

Topographische Modellierung des Gravitationsfeldes

Christian Hirt^{1,2}

¹ Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie & Institute for Advanced Study, TU München

² Western Australian Geodesy Group & The Institute for Geoscience Research & Department of Spatial Sciences, Curtin University Perth

Key Words

Gravitationsfeld, Topographie, Massenmodell, Vorwärtsmodellierung, Schwerereduktion, Schwereprädiktion

Abstract

Topographische Techniken zur Modellierung von Gravitationsfeldern nehmen eine zentrale Rolle in der physikalischen Geodäsie und Geophysik ein. Aus der Topographie gewonnene Schwereinformation ist notwendig für (i) die Reduktion und Interpolation von Schwerefeldbeobachtungen, (ii) die Entwicklung ultra-hochauflösender Schwerefeldmodelle und (iii) Interpretation von Schwerefeldbeobachtungen. Das vorliegende Kapitel führt in die grundlegenden Methoden der topographischen Modellierung von Gravitationsfeldern ein, wobei eine Unterteilung in numerische Integrations- und Kugelfunktionstechniken erfolgt. Es werden eine Reihe von aktuellen Anwendungsbeispielen gegeben, die von der Erstellung ultra-hochauflösender Schwerefeldmodellen, der Glättung von Schwerefelddaten bis zur Berechnung von Bouguer-Schwerekarten für Erde und Mond reichen. Der Beitrag zeigt zusammenfassend die heutige Relevanz der topographischen Gravitationsfeldmodellierung für erdbezogene und planetare geodätische Anwendungen auf.

1. Einleitung

Die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde und Planeten durch Messung und topographische Modellierung ist eine Kernkompetenz der physikalischen Geodäsie. Schwerefeldinformation ist im Zusammenhang mit genauen Höhenbestimmungen von zentraler Bedeutung: Geoidundulationen verknüpfen ellipsoidische GNSS-Höhen mit orthometrischen oder normalen Gebrauchshöhen; Schwerebeschleunigungen werden zur Überführung von nivellierten Höhen in Gebrauchshöhen benötigt (Torge und Müller 2012).

Über physikalisch-geodätische Anwendungen hinausgehend ist die Schwerefeldbestimmung für Nachbardisziplinen relevant (z.B. Hirt et al. 2013). Das beobachtete Schwerefeld der Erde und der Planeten ist das Resultat der Massenverteilung an der Oberfläche und im Inneren.

Schwerefeldinformation wird daher in der Geophysik zur Erforschung von Lagerstätten (z.B. Salz oder Erdöl) und für das Verständnis von Entwicklung und geologischem Aufbau von Planeten benötigt (Jacoby und Smilde 2009). Schwerewerte werden in der Metrologie im Zusammenhang mit der Kalibrierung von Messeinrichtungen zur Massenbestimmung (Waagen) verwendet. In der Ingenieurgeodäsie sind Lotabweichungen zur Reduktion von Richtungs- und Winkelmessungen (von der Lotrichtung auf die Ellipsoidnormale) erforderlich, z.B. bei der Anlage von Präzisionsnetzen im Gebirge.

Zur Bestimmung des Schwerefeldes durch *Messung* steht ein umfassender „Werkzeugkasten“ zur Verfügung. Die Kombination von GNSS und Nivellement liefert Geoidundulationen. Lotabweichungen werden durch astronomische Messung mit Zenitkameras bestimmt und Schwerebeschleunigungen sind das Resultat von absolut- oder relativgravimetrischen Beobachtungen (Torge und Müller 2012). Die beispielhaft genannten Methoden liefern Informationen zur Schwerefeldgestalt an ausgewählten

Messpunkten (jedoch nicht dazwischen). Dagegen liefern berührungslose Verfahren wie Fluggravimetrie oder Schwerefeldsatelliten (GRACE, Tapley et al. 2004; GOCE, Pail et al. 2011) flächen- oder profilhafte Feldinformation, können jedoch nicht die Feinstruktur (z.B. Schwerewirkung kleinerer Geländeformen) aufgrund des Abstandes zu den felderzeugenden Massen erfassen (vgl. Rummel und van Gelderen 1995). In beiden Fällen bleibt die Erfassung des Schwerefeldes entweder räumlich oder spektral unvollständig.

An dieser Stelle nun kommt die *topographische Modellierung* ins Spiel, die einerseits Schwerefeldgrößen zwischen Messpunkten verdichtet, andererseits Ergebnisse der Satellitengravimetrie um kleinskalige Schwerefeldstrukturen ergänzt. Bei der topographischen Modellierung des Schwerefeldes werden Modelle des Reliefs – z.B. digitale Geländemodelle (DGM), auch Bathymetrie-, Eis- oder Störkörpermodelle – mit Annahmen zur Massendichte kombiniert, und deren Wirkung auf das Schwerefeld (z.B. auf die Schwereschleunigung oder Lotabweichung) durch Vorwärtsmodellierung berechnet. Die Vorwärtsmodellierung basiert auf Newtons Integralformel (z.B. Blakely 1996)

$$V = G \iiint_M \frac{dm}{r} \quad (1)$$

die das Gravitationspotential V in einem Berechnungspunkt P mit der Masse M des Planeten verknüpft, und durch Integration über infinitesimal kleine Massen dm und deren Abstände r zu P liefert (Abb. 1). Die Variable $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ist die Gravitationskonstante. Funktionale von V (wie Schwerewirkung oder Lotabweichung) ergeben sich durch radiale oder horizontale Ableitung. Aufgabe der topographischen Modellierung ist es also, das Gravitationsfeld topographischer Massenmodelle durch Vorwärtsrechnung zu ermitteln.

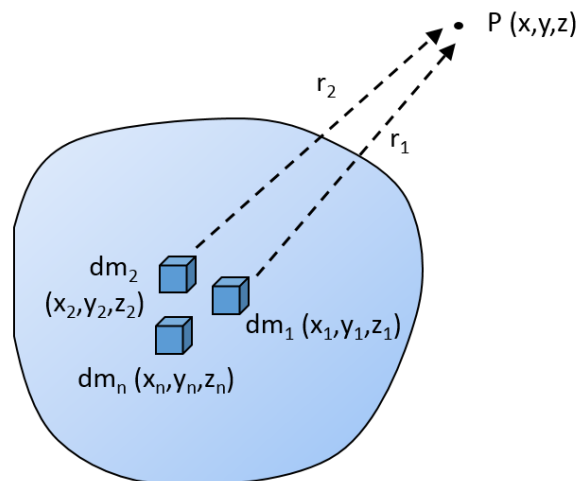


Abb. 1. Prinzip der Vorwärtsmodellierung nach Blakely (1996). Die Gesamtmasse wird in Einzelmassen zerlegt und deren gravitative Wirkung (Potential oder Anziehungskraft) im Berechnungspunkt P durch Integration der Einzelwirkungen ermittelt.

Wäre die Verteilung der Massen innerhalb des Erdkörpers oder Planeten genau bekannt, so könnten wir Gleichung (1) zur vollständigen Bestimmung des Gravitationsfeldes verwenden, und durch ausreichend dichte Anordnung der Berechnungspunkte P hochauflösende Darstellungen der Feldfunktionale gewinnen. Aufwändige Messungen wären dann überflüssig. In der Realität jedoch ist unsere Kenntnis der Massenverteilung unzureichend, um eine vollständige und genaue Feldmodellierung über Newtons Integral zu ermöglichen. Während die Geometrie der Erdoberfläche über hochauflösende Topographiemodelle sehr gut bekannt ist, ist die Zuordnung von

Massendichten in der oberen Erdkruste oft auf vereinzelte Stichproben beschränkt, häufig auf Annahmen basiert, und damit approximativer Natur. Mit der Tiefe wachsen die Unsicherheiten der Massendichten und ihrer geometrischen Begrenzung, da ihre hochauflösende Erfassung schwierig ist.

Die Vorwärtsmodellierung wird aus diesen Gründen überwiegend mit DGMs (oder anderen digitalen Modellen oberflächennaher Massen) angewendet und liefert diejenigen Feldanteile, die durch die topographischen Massen erzeugt werden. Geländeformen und Schwerfeldsignale sind besonders auf kurzen Skalen hoch miteinander korreliert, und ein Großteil der hochfrequenten Schwerfeldstrukturen ist aus der Topographie erklärbar (vgl. Forsberg und Tscherning 1981, Hirt 2010, Lemoine et al. 2014). Deshalb ist die topographische Modellierung eine Schlüsseltechnik zur Interpolation, Vervollständigung und Reduktion gemessener Schwerfeldfunktionale. Ihr kommt eine zentrale Rolle bei der Modellierung von Potentialfeldern innerhalb der physikalischen Geodäsie und in der Geophysik zu.

In diesem Kapitel wird eine Übersicht über den heutigen Stand der topographischen Modellierung von Gravitationsfeldern gegeben. Zunächst wird die Aufstellung von Massenmodellen dargestellt, dies schließt eine kurze Beschreibung aktueller topographischer Modelle und Effekte wie der Isostasie mit ein (Abschnitt 2). Darauf aufbauend stellt Abschnitt 3 die topographischen Modellierungstechniken vor, die wir in die Domänen Raumbereich (numerische Integrationsmethoden) und Spektralbereich (Kugelfunktionsreihen) untergliedern. Abschnitt 4 verdeutlicht dann die Anwendung der topographischen Modellierung zur Interpolation und Reduktion von Schwerfeldern am Beispiel der europäischen Alpen, dabei wird die hohe Korrelation zwischen Topographie und Schwere deutlich. Es wird danach gezeigt, wie topographische Information zur Bewertung der neuen GOCE-Schwerfelder genutzt werden kann. Im Weiteren werden beobachtete und topographische Schwerfelder von Mond und Erde spektral und im Raumbereich verglichen und aktuelle Ergebnisse globaler hochauflösender topographischer Modellierungen präsentiert, in denen topographische Schweresignale die räumliche Auflösung vergrößern. Durch Einbeziehung planetarer Schwerfelder wird die Relevanz der topographischen Modellierungstechniken über die „Erdgeodäsie“ hinausgehend aufgezeigt. Eine Diskussion gegenwärtiger Herausforderungen und Entwicklungen in Abschnitt 5 schließt das Kapitel ab.

2. Aufstellung von Massenmodellen – Massendichte, Topographie und Isostasie

Der Vorwärtsmodellierung von Gravitationseffekten geht grundsätzlich die Aufstellung eines Modells der felderzeugenden Massen voraus. Ein Massenmodell wird durch die beiden Komponenten (i) Geometrie und (ii) Massendichte vollständig definiert. Es stellt die Quelle des Gravitationsfeldes dar (Papp 1996, Baran et al. 2006). Die GeometrieKomponente legt dabei die dreidimensionale räumliche Umgrenzung (Abb. 2) und damit das Volumen fest, sie wird häufig über digitale Modelle der Geländeoberfläche (DGM) oder der Bathymetrie definiert (Tziavos et al. 2010).

Die Geländehöhen des DGM grenzen die topographische Masse nach oben ab. Theoretisch sollte sich die untere Abgrenzung der Topographie an der Verteilung der Massendichten innerhalb der Lithosphäre orientieren und mit der Grenzfläche zwischen Erdkruste und Mantel (bekannt als Mohorovicic –Diskontinuität) zusammenfallen, an der die Dichte sprunghaft ansteigt. Der Verlauf der Mohorovicic –Diskontinuität ist jedoch nicht sehr hochauflösend bekannt. Eine genäherte Darstellung wird von Modellen der Erdkrustenmächtigkeit (Laske et al. 2013) mit gegenwärtig etwa 100 km räumlicher Auflösung erhalten. Alternativ werden auch isostatische Hypothesen (Kaban et al. 2004, Göttl und Rummel 2009) angewendet. In der Praxis wird häufig eine geometrische Festlegung gewählt und die Höhenbezugsfläche (z.B. Geoid oder Quasigeoid) verwendet, auf die sich die DGM-Daten beziehen. Auch die Nutzung eines Ellipsoides (z.B. WGS84) ist denkbar. In beiden Fällen geht

die Festlegung der unteren Grenze der Topographie mit einer gewissen Willkür einher, da die Verteilung der Massendichten unberücksichtigt bleibt.

Massenmodelle können für Erde, Mond und beliebige planetare Körper aufgestellt werden (Wieczorek 2007). Abb. 2 zeigt häufig modellierte Massen der Lithosphäre.

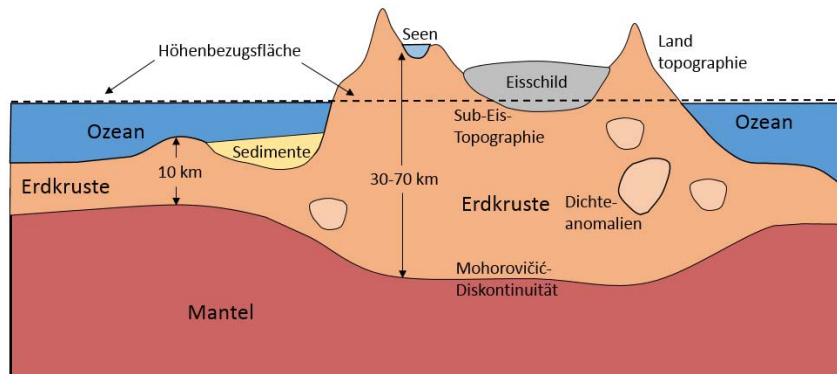


Abb. 2. Häufig verwendete Körper in der Vorwärtsmodellierung (im Aufriss). Die Darstellung zeigt die wichtigsten Bestandteile der Lithosphäre und deren Ausweitung unter den Kontinenten. Es ist zu beachten, dass die Massendichte innerhalb der festen Kruste in der Realität inhomogen ist.

2.1 Massendichten

Massendichten werden aus Stichproben oder geologischen Karten abgeleitet, basieren aber sehr häufig auf Standardwerten. In Geodäsie und Geophysik ist ein üblicher Referenzwert 2670 kg m^{-3} , der sich als Durchschnittswert für festes oberflächennahes Erdgestein ergibt (Jacoby und Smilde 2009). Lokale Variationen in den Gesteinseigenschaften, beispielsweise Änderung der Gesteinsarten, Porigkeit, Feuchtigkeit oder Auftreten von Spalten führen zu Abweichungen, die etwa 5-15% der angenommenen Massendichte (Tabelle 1) erreichen können. Dies macht die Unsicherheiten bei der Festlegung von Dichtewerten und damit den approximativen Charakter der Vorwärtsmodellierung deutlich.

Tabelle 1. Durchschnittliche Massendichten für häufig vorkommende Bestandteile der Erdkruste

Gruppe	Material	Durchschnittliche Massendichte [kg m^{-3}]
Lose Gesteine/Sande	Feuchter Sand	1350
	Schotter/Kies	1500
	Tone	1700
Feste Gesteine	Sandsteine	2350
	Tonsteine	2400
	Kalksteine	2550
	Dolomite	2700
	Granit	2640
	Gneise	2800
	Basalt	2990
	Gabbro	3030
Wasser	Süßwasser	1000
	Salzwasser	1030
	Eis	913
Andere Stoffe	Salz	2220
	Kohle	1500
	Eisen	7860

Je nach Aufgabe werden Störkörper wie Salzstöcke (Denker 1988), Talfüllungen (Flury 2002), Sedimente (Kaban und Mooney 2001, Tenzer et al. 2014) oder Eismassen (Hirt 2014) modelliert, die sich durch einen deutlichen Dichtekontrast gegenüber umliegenden Gesteinen auszeichnen (Tabelle 1). Regelmäßige laterale oder radiale Variationen der Massendichte innerhalb eines Körpers können in der Vorwärtsmodellierung berücksichtigt werden, z.B. tiefenabhängige Kompression von Talfüllungen (Flury 2002) oder Dichtezunahme von Salzwasser mit der Ozeantiefe (Tenzer et al. 2011).

Methoden der Vorwärtsmodellierung vereinfachen sich etwas, wenn die globalen topographischen Massen (Gestein, Wasser, Eisschilde, ...) mit einer einheitlichen Massendichte repräsentiert werden. Dies kann mit dem Konzept der „gesteinsgleichwertigen Topographie“ (engl. *rock-equivalent topography*, RET, Rummel et al. 1988) erreicht werden. Dabei werden Wasser- und Eismassen rechnerisch in gleichwertige Gesteinsmassen umgewandelt

$$H_{RET} = H_{BED} + \frac{\rho}{\rho_R} \Delta H \tag{2}$$

wobei H_{BED} die untere Begrenzung einer Masse der Mächtigkeit ΔH und Massendichte ρ ist, ρ_R die Referenzdichte (Gestein) und H_{RET} die neue obere Begrenzung des Massenkörpers nach der Umwandlung bezeichnet (Abb. 3a). Durch die „Kompression“ wird die Geometrie, aber nicht die Masse des Körpers verändert. Mit Gleichung (2) können Eis und Wassermassen (z.B. Hirt 2014), aber auch Sedimente einheitlich über die Referenzdichte ρ_R „dargestellt“ werden. Mit der Änderung der Geometrie des Massenkörpers sind Approximationsfehler verbunden, die sich besonders in den Ableitungen des Potentials (z.B. Schwerestörung oder Schweretensor) bemerkbar machen (Grombein et al. 2010; Kuhn und Hirt 2016). Durch Verwendung von Massenkörpern mit individuellen Massendichten ist die Rechnung etwas aufwändiger; Approximationsfehler der RET-Methode werden jedoch vermieden (Grombein et al. 2014).

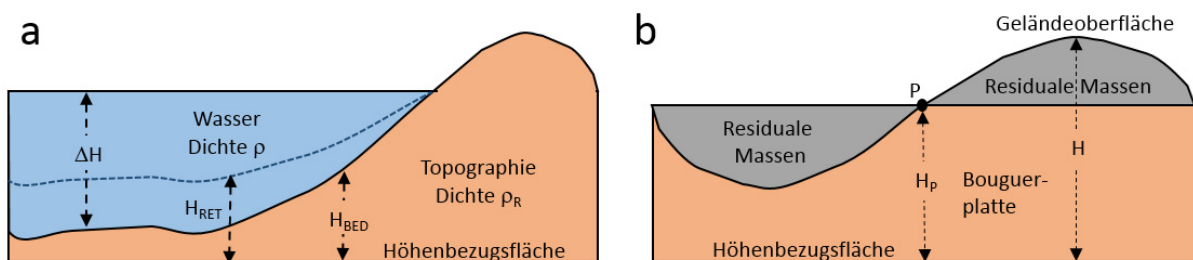


Abb.3. (a) RET-Konzept am Beispiel eines Binnengewässers. Die Wassermassen werden in fels-gleichwertige Massen komprimiert und mit der neuen Höhe H_{RET} dargestellt. (b) Bouguereffekt und Geländekorrekturen in ebener Approximation. Der gravitative Effekt der Topographie wird mit einer Bouguerplatte in P angenähert. Massen residual zur Platte (in grau) werden mit der Geländekorrekturen erfasst.

2.2 Globale Topographie- und Lithospärenmodelle

Als Ergebnis von erfolgreichen Fernerkundungsmissionen stehen uns hochauflösende Modelle zur Verfügung, um die Topographie der Erde, aber auch des Mondes, der Planeten (z.B. Venus und Mars) und anderer erkundeter Weltraumobjekte zu beschreiben. Ein Überblick wird in Tabelle 2 gegeben.

Die Geometrie der Erdoberfläche wurde erstmalig hochauflösend von der Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) im Jahr 2000 über interferometrisches Radar vermessen (Rabus et al. 2003). Als Ergebnis wurden globale topographische Modelle mit 90 m (seit 2004) und Modelle mit 30 m

Auflösung und kontinentaler Abdeckung (z.B. Afrika seit 2014) veröffentlicht. Die Qualität der SRTM-Daten wurde im Laufe der Jahre verbessert, z.B. durch die Beseitigung von Lücken im DGM durch Interpolation oder Hilfsdatensätze, Reuter et al. (2008). SRTM-Datensätze werden in der physikalischen Geodäsie häufig zur Definition von Massenmodellen eingesetzt. Seit 2009 sind detaillierte globale Geländemodelle der ASTER-Mission nutzbar, ihrer hohen Auflösung von 30 m stehen allerdings Artefakte gegenüber, die eine Anwendung in der Modellierung von Gravitationsfeldern erschweren. Weitere hochauflösende Modelle sind als Ergebnis aktueller Missionen wie Tandem-X oder ALOS zu erwarten; allerdings werden diese Datensätze nicht in höchster Auflösung (z.B. 12 m) frei verfügbar sein.

Tabelle 2. Ausgewählte globale Topographiemodelle für Erde, Mond und Planeten. Daten: T = Topographie, B = Bathymetrie, I = Sub-Eis-Topographie. DEM = Digitales Elevationsmodell

Planet	Topographiemodell	Auflösung	Daten	Eigenschaften
Erde	SRTM	90 m	T	Abdeckung bis 60°, verfügbar seit 2004
		30 m	T	Abdeckung von USA, Australien, Afrika (weitere Regionen ab 2015 verfügbar)
	ASTER	30 m	T	Abdeckung bis 83°, verfügbar seit 2009
	World-DEM (Tandem-X)	12 m	T	globale Abdeckung, kommerzielles Produkt (ab 2016)
	Earth2014 (Hirt und Rexer 2015)	1.8 km	T,B,I	Globales Kombinationsmodell
	ETOPO1 (Amante und Eakins 2009)	1.8 km	T,B,I	Globales Kombinationsmodell
	SRTM30_PLUS (Becker et al. 2009)	900 m	T,B	Globales Kombinationsmodell
	RET2012 (Hirt et al. 2012)	9 km	T,B,I	Globales Massenmodell in RET-Darstellung
RET2014 (Hirt und Rexer 2015)	1.8 km	T,B,I	Globales Massenmodell in RET-Darstellung	
Mond	LOLA-DEM	30 m	T	Aus Laseraltimetrie, globale Abdeckung
Mars	MOLA-DEM	460 m	T	Aus Laseraltimetrie, globale Abdeckung
Venus	Magellan-DEM	10-30 km	T	Aus Radardaten, unvollständige Abdeckung
Merkur	MLA-DEM	700 m	T	Aus Laseraltimetrie, unvollständige Abdeckung

Gegenüber der gut vermessenen Landtopographie ist die Auflösung bathymetrischer Modelle niedriger. So liefert die Inversion von altimetrischen Schwerefeldern Tiefeninformation mit ~10 km räumlicher Auflösung, und nur etwa 10% des Meeresbodens sind direkt über Echolot (bei ~2 km Auflösung) bislang bestimmt worden (Becker et al. 2009). Bathymetrische Daten existieren für Binnengewässer (z.B. Nordamerikanische Seen, Baikal, Kaspisches Meer), z.B. Amante und Eakins (2009). Eine wichtige Rolle spielen topographische 3D-Modelle der Eisschilde der Antarktis und Grönlands, die Daten aus Laseraltimetrie (Oberflächenhöhen) und Radar (Sub-Eis-Topographie, engl. bedrock) kombinieren. Als Beispiel führen wir die Bedmap2 (Fretwell et al. 2013) Datensammlung an, die eine hochauflösende Beschreibung weiter Teile des antarktischen Eisschildes mit km-Auflösung ermöglicht.

Zur globalen Darstellung der Massen der Lithosphäre werden bathymetrische, landtopographische, und glaziale Datensätze zusammengeführt. Hier sind die Kombinationsmodelle ETOPO1 (Amante and Eakins 2009), SRTM30_PLUS (Becker et al. 2009) und Earth2014 (Hirt und Rexer 2014) zu nennen, die Begrenzungsflächen der topographischen Massen mit 1-2 km Auflösung beschreiben. Verfeinerungen sind mit Erdkrustenmodellen wie Crust 1.0 (Laske et al. 2013) möglich. Crust 1.0 beschreibt die Geometrie von tieferliegenden Massen wie mariner Sedimente, und der Erdkrustenstärke (Abb. 4), allerdings mit reduzierter Auflösung von gegenwärtig 100 km.

Die globale Topographie vom Planeten Mars und dem Erdmond ist heutzutage besser bekannt als die der Erde über den wasser-/eisbedeckten Regionen. So wurde durch sehr erfolgreiche Laseraltimetrie-

Messungen ein Höhenmodell der Marsoberfläche mit ~ 500 m Auflösung abgeleitet (Mars Global Surveyor, 1998), das Mondrelief mit ~ 30 m Auflösung vermessen (Lunar Reconnaissance Orbiter, 2010) und die Planetenoberflächen von sowohl Merkur als auch von Venus (über Radar) abgetastet, allerdings mit nicht ganz vollständiger Überdeckung (vgl. Wieczorek 2007 und Tabelle 2).

2.3 Isostasie

Isostasie bezeichnet das Phänomen einer Verdickung unserer Erdkruste unterhalb von Gebirgsmassen und ihrer Verjüngung unterhalb der Ozeanen (Watts 2011). Anschaulich kann man sich dieses Phänomen anhand der festen Erdkruste vorstellen, die auf einem zähflüssigen Mantel schwimmt, wobei die durchschnittliche Dichte des Mantelmaterials mit 3300 kg m^{-3} höher ist als das der Erdkruste (2670 kg m^{-3}). Es kommt zum „Eintauchen“ der Massen großer Gebirgsketten in den Mantel bis Auftrieb und Gewichtskraft im Gleichgewicht sind (isostatische Kompensation). Der Kompensationseffekt zeigt sich deutlich in den Bouguer-Schwerekarten (Abschnitt 4) in Form negativer Differenzen zwischen gemessener und topographisch modellierter Schwere. Diese deuten auf Defizitmassen (fehlendes dichtes Mantelmaterial) unter dem Gebirge hin und werden durch Resultate seismischer Messungen im Wesentlichen bestätigt (Watts 2011). Isostatische Effekte treten großräumig (auf Skalen von ~ 100 km oder größer) auf (Wieczorek 2007). Massen kleinerer Geländestrukturen haben aufgrund der lokalen Biegesteifigkeit der Lithosphäre keinen Kompensationspart.

Isostatische Kompensationseffekte können zu gewissen Teilen in der Vorwärtsmodellierung auf Basis von Hypothesen (Airy oder Pratt) berücksichtigt werden (Tsoulis 2001, Kuhn 2000, Kuhn 2003, Wild und Heck 2005, Makhloof 2007, Göttl und Rummel 2009). Die Isostasie-Hypothese nach Airy fügt den Gebirgsmassen „Wurzeln“ zu, um den Eintaucheffekt in den Mantel zu beschreiben, während das Modell nach Pratt seitliche Dichteveriationen zulässt und über den Ozeanen Anwendung findet. Der Airy-Kompensationsmechanismus ist in Abb. 2 angedeutet. Weitere Möglichkeiten bestehen in der Nutzung von verfeinerten Hypothesenmodellen, die regionale Elastizität berücksichtigen (Vening-Meinesz-Modelle, z.B. Kuhn 2003), oder Modelle der Mohorovicic-Diskontinuität (Abb. 4), die Informationen zur unteren Begrenzung der Topographie liefern. Den unterschiedlichen Ansätzen ist jedoch nach heutigem Kenntnisstand gemein, dass sie Kompensationseffekte nur in Teilen beschreiben können.

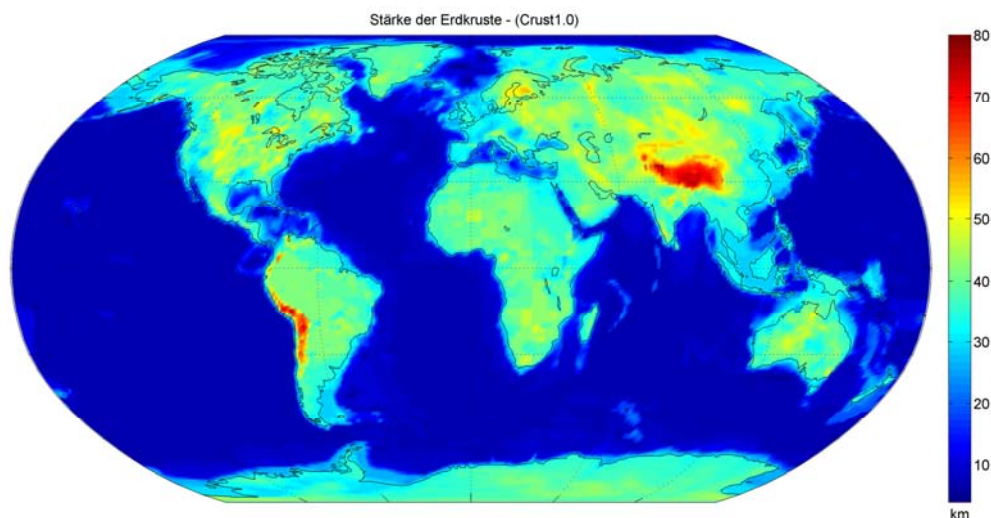


Abb. 4. Abstand der Mohorovicic-Grenzfläche von der Erdoberfläche. Werte aus dem aus seismischen Daten abgeleiteten Modell Crust 1.0 (Laske et al. 2013). Die räumliche Auflösung beträgt formal 1° , ist jedoch niedriger über Regionen mit wenigen Beobachtungen.

3. Methodik der Vorwärtsmodellierung

Ausgehend von Gl. 1 werden bei der Vorwärtsmodellierung das Gravitationspotential und beliebige Funktionale des Potentials – häufig Schwereeffekte, Schweregradienten und Lotabweichungen – aus dem Massenmodell errechnet. Die Rechnung kann dabei im Raumbereich oder Spektralbereich erfolgen (Hirt und Kuhn 2014). Bei Modellierung im Raumbereich wird das Massenmodell in elementare Massenkörper unterteilt (z.B. Nagy et al. 2000) und deren gravitative Wirkung berechnet. Die Gravitation des gesamten Massenmodells ergibt sich durch Addition der Einzeleffekte, dies folgt dem Superpositionsprinzip der Massenanziehung (Blakely 1996). Im Spektralbereich arbeitet man mit Reihenentwicklungen der globalen Topographie, und stellt das Gravitationspotential des Massenmodells in Kugelfunktionen dar (Wieczorek und Phillips 1998). Nachfolgend wird für beide Methoden die Modellierung am Beispiel von Schwerstörungen als radiale Ableitung des Potentials dargestellt.

3.1 Topographische Modellierung im Raumbereich

Vereinfachend gehen wir zunächst davon aus, dass ein Massenmodell in Form eines DGMs vorliegt. Dieses beschreibt in Gitterform Geländehöhen H über einer Bezugsfläche (Höhe 0), und erlaubt eine Unterteilung des Geländes in Elementarkörper wie beispielsweise Quader. Im einfachsten Fall der Vorwärtsmodellierung wird die gravitative Wirkung der topographischen Massen δg durch eine unendlich ausgedehnte ebene Bouguerplatte der Massendichte ρ angenähert, deren vertikale Ausdehnung der Geländehöhe H_p im Berechnungspunkt entspricht (Abb. 3b)

$$B = 2\pi G\rho H_p \approx \delta g \quad . \quad (3)$$

Gleichung (3) beschreibt den Effekt einer Bouguerplatte. Er ist eine Näherung für die gesuchte Größe δg , da die gesamte Topographie als eben angenommen wird. Der gravitative Effekt K variierender Geländehöhen H im DGM – und damit noch nicht berücksichtigter Massen relativ zu H_p – wird durch Integration

$$K = \frac{1}{2}G\rho \iint \frac{1}{r^3}(H - H_p)^2 dx dy \quad (4)$$

ermittelt, wobei r ist der räumliche Abstand zwischen Berechnungspunkt und Geländepunkten (z.B. Tziavos und Sideris 2013). Gl. (4) ist die bekannte Geländekorrekturen (Abb. 3b), sie kann mit Verfahren wie der Fast-Fourier-Transformation oder Gauß-Legendre-Quadratur effizient für dicht angeordnete Berechnungspunkte ausgewertet werden (Forsberg 1985, Hwang et al. 2003).

In der Vorwärtsmodellierung wird das Massenmodell häufig in rechtwinklige Quader zerlegt. Die Gravitation einzelner Quader wird mit geschlossenen Ausdrücken ausgewertet und die gravitative Gesamtwirkung durch Summation der Einzeleffekte ermittelt (nach Nagy et al. 2000)

$$\delta g = \sum_1^k G\rho \left[x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \tan^{-1} \frac{xy}{xr} \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \right] , \quad (5)$$

wobei x, y die horizontalen Abstände zwischen Berechnungs- und Geländepunkten sind, z die Differenz zwischen H_p und H ist und der Berechnungspunkt im Ursprung des x, y, z -Systems liegt. Die Integration wird über die Umgrenzung des Quaders $(x, y, z)_1$ und $(x, y, z)_2$ durchgeführt. Schwereeffekte δg aus Gl. (5) entsprechen der Summe aus Bouguereffekt B und Geländekorrekturen K . Ähnliche Ausdrücke wie Gl. (5) werden für die Berechnung der gravitativen

Geländewirkung auf das Geoid und Lotabweichungen benutzt (Nagy et al. 2000). Anstelle von rechtwinkligen Quadern können auch andere Körper in der Massenmodellierung verwendet werden: Die gravitative Wirkung von Punktmassen beispielsweise lässt sich sehr effizient berechnen. Im Vergleich zur Quaderzerlegung ergeben sich jedoch größere Approximationsfehler (Heck und Seitz 2007). Quader mit geneigten Grenzflächen bieten dagegen in bewegtem Gelände eine bessere Approximation als rechtwinklige Quader, sind aber numerisch etwas aufwändiger zu rechnen (Smith 2000).

Eine Begrenzung der numerischen Integration in Gleichungen (4) und (5) auf einen bestimmten Radius um den Berechnungspunkt (z.B. 167 km als konventioneller Radius und Umgrenzung der sogenannten Hammer-Zonen) führt zu Approximationsfehlern aufgrund vernachlässigter weit entfernter Massen. Üblicherweise wird ab einer gewissen Entfernung vom Berechnungspunkt das Massenmodell vereinfacht (z.B. Reduzierung der DGM-Auflösung ab 10 km Entfernung). Dennoch ist die numerische Integration aufwändig, wenn mit DGMs hoher Auflösung (z.B. 90 m) und dichter Anordnung von Berechnungspunkten gearbeitet wird (Abschnitt 4.5).

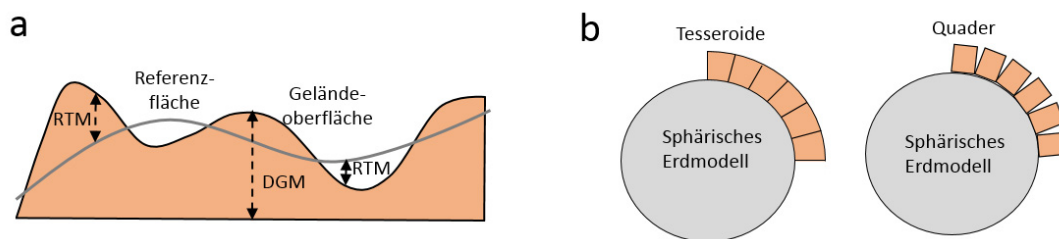


Abb. 5. (a) RTM-Konzept. Ein Geländemodell wird hochpassgefiltert durch Abzug einer langwelligen Referenzfläche. Als Ergebnis erhält man das residuale Geländemodell (RTM) mit positiven und negativen Höhen. (b) Beschreibung einer Topographie in sphärischer Näherung durch Tesseroiden (links) und Quader (rechts). Die bessere Approximation mit Tesseroiden wird deutlich.

Ein Sonderfall ist die sogenannte RTM (Residual Terrain Model) Technik, die von Forsberg (1984) entwickelt wurde. Hier wird das Geländemodell vor der Vorwärtsmodellierung im Raumbereich hochpassgefiltert; dies kann durch Abzug eines gleitenden Mittels der Geländehöhen oder einer langwelligen Kugelfunktionsentwicklung der Topographie (Abschnitt 3.2) erfolgen. Als Ergebnis der Filterung erhalten wir das RTM als Repräsentation der topographischen Feinstruktur (Abb. 5a). Statt des DGMs (enthält das volle Spektrum topographischer Information) wird das RTM als kurzwelliges Massenmodell in der Vorwärtsrechnung verwendet. Dieses liefert die gravitative Wirkung des RTM-Massenmodells und damit ausschließlich die kurzwelligen Schwerfeldanteile (Abb. 5a). Da sich die RTM Topographie aus oszillierenden positiven und negativen Höhen zusammensetzt, gleicht sich die gravitative Wirkung weit entfernter Massen zu großen Teilen aus. Daher kann die Integration auf kleinere Radien (z.B. 30 km, abhängig von der Filterung) beschränkt werden, bei gleichzeitig kleineren Approximationsfehlern und erheblich gesteigerter numerischer Effizienz. RTM-Gravitationseffekte werden vor allem für die Glättung von Messungen im Gebirge und die Konstruktion von hochauflösenden Schweremodellen verwendet (Abschnitt 4).

Den bisherigen Verfahren liegt eine Unterteilung der topographischen Massen durch Nutzung von Quadern und Rechnung in der Ebene zu Grunde. Eine realistischere Aufteilung und Anordnung der topographischen Massen planetarer Körper wird durch Rechnung auf der Kugel oder dem Ellipsoid und durch Verwendung von Tesseroiden erreicht (Heck und Seitz 2007, Grombein et al. 2013). Tesseroiden sind Massenelemente auf der Kugel oder Ellipsoid, die von Flächen konstanter Breite oder Länge und konstanten planetaren Radien begrenzt werden. Die Massenrepräsentation durch Tesseroiden ist genauer als mit Quadern, da sich keine Lücken oder Überschneidungen ergeben (Abb.

5b). Einige Studien verwenden anstelle von Tesseroiden massengleiche Quader; durch geschickte Orientierung und Lagerung der Quader erfolgt eine gute Annäherung der berechneten Schwereeffekte an die Tesseroidformeln (Kuhn et al. 2009). Eine Verallgemeinerung von Tesseroiden zu Polyedern als Vielflächenkörper bietet den Vorteil, auch die Geländeneigung im DGM-Höhenpunkt zu berücksichtigen (statt ebener oberer und unterer Begrenzung). Damit wird die Approximation weiter optimiert, siehe d’Urso (2014).

3.2 Topographische Modellierung im Spektralbereich

Im Spektralbereich greift die topographische Modellierung des Gravitationsfeldes auf elegante Kugelfunktionstechniken zurück, die die zuvor beschriebene numerische Newton-Integration ersetzen. Wichtiger Baustein ist dabei die sphärisch-harmonische Analyse (SHA, z.B. Sneeuw 1994, Abd-Elmotaal et al. 2014), mit der ein globales Modell topographischer Höhen H in seine spektralen Bestandteile zerlegt wird. Nach erfolgter SHA können mit der Kugelfunktionsreihe

$$H(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n (\overline{HC}_{nm} \cos m\lambda + \overline{HS}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (6)$$

topographische Höhen als Funktion der geographischen Breite φ und Länge λ über Produkte von sin- und cos-Termen mit Basisfunktionen und Kugelfunktions-Koeffizienten zusammengesetzt werden. In Gleichung (6) sind $H_{nm} = (\overline{HC}_{nm}, \overline{HS}_{nm})$ die Kugelfunktions-Koeffizienten von harmonischem Grad n ($0 \leq n \leq N_{\max}$) und Ordnung m ($0 \leq m \leq n$), und $\overline{P}_{nm}(\sin \varphi)$ die Basisfunktionen (zugeordnete Legendre-Funktionen) von Grad n und Ordnung m (z.B. Torge und Müller 2012). Der maximale Entwicklungsgrad N_{\max} bestimmt die räumliche Auflösung $\Delta x = 360^\circ / (2N_{\max})$ der Reihenentwicklung. Mit einer Entwicklung bis $N_{\max} = 2,160$ können noch Strukturen auf Skalen von 0.083° (etwa 9 km auf der Erdoberfläche) dargestellt werden. Abb. 6 zeigt die globale Erdtopographie im Raumbereich und die $\overline{HC}_{nm}, \overline{HS}_{nm}$ -Koeffizienten als Transformierte im Spektralbereich. Im "Koeffizientendreieck" (rechter Teil von Abb. 6) bilden die *zonalen* \overline{HC}_{nm} -Koeffizienten ($m=0$) die vertikale Mittelachse, die *sektoriellen* Koeffizienten ($n=m$) befinden sich auf den linken und rechten Dreiecksschenkeln und die *tesseralen* Koeffizienten vervollständigen das Dreieck. Dabei sind die \overline{HC}_{nm} -Koeffizienten rechts und die \overline{HS}_{nm} -Koeffizienten links von der Mittelachse dargestellt. Koeffizienten konstanten Grades n , aber unterschiedlicher Ordnung m sind in horizontaler Richtung zu finden und Koeffizienten niedrigen Grades n an der oberen Spitze des Dreiecks.

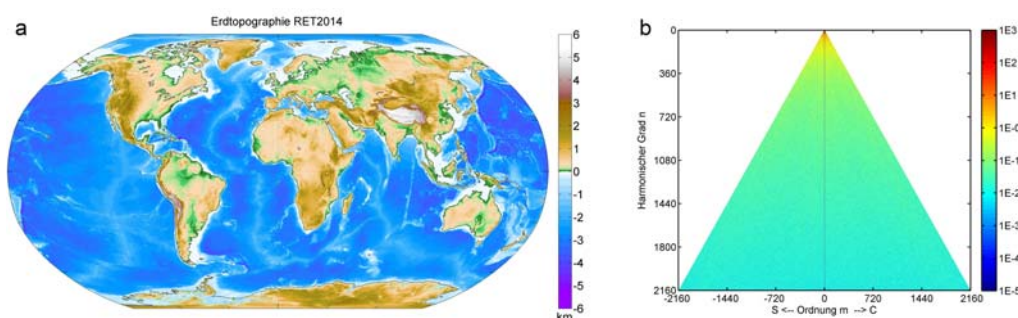


Abb. 6. (a) Globale Erdtopographie (hier RET-Höhen aus dem RET2014-Modell) im Raumbereich mit 5 Bogenminuten Auflösung und (b) im Frequenzbereich (bis Grad und Ordnung 2,160). Illustration in Anlehnung an Gruber et al. (2013)

Das Gravitationspotential der Topographie wird im Spektralraum durch Reihenentwicklung nach der Höhe, und deren ganzzahligen positiven Potenzen p berechnet (Rummel et al. 1988, Wieczorek und Phillips 1998, Hirt und Kuhn 2014):

$$V_{nm} = \frac{1}{2n+1} \frac{4\pi R^3 \rho_R}{M} \sum_{p=1}^{P_{\max}} \frac{\prod_{i=1}^p (n+4-i)}{p!(n+3)} \frac{H_{nm}^{(p)}}{R^p} \quad (7)$$

Dabei bezeichnen $V_{nm} = (\overline{VC}_{nm}, \overline{VS}_{nm})$ die Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials, M die Masse des Planeten mit Referenzradius R , und ρ_R die Massendichte der Topographie. Die Entwicklung von V_{nm} in Potenzen p erfordert die harmonische Analyse der Potenzen der topographischen Höhen H^p . Es sind also mehrere Anwendungen der SHA erforderlich, um die Koeffizienten aller Potenzen von H^p von $p=1$ bis $p=P_{\max}$ zu erhalten. Hinsichtlich der Bedeutung von Termen der Potenz p in Gl. (7) stellen wir fest:

- Auswertung von Gleichung (7) bis $P_{\max}=1$ liefert in Approximation einen linearen Zusammenhang zwischen Höhe und Potential (vgl. Strang van Hees 2000)

$$V_{nm} = \frac{1}{2n+1} \frac{4\pi R^2 \rho_R}{M} H_{nm} \quad (8)$$

Dies entspricht dem Effekt einer Schicht konstanter Höhe $H(\varphi, \lambda)$ und Dichte ρ_R (anschauliche Analogie in der Ebene: Bouguer-Platte, Gl. 3).

- Durch Auswertung von $2 \leq p \leq P_{\max}$ wird der Gravitationseffekt von Abweichungen zwischen der globalen Topographie und der Schicht modelliert (Analogie in der Ebene: Geländekorrektur, Gl. 4).

Gewöhnlich wird P_{\max} so festgesetzt, dass Terme mit $p > P_{\max}$ hinreichend klein werden und die berechneten Potentialkoeffizienten V_{nm} nicht mehr verändern. P_{\max} hängt von der Rauigkeit der planetaren Topographie und Auflösung der Kugelfunktionsreihe, dem Grad N_{\max} ab (Claessens und Hirt 2013). So ist für die Berechnung des Gravitationspotentials der Erdtopographie und ein Entwicklungsgrad $N_{\max} = 2,160$ eine maximale Potenz $P_{\max} = 7$ geeignet (Hirt und Kuhn 2012); für das Potential der Mondtopographie und $N_{\max} = 900$ sollte $P_{\max} = 8$ gewählt werden (Lemoine et al. 2014).

Nach erfolgter Auswertung von Gl. (7) kann man Schwerestörungen δg außerhalb der topographischen Massen als Funktion von $(\overline{VC}_{nm}, \overline{VS}_{nm})$ sehr einfach durch die Standardreihe

$$\delta g(\varphi, \lambda, r) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{VC}_{nm} \cos m\lambda + \overline{VS}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (9)$$

erhalten, wobei r der Radius des Berechnungspunktes, R der Referenzradius, und R/r der Dämpfungsfaktor ist (Rummel und van Gelderen 1995). Dieser modelliert die gravitative Abschwächung kurzskaliger Feldanteile mit zunehmender radialer Entfernung von den Massen.

Zur spektralen Vorwärtsmodellierung von Massenschichten beliebiger Geometrie (z.B. Eisschilde, deren Oberfläche durch ein DGM und deren untere Begrenzung durch ein Digitales Sub-Eis-Topographie Modell definiert ist) können die Formalismen von Tenzer et al. (2011, 2014) verwendet werden. Die Verwendung der Höhenbezugsfläche als untere Begrenzung ist also nicht notwendig. Laterale Variationen der Massendichte ρ_R , z.B. über Planetenoberflächen, können mit dem Ansatz von Wieczorek und Phillips (1998), siehe auch Kuhn und Featherstone (2003) berücksichtigt werden.

Eine weitere Verallgemeinerung der spektralen Methode wurde in Claessens und Hirt (2013) vorgestellt, bei der die Massen auf dem Ellipsoid anstelle der Kugel (wie in Gleichung 7) angeordnet sind. Diese „ellipsoidisch-topographische“ Modellierung nähert das tatsächliche Schwerfeld der Erde besser an als die sphärische Approximation (Claessens und Hirt 2013). Für nicht-abgeplattete Körper wie den Erdmond hingegen ist die sphärische Approximation ausreichend (z.B. Wieczorek und Phillips 1998).

3.3. Bewertung und Vergleich

Beide Techniken der Vorwärtsmodellierung sind in der geodätischen und geophysikalischen Praxis weit verbreitet, haben jedoch bevorzugte Anwendungsbereiche. Techniken im Raumbereich finden häufig Anwendung in der topographischen Reduktion lokaler oder regionaler Schwerfelddaten, z.B. für die Interpolation von Lotabweichungsprofilen oder Berechnung von Bouguer-Schwerewerten in umgrenzten Studiengebieten. Die numerischen Integrationstechniken (Gl. 4, 5) können lokal mit sehr hochauflösenden DGM-Daten (z.B. 10 m Auflösung aus Befliegungen mit Laserscanning, oder regional mit 90 m SRTM-Daten) zur präzisen topographischen Reduktion angewendet werden (siehe auch Tsoulis et al. 2009).

Spektrale Techniken haben im Gegensatz dazu globalen Charakter. Sie benötigen grundsätzlich Massenmodelle mit globaler Abdeckung (z.B. basierend auf den Topographie-Modellen in Tabelle 2), und werden bereits bei einer räumlichen Auflösung im km-Bereich sehr rechenintensiv. Die spektrale Vorwärtsmodellierung ist die bevorzugte Methode in der Analyse von Gravitationsfeldern der Planeten aus Satellitenbeobachtungen, die typischerweise über Kugelfunktionen dargestellt werden (z.B. Wieczorek 2007, Lemoine et al. 2014).

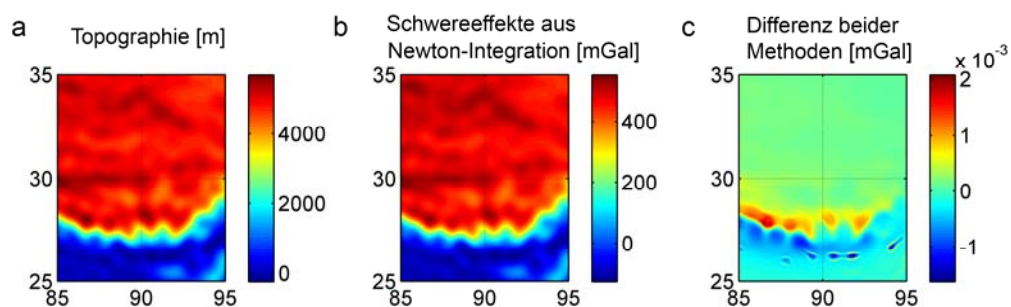


Abb. 7. Vergleich von Schwerstörungen, berechnet aus einem topographischen Massenmodell (50 km Auflösung) über dem Himalaya (85° bis 95° Länge, 25° bis 35° Breite). (a) topographische Höhen, (b) Schwereeffekte aus der Vorwärtsmodellierung im Raumbereich, (c) Differenzen zwischen Schwereeffekten modelliert im Raum- und Spektralbereich. Die Differenzen (c) zeigen eine exzellente Übereinstimmung beider Techniken (nach Hirt und Kuhn 2014).

Die numerische Vergleichbarkeit beider Methoden der topographischen Gravitationsfeld-Modellierung war und ist Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. Identische Massenverteilungen – abgeleitet aus Kugelfunktionsreihen – wurden von Hirt und Kuhn (2014) mit einer räumlichen Auflösung von 50 km als Eingabe für beide Verfahren verwendet und eine hohe Übereinstimmung von Schwereeffekten auf einem Niveau von 10^{-5} (relative Abweichungen) erzielt

(Abb. 7). Dabei wurden hochfrequente Signale, die durch die Potenzierung der topographischen Höhen in der spektralen Methode (Abschnitt 3.2) entstehen, in der Modellierung berücksichtigt. Beide Techniken der Vorwärtsmodellierung sind für Massenmodelle niedriger und mittlerer Auflösung als numerisch gleichwertig anzusehen (Hirt und Kuhn 2014), wohingegen die Äquivalenz auf kurzen Skalen – z.B. km-Bereich – noch zu klären ist.

4. Anwendungsbeispiele und aktuelle Resultate topographischer Modellierungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen möglichst weitgefächerten Überblick zur Anwendung der topographischen Modellierungstechniken zu geben. Zunächst zeigen wir am Beispiel lokaler und regionaler Schwerefelddatensätze die hohe Korrelation mit der Topographie auf und verdeutlichen die Nutzung topographischer Schwereeffekte für die Glättung von Beobachtungsdaten (Abschnitt 4.1). Abschnitt 4.2 stellt die Nutzung globaler Modelle des topographischen Potentials für die Bewertung von Ergebnissen der GOCE-Satellitenmission vor. Darauf aufbauend werden beobachtete und topographische Schwerefeldmodelle für Erde und Mond im Spektralbereich mittels Gradvarianzen verglichen (Abschnitt 4.3). Im Raumbereich führt uns dieser Vergleich zu Bouguer-Schwerekarten für Mond und Erde, die als Differenz von beobachteter und topographischer Schwere konstruiert werden und Orte von Massenkonzentrationen und Defiziten zeigen (Abschnitt 4.4). Die Entwicklung der ultra-hochaufgelösten Erdschwerefeldkarte GGMplus durch Verdichtung von Beobachtungen mit topographischer Schwere wird dann in Abschnitt 4.5 beschrieben und deren Anwendungen aufgezeigt. Eine Zusammenschau der verwendeten Schwerefeldmodelle wird in Tabelle 3 gegeben.

Tabelle 3. Eigenschaften ausgewählter globaler Schwerefeldmodelle für Erde und Mond. Erläuterung der Modelltypen: B = ausschließlich basierend auf Beobachtungen, B* = Beobachtungen und teilweise Verwendung von topographischer Schwere, T = aus Topographiedaten und Vorwärtsmodellierung, B+T = spektrale Erweiterung von B mit T im kurzwelligen Bereich, B-T = Bouguer-Schwerefeld, berechnet durch Abzug von T von B.

Planet	Modell	Auflösung [km]	Modelltyp	Wichtigste Datenquellen
Erde	GOCE-TIM5 (Pail et al. 2011)	80	B	GPS und GOCE
	EGM2008 (Pavlis et al. 2012)	9	B*	Satellitengradiometrie
	dV_ELL_RET2012 (Claessens und Hirt 2013)	9	T	GRACE, Altimetrie, terrestrische Schwere und Topographie
	WGM2012 (Bonvalot et al. 2012)	1.8	B-T	RET2012-Topographie
	GGMplus (Hirt et al. 2013)	0.22	B+T	EGM2008 und ETOPO1-Topographie
Mond	SGM100i (Goossens et al. 2011)	70	B	GOCE, GRACE, EGM2008 und Topographie (SRTM)
	GRAIL 900c (Lemoine et al. 2014)	7	B	SELENE Tracking
	GRAIL 900c_Bouguer (Lemoine et al. 2014)	7	B-T	GRAIL Satellitenabstände und Tracking
	LGM2011 (Hirt und Featherstone 2012)	1.5	B+T	Wie zuvor, aber Abzug eines topographischen Schwerefeldes aus LOLA-DEM
				Beobachtetes Schwerefeld SGM100i ergänzt um topographisches Feld aus LOLA-DEM

4.1 Glättung von Schwerefeldinformation im Alpenraum

4.1.1 Lokales Beispiel: Lotabweichungen in Bayern

Im Isartal zwischen Karwendel und Estergebirge wurden Lotabweichungen durch astronomische Beobachtung in dichter Anordnung (220 m Stationsabstand) entlang eines 23 km langen Profils bestimmt (Hirt und Flury 2008). Die umgebenden topographischen Massen haben starken Anteil am gemessenen Lotabweichungssignal (Elmiger 1969). Dies wird durch einen Vergleich zwischen Messung (blau) und quaderbasierte Vorwärtsmodellierung (schwarz) aus einem lokal begrenzten DGM mit 50 m Auflösung bestätigt (Abb. 8). Reduziert man die gemessenen Lotabweichungen um die Wirkung der Topographie, ergibt sich ein glatteres Signal (rote Kreise), das mit einem kollokationsbasierten Verfahren weiter gefiltert und interpoliert wurde (rote Linie). Eine Anwendung der Vorwärtsmodellierung an Zwischenpunkten und Addition der topographischen Wirkung und des gefilterten Signal (rote Linie plus schwarze Linie) erlaubt die Verdichtung des Lotabweichungsdatensatzes auf eine sehr hohe 20 m Auflösung.

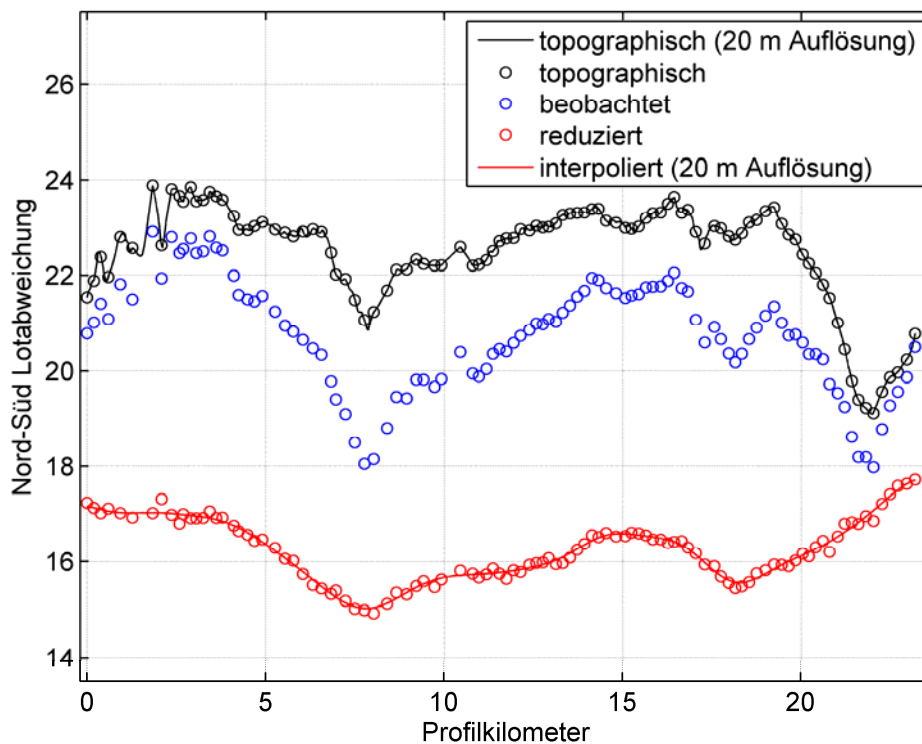


Abb. 8. Glättung von Schwerefeldbeobachtungen mit topographischen Daten am Beispiel eines hochaufgelösten Lotabweichungsprofils (nach Hirt und Flury 2008). Die Grafik zeigt die hohe Korrelation zwischen topographischen (schwarz) und beobachteten Lotabweichungen (blau) entlang eines 23 km langen Profils im Isartal. Die Differenzen (rot) sind glatter als die Beobachtungen und können gut interpoliert werden. Es wurden Offsets angebracht zur besseren grafischen Darstellung. Einheit ist Bogensekunden.

Durch Kombination von Beobachtung und topographischer Modellierung wird ein weitgehend linearer Verlauf der Lotabweichungen über kurze Distanzen sichergestellt. Damit wird eine Voraussetzung für die Anwendung des astronomischen Nivellements zur Bestimmung von Geoid- und Quasigeoidprofilen erfüllt (Torge und Müller 2012). Als Nebeneffekt erlaubt die topographische Modellierung eine Abschätzung der Messgenauigkeit aus Residuen zwischen reduziertem und interpoliertem Signal (Differenzen zwischen roten Kreisen und roter Linie, etwa 0.1 Bogensekunden RMS). Die beschriebene Kombinationsmethode von Beobachtung und topographischer Information ist als astronomisch-topographisches Nivellement im Detail in Hirt und Flury (2008) beschrieben.

4.1.2 Regionales Beispiel: Schwerewerte in der Schweiz

Der nationale Schweizer Schweredatensatz (Marti 1997) deckt mit etwa 32,000 Gravimetrie-Stationen das gesamte Gebiet der Schweiz gut ab, inklusive hochalpiner Regionen. Abb. 9a zeigt Schwerestörungen, die durch Abzug des GRS80-Normalfeldes (z.B. Torge und Müller 2012) von den Schwerebeschleunigungen an den 3D Stationskoordinaten (geodätische Breite, Länge und ellipsoidische Höhe) berechnet wurden. Schwerestörungen enthalten wie auch Lotabweichungen spektrale Feldinformation auf allen räumlichen Skalen. Diese reichen von sehr langwelligen Anteilen bis zu kurzwelligen Signalen, die wesentlich durch die umgebene Topographie erzeugt werden.

In einem ersten Schritt reduzieren wir die Schwerestörungen um alle Anteile, die vom globalen Geopotentialmodell EGM2008 geliefert werden. EGM2008 löst bei einem Entwicklungsgrad von 2,160 das Erdschwerefeld bis auf 9 km auf, d.h., es repräsentiert keine kurzwelligen Signalanteile (Skalen von 100 m bis 9 km). Abb. 9b zeigt, dass der Abzug von Schwerestörungen aus dem EGM2008 Modell zu einer guten Reduktion der mittel- und langwelligen Signale führt. In einem zweiten Schritt wird die Vorwärtsmodellierung im Raumbereich (Abschnitt 3.1) mit der hochaufgelösten SRTM Topographie angewendet, wobei eine Hochpassfilterung durch Abzug einer topographischen Kugelfunktionsentwicklung (Gl. 6) mit Entwicklungsgrad 2,160 erfolgt (Hirt 2010, Hirt et al. 2010).

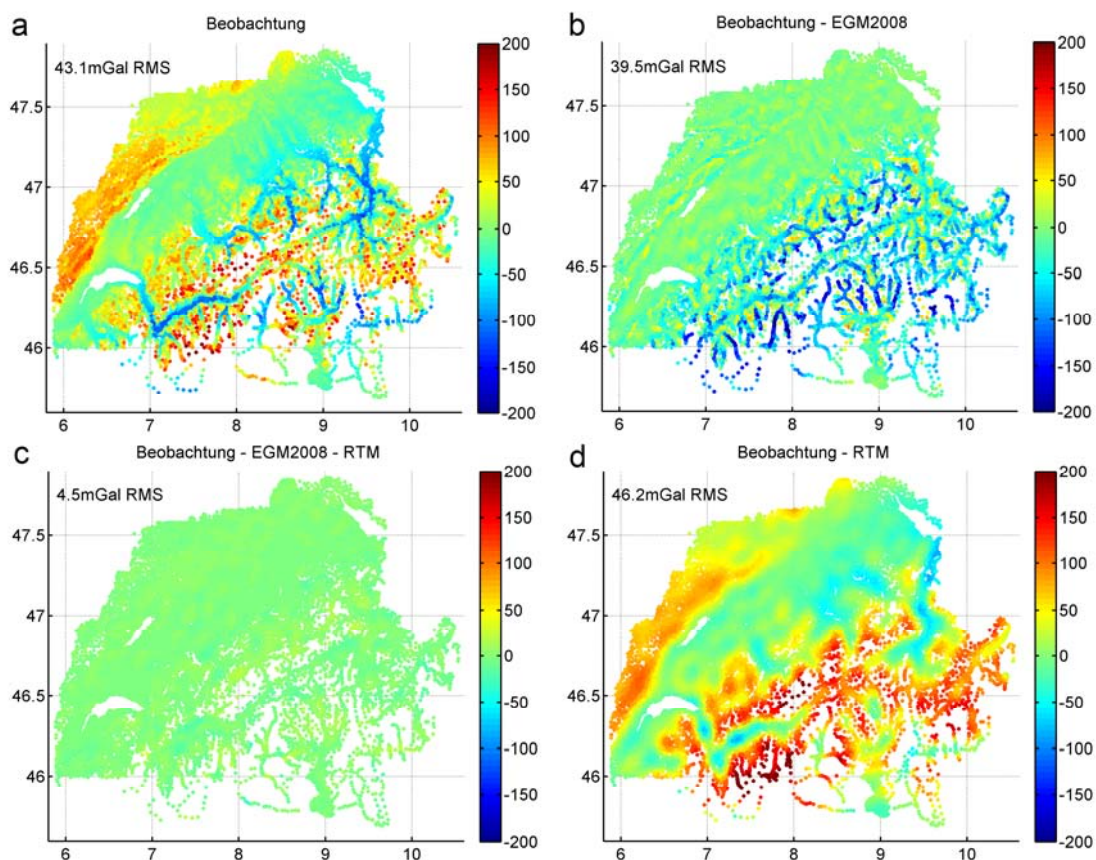


Abb. 9. Schwerestörungen in [mGal] über der Schweiz. (a) beobachtete Schwerestörungen, (b) abzüglich EGM2008, (c) abzüglich EGM2008 und RTM, (d) abzüglich RTM. Durch Reduktion der Schwerestörungen mit Schwereeffekten aus einem RTM wird das Feld lokal stark geglättet (Bereitstellung der Schwerewerte durch Swisstopo/Dr. Urs Marti).

Das resultierende RTM-Höhenmodell (vgl. Abb. 5a) liefert durch Vorwärtsmodellierung nach Forsberg (1984) RTM-Schwereffekte (vergleichbar mit Schwerestörungen). In einem letzten Schritt reduzieren

wir die Schweizer Schwerestörungen um EGM2008 und die RTM-Schwereeffekte und erhalten ein sehr glattes Residualfeld mit hochreduzierter Signalvariation (Abb. 9c, vgl. auch RMS Werte in der Abbildung). Das Residualfeld in Abb. 9c spiegelt wesentlich den Effekt von Anomalien in den tatsächlichen Gebirgsmassen wieder, also lokale Abweichungen zur Dichteannahme. Wird nur das RTM und nicht das globale Modell EGM2008 abgezogen, so erhalten wir auch eine deutliche lokale Glättung (Abb. 9d).

Die Glattheit der Residuen erlaubt uns, ein dichtes Raster (z.B. 100 m) zu interpolieren und anschließend Schwereeffekte aus RTM und EGM2008 an den Rasterpunkten „aufzusetzen“, um Schwerestörungen mit Signalanteilen auf allen räumlichen Skalen zu bekommen. Das beschriebene Vorgehen entspricht der häufig eingesetzten „Remove-Compute-Restore“ Technik (z.B. Forsberg und Tscherning 1981, Denker 2013) in der physikalischen Geodäsie und gravimetrischen Geoidbestimmung.

4.2 Topographische Bewertung von GOCE-Schwerefeldmodellen

Die Satellitenmission GOCE der Europäischen Weltraumagentur ESA hat von 2009 bis 2013 die lang- und mittelwelligen Signalanteile des Erdschwerefeldes hochgenau vermessen (Pail et al. 2011). Auf dem GOCE Satelliten wurde ein Gradiometer zur Messung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials auf einem sehr niedrigen Orbit (zwischen 220 und 260 km Höhe) eingesetzt. Aufgrund des Abstandes von den felderzeugenden Massen ist die erzielbare räumliche Auflösung der Satellitengradiometrie – wie bei jedem anderen berührungslosen Verfahren – begrenzt; kurzwellige Schweresignale werden mit der Höhe gedämpft (vgl. Faktor R/r in Gl. 9) und sind daher nicht auf Satellitenhöhe messbar (Rummel und van Gelderen 1995, Novak und Tenzer 2013, Grombein et al. 2014).

Die naheliegende Frage, welche Teile des Spektrums mit dem GOCE Satelliten erfasst wurden, kann durch einen Vergleich mit topographischer Information gut beantwortet werden. Der Grundgedanke ist dabei, ein globales Modell der gut bekannten topographischen Massen (Landtopographie, Bathymetrie, Eisschilde) für die Berechnung von topographischen Schwereeffekten zu verwenden. Da die GOCE Schwerfelder in Kugelfunktionen vorliegen, wenden wir die spektrale Modellierung an, die uns das topographische Potential (Gl. 7) in Kugelfunktionsentwicklung liefert. Dabei nutzen wir die Methode von Claessens und Hirt (2013), die das topographische Potential *ellipsoidisch* modelliert und damit „kompatibel“ zu beobachteten Modellen des Erdschwerefeldes ist.

Nachfolgend werden globale Gitter topographischer Schwereeffekte (Gl. 9) mit von GOCE beobachteten Werten auf unterschiedlichen räumlichen Skalen (d.h., niedrige, mittlere und höhere harmonische Grade) verglichen. Ihre Ähnlichkeit (Korrelation und Signalstärken) gibt uns – als Funktion des harmonischen Grads – Auskunft über die räumliche Auflösung der GOCE-Schwerefelder. Abb. 10 zeigt das Ergebnis der topographischen Bewertung von GOCE Resultaten. Dargestellt sind Signalreduktionen

$$RR = 100\% \left(1 - \frac{RMS(\delta g_{GOCE} - \delta g_{TOPO})}{RMS(\delta g_{TOPO})} \right), \quad (10)$$

und Kreuzkorrelations-Koeffizienten

$$CC = \frac{\sum (\delta g_{GOCE} - \overline{\delta g_{GOCE}}) (\delta g_{TOPO} - \overline{\delta g_{TOPO}})}{\sqrt{\sum (\delta g_{GOCE} - \overline{\delta g_{GOCE}})^2 \sum (\delta g_{TOPO} - \overline{\delta g_{TOPO}})^2}} \quad (11)$$

die als Funktion der GOCE-Schwereffekte δg_{GOCE} und topographischer Effekte δg_{TOPO} in verschiedenen spektralen Bändern (z.B. harmonische Grade 100 bis 105) berechnet werden ($\overline{\delta g_{GOCE}}$ und $\overline{\delta g_{TOPO}}$ sind Mittelwerte, und RMS bezeichnet Signalstärken). Die CC-Indikatoren zeigen die Ähnlichkeit der Schweresignale an; dagegen beziehen die RR-Indikatoren auch die Signalstärken mit ein und quantifizieren die prozentualen Anteile am topographischen Signal, die durch GOCE „gemessen“ wurden (Hirt et al. 2012a, Hirt 2014). Der Verlauf der CC- und RR-Indikatoren ist in Abb. 10 für die fünfte GOCE-Modellgeneration – die auf Beobachtungen über den gesamten Missionszeitraum basiert – und für zwei Auswertansätze der ESA (vgl. Bruinsma et al. 2013, Brockmann et al. 2014) zu sehen.

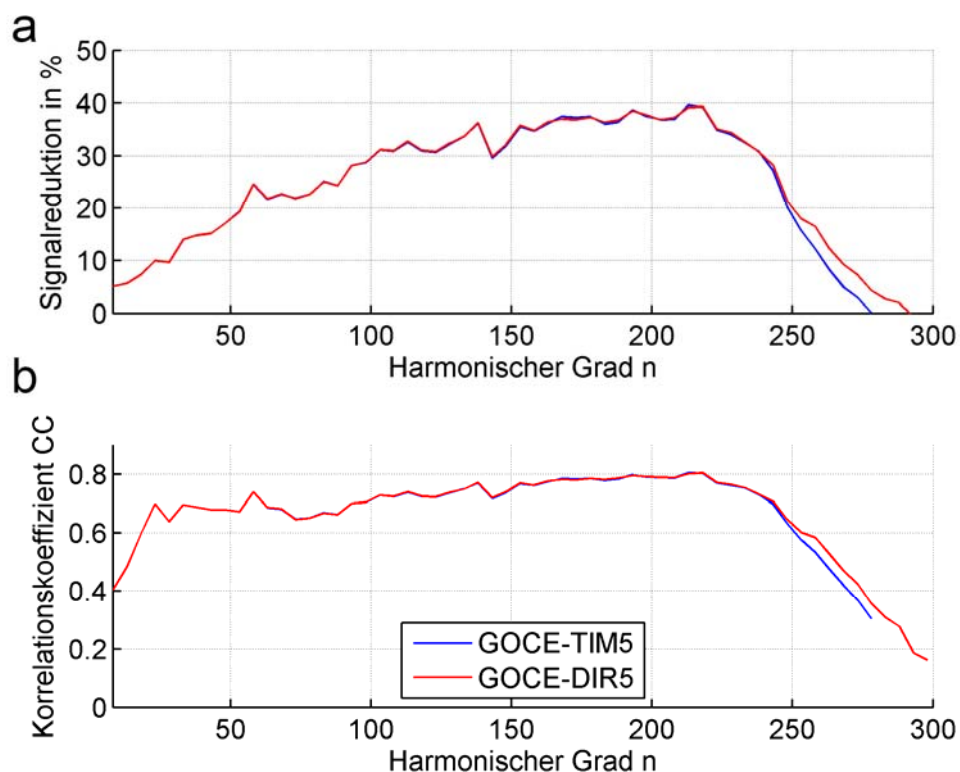


Abb. 10. Bewertung von Geopotentialmodellen TIM5 und DIR5 der GOCE-Satellitenmission durch Vergleich mit topographischem Potential als Funktion des harmonischen Grades. (a) Signalreduktion, (b) Korrelation.

Anhand der ansteigenden Indikatoren erkennt man, wie mit wachsendem harmonischen Grad – also kürzeren räumlichen Skalen – die Übereinstimmung zwischen GOCE-Modellen und topographischen Signalen besser wird und damit die oberflächennahe Topographie zunehmenden Anteil am Schwerfeldsignal bekommt. Maximalwerte unserer Indikatoren sind bei harmonischem Grad 220 sichtbar, dies entspricht Strukturen von 90 km Auflösung. Für höhere Grade fallen die Kurven langsam ab und zeigen damit den Effekt der Dämpfung kurzweiliger Signale an. Dennoch sind selbst auf Skalen von 70-80 km (Grad 270 bis 300) noch Anteile des topographischen Signals in der Beobachtung enthalten, wie von den positiven RR-Werten angezeigt (Abb. 10). Zusammenfassend lässt die topographische Bewertung auf eine vollständige Erfassung des Spektrums durch GOCE bis zu 90km-Skalen und eine Teilerfassung auf 70-90 km Skalen schließen. Damit bieten die neuen GOCE-Modelle die höchste mit Weltraumtechniken erreichte Auflösung für das Erdschwerefeld.

4.3 Spektrale Betrachtung von Mond- und Erdschwerefeld

Interessante spektrale Vergleiche zwischen gemessenen und topographischen Schwerfeldern von Erde und Mond sind aufgrund des Fortschrittes in Beobachtung und Modellierung in jüngerer Zeit möglich geworden. Das globale Erdschwerefeld wurde erstmalig in Form des EGM2008-Modells in Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 2160 dargestellt. Als „kompatibles Gegenstück“ wurde das topographische Schwerfeld $dV_ELL_RET2012$ aus der RET-Erdtopographie RET2012 entwickelt (Claessens und Hirt 2013). Beide Modelle basieren auf ellipsoidischer Approximation und erreichen gleichermaßen eine Auflösung von 5 Bogenminuten. Während EGM2008 wesentlich auf Beobachtungen basiert, modelliert $dV_ELL_RET2012$ das Potential der Erde ausschließlich auf Grundlage der oberflächennahen topographischen Massen (Modell RET2012), vgl. Tab. 3.

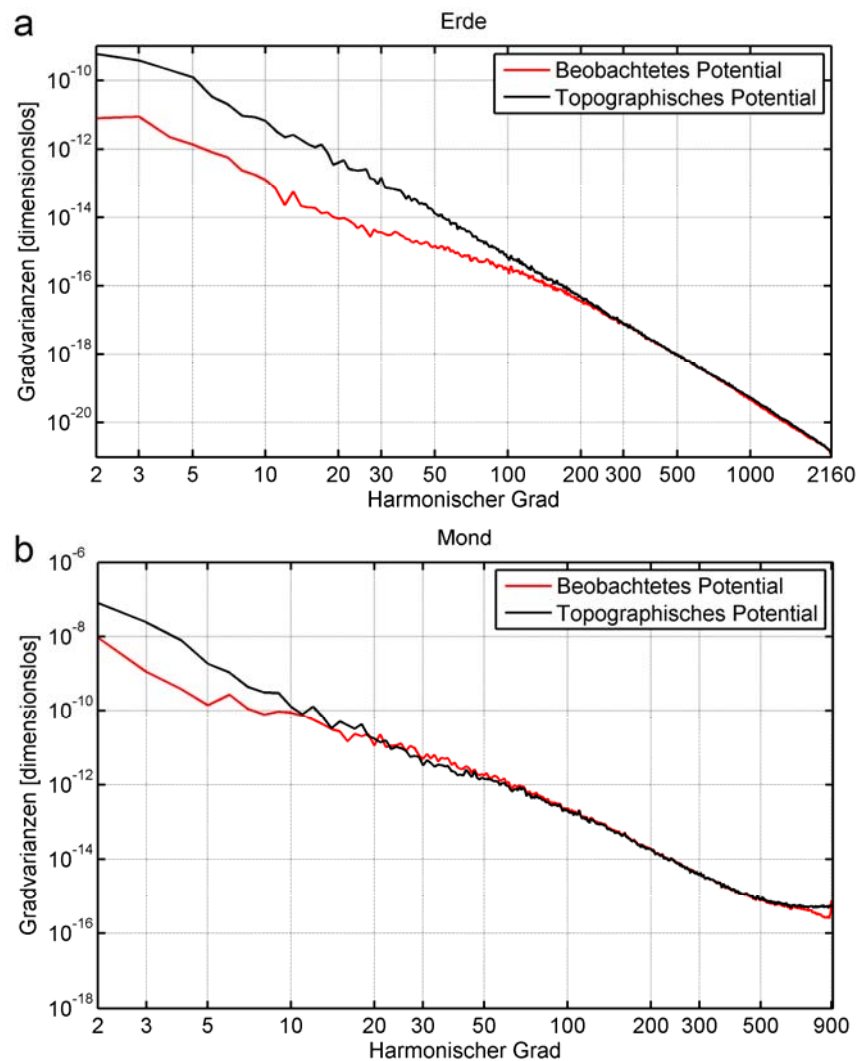


Abb. 11. Gradvarianz-Spektren des beobachteten (rot) und topographischen (schwarz) Gravitationspotentials für (a) Erde und (b) Mond.

Zur Charakterisierung der Modelle verwenden wir Gradvarianzen

$$c^2(n) = \sum_{m=0}^n \left(\overline{VC}_{nm}^2 + \overline{VS}_{nm}^2 \right), \quad (12)$$

die aus den sphärisch-harmonischen Koeffizienten pro Grad n berechnet und dargestellt werden. Gradvarianzen sind die „Energiekurve“ (Leistungsspektrum, engl. *power spectrum*) des

Schwerefeldes. Sie zeigen die Stärke von Schwerefeldsignalen in Abhängigkeit des harmonischen Grades n und damit von der räumlichen Skala $\Delta x = 20000\text{km}/(2n)$ bzw. Wellenlänge $\lambda = 40000\text{km}/n$ an. Abb. 11a zeigt die Gradvarianzen von EGM2008 und dV_ELL_RET2012 als Funktion von n in doppelt-logarithmischer Darstellung. Sowohl beim beobachteten als auch beim topographischen Potential nimmt die Energie vom langwelligen zum kurzwelligen Bereich um etwa 8 bis 10 Größenordnungen ab; die Abnahme zeigt den „Zerfall“ der Feldenergie mit zunehmendem Grad. Im Vergleich fällt sofort auf, dass das topographische Potential erheblich mehr spektrale Energie als das beobachtete Potential im langwelligen Bereich besitzt. Der Unterschied beträgt 1-2 Zehnerpotenzen. In diesem Verhalten zeigt sich in diesem Skalenbereich sehr klar die isostatische Kompensation der topographischen Massen – beobachtete Signale sind deutlich kleiner als topographisch modellierte Signale. (*Der Kompensationseffekt wurde bereits 1802 von Sir George Everest bei Lotabweichungsmessungen im Himalaya festgestellt – gemessene Lotabweichungen waren kleiner als aus der Topographie berechnete Werte. Der Widerspruch konnte nur durch Einbezug von Massendefiziten unter der Topographie in Einklang gebracht werden*).

Die „Scheren“ zwischen den beiden Gradvarianzkurven verringert sich im mittelwelligen Bereich (Grade 100 bis 200). Vergleichbare Signalstärken zwischen dem topographischen und beobachteten Feld ab Grad ~ 250 (80-90 km Skalen) legen nahe, dass isostatische Kompensation keine wesentliche Rolle in diesem Bereich spielt. Diese Beobachtung deckt sich gut mit Aussagen aus der Literatur, wonach die Biegesteifigkeit der Erdkruste topographische „Lasten“ auf Skalen von etwa 100 km oder geringer stützt (z.B. Wieczorek 2007, Watts 2011). Im kurzwelligen Bereich können die topographischen Massen als unkompensiert angenommen werden, dies wird auch im weitgehend deckungsgleichen Verlauf der Spektren ab etwa $n = 250$ in Abb. 11a deutlich.

Das Schwerefeld des Mondes wurde kürzlich durch die erfolgreiche GRAIL-Mission mit einer Auflösung von besser als 10 km bestimmt (Lemoine et al. 2014). Abb. 11b zeigt die Gradvarianzkurve des beobachteten Mondscherfeldes (Modell GRAIL 900c) und die des topographischen Potentials, das aus einem laseraltimetrischen Mondreliefmodell (LOLA) spektral berechnet wurde. Der Vergleich zeigt, dass beide Energiekurven gut bis hervorragend (ab $n = 70$) zusammenpassen. Ein Scheren-Effekt wie bei der Erde ist nur für die niederen Harmonischen ($n < 10$) ausgeprägt und bis etwa ($n = 20$) sichtbar, was auf Kompensationseffekte im langwelligen Bereich hindeutet.

Wir bemerken noch Folgendes: Der weitgehend deckungsgleiche Verlauf von topographischer und beobachteter Feldenergie tritt zwar bei unterschiedlichen harmonischen Graden auf ($n \approx 70$ beim Mond, und $n \approx 250$ bei der Erde), entspricht jedoch gleichen kilometrischen Skalen auf den Planetenoberflächen (etwa 80 km).

4.4 Globale Bouguer-Schwerekarten für Erde und Mond

Nach der spektralen Analyse bewegen wir uns in den Raumbereich zurück und verwenden beobachtete Schwerefelder zusammen mit topographischen Potentialmodellen für die Erstellung von globalen Bouguer-Schwerekarten. Diese Aufgabe vereinfacht sich durch Anwendung der spektralen Vorwärtsmodellierung. Schwerestörungen aus dem beobachteten und topographischen Potentialmodell werden durch Synthese (Gl. 9) in hochauflösenden globalen Gittern berechnet und voneinander abgezogen. Diese Form der Bouguer-Modellierung ist in den Erdwissenschaften noch nicht so verbreitet wie in den planetaren Wissenschaften, hat aber Vorteile gegenüber der traditionellen Berechnung (z.B. Jacoby und Smilde 2009, Tsoulis et al. 2009) in ebener Approximation und mit 167-km Integrationszonen. Ebene Approximationseffekte werden vermieden, und auch Signale weit entfernter Massen in der Vorwärtsmodellierung erfasst (vgl. Kuhn et al. 2009, Balmino et al. 2012).

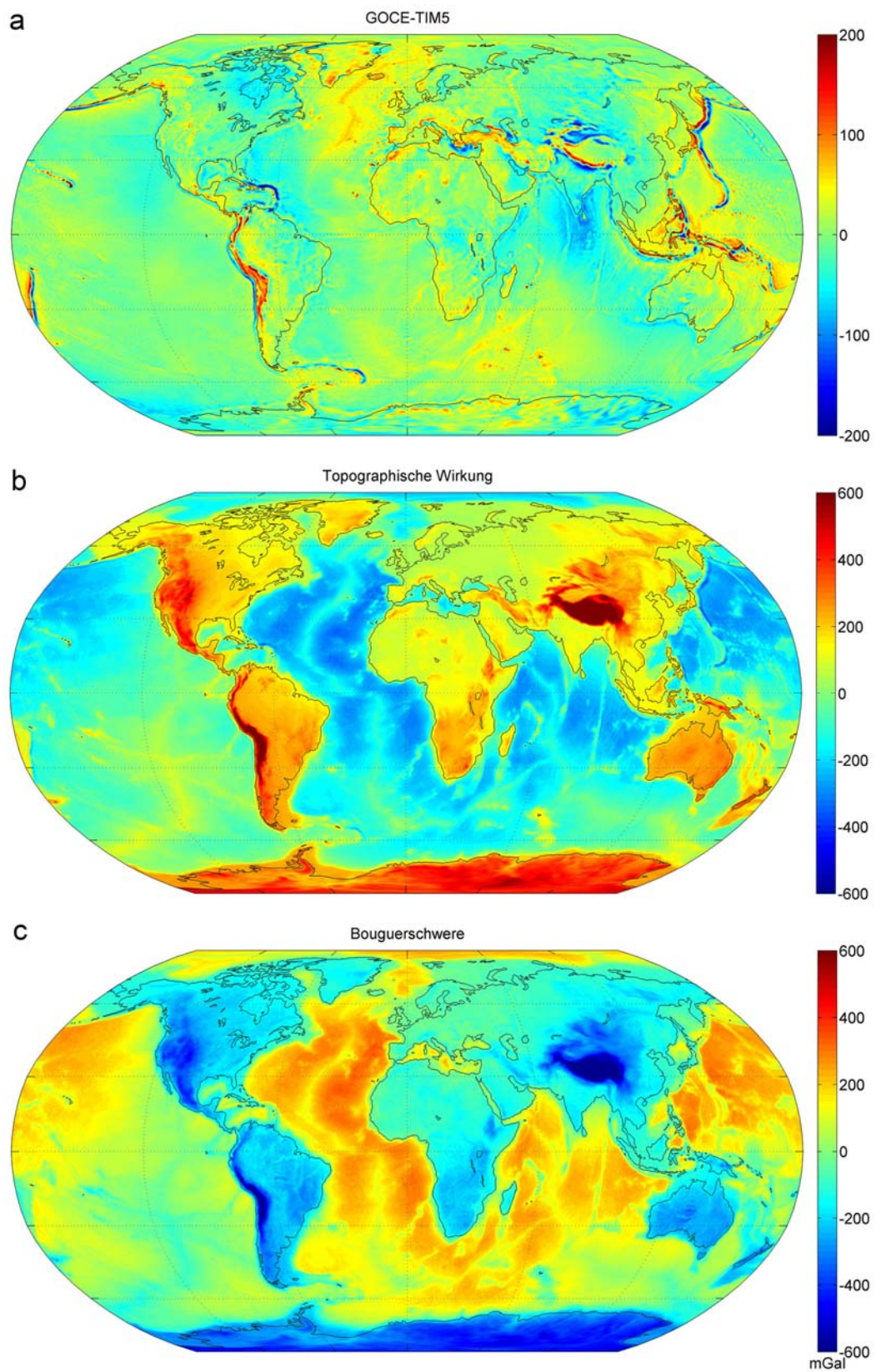


Abb. 12. Beobachtetes, topographisches und Bouguer-Schwerefeld der Erde. (a) GOCE TIM5 Beobachtungen, (b) RET2014 topographische Schwere, (c) Bouguer-Schwere. Alle Abbildungen zeigen Schwerestörungen [mGal] im spektralen Band 0 bis 280, die 10 km über dem GRS80 Ellipsoid ausgewertet wurden.

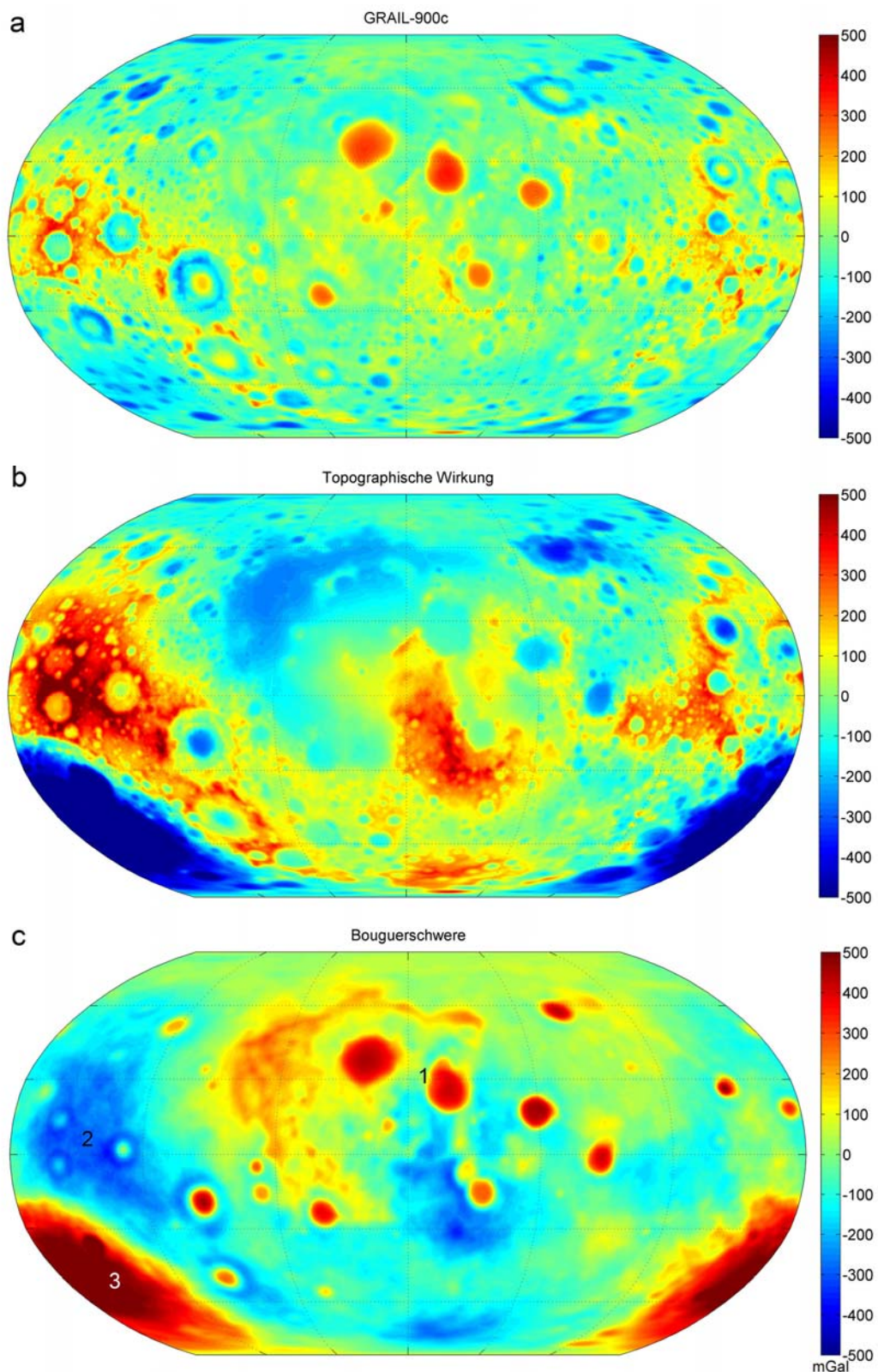


Abb. 13. Beobachtetes, topographisches und Bouguer-Schwerefeld des Mondes. (a) GRAIL 900c Beobachtungen, (b) topographische Schwere aus LOLA Höhenmodell, (c) Bouguer-Schwere. Alle Abbildungen zeigen Schwerestörungen [mGal] im spektralen Band 0 bis 660, die 20 km über der mittleren Mondsphäre ausgewertet wurden. Karten zentriert auf 0° Länge. Daten über der erdabgewandten Seite des Mondes sind links und rechts in der Karte dargestellt. 1 = Mascons, 2 = far-side highlands, 3 = Apollo Basin.

Abb. 12 zeigt beobachtete Schwerestörungen (hier aus dem GOCE-TIM5 Modell), topographische Schwerestörungen, und ihre Differenz, die Bouguer-Schwere. Der Vergleich der drei Karten zeigt die deutlich größeren topographischen Schweresignale (Amplituden von 500-600 mGal) im Vergleich zum beobachteten Feld (100-200 mGal Amplituden). Dies entspricht genau dem „Schereneffekt“ aus der spektralen Untersuchung (Abschnitt 4.3). In den Bouguer-Schwerekarten sind stark negative Signaturen über den Gebieten aller großen Gebirgszüge – z.B. Anden, Rocky Mountains, Himalaya Gebirge und Europäische Alpen – zu beobachten, hier zeigen sich die Massendefizite unterhalb der Gebirge sehr deutlich. Über den Ozeanen hingegen wird in der Bouguerkarte ein Massenüberschuss angezeigt, verursacht durch die stark negativen topographischen Schwerestörungen im marinen Bereich. Über bislang gravimetrisch nicht sehr dicht vermessenen Regionen – z.B. Teilen von Afrika, Südamerika und der Antarktis – zeigt die Karte neue Bouguersignale regionaler geologischer Einheiten (vgl. Braitenberg 2015, Hirt 2014).

In analoger Weise zeigt Abb. 13 beobachtete, topographische und Bouguer-Schwerestörungen aus dem GRAIL-900c Modell für den Mond. Sowohl im beobachteten als auch im Bouguerfeld treten die zirkularen Massenkonzentrationen (engl. *mascons*) hervor, die man als Intrusionen von Mantelmaterial hoher Dichte als Folge großer Asteroideneinschläge in der Frühphase der Mondentwicklung interpretiert. Die großskalige Mondtopographie erscheint isostatisch kompensiert, dies ist an den großräumigen blauen Signaturen (z.B. über den *farside highlands* auf der nördlichen Mondrückseite) zu erkennen. Dahingegen äußert sich die tiefe Depression auf der südlichen Mondrückseite (Apollo Einschlagsregion) in einer stark positiven Signatur. Beide Phänomene – Massenkonzentrationen und Isostasie – zeigen sich auch in den Gradvarianzen (Abb. 11b) der niederen harmonischen Grade: Kleinere Massenkonzentrationen im harmonischen Band der Grade 25 bis 60 (beobachtetes Potential hat höhere Energie) und großräumige isostatische Effekte besonders im harmonischen Band 2 bis 10 (topographisches Potential hat höhere Energie).

4.5 Ultrahochauflöste Schwerefeldmodellierung

Das aktuell detaillierteste Modell des globalen Erdschwerefeldes ist EGM2008. Sein hoher Entwicklungsgrad $n = 2,160$ erlaubt die Darstellung von Feldstrukturen auf 9 km Skalen. Feinere Details des Schwerefeldes im km-Bereich können allerdings nicht von einer $n = 2,160$ Kugelfunktionsentwicklung dargestellt werden. Man spricht hier auch vom Effekt der „Signalvernachlässigung“ (*signal omission*) auf kurzen Skalen. Eine substantielle Steigerung der Auflösung lässt sich durch Kombination mit der Vorwärtsmodellierung, besonders der RTM-Technik, erzielen (Hirt 2010). Das RTM wird dabei aus hochauflösender Topographie so konstruiert, dass es möglichst nur topographische Strukturen auf Skalen kürzer als 9 km darstellt. Die Vorwärtsmodellierung liefert dann kurzskalige Schwereeffekte, die das EGM2008 bis zur Auflösung des Geländemodells spektral erweitern.

Das beschriebene Prinzip wird in Abb. 14 über dem Alpenraum anhand von Schwerestörungen veranschaulicht. Man erkennt die begrenzte Auflösung des Kugelfunktionsmodells (a) und die kurzwellige Natur der RTM-Signale (b), die viele Signaturen von Gebirgen und Tälern umfassen und Amplituden von 100 mGal erreichen. Die Addition beider Felder liefert uns ein spektral weitgehend vollständiges Schweremodell (c). In gebirgigen Regionen erfasst das RTM aufgrund der hohen Korrelation zwischen Schwere und Geländere relief bis zu 90% des kurzskaligen Schweresignals (vgl. auch Abb. 8) und ist damit sehr effizient für die Modellentwicklung.

Auf dem dargestellten Prinzip der spektralen Erweiterung aufbauend wurde das ultrahochauflösende GGMplus Schwerefeldmodell entwickelt, das alle Landflächen innerhalb von $\pm 60^\circ$ Breite mit Schwerekarten von etwa 200 m Auflösung abdeckt (Hirt et al. 2013). Eine Kombination von

EGM2008 mit GOCE und GRACE Satellitengravimetrie liefert dabei die lang- und mittelwelligen Feldanteile und die RTM-Technik, angewendet mit der SRTM Topographie (und SRTM30_PLUS Bathymetrie in Küstennähe), die kurzskaligen Schweresignale von GGMplus.

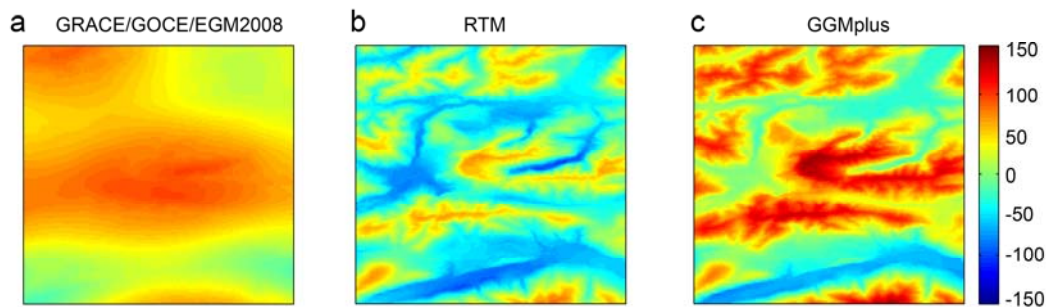


Abb. 14. GGMplus Konstruktionsprinzip. (a) langwellig und mittelwellige Signale aus GRACE/GOCE und EGM2008), (b) kurzwellige Signale aus RTM, (c) Addition beider Felder gibt GGMplus. Dargestellt sind Schwerestörungen [mGal] über einem 20 x 20 km Ausschnitt des Zugspitzgebietes.

Eine besondere rechentechnische Herausforderung ist die Anwendung der Vorwärtsmodellierung mit *globaler Abdeckung* und *hoher Auflösung*. Bei einer räumlichen Auflösung von 200 m sind RTM-Schwereffekte an etwa 3 Milliarden Berechnungspunkten (auf den von SRTM abgedeckten Landflächen) zu berechnen. Bei einer Recheneffizienz von 6 Punkten pro Sekunde (gemessener Wert) auf einem Standard-PC ergäbe sich ein Rechenaufwand von etwa 20 Jahren für die RTM-Vorwärtsmodellierung. Durch Parallelberechnung, also gleichzeitige Rechnung auf einer Vielzahl von Supercomputer-CPU's, wurde im Fall von GGMplus die Rechenzeit auf wenige Wochen reduziert und damit erstmalig die globale SRTM-Topographie in Schwerewirkungen im 200m-Raster umgewandelt. Schwerebeschleunigungen aus dem GGMplus-Modell über einem Teil der Anden sind in Abb. 15 darstellt.

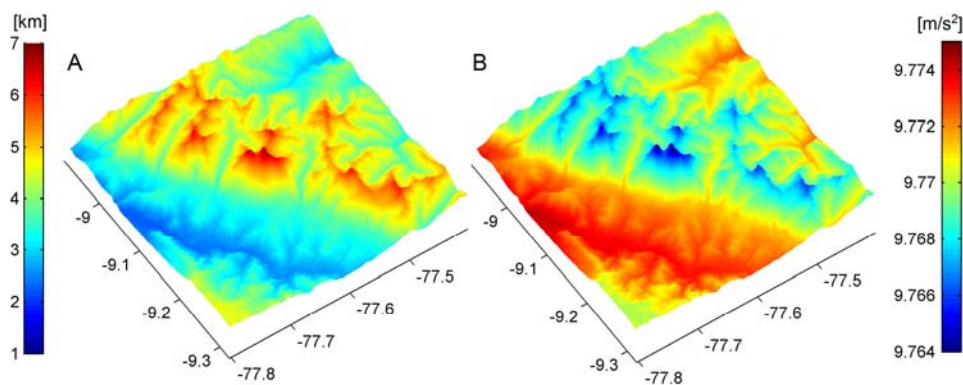


Abb. 15. (a) Hochaufgelöste Topographie und (b) GGMplus Schwerebeschleunigungen über den peruanischen Anden (nach Hirt et al. 2013)

GGMplus ist die erste Generation einer neuen Modellkategorie, die lokal hohe Auflösung für das Schwerfeld mit globaler Überdeckung verbindet und damit detaillierte Schwerfeldinformation für einen breiten Anwenderkreis verfügbar macht. Ein besonderer Wert des Modells GGMplus ist seine Nutzbarkeit als globale ultra-hochauflösende Approximation des Schwerfeldes auf allen räumlichen Skalen. Anwendungen finden sich beispielsweise im GNSS-Nivellement (Höhentransfer), Ausreißer-Detektion in Schweredatenbanken und der in-situ Reduktion geodätischer Messungen (Tachymetrie oder Nivellement). Auch die statistischen Feldeigenschaften können auf Basis von GGMplus untersucht werden, beispielsweise die Extremwerte des Feldes und Gradvarianzen auf sehr kurzen Skalen (Rexer und Hirt 2015).

Da die Vorwärtsmodellierung nicht die Wirkung lokaler Massendichte-Variationen auf die Schwere erfassen kann (dafür wäre exakte 3D-Dichteinformation notwendig), ist die vorgestellte Methode approximativ. Eine Abschätzung des Effektes nicht modellierter Dichteveriation ergibt sich aus unseren Vergleichen mit dem Schweizer Schweredatensatz (Abb. 8d, etwa 5 mGal RMS-Signale).

Im Zusammenhang mit der ultra-hochaufgelösten Vorwärtsmodellierung sei auf einige weitere Arbeiten hingewiesen. Pavlis et al. (2007, 2012) haben die RTM-Technik auf Skalen von 9 bis 24 km (harmonische Grade 900 bis 2160) als Informationsquelle für das EGM2008 über Regionen genutzt, die gravimetrisch wenig vermessen sind. Eine EGM2008-Bouguerschwerekarte (WGM2012) wurde unter Anwendung ultra-hochaufgelöster spektraler Vorwärtsmodellierung (bis Grad 10,800) von Balmino et al. (2012) konstruiert, wobei die topographische Komponente des Bouguerfeldes eine wesentlich höhere Auflösung als die Beobachtung (EGM2008) erreicht. Eine Umwandlung der ETOPO-Topographie in topographisches Potential mit 3.6 km Auflösung wurde von Gruber et al. (2013) vorgenommen. Schließlich wurde die spektrale Erweiterung beobachteter Schwerfelder mit topographischer Schwereinformation auf die Planeten angewendet und hochaufgelöste Schwerfeldkarten für Mond (LGM2011, Hirt und Featherstone 2012), Mars (MGM2011, Hirt et al. 2012b) und Venus (VGM2014, Li et al. 2015) mit der RTM-Ergänzungsmethode konstruiert. Abb. 16 zeigt exemplarisch Schwerebeschleunigungen über der Mondoberfläche aus dem LGM2011 Feld.

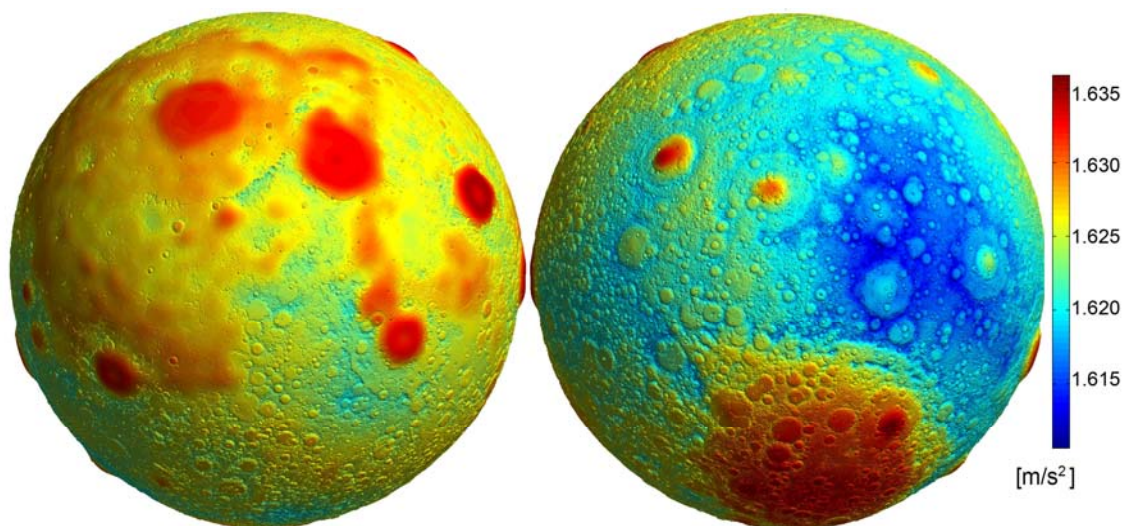


Abb. 16. Schwerebeschleunigungen auf der Mondoberfläche aus dem hochaufgelösten LGM2011 Modell (Hirt und Featherstone 2012). Links ist die erd zugewandte Mondseite (*near-side*), rechts die abgewandte Seite (*far-side*) dargestellt. Die Mondanziehung ist über den Massenkonzentrationen und in der Mitte von Kratern besonders groß. Visualisierung mit dem Tool von Bezdek und Sebera (2013).

5. Zusammenfassung und zukünftige Herausforderungen

Dieser Aufsatz gibt eine Übersicht zur topographischen Modellierung von Gravitationsfeldern. Zunächst wurde die Erstellung topographischer Massenmodelle erläutert, gefolgt von einer Beschreibung der Vorwärtsmodellierung im Raum- und Spektralbereich. Die gewählten Anwendungsbeispiele – von (i) topographischen Reduktionen gemessener Schweredaten, über (ii) die Nutzung globaler spektraler Modelle des topographischen Potentials zur Untersuchung gemessener Schwerfelder, bis zur (iii) Konstruktion ultra-hochauflösender Schwerfeldmodelle – versuchen die Bedeutung der Thematik für die physikalische Geodäsie und ihre Nachbardisziplinen aufzuzeigen. Die beschriebenen Beispiele zeigen die erreichte Leistungsfähigkeit und Relevanz topographischer Modellierungstechniken als eine physikalisch-geodätische Kernkompetenz auf und deuten dabei auch einige zukünftige Herausforderungen für das Forschungsfeld an.

5.1 Herausforderungen in der Massenmodellierung

Eine Verbesserung der Schwerefeld-Approximation durch topographische Modellierung kann über bessere Massenmodelle erreicht werden. Während die Geometrie der Landtopographie sehr gut erfasst ist, bestehen deutliche Herausforderungen im Bereich der Ozeanbathymetrie und vor allem in einer hochauflösenden Kartierung der Massendichten (z.B. Digitalisierung von geologischen Karten).

Im kurzwelligen Bereich (z.B. km-Skalen) tragen Modelle der oberflächennahen topographischen Massen bis zu 90% zum Schweresignal bei (vgl. Abb. 8), im mittelwelligen Spektrum (100 km) reduziert sich dieser Wert auf 30-40% (vgl. Abb. 10). Auf diesen Skalen kann ein großer Teil des Schweresignals *nicht* aus der Topographie erklärt werden. Es wirken offenbar größere unbekannte Massenanomalien innerhalb der Lithosphäre, die sich bislang einer Beschreibung im Massenmodell entziehen, wenig zutreffend über Isostasie-Modelle dargestellt werden können (Hirt et al. 2012) und eine Herausforderung für genaue Massenmodellierung in Geophysik und Geodäsie darstellen. Die weitere Verbesserung von Erdkrustenmodellen (wie Crust 1.0) und isostatischer Modellierung (Vening-Meinesz-Modelle) ist ein guter Ansatzpunkt.

5.2 Herausforderungen in der Vorwärtsmodellierung

Auch in der Theorie und Praxis der Vorwärtsmodellierung liegen Herausforderungen. Einige aktuelle Arbeiten (Balmino et al. 2012, Hirt und Kuhn 2012, Gruber et al. 2013) konzentrieren sich auf die spektrale Methode mit zunehmend höherer Auflösung. Die Konvergenz der Entwicklung des Potentials in topographische Höhen ist dabei für niedrige Entwicklungsgrade (z.B. $n=360$) sichergestellt und erlaubt damit eine zuverlässige Nutzung für die Erstellung von globalen Bouguerkarten. Zu klären jedoch ist die Konvergenz und Stabilität des Verfahrens für höherauflösende Modellierungen. Dabei liegt die Herausforderung im stark zunehmenden Rechenaufwand, dieser erhöht sich mit der räumlichen Auflösung durch eine Vielzahl von notwendigen sphärisch-harmonischen Analysen hohen Grades. Eine Nutzung der spektralen Methode für globale Modellierungen mit der Auflösung des SRTM-Modells ist für die nähere Zukunft nicht zu erwarten.

Während die spektrale Methode für globale topographische Modellierungen mit begrenzter Auflösung prädestiniert ist, ist die Modellierung im Raumbereich – besonders mit der RTM-Technik – für die Umwandlung von Topographie in Schwerewirkungen mit höchster Auflösung gut geeignet. Es ist absehbar, dass die SRTM-Topographie auch auf höherer Auflösung (90 m) für eine globale Schwerefeld-Approximation genutzt werden wird. Die bisher übliche RTM-Filterung des Geländemodells ist allerdings nicht ganz kompatibel mit einer Filterung der Schwerewerte, da der Zusammenhang zwischen Schwere und topographischer Höhe nicht linear ist. Neue Ansätze für die Filterung sind in Entwicklung, diese werden die Nutzbarkeit der RTM-Technik für die hochaufgelöste Schwerefeldmodellierung weiter verbessern.

Danksagung

Der Autor wurde vom Australian Research Council und Institute for Advanced Study der Technischen Universität München unterstützt. Dank gilt allen Entwicklern von Schwerefeld- und Topographiemodellen, und allen Wissenschaftlern, die mit ihren Beiträgen das Forschungsfeld der topographischen Modellierung weiterentwickelt haben. Ein besonderer Dank geht an Michael Kuhn und Sten Claessens für eine sehr erfolgreiche Zusammenarbeit.

Literatur

- Abd-Elmotaal, H., K. Seitz, M. Abd-Elbaky, und B. Heck. 2014. Comparison Among Three Harmonic Analysis Techniques on the Sphere and the Ellipsoid. *Journal of Applied Geodesy* 8 (1): 1–19.
- Amante, C. und B.W. Eakins. 2009. ETOPO1 1 arc-minute global relief model: Procedures, Data Sources and Analysis. *NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24*. Boulder: National Geophysical Data Center.
- Balmino, G., N. Vales, S. Bonvalot und A. Briais. 2012. Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies. *Journal of Geodesy* 86(7): 499-520.
- Baran I., M. Kuhn, S.J. Claessens, W.E. Featherstone, S.A. Holmes und P. Vaníček. 2006. A synthetic Earth Gravity Model designed specifically for testing regional gravimetric geoid determination algorithms. *Journal of Geodesy* 80(1):1-16.
- Becker, J.J. D.T. Sandwell, W.H.F. Smith, J. Braud, B. Binder, J. Depner, D. Fabre, J. Factor, S. Ingalls, S-H. Kim, R. Ladner, K. Marks, S. Nelson, A. Pharaoh, R. Trimmer, J. Von Rosenberg, G. Wallace und P. Weatherall. 2009. Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30_PLUS. *Marine Geodesy* 32(4):355-371.
- Bezdek, A. und J. Sebera. 2013. Matlab script for 3D visualizing geodata on a rotating globe. *Computers and Geosciences* 56: 127–130.
- Blakeley, R.J. 1996. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Braitenberg, C. 2015. Exploration of tectonic structures with GOCE in Africa and across-continentals. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* 35: 88–95.
- Brockmann, J. M., N. Zehentner, E. Höck, R. Pail, I. Loth, T. Mayer-Gürr, und W.-D. Schuh. 2014. EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission. *Geophysical Research Letters* 41: 8089–8099.
- Bruinsma, S. L., C. Förste, O. Abrikosov, J.-C. Marty, M.-H. Rio, S. Mulet und S. Bonvalot. 2013. The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach. *Geophysical Research Letters* 40: 3607–3612.
- Claessens, S.J. und C. Hirt 2013. Ellipsoidal topographic potential - new solutions for spectral forward gravity modelling of topography with respect to a reference ellipsoid. *Journal of Geophysical Research* 118(11): 5991-6002.
- Denker, H. 1988. *Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten*. Wiss. Arb. Fach. Verm. Univ. Hannover 156.
- Denker, H. 2013. Regional Gravity Field Modeling: Theory and Practical Results. In: *Sciences of Geodesy - II*, Hrsg. G Xu, 185-291. Berlin, Heidelberg: Springer.
- D’Urso, M. G. 2014. Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. *Journal of Geodesy* 88(1): 13-29.
- Elmiger, A. 1969. *Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz*. Mitt. Inst. Geod. Phot. ETH Zürich Nr. 12.
- Flury, J. 2002. Schwerefeldfunktionale im Gebirge – Modellierungsgenauigkeit, Messpunktdichte und Darstellungsfehler am Beispiel des Testnetzes Estergebirge. Deutsche Geodätische Kommission C 557. München.
- Forsberg R. und C.C. Tscherning. 1981. The use of height data in gravity field approximation by collocation, *Journal of Geophysical Research* 86(B9): 7843-7854.
- Forsberg R. 1984. *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. OSU Report 355. Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.
- Forsberg, R. 1985. Gravity field terrain effect computations by FFT. *Bulletin Geodesique* 59: 342-360.
- Fretwell, P., Pritchard, H. D., Vaughan, D. G., Bamber, J. L. et al. 2013. Bedmap2: improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica. *The Cryosphere* 7: 375-393.
- Göttl, F., und R. Rummel. 2009. A Geodetic View on Isostatic Models. *Pure and Applied Geophysics* 166(8-9): 1247-1260.
- Goossens, S., K. Matsumoto, Q. Liu, F. Kikuchi, K. Sato, H. Hanada, Y. Ishihara, H. Noda, N. Kawano, N. Namiki, T. Iwata, F.G. Lemoine, D.D. Rowlands, Y. Harada und M. Chen. 2011. Lunar gravity field determination using SELENE same-beam differential VLBI tracking data. *Journal of Geodesy* 85(4): 205-228.
- Grombein, T., Seitz, K., Heck, B.: Modelling topographic effects in GOCE gravity gradients. GEOTECHNOLOGIEN Science Report 17, 84–93 (2010)
- Grombein T., K. Seitz und B. Heck 2013. Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy* 87(7): 645–660.
- Grombein, T., X. Luo, K. Seitz und B. Heck. 2014. A wavelet-based assessment of topographic-isostatic reductions for GOCE gravity gradients. *Surveys in Geophysics* 35(4): 959-982.
- Gruber C., P. Novák, F. Flechtner und F. Barthelmes. 2013. Derivation of the topographic potential from global DEM models. In *International Association of Geodesy Symposia 139*, Hrsg. C. Rizos und P. Willis, 535-542. Berlin, Heidelberg: Springer.

- Heck, B. und K. Seitz. 2007. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy* 81(2): 121-136.
- Hirt, C. 2010. Prediction of vertical deflections from high-degree spherical harmonic synthesis and residual terrain model data. *Journal of Geodesy* 84(3): 179-190.
- Hirt, C. 2014. GOCE's view below the ice of Antarctica: Satellite gravimetry confirms improvements in Bedmap2 bedrock knowledge. *Geophysical Research Letters* 41(14): 5021-5028.
- Hirt, C. und J. Flury. 2008. Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. *Journal of Geodesy* 82(4-5):231-248.
- Hirt, C. und M. Kuhn. 2012. Evaluation of high-degree series expansions of the topographic potential to higher-order powers. *Journal of Geophysical Research – Solid Earth* 117, B12407.
- Hirt, C. und M. Kuhn. 2014. A band-limited topographic mass distribution generates a full-spectrum gravity field – gravity forward modelling in the spectral and spatial domain revisited. *Journal of Geophysical Research – Solid Earth* 119(4): 3646-3661.
- Hirt C. und W.E. Featherstone. 2012. A 1.5 km-resolution gravity field model of the Moon. *Earth Planetary Science Letters* 329-330: 22-30.
- Hirt, C., W.E. Featherstone und U. Marti. 2010. Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data. *Journal of Geodesy* 84(9): 557-567.
- Hirt, C., M. Kuhn, W.E. Featherstone, und F. Göttl. 2012a. Topographic/isostatic evaluation of new-generation GOCE gravity field models. *Journal of Geophysical Research* 117: B05407.
- Hirt, C., S.J. Claessens, M. Kuhn und W. Featherstone. 2012b. Kilometer-resolution gravity field of Mars: MGM2011. *Planet. Space Sci.* 67: 147–154.
- Hirt, C., S.J. Claessens, T. Fecher, M. Kuhn, R. Pail und M. Rexer. 2013. New ultra-high resolution picture of Earth's gravity field. *Geophysical Research Letters* 40(16): 4279-4283.
- Hirt, C., Rexer, M.: Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models - available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* 39, 103-112 (2015)
- Hwang, C., C.-G. Wang und Y.-S. Hsiao. 2003. Terrain correction computation using Gaussian quadrature. *Computers and Geosciences* 29: 1259–1268.
- Jacoby, W. und P.L. Smilde. 2009. *Gravity interpretation*. New York: Springer.
- Laske, G., G. Masters, Z. Ma und M. Pasyanos. 2013. Update on CRUST1.0 - A 1-degree Global Model of Earth's Crust. *Geophysical Research Abstracts*, 15, Abstract EGU2013-2658.
- Li F, J. Yan, L. Xu, S. Jin, J. Alexis, P. Rodriguez, J.H. Dohm. 2015. A 10 km-resolution synthetic Venus gravity field model based on topography. *Icarus* 247: 103–111.
- Kaban, M. K., P. Schwintzer und C. Reigber. 2004. A new isostatic model of the lithosphere and gravity field. *Journal of Geodesy* 78(6): 368-385.
- Kaban, M.K. und W.D. Mooney 2001. Density structure of the lithosphere in the Southwestern United States and its tectonic significance. *Journal of Geophysical Research* 106(B1): 721-739.
- Kuhn, M. 2000. *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. Deutsche Geodätische Kommission C 520, München.
- Kuhn, M. 2003. Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information. *Journal of Geodesy* 77(1-2): 50-65.
- Kuhn, M., und W.E. Featherstone. 2003. On the Construction of a Synthetic Earth Gravity Model, In: Proceed 3rd Meeting of the Intern. Gravity and Geoid Commission, Hrsg. I. Tziavos, 189-194. Thessaloniki: Editions Ziti.
- Kuhn, M., W.E. Featherstone und J.F. Kirby. 2009. Complete spherical Bouguer gravity anomalies over Australia. *Australian Journal of Earth Sciences* 56(2): 213-223.
- Kuhn, M.; Hirt, C.: Topographic gravitational potential up to second-order derivatives: an examination of approximation errors caused by Rock-Equivalent-Topography (RET), unter Begutachtung (2016).
- Lemoine, F.G., S. Goossens, T.J. Sabaka, J.B.Nicholas, E. Mazarico, D.D. Rowlands, B.D. Loomis, D.S. Chinn, G.A. Neumann, D.E. Smith und M.T. Zuber. 2014. GRGM900C: A degree-900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data. *Geophysical Research Letters* 41(10): 3382–3389.
- Makhloof, A.A. 2007. *The Use of Topographic-Isostatic Mass Information in Geodetic Applications*. Dissertation D98, Institut für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn.
- Marti, U. 1997. *Geoid der Schweiz 1997*. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 56. Schweizerische Geodätische Kommission.
- Nagy, D., G. Papp und J. Benedek. 2000. The Gravitational Potential and its Derivatives for the Prism. *Journal of Geodesy* 74(7-8):552-560. Erratum in *Journal of Geodesy* 76(8):475.
- Novák, P. und R. Tenzer. 2013. Gravitational Gradients at Satellite Altitudes in Global Geophysical Studies. *Surveys in Geophysics* 34(5): 653-673.

- Pail, R., S. Bruinsma, F. Migliaccio, C. Förste, H. Goiginger, W.-D. Schuh, E. Höck, M. Reguzzoni, J.M. Brockmann, O. Abrikosov, M. Veicherts, T. Fecher, R. Mayrhofer, I. Krasbutter, F. Sansò und C.C. Tscherning. 2011. First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy* 85(11): 819-843.
- Papp, G., 1996. Gravity field approximation based on volume element model of the density distribution. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 91: 339-358.
- Pavlis, N.K., J.K. Factor, und S.A. Holmes 2007. Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In *Proceedings of the 1st International Symposium of the IGFS*, 318-323, Istanbul: Harita Dergisi.
- Pavlis N.K., S.A. Holmes, S.C. Kenyon, und J.K. Factor. 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), *Journal of Geophysical Research* 117(B4): B04406.
- Rabus, B., M. Eineder, A. Roth und R. Bamler. 2003. The Shuttle Radar Topography Mission – A New Class of Digital Elevation Models Acquired by Spaceborne Radar. *ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing* 57, 241-262.
- Reuter H.I., A. Nelson, und A. Jarvis. 2007. An evaluation of void filling interpolation methods for SRTM data. *International Journal of Geographic Information Science* 21(9): 983-1008.
- Rexer, M., Hirt, C.: Spectral analysis of the Earth's topographic potential via 2D-DFT - a new data-based degree variance model to degree 90,000. *J. Geodesy* 89(9), 887-909 (2015)
- Rummel, R., R.H. Rapp, H. Sünkel, und C.C. Tscherning. 1988. Comparisons of global topographic/isostatic models to the Earth's observed gravity field. OSU Report 388. Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.
- Rummel, R., und M. van Gelderen. 1995. Meissl scheme – spectral characteristics of physical geodesy. *Manuscript geodetica* 20: 379-385.
- Sneeuw, N. 1994. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophysical Journal International* 118(3): 707-716.
- Smith, D. A. 2000. The gravitational attraction of any polygonally shaped vertical prism with inclined top and bottom faces. *Journal of Geodesy* 74(5): 414– 420.
- Strang van Hees, G.L. 2000. Some elementary relations between mass distributions inside the Earth and the geoid and gravity field. *Journal of Geodynamics* 29(1–2), 111–123.
- Tapley, B. D., S. Bettadpur, M. Watkins, und C. Reigber. 2004. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters* 31, L09607.
- Tenzer, R., P. Novák und V. Gladkikh. 2011. On the accuracy of the bathymetry-generated gravitational field quantities for a depth-dependent seawater density distribution. *Studia Geophysica et Geodaetica* 55(4): 609-626.
- Tenzer R, W. Chen, D. Tsoulis, M. Bagherbandi, L.E. Sjöberg, P. Novák, und S. Jin. 2014. Analysis of the Refined CRUST1.0 Crustal Model and its Gravity Field. *Surveys in Geophysics*, online first.
- Torge, W. und J. Müller. 2012. *Geodesy*. 4th Edition. Berlin, New York: W. de Gruyter.
- Tsoulis, D. 2001. A comparison between the Airy/Heiskanen and the Pratt/Hayford isostatic models for the computation of potential harmonic coefficients. *Journal of Geodesy* 74(9): 637-643.
- Tsoulis, D., P. Novák, und M. Kadlec. 2009. Evaluation of precise terrain effects using high-resolution digital elevation models. *Journal of Geophysical Research* 114, B02404.
- Tziavos, I.N., G.S. Vergos und V.N. Grigoriadis. 2010. Investigation of topographic reductions and aliasing effects to gravity and the geoid over Greece based on various digital terrain models. *Surveys in Geophysics* 31(1): 23-67.
- Tziavos, I.N. und M.G. Sideris. 2013. Topographic Reductions in Gravity and Geoid Modeling. In *Lecture Notes in Earth System Sciences* 110, Hrsg. F. Sansò und M.G. Sideris, 337-400. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Watts, A. B. 2011. Isostasy, In *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, Hrsg. H.K. Gupta, 1, 647-662. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Wieczorek, M.A. 2007. Gravity and topography of the terrestrial planets. In *Treatise on Geophysics*, Hrsg. G. Schubert, 10, 165-206, Oxford: Elsevier-Pergamon.
- Wieczorek, M.A., und R.J. Phillips. 1998. Potential anomalies on the sphere: Applications to the thickness of the lunar crust. *Journal of Geophysical Research* 103(E1): 1715-1724.
- Wild, F. und B. Heck. 2005. A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry. In *International Association of Geodesy Symposia* 129, Hrsg. C. Jekeli, L. Bastos, L. Fernandes, 230-235. Berlin, Heidelberg: Springer.