . . . . .	33
2.4.5. Modaler Raum - Modale Reduktion . . . . .	35
2.4.6. Singulärwertzerlegung . . . . .	38
2.4.7. Definition des <i>Krylov</i> -Raumes . . . . .	39
2.4.8. <i>Taylor</i> -Reihenentwicklung . . . . .	40
2.5. Verfahren zur Modellordnungsreduktion . . . . .	41
2.5.1. Überblick und Einteilung der Modellordnungsreduktionsverfahren . . . . .	41
2.5.2. <i>Proper Orthogonal Decomposition</i> - Haupttraumanalyse . . . . .	45
2.5.3. Momentenabgleich . . . . .	46
2.6. Eigenschaften von <i>Krylov</i> -Unterräumen . . . . .	48
2.6.1. <i>Krylov</i> -Raumreduktion bei mechanischen dynamischen Systemen . . . . .	48

2.6.2.	<i>Krylov</i> -Raummatrizen bei statischen parametrisierten Systemen . . . . .	52
2.6.3.	Berechnung der Basisvektoren - <i>Arnoldi</i> -Algorithmus . . . . .	55
<b>3.</b>	<b>Modellordnungsreduktionsverfahren für die Optimierung</b>	<b>59</b>
3.1.	Interaktion von Modellordnungsreduktion und Optimierung . . . . .	59
3.2.	Optimierung eines Balkenfachwerks mit reduziertem Ersatzmodell . . . . .	59
3.2.1.	Modell und Optimierungsaufgabe . . . . .	59
3.2.2.	Optimierungsergebnisse bei reduziertem Modell . . . . .	60
3.2.3.	Einfluss der Anzahl der Optimierungsvariablen . . . . .	63
3.3.	Optimierungsvorgehen mittels reduktionsbasierter evolutionärer Strategie . .	64
3.3.1.	Modell und Optimierungsaufgabe . . . . .	65
3.3.2.	<i>Design of Experiments</i> und Projektionsbasis für die Reduktion . . . . .	68
3.3.3.	Genauigkeitsuntersuchungen . . . . .	69
3.3.4.	Effizienzbewertung . . . . .	73
3.3.5.	Vorgehen bei der evolutionären Strategie . . . . .	75
3.3.6.	Optimierungsverläufe und Diskussion . . . . .	77
3.3.7.	Diskussion der haupttraumbasierten Reduktion und Ausblicke . . . . .	80
3.4.	Vergleich der eingesetzten Reduktionsverfahren und Ausblick . . . . .	81
<b>4.</b>	<b>Restriktionen der additiven Fertigung in der Topologieoptimierung</b>	<b>83</b>
4.1.	Einordnung des Fertigungsverfahrens . . . . .	84
4.1.1.	Unterschiedliche Materialapplikation bei generativen Verfahren . . . . .	84
4.1.2.	Leistungsfähigkeit und Grenzen der generativen Verfahren . . . . .	85
4.2.	Wechselwirkung von Topologieoptimierung und additiver Fertigung . . . . .	85
4.3.	Virtuelles Testmodell und Berechnungsimplementierung . . . . .	86
4.3.1.	Implementierungsaspekte . . . . .	86
4.3.2.	Modellgeometrie . . . . .	87
4.3.3.	Systemantworten und Sensitivitätsanalyse . . . . .	88
4.4.	Lösung von Topologieoptimierungsaufgaben . . . . .	89
4.4.1.	Optimalitätskriterienverfahren . . . . .	89
4.4.2.	<i>Method of Moving Asymptotes</i> . . . . .	90
4.4.3.	Vergleich der Lösungsverfahren . . . . .	91
4.4.4.	Konvergenzverhalten und Einfluss von Parametern . . . . .	92
4.5.	Mathematische Formulierung von Fertigungsrestriktionen . . . . .	96
4.5.1.	Beschränkung der minimalen Dicke von Strukturbereichen . . . . .	96
4.5.2.	Beschränkung der maximalen Dicke von Strukturbereichen . . . . .	97
4.6.	Vermeidung von Bauteilüberhängen in der Topologieoptimierung . . . . .	99
4.6.1.	Charakterisierung von Überhängen . . . . .	99
4.6.2.	Elementbasierter Ansatz . . . . .	102
4.6.3.	Kegelförmiges Prüfgebiet . . . . .	104
4.6.4.	Dichtegradientenbasiertes Penalisiertungsverfahren . . . . .	109
4.7.	Vergleich der untersuchten Lösungsansätze und Ausblick . . . . .	114
<b>5.</b>	<b>Optimierungsmethodik für die Fahrzeugstruktur des Elektrofahrzeugs <i>VisioM</i></b>	<b>115</b>
5.1.	Topologieoptimierung der Gesamtstruktur . . . . .	115
5.1.1.	Modell und Lastfälle . . . . .	116
5.1.2.	Topologieoptimierung in <i>OptiStruct</i> . . . . .	119
5.1.3.	Untersuchung der Einflüsse einzelner Lastfälle . . . . .	122

5.1.4. Ergebnistopologie unter Berücksichtigung aller Lastfälle . . . . .	125
5.2. Optimierung der Wannenstruktur des Fahrgastraumes . . . . .	127
5.2.1. Modell und Optimierungsvorgehen . . . . .	127
5.2.2. Lastabtragung in der Schalenstruktur . . . . .	128
5.2.3. Lastabtragung im Wannenvolumen . . . . .	129
5.3. Diskussion der Ergebnisse und Ausblicke . . . . .	132
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>135</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>139</b>
A.1. Generisches Testmodell: Schwingerkette . . . . .	139
A.2. Vergleichsläufe der evolutionären Strategie . . . . .	140
A.3. Vergleichsläufe mit modifizierter Projektionsbasis . . . . .	141
A.4. Werte des Modellproblems in Abschnitt 3.3.1 . . . . .	142
A.5. Algorithmusparameter für Abschnitt 3.3.5 . . . . .	142
A.6. Gradient aus Gleichung (4.18) für maximale Strukturdurchmesser . . . . .	143
A.7. Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.24) . . . . .	144
A.8. Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.26) . . . . .	144
A.9. Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.32) . . . . .	145
A.10. Hardwarekonfiguration 1 und Programmversionen . . . . .	147
A.11. Hardwarekonfiguration 2 . . . . .	147
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>149</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>153</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>155</b>



---

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Abkürzungen

Abb.	Abbildung
Abs.	Abschnitt
Alg.	Algorithmus
bzw.	beziehungsweise
CAD	Computer Aided Design
CCD	Central Composite Design
CFK	Carbonfaser verstärkter Kunststoff
DGL	Differentialgleichung
DOE	Design of Experiments
DSS	Deskriptorsystem
eng.	Englisch
FEM	Finite Elemente Methode
FHG	Freiheitsgrad
EP	Entwicklungspunkt
ES	Evolutionäre Strategie
ESO	Evolutionary Structural Optimization
EV	Eigenvektor
EW	Eigenwert
FD	Finite Differenzen
KR	<i>Krylov</i> -Raum
KRV	<i>Krylov</i> -Raumvektor
LHS	Latin Hypercube Sampling
LGS	Lineares Gleichungssystem
Lin. ,lin.	Linear
MBB	<i>Messerschmitt-Bölkow-Blohm</i>
MGS	Modifiziertes <i>Gram-Schmidt</i> -Verfahren
MMA	Method of Moving Asymptotes
MOR	Modellordnungsreduktion
OC	Optimality Criterion
ORI., ori.	Original (Bezeichnet nicht reduziertes Ausgangssystem)
PDGL	Partielle Differentialgleichung
PMOR	Parametrierte Modellordnungsreduktion
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RED., red.	Reduziert
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization

SLS	Selektives Lasersintern
SVD	Singular value decomposition
Tab.	Tabelle
TF	Transferfunktion
VFV	Vollfaktorieller Versuchsplan
vgl.	vergleiche
ZRM	Zustandsraummodell

## Lateinische Symbole

$A, \hat{A}$	Systemmatrix des Zustandsraummodells
$D$	Dämpfungsmatrix
$d$	Verschiebungsvektor
$E$	E-Modul
$f$	Kraftvektor
$g_i, \mathbf{g}$	Ungleichheitsrestriktionen
$h_i, \mathbf{h}$	Gleichheitsrestriktionen
$I$	Einheitsmatrix
$K$	Steifigkeitsmatrix
$K^e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$L$	<i>Lagrange</i> -Funktion
$L, U$	Matrizen der <i>Gauß</i> -Faktorisierung
$M$	Massenmatrix
$m$	Masse
$n_{el}$	Anzahl der Elemente
$n_{fhg}$	Anzahl der Freiheitsgrade
$n_{it}$	Anzahl der Iterationen
$n_{kr}$	Anzahl der <i>Krylov</i> -Raumvektoren
$n_{lf}$	Anzahl der Lastfälle
$n_{ov}$	Anzahl der Optimierungsvariablen
$n_{ori}$	Anzahl der originalen Freiheitsgrade
$n_{red}$	Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade
$n_{rs}$	Anzahl der Restriktionen
$n_s$	Anzahl der Samples
$n_t$	Anzahl der Momente der <i>Taylor</i> -Reihe
$P$	<i>Krylov</i> -Matrix
$p$	SIMP-Parameter
$Q, R$	Matrizen der orthogonalen Faktorisierung
$r_i$	Systemantwort
$s$	Suchrichtung
$V, W$	Projektionsmatrizen
$w_i$	Schlupfvariable
$x$	Vektor der Optimierungsvariablen
$x_0$	Startvektor der Optimierungsvariablen
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Räumliche Koordinaten
$y$	Ausgangsvektor
$z$	Zielfunktion

## Griechische Symbole

$\alpha$	Schrittweite
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\epsilon_{\text{act}}$	Toleranz für Aktivität von Restriktionen
$\epsilon_{\text{lin}}$	Deflationstoleranz
$\lambda$	Lagrange-Multiplikator
$\Omega$	Räumliches Gebiet
$\rho$	Dichte
$\sigma_{ij}$	Spannungstensor

## Benennungssystematik und Indizierung

$M$	$M_{jk}, M_{[j,m]}$	Matrizen
$v$	$v_j$	Vektoren
$\bar{\square}$		Obere Grenze
$\underline{\square}$		Untere Grenze
$\tilde{\square}$		Reduzierte Größe
$\square_{\Delta}$		Größen des kegelbasierten Ansatzes
$\square_{\rightarrow}$		Größen des gradientenbasierten Ansatzes
$\square_{\square}$		Größen des elementbasierten Ansatzes
$\square^*$		Konjugiert komplex transponierte Größe
$\square^T$		Transponierte
:	„Slice-Operator“	Alle Elemente entlang einer Dimension
$\square_{\text{ori}}$		Größe des unreduzierten Systems
$\square_{\text{red}}$		Größe des reduzierten Systems

## Operatoren

$\Im()$	Imaginärteil des Arguments
$\Re()$	Realteil des Arguments
$\text{Span}\{\}$	Von Argumentvektoren aufgespannter Raum
$\text{Rang}()$	Rang der Argumentmatrix
$\text{Kern}()$	Raum der auf das neutrale Element abgebildet wird
$\text{Bild}()$	Raum der durch alle möglichen Abbildungen aufgespannt wird





# Kontext der Forschungsarbeit

## 1.1 Kontext und Motivation der Forschung

Zu verbessern oder idealerweise zu optimieren ist ein natürliches Bedürfnis des Menschen, das es ermöglicht, Fortschritt sicherzustellen. Gerade im technischen Bereich unterliegen Neuentwicklungen der Forderung nach Verbesserung gegenüber Vorgänger- und Konkurrenzprodukten. Die Weiterentwicklung kann sich dabei auf unterschiedliche Produktmerkmale, wie Konstruktions-, Fertigungs- und wirtschaftliche Aspekte beziehen. Der Grad der Verbesserung ist dabei noch nicht quantifiziert und sollte so groß wie möglich ausfallen, was zum Begriff der Optimierung führt. Hierbei erfolgt eine Suche nach dem bestmöglichen Entwurf, wobei dieser bestimmte Bedingungen erfüllen muss.

Diese Suche erfolgt durch die Veränderung meist einer Vielzahl von Systemparametern sowie bei nichtlinearem Systemverhalten. Um hierbei zu brauchbaren Ergebnissen zu gelangen ist die Anwendung strukturierter, numerischer Verfahren unabdingbar, die nach dem optimalen Design suchen.

Auch wenn sich dabei teilweise aufgrund mathematischer Eigenschaften der Optimierungsaufgabe oder berechnungstechnischer Schwierigkeiten Hürden ergeben, ist die Anwendung von Optimierungsmethoden fast immer eine vorteilhafte Vorgehensweise. So geht mit der Suche nach dem Optimum in aller Regel eine Verbesserung des Entwurfs einher. Weiter ergibt sich durch die Implementierung der Optimierung ein Lernprozess, der das Verständnis für die untersuchte Struktur erheblich erweitert und somit den Entwicklungsprozess unterstützt. Die Optimierung bietet einen standardisierten Rahmen, durch den die Zusammenhänge und Eigenschaften des Anforderungsprofils verdeutlicht werden und bietet Maße für die Bewertung der Güte von Entwürfen. Deshalb hat sich in den letzten Jahren die Anforderung an den Berechnungsingenieur immer mehr von der reinen Strukturanalyse zur Strukturoptimierung verschoben. Die große Bedeutung der Optimierung ergibt sich auch aus der häufig positiven Wechselwirkung von Entwurfseigenschaften. Die Verbesserung eines Merkmals zieht oft die Verbesserung weiterer Kennwerte des Systems nach sich. Dies lässt sich am Beispiel der Verringerung des Strukturgewichts eines Flugzeugs aufzeigen, aus der sich eine widerstandsärmere Aerodynamik ergibt, da weniger Auftrieb erzeugt werden muss und der Luftwiderstand sinkt. Wegen der akkumulativen Kerosineinsparung, die über die Lebensdauer gesehen einen besonders wichtigen ökonomischen Faktor im Betrieb des Flugzeugs bedeutet, kann der Wert des Entwurfs durch die Optimierung der Masse erheblich gesteigert werden.

Die Potentiale für technische Entwicklungsprozesse, die sich aus der Anwendung der Optimierung ergeben, führen dazu, dass sich ein dynamischer Forschungs- und Anwendungsbereich auf diesem Gebiet entwickelt hat. Die große Zahl verschiedener Einsatzszenarios führt zu einer Vielzahl von Forschungsaufgaben, die beispielsweise in den Bereichen der Optimierungsalgorithmen oder Berechnungsvorgehen für Systemantworten liegen. Die vorliegende Arbeit bewegt sich dabei stets im Bereich der Optimierung mechanischer Strukturen, die im Weiteren als Strukturoptimierung bezeichnet wird.

In der Strukturoptimierung führt die Berechnung der Systemantworten fast immer zum Einsatz der Finite Elemente Methode (FEM), die die näherungsweise Berechnung von Feldgleichungen ermöglicht. Damit steht ein Berechnungswerkzeug zur Bestimmung des mechanischen Verhaltens bereit, das aus der Ingenieurspraxis nicht mehr wegzudenken ist. Die Notwendigkeit in der Strukturoptimierung Systemantworten zu beschreiben führt zu einer engen Kopplung von Optimierungsalgorithmen und Struktursimulationen. Die Berücksichtigung von Aspekten der Numerik und FEM sind für die erfolgreiche Anwendung der Strukturoptimierung essentiell. Durch das iterative Vorgehen bei der Optimierung wird eine häufige Neuauswertung und Berechnung von Strukturantworten notwendig. Weiter werden immer höhere Ansprüche an die Genauigkeit und Aussagekraft der zu berechnenden Modelle gestellt, die die Systemauswertung zunehmend aufwändiger machen. So bedingt eine hohe Zahl an Restriktionen und Lastfällen, die im Optimierungsproblem formuliert werden, die Berechnung von vielen Systemantworten. Die Kombination dieser Einflüsse führt in der Praxis schnell zu Berechnungsaufwänden, die in einem vernünftigen Zeitrahmen nicht mehr zu bewältigen sind. Lösungen können der Einsatz von mehr Rechenkapazität, die Parallelisierung der Berechnung oder modifizierte Berechnungsverfahren sein.

Die Modellordnungsreduktion (MOR) stellt eine besondere Modifikation der Berechnungsmethodik dar, die durch Approximation von Systemantworten den Berechnungsaufwand signifikant verringern kann. Die Genauigkeit des approximierten Rechenergebnisses darf dabei offensichtlich nicht zu stark verringert werden, was in der Praxis jedoch oft gewährleistet werden kann. Einen akzeptablen Kompromiss zwischen Rechengenauigkeit und Rechenaufwand zu finden ist die große Herausforderung bei der Modellordnungsreduktion. Dabei haben sich unterschiedliche Verfahren entwickelt, unter denen die Projektionsverfahren einen besonders aktuellen Ansatz darstellen. Obwohl einige MOR-Methodiken bereits in kommerzieller Software eingebettet sind, erfordert der Einsatz stets große Erfahrung seitens des Anwenders und es besteht Forschungsbedarf, um weitere Einsatzbereiche zu erschließen und numerische Schwierigkeiten zu beheben. Im Hinblick auf die Optimierung muss dabei immer die Notwendigkeit der parametrisierten Formulierung des zu optimierenden Systems berücksichtigt werden. Der Einfluss dieser Bedingung auf den Reduktionsprozess führt zum Begriff der parametrisierten MOR (PMOR).

Das Ziel der Ingenieursarbeit ist die Entwicklung realer Produkte und die Simulation und Optimierung ist kein Selbstzweck. Folglich stellt sich die Frage nach der praktischen Umsetzung von Optimierungsergebnissen in fertigbare Konstruktionen. Dabei zeigt sich, dass beispielsweise aufgrund spezieller Anforderungen aus Fertigungsverfahren zeit- und ressourcenaufwändige Interpretationen und Neuerstellungen von Modellen notwendig werden. Somit ist die Vermeidung derartiger Aufwände ein lohnendes Forschungsziel, das beispielsweise durch die Berücksichtigung der Fertigungsaspekte im Optimierungsprozess verfolgt werden kann.

## 1.2 Stand der Technik

Wie eingangs beschrieben gehen technische Entwicklungen mit Optimierungsprozessen einher. Für die angesprochene strukturierte Suche nach dem optimalen Entwurf ist die mathematische Beschreibung der Zusammenhänge der Optimierungsaufgabe notwendig. Dabei fallen viele Parallelen mathematischer Fortschritte mit Ideen und Verfahren der Optimierung auf und es lässt sich eine lange gemeinsame Geschichte feststellen. Einen guten Überblick darüber vermittelt *Kiranyaz* [48].

Optimierung an sich ist nicht auf eine bestimmte Disziplin beschränkt und ihre mathematischen Prinzipien sind allgemein. Die Anforderungen an einen Entwurf können aus unterschiedlichsten Bereichen stammen und vereinigen diese im Rahmen der Optimierungsaufgabe. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der strukturmechanischen Optimierung und betrachtet in erster Linie Struktursteifigkeiten, -festigkeiten und Fertigungsaufwände. Die Anwendung der Optimierung auf unterschiedlichste reale Systeme enthüllt immer neue Herausforderungen an Berechnungsmethoden, Optimierungsalgorithmen und die gegebenen Rechenkapazitäten. Der Einsatz unterschiedlicher Optimierungsalgorithmen hängt stark von der jeweiligen Optimierungsaufgabe ab, deren Charakterisierung anhand der verwendeten Optimierungsvariablen möglich ist. Wurden in der Anfangszeit der Strukturoptimierung hauptsächlich Dimensionierungen mit Balkenelementen betrachtet, so ging die Entwicklung weiter zur Formparametrierung und Topologieoptimierung (vgl. [9], [77], [10]). Einen guten Überblick gibt auch die Veröffentlichung von *Deaton* [25]. Die Verwendung von Elementdichten als Optimierungsvariablen in der Topologieoptimierung zeigt, dass auch die Anwendung sehr theoretischer Ideen, die nicht unbedingt reale Verhältnisse widerspiegeln, wichtige Ergebnisse liefern kann und sich die Strukturoptimierung hin zu neuen Anwendungsbereichen entwickelt.

Durch die numerische Rechnung mit ihrer begrenzten Darstellungsgenauigkeit der Zahlen können theoretische Erkenntnisse in der Praxis oft nicht vorausgesetzt werden. Dies kann sich auf die Optimalität von Entwürfen, die Einhaltung von Restriktionen oder die Berechnung von Systemantworten beziehen. Derartige Aspekte finden sich eingehend diskutiert unter anderem bei [5], [46], [62] und [68]. Eine wichtige Folge der Anwendung der FEM für die Berechnung der Strukturantworten ist der hohe Rechenaufwand, der sich als limitierender Faktor in der Optimierung herausstellen kann. Der Rechenaufwand ergibt sich in erster Linie aus der Berechnung von Strukturantworten und der Sensitivitätsanalyse im Rahmen der FEM-Berechnungen. Von *Bathe* [7] und *Betten* [12] sind Grundlagen und weiterführende Konzepte des Verfahrens umfassend beschrieben. Moderne FEM-Programme beinhalten hocheffiziente Lösungsverfahren für lineare und nichtlineare Gleichungssysteme sowie Eigenwertprobleme. Wichtige Programmumgebungen sind *Nastran*, *Abbaqus* oder *Ansys*, die jeweils durch Prae- und Postprocessingsoftware die Berechnung und Auswertung unterstützen. Einen Überblick über die grundlegenden Aufgaben und Lösungsalgorithmen der Numerik geben [22], [69] und [76].

Wie im Abschnitt 1.1 bereits erwähnt, stellt die MOR eine Möglichkeit zur Steigerung der Recheneffizienz dar. Die Anfänge der Modellordnungsreduktion gehen auf Überlegungen zum Eigenraum dynamischer Systeme zurück. Die Idee der modalen Reduktion sind eng mit der Bestimmung des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme verbunden, deren Grundlage die Lösung des Eigenwertproblems ist. Die Transformation auf einen Hauptraum führte zur Überlegung, eine Projektion auf einen Haupt-Unterraum durchzuführen, was

von Davison [24] vorgestellt wurde. Weitere Entwicklungen sind die sogenannten Kondensationsverfahren nach Guyan [44]. Dabei werden die Freiheitsgrade eines Systems in „Master“- und „Slave“-Knoten aufgeteilt. Das ursprüngliche System wird dann auf ein System in Abhängigkeit der Masterknoten transformiert, was eine deutliche Verringerung der Größe des zu lösenden Systems bedeutet. Aufbauend wurde die „Improved Reduced System“-Methode von O’Callhan [63] entwickelt, bei der Masseneffekte ausgeglichen werden, die bei der reinen Guyan-Reduktion vernachlässigt werden. Substrukturtechniken wurden in [6] von Craig und Bampton eingeführt, wobei die Ideen von Guyan kombiniert mit modalen Freiheitsgraden angewendet werden. Die dynamische Kondensation stellt ein weiteres Verfahren dar, das die Probleme der statischen Kondensation wie beispielsweise Vernachlässigung von Strukturmasse der „Slave“-Freiheitsgrade, behebt. Einen Überblick liefert die Gegenüberstellung mehrerer genannter Verfahren in [84]. Vorangetrieben wurde die Entwicklung von MOR-Verfahren vor allem durch die Regelungstechnik, in der die zeitkritische Zustandsschätzung für die Fehlerberechnung entscheidend ist. Anhand von reduzierten Systemen können Regler hierbei viel schneller reagieren, was die Qualität der Regelung verbessert. Die Methoden wurden mittlerweile in vielen weiteren Disziplinen angewendet und auch in der Strukturberechnung ist es sinnvoll und naheliegend, Möglichkeiten zu untersuchen, wie weit die Methodik die Recheneffizienz steigern kann (vgl. [54]).

Neben den genannten Verfahren haben sich später vor allem *krylov*-raumbasierte Verfahren bei Systemen mit sehr großer Freiheitsgradzahl durchgesetzt [32] [72]. Ein weiteres nennenswertes Vorgehen ist das balancierte Abschneiden, das das Ein- Ausgangsverhalten dynamischer Systeme betrachtet und Zustände aussortiert, deren Änderung zum einen viel Energie benötigt und andererseits wenig Energie auf den Ausgang überträgt. Näheres dazu findet sich bei Antoulas [1] und Volkwein [82]. Im Zusammenhang mit parametrierter Modellordnungsreduktion ist Daniel [23] zu nennen, der ein Verfahren beschreibt, wie parametrisierte Ersatzsysteme mit Hilfe von *Krylov*-Räumen erstellt werden können. Einen guten Überblick über den Stand der Technik der parametrisierten Modellordnungsverfahren stellt die Veröffentlichung von Benner, Gugercin und Willcox [11] dar. Hierin werden parametrisierte Verfahren in „Data fit models“ und „Projection based reduced models“ unterteilt. Die Interpolation von lokal reduzierten Systemen ist bei Degroote [26] und Panzer [65] beschrieben. Eine „Sampling“-basierte Untersuchung mit vielen Parametern findet sich in [19].

Ein mathematisch definierter Optimalentwurf ist nur hilfreich, wenn eine Möglichkeit zur Fertigung besteht. Daher ist es wichtig, Kriterien für die Fertigbarkeit zu ermitteln, mathematisch zu formulieren und in den Optimierungsprozess einzubringen. In der vorliegenden Arbeit wurde die generative Fertigung betrachtet und ihre Grenzen und speziellen Leistungsmerkmale berücksichtigt. Von Gebhardt [40] wird ein umfassender Überblick über die Eigenschaften der generativen Fertigung gegeben. Die Interaktion von Topologieoptimierung und generativer Fertigung wurde unter anderem von Gaynor [39] untersucht.

## 1.3 Vorgehensweise und Arbeitsschritte

Nach der Darstellung des Standes der Technik, werden zu Beginn der Arbeit die Grundlagen aus Optimierung, Numerik, linearer Algebra, Systemtheorie und MOR dargestellt. Aufbauend darauf werden zunächst die Eigenschaften der MOR anhand generischer dynamischer Modelle untersucht, wodurch Einblicke in allgemeine Eigenschaften der projektiven MOR-Verfahren entstehen. Die Ergebnisse fließen dabei zur Verdeutlichung in den Grundlagenteil ein. Nach diesen Voruntersuchungen werden in Kapitel 3 ausgewählte parametrisierte MOR-Verfahren angewendet. Die Rückschlüsse daraus münden im Vorschlag eines effizienten Verfahrens zur Strukturoptimierung, das auf den Ideen evolutionärer Algorithmen aufbaut und durch das ein vorteilhafter Einsatz der MOR in der Optimierung erfolgen kann. Dazu wird mittels der Programmiersprache PYTHON ein umfangreicher Forschungscode auf Basis verschiedener existierender Module aufgebaut.

Wie in Abschnitt 1.1 erläutert, stellt die Umsetzbarkeit von Optimierungsergebnissen eine große Herausforderung dar. Daher wird die Berücksichtigung von Fertigungsanforderungen in der Optimierung näher betrachtet. Es wird ein Forschungscode entwickelt, der einen tiefreichenden Zugriff auf alle wichtigen Variablen des Berechnungsprozesses und eine maximale Flexibilität bezüglich der auszuführenden Rechenschritte erlaubt. Als Herstellungsverfahren wird die additive Fertigung betrachtet, die im Zusammenwirken mit der Topologieoptimierung ein hohes Potential zur Steigerung der mechanischen Leistungsfähigkeit der Bauteile aufweist. Zunächst werden Grenzen und Anforderungen des Fertigungsverfahrens identifiziert, die in der Optimierung zu berücksichtigen sind. Dies führt zum Bestreben, geometrische Überhänge der Zielstruktur zu vermeiden, da diese einen erheblichen Mehraufwand bei der Herstellung des Bauteils bedeuten. Die aktuelle Dichteverteilung im Bauraum wird für drei unterschiedliche Vorgehensweisen als Ausgangspunkt für die Penalisierung der Zielfunktion verwendet. Dabei können der Einfluss der Gewichtung, die im Rahmen der Mehrzieloptimierung zu wählen ist und die verschiedenen Wirkungsweisen der drei Penalisierungsansätze gezeigt werden.

Im abschließenden Kapitel 5 wird der praktische Einsatz verschiedener Strukturoptimierungsmethoden während der Entwicklung einer Fahrzeugstruktur für einen elektrischen Kleinwagen für das urbane Umfeld untersucht. Dazu wird ein relativ großes Finite-Elemente-Modell zur Berechnung der Strukturantworten aufgebaut, das durch die Berechnungssoftware OPTISTRUCT ausgewertet wird. Beginnend mit einer Topologieoptimierung für die Gesamtstruktur, werden globale Lastpfade im verfügbaren Bauraum identifiziert. Anhand dieser Erkenntnisse können weitere, höher detaillierte Konstruktionsschritte unternommen werden. Seitens der Optimierung können dann durch einen Modellneuaufbau und anschließende Dimensionierungen weitere Auslegungsschritte unterstützt werden. Auf diesem Weg werden die speziellen Herausforderungen deutlich und es ergibt sich die Möglichkeit, Maßnahmen zu deren Lösung zu ergreifen.



---

# Grundlagen

## 2.1 Optimierung

### 2.1.1 Die Optimierungsaufgabe - Mathematische Formulierung

Optimierung bedeutet die Auffindung eines Systemzustandes, der bezüglich eines Bewertungsmaßes ideal ist, wobei vorgegebene Bedingungen eingehalten werden müssen. Die allgemein gehaltene Definition zeigt, dass Optimierung nicht auf bestimmte Disziplinen beschränkt ist. Eine übliche mathematische Standardformulierung der Optimierungsaufgabe, wie sie für die eingangs erwähnten drei Untersuchungsbereiche der vorliegenden Arbeit von zentraler Bedeutung ist, ist in Beziehung (2.1) gegeben.

$$\min_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0) \quad \text{mit} \quad x_m \in X_m \quad j \in \{1, \dots, n_{rs}\} \quad m \in \{1, \dots, n_{ov}\} \quad (2.1)$$

Die Optimierungsvariablen sind im Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefasst, der die Systemkonfiguration festlegt und unterschiedlichste Größen beinhalten kann. Mit  $z$  wird die Zielfunktion bezeichnet, die ein Gütemaß für die Systemkonfiguration darstellt und minimiert werden soll. Die Bedingungen, die an das System gestellt werden stecken in den  $n_{rs}$  Ungleichungen, die durch die Funktionen  $g_j$  beschrieben werden.

Diese Formulierung definiert die Optimierungsaufgabe sehr allgemein, da die Optimierungsfunktionen  $z$ ,  $g_j$  und die Optimierungsvariablen  $\mathbf{x}$  noch nicht näher spezifiziert sind. Erst die Verknüpfung der Optimierungsfunktionen und Optimierungsvariablen mit Systemantworten  $r_k$  und Systemparametern stellt die Verbindung zum jeweiligen betrachteten System her.

Eine exemplarische Darstellung dreier Optimierungsaufgaben ist für je zwei Optimierungsvariablen in Abbildung 2.1 gegeben. Hierin sind jeweils die Optimierungsfunktionen anhand von Isolinien verdeutlicht, wobei für die Restriktionen nur die wichtige Konturlinie  $g_j = 0$  dargestellt ist. Anhand der drei Beispiele werden Eigenschaften und Zusammenhänge bei Optimierungsproblemen im Weiteren diskutiert. Der Vergleich von 2.1(a) und 2.1(b) macht den Unterschied zwischen einer reinen Minimierungsaufgabe ( $\min_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}))$ ) und restringierten Optimierungsaufgaben deutlich. Im ersten Fall ist die Lösung durch das Minimum der Zielfunktion bestimmt, im zweiten Fall durch das Zusammenspiel von  $z$  und den Restriktionen.

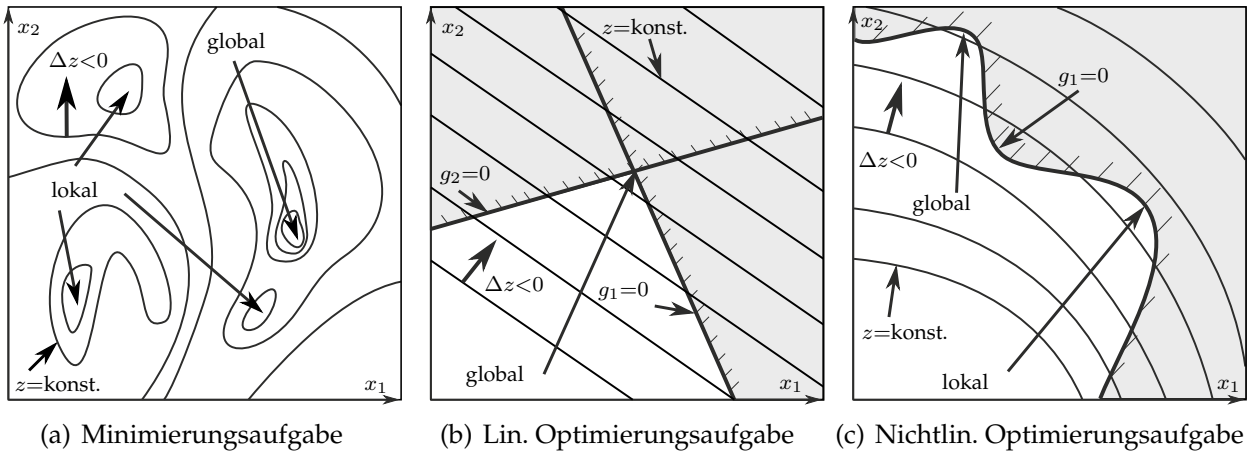


Abbildung 2.1.: Varianten von Optimierungsaufgaben

**Optimierungsvariablen** Die Optimierungsvariablen  $x$ , die eine bestimmte Systemkonfiguration beschreiben und über die Einfluss auf das System genommen werden kann, entsprechen in Abbildung 2.1 den Koordinaten. Die Optimierungsvariablen müssen nicht mit den Systemparametern  $p$  übereinstimmen, die für die Definition der Entwurfskonfiguration verwendet werden. Durch bijektive Abbildungen  $x = x(p)$  von Optimierungs- auf Systemvariablen kann der Einfluss der Wahl von Einheiten auf den Optimierungsverlauf behoben werden und die Optimierungsvariablen in einem bestimmten Definitionsbereich gehalten werden. Dies trägt zur Standardisierung der Formulierung bei, durch die die Programmierung von Algorithmen vereinfacht wird. Die  $x_j$  können kontinuierliche und diskrete Werte annehmen, was jeweils vom betrachteten System abhängt. Die Verwendung von diskreten Werten macht die Ermittlung brauchbarer Gradienteninformationen meist unmöglich, weshalb sich daraus schwieriger zu handhabende Probleme ergeben. In der Praxis treten diskrete Optimierungsprobleme häufig auf.

Für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Optimierungsvariablen wie beispielsweise Bauteilgeometrieparameter oder Elementmaterialdichten verwendet. Auf Grundlage der Optimierungsvariablen lassen sich die strukturmechanischen Optimierungsprobleme unterteilen, wie es in Abschnitt 2.1.4 diskutiert wird. Auf die speziellen Konsequenzen der Wahl der jeweiligen Parameter wird an den entsprechenden Stellen eingegangen.

**Restriktionen** Die Restriktionen  $g_j$  legen in Form von Ungleichungen die Anforderungen an den Entwurf fest. Wie bereits erwähnt erfolgt deren Definition anhand der Systemantworten  $r_k$ , sodass  $g_j = g_j(r_k(x))$ . Die Restriktionen sind in Abhängigkeit vom Entwurf entweder inaktiv ( $g < 0$ ), aktiv ( $g = 0$ ) oder verletzt ( $g > 0$ ), wobei diese Definition als Konvention für diese Arbeit anzusehen ist. Ferner ist eine normierte Form der Restriktionen für die Verwendung in verschiedenen Algorithmen und für eine bessere Übersichtlichkeit bei der Optimierungsauswertung von Vorteil. Für eine obere Schranke  $\bar{r}$  beziehungsweise eine untere Schranke  $\underline{r}$  ergeben sich dann die Gleichungen in (2.2).

$$g = \frac{r}{\bar{r}} - 1 \quad \text{für} \quad r \leq \bar{r} \quad g = 1 - \frac{r}{\underline{r}} \quad \text{für} \quad r \geq \underline{r} \quad (2.2)$$



Sind die Ungleichungen inaktiv oder aktiv, nennt man einen Entwurf zulässig, sonst unzulässig. In den Abbildungen 2.1(b) und 2.1(c) sind die Konturlinien  $g_j = 0$  gezeigt, wobei die Schraffur den unzulässigen Bereich anzeigt. In der Praxis erfolgt diese Bewertung aufgrund der begrenzten Darstellungsgenauigkeit der Rechensysteme meist anhand von Toleranzbereichen. Für  $|g_j| < \epsilon_{act}$  wird die Restriktion als aktiv angesehen.

Gleichheitsrestriktionen der Form  $h_i = 0$  sind nicht explizit in Beziehung 2.1 aufgenommen worden, da sie auch als Ungleichung formuliert werden können ( $h = 0 \Leftrightarrow 0 \leq h \leq 0$ ) und somit von den Ungleichheitsrestriktionen abgedeckt sind. Auch der Definitionsbereich der Optimierungsvariablen, der durch die Zusammenhänge  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$  beschrieben werden kann, ist auf diese Weise berücksichtigbar. Bei der Algorithmenimplementierung ist die getrennte Übergabe der unterschiedlichen Restriktionstypen jedoch von Vorteil, da die getrennte Behandlung die Recheneffizienz steigert. Der Definition der Restriktion ist zu entnehmen, dass eine Multiplikation mit einer positiven Zahl die Bedingung nicht ändert. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die numerische Kondition der Optimierungsaufgabe durch Skalierungen zu verbessern.

Die Bedingungen an ein System können unterschiedlichster Art sein. Bei mechanischen Systemen, wie beispielsweise in Abschnitt 5.1.2, werden häufig Verschiebungen und Spannungen restringiert, um Funktionalität und Festigkeit sicherzustellen.

**Zielfunktion** Die Standardformulierung dieser Arbeit geht von einer Minimierung der Zielfunktion aus. Generell können Maximierungsprobleme durch die Multiplikation mit  $-1$  ( $\min(z) \hat{=} \max(-z)$ ) ohne weiteres in Minimierungsprobleme transformiert werden. Auch die Zielfunktion kann wie die Restriktionen durch Multiplikation einer positiven Zahl skaliert werden, ohne dass dies den Optimalentwurf der Optimierungsaufgabe ändert. Zusätzlich ändert auch eine Addition  $z(x) + c$  das Optimum nicht, was wiederum für die Verbesserung der numerischen Stabilität genutzt werden kann.

Im Rahmen von Penalisierungsverfahren, wie sie in Abschnitt 4 angewendet werden, werden Bedingungen der Fertigung nicht durch Restriktionen, sondern durch gezielte Modifikation der Zielfunktion in den Optimierungsprozess eingebracht. Dabei wird die Zielfunktion im Falle der Verschlechterung des Bewertungsmaßes für die Fertigbarkeit vergrößert. Dies ist in Abschnitt 4.5.2 näher beschrieben.

Die Zielfunktion  $z(x)$  ist in Gleichung (2.1) als skalarwertig beschrieben. Im Allgemeinen kann jedoch auch eine Mehrzieloptimierung definiert werden (siehe Abschnitt 2.1.8), deren Handhabung auf unterschiedliche Weisen erfolgen kann. Derartige Methoden sind beispielsweise die Gewichtung und Summation der Ziele, oder die Formulierung von Restriktionen aus einzelnen Zielen. Näheres zu den üblichen Ansätzen kann beispielsweise bei [56] nachgelesen werden.

**Systemantworten** Wie bereits erwähnt, wird das betrachtete System, das optimiert werden soll, durch die Verwendung von Systemantworten für die Zielfunktion und die Restriktionsfunktionen sowie die Verknüpfung von Optimierungsvariablen mit den Systemparametern in die Optimierungsaufgabe eingebunden. Wenn alle verwendeten Systemantworten von den Optimierungsvariablen einen linearen Zusammenhang der Form  $r(x) = c^T x + t$  aufweisen, spricht man von einem linearen Optimierungsproblem, wie es in 2.1(b) dargestellt ist. Im Gegensatz dazu zeigt 2.1(c) ein nichtlineares Optimierungsproblem, da hier mindestens eine Funktion nichtlinear von  $x$  abhängt. Im technischen Kontext treten lineare Optimierungsaufgaben nur sehr selten auf, allerdings führen lineare Approximationen, die

durchaus zum Einsatz kommen, auf diese Problemklasse. Für die verschiedenen Fälle müssen dann jeweils Optimierungsalgorithmen ausgewählt werden. Dazu mehr in Abschnitt 2.1.5.

In der Strukturoptimierung erfolgt die Ermittlung der System- beziehungsweise Strukturantworten meist mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM). Die Anwendung der FEM, die in 2.2 näher besprochen wird, beinhaltet die Modellierung und Diskretisierung des realen Systems und somit eine Abstraktion von der Wirklichkeit. Der Grad der Vereinfachung bestimmt die Modellgüte und Aussagekraft und limitiert somit auch die Qualität der Simulationsergebnisse und folglich der Optimierung.

Die Systemantworten liegen in einer bezüglich der Optimierungsvariablen impliziten Form vor, da die Inverse Systemmatrix sich im Allgemeinen nicht analytisch beschreiben lässt. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit oftmals sehr große lineare Gleichungssysteme numerisch zu lösen. Dieser Aufwand stellt für die Optimierung meist den größten Teil der Berechnungszeit dar.

Die Optimierungsaufgabe lässt sich gemäß der vorangegangenen Erläuterungen in drei Hauptsäulen unterteilen, die in Tabelle 2.1 dargestellt sind.

Tabelle 2.1.: Bestandteile der Optimierungsaufgabe nach [29]

Optimierungsaufgabe		
Systemmodell	Optimierungsmodell	Optimierungsalgorithmus
Geometriedaten	Definition der Optimierungsvariablen	Algorithmusparameter
Vernetzung	Normierungen/ Skalierungen	Konvergenzkriterien
Randbedingungen	Zielfunktions- und Restriktionsdefinition	Numerische Toleranzen
Definition von Systemparametern		
Berechnungsprogramm		

### 2.1.2 Das duale Problem - Die *Lagrange*-Funktion

Ausgangspunkt für viele theoretische Überlegungen und Optimierungsalgorithmen, wie beispielsweise der in Abschnitt 4.4 für die Lösung von Topologieoptimierungsaufgaben, ist die duale Beschreibung des Optimierungsproblems (2.1) in Form der *Lagrange*-Funktion (2.3).

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = z(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n_{rs}} \lambda_i [g_i(\mathbf{x}) + w_i^2] \quad \text{mit} \quad \lambda_i \geq 0 \quad w_i \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Hierin sind die  $\lambda_i$  die *Lagrange*-Multiplikatoren und  $w_i$  sogenannte Schlupfvariablen, die die Ungleichheits- in Gleichheitsrestriktionen überführen. Dies ist notwendig, da nicht alle Restriktionen im Optimum aktiv sein müssen. Ein stationärer Punkt von Gleichung (2.3) entspricht dabei dem Optimum in (2.1). Folglich ist die Auffindung eines stationären Punktes der *Lagrange*-Funktion eine Optimierung von (2.1) und umgekehrt. In Abbildung 2.2(b) ist für ein einfaches Optimierungsproblem die *Lagrange*-Funktion dargestellt. Dabei sind zum einen für  $\lambda = 0$  die Optimierungsfunktionen zu erkennen, zum anderen wird die Dimensi-

Erweiterung durch die zusätzliche Variable  $\lambda$  deutlich.

In den Gleichungen (2.4) bis (2.7) sind die Bedingungen für die Optimalität eines Entwurfes  $x$  dargestellt.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n_{rs}} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i + w_i^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = 2\lambda_i w_i = 0 \quad (2.6)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad j \in \{1, \dots, n_{ov}\} \quad i \in \{1, \dots, n_{rs}\} \quad (2.7)$$

Die Schlupfvariablen  $w_i$  werden meist aus den Stationaritätsbedingungen eliminiert. Dies kann durch quadrieren von (2.6) und auflösen von (2.5) nach  $-g_i = w_i^2$  sowie anschließendes einsetzen erfolgen. Daraus resultiert der Zusammenhang  $-g_i \lambda_i^2 = 0$ , was auf die sogenannte „Switching Condition“  $\lambda_i g_i = 0$  führt. Diese äquivalente Form, in der die Schlupfvariablen  $w_i$  nicht mehr enthalten sind, wird durch die Beziehungen (2.8) bis (2.11) gezeigt.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n_{rs}} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

$$g_i \lambda_i = 0 \quad (2.9)$$

$$g_i \leq 0 \quad (2.10)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (2.11)$$

Die Bedingungen lassen sich geometrisch anschaulich interpretieren. Die gewichteten Restriktionsgradientenvektoren müssen dabei im Gleichgewicht mit dem Gradientenvektor der Zielfunktion stehen, was in Abbildung 2.2(a) für zwei Restriktionen dargestellt ist.

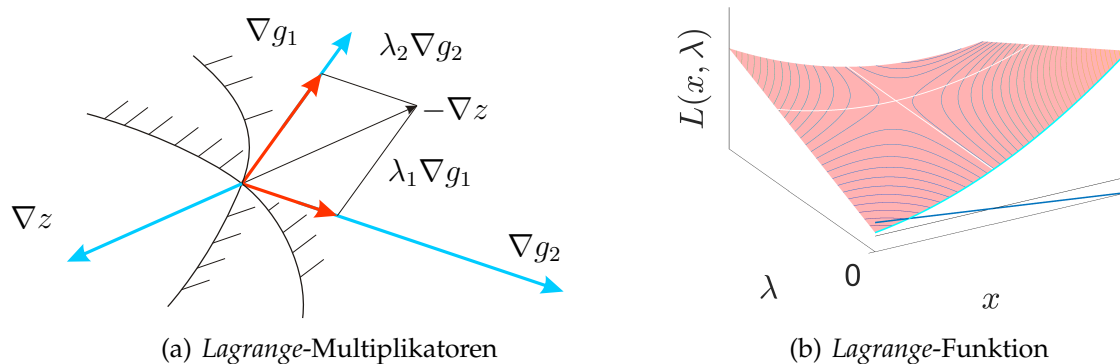


Abbildung 2.2.: Lagrange-Funktion und Lagrange-Multiplikatoren

Wird die Zielfunktionsänderung in die Richtungskomponenten der aktiven Restriktionsgradienten zerlegt (rote Pfeile in Abbildung 2.2(a)), wird deutlich, dass der Lagrange-Multi-

plikator die Ableitung der Zielfunktion nach den Restriktionen ist. Es gilt  $\lambda_i = \partial z / \partial g_i$ . Somit lässt sich anhand der  $\lambda_i$  bewerten, welche Restriktionsänderung eine besonders große Verbesserung der Zielfunktion zur Folge hat. Allerdings hat diese Aussage nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich bezüglich der Optimierungsvariablen, da der Gradient eine lokale Linearisierung ist.

Der stationäre Punkt der *Lagrange*-Funktion ist ein Sattelpunkt und somit kein Extremum, wodurch sich die Lösung verkompliziert. Dazu werden zunächst die Bezeichnungen „primale Variablen“ für  $x$  und „duale Variablen“ für  $\lambda$  eingeführt. Am Sattelpunkt muss gleichzeitig  $L(x, \lambda)$  über den primalen Variablen minimal und über den dualen Variablen maximal werden. Damit ergeben sich zwei Lösungsstrategien. Zum einen kann zuerst die Maximierung von  $L(x, \lambda)$  über  $\lambda$  bestimmt werden, sodass man zunächst  $\bar{L}(x)$  erhält. Anschließend wird durch die Minimierung von  $\bar{L}(x)$  über  $x$  die Lösung gefunden. Dieses Vorgehen wird primale Methode genannt und führt direkt auf die Lösung des Optimierungsproblems 2.1. Die zweite Möglichkeit ist das umgekehrte Vorgehen. Man minimiert dabei zuerst  $L(x, \lambda)$  über  $x$  und maximiert dann über  $\lambda_i$  [74, S.85]. Dies wird als duale Strategie bezeichnet. Für die Wahl des Vorgehens sind Eigenschaften des Optimierungsproblems entscheidend. Der effiziente Einsatz der dualen Methode ergibt sich beispielsweise für den Fall separierbarer und konvexer Optimierungsfunktionen (vgl. 2.1.3), bei denen deutlich mehr Optimierungsvariablen als Restriktionen vorliegen. Dadurch sind für die Minimierung im ersten Schritt  $n_{ov}$  eindimensionale Minimierungen und im Maximierungsschritt eine  $n_{rs}$ -dimensionale Optimierungsaufgabe zu lösen. Näheres dazu bei [5, S.106] und [46, S.70].

### 2.1.3 Eigenschaften von Optimierungsproblemen

#### 2.1.3.1 Optimalität

In Abbildung 2.1 sind lokale und globale Optima markiert. Dabei ist das globale Optimum als Lösung der Optimierungsaufgabe zu sehen. In der Praxis ist es allgemein nicht möglich einen Entwurf, der als Optimum identifiziert wurde, bezüglich der globalen Optimalität zu bewerten. Dies liegt daran, dass die Systemantworten in der Regel als implizite Gleichungen vorliegen und die Informationen über einen Entwurf nur in der nächsten Umgebung des Entwurfs bekannt sind. Beispielsweise werden in der Strukturmechanik die Systemantworten meist mittels der FEM berechnet, wobei iterative Lösungsverfahren eingesetzt werden. Die *Kuhn-Tucker*-Bedingungen in den Gleichungen (2.4) stellen für allgemeine restringierte Optimierungsaufgaben deshalb ein notwendiges, jedoch nicht hinreichendes Kriterium für ein globales Optimum dar, da sie auch von lokalen Optima und Sattelpunkten erfüllt werden.

#### 2.1.3.2 Konvexität

Konvexität einer Menge bedeutet mathematisch nach [17, S.244], dass für jedes Punktpaar aus der Menge alle Punkte der Verbindungsgeraden ebenfalls Teil der Menge sind. In der Optimierung wird mit dieser Definition bewertet, ob mehrere Optima vorliegen oder im konvexen Fall nur eines, welches entsprechend das globale ist. Die Konvexität beziehungsweise Nichtkonvexität ergibt sich aus dem Zusammenspiel von Zielfunktion und Restrik-

tionen wie in Abbildung 2.1 durch Vergleich deutlich wird. Die Graphik 2.1(b) zeigt ein konvexes Optimierungsproblem, das nur ein globales Optimum aufweist. Die Konvexität ist im Allgemeinen für Optimierungsprobleme nicht feststellbar, was gleichbedeutend mit den Aussagen in Abschnitt 2.1.3.1 bezüglich der Bewertung von globalen und lokalen Optima ist.

Für Optimierungsalgorithmen spielt die Konvexität bei approximationsbasierter Optimierung eine wichtige Rolle. Durch die geschickte Wahl von Approximationen, die die Konvexität sicherstellen, ist es möglich, Subprobleme mit einer einzigen Lösung zu definieren. Die sequentielle Optimierung der Subprobleme erleichtert die iterative Suche nach einer Lösung der ursprünglichen Optimierungsaufgabe, bedeutet jedoch nicht, dass die Suche auf eine globale Lösung führt. Ein Beispiel dafür ist der MMA-Algorithmus, der für die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Topologieoptimierung eine wichtige Rolle spielt und in Abschnitt 4.4.2 noch genauer beschrieben werden wird.

### 2.1.3.3 Separierbarkeit

Eine Systemantwort wird nach [5, S.106] separierbar genannt, wenn sich die Funktion als Summe von Funktionen beschreiben lässt, die jeweils nur von einem Parameter abhängen. Dies ist in Gleichung (2.12) beschrieben.

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{ov}} r_k(x_k) \quad (2.12)$$

Die Separierbarkeit spielt vor allem im Kontext von dualen Lösungsverfahren eine wichtige Rolle, da durch sie das Problem  $\min_{\mathbf{x}} \{L(\mathbf{x}, \lambda)\}$  in eindimensionale Optimierungen zerfällt [46, S.73]. Im Allgemeinen sind die Funktionen von Optimierungsproblemen nicht separierbar. Durch bestimmte Approximationen der Systemantworten kann die Separierbarkeit jedoch in einem ersten Schritt hergestellt werden. Das  $n_{ov}$ -dimensionale Optimierungsproblem lässt sich dann analytisch lösen. Dies ist beispielsweise beim Einsatz des MMA-Algorithmus in der Topologieoptimierung, die ein zentraler Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit ist, der Fall.

### 2.1.4 Arten von Strukturoptimierungsaufgaben

In Abb. 2.3 sind wesentliche Strukturoptimierungsarten dargestellt, die durch die jeweiligen Optimierungsvariablen voneinander abgegrenzt sind. Sie sind in eine Reihenfolge gebracht, wie sie beispielsweise in einem realen Entwicklungsprozess vorliegen könnte. Da zu Beginn des Entwicklungsprozesses nur wenige Informationen vorliegen, bietet sich der Einsatz von Konzeptoptimierungen, wie der Topologieoptimierung, an. Das Ergebnis wird in einem zweiten Schritt in eine fertige Konstruktion umgesetzt, deren Form dann nochmals optimiert wird. Eine Dimensionierung kann dann noch eine weitere Feineinstellung von Konstruktionsparametern ergeben. Weiter sind in der Abbildung noch diskrete Optimierungsaufgaben angedeutet, bei denen beispielsweise verschiedene Profile oder Materialien ausgewählt werden.

Die Grafik gibt nur einen groben Überblick und es ist beispielsweise möglich, eine Dimen-

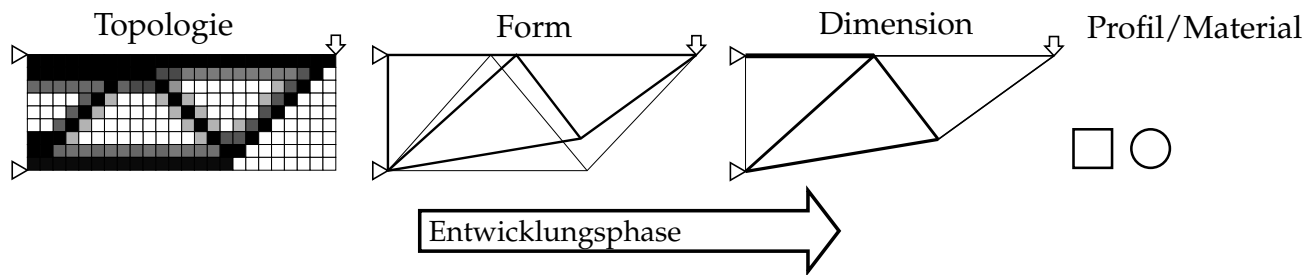


Abbildung 2.3.: Unterscheidung von Strukturoptimierungsaufgaben

sionierung und eine Formoptimierung gleichzeitig durchzuführen. Auch ist die angedeutete Reihenfolge nicht obligatorisch. In Abschnitt 5.2 folgte beispielsweise der Topologieoptimierung direkt eine Dimensionierung, um eine Fahrzeugwannestruktur zu optimieren. Im Folgenden werden die Optimierungsarten mit ihren Eigenschaften und Einschränkungen der Vollständigkeit halber kurz diskutiert.

**Dimensionierung** Bei der Dimensionierung werden geometrische Parameter variiert, die Wandstärken von Strukturen repräsentieren. Beispielsweise werden in Abschnitt 5.2.3 dünnwandige Verstärkungsrippen optimiert, die aus Schalenelementen modelliert sind und deren Dicke damit sehr leicht zu definieren ist. Dieser Parameter geht hierbei in die Elementeneigenschaften ein ohne das FEM-Netz zu verändern und macht die Dimensionierung aus numerischer Sicht zu einer stabilen und relativ leicht zu handhabenden Optimierungsart.

**Formoptimierung** Für die Beschreibung der Bauteilform stehen unterschiedliche Herangehensweisen zur Verfügung. Die Geometrieparametrierung kann auf Grundlage des CAD-Modells (Computer Aided Design) oder direkt anhand des FEM-Modells erfolgen. Die erste Möglichkeit hat den Vorteil, dass man Konstruktionsparameter direkt ansteuern kann, führt jedoch zur Notwendigkeit der Neuvernetzung für die Berechnung. Die Zuordnung von FEM-netzbasierten Größen zu dem neuen Netz kann dabei Probleme bereiten.

Wird die Veränderung anhand des FEM-Modells parametrierung, so geschieht dies meist mit Hilfe von Formbasisvektoren (vgl. Abschnitt 3.3.1). Dabei werden die Netzknotenpositionen gemäß  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{B}\mathbf{x}$  berechnet, worin  $\mathbf{B}$  die Formbasisvektoren  $\mathbf{b}_n$  enthält, die durch die Systemparameter  $x_n$  skaliert werden. Die Formbasisvektoren werden auf die Ausgangsknotenpositionen  $\mathbf{k}_0$  addiert. Probleme können bei diesem Vorgehen durch starke Netzverzerrungen auftreten. Weiter ist die Erstellung der Formbasisvektoren aufwändig, auch wenn dafür spezielle Programme zur Verfügung stehen. Der Vorteil besteht in einer aus Sicht des Berechnungsprozesses relativ stabilen Vorgehensweise.

**Topologieoptimierung** Die Topologieoptimierung verteilt eine vorgegebene Menge an Material in einem definierten Bauraum. Diese Materialverteilung wird durch eine Parametrierung auf Elementebene erreicht. Dieses Optimierungsvorgehen kann verschiedenste Ziele und Restriktionen berücksichtigen, wie es bei [10] ausgiebig diskutiert wird. Die Topologieoptimierung wird näher in Abschnitt 2.1.9 beschrieben und findet im Rahmen der Untersuchungen in den Abschnitten 4 und 5 Anwendung. Die Ergebnisse des Verfahrens hängen stark von der Diskretisierung ab und die Topologien nehmen organische, mehrfach gekrümmte Oberflächenformen an. Dies stellt eine große Herausforderung für Konstruktion und Fertigung dar, wie es auch in Kapitel 4 dargestellt wird.

**Materialzuweisung** Eine weitere Optimierungsaufgabe besteht in der Zuweisung des besten Materials für eine Struktur oder für verschiedene Strukturbereiche. Dabei ergeben sich diskrete Optimierungsvariablen, da sich in der Regel keine kontinuierlichen Übergänge zwischen Materialien realisieren lassen. Die Lösung diskreter Optimierungsaufgaben stellt besondere hohe Anforderungen, da unter anderem mit den Optimierungsvariablen mehrere Eigenschaften sich gleichzeitig ändern können und keine Kontinuität in den Systemantworten gegeben ist.

### 2.1.5 Einordnung und Unterteilung von Optimierungsalgorithmen

Die Lösung der mathematischen Optimierungsaufgabe in 2.1 wird in der Regel iterativ auf numerischem Weg durch Algorithmen ermittelt. Eine mögliche Unterteilung von Optimierungsalgorithmen kann gemäß Abbildung 2.4 erfolgen.

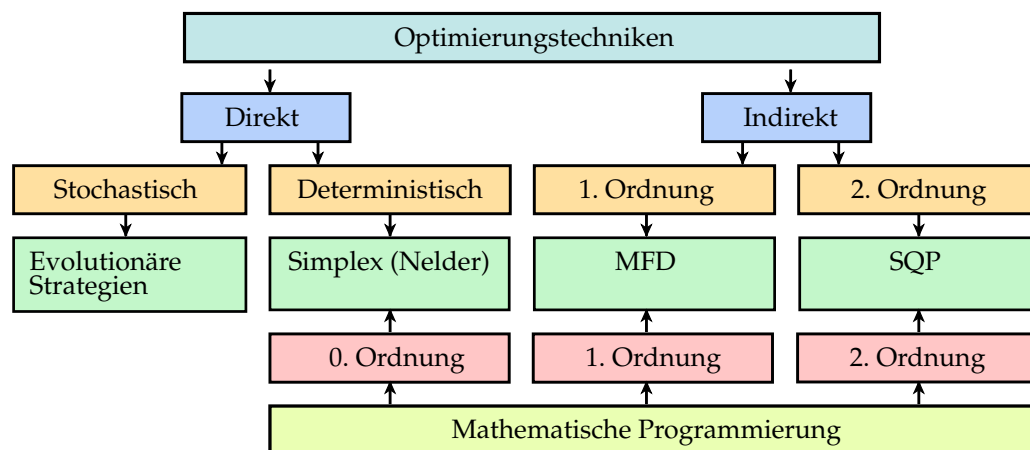


Abbildung 2.4.: Mögliche Unterteilung von Optimierungsalgorithmen angelehnt an [60]

Darin unterscheiden sich direkte und indirekte Optimierungsvorgehen durch den Verzicht auf beziehungsweise die Verwendung von Gradienteninformationen. Die stochastischen Verfahren beinhalten zufällige Parameter, wodurch keine Reproduzierbarkeit von Optimierungsläufen gegeben ist. Von diesem Optimierungsprinzip lässt sich die mathematische Programmierung abgrenzen, die rein deterministisch vorgeht. Zur Verdeutlichung sind einige bekannte Optimierungsalgorithmen in das Schema eingeordnet.

**Direkte deterministische Methoden** Das Prinzip der direkten deterministischen Methoden ist die lokal begrenzte Berechnung von Systemantworten, durch die eine Suchrichtung ermittelt wird. Anhand der Optimierungsfunktionen erlaubt dies eine Bewertung, in welcher Richtung des Entwurfsraumes weiter gesucht werden sollte. Dabei wird die Schrittweite meist noch dynamisch anhand vorheriger Berechnungen angepasst. Diese Klasse von Suchverfahren ist im Allgemeinen mit einem relativ hohen numerischen Berechnungsaufwand verbunden.

## 2. Grundlagen

**Gradientenbasierte Verfahren** Das grundsätzliche Vorgehen bei einem gradientenbasierten Verfahren ist als Pseudocode in Algorithmus 2.1.1 skizziert. Die Beschreibung lässt das Konvergenzkriterium offen. Möglichkeiten dieses zu beschreiben werden noch in Abs. 2.1.6 vorgestellt.

---

### Algorithmus 2.1.1: Grundprinzip von Gradientenverfahren

---

**Daten:**  $\mathbf{x}_0$

$k = 1, \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$

**solange keine Konvergenz tue**

Systemantworten berechnen:  $r_n(\mathbf{x}_k)$

Optimierungsfunktionen berechnen:  $z(r_i), g_j(r_l)$

Gradienten bestimmen:  $\nabla z(\mathbf{x}_k), \nabla g_j(\mathbf{x}_k)$

Suchrichtung ermitteln:  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\nabla z, \nabla g_j)$

Liniensuche:  $\min_{\alpha} \{z(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}) \mid g_j(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}) \leq 0\} \Rightarrow \alpha^*$

Entwurf ändern  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha^* \mathbf{s}$

$k = k + 1$

**Ergebnis:**  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_k$

---

Dieses Vorgehen setzt voraus, dass sich die Gradienten bestimmen lassen. Für diskontinuierliche, diskrete oder verrauschte Funktionen kann dies den Einsatz verhindern. Im Allgemeinen führt die Verwendung von Gradienteninformationen zu sehr effizienten Algorithmen. Für die Topologieoptimierung lässt sich das Gradientenverfahren sehr günstig anwenden und das Prinzip spielt daher eine sehr wichtige Rolle.

**Stochastische Verfahren - Evolutionäre Strategien** Die evolutionären Strategien (ES) gehören zu den stochastischen Heuristiken und verwenden in der Regel keine Gradienteninformationen. Die zugrunde liegende Idee ist die Abbildung der natürlichen Auslese und die damit einhergehende Verbesserung von Spezies in natürlichen Evolutionsprozessen. Eine Auswahl von Entwürfen, die Individuen genannt werden, bildet eine Population. Den Individuen wird anhand ihrer Ziel- und Restriktionsfunktionswerte eine Fitness zugeordnet. Durch die Weitergabe der guten Eigenschaften fitter Individuen an die Individuen der nächsten Generation wird eine sukzessive Annäherung an immer bessere Designs im Entwurfsraum erzielt. Dieses iterative Verbessern ist im Flussdiagramms 2.5 zu erkennen, durch das auch die Begrifflichkeiten der ES geklärt werden.

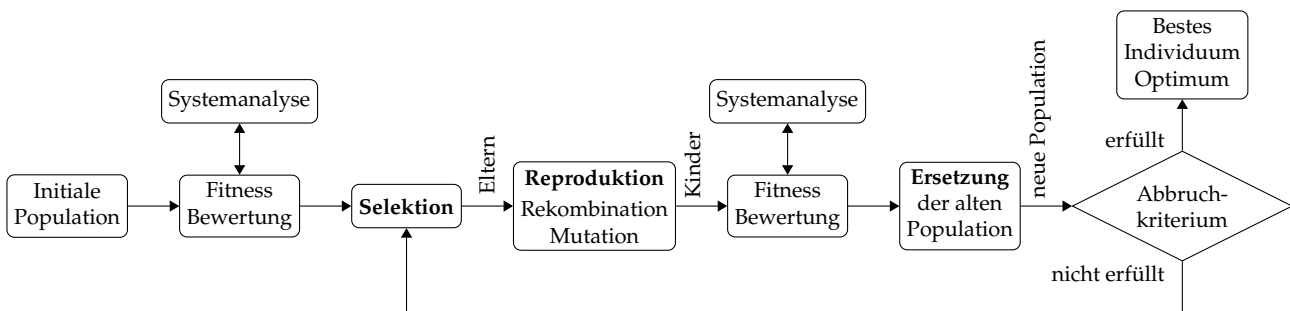


Abbildung 2.5.: Ablaufprinzip evolutionärer Strategien



Darin sind die wichtigsten Einzelschritte einer ES dargestellt. Bei der Selektion werden durch zufällige Auswahl die Individuen (Eltern) bestimmt, aus denen im Reproduktionsschritt die neuen Entwürfe (Kinder) berechnet werden. Für die Reproduktion gibt es unterschiedlichste Strategien, die zufallsbehaftete Prozesse einschließen. Nach der Auswertung der Fitness der so erzeugten Individuen, erfolgt ein Ersetzungsprozess, an dessen Ende die Individuen für die nächste Generation feststehen. Für die einzelnen Schritte stehen eine ganze Reihe von Verfahren und Vorgehen zur Verfügung. Einen Überblick über die Details geben beispielsweise [2] und [20].

Der Erfolg der Optimierung mittels ES hängt stark von einem guten Kompromiss zwischen Diversität und Selektionsdruck ab. Eine hohe Diversität sichert die gute Durchsuchung des Entwurfsraumes, die nötig ist, um die Wahrscheinlichkeit für das Auffinden eines globalen Optimums zu erhöhen. Der Selektionsdruck bewirkt, dass weniger fitte Individuen geringere Chancen zum Fortbestand haben, wovon die Konvergenzrate der Optimierung abhängt. Die beiden Pole, Durchsuchung des Entwurfsraumes und Konvergenzgeschwindigkeit, müssen für eine erfolgreiche Optimierung in Einklang gebracht werden.

Im Allgemeinen sollte aus Effizienzgründen gradientenbasierten Optimierungsverfahren der Vorzug vor evolutionären Strategien gegeben werden. Gerade bei einer großen Anzahl von Entwurfsvariablen kann der Entwurfsraum mit ES oft gar nicht mehr effizient durchsucht werden, da die Auswertungsdauer inakzeptabel wäre. Dies schränkt den Einsatz von evolutionären Strategien ein. Allerdings gibt es auch Problemstellungen, die die Anwendung von gradientenbasierten Verfahren erschweren oder sogar ausschließen. Dann kann auf die einfachen und robusten evolutionären Strategien zurückgegriffen werden. Nach [46, S.269] sind zerklüftete oder unstetige Systemantwortflächen oder diskrete Entwurfsräume typische Anwendungsbereiche für evolutionäre Algorithmen.

### 2.1.6 Konvergenz

Aufgrund des iterativen Berechnungsvorgehens bedarf es mathematischer Bewertungskriterien, ab wann die Optimierungsaufgabe als gelöst angesehen werden kann. Dabei ist zu bedenken, dass eine exakte Lösung in den allermeisten Fällen nicht ermittelt werden kann. Je nach Anwendung sind die berechneten Näherungslösungen jedoch vollkommen ausreichend. Einige typische Konvergenzkriterien sind in (2.13) bis (2.16) gegeben.

$$\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}\| \leq t_x \quad \text{Änderung des Entwurfs} \quad (2.13)$$

$$|z_j - z_{j-1}| \leq t_z \quad \text{Änderung der Zielfunktion} \quad (2.14)$$

$$\|\nabla z_j - \nabla z_{j-1}\| \leq t_{\nabla z} \quad \text{Änderung des Zielfunktionsgradienten} \quad (2.15)$$

$$j = n_{\text{it}} \quad \text{Bestimmte Anzahl an Iterationen} \quad (2.16)$$

Bei kleinen Änderungen der Zielfunktion (2.13) oder des Entwurfs (2.14) bei aufeinanderfolgenden Iterationen  $j$  und  $j - 1$ , kann man davon ausgehen, dass keine relevanten Verbesserungen mehr zu erzielen sind und man sich an einem Optimum befindet. Bei unrestringierten Problemen kann der Gradient der Zielfunktion herangezogen werden (vgl. (2.15)) und bei evolutionären Strategien wird oft eine bestimmte Anzahl an Iterationen vorgegeben (vgl. (2.16)). Es sind dabei auch Kombinationen der Kriterien denkbar und die jeweilige Verwendung hängt stark von Optimierungsproblem und Algorithmus ab.

### 2.1.7 Sensitivitätsanalyse

Im Kontext der Optimierung ist mit Sensitivitätsanalyse die Bestimmung von Gradienten gemeint, die eine lokale Information über das Änderungsverhalten von Systemantworten bezüglich bestimmter Systemparameter darstellen. In der Ingenieurspraxis können Systemantworten nur in den seltensten Fällen in globalem Sinne analytisch beschrieben werden. Gerade beim praktischen Einsatz der FEM, bei der die Gleichungen implizit in Form eines linearen Gleichungssystems (LGS) gegeben sind, können analytische Gradienten nicht als Funktion des Parameters ermittelt werden.

Für die Optimierung mithilfe von Gradientenverfahren, die im Rahmen der Topologieoptimierungen in den Abschnitten 4 und 5 eine wichtige Rolle spielen, stellt die Sensitivitätsanalyse meist einen sehr aufwendigen Teil der Berechnung dar. Es kann dabei zwischen verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung der Gradienten unterschieden werden:

**Finite Differenzen Methode** Ein Ansatz ist die Anwendung der finiten Differenzen Methode (FD), bei der die Ableitung nach einem Parameter durch die Approximation des Differenzenquotienten ermittelt wird. Das Vorgehen wird anhand von Gleichung (2.17) deutlich.

$$\left. \frac{\partial r(x)}{\partial x} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta x} \approx \frac{r(x_0 + \Delta x) - r(x_0)}{\Delta x} \quad (2.17)$$

Für die Berechnung nach (2.17) ist für jede Variable  $x$  eine zusätzliche vollständige Systemauswertung notwendig, weshalb dieses Vorgehen oft ineffizient ist. Der Vorteil liegt auf der anderen Seite in der einfachen Implementierbarkeit. Aus numerischer Sicht ist bei der Wahl von  $\Delta x$  Vorsicht geboten, da der Wert weder zu klein (Überbewertung von Rundungsfehlern aufgrund finiter Rechenarithmetik) noch zu groß (ungenau Approximation) gewählt werden darf.

**Analytische und semianalytische Berechnung** Ein spezieller Fall liegt vor, wenn die Systemantworten mittels FEM berechnet werden. Dabei kann die Gradientenberechnung entscheidend vereinfacht werden. Betrachtet man die statische FEM-Grundgleichung  $\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}$  (vgl. Abschnitt 2.2.1) und leitet die Größen nach dem Systemparameter ab, so ergibt sich der Zusammenhang 2.18, wobei hier angenommen wird, dass der Lastvektor von den Systemparametern unabhängig ist. Nach Anwendung der Kettenregel bei der Differentiation lässt sich der Gradient des Verschiebungsvektors angeben.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K}\mathbf{d} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d} \quad (2.18)$$

Der Vorteil des Vorgehens liegt darin begründet, dass durch eine vorangehende Systemlösung mit direkten Verfahren bereits die Faktorisierung  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$  und der Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  vorliegen. Dies erlaubt eine kostengünstige Berechnung (Näheres später in Abschnitt 2.2.2). Folglich muss nur noch die Ableitung der Steifigkeitsmatrix  $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{x}$  gebildet werden. Ist dies analytisch möglich, so spricht man von analytischer Gradientenberechnung, wobei nur die Rundungsfehler aus der Computerarithmetik Abweichungen bedingen. Für die analytische Berechnung müssen programmintern die Ableitungen der Elementsteifigkeits-

matrizen nach den jeweiligen Parametern vorliegen.

Mit semianalytischer Gradientenberechnung bezeichnet man die Anwendung von (2.17) auf die Ableitung  $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{x}$  in (2.18), die auf Beziehung (2.19) führt.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0} \approx \frac{\mathbf{K}([x_{01} + \delta_{j1} \Delta x_1, \dots, x_{0i} + \delta_{ji} \Delta x_i]^T) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_0)}{\delta_{j1} \Delta x_1 + \dots + \delta_{ji} \Delta x_i} \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, n_{\text{ov}}\} \quad (2.19)$$

Diese Ableitung ist oftmals auch mit Hilfe des FD-Schemas leicht zu berechnen. Beispiele für die Sensitivitätsanalyse verschiedener wichtiger strukturmechanischer Systemantworten finden sich bei [5] und [46].

**Adjungierte Gradienten** Bei Sensitivitätsanalysen mit mehreren Restriktionen und Optimierungsvariablen ist aus Gründen der numerischen Effizienz das Verhältnis aus der Anzahl der Optimierungsvariablen und der Restriktionen zu beachten. Zusammen mit (2.18) lässt sich die Gradientenberechnung der Restriktionen durch das Gleichungssystem (2.20) beschreiben.

$$\frac{dg_k}{dx_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k}{\partial d_j} \frac{\partial d_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k}{\partial d_j} \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \right) \quad (2.20)$$

Eine explizite Abhängigkeit der Restriktionen von den Optimierungsvariablen besteht meist nicht oder gestaltet sich einfach, sodass nur noch die Diskussion des letzten Summanden in Gleichung (2.20) bleibt. Das Matrizenprodukt ist in Abb. 2.6 schematisch dargestellt und zeigt die unterschiedlichen Dimensionen in Abhängigkeit der Anzahl der Restriktionen  $n_{\text{rs}}$  und der Optimierungsvariablen  $n_{\text{ov}}$ .

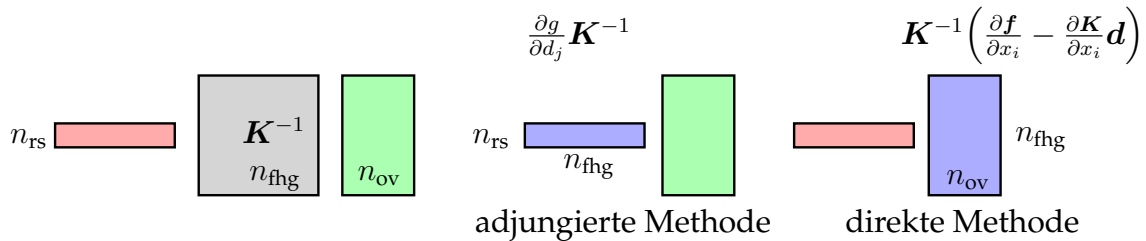


Abbildung 2.6.: Dimensionen der unterschiedlichen Teile der Ableitung

Dabei wird deutlich, dass die Berechnung auf zwei unterschiedliche Weisen durchgeführt werden kann, wobei die Multiplikation der Inversen prozedural zu verstehen ist (vgl. Abschnitt 2.2.2). Wie in Gleichung (2.21) beziehungsweise Gleichung (2.22) zu erkennen, liegt der Unterschied darin, mit welcher Seite die Inverse zuerst multipliziert wird. Dies ist in der Grafik farblich markiert.

$$\frac{\partial g_k}{\partial d_j} \mathbf{K}^{-1} \quad \text{für } n_{\text{rs}} \leq n_{\text{ov}} \quad \Rightarrow \quad \text{adjungierte Methode} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \right) \quad \text{für } n_{\text{rs}} > n_{\text{ov}} \quad \Rightarrow \quad \text{direkte Methode} \quad (2.22)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Multiplikation zur blauen Matrix in Abb. 2.6 führt, die für die beiden Fälle im Allgemeinen unterschiedliche Dimension aufweist. Daher sollte die Be-

rechnung gemäß der Unterscheidung in Gleichung (2.21) und Gleichung (2.22) erfolgen, da dies den Lösungsaufwand drastisch senken kann. [45, S.263]

Im Rahmen der Topologieoptimierung hat die adjungierte Methode eine besonders große Bedeutung, da das Verhältnis  $n_{ov}$  zu  $n_{rs}$  meist sehr groß ist, woraus sich ein erhebliches Einsparpotential durch adjungierte Gradienten ergibt.

### 2.1.8 Mehrzieloptimierung

Wie in 2.1.1 bereits erwähnt, können auch mehrere Ziele berücksichtigt werden, wodurch sich ein Zielfunktionsvektor ergibt. Zu dieser Situation kann es beispielsweise kommen, wenn in einer Topologieoptimierung, wie in Abschnitt 5.1.1, mehrere Lastfälle gleichzeitig berücksichtigt werden, die alle Beiträge zur Zielfunktion liefern. Bei der Minimierung der unterschiedlichen Ziele entsteht der Konflikt, dass mit der Verringerung einer Zielfunktion eine andere ansteigt. Dieses konkurrierende Verhalten der Ziele ist typisch für die Mehrzieloptimierung und führt auf den Begriff der *Pareto-Optimalität*. Ein Optimum hängt dabei immer von der Gewichtung der einzelnen Ziele ab. Bei der Definition des Optimierungsproblems muss entsprechend diese Priorisierung vorgenommen werden, die eine große Herausforderung darstellen kann. Mit Hilfe von Gewichtungen  $\omega_i$  lässt sich eine Ersatzfunktion der Form  $f(\mathbf{x}) = \sum_i \omega_i z_i(\mathbf{x})$  definieren, deren Minimum die Lösung der Mehrzieloptimierung ist. In Abbildung 2.7 sind zwei Zielfunktionen  $z_1$  und  $z_2$  über zwei Optimierungsvariablen dargestellt.

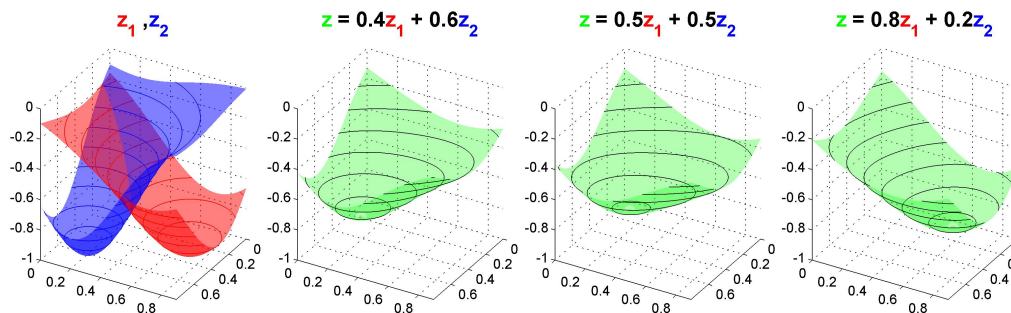
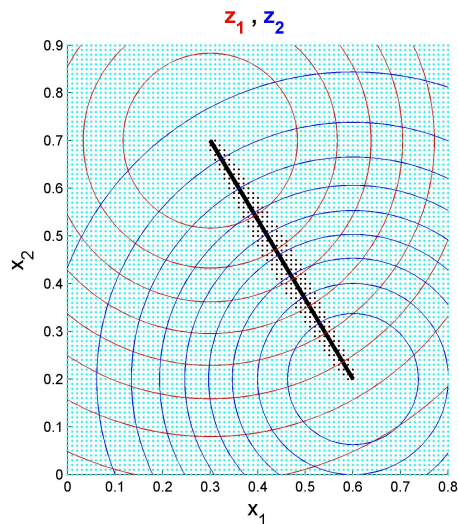
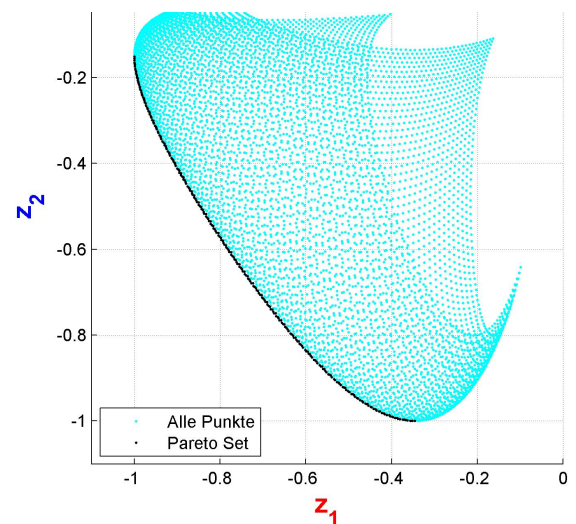


Abbildung 2.7.: Zwei Ziele bei unterschiedlichen Gewichtungen

Für drei unterschiedliche Gewichtungen sind in den rechten drei Graphiken die resultierenden gewichteten Zielfunktionen zu sehen. Dabei wird deutlich, wie sich die optimale Lösung durch die Gewichtung verschiebt. Keine der drei Lösungen kann als besser oder schlechter bezeichnet werden, da es sich stets um ein Optimum für eine anwenderdefinierte Priorisierung handelt.

Die Menge aller Lösungen der Mehrzieloptimierungsaufgabe wird als *Pareto-Front* (vgl. [90]) bezeichnet. Für das gegebene Beispiel sind in Abbildung 2.8(a) die Isolinien der Zielfunktionen abgebildet. Die an den cyanfarbig markierten Punkten ausgewerteten Zielfunktionswerte sind in 2.8(b) aufgetragen, wodurch die *Pareto-Front* beziehungsweise das *Pareto-Set* deutlich wird.

(a) Pareto-optimale Lösungen über  $x$ 

(b) Pareto-Front über dem Wertebereich der Zielfunktionen

Abbildung 2.8.: Beispiel zur Mehrzieloptimierung

In Abbildung 2.8(a) liegen die *Pareto*-optimalen Lösungen auf der schwarzen Linie. Wegen der diskreten Auswertung an den Stützstellen liegen die tatsächlichen Punkte der *Pareto*-Front in Abb. 2.8(b) neben dieser Linie. Für nähere Informationen zur Mehrzieloptimierung und Lösungsansätze sei auf [56] verwiesen.

## 2.1.9 Grundlagen der Topologieoptimierung

### 2.1.9.1 Optimierungsaufgabe

Klassischerweise wird bei der Topologieoptimierung die Nachgiebigkeit minimiert, wobei eine bestimmte Masse zur Verfügung steht. Dieser Fall ist in den Gleichungen (2.23) bis (2.26) nach [10] beschrieben. Die Massenrestriktion ist dabei immer aktiv, da grundsätzlich bei Einsatz allen Materials die höchste Struktursteifigkeit erzielt wird. Eine andere Möglichkeit ist das umgekehrte Vorgehen, wobei die Masse minimiert wird und Steifigkeitsrestriktionen eingeführt werden. Meist ist es jedoch einfacher eine bestimmte Masse vorzugeben, da dabei die physikalische Anschaulichkeit höher ist.

$$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{d}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{d} \mid g(\mathbf{x}) \leq 0, \rho_{\min} \leq x_i \leq 1) \quad (2.23)$$

$$\text{mit } i \in 1, \dots, n_{el} \text{ und } \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad \rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{x}) \text{ FEM-Gleichung} \quad (2.24)$$

$$\text{und } g(\mathbf{x}) = \frac{\sum_i^{n_{el}} m_i(x_i)}{\bar{m}} - 1 \quad \text{Massenrestriktion} \quad (2.25)$$

$$\text{und } x_i = \frac{\rho_i}{\rho_0} \quad \text{Systemparameterzusammenhang} \quad (2.26)$$

Die Bedingungen in (2.24) fordern zum einen die Lösung des linearen FEM-Gleichungssystems, die Einhaltung der Massenrestriktion und legen die Definition der Optimierungsvariablen fest. Es können grundsätzlich weitere Restriktionen berücksichtigt werden, worauf hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird.

### 2.1.9.2 Optimierungsvariablen in der Topologieoptimierung

Für die Lösung des Topologieoptimierungsproblems stehen unterschiedliche Strategien zur Verfügung, die von *Deaton* in [25] in vier Methoden unterteilt werden. Dies sind:

(1) „Density“- (2) „Hardkill“- (3) „Boundary variation“- und (4) „Cellular division methods“. Je nach Verfahren werden dabei unterschiedliche Parametrierungen eingesetzt, über die hier ein kurzer Überblick gegeben wird.

Bei den Dichtemethoden wird die Materialverteilung über Elementdichten gesteuert. Wichtige Grundlagen wurden dabei von *Bendsøe* in [10] gelegt, der durch die Entwicklung des SIMP-Ansatzes eine Möglichkeit schuf, die Dichte mit der Steifigkeit in Verbindung zu bringen. Die Dichtemethode ist wegen ihrer Anschaulichkeit und guten Anwendbarkeit weit verbreitet und findet auch in der vorliegenden Arbeit Anwendung.

Bei den „Hard kill“-Methoden wird nicht die Dichte kontinuierlich verändert, sondern es werden Elemente aus dem Bauraum entfernt. Die Optimierungsvariablen stehen entsprechend für „Element liegt vor“ beziehungsweise „kein Element liegt vor“. Nach verschiedenen heuristischen Kriterien werden die zu entfernenden Elemente anhand des jeweiligen Spannungszustandes ausgewählt. Die Verfahren werden meist unter dem Oberbegriff „Evolutionary Structural Optimization“ (ESO) nach [85] zusammengefasst. Dazu zählen auch die „Softkill“-Varianten, bei denen die Elemente als sehr weich angenommen werden und nicht komplett entfernt werden, um numerische Probleme zu vermeiden. Weiter wurde das Lösungsvorgehen um das „Bidirectional-ESO-Verfahren“ (BESO) erweitert, bei dem nicht nur Material weggenommen, sondern auch hinzugefügt werden kann. ([46, S.77], [57])

Ein weiterer Ansatz ist die „Boundary Variation Method“, bei der die Topologie anhand von Isolinien skalarwertiger Funktionen beschrieben wird. Diese werden im Laufe der Optimierung angepasst, wodurch sich die jeweilige Topologie ergibt. Für Details sei auf die Übersicht in [27] verwiesen.

Bei den „Cellular division“-Methoden entsteht die Topologie durch eine schrittweise Aufteilung des Bauraumes, wobei biologische Wachstumskonzepte berücksichtigt werden. Das Vorgehen steht noch am Anfang der Entwicklung und die Optimierung erfolgt mit Hilfe von evolutionären Algorithmen.

Im weiteren werden die etablierten Dichtemethoden betrachtet. Dabei handelt es sich um eine mathematische Modellvorstellung, da in der Realität Materialien nicht mit stark unterschiedlichen Dichten vorliegen können. Ausgangspunkt ist der diskretisierte Bauraum, in dem den einzelnen Elementen unterschiedliche Dichten zugewiesen werden. Dadurch ändert sich gleichzeitig ihr strukturmechanisches Verhalten. Der Grad der Befüllung der einzelnen Elemente steuert dann global gesehen die Verteilung der zur Verfügung stehenden Masse. Für Details und weitere Parametrierungsvorgehen sei auf [9] und die folgenden Abschnitte verwiesen. Die Optimierungsvariablen  $x$  sind die gemäß der Gleichung (2.26) normierten Dichten der Elemente wobei  $\rho_0$  der realen Dichte des Werkstoffs entspricht. Die Anzahl aller Elemente des Bauraumes ist  $n_{el}$  und nimmt in der Regel einen sehr großen Wert an.

## 2.1.9.3 Zusammenhang von Dichte und Steifigkeit - SIMP-Ansatz

Die Nachgiebigkeit  $f^T d$  wurde hier mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix in der Form  $d^T K(x)d$  formuliert, um den Zusammenhang der Zielfunktion mit den Optimierungsvariablen aufzuzeigen. Die Änderung der Dichte muss auch eine Änderung des strukturellen Verhaltens nach sich ziehen, da sonst kein Einfluss auf die Zielfunktion, die hier die Nachgiebigkeit ist, vorliegen würde. Die Verbindung zwischen Dichte und Steifigkeit wird dabei in der Regel durch den SIMP-Ansatz („Solid Isotropic Material with Penalization“) in Gleichung (2.27) beschrieben [8]. Dabei ist zu verhindern, dass die Steifigkeit bei der minimalen Dichte auf null abfällt, da sonst die Steifigkeitsmatrix singulär wird. Deshalb wurde von *Sigmund* eine modifizierte Formulierung in [77] vorgeschlagen, bei der die untere Grenze direkt berücksichtigt wird (vgl. (2.28)). Dabei gilt  $x_i \in \mathbb{D} = [0, 1]$ .

$$\frac{E_i}{E_0} = x_i^p \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{R}^+ \quad p \geq 1, \quad i \in 1, \dots, n_{el} \quad (2.27)$$

$$\frac{E_i}{E_0} = \frac{E_{min}}{E_0} + x_i^p \left(1 - \frac{E_{min}}{E_0}\right) \quad \text{mit} \quad E_{min} \approx 0.001E_0 \quad (2.28)$$

Für den Penalisierungsparemeter  $p$  lässt sich nach [46] zeigen, dass im 2-dimensionalen Fall für  $p \geq 3$  und im 3-dimensionalen für  $p \geq 2$  ein physikalisches Materialverhalten vorliegt (vgl. [9]). Die Abbildung 2.9 zeigt die Verläufe des Steifigkeits- Dichtezusammenhanges für die beiden Ansätze.

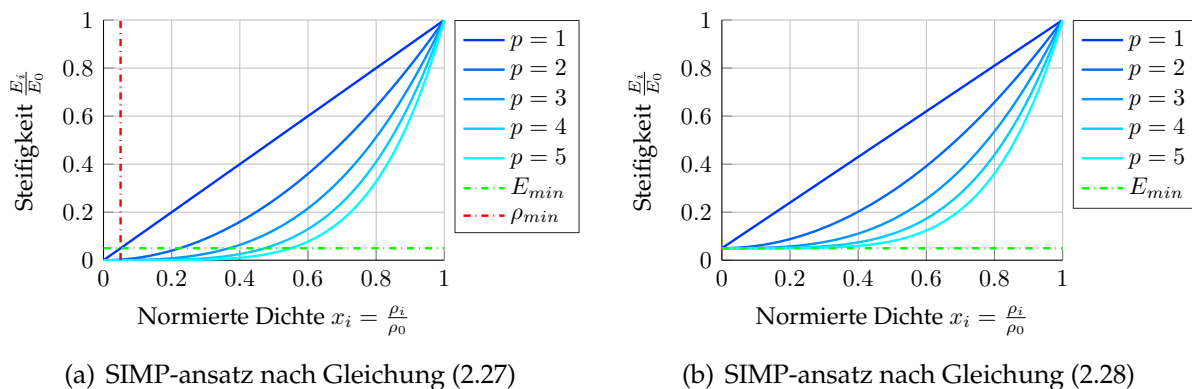


Abbildung 2.9.: Beschreibung des Dichte- Steifigkeitsverhältnisses

Oft zeigen sich breite Dichteübergangsbereiche in Ergebnistopologien. Dies ist unerwünscht, da eine klare Abgrenzung zwischen Material und Hohlraum im Bauraum die Ergebnisinterpretation vereinfacht und Zwischendichten physikalisch nicht interpretierbar sind. Durch den Penalisierungsfaktor  $p$  in Gleichung (2.27) kann erreicht werden, dass die Übergangsbereiche der Dichte eingedämmt werden. Betrachtet man den Zusammenhang von Dichte und Steifigkeit in Abbildung 2.9 ist zu erkennen, dass bei größeren Werten von  $p$  die Steifigkeit sich für niedrige Dichten kaum und für hohe Dichten stark ändert. Für niedrige Dichten ergibt sich nur ein geringer Steifigkeitsvorteil bei Erhöhung der Dichte, gleichzeitig kann aber viel Material gespart werden. Für höhere Dichten hingegen bringt schon ein kleiner Anstieg große Steifigkeitsgewinne. Auf diese Weise ergibt sich für große Werte von  $p$  ein sogenannt-

tes „0-1 Design“, bei dem die Elementdichten bei  $\rho_{\min}$  oder  $\rho_{\max}$  liegen. Oftmals wird dieser Parameter während der Optimierung schrittweise erhöht, um eine deutliche Materialverteilung zu erhalten und das Konvergenzverhalten zu verbessern. Dies wird in Abs. 4.4.4.3 deutlich.

### 2.1.9.4 Optimierungsalgorithmen

Zur Lösung werden unterschiedlichste Verfahren eingesetzt. Für das dichtenbasierte Vorgehen mittels SIMP-Ansatz werden vor allem das Optimalitätskriterienverfahren (OC) von *Bendsøe* (vgl. [10]) und der MMA-Algorithmus (vgl. [81]) angewendet, die in Kapitel 4.4.3 näher untersucht und anhand eines Beispiels gegenübergestellt werden. In der Praxis ist der MMA-Algorithmus der Standard für die Lösung von Topologieoptimierungsproblemen. Sein großer Vorteil ist die hohe Flexibilität bei der Lösung unterschiedlichster Optimierungsprobleme.

### 2.1.9.5 Instabilität der Lösung - „Checkerboarding“

Werden keine speziellen Maßnahmen ergriffen, dann ergeben sich Ergebnistopologien, die den sogenannten „Checkerboard“-Effekt zeigen. Diese Schachbrettmuster beziehen sich auf abwechselnd befüllte und leere Elemente, die so ein schwarz-weißes Schachbrettmuster ergeben. Die befüllten beziehungsweise leeren Elemente teilen sich also jeweils Randknoten, jedoch keine Randkanten. Der Effekt erklärt sich nach *Bendsøe* durch numerische Instabilitäten bei der FEM-Rechnung, die die Steifigkeit derartiger Schachbrettmuster überschätzt (vgl. [10, S.39]). Um diesem Effekt zu begegnen, müssen in jeder Iteration der Optimierung Filter angewendet werden. So wurde durch *Bendsøe* [10] eine Filterung des Dichtefeldes vorgeschlagen, bei der die Dichte jedes Elementes aus den Dichten der in einem vorgegebene Radius umliegenden Elemente gemittelt wird. Die Dichte weiter entfernter Elemente wird dabei geringer gewichtet. Eine andere Möglichkeit besteht in der Filterung der Gradienten [10, S.19]. Näheres dazu wird in Abschnitt 4.4.4.1 diskutiert.

## 2.2 Finite Elemente Methode

Die Berechnung von Systemantworten in der Strukturoptimierung wird standardmäßig mittels der Finite-Elemente-Methode durchgeführt. In den folgenden Abschnitten werden Gleichungen und Eigenheiten der numerischen Lösung angesprochen, deren Verständnis wichtig für Aspekte der Optimierung und der Modellordnungsreduktion ist. Auch wenn der Ingenieur sich heutzutage durch die hochentwickelten Berechnungsprogramme mit dem Lösungsprozess nicht näher befassen muss, so trägt das genaue Verständnis des Numerik dazu bei, dass Rechenergebnisse besser verstanden werden. Für Ordnungsreduktionsmethoden, die in Kapitel 3 untersucht werden, muss der Zugriff auf den Lösungsprozess gegeben sein, da beispielsweise der Projektionsunterraum für die Reduktion auf Grundlage der FEM-Matrizen ermittelt wird.



## 2.2.1 Diskretisierte Feldgleichungen und Gleichungssysteme

Die Finite-Elemente-Methode ist eine Berechnungsmethode für partielle Differentialgleichungen (PDGL). Da diese nur für einfache Sonderfälle analytisch lösbar sind, ist eine approximative Lösung notwendig. Für mechanische Problemstellungen sind die Feldgleichungen über den Raumkoordinaten und der Zeit definiert. In diesen Parametern müssen die Gleichungen diskretisiert werden. In (2.29) bis (2.35) ist das dynamische, kontinuumsmechanische Randwertproblem beschrieben, worin  $\Omega$  das Rechengebiet und  $t$  die Zeit ist. Durch (2.31) ist die Dehnung hier als linear beschrieben und in (2.30) ist die Konstitutivgleichung gegeben. In (2.32) bis (2.35) sind die Rand- und Startwerte definiert, die für die spezielle Lösung der Differentialgleichung (DGL) notwendig sind.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \hat{x}_j} + b_i = \rho a_i \quad \text{in } \Omega, \forall t \quad (2.29)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{in } \Omega, \forall t \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \hat{x}_k} \right) \quad \text{in } \Omega, \forall t \quad (2.31)$$

$$u_i = u_{i0} \quad \text{auf } \Gamma_u, \forall t \quad (2.32)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_{i0} \quad \text{auf } \Gamma_\sigma, \forall t \quad (2.33)$$

$$u_i(\hat{x}_j, t_0) = u_{0,i} \quad \text{in } \Omega \quad (2.34)$$

$$v_i(\hat{x}_j, t_0) = v_{0,i} \quad \text{in } \Omega. \quad (2.35)$$

Dabei werden Feldgrößen wie  $\sigma_{ij}$  und  $u_i$  näherungsweise durch Formfunktionen  $N^i$  nach dem Prinzip (2.36) beschrieben, woraus sich die Diskretisierung der PDGL ergibt.

$$u_j(\mathbf{r}) = \sum_i N^i(\mathbf{r}) d_j^i \quad \text{mit } N^i = 0 \quad \text{falls } \mathbf{r} \notin \Omega_{el}^i \quad (2.36)$$

Dies führt je nach Diskretisierungsgrad auf Gleichungssysteme mit oft sehr vielen Unbekannten. Für lineare dynamische und statische Systeme sind in (2.37) und (2.38) die Differentialgleichungen gegeben.

$$M\ddot{\mathbf{d}} + D\dot{\mathbf{d}} + K\mathbf{d} = \mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad \text{mit } M, D, K \in \mathbb{R}^{n_{\text{fhg}} \times n_{\text{fhg}}} \quad (2.37)$$

$$K\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad \text{mit } \mathbf{d}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fhg}}} \quad (2.38)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade (FHG) wird mit  $n_{\text{fhg}}$  bezeichnet. Es entsteht also eine DGL zweiter Ordnung beziehungsweise ein lineares Gleichungssystem (LGS).

In Tabelle 2.2 ist ein grober Überblick über die Arbeitsschritte im FEM-Prozess gegeben. Darin werden ausgehend von der Modellgeometrie (1), der Elementtechnologie (2), Materialeigenschaften (3) und dem Analysetyp (4) die Lösungsschritte (5)-(8) aufgezeigt. Diese Aufteilung erfolgt hier in Hinblick auf die MOR-Methoden, die in Abschnitt 2.5 näher dargestellt werden. Die Vielzahl an Aspekten der Numerik und verschiedener Anwendungen macht hier eine breitere Diskussion der Methode unmöglich. Für Grundlagen und weiter-

führende Informationen sei auf beispielsweise [7], [13] und [12] verwiesen.

Tabelle 2.2.: Rechenschritte bei der FEM

Finite Elemente Methode			
Geometrie (1)	Elementtechnologie (2)	Material (3)	Analysotyp (4)
- Knoten	- Ansatzfunktionen	- Dichte	- Lasten
- Elemente	- Freiheitsgrade	- Steifigkeit	- Zwangsbedingungen
Elementmatrizen berechnen (5)			- Lastfalltyp
Assemblieren (6)			
Gesperrte Freiheitsgrade entfernen (7)			
Lösung je nach Lastfall (8)			

### 2.2.2 Lösung linearer Gleichungssysteme - Inverse Matrizen

Für die Lösung des LGS, wie in Gleichung (2.38), sind die Dimension des Gleichungssystems und die Dichte der Belegung der Matrix  $\mathbf{K}$  entscheidend für den Berechnungsaufwand und die Wahl des Lösungsverfahrens. Die Ermittlung erfolgt theoretisch über die Invertierung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , da sich mit deren Hilfe die explizite Form  $\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$  schreiben lässt. In der Praxis ist die tatsächliche Ermittlung von  $\mathbf{A}^{-1}$  oft aus Speicherbedarfsgründen nicht möglich, meist aber auch gar nicht nötig. Im Folgenden sollen kurz Grundlagen praktisch relevanter Lösungsvorgehen dargestellt werden.

**Direkte Lösungsverfahren** Unter direkter Lösung werden Verfahren verstanden, die auf dem *Gauß*-Algorithmus basieren. Dieser Algorithmus faktorisiert die Systemmatrix in eine obere und eine untere Dreiecksmatrix, sodass  $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$  gilt. Ein wichtiger Spezialfall davon ist die *Cholesky*-Zerlegung, die auf eine Faktorisierung der Form  $\mathbf{K} = \mathbf{GG}^T$  führt. Sie ist anwendbar bei symmetrisch, positiv-definiten Matrizen, wie es beispielsweise Steifigkeitsmatrizen sind. Die *Cholesky*-Zerlegung weist einen halb so großen Aufwand wie die LU-Zerlegung auf.

Liegt die Faktorisierung in Dreiecksmatrizen vor, so kann durch Vorwärts- Rückwärtseinsetzen die Lösung ermittelt werden. Bis auf Rundungsfehler auf Grund endlicher Rechengenauigkeit ist das Verfahren exakt. Der Hauptaufwand liegt bei der Faktorisierung, nach der beliebige Lastfälle durch den Einsetzprozess sehr effizient berechnet werden können. [22]

**Indirekte Löser** Ein anderes Vorgehen sind indirekte Lösungsverfahren, die iterativ die Lösung annähern. Der Ausgangspunkt für das Verständnis der meisten indirekten Verfahren ist die Überführung der Gleichung (2.38) in eine Fixpunktgleichung  $\mathbf{d} = \mathbf{d} + \mathbf{C}(\mathbf{f} - \mathbf{Kd}) = \Phi(\mathbf{d})$ , worin  $\mathbf{C}$  frei gewählt werden kann. Die Fixpunktiteration folgt dem Schema  $\mathbf{x}^{k+1} = \Phi(\mathbf{x}^k)$ . Das Verfahren konvergiert nach [22, S.50] für  $\Phi'(\mathbf{d}) < 1$ . Aus dieser Form lässt sich das *Jacobi*-, das *Gauß-Seidel*- beziehungsweise das *SOR*-Verfahren herleiten.

Ein anderes Vorgehen besteht in der Minimierung der Funktion  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{Kd} - \mathbf{f}^T \mathbf{d}$ , woraus folgt, dass  $f'(\mathbf{d}) = \mathbf{Kd} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$  gelten muss und somit für positiv definites  $\mathbf{K}$  das Minimum die Lösung des Gleichungssystems repräsentiert. Auf Grundlage dieser Idee las-

sen sich Verfahren wie „Steilster Abstieg“ und „Konjugierte Gradienten“ ableiten. Die Wahl des Lösungsverfahrens hängt stark von der Struktur der Systemmatrix ab. Ist diese dünn besetzt, wie dies in der FEM normalerweise der Fall ist, lohnt sich der Einsatz von iterativen Verfahren. Für nähere Informationen sei auf die Fachliteratur verwiesen [22].

**Aufwände** Abbildung 2.10(a) gibt einen Überblick über die Speicheraufwände für dünnbesetzte und dichtbesetzte Speicherung der Steifigkeitsmatrix und ihrer Inversen sowie der LU-Faktorisierung. In Abb. 2.10(b) sind die Berechnungszeiten für die Inverse, die LU-Faktorisierung sowie das Vorwärts- Rückwärtseinsetzen gegenübergestellt.

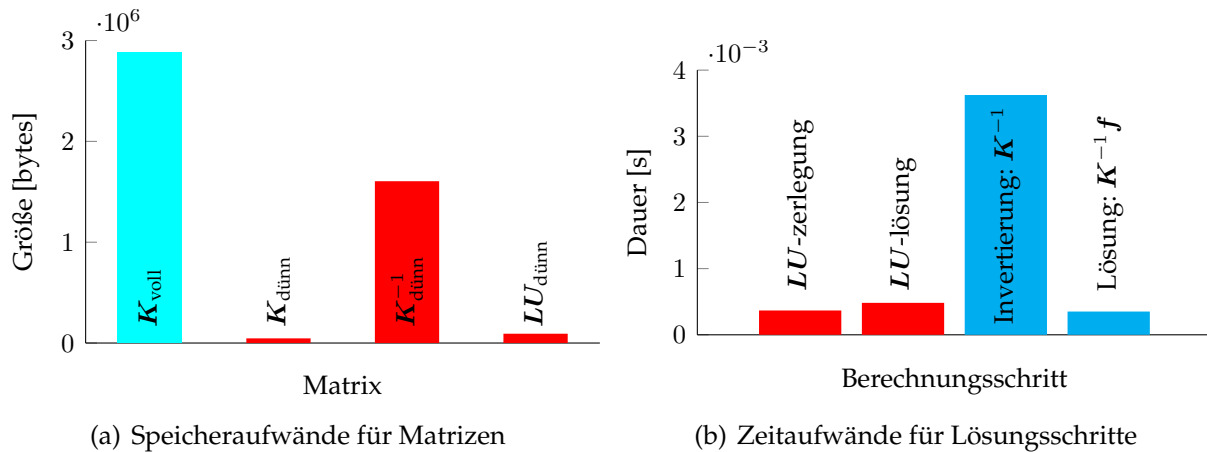


Abbildung 2.10.: Aufwände bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ( $n_{\text{fhg}} = 600$ )

Die Grafiken machen deutlich, dass die Ermittlung der Inversen vermieden werden sollte, da sie einerseits einen sehr hohen Speicherbedarf und zum anderen einen großen Berechnungsaufwand bedingt. Häufig ist die Inverse in mathematischen Herleitungen prozedural zu verstehen, was bedeutet, dass die praktische Lösung tatsächlich über die weiter oben beschriebenen Lösungsverfahren erfolgt. Für Systemmatrizen, wie sie bei der Berechnung mechanischer Strukturen auftreten, kann der Speicherbedarf für die Inverse schnell den zur Verfügung stehenden Speicher überschreiten. Schon für Systeme moderater Größe ist somit die Invertierung der Steifigkeitsmatrix in Abhängigkeit der Rechenanlage unmöglich. Die Systemmatrizen, die sich aus strukturmechanischen Problemen ergeben, sind in der Regel positiv definit und somit kann das *Cholesky*-Verfahren mit seinem geringeren Aufwand und der höheren Stabilität für die LU-Zerlegung genutzt werden.

## 2.3 Systemtheoretische Grundlagen

Die Systemtheorie ist ein sehr weites Feld, dessen detaillierte Darstellung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Es werden jedoch einige wichtige Grundlagen vorgestellt, die für das Verständnis der Ideen der Modellordnungsreduktion von Bedeutung sind.

### 2.3.1 Lineare Bewegungsdifferentialgleichung - Zustandsraummodell

In Gleichung (2.39) ist für ein lineares, dynamisches System das Gleichgewicht zwischen den massen- dämpfungs- und steifigkeitsproportionalen Kräften sowie dem Lastvektor beschrieben. Der Kraftterm auf der rechten Seite wird alternativ durch die Eingangsmatrix  $F$  und die Eingangsgrößen  $u$  beschrieben. Zusätzlich wird eine Gleichung für Systemausgänge  $y$  definiert, die als Linearkombination des Zustandsvektors  $d$  und seiner Zeitableitung formuliert ist.

$$M\ddot{d} + D\dot{d} + Kd = f = Fu \quad y = C_v\dot{d} + C_p d \quad (2.39)$$

Durch die Zustandsraumtransformation lässt sich ein lineares DGL-System beliebiger Ordnung in ein DGL-System erster Ordnung transformieren, was auf einen hohen Standardisierungsgrad führt. In (2.40) ist das sogenannte Deskriptorsystem dieser Transformation dargestellt, bei dem die Matrix  $N$  beliebig gewählt werden kann (In der Regel:  $N = I$ ).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{d} \\ d \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} -K & -D \\ 0 & N \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ \dot{d} \end{bmatrix}}_z + \underbrace{\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} u \quad y = \begin{bmatrix} C_p \\ C_v \end{bmatrix}^T z \quad (2.40)$$

Ist  $\hat{E}$  invertierbar, kann die Form des Zustandsraummodells (ZRM) in (2.41) hergestellt werden.

$$\dot{z} = Az + Bu \quad \text{und} \quad y = Cz \quad \text{mit} \quad (2.41)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}F \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \quad C_v]$$

Die Invertierbarkeit der Massenmatrix ist offensichtlich Grundvoraussetzung für diese Transformation. Die tatsächliche Berechnung der Inversen sollte vermieden werden, da sie sehr rechenintensiv und speicheraufwändig ist. Allerdings lässt sich dieser Schritt nicht immer vermeiden.

Die Invertierbarkeit der Massenmatrix ist nicht immer gegeben. Beispielsweise vernachlässigen FEM-Programme häufig die Trägheit von Freiheitsgraden senkrecht zu Schalenelementen. Dadurch entstehen Nullspalten in der Massenmatrix die dazu führen, dass  $M$  nicht mehr invertiert werden kann. In [78] sind die Zusammenhänge für differentialalgebraische Systeme dargelegt und wie diese behandelt werden können.

### 2.3.2 Systemeigenschaften

**Linearität** Ein DGL-System wird als linear bezeichnet, wenn sich das Systemverhalten gemäß Gleichung (2.40) schreiben lässt. Daraus folgt, dass die Matrizen nicht von den Zuständen abhängen. Lineare Systeme können im Vergleich zu nichtlinearen Systemen einfacher gelöst werden und beschreiben dynamische Systeme oft hinreichend genau. Der Zugang zum Systemverhalten mittels der Modalanalyse, die von linearen Systemen ausgeht, bringt gerade im strukturmechanischen Bereich Vorteile mit sich. In der Realität sind die meisten

Zusammenhänge tatsächlich nichtlinear und werden für die Analyse extra linearisiert.

**Stabilität und Passivität** Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn dessen Ausgangsgröße bei begrenztem Eingangssignal ebenfalls begrenzt bleibt. Dafür müssen die Pole der Systemdynamik in der linken komplexen Halbebene liegen und folglich negative Realteile aufweisen. Der zugehörige Eigenmode klingt entsprechend mit der Zeit ab. Die physikalische Aussage der Pollage ist somit die der Energieerhaltung. Passivität ist damit eng verknüpft. Sie beschreibt die Eigenschaft eines Systems, keine Energie zu produzieren und entspricht somit der Forderung aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Dies führt beispielsweise dazu, dass ein System, das aus einer Ruhelage ausgelenkt wird, in eine Ruhelage zurückkehrt. Detailliertere Erläuterungen finden sich beispielsweise in [55].

### 2.3.3 Übertragungsverhalten

Die Übertragungsfunktion in Abhängigkeit der Matrizen des Deskriptorsystems (2.40) beziehungsweise des Systems 2. Ordnung (2.39) können durch *Laplace*-Transformation in der Form (2.42) beziehungsweise (2.43) geschrieben werden. Die Beschreibung anhand des Deskriptorsystems ist allgemeiner und wird daher der Beschreibung mittels der ZRM-Matrizen vorgezogen.

$$G(s) = C(\hat{A} - s\hat{E})^{-1}\hat{B} \quad \text{Deskriptorsystem} \quad (2.42)$$

$$G(s) = (C_p + sC_v)(s^2M + sD + K)^{-1}F \quad \text{System 2. Ordnung} \quad (2.43)$$

Das Übertragungsverhalten lässt sich elegant auch im modalen Raum beschreiben. Dies wird in Abschnitt 2.4.5 aufgezeigt. In Abbildung 2.11 ist für ein einfaches proportional gedämpftes Schwingersystem die Transferfunktion (TF) dargestellt.

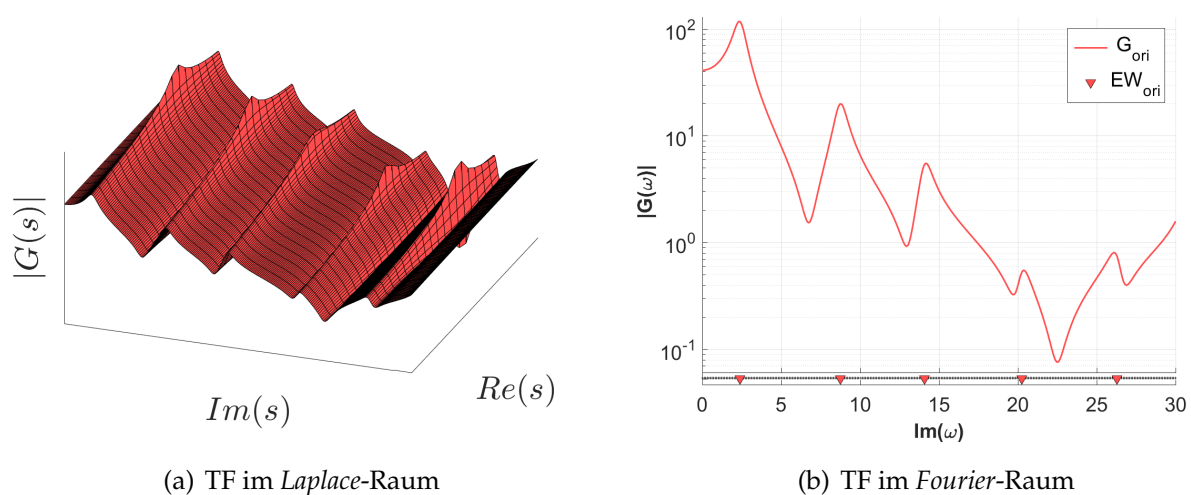


Abbildung 2.11.: Übertragungsfunktion

Dabei wird das typische Verstärkungsverhalten bei den Systempolen deutlich. Während in Abbildung 2.11(a) die TF über der komplexen Viertelebene (*Laplace*-Bereich) gezeigt ist, wird in 2.11(b) die gleiche TF nur über der imaginären Achse (*Fourier*-Raum) gezeigt. Dies ist in der Regel die übersichtlichere Darstellung, die bereits viele wichtige Informationen über die Systemdynamik zur Verfügung stellt. Für nähere Informationen zur Beschreibung und Auswertung von dynamischen Systemen sei auf [61] verwiesen.

## 2.4 Vektorräume und Grundlagen der linearen Algebra

### 2.4.1 Matrizeneigenschaften

Durch Matrizen lassen sich lineare Gleichungssysteme der Form  $M\mathbf{u} = \mathbf{f}$  mit  $M \in \mathbb{K}^{n \times m}$  und  $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{K}^m$  beschreiben, die in vielfältigsten Anwendungen eine Rolle spielen. Für  $n = m$  ist das System bestimmt und es ergibt sich eine quadratische Matrix  $M$ , wie sie bereits in Gleichung (2.38) verwendet wurde. Wenn  $n > m$  ist das System überbestimmt und führt auf ein Ausgleichsproblem.

Eine wichtige Matrizeneigenschaft im Kontext der projektiven Modellordnungsreduktion und der numerischen Mathematik ist die Orthogonalität. Dabei gilt für eine orthogonale Matrix  $M^T M = \delta_{ij} v_{ij}$ , worin  $\delta_{ij}$  das *Kronecker-Delta* ist (siehe auch (2.44)). Dieses Konzept lässt sich auf komplexe Matrizen erweitern. Man spricht dann von einer unitären Matrix, wenn die konjugiert komplexe Transponierte  $M^* = \Re(M^T) + (-1)\Im(M^T)$  im Produkt (2.45) die Einheitsmatrix ergibt.

$$M^T M = M^{-1} M = I \quad \text{für} \quad M \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (2.44)$$

$$M^* M = M^{-1} M = I \quad \text{für} \quad M \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad (2.45)$$

Daraus wird eine wichtige Eigenschaft orthonormaler Matrizen deutlich. Ihre Invertierung entspricht der viel einfacheren Transposition. Eine weitere im Kontext der linearen Algebra wichtige Eigenschaft ist die positive Definitheit, bei der  $\mathbf{v}^T M \mathbf{v} > 0 \quad \forall \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  gilt. In der Optimierung kann man anhand der Definitheit der *Hesse*-Matrix bewerten, ob Lösungen tatsächlich Minima sind.

Der Rang einer Matrix macht Aussagen darüber, wie viele linear unabhängige Vektoren in einer Matrix enthalten sind. Bei linearer Unabhängigkeit aller Vektoren ist die Matrixdeterminante ungleich null und die Matrix hat vollen Rang. Dies hat Auswirkungen darauf ob das Gleichungssystem lösbar ist [33].

Weitere Eigenschaften betreffen die Belegungsstruktur von Matrizen. Beispielsweise spricht man von einer symmetrischen Matrix wenn  $m_{ij} = m_{ji}$  für alle Indizes gilt. Die Symmetrie lässt sich bei den Systemmatrizen physikalischer Systeme in Verbindung mit der Energieerhaltung bringen, da sie beispielsweise bei mechanischen Systemen Kräftegleichgewichte widerspiegelt. Enthält die Matrix viele Nulleinträge spricht man von dünnbesetzten Matrizen, deren numerischer Lösung andere Strategien zugrunde liegen als bei dichtbesetzten Matrizen (vgl. Abschnitt 2.2.2).

### 2.4.2 Basisdarstellungen und Vektorräume

Die Ideen der Modellordnungsreduktion basieren auf der Verwendung von Untervektorräumen, zu denen hier einige Definitionen diskutiert werden sollen. Zunächst wird die Basis-Komponentendarstellung in (2.46) eingeführt, worin die  $k_{ij}$  eine vollständige Basis des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist und  $v^j$  die Vektorkomponenten enthält. Die Basisvektoren müssen linear unabhängig sein.

$$\mathbf{v} = k_{ij}v^j = \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \mathbf{k}_j v_j \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, \dots, n_{\text{dim}}\} \quad (2.46)$$

Die Umrechnung der Koordinaten eines Vektors für verschiedene Basen erfolgt gemäß (2.47). Dabei sind die Basisvektoren durch die Spaltenvektoren in  $b_{ik}$  und  $k_{ij}$  gegeben sowie die Komponenten  $b^k$ . Die Berechnung der Koordinaten  $k^j$  erfolgt dann durch Invertierung von  $k_{ij}$ , was in (2.48) dargestellt ist.

$$k_{ij}k^j = b_{ik}b^k \quad (2.47)$$

$$k^j = k_{ji}b_{ik}b^k = q_{jk}b^k \quad (2.48)$$

Ein Vektorraum  $\mathcal{V}$  wird durch eine Reihe von Vektoren  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  aufgespannt. Dies kann durch den Spann-Operator  $\mathcal{V} = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  ausgedrückt werden. Die allgemeine Definition sowie die Anforderungen an Vektorräume sind in [17, S.140] nachzulesen. Ein Untervektorraum  $\mathcal{U}$  liegt vor, wenn  $\mathcal{U} = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  mit  $k < n$  gilt. In Abbildung 2.12 ist der  $\mathbb{R}^3$  durch die Vektoren  $\mathbf{b}_i$  aufgespannt und ein Untervektorraum  $\mathcal{V}$  mit den beiden Basisvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  gezeigt.

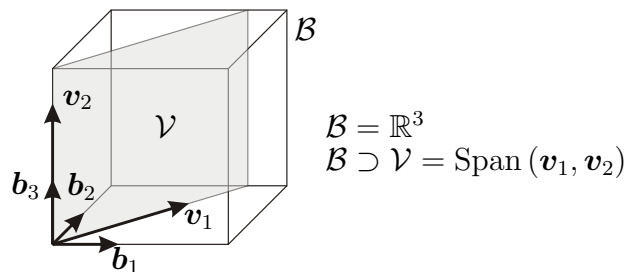


Abbildung 2.12.: Prinzipalskizze eines Untervektorunterraumes des  $\mathbb{R}^3$

Unterschiedliche Vektorräume können durch den *Zassenhaus*-Algorithmus verglichen werden. Das Verfahren ermittelt Basisvektoren für den Untervektorraum  $\mathcal{V} = \mathcal{S} + \mathcal{T}$  und gleichzeitig die Basis für den Schnittraum der Vektorräume  $\mathcal{V} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ . Damit sind Bewertung und Vergleich unterschiedlicher Vektorräume möglich [33]. Sind Basen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  der Vektorräume gegeben, so wird die Blockmatrix  $\mathbf{B}$  gemäß (2.49) aufgebaut.  $\mathbf{B}$  wird durch Gauß-Elimination auf Zeilenstufenform gebracht und erhält  $\mathbf{B}_{\text{Gauß}}$ . Die Basisvektoren des Vereinigungsraumes  $\mathbf{B}_{\cup} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und Schnittraumes  $\mathbf{B}_{\cap} \in \mathbb{R}^{b \times m}$  können darin direkt abgelesen werden.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{Gauß}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\cup}^T & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\cap} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

### 2.4.3 Projektionsabbildungen

Die Projektion ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  auf sich selbst, die hier durch die Abbildungsmatrix  $\mathbf{P}$  beschrieben wird. Diese wird als Projektor bezeichnet. Für eine Projektionsabbildung muss  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$  gelten. Eine wiederholte Abbildung verändert folglich das Ergebnis nicht. Durch die Projektion werden Vektoren des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  entlang des Kerns der Abbildung auf das Bild abgebildet.

Der Bildraum wird durch die Vektoren in  $\mathbf{V}$  aufgespannt und der Kern durch das orthogonale Komplement  $\mathcal{W}^\perp$  von  $\text{Span}(\mathbf{W})$ . [33]

$$\text{Bild}(\mathbf{P}) = \text{Span}(\mathbf{V}) \tag{2.50}$$

$$\text{Kern}(\mathbf{P}) = \mathcal{W}^\perp \tag{2.51}$$

Der Projektor ist in (2.52) in Abhängigkeit der Basisvektormatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  beschrieben, die die Untervektorräume  $\text{Bild}(\mathbf{P})$  und  $\text{Kern}(\mathbf{P})$  festlegen.

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \tag{2.52}$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{P}$  können nur 1 oder 0 sein. Dies bedeutet, dass manche Komponenten durch die Abbildung erhalten bleiben, andere jedoch ausgelöscht werden. Entsprechend gehen durch die Projektion die Komponenten des abgebildeten Vektors, die in  $\text{Kern}(\mathbf{P})$  liegen, verloren.

Wenn neben  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$  noch  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  gilt, dann spricht man von einer orthogonalen Projektion, sonst von einer schiefen. Der Unterschied ist in der Abb. 2.13 für den  $\mathbb{R}^3$  dargestellt.

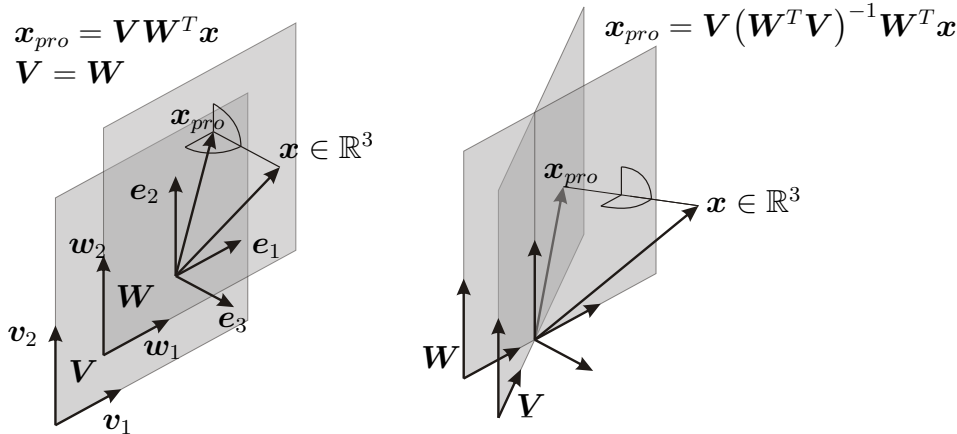


Abbildung 2.13.: Projektionsprinzip: orthogonal und schief

Werden für die Definition der Unterräume orthonormale beziehungsweise biorthonormale Basen verwendet (2.53), dann vereinfacht sich der Projektor zu  $\mathbf{P} = \mathbf{V} \mathbf{W}^T$ . Im Falle der orthogonalen Projektion ist  $\mathbf{V} = \mathbf{W}$  und es gilt  $\mathbf{P} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T$ . Die schiefe Projektion ermöglicht die Berücksichtigung von mehreren Vektorräumen.

$$\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad \text{Biorthogonalität} \tag{2.53}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad \text{Orthogonalität} \tag{2.54}$$



Die Verwendung von orthonormierten Basen ist gerade bei numerischen Berechnungen wichtig, um die Rechenstabilität zu gewährleisten. Wenn die Basis noch nicht in Form orthonormaler Vektoren vorliegt, kann immer ein Satz orthogonaler Vektoren aus den vorliegenden Basisvektoren berechnet werden. Drei wichtige Verfahren dazu werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

### 2.4.4 Wahl des Orthonormierungsverfahrens

Die Ermittlung von orthonormalen Basen für eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  aus Basisvektoren  $b_i \quad i \in 1, \dots, n_b$  ist für die MOR auf Grundlage von Projektionsverfahren essentiell. Für diese Aufgabe liegen unterschiedliche Algorithmen und Methoden vor, die die Faktorisierung  $M = QR$  liefern, wobei  $Q$  eine orthonormale Matrix ist. Die Verfahren sind iterativ und basieren auf Folgen von Ähnlichkeitstransformationen. Im Folgenden wird ein Überblick über die wichtigsten Algorithmen gegeben.

**Givens-Rotationen** Durch die *Givens*-Drehungen werden die Unterdiagonalelemente der Matrix  $M$  zu null gesetzt. Dies wird iterativ über Drehmatrizen  $T_{\text{GIV}}$  erreicht, die mit  $M$  linksmultipliziert werden, wodurch sich die Folge  $T_{\text{GIV}(1)} \dots T_{\text{GIV}(N)} M = R$  ergibt. Wegen der Orthonormalität der  $T_{\text{GIV}}$  kann die gesuchte orthonormale Basis durch Transposition in der Form  $T_{\text{GIV}(N)}^T \dots T_{\text{GIV}(1)}^T = Q$  geschrieben werden. Das Vorgehen ist im Detail bei [22, S.95] beschrieben.

**Householder-Spiegelungen** Das *Householder*-Verfahren basiert auf der sukzessiven Spiegelung der Vektoren von  $M$  auf die kartesischen Basisvektoren, was in Abbildung 2.14 zu sehen ist.

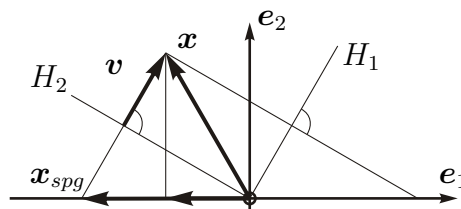


Abbildung 2.14.: Prinzip der *Householder*-Spiegelung

Mathematisch erfolgt dies durch die Definition einer Spiegelebene  $H$ , die durch den Normalenvektor  $v$  gegeben ist. Die Transformationsmatrix der Spiegelung erhält man durch:

$$T_{\text{HHT}} = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v} \tag{2.55}$$

Darin ist  $v$  durch  $m_1 + \text{Sign}(m_{11}) \|m_1\| e_1$  definiert. Die Anwendung der Transformationsmatrizen erfolgt auf die gleiche Weise wie bei den *Givens*-Rotationen und man erhält die gewünschte QR-Zerlegung  $A = T_{\text{HHT}(N)}^T \dots T_{\text{HHT}(1)}^T R = QR$ .

**Gram-Schmidt-Verfahren** Der *Gram-Schmidt*-Algorithmus ist in seiner ursprünglichen Version numerisch instabil, weshalb in der Praxis das modifizierte *Gram-Schmidt*-Verfahren (MGS) anzuwenden ist. Bei *Saad* [69, S.12] sind die beiden Varianten gegenübergestellt. Der Algorithmus ist in 2.4.1 in Pseudocode dargestellt, wobei die drei Rechenschritte Projektion, Orthogonalisierung und Normierung deutlich werden.

**Algorithmus 2.4.1:** Modifiziertes-*Gram-Schmidt*-Verfahren MGS

**Daten:**  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$   
 $r_{11} = \|\mathbf{x}_1\|, \quad \mathbf{q}_1 := \mathbf{x}_1/r_{11}$   
**für jedes**  $j \in 2, \dots, i$  **tue** ◁ Schleife über die Basisvektoren  
      $\mathbf{q}_j = \mathbf{x}_j$   
     **für**  $k \in 1, \dots, j - 1$  **tue** ◁ Schleife über bereits vorliegende  $\mathbf{q}_k$   
          $r_{kj} = \mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_j$  ◁ Projektion  
          $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j - r_{kj} \mathbf{q}_k$  ◁ Orthogonalisierung  
      $r_{jj} = \|\mathbf{q}_j\|$   
      $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j/r_{jj}$  ◁ Normierung  
**Ergebnis:**  $\mathbf{q}_n \quad n \in 1, \dots, i$

Das Vorgehen lässt sich für den  $\mathbb{R}^3$  grafisch veranschaulichen, wie es in Abbildung 2.15 zu erkennen ist. Dabei ist auf der rechten Seite die orthonormale Basis  $\mathbf{q}_j, j \in \{1, 2, 3\}$  zu sehen, die aus den Vektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  und  $\mathbf{x}_3$  berechnet wird. Auf der linken Seite sind die ersten beiden Orthonormierungsschritte für die Vektoren  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  zu erkennen. Auf der rechten Seite die Orthonormierung von  $\mathbf{x}_3$ , die von den beiden ersten Vektoren abhängt.

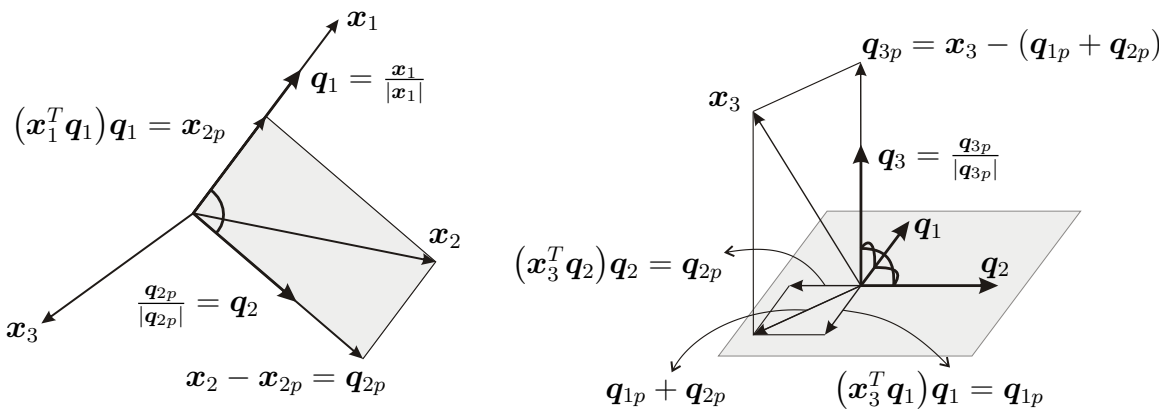


Abbildung 2.15.: Grafische Veranschaulichung des *Gram-Schmidt*-Verfahrens

**Vergleich der Orthonormierungsverfahren** Die *Givens*-Rotationen sind nach *Dahmen* [22] ein stabiles Verfahren, jedoch relativ aufwändig. In der Praxis spielen sie eine untergeordnete Rolle. In [37] findet sich ein Überblick über Varianten des *Gram-Schmidt*-Prozesses. In [14] sind das modifizierte *Gram-Schmidt*-Verfahren und die *Householder*-Transformation gegenübergestellt. Aus dieser Untersuchung geht die Empfehlung von *Householder*-Spiegelungen aus Sicht der numerischen Stabilität und Effizienz hervor. Wird jedoch eine iterative Orthonormierung benötigt, ergeben sich Vorteile für das MGS-Verfahren, da der orthonormale Faktor  $\mathbf{Q}$  der Zerlegung direkt berechnet wird. Dies ist für das *Householder*-Verfahren nicht der Fall. Bei der sukzessiven Ermittlung der Basisvektoren durch den *Arnoldi*-Algorithmus, der für die *Krylov*-Raumverfahren eine wichtige Rolle spielt, bringt dies Vorteile.

## 2.4.5 Modaler Raum - Modale Reduktion

Der folgende Abschnitt zielt darauf ab, das Konzept von Vektorräumen weiter zu verdeutlichen und die Grundzüge der projektiven Modellordnungsreduktion, die in Kapitel 3 angewendet werden, einzuführen. Dies geschieht anhand des Eigenwertproblems, das im strukturellen Kontext eine hohe Anschaulichkeit besitzt.

### 2.4.5.1 Eigenraumtransformation - Entkopplung

Für die DGL in Formel (2.39) kann der Eigenraum durch den Ansatz  $\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{\lambda t}$  ermittelt werden, der einer Aufspaltung in einen Geometrischen- und einen Zeitanteil gleichkommt. Durch Einsetzen in (2.39) ergibt sich das Eigenwertproblem in Gleichung (2.56). Dies ist für das Zustandsraummodell aus (2.41) und die DGL zweiter Ordnung formuliert.

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\theta} = 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\phi}, \lambda \boldsymbol{\phi}]^T \quad (2.56)$$

Mit der notwendigen Forderung  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  ergeben sich zunächst die Eigenwerte (EW)  $\lambda_j$  mit  $j \in \{1, \dots, n_{\text{FHG}}\}$  und in einem weiteren Schritt die Eigenvektoren (EV)  $\boldsymbol{\phi}_j$ , die ein Amplitudenverhältnis der Freiheitsgrade untereinander beschreiben. Sie spannen den Eigenraum auf und werden in der Modalmatrix  $\boldsymbol{\Phi}$  zusammengefasst. Die Zahl der EV und EW entspricht dabei der Anzahl der FHG des Systems und sie liegen jeweils konjugiert komplex vor. Dadurch reellifiziert sich die Lösung bei der Superposition der Moden, die für die Lösung der DGL nötig ist. Dies ist notwendig, da eine komplexwertige Systemantwort nicht physikalisch deutbar ist. In (2.57) bis (2.60) ist davon ausgehend die modale Übertragungsfunktion hergeleitet, die das gesamte dynamische Verhalten des linearen Systems beinhaltet.

$$\text{Transformation auf modale Koordinaten mit } \mathbf{d} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}$$

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}(2\zeta_k \omega_k) \dot{\mathbf{q}} + \text{diag}(\omega_k^2) \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f} \quad k \in \{1, \dots, n_{\text{FHG}}\} \quad \Rightarrow \quad \text{Entkopplung}$$

$$\text{Laplace Transformation mit } \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} e^{st} \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} e^{st} \quad s \in \mathbb{C} \quad (2.58)$$

$$\text{diag}(s^2 + s2\zeta_k \omega_k + \omega_k^2) \hat{\mathbf{q}} e^{st} = \boldsymbol{\Phi}^T \hat{\mathbf{f}} e^{st}$$

$$\text{Invertierung und Rücktransformation mit } \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{d} = \hat{\mathbf{q}} e^{st} \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} e^{st} \quad (2.59)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{d} = \text{diag}(s^2 + s2\zeta_k \omega_k + \omega_k^2)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}$$

$$\text{Übertragungsfunktion in modaler Form mit } \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\Phi} \text{diag}(s^2 + s2\zeta_k \omega_k + \omega_k^2)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}$$

$$G_{(jn)}(s) = \sum_{k=1}^m \frac{\Phi_{jk} \Phi_{nk}}{s^2 + s2\zeta_k \omega_k + \omega_k^2} = \frac{d_j(s)}{f_n(s)} \quad \text{mit} \quad j, n \in \{1, \dots, n_{\text{FHG}}\}$$

Hierin ist  $\omega_k$  die Eigenfrequenz und  $\zeta_k$  das *Lehrsche*-Dämpfungsmaß der Mode  $k$ . Die Entkopplung ist für die Annahme proportionaler Dämpfung, wie sie in (2.61) definiert ist, beschrieben. Bei allgemeiner Dämpfung kann die Transformation die Dämpfungsmatrix nicht diagonalisieren. Allerdings reicht die Annahme proportionaler Dämpfung oft aus, um das

reale Systemverhalten ausreichend anzunähern.

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^N \alpha_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^k \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{K} \quad (\text{Rayleigh-Dämpfung für } N = 1) \quad (2.61)$$

In (2.60), ist eine zu (2.42) und (2.43) alternative Beschreibung des Nachgiebigkeitsfrequenzganges gegeben, die ohne die Invertierung der Systemmatrix auskommt und numerisch deshalb vorteilhaft ist. Allerdings ist dafür die Lösung des Eigenwertproblems notwendig, die numerisch ausgeklügelter Algorithmen bedarf und wieder eigene Probleme aufwirft. Die Transferfunktion (2.60) beschreibt die Systemdynamik komplett und die Betrachtung im Frequenzbereich ermöglicht meist bessere Einblicke in das Systemverhalten als die Beschreibung in zeitlicher Abhängigkeit. Dies zeigt sich besonders bei der Untersuchung des Resonanzverhaltens. Die Herleitung der Übertragungsfunktion in (2.60) ist hier dargestellt, da sich aus der physikalisch anschaulichen Definition der Eigenvektoren und Eigenfrequenzen ein intuitiver Zugang zur Modellordnungsreduktion ergibt. Dies ist auch der Grund dafür, dass die modale Reduktion der Ausgangspunkt für die Entwicklung der modernen Reduktionsverfahren ist.

Betrachtet man ein reales mechanisches Schwingungssystem, ist die Tendenz zu erkennen, dass die Beiträge von hochfrequenten Schwingungsanteilen zur Amplitude, beziehungsweise der Schwingungsenergie, gering sind. Daraus lässt sich ableiten, dass für eine approximative Lösung eine Auswahlmenge der vorliegenden Eigenmoden ausreicht. Das Übertragungsverhalten wird durch die Reihe in (2.60) beschrieben und hängt offensichtlich von allen Moden ab. Nach den vorangegangenen Überlegungen führt eine Verwendung einer begrenzten Anzahl von Moden schnell zu hohen Rechenzeitverkürzungen, da die Lösung auf einem Unterraum des Systemraumes  $\mathbb{R}^{n_{\text{mg}}}$  ermittelt werden kann. Für eine verrippte Platte sind in Abbildung 2.16 die ersten drei Eigenformen  $\phi_i$  dargestellt. Hierbei wird die gute geometrische Anschaulichkeit deutlich.

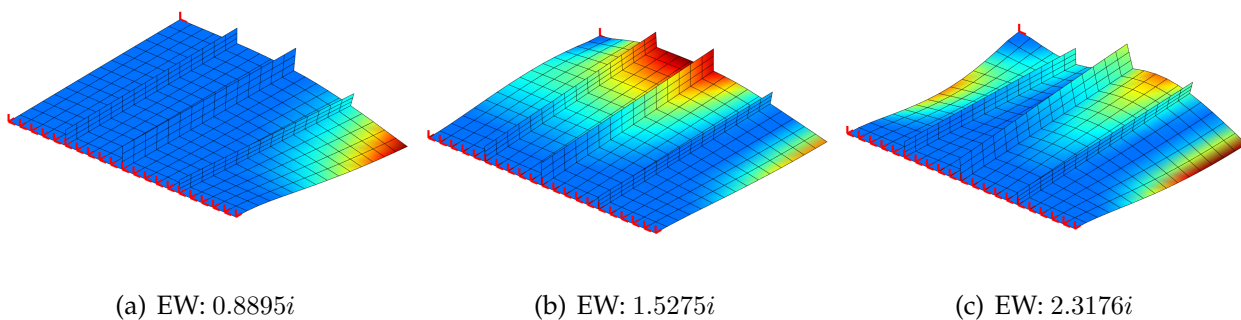


Abbildung 2.16.: Darstellung der ersten drei Eigenvektoren

Anhand der Zeitintegration des FEM-Systems lässt sich der Einfluss der Reduktion gut erkennen. Die numerische Zeitintegration solcher Systeme stößt schon bei relativ kleinen Dimensionen an ihre Grenzen, da für die Auflösung von Schwingungsamplituden bei hohen Frequenzen extrem kleine Zeitschritte nötig wären. Man spricht dabei von einer hohen Steifigkeit des DGL-Systems. Die modale Reduktion kann dabei Abhilfe schaffen. Die Eigen-

frequenzen können als Kriterium verwendet werden, anhand dessen die EV ausgewählt werden, wobei die Auswahl von Moden vor allem im Bereich von Anregungsfrequenzen wichtig ist. Im Allgemeinen empfiehlt sich für Schwingungssysteme aber vor allem die Berücksichtigung der ersten Moden, die mit den niedrigsten Frequenzen korrespondieren, da hier mit besonders hohen Amplituden zu rechnen ist. Durch Projektion auf den Unterraum der berücksichtigten Moden gemäß Abs. 2.5.1.1 erhält man das reduzierte System, das sich zeitintegrieren lässt. In 2.17 ist der numerisch integrierte zeitliche Verlauf der lateralen Eckposition der verrippten Platte für verschiedene Reduktionsdimensionen dargestellt.

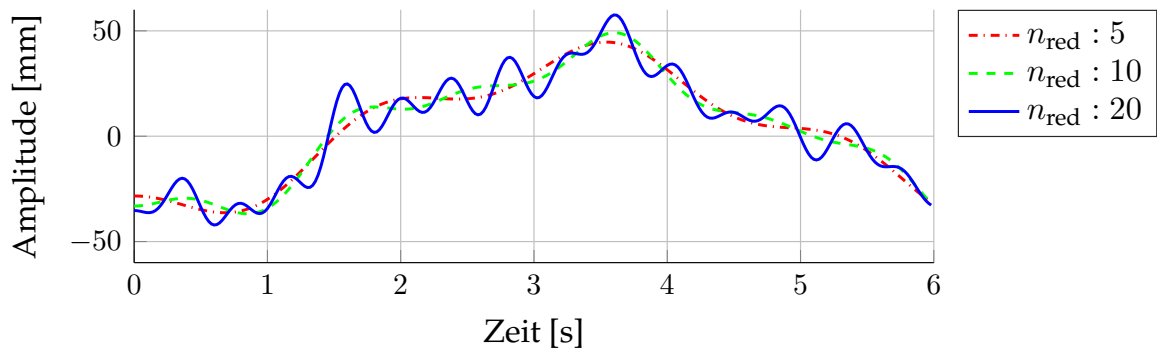


Abbildung 2.17.: Schwingung des Eckpunktes bei verschiedenen Reduktionsdimensionen

Es ist zu sehen, wie bei steigender Anzahl von Moden beziehungsweise höherdimensionalem Unterraum die Lösungsgenauigkeit steigt und höherfrequente Anteile in der Schwingungsamplitude auftreten. Bei niedrigerdimensionalen Lösungen ist zu erkennen, dass die hochfrequenten Anteile, die ihren jeweiligen EV zugeordnet sind, nicht mehr darstellbar sind und folglich eine Glättung über der Zeit eintritt. Die unterschiedlichen Startwerte der Verläufe ergeben sich aus der Projektion des originalen Startvektors auf den Unterraum, wobei manche Anteile bei der Projektion verloren gehen. Diese Zusammenhänge lassen sich auch auf andere Projektionsverfahren anwenden, wobei deren Unterräume meist weniger anschaulich sind wie bei der modalen Reduktion.

### 2.4.5.2 Bemerkungen zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die analytische Lösung des Eigenwertproblems kann nur für sehr niedrigdimensionale Probleme, beispielsweise über die Lösung des charakteristischen Polynoms, bestimmt werden. Die in der Praxis auftretenden, sehr großen Systeme werden mittels numerischer Approximationsverfahren gelöst. Die Lösung anhand iterativer Verfahren stellt eine der größten numerischen Herausforderungen dar. Ein sehr häufig eingesetztes Verfahren ist der QR-Algorithmus. Nach [22] verwendet dieser die Potenziteration von *Richard von Mises* als Ausgangspunkt. Dabei ist zu beobachten, dass die wiederholte Abbildung eines Vektors, der kein Eigenvektor ist, in Richtung des Eigenvektors strebt, der dem betragsmäßig größten Eigenwert zugeordnet ist. Auf diese Weise kann aus dem ermittelten approximierten Eigenvektor der zugehörige größte Eigenwert bestimmt werden. Für Berechnungen der linearen Algebra stehen effiziente und weit entwickelte Pakete wie LAPACK zur Verfügung, die auch die Lösung des Eigenwertproblems durch FEM-Software ermöglichen. Der Anwender muss sich dadurch meist nicht auf die Details des Lösungsprozesses einlassen.

Die Berücksichtigung der Dämpfung kann dabei die Berechnung destabilisieren, sodass die berechneten EV ungenau sind. Oft ist die Änderung der EV durch die Dämpfung gering, sodass diese auch aus dem ungedämpften System ermittelt werden können. Der Einfluss auf die EW ist demgegenüber groß und die Dämpfung kann nicht vernachlässigt werden. Im Allgemeinen sind die Eigenvektoren und Eigenwerte komplex ( $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\phi \in \mathbb{C}^n$ ). Für verschiedene Dämpfungsansätze sind die Räume der EV und EW in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

Tabelle 2.3.: Zahlenkörper der EW und EV in Abhängigkeit der Dämpfung

	ungedämpft	proportional gedämpft	beliebig gedämpft
EV	$\in \mathbb{R}^n$	$\in \mathbb{R}^n$	$\in \mathbb{C}^n$
EW	$\Re(EW) = 0$	$\in \mathbb{C}$	$\in \mathbb{C}$

Die Projektionen in Gleichung (2.57) zeigen die Diagonalisierung durch Projektion auf den Eigenraum, der für einfache Eigenwerte dem Hauptraum entspricht. Die Transformation kann auch als Faktorisierung einer Matrix  $S$  gemäß Gleichung (2.62) angesehen werden, die für quadratische Matrizen definiert ist.

$$S = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (2.62)$$

Diese modale Faktorisierung wird durch die Singulärwertzerlegung auf Matrizen beliebiger Form erweitert, die in vielen numerischen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt und im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

### 2.4.6 Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung (SVD), deren effiziente numerische Durchführung von *Golub* in [41] beschrieben wurde, ist in Gleichung (2.63) als Zerlegung in die unitären Matrizen  $U$  und  $N$ , sowie  $\Sigma$  dargestellt.

$$A = U \Sigma N^* \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad U \in \mathbb{C}^{m \times m} \quad N \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.63)$$

Die Matrix  $\Sigma$  hat dabei  $d$  Diagonalelemente  $\sigma_i$ , wobei  $d = \text{Rang}(A) \leq \min\{n, m\}$  ist. Bei den Spaltenvektoren der Matrizen  $U$  und  $N$  spricht man von den „Links-“ beziehungsweise „Rechtseigenvektoren“. Die Zerlegung von  $A$  in (2.63) zeigt den Zusammenhang zu der modalen Faktorisierung in (2.62). Für die „Links-“ „Rechtseigenvektoren“ gilt (2.64):

$$A n_i = \sigma_i u_i \quad \text{und} \quad A^T u_i = \sigma_i n_i \quad (2.64)$$

Weiter sind die Vektoren  $n_i$  und  $u_i$  die Eigenvektoren von  $M_n = A A^T$  beziehungsweise  $M_u = A^T A$  mit den Eigenwerten  $\lambda_{n_i} = \sigma_{n_i}^2$  und  $\lambda_{u_i} = \sigma_{u_i}^2$ .

Der iterative Charakter des numerischen Berechnungsprozesses hat zur Entwicklung einer sogenannten „Economy“-Variante geführt, bei der die Basisvektoren einzeln hintereinander

bestimmt werden. Dabei kann der Algorithmus nach einer beliebigen Zahl von Vektoren abgebrochen werden, was für die Ermittlung von Vektorräumen einen wichtigen Aspekt für die Effizienz bedeutet. Dabei ändern sich die Dimensionen der in (2.63) beschriebenen Matrizen zu:  $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $U \in \mathbb{C}^{m \times k}$ ,  $V \in \mathbb{C}^{k \times k}$ , wobei  $k$  der Anzahl an berücksichtigten Singulärwerten entspricht. Da der Algorithmus immer zuerst die größten Singulärwerte mit den dazugehörigen Basisvektoren berechnet, werden automatisch die wichtigsten Hauptrichtungen bestimmt.

Beispielsweise kann durch die SVD die Pseudoinverse  $A^+ = N\Sigma^+U^*$  ermittelt werden, mit deren Hilfe Ausgleichsprobleme gelöst werden können. Dies spielt für die vorliegende Arbeit im Rahmen der sogenannten „Proper Orthogonal Decomposition“ (POD) oder auch Haupttraumanalyse (näheres in Abs. 2.5.2) eine wichtige Rolle.

### 2.4.7 Definition des Krylov-Raumes

Ein Krylov-Raum (KR)  $\mathcal{K}_m$  ist ein Vektorraum, der durch einen Vektor  $q$  und eine Matrix  $P$  gemäß (2.65) definiert ist.

$$\mathcal{K}_m(P, q) = \text{Span} \{q, Pq, P^2q, \dots, P^{m-1}q\} = \text{Span} \{z_1, z_2, \dots, z_{m-1}\} \quad (2.65)$$

$$\text{Rekursiv: } z_j = Pz_{j-1} \quad z_1 = q \quad j \in \{2, 3, \dots, m-1\} \quad (2.66)$$

Die Stufe  $m$  gibt die Dimension des Vektorraumes an. Dieser Vektorraum tritt im Kontext von Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsuntersuchungen in der Regelungstechnik und bei verschiedenen Reihenentwicklungen auf. Durch den Satz von Cayley-Hamilton (vgl. (2.67)) lässt sich der Krylov-Raum (KR) mit dem Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems  $Kd = f$  in Verbindung bringen. Der Satz besagt, dass eine reguläre Matrix ihrer charakteristischen Gleichung genügt:

$$\sum_{j=0}^{n_{\text{fhg}}} a_j K^j = 0 \quad (2.67)$$

Durch einfache Umformungen lässt sich diese Gleichung auf die Form

$$-I + c_1 K + \dots + c_{n_{\text{dof}}-1} K^{n_{\text{dof}}-1} + c_{n_{\text{fhg}}} K^{n_{\text{fhg}}} = 0 \quad (2.68)$$

bringen. Multiplikation von rechts mit  $f$  und von links mit  $K^{-1}$  sowie Auflösen nach  $K^{-1}f$  ergibt dann die Gleichung (2.69).

$$d = K^{-1}f = c_1 f + \dots + c_{n_{\text{fhg}}-1} K^{n_{\text{fhg}}-2} f + c_{n_{\text{fhg}}} K^{n_{\text{fhg}}-1} f \quad (2.69)$$

Die Lösung des Systems liegt folglich im Krylov-Raum der Stufe  $n_{\text{fhg}}$ . Dadurch, dass der Einfluss der Momente mit größer werdendem Index abnimmt, ergeben sich Möglichkeiten der approximativen Beschreibung der Lösung durch Begrenzung der Reihe. Somit kann ein KR niedriger Stufe als Projektionsunterraum genutzt werden, was später diskutiert wird.

### 2.4.8 Taylor-Reihenentwicklung

Ausgangspunkt der Herleitung für viele Reduktionsmethodiken ist die Entwicklung von Funktionen mehrerer Parameter in *Taylor*-Reihen. Durch diese Reihe kann der Parameterinfluss explizit mittels der Ableitungen der hier matrixwertigen Funktion  $\mathbf{K}(\mathbf{p})$  formuliert werden (2.70). Dabei hängt die Reihe von ihrem jeweiligen Entwicklungspunkt (EP)  $\mathbf{p}_{EP}$  ab. In der Praxis gewinnt das Verfahren erst durch die Beschränkung der Reihe an Bedeutung, da die unendliche Reihe nicht zu ermitteln ist. Die Verkürzung der Reihe bringt einen Fehler  $\epsilon_t$  mit sich, der der Summe der Terme höherer Ordnung entspricht. In (2.70) ist die Reihe zweiter Ordnung.

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) \approx \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^{n_p} \left. \frac{d\mathbf{K}(\mathbf{p})}{dp_j} \right|_{\mathbf{p}_{EP}} \cdot \Delta p_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \left. \frac{d^2\mathbf{K}(\mathbf{p})}{dp_j dp_k} \right|_{\mathbf{p}_{EP}} \cdot \Delta p_j \Delta p_k + \epsilon_t \quad (2.70)$$

Jeder Summand der Reihenentwicklung entspricht hier einer Matrix, weshalb der Speicherbedarf in Abhängigkeit der Anzahl der Parameter und der Stufe der Entwicklung sehr schnell zunehmen kann. Die Anzahl der Summanden steigt mit der Ordnung der *Taylor*-Reihe gemäß der Formel (2.71), die über die Anzahl von Kombinationen aus den  $n_p$  Parametern mit Wiederholung aber ohne Reihenfolge summiert.

$$n_t = \sum_{j=0}^{n_s} \binom{n_p + j - 1}{j} = \sum_{j=0}^{n_s} \frac{(n_p + j - 1)!}{(n_p - 1)! j!} \quad (2.71)$$

$n_t$  = Anzahl der Reihenmatrizen

$n_s$  = Berücksichtigte Ableitungen

$n_p$  = Anzahl der Variablen

In Abb. 2.18 ist die Anzahl der Matrizen der Reihe in Abhängigkeit der Anzahl der Parameter und der berücksichtigten Ableitungsstufe dargestellt.

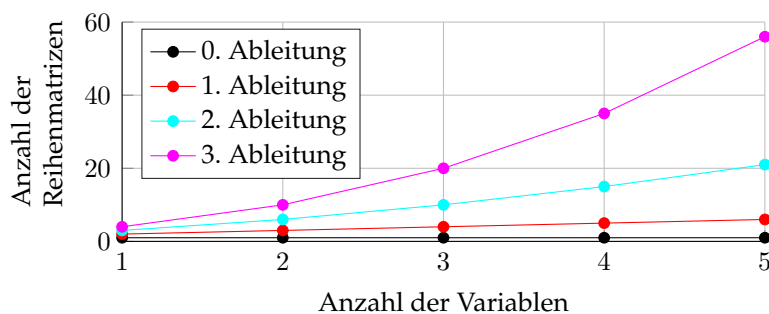


Abbildung 2.18.: Anzahl der Matrizen in der *Taylor*-Reihe

Wegen des starken Anstiegs des benötigten Speicherplatzes ist eine Entwicklung mit Stufen höher 2 in der Praxis nur bei wenigen Parametern oder kleinen Systemen durchführbar.



## 2.5 Verfahren zur Modellordnungsreduktion

Das Grundprinzip der Modellordnungsreduktion (MOR) ist immer die Verringerung von Rechenaufwand bei einem möglichst geringen Verlust von Rechengenauigkeit und oft auch der Erhaltung von Systemeigenschaften. Hierbei gestaltet sich die Bewertung der Genauigkeit oft schwierig und erfordert hohe Erfahrung seitens des Anwenders. Der Aufwand für die Reduktion ist häufig sehr hoch und es muss folglich in Abhängigkeit des Anwendungsfalls entschieden werden, ob sich der Einsatz der MOR überhaupt rentieren kann. Im weiteren soll ein Überblick über wichtige Verfahren der MOR gegeben werden, bevor der Einsatz der MOR in der Optimierung diskutiert wird.

### 2.5.1 Überblick und Einteilung der Modellordnungsreduktionsverfahren

Die Unterteilung von MOR-Verfahren ist nicht trivial, da es oftmals Überschneidungen in deren Ideen und dem Vorgehen gibt. Nach *Koutsouvasilis* [49] werden die MOR-Verfahren häufig in die drei folgenden Kategorien unterteilt.

1. Modales Abschneiden, Substrukturverfahren und Kondensationsverfahren
2. *Padé*-approximationsbasierte Vorgehen
3. Abschneiden balancierter Systeme

Im weiteren werden allgemein Möglichkeiten aufgelistet, durch die der Berechnungsaufwand beeinflusst wird und die nicht unbedingt der MOR zuzuordnen sind. Dabei werden auch Vorgehen erwähnt, die aus der gerade gegebenen Unterteilung herausfallen. Es werden Verfahren auf physikalischer und mathematischer Ebene, sowie direkt auf dem Modell angesprochen.

#### 2.5.1.1 Projektive Modellordnungsreduktion

Bei Projektionsverfahren wird ein Variablenvektor hoher Dimension auf einen Vektorraum geringerer Dimension projiziert. Dabei kann die physikalische Bedeutung der reduzierten FHGe verloren gehen. Die Details dieser Operation wurden in Abschnitt 2.4.3 diskutiert. Für Gleichungssysteme resultiert aus der Projektion auf einen Unterraum ein verringerter Berechnungsaufwand. Der Projektionsschritt ist anhand des ZRM in Gleichung (2.72) dargestellt.

$$\mathbf{V} \dot{\mathbf{z}}_{\text{red}} = \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{z}_{\text{red}} + \mathbf{B} \mathbf{f} \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fhg}} \times n_{\text{red}}} \quad (2.72)$$

Dabei ergibt sich zunächst ein überbestimmtes Gleichungssystem, weshalb in Gleichung (2.73) von links mit der Projektionsmatrix  $\mathbf{W}^T$  multipliziert wird, die die selbe Dimension wie  $\mathbf{V}$  besitzt.

$$\mathbf{W}^T \mathbf{V} \dot{\mathbf{z}}_{\text{red}} = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{z}_{\text{red}} + \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{f} \quad \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fhg}} \times n_{\text{red}}} \quad (2.73)$$

Damit ist die Projektion des Systems auf den Unterraum  $\text{Span}(V)$  orthogonal zu  $\text{Span}(W)$  beschrieben. Einen Überblick über die Matrizendimensionen verschafft Abb. 2.19.

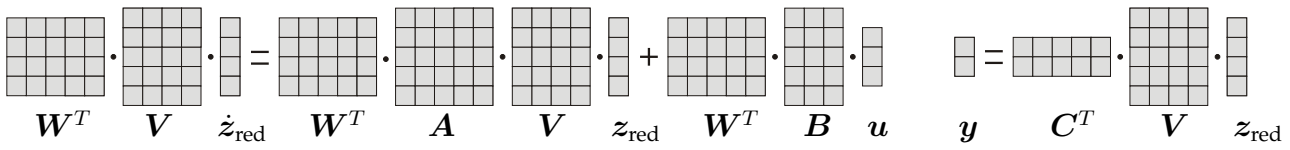


Abbildung 2.19.: Projektion eines ZRM

Die Lösung kann nun auf dem Unterraum erfolgen, wobei in der Regel  $n_{\text{fhg}} \gg n_{\text{red}}$  gilt, mit der Folge, dass der Berechnungsaufwand stark sinkt. Gleichzeitig erfolgt durch die Projektion gemäß Abschnitt 2.4.3 ein Informationsverlust, mit dem eine Abnahme der Rechengenauigkeit einhergeht. Dabei hängt der Betrag des Fehlers entscheidend vom gewählten Unterraum ab und somit liegt die Kunst der projektiven Modellordnungsreduktion im Auffinden eines geeigneten Vektorunterraumes. Die Definition von praktischen Vektorunterräumen erfolgt beispielsweise anhand von Systemeigenvektoren (vgl. Abs. 2.4.5), Krylov-Raumvektoren (vgl. Abs. 2.4.7) oder auch mittels POD (vgl. Abs. 2.5.2) berechneter Unterraumvektoren.

Der Projektionsprozess lässt sich in den Simulationsprozess gemäß Abb. 2.20 einordnen, wobei auch gezeigt wird, an welcher Stelle die Validierung der Reduktion mittels Projektionsverfahren ansetzen muss.

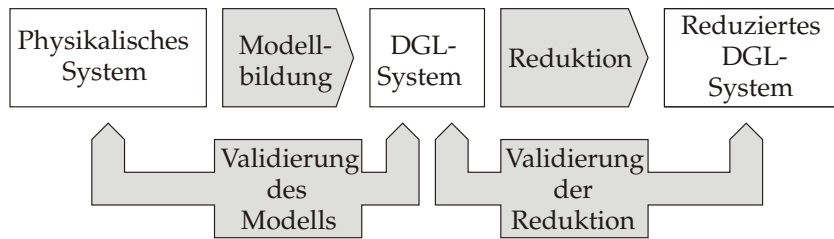


Abbildung 2.20.: Projektionsbasierte modellordnungsreduzierte Simulation

### 2.5.1.2 Kondensationsverfahren

Bei Abschneideverfahren erfolgt die Reduktion der Systemdimension durch die Vernachlässigung bestimmter Freiheitsgrade des Systems. Die Anfänge der Abschneideverfahren liegen bei der statischen Kondensation, die von *Guyan* [44] entwickelt wurde. Dazu werden die  $d \in \mathbb{R}^{n_{\text{fhg}}}$  Freiheitsgrade in „Master-“ und „Slave-“-Freiheitsgrade (Index  $m$  bzw.  $s$ ) aufgeteilt und gemäß (2.74) sortiert.

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_m \\ d_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_s \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Mit regulärem  $K_{ss}$  lassen sich in der zweiten Gleichung die Freiheitsgrade  $d_s$  durch die „Master“-FHGe  $d_m$  ausdrücken:

$$d_s = -K_{ss}^{-1} K_{sm} d_m + K_{ss}^{-1} f_s \tag{2.75}$$

Mit dieser Gleichung werden die „Slave“-FHGe in (2.74) eliminiert und es ergibt sich für die „Master“-FHGe die Gleichung (2.76).

$$(\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm})\mathbf{d}_m = \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{f}_s \quad (2.76)$$

Die Lösung für die „Master“-FHGe erfolgt dann auf dem oftmals wesentlich kleineren Raum  $\mathbb{R}^{n_{\text{red}}}$  wodurch sich der Rechenzeitgewinn ergibt. Die Reduktion erfordert allerdings die Invertierung von  $\mathbf{K}_{ss}$  und die Bildung der Produkte dichtbesetzter Matrizen in (2.76).

Das für statische Systeme exakte Verfahren zeigt bei dynamischen Systemen Schwächen, weshalb es durch *Leung* [52] dahingehend erweitert wurde, dass auch Masseneffekte mit hoher Genauigkeit berücksichtigt werden können. Weitere wichtige Entwicklungen auf dem Gebiet erfolgten durch *Zhang* [87] und *Craig, Bampton* [6].

### 2.5.1.3 Reduktion balancierter Systeme

Das balancierte Abschneiden lässt sich sowohl zu den Projektionsmethoden als auch den Abschneideverfahren zählen und wird daher separat diskutiert. Das balancierte Abschneiden (eng. Balanced Truncation), das von *Moore* [59] entscheidend entwickelt wurde, basiert auf der Idee, Zustände zu entfernen, die gleichzeitig schlecht steuer- und beobachtbar sind. Die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  können durch die Lösung der *Lyapunov*-Gleichungen ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathbf{A}^* + \mathbf{B}\mathbf{B}^* &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^*\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathbf{A} + \mathbf{C}^*\mathbf{C} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Die Sortierung der Zustände nach diesen Kriterien erfolgt durch die Balancierungstransformation, deren Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  in (2.79) beschrieben ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbf{U}\mathbf{U}^* \quad \text{und} \quad \mathcal{Q} = \mathbf{L}\mathbf{L}^* && \text{Cholesky-Zerlegung} \\ \mathbf{U}^*\mathcal{Q}\mathbf{U} &= \mathbf{U}^*\mathbf{L}\mathbf{L}^*\mathbf{U} = \mathbf{K}\Sigma^2\mathbf{K} && \text{Eigenwertzerlegung} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{U}^*\mathbf{L} = \mathbf{W}\Sigma\mathbf{V}^* \quad \text{Singularwertzerlegung} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{T} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{V}^*\mathbf{L}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{W}\Sigma^{-1/2} \quad \text{Transformationsmatrizen} \quad (2.79)$$

Durch den Balancierungsschritt finden sich die Singulärwerte auf der Diagonale von  $\Sigma$ , sodass die großen und damit wichtigen Singulärwerte zuerst aufgelistet werden. Die Reduktion erfolgt durch die Vernachlässigung der Vektoren  $[\mathbf{v}_j \dots \mathbf{v}_k]$  und  $[\mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_k]$  mit  $j = n_{\text{red}} + 1$  und  $k = n_{\text{fhg}}$  der orthogonalen Basen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$ . Zuletzt wird das System wie in Abschnitt 2.5.1.1 mit  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{T}^{-1}$  reduziert, wobei die Transformationsmatrizen dann entsprechend die Dimension reduzieren und gleichzeitig für die Balancierung sorgen.

Für praktische Aspekte bei der Durchführung sei auf *Antoulas* [1, S.220] verwiesen. Vor allem die Berechnung der Steuer- und Beobachtbarkeitsmatrix ist numerisch aufwändig und macht bei hohen Systemdimensionen den Einsatz des Verfahrens unmöglich. Der Vorteil ist die Erhaltung der Systemstabilität während der Reduktion und die Existenz von Fehler-schranken.

### 2.5.1.4 Antwortflächenmodelle

Bei der Verwendung von Antwortflächenmodellen oder RSA (eng. Response Surface Approximations) werden Systemantworten  $r_j$  durch vordefinierte Modelle  $\tilde{r}_j$  angenähert. Dazu müssen Stützwerte  $\mathcal{S} = [s_1, \dots, s_{n_{st}}]$  der Systemantworten für bestimmte Systemkonfigurationen berechnet werden, wobei der Wahl der Stützwertkonfiguration eine entscheidende Rolle zukommt. Je nach Verwendung eines Interpolations- beziehungsweise Regressionsmodells müssen für die Festlegung des Ersatzmodells lineare Gleichungssysteme oder Ausgleichsrechnungsprobleme gelöst werden.

Die verwendeten Modelle sind sehr vielfältig, wobei sich vor allem das *Kriging*-Verfahren [50] etabliert hat. Hierbei wird in der Praxis meist eine Interpolation mit einer Approximation von Werten an bestimmten Stützstellen durchgeführt. Beim Kriging wird das Ersatzmodell so definiert, dass meist ein polynomielles quadratisches Modell mit einer Reihe von *Gauß*-Glockenkurven kombiniert wird. Das Vorgehen wird in der Regel nicht zu den MOR-Verfahren gezählt, da die Gleichungsstruktur durch den Einsatz der Ersatzmodelle nicht erhalten bleibt.

### 2.5.1.5 Modellierungsansätze

Als Modellierungsansätze werden hier Vorgehen bezeichnet, die eine Reduktion auf Basis des FEM-Modells ermöglichen. Eine Vergrößerung der Diskretisierung führt auf eine geringere Anzahl an Elementen und damit weniger Freiheitsgrade des Systems. Gerade bei dreidimensionalen Strukturen lässt sich auf diesem Weg der Rechenaufwand häufig drastisch verringern, da die Elementanzahl qualitativ mit der dritten Potenz von der Elementgröße abhängt. Meist ist dieser Weg jedoch keine Option, da die Genauigkeit der Ergebnisse stark von der Diskretisierung abhängt.

Ein weiterer Modellierungsansatz ist die Verwendung von Superelementen. Hierbei werden geometrische Modellbereiche, die als linear in ihrem Verformungsverhalten angesehen werden können, auf ein einziges Element reduziert. Es wird das Steifigkeitsverhalten des genannten Bereichs auf die Anbindungsknoten an andere Systemkomponenten abgebildet und somit die entsprechenden Freiheitsgrade aus dem Gleichungssystem herausgelöscht. Dieses Vorgehen ist eng mit den Kondensationsverfahren in Abschnitt 2.5.1.2 und dessen Weiterentwicklungen verbunden.

Ein weiterer Weg um die Freiheitsgradanzahl zu minimieren ist die Ausnutzung von Symmetrien. Durch die Definition von Symmetrierandbedingungen kann somit auf die Modellierung eines Teils der Struktur verzichtet werden. Dazu muss die Symmetrie der Geometrie und der Lasten gegeben sein. Die Verwendung von Symmetrierandbedingungen führt zu keinem Approximationsfehler.

Wie schon bei den RSA-Verfahren werden auch die genannten Modellierungsansätze nicht zu den MOR-Verfahren gezählt und dienen hier der Einordnung von Ansätzen, durch die die Rechendauer verringert wird.

## 2.5.2 Proper Orthogonal Decomposition - Haupttraumanalyse

Ausgangspunkt bei der „Proper Orthogonal Decomposition“ (POD) sind Stützstellen (eng. Samples) in einem Parameterraum der Dimension  $n_{\text{par}}$ . Der Parameterraum, über dem die Stützpunkte definiert sind, kann dabei beliebig definiert sein. Beispielsweise können Zeitpunkte oder Systemparameter gewählt werden. Für die Stützstellen wird das System ausgewertet, wobei die Lösungen im Zustandsraum der Dimension  $n_{\text{ori}}$  liegen. Aus diesen Vektoren wird eine Sammelmatrix  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_s]$  (auch Snapshot-Matrix) zusammengesetzt, wobei  $n_s \ll n_{\text{ori}}$  die Zahl der Stützstellen ist. Die Lösungen  $\mathbf{S}$  zu den jeweiligen Samples ergeben im Modellraum  $\mathbb{R}^{n_{\text{thg}}}$  eine Punktwolke, die Vorzugsrichtungen in ihrer Verteilung aufweist. Durch die Identifikation der dominantesten Richtungen  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_{\text{red}}}$  kann ein Untervektorraum ermittelt werden, der für die MOR verwendet werden kann.

Für die Ermittlung der wichtigsten Richtung im Lösungsraum, kann die Forderung in Gleichung (2.80) verwendet werden.

$$\max_{\mathbf{u}_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_s} |\mathbf{s}_i^T \mathbf{u}_1|^2 \right\} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{u}_1\| = 1 \quad (2.80)$$

Für alle weiteren Hauptrichtungen muss dann Orthogonalität gegenüber allen bereits berechneten Hauptrichtungen gefordert werden. Daraus ergibt sich das Maximierungsproblem in (2.81).

$$\max_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s} \left\{ \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_s} |\mathbf{s}_i^T \mathbf{u}_j|^2 \right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \quad (2.81)$$

Die Lösung des Maximierungsproblems (2.81) entspricht nach [71] einer SVD der Matrix  $\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{N}^*$ . Als Projektionsbasis wird eine Auswahl der Linkssingulärvektoren  $\mathbf{U}$  gewählt. Dabei ist zu beachten, dass die ersten Vektoren  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_{\text{red}}}]$  mit den wichtigeren, zu großen Singulärwerten gehörigen, Unterraumvektoren korrespondieren.

Das Vorgehen ist in Abbildung 2.21 graphisch verdeutlicht, wobei die Lösungen hier im  $\mathbb{R}^2$  liegen.

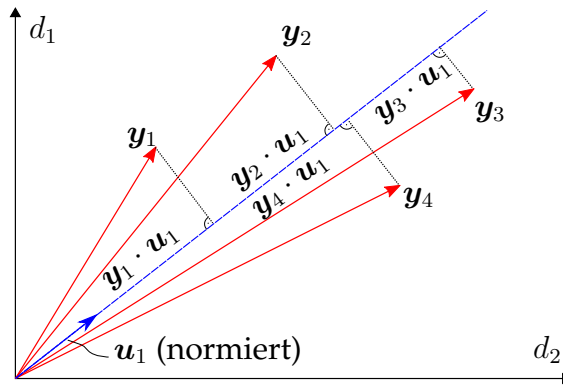


Abbildung 2.21.: Ermittlung der ersten Hauptrichtung bei der POD

Durch die SVD der Matrix  $S$  wird die Bedingung an die Hauptrichtungen berücksichtigt, die fordert, dass der quadratische Abstand der Punkte  $s_i$  zu einer Richtung  $u$  minimal wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Maximierung der Projektionslängen auf die Hauptrichtungen.

Dieses Vorgehen kann sich speicherkritisch verhalten. Allerdings ist die Faktorisierung gerade bei der MOR nicht vollständig zu berechnen. Ein Vorteil ist die Existenz einer Fehler-schranke, die sich durch die doppelte Quadratsumme der unberücksichtigten Singulärwerte definieren lässt. Dies ist nach *Benner, Gugercin* und *Willcox* [11, S. 502] in Gleichung (2.82) beschrieben.

$$\min_{V \in \mathbb{R}^{n \times r}} \sum_{j=1}^{n_{\text{red}}} \|s_j - VV^* s_j\|_2^2 = \sum_{j=n_{\text{red}}+1}^{n_{\text{fhg}}} \sigma_j^2 \quad (2.82)$$

Der große Vorteil des Vorgehens ist die hohe Flexibilität bei der Berechnung von Unterräumen. Auch die Anwendung bei stark nichtlinearen Systemen ist leicht möglich. Entscheidend ist beim Einsatz die Lage der Samples im Entwurfsraum und die Dimension des Projektionsunterraumes. Zusammen legen sie das Approximationsvermögen des Verfahrens fest, wie es sich auch in Abschnitt 3.3 zeigen wird.

### 2.5.3 Momentenabgleich

Die Approximation eines Systems wird oft anhand des Momentenabgleichs durchgeführt. Die Idee ist dabei, eine Funktion durch eine Reihenentwicklung zu beschreiben, die nach einer definierten Anzahl an Summanden abgebrochen wird. Dieses Prinzip ist als *Padé*-Approximation bekannt [80, S.127]. Die Glieder einer solchen Reihe verlieren mit zunehmender Ordnung an Bedeutung für die Systemantwort.

Als Beispiel wird in Gleichung (2.83) die Übertragungsfunktion des Deskriptorsystems (vgl. (2.40)) um den Frequenzbereichspunkt  $s_0 \in \mathbb{C}$  formuliert und als *Neumann*-Reihe (vgl. [83]) entwickelt.

$$\begin{aligned} G(s_0 + \sigma) &= C \left[ (s_0 + \sigma) \hat{E} - \hat{A} \right]^{-1} \hat{B} \\ &= C \left[ \sigma \hat{E} - (\hat{A} - \hat{E}s_0) \right]^{-1} \hat{B} = && \text{Ausklammern von } (\hat{A} - \hat{E}s_0) \\ &= -C \left[ I - (\hat{A} - \hat{E}s_0)^{-1} \hat{E} \sigma \right]^{-1} (\hat{A} - \hat{E}s_0)^{-1} \hat{B} && \text{Umformen zur Neumann-Reihe} \\ &= - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} C \left[ (\hat{A} - \hat{E}s_0)^{-1} \hat{E} \right]^k (\hat{A} - \hat{E}s_0)^{-1} \hat{B} \sigma^k}_{\text{Moment } H_k(s_0)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die Momente hängen hierin jeweils vom Entwicklungspunkt ab und das Übertragungsverhalten wird an der Stelle  $s_0$  exakt abgebildet. Wie bereits in Abschnitt 2.4.7 erwähnt, ist durch die ersten  $n_{\text{fhg}}$  Vektoren, die durch die Momente gegeben sind, die maximale Anzahl an möglichen linear unabhängigen Vektoren erreicht. Daher kann (2.84) geschrieben

werden, wobei die Summe beschränkt wird ohne die Genauigkeit der Beschreibung einzuschränken. Wird jedoch die Anzahl der Summanden weiter begrenzt, stimmen nur noch die ersten  $n_{\text{red}}$  Momente überein, was die Reduktion des Systems bewirkt (vgl. (2.84)).

$$\sum_{k=0}^{n_{\text{fhg}}} \mathbf{H}_k \sigma_k \quad \text{Reduktion} \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n_{\text{red}}} \mathbf{H}_k \sigma_k \quad (2.84)$$

In den Anfängen des Verfahrens wurden die Momente „explizit“ abgeglichen (vgl. [67]), wobei die Berechnung der Momente aufwändig und numerisch instabil ist. Der implizite Momentenabgleich wird im weiteren beschrieben und führt auf *Krylov*-Räume (KR), anhand derer die Reduktion durchgeführt wird.

Anhand von (2.83) lässt sich der Eingangs-KR in (2.85) und der Ausgangs-KR in (2.86) definieren.

$$\mathcal{K}(\mathbf{P}_e, \mathbf{Q}_e) : \quad \mathbf{P}_e(s_0) = \left( \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{E}}s_0 \right)^{-1} \hat{\mathbf{E}} \quad \mathbf{Q}_e(s_0) = \left( \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{E}}s_0 \right)^{-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (2.85)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_a) : \quad \mathbf{P}_a(s_0) = \left( \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{E}}s_0 \right)^{-*} \hat{\mathbf{E}}^* \quad \mathbf{Q}_a(s_0) = \left( \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{E}}s_0 \right)^{-*} \mathbf{C}^* \quad (2.86)$$

Dadurch, dass die Eingangs- beziehungsweise Ausgangsmatrix Blockform haben können, ergeben sich für jede Stufe des KR mehrere KR-Vektoren, weshalb man von einem Block-KR spricht.

In den Gleichungen (2.85) und (2.86) ist die allgemeine Form für das Deskriptorsystem bei einem beliebigen Punkt  $s_0$  dargestellt. Es ergeben sich offensichtliche Vereinfachungen für  $s_0 = 0$ . Ferner lassen sich  $\mathbf{P}_e$  und  $\mathbf{P}_a$  für reguläres  $\hat{\mathbf{E}}$  durch die ZRM-Matrizen schreiben. Meist ist es jedoch geschickter, diese Invertierung zu vermeiden und die Form in (2.85) und (2.86) zu verwenden.

Werden die Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  als orthonormale Basen der beiden beschriebenen KR gewählt und das betrachtete System durch die Vektorräume gemäß Abs. 2.4.3 projiziert, dann können durch diese *Petrov-Galerkin*-Projektion laut *Feldmann* [31] die ersten  $2n_{\text{kr}}$  Momente der approximierten Übertragungsfunktion zur Übereinstimmung gebracht werden. Die Ermittlung der biorthogonalen Projektionsmatrizen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{V}$  kann durch den *Lanczos*-Algorithmus [72][51] erfolgen.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von Projektionsbasen  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ , was der *Galerkin*-Projektion entspricht. Dadurch wird die Anzahl übereinstimmender Momente zwar auf  $n_{\text{KR}}$  verringert, die Stabilität des Originalsystems bleibt jedoch nach *Salimbahrami* [73] unter gewissen Voraussetzungen erhalten. Man spricht dabei von einseitigen Verfahren, deren Projektionsbasen durch den *Arnoldi*-Algorithmus ermittelt werden können. Dieser ist numerisch stabiler und einfacher zu implementieren als der *Lanczos*-Algorithmus. Für die hier untersuchten Verfahren wurde dieses Vorgehen gewählt, das in Abs. 2.6.3 noch eingehend dargestellt wird.

## 2.6 Eigenschaften von *Krylov*-Unterräumen

### 2.6.1 *Krylov*-Raumreduktion bei mechanischen dynamischen Systemen

In der vorliegenden Arbeit werden *Krylov*-Räume (KR) für die Reduktion im Kontext der Strukturoptimierung betrachtet, da sie auch bei hohen Systemdimensionen anwendbar sind, bei denen andere Verfahren, wie das „balancierte Abschneiden“, versagen würden. Um die Vor- und Nachteile der Reduktion mittels KR unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Systemparametrierung (PMOR) verstehen zu können, sollen zunächst wichtige Eigenschaften des KR diskutiert werden. Im folgenden Abschnitt werden praktische Aspekte bei der Anwendung und Ermittlung von *Krylov*-Räumen anhand eines Schwingersystems, das im Anhang A.1 beschrieben ist, aufgezeigt. In Abschnitt 2.5.3 wurden die Grundlagen zur MOR mittels KR bereits beschrieben.

#### 2.6.1.1 *Krylov*-Raum zweiter Ordnung

In der Strukturmechanik wird die Gleichung (2.37) für die Ermittlung der zeitlich abhängigen Bewegung gelöst. Im vorangegangenen Abs. 2.6.1 wurde das Prinzip zur Ermittlung des KR anhand des allgemeineren Falls des Deskriptorsystems aufgezeigt. Dazu sind die Transformationen aus Abs. 2.3.1 notwendig, um von der Differentialgleichung 2. Ordnung auf die verwendeten Matrizen zu kommen. Dieser Zwischenschritt kann durch sogenannte *Krylov*-Räume 2. Ordnung vermieden werden. Daraus resultiert eine Erhöhung der numerischen Effizienz, da weniger Speicher gebraucht wird und die betrachteten Matrix-Vektor-Produkte nur noch die halbe Systemdimension aufweisen [3].

Das Prinzip wird hier für reguläre  $\hat{E}$  und den EP  $s_0 = 0$  dargestellt. Der Eingangs-KR lässt sich dann anhand der Matrizen  $M, D, K$  und  $F$  in der Form (2.87) beschreiben, die die Submatrizen  $P_1, P_2$  sowie  $q_{2o}$  verwendet.

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathcal{K}_m \left( \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_{2o} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} P_1 = -K^{-1}D \\ P_2 = -K^{-1}M \\ q_{2o} = -K^{-1}f \end{array} \quad (2.87)$$

Die Anwendung der KR-Definition (2.65) auf diese Matrizen führt zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m &= \text{Span} \left( \begin{array}{l} \begin{bmatrix} q_{2o} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 q_{2o} \\ q_{2o} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1^2 q_{2o} + P_2 q_{2o} \\ P_1 q_{2o} \end{bmatrix}, \dots \end{array} \right) = \\ &\text{Span} \left( \begin{array}{l} \begin{bmatrix} z_1^o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_2^o \\ z_1^o \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_3^o \\ z_2^o \end{bmatrix}, \dots \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Die Basisvektoren können in die Teilmatrizen  $Z^o$  und  $Z^u$  aufgeteilt werden (siehe (2.89)). Dadurch zeigt sich, dass  $\text{Span}(Z^u)$  ein Unterraum von  $\text{Span}(Z^o)$  ist. Zusammen mit der Zustandsraumtransformation (2.41), die die Partitionierung des Zustandsvektors festlegt, kann man erkennen, dass die Geschwindigkeiten in einem Unterraum der Positionsfreiheitsgrade liegen. Für die Projektion des DGL-Systems zweiter Ordnung kann also der Untervektor-



raum verwendet werden, der durch  $\text{Span}(\mathbf{Z}^o)$  gegeben ist.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^o \\ \mathbf{Z}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^o & \mathbf{z}_2^o & \mathbf{z}_3^o & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_1^o & \mathbf{z}_2^o & \dots \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{Span}(\mathbf{Z}^u) \subset \text{Span}(\mathbf{Z}^o) \quad (2.89)$$

Somit ergibt sich die rekursive Formulierung der Basisvektoren des *Krylov*-Raumes zweiter Ordnung in (2.90).

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{P}_1 \mathbf{z}_{j-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{z}_{j-2} \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{q}_{2o} \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{q}_{2o} \quad j \in \{3, 4, \dots, m-1\} \quad (2.90)$$

Auf diese Weise ist es möglich, direkt eine Projektionsbasis für die Systemmatrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  zu ermitteln, anstatt der Projektionsmatrix für die Zustandsraumgrößen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ . Dies vereinfacht den Reduktionsprozess, da weniger Speicher und Rechenoperationen notwendig sind.

Der *Krylov*-Raum zweiter Ordnung und Stufe  $m$  wird häufig in der Form (2.91) geschrieben.

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{q}_{2o}) \quad (2.91)$$

Die Verallgemeinerung für beliebige EP kann durch die Betrachtung der Übertragungsfunktion erfolgen, die in Abhängigkeit der Systemmatrizen des Systems 2. Ordnung in (2.92) formuliert werden [72, S.42].

$$\mathbf{G}(s_0 + \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}_k(s_0) \sigma^k \quad \text{mit} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{H}_j(s_0) = \left( \tilde{\mathbf{C}}_p + s_0 \mathbf{C}_v \right) \left[ \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{M} \right]^k \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{F} \quad (2.93)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\mathbf{K}} = s_0^2 \mathbf{M} + s_0 \mathbf{D} + \mathbf{K} \quad \tilde{\mathbf{D}} = 2s_0 \mathbf{M} + \mathbf{D} \quad \tilde{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + s_0 \mathbf{C}_v$$

Für den allgemeinen Fall ergeben sich die KR-Matrizen 2. Ordnung für den Eingangs-KR gemäß (2.94).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1e} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-1} (\mathbf{D} + 2s_0 \mathbf{M}) \\ \mathbf{P}_{2e} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_{2e} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.94)$$

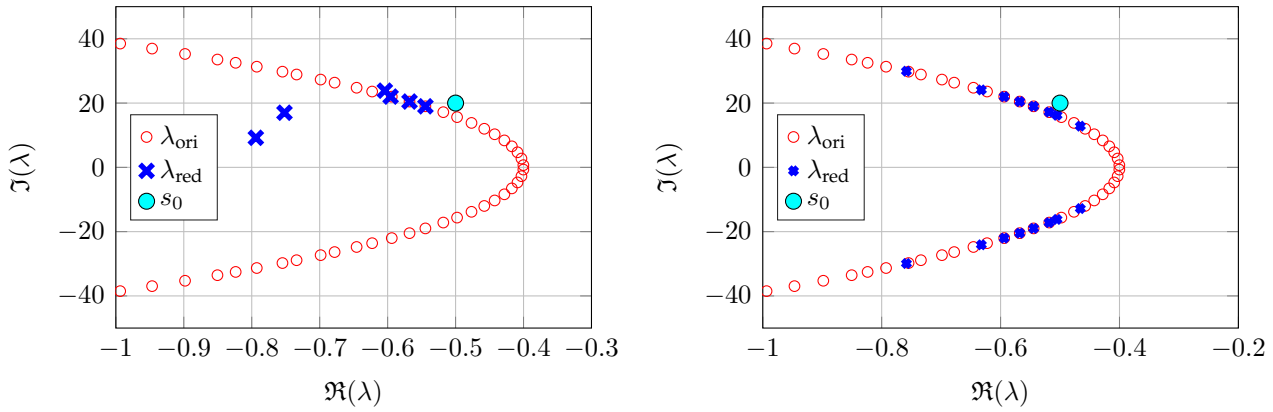
Für den Ausgangsraum die in (2.95).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1a} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-T} (\mathbf{D} + 2s_0 \mathbf{M})^T \\ \mathbf{P}_{2a} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-T} \mathbf{M}^T \\ \mathbf{Q}_{2a} &= \left( -s_0^2 \mathbf{M} - s_0 \mathbf{D} - \mathbf{K} \right)^{-T} \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (2.95)$$

Für die Wahl des Projektionsverfahrens gelten die selben Überlegungen wie in Abs. 2.5.3. Die Ermittlung der Projektionsmatrizen auf Grundlage von Systemen 2. Ordnung kann durch den SOAR-Algorithmus [4] erfolgen, dessen Prinzip in Alg. 2.6.2 dargestellt ist. Die Vorteile der Betrachtung des Systems zweiter Ordnung gegenüber dem ZRM sind der nu-

## 2. Grundlagen

merisch geringere Speicher- und Rechenaufwand (keine ZRM-Transformation, Matrizen halber Dimension) und die Tatsache, dass ein beliebiger EP wieder auf eine symmetrische Verteilung der EW des reduzierten Systems führt (vgl. Abb. 2.22). Ferner bleibt die Struktur des DGL-Systems erhalten. [72]

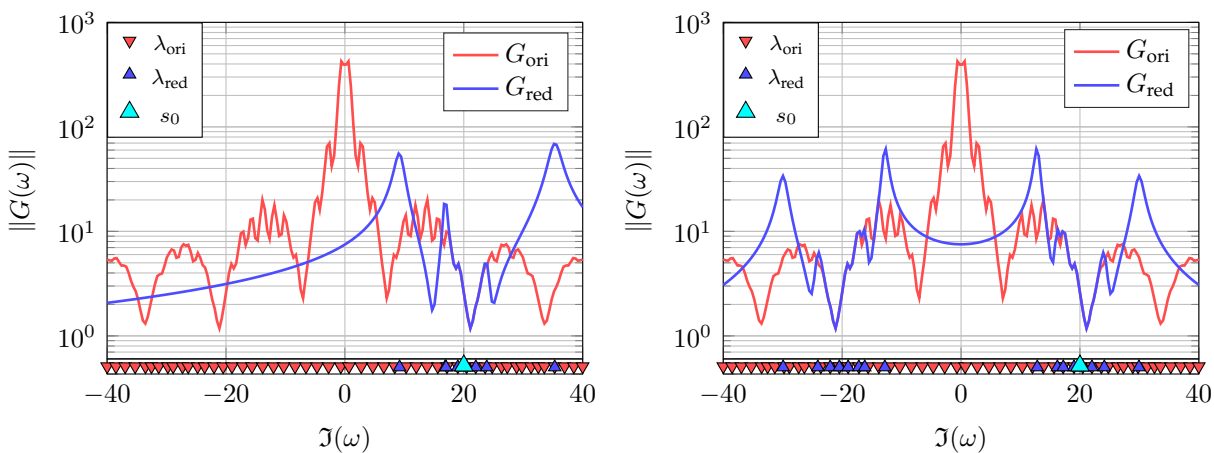


(a) EW-Verteilung bei System 1. Ordnung

(b) EW-Verteilung bei System 2. Ordnung

Abbildung 2.22.: Verteilung der EW bei Reduktion des Systems 1. bzw. 2. Ordnung

Die Asymmetrie der Eigenwertverteilung in Abb. 2.22(a), die sich aus der Verwendung des *Arnoldi-Algorithmus* 1. Ordnung in Alg. 2.6.1 ergibt, kann durch die Reellifizierung der Projektionsmatrix vermieden werden. Nach *Soppa* [80] folgt daraus jedoch eine größere Unter-raumbasis. Der zugehörige Frequenzgang ist in Abb. 2.23 zu sehen, wobei die physikalisch unsinnige Asymmetrie deutlich wird. Aus physikalischer Sicht ist die Sicherstellung einer symmetrischen Transferfunktion unverzichtbar, da sich sonst komplexwertige Systemantworten ergeben.



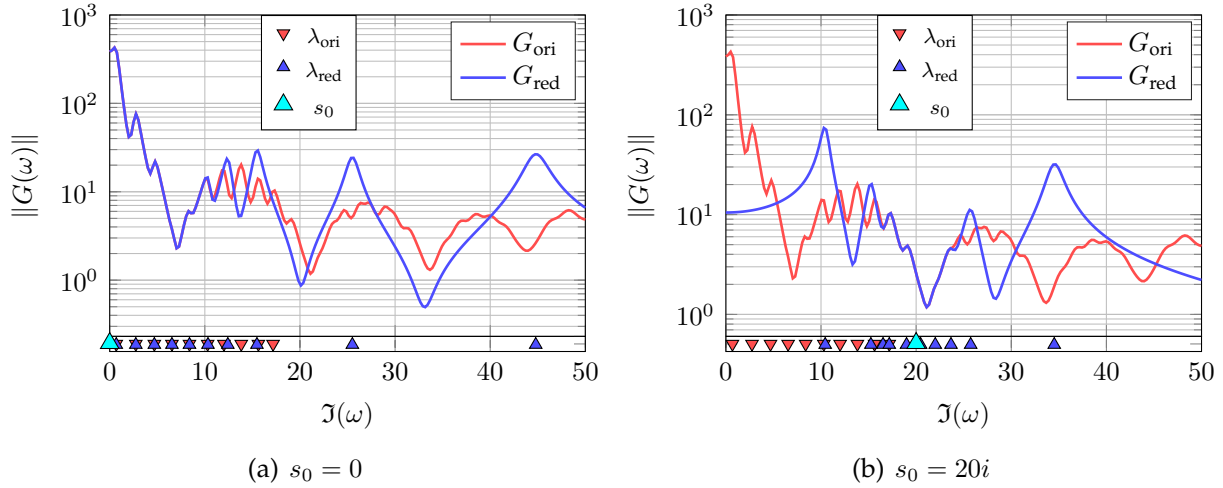
(a) AR 1. Ordnung

(b) AR 2. Ordnung

Abbildung 2.23.: Vergleich der TF für Verfahren 1. und 2. Ordnung

## 2.6.1.2 Einfluss der Wahl des Entwicklungspunktes

Die Wahl des Entwicklungspunktes (EP) ist im Grunde beliebig, jedoch ist zu beachten, dass der Übertragungsfunktionswert am EP exakt und die Approximation mit größer werdendem Abstand vom EP schlechter ist. Dies wird durch den Vergleich der zwei Spektren in Abb. 2.24 für unterschiedliche EP deutlich, die für einen KR der Stufe 20 ermittelt wurden. Gemäß der Legende ist die Position des Entwicklungspunktes zu sehen, sowie die hohe Approximationsgüte in der Umgebung.


 Abbildung 2.24.: Einfluss der Entwicklungspunktlage  $s_0$ 

Entsprechend muss die Wahl des EP den Verwendungszweck des reduzierten Modells widerspiegeln. Beispielsweise sind in der Strukturmechanik in der Regel die tiefen Frequenzen wichtiger als die hohen, weshalb mögliche EP im niederfrequenten Bereich liegen sollten. Besondere Entwicklungspunkte liegen bei  $s_0 = 0$  (Maclaurin-Reihe vgl. (2.96)) und  $s_0 = \infty$  (Markov-Reihe (vgl. (2.97))).

$$G_T(s) = -C \sum_{k=0}^{\infty} \left( \hat{A}^{-1} \hat{E} \right)^k \hat{A}^{-1} \hat{B} s^k \quad \text{Maclaurin-Reihe} \quad s_0 = 0 \quad (2.96)$$

$$G_T(s) = -C \sum_{k=0}^{\infty} \left( \hat{E}^{-1} \hat{A} \right)^k \hat{E}^{-1} \hat{B} s^{-k+1} \quad \text{Markov-Reihe} \quad s_0 = \infty \quad (2.97)$$

Vergleicht man (2.97) mit (2.83) ist der etwas geringere Berechnungsaufwand gegenüber der allgemeinen Wahl des EP für die Berechnung der KR-Matrizen zu erkennen.

## 2.6.1.3 Bessere Approximation bei mehr Momenten

Abhängig von der Stufe des Krylov-Raumes und der Blocklänge von  $Q$  (Anzahl der Spaltenvektoren von  $Q$ ) ergibt sich die Dimension des Vektorunterraumes. Große Unterraumdimensionen führen zu besseren Approximationen und entsprechend höherem Berechnungsaufwand. Die Auswirkungen auf das Übertragungsverhalten eines reduzierten Systems ist

in Abbildung 2.25 mittels des Übertragungsfrequenzganges gezeigt.

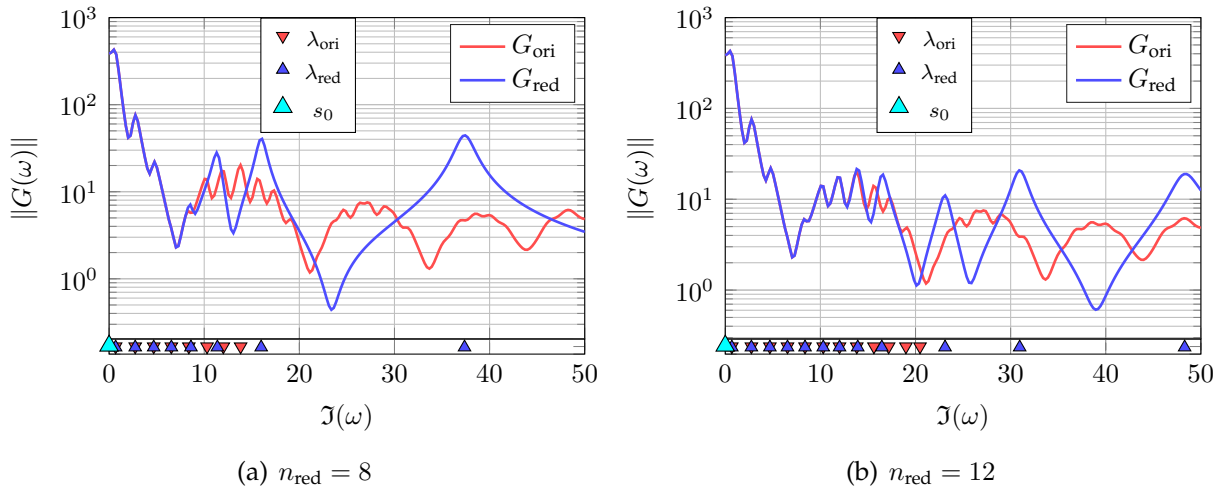


Abbildung 2.25.: Approximationsgüte bei unterschiedlicher *Krylov*-Raumstufe

Es wird deutlich, wie mit steigender Momentenzahl die Approximationsgüte in einem weiträumigeren Bereich ansteigt. Anhand der Markierung der ersten acht Eigenwerte von reduziertem und originalem System wird deutlich, wie bei der Annäherung der Transferfunktion die Eigenwerte durch die Reduktion verschoben werden. Diese Eigenschaft ist ein wichtiger Unterschied zur modalen Reduktion, bei der die EW der berücksichtigten Moden gleich bleiben. Das bedeutet, dass das *krylov*-raumreduzierte System teils auch hohe Verstärkungen in Bereichen aufweisen kann, in denen das Originalsystem keine Resonanzstelle besitzt.

## 2.6.2 KR-Projektionsmatrizen bei statischen parametrisierten Systemen

Anders als bei den eben betrachteten dynamischen Systemen liegen für statische Systeme keine Frequenzparameter vor, um die sie entwickelt werden können. Für die Reduktion statischer Systeme kann jedoch nach *Daniel* [23] ein KR ermittelt werden, indem die Systemmatrix, die für statische Betrachtungen die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  ist, um eine Systemparameterkonfiguration  $\mathbf{p}_0$  als *Taylor*-Reihe entwickelt wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{p}) = & \mathbf{K}_0 + \sum_i \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}_0} \Delta p_i + \sum_{j,k} \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial p_j \partial p_k} \right|_{\mathbf{p}_0} \Delta p_j \Delta p_k + \\ & + \sum_{l,m,n} \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \mathbf{K}}{\partial p_l \partial p_m \partial p_n} \right|_{\mathbf{p}_0} \Delta p_l \Delta p_m \Delta p_n + \dots \end{aligned} \quad (2.98)$$

$i, j, k, l, m, n, \dots \in \{1, \dots, n_p\}$

Fasst man die skalarwertigen Faktoren der Parametervariationen zu  $\Delta\tilde{p}_i$  zusammen, kann man die Reihe gemäß Gleichung (2.99) schreiben.

$$\mathbf{d} = \left( \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{K}_j \Delta\tilde{p}_j \right)^{-1} \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad (2.99)$$

$\mathbf{K}_j$  : Ableitungsterme der Steifigkeitsmatrix aus der *Taylor*-Reihe,

$\Delta\tilde{p}_j$  : Produkt aller Skalare des  $j$ -ten Summanden

Die Gleichung (2.99) beschreibt gewissermaßen das Übertragungsverhalten der Kräfteingänge auf den Verschiebungszustand über dem Systemparameterraum.

Für praktische Berechnungen muss die *Taylor*-Reihe auf eine endliche Anzahl Summanden beschränkt werden. Die Anzahl der Matrizen ist durch die Anzahl der Parameter und die Anzahl der berücksichtigten Ableitungen bestimmt und wird mit  $n_t$  bezeichnet. Durch diese Beschränkung liegt nur mehr eine Approximation vor, die mit größer werdendem Abstand vom Entwicklungspunkt ungenauer wird. In der Praxis ist bei hochdimensionalen Systemen eine Berücksichtigung von Ableitungen höher als zweite Ordnung fast nicht möglich. Dies liegt am schnell steigenden Speicher- und Rechenkapazitätsbedarf (vgl. Abs. 2.4.8).

Ausklammern von  $\mathbf{K}_0$  aus der Summe ergibt (2.100).

$$\mathbf{d} = \left( \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n_t-1} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_j \Delta\tilde{p}_j \right)^{-1} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f} = \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{n_t-1} \mathbf{E}_j \Delta\tilde{p}_j \right)^{-1} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f} \quad (2.100)$$

Die Matrizen  $\mathbf{E}_j$  werden als Einflussmatrizen bezeichnet, da sie den Einfluss der Parameter auf die Steifigkeitsmatrix beschreiben. Mittels der *Neumann*-Reihe

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k \quad (2.101)$$

wird die Summe weiter zu (2.102) umgeformt. Hierin ist zusätzlich die *Neumann*-Reihe beschränkt, da mit  $n_{\text{fhg}}$  Basisvektoren bereits der gesamte Vektorraum aufgespannt werden kann.

$$\mathbf{d} = \sum_{k=0}^{n_{\text{fhg}}} \left( \sum_{j=1}^{n_t-1} \mathbf{E}_j \Delta\tilde{p}_j \right)^k \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f} = \sum_{k=0}^{n_k} (\mathbf{E}_1 \Delta\tilde{p}_1 + \cdots + \mathbf{E}_{n_t-1} \Delta\tilde{p}_{n_t-1})^k \tilde{\mathbf{f}} \quad (2.102)$$

Anhand von (2.102) ist zu erkennen, dass der Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  in einem Vektorraum liegen muss, der durch die Summanden der Reihe multipliziert mit dem Vektor der Eingänge gegeben ist. In der gegebenen Gleichung ist die Struktur des KR zu erkennen, wobei die Abbildungsmatrix aus mehreren Summanden besteht. Man spricht dabei von einem multivariaten KR.

Die Momente der Reihe können noch in Abhängigkeit der skalaren Koeffizienten  $\Delta\tilde{p}$  sortiert werden. Für gleiche Koeffizientenkombinationen bei Momenten höherer Ordnung können dann entsprechend die Vektoren aufaddiert werden. Dies ist anhand des einfachen Beispiels in (2.103) dargestellt, bei dem die Matrix  $\mathbf{K}$  in zwei Parametern linearisiert ist und ein *Kry-*

## 2. Grundlagen

lov-Raum zweiter Stufe betrachtet wird.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= \sum_{k=0}^2 (\mathbf{E}_1 \Delta \tilde{p}_1 + \mathbf{E}_2 \Delta \tilde{p}_2)^k \tilde{\mathbf{f}} = \\
 &\left( \underbrace{0.}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{E}_1 \Delta \tilde{p}_1 + \mathbf{E}_2 \Delta \tilde{p}_2}_{1. \text{ Stufe}} + \underbrace{\mathbf{E}_1^2 \Delta \tilde{p}_1^2 + (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1) \Delta \tilde{p}_1 \Delta \tilde{p}_2 + \mathbf{E}_2^2 \Delta \tilde{p}_2^2}_{2. \text{ Stufe Addition}} \right) \tilde{\mathbf{f}} \quad (2.103)
 \end{aligned}$$

Sortiert man nach den einzelnen skalarwertigen Skalierungsfaktoren, die sich aus den Kombinationen der  $\Delta p_i$  in (2.103) ergeben, wird erkennbar, dass  $\mathbf{d}$  im Vektorraum

$$\text{Span} \left\{ \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{E}_1 \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{E}_2 \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{E}_1^2 \tilde{\mathbf{f}}, (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1) \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{E}_2^2 \tilde{\mathbf{f}} \right\} \quad (2.104)$$

liegt. Die Addition, die in (2.103) markiert ist, muss bei der Implementierung durch die Berücksichtigung der zugehörigen Parameterkombination identifiziert werden.

In [30] findet sich eine eingehende Diskussion der verschiedenen univariaten und multivariaten KR und deren verallgemeinerten Bildungsvorschriften. Es wird deutlich, dass die Dimension der Projektionsbasis stark ansteigt, wenn viele Parameter, höhere Ableitungsstufen der *Taylor*-Reihe oder hohe KR-Stufen verwendet werden sollen. Die Dimension  $n_i$  des KR in Abhängigkeit der genannten Größen ist durch die geometrische Reihe in (2.105) gegeben.

$$\begin{aligned}
 n_i &= \sum_{j=0}^{n_k} \binom{n_t + j - 1}{j} = \sum_{j=0}^{n_k} \frac{(n_t + j - 1)!}{(n_t - 1)! j!} \\
 n_t &= \text{Anzahl der Einflussmatrizen } \mathbf{E}_i \\
 n_k &= \text{Stufe des Krylov-Raumes} \\
 n_i &= \text{KR-Dimension}
 \end{aligned} \quad (2.105)$$

In Abb. 2.26 wird der schnelle Anstieg der KR-Dimension über der Stufe des KR und für eine größer werdende Anzahl von Systemparametern deutlich.

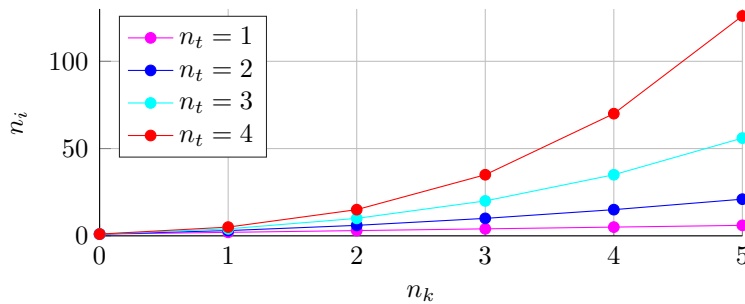


Abbildung 2.26.: KR-Dimension bei verschiedenen  $n_k$  und  $n_t$

Der schnelle Anstieg der KR-Dimension hat zur Folge, dass die Reduktionsdimension ebenfalls schnell ansteigt und der Reduktionsgrad sinkt. Dies kann das Verfahren schnell limitieren, wenn viele Parameter oder hohe Stufen des KR berücksichtigt werden sollen.

Die hier dargestellten Methoden wurden für statische Systeme hergeleitet. Für dynamische Systeme können ähnliche Überlegungen angestellt werden und auf Grundlage der Krylov-Räume zweiter Ordnung Unterräume hergeleitet werden [23]. Dabei verschärft sich das Problem, dass mit steigender Anzahl Parameter die Basisdimension äußerst schnell wächst und somit keine brauchbaren Reduktionsgrade erreicht werden können.

### 2.6.3 Berechnung der Basisvektoren - Arnoldi-Algorithmus

Betrachtet man die Bildungsvorschrift für den KR in Gleichung (2.65), so fällt auf, dass für den Vektor  $q$  eine Potenzreiheniteration mit der Matrix  $P$  durchgeführt wird. Somit führt die wiederholte Abbildung mit  $P$  zu neuen Vektoren, die sich immer mehr dem dominanten Eigenvektor von  $P$  annähern (vgl. die Ausführungen zu Potenziteration in Abschnitt 2.4.5.2). Gleichzeitig wird der abgebildete Vektor je nach Eigenwert gelängt oder verkürzt. Aus diesen beiden Eigenschaften der linearen Abbildung  $Pq$  ergibt sich zusammen mit der Darstellungsgenauigkeit der Rechenanlage, dass für steigende Stufen des KR die aufspannenden Vektoren nicht mehr unterscheidbar sind.

Deshalb wird für die Bestimmung der Basis nicht die Folge (2.65) berechnet, sondern ein rekursives Verfahren angewendet, das auf der Definition des Krylov-Raumes in (2.66) basiert. Der Arnoldi-Algorithmus, der als Pseudocode in Alg. 2.6.1 zu sehen ist, umgeht das genannte Problem und ermittelt stabil eine Basis des KR.

---

#### Algorithmus 2.6.1: Arnoldi-Algorithmus mit Deflation

---

**Daten:**  $P, q, m, \epsilon$

$Z_{[:,1]} := q$

$H_{[1,1]} := \|q\|,$

$V_{[:,1]} := q/H_{[1,1]}$

$j := 2$

**solange**  $j < m$  **tue**

$V_{[:,j]} := PV_{[:,j-1]}$

$k := 1$

**solange**  $k < j$  **tue**

$H_{[k,j]} := V_{[:,k]}^* V_{[:,j]}$

$V_{[:,j]} := V_{[:,j]} - H_{[k,j]} V_{[:,k]}$

$k := k + 1$

$H_{[j,j]} := \|V_{[:,j]}\|$

**wenn**  $H_{[j,j]} \geq \epsilon_{lin}$  **dann**

$V_{[:,j]} := V_{[:,j]}/H_{[j,j]}$

**sonst**

        Algorithmus bricht ab!

$j := j + 1$

    ◁ Schleife über KR-Stufe

    ◁ Neue KR-Vektoren berechnen

        ◁ Orthogonalisierungsschleife

            ◁ Projektion

        ◁ Orthogonalisierung

    ◁ Norm des neuen Vektors

    ◁ Test linearer Unabhängigkeit

    ◁ Normierung des neuen Vektors

**Ergebnis:**  $V$  mit  $V^*V = I$  und  $VH = Z$

---

Die beiden Operationen Orthogonalisierung und Normierung verändern den Vektorraum

$\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  nicht. Die Orthogonalisierung entfernt Anteile des neuen Vektors, die durch die bereits vorliegenden Basisvektoren  $\mathbf{V}_{[:,1:m]}$  darstellbar sind. Auch die Normierung verändert den KR offensichtlich nicht. So wird die Parallelisierung der Basisvektoren und deren starke Längenänderung vermieden, woraus sich eine stabile numerische Ermittlung der orthonormalen Basis ergibt. Dennoch kann es passieren, dass die Länge eines neuen Vektors unter die Toleranz  $\epsilon_{\text{lin}}$  fällt und der Vektor somit als linear abhängig im Sinne der Toleranz anzusehen ist. In diesem Fall wird der Algorithmus beendet.

Die in Alg. 2.6.1 gezeigte Version des Algorithmus verwendet das Prinzip des modifizierten *Gram-Schmidt*-Verfahrens, das in Abs. 2.4.4 bereits diskutiert wurde. In der beschriebenen Form ermittelt der Algorithmus eine QR-Zerlegung der *Krylov*-Raumbasismatrix  $\mathbf{Z}$  in die Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{H}$ , die in Abbildung 2.27 dargestellt ist und die jeweilige Belegungsstruktur zeigt.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{H} \end{matrix}$$

Abbildung 2.27.: QR-Zerlegung durch *Arnoldi*-Algorithmus

Der *Arnoldi*-Algorithmus findet auch Einsatz bei der Eigenproblemlösung, die in Abschnitt 2.4.5.2 angesprochen wurden. Dabei kommt ein im Vergleich zu Algorithmus 2.6.1 leicht modifiziertes Schema zum Einsatz, das beispielsweise in [70, S.172] beschrieben ist. Dabei wird keine obere Dreiecksmatrix erzeugt, sondern eine *Hessenberg*-Matrix, die eine Besetzungsreihe unter der Diagonalen aufweist. Das Ergebnis des *Arnoldi*-Algorithmus ist dann die Faktorisierung in Abb. 2.28.

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \begin{matrix} \square \\ \mathbf{H} \end{matrix} + \mathbf{R} \begin{matrix} \mathbf{v}_{m+1} \mathbf{H}_{[j+1,j+1]} \end{matrix}$$

Abbildung 2.28.: *Hessenberg*-Form durch *Arnoldi*-Algorithmus

Die Projektion  $\mathbf{V}^* \mathbf{A} \mathbf{V}$  entspricht wegen der Orthonormalitätseigenschaften von  $\mathbf{V}$  der *Hessenberg*-Matrix, deren Eigenwerte für genügend große Dimension des Unterraumes gute Approximationen der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind. Bei Wahl einer kleinen aber ausreichenden Unterraumdimension kann so sehr viel Rechenzeit bei der Eigenwertbestimmung gespart werden.

Für die in Abs. 2.6.1.1 beschriebenen *Krylov*-Räume zweiter Ordnung muss die Ermittlung neuer Vektoren im *Arnoldi*-Algorithmus entsprechend angepasst werden. Algorithmus 2.6.2 zeigt das Prinzip des *SOAR*-Algorithmus (Second Order ARnoldi), das von *Bai* [4] maßgeblich entwickelt wurde.

Es ist zu erkennen, dass im Falle der linearen Abhängigkeit des orthonormierten Vektors  $\mathbf{V}_{[:,j]}$  das Verfahren nicht zwangsläufig abbricht sondern ein neuer Vektor mittels  $\mathbf{V}_{u[:,j]}$  berechnet werden kann. Zum Abbruch kommt es hier nur, wenn sowohl  $\|\mathbf{V}_{o[:,j]}\|$  und  $\|\mathbf{V}_{u[:,j]}\|$  kleiner als die Toleranz  $\epsilon_{\text{lin}}$  sind. In [4] sind Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Hilfsvariable  $\mathbf{V}_u$  eingespart und so der Speicherbedarf reduziert werden kann.



---

**Algorithmus 2.6.2: Arnoldi-Algorithmus 2. Ordnung mit Deflation**

---

**Daten:**  $P_1, P_2, \mathbf{q}, m, \epsilon$

$$\mathbf{H}_{[1,1]} := \|\mathbf{q}\|,$$

$$\mathbf{Z}_{o[:,1]} := \mathbf{q}, \quad \mathbf{Z}_{u[:,1]} := \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{o[:,1]} := \mathbf{q}/\mathbf{H}_{[1,1]}, \quad \mathbf{V}_{u[:,1]} := \mathbf{q}/\mathbf{H}_{[1,1]}$$

$j := 2$

**solange**  $j < m$  **tue**

◁ Schleife über KR-Stufe

$$\mathbf{Z}_{o[:,j]} := P_1 \mathbf{V}_{o[:,j-1]} + P_2 \mathbf{V}_{u[:,j-1]}$$

$$\mathbf{Z}_{u[:,j]} := \mathbf{V}_{o[:,j-1]}$$

$k := 1$

**solange**  $k < j$  **tue**

◁ Orthogonalisierungsschleife

$$\mathbf{H}_{[k,j]} := \mathbf{V}_{o[:,k]}^* \mathbf{Z}_{o[:,j]}$$

◁ Projektion

$$\mathbf{Z}_{o[:,j]} := \mathbf{Z}_{o[:,j]} - \mathbf{H}_{[k,j]} \mathbf{V}_{o[:,k]}$$

◁ Orthogonalisierung

$$\mathbf{Z}_{u[:,j]} := \mathbf{Z}_{u[:,j]} - \mathbf{H}_{[k,j]} \mathbf{V}_{u[:,k]}$$

$k := k + 1$

$$\mathbf{H}_{[j,j]} := \|\mathbf{Z}_{o[:,j]}\|$$

◁ Norm des neuen Vektors

**wenn**  $\mathbf{H}_{[j,j]} \geq \epsilon_{lin}$  **dann**

◁ Test linearer Unabhängigkeit

$$\mathbf{V}_{o[:,j]} := \mathbf{Z}_{o[:,j]}/\mathbf{H}_{[j,j]}$$

◁ Neuen Basisvektor anfügen

$$\mathbf{V}_{u[:,j]} := \mathbf{Z}_{u[:,j]}/\mathbf{H}_{[j,j]}$$

**sonst wenn**  $\|\mathbf{Z}_{u[:,j]}\| > \epsilon_{lin}$  **dann**

◁ Bei Deflation

$$\mathbf{V}_{o[:,j]} := \mathbf{0}$$

◁ Neuen Basisvektor anfügen

$$\mathbf{V}_{u[:,j]} := \mathbf{Z}_{u[:,j]}/\mathbf{H}_{[j,j]}$$

**sonst**

└ Algorithmus bricht ab!

$j := j + 1$

Entfernen von Nullspalten aus  $\mathbf{V}_o$

**Ergebnis:**  $\mathbf{V}_o$  mit  $\mathbf{V}_o^* \mathbf{V}_o = \mathbf{I}$

---

Für die Anwendung auf multivariate KR, wie sie in Abs. 2.6.2 angesprochen wurden, ändert sich nur die Bildungsvorschrift neuer Vektoren. Dies ist in Algorithmus 2.6.3 aus Gründen der Übersichtlichkeit für ein Verfahren erster Ordnung dargestellt.

---

**Algorithmus 2.6.3: Rekursive Bildungsvorschrift für neue multivariate KR-Vektoren**

---

**Daten:**  $\mathbf{V}$

◁ Bisher orthonormierte KR-Vektoren

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{n_t}]$$

◁ Einflussmatrizen

$\mathbf{T}$

◁ Information zu den zu  $\mathbf{V}$  gehörigen Parameterkombinationen

$k := 1$

**solange**  $k \leq n_t$  **tue**

◁ Schleife über die Matrizen  $\mathbf{E}_j$

$$\mathbf{Z}_{[:,k]} := \mathbf{E}_k^* \mathbf{V}_{[:,j]}$$

Finde gleiche Parameterkonfigurationen mittels  $\mathbf{T}$

Addiere die Vektoren mit gleichen Parameterkombinationen

Speichere neue zu den  $\mathbf{Z}_{[:,j]}$  gehörigen Parameterkombinationen in  $\mathbf{T}$

**Ergebnis:**  $\mathbf{Z}$ : Matrix der neuen KR-Vektoren,  $\mathbf{T}$ : Parameterkombinationen

---

Die zusätzliche Herausforderung ist implementierungstechnisch hierbei in erster Linie, die Vektoren gleicher skalierender Parameterkonfigurationen gemäß Gleichung (2.103) aufzusummieren. Durch die Tabelle  $\mathbf{T}$ , die für jeden Vektor in  $\mathbf{V}$  die Parameterkombination enthält, kann dies bewerkstelligt werden. In [23] und [30] finden sich Abbildungsvorschriften für diese Aufgabe.

# Untersuchung des Einsatzes von MOR-Verfahren für die Optimierung

## 3.1 Interaktion von MOR und Optimierung

Bei *Benner* [11] werden unterschiedliche Optimierungsaufgaben als Motivation für die Verwendung parameterabhängiger MOR-Verfahren (PMOR-Verfahren) aufgezählt. Die Grundlage der Optimierung ist, wie in Abschnitt 2.1 dargelegt, die parameterabhängige Beschreibung von Systemen. MOR-Methoden müssen dies auf die ein oder andere Weise berücksichtigen, um in der Strukturoptimierung eingesetzt werden zu können. Im Weiteren werden daher zwei MOR-basierte Verfahren in der Optimierung eingesetzt und verglichen. Im ersten Fall werden KR im Kontext eines gradientenbasierten Optimierungsverfahrens untersucht. Die Ergebnisse werden analysiert und die Erfahrungen fließen in die Entwicklung des zweiten Ansatzes ein. Dabei handelt es sich um eine evolutionäre Strategie, die die Eigenschaften der MOR besser auszunutzen vermag.

## 3.2 Optimierung eines Balkenfachwerks bei Verwendung eines reduzierten polynomiellen Ersatzmodells

Die in [23] beschriebene Methode ermöglicht die Formulierung eines mittels *Krylov*-Räumen reduzierten Ersatzmodells in Abhängigkeit von den Parametern. Das Gleichungssystem der FEM für statische Systeme aus (2.38) nimmt dabei die Form  $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \mathbf{f}$  an, wobei  $\mathbf{x}$  die Optimierungsvariablen sind. Die Verwendung eines solchen reduzierten Modells in der Strukturoptimierung wird hier anhand eines einfachen Balkenmodells aufgezeigt.

### 3.2.1 Modell und Optimierungsaufgabe

Das Balkenfachwerk mit einer Länge von 2 m und einer Höhe von 1 m und die aufgebrachte Last ist in Abb. 3.1 gezeigt. Die Optimierungsvariablen sind für die erste Untersuchung die

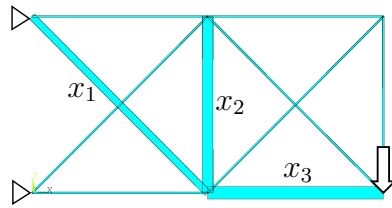


Abbildung 3.1.: Generisches Optimierungsmodell Balkentragwerk

drei Balkenhöhen der in Abbildung 3.1 zugeordneten Balken. Das System hat 24 FHG, wobei die Lagerung bereits berücksichtigt ist. Die Optimierungsaufgabe ist in (3.1) beschrieben.

$$\min_{\mathbf{x}} \{z(\mathbf{x}) \mid g(\mathbf{x}) \leq 0, \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i\} \quad \text{mit } i \in 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$$z = m(\mathbf{x}) = \rho b(x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{d_{\text{Ecke}}}{1.05[\text{mm}]} - 1 \quad (3.2)$$

$$\underline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1][\text{mm}] \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{x}} = [50, 50, 50][\text{mm}] \quad (3.3)$$

Es wird die Masse des Systems minimiert, wobei nur eine Verschiebungsrestriktion eingehalten werden muss. Festigkeits- oder Stabilitätsaspekte werden zur Vereinfachung nicht berücksichtigt. Die geringe Systemdimension lässt den Vergleich von Rechenzeitgewinnen durch die Reduktion kaum zu, da die Hauptaufwände bei administrativen Aufgaben wie dem Laden von Modulen und Lizenzen liegen. Die Untersuchung dient der Veranschaulichung der praktischen Durchführbarkeit der Optimierung anhand des reduzierten Systems und der Genauigkeit des Ersatzmodells. Der Vorteil ist die kurze Ausführungsdauer, die einfache Änderungen und Tests des Verfahrens zulässt. Die Gradienten wurden aus Gründen einer einfacheren Implementierung mittels finiter Differenzen berechnet. Der Parametereinfluss auf die Steifigkeitsmatrix wurde in der *Taylor*-Reihe linear approximiert, was gemäß Abschnitt 2.6.2 entsprechenden Einfluss auf die ermittelte KR-Basis hat.

### 3.2.2 Optimierungsergebnisse bei reduziertem Modell

Anhand des beschriebenen Systems wurde ein *Krylov*-Unterraum der Dimension 5 gemäß den Methoden in Abschnitt 2.6.2 ermittelt und die statische FEM-Gleichung auf diesen projiziert. Damit beträgt der Reduktionsgrad circa 80%. Für die Optimierung wurde der „fmincon“-Algorithmus von MATLAB verwendet. Dabei handelt es sich um eine Variante des SQP-Algorithmus, der ein bewährtes Lösungsverfahren für strukturmechanische Optimierungsprobleme ist. Vom Startwert  $\mathbf{x}_0 = [40, 41, 42][\text{mm}]$  ausgehend, wurde der in Abb. 3.2 gezeigte Optimierungsverlauf erreicht.

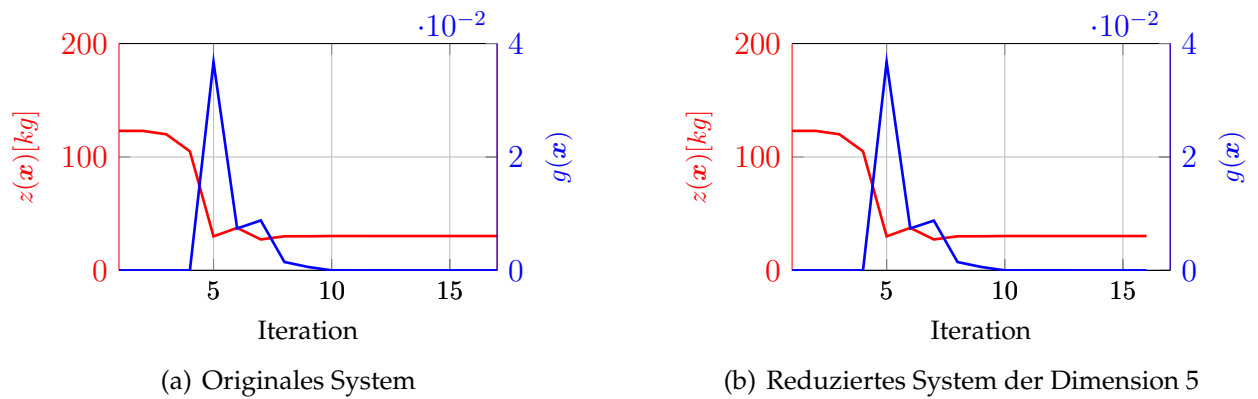


Abbildung 3.2.: Konvergenz von originalem und reduziertem System der Dimension 5

Die beiden Optimierungsweisen ergeben weitestgehend die selben Ergebnisse, wobei im Falle der Optimierung des reduzierten Systems die Konvergenz bei weniger Iterationen erreicht wird. Dies dürfte an einer geringeren Sensitivität des reduzierten Modells gegenüber Parameteränderungen liegen. Die Verläufe der Optimierungsvariablen in Abb. 3.3 zeigen ebenfalls sehr ähnliche Verläufe.

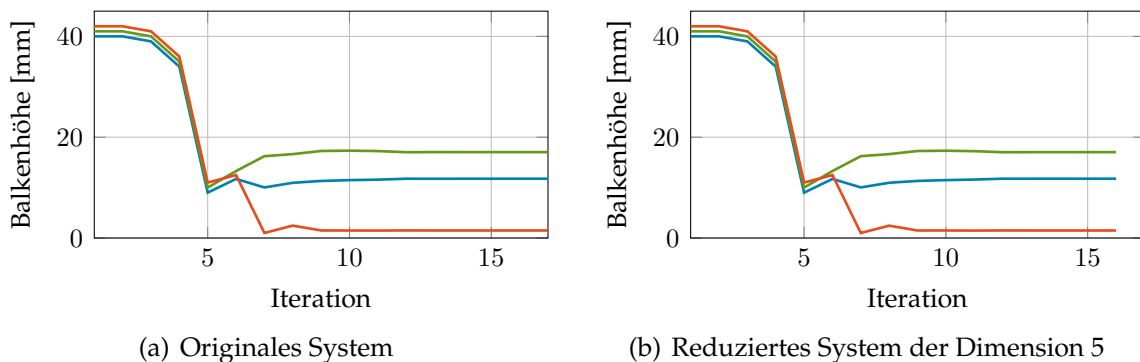


Abbildung 3.3.: Vergleich des Verlaufs der Optimierungsvariablen

Die Gegenüberstellung der Unterschiede in den Systemantworten und den Optimierungsvariablen ist in Abbildung 3.4 dargestellt und es ist zu erkennen, dass die Genauigkeit, die das reduzierte parametrisierte Modell aufweist, für eine erfolgreiche Optimierung des gegebenen, mechanischen Systems hoch genug ist.

Die Dauer der Optimierung des reduzierten Systems beträgt 7.2 Sekunden. Dabei entfällt der Hauptteil auf den Reduktionsschritt, der vier Systemaufrufe benötigt, um die Linearisierung der Steifigkeitsmatrix nach den Optimierungsvariablen zu formulieren. Die Ermittlung der Unterraumvektoren und die anschließenden Auswertungen der Systemantworten fallen hingegen kaum ins Gewicht. Die geringe Dauer der Berechnung der Systemantworten liegt vor allem daran, dass die Systemmatrizen programmintern geladen sind und das lineare Gleichungssystem ohne den Assemblierungsschritt aufgestellt werden kann.

### 3. Modellordnungsreduktionsverfahren für die Optimierung

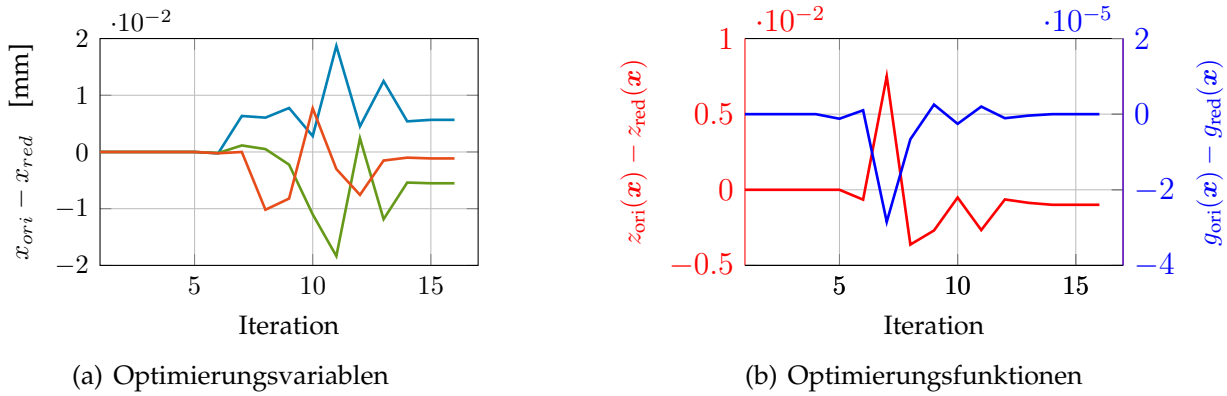


Abbildung 3.4.: Abweichungen in den Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 5

Die Optimierung des originalen Systems bedarf 150 Sekunden, wobei das wiederholte Laden des verwendeten FEM-Programms zur Berechnung der Systemantworten stark ins Gewicht fällt. Würde dieser Schritt implementierungstechnisch vermieden, ließen sich die Berechnungszeiten erheblich verringern. Dazu bedarf es jedoch tiefgehender Eingriffe in die FEM-Software, die den Rahmen der Untersuchung überstiegen hätten. Die Zeitersparnisse zwischen den beiden beschriebenen Optimierungen müssen folglich unter diesen Gesichtspunkten bewertet werden und haben nur sehr eingeschränkte Aussagekraft.

Um die Grenzen der Genauigkeit zu untersuchen wird der Reduktionsgrad gesteigert. Der Projektionsunterraum für das reduzierte System besteht jetzt aus drei KR-Vektoren. Der Vergleich der Optimierungsfunktionen und -parameter ist dafür in Abb. 3.5 gezeigt.

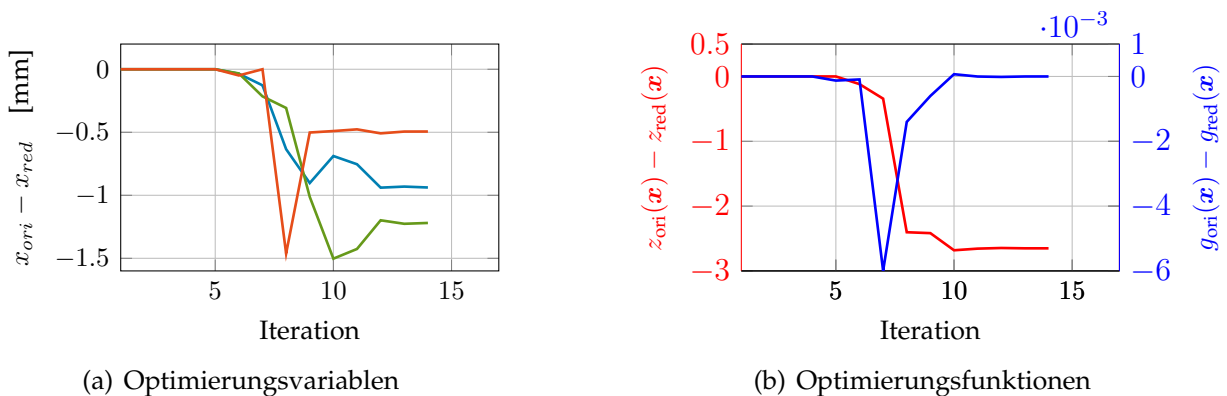


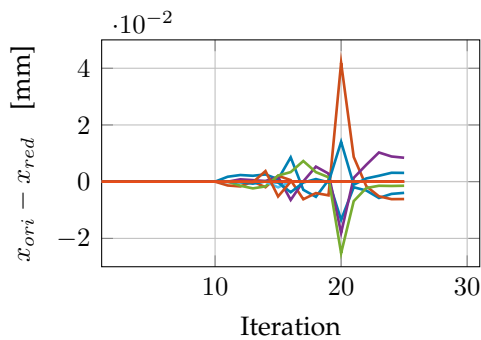
Abbildung 3.5.: Abweichungen in den Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 3

Hierbei ist zu sehen, dass die Unterschiede zwischen den Ergebnisentwürfen deutlich angestiegen und nicht mehr ohne weiteres für die mechanische Struktur zu akzeptieren sind. Die Differenz der Optimierungsvariablen liegt im Bereich von über einem Millimeter und der Gewichtsunterschied der Entwürfe liegt bei circa 10%. Die Ergebnisse zeigen, dass die Verkleinerung der Dimension der Reduktionsbasis starken Einfluss auf die Genauigkeit des reduzierten Ersatzmodells hat.

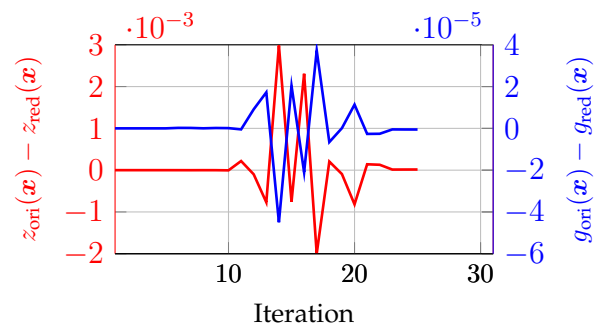
### 3.2.3 Einfluss der Anzahl der Optimierungsvariablen

Im nächsten Schritt wurde die Parametrierung des Systems erweitert, sodass alle zehn Balkenprofilhöhen als Optimierungsvariablen definiert sind. Die Optimierungsaufgabe blieb ansonsten gleich. Das Ersatzmodell muss folglich in der Lage sein, mehr Informationen der Parametrierung abzubilden.

Dabei ergaben sich für eine Unterraumdimension von 12 die in Abb. 3.6 dargestellten Unterschiede zwischen der Optimierung des originalen und des reduzierten Systems.



(a) Differenz von Optimierungsvariablen

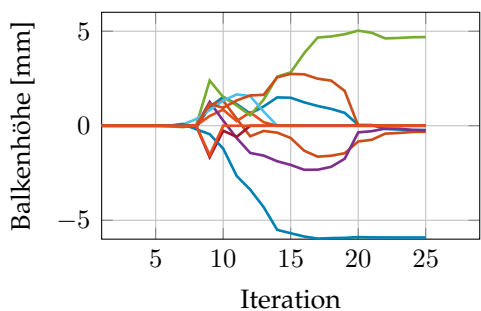


(b) Differenz von Optimierungsfunktionen

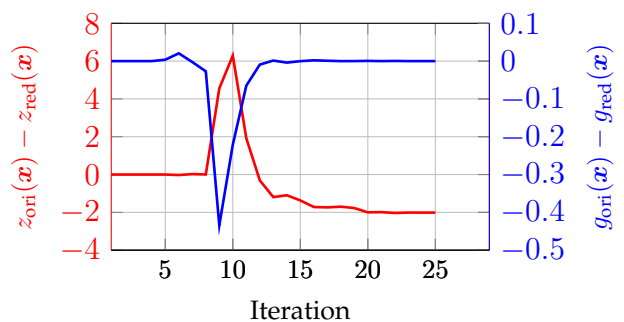
Abbildung 3.6.: Abweichungen in den Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 12

Zwar ist hierbei ein deutlich oszillierender Verlauf zu erkennen, aber die Ergebnisabweichungen bewegen sich wieder in einem akzeptablen Rahmen. Anhand von Abb. 3.6(a) ist ein gewisser Unterschied des Entwurfs für das originale und das reduzierte System erkennbar. Die Optimierungsfunktionen ergeben im konvergierten Endzustand jedoch quasi die selben Werte.

Die Änderung der Basisdimension auf 5, die für 3 Optimierungsvariablen noch akzeptable Resultate lieferte, führt zum Optimierungsverlauf in Abb. 3.7.



(a) Differenz der Optimierungsvariablen



(b) Differenz der Optimierungsfunktionen

Abbildung 3.7.: Abweichungen in den Optimierungsvariablen und Systemantworten bei einer Basisdimension von 5

Bei diesem höheren Reduktionsgrad zeigt sich, dass die Genauigkeit, die mit der KR-Basis

erzielbar ist, nicht mehr ausreicht. Die Abweichungen sowohl des Entwurfs als auch der Optimierungsfunktionen sind zu groß. Dies liegt zum einen daran, dass die Basisraumdimension kleiner geworden ist, als die Anzahl der Optimierungsvariablen. Der Vektorunterraum, der die geometrischen Informationen beinhalten muss, die sich für die Lösung bei verschiedenen Systemkonfigurationen ergeben, kann wegen der geringeren Dimension hier nicht mehr die Einflüsse der zehn Parameter ausreichend berücksichtigen, wodurch sich die starken Abweichungen erklären. Daher ist das Verfahren praktisch auf sehr wenige Parameter beschränkt, wobei die genaue Anzahl an Parametern von der Systemdimension abhängt. Zum anderen besteht eine Abhängigkeit des Modells von der Lage des Entwicklungspunktes, sodass beim iterativen Voranschreiten der Optimierung mit größeren Ungenauigkeiten zu rechnen ist. Um dem zu begegnen wäre es vorstellbar, nach einigen Iterationen das System neu zu entwickeln und einen neuen Unterraum zu ermitteln. Dies bedingt jedoch wieder die mehrfache Auswertung des Originalsystems und verringert stark die Effizienzgewinne durch die Reduktion. Ferner ist die Quantifizierung ausreichender Modellgenauigkeit schwierig, da diese nur anhand einer Auswertung des Originalsystems und des Vergleichs möglich ist.

Ein dritter Punkt ist die Formulierung der Systemmatrix auf Grundlage der in den Parametern linearisierten Steifigkeitsmatrix. Der Grad der Nichtlinearität beschränkt den Gültigkeitsbereich der *taylor*-entwickelten Steifigkeitsmatrix. Die Berücksichtigung von Summanden höherer Ordnungen in der Reihe bedingt wiederum einen signifikant ansteigenden Speicherbedarf, da die Anzahl der Systemmatrizen exponentiell steigt. Ein weiterer Aspekt die Reihenentwicklung betreffend ist der stark steigende Implementierungsaufwand.

Trotz der teils erheblichen Zeitersparnisse hat sich gezeigt, dass wegen der genannten Punkte zusammen mit der Vielzahl an Parametern aus dem Reduktionsprozess, die viele Probeläufe zur Einstellung bedingen, das Verfahren viele deutliche Einschränkungen und Probleme mit sich bringt. Vom Prinzip der Verwendung von reduzierten Ersatzmodellen wurde daher abgerückt und ein anderes Reduktionskonzept verwendet, das auf Grundlage dieser Untersuchung entwickelt wurde und im Folgenden aufgezeigt wird.

### 3.3 Optimierungsvorgehen mittels MOR-basierter evolutionärer Strategie

Wie sich gezeigt hat, stößt die Verwendung von lokal approximierten parametrisierten Ersatzmodellen, wegen ungenügender Genauigkeit bei großen Entwurfsänderungen für die Optimierung schnell an Grenzen. Das Vorgehen, wiederholt lokale Ersatzsysteme zu erzeugen, scheitert am hohen Aufwand bei deren Erzeugung. Daraus folgt, dass zum einen Informationen aus dem gesamten Entwurfsraum gesammelt werden sollten, die in der Projektionsbasis berücksichtigt werden. Damit kann für den Projektionsunterraum eine Gültigkeit über dem gesamten Entwurfsraum unterstellt werden. Zum anderen muss ein Weg gefunden werden, wie die Parameterabhängigkeit für die reduzierten Modelle berücksichtigt wird.

Diese Erkenntnisse führten zur Entwicklung des im Weiteren diskutierten Optimierungsvorgehens, das auf den Prinzipien evolutionärer Strategien, wie sie in Abs. 2.1.5 vorgestellt wurden, basiert. Es wird sich zeigen, dass die Effizienz durch den Einsatz von MOR-Verfahren erheblich gesteigert werden kann, ohne dass parametrisierte Ersatzmodelle zum





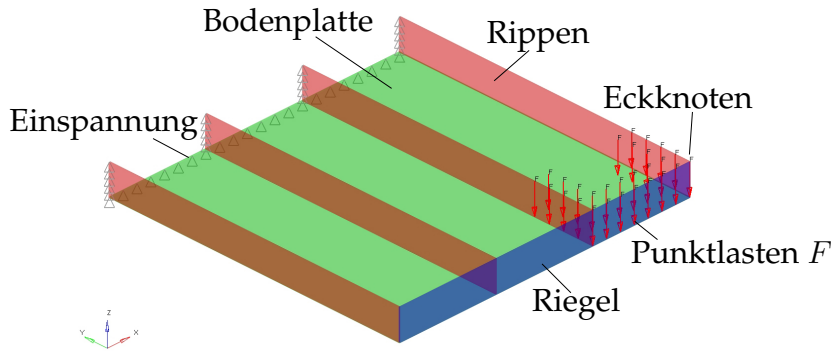


Abbildung 3.9.: Verripptes Tragwerk zur Analyse der Optimierungsstrategie

Als Systemparameter wurden die Wandstärken der Rippen (rot), der Bodenplatte (grün) und des Riegels (blau) gewählt. Zusätzlich wurde die Geometrie parametrisiert, wobei die drei in Abbildung 3.10 dargestellten Formänderungen unabhängig voneinander möglich sind. Die Parametrierung erfolgte dabei gemäß der Beschreibung in Abschnitt 2.1.4 zur Formoptimierung mittels Formbasisvektoren.

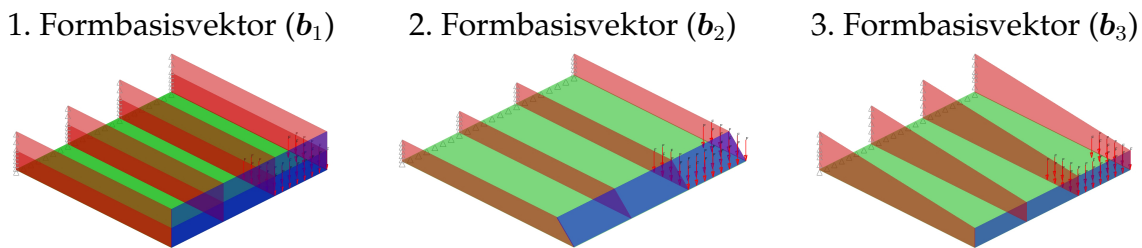


Abbildung 3.10.: Formbasisvektoren des Modellproblems

**Optimierungsaufgabe** Die Optimierungsaufgabe lautet konkret:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m(\mathbf{x}) \mid g(\mathbf{x}) \leq 0, x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}\} \quad \text{mit } i \in 1, \dots, 6 \quad (3.4)$$

$$\text{sodass } g_j(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{d}_{\max}\|}{1\text{mm}} - 1 \quad \text{mit } \|\mathbf{d}_{\max}\| = \max_k \{\|\mathbf{d}_k\|\} \quad (3.5)$$

$$\text{und } x_{\min} = [0, -100, 0, 1\text{mm}, 1\text{mm}, 1\text{mm}] \quad \text{und} \quad (3.6)$$

$$x_{\max} = [150, 100, 150, 5\text{mm}, 5\text{mm}, 5\text{mm}] \quad (3.7)$$

Dabei hängt die Verschiebungsrestriktion jeweils von der betragsmäßig größten Knotenverschiebung  $\|\mathbf{d}_{\max}\|$  auf der Struktur mit  $k \in \{1, \dots, n_{\text{kn}}\}$  ab, die im Eckbereich auftritt.

Spannungs- oder Stabilitätsrestriktionen wurden zur Vereinfachung nicht formuliert, da diese die Fragestellungen der Untersuchung nicht grundsätzlich ändern und die Übersichtlichkeit der Ergebnisse vermindern würden. Die Berechnung der Spannungen aus dem Dehnungsvektor nach Gleichung (2.30) kann nicht auf dem Unterraum erfolgen, da die Ableitung der Verschiebungen nach dem Ort auf dem Unterraum nicht ermittelt werden können. Daher bedarf es zur Spannungsberechnung der Rückprojektion in den Originalraum. Ob die Spannungsantworten mittels der reduzierten Modelle ausreichend genau berechnet werden, ist eine interessante Fragestellung für fortführende Arbeiten.

**Berechnung mittels MOR** Die parameterabhängige Berechnung der Systemantworten mittels FEM wird durch einen Eingriff in das FEM-Lösungsvorgehen realisiert. Der einzige Schritt, der verändert wird, ist die Lösung des linearen Gleichungssystems. In der Überblickstabelle 2.2 entspricht dies dem Schritt (8), der dann durch die folgenden Schritte ersetzt wird:

1. Projektion mit  $V$  zu  $\tilde{K} = V^T K V$  und  $\tilde{f} = V^T f$ ,
2. Lösung  $\tilde{d} = \tilde{K}^{-1} \tilde{f}$  und
3. Rückprojektion  $d = V \tilde{d}$

Der Rechenzeitgewinn pro Systemauswertung ergibt sich folglich als Differenz von Systemlösung des originalen Systems und den beschriebenen Schritten. Das Verfahren lohnt sich, wenn sich die Rechenzeitgewinne über den Aufwand für die einmalige Ermittlung der Projektionsbasis akkumuliert haben.

Es ist herauszustellen, dass der Einsatz von Gradientenverfahren für die gegebene Optimierungsaufgabe aus Effizienzgründen erste Wahl ist. Allerdings soll hier der Einsatz der beschriebenen ES dargestellt werden, dessen Anwendung keine technischen Aspekte entgegen stehen.

**Lastfälle** Reale Optimierungsprobleme sind meist durch mehrere Lastfälle und eine Vielzahl von Restriktionen gekennzeichnet. Für die Untersuchung der entwickelten Methodik spielt dies bei der Ermittlung der Unterräume eine Rolle. Für jeden Lastfall liegen dann unterschiedliche Verschiebungsvektoren  $d$  und somit unterschiedliche Unterräume vor. Um diese zu berücksichtigen, können verschiedene Strategien angewendet werden. Zum einen ist die Ermittlung einer größeren Basis aus allen Lösungen denkbar. Zum anderen kann ein Unterraum für jeden Lastfall ermittelt werden. Beim ersten Vorgehen wird die Unterraumdimension vergrößert und beim zweiten fällt für jeden Lastfall eine eigene Bestimmung des Projektionsraumes an. Somit steigt jeweils der reduktionsseitige Aufwand. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das System nur mit der in Abbildung 3.9 gezeigten Last gerechnet.

**Berechnungswerkzeuge** Die Assemblierung der benötigten Systemmatrizen und Lastvektoren erfolgt mittels des FEM-Solvers NASTRAN. Die Systemmatrizen und Vektoren werden noch auf die Lagerungssituation angepasst und dann abgespeichert. Dies wird durch die Programmiersprache DMAP in der Input-Datei des Solvers definiert. Dadurch kann der weitere Rechenprozess auch gestoppt werden, um die Lösung extern zu berechnen. Mittels des PYTHON Paketes PYNASTRAN werden sie in die PYTHON-Umgebung eingelesen und stehen so für die MOR und die Lösung im passenden Format zur Verfügung. Die Lösung erfolgt anhand des PYTHON-Pakets SCIPY. Für die Datenverwaltung wird PYSPARSE verwendet, wobei für dünnbesetzte Matrizen des Originalsystems die Lösung mittels der SUPERLU Zerlegung ermittelt wird. Die reduzierten Systeme werden durch das NUMPY-Modul namens LINALG.SOLVE gelöst.

Den Optimierungsalgorithmus stellt das Paket DEAP (*Distributed Evolutionary Algorithms in Python*) [36] zur Verfügung. Es wurde verwendet, da es durch seine Konzeption eine sehr hohe Freiheit bei der Implementierung von ES bietet. So können Algorithmen aus verschiedenen Modulen selbst zusammengestellt werden. Die Details zu der eingesetzten Computerhard- und Software sind Anhang A.3 zu entnehmen.

### 3.3.2 Design of Experiments und Projektionsbasis für die Reduktion

Die erste Generation in der evolutionären Optimierung hat für das hier präsentierte Vorgehen besondere Bedeutung, da sie die Qualität der Projektionsbasis festlegt. Die Wahl der initialen Individuen wird auf unterschiedliche Arten bestimmt, die hier verglichen werden. Dazu gehören zwei vollfaktorielle Versuchspläne (VFV), zwei Latin-Hyper-Cube-Samplings (LHS) und zwei Central-Composit-Designs (CCD). Näheres zu Versuchsplänen findet sich beispielsweise bei [75].

Dabei ist der Kompromiss zwischen viel Information und wenig Rechenaufwand zu finden, was im Vorhinein eine große Herausforderung ist. Die initiale Population wird im Originalraum des Modells evaluiert. Mit Hilfe der Lösungen, die zu verschiedenen Entwürfen gehören, wird durch eine Haupttraumanalyse, wie sie in Abs. 2.5.2 vorgestellt wurde, die Projektionsbasis berechnet. Aus der Singulärwertzerlegung  $S_s = U_s \Sigma_s V_s$  in der  $S_s = [d_1, \dots, d_n]$  die Verschiebungsvektoren enthält, lässt sich direkt die Projektionsbasis bestimmen. Die Spalten von  $U_s$  spannen den Projektionsraum auf, wobei hier noch Basisvektoren verworfen werden, deren zugehörige Singulärwerte sehr klein sind. Für die Projektionsbasis  $V$  gilt  $V = U_{s[:, 1:n_{\text{red}}]}$  mit  $n_{\text{red}}$  gleich der Anzahl an Projektionsbasisvektoren.

Die Verwendung von Versuchsplänen ist dem Umstand geschuldet, dass eine konsequente Untersuchung des Entwurfsraumes durch einen Vollfaktorplan nur für wenige Parameter bestimmbar ist. Im vorliegenden Fall mit 6 Optimierungsvariablen ergeben sich gemäß Tabelle 3.1 für einen dreistufigen Plan bereits 729 Auswertungen. Die Genauigkeitsuntersuchungen erfolgen gemäß der in 3.1 beschriebenen Versuchspläne.

Versuchsplan	Kurzbezeichnung	Anzahl Stützstellen
3-stufiger Vollfaktorplan	3-stufig VFV	729
2-stufiger Vollfaktorplan	2-stufig VFV	64
Central-Composite-Design	1. und 2. CCD	77
Latin-Hypercube Design	1. und 2. LHS	64

Tabelle 3.1.: Liste der betrachteten Versuchspläne

Die Wertebereiche für das Sampling der einzelnen Parameter sind in A.4 zusammengefasst. Dabei müssen nicht unbedingt zulässige Entwürfe vorliegen. Wichtiger ist eine positive Beeinflussung der Modellgenauigkeit durch die gewählten Stützstellen. Die hier gewählten Stützstellen entsprechen dennoch zulässigen Entwürfen.

Die beiden Varianten des CCD unterscheiden sich durch die Lage der „Stern“-Stützstellen, die für Version 1. innerhalb und für Version 2. flächenzentriert liegen. LHS 1. und LHS 2. wurden wegen des stochastischen Vorgehens beim Verteilen der Stützstellen als Vergleichsreferenz gewählt.

### 3.3.3 Genauigkeitsuntersuchungen

Die Genauigkeit der Lösung hängt davon ab, ob und wie gut der gewählte Unterraum die tatsächliche Lösung repräsentieren kann (vgl. Argumentation 2.4.5). Die Approximation der Zielfunktion ist dabei weniger kritisch, da die Qualität ihres Verlaufs in der Regel erhalten bleibt. Der Fehler bei Systemantworten, durch die Restriktionen definiert werden, führt hingegen leicht zur Verschiebung des optimalen Entwurfs gegenüber der Lösung des originalen Systems.

Zur Bewertung wurden direkt die Verschiebungen der Struktur betrachtet und der Fehler gegenüber dem Originalmodell nach Beziehung (3.8) definiert.

$$e_{a,k} = \|\tilde{\mathbf{d}}_k - \mathbf{d}_k\|_2 \quad \hat{e}_a = \max_k \{e_{a,k}\} \quad (3.8)$$

Darin beschreibt  $\mathbf{d}_k$  die Verschiebung am Knoten  $k$ . Da dieses Fehlerfeld unübersichtlich ist, wurde der maximal auftretende absolute Fehler  $\hat{e}_a$  definiert. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Auswertekonfiguration. Hierfür wurden die Punkte

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= [0, 0, 0, 1, 3, 1] \\ \mathbf{x}_B &= [116.1, 65.7, 93.8, 4.0, 3.8, 2.8] \end{aligned}$$

gewählt. Liegen die betrachteten Punkte nahe an Stützstellen, steigert dies die erreichbare Genauigkeit. Um diesen Einfluss bewerten zu können, wurde der Abstand der Stützstelle zum nächstliegenden Punkt des Versuchsplans gemäß (3.9) definiert.

$$\Delta \mathbf{x}_{\min}(\mathbf{x}) = \min_s \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_2 \} \quad (3.9)$$

In Tabelle 3.2 sind die resultierenden Werte abgebildet. Für den 3-stufigen VFV ist für  $\mathbf{x}_A$  zu erkennen, dass die betrachtete Konfiguration einer Stützstelle entspricht und folglich mit guten Approximationswerten zu rechnen ist. Der Punkt  $\mathbf{x}_B$  entspricht einer Stützstelle des 1. LHS. In den beiden letzten Spalten von Tabelle 3.2 sind für den jeweiligen Entwurf für alle Versuchspläne die Normen der orthogonalen Anteile der Verschiebungsvektoren  $\mathbf{d}_{\perp \mathcal{V}}$  aufgelistet, die den Abstand  $\Delta \mathbf{x}_{\min}$  in Verbindung zu der Strukturverschiebung bringen. Diese Berechnung kann mit Hilfe des MGS-Verfahrens erfolgen (vgl. Abschnitt 2.4.4). Die Abweichungen sind bei einer Unterraumdimension von  $n_{\text{red}} = 64$  berechnet.

Versuchsplan	$\Delta \mathbf{x}_{\min}(\mathbf{x}_A)$ [mm]	$\Delta \mathbf{x}_{\min}(\mathbf{x}_B)$ [mm]	$\ \mathbf{d}_{\perp \mathcal{V}}(\mathbf{x}_A)\ _2$ [mm]	$\ \mathbf{d}_{\perp \mathcal{V}}(\mathbf{x}_B)\ _2$ [mm]
3-stufig VFV	0	51.720	$2.386 \cdot 10^{-13}$	$3.021 \cdot 10^{-5}$
2-stufig VFV	100.020	74.090	0.203	$1.773 \cdot 10^{-2}$
1. CCD	75.050	30.880	0.162	$1.113 \cdot 10^{-3}$
2. CCD	75.050	56.760	0.062	$2.264 \cdot 10^{-3}$
1. LHS	38.330	0	0.190	$4.280 \cdot 10^{-8}$
2. LHS	26.720	18.610	0.049	$8.493 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 3.2.: Abstand  $\Delta \mathbf{x}_{\min}$  der Designs  $\mathbf{x}_A$  und  $\mathbf{x}_B$  zum nächstgelegenen Sample  $\mathbf{x}_s$  und Verschiebungsfehler

Durch Tabelle 3.2 wird deutlich, dass sich die Approximationsfehler über mehrere Größenordnungen erstrecken und dass jeder der beiden Entwürfe jeweils einmal als Stützstelle vorliegt. Die zugehörigen Abweichungen  $\|d_{\perp v}\|$  werden für diese Fälle minimal. Allerdings müssen sie nicht auf null abfallen, da der Lösungsvektor durch die POD nicht zwangsläufig im Unterraum enthalten ist. Dennoch ist der positive Einfluss der Nähe zu einer Stützstelle unverkennbar.

Für die Bewertung der Brauchbarkeit der ermittelten Unterräume für die Optimierung wurde zunächst der Einfluss der Projektionsraumdimension auf die Approximationsgenauigkeit untersucht. Dazu wurde für die verschiedenen Versuchspläne der Fehler  $\hat{e}_a$  über dem Rang der Projektionsbasis  $n_{red}$  aufgetragen (vgl. Abb. 3.11).

Da die beiden unterschiedlichen Entwürfe  $x_A$  und  $x_B$  betrachtet werden, liegen die Steifigkeiten in sehr unterschiedlichen Bereichen und somit auch die betrachteten Fehler. Die qualitativen Aussagen der beiden Untersuchungen bleiben dabei jedoch die gleichen. Es wird deutlich, dass je nach Projektionsbasis eine Sättigung der Approximationsgüte eintritt. Dabei ist der Verlauf des Fehlers für die verschiedenen Versuchspläne qualitativ gleich und zwischen  $n_{red}$  gleich 20 bis 30 kann von einer guten Approximation ausgegangen werden. Offensichtlich sind für  $x_A$  das 1. LHS Design und das 2. CCD eher nachteilig, da der Abfall des Fehlers erst bei höheren Unterraumdimensionen eintritt. Für die Untersuchung an der Stelle  $x_B$  schneiden das 1. CCD und der 2-stufige VFV tendenziell am schlechtesten ab, wobei der Nachteil relativ gering ist.

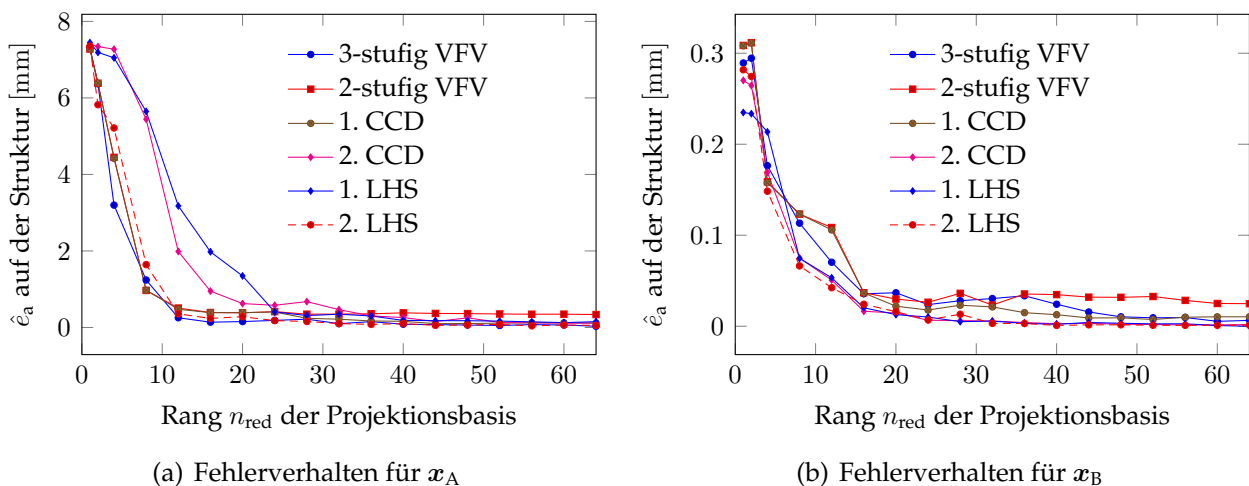


Abbildung 3.11.: Absoluter maximaler Verschiebungsfehler für verschiedene Versuchspläne

Für eine genauere Untersuchung des Einflusses auf das tatsächliche Strukturverhalten wurde eine Parameterstudie durchgeführt, in der die maximale Verschiebung an der Struktur über ausgewählten Parameterkombinationen aufgetragen wurde. Dies ist durch die Antwortflächen in Abbildung 3.12 für verschiedene Projektionsbasisdimensionen gezeigt. Die Projektionsbasis für diese Untersuchung wurde aus dem 3-stufigen VFV ermittelt, dessen Stützstellen durch blaue Quadrate markiert sind. Die nicht variierten Parameter werden gleich dem Punkt  $x_A = [0, 0, 0, 1, 3, 1]$  gewählt.

Es ist zu erkennen, dass für die relativ niedrigen Projektionsraumdimensionen deutliche Fehler auftreten, die eine Versteifung der Struktur verursachen. Grund ist der eingeschränkte Lösungsraum, durch den die Verschiebungsmöglichkeiten der Struktur eingeschränkt

werden. Für  $n_{\text{red}}$  gleich 4 oder 8 kann man nicht von einer ausreichenden Güte der Approximation sprechen. Für eine Basisdimension von 20 sind die Approximationen hingegen sehr gut, was die Ergebnisse in Abbildung 3.11 stützt.

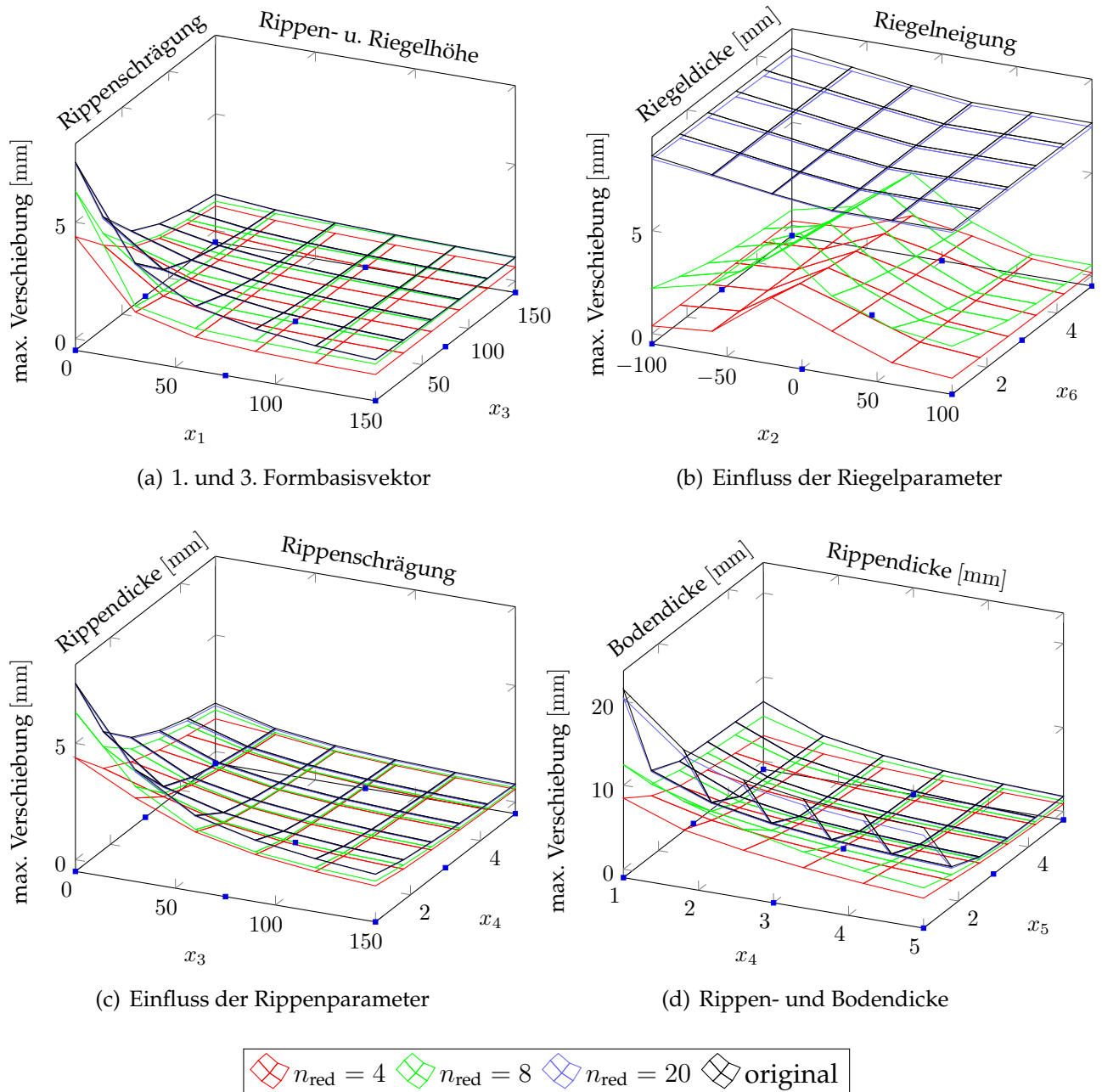


Abbildung 3.12.: Antwortflächen in Abhängigkeit der Reduktionsdimension  $n_{\text{red}}$

Der 3-stufige VFV, der für die vorangehende Untersuchung verwendet wurde, stellt die umfangreichste Informationssammlung unter den präsentierten Versuchsplänen dar. Im Weiteren soll der Einfluss anderer Versuchspläne auf die Qualität der Projektionsbasis bewertet werden, wobei das 1. LHS nicht betrachtet wird, da es den untersuchten Punkt enthält. Für die beiden relativ sensitiven Parameter  $x_4$  und  $x_5$ , die Wandstärken parametrieren, wur-

### 3. Modellordnungsreduktionsverfahren für die Optimierung

den wieder die maximalen Verschiebungen berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.13 zu sehen. Die Darstellung erfolgt im Wertebereich von  $x_4, x_5 \in [1, 2]$ , wodurch die Effekte ausreichend verdeutlicht werden können. Für die konstanten Systemparameter gilt  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  und  $x_6 = 1$ .

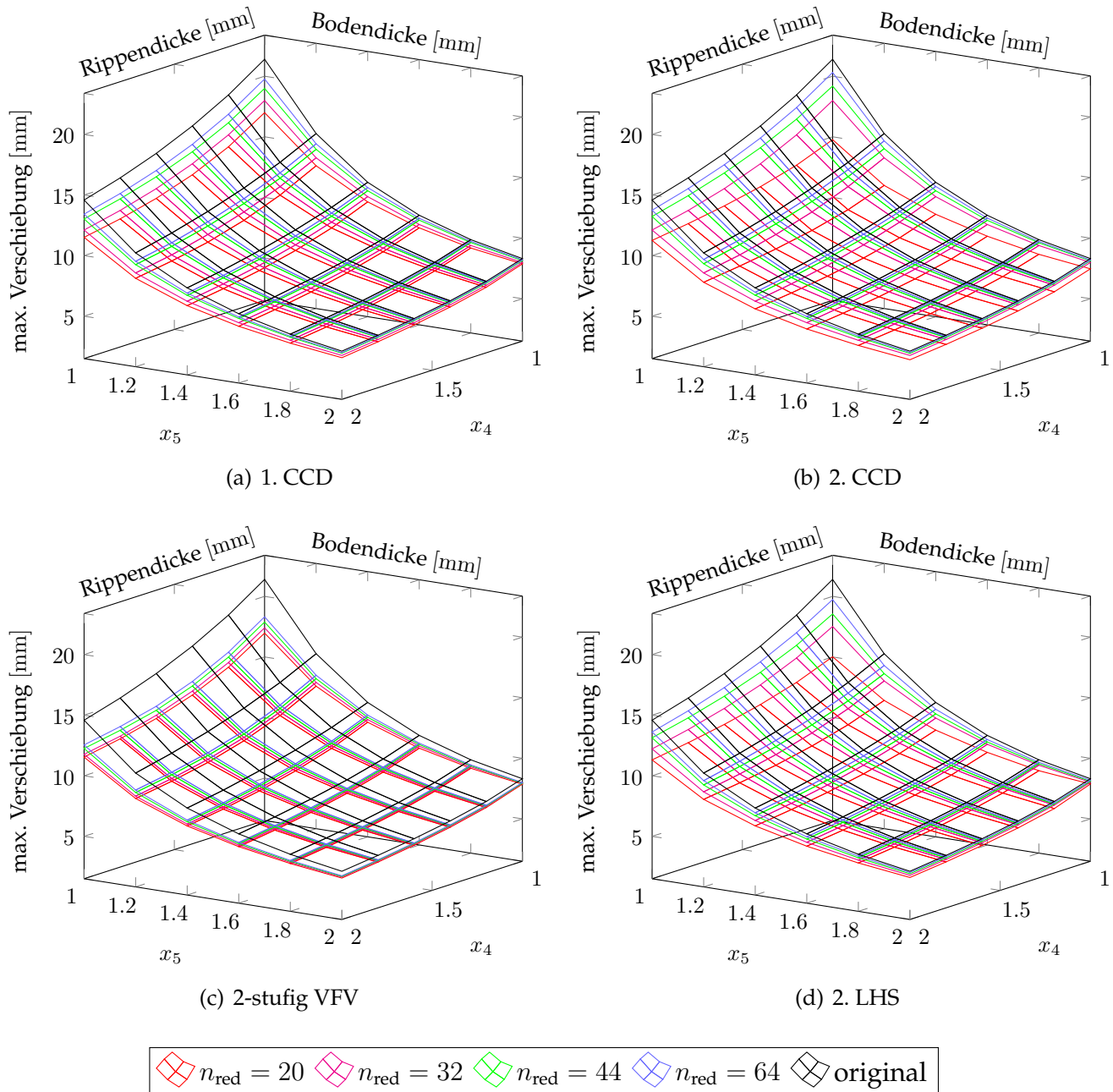


Abbildung 3.13.: Verschiebungsantworten für verschiedene DOEs

Für die recht kritischen Parameter wird deutlich, dass der Fehler relativ groß ist und sich durch Erhöhung der Projektionsbasis nur bedingt verringern lässt. Für den 2-stufigen VFV liegen die Verschiebungen für alle betrachteten Reduktionsdimensionen nah zusammen, wobei der Fehler etwas über 10% liegt. Für die anderen Versuchspläne sind die Verbesserungsmöglichkeiten größer und ähnlich, wobei das 2. CCD am besten abschneidet. Anhand



von Tab. 3.2 kann dies mit dem Abstand  $\Delta \boldsymbol{x}_{\min}$  in Verbindung gebracht werden, der beispielsweise für den 2-stufigen VFV am größten ist. Trotz des kleinsten Abstands des 2. LHS weist dieses nicht die kleinsten Fehler auf, sondern das 2. CCD. Dies zeigt, dass eine Vielzahl von Einflüssen auf die Genauigkeit vorhanden und eine Vorabfestlegung des Versuchsplans schwer möglich ist. Die Untersuchungen zeigen jedoch klar, dass die erreichbaren Genauigkeiten für den Einsatz in der Optimierung groß genug sind.

### 3.3.4 Effizienzbewertung

Das Ziel der MOR ist die Steigerung der Recheneffizienz. Dazu wird in Abb. 3.14 die Dauer einzelner Rechenschritte gegenübergestellt, die bei der Lösung anfallen. Wichtig ist dabei die Vergleichbarkeit der Berechnungssequenzen. Um diese sicherzustellen, erfolgt die Lösung jeweils durch das PYTHON-Modul SCIPY.

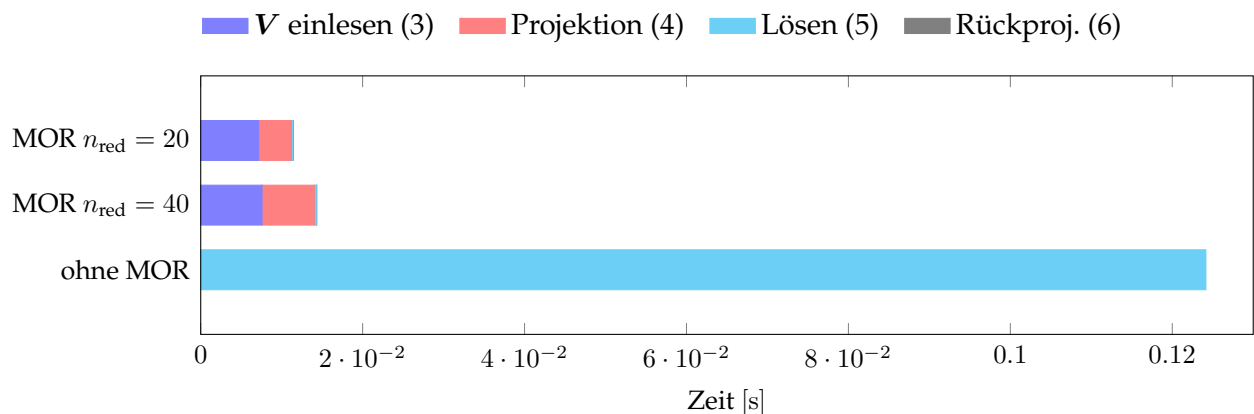


Abbildung 3.14.: Vergleich der Berechnungsdauern für einzelne Rechenschritte

Die Zeitmessung erfolgt anhand des PYTHON-Modules TIMEIT, das die verstrichene Prozessorzeit misst und eine Auflösung von  $10^{-6}$  [s] besitzt. Da das Betriebssystem durch Ressourcenzuteilung die Rechendauer beeinflusst, wurde für die Zeitmessung jede gemessene Funktion mehrfach ausgeführt und der Minimalwert verwendet.

Der Lösungsalgorithmus hängt nach Abschnitt 2.2.2 von der Besetzungsstruktur der Matrix ab, die für die beiden Gleichungssysteme unterschiedlich sind. So wird das voll besetzte reduzierte Gleichungssystem durch eine LU-Faktorisierung und das dünnbesetzte originale System durch die SUPERLU Funktion des PYSPARSE-Moduls berechnet. Hierbei weist das originale System 5604 Freiheitsgrade auf. Zu Vergleichszwecken wurden die Rechenzeiten für reduzierte Systeme mit 20 und 40 Unbekannten bestimmt.

Die Abb. 3.14 zeigt, dass sich in Summe ein erheblicher Rechenzeitgewinn gegenüber dem originalen Modell durch den Einsatz der MOR ergibt. Für das reduzierte System stellt das Einlesen der vollbesetzten Projektionsbasis  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_{\text{ori}} \times n_{\text{ori}}}$  und die Projektion auf den Unterraum den Hauptaufwand dar. Die Lösung und Rückprojektion sind hingegen verschwindend geringe Anteile am Gesamtaufwand. Weiter ist ein stärkerer Anstieg des Aufwandes für die Projektion bei steigenden Reduktionsdimensionen zu erkennen. Wie dieses Verhältnis für verschiedene Reduktionsdimensionen aussieht, wurde in einer weiteren Untersuchung getestet, die in Abb. 3.15 dargestellt ist.

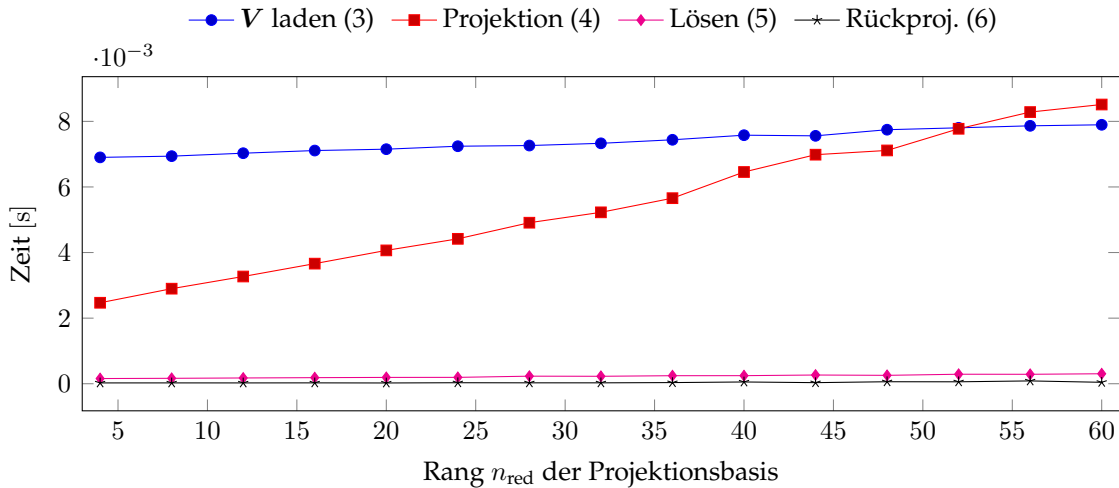


Abbildung 3.15.: Zeiten der Rechenschritte der MOR in Abhängigkeit von  $n_{red}$

Es wird deutlich, dass vor allem die Projektion mit steigender Unterraumdimension ansteigt, jedoch nicht in entscheidendem Maße. Da eine Unterraumdimension von 60 bereits relativ groß ist, kann man sagen, dass man bei der Wahl der Unterraumdimension recht frei ist.

Soweit wurde der Rechenzeitgewinn nur für ein System mit 5604 FHGs beschrieben. Um die Abhängigkeit des Verfahrens für verschiedene Systemdimensionen zu untersuchen, wurden feinere Diskretisierungen angewendet, die auf jeweils 22 314, 89 034 bzw. 355 674 Freiheitsgrade führten. Um Einflüsse des verwendeten Solvers auszuschließen, wurden die Systeme auch mittels des MATLAB-Gleichungslösers MLDIVIDE berechnet. Dabei ergaben sich für die Rechenzeiten die Ergebnisse in Abb. 3.16. Die Projektionsbasis besteht in diesem Vergleich aus  $n_{red} = 40$  Vektoren. Der Wert für das Modell mit  $n_{fhg} = 355\,674$  ohne MOR in der PYTHON Implementierung fehlt, da eine Lösung wegen der hohen Systemdimension mit SUPERLU nicht möglich war. Der Gleichungslöser von MATLAB schneidet bei diesem Vergleich besser ab als der von SCIPY. Dies gilt sowohl für die absoluten Rechendauern, als auch für deren Abhängigkeit von der Systemgröße, was sich durch die eingezeichneten Geraden abschätzen lässt. Interessant ist vor allem, dass die interpolierende Gerade durch die doppellogarithmisch aufgetragenen Rechenzeiten für die MOR jeweils flacher verläuft als für die Lösung des originalen Systems. Daraus lässt sich ableiten, dass das MOR-Verfahren zumindest über einen großen Systemdimensionsbereich zu Rechenzeiteinsparungen führt und der Einsatz folglich gerechtfertigt ist.

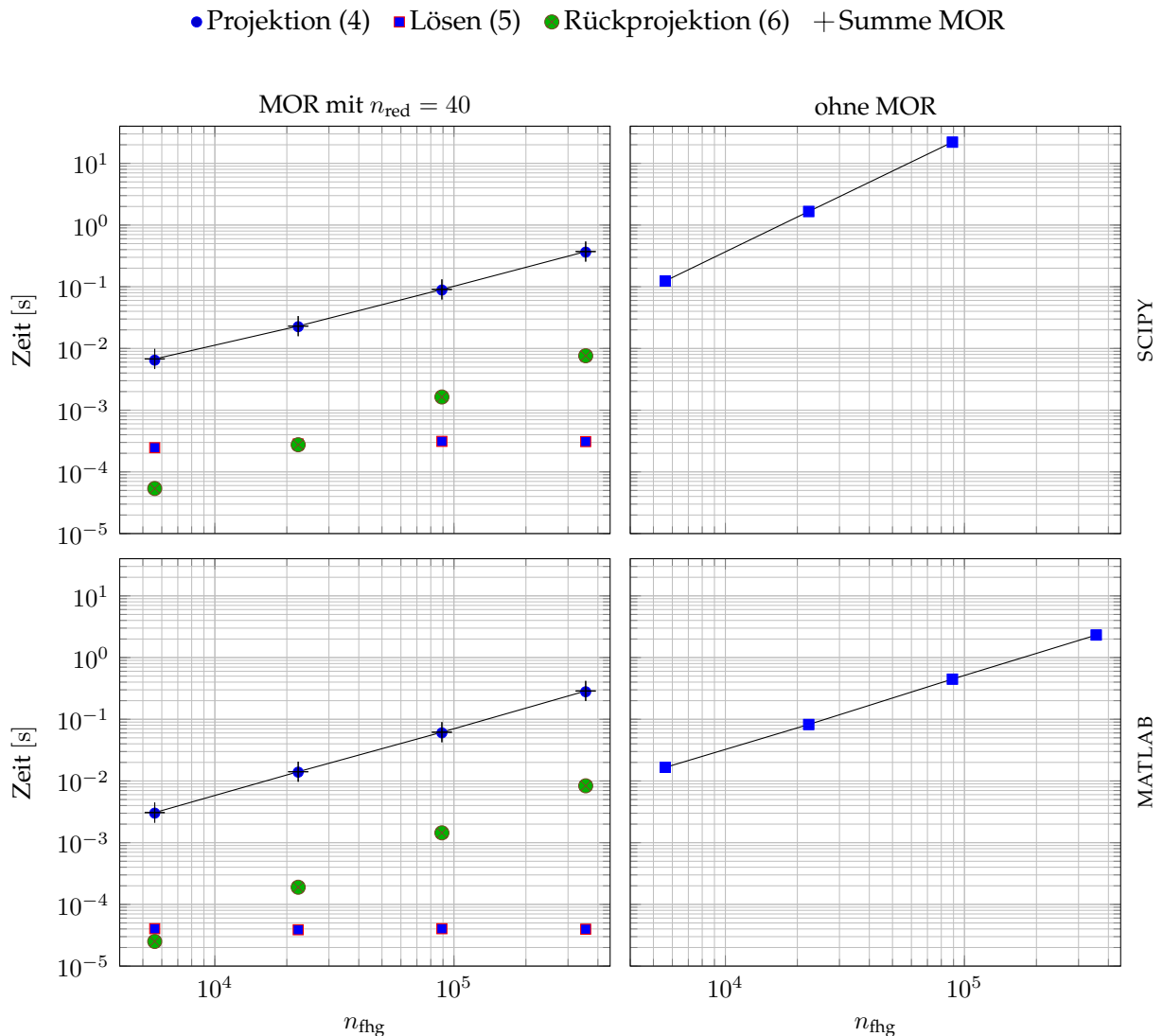


Abbildung 3.16.: Rechenzeit in Abhängigkeit der Systemdimension

### 3.3.5 Vorgehen bei der evolutionären Strategie

Die Populationsgröße muss so gewählt werden, dass sich ein möglichst guter Kompromiss aus Rechendauer und Entwurfsraumdurchsuchung ergibt. Im hier vorgestellten Optimierungsvorgehen spielt die initiale Populationsgröße eine besonders wichtige Rolle, da aus ihr die Projektionsbasis bestimmt wird. Die erzielbare Genauigkeit wird somit an dieser Stelle bestimmt. Für die Initialgeneration wurde ein LHS mit 64 Individuen gewählt, während die Populationsgröße 15 Individuen betrug. Wie die Untersuchung in Abs. 3.3.3 zeigte, sind Projektionsbasisdimensionen im Bereich von 30 bis 60 nötig um ausreichende Genauigkeiten zu erzielen. Es wird dabei deutlich, dass durch die hohe Zahl von Individuen in der Initialgeneration circa 4 Generationen im Originalraum gerechnet werden. Rechenzeiterparnisse ergeben sich folglich durch den MOR Einsatz erst in der fünften Generation. Es wurden 30 Generationen angesetzt und die Elternmenge auf 20 gesetzt. Die einzelnen Einstellungen der evolutionären Strategie sind detailliert im Anhang A.5 zusammengefasst. Die Dimensi-

on des verwendeten reduzierten Modells betrug 40.

**Selektion** Die Bestimmung der Eltern erfolgt durch eine Turnierselektion, bei der zufällig eine Untermenge aus der Population ausgewählt wird. Aus dieser wird das beste Individuum in die Menge der Eltern gewählt. Das Vorgehen wird sooft wiederholt, bis die vorgegebene Menge an Eltern vorliegt. Dabei kann der Selektionsdruck durch die Größe der Turniermenge gesteuert werden. Hier wurde eine Turniergröße von 3 gewählt. Der Vorteil des Vorgehens ist seine Einfachheit. Einen Überblick zu möglichen Selektionsverfahren liefert [79].

**Reproduktion** Für den Reproduktionsschritt (vgl. Abb. 2.5) erfolgt die Findung neuer Individuen durch Crossover und Mutation. Dabei tauschen zunächst je zwei Elternindividuen  $x_I$  und  $x_{II}$  zwei Optimierungsvariablenwerte aus. In Abb. 3.17(a) ist dies für die vierte und fünfte Optimierungsvariable skizziert. Die so entstandenen Individuen  $y_I$  und  $y_{II}$  ersetzen die Eltern und es wird für diese zusätzlich eine Mutation durchgeführt. Die Streuung erfolgt anhand einer Normalverteilung, die durch die Standardabweichung  $\sigma$  definiert ist. Um eine Konvergenz des Algorithmus zu erzielen, wird die Standardabweichung gemäß dem Verlauf in Grafik 3.17(b) gewählt, sodass am Ende der Optimierung noch eine gründliche lokale Suche durchgeführt wird.

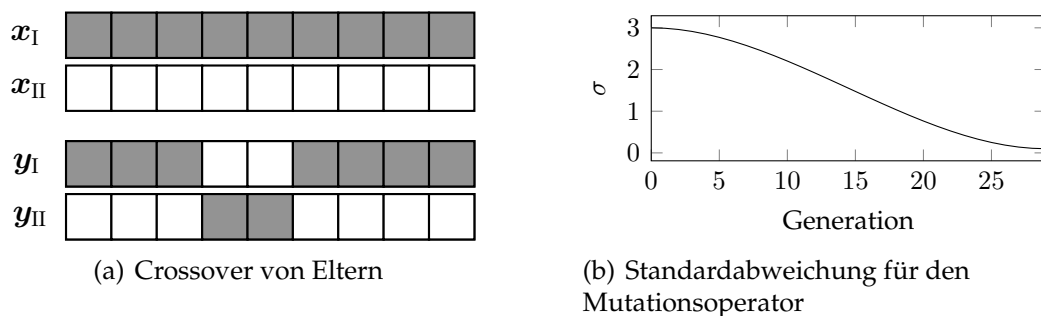


Abbildung 3.17.: Parameter im Reproduktionsschritt

Die initiale Standardabweichung von 3 ist relativ zum Entwurfsraum zu sehen, der durch den Wertebereich von  $[-10, 10]$  begrenzt ist. Es ist anzumerken, dass eine Kombination aus Crossover und Mutation nicht unbedingt notwendig ist. Allerdings hat jeder der Operatoren seine Vorteile. So sind durch den Crossover große Sprünge im Entwurfsraum möglich, wohingegen durch die Mutation die Konvergenzsteuerung und die lokale Suche besser gesteuert werden können.

**Ersetzung** Für den Ersetzungsschritt wird eine begrenzte Auswahl der besten Individuen aus der Elterngeneration zusammen mit den besten der aktuellen Population verglichen. Aus dieser Menge bilden die besten 15 Entwürfe die neue Generation. Durch dieses Vorgehen, das mit „Elitismus“ bezeichnet wird, wird sichergestellt, dass gute Lösungen nicht verloren gehen.

**Berücksichtigung von Restriktionen** Für die Berücksichtigung von Restriktionen müssen diese bei ES in der Fitnessfunktion berücksichtigt werden. Mögliche Verfahren sind inter-

ne oder externe Penalisierungsvorgehen. Das Prinzip basiert auf der Idee, zur Zielfunktion Strafterme zu addieren, die unzulässige Entwürfe stark verschlechtern und so deren Reproduktion äußerst unwahrscheinlich machen. In Abbildung 3.18(a) und 3.18(b) sind die Verläufe solcher Strafterme zu sehen. Für die hier diskutierten Optimierungen wurde die externe Penalisierung verwendet, da sie sich als numerisch stabiler erwies. Für dieses Vorgehen wurde die Fitness gemäß (3.10) gewählt, wobei die Gleichheitsrestriktionen der Vollständigkeit halber mit aufgenommen sind. Details zu möglichen Verfahren finden sich unter anderem bei *Coello* [20].

$$F(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n_g} c_i \max(0, g_i(\mathbf{x}))^a + \sum_{j=1}^{n_h} c_j |h_j(\mathbf{x})|^b \quad (3.10)$$

Für die vorliegende Optimierung wurde  $c_i = 1$  und  $a = 1$  gewählt. Die Zulässigkeit neuer Individuen wird direkt im Reproduktionsschritt berücksichtigt, sodass die Grenzen der Optimierungsvariablen nicht als Restriktionen behandelt werden müssen.

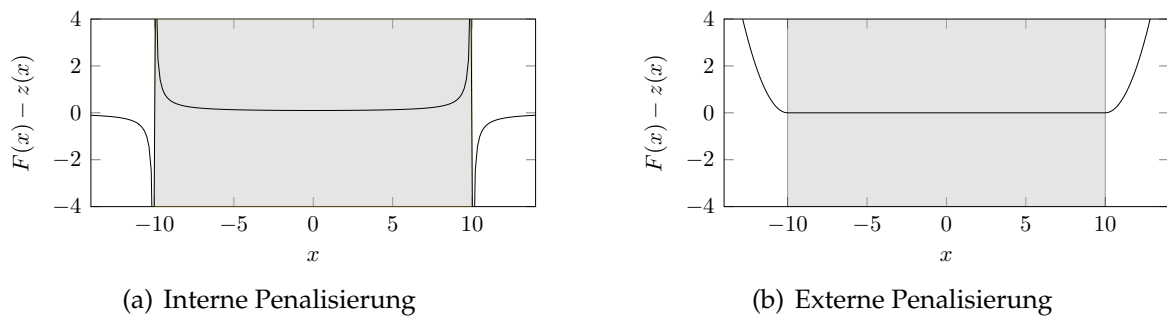


Abbildung 3.18.: Penalisierungsfunktionsverläufe

In Abb. 3.18 sind die zulässigen Bereiche in grau dargestellt, wobei für die externe Penalisierung gemäß Formel (3.10) die Parameter  $c_1 = c_2 = 50$  und  $a = 2$  gewählt wurden.

### 3.3.6 Optimierungsverläufe und Diskussion

Aufgrund des stochastischen Charakters der ES sind für die Bewertung mehrere Läufe notwendig. In Tabelle 3.3 sind die Ergebnisse von drei Läufen zusammengefasst, wobei für die grafische Bewertung repräsentative Verläufe ausgewählt wurden.

In Abb. 3.19(a) ist die beste und die durchschnittliche Fitness über den Generationen dargestellt. Abb. 3.19(b) zeigt die Masse des besten Entwurfs und den Fehler  $\|\mathbf{d}\|$ . Um den Einfluss der MOR auf die Optimierung abschätzen zu können, wurden die Optimierungen parallel auch ohne MOR durchgeführt und die Ergebnisse jeweils durch kreuzförmige Markierungen kenntlich gemacht. Für die verglichenen Läufe wurde dabei immer die gleiche Initialisierung des Zufallsgenerators verwendet.

### 3. Modellordnungsreduktionsverfahren für die Optimierung

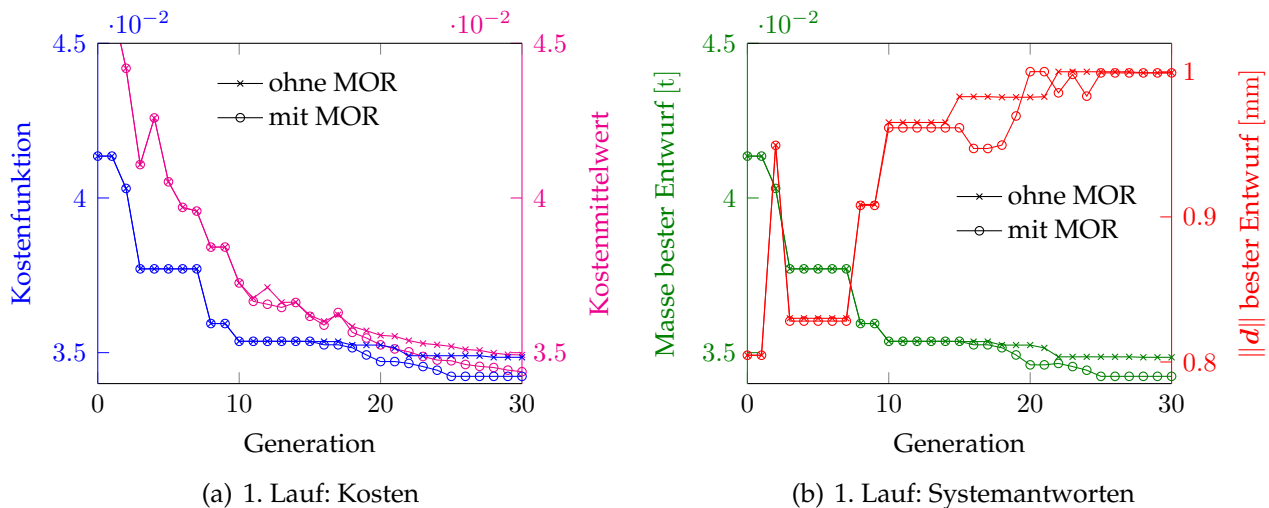


Abbildung 3.19.: Konvergenz der Optimierung

In Abb. 3.19 ist zu sehen, dass der Einfluss der MOR zu leichten Abweichungen gegenüber der Optimierung mit dem originalen System führt. In Tabelle 3.3 sind die Zahlenwerte für die Lösungen aufgetragen, aus denen leichte Verletzungen der Restriktion im Falle des MOR-Verfahrens hervorgehen. Ferner kommt es durch die MOR zu anderen lokalen Lösungen, obwohl die Strukturmasse nur geringfügig unterschiedlich ist. Die lokale Optimalität der jeweiligen Lösungen wurde durch Anwendung eines gradientenbasierten Algorithmus auf die Lösungspunkte bestätigt. Die beiden weiteren Konvergenzverläufe finden sich im Anhang A.2.

Lauf	MOR/Basis-update	Optimierungsergebnis						Masse [kg]	$\ \hat{d}\ $ [mm]
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$ [mm]	$x_5$ [mm]	$x_6$ [mm]		
1	nein/nein	56.05	18.64	149.43	1.01	3.00	3.46	34.850	0.9993
1	ja/nein	108.95	100.0	142.08	1.00	3.11	1.00	34.235	1.0044
1	ja/ja	52.39	23.01	149.56	1.00	3.05	3.35	34.820	0.9987
2	nein/nein	50.37	0.27	149.51	1.00	3.03	3.59	34.879	0.9984
2	ja/nein	47.33	-8.64	150.00	1.00	3.08	3.30	34.813	1.0046
2	ja/ja	54.00	1.04	149.77	1.00	2.99	3.65	34.868	0.9997
3	nein/nein	110.80	42.57	89.15	1.00	3.24	1.00	34.701	0.9972
3	ja/nein	51.49	94.68	148.89	1.00	3.31	1.45	34.420	1.0059
3	ja/ja	113.57	40.06	89.37	1.00	3.21	1.16	34.882	0.9997

Tabelle 3.3.: Lösungen der verschiedenen Versionen des Optimierungsvorgehens

In Abb. 3.20 sind für die drei Vergleichsläufe die Lösungen für  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  erkennbar. Die optimalen Entwürfe weisen dabei vor allem bezüglich der Riegelhöhe Unterschiede auf.

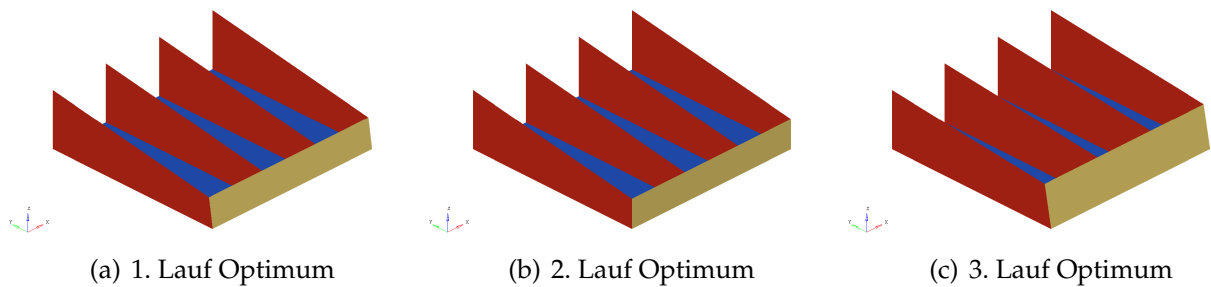


Abbildung 3.20.: Optimale Form bei Anwendung der MOR und Basis-Update

Um die Genauigkeit zu steigern und damit den beschriebenen Abweichungen zu begegnen, wurde eine Modifikation des Vorgehens implementiert. Dabei wird die Projektionsbasis  $\mathbf{V}$  modifiziert, falls ein besseres Individuum als die vorliegenden gefunden wird. In diesem Fall wird dieser Entwurf nochmals im originalen Raum ausgewertet und die so erhaltene Lösung wird der bestehenden Basis hinzugefügt. Dazu muss der Lösungsvektor durch das MGS-Verfahren orthonormiert und der Basis angehängt ( $\mathbf{V}_n = [\mathbf{V}_{n-1}, \mathbf{v}_n]$ ) werden. Auf diese Weise wird in guten Bereichen die Modellgenauigkeit erhöht. Die Ergebnisse für dieses modifizierte Vorgehen sind in Abb. 3.21 zu sehen.

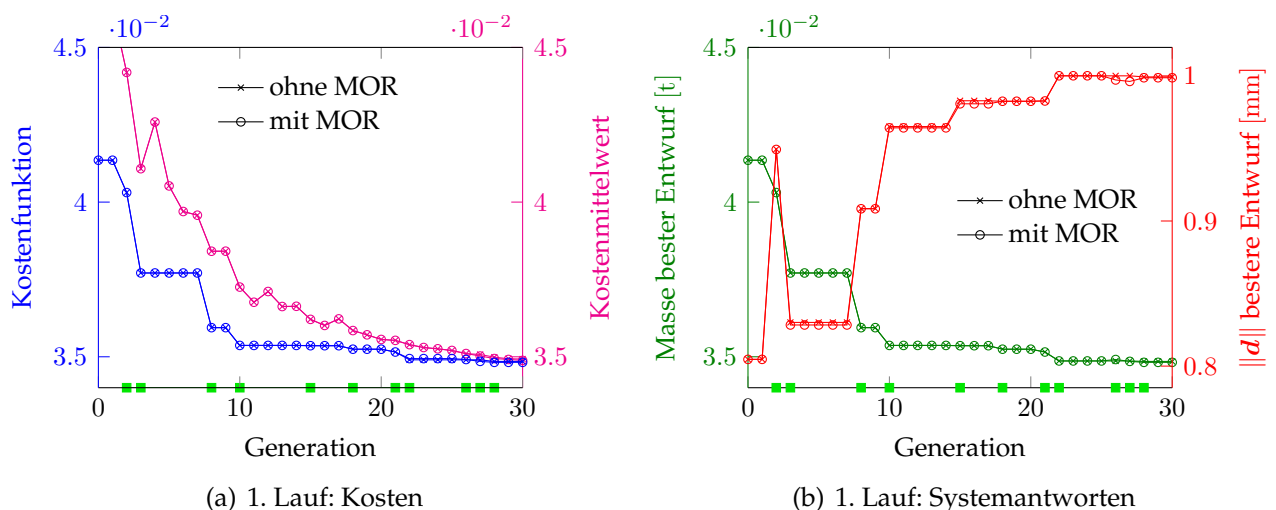


Abbildung 3.21.: Konvergenz der Optimierung mit modifizierter Projektionsbasis

Die Abweichung der Ergebnisse der MOR-gestützten Optimierung von denen mit dem originalen System werden offensichtlich deutlich verringert. Dies geschieht zum Preis einer zusätzlichen Evaluation des Originalsystems im Falle einer Verbesserung der Lösung. Weiter wird auch die Dimension der Projektionsbasis vergrößert, wodurch sich die Rechendauer verlängert. Somit wird die Effizienz insgesamt gesenkt, die Approximationsgenauigkeit jedoch erheblich verbessert. Gerade bei Annäherung an die tatsächliche Lösung unterstützt dieser Automatismus den Optimierungsprozess erheblich. Die Gegenüberstellung aller Optimierungsläufe findet sich im Anhang A.3.

#### 3.3.7 Diskussion der POD-basierten Reduktion und Ausblicke

Im Rahmen des „Proper Orthogonal Decomposition“-basierten Optimierungsvorgehens in Abschnitt 3.3.4 wurde die mögliche Einsparung pro Systemanalyse untersucht, die für das verwendete System bei 0.10 s liegt. Im Kontext der Optimierungsrechnung zeigt sich jedoch, dass bei der vorliegenden Implementierung die Einsparungen aus der MOR nur einen geringen Anteil ausmachen. Viel entscheidender sind in der Anwendung die Zeiten für das Laden von Lizenzen der beteiligten Software und das jeweilige Laden der benötigten Programme. Im vorliegenden Fall lässt sich durch Addition der in Abs. 3.3.4 ermittelten Ersparnisse im Lösungsprozess ein Rechenzeitgewinn von 2s bei der Auswertung einer Generation ermitteln. Da die Gesamtdauer jedoch bei 294 Sekunden liegt, ist die Effizienzsteigerung hier marginal.

Gründe sind vor allem in der Implementierung zu suchen. Das wiederholte Starten von NASTRAN verursacht im Verhältnis zur eigentlichen Lösung deutlich größere zeitliche Aufwände. Der MOR-Einsatz fällt folglich erst entscheidend ins Gewicht, wenn das Verhältnis aus administrativen Aufwänden des Programmcodes zu der eigentlichen Berechnung klein ist. Dies kann beispielsweise durch die Integration der MOR-Funktionalität in ein FEM-Programm erreicht werden. Dabei ergibt sich auch der Vorteil, dass das wiederholte Laden der Projektionsmatrix vermieden werden kann.

Durch die SVD der Samplematrix, werden Ausgleichsrichtungen ermittelt, die anschließend als Unterraum verwendet werden. Liegen viele Samples in einem bestimmten Bereich kann der Einfluss von anderen Stützstellen auf die Projektionsbasis sehr gering ausfallen, obwohl sie für die Systemapproximation wichtig wären. Entsprechend könnte eine Berücksichtigung von abgelegenen Punkten in der Projektionsmatrix vorteilhaft sein. Solche Ausreißerpunkte könnten der Basis durch einen einfachen Orthonormierungsschritt hinzugefügt werden.

Vorteil der POD-basierten MOR ist die einfache Erzeugung der Projektionsbasis des Vektorunterraumes und die Anschaulichkeit der Grundidee. Im Vergleich mit den in Abs. 3.2 eingesetzten Vorgehen, bei dem ein parametrisiertes Ersatzmodell verwendet wurde, erfolgte die Parametrierung direkt durch die jeweilige Assemblierung der Systemmatrix. Dies lässt eine deutlich bessere Rechengenauigkeit zu, senkt jedoch die Effizienz bei der Systemauswertung. Durch das Sampling für die POD können nichtlineare Systeme in der Regel besser approximiert werden als durch KR-basierte Verfahren.

Beim Einsatz von POD-basierter Reduktion für Gradientenverfahren kann der Effizienzvorteil viel schlechter abgeschätzt werden, da die Erzeugung der Basis die Auswertung einer großen Anzahl von Stützstellen voraussetzt. Anders als bei evolutionären Strategien können diese Offline-Kosten nicht als Teil des Verfahrens angesehen werden. Wird eine globale Suchstrategie mit Gradientenverfahren eingesetzt, so können unter Umständen die verwendeten Startpunkte der Optimierungen für die Ermittlung einer Projektionsbasis verwendet werden. In diesem Falle könnte sich der Einsatz der POD-basierten Reduktion lohnen, wobei die Anzahl der verschiedenen Startwerte und die damit einhergehende Approximationsgüte entscheidend für den Einsatz sein dürften.

Bei der analytischen Sensitivitätsanalyse für die gradientenbasierte Optimierung können sich durch projektionsbasierte MOR-Verfahren Effizienzsteigerungen ergeben. Betrachtet man das statische FEM-System kann der analytische Gradient nach (2.18) berechnet werden. Da die Lösung anhand des projizierten Systems erfolgt, liegt die LU-Faktorisierung der reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\tilde{K} = \tilde{L}\tilde{U}$  vor. Die benötigte Ableitung der Steifigkeits-



matrix  $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{x}$  kann auf dem Unterraum nicht direkt ermittelt werden, da die Beschreibung der Parameterabhängigkeit bei der Projektion verloren geht. Deshalb muss diese Ableitung anhand des originalen Systems berechnet werden. In (3.11) ist das Schema erkennbar, nach dem der Verschiebungsgradient gemäß Abs. 2.1.7 berechnet wird.

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}}{\partial x_i} = -\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{V}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{d}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_i} = \mathbf{V} \frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

Der Vergleich der Gradientenberechnung mit dem reduzierten und dem originalen Modell zeigt, dass Einsparungen beim Lösungsprozess, also der LU-Faktorisierung und dem Vorwärts- Rückwärtseinsetzen möglich sind. Hierbei ist gemäß Abschnitt 3.3.3 mit sehr kleinen Systemen zu rechnen, deren Lösungsaufwand quasi vernachlässigbar ist. Allerdings sind für die semianalytische Berechnung jedes Gradienten  $\partial \mathbf{K} / \partial x_i$  zwei Matrix-Matrix-Produkte für die Unterraumprojektion und nach der Berechnung von  $\partial \mathbf{d} / \partial x_i$  die Rückprojektion nötig. Betrachtet man die Berechnungskostenanteile in Abb. 3.14, so ist erkennbar, dass sich trotz der zusätzlichen Aufwände bei der Projektion ein Zeitersparnis gegenüber der Lösung des originalen Systems ergibt.

### 3.4 Vergleich der eingesetzten MOR-Verfahren und Ausblick

Es wurden zwei Optimierungsstrategien auf Grundlage von modellordnungsreduzierten Systemen untersucht. In beiden Fällen wurden Projektionsverfahren verwendet, wobei im ersten Fall ein reduziertes Ersatzmodell ermittelt wurde und im zweiten Fall die Parameterabhängigkeit durch erneute Assemblierung der Systemmatrizen abgebildet wurde.

Für das erste Vorgehen wurde nach *Daniel* [23] ein KR verwendet, und die *Taylor*-Reihe erster Ordnung nach den benötigten Parametern entwickelt. Auf diese Weise lag ein System vor, das im Falle sehr weniger Parameter ausreichende Genauigkeit für das Balkenfachwerk bot und eine erfolgreiche Optimierung ermöglichte. Wie weitere, hier nicht präsentierte Versuche der Anwendung des Prinzips auf Schalenstrukturen und Systeme mit vielen Parametern zeigten, ist dieses Verfahren jedoch auf sehr einfache Systeme und wenige Parameter beschränkt. So zeigte sich für Schalenstrukturen eine inakzeptable Ungenauigkeit der Systemantworten, wodurch die Ergebnisse der Optimierung unbrauchbar wurden.

Aufbauend auf diesen Erfahrungen wurde als nächstes versucht, die Genauigkeit der reduzierten Modelle zu steigern. Dazu wurde auf den Ansatz übergegangen, kein Ersatzmodell zu verwenden, sondern die Parameterabhängigkeit durch erneute Assemblierung der Matrizen abzubilden. Somit entstehen Approximationsfehler nur durch die Projektion und nicht mehr durch die unzulängliche Parametrierung.

Weiter wurde der hohe Aufwand zur Ermittlung der Projektionsbasis durch die POD berechnet und im Kontext evolutionärer Strategien betrachtet. Dabei wird klar, dass der numerische Aufwand für die Ermittlung der Projektionsmatrix zum größten Teil ohnehin auf Grund der Optimierungsstrategie vorliegt. Weiter rentiert sich der MOR-Einsatz durch die naturgemäß hohe Anzahl an Systemauswertungen im Rahmen der evolutionären Strategie in besonderem Maße.

Für dieses Verfahren wurde zunächst die Approximationsgüte untersucht und für die Dimensions- und Formoptimierung einer Schalenstruktur als ausreichend eingeschätzt. Dies

wurde durch Praxistests in der Optimierung bestätigt. Die Untersuchung der Effizienz zeigte auch in Abhängigkeit von der Systemdimension große Vorteile beim Vergleich der Reduktions- und Lösungsdauern. Die Reduktionsstrategie wurde noch durch dynamische Anpassungen der Reduktionsbasis während der Optimierung erweitert und es konnten hohe Genauigkeitssteigerungen erzielt werden. Dabei wurde der Berechnungsaufwand nur geringfügig vergrößert.

Die entwickelte Strategie zur Berücksichtigung der Parameterabhängigkeit stellte sich als effizienzsteigernd heraus und dürfte durch die Ermittlung der Projektionsbasis mittels POD sehr flexibel bezüglich des Einsatzes bei unterschiedlichsten Systemen sein. Die MOR mittels *Krylov*-Unterräumen bedarf deutlich komplizierterer Vorgehensweisen und Erfahrung, bietet aber in der Regel Vorteile bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden. Parametrierungen sind dabei auf sehr wenige Variablen und kleine Entwicklungsordnungen der *Taylor*-Reihe beschränkt. Die Beschränkung auf wenige Systemparameter gilt wegen des starken Anstiegs von Stützstellen im DOE auch für das POD-basierte Verfahren. Allerdings lässt sich die Approximationsgenauigkeit besser steuern und weitere Gültigkeitsbereiche erzielen. Die durchgeführten Untersuchungen zeigten, dass die unzulängliche Approximationsgenauigkeit das Haupthemmnis für den Einsatz von MOR-Verfahren in der Optimierung darstellt. Die POD-basierte Optimierung bietet diesbezüglich gemäß den vorangehenden Untersuchungen das größere Potential.

## Restriktionen der additiven Fertigung in der Topologieoptimierung

Die Verwendung von Optimierungsergebnissen für die Konstruktion von Bauteilen bedarf der Interpretation des optimalen Entwurfs im Hinblick auf die Fertigbarkeit mit Hilfe des vorgesehenen Verfahrens. Dabei kommt es oft zu aufwändigen Neuerstellungen von Modellen und Analysen, um die Festigkeit der Struktur zu garantieren. Durch die zwangsläufigen Abänderungen des Entwurfs, muss ein Verlust an mechanischer Leistungsfähigkeit des Bauteils in Kauf genommen werden. Um die genannten Nachteile zu vermeiden, werden im Weiteren Versuche unternommen, die direkte Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen in der Optimierung umzusetzen. Dazu wird die Wechselwirkung von Topologieoptimierung und additiver Fertigung betrachtet.

Die Topologieoptimierung spielt als Konzeptfindungsverfahren eine immer größere Rolle und ist bereits in vielen verschiedenen kommerziellen Optimierungsprogrammen umgesetzt. Wie in Abschnitt 2.1.9 beschrieben, ist das Ergebnis der Topologieoptimierung eine räumliche Materialverteilung im Bauraum, die durch Elementdichten beschrieben wird. Daher ergeben sich organisch gewachsen anmutende Bauteilgeometrien, die sehr komplexe Formen annehmen und deshalb mit konventionellen Verfahren schlecht oder gar nicht zu fertigen sind. Ein Fertigungsverfahren das eine entsprechende Freiheit im Geometrieaufbau mitbringt, ist die additive Fertigung.

Die additive Fertigung ist ein vielversprechendes Fertigungsverfahren, das sich in den letzten Jahren vom *Rapid Prototyping* zu einer für Funktionsbauteile geeigneten Fertigungstechnik entwickelt hat. Additiv gefertigte Komponenten werden heute bereits in unkritischen Bereichen von Flugzeugen eingesetzt und es werden große Anstrengungen unternommen, um die Wirtschaftlichkeit des Verfahrens für den Einsatz in weiteren Branchen zu erhöhen. Durch die Entwicklung von Strukturoptimierungsmethoden, die die Eigenschaften von Topologieoptimierung und generativer Fertigung gezielt berücksichtigen, können Bauteile viel schneller in die Produktion gebracht werden und Aspekte der Fertigung im Rahmen der Optimierung in die Bauteilgeometrie einfließen. In diesem Kapitel sollen daher Methoden untersucht werden, die eine Synergie der beiden Verfahren bewirken und damit Wettbewerbsvorteile schaffen können.

## 4.1 Einordnung des Fertigungsverfahrens

Der Begriff additive Fertigung grenzt das Herstellungsverfahren nach *Gebhardt* [40] von den subtraktiven (beispielsweise Fräsen, Drehen) und den formativen (beispielsweise Tiefziehen, Schmieden) ab und bezeichnet die Fertigung durch Materialhinzufügung für die Bauteilerzeugung. Generative Fertigung wiederum meint speziell den schichtweisen Aufbau der Geometrie, der in Abb. 4.1(a) im Bauteilschnitt angedeutet ist.

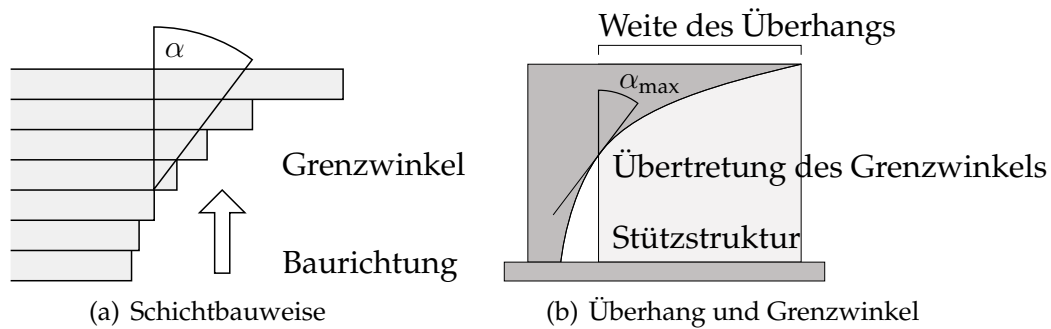


Abbildung 4.1.: Schichtaufbau der Geometrie bei generativer Fertigung

Eine weitere Einteilung kann durch die Abgrenzung der gefertigten Produkte bezüglich des Verwendungszwecks erfolgen. In der Anfangszeit zielte die Fertigung vor allem auf die relativ schnelle Erstellung von Prototypen ab, woher die Bezeichnung „Rapid Prototyping“ stammt. Die Entwicklung führte dann über die Erstellung von Werkzeugen für die Bauteilfertigung zu der direkten Fertigung von Zielbauteilen.

### 4.1.1 Unterschiedliche Materialapplikation bei generativen Verfahren

Nach [40] können drei grundlegende Fertigungsverfahren unterschieden werden. Bei Freiraumverfahren wird schichtweise Material appliziert und es müssen bei Überhängen Stützstrukturen erstellt werden. Ein Vertreter ist das „Fused Deposition Modeling“ für Kunststoffwerkstoffe, bei dem das flüssige Material durch eine Düse aufgetragen wird.

Bei Flüssigmaterialverfahren erfolgt der Geometrieaufbau aus einem flüssigen Grundstoff. Typischer Vertreter ist die Stereolithographie, bei der photosensitive Polymere durch Anregung mittels eines Lasers schichtweise ausgehärtet werden. Der Schichtaufbau erfolgt dabei an der Oberfläche des Fluids und das Bauteil muss im Prozess entsprechend positioniert werden.

Als dritte Gruppe sind die Pulverbettverfahren zu nennen. Hierbei wird die Geometrie durch das wiederholte Aufrakeln von Pulver und anschließendes Verschweißen des Granulats mit darunter liegenden Schichten erzeugt. Ein bedeutender Vertreter ist hier das selektive Lasersintern (SLS), das bezüglich der Erstellung von Zielbauteilen im Rahmen des „Rapid Manufacturing“ am fortgeschrittensten ist und das auch für die Herstellung mechanisch belasteter Komponenten geeignet ist.

### 4.1.2 Leistungsfähigkeit und Grenzen der generativen Verfahren

**Bauteilgeometrie und Baugeschwindigkeit** Die Fähigkeit, äußerst komplexe Geometrien zu erzeugen, wurde bereits angesprochen. Weiter ist eine einfache Berücksichtigung von individuellen Merkmalen für eine Serienfertigung gegeben, da kein Werkzeug- oder Formbau erfolgen muss. Auch die Problematik, das Werkstück für die Bearbeitung aufzuspannen, entfällt. Die Bauteilgröße ist jeweils durch die Fertigungsanlage beschränkt. Für das Lasersintern betragen die Maße dabei heute circa  $30[\text{cm}] \times 30[\text{cm}] \times 20[\text{cm}]$ . Eine hohe Hürde für einen kostengünstigen Einsatz stellt immer noch die relativ lange Fertigungsdauer dar, die in Volumen pro Zeit angegeben werden kann. Aktuell können von sehr starken Anlagen bis zu  $100[\text{cm}^3/\text{h}]$  erreicht werden, was jedoch auch von der Bauteilgeometrie abhängt. In Maschinen mit durchschnittlicher Leistungsfähigkeit werden eher Werte in der Größenordnung  $10[\text{cm}^3/\text{h}]$  erzielt. Die durch die generative Fertigung erzielbaren Wandstärken liegen beispielsweise für das SLS-Verfahren bei  $0.5[\text{mm}]$ . Das Auflösungsvermögen hängt von der Pulverfeinheit ab und beträgt dabei ungefähr  $0,15[\text{mm}]$ . [40]

**Materialeigenschaften** Die verarbeitbaren Materialien reichen von Metallen über Keramik bis hin zu Kunststoffen. Die Materialeigenschaften, die sich für das im Metallverarbeitungsbereich besonders bedeutende SLS ergeben, liegen im Bereich der Werkstoffeigenschaften bei Anwendung herkömmlicher Fertigungsverfahren. Der schichtweise Aufbau kann jedoch zur Anisotropie (Orthotropie) bezüglich der Baurichtung führen. Dabei liegt in Baurichtung eine höhere Steifigkeit und Festigkeit vor. Die Produktion der verarbeiteten Pulver ist kostspielig und kompliziert. Beim Verschweißen des Granulats werden nicht alle Körner zur Gänze eingeschmolzen. Durch anhaftende teilweise verschweißte Partikel kann es zur Verpelzung der Oberfläche kommen.

**Stützstrukturen** In Abbildung 4.1(a) wird anhand der Stufenform, die sich aus der Schichtbauweise ergibt, deutlich, dass mit steigendem Konturwinkel  $\alpha$  die Überhänge aufeinanderfolgender Schichten immer größer werden. Bei Pulverbettverfahren werden diese Stufen an sich durch das Granulat gestützt. Dennoch werden bei metallischen Strukturen meist Stützstrukturen benötigt, um die geometrische Genauigkeit und die Stabilität des Prozesses zu sichern. So können thermische Verzüge aus den großen Temperaturgradienten resultieren, die sich aus den hohen lokal eingebrachten Energien ergeben. Neue Schichten, zeigen beispielsweise beim Abkühlen die Tendenz, sich nach oben aufzurollen.

## 4.2 Wechselwirkung von Topologieoptimierung und additiver Fertigung

Im weiteren werden anhand ausgewählter Beschränkungen der generativen Fertigung und der Topologieoptimierung Möglichkeiten diskutiert, wie die beiden Prozesse gekoppelt werden können, sodass sich eine möglichst positive Synergie ergibt. Das Darstellungsvermögen und der Rechenaufwand in der Topologieoptimierung werden stark durch die Bauraumdiskretisierung bestimmt. Im Allgemeinen ist die räumliche Auflösung der generativen Fer-

tigung deutlich höher als die der Topologieoptimierung, da sich bei zu feiner Vernetzung inakzeptable Rechenzeiten ergeben würden.

Die Vorgabe von minimalen Strukturdurchmessern in der Topologieoptimierung kann sinnvoll sein, wenn für die Struktur Stabilitätsanforderungen bestehen. Beispielsweise kann für Nachbearbeitungsprozesse wie Reinigung oder Fräsen (vgl. [38]) von Funktionsflächen ein wesentlich größerer Strukturdurchmesser erforderlich sein, als er sich aus den oben erwähnten Grenzen des Prozesses ergibt. In diesem Fall wird die Integration dieser Forderung in die Topologieoptimierung relevant.

Eine weitere Einschränkung für die Topologie ergibt sich für die Ausbildung von Hohlräumen. Je nach Prozess muss loses Granulat oder Stützstruktur nach dem Bauteilaufbau entfernt werden, was im Falle von Hohlräumen nicht mehr möglich ist. Entweder verbleibt also überflüssiges Material im Bauteil oder der Hohlraum muss geöffnet werden. Beides verringert die mechanische Leistungsfähigkeit des Bauteils, da entweder das Gewicht steigt, oder die Struktur geschwächt wird. Ferner bedarf es zusätzlicher Nachbearbeitung, wenn der Hohlraum entleert wird, was den Fertigungsaufwand steigert.

Wie in Abschnitt 4.1.2 erwähnt, müssen Überhänge bei manchen Verfahren durch Hilfsstrukturen abgestützt werden. Diese Stützstrukturen müssen zunächst konstruiert und nach der Bauteilerstellung entfernt werden. Neben diesen Nachteilen bedeuten Überhänge zusätzlichen Material-, Energie- und Zeitaufwand bei der Fertigung. Somit können nach *Bracket* [16] durch Vermeidung von Überhangbereichen mehrere Aspekte der Fertigung positiv beeinflusst werden.

Folgend werden zum einen Möglichkeiten behandelt, wie die Forderung nach minimalen Strukturdurchmessern in der Topologieoptimierung umgesetzt werden kann. Zum anderen werden Vorgehen entwickelt und getestet, um Überhänge zu Vermeiden.

## 4.3 Virtuelles Testmodell und Berechnungsimplementierung

### 4.3.1 Implementierungsaspekte

#### 4.3.1.1 Verwendete Software und grundsätzliches Vorgehen

Für die notwendige Flexibilität und den Zugriff auf alle wichtigen Parameter während der Optimierung wurde ein Forschungscode zur Topologieoptimierung in PYTHON implementiert. Die FE-Systemmatrizen wurden einmalig zu Beginn des Rechenprozesses mit NASTRAN ermittelt. Dabei werden die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^e$  sowie die Elementorientierungsinformationen durch DMAP Befehle abgespeichert. Das Einlesen in die PYTHON-Umgebung erfolgt anschließend durch PYNASTRAN [28]. Die  $K^e$  werden dann in das globale Koordinatensystem transformiert und abgespeichert. Im Optimierungsverlauf werden die  $K^e$  durch die Optimierungsvariablen skaliert und assembliert. Die Lösung erfolgt mittels des PYTHON-Moduls SCIPY.SPARSE.LINALG. Als Optimierungsalgorithmus wurde der MMA-Algorithmus von *Svanberg* [81] verwendet, der über das PYTHON-Modul PYOPT [66] zur Verfügung steht.

### 4.3.1.2 Optimierungsstrategie - Äußere Iterationen

Wie schon in Abs. 2.1.9.3 beschrieben, baut sich der Topologieoptimierungsprozess aus mehreren äußeren Iterationen auf. In den Konvergenzverläufen sind diese anhand der Nummerierung über dem Graphen kenntlich gemacht. In jeder äußeren Iteration wird das Optimierungsproblem (2.23) gelöst. Von einer äußeren Iteration zur nächsten wird zum einen das Ergebnis der vorangegangenen Optimierung als Startvektor verwendet, zum anderen werden bestimmte Parameter, wie beispielsweise der SIMP-Wert verändert. Auf diese Weise lässt sich der Optimierungsprozess und das Optimierungsergebnis günstig beeinflussen.

### 4.3.1.3 Optimierungsvariable

In Abschnitt 2.1.9.2 wurden Ansätze zur Materialverteilung angesprochen. Im konkreten Fall wurde der herkömmliche Fall implementiert, bei dem die Elementdichte direkt durch die Optimierungsvariable definiert ist. Nach *Guest* [42] besteht eine andere Möglichkeit darin, sogenannte Knotendichten einzuführen, die sich aus den umliegenden Elementdichten berechnen. Diese Knotendichten, die keine physikalische Bedeutung mehr haben, führen wegen der Mittelung zu einem besser konditionierten Optimierungsproblem. Dies bedingt in einem gewissen Rahmen Vorteile in der numerischen Robustheit. Allerdings geht ein deutlich höherer Implementierungsaufwand damit einher, weshalb der Ansatz nicht verfolgt wurde.

## 4.3.2 Modellgeometrie - MBB-Balken

Als einfaches Modell für den Test wurde der sogenannte MBB-Balken (*Messerschmidt-Bölkow-Blohm*-Balken) verwendet, der in Abb. 4.2 gezeigt ist. Das Modell ist zweidimensional, wodurch die Rechenzeiten ausreichend kurz sind, um auch aufwändige Methoden zu erproben.

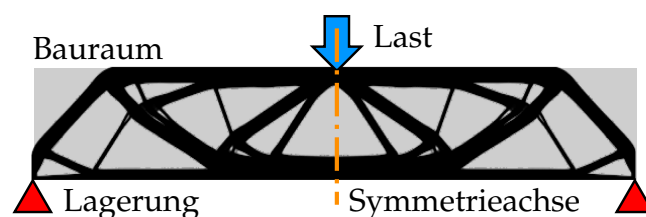


Abbildung 4.2.: Generisches Optimierungsmodell MBB-Balken

Der Bauraum wurde durch ein reguläres Netz aus quadratischen Elementen diskretisiert. Dies ist aus Sicht der Diskretisierungsanpassung und der generellen Implementierung vorteilhaft. Als Last wird eine normierte Kraft verwendet. Durch Ausnutzung der Symmetrie kann das Rechengebiet auf eine Hälfte des Biegebalkens beschränkt werden. Im Weiteren werden auch die Ergebnisse nur anhand einer Modellhälfte präsentiert. Es wurde ein generischer Wert von eins für den E-Modul und die Materialdichte im jeweiligen Einheitensystem gewählt.

### 4.3.3 Systemantworten und Sensitivitätsanalyse

Für die Untersuchung der Fertigungsrestriktionen in der Topologieoptimierung wurde als Optimierungsziel die Minimierung der Nachgiebigkeit bei einer maximal zulässigen Masse gewählt. Die beiden Systemantworten werden hier kurz zusammen mit deren jeweiliger Gradientenberechnung vorgestellt.

**Nachgiebigkeit** Die Nachgiebigkeit ist für die Topologieoptimierung bei mechanischen Systemen die klassische Zielfunktion. Sie ist in Gleichung (4.1) anhand der Verschiebungen  $\mathbf{d}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  definiert.

$$N(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (4.1)$$

Die Ableitung nimmt die Form in (4.2) an.

$$\frac{\partial \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}}{\partial x_i} = 2\mathbf{d}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x_i} + \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \quad (4.2)$$

Zusammen mit den Ideen der analytischen Gradientenberechnung aus Abschnitt 2.1.7 lässt sich dann (4.3) schreiben.

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} = \mathbf{d}^T \left[ 2\mathbf{K} \left( -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \right) + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \right] = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{d} \quad (4.3)$$

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix kann dann anhand des Assemblierungsoperators in Abhängigkeit der Elementsteifigkeitsmatrizen dargestellt werden (vgl. (4.4)).

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{n_{el}} \frac{\partial \mathbf{K}_k^e}{\partial x_i} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathbf{K}_k^e}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad k \neq i \quad (4.4)$$

Dabei ist jedes Element nur von einer Optimierungsvariable abhängig. Zusammen mit der linearen Abhängigkeit vom E-Modul und dem SIMP-Ansatz aus Abschnitt 2.1.9 ergibt sich die Ableitung in der Form (4.5).

$$\frac{\partial \mathbf{K}_k^e}{\partial x_i} = p x_i^{p-1} \mathbf{K}_{k0}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_k^e = x_k^p \mathbf{K}_{k0}^e \quad (4.5)$$

Bei Kenntnis der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^e$  kann dann durch den einfachen analytischen Term die Ableitung der Nachgiebigkeit angegeben werden.

Die Berücksichtigung mehrerer Lastfälle führt auf eine Mehrzieloptimierung, wobei meist eine Gleichgewichtung der Nachgiebigkeiten jedes Lastfalles sinnvoll ist. Die Nachgiebigkeit nimmt dann die Form (4.6) an, worin die  $w_i$  die Gewichtung beschreiben. Die Ableitung verkompliziert sich durch dieses Vorgehen nicht. Es müssen für jeden Lastfall nur die entsprechenden Lastvektoren berücksichtigt werden

$$N_{\text{ges}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{lf}} w_k N_k(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial N_{\text{ges}}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n_{lf}} w_k \frac{\partial \mathbf{d}_k^T}{\partial x_i} \mathbf{f}_k \quad (4.6)$$



**Masse:** Die Beschreibung der Systemmasse erfolgt durch (4.7) in Abhängigkeit der Elementvolumen und der jeweiligen Dichte.

$$m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} V_i \rho_i x_i \quad \Rightarrow \quad g(\mathbf{x}) = \frac{m(\mathbf{x})}{m_{\max}} - 1 \quad (4.7)$$

Die Ableitungen nach den Optimierungsvariablen  $x_j$  sind in (4.8) gegeben.

$$\frac{\partial m}{\partial x_j} = V_j \rho_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{V_j \rho_j}{m_{\max}} \quad j \in \{1, \dots, n_{el}\} \quad (4.8)$$

## 4.4 Lösung von Topologieoptimierungsaufgaben

In Abschnitt 2.1.5 und 2.1.2 wurden Prinzipien von Optimierungsalgorithmen und Lösungsstrategien bereits diskutiert. Für die Lösung der Topologieoptimierungsaufgabe lassen sich prinzipiell verschiedenste Verfahren verwenden [10, S.19], allerdings gibt es klar zu bevorzugende Algorithmen, die speziell angepasst wurden. Hier werden zwei besonders etablierte gegenübergestellt. Dies sind das Optimalitätskriterienverfahren von *Bendsøe* und der MMA-Algorithmus von *Svanberg*.

### 4.4.1 Optimalitätskriterienverfahren

Von *Bendsøe* wurde ein Algorithmus für die Lösung des Materialverteilungsproblems entwickelt [9, S.28], der das Optimalitätskriterium (OC) des dualen Problems verwendet. Das Iterationsschema ist in (4.9) skizziert.

$$\rho_{k+1}^e = \begin{cases} \underline{x}^e & \text{falls } x_k^e \cdot (B^e)^\eta \leq \underline{x}^e \\ x_k^e \cdot (B^e)^\eta & \text{falls } \underline{x}^e < x_k^e \cdot (B^e)^\eta < \bar{x}^e \\ \bar{x}^e & \text{falls } x_k^e \cdot (B^e)^\eta \geq \bar{x}^e \end{cases} \quad (4.9)$$

für  $e \in \{1, 2, \dots, n_{el}\}$ ,  $k$  : aktuelle Iteration

$$\underline{x}^e = \max\{x_k^e - \delta, x_{min}\}$$

$$\bar{x}^e = \min\{x_k^e + \delta, 1\}$$

Darin ist  $\delta$  eine vordefinierte Schrittweite und  $\eta \in [0, 1]$  ein Dämpfungsfaktor. Die Parameter werden gemäß der Literatur meist zu 0.2 und 0.5 gewählt, was stabile und schnelle Konvergenz ermöglicht. Die  $x^e$  legen die Dichte jedes einzelnen Elementes fest. Der Veränderungsfaktor  $B^e$  ist in (4.10) definiert:

$$B^e = - \frac{\partial z(\mathbf{x}) / \partial x_k^e}{\lambda \partial g(\mathbf{x}) / \partial x_k^e} \quad (4.10)$$

Für die Lösung wird der *Lagrange*-Multiplikator  $\lambda$  durch ein Bisektionsverfahren so eingestellt, dass die Volumenrestriktion erfüllt ist.

### 4.4.2 Method of Moving Asymptotes - MMA

Entscheidende Vorarbeit zum MMA-Algorithmus wurde von *Fleury* mit dem CONLIN-Algorithmus [35] geleistet, bevor *Svanborg* [81] darauf aufbauend das Verfahren entwickelte. Der gradientenbasierte Algorithmus zeichnet sich in erster Linie durch die Art der Approximation der Systemantworten aus. Mit diesen werden Subprobleme definiert, die dann sequentiell gelöst werden. Die Approximationsmethodik des MMA ist in (4.11) nach [46] dargestellt. Sie verallgemeinert die Ideen des CONLIN-Algorithmus, durch die Einführung flexibler Asymptoten  $U_{ik}$  und  $L_{ik}$ . Darin bezeichnet  $k$  das Subproblem und  $i$  die Entwurfsvariable sowie  $x_{ik}$  den Entwicklungspunkt (EP) der Approximation.

$$r(\mathbf{x}) \approx \tilde{r}(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{n_{ov}} \Gamma_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) \cdot (x_i - x_{ik}) \tag{4.11}$$

für  $\frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) \geq 0$  :  $\Gamma_i = \frac{U_{ik} - x_{ik}}{U_{ik} - x_i}$

für  $\frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) < 0$  :  $\Gamma_i = \frac{x_{ik} - L_{ik}}{x_i - L_{ik}}$

Die in (4.11) beschriebene Approximation hängt von der oberen beziehungsweise unteren Asymptote ab, wobei  $L_{ik} < x_i < U_{ik}$  gelten muss. Die Grenzen werden während der Optimierung angepasst und erlauben reziproke bis lineare Approximationen. Details des Aktualisierungsschemas für die Asymptoten sind in [46] und [81] nachzulesen.

Zur Verdeutlichung des Approximationsfunktionsverlaufs  $\tilde{r}$  sind in Abbildung 4.3 Näherungen einer quadratischen Systemantwort  $r$  mit den unteren Asymptoten bei -2 und -100 dargestellt.

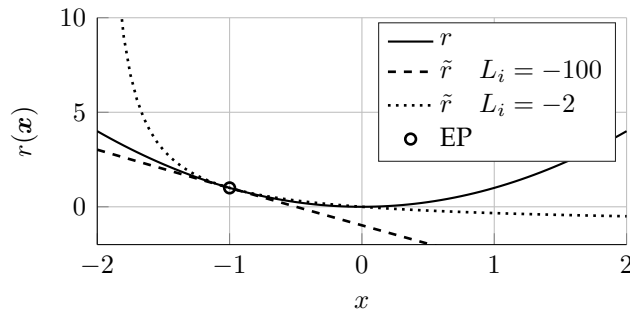


Abbildung 4.3.: Approximationen von  $r(x)$  bei unterschiedlichen Asymptoten

Diese Art Approximation ist für mechanische Systeme vorteilhaft, da nach [46, S.88] häufig lineare bis reziproke Verläufe von Systemantworten auftreten. Die Definitionslücke bei  $L_{ik}$  beziehungsweise  $U_{ik}$  sowie der Gültigkeitsbereich der Approximation werden algorithmusseitig durch vorgegebene Schrittweiten berücksichtigt. Weitere Approximationsschemata sind in [18] diskutiert. Eine Erweiterung des Schemas wurde in [88] vorgestellt, bei der die Asymptoten nicht nur für jede Optimierungsvariable festgelegt werden, sondern auch für jede Systemantwort und so die Flexibilität des Verfahrens weiter gesteigert wird.

Durch die Approximation entstehen separierbare und konvexe Einzelprobleme (siehe Abschnitt 2.1.3), die für die dualen Lösungsstrategien bestens geeignet sind. Aus der Definition des *MinMax*-Problems in Abs. 2.1.2 folgt, dass die Minimierung bezüglich der Optimierungsvariablen analytisch in Abhängigkeit der Ableitungs- und Asymptotenwerte in (4.11) erfolgen kann. Nach dem Einsetzen des Ergebnisses aus der Minimierung erfolgt die Maxi-

mierung bezüglich der *Lagrange*-Multiplikatoren, die analytisch erfolgen kann [34]. Die Ableitungen der approximierten Systemantworten nach den Optimierungsvariablen lassen sich analytisch beschreiben und sind in (4.12) gegeben.

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_i} = \Psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k)(x_i - x_{ik}) + \Gamma_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) \quad (4.12)$$

$$\text{für } \frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) \geq 0 : \quad \Psi_i = \frac{U_{ik} - x_{ik}}{(U_{ik} - x_i)^2} \quad \Gamma_i = \frac{U_i - x_{ik}}{U_i - x_i}$$

$$\text{für } \frac{\partial r}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k) < 0 : \quad \Psi_i = -\frac{x_{ik} - L_{ik}}{(x_i - L_{ik})^2} \quad \Gamma_i = \frac{x_{ik} - L_i}{x_i - L_i}$$

Es liegen so viele *Lagrange*-Multiplikatoren wie Restriktionen vor, wobei deren Anzahl meist gering ist. Dies führt zu einem effizient zu lösenden Optimierungsproblem.

### 4.4.3 Vergleich der Lösungsverfahren

Die Gegenüberstellung von MMA und OC zeigt für das Optimalitätskriterienverfahren Vorteile bezüglich Rechengeschwindigkeit (siehe Abbildung 4.4) und Implementierungsaufwand.

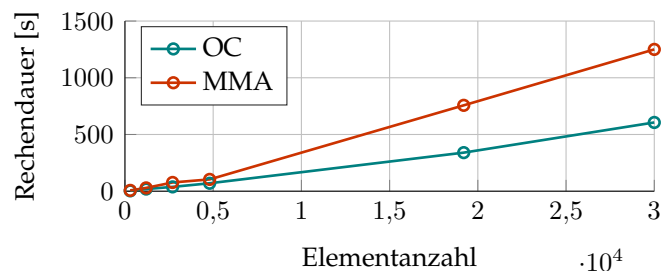


Abbildung 4.4.: Vergleich der Berechnungsdauer bei OC und MMA

Der Vergleich der Konvergenzverläufe von OC und MMA in Abb. 4.5 zeigt zudem, dass beim OC-Verfahren die Zielfunktion monoton fällt und eine stabilere Konvergenz hin zur Lösung stattfindet. Weiter ist anhand der geringeren Iterationsanzahl die effizientere Berechnung erkennbar. Beim MMA-Algorithmus in Abb. 4.5(b) zeigt sich, dass die Restriktion immer wieder inaktiv ist, was zu einem weniger effizienten Suchverfahren führt.

Diese Ergebnisse würden klar für die Verwendung des OC sprechen. Allerdings ist das OC nur für ein bestimmtes Optimierungsproblem formuliert, wodurch die Flexibilität bei der Definition der Optimierungsaufgabe eingeschränkt wird. Diese Anpassung ist jedoch für die Implementierung von Fertigungsrestriktionen notwendig. Der MMA-Algorithmus hingegen bietet diese Flexibilität und wurde daher für die Lösung der Optimierungsaufgaben im Weiteren verwendet.

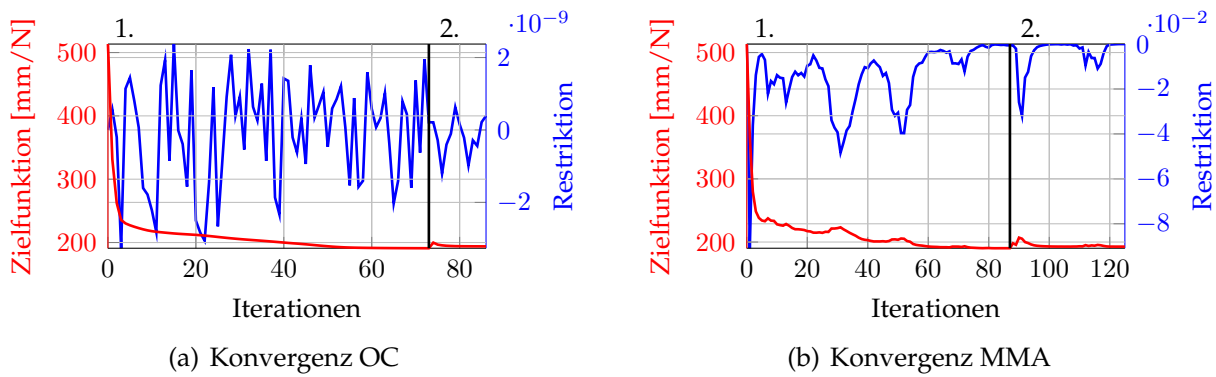


Abbildung 4.5.: Vergleich der Konvergenz von OC und MMA

#### 4.4.4 Konvergenzverhalten und Einfluss von Parametern

Die Ergebnisse von Topologieoptimierungen hängen stark von den Einstellungen des Optimierungsalgorithmus und der Definition der Optimierungsaufgabe ab. Im Weiteren werden ausgewählte wichtige Einflüsse auf den Optimierungsprozess und das Optimierungsergebnis, die für die Topologieoptimierung typisch sind, diskutiert. Dies ist zum einen für das Verständnis von Phänomenen notwendig, die bei der Anwendung der Methoden zur Vermeidung von Überhängen auftreten. Zum anderen konnte so das implementierte Optimierungsverfahren validiert werden.

##### 4.4.4.1 Checkerboarding - Filterungsmethoden

An sich führt die numerische Lösung der Optimierungsaufgabe in (2.23) auf ein Ergebnis, bei dem sich völlig befüllte Elemente mit leeren Elementen abwechseln. Dies führt auf eine schachbrettartige Struktur (eng. Checkerboard) der Dichteverteilung im Bauraum. Durch die Untersuchungen in [9] ist dieser Effekt als numerische Instabilität identifiziert, bei der die Steifigkeit von Elementen mit freien Kanten überschätzt wird. Dem kann durch Elementansatzfunktionen höherer Ordnung entgegengewirkt werden oder durch Einsatz sogenannter Filter.

Die Dichtefilterung wurde von *Bourdin* [15] und *Guest* [42] und die Gradientenfilterung von *Bendsøe* [8] entwickelt. Dabei wird jeweils ein skalarwertiges Feld durch eine auf ein lokales Gebiet beschränkte Mittelung geglättet (vgl. Abb. 4.6).

Für die vorliegende Arbeit wurde die Filterung der Gradienten gewählt, da sich dabei die Implementierung einfacher gestaltet. In jeder Iteration wird nach Gleichung (4.13) das Feld  $\partial z / \partial x_j$  auf ein neues geglättetes Feld  $\partial z / \partial x_j|_{\text{filt}}$  umgerechnet.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x_j} \right|_{\text{filt}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\partial z}{\partial x_i} w(d_i) x_j}{x_i \sum_{i \in \mathcal{I}} w(d_i)} \quad \text{mit} \quad \mathcal{I} = \{i \in \mathbb{N} \mid d_i \leq r_{\min}, i \leq n_{\text{el}}\} \quad (4.13)$$

$$d_i = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \quad (4.14)$$

$$w(d_i) \quad \text{Funktion gewichtet den Abstand} \quad (4.15)$$

Dabei erfolgt die Filterung in einem vorgegebenen Umkreis um das jeweilige Element mit der Dichte  $x_j$ , wie es in Abb. 4.6 skizziert ist. Die Gewichtungsfunktion  $w$  kann unterschied-

lich definiert sein, wobei eine lineare Abnahme mit zunehmendem Abstand verwendet wurde. Weitere Details sind bei [46, S.212] und [42] zu finden.

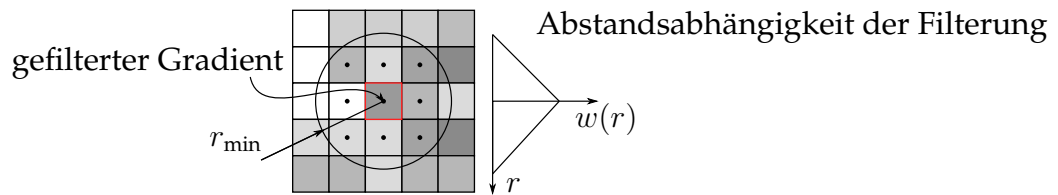


Abbildung 4.6.: Filterungsprinzip und Gewichtung

In Abb. 4.7 ist das gleiche Optimierungsproblem einmal ohne und mit Filterung gelöst worden. Die Größe des Filterungsgebietes ist anhand des roten Kreises neben dem jeweiligen Bild erkennbar.

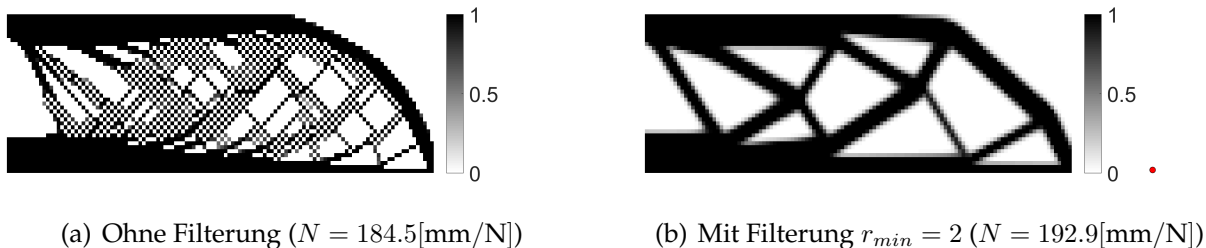


Abbildung 4.7.: Effekt der „Checkerboard“-Filterung (Auflösung:  $120 \times 40$ )

In Abb. 4.7(a) ist deutlich das Schachbrettmuster erkennbar, das in Abschnitt 2.1.9.5 beschrieben wurde. Die Filterung vermeidet den Effekt, wie es durch Abb. 4.7(b) deutlich wird. Gleichzeitig zeigt der Vergleich der beiden Fälle, dass feinere Strukturen zu Ergebnissen mit niedrigerer Nachgiebigkeit führen.

#### 4.4.4.2 Netzabhängigkeit von Ergebnissen

Ein typisches Problem der Topologieoptimierung ist die Abhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung des Bauraums. Der Netzeinfluss auf die Topologie ist dabei sehr groß, so dass teilweise komplett andere Strukturen entstehen. In Abbildung 4.8 sind dazu zwei Ergebnistopologien gegenübergestellt, die bei unterschiedlicher Vernetzung und einem Filterradius von 1,5 Elementlängen ermittelt wurden.

Anhand Abb. 4.8(b) ist wieder zu erkennen, dass feinere Strukturen auch zu besseren Nachgiebigkeiten führen, da das Material differenzierter an kritische Stellen angelagert werden kann.

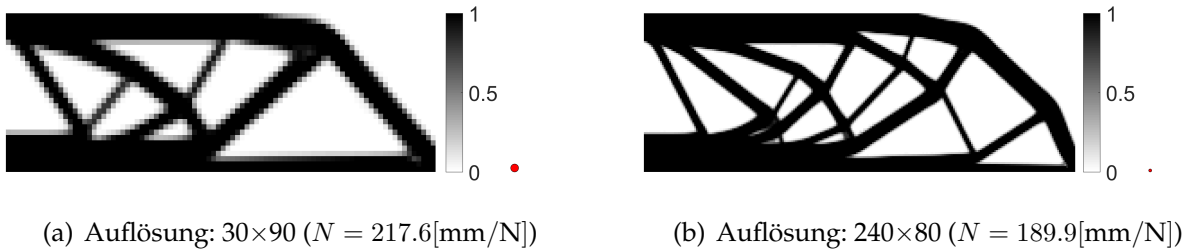


Abbildung 4.8.: Einfluss des Netzes auf Ergebnistopologie und Nachgiebigkeit

#### 4.4.4.3 Einfluss der SIMP-Strategie

Die in Abschnitt 2.1.9.3 bereits vorgestellte Strategie zur Erhöhung des Penalisierungswertes  $p$  wird hier bezüglich ihres Einflusses auf die Optimierungsergebnisse untersucht. Konkret wird der Wert pro äußerer Iteration um 1 erhöht. In Abb. 4.9(a) wird dazu mit  $p = 1$  und in Abb. 4.9(b) mit  $p = 2$  gestartet. Der Endwert ist für beide Optimierungen  $p = 4$ , sodass im zweiten Fall 3 äußere Iterationen vorliegen.

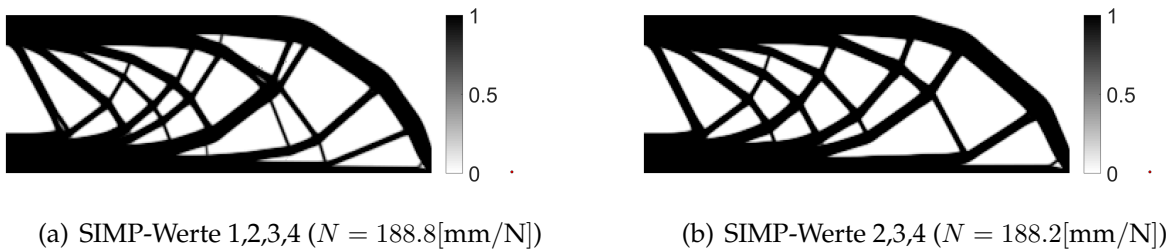


Abbildung 4.9.: Einfluss der SIMP-Wert Abfolge (Diskretisierung: 300×100)

Entgegen der Erwartung, dass eine langsame Steigerung von  $p$  über den äußeren Iterationen einen positiven Einfluss auf den Optimierungsverlauf hat, zeigt sich für den konkreten Fall in Abb. 4.9(b) eine größere Ähnlichkeit der Topologie mit den idealen *Michell*-Strukturen [58]. Auch ist der Zielfunktionswert dieses Ergebnisses tendenziell besser. Dies zeigt die hohe Sensitivität des Verfahrens gegenüber den Parametereinstellungen und verdeutlicht, dass oftmals auch lokale Optima gefunden werden.

#### 4.4.4.4 Konvergenzverhalten

Die Definition der Konvergenztoleranz  $t_z$  für die Zielfunktionsänderung ist entscheidend für die numerische Effizienz einerseits aber auch für die Ergebnistopologie andererseits. Die Gegenüberstellung von Lösungen für unterschiedliche Toleranzen ist in Abb. 4.10 zu sehen.

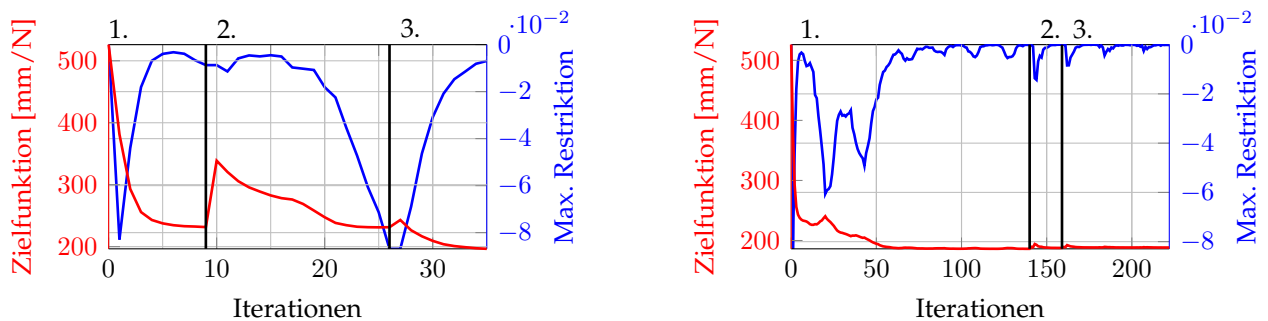


(a) Zieltoleranz:  $1e-2$  ( $N = 196.5[\text{mm}/\text{N}]$ )

(b) Zieltoleranz:  $1e-4$  ( $N = 188.3[\text{mm}/\text{N}]$ )

Abbildung 4.10.: Einfluss der Konvergenztoleranz (Diskretisierung:  $300 \times 100$ )

Für die beiden Optimierungen sind in Abb. 4.11 die Konvergenzverläufe gezeigt, wobei drei äußere Iterationen gerechnet wurden.



(a) Konvergenzverlauf bei Toleranz  $t_z = 1E - 2$  (vgl. 4.10(a))

(b) Konvergenzverlauf bei Toleranz  $t_z = 1E - 4$  (vgl. 4.10(b))

Abbildung 4.11.: Einfluss verschiedener Konvergenztoleranzen

Der Konvergenzverlauf in Abb. 4.11(a) lässt nicht unbedingt vermuten, dass das Optimierungsproblem noch nicht auskonvergiert ist. Betrachtet man jedoch die zugehörige Ergebnistopologie in Abb. 4.10(a) wird deutlich, dass das Ergebnis unbefriedigend ist, da sich gekrümmte Streben ausbilden und einzelne Elemente mit hohen Dichten ergeben, die nicht mit der Struktur verbunden sind. Es muss also eine niedrigere Schranke  $t_z$  gewählt werden.

#### 4.4.4.5 Schlussfolgerungen zu den Parameteruntersuchungen

Die vorangehenden Studien zeigen, dass sowohl die Ergebnistopologie als auch der Optimierungsverlauf stark von den gewählten Parametern und der Vernetzung abhängen. Zwar gibt es für die verschiedenen Einstellungen durchaus Richtwerte in der Literatur, allerdings hängen diese meist von Implementierungsdetails ab und müssen somit dennoch für jeden Einzelfall angepasst werden. Der große Einfluss von Parametern auf das Optimierungsverhalten und das Optimierungsergebnis erschwert die Entwicklung neuer Methoden für die Topologieoptimierung, da kaum abschätzbar ist, welche Wechselwirkungen sich aus den Änderungen ergeben.

## 4.5 Mathematische Formulierung von Fertigungsrestriktionen

Fertigungsrestriktionen ergeben sich aus den Eigenheiten des jeweiligen Fertigungsverfahrens. In kommerzieller Software bereits implementierte Verfahren sind beispielsweise Auszugsrichtungen für gegossene Bauteile oder die Bedingung von gleichen Profilquerschnitten für Extrusionsverfahren. Einen Überblick dazu gibt [89].

Die Formulierung von geometrischen Bedingungen in der Topologieoptimierung erfordert zuerst die Detektierung der aktuellen Topologie. Es muss folglich die Grenze zwischen Struktur- und Leerbereichen im Bauraum ermittelt werden. Die mathematische Formulierung dieser Grenzen kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Es existieren Ansätze, die Ergebnisse in parametrisierte CAD-Konstruktionen überführen, wobei diese Methoden noch Gegenstand aktueller Forschung sind. Einen Überblick gibt beispielsweise [86].

In dieser Arbeit wurde der Ansatz verfolgt, auf Grundlage der Entwurfskonfiguration, also den Dichtewerten im Bauraum, die Restriktionen zu formulieren. Dies erscheint als besonders direktes Vorgehen, da die Dichteverteilung in jeder Iteration ohnehin vorliegt. Die aufwändige und oftmals instabile Methode der Transformation in ein CAD-Modell kann somit eingespart werden.

Für die generative Fertigung wurden Eingangs von Abschnitt 4.2 einige Randbedingungen für das Herstellungsverfahren genannt, von denen eine Auswahl hier untersucht wird. Die Umsetzung in der Topologieoptimierung bedarf der mathematischen Formulierung der Bedingungen, die im Weiteren näher beleuchtet werden.

### 4.5.1 Beschränkung der minimalen Dicke von Strukturbereichen

Die in Abschnitt 4.1.2 erwähnte Vorgabe von Mindeststrukturdurchmessern in der Topologieoptimierung lassen sich anhand der Filterungen, die in Abschnitt 4.4.4.1 diskutiert wurden erreichen. In Abbildung 4.12 wird der Begriff Strukturdurchmesser anhand der Kreise mit Radius  $r$  deutlich. Die Notwendigkeit minimale Strukturdurchmesser in der generativen Fertigung vorzugeben wurde in Abschnitt 4.2 diskutiert. In Abb. 4.7 ist der Einfluss der Gradientenfilterung auf die Strukturdurchmesser erkennbar, weshalb es naheliegend ist, diese Methodik für die Steuerung minimaler Strukturdurchmesser zu nutzen.

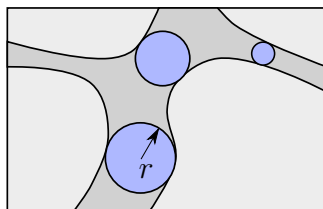
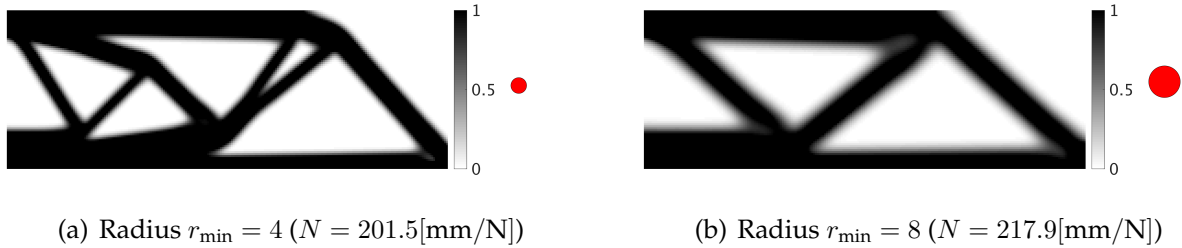


Abbildung 4.12.: Radien für Strukturdurchmesser

Das Vorgehen dabei bedingt, dass der kleinste erzielbare Strukturdurchmesser ungefähr drei Elementlängen beträgt. Für die Ergebnisse in Abb. 4.13 sind zwei unterschiedliche Filterradien verwendet worden.




 Abbildung 4.13.: Ergebnisse bei verschiedenen Filterradien (Diskretisierung:  $80 \times 240$ )

Der größere Filterradius stellt eine stärkere Anforderung an den Entwurf dar und bedingt eine höhere Nachgiebigkeit, da er die mögliche Geometrie stärker einschränkt. Es ist zu erkennen, dass es für den größeren Filterradius zu verstärkten Graubereichen und breiten Dichteübergängen kommt. Dies ist unerwünscht, da klar abgegrenzte Bereiche besser zu interpretieren sind. Methoden, die dem entgegenwirken sind bei *Sigmund* [77] zu finden.

#### 4.5.2 Beschränkung der maximalen Dicke von Strukturbereichen

Auch die Beschränkung maximaler Strukturdurchmesser basiert auf der Betrachtung eines lokalen Gebietes um ein Element. Die Vorgabe maximaler Strukturdurchmesser ist im Kontext der generativen Fertigung von untergeordneter Bedeutung, da aus Fertigungssicht keine zwingenden Gründe vorliegen, eine derartige Vorgabe zu machen. Vielmehr wird die Methode hier vorgestellt, da sie Ausgangspunkt für die Implementierung von Vorgehen zur Vermeidung von Überhängen ist.

Für die Vorgabe maximaler Strukturelemente wird gefordert, dass ein kugelförmiges Prüfgebiet um jedes Element nicht vollständig ausgefüllt ist. Die Masse im Prüfgebiet muss also unter einem Grenzwert liegen. Intuitiv scheint die Einführung von Restriktionen für diese Forderung ein sinnvoller Weg. Allerdings lässt sich sofort erkennen, dass die Anzahl der Restriktionen um die Anzahl der Elemente erhöht wird, wodurch die Effizienz des Lösungsalgorithmus stark beeinträchtigt wird. Daher wurde ein alternatives Vorgehen gewählt, bei dem die Forderung durch die Penalisierung der Zielfunktion umgesetzt wird. [43, S.3]

**Penalisierungsverfahren** Die Idee der Bestrafung der Zielfunktion für schlechte Erfüllung der Forderungen wird durch Hinzufügen von Straftermen  $S_k$  erzielt, die anwachsen, je nachdem wie schlecht die Forderung erfüllt ist. Die Zielfunktion hat dann die Form in Gleichung (4.16), während die Optimierungsaufgabe sonst gleich bleibt.

$$z_{\text{pen}}(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n_{\text{el}}} w_k S_k(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x}) + w_k \sum_{k=1}^{n_{\text{el}}} S_k(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

Die Gewichte  $w_k$  können verwendet werden, um die Stärke der Bestrafung einzustellen. Da normal keine Bevorzugung einzelner Elemente vorliegt, wird der Faktor ausgeklammert. Durch die Gewichtung liegt eine Mehrzieloptimierung vor, auf deren Paretofront Lösungen liegen, die die Fertigungsrestriktionen mehr oder weniger gut berücksichtigen. Anders als beim Einsatz von Restriktionen wird eine Lösung die jeweilige Anforderung nicht zwangs-

läufig in vollem Umfang erfüllen. Die Penalisierung drängt vielmehr den Entwurf in eine gewünschte Richtung.

**Strafterm bei Vorgabe maximaler Strukturdurchmesser** Das Leervolumen  $c_o^v$  innerhalb des kreis- beziehungsweise kugelförmigen Prüfgebiets  $\Omega_o^e$  mit Radius  $\bar{r}_o$  ist in Beziehung (4.17) nach [43] beschrieben.

$$c_o^v(\mathbf{x}) = \frac{V_o^v(\mathbf{x})}{\sum_{j \in \Omega_o^e} v_j} \quad \text{mit} \quad V_o^v(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \Omega_o^e} v_j \cdot (1 - x_j)^{\eta_o} \quad (4.17)$$

Große Exponenten  $\eta_o$  bewirken, dass Elemente mit Zwischendichten weniger zum Leervolumen beitragen. Der Parameter kann dafür beispielsweise über den äußeren Iterationen der Optimierung vergrößert werden. Die Straffunktion ist in (4.18) beschrieben.

$$S_o^e(\mathbf{x}) = [(1 + \underline{c}_o^v - \alpha_1)(1 - c_o^v(\mathbf{x}))]^{\alpha_2} \quad (4.18)$$

Darin wird der prozentuale Mindestanteil an Leervolumen mit  $\underline{c}_o^v$  beschrieben. Der Strafterm wird hier anhand mehrerer Parameter definiert, die für das jeweilige Problem angepasst werden müssen. Die in der Optimierung benötigten Gradienten des Strafterms in (4.18) lassen sich analytisch beschreiben und sind im Anhang A.6 zu finden. In Abb. 4.14 sind die Verläufe von  $v_j \cdot (1 - x_j)^{\eta_o}$  sowie der des Strafterms  $S_o^e$  dargestellt.

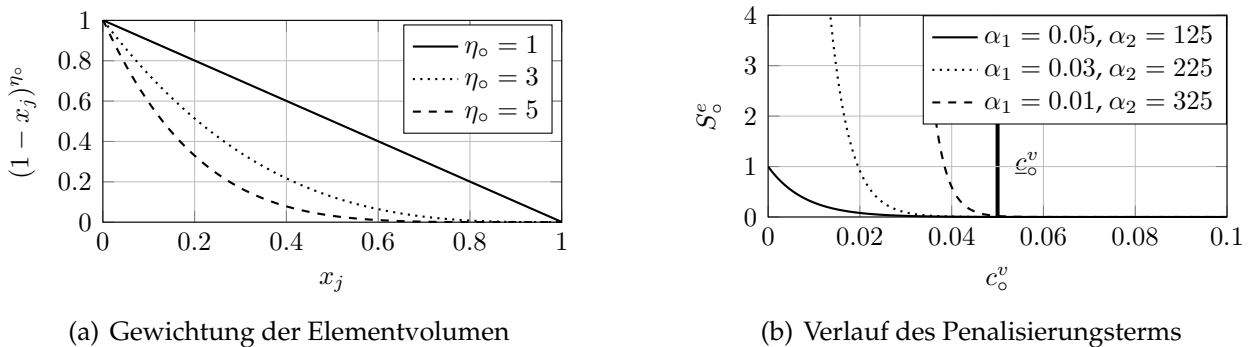
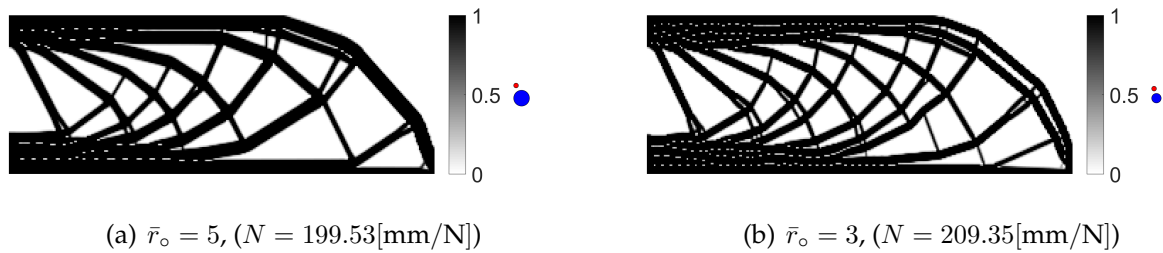


Abbildung 4.14.: Einflüsse auf die Straffunktion

Anhand der beschriebenen Penalisierung wurden die Topologien in Abbildung 4.15 ermittelt. Die Abb. 4.15 zeigt die Auswirkungen der Maximaldurchmessersteuerung, wobei der blaue Kreis neben der Darstellung den Radius  $\bar{r}_o$  hat. Die Materialkonzentrationen, die den vorgegebenen Radius überschreiten, werden offensichtlich aufgeteilt, sodass die Forderung nach einem minimalen Leervolumen um jedes Element eingehalten wird. An der qualitativen Massenverteilung ändert dies im Prinzip nichts, da die aufgeteilten Streben ungefähr gleich positioniert werden. In 4.15(b) zeigt sich der markanteste Unterschied anhand der aufgeteilten zum Lagerpunkt reichenden Strebe, die weiter auseinandergezogen ist. Die Forderung nach einem kleineren Maximaldurchmesser stellt eine stärkere Anforderung an die Struktur dar, was die höhere Nachgiebigkeit im Falle von  $\bar{r}_o = 3$  erklärt.

Abbildung 4.15.: Vorgabe von maximalen Strukturdurchmessern (Auflösung:  $100 \times 300$ )

Wie erwähnt stellen für die additive Fertigung große Strukturdurchmesser keine starke Einschränkung dar. Im Weiteren werden jedoch die Prinzipien des Vorgehens verwendet, um Methoden zur Vermeidung von Überhängen zu entwickeln.

## 4.6 Vermeidung von Bauteilüberhängen in der Topologieoptimierung

Die Vermeidung von flachen Überhängen großer Länge ist aus Sicht der Fertigung mit generativen Verfahren ein lohnendes Ziel. In Abb. 4.16 ist eine Prinzipskizze für den hier verwendeten MBB-Balken abgebildet, der eine mögliche Materialverteilung zeigt, die dieses Kriterium berücksichtigt. Man erkennt, dass an den Überhängen der Grenzwinkel von  $45^\circ$  nicht überschritten wird.



Abbildung 4.16.: Prinzipskizze eines theoretisch idealen Entwurfs

Es werden im Folgenden zunächst Möglichkeiten beschrieben, wie sich die benötigten Systemantworten beschreiben lassen und anschließend werden drei Ansätze präsentiert, die die Ausbildung von zu steilen Überhängen vermeiden sollen.

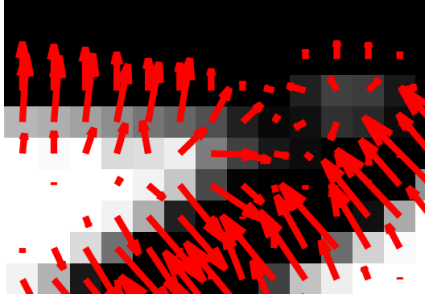
### 4.6.1 Charakterisierung von Überhängen

#### 4.6.1.1 Berechnung des Dichtegradienten

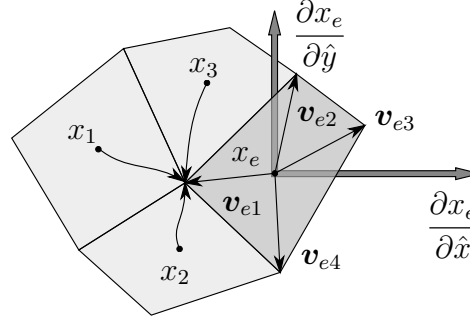
Zunächst müssen Überhänge in Abhängigkeit der Dichteverteilung definiert und mathematisch formuliert werden. Für die Bewertung ist der Gradient der Dichteverteilung die Grundlage. Durch seine Richtung kann die Orientierung des Überhangs bestimmt werden und durch seinen Betrag der Übergangsbereich von gefüllten zu leeren Gebieten detektiert

werden. Dies ist anhand von Abb. 4.17(a) zu sehen, wobei die roten Gradientenvektoren nur an den Strukturkanten relevante Beträge aufweisen.

Die Berechnung des Dichtegradienten  $\nabla x_e$  für ein Element gestaltet sich bei beliebiger Vernetzung schwierig und muss näherungsweise durchgeführt werden. Die Dichten  $x_e$  werden an den Elementmittelpunkten betrachtet, wie es in Abb. 4.17(b) zu erkennen ist.



(a) Dichtegradientenfeld bei regelmäßigem Netz



(b) Berechnung bei unregelmäßigem Netz

Abbildung 4.17.: Dichtegradient der Topologie und Approximationschema

Die Elementmittelpunkte liegen beliebig zueinander, sodass ein konkreter Differenzenvektor  $\Delta \hat{x}$  nicht definiert werden kann. Für die Ermittlung der Gradienten werden für das betreffende Element  $e$  an dessen Knoten die Dichten  $x_{ek}$  berechnet, die sich als Mittelwert der Dichten angrenzender Elemente berechnen:

$$x_{ek} = \frac{1}{n_{el}} \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i \quad \text{für alle Elemente } i \text{ des Knotens } k \quad (4.19)$$

Darin ist  $n_{el}$  die Anzahl der Elemente, die sich den Knoten teilen. Durch Betrachtung der Verbindungsvektoren  $\mathbf{v}_{ek} = [\Delta \hat{x}_{ek}, \Delta \hat{y}_{ek}, \Delta \hat{z}_{ek}]^T$  vom Elementmittelpunkt zu den Elementknoten kann dann nach [21] das Ausgleichsproblem in (4.20) aufgestellt werden.

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_{e1} & \Delta \hat{y}_{e1} & \Delta \hat{z}_{e1} \\ \Delta \hat{x}_{e2} & \Delta \hat{y}_{e2} & \Delta \hat{z}_{e2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta \hat{x}_{en_{kn}} & \Delta \hat{y}_{en_{kn}} & \Delta \hat{z}_{en_{kn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_e / \partial \hat{x} \\ \partial x_e / \partial \hat{y} \\ \partial x_e / \partial \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{e1} - x_e \\ x_{e2} - x_e \\ \vdots \\ x_{en_{kn}} - x_e \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{X}_e \nabla x_e = \mathbf{b}_e(\mathbf{x}) \quad \text{für jedes Element } e$$

Die approximative Berechnung von  $\nabla x_e$  erfolgt dann durch die Berechnung in (4.21).

$$\nabla x_e = (\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e)^{-1} \mathbf{X}_e^T \mathbf{b}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e \mathbf{b}_e(\mathbf{x}) \quad (4.21)$$

Darin lassen sich die Matrizen  $\mathbf{A}_e$  mit den jeweiligen konstanten, geometrischen Größen in einem Initialisierungsschritt berechnen und abspeichern. Der approximierte Gradient  $\nabla x_e$  kann durch Bestimmung von  $\mathbf{b}_e$  und ein einfaches Matrix-Vektorprodukt errechnet werden.

### 4.6.1.2 Überhangneigung

Mit dem eben eingeführten Dichtegradientenfeld lassen sich über das Skalarprodukt in Formel (4.22) die Elemente ausschließen, die zu den nach oben orientierten Strukturkanten gehören ( $|\alpha| \geq \pi/2$  mit dem Winkel  $\alpha$  gegenüber der Baurichtung  $\mathbf{n}_{br}$ ) und für die der Grenzwinkel unterschritten wird ( $|\alpha| < \underline{\alpha}$ ). Siehe dazu Abb. 4.18.

$$\cos(\alpha) = \frac{\nabla x_e^T \mathbf{n}_{br}}{\|\nabla x_e\|} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{n}_{br}\| = 1 \quad (4.22)$$

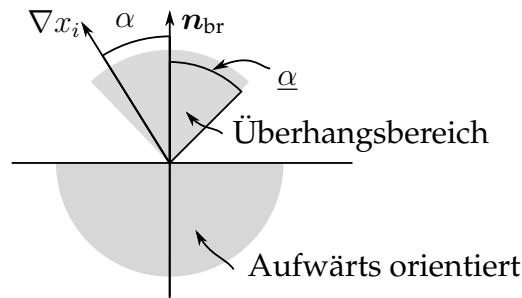


Abbildung 4.18.: Definition von Baurichtung und Grenzbereichen

Dabei kann durch Vorgabe eines Grenzwinkels  $\underline{\alpha}$  bestimmt werden, ab welcher Steigung die Überhänge kritisch sind und in die Betrachtung mit einbezogen werden.

### 4.6.1.3 Überhangbereiche

Als letztes wird noch ein Grenzwert  $\underline{x}$  für die Elementdichten gesetzt, ab dem die Elemente als Struktur angesehen werden. Über die Information zu benachbarten Elementen können dann Elementsets definiert werden, die einen Überhangsbereich bilden. Diese Analyse führt auf die farbigen Bereiche in Abb. 4.19, die auf dem beschriebenen Weg als Überhänge identifiziert wurden.

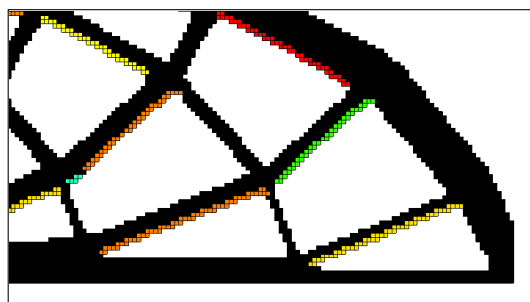


Abbildung 4.19.: Identifizierte Überhänge ( $\|\nabla x\| \geq 0.105$ ,  $\underline{\alpha} = 45^\circ$ ,  $\underline{x} = 0.45$ )

Anhand der Sets lässt sich dann beispielsweise die jeweilige Überhanglänge  $L$  berechnen. Wie der beschriebene Analyseweg zeigt, hängt das Elementset von gemittelten Gradienten ab, die unstetige Größen über den Optimierungsvariablen sind. Dies macht eine analytische

Ableitung von Systemantworten, die auf Grundlage der Sets definiert sind, problematisch. Auch die große Anzahl an Variablen, von denen diese Systemantworten abhängen, verkompliziert den Ableitungsvorgang stark. Daher wurden im Weiteren nur Ansätze verfolgt, die auf lokalen Größen basieren und nicht auf ganzen Sets. [16]

### 4.6.2 Elementbasierter Ansatz

Der erste untersuchte Ansatz geht von einem regelmäßigen Netz würfelförmiger Elemente aus. Die ebene Balkengeometrie wird durch eine Einzelschicht dieser Elemente gebildet. Bei dem Verfahren wird die Stützung für jedes Element durch die bezüglich der Baurichtung darunterliegende Elementreihe berücksichtigt, indem deren Füllgrad betrachtet wird. Dieses Prüfgebiet ist in Abb. 4.20 blau markiert.

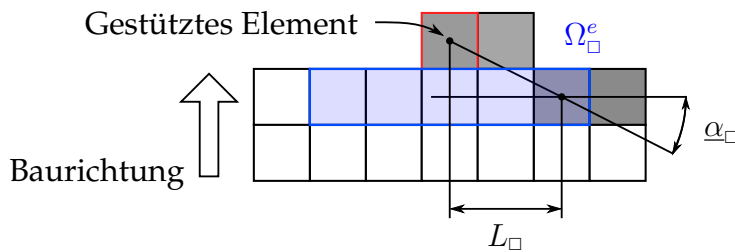


Abbildung 4.20.: Geometrische Situation des elementbasierten Ansatzes

Anders als in Abschnitt 4.5.2 wird hier nicht ein prozentualer Mindestanteil an Leervolumen gefordert, sondern ein Mindestmaß an Füllung des Prüfgebietes. Liegt also der prozentuale Anteil an Leervolumen  $c_{\square}^v$  des Prüfgebietes  $\Omega_{\square}^e$  eines Elementes über einem Schwellenwert  $\bar{c}_{\square}^v$ , so wird die Zielfunktion durch einen Strafterm  $S_{\square}^e$  vergrößert. In Beziehung (4.23) ist der prozentuale Anteil an Leervolumen im Prüfgebiet gegeben.

$$c_{\square}^v(\mathbf{x}) = \frac{V_{\square}^v(\mathbf{x})}{\sum_{i \in \Omega_{\square}^e} v_i} \quad \text{mit} \quad V_{\square}^v = \sum_{i \in \Omega_{\square}^e} v_i (1 - x_i^{\eta_{\square}}) \quad (4.23)$$

Der Strafterm für jedes Element ist in Gleichung (4.24) definiert.

$$S_{\square}^e(\mathbf{x}) = [(1 + \underline{c}_{\square}^v - \alpha_1) c_{\square}^v(\mathbf{x})]^{\alpha_2} \quad (4.24)$$

Dabei ist wichtig, dass sich die Gradienten des Strafterms analytisch beschreiben lassen (siehe Anhang A.7), um die Effizienz bei der Sensitivitätsanalyse sicherzustellen.

In Abb. 4.21 sind die Verläufe von  $c_{\square}^v$  und dem Strafterm  $S_{\square}^e$  gegeben.

Die Erhöhung von  $\eta_{\square}$  bewirkt, dass Elemente mit Zwischendichten weniger zur Befüllung beitragen und somit weniger stützend wirken. Der Parameter wird in den aufeinanderfolgenden äußeren Iterationen der Topologieoptimierung vergrößert.  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  wurden genutzt, um den Penalisierungsterm einzustellen.

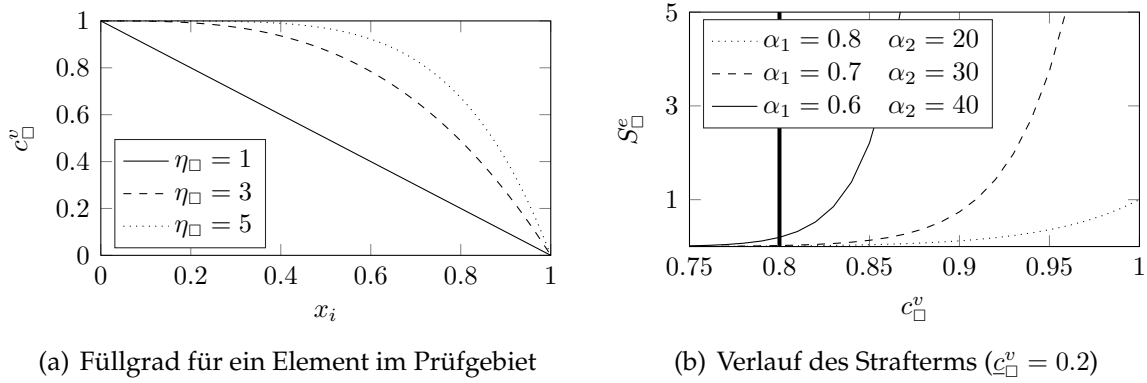


Abbildung 4.21.: Steuerung des Strafterms

Die Ergebnisse bei Anwendung der penalisierten Zielfunktion ist in Abb. 4.22 dargestellt.

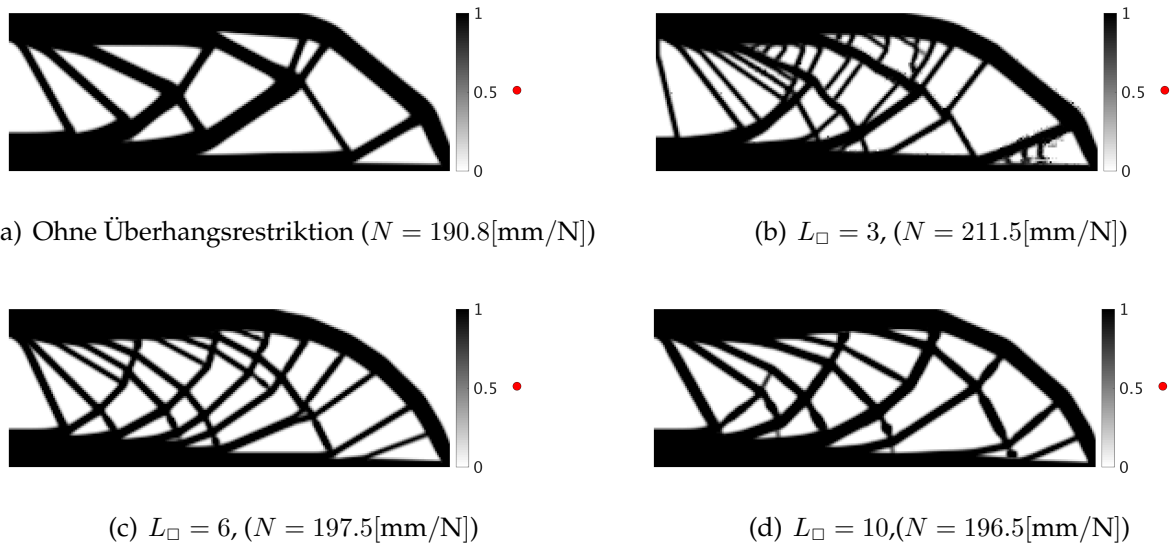
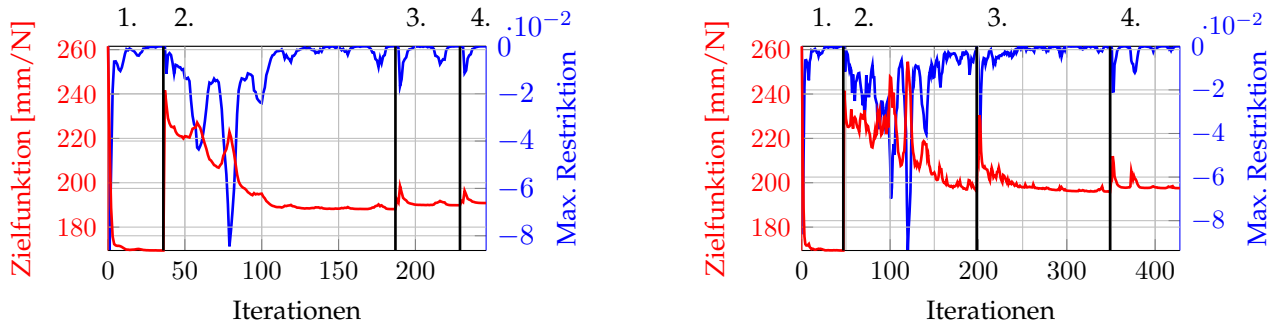


Abbildung 4.22.: Ergebnisse bei verschiedenen Überhanglängen  $L_{\square}$  und Mindestfüllgrad 80% (Filterradius:  $r_{\min} = 2$ , Diskretisierung  $80 \times 240$ )

In dieser Untersuchung wurde die Anzahl an Elementen im Prüfgebiete  $\Omega_{\square}^e$  verändert, sodass verschiedene Überhangwinkel angestrebt werden. Die Vermeidung von Überhängen durch die Selbstabstützung der Struktur wird dabei grundsätzlich erreicht. In Abb. 4.22(b) wird an der Lagerstelle des Balkens deutlich, dass in Bereichen steiler Überhänge möglichst feine Stützstrukturen entstehen. Horizontale Überhänge werden durch Y-förmige Streben abgestützt. In Abb. 4.22(c) sind die Forderungen an die Struktur durch das vergrößerte  $L_{\square}$  geringer, weshalb auch flachere Streben auftreten und die Nachgiebigkeit kleiner ausfällt. Die Struktur weist deutlich geringere Steifigkeitseinbußen auf und kommt der *Michell*-Struktur sehr nahe. Durch die feinere Ausbildung der Streben können mehr davon eingebracht werden und eine bessere Abstützung größerer Überhanglängen erzielt werden. Allerdings werden einige Streben nur bis zu einer bestimmten anderen Strebe geführt, sodass der Kraftfluss abknicken muss. Für  $L_{\square} = 10$  ergab sich die Struktur in Abb. 4.22(d). Hierin

sinkt die Nachgiebigkeit abermals, wobei sich Einschnürungen einzelner Streben zeigen. Die Konvergenz ist für die Optimierung in Abb. 4.22(c) in Abb. 4.23(b) gezeigt und für die Referenzoptimierung in Abb. 4.22(a) in Abb. 4.23(a).



(a) Konvergenz der Referenz in Abb. 4.22(a)

(b) Konvergenz bei Penalisierung in Abb. 4.22(c)

Abbildung 4.23.: Vergleich der Konvergenz ohne und mit Penalisierung

Für Abb. 4.23(b) ist ein oszillierendes Konvergenzverhalten bei gleichzeitig vielen Iterationen zu erkennen. Die Verwendung der Filterung muss also in diesem Fall durch einen circa doppelt so großen numerischen Aufwand erkauft werden. Ein weiteres Problem der Betrachtung eines Prüfbereichs ist, dass unverbundene Elemente die Penalisierung vermeiden können, obwohl keine Stützung besteht. Dies zeichnet sich ansatzweise in Abb. 4.22(b) im Bereich der Lagerung ab.

Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass das Ziel, Überhänge zu vermeiden und selbststützende Strukturen zu generieren mit dem gegebenen Ansatz erreicht werden kann.

### 4.6.3 Kegelförmiges Prüfgebiet

#### 4.6.3.1 Prüfgebiet und Strafterm

Das Verfahren aus Abs. 4.6.2 soll nun weiterentwickelt werden. Dazu wird das Prüfgebiet, das aus einer Elementreihe besteht, modifiziert, um den Ansatz auf unregelmäßige Vernetzungen zu verallgemeinern und gezieltere Einflussnahme auf die Ergebnistopologie zu ermöglichen. Die hier gezeigten Ergebnisse wurden jedoch auf Grundlage eines regelmäßigen Netzes ermittelt, um in der Testphase Effekte besser einschätzen zu können.

Das Prüfgebiet  $\Omega_{\Delta}^e$ , das von Gaynor [39] übernommen wurde, wird im zweidimensionalen Fall gemäß Abb. 4.24 gewählt und ist im dreidimensionalen Fall kegelförmig. Wie in Abschnitt 4.6.2 wird eine Penalisierung für den Fall vorgenommen, dass nicht ausreichend Masse zur Stützung von Elementen im Prüfgebiet vorliegt.



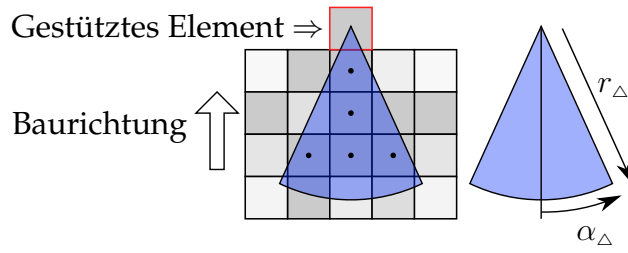


Abbildung 4.24.: Kegelförmiger Prüfbereich

Die Zielfunktion, die sich aus der Nachgiebigkeit und den Straftermen zusammensetzt, ist in Gleichung (4.25) angegeben.

$$z(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) + k_\Delta S_\Delta(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) + k_\Delta \sum_{i=1}^{n_{el}} S_\Delta^e(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

Hierin wird die Summe mit  $k_\Delta$  gewichtet, um den Strafterm auf die Nachgiebigkeit abzustimmen. Der Penalisierungsterm  $S_\Delta^e$  für das jeweilige Element wurde anders als in Abschnitt 4.6.2 gewählt und ist in (4.26) formuliert.

$$S_\Delta^e(\mathbf{x}) = S_{\Delta x}^e(\mathbf{x}) \cdot S_{\Delta p}^e(\mathbf{x}) = (x_i - x_{\min})^q \cdot [1 - \phi_\Delta^e(\mathbf{x})] \quad (4.26)$$

Darin wird durch  $S_{\Delta x}^e$  berücksichtigt, dass Elemente mit geringer Dichte auch keine Stützung benötigen. Durch  $S_{\Delta p}^e$  erfolgt die Bewertung der im Prüfgebiet vorliegenden Masse. Dieser Term hängt von der Funktion  $\phi_\Delta^e$  ab, die in (4.27) definiert ist.

$$\phi_\Delta^e(\mathbf{x}) = \frac{\tanh(\beta_\Delta T_\Delta) + \tanh(\beta_\Delta (c_\Delta^s(\mathbf{x}) - T_\Delta))}{\tanh(\beta_\Delta T_\Delta) + \tanh(\beta_\Delta (1 - T_\Delta))} \quad (4.27)$$

Darin wird der prozentuale Anteil befüllten Volumens  $c_\Delta^s$  in Abhängigkeit vom Abstand zum stützenden Element berechnet. Der Zusammenhang ist in (4.28) beschrieben, wobei  $\text{dist}(i, j)$  den Abstand zwischen dem stützenden Element  $j$  und dem zu stützenden Element  $i$  bedeutet. Durch die Gewichtung wird Masse stärker bewertet, die sich nah am abgestützten Element befindet.

$$c_\Delta^s(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j \in \Omega_\Delta^e} v_j \hat{H}_{ij}^s x_j^{n_\Delta}}{\sum_{j \in \Omega_\Delta^e} v_j \hat{H}_{ij}^s} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_{ij}^s = \begin{cases} r_\Delta - \text{dist}(i, j) & \text{falls } \text{dist}(i, j) \leq r_\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.28)$$

Der Straftermanteil  $S_{\Delta p}^e$  ist in Abb. 4.25 dargestellt. Darin wird der Verlauf der kontinuierlichen Stufenfunktion im Bereich von  $T_\Delta$  deutlich, die durch den Parameter  $\beta_\Delta$  gesteuert wird. Die Ableitungen für die beschriebene Funktion sind im Anhang A.8 zu finden. Der Vorteil dieser Funktion gegenüber der Formulierung in (4.24) besteht darin, dass sich der Schwellenwert  $T_\Delta$  einfach einstellen lässt, ohne einen ganzen Satz von Parametern neu einzustellen. Der Nachteil ist die annähernde Gleichgewichtung von sehr großen Überschreitungen des Grenzwertes, da die Kurve ein Sättigungsverhalten aufweist.

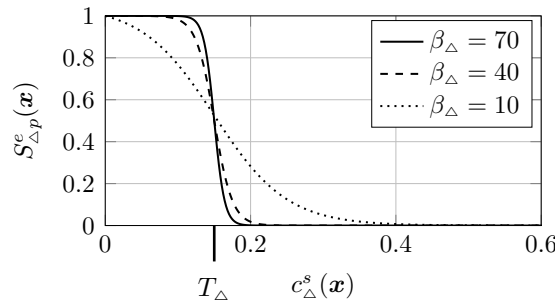


Abbildung 4.25.:  $S_{\Delta p}^e(\mathbf{x})$  zur Penalisierung einer unzureichenden Stützung ( $T_{\Delta} = 0.15$ )

Enthält das Prüfgebiet  $\Omega_{\Delta}^e$ , das von  $r_{\Delta}$  und  $\beta_{\Delta}$  abhängt, viele Elemente, dann kann der Aufwand bei der Berechnung der Gradienten stark ansteigen, obwohl analytische Beschreibungen zur Verfügung stehen.

#### 4.6.3.2 Ergebnisse und Diskussion

Mit dem beschriebenen Vorgehen wurden die Ergebnisse in Abb. 4.26 erzielt.

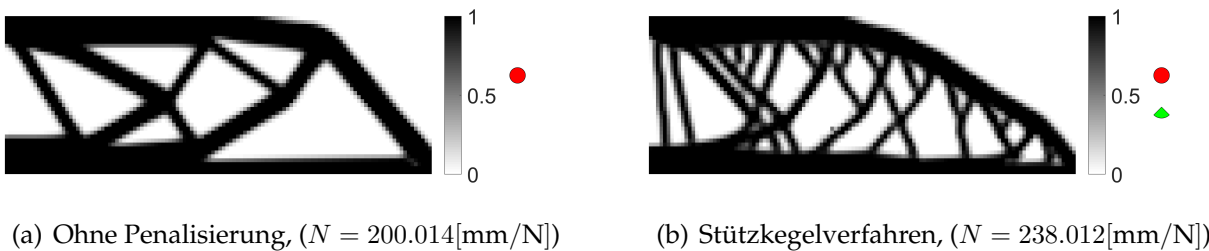


Abbildung 4.26.: Ergebnistopologie bei Stützkegelverfahren (Diskretisierung  $120 \times 40$ )

Durch den grünen Kegel neben der Abb. 4.26(b) ist die Dimension des Prüfgebietes erkennbar. Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Das Ergebnis wurde ohne Abstandsgewichtung ermittelt.

Tabelle 4.1.: Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.26(b)

Geometrie $\Omega_{\Delta}^e$		Parameter Top. Opt.		Parameter von $S_{\Delta}^e$			
$r_{\Delta}$	$\alpha_{\Delta}$	$p$	$r_{\min}$	$\beta_{\Delta}$	$T_{\Delta}$	$\eta_{\Delta}$	$k_{\Delta}$
$2\sqrt{2}mm$	$45^{\circ}$	2, 3, 4, 5	$2mm$	10	0.138	2, 3, 4, 5	0.25

Es bilden sich Y-förmige Tragstrukturen, die größere Überhänge abstützen. Die grundsätzliche Verstrebung weist *Michell*-strukturähnlichen Charakter auf. Auffallend ist, dass die Oberkante des Trägers über einen weiteren Bereich abfällt und so die langen horizontalen Bereiche vermieden werden, die in Abb. 4.26(a) zu erkennen sind.

Wichtig ist bei der Bewertung des Vorgehens nicht nur die Ergebnistopologie, sondern auch die numerische Effizienz, die hier anhand des Konvergenzverlaufs in Abb. 4.27 diskutiert werden soll.

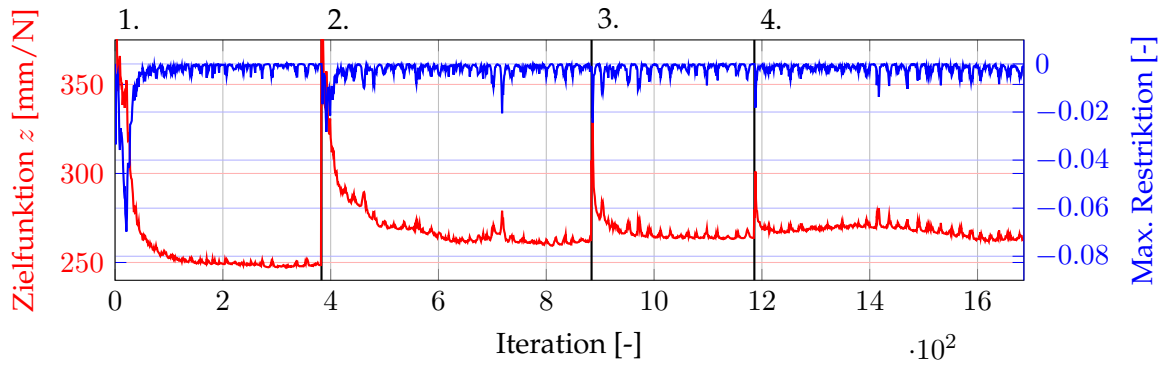


Abbildung 4.27.: Konvergenzverlauf während der Optimierung von 4.26(b)

Wie zu erkennen steigt die benötigte Anzahl an Iterationen und damit der Rechenaufwand drastisch an. Dies liegt vor allem daran, dass das Konvergenzkriterium wegen des oszillierenden Verlaufs der Zielfunktion nicht aktiviert wird und teils die maximale vorgegebene Anzahl an Iterationen gerechnet wird. Eine Vergrößerung der Toleranz brachte keine Vorteile, da dies wiederum die Qualität der Ergebnistopologie verschlechterte.

Für eine nähere Betrachtung der Schwankungen wurden die Verläufe von Nachgiebigkeit  $N$  und Strafterm  $S_{\Delta}^e$  getrennt betrachtet. In Abb. 4.28 sind die beiden Größen über den Iterationen gegenübergestellt.

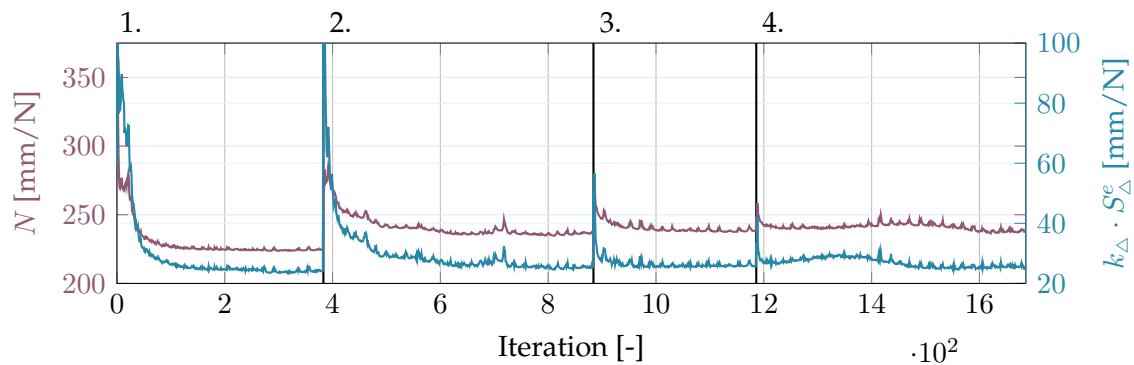


Abbildung 4.28.: Nachgiebigkeit  $N$  sowie Strafterm  $k_{\Delta} \cdot S_{\Delta}^e$

Dabei ist nicht zu erkennen, von welcher der beiden Funktionen die Störung ausgeht. Es ist zu vermuten, dass sich die beiden Funktionen gegenseitig beeinflussen, da sie über den Gradienten im Optimierungsprozess gekoppelt sind. Die Dämpfung der genannten Störungen wäre vermutlich ein wichtiger Schritt, um die Effizienz des Vorgehens zu steigern. Der Vergleich der Rechenzeiten für die Ergebnisse in Abb. 4.26(a) und Abb. 4.26(b) zeigt eine Steigerung der Dauer um das sechsfache.

Im Weiteren werden noch die Einflüsse ausgewählter Parameter untersucht. In Abb. 4.29 sind zwei weitere *Pareto*-Lösungen der Zweizieloptimierung gezeigt. Dabei wurden die Gewichtungen  $k_{\Delta} = 0.125$  und  $k_{\Delta} = 0.1875$  verwendet, die also die Strafterme niedriger gewichtet als in der zuerst gezeigten Untersuchung in Abb. 4.26(b). Die weiteren Parameter sind in Tabelle 4.2 angegeben.

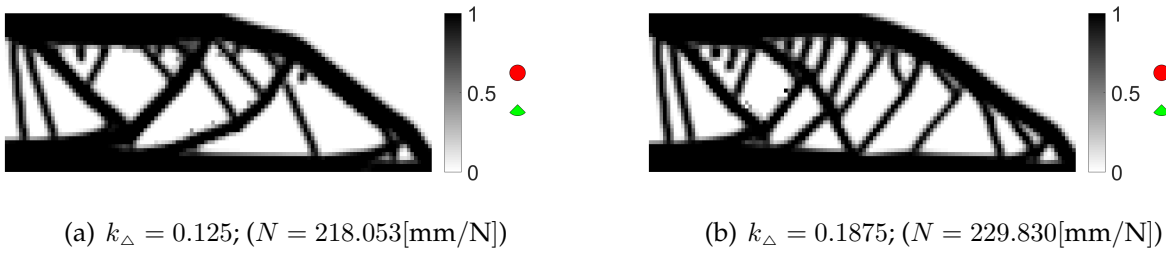


Abbildung 4.29.: Einfluss unterschiedlicher Gewichtungen  $k_{\Delta}$

Die Verringerung der Gewichtung führt zu einer Erhöhung der Struktursteifigkeit. Zum anderen treten allerdings auch vermehrt Streben auf, die nur einseitig mit der Struktur verbunden sind und somit keine Kraftleitung gewährleisten können. Dadurch geht Material verloren, das weder dem Erreichen einer niedrigen Nachgiebigkeit noch einer Stützung dient und somit unbedingt einzusparen ist.

Tabelle 4.2.: Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.29

Geometrie $\Omega_{\Delta}^e$		Parameter Top. Opt.		Parameter von $S_{\Delta}^e$			
$r_{\Delta}$	$\alpha_{\Delta}$	$p$	$r_{\min}$	$\beta_{\Delta}$	$T_{\Delta}$	$\eta_{\Delta}$	$k_{\Delta}$
$2\sqrt{2}mm$	$45^{\circ}$	2, 3, 4, 5	$2mm$	10	0.138	2, 3, 4, 5	variiert

Der Einfluss der Stufenfunktion des Strafterms wurde durch die Variation von  $\beta_{\Delta}$  untersucht. Die Ergebnisse dieser Studie sind in Abb. 4.30 dargestellt, wobei der Parameter niedriger gewählt wurde als bei der Optimierung in Abb. 4.26(b). Die Parameterkonfiguration der Optimierung ist in Tabelle 4.3 gegeben.

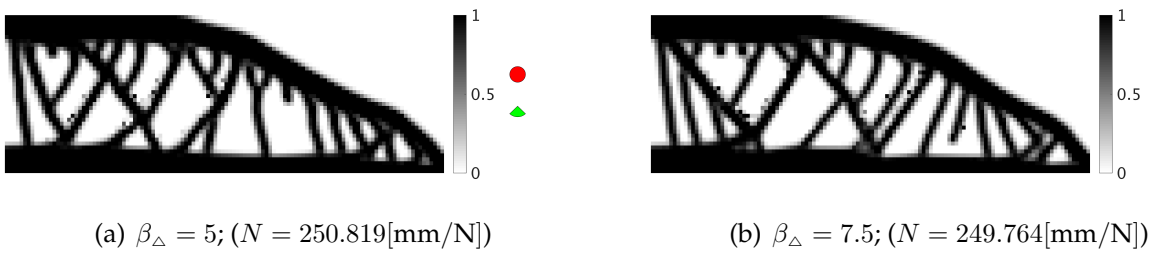


Abbildung 4.30.: Einfluss von  $\beta_{\Delta}$  (Diskretisierung: 120x40)

Es ergeben sich annähernd gleiche Nachgiebigkeiten und die Ergebnistopologien sind qualitativ sehr ähnlich. Gegenüber der Referenz in Abb. 4.26(b) sind diese Ergebnisse als schlechter zu bewerten, da auch hier wieder freistehende Streben auftreten.

Tabelle 4.3.: Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.30

Geometrie $\Omega_{\Delta}^e$		Parameter Top. Opt.		Parameter von $S_{\Delta}^e$			
$r_{\Delta}$	$\alpha_{\Delta}$	$p$	$r_{\min}$	$\beta_{\Delta}$	$T_{\Delta}$	$\eta_{\Delta}$	$k_{\Delta}$
$2\sqrt{2}mm$	$45^{\circ}$	1, 2, 3, 4, 5	$2mm$	variiert	0.138	1, 2, 3, 4, 5	0.25

## 4.6.4 Dichtegradientenbasiertes Penalisierungsverfahren

### 4.6.4.1 Gradienten und Strafterm

Die bisherigen Untersuchungen basierten auf den Dichtewerten der Elemente und deren Massenbeitrag in einem Prüfgebiet. Ein weiterer Ansatz verwendet den Gradienten der Dichteverteilung aus Abschnitt 4.6.1.1, um wieder anhand einer Penalisierung eine Vermeidung von Überhängen zu erzielen. Die geometrischen Zusammenhänge dabei sind in Abb. 4.31 dargestellt.

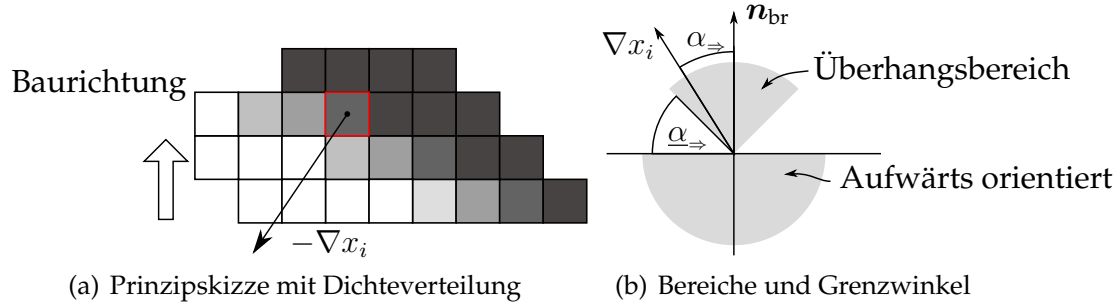


Abbildung 4.31.: Geometrische Situation des gradientenbasierten Ansatzes

Die Berechnung des Dichtegradienten in Abschnitt 4.6.1.1 führt dazu, dass es lokal zu starken Änderungen der Vektoren  $\nabla x$  von angrenzenden Elementen kommt. Da dies die Optimierung destabilisierte, wurde das Gradientenfeld zunächst gefiltert, um weichere Übergänge und eine Stabilisierung der Konvergenz zu erzielen. Diese Filterung erfolgte ähnlich der aus Abschnitt 4.4.4.1 zur Filterung der Gradientenvektoren  $\partial z / \partial x_i$  nach den Optimierungsvariablen. In Beziehung (4.29) ist das Filterungsschema zu erkennen.

$$\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e(\mathbf{x}) = \frac{\sum_j \hat{H}_{ej}^g \nabla x_j}{\sum_j \hat{H}_{ej}^g} \quad \hat{H}_{ej}^g = \begin{cases} \bar{r}_{\Rightarrow} - \text{dist}(e, j) & \text{falls } \text{dist}(e, j) \leq \bar{r}_{\Rightarrow} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.29)$$

Darin erfolgt mittels  $\hat{H}_{ej}^g$  eine Gewichtung des Abstandes vom betrachteten Element  $e$  zu den Elementen  $j$  in der kreisförmigen Umgebung mit Radius  $\bar{r}_{\Rightarrow}$ . Neben den positiven Effekten dieses Vorgehens verkompliziert es die Berechnung der Gradienten. In Abb. 4.32 ist ein Gradientenfeld vor und nach der Filterung dargestellt. Der Winkel  $\alpha_{\Rightarrow}$  wird von der Baurichtung und dem Gradientenvektor eingeschlossen und ist in (4.30) formelmäßig beschrieben.

$$\alpha_{\Rightarrow}(\mathbf{x}) = \arccos \left( \frac{\mathbf{g}_{\Rightarrow}^T \mathbf{n}_{\text{br}}}{\|\mathbf{g}_{\Rightarrow}\| \|\mathbf{n}_{\text{br}}\|} \right) \quad (4.30)$$

Anhand des Winkels soll die Penalisierung definiert werden, wozu die Formulierung (4.31) definiert wurde.

$$c_{\Rightarrow}(\mathbf{x}) = \frac{1 - \cos(\alpha_{\Rightarrow}(\mathbf{x}))}{2} \quad (4.31)$$

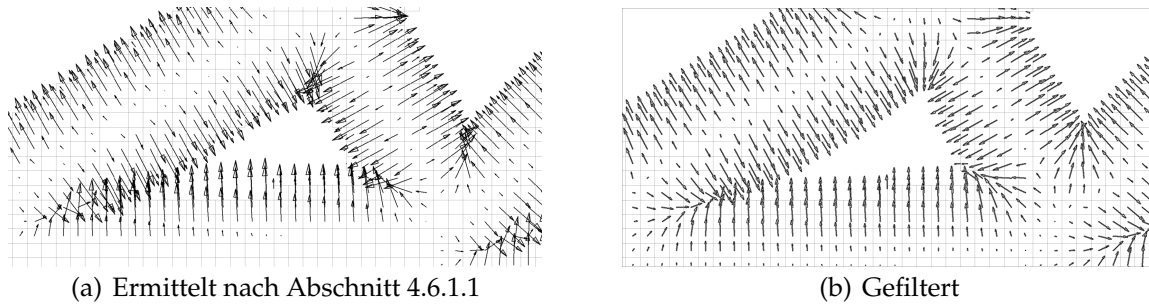


Abbildung 4.32.: Vergleich des gefilterten mit dem ungefilterten Gradientenfeld

Der Wertebereich von  $c_{\Rightarrow}$  ist  $[0, 1]$  und somit durchgehend positiv, wodurch die Definition des Penalisierungsterms (4.32) erleichtert wird. Der Verlauf von  $c_{\Rightarrow}$  ist in Abb. 4.33(a) zu sehen.

Die penalisierte Zielfunktion hat wieder die Form (4.16), wobei die elementspezifischen Strafterme in Gleichung (4.32) gegeben sind.

$$S_{\Rightarrow}^e(\mathbf{x}) = S_{\Rightarrow l}^e(\mathbf{x}) \cdot S_{\Rightarrow d}^e(\mathbf{x}) = \|\mathbf{g}_{\Rightarrow}(\mathbf{x})\|^{\eta_{\Rightarrow}} \cdot [1 - \phi_{\Rightarrow}^e(\mathbf{x})] \tag{4.32}$$

Hierin wird durch  $S_{\Rightarrow l}^e$  der Betrag des Gradienten berücksichtigt, um nur Elemente an Strukturkanten zu penalisieren. Der Term  $S_{\Rightarrow d}^e$  bestraft Elemente, bei denen der Gradient einen Überhang beschreibt. Die Gradienten des Penalisierungsterms können analytisch angegeben werden und sind im Anhang A.9 ausformuliert.

Die Funktion  $\phi_{\Rightarrow}^e$  ist in (4.33) definiert und beschreibt die gleiche, angenäherte Stufenfunktion wie in Abschnitt 4.6.3.

$$\phi_{\Rightarrow}^e(\mathbf{x}) = \frac{\tanh(\beta_{\Rightarrow} T_{\Rightarrow}) + \tanh(\beta_{\Rightarrow}(c_{\Rightarrow}(\mathbf{x}) - T_{\Rightarrow}))}{\tanh(\beta_{\Rightarrow} T_{\Rightarrow}) + \tanh(\beta_{\Rightarrow}(1 - T_{\Rightarrow}))} \tag{4.33}$$

Der Grenzwert für den minimal zulässigen Winkel  $\alpha_{\Rightarrow}$  muss wegen der Definition von  $c_{\Rightarrow}$  in (4.31) gemäß (4.34) erfolgen.

$$T_{\Rightarrow} = \frac{1 - \cos(\alpha_{\Rightarrow})}{2} \tag{4.34}$$

Für den richtungsabhängigen Strafterm ist in Abb. 4.33 der Verlauf über dem Winkel  $\alpha_{\Rightarrow}$  für verschiedene Werte  $\beta_{\Rightarrow}$  gezeigt.

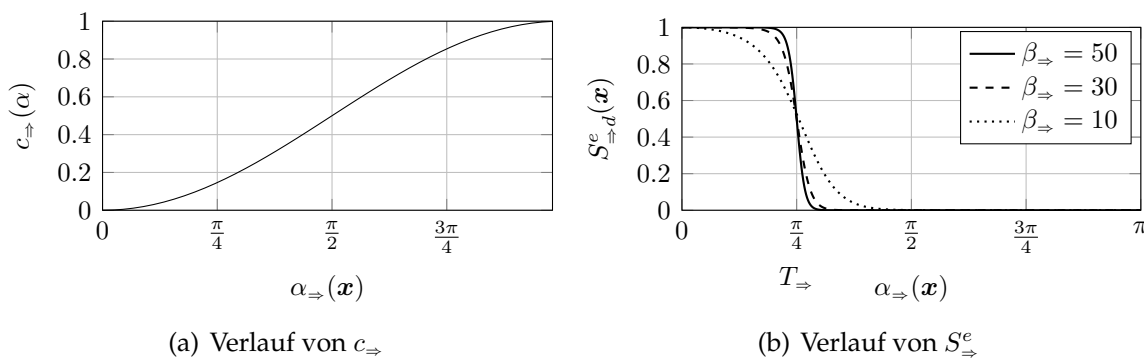


Abbildung 4.33.: Funktionen zur Definition des Strafterms

### 4.6.4.2 Ergebnisse und Diskussion

Die Anwendung der beschriebenen Methode führte auf die Topologie in Abb. 4.34(b). Für die erfolgreiche Anwendung waren viele Versuchsläufe notwendig, um eine zielführende Parameterkonfiguration zu finden. Die Parameterkonfiguration für die Ergebnisse findet sich in Tabelle 4.4. Neben der Abbildung ist durch den grünen Kreis der Filterungsbereich für das Gradientenfeld nach Gleichung (4.29) gezeigt.

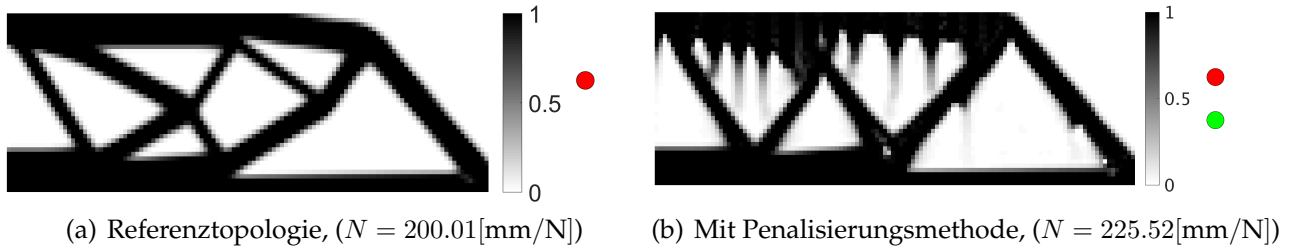


Abbildung 4.34.: Topologien ohne und mit Penalisierung, (Diskretisierung:  $120 \times 40$ )

Das Ergebnis zeigt zum einen eine Fachwerkstruktur aus Trägern, deren Neigung dem Grenzwinkel  $\alpha_{\Rightarrow}$  entspricht. Ungünstigerweise bilden sich jedoch viele Stützstreben aus, deren Dichte ausläuft, also von schwarz über grau nach weiß. Diese Streben können weder Kräfte ableiten noch die Struktur stützen und sind somit wirkungslos. Der Effekt ergibt sich aus dem Sachverhalt, dass durch das leichte Auslaufen der Gradientenbetrag herabgesetzt wird und damit der Strafterm fällt.

Tabelle 4.4.: Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.34(b)

Grenzwinkel	Parameter Top. Opt.		Parameter der Penalisierung			
	$p$	$r_{\min}$	$\beta_{\Rightarrow}$	$\eta_{\Rightarrow}$	$k_{\Rightarrow}$	$r_{\Rightarrow}$
$45^\circ$	2, 3, 4, 5	2mm	10	0.5, 0.5, 0.5, 0.5	0.5	2mm

Auch für dieses Verfahren wird die Effizienz anhand des Konvergenzverlaufs, der in Abb. 4.35 gezeigt ist, diskutiert.

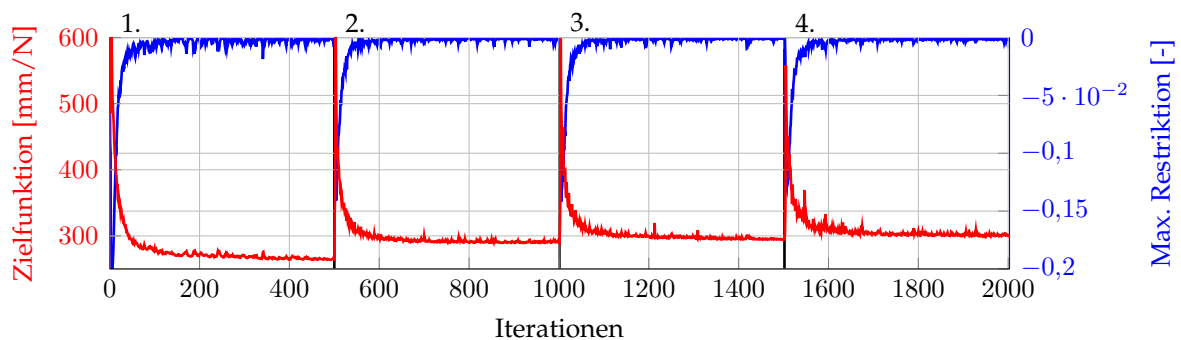


Abbildung 4.35.: Konvergenzverhalten der Optimierung in Abb. 4.34(b)

Jede innere Iteration erreicht hierbei die volle Anzahl der 500 maximal zulässigen Iteratio-

nen und konvergiert nicht im Sinne der Konvergenztoleranz  $t_z$ . Es besteht dabei das gleiche Problem wie bei der Optimierung in Abschnitt 4.6.3, dass sich kleine Oszillationen der Nachgiebigkeit und des Strafterms ergeben. Die beiden Größen sind in Abb. 4.36 aufgetragen und verhalten sich qualitativ gleich. Dadurch wird die Feststellung der Konvergenz verhindert, obwohl die beiden Verläufe von ihrer Tendenz her konvergieren.

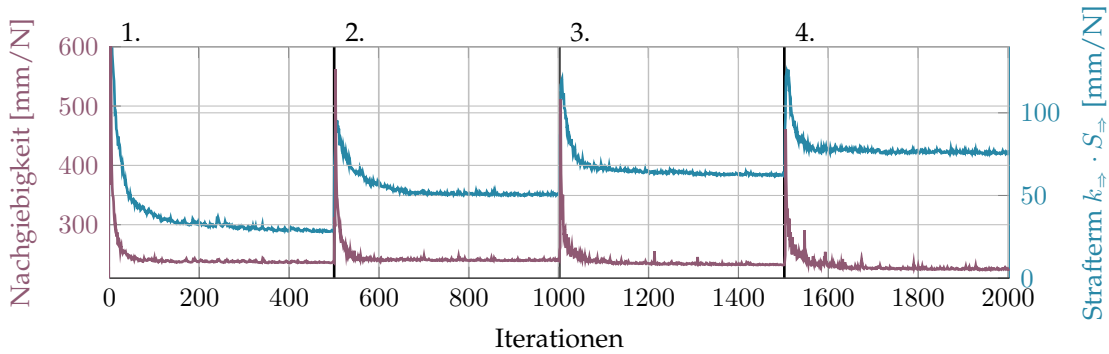


Abbildung 4.36.: Nachgiebigkeit  $N$  und Strafterm  $k_{\rightarrow} S_{\rightarrow}$

In Abbildung 4.37 ist die Auswirkung einer stärkeren Gewichtung des Strafterms  $S_{\rightarrow}^e$  für das Beispielmmodell dargestellt.

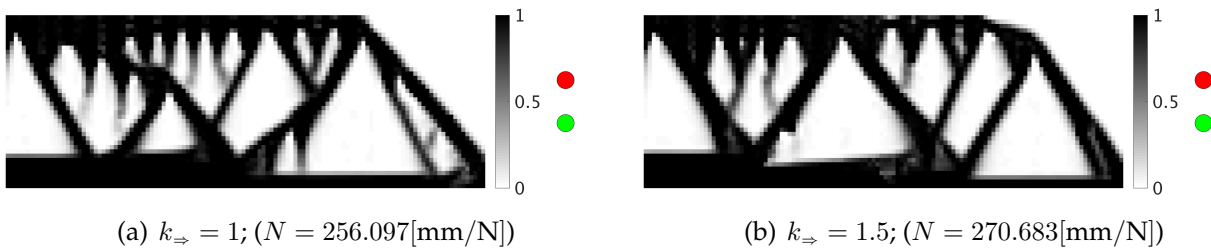


Abbildung 4.37.: Topologien bei höherer Gewichtung des Strafterm durch  $k_{\rightarrow}$

Es ist zu erkennen, dass die Tendenz zur Einhaltung des Grenzwinkels erwartungsgemäß zunimmt, je höher  $k_{\rightarrow}$  gewählt wird. Einhergehend damit steigt entsprechend die Nachgiebigkeit an. Auffallend hierbei ist die zunehmende Tendenz, die auslaufenden Streben zu verbinden. In Abb. 4.37(b) sind dadurch fast alle Streben angebunden.

Um den Einfluss weiterer wichtiger Parameter abzuschätzen wurden die Werte  $\beta_{\rightarrow}$  (Abb. 4.38),  $\eta_{\rightarrow}$  (Abb. 4.38) und  $r_{\rightarrow}$  (Abb. 4.38) variiert.

Die Ergebnisse für die Variation von  $\beta_{\rightarrow}$  sind in Abb. 4.38 abgebildet. Durch die Erhöhung von  $\beta_{\rightarrow}$  wird der Übergang der Stufenfunktion, durch die die Befüllung des Prüfgebietes bewertet wird, steiler (vgl. Abb. 4.33(b)) und die Penalisierung steigt im Bereich des Grenzwinkels  $\underline{\alpha}_{\rightarrow}$  schneller an. Hierbei fällt die global gesehen deutlich unterschiedlich ausfallende Struktur in Abb. 4.38(b) auf, sowie eine Erhöhung der Steifigkeit der Struktur. Gleichzeitig werden hier teilweise die horizontalen Überhänge überhaupt nicht verhindert, wie am oberen Rand erkennbar.

Das Problem besteht scheinbar darin, dass durch die wirkungslosen, auslaufenden Streben die Überhänge aus Sicht der Penalisierungsformulierung sehr gut verhindert, beziehungs-



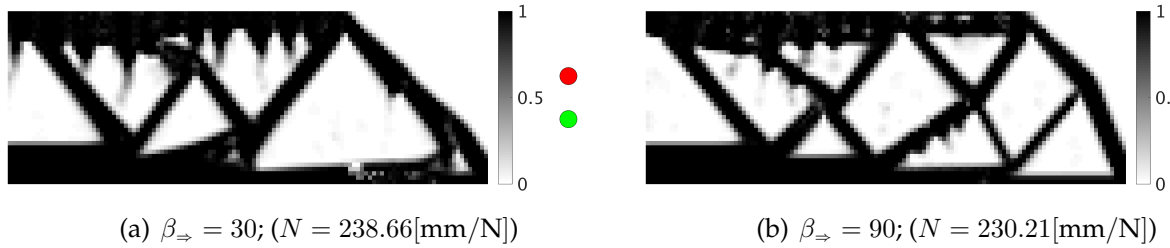


Abbildung 4.38.: Topologien bei Variation von  $\beta_{\rightarrow}$

weise abgestützt werden. Dies ist natürlich aus mechanischer und aus Fertigungssicht nicht gegeben, weshalb die Penaliserungsformulierung hier klare Schwächen aufweist. In Abb. 4.39 wurde die Gewichtung der Gradientenlänge, die durch den Strafterm  $S_{\rightarrow}^e$  einfließt, variiert. Bei Erhöhung von  $\eta_{\rightarrow}$  werden die Gradienten auf den Strukturkanten stärker bewertet und der Straftermwert steigt generell an.

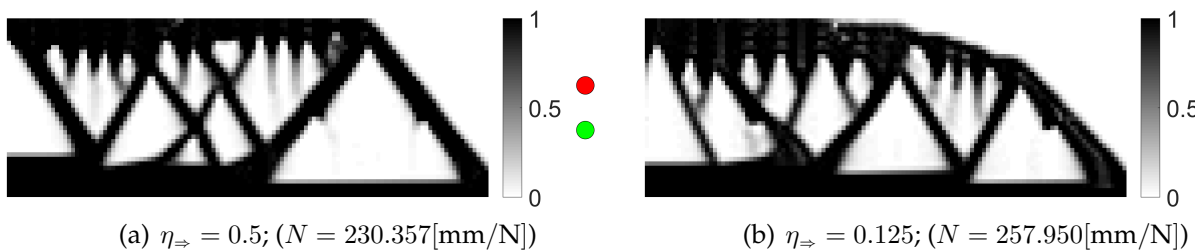


Abbildung 4.39.: Topologien bei Variation von  $\eta_{\rightarrow}$

Auch für diese Parameterkonfiguration ergeben sich die auslaufenden Strukturen, durch die die Überhänge abgestützt werden sollen. Die Streben der Fachwerkstruktur in Abb. 4.39(a) weisen relativ steile Winkel auf, wie dies aus Fertigungssicht gewünscht ist. Für den Fall in Abb. 4.39(b) fallen zum einen die Graubereiche innerhalb der Trägerelemente auf, zum anderen wird die Struktur flacher. Aus diesen Ergebnissen lässt sich ableiten, dass höhere Werte von  $\eta_{\rightarrow}$  einen positiven Einfluss haben und entsprechend eingestellt werden sollten. In Abb. 4.40 ist der Einfluss der in Beziehung (4.29) beschriebenen Filterung der Dichtegradienten  $\nabla x$  zu erkennen. Die Vergrößerung des Filterradius  $r_{\rightarrow}$  wirkt sich erheblich auf den Berechnungsaufwand aus, da mehr Elemente bei der Mittelung berücksichtigt werden.

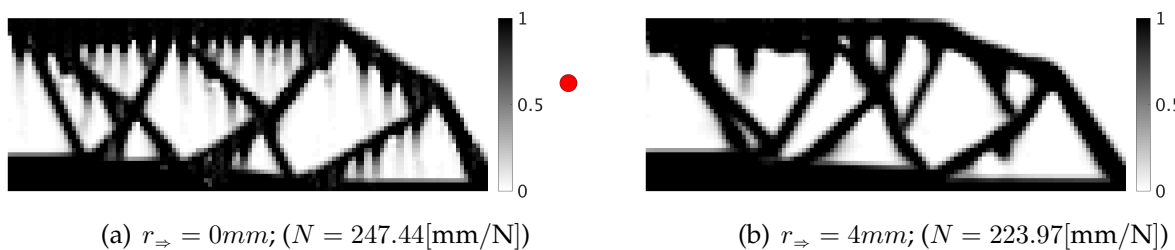


Abbildung 4.40.: Topologien bei Variation von  $r_{\rightarrow}$

Der vergrößerte Filterradius für das Dichtegradientenfeld, der in Abb. 4.40(b) Anwendung gefunden hat, verhindert zwar die feinen Streben aus Abb. 4.40(a), kann aber offensichtlich das Problem der auslaufenden Streben auch nicht verhindern.

### 4.7 Vergleich der untersuchten Lösungsansätze und Ausblick

Eingangs von Kapitel 4.4.4 wurden zunächst umfassend die Besonderheiten und Randbedingungen der Topologieoptimierungsaufgabe, wie beispielsweise notwendige Filterungen und Lösungsstrategien, vorgestellt. Für die Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen wurden Methoden entwickelt, die auf der Penalisierung der Zielfunktion beruhen, wodurch ein Mehrzieloptimierungsproblem zu lösen ist. Es wurden weitere Möglichkeiten zur Beschreibung und Identifikation von Überhangbereichen der Topologie aufgezeigt, die auf dem Gradienten der Dichteverteilung im Bauraum basieren. Dabei wurden Approximationsvorgehen für die Berechnung dieser Gradienten auch bei unregelmäßigem FE-Netz diskutiert. Schließlich wurden drei Herangehensweisen entwickelt und untersucht, durch die Überhänge in Ergebnistopologien vermieden werden können.

Die Ergebnisse der drei implementierten Ansätze führten zu teils stark unterschiedlichen Ergebnistopologien und Konvergenzeigenschaften. Trotz der identifizierten Probleme der Verfahren zeigen die Resultate, dass die gewählten Ansätze prinzipiell funktionieren. Wie in Abb. 4.22(c) zu erkennen, bilden sich deutlich feinere Strukturen, die dadurch Überhänge besser abstützen können. In Abb. 4.26(b) sind viele nach oben orientierte y-förmige Streben zu erkennen, wodurch die Überhänge abgestützt werden können. Dies entspricht weitgehend dem Stützprinzip in Abb. 4.16, welches eingangs als mögliche Lösung der Überhangproblematik gezeigt wurde. Die Prüfgebietverfahren in Abschnitt 4.6.2 und 4.6.3 erwiesen sich als robuster und zielführender als der Ansatz in Abschnitt 4.6.4, bei dem der Dichtegradient penalisiert wird.

Der Kompromiss, der durch die Mehrzieloptimierung auf Grund des Penalisierungsvorgehens eingegangen werden muss, berücksichtigt das mechanische Verhalten und die günstige Fertigbarkeit. Die Untersuchungen zeigten die Wechselwirkung der verschiedenen Zielvorgaben. Die teils großen Unterschiede der Ergebnisse verdeutlichen, dass die Steuerung dieses Kompromisses von elementarer Bedeutung ist, da nicht nur der Gewichtungsfaktor der Mehrzieloptimierung eine Rolle spielt, sondern sich auch entscheidende Wechselwirkungen mit anderen Parametern des Strafterms ergeben.

Für die Weiterentwicklung des Zusammenspiels von Topologieoptimierung und additiver Fertigung, ist die Berücksichtigung von Überhanglängen ein wichtiger Schritt. Dazu kann das Verfahren in Abschnitt 4.6.1 verwendet werden, das in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt werden konnte. Ferner dürfte es von Interesse sein, die Baurichtung als Optimierungsvariable zu betrachten. Diese Optimierung könnte einer normalen Topologieoptimierung folgen und Hinweise für die Positionierung des Bauteils in der Fertigungsanlage geben. Auch für diese Optimierungsaufgabe kann die Überhangdetektion in Abschnitt 4.6.1 helfen. Das Vorgehen hat den Vorteil, dass die aus mechanischer Sicht beste Topologie gefertigt würde. Aus Fertigungssicht hingegen wäre nicht sichergestellt, dass Überhänge generell vermieden würden. Es muss also abgewogen werden, wie wichtig die völlige Vermeidung von Überhängen ist.

Für die beiden letzten vorgestellten Vorgehen anhand eines kegelförmigen Prüfgebietes und mittels des Dichtegradienten wurden Stufenfunktionen für die Penalisierung gewählt. Diese sind leichter bezüglich des angestrebten Grenzwertes für den Überhangwinkel zu definieren, weisen aber auch Nachteile auf. Die bisherigen Erfahrungen bei der Optimierung lassen vermuten, dass eine andere Wahl der Straffunktion zu einer Verbesserung der Konvergenz der Optimierung führt.

# Optimierungsmethodik für die Fahrzeugstruktur des Elektrofahrzeugs

## *VisioM*

Wie in Abschnitt 1.3 erwähnt, ergeben sich bei der praktischen Anwendung der Optimierung oft Herausforderungen, die erheblichen Einfluss auf die Durchführung und limitierenden Charakter für die Optimierung haben. Derartige Hemmnisse entspringen beispielsweise dem Grad der Abstraktion in der Modellierung der Realität, begrenzten Rechenkapazitäten oder auch der Dynamik des Informationsstandes und des Lastenheftes während des Projektverlaufs. Die Aufdeckung solcher Problematiken und die Erweiterung von Methoden zu deren Lösung und einer erfolgreichen Durchführung der Optimierung erfolgte im Rahmen des Projektes *VisioM*.

Das Projekt, geleitet vom Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik und der *BMW Group*, zielte auf die Entwicklung einer zukunftsweisenden Studie für ein elektrisch angetriebenes Fahrzeug für den urbanen Raum. Der Fokus lag darauf, ein möglichst seriennahes Konzeptfahrzeug zu konstruieren, auszulegen und zu bauen, anhand dessen zukunftssträchtige Technologien demonstriert und erprobt werden können. Seitens des Lehrstuhls für Leichtbau wurde dieser Prozess durch Optimierungen der Fahrzeugstruktur unterstützt.

## 5.1 Topologieoptimierung der Gesamtstruktur

Ausgangspunkt der Optimierung ist eine Reihe von Lastfällen und ein Bauraum, innerhalb dessen sich die Rahmenstruktur befinden muss. Beides ist in Abschnitt 5.1.1 näher beschrieben. Wegen der hohen Gestaltungsfreiheit und der frühen Phase des Projektes bietet sich dabei der Einsatz der Topologieoptimierung an, um die Lastpfade für die Gesamtstruktur des Fahrzeugs unter den verschiedenen Randbedingungen zu identifizieren und davon eine günstige Rahmenkonstruktion abzuleiten. Wie in Kapitel 5.1.2 beschrieben, handelt es sich bei der Optimierungsaufgabe um eine Mehrzieloptimierung, da die Nachgiebigkeiten der einzelnen Lastfälle gewichtet und zur Zielfunktion zusammengefasst werden. Für die Optimierung liegt eine große Zahl an Restriktionen und viele Lastfälle vor, die zu einem sehr großen Optimierungsproblem führen, dessen Lösung teilweise mehrere Tage Rechenzeit in

Anspruch nahm. Auf Grund der Größe und Komplexität der Optimierungsaufgabe traten Schwierigkeiten bei der Optimierung auf, die im Weiteren aufgezeigt werden und für die an der jeweiligen Stelle Lösungsansätze präsentiert werden.

### 5.1.1 Modell und Lastfälle

**Topologieoptimierungsbauraum:** Die Topologieoptimierung erfolgt gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.1.9 anhand eines Bauraumvolumens, in dem die Materialverteilung stattfindet. Für den vorliegenden Fall ergab sich der Bauraum zum einen in Folge der Forderung, dass die Außenkontur des Vorgängermodells *Mute* (vgl. Abb. 5.1) beibehalten werden soll, um Werkzeuge wiederverwenden zu können und das Design zu pflegen.

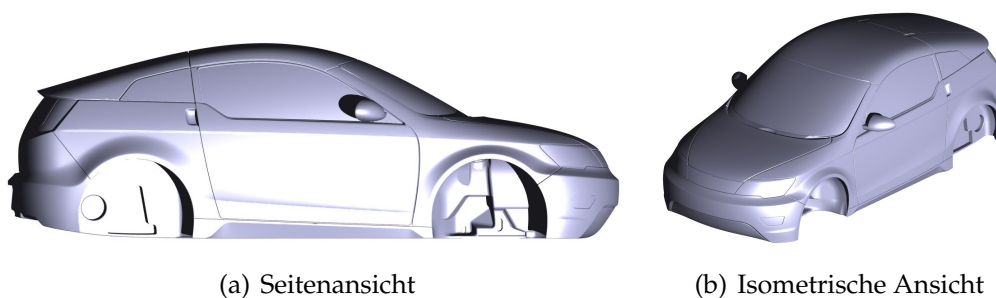


Abbildung 5.1.: *Mute* Fahrzeugkarosserie

Zum anderen mussten die unterschiedlichen Aggregate des Fahrzeugs und Leerbereiche berücksichtigt werden, die in Abb. 5.2(a) dargestellt sind. Berücksichtigt wurden dabei der Antriebsstrang und das Fahrwerk, der Energiespeicher, die Klimaanlage und der Passagierraum. Weiter konnte das Bauraumvolumen zugeschnitten werden, da im Vorder- und Hinterwagenbereich eine Betrachtung der Crash-Struktur in der Topologieoptimierung nicht sinnvoll ist, da die Zielsetzungen hinsichtlich Struktur und Absorber unterschiedlich sind. Für den Fahrzeugrahmen wird nach einer möglichst steifen Struktur gesucht, wohingegen bei den Aufprallabsorbern ein gleichmäßiges Beschleunigungsniveau bei der Deformation gefordert wird. Deswegen musste die Auslegung der beiden Komponenten entkoppelt betrachtet werden. Der Kraftangriff für die Aufpralllasten wurde daher erst ab den Montagepunkten für das Aufprallsystem betrachtet (vgl. Abb. 5.2(b)). Die Vernetzung des Modells erfolgte anhand von Tetraederelementen und führte bei einer durchschnittlichen Elementkantenlänge von 1.5 cm zu knapp 1.6 Millionen Elementen. Die Verwendung dieses Solid-Elementtyps ist numerisch gesehen nicht die beste Wahl, bringt aber die nötige Flexibilität und Robustheit mit, die für die Vernetzung der komplexen Geometrie notwendig ist. Der Grad der Ansatzfunktionen wurde linear gewählt, um die Anzahl der Freiheitsgrade in einem vernünftigen Rahmen zu halten. Die Berücksichtigung der Türsteifigkeit erfolgte anhand eines Balkensystems aus CBEAM-Elementen. Diese verbinden die Türscharniere jeweils mit dem Türschloss. Über diese Verbindung ist ein erheblicher Kraftfluss möglich, der gerade für die Aufpralllastfälle wichtig ist. Die Steifigkeitseinflüsse anderer Komponenten wurden hingegen nicht modelliert. Dazu zählen beispielsweise die Front- und Heckscheibe, die vor allem Einfluss auf die Torsionssteifigkeit haben.

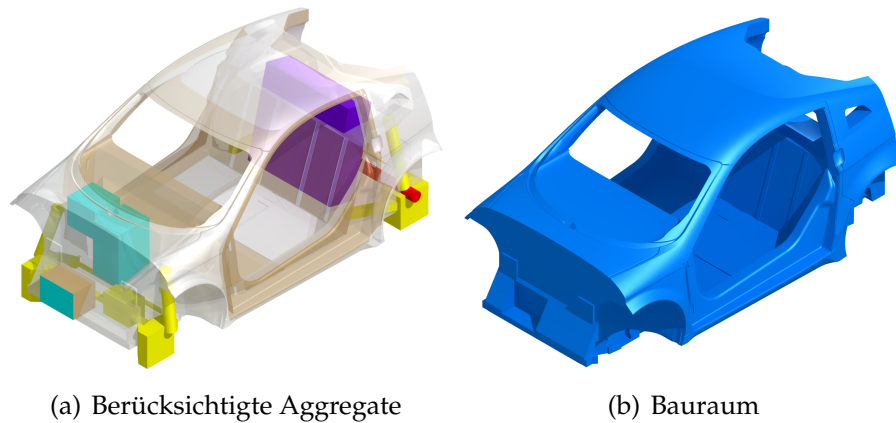


Abbildung 5.2.: Bauraum für die Topologieoptimierung

**Lastfälle** Für die Auslegung der Fahrzeugstruktur waren Steifigkeitslastfälle, Aufpralllastfälle und Fahrdynamiklastfälle zu berücksichtigen. Die Vollständigkeit der Lastfälle ist für die Strukturauslegung entscheidend, da nur so die notwendige Nachweise der Strukturintegrität erbracht werden können. In der Optimierung mussten diesbezüglich Kompromisse eingegangen werden, da zum einen nicht ausreichend Informationen vorlagen und zum anderen das Zusammenspiel aus Modellierung und Festigkeitskennwerten die Stabilität der Optimierung verringerte. Weiter steigert das Vorliegen vieler Restriktionen, deren Zahl mit der Anzahl an Lastfällen stark steigen kann, den numerischen Aufwand erheblich. In Tabelle 5.1 sind die Lastfälle aufgelistet.

Tabelle 5.1.: Übersicht über die Lastfälle

Lastfall	Art	Lastangriff	Last [kN]	Restriktionen
1	Steifigkeit/Biegung	Federbeindome	0,5	Verschiebung
2	Steifigkeit/Torsion	Federbeindome	0,5	Verschiebung
3	Aufprall/Seite	Türrahmenbereich	150	-
4	Aufprall/Dach	Lokal auf Dach	10	Verschiebung
5	Aufprall/Heck	Absorber hinten	100	-
6	Aufprall/Front	Absorber vorn	100	-
7	Fahrdyn./Bremsen	Vorderachsfahrwerk	50	Verschiebung
8	Fahrdyn./Beschleunigen	Hinterachsfahrwerk	40	Verschiebung
9	Fahrdyn./Überlagert	Vorderachsfahrwerk	70	Verschiebung
10	Fahrdyn./Überlagert	Hinterachsfahrwerk	60	Verschiebung

Einen Überblick über die Kraftangriffspunkte und die Vernetzung bietet Abb. 5.3. Wegen der teils komplizierten Verteilung der Kräfte auf mehrere Angriffspunkte sind die Werte in der Tabelle nur zur Abschätzung der Größenordnung gedacht. Auf einige Besonderheiten bei der Berechnung der Lastfälle wird im weiteren genauer eingegangen.

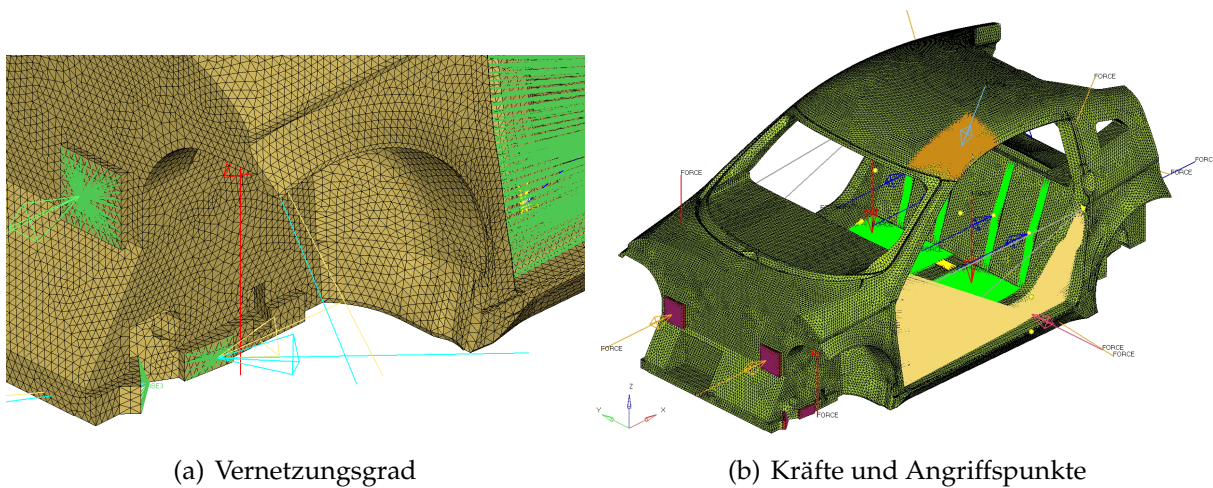


Abbildung 5.3.: FEM-Modellierung

**Aufpralllasten und Trägheitsausgleich** Die transiente nichtlineare FEM-Analyse von Aufpralllasten ist bei der gegebenen Modellgröße und der großen Anzahl an Optimierungsvariablen zu teuer, um sie für die Berechnung von Systemantworten in der Optimierung zu nutzen. Daher wurden diese Lastfälle durch Ersatzlasten berücksichtigt. Diese wurden auf Grundlage der Euro-NCAP-Testfälle definiert.

Auf Grundlage der Geschwindigkeit (64 km/h), des Stauchweges (0.5 m) der Absorber und der Fahrzeugmasse (800 kg) konnten so die Lasten in Tabelle 5.1 abgeschätzt werden. Für den Heck- und Frontcrash ist diese Näherung zulässig, da im Rahmen des Euro-NCAP nur die Absorber plastifizieren dürfen.

Für eine möglichst realitätsnahe Simulation des Aufpralls muss ein ungelagertes System betrachtet werden. Problematisch ist dies zunächst aus Berechnungssicht, da ein unrestringiertes FEM-Modell auf eine singuläre Steifigkeitsmatrix führt. Daher ist der Einsatz des Trägheitsausgleichs (eng.: Inertia Relief) notwendig, bei dem die aufgebrachten Lasten durch ein Kraftfeld auf der Struktur kompensiert werden. Dafür werden für die translatorischen und rotatorischen Richtungen jeweils drei Beschleunigungsunbekannte hinzugefügt. An einem einzelnen Lagerpunkt, der das System restringiert, treten somit quasi keine Lasten auf. Näheres zur Methode findet sich bei [53].

Für den Seitenaufprall kann nicht davon ausgegangen werden, dass kein Plastifizieren auftritt. Aus Gründen der Einfachheit wurde dieser Lastfall hier dennoch als statischer Lastfall beschrieben. Der Dachaufprall wird in der Praxis statisch getestet und kann daher sehr einfach modelliert werden. Die Kraft verteilt sich dabei auf einen lokalen Bereich des Daches oberhalb der A-Säule, wie es in Abb. 5.3 zu erkennen ist.

**Steifigkeits- und Fahrdynamiklastfälle** Die Steifigkeit der Struktur wird durch die Vorgabe einer Verschiebung bei einer bestimmten Kraft sichergestellt. Wegen der linearen Berechnung kann das Verhältnis von Verschiebung zu Kraft beliebig skaliert werden. Die Vorgabe der relativ kleinen Kräfte hängt daher von den vorgeschriebenen Verschiebungen ab. Für die Berechnung der Nachgiebigkeit in der Topologieoptimierung ergeben sich daraus allerdings sehr kleine Energiebeiträge aus diesen Lastfällen. Die fahrdynamischen Lasten stammten aus einer Mehrkörpersimulation, die für das Vorgängerfahrzeug durchgeführt wurde und hier übernommen wurden.

**Modellierung der Masseneinflüsse** Die Aggregatmassen, für die die Aussparungen im Bauraum vorgesehen wurden, werden durch Punktmassen modelliert, um deren Kraftwirkung bei der Berechnung mittels Trägheitsausgleich zu berücksichtigen. Die Anbindung der Personenmassen stellte eine besondere Herausforderung dar, da die Wirkung lastfallabhängig ist. Im Fall des Frontaufpralls wird die Kraft über das Gurtsystem abgetragen und beim Heckaufprall über die Sitze. Diese Unterscheidung ist im Rahmen linearer Berechnungen und Modellierung mittels Punktmassen für den Trägheitsausgleich nicht beschreibbar. Deshalb wurde aus den Personenmassen und der als konstant angenommenen Abbremsbeschleunigung eine Ersatzlast berechnet. Um die Verteilung der resultierenden Massenkraft durch das Gurtsystem abzubilden, wurde ein Modell des Gurtsystems erstellt und anhand dessen die Lagerreaktionen abgeschätzt. Die ermittelten Kräfte wurden dann in den jeweiligen Lastfällen berücksichtigt.

### 5.1.2 Topologieoptimierung in *OptiStruct*

**Optimierungsaufgabe** Die Optimierungsaufgabe ist in (5.1) beschrieben:

$$\min_{\mathbf{x}} \left( z(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{lf}} w_k \mathbf{f}_k^T \mathbf{d}_k \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \rho_{\min} \leq x_i \leq 1 \right) \quad (5.1)$$

$$\text{mit } i \in \{1, \dots, n_{el}\} \quad \text{mit } \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_k = \mathbf{f}_k \quad \text{mit } k \in \{1, \dots, n_{lf}\} \quad (5.2)$$

$$\text{und} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{\sum_i^{n_{el}} m_i(x_i)}{120kg} - 1 \quad (5.3)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \frac{|\sigma_{\text{vonMises}}|}{250 \frac{N}{mm}} - 1 \quad \text{In kritischen Lastfällen} \quad (5.4)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{d}_{Kr}\|}{127mm} - 1 \quad \text{Für Lastfall 4} \quad (5.5)$$

Dabei ist die Zielfunktion  $z$  in der Definition 5.1 die mittlere Strukturnachgiebigkeit, die sich aus den mit  $w_k$  gewichteten Nachgiebigkeiten der einzelnen Lastfälle ergibt. Die Minimierung der Nachgiebigkeit  $N$  beziehungsweise Maximierung der Steifigkeit  $S$  entspricht einer Minimierung der Deformationsenergie für das lineare System.

Durch die Gewichtung wird den Lastfällen unterschiedlich starke Priorität eingeräumt und entsprechend wird die Massenverteilung im Bauraum auch unterschiedlich erfolgen. Anschaulich lässt sich diese Argumentation so deuten, dass höher priorisierte Lastfälle die Masse zur Versteifung von weniger stark priorisierten abziehen. Die Zielfunktion setzt sich somit aus konkurrierenden Einzelfunktionen zusammen. Dies entspricht einer Mehrzieloptimierung, wie sie im Abschnitt 2.1.8 eingeführt wurde. Die globalen Optima der Optimierungsaufgaben liegen also für unterschiedliche Gewichtungen auf einer *Pareto-Front* im Raum  $\mathbb{R}^{n_{lf}}$ .

Eine geeignete Gewichtung zu finden stellt eine große Herausforderung dar, da eine Priorisierung zwischen den Einflüssen der vorliegenden Lastfälle schwer vorzunehmen ist. Dies führt zur Frage, welche Beiträge die einzelnen Lastfälle tatsächlich liefern. Offensichtlich sind die Lastbeträge für die einzelnen Lastfälle sehr unterschiedlich und reichen gemäß Ta-

belle 5.1 größenordnungsmäßig von 0.5 kN bei den Steifigkeitslastfällen bis hin zu 150 kN im Falle eines Aufpralls. Dadurch wird bereits deutlich, dass mit Nachgiebigkeiten zu rechnen ist, die sich um Größenordnungen voneinander unterscheiden. Für eine detaillierte Untersuchung der Beiträge der Lastfälle wurden die Untersuchungen in Kapitel 5.1.3 durchgeführt.

**Algorithmus** Die Größe der Berechnungsaufgabe bedingt die Verwendung hocheffizienter Optimierungsalgorithmen. Dies schließt den Einsatz des in Kapitel 4 verwendeten und implementierten Topologieoptimierungsprogramms aus, bei dem der Fokus auf der maximalen Flexibilität und dem einfachen Zugriff auf Berechnungsparameter lag. Das beschriebene Optimierungsproblem wird daher mit OPTISTRUCT von ALTAIR berechnet. Diese Software ist in erster Linie auf einfache Anwendbarkeit hin entwickelt und hat sich als sehr robust erwiesen. Nachteil ist die geringe Verfügbarkeit von Informationen zu den vorhandenen Optimierungsalgorithmen. Es können die drei Optionen „MFD“ (Method of Feasible Directions), „SQP“ (Sequential Quadratic Programming) und „DUAL“ ausgewählt werden. In [64, S.789] wird für Konzeptoptimierungen der „DUAL“-Algorithmus empfohlen, der standardmäßig gesetzt ist. Tests der Algorithmen zeigten schon für sehr kleine und einfache Topologieoptimierungsprobleme, dass die „SQP“- und „MFD“-Option zu keinen brauchbaren Ergebnissen führen. Somit ist man bei der Algorithmuswahl auf die „DUAL“-Option beschränkt. Dabei handelt es sich mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit um den MMA-Algorithmus von *Svanberg* [81] der in Kapitel 4 vorgestellt wurde.

**Startwert** Bei den praktischen iterativen Optimierungsvorgehen spielt die Wahl des Startwerts eine große Rolle, da davon die Konvergenzgeschwindigkeit und die Lösung abhängen. Die Anzahl benötigter Iterationen bis zur Konvergenz ist umso geringer, je näher der erste Optimierungsvariablenvektor an der Lösung liegt. Die Ergebnistopologie wird dadurch beeinflusst, dass vom Startwert ausgehend meist die nächstliegende lokale Lösung gefunden wird. Das Standardvorgehen ist es, die Bauraumdichten konstant auf einen Wert zu setzen, sodass bei gegebenem Bauteilvolumen die Massenrestriktion aktiv ist. Diese Restriktion wird für die Lösungskonfiguration immer aktiv sein, da die Verwendung aller zur Verfügung stehenden Masse immer die maximale Steifigkeit zur Folge hat.

**Restriktionen** An die Konfiguration wurden Steifigkeits- und Festigkeitsrestriktionen gestellt. Die Restriktion der Spannung stellt dabei besondere Herausforderungen und wird programmintern anders als andere Systemantworten behandelt. Die Restriktion gilt für alle Lastfälle und alle Elemente des Modells. Dies würde zu einer immensen Anzahl an Restriktionen führen und wäre in der Praxis nicht zu bewältigen. Daher werden seitens der Optimierungssoftware die Spannungen gefiltert. Näheres dazu findet sich im Handbuch zu OPTISTRUCT [47, S.592].

Das Material wurde mit den Kennwerten von Aluminium modelliert, wobei die Materialwahl den Zielfunktionswert aber nicht die Ergebnistopologie beeinflusst. In Tabelle 5.2 sind die berücksichtigten Restriktionen zusammengefasst. Der Restriktion des Dachaufpralls mit einem relativ großen Verschiebungswert liegt die Annahme eines nichtlinearen Verformungs- und Materialverhaltens zugrunde. Da alle Lastfälle linear gerechnet werden, wird die Restriktion nicht in das Optimierungsproblem aufgenommen. Die Beschränkung der Verschiebungen an Fahrwerkspunkten basiert auf groben Schätzungen und stellt sicher, dass im Fahrwerksbereich ausreichend Masse angelagert wird. Teilweise waren unzulässig



Tabelle 5.2.: Grenzen für die Restriktionsdefinition

Systemantwort	Art	Wert	Lastfall
Spannung	Maximal	250 MPa	Alle
Masse	Maximal	0.12 t	unabhängig
Biegeverschiebung	Maximal	0.1 mm	1
Dachaufprallverschiebung	Maximal	127 mm	4
Verschiebung Vorderachse überlagert	Maximal	10 mm	9
Verschiebung Hinterachse überlagert	Maximal	10 mm	10
Verschiebung Vorderachse bremsen	Maximal	10 mm	7
Verschiebung Hinterachse beschleunigen	Maximal	10 mm	8

große Verschiebungen am Fahrwerk zu erkennen, da das geringe Lastniveau wenig zur gesamten Verformungsenergie beitrug.

Die Abstimmung von Restriktionen, Lastniveaus und Optimierungsparametern beeinflusst erheblich das Konvergenzverhalten und die Ergebnistopologie. Deshalb mussten teilweise Lastfälle ignoriert oder einzelne Restriktionen vernachlässigt werden. Die Diskussion dazu findet sich am Ende des Abschnitts.

**Geometriesteuerung und Netzunabhängigkeit** Die Form der Ergebnistopologie kann durch Symmetriebedingungen gesteuert werden, wobei dadurch gleichzeitig die Anzahl der Optimierungsvariablen verringert wird, da diese dann teils voneinander abhängig sind. Im vorliegenden Fall wurde eine Symmetrieebene durch die Fahrzeuglängs- und Hochachse definiert. Diese Bedingung wurde für ein möglichst gleichmäßiges und vorhersehbares Verhalten beim Aufprall und bei den Fahrdynamikeigenschaften gestellt. Die Dichtefelder sind somit auf den beiden Fahrzeugseiten annähernd gleich und die Anzahl der Optimierungsvariablen halbiert sich theoretisch. Dabei muss für OPTISTRUC das FE-Netz nicht symmetrisch sein. Es werden also vermutlich geometrische Bereiche miteinander verknüpft. Die Ergebnisse zeigen, dass Symmetrie lokal nicht vollständig gegeben ist.

Es können weiter Filterungen verwendet werden, die in gewissem Umfang die Netzunabhängigkeit der Ergebnistopologie eindämmen. Damit werden die Ergebnisse für unterschiedliche Netze vergleichbar. Hierbei ist die Forderung nach minimalen Teilstrukturdurchmessern zu nennen, die als „Minimum Member Size Control“ bezeichnet wird und in Abschnitt 4.4.4.1 eingehend erläutert wurde. Durch diese Funktion werden zu feine Ausbildungen in der Topologie vermieden, die bei der Ergebnisinterpretation zu Schwierigkeiten führen können. Die Beschränkung der maximalen Teilstrukturdurchmesser aus Abschnitt 4.5.2, wurde in der betrachteten Optimierung nicht verwendet.

**Konvergenz** Nach [47, S.587] liegen für die Konvergenzbewertung in OPTISTRUC zwei Arten von Kriterien vor. Diese werden als „Regular“- und „Softconvergence“ bezeichnet. Bei der regulären Konvergenz muss die Zielfunktionsänderung für zwei aufeinander folgende Iterationen unterhalb einer definierten Toleranz ( $t_z = 5 \cdot 10^{-3}$ ) liegen und die Restriktionsverletzung kleiner als 0.1% sein. Bei der „Softconvergence“ wird die Optimierungsvariablenänderung zwischen zwei Iterationen betrachtet. Der Entwurf wird als konvergiert betrachtet, wenn die Änderung unterhalb eines Schwellenwertes liegt. Wie in Abschnitt 2.1.9 beschrie-

ben, wird der SIMP-Parameter über den äußeren Iterationen erhöht, wobei er die Werte 1, 2 und 3 annimmt.

### 5.1.3 Untersuchung der Einflüsse einzelner Lastfälle

Wie sich zeigte, ist die Ergebnistopologie unter Berücksichtigung aller Lastfälle sehr komplex und die Einflüsse von Optimierungsparametern und Lastfällen nur schwer daraus ersichtlich. Deshalb wurde die Struktur für alle Lastfälle einzeln optimiert. Die Konvergenz der Optimierungen der einzelnen Lastfälle erfolgte qualitativ gleichartig. In Abbildung 5.4 ist das Konvergenzverhalten für Lastfall 1 dargestellt.

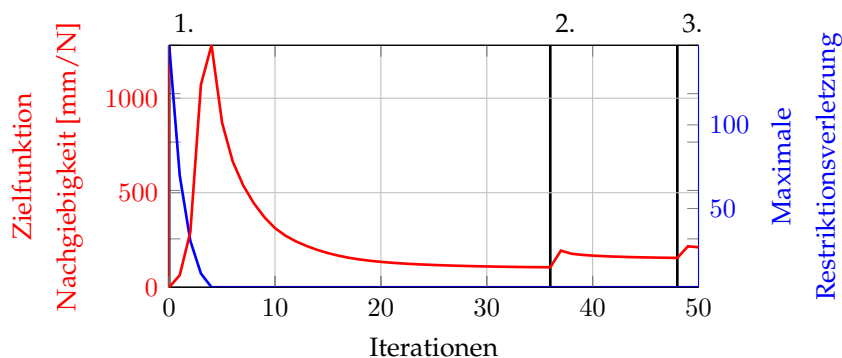


Abbildung 5.4.: Konvergenz für Lastfall 1

Dabei fällt die hohe Spitze der Nachgiebigkeit auf, die der Auffindung eines zulässigen Entwurfs durch den Optimierungsalgorithmus geschuldet ist. Auch zeichnen sich deutlich die zwei Anhebungen des SIMP-Parameters ab, durch die die Zielfunktion jeweils einen Sprung macht, da dadurch dem System Masse entzogen wird.

In Abbildung 5.5 sind die optimalen Topologien für den Lastfall eins und zwei (vgl. Tabelle 5.1) abgebildet. Die Topologien sind jeweils mit den Dichtewerten in Farbkodierung dargestellt. Für die Verdeutlichung von Bereichen besonders hoher Dichte werden die Elemente ausgeblendet, deren Dichte unter einem zu definierenden Grenzwert liegen. Es ist bei der Darstellung zu beachten, dass eine blau gefärbte Strebe im Inneren durchaus Vollmaterial aufweisen kann.

Die beiden Steifigkeitslastfälle weisen gemäß ihrer Last- und Lagerungsdefinition ihre Struktur nur zwischen den Federbeindomen auf. Während für die Torsion das Schubfeld im Dach essentiell ist, liegt im Biegefall erwartungsgemäß dort nur eine Verstrebung von den A-Säulen zu den B-Säulen vor. Die schalenartigen Strukturen im Bodenbereich für den Biegefall resultieren aus dem flächigen Kraftangriff.

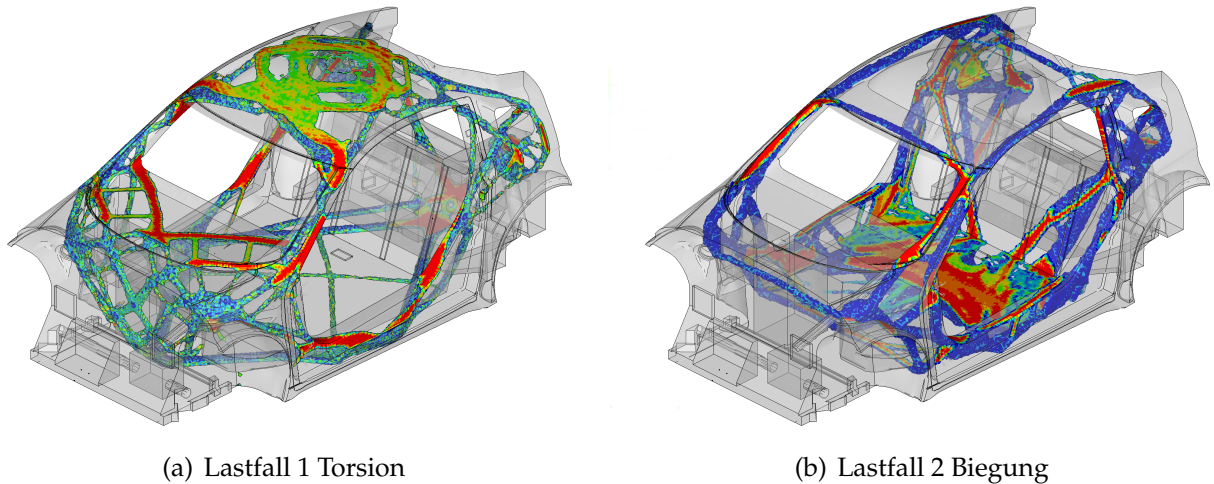


Abbildung 5.5.: Optimale Topologien für die Lastfälle 1 und 2

In Abbildung 5.6 sind die Topologien für die Lastfälle Front- und Heckaufprall dargestellt.

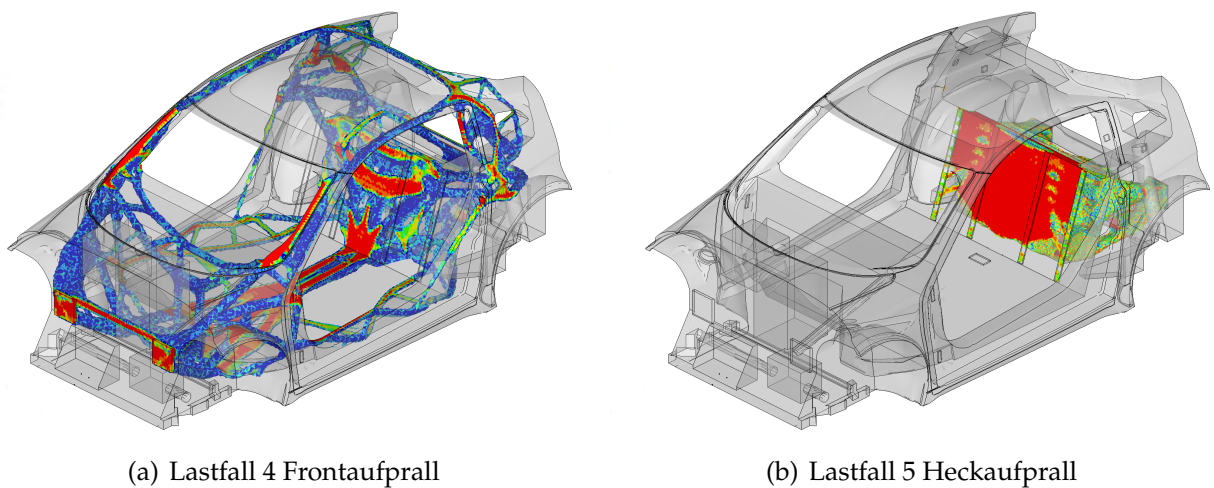


Abbildung 5.6.: Optimale Topologien für die Lastfälle 4 und 5

Im Falle des Frontaufpralls wird deutlich, dass ausgehend von den Anbindepunkten des Aufprallsystems die Lasten über die A-Säulen und vor allem auch über den Mittelbereich des Fahrzeugbodens abgetragen werden. In Abb. 5.6(b) fällt auf, dass sich die Struktur auf den Hinterwagenbereich beschränkt. Dies folgt daraus, dass nur die Massenkräfte von Batterie, Insassen und Motor zu den hinteren Anbindepunkten der Absorber abgeleitet werden müssen.

Der Seiten- und Dachaufpralllastfall, deren Ergebnistopologien in Abbildung 5.7 zu sehen sind, sind jeweils asymmetrisch. Durch die Symmetriebedingung für die Topologie, ergeben sich erkennbar dennoch symmetrische Entwürfe. Für den Dachaufprall wird am oberen Ende der A-Säule eine Last flächig aufgebracht und das Modell ist über die gesamte Bo-

denfläche gelagert. Die Lastabtragung erfolgt dann über die vier abgebildeten Lastpfade. Beim Seitenaufprall ist offensichtlich vor allem die Querrichtung von Bedeutung, was der Belastungsrichtung in diesem Lastfall entspricht.

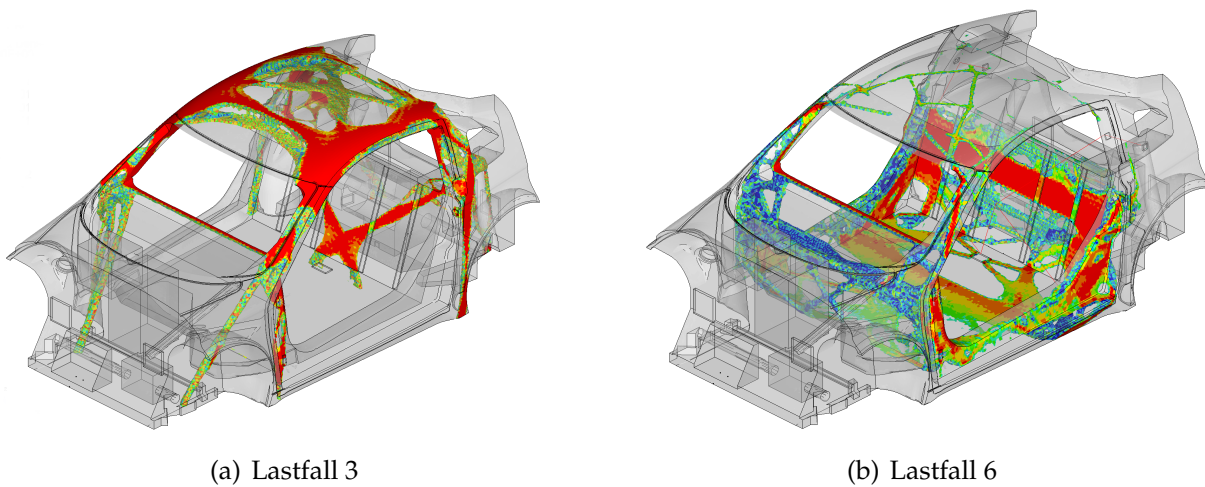


Abbildung 5.7.: Optimale Topologien für die Lastfälle 3 und 6

Ferner sind hier zwei Fahrdynamiklastfälle in Abbildung 5.8 gezeigt. Diese ähneln den Ergebnissen für die Lastfälle 7 und 9 sehr stark, weshalb diese hier nicht extra dargestellt werden. Auch hier ist wieder der zuvor beschriebene Sachverhalt erkennbar, dass die Massenkräfte der Punktmassen im Heck für die Kräfte im vorderen Fahrwerksbereich abgetragen werden müssen. Dem gegenüber bedarf es nur Materials im Heck um die Kräfte auf das hintere Fahrwerk zu übertragen.

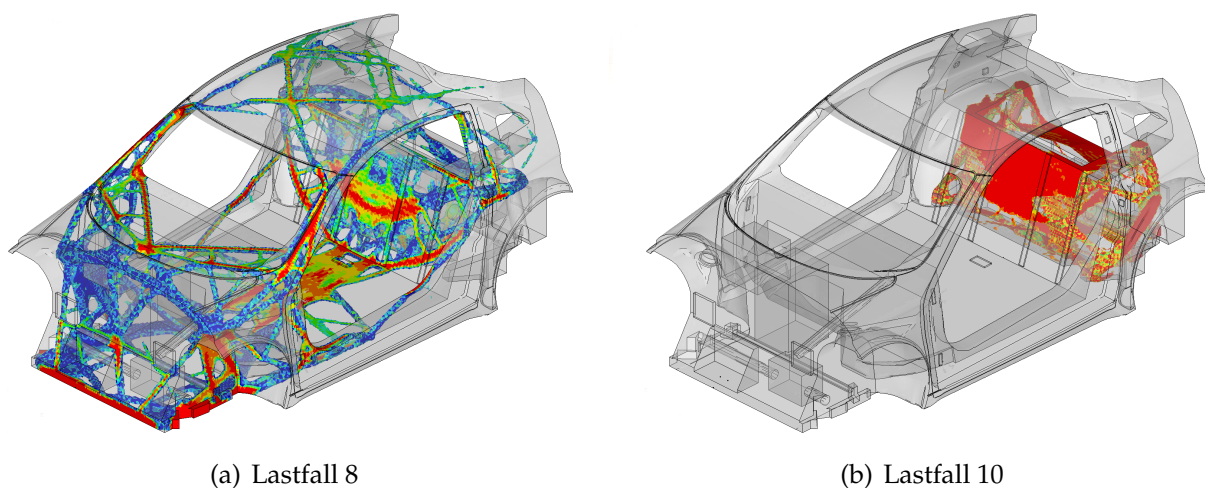


Abbildung 5.8.: Optimale Topologien für die Lastfälle 8 und 10

In Tabelle 5.3 sind die Nachgiebigkeiten der einzelnen Lastfälle nach ihrem jeweiligen Wert sortiert dargestellt.

Tabelle 5.3.: Sortierte Nachgiebigkeiten der einzelnen Lastfälle

Lastfall #	Nachgiebigkeit [mm/N]	Iter.	Art	Trägheitsausgleich
4	8.067E+04	55	Frontaufprall	Ja
6	5.446E+04	68	Seitenaufprall	Ja
5	7.384E+03	48	Heckaufprall	Ja
8	4.635E+03	68	Vorderachse Ü.	Ja
3	2.577E+03	45	Dachaufprall	Nein
7	2.246E+03	60	Bremsen	Ja
10	1.157E+03	54	Hinterachse Ü.	Ja
9	8.312E+02	47	Beschleunigen	Ja
1	2.685E+01	50	Torsion	Nein
2	1.204E+01	58	Biegung	Nein

Die Tabelle zeigt, dass der Einfluss der unterschiedlichen Lastfälle durch ihre jeweilige Nachgiebigkeit sehr verschieden ausfällt. Dies liegt sowohl am jeweiligen Lastniveau, aber auch an der Strukturverformung. Besonders hohe Bedeutung haben demnach die Aufpralllastfälle, während die Steifigkeitslastfälle sehr geringe Beiträge liefern.

#### 5.1.4 Ergebnistopologie unter Berücksichtigung aller Lastfälle

Die Materialverteilungsaufgabe unter Berücksichtigung aller Lastfälle ist optimierungstechnisch schwieriger und numerisch aufwändiger, als die Betrachtung jeweils nur eines Lastfalls. In Abb. 5.9 ist das Ergebnis für diesen Fall zu sehen, wobei die Einflüsse der verschiedenen Lastfälle durch die vorangegangenen Untersuchungen klar werden. Die vorgegebene Strukturmasse ist dabei die selbe wie in den Optimierungen in Abschnitt 5.1.3.

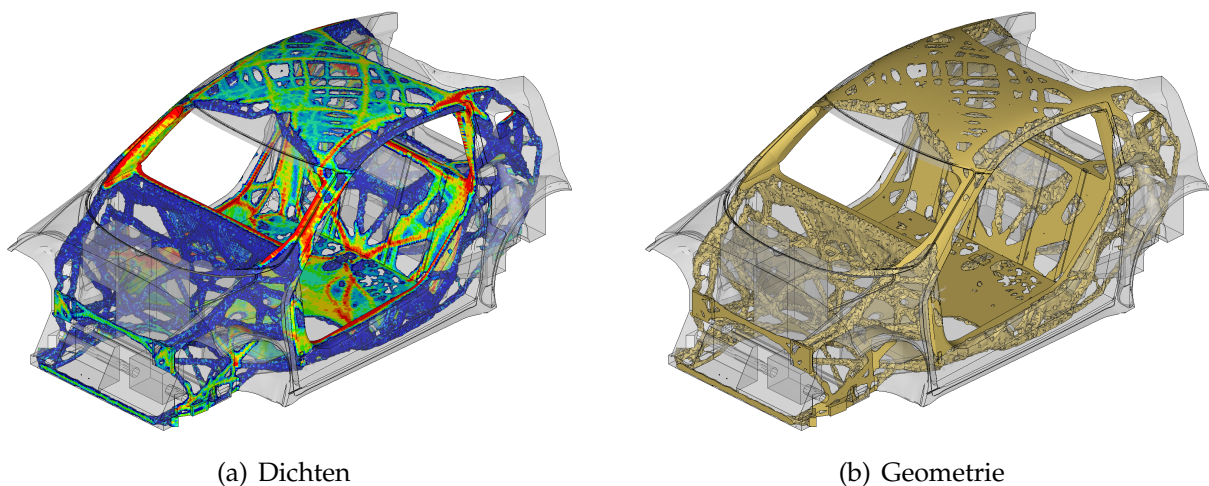


Abbildung 5.9.: Ergebnistopologie

Besonders fällt das Schubfeld und die relativ flächige Schalenstruktur im Bereich des Fahrgastraumes auf. Die fast vollkommene Belegung der A-Säulen mit Material verdeutlicht deren Bedeutung für die Abtragung der Lasten des Frontaufpralls (Lastfall 6). Der Vorder- und Hinterwagenbereich ist von fachwerkartigen Strukturen dominiert. Diese Erkenntnisse stützten im Rahmen des Projektes die Konzeption der tragenden Struktur als Mischbauweise aus Gitterrohrrahmen und einem Monocoque aus carbonfaserverstärktem Kunststoff (CFK) im Fahrgastbereich. Für die Unterstützung der Auslegung der Fahrgastzelle, wurden weitere Optimierungen vorgenommen, die im folgenden Abschnitt 5.2 beschrieben sind. Betrachtet man den Konvergenzverlauf 5.10 der Optimierung ist die relativ hohe Anzahl an Iterationen zu erkennen, die zu einer Rechenzeit von über 35 Stunden führt (Hardwarekonfiguration siehe A.4). Weiter fällt der erhebliche Anstieg der Nachgiebigkeit in der letzten äußeren Iteration auf. Das Ziel, die Nachgiebigkeit zu minimieren, muss hier der Einhaltung der Restriktionen unterstellt werden, die erst gegen Ende der Optimierung zufriedenstellend erfüllt sind.

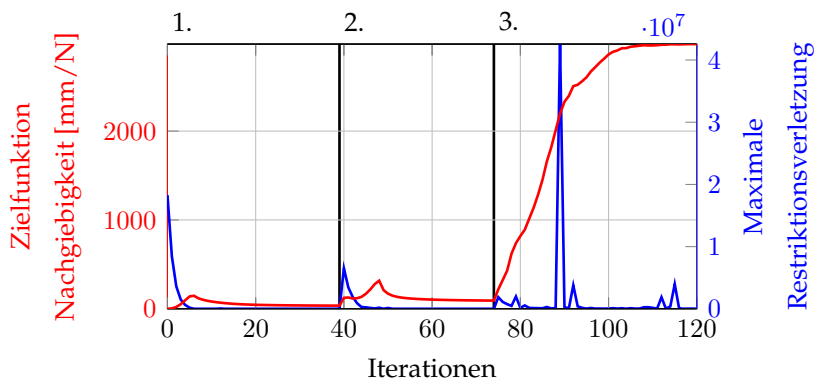


Abbildung 5.10.: Konvergenzverlauf der Optimierung

Um einen Eindruck von der Bedeutung der äußeren Iterationen für das Optimierungsergebnis zu vermitteln, ist in Abb. 5.11 anhand der Dachansicht das Ergebnis der drei äußeren Iterationen gezeigt. Auffallend ist, dass weite Teile der Struktur schon bei der ersten Konvergenz nach 39 Iterationen in ihrer endgültigen Form vorliegen. Somit könnten ungefähr zwei Drittel des Rechenaufwandes eingespart werden, wenn kein Bedarf an der Eliminierung von Dichtezwischenwerten besteht.

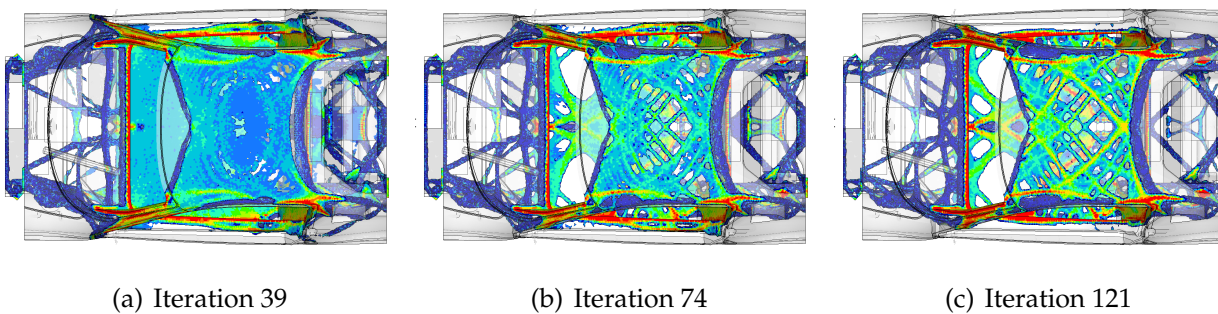


Abbildung 5.11.: Konvergierte Dichteverteilung bei verschiedenen SIMP-Parametern

## 5.2 Optimierung der Wannenstruktur des Fahrgastraumes

### 5.2.1 Modell und Optimierungsvorgehen

**Modell** Aus Kostengründen konnte die Monocoque-Struktur nicht für den gesamten Fahrgastbereich umgesetzt werden, wie es aus mechanischer Sicht sinnvoll gewesen wäre. Statt dessen wurde nur der untere Bereich als CFK-Konstruktion gebaut. Die Gitterrohrrahmen wurden aus Aluminium gefertigt. Basierend auf dieser Projektentscheidung wurde ein FEM-Modell aufgebaut, anhand dessen die Konzeption und Auslegung der Wannenstruktur unterstützt wurde. Eine Beschränkung auf die Wannenstruktur war jedoch nicht möglich, da die Lastverteilung über den Aluminiumrahmen nicht bekannt war. Deshalb wurde die Rohrrahmengometrie gemäß Abb. 5.12(a) modelliert. Das FEM-Modell enthält dabei das vernetzte Wannenvolumen aus 1564978 Tetra-Elementen, die Wannenoberfläche aus 217042 Schalendreieckselementen. Das Oberflächen- und Wannennetz sind dabei miteinander verbunden und können je nach Untersuchung kombiniert oder einzeln verwendet werden.

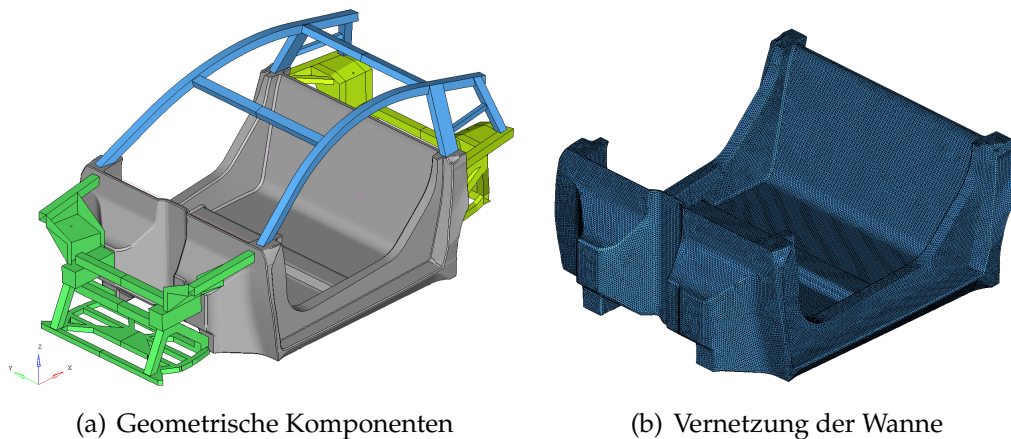


Abbildung 5.12.: Modell und Vernetzung

Das Material wurde wiederum als Aluminium angesetzt, wodurch die anisotropen mechanischen Eigenschaften des CFK nicht berücksichtigt werden. Diese Vereinfachung musste vorgenommen werden, um den Aufwand bei Modellierung und vor allem Berechnung überschaubar zu halten. Die Identifikation von besonders belasteten Bereichen und Positionen für mögliche Versteifungen ist auch mit diesem Ansatz durchführbar.

**Lastfälle und Optimierungen** Ausgehend vom vorliegenden Lastenheft (vergleiche Abschnitt 5.1.1) wurde zunächst versucht, die Optimierung strikt unter Einhaltung der Anforderungen durchzuführen. Wie sich zeigte, war dabei die Einhaltung der Verschiebungsrestriktionen für die Steifigkeits- beziehungsweise Fahrdynamiklastfälle nicht möglich, was an fehlenden Informationen zu konstruktiven Details und der approximativen Geometriemodellierung im FEM-Modell lag. Daher wurden diese Lastfälle nicht weiter berücksichtigt. Dies ist vertretbar, da die detaillierte Erfüllung des Lastenheftes in späteren Projektphasen

erfolgen kann, wenn mehr Informationen über die Konstruktion vorliegen. Beispielsweise kann dieser Auslegungsschritt in Dimensionierungsoptimierungen umgesetzt werden, die anhand einer auskonstruierten Geometrie erfolgen sollten.

Um die Steifigkeits- und Aufpralleigenschaften der Wanne zu verbessern, wurde versucht, durch die Ermittlung von Versteifungen eine Steigerung der Leistungsfähigkeit zu erreichen. Dazu wurde in einem ersten Schritt nur die Wannenhülle betrachtet und einmal die Schalelementdicken und einmal die Elementdichten als Optimierungsvariable definiert. Im nächsten Schritt wurde das vernetzte Volumen einbezogen, mit dessen Elementen eine Topologieoptimierung durchgeführt wurde. Die daraus gewonnenen Informationen wurden in eine Schalenkonstruktion umgesetzt, die Verstrebungen an stark belasteten Stellen aufwies. Für diese Versteifungsstrukturen wurde dann eine Dimensionierung durchgeführt. Die Besonderheiten der einzelnen Schritte und die Ergebnisse werden im Folgenden vorgestellt.

### 5.2.2 Lastabtragung in der Schalenstruktur

Analog zur Topologieoptimierung lässt sich ein Materialverteilungsproblem auch anhand von Elementwandstärken definieren. Ein Unterschied liegt darin, dass die Wandstärke die Biegesteifigkeit überproportional stark beeinflusst, wohingegen bei der Topologieoptimierung die Elementsteifigkeitsmatrix komplett skaliert wird.

Anstelle der Vorgabe eines Volumenanteils, der bei der Wandstärkenoptimierung nicht sinnvoll ist, wurde die Masse der Schalenstruktur restringiert. Dazu wurde eine Restriktion auf  $169[kg]$  vorgegeben, sodass die beiden Optimierungen vergleichbar sind. Der Definitionsbereich für die Optimierungsvariablen wurde von  $10^{-3}[mm]$  bis  $50[mm]$  festgelegt. Ebenfalls wurde die Symmetrie des resultierenden Entwurfs gefordert. In Abbildung 5.13 lassen sich die Ergebnisse der beiden Vorgehen vergleichen.

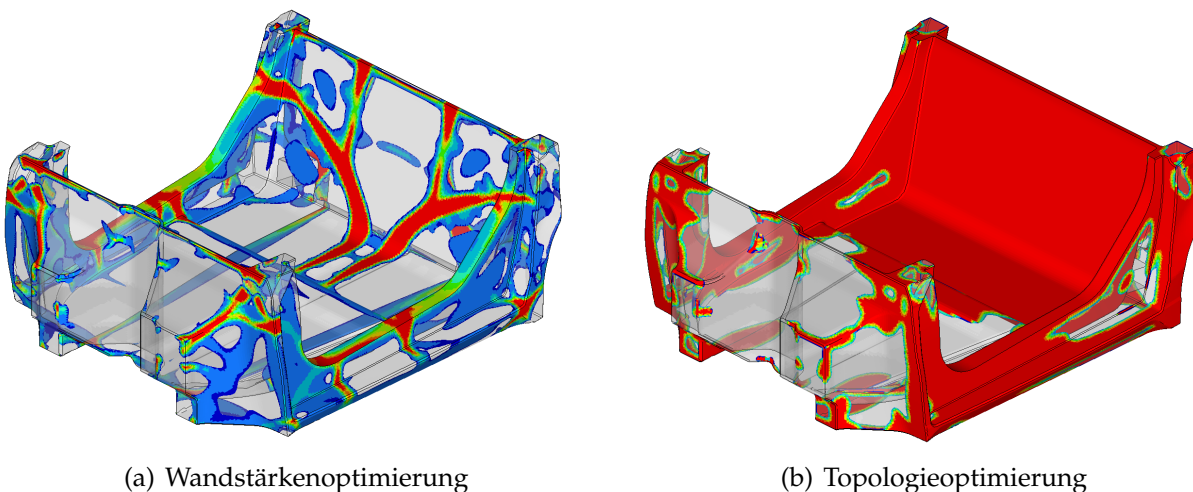


Abbildung 5.13.: Topologie- und Elementdickenoptimierung der Schalenstruktur



Hierbei wird deutlich, dass bei der Interpretation sehr zu differenzieren ist und viele Details der Topologie auszuwerten sind. Während sich in Abb. 5.13(a) einige wichtige Lastpfade ergeben, zeigt das Resultat der Topologieoptimierung in Abb. 5.13(b) eine Konzentration der Masse im hinteren Bereich des Monocoques. In beiden Fällen treten abgelöste Strukturbereiche auf und der Kraftfluss kann an einigen Stellen nur erahnt werden. Erkennbar sind jedoch in beiden Fällen die Bedeutung der Aufpralllasteinleitung in die A-Säulen und den Seitenschweller.

In Abbildung 5.14 ist das Konvergenzverhalten der Wandstärkenoptimierung zu sehen. Die Topologieoptimierung benötigte 13 Iterationen wobei sich eine Berechnungsdauer von knapp 10[*min*] ergab (Hardware siehe A.11). Bei der Wandstärkenoptimierung ergaben sich hingegen 20 Iterationen, die 23[*min*] dauerten. Dabei ergaben sich als optimale Zielfunktionswerte  $1.01 \cdot 10^6$ [*mm.N*<sup>-1</sup>] für die freie Wandstärkenoptimierung und  $3.81 \cdot 10^6$ [*mm.N*<sup>-1</sup>] für die Topologieoptimierung. Die höhere Nachgiebigkeit bei der Topologieoptimierung ist dabei wohl auf den Unterschied durch die Biegesteifigkeitseigenschaften zurückzuführen. Der genaue Wert spielt wegen des konzeptionellen Charakters der Optimierungen allerdings eine untergeordnete Rolle.

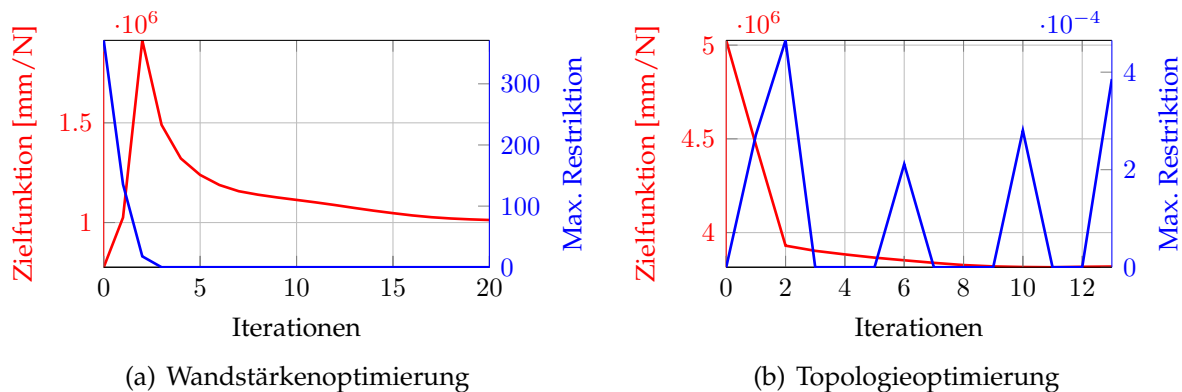


Abbildung 5.14.: Vergleich der Optimierungen der Schale

Trotz der Probleme bei der Interpretation der Ergebnisse in Bereichen des Wannenvolumens, gibt die Optimierung einen Eindruck von kritischen Bereichen und es lassen sich beispielsweise durch zusätzliche Laminatschichten günstige Versteifungen der Wannengeometrie erzielen. Im nächsten Schritt wurde versucht, nicht nur die Wannenoberfläche zu nutzen, sondern auch Versteifungen im Wannenvolumen zu identifizieren. Da das Volumen umschlossen wird, steht dieser Bereich mehr oder weniger uneingeschränkt für konstruktive Maßnahmen zur Verfügung.

### 5.2.3 Lastabtragung im Wannenvolumen

Bei dieser Optimierung wurde die Oberfläche der Wanne an das vernetzte Volumen gekoppelt, um die innere Positionierung der Lastpfade zu untersuchen. Unter Verwendung aller Lastfälle, die jeweils ihre Nachgiebigkeiten zur Zielfunktion beitrugen und einzig der Restriktion der zur Verfügung stehenden Masse, ergab sich die Ergebnistopologie in Abbildung 5.15.

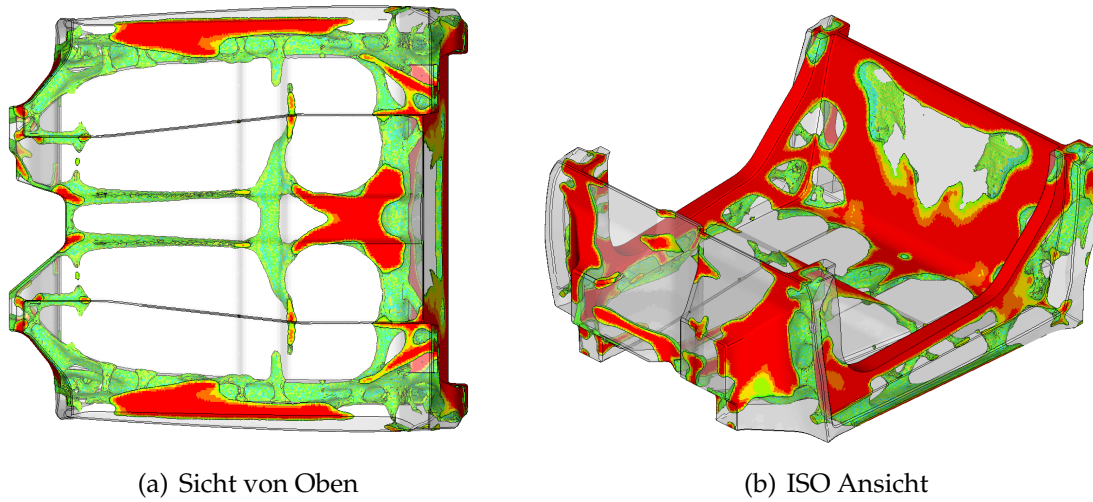


Abbildung 5.15.: Ergebnisse der Versteifungsidentifikationsrechnung

Es ist erkennbar, dass wiederum die Seitenschweller und der Mitteltunnel eine wichtige Rolle spielen, um Lasten in Fahrzeuginnenrichtung abzuleiten. Aufpralllasten werden in den Mitteltunnel und die A-Säule eingeleitet. Auch in der Fahrzeugquerrichtung zeigt sich auf Grund des Seitenaufpralllastfalls eine Tendenz zur Materialanlagerung. Im Rückbankbereich ist eine Dreiecksverstrebung zu erkennen.

In Abb. 5.16 ist wiederum der Konvergenzverlauf der Topologieoptimierung zu sehen, der sehr stabil verläuft. Dies ist vor allem auf das Vorgehen zurückzuführen, nach dem die Lastfälle nur über die Nachgiebigkeit Einfluss auf das Optimierungsproblem nehmen, aber nicht zur Definition von Restriktionen verwendet werden.

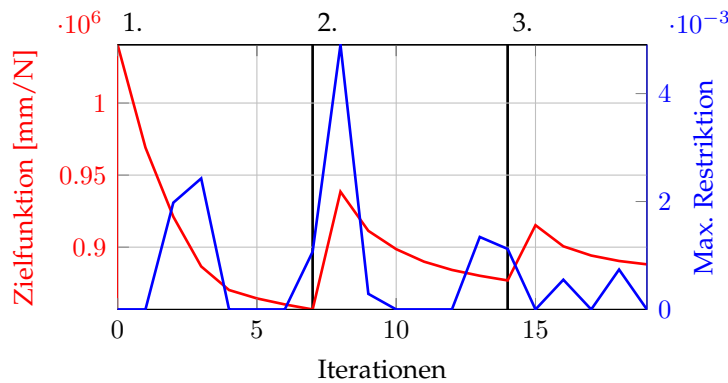


Abbildung 5.16.: Konvergenzverhalten der Volumentopologieoptimierung

Anhand der Ergebnisse wurde eine Versteifungskonstruktion abgeleitet, die durch die Ergebnisdarstellungen in Abb. 5.17 ersichtlich ist. Für die Versteifungsrippen wurde eine Dimensionierung durchgeführt, bei der die Summe der gewichteten Nachgiebigkeiten der Lastfälle minimiert wurde. Die Gesamtmasse aller Versteifungsteile wurde auf 6 kg restringiert. Wegen des fortgeschrittenen Detaillierungsgrades der Konstruktion wurde versucht, alle Restriktionen zu berücksichtigen. Dabei zeigte sich sehr schnell, dass die Erfüllung der

Restriktionen für die Steifigkeitslastfälle 1 und 2 ein Problem darstellt. Dies lag an der Modellierung der Aluminiumrahmenstruktur. Daraus resultierte zunächst das unzulässige Optimierungsergebnis in Abb. 5.17(a). Daher wurde wiederum davon abgesehen, die Vorgaben aus dem Lastenheft im Detail einzuhalten und es wurde versucht, eine möglichst steife Struktur für die gegebenen Lasten zu finden. Somit blieb nur die Beschränkung der verwendeten Masse als Restriktion über, wodurch sich das Resultat in Abb. 5.17(b) ergab.

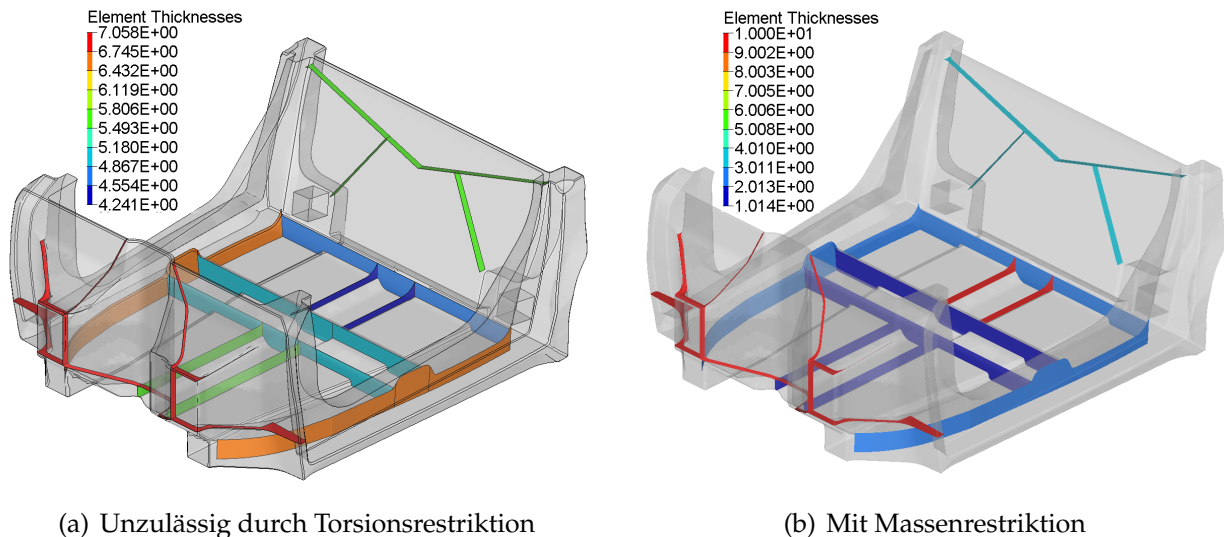


Abbildung 5.17.: Dimensionierungsergebnisse

In beiden Ergebnissen wird die hohe Bedeutung der Verstreibung durch die niedrigen Rippen im Vorderwandbereich der Wanne deutlich. Die verhältnismäßig geringe Fläche dieser Verrippung erlaubt schon mit wenig Materialeinsatz große Reduktionen der Nachgiebigkeit und liegt folglich beim Maximalwert der Optimierungsvariablen. Die Quertunnelverstreibungen spielen hingegen eine untergeordnete Rolle und weisen relativ geringe Dicken auf. Auffallend beim Vergleich der beiden Ergebnisse ist, dass sie in einigen Bereichen völlig gegenläufig sind. So liegt in Abb. 5.17(a) die hintere Verstreibung des Mittel隧nells bei minimaler, in Abb. 5.17(b) hingegen bei maximaler Wandstärke. Für die Einordnung der widersprüchlichen Resultate bedürfte es weiterführender Untersuchungen, um die exakten Einflüsse der Lastfälle und jeweiligen Restriktionen zu verstehen und etwaige geometrische Probleme des Modells modellierungsseitig zu beheben. Dennoch wird die hohe Bedeutung der Verrippung im vorderen und hinteren Wannenbereich deutlich. Die Berücksichtigung derartiger Versteifungen verbessert die Leistungsfähigkeit der Struktur deutlich und bringt wenig Zusatzgewicht in die Konstruktion ein.

In der Praxis wird der zusätzliche Fertigungsaufwand eine wichtige Rolle spielen, da die Verklebung der Segmente die Fertigung deutlich verkompliziert, wenn die Versteifungskonstruktionen eingebracht werden. Im Rahmen der vorgestellten Untersuchung wurden diese Einflüsse nicht weiter betrachtet.

## 5.3 Diskussion der Ergebnisse und Ausblicke

Die praktische Anwendung der Topologie- und Dimensionsoptimierung hat gezeigt, welche Herausforderungen deren Einsatz bei einer größeren Anzahl von Anforderungen nach sich ziehen kann. Grundsätzlich ist die Berücksichtigung der Restriktionen für das Ergebnis einer Optimierung essentiell, da nur so ein Entwurf gefunden werden kann, der tatsächlich alle Lastszenarios aushält. Dies setzt jedoch auch eine äußerst exakte Modellierung voraus, sodass Modellierungseffekte, die beispielsweise schnell starken Einfluss auf die Spannungen nehmen, die Optimierung nicht zu stark beeinflussen. Für die vorgestellten Optimierungen wurden die Anforderungen an den Entwurf daher modifiziert, da die Ergebnisse der Topologieoptimierung ohnehin nicht mit der tatsächlichen Konstruktion zu vergleichen sind. Auch waren die Grenzwerte, die Bauraumgeometrie und Parameter der Konstruktion nicht final festgelegt und unterlagen teils starken Veränderungen über die Projektdauer. Somit ist eine detaillierte Erfüllung von Restriktionen in der frühen Projektphase gar nicht notwendig. Trotz der Vernachlässigung von Restriktionen können wertvolle Erkenntnisse zu Lastpfaden gewonnen werden. Durch die Beiträge der Lastfälle zu der gewichteten Summe der Nachgiebigkeit kommt es zu einer lastniveauabhängigen Ausbildung der Struktur, die entscheidende Hinweise für den Konstrukteur liefert. Dabei darf aber keinesfalls übersehen werden, dass die Konstruktion am Ende das Lastenheft erfüllen muss und die Vernachlässigung von Restriktionen die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse verringert. In jedem Fall ist dann für den Festigkeitsnachweis eine weitere Berechnungsiteration notwendig.

Die Erfüllung des Lastenheftes sollte im vorliegenden Fall eher konstruktionsseitig sichergestellt werden, da beispielsweise die Topologieoptimierung diskretisierungsbedingt gar nicht die Möglichkeit hat, wichtige konstruktive Merkmale wie Hohlprofile darzustellen. Schlussfolgerung ist hier also, dass der Einsatz der Optimierung nicht die finale Konstruktion liefern kann, sondern auf dem Weg dorthin wertvolle Hinweise an den Ingenieur liefert. Der Einsatz der konzeptionellen Optimierungsverfahren bedarf dabei einiger Erfahrung, um die Ergebnisse richtig zu interpretieren und sie in eine fertigbare Konstruktion umzusetzen.

Der hohe Aufwand, der sich bei der Berechnung von Strukturantworten bei der gewählten Diskretisierung ergibt, macht einen möglichen Einsatz von Reduktionsverfahren, wie sie in Kapitel 3 dargestellt wurden, erstrebenswert. Die Topologieoptimierung ist jedoch besonders durch eine sehr hohe Anzahl an Optimierungsvariablen gekennzeichnet. Wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt, spielt gerade dieser Faktor eine entscheidende Rolle für die Anwendbarkeit der Reduktion, da das Approximationsvermögen und die Unterraumdimension entscheidend von der Zahl der Variablen abhängt. So ergibt sich für den Projektionsraum gemäß der Darstellungen in Abschnitt 2.6.2 eine äußerst hohe Anzahl an Basisvektoren, die in der Größenordnung der Freiheitsgrade liegt. Daraus folgt, dass kein nennenswerter Reduktionsgrad und folglich keine Effizienzsteigerung erzielt werden kann. Ferner steigt der Speicherbedarf für die Einflussmatrizen, die die Parametereinflüsse auf die Systemmatrizen beschreiben, auf eine Weise, die die Durchführung des Verfahrens nur für Sonderfälle zulässt. Aus diesen Gründen sind die Verfahren aus Kapitel 3 bei Topologieoptimierungen praktisch nicht anwendbar.

Für die Dimensionierung der Versteifungskonstruktion lagen hingegen nur sieben Parameter vor. Allerdings müsste der Unterraum hier komplexe Biegungen der Versteifungen abbilden können und daher wären höhere Stufen des *Krlyov*-Raumes notwendig, was wiederum die Dimension des Projektionsraumes vergrößert. In diesem Anwendungsfall ist ein

Einsatz von projektiven Reduktionsmethoden jedoch nicht ausgeschlossen. Die nähere Untersuchung der Durchführbarkeit setzt den Export der Systemsteifigkeitsmatrizen voraus, was für die verwendete Software gerade bei der gegebenen, großen Systemdimension nicht ohne weiteres möglich ist. Deshalb konnte die Anwendung der in Abschnitt 2.5 beschriebenen projektiven Reduktionsmethoden in dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, erscheint jedoch als interessanter Gegenstand weiterer Forschung.

Wie beschrieben handelt es sich bei der Fahrzeugstruktur von *VisioM* um eine Metall-CFK-Mischbauweise. Die dafür einzusetzenden, unterschiedlichen Fertigungsverfahren bringen jeweils ganz eigene Herstellungsrestriktionen mit sich, deren Berücksichtigung im Optimierungsprozess ähnlich den in Abschnitt 4 dargestellten Methoden erfolgen könnte. Beispielsweise wäre es in der Topologieoptimierung denkbar, Forderungen an die Form der Metallstreben des Rahmens zu stellen. Die Schweißkonstruktion soll in den meisten Fällen aus geraden Profilen aufgebaut sein, sodass es sinnvoll ist, diese Forderung bei der Optimierung zu berücksichtigen. Im Falle einer CFK-Bauweise wäre eine flächige Struktur mit linienhaften Verbindungen der Baugruppen erstrebenswert. Die Ausbildung solcher Geometrien ist jedoch stark von der zur Verfügung stehenden Auflösung des Bauraumes mit Finiten-Elementen abhängig. Auf welche Weise solche Anforderungen mathematisch für die Optimierung zu formulieren sind, muss im einzelnen untersucht werden. Die Beschreibung geradliniger Rahmenstreben könnte beispielsweise anhand von Dichtegradientenvektoren erfolgen, wie sie in Abschnitt 4.6.1.1 beschrieben wurden.

Aufgrund des Prototypencharakters von *VisioM* wäre der Einsatz additiver Fertigungsverfahren für geeignete Strukturbauteile denkbar. Dabei liegen unter anderem Größenbeschränkungen vor, die sich aus den Dimensionen der Fertigungsanlagen ergeben. Ein mögliches Einsatzgebiet ist die Herstellung von Rahmenknotenpunkten mittels additiver Fertigung, was zu einer zusätzlichen Gestaltungsfreiheit für die Gesamtkonstruktion führt. Bei der Auslegung dieser Verbindungselemente ist die Anwendung der in Abschnitt 4.6 vorgestellten Verfahren zur Vermeidung von Überhängen eine Möglichkeit, den Fertigungsprozess nach Gesichtspunkten der Herstellungskosten zu beeinflussen.



---

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden Strukturoptimierungsmethoden hinsichtlich Recheneffizienzsteigerung sowie Verbesserung der praktischen Anwendbarkeit untersucht, erweitert und bewertet. Abschließend wird ein praktischer Anwendungsfall vorgestellt und eine Lösungsstrategie entwickelt, durch die die Herausforderungen aus der Modellierung berücksichtigt werden können.

Die Untersuchung des Zusammenwirkens von Strukturoptimierung und Modellordnungsreduktion erfolgte zunächst durch Optimierungen auf Grundlage von projizierten, parametrisierten Differentialgleichungssystemen. Dazu wurden die Systemmatrizen in den Optimierungsvariablen linearisiert und ein *Krylov*-Raum als Projektionsbasis abgeleitet. Anschließend erfolgte die Reduktion des parametrisierten Systems durch Projektion auf den ermittelten Vektorunterraum. Dabei zeigte sich, dass die Genauigkeit der reduzierten Modelle nur in einfachen Fällen hinreichend war. Der Reduktions- und Rechenprozess setzte des weiteren viel Erfahrung und Parameteranpassungen seitens des Anwenders voraus.

Um diese Probleme zu lösen und ausreichend genaue Approximationen berechnen zu können, wurde eine Methodik entwickelt, nach der zunächst die parameterabhängigen Systemmatrizen zu assemblieren waren. Die Lösung erfolgte auf einem Vektorunterraum, der durch die Haupttraumanalyse eines Versuchsplans ermittelt wurde. Während der Optimierungssiterationen konnten durch die Verwendung von neu gewonnenen Informationen aus dem Optimierungslauf dynamische Modifikationen der Projektionsbasis vorgenommen werden. Dies führte zu erheblichen Genauigkeitssteigerungen bei den Systemantworten.

Der Aufwand für die Bestimmung der Reduktionsbasis ist bei diesem Vorgehen sehr gering, da die Auswertungen des Versuchsplans als Initialgeneration der evolutionären Strategie verwendet werden. Die Abweichung vom ursprünglichen Berechnungsprozess umfasst jeweils die Projektion auf den Unterraum, die Lösung des reduzierten linearen Gleichungssystems und die Rückprojektion in den physikalischen Raum. Die Gegenüberstellung der Rechenzeiten dieser Schritte und der Dauer des Lösungsprozesses ohne Reduktion ergab ein großes, zeitliches Einsparpotential.

Bezogen auf die Gesamtberechnungsdauer fiel die Einsparung jedoch geringer aus, da administrative Prozessschritte einen erheblichen Anteil an der Rechenzeit hatten. Dieser Nachteil kann durch eine enge Verknüpfung von Optimierungsalgorithmus, Finite-Elemente-Programm und Reduktionssoftware behoben werden. Dies sollte Gegenstand weiterer Forschung sein.

Mit jeder weiteren Systemauswertung innerhalb der evolutionären Strategie, akkumuliert

die Rechenzeitersparnis. In Abb. 6.1 ist erkennbar, wie sich der hohe anfängliche Reduktionsaufwand durch die wiederholte Verwendung der Reduktionsbasis ab dem Kostengleichgewichtspunkt lohnt.

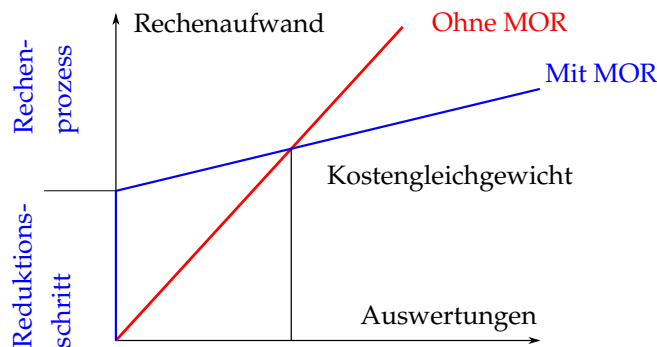


Abbildung 6.1.: Prinzipskizze des Aufwandsvergleichs mit und ohne Reduktion

Eine Abschätzung, ob dieser Punkt während der Optimierung überschritten wird, ist bei Gradientenverfahren schwerer vorhersagbar als bei den reduktionsbasierten, evolutionären Strategien. Dies folgt aus der einfacheren Abschätzbarkeit der Anzahl der zu berechnenden Systemauswertungen bei den stochastischen Verfahren und daraus, dass die Anzahl vergleichsweise groß ist.

In einer zweiten Untersuchung wurde die direkte Berücksichtigung von Fertigungsanforderungen in der Optimierung betrachtet. Dieser Forschungsgegenstand bekommt seine Bedeutung daher, dass mit dem Übergang vom Optimierungsergebnis zum fertigen Bauteil ein sehr hoher Aufwand und eine Verschlechterung des Bauteils in Bezug auf dessen mechanische Leistungswerte einhergeht. Die Untersuchungen hierzu erfolgten am Beispiel der Topologieoptimierung im Zusammenspiel mit der generativen Fertigung, die bereits industriell für die Herstellung von Zielbauteilen eingesetzt wird.

Das betrachtete Herstellungsverfahren zeichnet sich durch seine große Flexibilität bei der Fertigung komplexer Geometrien aus und ist daher besonders für die Umsetzung topologieoptimierter Bauteile geeignet. Durch den schichtweisen Aufbau ergibt sich aus Genauigkeits- und Baubarkeitsanforderungen jedoch auch die Notwendigkeit, Stützstrukturen für Bereiche mit überhängender Geometrie zu verwenden. Diese Überhänge der Topologie lassen sich anhand des Winkels der Strukturoberfläche gegenüber der Baurichtung und der Kragweite charakterisieren. Da diese unterstützenden Hilfsstrukturen wieder entfernt werden müssen, ergeben sich Material- und Zeitverluste, die die derzeit noch teure und langsame generative Fertigung gegenüber anderen Verfahren benachteiligen.

Daher wurden Optimierungsmethoden entwickelt, die durch die Penalisierung der Zielfunktion Entwürfe bevorzugen, die weniger ausgeprägte geometrische Überhänge aufweisen. Die Methoden verwenden jeweils die Dichteverteilung, die durch die Optimierungsvariablen gegeben ist. Zum einen werden Verfahren angewendet, die für jedes Element ein bestimmtes Prüfgebiet betrachten und anhand des Materialinhalts bewerten, wie gut das Element auch ohne Hilfsstruktur abgestützt wird. Daraus ergibt sich von jedem finiten Element des Bauraumes ein Beitrag zum Strafterm der Zielfunktion. Zum anderen wird eine Methodik betrachtet, die den Dichtegradienten bestimmt und auf Grundlage dieser Information die Penalisierung ermittelt.

Es konnte gezeigt werden, dass mit den vorgestellten Lösungsansätzen die Ergebnistopolo-



---

gie in erwünschter Weise beeinflusst werden kann. Über die Gewichtung von Nachgiebigkeit und Strafterm im Rahmen der Mehrzieloptimierung wird Einfluss auf die Ausprägung der Struktur genommen und der Grad der Einhaltung von Forderungen an die Geometrie beeinflusst. Dieser Kontrollgewinn muss jedoch durch oft erhebliche Rechenzeitzuwächse erkaufte werden. Diese ergeben sich in erster Linie aus kleinen Oszillationen des Konvergenzverlaufs, auf Grund derer das Konvergenzkriterium nicht aktiv wird. Kann dieses Verhalten der Zielfunktion unterdrückt werden, so wird auch die Anzahl an Iterationen und damit der Berechnungsaufwand viel geringer ausfallen. Möglicherweise lässt sich dies durch dämpfende Filter erreichen, die Untersuchungsgegenstand weiterer Forschung sein sollten. Trotz der Herausforderungen, die bei der praktischen Anwendung der Ansätze identifiziert wurden, zeigten die verwendeten Penalisierungsmethoden zielführende Ergebnisse, um geeignete Topologien im Hinblick auf die Anforderungen der generativen Fertigung zu ermitteln.

Nach der Untersuchung von Methoden für die Effizienzsteigerung und der Integration von Fertigungsrestriktionen in der Strukturoptimierung, wird zuletzt ein praktischer Anwendungsfall der Strukturoptimierung im Rahmen des Projektes *VisioM* vorgestellt. Das mechanische System unterlag einer großen Anzahl von Anforderungen und der Bauraum wies eine sehr feine Diskretisierung auf. Daraus ergaben sich Herausforderungen bei der Durchführung der Optimierung und es konnte unter strenger Berücksichtigung aller Restriktionen keine Lösung des Topologieoptimierungsproblems gefunden werden. Der Grund hierfür war das Zusammenwirken von hohem Rechenaufwand und dem Abstraktionsgrad der Modellierung. Beispielsweise mussten dynamische Lastfälle, wegen ihres hohen Berechnungsaufwandes, durch statische Ersatzlastfälle näherungsweise berücksichtigt werden. Die Limitierung des Auflösungsgrades der Diskretisierung durch den Rechenaufwand führte dazu, dass Spannungseffekte nicht genau genug zu ermitteln waren und zu einem unzulässigen Entwurf führten. Daher wurde unter Einschränkung der Aussagekraft der Optimierung das Anforderungsprofil dahingehend modifiziert, dass Restriktionen abgeschwächt oder vernachlässigt wurden.

Speziell durch die Topologieoptimierung, die konzeptionelle Resultate liefert, konnten trotz des Verlustes an Aussagekraft hilfreiche Ergebnisse erzielt werden, die die Ermittlung einer günstigen Rahmenstruktur unterstützen. Die geringe Robustheit führte zwar zu abweichenden Optimaltopologien. Jedoch konnten durch den Abgleich mit Einzellastfallergebnissen die wichtigsten Lastpfade identifiziert werden. So stützten die Erkenntnisse aus der Optimierung die Entscheidung für den Einsatz einer Monocoque-Struktur im Fahrgastraum des Elektrofahrzeugs.

Für die sich daraus ergebende Wannenstruktur wurde die Lastabtragung in der Strukturaußenhaut und dem umschlossenen Raum untersucht, um optimale Dickenverteilungen und Versteifungspositionen im Inneren zu finden. Es wurde wiederum deutlich, dass für die gegebene Aufgabenstellung die Durchführung der Optimierung mit den detaillierten Restriktionen aus numerischen Gründen weder möglich noch aus Sicht der Interpretation sinnvoll war. Die ingenieurmäßige Anpassung ausgewählter Anforderungen und der Abgleich der Optimierungsergebnisse unterschiedlicher Optimierungsverfahren war für den vorliegenden Anwendungsfall zielführend, um konzeptionell die optimalen Versteifungsmaßnahmen an der Struktur zu identifizieren.



# A

## Anhang

### A.1 Generisches Testmodell: Schwingerkette

Die Schwingerkette ist ein sehr einfaches Modell, das für schnelles Rechnen und einfache Variation der Systemdimension konzipiert ist. Die Definition der Freiheitsgrade ist Abb. A.1 zu entnehmen. Jeder Punktmasse ist ein FHG in x-Richtung zugewiesen. Die Punktmassen sind durch viskose Dämpfer und Federn miteinander gekoppelt.

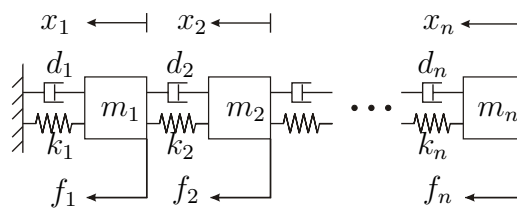
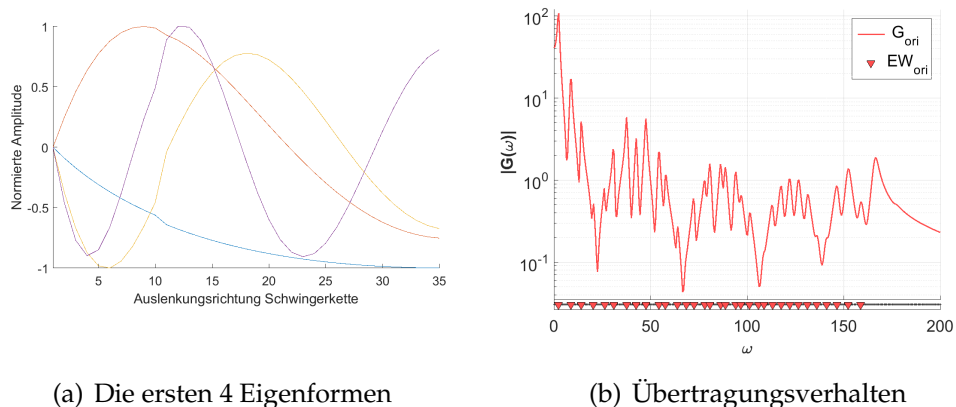


Abbildung A.1.: Aufbau der Schwingerkette

Das Modell ist als MATLAB Funktion implementiert und Parametrierungen können beliebig für Dämpfer oder Feder-elemente eingebracht werden. Beispielhaft sind in Abb. A.2 die Eigenformen und ein Nachgiebigkeitsfrequenzgang dargestellt.

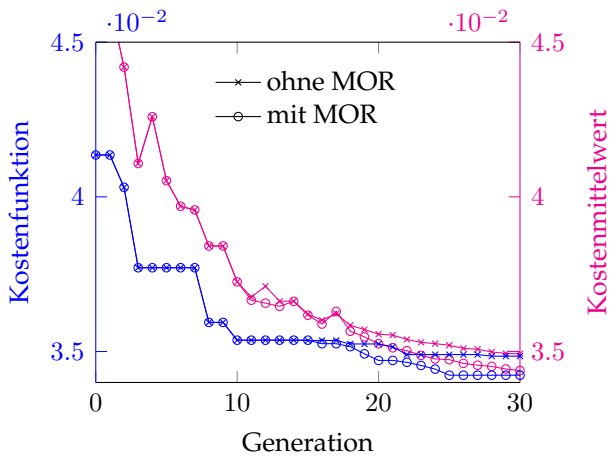


(a) Die ersten 4 Eigenformen

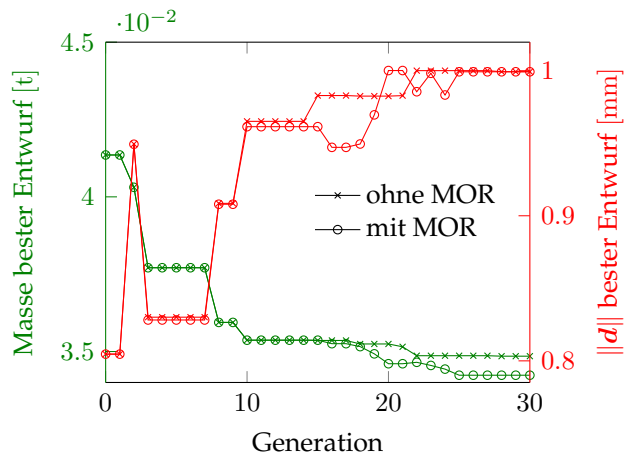
(b) Übertragungsverhalten

Abbildung A.2.: Dynamisches Verhalten der Schwingerkette

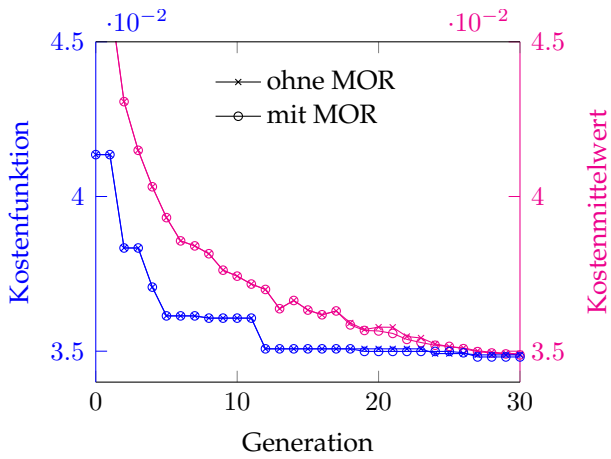
## A.2 Vergleichsläufe der ES (vgl. Abbildung 3.19)



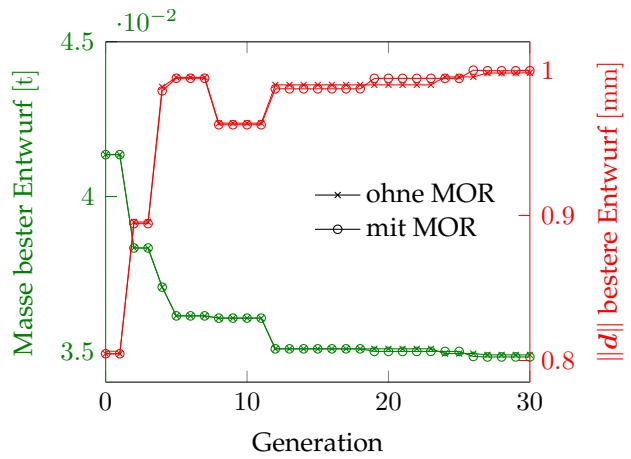
(a) 1. Lauf: Kosten



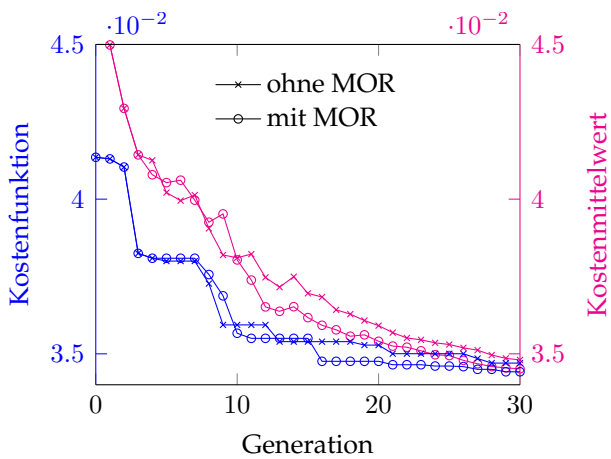
(b) 1. Lauf: Systemantworten



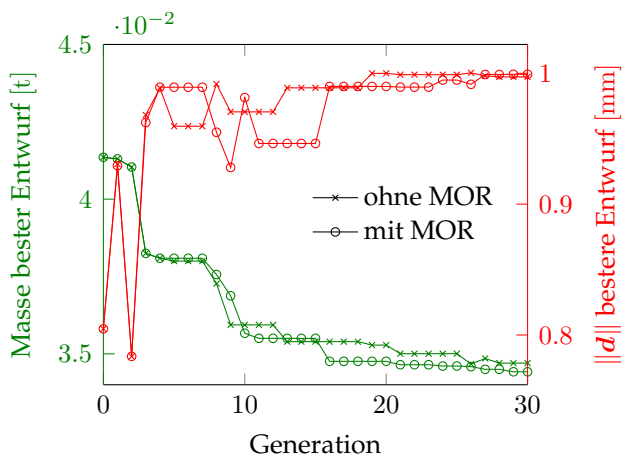
(c) 2. Lauf: Kosten



(d) 2. Lauf: Systemantworten



(e) 3. Lauf: Kosten



(f) 3. Lauf: Systemantworten

Abbildung A.3.: Konvergenz der Optimierung

### A.3 Vergleichsläufe mit modifizierter Projektionsbasis (vgl. Abbildung 3.21)

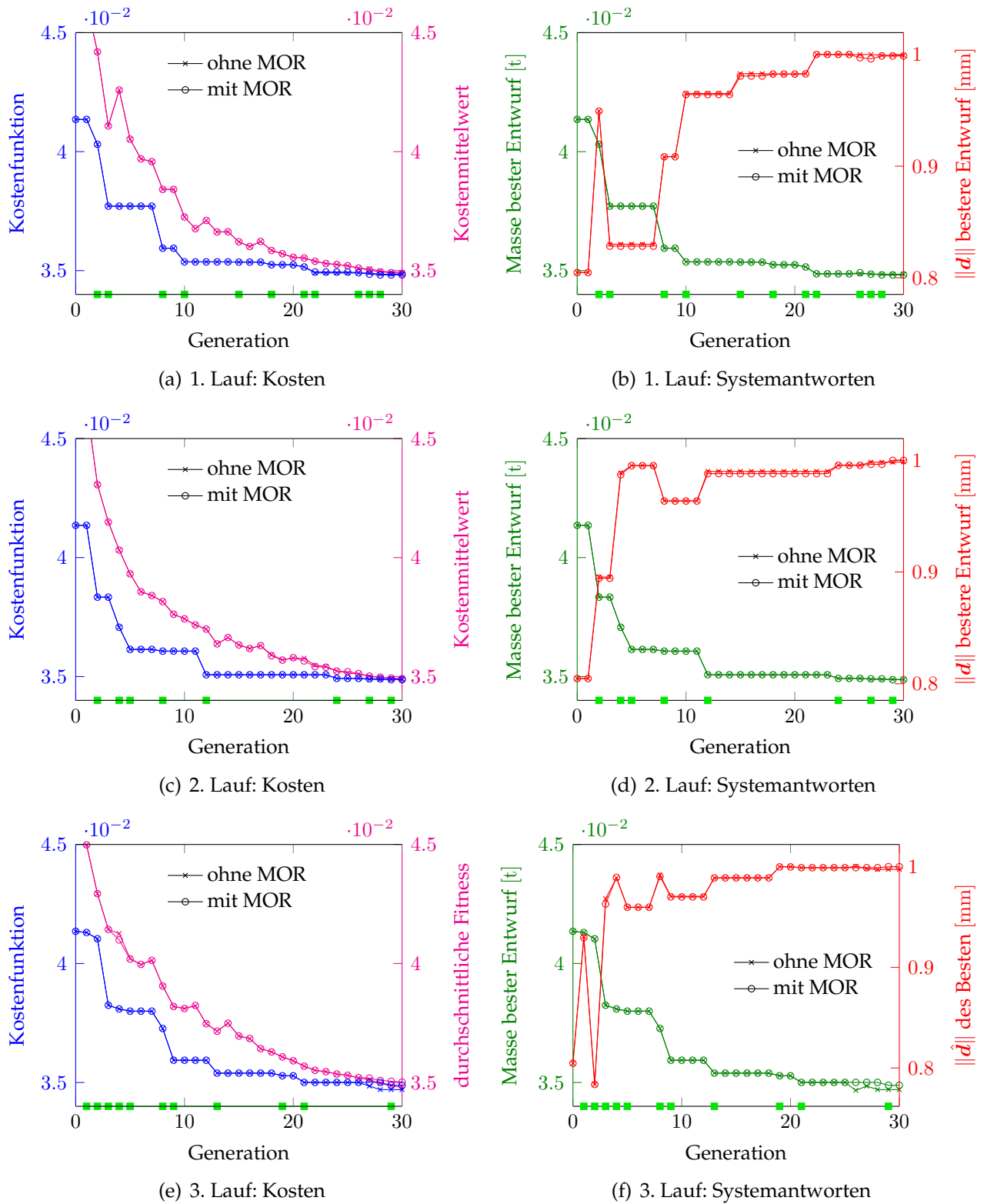


Abbildung A.4.: Konvergenz der Optimierung mit modifizierter Projektionsbasis

## A.4 Werte des Modellproblems in Abschnitt 3.3.1

Parameter	Standardwert	Beschreibung
$E$	210 GPa	Elastizitätsmodul
$\nu$	0.30	<i>Poisson-Zahl</i>
$\rho$	7.80 g cm <sup>-3</sup>	Dichte
$F$	100 N	Betrag der Knotenkräfte je belastetem Eckknoten
$d_{\max}$	1 mm	Maximalbetrag der Verschiebung am Eckknoten
$x_{\max,1}$	150 mm	Max. Skalierung des 1. Formbasisvektors
$x_{\max,2}$	100 mm	2. Formbasisvektor
$x_{\max,3}$	150 mm	3. Formbasisvektor
$x_{\max,4}$	5 mm	Maximale Dicke der Rippen
$x_{\max,5}$	5 mm	Maximale Dicke der Bodenplatte
$x_{\max,6}$	5 mm	Maximale Dicke des Riegels
$x_{\min,1}$	0 mm	Min. Skalierung des 1. Formbasisvektors
$x_{\min,2}$	-100 mm	2. Formbasisvektor
$x_{\min,3}$	0 mm	3. Formbasisvektor
$x_{\min,4}$	1 mm	Minimale Dicke der Rippen
$x_{\min,5}$	1 mm	Minimale Dicke der Bodenplatte
$x_{\min,6}$	1 mm	Minimale Dicke des Riegels

Tabelle A.1.: Parameter des Modellproblems mit Kurzbeschreibung.

## A.5 Algorithmusparameter für Abschnitt 3.3.5

Parameter	Standardwert	Beschreibung
$\mu$	15	Populationsgröße
$\kappa$	10	Anzahl der Eliten
$\lambda$	20	Anzahl der Kinder
$r_d$	1	Penalty Parameter für Verschiebungsrestriktion
$n_\tau$	3	Turniergröße für Elternselektion
$P_m^{\mu+\lambda}$	1	Mutationswahrscheinlichkeit bei $(\mu + \lambda)$ -Strategie
$P_c^{\mu+\lambda}$	0.20	Wahrscheinlichkeit für Crossover
$P_m^{\mu,\lambda}$	0.30	Mutationswahrscheinlichkeit bei $(\mu, \lambda)$ -Strategie
$P_c^{\mu,\lambda}$	0.20	Wahrscheinlichkeit für Crossover

Tabelle A.2.: Parameter des eingesetzten evolutionären Algorithmus

## A.6 Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.18) für maximale Strukturdurchmesser

Durch den Einfluss mehrerer Elemente auf den Wert der Straffunktion verkompliziert sich die Gradientenberechnung. Im Weiteren ist die Ableitung des Strafterms für die Elemente des Bauraumes gegeben.

$$\frac{\partial S_{oj}}{\partial x_i} = \frac{\partial S_{oj}}{\partial c_{oj}^v} \cdot \frac{\partial c_{oj}^v}{\partial x_i} \quad \text{mit } j, i \in \{1, \dots, n_{el}\} \quad (\text{A.1})$$

Die jeweiligen Ableitungen sind durch

$$\frac{\partial S_{oj}}{\partial c_{oj}^v} = -\alpha_2(1 + \underline{c}_o^v - \alpha_1)[1 - c_{oj}^v]^{\alpha_2-1} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{oj}^v}{\partial x_i} &= \frac{1}{\sum_{j \in \Omega_o^j} v_j} \frac{\partial}{\partial x_i} V_o^v(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{j \in \Omega_o^j} v_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j \in \Omega_o^j} v_j (1 - x_j)^{\eta_o} = \\ &= \frac{1}{\sum_{j \in \Omega_o^j} v_j} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i (1 - x_i)^{\eta_o} = -\frac{1}{\sum_{j \in \Omega_o^j} v_j} v_i \eta_o (1 - x_i)^{\eta_o-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

gegeben.

## A.7 Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.24)

Da sich das jeweilige Element  $i$ , nach dessen Dichte abgeleitet wird, in mehreren Prüfgebieten  $\Omega_{\square}^e$  befinden kann, sind entsprechend alle betroffenen Strafterme  $S_{\square}^e$  zu berücksichtigen.

$$\frac{\partial S_{\square}}{\partial x_e} = \sum_{j \in \Omega} \frac{\partial S_{\square}^j}{\partial x_e} \quad \text{Schleife über alle Strafterme}$$

Für die jeweiligen Strafterme müssen dann die im Prüfgebiet enthaltenen Elemente betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\square}^j}{\partial x_e} &= \alpha_2 \left[ (1 + \bar{c}^v - \alpha_1) c_{\square j}^v(\mathbf{x}) \right]^{\alpha_2 - 1} \cdot (1 + \bar{c}^v - \alpha_1) \frac{\partial c_{\square j}^v}{\partial x_e} \\ \frac{\partial c_{\square j}^v}{\partial x_e} &= \frac{\partial V_{\square j}^v}{\partial x_e} / \sum_{i \in \Omega_{\square}^j} v_i \\ \frac{\partial V_{\square j}^v}{\partial x_e} &= -\eta_{\square} (x_e)^{(\eta_{\square} - 1)} v_e \quad \text{für } e \in \Omega_{\square}^j \end{aligned}$$

## A.8 Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.26)

Für das Stützkegelverfahren gelten die gleichen Rahmenbedingungen wie in Abschnitt A.7. Für den Strafterm  $S_{\Delta}^e$  in Beziehung (4.26) ergibt sich die Ableitung gemäß den Folgenden Formeln.

$$\frac{\partial S_{\Delta}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial S_{\Delta x}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} S_{\Delta p}^e(\mathbf{x}) + S_{\Delta x}^e(\mathbf{x}) \frac{\partial S_{\Delta p}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad \text{mit } e, k \in \{1, \dots, n_{el}\} \quad (\text{A.4})$$

Die beiden Ableitungen in den Summanden ergeben dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\Delta x}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - x_{min})^q = \begin{cases} q(x_i - x_{min})^{q-1} & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \frac{\partial S_{\Delta p}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (1 - \phi_{\Delta}^e(\mathbf{x})) = -\frac{\partial \phi_{\Delta}^e(\mathbf{x})}{\partial c_{\Delta}^e(\mathbf{x})} \frac{\partial c_{\Delta}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} \end{aligned}$$



Die Ableitung der kontinuierlichen Stufenfunktion ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{\Delta}^e(\mathbf{x})}{\partial c_{\Delta}^e(\mathbf{x})} &= \frac{1}{\tanh(\beta_{\Delta} T_{\Delta}) + \tanh(\beta_{\Delta}(1 - T_{\Delta}))} \left[ 1 - \left( \tanh(\beta_{\Delta}(c_{\Delta}^e(\mathbf{x}) - T_{\Delta})) \right) \right] \beta_{\Delta} \\ \frac{\partial c_{\Delta}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} &= \begin{cases} \frac{\eta_{\Delta} v_k \hat{H}_{\Delta} x_k^{\eta_{\Delta}-1}}{\sum_{j \in \Omega_{\Delta}^e} v_j \hat{H}_{ij}} & \text{falls } k \in \Omega_{\Delta}^e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

## A.9 Gradient des Strafterms aus Gleichung (4.32)

Die analytische Formulierung der Ableitungen des Penalisierungsterms  $S$  nach den Optimierungsvariablen  $x_k$  hat die Form in Gleichung (A.6).

$$\frac{\partial S_{\Rightarrow}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial S_{\Rightarrow l}^e}{\partial x_k} S_{\Rightarrow d}^e + S_{\Rightarrow l}^e \frac{\partial S_{\Rightarrow d}^e}{\partial x_k} \quad \text{mit } e, k \in \{1, \dots, n_{el}\} \quad (\text{A.6})$$

Der Straftermanteil  $S_{\Rightarrow l}^e$  in Gleichung (A.6) hängt vom Betrag des Dichtegradientenvektors ab.

$$\frac{\partial S_{\Rightarrow l}^e(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \eta_{\Rightarrow} \|\mathbf{g}_{\Rightarrow e}\|^{(\eta_{\Rightarrow}-1)} \frac{\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e}{\partial x_k} \quad (\text{A.7})$$

Die Herleitung der Ableitung nach  $\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e / \partial x_k$  wird später noch beschrieben.

Die Ableitung des Straftermanteils  $S_{\Rightarrow d}^e$  berücksichtigt die Orientierung des Gradientenvektors und wird in mehrere partielle Ableitungen aufgegliedert.

$$\frac{\partial S_{\Rightarrow d}^e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (1 - \phi_{\Rightarrow}^e) = - \frac{\partial \phi_{\Rightarrow}^e}{\partial c_{\Rightarrow}^e} \frac{\partial c_{\Rightarrow}^e}{\partial \cos(\alpha_{\Rightarrow}^e)} \frac{\partial \cos(\alpha_{\Rightarrow}^e)}{\partial x_k} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \phi_{\Rightarrow}^e}{\partial c_{\Rightarrow}^e} = \frac{1}{\tanh(\beta_{\Rightarrow} T_{\Rightarrow}) + \tanh(\beta_{\Rightarrow}(1 - T_{\Rightarrow}))} \left[ 1 - \left( \tanh(\beta_{\Rightarrow}(c_{\Rightarrow}^e - T_{\Rightarrow})) \right) \right] \beta_{\Rightarrow} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial c_{\Rightarrow}^e}{\partial \cos(\alpha_{\Rightarrow}^e)} = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.10})$$

Die letzte der drei partiellen Ableitungen hängt von den gefilterten Gradienten ab.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos(\alpha_{\Rightarrow}^e)}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e \cdot \mathbf{n}_{br}}{\|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\|} \right) = \mathbf{n}_{br} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e}{\|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\|} \right) \\ &= \frac{\mathbf{n}_{br}}{\|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\|^2} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e}{\partial x_k} \|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\| - \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e \frac{\partial \|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\|}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Hierin ist die Filterung der Dichtegradienten in Gleichung (4.29) zu beachten, was mit den folgenden Gleichungen erfolgt.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\sum_j \hat{H}_{ej}^g \nabla x_j}{\sum_j \hat{H}_{ej}^g} \right) = \left( \frac{\sum_j \hat{H}_{ej}^g \frac{\partial \nabla x_j}{\partial x_k}}{\sum_j \hat{H}_{ej}^g} \right) \quad (\text{A.12})$$

Zuletzt muss noch die approximative Berechnung der Dichtegradienten in Abschnitt 4.6.1.1 berücksichtigt werden. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla x_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{A}_j \mathbf{b}_j(\mathbf{x})) = \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{b}_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \\ &= \mathbf{A}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} x_{j1} - x_j \\ x_{j2} - x_j \\ \vdots \\ x_{jn_{\text{kn}}} - x_j \end{pmatrix} = \mathbf{A}_j \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{j1}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \\ \frac{\partial x_{j2}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{jn_{\text{kn}}}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Die Ableitung der Knotendichten  $x_{jn}$  kann dann geschrieben werden:

$$\frac{\partial x_{jn}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{n_{\text{el}}} \sum_{l=1}^{n_{\text{el}}} x_l \right) = \begin{cases} \frac{1}{n_{\text{el}}} & \text{für alle Elemente } l \text{ des Knotens } n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Zuletzt bleibt noch die Herleitung der Ableitung der Norm des Dichtegradienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\|}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{g}_{\Rightarrow}^{eT} \cdot \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbf{g}_{\Rightarrow}^{eT} \cdot \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{g}_{\Rightarrow}^{eT} \frac{\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e}{\partial x_k}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Die benötigte Ableitung  $\partial \mathbf{g}_{\Rightarrow}^e / \partial x_k$  wurde bereits in Zusammenhang (A.12) beschrieben. Die Gleichung (A.16) bringt das Problem mit sich, dass für Dichtegradientenvektoren mit  $\|\mathbf{g}_{\Rightarrow}^e\| = 0$  durch Null geteilt wird. Das heißt, dass in Bereichen gleichmäßiger Dichteverteilung die Ableitung gegen Unendlich gehen kann. Für die Implementierung wurde daher der Vektor mit einem finiten kleinen Betrag und einer Ausrichtung entgegen der Baurichtung definiert, sodass Elemente dieser Bereiche keinen Beitrag zum Strafterm liefern. Dieses Vorgehen ist legitim, da Überhänge penalisiert werden sollen und diese sich in Bereichen großer Dichteänderung befinden.

Bei diesem Vorgehen ist zu beachten, dass für größer werdende Filterungsgebiete  $\Omega_f^e$  mit

zugehörigem Radius  $r_{fl}$  der Rechenaufwand stark ansteigt. Trotzdem die Ableitungen analytisch vorliegen und die geometrischen Zusammenhänge abgespeichert sind, ergibt die Verkopplung eine sehr große Anzahl an auszuführenden Rechenschritten, die die Gesamt-rechenzeit dominieren kann.

## A.10 Hardwarekonfiguration 1 und Programmversionen

Prozessor	Intel Core i5-3570 @ 3.4 GHz (4 CPUs)
Speicher	16 Gb DDR3 SDRAM @ 1600 MHz
Hauptspeicher	7200 RPM HDD
Betriebssystem	Windows 7 Enterprise 64-bit V. 6.1
MSC.NASTRAN	2012
PYTHON	2.7.6 32-bit
NUMPY	1.8.1
SCIPY	0.13.3
DEAP	1.0
MATLAB	R2015b

Tabelle A.3.: Für die Benchmarks des MOR-Verfahrens verwendetes Setup.

## A.11 Hardwarekonfiguration 2

Art	Bezeichnung
Prozessor	4x Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2637 v2 3.50GHz
Speicher	64482 MB RAM, 2054 MB swap

Tabelle A.4.: Hardwarekonfiguration für die Berechnung in Abschnitt 5.1.4



---

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Varianten von Optimierungsaufgaben . . . . .	8
2.2.	<i>Lagrange</i> -Funktion und <i>Lagrange</i> -Multiplikatoren . . . . .	11
2.3.	Unterscheidung von Strukturoptimierungsaufgaben . . . . .	14
2.4.	Mögliche Unterteilung von Optimierungsalgorithmen angelehnt an [60] . . .	15
2.5.	Ablauf Evolutionäre Strategie . . . . .	16
2.6.	Dimensionen der unterschiedlichen Teile der Ableitung . . . . .	19
2.7.	Zwei Ziele bei unterschiedlichen Gewichtungen . . . . .	20
2.8.	Beispiel zur Mehrzieloptimierung . . . . .	21
2.9.	Beschreibung des Dichte- Steifigkeitsverhältnisses . . . . .	23
2.10.	Aufwände bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ( $n_{\text{fng}} = 600$ ) . . . . .	27
2.11.	Übertragungsfunktion . . . . .	29
2.12.	Prinzipskizze eines Untervektorunterraumes des $\mathbb{R}^3$ . . . . .	31
2.13.	Projektionsprinzip: orthogonal und schief . . . . .	32
2.14.	Prinzip der <i>Householder</i> -Spiegelung . . . . .	33
2.15.	Grafische Veranschaulichung des <i>Gram-Schmidt</i> -Verfahrens . . . . .	34
2.16.	Darstellung der ersten drei Eigenvektoren . . . . .	36
2.17.	Schwingung des Eckpunktes bei verschiedenen Reduktionsdimensionen . . .	37
2.18.	Anzahl der Matrizen in der <i>Taylor</i> -Reihe . . . . .	40
2.19.	Projektion eines ZRM . . . . .	42
2.20.	Projektionsbasierte modellordnungsreduzierte Simulation . . . . .	42
2.21.	Ermittlung der ersten Hauptrichtung bei der POD . . . . .	45
2.22.	Verteilung der EW bei Reduktion des Systems 1. bzw. 2. Ordnung . . . . .	50
2.23.	Vergleich der TF für Verfahren 1. und 2. Ordnung . . . . .	50
2.24.	Einfluss der Entwicklungspunktlage $s_0$ . . . . .	51
2.25.	Approximationsgüte bei unterschiedlicher <i>Krylov</i> -Raumstufe . . . . .	52
2.26.	KR-Dimension bei verschiedenen $n_k$ und $n_t$ . . . . .	54
2.27.	QR-Zerlegung durch <i>Arnoldi</i> -Algorithmus . . . . .	56
2.28.	<i>Hessenberg</i> -Form durch <i>Arnoldi</i> -Algorithmus . . . . .	56
3.1.	Generisches Optimierungsmodell Balkentragwerk . . . . .	60
3.2.	Konvergenz von originalem und reduziertem System der Dimension 5 . . . .	61
3.3.	Vergleich des Verlaufs der Optimierungsvariablen . . . . .	61
3.4.	Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 5 . . . . .	62
3.5.	Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 3 . . . . .	62
3.6.	Optimierungsvariablen und Systemantworten bei Basisdimension 12 . . . . .	63
3.7.	Optimierungsvariablen und Systemantworten bei einer Basisdimension von 5	63
3.8.	Evolutionärer Algorithmus . . . . .	65
3.9.	Modellproblem . . . . .	66

3.10. Formbasisvektoren des Modellproblems . . . . .	66
3.11. Absoluter maximaler Verschiebungsfehler für verschiedene Versuchspläne . .	70
3.12. Verschiebungsantwort mit und ohne MOR . . . . .	71
3.13. Verschiebungsantworten für verschiedene DOEs . . . . .	72
3.14. Dauer der Berechnungsschritte der FEM-Lösung . . . . .	73
3.15. Rechenzeiten in Abhängigkeit der Unterraumdimension . . . . .	74
3.16. Rechenzeiten für verschiedene Modellgrößen und Implementierungen . . . .	75
3.17. Parameter im Reproduktionsschritt . . . . .	76
3.18. Penalisierungsfunktionsverläufe . . . . .	77
3.19. Konvergenz der Optimierung . . . . .	78
3.20. Optimale Form bei Anwendung der MOR und Basis-Update . . . . .	79
3.21. Konvergenz der Optimierung mit modifizierter Projektionsbasis . . . . .	79
4.1. Schichtaufbau der Geometrie bei generativer Fertigung . . . . .	84
4.2. Generisches Optimierungsmodell MBB-Balken . . . . .	87
4.3. Approximationen von $r(x)$ bei unterschiedlichen Asymptoten . . . . .	90
4.4. Vergleich der Berechnungsdauer bei OC und MMA . . . . .	91
4.5. Vergleich der Konvergenz von OC und MMA . . . . .	92
4.6. Filterungsprinzip und Gewichtung . . . . .	93
4.7. Effekt der „Checkerboard“-Filterung (Auflösung: 120×40) . . . . .	93
4.8. Einfluss des Netzes auf Ergebnistopologie und Nachgiebigkeit . . . . .	94
4.9. Einfluss der SIMP-Wert Abfolge . . . . .	94
4.10. Einfluss der Konvergenztoleranz auf die Topologie . . . . .	95
4.11. Einfluss verschiedener Konvergenztoleranzen . . . . .	95
4.12. Radien für Strukturdurchmesser . . . . .	96
4.13. Ergebnisse bei verschiedenen Filterradien (Diskretisierung: 80×240) . . . . .	97
4.14. Einflüsse auf die Straffunktion . . . . .	98
4.15. Vorgabe von maximalen Strukturdurchmessern (Auflösung: 100×300) . . . . .	99
4.16. Prinzipskizze eines theoretisch idealen Entwurfs . . . . .	99
4.17. Dichtegradient der Topologie und Approximationsschema . . . . .	100
4.18. Definition von Baurichtung und Grenzbereichen . . . . .	101
4.19. Identifizierte Überhänge ( $\ \nabla x\  \geq 0.105, \alpha = 45^\circ, \underline{x} = 0.45$ ) . . . . .	101
4.20. Geometrische Situation des elementbasierten Ansatzes . . . . .	102
4.21. Steuerung des Strafterms . . . . .	103
4.22. Vergleich verschiedener Überhangslängen $L_\square$ . . . . .	103
4.23. Vergleich der Konvergenz ohne und mit Penalisierung . . . . .	104
4.24. Kegelförmiger Prüfbereich . . . . .	105
4.25. $S_{\Delta p}^e$ zur Penalisierung einer unzureichenden Stützung . . . . .	106
4.26. Ergebnistopologie bei Stützkegelverfahren (Diskretisierung 120 × 40) . . . . .	106
4.27. Konvergenzverlauf während der Optimierung von 4.26(b) . . . . .	107
4.28. Nachgiebigkeit $N$ sowie Strafterm $k_\Delta \cdot S_\Delta^e$ . . . . .	107
4.29. Einfluss unterschiedlicher Gewichtungen $k_\Delta$ . . . . .	108
4.30. Einfluss von $\beta_\Delta$ (Diskretisierung: 120×40) . . . . .	108
4.31. Geometrische Situation des gradientenbasierten Ansatzes . . . . .	109
4.32. Vergleich des gefilterten mit dem ungefilterten Gradientenfeld . . . . .	110
4.33. Funktionen zur Definition des Strafterms . . . . .	110
4.34. Topologien ohne und mit Penalisierung, (Diskretisierung: 120×40) . . . . .	111
4.35. Konvergenzverhalten der Optimierung in Abb. 4.34(b) . . . . .	111

---

4.36. Nachgiebigkeit $N$ und Strafterm $k_{\Rightarrow} S_{\Rightarrow}$ . . . . .	112
4.37. Topologien bei höherer Gewichtung des Strafterm durch $k_{\Rightarrow}$ . . . . .	112
4.38. Topologien bei Variation von $\beta_{\Rightarrow}$ . . . . .	113
4.39. Topologien bei Variation von $\eta_{\Rightarrow}$ . . . . .	113
4.40. Topologien bei Variation von $r_{\Rightarrow}$ . . . . .	113
5.1. <i>Mute</i> Fahrzeugkarosserie . . . . .	116
5.2. Bauraum für die Topologieoptimierung . . . . .	117
5.3. FEM-Modellierung . . . . .	118
5.4. Konvergenz für Lastfall 1 . . . . .	122
5.5. Optimale Topologien für die Lastfälle 1 und 2 . . . . .	123
5.6. Optimale Topologien für die Lastfälle 4 und 5 . . . . .	123
5.7. Optimale Topologien für die Lastfälle 3 und 6 . . . . .	124
5.8. Optimale Topologien für die Lastfälle 8 und 10 . . . . .	124
5.9. Ergebnistopologie . . . . .	125
5.10. Konvergenzverlauf der Optimierung . . . . .	126
5.11. Konvergierte Dichteverteilung bei verschiedenen SIMP-Parametern . . . . .	126
5.12. Modell und Vernetzung . . . . .	127
5.13. Topologie- und Elementdickenoptimierung der Schalenstruktur . . . . .	128
5.14. Vergleich der Optimierungen der Schale . . . . .	129
5.15. Ergebnisse der Versteifungsidentifikationsrechnung . . . . .	130
5.16. Konvergenzverhalten der Volumentopologieoptimierung . . . . .	130
5.17. Dimensionierungsergebnisse . . . . .	131
6.1. Prinzipskizze des Aufwandsvergleichs mit und ohne Reduktion . . . . .	136
A.1. Aufbau der Schwingerkette . . . . .	139
A.2. Dynamisches Verhalten der Schwingerkette . . . . .	139
A.3. Konvergenz der Optimierung . . . . .	140
A.4. Konvergenz der Optimierung mit modifizierter Projektionsbasis . . . . .	141





---

# Tabellenverzeichnis

2.1.	Bestandteile der Optimierungsaufgabe nach [29]	10
2.2.	Rechenschritte bei der FEM	26
2.3.	Zahlenkörper der EW und EV in Abhängigkeit der Dämpfung	38
3.1.	Liste der betrachteten Versuchspläne	68
3.2.	Abstände von den Samples und Verschiebungsfehler	69
3.3.	Optimierungsergebnisse	78
4.1.	Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.26(b)	106
4.2.	Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.29	108
4.3.	Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.30	108
4.4.	Parameter für das Ergebnis in Abb. 4.34(b)	111
5.1.	Übersicht über die Lastfälle	117
5.2.	Grenzen für die Restriktionsdefinition	121
5.3.	Sortierte Nachgiebigkeiten der einzelnen Lastfälle	125
A.1.	Parameter des Modellproblems	142
A.2.	Parameter des eingesetzten evolutionären Algorithmus	142
A.3.	Hard- und Software	147
A.4.	Hardwarekonfiguration für die Berechnung in Abschnitt 5.1.4	147



---

# Literaturverzeichnis

- [1] ANTOULAS, Athanasios C.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005 <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718713>. – ISBN 978-0-89871-529-3
- [2] BÄCK, Thomas ; HAMMEL, Ulrich ; SCHWEFEL, Hans-Paul: Evolutionary Computation: Comments On The History And Current State. In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* Vol. 1 (1997), Nr. 1. <http://dx.doi.org/10.1109/4235.585888>. – ISSN 1089-778X
- [3] BAI, Zhaojun ; SU, Yangfeng: Dimension Reduction of Large-Scale Second-Order Dynamical Systems via a Second-Order Arnoldi Method. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* Vol. 26 (2005), Nr. 5, Seiten 1692-1709. <http://dx.doi.org/10.1137/040605552>. – ISSN 1064-8275
- [4] BAI, Zhaojun ; SU, Yangfeng: SOAR: A Second-order Arnoldi Method for the Solution of the Quadratic Eigenvalue Problem. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* Vol. 26 (2005), Nr. 3, Seiten 640-659. <http://dx.doi.org/10.1137/S0895479803438523>. – ISSN 0895-4798
- [5] BAIER, Horst ; SEESSELBERG, Christoph ; SPECHT, Bernhard: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Braunschweig : Vieweg, 1994 <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-90700-4>. – ISBN 3-528-08899-0
- [6] BAMPTON, M. C. C. ; CRAIG, R. R. JR.: Coupling of substructures for dynamic analyses. In: *AIAA Journal* Vol. 6 (1968), Nr. 7, Seiten 1313-1319. <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.4741>. – ISSN 0001-1452
- [7] BATHE, Klaus-Jürgen ; ZIMMERMANN, P.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002 <https://books.google.de/books?id=DKTIBDt0s1MC>. – ISBN 9783540668060
- [8] BENDSOE, Martin P.: Optimal shape design as a material distribution problem. (1989). <https://doi.org/10.1007/BF01650949>. – ISSN 1615-1488
- [9] BENDSOE, Martin P.: *Optimization of structural topology, shape, and material*. Berlin : Springer, 1995. – ISBN 9783540590576
- [10] BENDSOE, Martin P. ; SIGMUND, Ole: *Topology optimization: Theory, methods, and*

- applications*. 2. ed. Berlin [u.a.] : Springer, 2011 <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>. – ISBN 9783642076985
- [11] BENNER, Peter ; GUGERCIN, Serkan ; WILLCOX, Karen: A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems. In: *SIAM Review* Vol. 57 (2015), Nr. 4, Seiten 483–531. <https://doi.org/10.1137/130932715>. – ISSN 0036–1445
- [12] BETTEN, Josef: *Finite Elemente für Ingenieure 1*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2003 <https://doi.org/10.1007/978-3-642-55536-7>. – ISBN 978–3–642–62443–8
- [13] BETTEN, Josef: *Finite Elemente für Ingenieure 2: Variationsrechnung, Energiemethoden, Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten, Numerische Integrationen*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2004 <https://doi.org/10.1007/3-540-35030-6>. – ISBN 3–540–20447–4
- [14] BLOMGREN, Peter: *The QR-Factorization and Least Squares Problems: Gram-Schmidt and Householder: Numerical Matrix Analysis - Lecture Notes 07*. 2012
- [15] BOURDIN, Blaise: Filters in topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 50 (2001), Nr. 9, Seiten 2143–2158. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.116>. – ISSN 1097–0207
- [16] BRACKETT, D. ; ASHCROFT, I. ; HAGUE, R.: Topology Optimization for Additive Manufacturing. (2011). <https://sffsymposium.engr.utexas.edu/Manuscripts/2011/2011-27-Brackett.pdf>
- [17] BRONSTEIN, Ilja N. ; SEMENDJAJEW, Konstantin A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7., überarb. und erg. Aufl. Frankfurt am Main : Deutsch, 2008. – ISBN 9783817120178
- [18] BRUYNEEL, M. ; DUYSINX, P. ; FLEURY, Claude: A family of MMA approximations for structural optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 24 (2002), Nr. 4, Seiten 263–276. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-002-0238-7>. – ISSN 1615–147X
- [19] BUI-THANH, T. ; WILLCOX, Karen ; GHATTAS, O.: Model Reduction for Large-Scale Systems with High-Dimensional Parametric Input Space. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* Vol. 30 (2008), Nr. 6, Seiten 3270–3288. <http://dx.doi.org/10.1137/070694855>. – ISSN 1064–8275
- [20] COELLO, Carlos: Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. (2002), 01, Seiten 1245–1287. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00323-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00323-1)
- [21] CORREA, C. D. ; HERO, R. ; MA, K. L.: A comparison of gradient estimation methods for volume rendering on unstructured meshes. In: *IEEE transactions on visualization*

- 
- and computer graphics* Vol. 17 (2011), Nr. 3, Seiten 305–319. <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2009.105>. – ISSN 1077–2626
- [22] DAHMEN, Wolfgang ; REUSKEN, Arnold: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin, New York : Springer, 2006. – ISBN 978–3–540–25544–4
- [23] DANIEL, L. ; SIONG, O.C ; CHAY, L.S ; LEE, K.H ; WHITE, J.: A Multiparameter Moment-Matching Model-Reduction Approach for Generating Geometrically Parameterized Interconnect Performance Models. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* Vol. 23 (2004), Nr. 5, Seiten 678–693. [http://www.mit.edu/~dluca/publications/daniel\\_TRANS\\_2004\\_pmor.pdf](http://www.mit.edu/~dluca/publications/daniel_TRANS_2004_pmor.pdf). – ISSN 0278–0070
- [24] DAVISON, E.: A method for simplifying linear dynamic systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 11 (1966), January, Nr. 1, Seiten 93–101. <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1966.1098264>. – ISSN 0018–9286
- [25] DEATON, Joshua D. ; GRANDHI, Ramana V.: A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 49 (2014), Nr. 1, Seiten 1–38. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z>. – ISSN 1615–147X
- [26] DEGROOTE, Joris ; VIERENDEELS, Jan ; WILLCOX, Karen: Interpolation among reduced-order matrices to obtain parameterized models for design, optimization and probabilistic analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* (2009). <http://dx.doi.org/10.1002/flid.2089>. – ISSN 02712091
- [27] DIJK, N. ; MAUTE, K. ; LANGELAAR, M. ; KEULEN, F.: Level-set methods for structural topology optimization: a review. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 48 (2013), Sep., Nr. 3, Seiten 437–472. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0912-y>
- [28] DOYLE, S. ; DANIAL, A.: *pyNastran Documentation: Release 0.5.0-locr*. (2015). <https://media.readthedocs.org/pdf/pynastran-locr/latest/pynastran-locr.pdf>
- [29] ESCHENAUER, H.: *Rechnerische und experimentelle Untersuchung zur Strukturoptimierung von Bauteilen*. Universität Gesamthochschule Siegen : DFG Forschungsbericht, 1985
- [30] FARLE, O. ; HILL, V. ; INGELSTROM, P. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Ordnungsreduktion linearer zeitinvarianter Finite-Elemente-Modelle mit multivariater polynomieller Parametrierung. (2006). <http://dx.doi.org/10.1524/auto.2006.54.4.161>
- [31] FELDMANN, P. ; FREUND, R. W.: Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* Vol. 14 (1995), Nr. 5, Seiten 639–649. <http://dx.doi.org/10.1109/43.384428>. – ISSN 0278–0070
-

- [32] FENG, Lihong: Review of model order reduction methods for numerical simulation of nonlinear circuits. In: *Applied Mathematics and Computation* Vol. 167 (2005), Nr. 1, Seiten 576–591. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.066>. – ISSN 00963003
- [33] FISCHER, Gerd: *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011 <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9858-6>. – ISBN 978-3-8348-9858-6
- [34] FLEURY, C.: Structural weight optimization by dual methods of convex programming. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 14 (1979), Nr. 12, Seiten 1761–1783. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620141203>. – ISSN 1097-0207
- [35] FLEURY, C.: CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. In: *Structural optimization* Vol. 1 (1989), Jun, Nr. 2. <https://doi.org/10.1007/BF01637664>. – ISSN 1615-1488
- [36] FORTIN, F.-A. ; RAINVILLE, F.-M. de ; GARDNER, M.-A. ; PARIZEAU, M. ; GAGNÉ, C.: DEAP: Evolutionary Algorithms Made Easy. In: *Journal of machine learning research* Vol. 13 (2012), Seiten 2171–2175. <http://www.jmlr.org/papers/v13/fortin12a.html>
- [37] GANDER, Walter: Algorithms for the QR-Decomposition: Research Report No. 80-02. (1980)
- [38] GARDAN, Nicolas: Knowledge Management for Topological Optimization Integration in Additive Manufacturing. In: *International Journal of Manufacturing Engineering* Vol. 2014 (2014), Nr. 3, Seiten 1–9. <https://doi.org/10.1155/2014/356256>. – ISSN 2356-7023
- [39] GAYNOR, A.: *Topology Optimization Algorithms For Additive Manufacturing*. Baltimore, Maryland, The Johns Hopkins University, Diss., 2015. <http://jhir.library.jhu.edu/handle/1774.2/38009>
- [40] GEBHARDT, Andreas: *Generative Fertigungsverfahren: Additive manufacturing und 3D-Drucken für Prototyping - Tooling - Produktion*. 4., neu bearb. und erw. Aufl. München : Hanser, 2013 <https://doi.org/10.3139/9783446436527>. – ISBN 3446436529
- [41] GOLUB, G. ; KAHAN, W.: Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 2 (1965), Nr. 2. <https://doi.org/10.1137/0702016>
- [42] GUEST, J. K. ; PRÉVOST, J. H. ; BELYTSCHKO, T.: Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 61 (2004), Nr. 2, Seiten 238–254. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1064>. – ISSN 1097-0207
- [43] GUEST, James ; PREVOST, Jean: A Penalty Function for Enforcing Maximum Length

- Scale Criterion in Topology Optimization. In: *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference* (2006). <https://doi.org/10.2514/6.2006-6938>
- [44] GUYAN, Robert: Reduction of Stiffness and Mass Matrices. In: *AIAA Journal* Vol. 3 (1964), Nr. 2. <https://doi.org/10.2514/3.2874>
- [45] HAFTKA, Raphael T. ; GÜRDAL, Zafer: *Elements of structural optimization*. Bd. Vol. 11. 3rd rev. and expanded ed. Dordrecht and Boston : Kluwer Academic Publishers, 1992 <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2550-5>. – ISBN 9780792315056
- [46] HARZHEIM, Lothar: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. 1. Aufl. Frankfurt, M : Deutsch, 2008. – ISBN 978-3-8171-1809-0
- [47] HYPERWORKS, Altair: *OptiStruct Users Guide*. 2013
- [48] KIRANYAZ, Serkan ; INCE, Turker ; GABBOUJ, Moncef: Optimization Techniques: An Overview. Vol. 15 (2014), Seiten 13–44. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-37846-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37846-1_2)
- [49] KOUTSOVASILIS, Panagiotis: *Model Order Reduction in Structural Mechanics: Coupling the Rigid and Elastic Multi Body Dynamics*. Fahrzeugmodellierung und Simulation, Universität Dresden, Diss., 2009
- [50] KRIGE, d. g.: *A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems on the Witwatersrand*. publisher not identified, 1951
- [51] LANCZOS, Cornelius: An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. (1950)
- [52] LEUNG, Andrew Yee-Tak: An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 12 (1978), Nr. 11, Seiten 1705–1715. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620121108>. – ISSN 1097-0207
- [53] LIN, Liao: A Study of Inertia Relief Analysis. In: *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, (2011). <https://doi.org/10.2514/6.2011-2002>
- [54] LOHMANN, Boris ; SALIMBAHRAMI, Behnam: Introduction to Krylov Subspace Methods in Model Order Reduction. (2000)
- [55] LUTZ, Holger ; WENDT, Wolfgang: *Taschenbuch der Regelungstechnik: Mit MATLAB und Simulink*. 8., erg. Aufl. Frankfurt, M. : Deutsch, 2010. – ISBN 3817118597
- [56] MARLER, R. T. ; ARORA, J. S.: Survey of multi-objective optimization methods for en-

- gineering. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 26 (2004), Nr. 6, Seiten 369–395. <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0368-6>. – ISSN 1615–147X
- [57] MATTHECK, C.: Design and Growth Rules for Biological Structures and Their Application to Engineering. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* Vol. 13 (1990), Nr. 5, Seiten 535–550. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1990.tb00623.x>. – ISSN 8756–758X
- [58] MICHELL, A.G.M.: The limits of economy of material in frame-structures: LVIII. In: *Philosophical Magazine Series 6* Vol. 8 (1904), Nr. 47, Seiten 589–597. <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>. – ISSN 1941–5982
- [59] MOORE, Bruce: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability Observability and Model Reduction. (1981), Seiten 17–32. <https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102568>
- [60] MÜLLER, S. D.: *Bio-inspired optimization algorithms for engineering applications: No. 14719*. Zürich, ETH, Dissertation, 2002. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-004435353>
- [61] NATKE, Hans-Günter: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse: Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme*. 3., Aufl. 1992. Wiesbaden : Vieweg & Teubner, 2014 (Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften). <https://doi.org/10.1007/978-3-322-94266-1>. – ISBN 3322942678
- [62] NOCEDAL, Jorge ; WRIGHT, Stephen J.: *Numerical optimization*. 2. New York : Springer, 2006 (Springer series in operations research and financial engineering). <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>. – ISBN 978–0387–30303–1
- [63] O’CALLHAN, John: A Procedure for an improved reduced system (IRS) Model. In: *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference* (1989), S. Seiten 17–21
- [64] OPTISTRUCT, Altair: *Quick Reference Guide*. 2012
- [65] PANZER, Heiko: Parametric Model Order Reduction by Matrix Interpolation. In: *Automatisierungstechnik* (2010). <https://doi.org/10.1524/auto.2010.0863>
- [66] PEREZ, Ruben E. ; JANSEN, Peter W. ; MARTINS, JOAQUIM R. R. A.: pyOpt: a Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 45 (2012), Nr. 1, Seiten 101–118. <https://doi.org/10.1007/s00158-011-0666-3>. – ISSN 1615–147X
- [67] PILLAGE, Lawrence ; ROHRER, Ronald: Asymptotic waveform evaluation for timing analysis - Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. In: *IEEE Transactions* (1990), Seiten 352–366. <https://doi.org/10.1109/43.45867>



- 
- [68] RAO, Singiresu S.: *Engineering Optimization: Theory and Practice*. (2009). <https://doi.org/10.1002/9780470549124>. ISBN 9780470183526
- [69] SAAD, Yousef: *Iterative methods for sparse linear systems*. 2. Aufl. Philadelphia : SIAM, 2003 <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>. – ISBN 9780898715347
- [70] SAAD, Yousef: *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Rev. ed. Philadelphia and Pa : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011 <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>. – ISBN 1611970725
- [71] SACHS, Ekkehard W. ; VOLKWEIN, Stefan: POD-Galerkin approximations in PDE-constrained optimization. In: *GAMM-Mitteilungen* Vol. 33 (2010), Nr. 2, Seiten 194–208. <http://dx.doi.org/10.1002/gamm.201010015>. – ISSN 1522–2608
- [72] SALIMBAHRAMI, Behnam: *Structure preserving Order Reduction of Large Scale Second Order Models*, Technische Universität München, Dissertation, 31.10.2005
- [73] SALIMBAHRAMI, Behnam ; LOHMANN, Boris: Second Order Krylov Subspace for the Reduction of Second Order Systems. (2005)
- [74] SCHUMACHER, Axel: *Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005 <http://dx.doi.org/10.1007/b138046>. – ISBN 9783540267737
- [75] SIEBERTZ, Karl ; VAN BEBBER, David ; HOCHKIRCHEN, Thomas: *Statistische Versuchsplanung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010 <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-05493-8>. – ISBN 978-3-642-05492-1
- [76] SIEMENS, NX N.: *Nastran-Theoretical Manual*. (2014). [https://docs.plm.automation.siemens.com/data\\_services/resources/nxnastran/10/help/en\\_US/custom/theoretical/theoretical\\_NXN.pdf](https://docs.plm.automation.siemens.com/data_services/resources/nxnastran/10/help/en_US/custom/theoretical/theoretical_NXN.pdf)
- [77] SIGMUND, Ole: Morphology-based black and white filters for topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 33 (2007), Nr. 4-5, Seiten 401–424. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>. – ISSN 1615–147X
- [78] SIMIONATTO, V. ; MIYASATO, H.: Singular Mass Matrices and half Degrees of Freedom: A general method for system reduction. (2011). [http://www.researchgate.net/profile/Vinicius\\_Simionatto/publication/253596980\\_SINGULAR\\_MASS\\_MATRICES\\_AND\\_HALF\\_DEGREES\\_OF\\_FREEDOM\\_A\\_GENERAL\\_METHOD\\_FOR\\_SYSTEM\\_REDUCTION/links/02e7e51f92a246fd21000000.pdf](http://www.researchgate.net/profile/Vinicius_Simionatto/publication/253596980_SINGULAR_MASS_MATRICES_AND_HALF_DEGREES_OF_FREEDOM_A_GENERAL_METHOD_FOR_SYSTEM_REDUCTION/links/02e7e51f92a246fd21000000.pdf)
- [79] SIMON, Dan: *Evolutionary Optimization Algorithms: Biologically-Inspired and Population-based Approaches to Computer Intelligence*. John Wiley & Sons, Inc, 2013. – ISBN 1118659503
-

- [80] SOPPA, Andreas: *Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2011
- [81] SVANBERG, K.: The method of moving asymptotes: A new method for structural optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 24 (1987), Nr. 2, Seiten 359–373. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620240207>. – ISSN 1097–0207
- [82] VOLKWEIN, Stefan: *Model reduction using Proper orthogonal Decomposition: Lecture Notes*. (2008)
- [83] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3642210171
- [84] WITTEVEEN, Wolfgang: On the Modal and Non-Modal Model Reduction of Metallic Structures with Variable Boundary Conditions. In: *World Journal of Mechanics* Vol. 2 (2012), Nr. 6, Seiten 311–324. <http://dx.doi.org/10.4236/wjm.2012.26037>. – ISSN 2160–049X
- [85] XIE, Y. M. ; STEVEN, G.: *Evolutionary Structural Optimization*. London : Springer, 1997 <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3>
- [86] YI, Guilian ; BYENG, Youn ; MAN, Kim: Geometric Feature Identification from Topology Optimization Results. In: *Congres on Structural and multidisciplinary Optimisation* (2015)
- [87] ZHANG, N.: Dynamic Condensation of Mass and Stiffness Matrices. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 188 (1995). <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0613>
- [88] ZHANG, W. H. ; FLEURY, Claude ; DUYSINX, P. ; NGUYEN, V. H. ; LASCHET, I.: A generalized method of moving asymptotes (GMA) including equality constraints. In: *Structural Optimization* Vol. 12 (1996), Nr. 2-3, Seiten 143–146. <https://doi.org/10.1007/BF01196948>. – ISSN 0934–4373
- [89] ZHOU, M. ; FLEURY, R. ; SHYY, Y.K ; THOMAS, H.L: Progress in Topology Optimization with manufacturing Constraints. In: *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization* (2002). <https://doi.org/10.2514/6.2002-5614>
- [90] ZITZLER, E.: *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*. (1999)