

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt  
Lehrstuhl für Baumechanik

Simulation von Bremsenquietschen:  
Ein Beitrag zur Prognosegüte

Dipl.-Math. techn. Baldur Georg Allert

Vollständiger Abdruck der von der Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Fabian Duddeck

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Norbert Hoffmann  
Technische Universität Hamburg-Harburg

Die Dissertation wurde am 18.03.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt am 16.06.2014 angenommen.



# Abstract

Brake-squeal is one of the major topics to cause warranty costs in the automotive industry. In recent years, simulation techniques which are based on the Finite Element Method have become more and more a state of the art technique to predict brake-squeal. This work focuses on improvements with respect to the prediction quality of the brake-squeal simulation. Furthermore, the usability of the simulation results in the automotive serial development process is discussed in detail.

The approach used in this work is based on Lyapunov's stability criteria. The mathematical background of this linear approach is analyzed in terms of system's matrices and the error of the linearization is estimated. Various excitation and damping mechanisms including mode coupling and friction damping are derived using analytical, Finite Difference and Finite Element models.

The contact equations are deduced by applying the variational principle onto frictional contact with constant sliding velocity. Furthermore, brake pad measurements are taken to identify transversal isotropic material parameters. In this context, diverse new and state of the art measurement methods are compared. Moreover, the influence of boundary conditions on different excitation mechanisms is discussed.

Sensitivity and robustness analysis linked with modal reduction methods offer a better insight in the system's noise behavior while keeping the computational time limited. This finally leads to a new approach to define countermeasures against brake-squeal which has been validated in bench and car tests.

## Keywords

brake-squeal, stability analysis, friction induced vibration, Finite Element Method, brake lining material, frictional sliding contact, modal reduction

# Zusammenfassung

Bremsenquietschen wird in der Automobilindustrie als eine wichtige Ursache für Gewährleistungskosten angesehen. In den vergangenen Jahren haben sich Simulationsmethoden basierend auf der Finite Elemente Methode als zusätzliches Entwicklungswerkzeug durchgesetzt.

In dieser Arbeit werden Maßnahmen zur Verbesserung der Prognosegüte dieser Methoden untersucht. Daneben werden Vorschläge zum verbesserten Einsatz der Simulation im Entwicklungsprozess erarbeitet.

Das Stabilitätskriterium nach Ljapunow ist Grundlage des in dieser Arbeit betrachteten linearen Stabilitätsbegriffs. Der Einfluss der einzelnen Systemmatrizen und die Auswirkungen des Fehlers bei der Linearisierung werden untersucht. Die verschiedenen Erregungs- und Dämpfungsmechanismen, darunter Modenkopplung und Reibungsdämpfung, werden mit Hilfe von analytischen Modellen, Finiten Differenzen und Finiten Elementen analysiert.

Die Kontaktgleichungen werden mittels Variationsprinzip am Reibkontakt mit konstanter Führungsgeschwindigkeit hergeleitet. Bestehende und neue Messmethoden an Bremsbelägen zur Bestimmung von transversal isotropen Materialparametern werden verglichen. Außerdem wird der Einfluss des Systemumfangs auf verschiedene Schwingformen diskutiert.

Durch Sensitivitätsanalysen auf Basis modaler Reduktionsmethoden kann eine verbesserte Einsicht in das Systemverhalten gewonnen werden. Dadurch ergibt sich außerdem ein neuer recheneffizienter Ansatz, um Abhilfemaßnahmen gegen Bremsenquietschen zu generieren. Dieser wurde in Fahrzeug- und Prüfstandtests validiert.

## Stichworte

Bremsenquietschen, Stabilität, reibinduzierte Schwingungen, Finite Elemente Methode, Bremsbeläge, gleitender Reibkontakt, modale Reduktionsmethoden

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit im Rahmen des Doktorandenprogramms bei der BMW Group und meiner wissenschaftlichen Arbeit am Lehrstuhl für Baumechanik der TU München.

Ich möchte mich zuallererst bei meinem Betreuer Prof. Gerhard Müller für die intensive Betreuung bedanken. Durch die zahlreichen Gespräche und wertvollen Diskussionen ergaben sich viele Denk- und Lösungsansätze, die Grundlage für das Gelingen der Doktorarbeit waren.

Außerdem möchte ich mich bei Prof. Norbert Hoffmann für die Übernahme des Zweitgutachtens und der damit verbundenen Arbeit bedanken.

Den Kollegen der BMW Group, bei EF-502 und darüber hinaus, danke ich für die sehr angenehme und motivierende Arbeit zusammen im Team und die große Hilfe, die ich erhalten habe. Insbesondere Hrn. Hans-Jörg Kolbinger danke ich dafür, dass er die Doktorarbeit bei der BMW Group ermöglicht und zu jedem Zeitpunkt gefördert hat.

Allen Kollegen am Lehrstuhl für Baumechanik möchte ich ebenfalls für ihre hilfreichen Anregungen und ihre Unterstützung danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt schließlich meiner Familie, insbesondere meiner Freundin Carla, die mir durch ihren fortwährenden Rückhalt diese Arbeit ermöglichten und sie mit großem Interesse verfolgten.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Bremsengeräusche . . . . .	2
1.2 Stand der Technik . . . . .	3
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	5
1.4 In der Literatur verwendete Begriffe . . . . .	7
<b>2 Stabilität</b>	<b>11</b>
2.1 Definition . . . . .	11
2.2 Stabilitätssätze . . . . .	14
2.3 Stabilität und Matrizen . . . . .	17
2.3.1 Orthogonale Diagonalisierbarkeit . . . . .	17
2.3.2 M-K-Systeme . . . . .	18
2.3.3 M-K-N-Systeme . . . . .	20
2.3.4 M-D-K-Systeme . . . . .	22
2.3.5 M-G-K-Systeme . . . . .	24
2.3.6 M-D-G-K-Systeme . . . . .	27
2.3.7 M-D-G-K-N-Systeme . . . . .	30
2.3.8 M-D-G-K-N-S-Systeme . . . . .	31
<b>3 Erregungs- und Dämpfungsmechanismen</b>	<b>33</b>
3.1 Geschwindigkeitsabhängiges Reibgesetz . . . . .	34
3.1.1 Reibwertverhalten . . . . .	34
3.1.2 Minimalmodell . . . . .	35
3.1.3 Stick-Slip . . . . .	38
3.2 Positive Reibungsdämpfung . . . . .	39
3.3 Reibinduzierte Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix . . . . .	42
3.3.1 Minimalmodell mit zwei Freiheitsgraden . . . . .	42
3.3.2 Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken . . . . .	47
3.4 Kontaktdämpfung, Fügestellendämpfung . . . . .	62
3.5 Corioliskräfte . . . . .	63
3.5.1 Kinematik . . . . .	63
3.5.2 Eigenfrequenzen von Brems scheiben . . . . .	65
3.5.3 Stabilitätsverhalten . . . . .	66
3.6 Materialdämpfung . . . . .	67
3.7 Dämpfung an den Systemgrenzen . . . . .	69
3.8 Abstrahldämpfung . . . . .	70

<b>4</b>	<b>Finite Elemente Analyse</b>	<b>71</b>
4.1	Modellaufbau . . . . .	72
4.2	Nichtlineare statische Berechnung . . . . .	74
4.2.1	Rotation der Bremsscheibe . . . . .	74
4.2.2	Schräglage . . . . .	75
4.2.3	Kurvenfahrt . . . . .	77
4.2.4	Belagverschleiß . . . . .	79
4.2.5	Temperaturverteilung . . . . .	81
4.3	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	81
4.3.1	Linearisierung . . . . .	81
4.3.2	Reelle Eigenwertberechnung . . . . .	82
4.3.3	Projektion der Systemmatrizen . . . . .	83
4.3.4	Komplexe Eigenwertberechnung . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Materialparameter</b>	<b>87</b>
5.1	Reibmaterial . . . . .	87
5.1.1	Transversale Isotropie . . . . .	88
5.1.2	Vergleich der Messverfahren . . . . .	91
5.1.3	Ultraschall . . . . .	93
5.1.4	Modalanalyse, Eigenfrequenzmessung, Grindo Sonic . . . . .	93
5.1.5	Kompressibilitätsmessung . . . . .	98
5.1.6	Dynamische Messung mit Piezoanregung in axialer Richtung . . . . .	99
5.2	Dämpfungsblech . . . . .	106
5.2.1	Aufbau . . . . .	106
5.2.2	Eigenschaften von Dämpfungsblechen . . . . .	107
5.2.3	Eigenfrequenzmessung, Modalanalyse . . . . .	110
5.2.4	Kompressibilitätsmessung . . . . .	112
5.2.5	Dynamische Messung in axialer Richtung . . . . .	113
5.2.6	Shore-Härte . . . . .	114
5.3	Stahl- und Gussbauteile . . . . .	115
5.4	Gummilager . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Kontakte</b>	<b>117</b>
6.1	Kinematik . . . . .	117
6.2	Kontaktsteifigkeit . . . . .	118
6.3	Variationsformulierung . . . . .	120
6.3.1	In Richtung der Einheitsnormalen . . . . .	121
6.3.2	In Tangentialrichtung bei Haften . . . . .	122
6.3.3	In Tangentialrichtung bei Gleiten . . . . .	122
6.3.4	In Tangentialrichtung bei zusätzlicher Führungsgeschwindigkeit . . . . .	124
6.4	Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag . . . . .	125
6.5	Kontakt zwischen Belagrückenplatte und Bremsattelhalter . . . . .	126
6.5.1	Modellierung mit Coulomb'scher Reibung . . . . .	127
6.5.2	Modellierung bei hochfrequenten Schwingungen . . . . .	128
6.6	Befettung . . . . .	130

---

<b>7</b>	<b>Randbedingungen</b>	<b>133</b>
7.1	Schwenklager und Radlager . . . . .	133
7.2	Achslenker, Federbein und Gummilager . . . . .	134
7.3	Rad, Reifen und Antrieb . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Anwendungen im Entwicklungsprozess</b>	<b>141</b>
8.1	Ergebnisinterpretation . . . . .	141
8.2	Robustheitsbewertung . . . . .	143
8.2.1	Stabilitätskriterien . . . . .	144
8.2.2	Systeme mit Materialdämpfung . . . . .	150
8.2.3	Verallgemeinerung auf Systeme mit vielen Freiheitsgraden . . . . .	150
8.2.4	Robustheitsaussagen bei stochastisch verteilten Parametern . . . . .	152
8.2.5	Stabilitätsprognose am Bremssystem . . . . .	154
8.3	Abhilfemaßnahmen . . . . .	156
8.3.1	Axiale Steifigkeit und Reibwertverhalten . . . . .	156
8.3.2	Belaglänge . . . . .	157
8.3.3	Maximale Amplitude . . . . .	158
8.3.4	Bauteilverhalten . . . . .	159
8.3.5	Trennung der koppelnden Schwingformen . . . . .	161
8.3.6	Sensitivitätsanalyse am reduzierten System . . . . .	163
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>167</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	167
9.2	Nichtlinearität und Grenzykelberechnung . . . . .	168
9.3	Zusätzliche Dämpfungsmechanismen . . . . .	169
9.4	Materialparameter . . . . .	169
9.5	Stabilitätsbewertung bei streuenden Parametern . . . . .	170
9.6	Prognose von Abhilfemaßnahmen . . . . .	171
9.7	Andere Bremsgeräusche . . . . .	171
<b>A</b>	<b>Anhang: Verwendete Software</b>	<b>173</b>
<b>B</b>	<b>Anhang: Beweise</b>	<b>175</b>
B.1	Beweis des linearen Stabilitätssatzes 2.5 in Kapitel 2.2 . . . . .	175
B.2	Herleitung der Variationsformulierung in Kapitel 6.3 . . . . .	176
B.3	Herleitung der Auswertung am EA-Stab in Kapitel 5.1 . . . . .	178
<b>C</b>	<b>Anhang: Charakterisierung der Schwingformen von Bremsscheiben</b>	<b>179</b>
C.1	Rotationssymmetrie und Doppelmoden . . . . .	179
C.2	Out-of-Plane Moden . . . . .	180
C.3	In-Plane-Radial Moden . . . . .	181
C.4	In-Plane-Tangential Moden . . . . .	181
C.5	In-Plane-Tangential-Shear Moden . . . . .	182
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>183</b>



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Einige Buchstaben oder Zeichen in diesem Symbolverzeichnis stellen mehrere physikalische oder mathematische Größen dar, die exakte Bedeutung ergibt sich im Allgemeinen aus dem Kontext oder ist nochmals explizit angegeben. Dünngedruckte Buchstaben stehen für Skalare. Fettgedruckte Kleinbuchstaben stehen für Vektoren, fettgedruckte Großbuchstaben für Matrizen und Tensoren höherer Ordnung. Komplexe Zahlen sind nicht extra gekennzeichnet. Das allgemeine Einheitensystem ist Millimeter  $mm$ , Tonne  $t$  und Sekunde  $s$ .

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\mathbf{A}$	1/s	allgemeine Systemmatrix
$\mathbf{A}^*$	1/s	reduzierte Systemmatrix
$\mathbf{a}$	mm/s <sup>2</sup>	Beschleunigungsvektor
$\mathbf{B}$	1/s <sup>2</sup>	Systemmatrix des M-K-N-Systems
$\mathbf{B}^*$	1/s	reduzierte Systemmatrix
$\mathbf{C}$	N/mm <sup>2</sup>	linearer Elastizitätstensor
$\mathbf{C}$	N s/mm	Matrix geschwindigkeitsproportionaler Kräfte
$c$	mm/s	Wellengeschwindigkeit
$\mathbb{C}$		Menge der komplexen Zahlen
CCF		Component Contribution Factor
CEA		Complex Eigenvalue Analysis
CMCF		Component Modal Contribution Factor
$\mathbf{D}$	N s/mm	viskose Dämpfungsmatrix
$D$	1/s <sup>2</sup>	Diskriminante
DTV		Disk Thickness Variation
$E$	MPa	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}$		Green-Lagrange Dehnungstensor
$F$	N	Kraft
$f$	Hz	Frequenz
FEM		Finite Elemente Methode

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\mathbf{G}$	N s/mm	gyroskopische Matrix
$G$	MPa	Schubmodul
$g_N$	mm	Durchdringung im Kontakt
$g_T$	mm	tangentiale Auslenkung im Kontakt
$\mathbf{I}$		Identitätsmatrix
$i$		imaginäre Einheit
$i$		Laufindex
$\text{Im}(\bullet)$		Imaginärteil einer komplexen Zahl
IPR		In-Plane-Radial Bremsscheibenmode
IPT		In-Plane-Tangential Bremsscheibenmode
IPTS		In-Plane-Tangential-Shear Bremsscheibenmode
$j$		Laufindex
$\mathbf{K}$	N/mm	Steifigkeitsmatrix
$\widehat{\mathbf{K}}$	N/mm	Matrix verschiebungsproportionaler Kräfte
$k$		Laufindex
$k$	N/mm	Federsteifigkeit
$\tilde{k}$	1/mm	Wellenzahl
$k_N$	N/mm <sup>2</sup>	Kontaktsteifigkeit
$k_W$	N/mm <sup>2</sup>	Steifigkeit der Winklerbettung
$\mathbf{M}$	t	Massenmatrix
$m$	t	diskrete Masse
$m$		Matrixdimension reduzierter Matrizen
MAC		Modal Assurance Criterion
MAC <sub>2</sub>		Modal Assurance Criterion 2
$\mathbf{N}$	N/mm	zirkulatorische Matrix
$n$		Matrixdimension
$\mathbf{n}$		äußere Einheitsnormale einer Fläche
$\mathbb{N}$		Menge der natürlichen Zahlen
OP		Out-of-Plane Bremsscheibenmode
$\mathbb{R}$		Menge der reellen Zahlen
$\text{Re}(\bullet)$		Realteil einer komplexen Zahl
$\mathbf{S}$	N/mm	Strukturdämpfungsmatrix
SEA		Statistische Energie Analyse
$\text{Spec}(\bullet)$		Menge der Eigenwerte einer Matrix
$t$	s	Zeit
$\mathbf{t}$		Basisvektor in der Kontaktfläche
$\mathbf{u}$	mm	Verschiebungsvektor
$\mathbf{v}$	mm/s	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{x}$		Vektor der Unbekannten
$\mathbf{y}$		reduzierter Vektor der Unbekannten
$Z$	N s/mm	Impedanz

## Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\alpha$	1/s	Massenproportionalitätsfaktor für viskose Dämpfung
$\alpha$		Laufindex
$\alpha$		Eigenfrequenzabstand
$\beta$	s	Steifigkeitsproportionalitätsfaktor für viskose Dämpfung
$\beta$		Koeffizient der symmetrischen Kopplung
$\mathbf{\beta}$		Drehmatrix
$\Gamma$	mm <sup>2</sup>	Kontaktfläche
$\gamma$		Unsymmetriekoeffizient
$\gamma$		Proportionalitätsfaktor für Strukturämpfung
$\Delta$		Operator der zweiten Potentialvariation
$\delta$		Operator der ersten Potentialvariation
$\delta$	1/s	Abklingkonstante
$\delta_{i,j}$		Dirac-Delta
$\epsilon_N$	N/mm <sup>3</sup>	Kontaktsteifigkeit in normaler Richtung
$\epsilon_T$	N/mm <sup>3</sup>	Kontaktsteifigkeit in tangentialer Richtung
$\zeta$		Lehr'sches Dämpfungsmaß
$\eta$		Verlustfaktor
$\theta$	K	Temperatur
$\kappa$	1/s <sup>2</sup>	Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$
$\lambda$	1/s	Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$
$\mu$		Reibkoeffizient
$\nu$		Querkontraktionszahl
$\Pi$	mJ	Potential
$\pi$		Kreiszahl
$\rho$	t/mm <sup>3</sup>	Dichte
$\sigma$	N/mm <sup>2</sup>	Normalspannung
$\Sigma$	N/mm <sup>2</sup>	Cauchy'scher Spannungstensor
$\tau$	N/mm <sup>2</sup>	Schubspannung
$\Phi$		Matrix der Eigenvektoren
$\varphi$		Eigenvektor
$\Psi$		Matrix der reduzierten Eigenvektoren
$\psi$		reduzierter Eigenvektor
$\Omega$	1/s	Kreisfrequenz der Anregung
$\omega$	1/s	Eigenkreisfrequenz

## Sonstige Zeichen

Symbol	Bezeichnung
$\dot{\bullet}$	Ableitung nach der Zeit
$\bullet'$	Ableitung nach dem Ort
$\nabla\bullet$	mehrdimensionale Ableitung nach dem Ort
$\bar{\bullet}$	komplexe Konjugation
$\bullet^t$	transponierte Matrix
$\bullet^-$	linksseitiger Grenzwert bzw. negatives Schnittufer
$\bullet^+$	rechtsseitiger Grenzwert bzw. positives Schnittufer

# 1 Einleitung

Einen zentralen Punkt im Entwicklungsprozess eines Automobilherstellers nimmt die Sicherstellung eines geräuscharmen Fahrzeugs ein, um gesetzlichen Vorgaben sowie Komfortansprüchen zu genügen und den Einfluss auf die Umwelt gering zu halten. Neben Motor-, Wind- und Abrollgeräuschen sollen Bremsgeräusche, insbesondere Bremsenquietschen (engl. brake-squeal), so weit wie möglich reduziert werden. Das hochfrequente Bremsenquietschen wird von vielen Insassen und Passanten als unangenehm empfunden und stellt somit ein Komfortproblem dar. Darüber hinaus wird es von vielen Kunden auch als Hinweis auf eine vermeintliche Beeinträchtigung in der Funktion der Betriebsbremse wahrgenommen und entsprechend reklamiert. Diese Reklamationen verursachen hohe Gewährleistungskosten bei Automobilherstellern.

Seit vielen Jahren werden geräuscharme Bremsen mit Hilfe von Fahrzeug- und Prüfstandsversuchen entwickelt. Diese Versuche und die daraus abgeleiteten Maßnahmen basieren auf Erfahrungswerten, eine allgemeingültige Lösung konnte bis heute nicht gefunden werden. Aufgrund steigender Motorleistungen müssen auch Bremsanlagen leistungsfähiger werden, was in größeren Bremsscheiben und somit in einer verstärkten Neigung zum Bremsenquietschen resultiert. Durch die gestiegenen Kundenanforderungen, die Verringerung der Pegel anderer Fahrgeräusche und die wachsende Produktvielfalt sind die Möglichkeiten und Kapazitäten der versuchsseitigen Geräuschbearbeitung ausgeschöpft.

Mit der Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Hard- und Software und einem Grundverständnis der dem Bremsenquietschen zugrundeliegenden Mechanismen eröffnet sich seit einigen Jahren die Möglichkeit, das Bremsenquietschen simulativ vorherzusagen und virtuell Abhilfemaßnahmen zu erproben. Die Reproduzierbarkeit der simulativen Ergebnisse und die Möglichkeit Systemparameter einzeln zu variieren bieten hier neue Ansätze, um die versuchsseitigen Erfahrungswerte zu verifizieren und neue Erkenntnisse hinzuzufügen. Aufgrund der Komplexität des Bremssystems und des hochdynamischen Systemverhaltens existieren jedoch weiterhin zahlreiche Herausforderungen, um die Prognosegüte des Simulationsmodells zu erhöhen.

## 1.1 Bremsengeräusche

Aufgabe einer Kraftfahrzeug-Bremse ist die Umwandlung von kinetischer Energie in Wärmeenergie, um das Fahrzeug zu verzögern bzw. zum Stillstand zu bringen. In den heute größtenteils verwendeten mechanischen Scheibenbremsen findet diese Umwandlung mittels Reibung statt. Während dieser Energieumwandlung können zahlreiche Geräusche entstehen, die nach ihrem Geräuschbild klassifiziert werden. Da die Einteilung über das wahrnehmbare Geräusch und nicht über die zugrundeliegende Ursache erfolgt, sind die unterschiedlichen Bremsgeräusche nicht immer klar voneinander abgegrenzt. Auch werden, je nach Wahrnehmung oder Quelle, unterschiedliche Begriffe für das gleiche Phänomen verwendet, sodass eine eindeutige Zuordnung der Geräusche nicht immer möglich ist.

Das Bremsenrubbeln (engl. brake-judder) wird durch Unebenheiten in der Bremsscheibe (engl. disk thickness variation, DTV) verursacht, vgl. Augsburg u. a. [2010]. Diese können Ursachen in der Konstruktion oder Fertigung haben, durch Belagauflage bei einer vorausgegangenen starken Bremsung entstehen oder thermischen Ursprungs sein. Sobald ein Bereich der Scheibenoberfläche herausragt, wird dieser durch die stärkere Beanspruchung auch stärker erwärmt, wodurch sich dieser Teil weiter ausdehnt und somit die Unebenheit verstärkt wird (engl. hot-spots). Entsprechend finden sich die beiden Begriffe Kaltrubbeln (engl. cold-judder) und Heißrubbeln (engl. hot-judder) wieder. Die entstehende Schwingung hat damit eine Frequenz proportional zur Drehgeschwindigkeit der Bremsscheibe, bleibt jedoch im Allgemeinen unter 300 Hz. Sie kann nicht nur akustisch wahrgenommen werden, sondern häufig auch als Vibration des Lenkrads, des Bremspedals oder der Karosserie, vgl. Breuer und Bill [2006].

Reversierklacken kann auftreten, wenn die erste Bremsung nach einem Wechsel der Rotationsrichtung der Bremsscheibe beginnt. Die Bremsbeläge sind im Bremssattel aus Fertigungs- und Korrosionsgründen mit Spiel in der Größenordnung von 0.1 mm bis 1 mm eingesetzt. Wenn nun die Rotationsrichtung der Bremsscheibe nicht mit der aktuellen Positionierung der Bremsbeläge übereinstimmt, werden diese zu Beginn der Bremsung zuerst verschoben und stoßen dann auf die entsprechende Abstützungsfläche im Bremssattel. Durch den Aufprall der Belagrückenplatte auf den Bremssattel kann ein klackendes Geräusch emittiert oder die Karosserie durch einen Impuls angeregt werden. Reversierklacken kann durch Reduzierung des Belagspiels, durch Anpassung der Geometrie in der Kontaktfläche oder durch Hinzunahme eines weichen Zwischenmaterials verringert bzw. ganz vermieden werden.

Bremsenklappern tritt nicht während einer Bremsung auf, sondern ausschließlich im ungebremsten Zustand, wenn durch einen unebenen Fahrbahnbelag hohe Beschleunigungen

in den ungefederten Teilen des Fahrwerks auftreten. Die Einzelteile des Bremssattels sind teilweise nicht verschraubt, sondern werden durch Federn zusammengehalten. Wenn die Vorspannkraft der Federn nicht ausreichend groß sind, können sich die Bremsbeläge oder die Bremsfaust aufgrund ihrer Trägheit bewegen und verursachen ein klapperndes Geräusch.

Die Ursache für Bremsenknarzen (engl. creep-groan) ist eine nichtlineare Stick-Slip Schwingung. Für eine solche Schwingung sind ein positiver Bremsdruck und sehr niedrige Drehzahlen der Bremsscheibe nötig, siehe auch Kapitel 3.1. Dieser Zustand wird bei Automatikfahrzeugen im Stand erreicht, wenn das Bremsmoment gegen das Antriebsmoment wirkt, siehe Brecht [2000] oder Hoffmann und Gaul [2008].

Knarren hat, genauso wie Knarzen, eine Stick-Slip Schwingung als Ursache. Diese tritt hier jedoch nicht zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe auf, sondern am Kontakt des Kolbens zum Kolbengehäuse des Bremssattels.

Hubknarzen kann am Ende einer Bremsung auftreten, wenn das Fahrzeug stillsteht und die Vorderachse ausfedert. Das Geräusch klingt, wie der Name andeutet, ähnlich dem Bremsenknarzen. Es wird jedoch nicht durch die Bremse emittiert, sondern durch die Achsbauteile und zählt damit nicht direkt zu den Bremsgeräuschen.

Bremsenschrummen oder Muhen (engl. brake-moan) liegt von der Ursache her am nächsten zu dem in dieser Arbeit behandelten Bremsenquietschen. Es stellt genauso eine instabile Eigenschwingung dar, allerdings in einem niedrigeren Frequenzbereich unter 1000 Hz. Bei diesen Frequenzen schwingt die gesamte Achse mit Lenkern und Gummilagern. Die Bremse selbst stellt dagegen weitgehend einen Starrkörper dar, siehe Brecht [2000].

Im folgenden Abschnitt wird eine Auflistung früherer und aktueller Arbeiten zum Bremsenquietschen vorgestellt.

## 1.2 Stand der Technik

Aufgrund der großen Relevanz des Bremsenquietschens in der Entwicklung von Fahrzeugbremsen existieren zu diesem Thema zahlreiche Arbeiten. Einen Überblick über den jeweils aktuellen Stand der Technik zum Zeitpunkt der Veröffentlichung gaben Kinkaid u. a. [2003], Chen u. a. [2006] sowie Hoffmann und Gaul [2008].

Nach Kinkaid u. a. [2003] erfolgten Mitte des 20. Jahrhunderts erste experimentelle Untersuchungen zum Bremsenquietschen durch Mills [1938]. In frühen Veröffentlichungen wurden

nach Flint [2002] verschiedene Stick-Slip Effekte als Ursache für Bremsenquietschen genannt. Spurr [1961] brachte Bremsenquietschen außerdem mit geometrischen Verzwängungen (engl. sprag-slip) in Verbindung. Ein Zusammenhang zwischen Quietschen und einer Modenkopplung wurde erstmals von North [1972] beschrieben. Hoffmann und Gaul [2008] bezeichneten dies als den wichtigsten Erregungsmechanismus, für den jedoch viele unterschiedliche Bezeichnungen verwendet werden.

Darüber hinaus werden weiterhin andere Anregungsmechanismen untersucht: Buck [2008] erklärte hochfrequentes Bremsenquietschen durch einen negativen Gradienten des Reibkoeffizienten zur Geschwindigkeit. Graf und Ostermeyer [2011] beschrieben einen Anregungsmechanismus ausgehend von einer massebehafteten Grenzschicht im Kontakt zwischen Brems Scheibe und Bremsbelag.

Eine Modellierung des Bremssystems mit Feder-Masse Modellen, wie sie durch Flint [2002], Hochlenert [2006] oder Hetzler [2009] beschrieben wurden, ermöglicht die Vorhersage von Bremsenquietschen mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand.

In der industriellen Anwendung wird Bremsenquietschen heute vorwiegend mit Hilfe von Finite Elemente Simulationen analysiert. Die Verfügbarkeit von leistungsfähiger Hardware, aber auch von effizienten Algorithmen zur Eigenfrequenzberechnung, ermöglichen Stabilitätsanalysen auf Basis von fein vernetzten Finite Elemente Modellen.

Bajer u. a. [2003] beschrieben ein Simulationsverfahren, bei dem eine quasistatische Bestimmung des Betriebspunkts vor der eigentlichen Stabilitätsanalyse durchgeführt wird. Buck [2008] zeigte, dass bei Instabilitäten, die durch einen abfallenden Reibkoeffizienten ausgelöst werden, auch bei hohen Frequenzen über 8 kHz eine hohe Übereinstimmung zwischen Versuch und Finite Elemente Simulation erreicht werden kann.

Im Zuge der Simulation auf Basis von Finite Elemente Modellen geriet auch die Frage nach Abhilfemaßnahmen in den Fokus. Zhang u. a. [2003] verwendeten frei-frei Eigenfrequenzen und Eigenformen von Bremsenkomponenten zur Analyse der instabilen Schwingformen.

Neben der heute in der industriellen Entwicklung weit verbreiteten linearen Stabilitätsanalyse existieren auch zahlreiche Untersuchungen auf Grundlage von Berechnungen im Zeitbereich. Meziane [2007] validierte anhand von Geräuschversuchen sowohl die Ergebnisse einer linearen Stabilitätsanalyse, als auch einer nichtlinearen Berechnung im Zeitbereich. Aufgrund der hohen Rechenzeit war sie dabei auf ein Ersatzsystem mit geringer Komplexität angewiesen. Vermont des Roches [2011] untersuchte verschiedene Verfahren zur Modellreduktion, um die Rechenzeit bei Analysen einer realen Fahrzeugbremse im Zeitbereich zu verringern.

Ein großer Teil der aktuellen Forschung befasst sich mit der Bestimmung von Materialparametern für die Finite Elemente Simulation. Hierbei steht die dynamische Beschreibung des Bremsbelags im Hauptfokus.

Yuhas u. a. [2010] bestimmten Materialparameter des Reibmaterials aus Ultraschallmessungen. Aus der Frequenzabhängigkeit der elastischen Eigenschaften des Reibmaterials schlossen Nonaka u. a. [2010] sowie Hornig und von Wagner [2011], dass nur dynamische Messungen mit einer Anregung im quietschrelevanten Frequenzbereich korrekte Ergebnisse liefern können und stellten entsprechende Messverfahren vor.

Das dynamische Verhalten von Dämpfungsblechen wurde von Flint ausführlich beschrieben. Er unterschied dabei zwischen verschiedenen Wirkmechanismen: einer axialen Entkopplung Flint u. a. [2010], einer tangentialen Entkopplung Flint u. a. [2004] und der Biegedämpfung von Dämpfungsblechen Flint [2002]. Denys und Thompson [2010] beschrieben ein Verfahren zur standardisierten Messung der temperaturabhängigen Biegedämpfung von Dämpfungsblechen.

Ein weiteres Forschungsgebiet ist die Modellierung des Kontakts zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe. Einen rein simulativen Ansatz zur verbesserten Abbildung dieses Kontakts stellten Bajer u. a. [2004] vor. Abu-Bakar u. a. [2005a] und Abu-Bakar u. a. [2005b] zeigten eine gute Korrelation zwischen Simulations- und Versuchsergebnissen, wenn die verschlissene Belagoberfläche vermessen und im Modell implementiert wird. Hetzler [2009] erklärte den geräuschlichen Unterschied zwischen neuen und verschlissenen Belägen durch eine veränderte Topographie der Mikrokontaktplateaus und modellierte diese über eine nichtlineare Kontaktsteifigkeit. Eine statistische Untersuchung der Belagoberfläche wurde von Heussaff u. a. [2012] durchgeführt. Sie stellten außerdem eine Methode vor, wie die Variation der Oberfläche im Rahmen einer Finite Elemente Simulation abgebildet werden kann.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein bestehendes Verfahren zur Simulation von Bremsenquietschen hinsichtlich der Prognosegüte zu analysieren. Unter dem Begriff der Prognosegüte wird dabei einerseits die Korrektheit der geschlossenen Prognosen verstanden. Darüber hinaus soll aber auch der Umfang der Prognosen möglichst über die Aussage "quietscht" bzw. "quietscht nicht" hinausgehen. Dies führt in Teilen der Arbeit auf eine theoretisch ausgerichtete Betrachtung der Fragestellung, wobei immer wieder konkrete Hinweise auf praktische Abhilfemaßnahmen gefunden werden können.

Nach dem Stand der Technik gilt es als gesichert, dass es sich beim Bremsenquietschen um ein Phänomen handelt, das mit einer Instabilität des Bremssystems begründet ist. Daher werden in Kapitel 2 zuerst die Grundlagen des mathematischen Stabilitätsbegriffes dargestellt. Zentraler Punkt ist hierbei, welchen Einfluss die einzelnen Teilmatrizen der linearen Differentialgleichung der Strukturmechanik auf die Stabilitätsanalyse haben und wie die Auswirkungen vorhandener nichtlinearer Terme abgeschätzt werden können.

Die unterschiedlichen Mechanismen, die Einfluss auf die positive oder gegebenenfalls negative Systemdämpfung und damit die Systemstabilität haben, werden in Kapitel 3 unter anderem anhand von Minimalmodellen vorgestellt.

Da Minimalmodelle zwar erklären, warum Bremsenquietschen auftritt, jedoch nicht darüber Auskunft geben können, welche Bremssysteme letztendlich Auffälligkeiten zeigen, ist eine Analyse unter Berücksichtigung der realen Geometrie notwendig. In Kapitel 4 wird eine Stabilitätsanalyse unter Anwendung des Finite Elemente Ansatzes dargestellt.

Die Aussagekraft dieser Analyse hängt stark von der Güte der verwendeten Materialgrößen ab. Kapitel 5 stellt die Materialeigenschaften und geeignete Messmethoden zur Bestimmung dieser Parameter vor.

Einige der wichtigsten Erregungs- und Dämpfungsmechanismen finden an den Kontaktstellen zwischen verschiedenen Bremsenbauteilen statt. In Kapitel 6 werden die mechanischen Eigenschaften dieser Kontakte und ihre mathematische Modellierung aufgezeigt.

Die Bestimmung der Systemgrenzen und deren Modellierung sind Aufgaben, die in Kapitel 7 erläutert werden.

Mit der dann vorhandenen Analysemethode können belastbare Aussagen über die Systemstabilität gewonnen werden. Der erste Aspekt, der sich mit dem Begriff Prognosegüte verbindet, ist die Belastbarkeit der Aussage, ob Systemstabilität vorliegt oder nicht. Dieser Teil ist bis einschließlich Kapitel 7 abgeschlossen. Im folgenden Kapitel 8 wird der zweite Aspekt der Prognosegüte behandelt: Wie kann die binäre Aussage über Stabilität oder Instabilität sinnvoll ergänzt werden? Die Fragen nach der konkreten Ursache der Instabilität, geeigneten Abhilfemaßnahmen und Robustheitsbetrachtungen werden dort erläutert.

Kapitel 9 gibt einen Ausblick auf mögliche weitere Untersuchungen und Ansatzpunkte, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden konnten.

## 1.4 In der Literatur verwendete Begriffe

### Modenkopplung

Im ungedämpften Fall ist dies eine Instabilität, die durch zirkulatorische Anteile  $\mathbf{N}$  ausgelöst wird. Sie ist daran zu erkennen, dass zwei Eigenmoden die gleiche Frequenz besitzen, wobei eine davon instabil, die andere asymptotisch stabil ist. Die Eigenformen der Eigenmoden sind zueinander komplex konjugiert.

Sobald viskose oder strukturelle Dämpfungseffekte  $\mathbf{D}$  oder  $i\mathbf{S}$  im System vorhanden sind, kann eine Modenkopplung nicht unmittelbar mit einer Instabilität gleichgesetzt werden. Der Übergang zwischen ungekoppeltem und gekoppeltem System ist fließend und die beiden Eigenmoden besitzen im Allgemeinen leicht unterschiedliche Frequenzen. Sie sind jedoch weiter als Paare mit ähnlicher Frequenz und mit zueinander nahezu komplex konjugierten Eigenformen zu erkennen.

Die Modenkopplung wird in der Literatur auch als dynamische Instabilität oder im Englischen als flutter-type instability, mode coupling, mode lock-in oder follower-force instability bezeichnet.

### Doppelmoden

In rotationssymmetrischen Körpern, wie z.B. Bremsscheiben, treten viele frei-frei Eigenmoden paarweise mit nahezu gleicher Frequenz auf. Theoretisch betrachtet, existiert jeweils nur ein einzelner Eigenwert mit zweidimensionalem Eigenraum. Da Bremsscheiben jedoch immer Abweichungen von der ideal-rotationssymmetrischen Gestalt besitzen, treten zwei disjunkte Eigenwerte bzw. Eigenfrequenzen auf. Die Nähe der beiden Eigenfrequenzen begünstigt Instabilitäten über den Mechanismus der Modenkopplung. In Anhang C findet sich eine Klassifizierung der Bremsscheibenmoden.

### Negative Dämpfung

Die negative Dämpfung dient als Maß für die Anfachungsrate einer Instabilität. Sie kann über die Abklingkonstante  $\delta$ , den Grad der kritischen Dämpfung bzw. das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  oder den Dämpfungsgradienten  $\eta$ , jeweils mit negativem Vorzeichen ausgedrückt werden. Der Begriff wird außerdem für negativ definite Dämpfungsmatrizen  $\mathbf{D}$  verwendet.

## Reelle Eigenwertanalyse

Eine Eigenwertberechnung auf Basis des M-K-Systems wird als reelle Eigenwertanalyse (engl. natural frequency extraction) bezeichnet. Alle Eigenvektoren  $\varphi_0$  sind reellwertig, das System schwingt in Phase und ist grenzstabil. In den Kapiteln 2.3 und 4.3 werden M-K-Systeme ausführlich beschrieben.

## Komplexe Eigenwertanalyse

Eine Eigenwertberechnung auf Basis des allgemeinen M-D-G-K-N-S-Systems wird als komplexe Eigenwertanalyse (engl. complex eigenvalue analysis, CEA) bezeichnet. Die Eigenvektoren  $\varphi$  sind komplexwertig, das System schwingt im Allgemeinen nicht in Phase. Der Imaginärteil der Eigenwerte bestimmt die Schwingfrequenz, der Realteil die ggf. negative Dämpfung. Details werden ebenfalls in den Kapiteln 2.3 und 4.3 ausgeführt.

## Stehende Welle

Während des Bremsenquietschens bildet die rotierende Bremsscheibe Schwingformen, die im Gegensatz zum Scheibenmaterial fest im Raum stehen. Dies ist in der Störung der Rotationssymmetrie der Bremsscheibe durch den Bremsattel begründet.

## Axial, radial, tangential

Durch die Rotationssymmetrie der Bremsscheibe bietet es sich an, viele Größen in einem zylindrischen Koordinatensystem darzustellen. Dabei entspricht die axiale Richtung der Fahrzeugquerachse und somit der Kompressionsrichtung bei Bremsbelägen und Dämpfungsblechen.

## Faustsattelbremse / Schwimmsattelbremse

Eine Scheibenbremsanlage, die axial verschieblich gelagert ist, benötigt nur auf einer Seite der Bremsscheibe Bremskolben. Der gegenüberliegende Belag wird durch die entstehende Reaktionskraft von der Faust gegen die Scheibe gedrückt, siehe auch Abbildung 4.3.

**Festsattelbremse**

Eine Scheibenbremsanlage, die auf beiden Seiten der Bremsscheibe Bremskolben besitzt, wird als Festsattelbremse bezeichnet. Sie ist nicht axial verschieblich gelagert, sondern fest am Fahrwerk montiert.

**Schirmung**

Unter Temperatureinfluss dehnen sich die beiden Reibringe einer Bremsscheibe radial aus. Einer der Reibringe ist mit dem kühleren Bremsscheibentopf verbunden und kann sich weniger stark ausdehnen. Dadurch entsteht eine Auslenkung der Reibringe in axialer Richtung. Die resultierende Auslenkung erinnert mit Überhöhung dargestellt an einen aufgespannten Schirm.



## 2 Stabilität

### 2.1 Definition

In diesem Kapitel wird der Stabilitätsbegriff definiert und dargestellt. Es wird diskutiert welche Phänomene des Geräuschverhaltens von Fahrzeugbremsanlagen mit Stabilitätsfragen in Verbindung stehen.

Ein lineares dynamisches mechanisches Systemmodell kann diskretisiert werden. Daraus ergeben sich auslenkungs-, geschwindigkeits- oder beschleunigungsproportionale Anteile, die über Matrizen beschrieben werden können. Weitere, nichtlineare Zusammenhänge können modelliert werden. Deren Abhängigkeit von der Auslenkung, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung kann durch Ausdrücke höherer Ordnung beschrieben werden.

Bei Betrachtung des mechanischen Systems als Funktion der Eingangsparameter kann dies über eine Taylor-Reihe dargestellt werden. Somit kann durch Ermittlung der linearen, quadratischen und polynomialen Terme bis zur  $k$ -ten Ordnung eine Approximation des Systems erreicht werden. Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert die Taylor-Reihe zur exakten Systemfunktion. Bedingung hierfür ist allerdings eine entsprechende Glattheit, d.h. die Systemfunktion muss  $k$ -fach differenzierbar bzgl. der Eingangsparameter sein. In der folgenden Arbeit werden ausschließlich die linearen Terme berücksichtigt. Der Einfluss der höheren nichtlinearen Terme kann durch den nichtlinearen Stabilitätssatz (2.6) abgeschätzt werden.

Die zur späteren Berechnung nötige Systemdiskretisierung führt zu einer endlichen Zahl an Gleichungen. Durch die Unterscheidung zwischen auslenkungs-, geschwindigkeits- und beschleunigungsproportionalen Termen werden Matrizen definiert, die in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil aufgeteilt werden können:

**$M$**  Massenmatrix zur Beschreibung beschleunigungsproportionaler Kräfte  
reellwertig, symmetrisch und positiv definit

**D** viskose Dämpfungsmatrix zur Beschreibung geschwindigkeitsproportionaler Kräfte  
reellwertig, symmetrisch

**G** gyroskopische Matrix zur Beschreibung geschwindigkeitsproportionaler Kräfte  
reellwertig, schiefsymmetrisch

**K** Steifigkeitsmatrix zur Beschreibung auslenkungsproportionaler Kräfte  
reellwertig, symmetrisch

**N** zirkulatorische Matrix zur Beschreibung auslenkungsproportionaler Kräfte  
reellwertig, schiefsymmetrisch

**S** Strukturdämpfungsmatrix zur Beschreibung auslenkungsproportionaler Kräfte  
reellwertig, symmetrisch

Die Matrizen können zusammengefasst werden:  $\widehat{\mathbf{K}} := \mathbf{K} + \mathbf{N} + i\mathbf{S}$  und  $\mathbf{C} := \mathbf{D} + \mathbf{G}$ . Auch wenn alle physikalischen Eingangsgrößen reellwertig sind, treten mit der Strukturdämpfungsmatrix  $\mathbf{S}$  komplexe Einträge auf. Dies ermöglicht die Modellierung von geeigneten Dämpfungsmechanismen im später definierten modalen Raum.

Die allgemeine Differentialgleichung linearer dynamischer Systeme ohne äußere Belastung kann mit Hilfe dieser Matrizen dargestellt werden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + i\mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

mit  $\mathbf{M}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{n,n}$  sowie  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^t$  regulär.

Mit Definition der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{u}}$  und Beschleunigung  $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{u}}$  kann Gleichung (2.1) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Um nun das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung bzgl. Stabilität beurteilen zu können, muss es in ein System erster Ordnung transformiert werden.

Seien  $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$ , dann kann Gleichung (2.1) durch

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (2.3)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{I}_n$  die Identitätsmatrix der Dimension  $n$  ist. Dabei verdoppelt sich die Zahl der Gleichungen auf  $2n$ .

Nach Walter [1990] besitzt Gleichung (2.3) für  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n,2n}$  und für jeden Anfangszustand  $\mathbf{y}(0) \in \mathbb{C}^{2n}$  eine eindeutige Lösung. Diese kann durch einen harmonischen Ansatz dargestellt werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\varphi} \exp(\lambda t) \\ &= \boldsymbol{\varphi} \exp(i\omega t - \delta t) \\ &= \boldsymbol{\varphi} \exp(-\delta t) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\varphi}$  konstant bzgl. der Zeit  $t$ . Der Imaginärteil  $\omega = \text{Im}(\lambda)$  wird als Eigenfrequenz, der negative Realteil  $\delta = -\text{Re}(\lambda)$  als Abklingkonstante bezeichnet.

Nun stehen auch  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  in einem einfachen Zusammenhang:

$$\mathbf{v} = \underbrace{(i\omega - \delta)}_{=\lambda} \mathbf{u} \qquad \mathbf{a} = \underbrace{(i\omega - \delta)^2}_{=\lambda^2} \mathbf{u}\tag{2.5}$$

Wie später gezeigt wird, wird Bremsenquietschen durch eine selbsterregte Eigenschwingung verursacht. Die Systemstabilität kann durch den Stabilitätsbegriff von Ljapunow beurteilt werden. Dieser stützt sich auf Eigenschaften der zuvor definierten Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Die folgenden Definitionen und Sätze orientieren sich an Walter [1990].

**Definition 2.1** (Stabilität):

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n,2n}$ . Gegeben ist die Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ . Die Lösung  $\mathbf{y}_0(t)$  heißt stabil, wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , sodass alle Lösungen  $\mathbf{y}(t)$  der Differentialgleichung mit

$$|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_0(0)| < \delta\tag{2.6}$$

für  $t > 0$  existieren und es gilt:

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)| < \epsilon \qquad (t \geq 0)\tag{2.7}$$

**Definition 2.2** (Asymptotische Stabilität):

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n,2n}$ . Eine Lösung der obigen Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und wenn gilt:  $\exists \delta > 0$ , sodass für alle Lösungen  $\mathbf{y}(t)$  der Differentialgleichung mit

$$|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_0(0)| < \delta\tag{2.8}$$

gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)| = 0 \quad (2.9)$$

**Definition 2.3** (Instabilität):

Eine Lösung  $\mathbf{y}_0(t)$  heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

**Definition 2.4** (Grenzstabilität):

Eine Lösung  $\mathbf{y}_0(t)$  heißt grenzstabil, wenn sie stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Eine direkte Überprüfung der Stabilität nach dieser Definition ist im Allgemeinen nicht zielführend. Die folgenden Stabilitätssätze führen in konkreten Anwendungen einfacher und schneller zu einer Stabilitätsaussage.

## 2.2 Stabilitätssätze

Der folgende Stabilitätssatz bildet die Grundlage für die Berechnungsmethodik bei Stabilitätsuntersuchungen. Die später in dieser Arbeit definierten Stabilitätssätze können auf diesen allgemeinen Satz zurückgeführt werden.

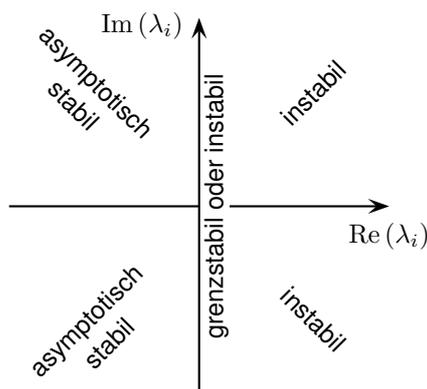
**Satz 2.5** (Linearer Stabilitätssatz):

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$  und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit  $p \leq 2n$ . Außerdem sei  $\gamma := \max_{i=1, \dots, p} \operatorname{Re}(\lambda_i)$  das Maximum der Eigenwerte. Dann ist die triviale Lösung  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$  der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ :

- für  $\gamma < 0$  asymptotisch stabil,
- für  $\gamma = 0$  grenzstabil oder instabil und
- für  $\gamma > 0$  instabil.

Der Beweis des linearen Stabilitätssatzes befindet sich in Anhang B.

Diese mathematische Beschreibung der Stabilität kann auch wieder mechanisch veranschaulicht werden. Sei  $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i \exp(\lambda_i t) = \boldsymbol{\varphi}_i \exp(\operatorname{Re}(\lambda_i) t) (\cos(\operatorname{Im}(\lambda_i) t) + i \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i) t))$  eine harmonische Schwingung. Die Schwingform wird über den konstanten Vektor  $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbb{C}^{2n}$  beschrieben.



**Abbildung 2.1:** Stabilitätsbereich eines einzelnen Eigenwerts  $\lambda_i$  von  $A$

Bei rein imaginären Eigenwerten  $\lambda_i$  kann die Schwingung rein durch die Sinus- und Cosinus-Terme dargestellt werden. Die Amplitude bleibt konstant, also ist das System in diesem Fall grenzstabil.

Wenn jedoch ein Eigenwert  $\lambda_i$  mit positivem Realteil existiert, dann findet sich ein  $\varphi_i$ , d.h. eine Schwingform, die exponentiell aufklingt,  $\exp(\operatorname{Re}(\lambda_i)t)$ . Die Amplitude wird beliebig groß, d.h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_i)t) = \infty$ , sodass das System instabil ist.

Falls alle Eigenwerte  $\lambda_i$  negative Realteile besitzen, klingen alle Schwingungen entsprechend exponentiell ab. Das System ist dann asymptotisch stabil.

Die Stabilität bzw. Instabilität überträgt sich von  $\mathbf{y}(t)$  direkt auf  $\mathbf{u}(t)$ . Dies ist die Motivation für die oben definierten Größen  $\omega = \operatorname{Im}(\lambda)$  und  $\delta = -\operatorname{Re}(\lambda)$ . Grafisch dargestellt ergibt sich der in Abbildung 2.1 dargestellte Stabilitätsbereich.

Als Ergänzung zum linearen Stabilitätssatz dient der nichtlineare Stabilitätssatz, der ebenfalls bei Walter [1990] zu finden ist.

**Satz 2.6** (Nichtlinearer Stabilitätssatz):

Sei  $\alpha > 0$  fest und  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  für  $t \geq 0$ ,  $|\mathbf{y}| \leq \alpha$  definiert, stetig und gelte:

$$\lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} = 0 \text{ gleichmäßig für } t \geq 0. \quad (2.10)$$

Insbesondere ist also  $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ . Seien weiterhin wie im linearen Fall  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $p \leq 2n$  und  $\gamma := \max_{i=1, \dots, p} \operatorname{Re}(\lambda_i)$ . Dann ist die triviale Lösung  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$  der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ :

- für  $\gamma < 0$  asymptotisch stabil und

- für  $\gamma > 0$  instabil.
- Für  $\gamma = 0$  ist keine Aussage möglich.

Der Beweis dieses Satzes folgt identisch dem obigen linearen Stabilitätssatz. Die nötige Abschätzung der nichtlinearen Terme erfolgt über das Lemma von Gronwall, siehe Walter [1990].

**Folgerung 2.7** (Stabilität von Systemen):

Die beiden Stabilitätssätze sind für die triviale Lösung  $\mathbf{y}(t) \equiv 0$  formuliert, die Stabilitätseigenschaft der trivialen Lösung impliziert dies für alle Lösungen  $\mathbf{y}(t)$ . Man spricht von einem stabilen, asymptotisch stabilen, instabilen bzw. grenzstabilen System, das über die konstante Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2n,2n}$  repräsentiert wird.

Im Fall des nichtlinearen Systems  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  kann aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von  $\lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} = 0$  ebenfalls Systemstabilität gefolgert werden.

Der nichtlineare Stabilitätssatz sagt damit aus, dass die Systemstabilität primär von den linearen Kräften abhängig ist. Diese sind alle in der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  abgebildet. Solange die nichtlinearen Kräfte, die in  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  abgebildet sind, klein genug bleiben, haben Sie keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten. Klein genug ist hier über eine Abschätzung im Lemma von Gronwall definiert, die jedoch keine starke Einschränkung darstellt, siehe Walter [1990]. In der Mechanik hängen viele Kräfte nur vom Zustand  $\mathbf{y}$  und nicht explizit von der Zeit  $t$  ab. Für diese ist nach Abzug des linearen Anteils (in  $\mathbf{A}$ ) die Bedingung  $\lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{g}(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} = 0$  immer erfüllt.

Einzigste Ausnahme bilden Systeme mit  $\gamma = 0$ , die nach dem linearen Stabilitätssatz als grenzstabil erkannt werden. Hier ist keinerlei Aussage zur Systemstabilität möglich. Kleinste Nichtlinearitäten können asymptotische Stabilität oder auch Instabilität des Systems bewirken.

Die Aussage des nichtlinearen Stabilitätssatzes 2.6 ist ein Hinweis darauf, dass die Analyse von rein linear modellierten Systemen gerechtfertigt ist. Solange die auftretenden Kräfte korrekt linearisiert werden, hat der Fehler, der durch vernachlässigte Nichtlinearitäten im Modell entsteht, keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten. Eine Ausnahme sind grenzstabile Systeme, die bei durchdringender Materialdämpfung im Allgemeinen jedoch nicht auftreten. Dies ist ein entscheidender Punkt, um die Güte von Stabilitätsanalysen auf Grundlage von linearen Systemmodellen bewerten zu können.

## 2.3 Stabilität und Matrizen

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Stabilitätseigenschaften verschiedener Systeme betrachtet, die in direktem Zusammenhang mit den einzelnen Systemmatrizen stehen. Aufgrund der dabei verfügbaren Stabilitätssätze können Erkenntnisse gewonnen werden, ohne explizit alle Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  berechnen zu müssen. Grundlage für dieses Kapitel ist unter anderem Müller [1977].

### 2.3.1 Orthogonale Diagonalisierbarkeit

Bei Vernachlässigung von geschwindigkeitsproportionalen Kräften vereinfacht sich die Differentialgleichung linearer dynamischer Systeme (2.1) zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + i\mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Dieses System zweiter Ordnung kann wieder in ein System erster Ordnung mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  umgeformt werden. Eine andere Vorgehensweise bringt in diesem Fall jedoch zusätzliche Erkenntnisse. Sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{n,n}. \quad (2.12)$$

Dann lässt sich das quadratische Eigenwertproblem

$$\left(-\lambda^2\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{K}}\right)\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{B}$  formulieren:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\psi} = -\lambda^2\boldsymbol{\psi} \quad (2.14)$$

Die Zahl der Gleichungen verdoppelt sich dabei nicht. Insbesondere wenn  $\mathbf{M}$  und damit auch  $\mathbf{M}^{-1}$  Diagonalmatrizen sind, lassen sich viele Eigenschaften von  $\widehat{\mathbf{K}}$  auf  $\mathbf{B}$  übertragen.

Sei  $\kappa \in \text{Spec}(\mathbf{B})$ , also Eigenwert von Gleichung (2.13), dann ist  $\lambda = \sqrt{-\kappa}$  Eigenwert von  $\mathbf{A}$  im Sinne von Satz (2.5) wie durch Einsetzen gezeigt werden kann. Entsprechend ergeben sich Eigenfrequenz  $\omega$  und Abklingkonstante  $\delta$  über

$$\omega = \text{Im}(\sqrt{-\kappa}) \quad \delta = -\text{Re}(\sqrt{-\kappa}) \quad (2.15)$$

Die komplexe Wurzelfunktion besitzt nach Definition immer zwei Lösungen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, d.h. eine Drehung um  $180^\circ$  um den Ursprung auf der komplexen Zahlenebene. An dieser Stelle ist in Anwendungen immer nur die Lösung mit einem positiven Imaginärteil von Interesse, auch wenn grundsätzlich beide Lösungen berücksichtigt werden müssen, um physikalisch interpretierbare, reellwertige Ergebnisse zu erhalten.

Ein zentrales Instrument neben den beiden definierten Stabilitätssätzen 2.5 und 2.6 ist der folgende Satz über die orthogonale Diagonalisierbarkeit. Der Satz ist nur anwendbar, wenn die Strukturdämpfungsmatrix  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  verschwindet und somit  $\mathbf{B}$  reellwertig ist.

**Satz 2.8** (Orthogonale Diagonalisierbarkeit):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$  beliebig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\mathbf{B}$  ist unter orthogonaler Transformation diagonalisierbar.
2.  $\mathbf{B}$  hat  $n$  paarweise zueinander orthogonale Eigenvektoren.
3.  $\mathbf{B}$  ist symmetrisch.

Der Beweis dieses grundlegenden Satzes der linearen Algebra wird bei Rehm und Trinks [2000] ausgeführt.

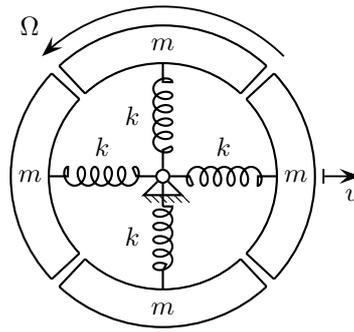
### 2.3.2 M-K-Systeme

Das einfachste dynamische System besteht nur aus der symmetrisch positiv definiten Massenmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  und der symmetrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Die vereinfachte Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Diese Gleichung kann aufgrund der symmetrisch positiv definiten Matrix  $\mathbf{M}$  und der symmetrischen Matrix  $\mathbf{K}$  nach Satz 2.8 unter orthogonaler Transformation diagonalisiert werden. Es existiert also eine Basisdarstellung von  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ , für die das System entkoppelt ist.

Die Stabilität des Gesamtsystems folgt nun durch die Stabilität der entkoppelten Einzelsysteme. Im Falle einer positiv definiten Matrix  $\mathbf{K}$  ist das System grenzstabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.



**Abbildung 2.2:** Modell des Schleuderberstversuchs

Wenn  $\mathbf{K}$  negative Eigenwerte besitzt, ist das System instabil. Dies wird im folgenden Beispiel erläutert.

Wenn  $0 \in \text{Spec}(\mathbf{K})$ , d.h. 0 ist Eigenwert von  $\mathbf{K}$ , spricht man von einem kinematischen System. Es ist ebenfalls instabil.

Aufgrund der orthogonalen Diagonalisierbarkeit von  $\mathbf{B}$  stehen die Eigenvektoren  $\psi$  zu unterschiedlichen Eigenwerten  $\kappa$  senkrecht aufeinander und sind rein reell. Das System schwingt in Phase.

Die bei der Simulation von Bremsenquietschen auftretenden Matrizen  $\mathbf{K}$  sind im Allgemeinen positiv definit, das M-K-System ist somit grenzstabil.

### Beispiel: Schleuderberstversuch

Ein Ring der Masse  $4m$  wird mit hoher Geschwindigkeit  $\Omega$  gedreht, siehe Abbildung 2.2. Er wird von 4 radialen Federn der Steifigkeit  $k$  an der Nabe festgehalten. Tangentiale Spannungen innerhalb des Rings werden vernachlässigt. Durch die Zentrifugalkraft und deren Abhängigkeit vom Radius, hier von der Auslenkung  $u$  der Masse, entstehen negative Einträge in der Steifigkeitsmatrix. Diese sind proportional zu  $\Omega^2$ , siehe Kapitel 3.5.

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{k - \Omega^2 m}{m} \quad (2.17)$$

Ab einer Grenzggeschwindigkeit  $\Omega_{\text{grenz}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$  wird die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}$  negativ definit, die Auslenkung  $u$  steigt exponentiell an und die Scheibe birst aufgrund des Stabilitätsverlustes.

Dies stellt nur einen von verschiedenen möglichen Mechanismen für das Bersten der Scheibe dar. Im Allgemeinen wird die Scheibe wegen mangelnder Festigkeit bersten, bevor der Stabilitätsverlust eintritt.

### 2.3.3 M-K-N-Systeme

Die Bewegungsgleichung von reellen zirkulatorischen Systemen hat die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n,n}$  schiefsymmetrisch.

Aufgrund der Schiefsymmetrie von  $\mathbf{N}$  ist nach Satz 2.8 keine Diagonalisierbarkeit von  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N})$  unter orthogonaler Transformation möglich, d.h. die Eigenvektoren  $\boldsymbol{\psi}$  stehen nicht senkrecht aufeinander.

**Lemma 2.9** (Komplex konjugierte Eigenwerte und Eigenvektoren):

Sei  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Dann sind die Eigenwerte  $\kappa_i$  von  $\mathbf{B}$  entweder rein reell oder komplex konjugierte Paare, d.h.

$$\kappa_i \in \text{Spec}(\mathbf{B}) \iff \bar{\kappa}_i \in \text{Spec}(\mathbf{B}). \quad (2.19)$$

Dies ist auch in Abbildung 2.3 links verdeutlicht. Die Eigenvektoren  $\boldsymbol{\psi}_i$  komplex konjugierter Eigenwerte  $\kappa_i, \bar{\kappa}_i$  sind ebenfalls komplex konjugiert:

$$\kappa_i \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_i \iff \bar{\kappa}_i \bar{\boldsymbol{\psi}}_i = \mathbf{B}\bar{\boldsymbol{\psi}}_i. \quad (2.20)$$

Beweis: Sei  $\kappa_i$  Eigenwert von  $\mathbf{B}$  und  $\boldsymbol{\psi}_i$  zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

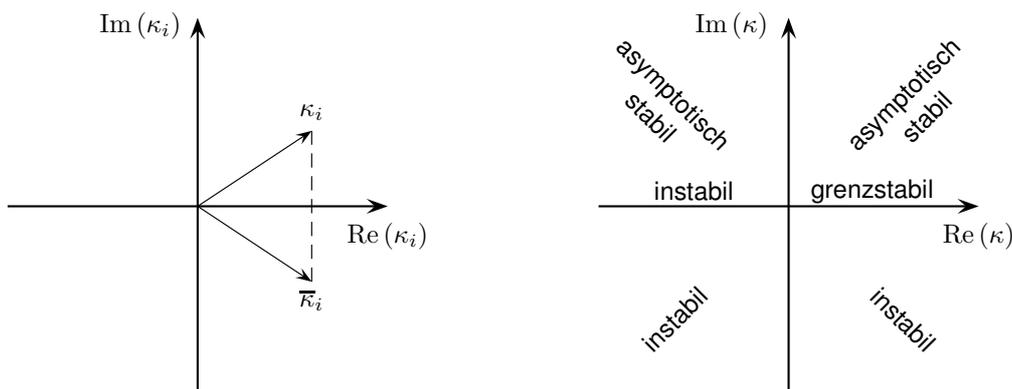
$$\mathbf{B}\bar{\boldsymbol{\psi}}_i = \mathbf{B}(\boldsymbol{\psi}_i - 2\text{Im}(\boldsymbol{\psi}_i)) = \mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_i - 2\text{Im}(\mathbf{B}\boldsymbol{\psi}_i) = \kappa_i \boldsymbol{\psi}_i - 2\text{Im}(\kappa_i \boldsymbol{\psi}_i) = \overline{\kappa_i \boldsymbol{\psi}_i} = \bar{\kappa}_i \bar{\boldsymbol{\psi}}_i.$$

**Folgerung 2.10:**

Da  $\lambda_i = -\sqrt{\kappa_i}$ , überträgt sich das Ergebnis auf die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\mathbf{A}$ . Allerdings sind dann Real- und Imaginärteil vertauscht, also

$$\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + i \text{Im}(\lambda_i) \in \text{Spec}(\mathbf{A}) \iff \hat{\lambda}_i := -\text{Re}(\lambda_i) + i \text{Im}(\lambda_i) \in \text{Spec}(\mathbf{A}). \quad (2.21)$$

Bei rein imaginären Eigenwerten  $\lambda_i$  sind die Eigenvektoren  $\boldsymbol{\varphi}_i$  rein reell. Im Falle von Instabilität sind die beiden Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_i$  und  $\hat{\lambda}_i$  zueinander komplex konjugiert.



**Abbildung 2.3:** Lage der Eigenwerte  $\kappa_i$  und  $\bar{\kappa}_i$  von  $B$  in der komplexen Zahlenebene (links), Stabilitätsbereich eines einzelnen Eigenwerts  $\kappa_i$  von  $B$  (rechts)

**Satz 2.11** (Stabilitätssatz zirkulatorischer Systeme, vgl. Müller [1977]):

Sei das zirkulatorische System (2.18) wie oben definiert. (2.18) ist genau dann stabil, wenn ein reguläres  $\Psi \in \mathbb{R}^{n,n}$  existiert, mit

$$\mathbf{K} + \mathbf{N} = \mathbf{M}\Psi \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n) \Psi^{-1} \quad \kappa_i > 0 \quad (2.22)$$

Die Grenzstabilität des Systems folgt also, wenn  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N})$  bzw.  $\mathbf{K} + \mathbf{N}$  ähnlich einer positiv definiten reellen Diagonalmatrix sind. Asymptotische Stabilität kann nicht gefolgert werden.

Beweis: Die Aussage kann mit Lemma 2.9 und Folgerung 2.10 auf den Stabilitätssatz 2.5 zurückgeführt werden.

Es existieren zwei verschiedene Möglichkeiten einer Instabilität. Einerseits eine auch bei M-K-Systemen auftretende statische Instabilität, die die fehlende positive Definitheit von  $\mathbf{K} + \mathbf{N}$  darstellt. Andererseits eine dynamische Instabilität, die sich aus der fehlenden Diagonalisierbarkeit von  $\mathbf{K} + \mathbf{N}$  über  $\mathbb{R}$  ableitet und über Eigenwerte  $\lambda_i$  mit positivem Realteil charakterisiert wird. Insbesondere folgt, dass bei Stabilität immer Grenzstabilität vorliegt. Asymptotische Stabilität kann nicht erreicht werden. Dies ist aus Abbildung 2.3 grafisch ersichtlich. Da die Eigenwerte  $\kappa_i$  immer als komplex konjugierte Paare auftreten, wird immer einer der beiden im instabilen Bereich liegen. Die einzige Möglichkeit für ein stabiles System besteht darin, dass alle Eigenwerte  $\kappa_i$  rein reellwertig und positiv sind.

M-K-N-Systeme beschreiben wichtige Mechanismen, die für die beim Bremsenquietschen auftretenden Instabilitäten ursächlich sind. Ein Beispiel für ein zirkulatorisches System befindet sich daher in Kapitel 3.3, siehe Gleichung (3.25).

### 2.3.4 M-D-K-Systeme

Bei Berücksichtigung von dissipativen Effekten  $\mathbf{D}$  neben der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  können ggf. weitere Stabilitätsbereiche gegenüber dem nicht dissipativen System gefunden werden. Ein dissipatives nichtgyroskopisches System wird über die Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

beschrieben.

**Satz 2.12** (Stabilitätssatz dissipativer nichtgyroskopischer Systeme):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit und  $\mathbf{D}, \mathbf{K}$  symmetrisch positiv semidefinit.

Dann gilt:

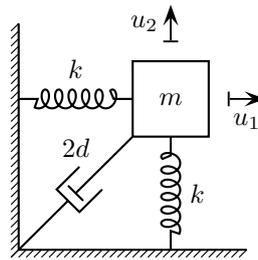
- $(\mathbf{D} + t\mathbf{K}) > \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2.23) \text{ ist stabil}$
- $\left[ \mathbf{K} > \mathbf{0} \wedge \text{Rang} \left( (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) \cdots (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^{n-1} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) \right) = n \right]$   
 $\Leftrightarrow \quad (2.23) \text{ ist asymptotisch stabil}$

Beweis: Da der Beweis recht umfangreich ist und dieser Stabilitätssatz aufgrund des fehlenden zirkulatorischen Anteils keine direkte Anwendung bei Bremsgeräuschen bietet, sei an dieser Stelle auf Müller [1977] verwiesen.

Der Faktor  $t$  hat die Einheit  $s$ , daher stimmen die Dimensionen der Matrizen physikalisch gesehen überein. Müller [1977] spricht hier von einem Dimensionsfaktor. Dies bedeutet aus mathematischer Sicht, dass die Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  mit beliebigen positiven Skalaren multipliziert werden können. Nur die positive Definitheit oder Semidefinitheit ihrer Summe ist hier von Bedeutung.

Da die zweite Bedingung für asymptotische Stabilität für große  $n \in \mathbb{N}$  nur schwer abzu prüfen ist, ist die erste Aussage relevanter für die Praxis. Hier kann eine fehlende statische Stabilität des M-K-Systems, d.h.  $0 \in \text{Spec}(\mathbf{K})$ , zielgerichtet durch einen entsprechenden dissipativen Anteil der Matrix  $\mathbf{D}$  kompensiert werden.

Aus dem Stabilitätssatz dissipativer nichtgyroskopischer Systeme 2.12 kann gefolgert werden, dass eine positive Dämpfung keinen Stabilitätsverlust hervorrufen kann.



**Abbildung 2.4:** Gedämpfter Schwinger mit zwei Freiheitsgraden

**Folgerung 2.13** (Dissipative Stabilitätserhaltung):

Sei die Voraussetzung von Satz 2.12 erfüllt. Außerdem sei das zugehörige M-K-System (2.16) stabil, d.h.  $\mathbf{K}$  ist positiv definit. Dann ist das M-D-K-System (2.23) stabil.

**Beispiel: Nicht durchdringende Dämpfung**

Eine Masse  $m > 0$  ist in zwei Richtungen  $u_1$  und  $u_2$  verschieblich, siehe Abbildung 2.4. Über Federn  $k > 0$  ist die Masse elastisch gelagert. Der Dämpfer mit der Dämpfungskonstante  $2d > 0$  koppelt die beiden Freiheitsgrade.

Das System wird über folgende Matrizen beschrieben:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & d \\ d & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Da  $\mathbf{K} > \mathbf{0}$ , ist das zugehörige M-K-System stabil. Somit ist nach Folgerung 2.13 auch das hier modellierte M-D-K-System stabil.

Asymptotische Stabilität kann nach Satz 2.12 nicht erreicht werden, da

$$\text{Rang}((\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})) = \text{Rang}\left(\frac{d^2 k}{m^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 2. \quad (2.25)$$

Entscheidend ist hier, dass  $\mathbf{D}$  nur positiv semidefinit und nicht positiv definit ist. Der Dämpfer dämpft zwar Schwingungen in  $u_1$ - als auch in  $u_2$ -Richtung. Da jedoch auch eine Schwingung mit  $u_1 = -u_2$  bestehen kann und diese keine Kräfte im Dämpfer hervorruft, also keine Energie dissipiert wird, ist das System nicht asymptotisch stabil.

Bei Müller [1977] findet sich ein weiteres Beispiel für ein M-D-K-System, das ohne positiv definite Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  durchdringend gedämpft ist.

### 2.3.5 M-G-K-Systeme

Lineare dynamische Systeme, die durch eine Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , eine gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  und eine Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  abgebildet werden können, treten beispielsweise bei der Modellierung von Satelliten auf, die mittels Eigenrotation auf ihrer Flugbahn gehalten werden sollen. Sie werden als gyroskopisch konservative Systeme bezeichnet. Dabei wird der Kreiseffekt zur Stabilisierung ausgenutzt.

Die Gleichung dieser Systeme lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

mit  $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$  sowie  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{K}$  symmetrisch und  $\mathbf{G}$  schiefsymmetrisch. Insbesondere muss  $\mathbf{K}$  nicht positiv semidefinit sein.

**Satz 2.14** (Stabilitätssatz gyroskopisch konservativer Systeme):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und das lineare gyroskopisch konservative System (2.26) wie oben beschrieben.

Sei  $k_1 := \text{Rang}(\mathbf{K})$  und  $k_2 := \text{Rang}((\mathbf{I}_n - \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1})\mathbf{G}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}))$ . Dabei ist  $\mathbf{K}^{-1}$  die Inverse von  $\mathbf{K}$ , falls  $\mathbf{K}$  regulär ist, ansonsten bezeichne  $\mathbf{K}^{-1}$  die verallgemeinerte Penrose-Inverse.

Dann ist das System grenzstabil, wenn  $\mathbf{K}$  positiv semidefinit ist,  $k_2$  gerade ist und  $k_1 + k_2 = n$  gilt.

Beweis: Der Beweis des Satzes erfolgt durch geeignetes Permutieren der Matrizen. Danach kann eine Variante des linearen Stabilitätssatzes 2.5 angewendet werden, die bei Müller [1977] ausformuliert ist. Die Definition der hier verwendeten Penrose-Inversen findet sich beispielsweise bei Deuffhard und Bornemann [2002]. Sie ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der inversen Matrix auf nicht reguläre und nicht quadratische Matrizen.

Der Stabilitätssatz 2.14 sagt aus, dass die Bildräume von  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{G}$  gemeinsam den gesamten  $\mathbb{R}^n$  aufspannen müssen. Dann kann Grenzstabilität gefolgert werden. Praktische Anwendung hat die daraus abgeleitete Folgerung:

**Folgerung 2.15** (Gyroskopische Erhaltung von Stabilität):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{K}$  positiv definit, d.h. das System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

ist (grenz-)stabil. Dann ist auch das erweiterte gyroskopische System (2.26) für alle schiefsymmetrischen  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^t$  grenzstabil.

Für  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  ist (2.26) grenzstabil, wenn  $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ . Ansonsten ist es instabil.

Somit bleibt eine vorhandene Stabilität des M-K-Systems (2.16) auch bei Hinzunahme von gyroskopischen Termen bestehen. Es gibt eine weitere Folgerung aus Satz 2.14, die nach Thomson und Tait [1888] benannt ist. Sie betrifft die mögliche Stabilisierung von instabilen Systemen durch gyroskopische Kräfte.

**Folgerung 2.16** (Satz von Thomson-Tait über gyroskopische Stabilisierung):

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Das lineare System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.28}$$

sei instabil und  $\mathbf{K} < \mathbf{0}$  negativ definit. Das System kann durch eine geeignete gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  stabilisiert werden, wenn  $\det(\mathbf{K}) > 0$ .

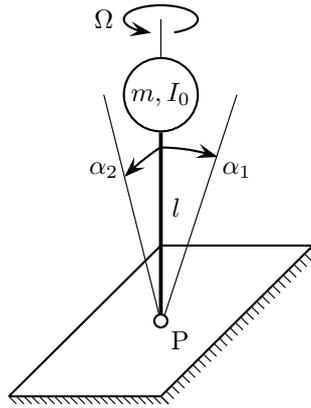
Mit  $\det(\mathbf{K}) > 0$  ist die Zahl der negativen Eigenwerte von  $\mathbf{K}$  gerade.

Allen Sätzen in diesem Abschnitt ist gemeinsam, dass die gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  exakt antisymmetrisch sein muss. Da jeweils nur Grenzstabilität als Aussage gewonnen werden kann, ist eine Berücksichtigung aller Terme, auch von höherer Ordnung, wichtig. Bei Vorhandensein von symmetrischen geschwindigkeitsproportionalen Anteilen, d.h.  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  können die Sätze nicht angewandt werden. Auch im System eventuell vorhandene Nichtlinearitäten, die durch die Modellierung nicht erfasst werden, gefährden die Systemstabilität.

### Beispiel: Gyroskopische Stabilisierung

Ein rotierender rotationssymmetrischer Kreisel der Masse  $m > 0$  steht gelenkig gelagert auf seiner Spitze P. Der Abstand zwischen der Spitze P und dem Schwerpunkt ist  $l > 0$ . Das Hauptträgheitsmoment um die Rotationsachse ist  $I_0 > 0$ .  $I_p > 0$  bezeichnet die beiden anderen Trägheitsmomente bezüglich der Spitze P inklusive der Steiner-Anteile. Außerdem ist  $g$  die Gravitationsbeschleunigung.

Die beiden Freiheitsgrade des Systems sind die beiden körperfesten Kippwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Die Trägheit  $I_p$  des Kreisels um den Punkt P bestimmt die Einträge der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ . Über den Drallsatz, siehe Gross u. a. [2006] bzw. Wagner [2013] können die Trägheitskräfte  $\mathbf{M}$  und die gyroskopischen Kräfte  $\mathbf{G}$  hergeleitet werden. Unter der Annahme, dass nur kleine Verdrehungen  $\alpha_i$  auftreten, kann das Gleichgewicht im ausgelenkten Zustand aufgestellt und linearisiert werden.



**Abbildung 2.5:** Rotierender Kreisel mit zwei Freiheitsgraden

Das System wird somit über die folgenden Matrizen beschrieben:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (I_p - I_0) \Omega \\ (I_0 - I_p) \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -mgl & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Das M-K-System ist instabil, da  $\mathbf{K}$  nicht positiv definit ist. Der Kreisel fällt um, wenn er nicht gedreht wird.

Nach dem Satz von Thomson-Tait, Folgerung 2.16, kann das System durch eine geeignete gyroscopische Matrix  $\mathbf{G}$  stabilisiert werden, da  $\mathbf{K}$  negativ definit ist und  $\det(\mathbf{K}) > 0$ . Die Frage, wie eine solche Matrix  $\mathbf{G}$  aussehen soll, kann hier leicht gelöst werden, denn alle schief-symmetrischen Matrizen der Dimension 2 sind Vielfache von  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Somit ist bei gegebenem  $I_0$  und  $I_p$  nur noch ein geeignetes  $\Omega \in \mathbb{R}$  zu bestimmen.

Durch Auswertung des charakteristischen Polynoms von  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$  ergibt sich ein biquadratisches Gleichungssystem

$$0 = \lambda^4 + \lambda^2 \left( \frac{s^2}{I_p^2} - \frac{2 m g l}{I_p} \right) + \frac{m^2 g^2 l^2}{I_p^2}. \quad (2.30)$$

Hier ist  $s := (I_p - I_0) \Omega$ . Die vier Lösungen sind

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{2 I_p} \sqrt{-2 s^2 + 4 m g l I_p \pm 2 \sqrt{s^4 - 4 m g l I_p s^2}} \quad (2.31)$$

wobei jede Kombination von Plus- und Minuszeichen in Gleichung (2.31) einer Lösung entspricht.

Um Systemstabilität zu garantieren, muss  $\max \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$  sein, also  $0 > \lambda_i^2 \in \mathbb{R}$ . Eingesetzt folgt

über die Determinante der biquadratischen Gleichung die Bedingung

$$|\Omega| \geq \sqrt{m g l I_p} \frac{2}{I_p - I_0}. \quad (2.32)$$

Die Drehgeschwindigkeit  $\Omega$  muss also betragsmäßig groß genug sein. Die Drehrichtung ist hier wie erwartet nicht relevant.

Im folgenden Abschnitt werden neben gyroskopischen auch dissipative Terme betrachtet.

### 2.3.6 M-D-G-K-Systeme

Bei gyroskopisch dissipativen Systemen, die über die Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

beschrieben werden, können die vorhandenen Stabilitätsaussagen für dissipative nichtgyroskopische bzw. gyroskopisch konservative Systeme nicht übernommen werden. In diesem Fall geht der stabilisierende Einfluss der gyroskopischen Matrix  $\mathbf{G}$  nahezu immer verloren, wie die folgenden beiden Sätze zeigen.

**Satz 2.17** (Satz von Thomson-Tait über vollständig dissipative Systeme):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n,n}$  schiefsymmetrisch und  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und regulär.

Das M-D-G-K-System (2.33) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn das vereinfachte M-K-System (2.16) grenzstabil ist. Ansonsten ist es instabil.

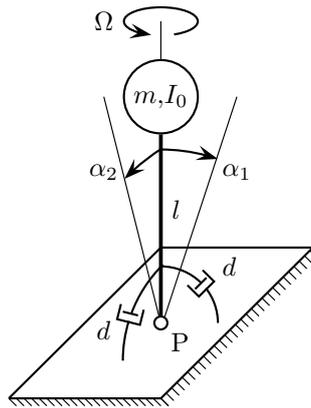
Das Stabilitätsverhalten bleibt somit von  $\mathbf{G}$  unbeeinflusst und eine gyroskopische Stabilisierung kann bei vollständiger Dämpfung  $\mathbf{D}$  nicht stattfinden.

Die eine Richtung des Satzes von Thomson-Tait gilt auch unter abgeschwächten Voraussetzungen:

**Satz 2.18** (Vererbung statischer Stabilität):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv semidefinit,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n,n}$  schiefsymmetrisch und  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch positiv definit.

Dann ist das M-D-G-K-System (2.33) stabil.



**Abbildung 2.6:** Rotierender Kreisel mit zwei Freiheitsgraden und Dämpfung

Die statische Stabilität des vereinfachten M-K-Systems (2.16) wird unabhängig von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{G}$  vererbt. Einzige Voraussetzung ist, dass  $\mathbf{D}$  positiv semidefinit ist, also keine Energie von außen in das System einfließt.

Die Beweise für die Sätze 2.17 und 2.18 finden sich für den etwas allgemeineren Fall der durchdringenden statt der vollständigen Dämpfung bei Müller [1977].

### Beispiel: Fehlende gyroscopische Stabilisierung

Der im letzten Beispiel untersuchte Kreisel wird nun in seinen Bewegungen leicht gedämpft, siehe Abbildung 2.6

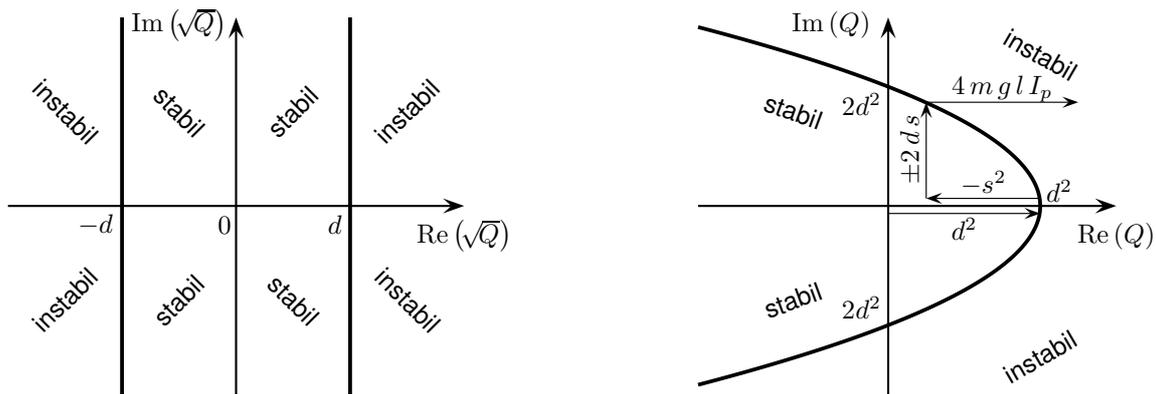
Die zusätzlichen Dämpfer bilden die Reibung in der Spitze P ab, die durch die Präzessionsbewegung der Freiheitsgrade  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  entsteht. Die Reibung aufgrund der Rotation  $\Omega$  bleibt weiterhin unberücksichtigt.

Das System wird nun über die folgenden Matrizen beschrieben:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & (I_p - I_0)\Omega \\ (I_0 - I_p)\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -mgl & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Das M-K-System ist instabil, da  $\mathbf{K}$  nicht positiv definit ist. Der Kreisel fällt um, wenn er nicht gedreht wird.

Wendet man Satz 2.17 an, so folgt aus der negativen Definitheit von  $\mathbf{K}$ , dass auch das M-D-G-K-System instabil ist. Dies erscheint paradox, da gegenüber dem vorherigen Beispiel, das grenzstabil ist, nur eine positive vollständige Dämpfung  $d$  hinzugekommen ist.



**Abbildung 2.7:** Stabilitätsbereich für  $\sqrt{Q}$  nach Gleichung (2.36) (links) und Stabilitätsbereich für  $Q$  nach Gleichung (2.37) (rechts)

Mit dem charakteristischen Polynom folgt das Gleichungssystem

$$0 = \lambda^4 - \lambda^3 \frac{2d}{I_p} + \lambda^2 \left( \frac{d^2 + (I_p - I_0)^2 \Omega^2}{I_p^2} - \frac{2 m g l}{I_p} \right) + \lambda \frac{2 d m g l}{I_p^2} + \frac{m^2 g^2 l^2}{I_p^2}. \quad (2.35)$$

Mit  $s := (I_p - I_0) \Omega$  und  $Q := (d \mp i s)^2 + 4 m g l I_p$  folgen 4 Lösungen

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{1}{2 I_p} \left( -d \pm i s \pm \sqrt{D} \right), \quad (2.36)$$

wobei jede Kombination von Plus- und Minuszeichen in Gleichung (2.36) einer Lösung entspricht. Das Vorzeichen vor  $i s$  in der Definition von  $Q$  ist invers dem vor  $i s$  in Gleichung (2.36). Da nur Lösungen mit positivem Imaginärteil physikalisch relevant sind, bleiben zwei Lösungen bestehen.

Um Systemstabilität zu gewährleisten, muss wiederum gelten:  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), siehe Abbildung 2.7 (links). Der erste Summand  $-d$  ist zwar negativ, jedoch ist

$$\begin{aligned} \left| \text{Re}(\sqrt{Q}) \right| &= \left| \text{Re} \left( \sqrt{(d \mp i s)^2 + 4 m g l I_p} \right) \right| \\ &= \left| \text{Re} \left( \sqrt{d^2 - s^2 \mp i 2 d s + 4 m g l I_p} \right) \right| \\ &> d, \end{aligned} \quad (2.37)$$

wie in Abbildung 2.7 (rechts) zu erkennen ist. Somit besitzt eine der beiden physikalischen Lösungen einen positiven Realteil, unabhängig von der konkreten Wahl von  $d$  bzw. von  $s$ . Das System ist somit immer instabil.

Die Instabilität zeigt sich dadurch, dass die Amplitude der Präzessionsbewegung des Kreisels exponentiell ansteigt. Irgendwann wird die Auslenkung  $\alpha_i$  so groß, dass die Annahme  $\sin(\alpha_i) \approx \alpha_i$

nicht länger gilt. Eine Stabilitätsaussage auf Basis eines linearen Systemmodells ist nun nicht mehr möglich.

### 2.3.7 M-D-G-K-N-Systeme

Aufgrund der sehr allgemeinen Form von M-D-G-K-N-Systemen, die über die Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

dargestellt werden, können nach Müller [1977] nur sehr schwer allgemeine Aussagen getroffen werden. Der folgende Satz kann einen Hinweis auf die Bearbeitung von Bremsgeräuschproblemen geben.

**Satz 2.19** (Asymptotische Stabilität von M-D-G-K-N-Systemen):

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit,  $\mathbf{D}, \mathbf{K}$  symmetrisch und  $\mathbf{G}, \mathbf{N}$  schiefsymmetrisch. Sei

$$m_{max} := \text{Max Spec}(\mathbf{M}) \quad (2.39)$$

$$g_{max} := \text{Max Spec}(i \mathbf{G}) \quad (2.40)$$

$$k_{min} := \text{Min Spec}(\mathbf{K}) \quad (2.41)$$

$$n_{max} := \text{Max Spec}(i \mathbf{N}) \quad (2.42)$$

$$d_0 := \frac{n_{max}}{2 k_{min}} \left( g_{max} + \sqrt{g_{max}^2 + 4 m_{max} k_{min}} \right). \quad (2.43)$$

Dann ist das System (2.38) asymptotisch stabil, wenn  $\mathbf{K}$  positiv definit ist und  $\mathbf{D} > d_0 \mathbf{I} > \mathbf{0}$ .

Der Satz kann mit Hilfe der zu den Matrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{N}$  gehörigen Eigenwertproblemen bewiesen werden. Für die Abschätzung durch  $d_0$  sei auf Frik [1972] verwiesen. Ein statisch stabiles System kann somit durch eine hinreichend große vollständige Dämpfung immer asymptotisch stabilisiert werden. Die zugehörige Abschätzung mit  $d_0$  ist jedoch so grob, dass eine Lösung auf dieser allgemeinen Ebene in der praktischen Anwendung nicht zielführend ist.

Weitere Stabilitätssätze von Müller [1977] können nur in stark eingeschränkten Fällen angewandt werden oder besitzen nur sehr aufwändig abprüfbare Bedingungen. Sie finden deshalb bei der Bremsgeräuschsimulation keine Anwendung.

Hetzler [2008] zeigt, dass bei M-D-G-K-N-Systemen ähnliche destabilisierende Effekte bestehen können, wie sie auch im obigen Beispiel des instabilen Kreisels auftreten, siehe

Abbildung 2.6. Insbesondere ist Satz 2.17 von Thomson und Tait [1888] bei vorhandenen zirkulatorischen Kräften nicht anwendbar. Das Stabilitätsverhalten dieser Systeme wurde zuerst von Ziegler [1952] untersucht und die Folgen, die aus der Nichtanwendbarkeit des Satzes von Thomson und Tait [1888] ausgehen, werden auch als Ziegler-Paradoxon bezeichnet.

### 2.3.8 M-D-G-K-N-S-Systeme

Für das allgemeine System (2.1) unter Mitberücksichtigung der komplexen, auslenkungsproportionalen Terme sind keine generalisierenden Stabilitätssätze bekannt. In diesem Fall muss die Stabilitätsbeurteilung immer über die explizite Berechnung der Eigenwerte und den linearen Stabilitätssatz 2.5 erfolgen. Die in Kapitel 4 beschriebene Stabilitätsanalyse auf Grundlage der Finite Elemente Methode basiert auf der expliziten Berechnung von Eigenwerten.

Im folgenden Kapitel werden verschiedene mechanische Modelle und Mechanismen untersucht, die Anteile an den verschiedenen Systemmatrizen hervorrufen können.



---

## 3 Erregungs- und Dämpfungsmechanismen

Im vorhergehenden Kapitel wurde der Einfluss verschiedener Systemmatrizen auf die Stabilität eines mathematischen Gleichungssystems untersucht. Dabei wurde jedoch außer Acht gelassen, wie die Einträge in diesen Matrizen entstehen können. Das heißt welche Mechanismen sind im Anwendungsfall einer Fahrzeugbremse vorstellbar, die eine Systeminstabilität auslösen können und welche können ein instabiles System wieder stabilisieren? Die mechanischen Modelle führen insbesondere zu Einträgen in der zirkulatorischen Matrix  $\mathbf{N}$ , der Strukturdämpfungsmatrix  $\mathbf{S}$ , der viskosen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  und der gyroskopischen Matrix  $\mathbf{G}$ . Diese Matrizen besitzen nach Kapitel 2 einen hohen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten.

Daneben sind Erregungs- und Dämpfungsmechanismen denkbar, die nicht direkt durch lineare Systemgleichungen berücksichtigt werden können. Hier stellt sich die Frage nach einer möglichen Linearisierung und dem dabei entstehenden Fehler.

Zu Beginn dieses Kapitels werden drei Mechanismen untersucht, die direkt mit der Reibung in einem rotierenden Bremssystem zusammenhängen. Das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz in Kapitel 3.1 stellt einen einfachen Mechanismus zur Generierung von Instabilitäten dar. Buck [2008] bringt diesen Mechanismus mit hochfrequentem Bremsenquietschen in Verbindung.

Die positive Reibungsdämpfung ist ein reiner Dämpfungsmechanismus, dessen Modellierung eng mit dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz zusammenhängt. Dies wird in Kapitel 3.2 beschrieben.

Die in vielen Quellen als Hauptursache für Bremsenquietschen beschriebene Modenkopplung wird in Kapitel 3.3 analysiert. Da der Begriff der Modenkopplung das Resultat – die Instabilität – und nicht die Ursache beschreibt, wird an dieser Stelle von einer reibinduzierten Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix gesprochen.

Ein weiterer, mit Kontakten in Verbindung stehender, Dämpfungsmechanismus ist die an den Kontakten auftretende Fügestellendämpfung. In Kapitel 3.4 wird diese näher erläutert.

Die durch die Rotation im Bremssystem entstehenden Coriolis- und Zentrifugalkräfte werden in Kapitel 3.5 beschrieben.

Kapitel 3.6 befasst sich mit verschiedenen Materialdämpfungsmodellen und deren mathematischer Abbildbarkeit.

Zum Schluss werden in Kapitel 3.7 und 3.8 Effekte durch Schallabstrahlung und Dissipation an den Systemgrenzen analysiert.

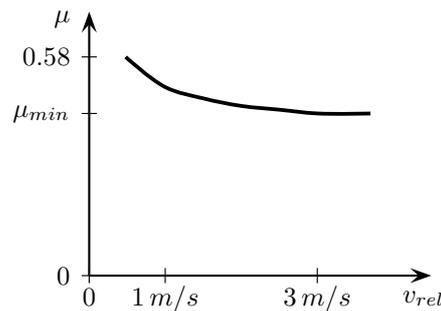
## 3.1 Geschwindigkeitsabhängiges Reibgesetz

Ein erster Mechanismus, der im Zusammenhang mit Reibung und gleitenden Bauteilen Instabilitäten oder Dämpfungsterme hervorrufen kann, basiert auf einem geschwindigkeitsabhängigen Reibwertverlauf  $\mu(v_{rel})$ .

### 3.1.1 Reibwertverhalten

Coulomb bezeichnete nach seinen Messungen den Reibkoeffizienten als unabhängig von der Normalkraft sowie der Kontaktfläche und als unabhängig vom Zustand, d.h. Haften oder Gleiten des Kontakts. Es wird heute jedoch oft zwischen einem Gleit- und Haftreibungskoeffizienten unterschieden. Nach Popov [2009] kann der höhere Haftreibungskoeffizient mit Kriechprozessen oder Kapillarkräften erklärt werden. Somit ist der Haftreibungskoeffizient selbst abhängig von der Zeitdauer des Haftens. Bei Betrachtung der Mikroprozesse im Kontakt kann auf einen fließenden Übergang zwischen Haften und Gleiten geschlossen werden. Popov [2010] beschreibt den von der Gleitgeschwindigkeit unabhängigen Reibkoeffizient daher als vereinfachende Annahme.

Eine aus der Hydrodynamik bekannte und nach Stribeck [1903] benannte Kurve besagt, dass der Reibkoeffizient bei kleinen Geschwindigkeiten abfällt, einen Minimalwert erreicht und danach wieder ansteigt. In der Hydrodynamik wird der erste, abfallende Teil durch den Aufbau einer schmierenden Grenzschicht erklärt, die danach aufgrund der zunehmenden Flüssigkeitsreibung des Schmiermittels einen Teil ihrer Leistungsfähigkeit einbüßt.



**Abbildung 3.1:** Verlauf des Reibkoeffizienten  $\mu$  zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe bzgl. der Gleitgeschwindigkeit  $v_{rel}$ , Messungen durchgeführt am Reibwertprüfstand der BMW Group

Messungen am Reibwertprüfstand der BMW Group zeigen ein ähnliches Verhalten. In Abbildung 3.1 ist erkennbar, dass bei niedrigen Gleitgeschwindigkeiten unter  $1 \text{ m/s}$ , d.h. unter einer Fahrzeuggeschwindigkeit von ca.  $5 \text{ km/h}$ , ein relevanter Abfall des Reibwerts  $\mu$  existiert. Der Effekt tritt bei höheren Geschwindigkeiten, wenn überhaupt, in viel geringerem Maße auf. Brecht [2000] stellt ein qualitativ vergleichbares Verhalten des Reibwerts  $\mu$  fest.

Die Bestimmung eines quantitativen Werts für den Gradienten des Reibwerts zur Relativgeschwindigkeit bleibt aufgrund anderer Abhängigkeiten des Reibwerts jedoch schwierig. Aus den bei der BMW Group durchgeführten Messungen ergeben sich Werte zwischen  $-0.15 \text{ s/m}$  und  $0.0 \text{ s/m}$ . Bajer u. a. [2003] schlagen für die Berechnung von Bremsenquietschen einen Gradienten von  $-0.013 \text{ s/m}$  vor.

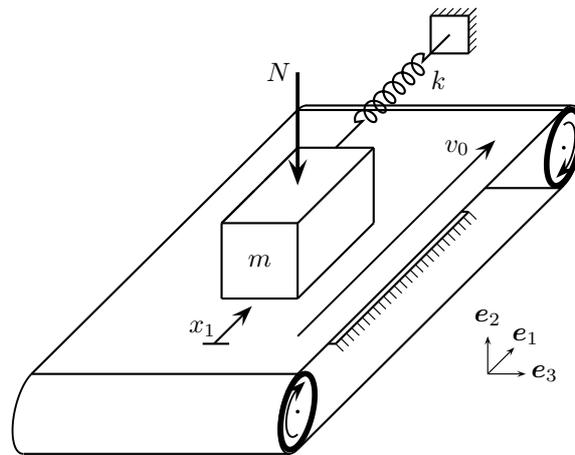
### 3.1.2 Minimalmodell

Die Anfachung durch einen negativen Gradienten des Reibwerts bzgl. der Geschwindigkeit kann durch ein Minimalmodell mit einem Freiheitsgrad veranschaulicht werden, das in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Ähnliche Modelle finden sich beispielsweise bei Popov [2010], Kinkaid u. a. [2003] oder Buck [2008].

Eine Masse  $m > 0$  liegt auf einem Band, das sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0 > 0$  bewegt. Sie ist in der Laufrichtung des Bands verschieblich gelagert und wird über eine Feder mit Steifigkeit  $k > 0$  gehalten. Eine konstante Normalkraft  $N > 0$  drückt die Masse fest auf das Band.

Es wird angenommen, dass die Schwinggeschwindigkeit der Masse  $\dot{x}_1$  immer kleiner als die konstante Laufgeschwindigkeit des Bands  $v_0$  bleibt.

$$v_0 > |\dot{x}_1| \quad (3.1)$$



**Abbildung 3.2:** Minimalmodell zum geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz

Diese Annahme ist bei, für das Bremsenquietschen relevanten, Betriebsbedingungen mit Fahrzeuggeschwindigkeiten über 1 km/h erfüllt. Bei geringeren Geschwindigkeiten könnte eine nichtlineare Stick-Slip Schwingung auftreten. Diese wäre dadurch gekennzeichnet, dass zumindest zeitweise keine Bewegung zwischen den beiden Kontaktpartnern auftritt. Für die Relativgeschwindigkeit im Kontakt gilt:

$$v_{rel} = v_0 - \dot{x}_1 > 0 \quad (3.2)$$

Der Reibkoeffizient wird als affine Funktion bzgl. der Relativgeschwindigkeit modelliert. Dabei beschreibt  $\mu_0 > 0$  den konstanten Anteil,  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  den Gradienten. Wie aus Abbildung 3.1 ersichtlich ist, können je nach Bereich der Stribeck Kurve verschiedene negative Werte für  $\mu_1$  auftreten. Es ist aber ebenso ein positiver Gradient denkbar oder  $\mu_1 = 0$ . Es gelte  $\mu_0 \gg |\mu_1 v_{rel}|$ .

$$\mu(v_{rel}) = \mu_0 + \mu_1 v_{rel} \quad (3.3)$$

Die auf die Masse wirkenden Kräfte sind in Abbildung 3.3 aufgetragen. Dabei wird angenommen, dass die Masse als Massenpunkt betrachtet werden kann. Rotationsträgheiten und die genauen Angriffspunkte der Federn und Kräfte werden vernachlässigt.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen in den beiden Koordinatenrichtungen  $x_1$  und  $x_2$  folgt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 - F_{R\ x_1} &= 0 \\ F_N - N &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$



**Abbildung 3.3:** Gleichgewicht in  $x_1$ -Richtung (links) und in  $x_2$ -Richtung (rechts)

Die Reibkraft  $F_{R\ x_1}$  berechnet sich nach Coulomb unabhängig von der Größe der Kontaktfläche nur aus der Normalkraft  $F_N$  und dem Reibkoeffizienten  $\mu(v_{rel})$ .

$$F_{R\ x_1} = \mu(v_{rel}) F_N \quad (3.5)$$

Insgesamt ergibt sich folgende Differentialgleichung, die eine harmonische Lösung besitzt.

$$m\ddot{x}_1 + \mu_1 N \dot{x}_1 + kx_1 = (\mu_0 + \mu_1 v_0) N \quad (3.6)$$

Der Exponentialansatz der homogenen Lösung berücksichtigt Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und Abklingkonstante  $\delta$ .

$$x_1(t) = A \exp(\lambda t) = A \exp(i\omega t - \delta t) \quad (3.7)$$

Eingesetzt folgen zwei Bedingungen, die aus dem Real- und Imaginärteil von  $x_1(t)$  resultieren.

$$\begin{aligned} m\delta^2 - m\omega^2 - \mu_1 N \delta + k &= 0 \\ -2m\delta\omega + \mu_1 N \omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es existieren mehrere Lösungsbereiche dieses Gleichungssystems. Im ersten Bereich folgt eine auf- bzw. abklingende reine Exponentialfunktion,

$$\omega = 0 \quad \delta = \frac{\mu_1 N}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1 N}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.9)$$

im anderen Bereich eine harmonisch schwingende Lösung, die ebenfalls auf- bzw. abklingend ist.

$$\omega = \pm \sqrt{-\left(\frac{\mu_1 N}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} \quad \delta = \frac{\mu_1 N}{2m} \quad (3.10)$$

Die Diskriminanten der Wurzeln der beiden Lösungen sind mit Ausnahme des Vorzeichens identisch, d.h. immer genau eine der beiden Lösungen existiert. Im Anwendungsfall wird die Bewegung des Systems primär durch das Feder-Masse-System bestimmt, d.h.  $\frac{k}{m} \gg \left(\frac{\mu_1 N}{2m}\right)^2$ . Das System wird somit durch die harmonisch schwingende Lösung beschrieben. Aus der Diskriminante folgt die kritische Dämpfung  $c_{krit} = 2\sqrt{mk}$  und der Dämpfungswert  $c = \mu_1 N$ . Für das Lehr'sche Dämpfungsmaß gilt:

$$\zeta = \frac{c}{c_{krit}} = \frac{\mu_1 N}{2\sqrt{mk}} \quad (3.11)$$

Alle Einträge sind positiv, mit Ausnahme des Gradienten des Reibwertverlaufs  $\mu_1$ . Dessen Vorzeichen bestimmt, ob eine Instabilität vorliegt oder nicht.

Im Falle einer Instabilität wird die Lösung nach diesem Modell eine unendlich große Amplitude erreichen. Dies kann in Wirklichkeit nicht auftreten, da irgendwann die Annahme  $v_0 > |\dot{x}_1|$  nicht mehr erfüllt ist. Bei Erreichen dieser Amplitude entsteht eine nichtlineare Schwingung mit Grenzzyklus. Dieser Zustand kann näherungsweise mit einer Stick-Slip Schwingung erklärt werden, wie sie im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

### 3.1.3 Stick-Slip

Stick-Slip Schwingungen treten gewollt beispielsweise bei Streichinstrumenten auf. Eine gespannte Saite wird durch den Bogen ausgelenkt und schnell ab einer bestimmten Amplitude zurück, da die Rückstellkraft der Saite größer als die Haftreibungskraft zum Bogen wird. Sobald die Gleitreibungskraft wiederum größer als die Summe aus Rückstellkraft und der Massenträgheit ist, wird die Saite erneut in Richtung der Bogenbewegung ausgelenkt. Dieser zyklische Ablauf erzeugt nun eine Schwingung, die als Ton wahrnehmbar ist. In vielen Anwendungen sollen jedoch genau diese Stick-Slip Schwingungen vermieden werden.

Zentrales Element für Stick-Slip Schwingungen ist hier die Differenz aus Haft- und Gleitreibungskoeffizient, ohne die die Erregung nicht stattfinden kann. Die Haft- und Gleitreibungswerte selbst können dabei als konstant angenommen werden. Der Mechanismus ist prinzipiell auch durch das obige Minimalmodell beschreibbar und könnte in Bremssystemen von Fahrzeugen auftreten und dort zu Geräuschen führen. Allerdings ist diese nichtlineare Schwingung durch das zeitweise Anhaften der beiden Reibpartner geprägt, d.h.  $0 = v_{rel} = v_0 - \dot{x}_1$ . Eine Überschlagsrechnung mit fahrzeugspezifischen Werten, wie sie von Rinsdorf [1996] und Buck [2008] durchgeführt werden, zeigt, dass dieser Effekt nur bei Fahrzeuggeschwindigkeiten unter 1 km/h zu Bremsengeräuschen führen könnte.

Stick-Slip Schwingungen werden von Brecht [2000] als Anregungsmechanismus für das Bremsenknarzen beschrieben.

## 3.2 Positive Reibungsdämpfung

Mit einem sehr ähnlichen Minimalmodell wie beim oben beschriebenen geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz kann ein weiterer Dämpfungsmechanismus dargestellt werden. Eine Erregung des Systems kann hier unabhängig von der Wahl der Systemparameter nicht stattfinden. Es wird auch keine Abhängigkeit des Reibwerts von der Geschwindigkeit oder anderen Einflussgrößen gefordert.

Im Gegensatz zum Minimalmodell beim geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz ist die Masse nun nicht länger in  $x_1$ -Richtung, sondern in  $x_3$ -Richtung verschieblich, wie in Abbildung 3.4 zu sehen ist. Das heißt der Freiheitsgrad der Masse ist orthogonal zur Bewegungsrichtung des rotierenden Bands.

An dieser Stelle ist es unerheblich, ob das Band vorwärts oder rückwärts läuft, d.h.  $v_0 \in \mathbb{R}$ . Es wird angenommen, dass  $|v_0| \gg |\dot{x}_3|$  ist, um die Bewegungsgleichungen linearisieren zu können.

Die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{rel}$  berechnet sich aus der Laufgeschwindigkeit des Bands und der Bewegung der Masse.

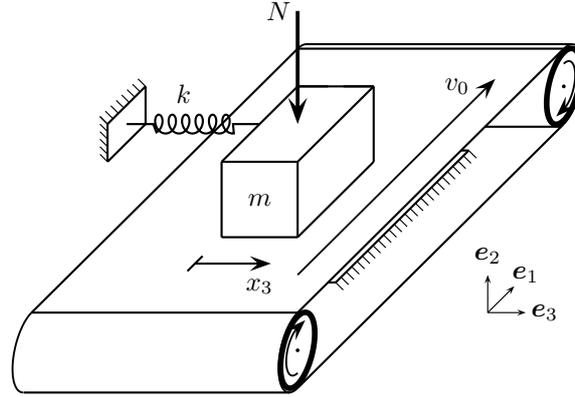
$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_0 - \dot{\mathbf{x}} \quad (3.12)$$

Dabei ist  $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}^t$  als Vektor der dreidimensionalen Bewegung der Masse definiert, der jedoch nur Einträge in  $x_3$ -Richtung enthält. Analog ist  $\mathbf{v}_0 := \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$  als dreidimensionaler Vektor definiert.

$$\mathbf{v}_{rel} = \begin{pmatrix} v_{rel} \ x_1 \\ v_{rel} \ x_2 \\ v_{rel} \ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ -\dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Für den Betrag der Relativgeschwindigkeit gilt:

$$|\mathbf{v}_{rel}| = \sqrt{|\mathbf{v}_0|^2 + |\dot{\mathbf{x}}|^2} = \sqrt{v_0^2 + \dot{x}_3^2} \quad (3.14)$$



**Abbildung 3.4:** Isometrische Ansicht des Minimalmodells zur positiven Reibungsdämpfung

In Abbildung 3.5 sind die an den Körper angreifenden Kräfte aufgetragen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen in den drei Koordinatenrichtungen folgt somit:

$$\begin{aligned} F_{R\ x_1} - F_{Lagerung} &= 0 \\ F_N - N &= 0 \\ F_{R\ x_3} - kx_3 - m\ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mit dem oben definierten Ausdruck für die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{rel}$  ergibt sich die Reibkraft

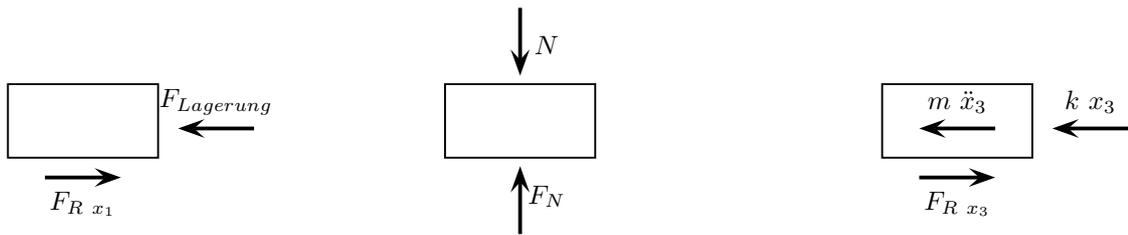
$$\begin{aligned} F_{R\ x_1} &= \frac{\mu F_N v_0}{|\mathbf{v}_{rel}|} = \frac{\mu F_N v_0}{\sqrt{v_0^2 + \dot{x}_3^2}} \\ F_{R\ x_3} &= -\frac{\mu F_N \dot{x}_3}{|\mathbf{v}_{rel}|} = -\frac{\mu F_N \dot{x}_3}{\sqrt{v_0^2 + \dot{x}_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese Ausdrücke für die Richtungskomponenten der Reibkraft  $F_R$  sind nichtlinear in  $\dot{x}_3$ . Sie können jedoch unter der obigen Annahme  $|v_0| \gg |\dot{x}_3|$  im Punkt  $\dot{x}_3 = 0$  linearisiert werden. Damit ergibt sich später eine lineare Bewegungsgleichung.

$$\begin{aligned} F_{R\ x_1\ lin} &= F_{R\ x_1} \Big|_{\dot{x}_3=0} + \frac{\partial F_{R\ x_1}}{\partial \dot{x}_3} \Big|_{\dot{x}_3=0} = \text{sgn}(v_0) \mu F_N \\ F_{R\ x_3\ lin} &= F_{R\ x_3} \Big|_{\dot{x}_3=0} + \frac{\partial F_{R\ x_3}}{\partial \dot{x}_3} \Big|_{\dot{x}_3=0} = -\frac{\mu F_N}{|v_0|} \dot{x}_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nun kann die Bewegungsgleichung in  $x_3$ -Richtung aufgestellt werden.

$$m\ddot{x}_3 + \frac{\mu N}{|v_0|} \dot{x}_3 + kx_3 = 0 \quad (3.18)$$



**Abbildung 3.5:** Gleichgewicht in  $x_1$ -Richtung (links), in  $x_2$ -Richtung (Mitte) und in  $x_3$ -Richtung (rechts)

Unter Verwendung eines Exponentialansatzes für die homogene Lösung mit Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und Abklingkonstante  $\delta$ ,

$$x_3(t) = A \exp(\lambda t) = A \exp(i\omega t - \delta t) \quad (3.19)$$

ergibt sich das folgende Gleichungssystem für den Real- bzw. Imaginärteil.

$$\begin{aligned} -m\delta^2 - m\omega^2 + \frac{\mu N}{|v_0|}\delta + k &= 0 \\ -2m\delta\omega + \frac{\mu N}{|v_0|}\omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Als Lösung folgt im ersten Bereich eine exponentiell abklingende Exponentialfunktion,

$$\omega = 0 \quad \delta = -\frac{\mu N}{2m|v_0|} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu N}{2m|v_0|}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.21)$$

daneben folgt eine harmonisch schwingende Lösung, die ebenfalls abklingend ist.

$$\omega = \pm \sqrt{-\left(\frac{\mu N}{2m|v_0|}\right)^2 + \frac{k}{m}} \quad \delta = \frac{\mu N}{2m|v_0|} \quad (3.22)$$

Die Diskriminanten der beiden Wurzeln sind wieder bis auf das Vorzeichen gleich, sodass immer eine von beiden Lösungen existiert.

Im Allgemeinen ist  $\frac{k}{m} > \left(\frac{\mu N}{2m|v_0|}\right)^2$ , sodass die zweite, harmonisch schwingende und abklingende Lösung existiert. Mit Hilfe der kritischen Dämpfung  $c_{krit} = 2\sqrt{km}$  kann die Systemdämpfung durch das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  ausgedrückt werden:

$$\zeta = \frac{\mu N}{2|v_0|\sqrt{km}}. \quad (3.23)$$

Es erfolgt keine Anfachung der Schwingung, unabhängig von der Bewegungsrichtung  $v_0$  des Bands. Die Stärke der Dämpfung hängt vom Produkt aus konstantem Reibkoeffizient  $\mu$  und

der Anpresskraft  $N$ , d.h. von der Reibkraft ab. Andererseits ist die Dämpfung umgekehrt proportional zum Betrag der Führungsgeschwindigkeit  $|v_0|$ . Für kleine  $|v_0|$  wird jedoch die bei der Linearisierung getroffene Annahme  $|v_0| \gg |\dot{x}_3|$  verletzt, sodass die ausgeblendeten Terme höherer Ordnung das Systemverhalten beeinflussen. Analog zum oben beschriebenen geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz kann bei Fahrzeugbremsen eine Grenzgeschwindigkeit von ca. 1 km/h gefunden werden.

Oberhalb dieser Schwelle treten insbesondere bei niedrigeren Geschwindigkeiten relevante Dämpfungswerte auf, die das Auftreten einer radialen Schwingung der Bremsbeläge gegenüber der Bremsscheibe verhindern.

### 3.3 Reibinduzierte Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix

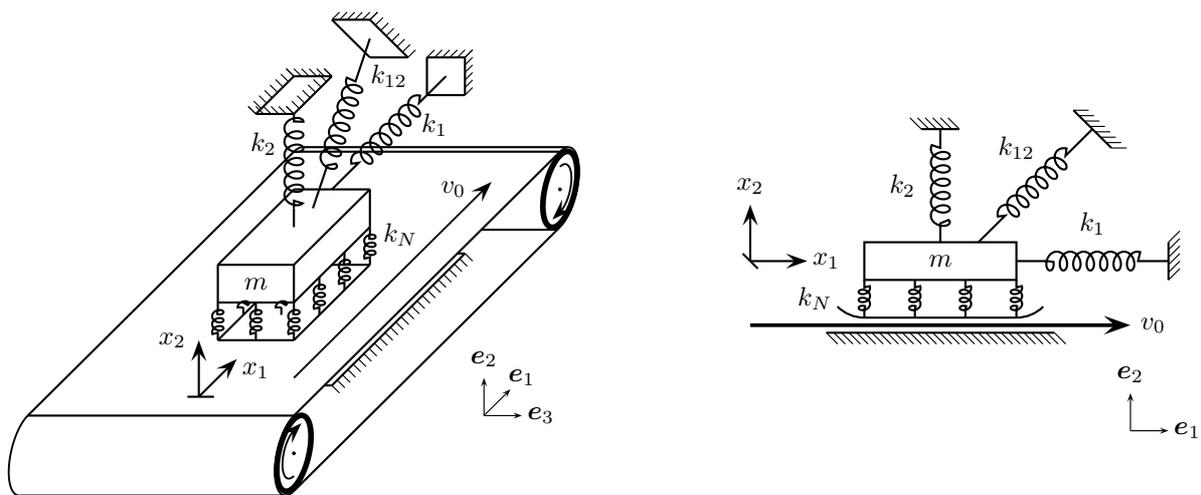
Bei der Modellierung eines gleitenden Kontakts mit Reibung ergeben sich unsymmetrische Einträge in der Steifigkeitsmatrix. Durch Berücksichtigung dieser Unsymmetrien über die zirkulatorische Matrix  $N$  kann ein System mit instabilem Verhalten dargestellt werden. Dies ist in Kapitel 2.3 erläutert. Dieser Erregungsmechanismus benötigt dabei keinen geschwindigkeitsabhängigen Reibwert  $\mu$ , sondern kommt mit einem konstanten Reibwert  $\mu$  aus. Da der Mechanismus auf Selbsterregung basiert, wird auch keine dynamische äußere Kraft benötigt, die Energie in das System einbringt.

In der Arbeit von Hoffmann und Gaul [2008] wird diese Unsymmetrie als Hauptursache für Bremsenquietschen angesehen. Sie wird auch oft als Modenkopplung bezeichnet. Auch während der Arbeit bei der BMW Group konnten viele versuchsseitig auftretende Geräuschprobleme mit Hilfe dieses Mechanismus abgebildet werden, vor allem im Frequenzbereich unter 5 kHz.

Zuerst wird der Erregungsmechanismus an einem Minimalmodell mit nur 2 Freiheitsgraden hergeleitet, um dann anhand eines komplexeren Modells die konkrete Fragestellung des Bremsenquietschens an PKW-Scheibenbremsen genauer zu betrachten.

#### 3.3.1 Minimalmodell mit zwei Freiheitsgraden

Da die Selbsterregung auf der Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix aufbaut, muss ein Minimalmodell mindestens zwei Freiheitsgrade besitzen, um diesen Mechanismus abbilden zu können. Ein solches Modell findet sich beispielsweise bei Buck [2008]. Im Unterschied dazu



**Abbildung 3.6:** Minimalmodell mit 2 Freiheitsgraden: isometrische Ansicht (links), Schnitt der  $x_1, x_2$ -Ebene (rechts)

wird die symmetrische Kopplung der beiden Freiheitsgrade hier nicht über einen Winkel, sondern über eine zusätzliche Diagonalfeder  $k_{12}$  eingebracht, was die spätere Auswertung erleichtert.

### Mechanisches Modell

Das mechanische Modell ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Eine in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung verschiebbliche Masse  $m > 0$  liegt auf einem Band, das sich mit der konstanten Führungsgeschwindigkeit  $v_0 > 0$  in  $x_1$ -Richtung bewegt. Zwischen der Masse und dem Band ist eine Kontaktsteifigkeit  $k_N > 0$  modelliert. Die beiden Federn  $k_1 > 0$  und  $k_2 > 0$  lagern die Masse, die Diagonalfeder  $k_{12} \geq 0$  koppelt die beiden Freiheitsgrade über symmetrische Einträge in der Steifigkeitsmatrix. Die Masse wird als punktförmig betrachtet, rotatorische Einflüsse werden vernachlässigt.

### Herleitung der Bewegungsgleichungen

Es wird angenommen, dass der Reibkontakt während der Schwingung geschlossen bleibt. Außerdem sei die horizontale Schwinggeschwindigkeit des Systems  $\dot{x}_1$  kleiner, als die konstante Geschwindigkeit des Bands  $v_0$ . Für die Relativgeschwindigkeit  $v_{rel}$  gilt in diesem Fall  $v_{rel} := v_0 - \dot{x}_1 > 0$ . In diesem Fall kommt die Nichtlinearität des Kontakts nicht zur Geltung und die Bewegungsgleichungen bleiben linear.



**Abbildung 3.7:** Gleichgewicht in  $x_1$ -Richtung (links) und in  $x_2$ -Richtung (rechts)

Durch das Aufstellen des Gleichgewichts in Richtung der beiden Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$ , wie in Abbildung 3.7 dargestellt, erhält man

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + \frac{1}{2}k_{12} & \frac{1}{2}k_{12} \\ \frac{1}{2}k_{12} & k_2 + \frac{1}{2}k_{12} + k_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Mit einem linearen Penalty-Ansatz für den Kontakt folgt:  $F_R = \mu F_N = \mu k_N x_2$ . Somit ergibt sich das folgende homogene, unsymmetrische Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + \frac{1}{2}k_{12} & \frac{1}{2}k_{12} - \mu k_N \\ \frac{1}{2}k_{12} & k_2 + \frac{1}{2}k_{12} + k_N \end{bmatrix}}_{=:K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Für die Verschiebungen  $x_1$  und  $x_2$  wird eine mehrdimensionale harmonische Schwingung angenommen, die, wie in den beiden vorangehenden Systemen, durch einen komplexen Exponentialansatz dargestellt werden kann.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \exp(\lambda t) = \boldsymbol{\varphi} \exp(i\omega t - \delta t) \quad (3.26)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes und Ableiten ergibt sich das gewöhnliche Eigenwertproblem  $\mathbf{B}\boldsymbol{\varphi} = \kappa\boldsymbol{\varphi} = -\lambda^2\boldsymbol{\varphi}$  mit der Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\widehat{\mathbf{K}}$ . Die in Kapitel 2.3 untersuchte Matrix  $\mathbf{B}$  stimmt mit der hier definierten überein.

Die Wurzeln der Eigenwerte  $\sqrt{-\kappa} = \lambda = i\omega - \delta$  lassen nun auf die Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten schließen. Dabei wird jeweils die Lösung  $\lambda$  mit positivem Imaginärteil gewählt.

Stabilitätsaussagen zum System können nun über die Real- und Imaginärteile der beiden Eigenwerte  $\kappa_{1,2}$  bzw.  $\lambda_{1,2}$  getroffen werden.

**Spezialfall: keine Reibung ( $\mu = 0$ )**

Für  $\mu = 0$  ist die Systemmatrix  $\mathbf{B}$  symmetrisch und positiv definit und besitzt nach Satz 2.8 nur reelle Eigenwerte  $\kappa > 0$  bzw. verschwindende Abklingkonstanten  $\delta = 0$ . Das System ist grenzstabil. Bei einem Bremssystem wird jedoch zur Verzögerung ein möglichst hoher Reibwert  $\mu$  gefordert.

**Spezialfall: symmetrisch ungekoppeltes System ( $k_{12} = 0$ )**

Im Fall einer fehlenden symmetrischen Kopplung der beiden Freiheitsgrade  $x_1$  und  $x_2$ , d.h. die Diagonalfeder  $k_{12} = 0$  besitzt keine Steifigkeit, ergeben sich die Eigenwerte ebenfalls direkt. Es gilt:  $\kappa_1 = \frac{k_1}{m}$  und  $\kappa_2 = \frac{k_2+k_N}{m}$ . Die Wurzeln  $i\omega - \delta$  sind wiederum rein imaginär, das System ist somit grenzstabil. Es findet keine Selbsterregung statt. Außerdem geht der Reibkoeffizient  $\mu$  nicht in die Lösung der Eigenfrequenzen ein, er findet sich nach Satz 2.8 aufgrund der Unsymmetrie aber in den Eigenvektoren  $\varphi$  wieder.

Dieser Spezialfall ist in der praktischen Anwendung jedoch nicht erreichbar, da schon für  $k_{12} \approx 0$  die Stabilität nicht mehr gewährleistet werden kann. Dies wird im folgenden Abschnitt ersichtlich.

**Allgemeiner Fall: dimensionslose Parameter**

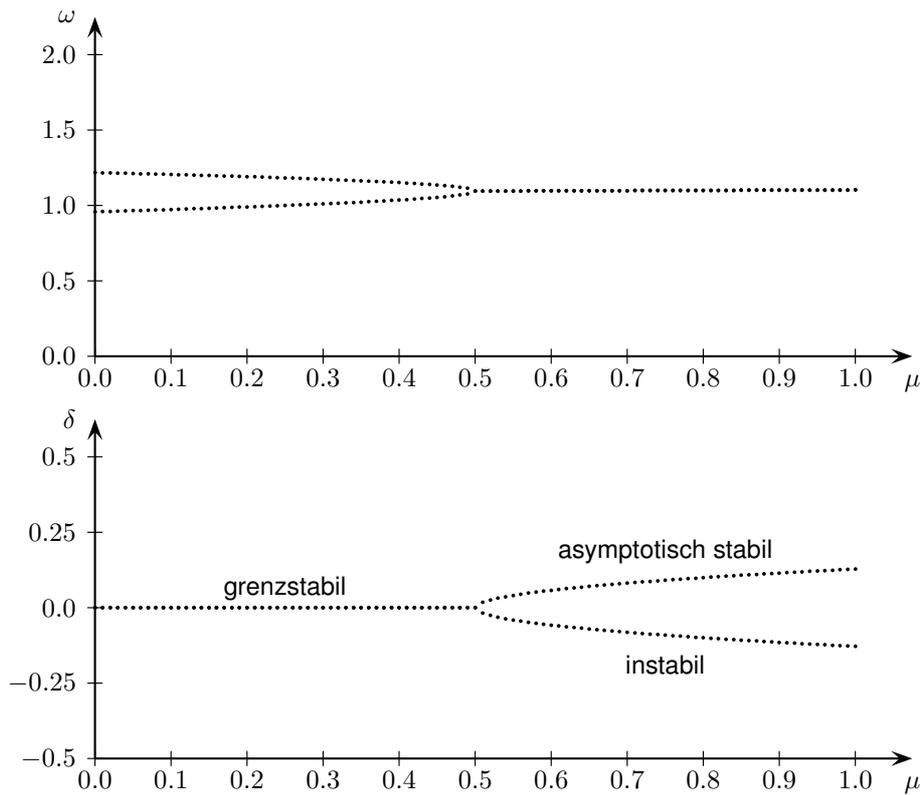
Zur übersichtlicheren Analyse des allgemeinen Falls werden folgende dimensionslose Parameter definiert:

$$\alpha := \frac{k_1 - k_2 - k_N}{k_1 + k_2 + k_N} \quad \beta := \frac{k_{12}}{k_1 + k_2 + k_N} \quad \gamma := \frac{2\mu k_N}{k_1 + k_2 + k_N} \quad (3.27)$$

Alle dimensionsbehafteten Größen gehen im Faktor  $c_0 := \frac{k_1+k_2+k_N}{2m}$  auf. Es folgt

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} \widehat{\mathbf{K}} = c_0 \begin{bmatrix} 1 + \alpha + \beta & \beta - \gamma \\ \beta & 1 - \alpha + \beta \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Der Faktor  $c_0 > 0$  hat dabei keinen Einfluss auf die Stabilität des Systems. Das Verhältnis der Steifigkeiten in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung wird über den Parameter  $\alpha \in [-1,1]$  geregelt, die symmetrische Kopplung der beiden Freiheitsgrade über  $\beta > 0$ . Der Faktor  $\gamma \in \mathbb{R}$  steuert die Unsymmetrie des Systems. Da das Vorzeichen der Reibkraft  $F_R$  von der Drehrichtung



**Abbildung 3.8:** Eigenfrequenzen  $\omega$  (oben) und Abklingkonstanten  $\delta$  (unten) ermittelt am Minimalmodell mit  $\alpha = -0.2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c_0 = 1.25$  bei Änderung des Reibwerts  $\mu \in [0,1]$

des Bands abhängt, kann der unsymmetrische Anteil  $\gamma$  positive als auch negative Werte annehmen. Dies ist aus Gleichung (3.25) und Abbildung 3.7 ersichtlich.

Im Systemmodell ist zu erkennen, dass die Feder  $k_2$  und die Kontaktsteifigkeit  $k_N$  in Reihe geschaltet sind. Analog dazu geht nur die Summe  $k_2 + k_N$  in die dimensionslosen Parameter ein, mit der Ausnahme von  $\gamma$ . Eine Verringerung von  $k_N$  bei konstanter Summe  $k_2 + k_N$  hat somit die gleiche Auswirkung, wie eine Verringerung von  $\mu$ . Konstruktive Ansätze daraus werden in Kapitel 8.3 betrachtet.

Das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{B}$  besitzt nun die Form

$$\det(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}) = \kappa^2 - 2\kappa c_0(1 + \beta) + c_0^2(1 - \alpha^2 + 2\beta + \beta\gamma), \quad (3.29)$$

damit ergibt sich für die Eigenwerte  $\kappa_{1,2} = c_0 \left( 1 + \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta(\beta - \gamma)} \right)$ . Die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und die Abklingkonstante  $\delta$  berechnen sich wiederum durch  $i\omega - \delta = \sqrt{-\kappa_{1,2}}$ . Entscheidend ist an dieser Stelle das Vorzeichen von  $\alpha^2 + \beta(\beta - \gamma)$ , durch welches das Vorzeichen von  $\delta$  und somit die Systemstabilität bestimmt wird.

Abbildung 3.8 zeigt einen typischen Verlauf der Eigenfrequenzen  $\omega$  und Abklingkonstanten  $\delta$  bei einem M-K-N-System, wie es in diesem Abschnitt beschrieben wird. Für  $\mu \ll 1$  ist das System grenzstabil, die beiden Eigenfrequenzen sind getrennt. Mit wachsendem Reibwert  $\mu$  nähern sich die Eigenfrequenzen  $\omega_{1,2}$  an, um ab einem bestimmten Punkt zu koppeln. Nun bleiben die beiden Eigenfrequenzen identisch, die Abklingkonstanten  $\delta_{1,2} \neq 0$  ändern sich jedoch. Dabei bildet sich ein asymptotisch stabiler Ast mit  $\delta_j > 0$  und ein instabiler Ast mit  $\delta_j < 0$  aus. Die Summe  $\delta_1 + \delta_2 = 0$  bleibt konstant. Dies wurde in Folgerung 2.10 in Kapitel 2.3 hergeleitet.

Eine weitergehende Behandlung dieses für das Bremsenquietschen zentralen Mechanismus findet in Kapitel 8.2 statt. Im Folgenden werden die am Minimalmodell hergeleiteten Zusammenhänge an einem komplexeren Modell verifiziert.

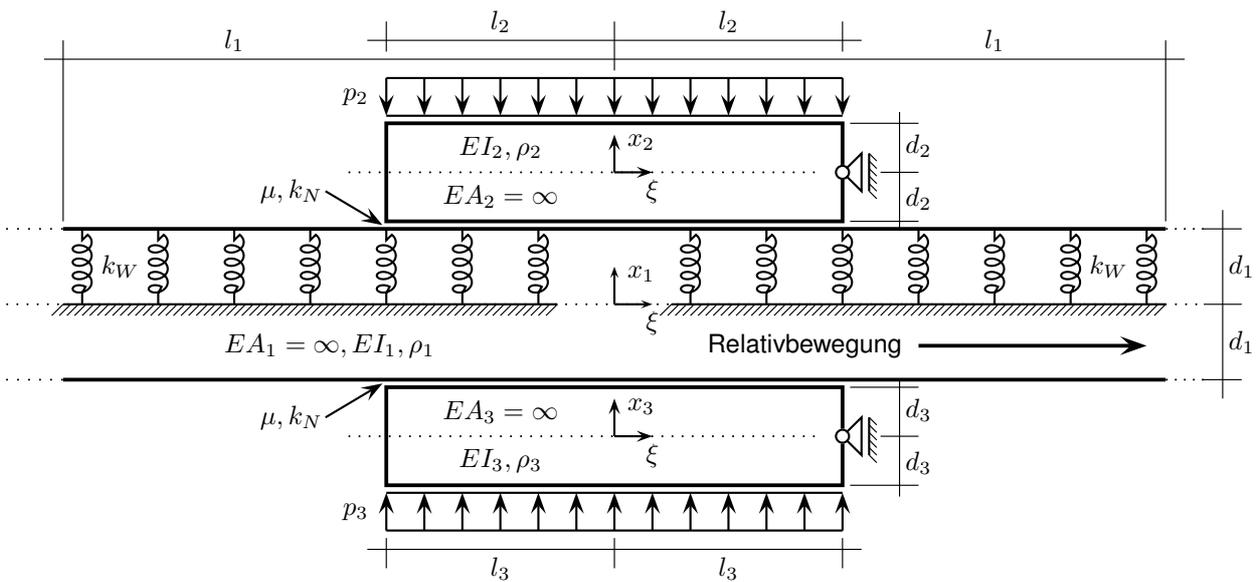
### 3.3.2 Modellierung als Euler-Bernoulli-Balken

Zwischen dem Minimalsystem mit nur zwei Freiheitsgraden und einem komplexen Finite Elemente Modell existieren weitere Möglichkeiten ein überschaubares Modell einer Scheibenbremse zu erstellen, das Rückschlüsse auf einzelne Größen zulässt.

#### Modellierung

Eine Möglichkeit für ein vergleichsweise einfaches Ersatzsystem, das auch die Deformierbarkeit der Brems Scheibe berücksichtigt, ist die Modellierung des Reibrings als Euler-Bernoulli-Balken. Einerseits sind so zahlreiche Schwingformen der Brems Scheibe näherungsweise darstellbar, andererseits bleibt die Komplexität des Modells aufgrund der Eindimensionalität der Geometrie verhältnismäßig gering. Ziel dieses Modells ist weniger, ein bestimmtes Brems system möglichst exakt abzubilden, sondern anhand des Ersatzsystems die maßgeblichen Einflussgrößen zu identifizieren und den Wirkmechanismus der Modenkopplung herauszuarbeiten. Durch die Variation einiger dimensionsloser Parameter, wie z.B. dem Verhältnis der Biegesteifigkeiten, können verschiedene Wirkmechanismen beleuchtet werden.

Die Brems Scheibe ist als Bernoulli-Balken der Länge  $2l_1$  und der Höhe  $2d_1$  mit periodischen Randbedingungen modelliert. Von den in Anhang C klassifizierten Schwingformen von Brems Scheiben sind alle Out-of-plane Schwingformen der Form OP- $x$ ND darstellbar. Auch für die bei rotationssymmetrischen Bauteilen charakteristischen Doppelmoden existieren jeweils zwei Schwingformen, siehe auch Buck [2008]. In-Plane Schwingungen und OP- $x$ NC- $y$ ND Schwingformen können nicht abgebildet werden. Im Frequenzbereich unter 3 kHz



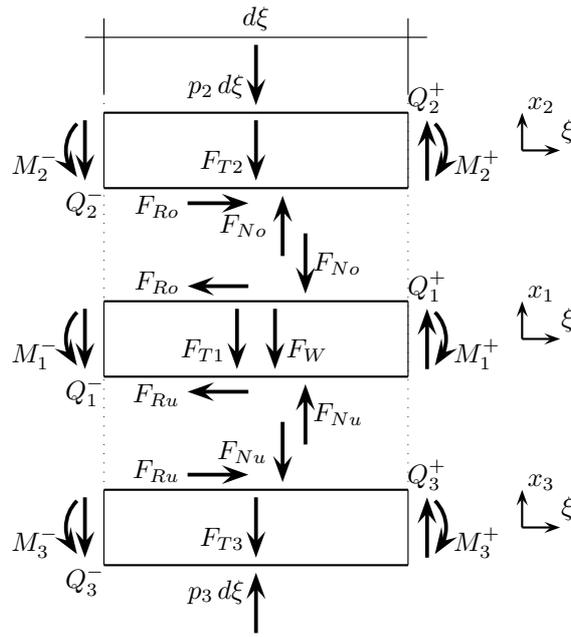
**Abbildung 3.9:** Kontinuierliches Modell einer Bremsscheibe mit zwei Bremsbelägen

treten fast ausschließlich OP- $x$ ND Schwingformen auf, siehe auch Tabelle 3.2. Bei Lasermessungen der Betriebsschwingformen bei der BMW Group wurden auch bei höherfrequenten Geräuschen oft OP- $x$ ND Schwingformen beobachtet, sodass die hier verwendete Modellierung einen großen Teil der geräuschrelevanten Schwingungen abbilden kann.

Um die Lagerung des Reibrings der Bremsscheibe über den Bremsscheibentopf, das Radlager und den Radträger abzubilden, ist eine Winkler-Bettung mit der Steifigkeit  $k_W$  modelliert.

Bei Bremsgeräusch-Versuchen wurde ein hoher Einfluss der Steifigkeit des Belagmaterials beobachtet. Deshalb werden auch die beiden Bremsbeläge als Bernoulli-Balken mit veränderlicher Biegesteifigkeit modelliert. Die Länge ist  $2l_2 = 2l_3$ , die Höhe  $2d_2 = 2d_3$ . Die Steifigkeit in Dickenrichtung des Belags geht in die Kontaktsteifigkeit  $k_N$  mit ein. Die Balken der Bremsbeläge sind kürzer als jener der Bremsscheibe, wobei die exakte Länge variiert werden kann. Durch Neumann-Randbedingungen können die, in Lasermessungen beobachteten, Bewegungen an den Belagenden dargestellt werden. Es wird also angenommen, dass am Belagende keine Kraft und kein Moment angreifen und somit die Verschiebung  $x_2$  bzw.  $x_3$  und die Verdrehung  $x_2'$  bzw.  $x_3'$  Werte ungleich 0 annehmen können.

Der Kontakt zwischen der Bremsscheibe und den Bremsbelägen wird mit einer Kontaktsteifigkeit  $k_N$  modelliert, in die, wie oben erwähnt, die Belagsteifigkeit in Dickenrichtung mit eingeht. Das Coulomb'sche Reibgesetz besitzt den Reibkoeffizienten  $\mu$ . Da die tangentialle Reibkraft nicht mittig am Balken angreift, ist der Abstand zwischen Kontaktfläche und



**Abbildung 3.10:** Gleichgewicht an den infinitesimalen Balkenelementen der Länge  $d\xi$

neutraler Faser im Balken wichtig. Bei der Brems Scheibe ist dies  $d_1$ , bei den Bremsbelägen  $d_2 = d_3$ .

In der Dissertation von Flint [2002] wird ein sehr ähnliches Balkenmodell für die Vorhersage von Bremsgeräuschen beschrieben. Durch die Modellierung der Scheibe als Balken sowie des Bremsstättels als Feder-Masse-System, konnten dort zahlreiche Geräuschfrequenzen prognostiziert werden. Im Gegensatz zu Flint [2002] steht hier jedoch die Identifikation geräuschrelevanter Parameter im Vordergrund.

Außerdem ist bei Hetzler [2009] ein Balkenmodell beschrieben. Hier sind die Bremsbeläge jedoch nicht als Balken, sondern als Federn gegen Grund abgebildet. Die Biegesteifigkeit der Bremsbeläge ist nicht Teil des Modells.

### Gleichgewicht

In Abbildung 3.10 sind die angreifenden Kräfte und Momente an den drei Balkenelementen mit der infinitesimalen Länge  $d\xi$  aufgetragen. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
 M_i^+ &= -EI_i x_i'' \Big|_{\xi+\frac{1}{2}d\xi} & M_i^- &= -EI_i x_i'' \Big|_{\xi-\frac{1}{2}d\xi} & Q_i^+ &= -EI_i x_i''' \Big|_{\xi+\frac{1}{2}d\xi} & Q_i^- &= -EI_i x_i''' \Big|_{\xi-\frac{1}{2}d\xi} \\
 F_{No} &= k_N(x_1 - x_2) & F_{Ro} &= \mu F_{No} & F_{Nu} &= k_N(x_3 - x_1) & F_{Ru} &= \mu F_{Nu} \\
 F_{Ti} &= A_i \rho_i \ddot{x}_i & F_W &= k_W x_1 & & & & (i=1,2,3) \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

### Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen folgt im statischen Fall ohne Berücksichtigung der Trägheitskräfte:

$$\begin{aligned}
\delta W_{stat} &= \int_{-l_1}^{l_1} \underbrace{EI_1 x_1'' \delta x_1''}_{\text{Biegung Scheibe}} + \underbrace{k_W x_1 \delta x_1}_{\text{Winkler-Bettung Scheibe}} d\xi \\
&+ \int_{-l_2}^{l_2} \underbrace{EI_2 x_2'' \delta x_2''}_{\text{Biegung Belag oben}} + \underbrace{k_N (x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_2)}_{\text{Kontakt oben, normal}} + \underbrace{k_N \mu (x_1 - x_2) \delta(-d_1 x_1' - d_2 x_2')}_{\text{Kontakt oben, tangential}} d\xi \\
&+ \int_{-l_3}^{l_3} \underbrace{EI_3 x_3'' \delta x_3''}_{\text{Biegung Belag unten}} + \underbrace{k_N (x_3 - x_1) \delta(x_3 - x_1)}_{\text{Kontakt unten, normal}} + \underbrace{k_N \mu (x_3 - x_1) \delta(d_1 x_1' + d_3 x_3')}_{\text{Kontakt unten, tangential}} d\xi \\
&+ \int_{-l_2}^{l_2} \underbrace{p_2 \delta x_2}_{\text{Belastung oben}} d\xi - \int_{-l_3}^{l_3} \underbrace{p_3 \delta x_3}_{\text{Belastung unten}} d\xi \\
&= \int_{-l_1}^{l_1} (EI_1 x_1'''' + k_W x_1) \delta x_1 d\xi + \underbrace{\left[ EI_1 x_1'' \delta x_1' - EI_1 x_1''' \delta x_1 \right]_{-l_1}^{l_1}}_{\text{periodische Randbedingungen}} \\
&+ \int_{-l_2}^{l_2} (k_N(x_1 - x_2) + k_N \mu d_1(x_1' - x_2')) \delta x_1 d\xi + \underbrace{\left[ -k_N \mu d_1(x_1 - x_2) \delta x_1 \right]_{-l_2}^{l_2}}_{\text{Neumann-Randbedingungen}} \\
&+ \int_{-l_3}^{l_3} (k_N(x_1 - x_3) + k_N \mu d_1(x_1' - x_3')) \delta x_1 d\xi + \underbrace{\left[ -k_N \mu d_1(x_1 - x_3) \delta x_1 \right]_{-l_3}^{l_3}}_{\text{Neumann-Randbedingungen}} \\
&+ \int_{-l_2}^{l_2} (EI_2 x_2'''' - k_N(x_1 - x_2) + k_N \mu d_2(x_1' - x_2') + p_2) \delta x_2 d\xi \\
&+ \underbrace{\left[ EI_2 x_2'' \delta x_2' - EI_2 x_2''' \delta x_2 - k_N \mu d_2(x_1 - x_2) \delta x_2 \right]_{-l_2}^{l_2}}_{\text{Neumann-Randbedingungen}} \\
&+ \int_{-l_3}^{l_3} (EI_3 x_3'''' - k_N(x_1 - x_3) + k_N \mu d_3(x_1' - x_3') - p_3) \delta x_3 d\xi \\
&+ \underbrace{\left[ EI_3 x_3'' \delta x_3' - EI_3 x_3''' \delta x_3 - k_N \mu d_3(x_1 - x_3) \delta x_3 \right]_{-l_3}^{l_3}}_{\text{Neumann-Randbedingungen}} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Bei der dynamischen Modellierung müssen außerdem die Anteile der Trägheitskräfte berücksichtigt werden.

$$\delta W_{dyn} = \delta W_{stat} - \int_{-l_1}^{l_1} \underbrace{A_1 \rho_1 \ddot{x}_1 \delta x_1}_{\text{Scheibe}} d\xi - \int_{-l_2}^{l_2} \underbrace{A_2 \rho_2 \ddot{x}_2 \delta x_2}_{\text{Belag oben}} d\xi - \int_{-l_3}^{l_3} \underbrace{A_3 \rho_3 \ddot{x}_3 \delta x_3}_{\text{Belag unten}} d\xi \tag{3.32}$$

Die im Fahrzeugbereich eingesetzten Bremsanlagen besitzen je zwei Bremsbeläge mit nahezu identischen Geometrien sowie gleichen Materialien auf der Kolben- wie der Faustseite. Deshalb können hier alle Parameter des unteren Belags gleich jenen des oberen Belags gewählt werden, d.h.

$$l_2 = l_3 \quad EI_2 = EI_3 \quad d_2 = d_3 \quad A_2 = A_3 \quad \rho_2 = \rho_3. \quad (3.33)$$

Es wird  $m_1 := A_1 \rho_1$  und  $m_2 := A_2 \rho_2$  definiert.

### Differentialgleichungssystem

Das folgende Differentialgleichungssystem beschreibt das dynamische Balkenmodell:

**Bereich 1:**  $-l_1 < \xi < -l_2$  und  $l_2 < \xi < l_1$

Hier ist nur die Balkengleichung der Bremsscheibe zu berücksichtigen.

$$EI_1 x_1'''' + k_W x_1 - m_1 \ddot{x}_1 = 0 \quad (3.34)$$

**Bereich 2:**  $-l_2 < \xi < l_2$

In diesem Intervall müssen alle drei Differentialgleichungen für die Bremsscheibe und die beiden Bremsbeläge erfüllt sein.

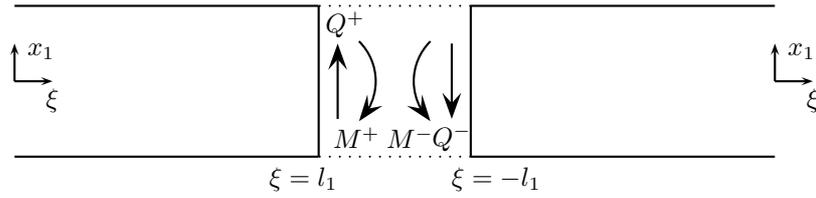
$$\begin{aligned} EI_1 x_1'''' + k_N \mu d_1(2x_1' - x_2' - x_3') + k_N(2x_1 - x_2 - x_3) + k_W x_1 - m_1 \ddot{x}_1 &= 0 \\ EI_2 x_2'''' + k_N \mu d_2(x_1' - x_2') &- k_N(x_1 - x_2) &- m_2 \ddot{x}_2 &= -p_2 \\ EI_2 x_3'''' + k_N \mu d_2(x_1' - x_3') &- k_N(x_1 - x_3) &- m_2 \ddot{x}_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Um die homogene Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, wird im Folgenden die Belastung  $p_2 = p_3 = 0$  gesetzt.

### Randbedingungen und Übergangsbedingungen

In Abbildung 3.11 sind die periodischen Randbedingungen der Bremsscheibe an der Stelle  $\xi = \pm l_1$  dargestellt. Sie lauten:

$$\begin{aligned} x_1 \Big|_{\xi=-l_1^+} &= x_1 \Big|_{\xi=l_1^-} & -EI_1 x_1'' \Big|_{\xi=-l_1^+} &= -EI_1 x_1'' \Big|_{\xi=l_1^-} \\ x_1' \Big|_{\xi=-l_1^+} &= x_1' \Big|_{\xi=l_1^-} & -EI_1 x_1''' \Big|_{\xi=-l_1^+} &= -EI_1 x_1''' \Big|_{\xi=l_1^-} \end{aligned} \quad (3.36)$$



$$x_1|_{\xi=-l_1} = x_1|_{\xi=l_1} \quad x_1'|_{\xi=-l_1} = x_1'|_{\xi=l_1} \quad M|_{\xi=-l_1} = M|_{\xi=l_1} \quad Q|_{\xi=-l_1} = Q|_{\xi=l_1}$$

**Abbildung 3.11:** Periodische Randbedingungen am Balken der Brems Scheibe bei  $\xi = \pm l_1$

Dabei ist  $x_1|_{\xi=-l_1^+}$  der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle  $-l_1$ . Weil  $x_1$  hinreichend glatt ist, entspricht der rechtsseitige Grenzwert dem Funktionswert  $x_1(-l_1)$ . Dies gilt auch für alle betrachteten Ableitungen.

Die Übergangsbedingungen der Scheibe bei  $\pm l_2$  sind aufgrund der angreifenden Kräfte und Momente komplexer. Hier muss wegen der fehlenden Stetigkeit der dritten Ableitung  $x_1'''$  bei  $\pm l_2$  zwischen Funktionswerten und rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerten unterschieden werden.

$$\begin{aligned} x_1|_{\xi=-l_2^-} &= x_1|_{\xi=-l_2^+} & x_1|_{\xi=l_2^-} &= x_1|_{\xi=l_2^+} \\ x_1'|_{\xi=-l_2^-} &= x_1'|_{\xi=-l_2^+} & x_1'|_{\xi=l_2^-} &= x_1'|_{\xi=l_2^+} \\ -EI_1 x_1''|_{\xi=-l_2^-} &= -EI_1 x_1''|_{\xi=-l_2^+} & -EI_1 x_1''|_{\xi=l_2^-} &= -EI_1 x_1''|_{\xi=l_2^+} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 x_1'''|_{\xi=-l_2^-} &= -EI_1 x_1''' - k_N \mu d_1 (2x_1 - x_2 - x_3)|_{\xi=-l_2^+} \\ -EI_1 x_1''' - k_N \mu d_1 (2x_1 - x_2 - x_3)|_{\xi=l_2^-} &= -EI_1 x_1'''|_{\xi=l_2^+} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die Neumann-Randbedingungen der Bremsbeläge sind gegenüber dem herkömmlichen Euler-Bernoulli-Balken verändert. Dadurch kann gewährleistet werden, dass an den Balkenenden der beiden Bremsbeläge keine freien Kräfte und Momente auftreten.

$$\begin{aligned} -EI_2 x_2''|_{\xi=-l_2} &= 0 & -EI_2 x_2''|_{\xi=l_2} &= 0 \\ -EI_2 x_2''' - k_N \mu d_2 (x_1 - x_2)|_{\xi=-l_2} &= 0 & -EI_2 x_2''' - k_N \mu d_2 (x_1 - x_2)|_{\xi=l_2} &= 0 \\ -EI_2 x_3''|_{\xi=-l_2} &= 0 & -EI_2 x_3''|_{\xi=l_2} &= 0 \\ -EI_2 x_3''' - k_N \mu d_2 (x_1 - x_3)|_{\xi=-l_2} &= 0 & -EI_2 x_3''' - k_N \mu d_2 (x_1 - x_3)|_{\xi=l_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

## Diskretisierung

Um das Differentialgleichungssystem zu lösen, wird die Methode der Finiten Differenzen verwendet. Siehe auch Braess [2003] für eine nähere Beschreibung von Differenzenverfahren.

Dieser Ansatz ist einfach zu implementieren, benötigt aufgrund der hier gewählten linearen Konvergenzordnung jedoch im Vergleich zu Finiten Elementen eine vergleichsweise hohe Diskretisierung, um sinnvolle Ergebnisse darzustellen. Das Intervall  $[-l_1, l_1]$  wird deshalb mit 1000 Punkten diskretisiert.

## Dimensionierung

Die vorhandenen Parameter werden entsprechend den Größen in PKW-Bremsanlagen gewählt, um eine Vergleichbarkeit sicherzustellen.

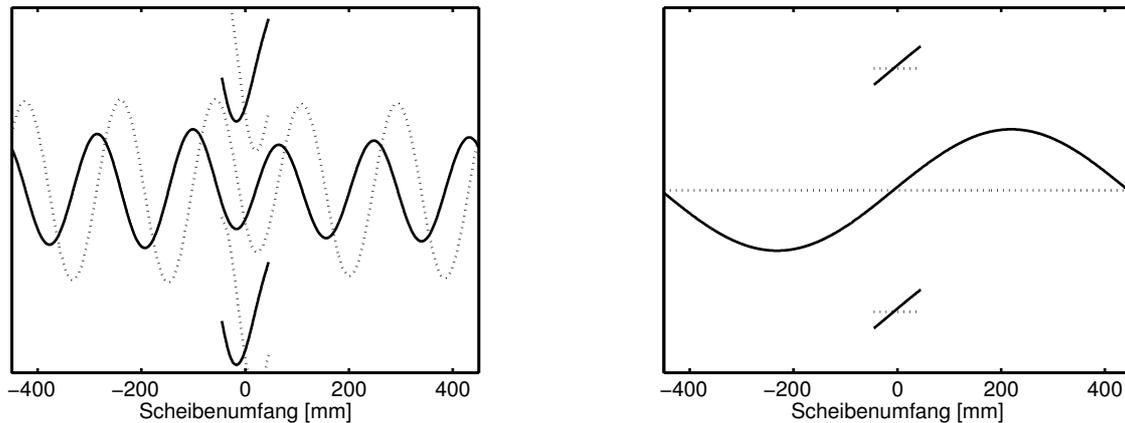
$$\begin{aligned} l_1 &= 900 \text{ mm} & m_1 &= 10 \text{ g/mm} & EI_1 &= 10^{10} \text{ Nmm}^2 \\ k_W &= 500 \text{ N/mm} & d_1 + d_2 &= 20 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Die Länge entspricht dem effektiven Reibringumfang einer 16 bis 17 Zoll Bremsscheibe, die Masse entspricht dem Reibringgewicht. Die Steifigkeit der Winklerbettung  $k_W$  und die Biegesteifigkeit  $EI_1$  wurden so gewählt, dass die ersten Eigenfrequenzen der Bremsscheibe korrekt abgebildet werden. Der Abstand der neutralen Faser zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag ergibt sich aus der halben Bremsscheibendicke  $d_1$  und der Höhe des Reibmaterials  $d_2$ . Alle weiteren Parameter können durch dimensionslose Konstanten festgelegt und später variiert werden.

Die Referenzwerte sind:

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} &= 0.1 & \frac{m_2}{m_1} &= 0.5 & \frac{EI_2}{EI_1} &= 0.01 \\ \frac{k_N}{k_W} &= 100 & \frac{d_2}{d_1} &= 0.5 & \mu &= 0.5 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Bei Variation einzelner Parameter, wie beispielsweise der Bremsscheiben- oder Belagdicke, bleibt die entsprechende Biegesteifigkeit konstant, auch wenn diese physikalisch voneinander abhängig sind. Das Ziel ist hier die Identifikation der relevanten Einflussgrößen, die durch Variation einzelner Größen identifiziert werden können.



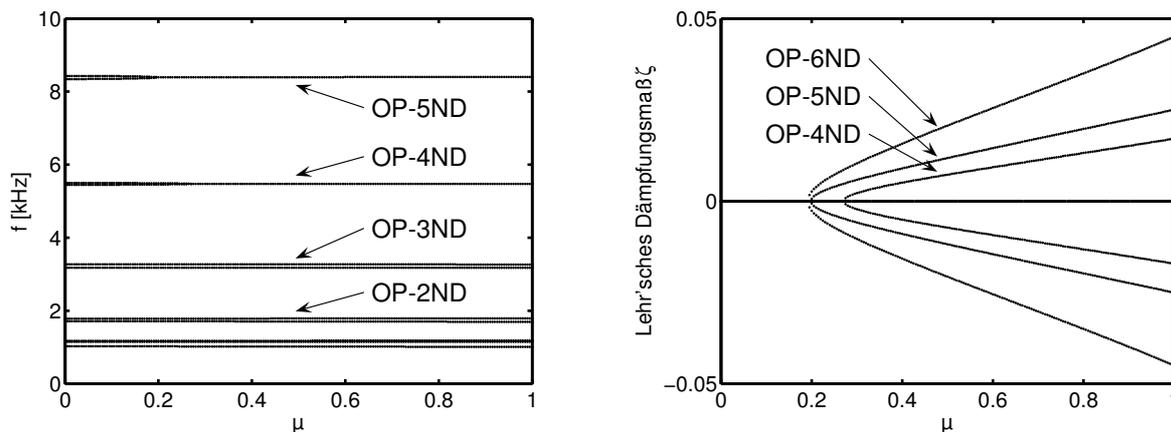
**Abbildung 3.12:** Instabile OP-5ND Mode (links) und grenzstabile OP-1ND Mode (rechts), Realteil des Eigenvektors (durchgehend) und Imaginärteil (gepunktet), Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$ , siehe Anhang C zur Klassifizierung der Schwingformen.

## Schwingformen

In Abbildung 3.12 sind zwei verschiedene Schwingformen des Bremsenmodells zu erkennen. Oben und unten sind die beiden Bremsbeläge und dazwischen die Brems Scheibe über die Umfangskoordinate  $\xi$  dargestellt. Der Realteil der Eigenschwingform ist durchgängig gezeichnet und der Imaginärteil gepunktet.

Die OP5-ND Schwingform bei einer Eigenfrequenz von 8395 Hz links ist instabil und wird durch den Energieeintrag im Reibkontakt weiter angefacht. Das System schwingt nicht in Phase, da sowohl Realteil, als auch Imaginärteil der Eigenschwingform ungleich 0 sind.

Die grenzstabile Mode OP-1ND rechts schwingt mit einer Eigenfrequenz von 1178 Hz. Das System schwingt in Phase. Dies ist am verschwindenden Imaginärteil zu erkennen. Die Schwingform entspricht im dreidimensionalen Modell einem Verkippen des Reibrings gegenüber dem Brems Scheibentopf. Im Gegensatz zur realen Brems Scheibe oder zu einem dreidimensionalen Modell treten bei der eindimensionalen Balkenmodellierung bei dieser Schwingform auch hohe Biegedehnungen auf. Dies verdeutlicht eine der Grenzen dieses Modells zur Bewertung der Stabilität eines bestimmten Brems systems. Eine grundsätzliche Untersuchung hinsichtlich relevanter Einflussgrößen ist auch unter diesen Einschränkungen möglich. Die Ergebnisse müssen jedoch nochmals dahingehend hinterfragt werden, ob die Annahmen dieses Modells weiterhin gültig sind.



**Abbildung 3.13:** Eigenfrequenzen (links) und Realteile (rechts) bei Variation des Reibkoeffizienten  $\mu$   
weitere Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$

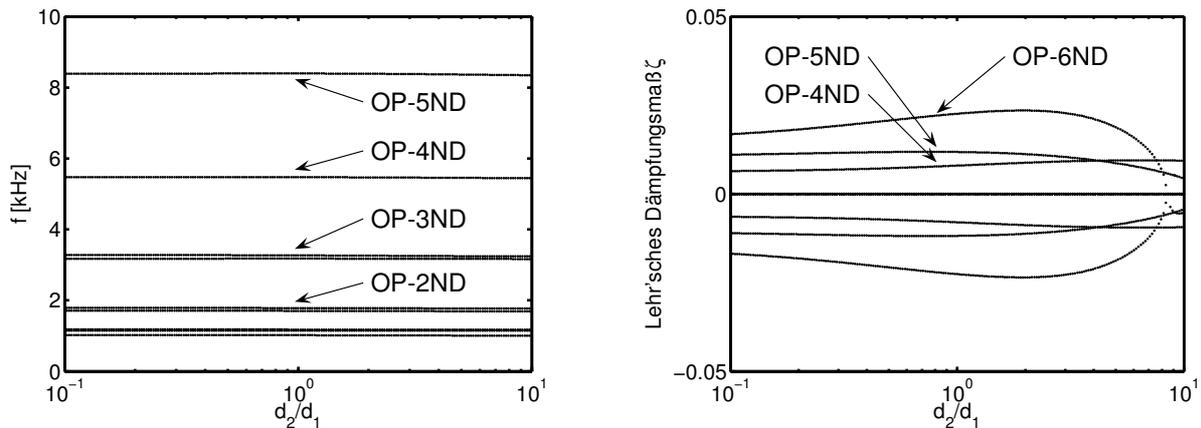
## Auswertung

Um den Einfluss der verschiedenen Parameter zu untersuchen, bieten sich neben dem Reibkoeffizienten  $\mu$  die dimensionslosen Quotienten der Längen und Steifigkeiten zwischen Bremscheibe und Bremsbelag an. Bei allen Berechnungen ist erkennbar, dass instabile Eigenmoden gepaart mit asymptotisch stabilen Eigenmoden bei gleicher Eigenfrequenz auftreten. Dies wird aufgrund des hier modellierten M-K-N-Systems in Kapitel 2.3 hergeleitet, siehe Folgerung 2.10.

### Einfluss des Reibkoeffizienten $\mu$

Der Einfluss des Reibkoeffizienten  $\mu$  wird im Intervall  $[0,1]$  untersucht. Die weiteren dimensionslosen Parameter sind:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ .

In Abbildung 3.13 wird die Abhängigkeit der ersten Eigenfrequenzen und Dämpfungen vom Reibkoeffizienten  $\mu$  dargestellt. Auf der linken Seite ist zu sehen, dass Änderungen der Eigenfrequenzen nur in sehr geringem Maße stattfinden. Auf der rechten Seite in Abbildung 3.13 sind die zu diesen Eigenfrequenzen gehörenden Lehr'schen Dämpfungsmaße  $\zeta$  aufgetragen. Bei  $\mu = 0$  existieren keine tangentialen Kontaktkräfte, somit ist die Steifigkeitsmatrix symmetrisch und alle Eigenwerte müssen rein imaginär sein. Jedoch können die Eigenwerte aufgrund der Doppelmoden der Bremscheibe, siehe Kapitel 1.4 oder Anhang C, schon bei sehr geringen unsymmetrischen Anteilen koppeln. Hier nimmt bei wachsendem Reibwert  $\mu$  sowohl die Höhe der negativen Dämpfung  $\zeta$ , als auch die Zahl der Instabilitäten zu.



**Abbildung 3.14:** Eigenfrequenzen (links) und Dämpfungen (rechts) bei Variation des Dickenverhältnisses  $\frac{d_2}{d_1}$   
weitere Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\mu = 0.5$

### Einfluss der Gesamtdicke $d_1 + d_2$

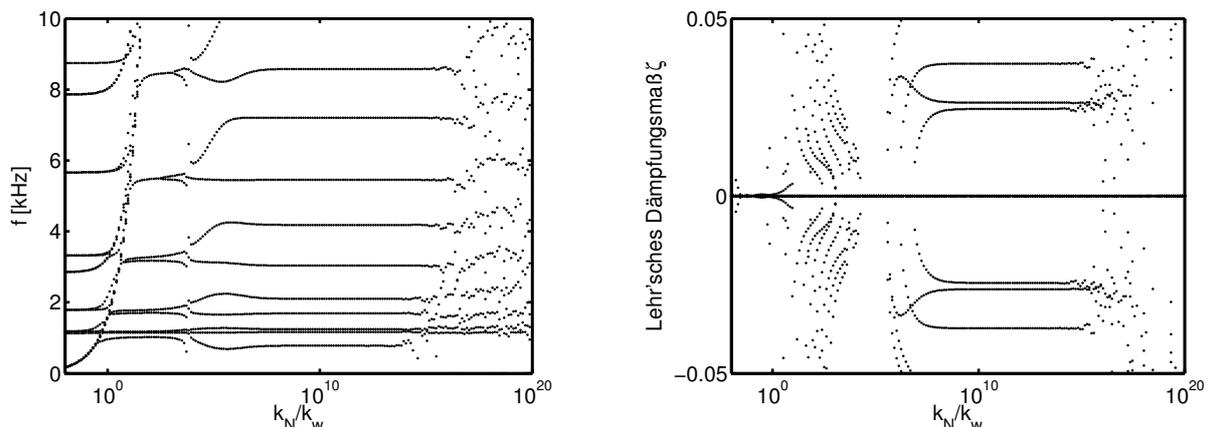
Eine Erhöhung der Gesamtdicke von Bremsscheibe und Belag  $d_1 + d_2$  bei konstantem Verhältnis  $\frac{d_2}{d_1}$  hat exakt die gleichen Auswirkungen wie eine Erhöhung des Reibkoeffizienten  $\mu$ , da nur die Produkte  $\mu d_1$  bzw.  $\mu d_2$  in die Steifigkeitsmatrix eingehen, siehe Gleichung (3.35). Die Biegesteifigkeiten  $EI_1$  und  $EI_2$  werden hier trotz Änderung der Balkenhöhe  $d_1 + d_2$  als konstant angenommen.

### Einfluss des Dickenverhältnisses $\frac{d_2}{d_1}$

Der Einfluss des Dickenverhältnisses  $\frac{d_2}{d_1}$  wird im Intervall  $[0.1, 10]$  untersucht und ist in Abbildung 3.14 dargestellt. Die weiteren dimensionslosen Parameter sind:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\mu = 0.5$ .

An dieser Stelle wird die Gesamtdicke  $d_1 + d_2$  aus Bremsscheibe und Bremsbelag konstant gehalten, jedoch das Verhältnis der beiden Dicken  $\frac{d_2}{d_1}$  zueinander verändert. Die Biegesteifigkeiten  $EI_1$  und  $EI_2$  bleiben hier trotz Änderung der Balkenhöhen  $d_1$  und  $d_2$  gleich.

Die Eigenfrequenzen werden, wie bei der Variation des Reibkoeffizienten, kaum beeinflusst. Die Dämpfungswerte ändern sich im Bereich  $0.1 < \frac{d_2}{d_1} < 1$  ebenfalls kaum. Bei  $d_2 > d_1$  ist eine Beeinflussung des Dämpfungsverhaltens über das Dickenverhältnis  $\frac{d_2}{d_1}$  vorhanden. Für sehr große Werte von  $\frac{d_2}{d_1}$  verringert sich bei mehreren Schwingformen die Höhe der negativen Dämpfung.



**Abbildung 3.15:** Eigenfrequenzen (links) und Dämpfungen (rechts) bei Variation der Kontaktsteifigkeit  $\frac{k_N}{k_W}$   
weitere Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

### Einfluss der Kontaktsteifigkeit $\frac{k_N}{k_W}$

Abbildung 3.15 zeigt den Einfluss des Verhältnisses zwischen Kontaktsteifigkeit  $k_N$  und Steifigkeit der Winkler-Bettung  $k_W$  im Intervall  $[10^{-2}, 10^{20}]$ . Die weiteren dimensionslosen Parameter sind:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$ .

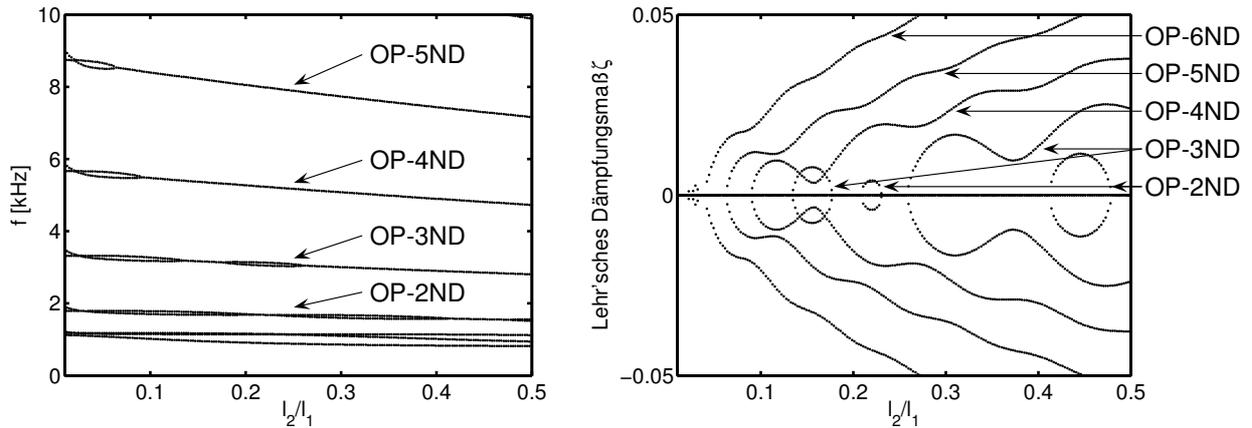
Es sind sowohl in der Frequenzdarstellung, als auch im Plot der Realteile mehrere klar voneinander abgegrenzte Bereiche erkennbar.

Im ersten Bereich mit  $\frac{k_N}{k_W} < 10^{-1}$  findet aufgrund der geringen Kontaktkräfte eine Starrkörperbewegung der Beläge gegenüber der Bremsscheibe statt. Die Steifigkeitsmatrix ist in die drei Teile Scheibe, Belag oben und Belag unten partitioniert. Im untersuchten Frequenzbereich unter 10 kHz treten Instabilitäten mit einem Lehr'schen Dämpfungsmaß über -5 % auf. Für die Bremsgeräuschsimulation hat dieser Bereich jedoch keine Aussagekraft.

Danach folgt der Übergangsbereich  $10^{-1} < \frac{k_N}{k_W} < 10^6$ . Hier finden große Eigenfrequenzverschiebungen statt. Außerdem ergeben sich mehrere Instabilitäten. Die Dämpfungsmaße erreichen hier ebenfalls Werte bis -5 %. Da die Steifigkeit des Belagmaterials in Dickenrichtung im Bereich  $\frac{k_N}{k_W} \approx 10^2$  liegt, ist dies auch der relevante Bereich für Bremsgeräusche.

Für  $10^6 < \frac{k_N}{k_W} < 10^{15}$  überwiegt die Kontaktsteifigkeit gegenüber den anderen Termen in der Steifigkeitsmatrix. Im untersuchten Frequenzbereich bis 10 kHz entspricht dies einer starren Kopplung zwischen Bremsscheibe und Belagmaterial.

Bei Werten  $\frac{k_N}{k_W} > 10^{15}$  wird die Eigenwertberechnung aufgrund der schlecht konditionierten Steifigkeitsmatrix fehlerhaft. Positive Realteile der Eigenwerte stehen hier nicht im Zusam-



**Abbildung 3.16:** Eigenfrequenzen (links) und Dämpfungen (rechts) bei Variation der Belaglänge  $\frac{l_2}{l_1}$   
weitere Parameter:  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

menhang mit einem instabilen mechanischen System, sondern mit dem hohen mathematischen Einfluss von Rundungsfehlern.

### **Einfluss des Belaglängenverhältnisses $\frac{l_2}{l_1}$**

Der Einfluss des Belaglängenverhältnisses  $\frac{l_2}{l_1}$  wird im Intervall  $[0.01, 0.5]$  untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.16 zu sehen. Weitere dimensionslose Parameter sind:  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$ .

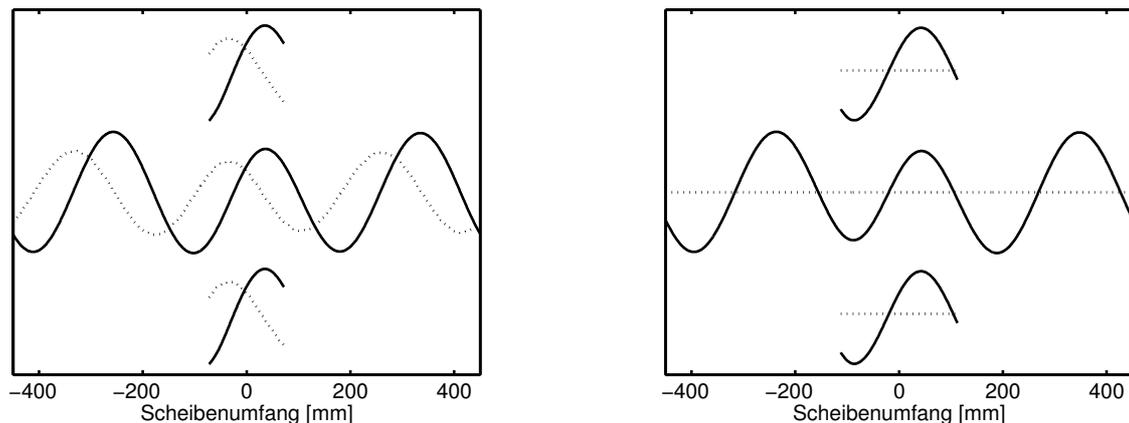
Die Eigenfrequenzen auf der linken Seite von Abbildung 3.16 fallen mit zunehmender Belaglänge leicht ab. Dabei zeigt sich ein wiederkehrendes Muster von einander annähernden Doppelmoden. Von oben her sind dies die fünfte bis erste OP-Scheibenmode.

Auf der rechten Seite in Abbildung 3.16 ist einerseits ersichtlich, dass sowohl die Zahl der Instabilitäten als auch die Höhe des jeweiligen Realteils zunimmt. Allerdings geschieht dies nicht streng monoton, wie die wellenförmige Struktur in der Abbildung zeigt. Bei genauer Analyse der jeweiligen Schwingformen der Instabilitäten kann gefolgert werden, dass das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  der instabilen Schwingform ein Minimum annimmt, wenn gilt:

$$\frac{l_2}{l_1} \approx \frac{n}{2k} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.42)$$

wobei  $2 \leq k \in \mathbb{N}$  die Ordnung der OP- $k$ ND Scheibenschwingform ist.

In Abbildung 3.17 ist eine OP-3ND Schwingform der Scheibe dargestellt. Mit  $k = 3$  folgt für  $\frac{l_2}{l_1} = 0.16 \approx \frac{1}{2 \cdot 3}$  auf der linken Seite eine instabile Schwingform, wohingegen in der Situation



**Abbildung 3.17:** Instabile OP-3ND Mode mit Belaglänge gleich halber Wellenlänge der Scheibe (links) und stabile OP-3ND Mode mit Belaglänge gleich 0.75-facher Wellenlänge (rechts)

rechts  $\frac{l_2}{l_1} = 0.25 \neq \frac{n}{2 \cdot 3}$  keine Instabilität vorliegt.

Die Instabilitäten bei gleicher Belaglänge wie Wellenlänge der Bremsscheibe, d.h.  $l_2 = \lambda$ , lassen sich dadurch erklären, dass die Frequenzen der vorhandenen Doppelmoden der Bremsscheibe in diesem Fall nicht durch die Störung des Belags getrennt werden. Diese Erklärung würde jedoch implizieren, dass bei halber Wellenlänge, also  $l_2 = \frac{\lambda}{2}$ , die Eigenfrequenzen weit voneinander getrennt werden, was den beobachteten Instabilitäten widerspricht.

#### **Einfluss des Dichteverhältnisses $\frac{\rho_2}{\rho_1}$**

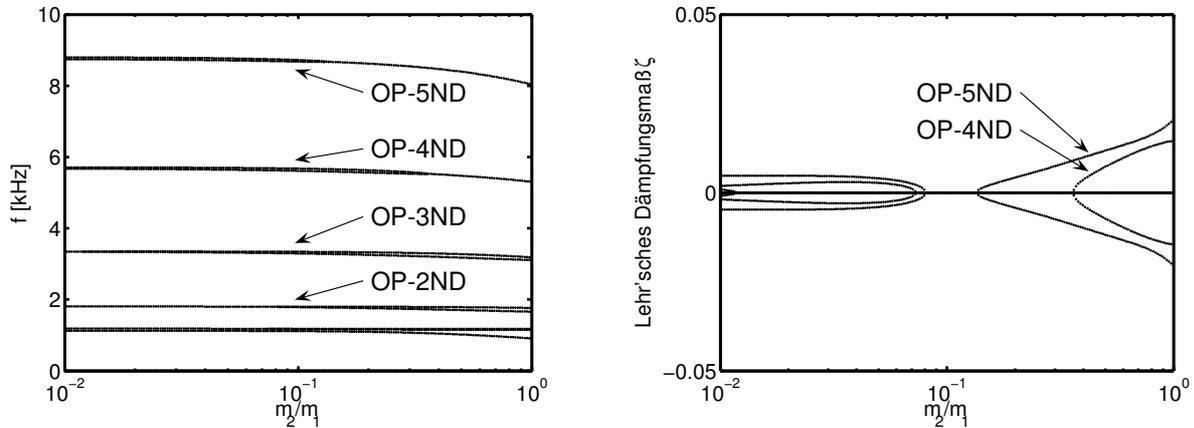
Für die Untersuchung des Einflusses der Dichte, wird das Verhältnis  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}$  im Intervall  $[0.01, 1]$  variiert. Die weiteren dimensionslosen Parameter sind:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$ .

Eine höhere Dichte des Belagmaterials im Vergleich zur Bremsscheibe führt zu einer leichten Absenkung der Eigenfrequenzen, wie in Abbildung 3.18 links zu erkennen ist.

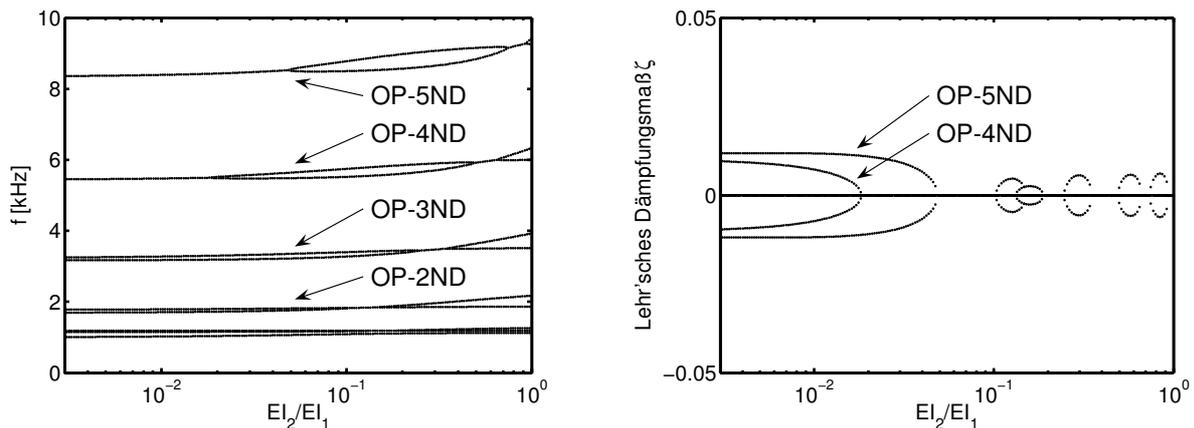
Instabilitäten treten hier im gesamten Parameterbereich auf. Bei  $\frac{m_2}{m_1} \approx 0.1$  liegt ein Minimum der auftretenden negativen Dämpfungen.

#### **Einfluss des Biegesteifigkeitsverhältnisses $\frac{EI_2}{EI_1}$**

Der Einfluss des Biegesteifigkeitsverhältnisses  $\frac{EI_2}{EI_1}$  wird im Intervall  $[0.005, 1]$  untersucht. Die weiteren dimensionslosen Parameter sind:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$ .



**Abbildung 3.18:** Eigenfrequenzen (links) und Dämpfungen (rechts) bei Variation des Produkts aus Dichte und Querschnitt  $\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1} = \frac{m_2}{m_1}$   
 weitere Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = 0.01$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$



**Abbildung 3.19:** Eigenfrequenzen (links) und Dämpfungen (rechts) bei Variation der Biegesteifigkeit  $\frac{EI_2}{EI_1}$   
 weitere Parameter:  $\frac{l_2}{l_1} = 0.1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} = 0.5$ ,  $\frac{k_N}{k_W} = 100$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

Parameter	Auswirkung auf Eigenfrequenzen	Auswirkung auf Stabilitätsverhalten
$\mu$	gering	je größer desto mehr Instabilitäten
$d_1 + d_2$	gering	je größer desto mehr Instabilitäten
$\frac{d_2}{d_1}$	gering	gering
$\frac{k_N}{k_W}$	starker Einfluss, mehrere Bereiche sind zu unterscheiden	starker Einfluss, keine generelle Aussage möglich
$\frac{l_2}{l_1}$	je größer desto niedrigere Eigenfrequenzen	je größer desto mehr Instabilitäten, Zusammenhang mit Biegewellenlänge
$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	je größer desto niedrigere Eigenfrequenzen	keine generelle Aussage möglich
$\frac{EI_2}{EI_1}$	je größer desto höhere Eigenfrequenzen	keine generelle Aussage möglich

**Tabelle 3.1:** Übersicht des Einflusses verschiedener dimensionsloser Parameter auf die Eigenfrequenzen und das Stabilitätsverhalten des Euler-Bernoulli Balkenmodells eines Bremssystems

In Abbildung 3.19 ist bei Variation des Biegesteifigkeitsverhältnisses  $\frac{EI_2}{EI_1}$  bzgl. der Eigenfrequenzen zuerst ein inverses Verhalten im Vergleich zur Variation der Dichte erkennbar: Die Eigenfrequenzen steigen durch die zusätzliche Steifigkeit leicht an. Der Frequenzabstand der Doppelmoden erhöht sich dabei bis auf einen schmalen Bereich, in dem eine weitere Instabilität auftritt.

Im Bereich  $\frac{EI_2}{EI_1} < 0.05$  ist das System durchgängig instabil. Für größere Werte von  $\frac{EI_2}{EI_1}$  treten vereinzelt Instabilitäten auf, die jedoch deutlich geringere negative Lehr'sche Dämpfungsmaße  $\zeta$  aufweisen.

### Zusammenfassung und Ausblick

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Als Erweiterung der hier vorgestellten Modellierung eines Euler-Bernoulli-Balkens ist eine Modellierung der Brems Scheibe und der Bremsbeläge als Timoshenko-Balken möglich. Durch die Berücksichtigung des Schubeinflusses lassen sich die Eigenfrequenzen der Brems Scheibe besser approximieren. Insbesondere belüftete Brems Scheiben, bei denen zwischen den beiden Reibringen Belüftungskanäle im Material ausgespart sind, weichen stark von der schubsteifen Bernoulli-Balkentheorie ab. Allerdings können Fehler, die durch die Eindimensionalität auftreten, z.B. die oben festgestellten Biegespannungen bei der OP-1ND Brems Scheibenschwingform, auch durch eine allgemeinere Balkentheorie nicht behoben werden.

Für die Auswertungen in dieser Arbeit wurde immer nur ein einzelner Parameter variiert, während alle weiteren Parameter konstant bleiben. Effekte, die durch eine Kombination verschiedener Parameter auftreten, können so nicht ermittelt werden. Die Bestimmung einer signifikanten Tendenz nur aufgrund einer oder weniger ermittelter Instabilitäten ist bei einigen Parametern nicht möglich. Durch die gleichzeitige Variation mehrerer Parameter oder eine Monte-Carlo-Simulation dieses vergleichsweise schnell zu berechnenden Systems könnten weitere Ergebnisse ermittelt werden.

### 3.4 Kontaktdämpfung, Fügestellendämpfung

Neben den oben vorgestellten Dämpfungsmechanismen, die auf Kontakten mit zusätzlicher Führungsbewegung beruhen, gibt es weitere dämpfende Effekte, die an den Verbindungsstellen verschiedener Bauteile entstehen. Nach Möser und Kropp [2010] wird Kontaktdämpfung auch als Fügestellendämpfung bezeichnet.

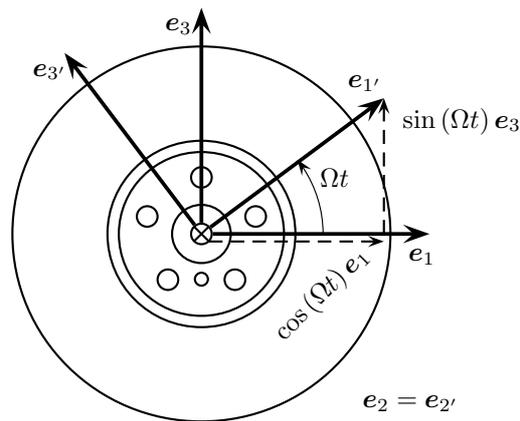
Es wird grundsätzlich zwischen Dämpfungseffekten aus Bewegungen in normaler Richtung und in tangentialer Richtung unterschieden. Dämpfungseffekte aus Bewegungen in Normalenrichtung entsteht durch das Öffnen und Schließen des Kontakts. Dabei werden Luft oder Fluide verdrängt, die durch Flüssigkeitsreibung Wärme erzeugen.

Nach Möser und Kropp [2010] ist das Coulomb'sche Reibgesetz die Grundlage für die tangentiale Kontaktdämpfung, wenn die Amplituden nicht kleiner als einige  $\mu\text{m}$  sind. Bei geringeren Amplituden kann eine Modellierung mit viskoser Dämpfung zugrunde gelegt werden. Bei Systemen aus massiven Bauteilen, wie einer Fahrzeugbremse, sind die Dämpfungswerte in tangentialer Richtung im Allgemeinen höher als in Normalenrichtung.

Tönshoff und Bernhardt [1982] zeigten, dass geschraubte, genietete oder mehrfach übereinandergelegte Stahlbleche eine um Größenordnungen höhere Dämpfung als einfache Bleche aufweisen.

Die Kontaktdämpfung wirkt aufgrund der wenigen und kleinflächigen Kontaktstellen und der massiven Gussbauteile im Bremsensystem jedoch nur sehr lokal. Eine globale Modellierung auf Grundlage einer gleichmäßigen modalen Dämpfung ist nicht möglich.

Kapitel 6 nennt einige der wichtigsten Kontaktmechanismen und zeigt Möglichkeiten auf, wie diese in einer linearen Stabilitätsanalyse berücksichtigt werden können.



**Abbildung 3.20:** Aufriss einer Bremsscheibe mit Definition des ortsfesten Koordinatensystems  $e_i$  und des rotierenden Koordinatensystems  $e'_i$

## 3.5 Corioliskräfte

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, dass die Relativbewegung zwischen Belag und Scheibe ausgehend von der Scheibenrotation entscheidend für das Stabilitätsverhalten der Bremse ist. Diese Rotation von Bremsscheibe sowie Radlager und Rad wird durch ein bewegtes körperfestes Koordinatensystem, sogenannte Euler-Koordinaten, abgebildet. In diesem Abschnitt werden die Einflüsse von zusätzlichen gyroskopischen Termen im Differentialgleichungssystem untersucht, die durch die Rotation der Bremsscheibe entstehen.

### 3.5.1 Kinematik

Die Basisvektoren  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  bilden ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem. Die Bremsscheibe rotiert mit der Drehgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $e_2$ -Achse. Das zugehörige körperfeste Koordinatensystem wird von den normierten Basisvektoren

$$\begin{aligned} e_{1'} &= \cos(\Omega t) e_1 + \sin(\Omega t) e_3, \\ e_{2'} &= e_2, \\ e_{3'} &= -\sin(\Omega t) e_1 + \cos(\Omega t) e_3 \end{aligned} \tag{3.43}$$

aufgespannt. Die Ursprünge beider Koordinatensysteme sind identisch, siehe Abbildung 3.20.

Sei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor eines Punktes  $P$  auf der rotierenden Bremsscheibe. Es gilt  $\mathbf{r} = x_i e_{i'}$ . Zur Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes  $P$  werden die

entsprechenden Ableitungen der Basisvektoren  $\mathbf{e}_{i'}$  benötigt, die aufgrund der Rotation nicht verschwinden.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \cos(\Omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\Omega t) \mathbf{e}_3 & \dot{\mathbf{e}}_{1'} &= \Omega \mathbf{e}_{3'} & \ddot{\mathbf{e}}_{1'} &= -\Omega^2 \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} &= \mathbf{e}_2 & \dot{\mathbf{e}}_{2'} &= 0 & \ddot{\mathbf{e}}_{2'} &= 0 \\ \mathbf{e}_{3'} &= -\sin(\Omega t) \mathbf{e}_1 + \cos(\Omega t) \mathbf{e}_3 & \dot{\mathbf{e}}_{3'} &= -\Omega \mathbf{e}_{1'} & \ddot{\mathbf{e}}_{3'} &= -\Omega^2 \mathbf{e}_{3'} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Damit folgt für die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  von  $P$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}_i \mathbf{e}_{i'} + x_i \dot{\mathbf{e}}_{i'} = (\dot{x}_1 - \Omega x_3) \mathbf{e}_{1'} + \dot{x}_2 \mathbf{e}_{2'} + (\dot{x}_3 + \Omega x_1) \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}_i \mathbf{e}_{i'} + 2\dot{x}_i \dot{\mathbf{e}}_{i'} + x_i \ddot{\mathbf{e}}_{i'} = (\ddot{x}_1 - 2\Omega \dot{x}_3 - \Omega^2 x_1) \mathbf{e}_{1'} + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_{2'} + (\ddot{x}_3 + 2\Omega \dot{x}_1 - \Omega^2 x_3) \mathbf{e}_{3'} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nach dem Newton'schen Gesetz gilt  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ . Es folgt:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \cos(\Omega t) - \ddot{x}_3 \sin(\Omega t) \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \sin(\Omega t) + \ddot{x}_3 \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + 2m\Omega \begin{pmatrix} -\dot{x}_1 \sin(\Omega t) - \dot{x}_3 \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{x}_1 \cos(\Omega t) - \dot{x}_3 \sin(\Omega t) \end{pmatrix} + m\Omega^2 \begin{pmatrix} -x_1 \cos(\Omega t) + x_3 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ -x_1 \sin(\Omega t) - x_3 \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

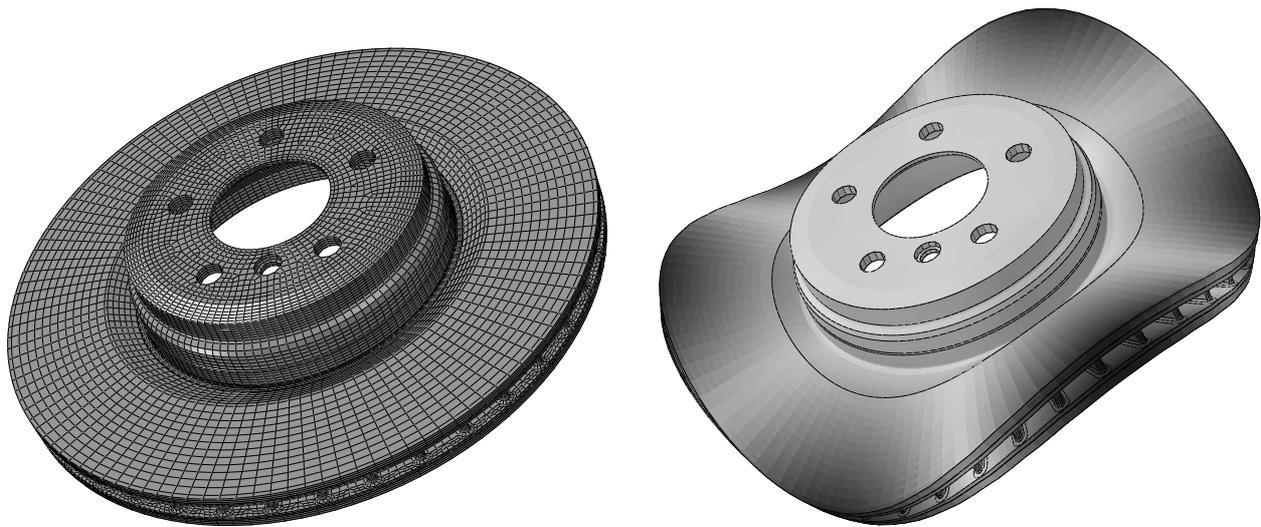
Die Gleichung gilt zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Also muss sie auch bei  $t = 0$  erfüllt sein, wenn das rotierende Koordinatensystem noch nicht gegenüber dem ruhenden System verdreht ist. Außerdem soll außer der Rotation keine äußere Belastung auf das System einwirken, also  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . In Matrixform ergibt sich

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + i\mathbf{S})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\Omega m \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\Omega m & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} -\Omega^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega^2 m \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0} & \mathbf{N} &= \mathbf{0} & \mathbf{S} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Einträge in der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  bleiben gleich wie in einem raumfesten Koordinatensystem, es kommen jedoch noch schiefsymmetrische Anteile in der gyroskopischen Matrix  $\mathbf{G}$  hinzu. Diese ergeben die Corioliskräfte. Außerdem entstehen zusätzliche negative Einträge in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{N}$ , die zugehörig zur Zentrifugalkraft entgegengesetzt zur Führungsbeschleunigung wirken.



**Abbildung 3.21:** Finite Elemente Modell (links) und Out-of-Plane Schwingform OP-3ND (rechts), siehe Anhang C zur Klassifizierung der Scheibenmoden

Im Folgenden werden die Einflüsse der Corioliskräfte, d.h. der gyroskopischen Matrix, auf die Eigenfrequenzen einer Bremsscheibe und das Stabilitätsverhalten des Bremssystems untersucht.

### 3.5.2 Eigenfrequenzen von Bremsscheiben

Bei Berechnung einer Fahrzeug-Bremsscheibe lässt sich aufgrund der aufgebrachten Rotation ein Einfluss der Corioliskräfte auf die Eigenfrequenzen beobachten. Dabei werden insbesondere Doppelmoden, d.h. doppelt auftretende Eigenfrequenzen, beeinflusst, siehe Anhang C für eine nähere Beschreibung von Doppelmoden. In Tabelle 3.2 sind die Eigenfrequenzen der unterschiedlichen Scheibenmoden bei verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten aufgelistet. Insbesondere werden die Doppelmoden bei 621 Hz, 1363 Hz, 1383 Hz und 2101 Hz beeinflusst. Die Frequenzen der Schwingformen bei 1074 Hz und 2144 Hz ändern sich nur in viel geringerem Maße.

Bei nicht rotierender Bremsscheibe bilden die rein reellen Eigenvektoren Schwingformen als stehende Wellen aus. Punkte mit maximaler Auslenkung bleiben orts- und materialfest. Alle Punkte der Bremsscheibe schwingen in Phase.

Unter Berücksichtigung der Scheibenrotation werden die Eigenvektoren komplexwertig und bei Doppelmoden bilden sich zwei entgegengesetzt zueinander laufende Wellen aus. Die höherfrequenter schwingende Welle läuft in, die niederfrequenter schwingende Welle entgegen

Fahrzeuggeschwindigkeit		0 km/h	1 km/h	10 km/h	100 km/h	250 km/h
Scheibenmode und Eigenfrequenz	OP-2ND	620.9 Hz	620.7 Hz	618.5 Hz	596.4 Hz	561.1 Hz
		621.0 Hz	621.2 Hz	623.5 Hz	646.3 Hz	685.9 Hz
	OP-0	1074.5 Hz	1074.5 Hz	1074.5 Hz	1074.6 Hz	1075.3 Hz
	OP-1ND	1363.6 Hz	1363.6 Hz	1362.9 Hz	1352.9 Hz	1336.7 Hz
		1364.7 Hz	1364.7 Hz	1365.4 Hz	1375.8 Hz	1393.8 Hz
	OP-3ND	1383.3 Hz	1382.9 Hz	1379.6 Hz	1346.5 Hz	1292.7 Hz
		1383.3 Hz	1383.6 Hz	1387.0 Hz	1420.8 Hz	1478.4 Hz
	IPR-2ND	2101.3 Hz	2101.3 Hz	2100.0 Hz	2084.7 Hz	2059.3 Hz
		2102.1 Hz	2102.2 Hz	2103.5 Hz	2118.9 Hz	2146.4 Hz
	Topfmode	2144.5 Hz	2144.5 Hz	2144.5 Hz	2144.6 Hz	2143.2 Hz

**Tabelle 3.2:** Eigenfrequenzen einer rotierenden Bremsscheibe unter Berücksichtigung von Coriolis- und Zentrifugalkräften

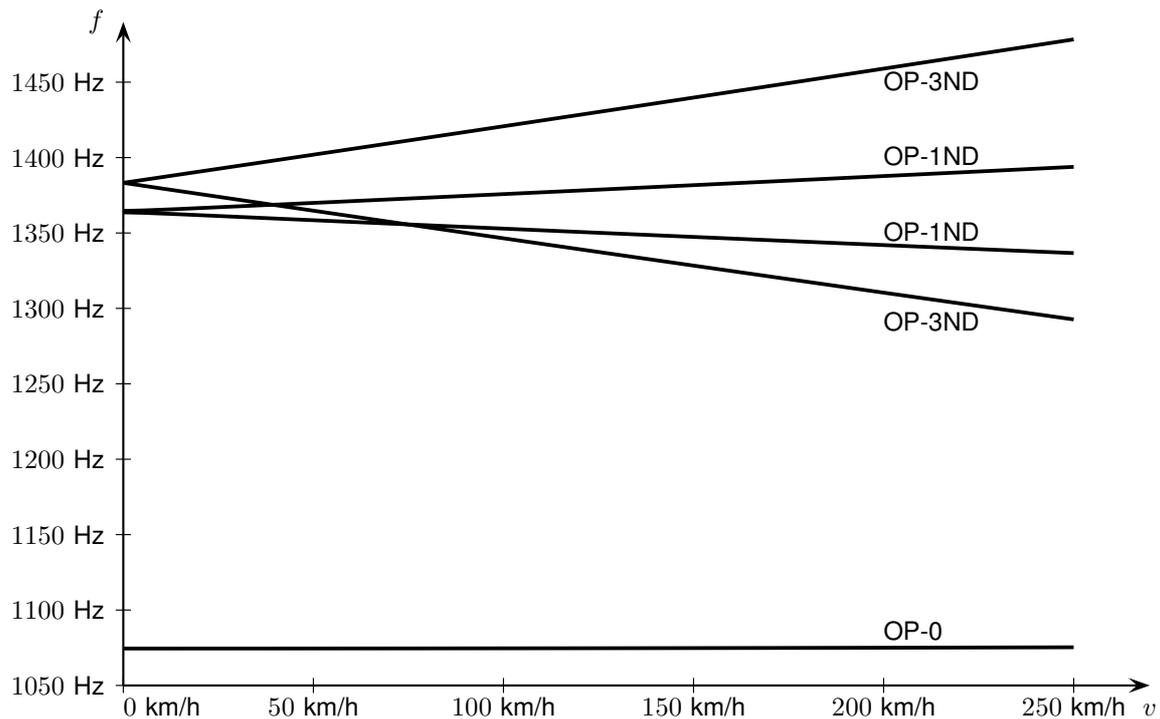
der Rotationsrichtung  $\Omega$ . Insbesondere die Frequenzen von Eigenformen mit relevantem radialen oder tangentialen Anteil werden über die Corioliskräfte beeinflusst. In Abbildung 3.22 sind die Eigenfrequenzen der OP-0, OP-1ND und OP-3ND Schwingformen aufgezeichnet. Es ist ein linearer Abfall bzw. Anstieg der Eigenfrequenzen gegenüber der Rotationsgeschwindigkeit erkennbar, sodass sich bei höheren Geschwindigkeiten auch die Reihenfolge der Eigenmoden ändert. Der Einfluss der Zentrifugalbeschleunigung, der quadratisch zur Rotationsgeschwindigkeit zunimmt, ist bei diesen Geschwindigkeiten noch nicht erkennbar.

Wegen der vergleichsweise geringen Rotationsgeschwindigkeiten beim Bremsenquietschen, häufig unter 10 km/h, bleiben die in diesem Abschnitt dargestellten Effekte jedoch gegenüber Material- und Geometrietoleranzen von untergeordneter Bedeutung.

Änderungen der Stabilitätseigenschaften erfolgen an diesem M-G-K-System nicht, siehe Folgerung 2.15.

### 3.5.3 Stabilitätsverhalten

In den Arbeiten von Hetzler [2008] und Hetzler [2009] wurden die Stabilitätseigenschaften von Scheibenbremsen unter Berücksichtigung von Corioliskräften an einem Modell mit Bremsscheibe und Belägen untersucht. Der Stabilitätsbereich des Bremssystems wird durch die Berücksichtigung von gyroskopischen Kräften verkleinert, d.h. das System zeigt Instabilitäten schon bei geringeren Reibwerten  $\mu$ . Je höher die Drehgeschwindigkeit ist, desto



**Abbildung 3.22:** Änderung der Eigenfrequenzen einer rotierenden Bremsscheibe gegenüber der Fahrzeuggeschwindigkeit bei Berücksichtigung von Coriolis- und Zentrifugalkräften

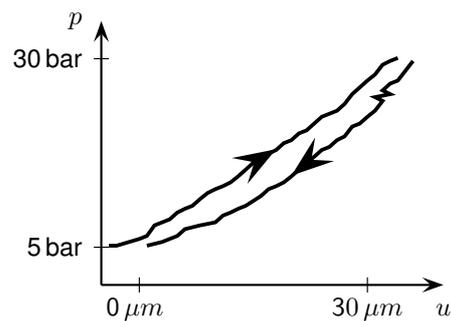
größer sind die Unterschiede zwischen den Systemen mit und ohne Berücksichtigung von gyroskopischen Kräften.

Buck [2008] zeigt an einem Minimalmodell, dass die Berücksichtigung von Corioliskräften nur einen sehr geringen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten hat, wenn Instabilitäten durch das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz angeregt werden. Dabei wurden insbesondere IPT und IPTS Moden der Bremsscheibe untersucht.

## 3.6 Materialdämpfung

Bei Belastung einer Materialprobe mit einer Kraft  $F$  und darauffolgender Entlastung wird die Kurve in einem Kraft-Weg-Diagramm im Allgemeinen Unterschiede zwischen Belastung und Entlastung aufzeigen.

In Abbildung 3.23 ist die Verschiebungs-Druck-Kurve eines Bremsbelags während einer Kompressibilitätsmessung aufgezeichnet. Die Verschiebung  $u$  gibt die axiale Verformung des Belags bei einem Kolbendruck  $p$  wieder. Der Druck  $p$  ist proportional zur Kraft  $F$ . Die beiden



**Abbildung 3.23:** Hysteresekurve eines Bremsbelags bei Belastung (oben) und anschließender Entlastung (unten), Messung durchgeführt bei der BMW Group nach EKB 1003 [2006]

Sprünge am Anfang und Ende der Kurve ergeben sich aus einer Wartezeit und den damit verbundenen Kriecheffekten.

Die Differenz zwischen den beiden Kurven wird als Materialhysterese bezeichnet. Ein Teil der für die Verformung aufgewendeten Energie wird durch innere Reibungs- und Plastifizierungsprozesse in Wärme umgewandelt. Durch die Energiedissipation entsteht ein dämpfender Effekt im mechanischen System. Die Materialdämpfung ist im Allgemeinen nicht linear bzgl. der Belastung  $F$ . Um sie in einer linearen Stabilitätsanalyse berücksichtigen zu können, muss ein approximierendes lineares Materialmodell gefunden werden. Die Modellierung der Materialdämpfung ist damit weniger mechanisch-phänomenologisch, sondern vielmehr mathematisch begründet.

Im Folgenden werden zwei Ansätze zur Modellierung von Materialdämpfung beschrieben:

Die Rayleigh-Dämpfung geht von der sogenannten Bequemlichkeitshypothese aus. Ein M-K-System, siehe Kapitel 2.3, kann nach Satz 2.8 immer unter orthogonaler Transformation diagonalisiert und damit entkoppelt werden. Für ein M-D-K-System, das geschwindigkeitsproportionale, viskose Dämpfung berücksichtigt, gilt dies im Allgemeinen nicht mehr. Im Spezialfall  $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$  bleibt die Diagonalisierbarkeit des Systems erhalten. Die beiden Proportionalitätsfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  können nun so gewählt werden, dass die modellierte viskose Dämpfung möglichst genau der beobachteten Materialhysterese entspricht.

Um die Diagonalisierbarkeit nach der Bequemlichkeitshypothese zu erhalten, müssen bei Systemen, die unterschiedliche Materialien enthalten, die beiden Faktoren  $\alpha$  und  $\beta$  jeweils systemweit gleich gewählt werden. Die im Finite Elemente Programm Abaqus materialabhängig verfügbaren Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  ermöglichen eine allgemeinere Definition von Dämpfung, die jedoch nicht auf ein diagonalisierbares System führen muss, Dassault Systèmes [2012].

Eine weitere Möglichkeit zu Modellierung von Materialdämpfung beruht auf der Annahme eines komplexen Elastizitätsmoduls  $E = E_0(1 + i\gamma) \in \mathbb{C}$ . Der Realteil  $E_0$  bezeichnet den Speichermodul, der Imaginärteil  $E_0\gamma$  den Verlustmodul. Dies führt bei Finite Elemente Berechnungen auf eine komplexe Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K} + i\mathbf{S}$ . Der Imaginärteil  $\mathbf{S}$  wird oft auch als Strukturdämpfungsmatrix bezeichnet, das Gleichungssystem als M-K-S-System.

Durch die messtechnische Bestimmung von modalen Dämpfungen kann auf die drei Dämpfungsfaktoren geschlossen werden. Dabei entspricht  $\gamma$  einem konstanten Dämpfungsverhalten über die Frequenz,  $\alpha$  einem abfallenden und  $\beta$  einem ansteigenden Verhalten.

Flint [2002] und Buck [2008] zeigten, dass eine Modellierung durch Strukturdämpfung das Materialverhalten des Reibmaterials und des Dämpfungsblechs von Bremsbelägen am Besten wiedergibt. Für diese Materialien werden in Kapitel 5 verschiedene Messverfahren vorgestellt, die unter anderem auch die Dämpfungen erfassen können.

Neben der Materialdämpfung von Festkörpern, kann über die Viskosität der Bremsflüssigkeit ebenfalls ein der Materialdämpfung entsprechendes Verhalten beschrieben werden. Am Übergang zwischen Bremsattel und Bremsflüssigkeit ist dann über die Fluid-Struktur-Interaktion das mechanische Verhalten zu modellieren.

## 3.7 Dämpfung an den Systemgrenzen

Durch die im Systemmodell existierenden Systemgrenzen können weitere dämpfende Effekte eingebracht werden. Dabei handelt es sich nicht um einen neuen Dämpfungsmechanismus, sondern um die aufgrund der gewählten Modellgrenzen vernachlässigten Anteile beispielsweise der Material- oder Fügestellendämpfung.

Wenn die Dämpfungsanteile und der damit verursachte Energieabfluss nicht als vernachlässigbar klein angenommen werden können, bestehen zwei Möglichkeiten, diese zu berücksichtigen:

Einerseits kann das Systemmodell erweitert werden. Die im erweiterten Modell nun vorhandene Modellierung der Dämpfungsmechanismen verringert den Anteil der Dämpfung an den Systemgrenzen.

Alternativ kann an geeigneten Koppelstellen die Impedanz der Anschlusskonstruktion bestimmt werden. Der Realteil gibt dabei die Dämpfung wieder, die nun durch eine Ersatz-

modellierung abgebildet werden kann. Dies wird in Kapitel 7.2 an der Systemgrenze zu den Lenkern der Fahrzeugachse erläutert.

### **3.8 Abstrahldämpfung**

Das Bremssystem wurde in der bisherigen Arbeit nur als Strukturmodell betrachtet. Die Interaktion zwischen der Struktur und der umgebenden Luft wird dabei vernachlässigt. Die Zulässigkeit dieser Annahme kann durch eine überschlagsmäßige Energiebetrachtung nachgewiesen werden.

Bei Geräuscherprobungen am Bremsenprüfstand der BMW Group, einem Raum mit weitgehend nicht-reflektierenden Wänden, werden Schallpegel bis zu 110 dB(A) gemessen. Das Mikrofon ist dabei in einem Abstand von ca. 50 cm von der Bremsscheibe angebracht. Je nach Schwingform der Bremse beim Bremsenquietschen unterscheiden sich die Hauptabstrahlrichtungen und die Reflektionen an den Installationen im Prüfstandsraum. Die an die Umgebung in Form von Schall abgegebene Leistung ist jedoch mit maximal 1.5 W so gering, dass sie keinen relevanten Dämpfungsbeitrag leistet.

Buck [2008] kommt durch Abschätzung der Oberflächenschnelle bei einem idealen Strahler ebenfalls zu dem Ergebnis, dass die Schallabstrahlung keine nennenswerte Dämpfung des Systems bewirkt.

## 4 Finite Elemente Analyse

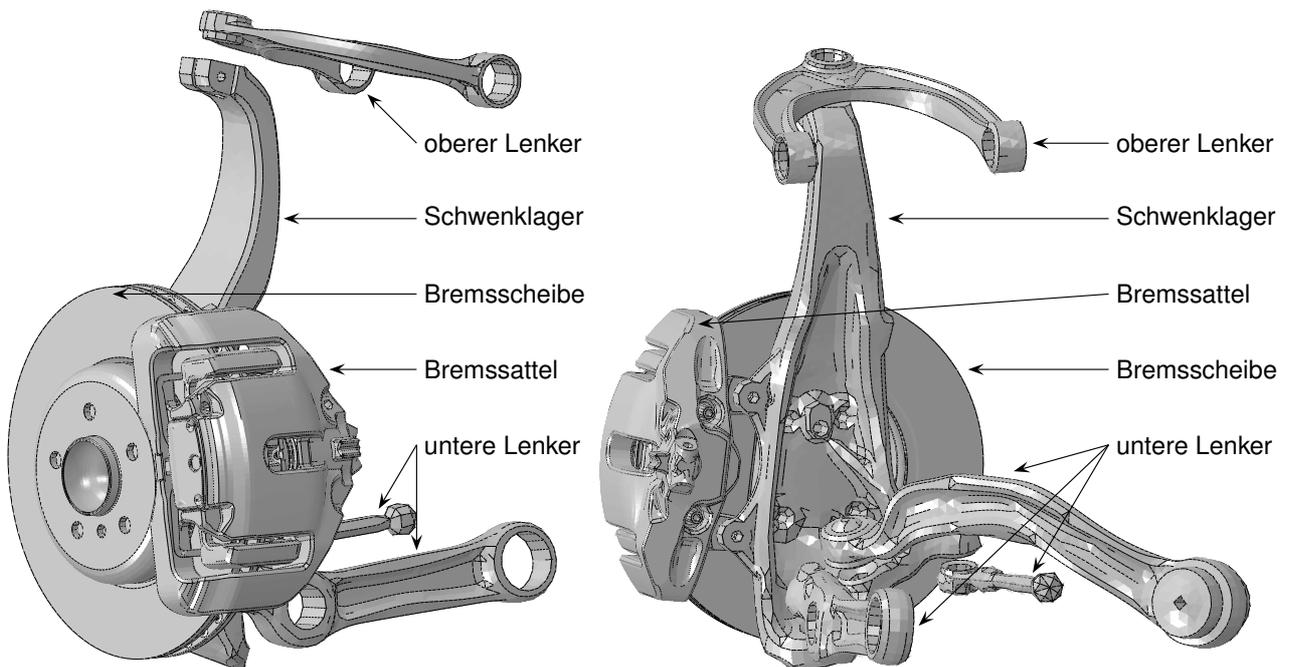
Das Ziel der Bremsgeräuschsimulation ist es, das gegebenenfalls auftretende Bremsenquietschen vorherzusagen. In Kapitel 2 wird gezeigt, inwieweit dies mit dem Stabilitätsverlust des Bremssystems zusammenhängt, in Kapitel 3 werden die dazugehörigen Mechanismen erläutert. Flint [2002] zeigte, dass die Vorhersage mit einem auf das Bremssystem abgestimmten Modell auf Grundlage eines Bernoulli-Balkens, wie auch in Kapitel 3.3 beschrieben, möglich ist. Daneben existieren Ansätze die Bremsscheibe als Kirchhoff-Platte oder als elastisch gelagerte, starre Scheibe abzubilden, siehe beispielsweise Hochlenert [2006].

Andererseits sollen mit Hilfe der Simulation zumindest auch die bekannten versuchsseitigen Abhilfemaßnahmen abgebildet werden können. Diese umfassen unter anderem Geometrieänderungen, Zusatzmassen und Beeinflussungen des Reibwertverhaltens zwischen Einzelbauteilen, was sowohl mit diskreten Feder-Masse Modellen, als auch mit dem vereinfachten Balkenmodell in Kapitel 3.3 nur unzureichend abzubilden ist.

Mit der Finite Elemente Methode steht ein Werkzeug zur Verfügung, das die Geometrien der Bauteile hinreichend genau abbilden kann. Die Grundlagen zum Modellaufbau werden in Kapitel 4.1 vorgestellt.

Allerdings sind die dabei entstehenden Systemmatrizen so groß, dass eine genauere Betrachtung der zur Lösung eingesetzten Algorithmen notwendig ist. Dies wird in Kapitel 4.3 näher erläutert.

Um einige nichtlineare Effekte, wie das Öffnen und Schließen von Kontakten oder belastungsabhängige Steifigkeiten zumindest teilweise abbilden zu können, wird eine zusätzliche quasistatische Berechnung vor der eigentlichen Stabilitätsanalyse durchgeführt. Die Vorteile und Grenzen dieses Ansatzes werden in Abschnitt 4.2 analysiert.



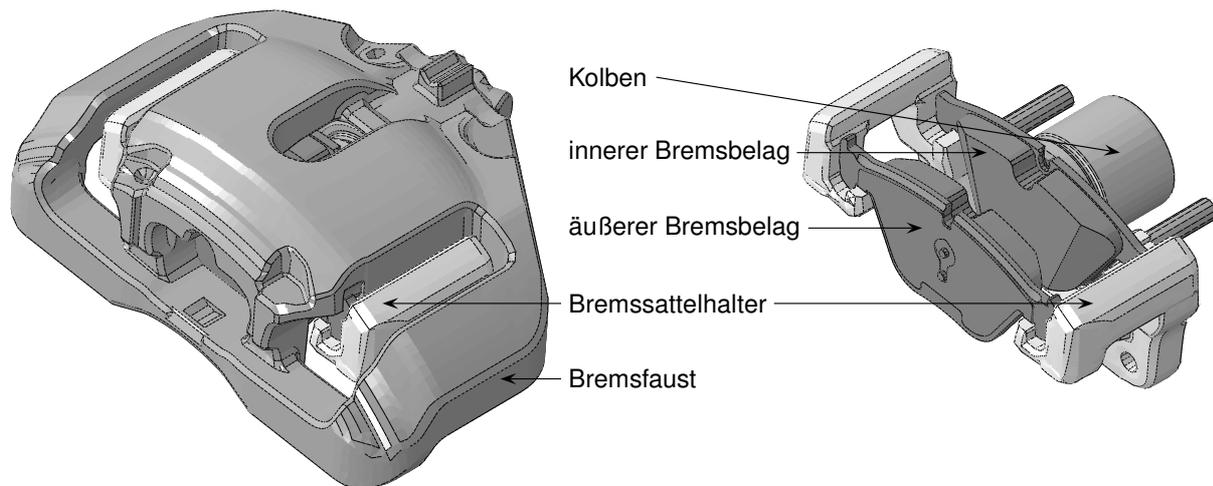
**Abbildung 4.1:** Finite Elemente Modell eines Bremssystems mit Teilen der Fahrzeugachse, Ansicht von außen (links), Ansicht von innen (rechts)

## 4.1 Modellaufbau

Abbildung 4.1 zeigt das Finite Elemente Modell einer Vorderachsbremse mit Bremsattel, Bremscheibe und einem Teil der Achse. Die Detailansicht des Bremsattels mit den Bremsbelägen ist in Abbildung 4.2 zu erkennen.

Der minimale Modellumfang zur Simulation von Bremsenquietschen umfasst die Bremscheibe und die Bremsbeläge, da am Kontakt zwischen diesen beiden Bauteilen die Energie eingebracht wird, die eine gegebenenfalls vorhandene Systeminstabilität anfacht. Da zwischen den Bremsbelägen und dem Kolben bzw. der Bremsfaust eine flächige Verbindung besteht, siehe auch Abbildung 4.3, können die Schwingformen der Bremsbeläge nur unter Berücksichtigung dieser beiden Bauteile korrekt dargestellt werden.

Die weiteren Bauteile des Bremsattels dienen der elastischen Lagerung der Bremsbeläge. Die Kontaktflächen sind so klein, dass sie im relevanten Frequenzbereich als punktförmig vereinfacht werden können. Damit steht neben der kontinuierlichen Modellierung auch die Möglichkeit einer Ersatzmodellierung auf Grundlage von dynamischen Steifigkeiten bzw. Impedanzen offen. Die Verbindung zwischen Bremscheibe und Radlager ist großflächiger, sodass hier zumindest noch das Radlager geometrisch exakt modelliert wird.



**Abbildung 4.2:** Finite Elemente Modell des Bremsstellers einer Faustsattelbremse mit und ohne Bremsfaust (links bzw. rechts)

Weitere Komponenten umfassen das Rad mit Reifen sowie die Fahrzeugachse mit Federung. Eine genauere Analyse darüber, welche Bauteile in welchem Frequenzbereich berücksichtigt werden sollten und wie die entsprechenden Randbedingungen modelliert werden können, erfolgt in Kapitel 7.

Die Netzfeinheit des Finite Elemente Modells ist so zu wählen, dass die Schwingformen der Bremse im hörbaren Bereich bis 16 kHz hinreichend genau abgebildet werden. Das entscheidende Kriterium ist dabei der Anregemechanismus der Modenkopplung, der zentral vom Frequenzabstand benachbarter Moden abhängt. Somit müssen die Eigenfrequenzabstände aller Moden zueinander korrekt dargestellt werden. Aus dem Vergleich von Messungen der frei-frei Eigenfrequenzen der Einzelkomponenten mit den entsprechenden berechneten Werten kann eine Abschätzung über die erforderliche Netzfeinheit für die Stabilitätsanalyse getroffen werden.

Im Bereich des Kontakts zwischen Bremsbelag und Scheibe ist darüber hinaus eine hohe Diskretisierung nötig, um die geschlossene Kontaktfläche und den Kontaktdruck genau approximieren zu können.

Eine generelle Aussage über die Ansatzordnung der zu verwendenden Elemente kann an dieser Stelle nicht getroffen werden. Grundsätzlich ist bei Verwendung von isoparametrischen Elementen bei gleicher Abbildungsgüte die Zahl der Freiheitsgrade und damit die Dimension der Systemmatrizen kleiner. Demgegenüber steht der erhöhte Aufwand bei der nicht automatisierten Vernetzung mit Hexaederelementen. Eine Übersicht über weitere Aspekte der Finite Elemente Methode ist beispielsweise bei Braess [2003] zu finden.

## 4.2 Nichtlineare statische Berechnung

Um möglichst realitätsnahe Ergebnisse der Finite Elemente Simulation zu erhalten, wird ein sogenannter Betriebspunkt angefahren. Dies geschieht durch das quasistatische Aufbringen des Bremsdrucks und die Definition der Scheibenrotation, siehe Bajer u. a. [2003]. Ziel ist dabei, den Betriebszustand der Bremse im Fahrzeug während des Bremsenquietschens so genau wie möglich abzubilden. Die Kontakte im Modell müssen den gleichen Zustand wie im Fahrzeug oder am Prüfstand besitzen, d.h. offen oder geschlossen, gleitend oder haftend. Bei großflächigen Kontakten, wie zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag, muss die Kontaktdruckverteilung und die Größe der geschlossenen Kontaktfläche korrekt abgebildet werden. Die im Fahrzeug auftretenden Belastungen, wie der axiale Bremsdruck, die tangentialen Bremskraft, die Schwerkraft, die Radaufstandskraft oder bestehende Federkräfte, müssen in der Simulation ebenfalls berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Lastpfade korrekt dargestellt werden.

Bei Bremssattelkonzepten mit wenigen Bauteilen und wenigen Kontakten, z.B. Festsattelbremsen, ist das Schwingverhalten im gebremsten, wie im ungebremsten Zustand annähernd gleich. Hier kann eine vereinfachte Simulation ohne vorhergehende statische Berechnung durchgeführt werden, womit eine signifikante Verringerung der Rechenzeit ermöglicht wird.

Tabelle 4.1 stellt die einzelnen Berechnungsschritte in ihrer Abfolge zusammen:

Bezeichnung	Typ	Bemerkung
Aufbringen des Bremsdrucks	statisch, nichtlinear	-
Rotation der Bremsscheibe	statisch, nichtlinear	Anpassen der Kontaktgleichungen
Optional: Kurvenfahrt	statisch, nichtlinear	-
Optional: Belagverschleiß	statisch, nichtlinear	-
Optional: Temperaturverteilung	statisch, nichtlinear	-
Linearisierung	-	-
Reelle Eigenwertberechnung	dynamisch, linear	M-K-System
Projektion der Systemmatrizen	-	M-D-G-K-N-S-System
Komplexe Eigenwertberechnung	dynamisch, linear	projiziertes M-D-G-K-N-S-System

**Tabelle 4.1:** Schematischer Ablauf der Berechnung zur Simulation von Bremsenquietschen

### 4.2.1 Rotation der Bremsscheibe

Die Rotation der Bremsscheibe und der daran angebotenen Bauteile, wie z.B. des Radlagers, des Rades und der Abtriebswelle, kann über verschiedene Ansätze abgebildet werden.

Die Drehgeschwindigkeit wird als konstant angenommen. Dies entspricht versuchsseitig einer Schleppbremsung.

Eine explizite Rotation der Bauteile und des, mit den Bauteilen fest verbundenen, Finite Elemente Netzes in der materiellen Darstellung, auch Lagrange-Darstellung genannt, führt zu einer Berechnung im Zeitbereich, die in dieser Arbeit nicht weiter untersucht wird.

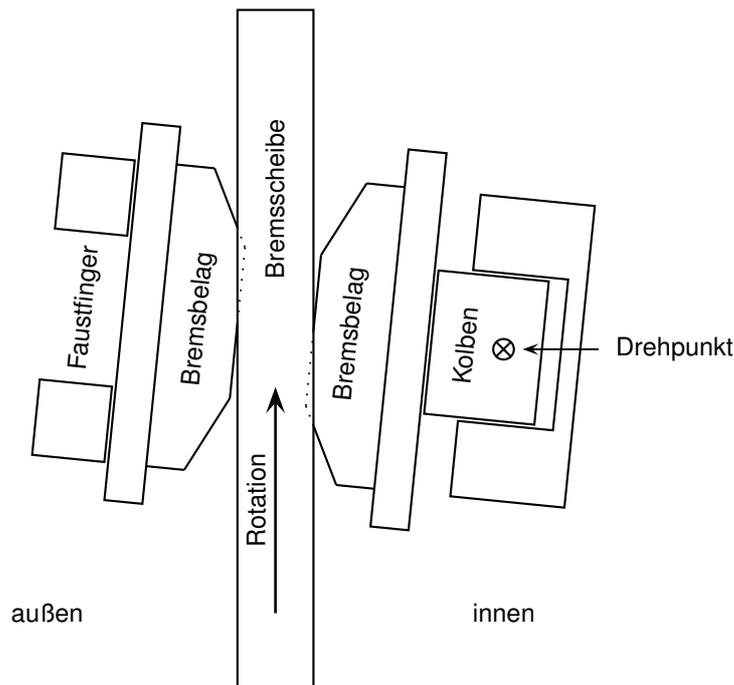
Durch die Verwendung der Euler-Darstellung, auch räumliche Darstellung genannt, bei der das Material im stehenden Finite Elemente Netz rotiert wird, können die entsprechenden Kontaktkräfte abgebildet werden, ohne dass die Knoten des Netzes verschoben werden müssen. Dabei wirken zusätzliche Zentrifugal- und Corioliskräfte auf die rotierenden Bauteile. Die zu rotierenden Bauteile sind jedoch nicht exakt rotationssymmetrisch. Insbesondere bei belüfteten Brems scheiben führt dies aufgrund der Rippen zu Einschränkungen in der Stabilitätsanalyse. In kommerziellen Finite Elemente Programmen werden Euler-Darstellungen teilweise nur für rotationssymmetrische oder rotationszyklische Geometrien unterstützt.

Eine weitere Möglichkeit zur Abbildung der Scheibenrotation besteht in der alleinigen Anpassung der Kontaktgleichungen. Dabei werden die tangentialen Kontaktgleichungen eines haftenden oder gleitenden Kontakts angepasst, sodass ein gleitender Kontakt mit konstanter Führungsgeschwindigkeit modelliert wird, siehe Kapitel 6.3.

Bei dieser Darstellung können Zentrifugal- und Corioliskräfte nur als zusätzliche äußere Kräfte aufgebracht werden. Dabei entstehen geschwindigkeits- und verschiebungsproportionale Terme, die Einträge in der gyroskopischen Matrix  $\mathbf{G}$  und in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  hervorrufen. Für die in dieser Arbeit untersuchten Bremssysteme wird die Scheibenrotation nur durch die Anpassung der Kontaktgleichungen abgebildet.

### 4.2.2 Schräglage

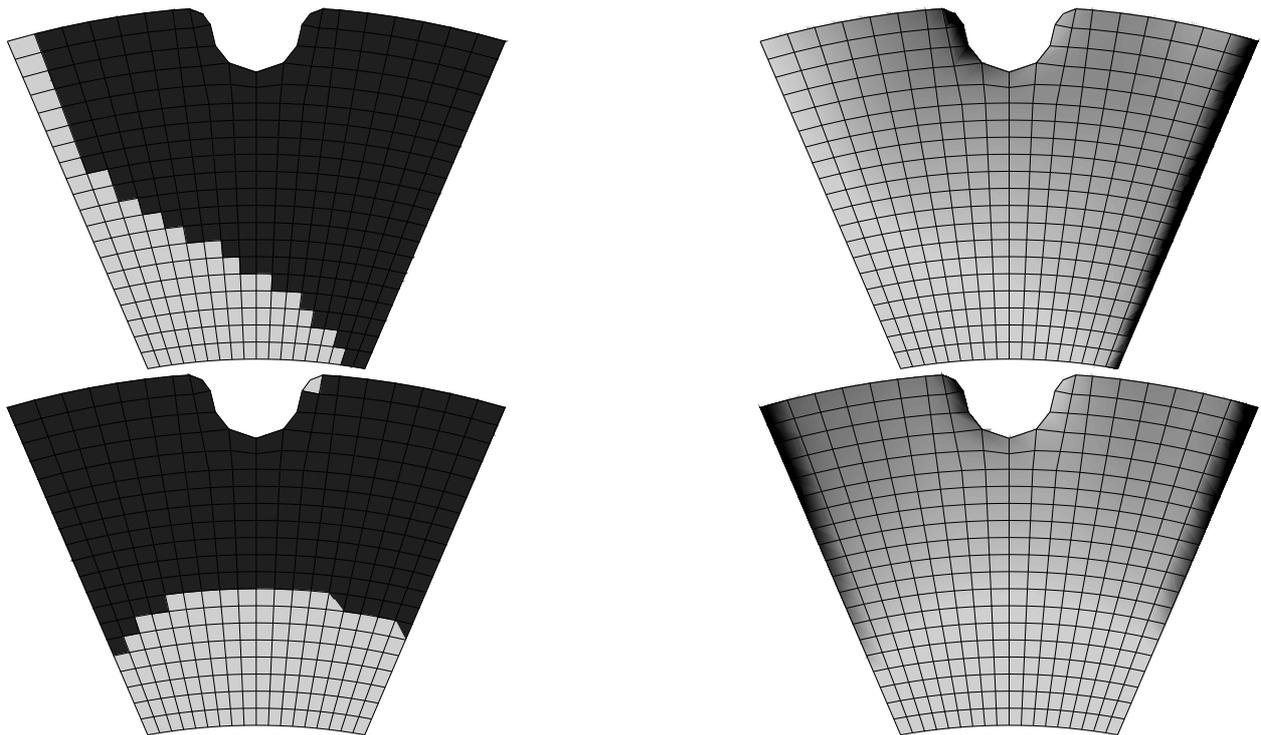
Bei Faustsattelbremsen (Schwimmsattelbremsen) werden die axialen und tangentialen Kräfte über zwei verschiedene Bauteile aufgenommen. Axiale Kräfte, die vom Bremsdruck verursacht werden, werden über die Bremsfaust abgetragen, siehe Abbildung 4.2. Die Bremsfaust ist elastisch gelagert und kann deshalb keine tangentialen Kräfte aufnehmen. Diese werden ausschließlich über den Bremshalter aufgenommen. Da dieser deformierbar ist, tritt eine Verschiebung der Bremsbeläge und der Bremsfaust gegenüber der Brems scheibe auf, siehe auch Abbildung 4.3. Der äußere Bremsbelag ist konstruktionsbedingt weicher gelagert als der innere Belag. Somit tritt außerdem ein Verkippen der Bremsbeläge zusammen mit Kolben und Bremsfaust auf. Dieses Verkippen des Brems sattels wird als Schräglage bezeichnet.



**Abbildung 4.3:** Darstellung des Prinzips der Schräglage einer Faustsattelbremse mit dem durch die elastische Lagerung definierten Drehpunkt

Dadurch entsteht im Allgemeinen ein Kontaktdruckmaximum am inneren Belag einlaufseitig und häufig auch am äußeren Belag auslaufseitig, wie es in Abbildung 4.4 in den rechten Bildern dunkel markiert ist. Der qualitative Unterschied zwischen dem inneren Belag mit nur einer Belastungskante und dem äußeren Belag, der ein- und auslaufseitig eine Kontaktdruckspitze besitzt, entsteht durch die unterschiedliche Abstützung im Bremsattel. Der innere Belag wird nur mittig vom Kolben an die Bremsscheibe gedrückt, der äußere jedoch an beiden Seiten durch die beiden Faustfinger. Der hier abgebildete Belag hat abgeschrägte Kanten (engl. chamfer) um das Schwingverhalten anzupassen und eine definiert gerade Kontaktfläche zu erhalten. Dadurch entspricht die Kontaktfläche nicht der gesamten Belagfläche.

Entscheidend für die Bremsgeräuschsimulation ist jedoch weniger die Kontaktdruckverteilung, sondern die geschlossene Kontaktfläche, welche in Abbildung 4.4 auf der linken Seite schwarz eingefärbt ist. In Kapitel 3.3 in Gleichung (3.25) des Minimalmodells und in Kapitel 6.3 in Gleichung (6.22) der Variationsformulierung der Kontaktmechanik wird gezeigt, dass der Wert des Kontaktdrucks  $\sigma$  keinen Einfluss auf die Modenkopplung, den Haupterregungsmechanismus des Bremsenquietschens hat. Die Eigenfrequenzen des Gesamtsystems hängen jedoch stark davon ab, ob die Kontakte zwischen den Bauteilen geschlossen sind oder nicht bzw. bei großflächigen Kontakten, welche der Form die geschlossene Kontaktfläche besitzt. Es ist erkennbar, dass in Abbildung 4.4 die Beläge hauptsächlich radial außen



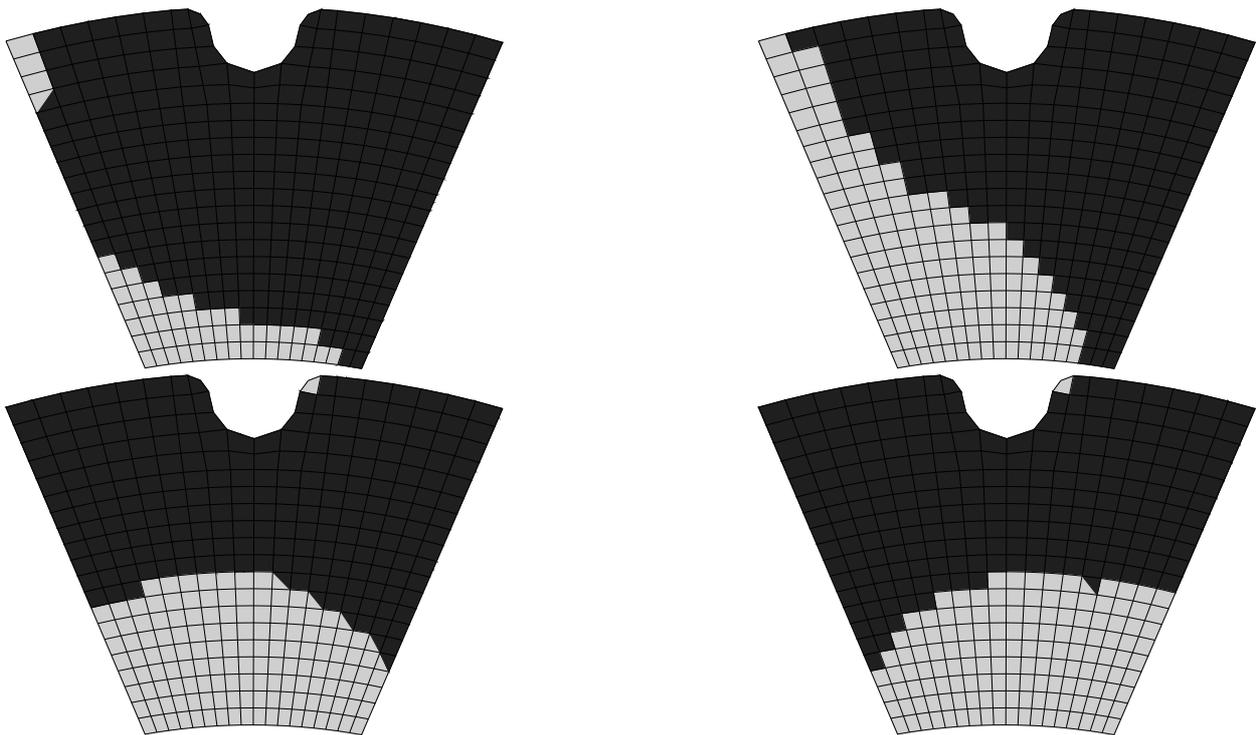
**Abbildung 4.4:** Geschlossene Kontaktfläche in schwarz (links) und Kontaktdruckverteilung (rechts) von innerem (oben) und äußerem Bremsbelag (unten)

gegen die Bremsscheibe gedrückt werden und dass der innere Belag auslaufseitig von der Bremsscheibe absteht.

Ein wichtiges Ziel in der Geräuschbearbeitung ist damit die Sicherstellung eines vollflächigen Schließens der Kontaktfläche in allen kundenrelevanten Betriebsituationen, also einer gleichbleibenden Schräglage. Neben funktionalen Aspekten, wie der Vermeidung von Schrägverschleiß, hilft dies, die Zahl der im Kundenbetrieb auftretenden Betriebspunkte zu minimieren. Dadurch kann die Zahl der zu untersuchenden Varianten bei der Geräuschbearbeitung reduziert werden.

### 4.2.3 Kurvenfahrt

Eine wichtige kundenrelevante Situation stellt das Einparken bzw. Rangieren dar. Hier bestehen aufgrund der niedrigen Geschwindigkeit keine lauten Nebengeräusche und die Bremse wird nicht im Geradeauslauf, sondern im eingeschlagenen Zustand der Lenkung betätigt. Einige Bremsen an der Vorderachse, die im un gelenkten Zustand ruhig sind, können im gelenkten Zustand quietschen. Falke [2010] zeigte durch Messungen am Fahrzeug, dass sich durch



**Abbildung 4.5:** Geschlossene Kontaktfläche in schwarz von innerem (oben) und äußerem Bremsbelag (unten) in einer Links- (links) bzw. Rechtskurve (rechts) am linken Bremsattel

das eingeschlagene Rad und die dadurch hervorgerufenen Kräfte die Bremsscheibe gegenüber dem Bremsattel verkippt. Die Drehachse der Verkipfung ist die Fahrzeuglängsachse, im Gegensatz zur Lenkbewegung, die um die Hochachse erfolgt. Da der Bremsattel vor bzw. hinter der Vorderachse angebracht ist, bewirkt das Einlenken somit eine Änderung der oben dargestellten Schräglage.

Ein manuelles Verkippen der Bremsscheibe am Bremsengeräuschprüfstand durch Aufbringen eines zusätzlichen Kippmoments bewirkt ebenfalls eine Schräglagenänderung. Auch das Bremsenquietschen am Prüfstand ist in diesem Fall mit dem Fahrzeug beim Einparken vergleichbar, wie Falke [2010] gezeigt hat.

Durch Messung des Kippwinkels und des Kippmoments am Bremsengeräuschprüfstand ergibt sich die Möglichkeit, die Schräglage auch im Simulationsmodell zu beeinflussen und dadurch eine Kurvenfahrt simulativ zu bewerten. Abbildung 4.5 zeigt anhand der so gewonnenen Simulationsergebnisse, dass bei dieser Bremse eine Linkskurve die Bremsbeläge vollflächiger anliegen lässt, wohingegen eine Rechtskurve zu einer Verstärkung der Schräglage führt. Der kolbenseitige Belag steht nun auslaufseitig nicht mehr in Kontakt zur Bremsscheibe.

#### 4.2.4 Belagverschleiß

Durch die Reibung zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag verschleißt der Bremsbelag und, in deutlich geringerem Maße, auch die Bremsscheibe. Die Modellierung des Bremsbelags in der Ausgangsgeometrie mit ebener Oberfläche kann damit nur eine Idealisierung des realen Zustands während einer Bremsung sein.

Die in Abbildung 4.4 und 4.5 mit idealer Belag- und Scheibengeometrie simulierten Kontaktflächen können nicht der Realität entsprechen, da sonst ein Teil des Belags nicht in Kontakt treten und damit nicht verschleifen würde.

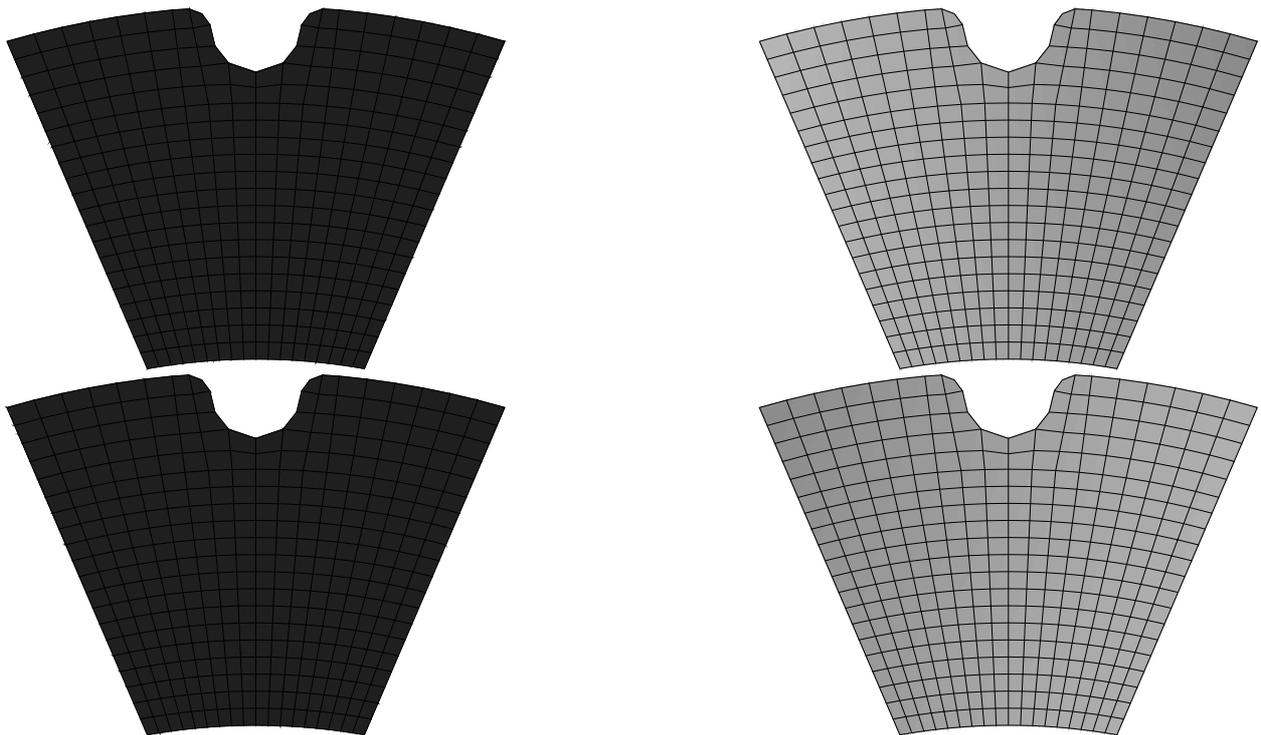
Bajer u. a. [2004] schlagen vor, den Verschleißprozess mit abzubilden, indem die Knoten des Finite Elemente Netzes des Bremsbelags verschoben werden. Für die Umgebung jedes Knotens auf der Oberfläche des Bremsbelags wird im Betriebspunkt bei aufgebrachtem Bremsdruck und Scheibenrotation der Kontaktdruck  $\sigma$  und die Gleitgeschwindigkeit  $v_{rel}$  ermittelt. Daraufhin wird der Knoten um einen Wert proportional zu  $\sigma v_{rel}$  normal zur Bremsscheibenoberfläche verschoben, sodass der Kontakt wieder geöffnet ist. Die Gleichgewichtslage mit neuer Kontaktdruckverteilung  $\sigma$  kann nun erneut berechnet werden. Dieser Prozess wird iterativ wiederholt, bis sich eine realistischere Kontaktdruckverteilung einstellt und der gesamte Kontakt geschlossen ist.

Die Rechenzeit für dieses iterative Verfahren ist aufgrund schlechter Konvergenz bei direkter Beeinflussung von Knoten im Kontakt hoch. Das bei nichtlinearen Berechnungen verwendete Newton Schema konvergiert wegen der Steifigkeitsänderung beim erneuten Schließen des Kontakts nur langsam und nur bei kleinen Verschiebungen von einigen  $\mu\text{m}$ . Um ein vorgegebenes Verschleißmaß zu erreichen, ist somit eine hohe Zahl an Iterationen notwendig.

In Abbildung 4.6 ist die geschlossene Kontaktfläche (schwarz) und die nun fast konstante Kontaktdruckverteilung (hellgrau) nach 100 Iterationsschritten erkennbar.

Mit der Berücksichtigung des Belagverschleißes mit dem oben dargestellten Verfahren sind Effekte, die durch eine konstruktive Beeinflussung der Schräglage entstehen, nicht mehr darstellbar. Außerdem führt eine Abbildung der Kurvenfahrt nun zum gleichen Ergebnis wie im Geradeauslauf.

Abu-Bakar u. a. [2005a] und Abu-Bakar u. a. [2005b] zeigten, dass die Oberfläche von neuen und gebrauchten Bremsbelägen im unbelasteten Zustand zahlreiche Unebenheiten aufweist. Eine Berücksichtigung dieser Unebenheiten im Finite Elemente Modell führt bei einer stillstehenden Bremse zu einer besseren Korrelation der Kontaktdruckverteilung mit Messungen. Außerdem kann damit eine gute Übereinstimmung zwischen Bremsgeräuschversuch



**Abbildung 4.6:** Geschlossene Kontaktfläche in schwarz (links) und Kontaktdruckverteilung (rechts) von innerem (oben) und äußerem Bremsbelag (unten) mit Berücksichtigung des Einlaufens

und Simulation erzielt werden. Demgegenüber steht der erhöhte Aufwand, die Oberfläche der Bremsbeläge gesondert vermessen zu müssen.

Hier kann eine große Zahl von Simulationen unter geeigneter Variation der Belagoberflächenstruktur in Verbindung mit einer Simulation des Verschleißprozesses die Sensitivität der Bremse gegenüber diesen Einflüssen aufzeigen. Heussaff u. a. [2012] untersuchte die Oberflächenstruktur verschiedener Bremsbeläge und ermittelte daraus Kennwerte, mit denen die Belagoberfläche beschrieben und für eine Finite Elemente Simulation modelliert werden kann.

Neben dem Verschleiß im Rahmen des Einlaufens, der einen Einfluss auf die Kontaktsituation hat und im  $\mu\text{m}$ -Bereich liegt, kann auch der Verschleiß im  $\text{mm}$ -Bereich abgebildet werden, der sich nach 10000 km bis 60000 km Fahrleistung ergibt. Hier ist die Verschiebung der Eigenfrequenzen der Bremsbeläge entscheidend. Außerdem ändert sich bei Belägen mit abgeschrägten Kanten die Größe der Kontaktfläche zur Bremsscheibe. Dieser Verschleiß kann durch eine einfache Änderung der Belaggeometrie abgebildet werden. Thermisch oder chemisch bedingte Alterungsprozesse im Belagmaterial bleiben dabei unberücksichtigt und müssen gegebenenfalls gesondert über eine Anpassung der Materialparameter modelliert werden.

### 4.2.5 Temperaturverteilung

Neben den Deformationen, die durch Vorspannung und Bremskraft verursacht werden, können auch jene durch den Temperaturanstieg infolge der Bremsung berücksichtigt werden. Dabei sind insbesondere Dehnungen interessant, die durch den Temperaturgradienten  $\nabla\theta$  in Bremsbelag und Bremsscheibe entstehen. Die Bremsscheibe, d.h. der Reibring dehnt sich radial aus und wird teilweise durch den kälteren Bremsscheibentopf zurückgehalten, wodurch sich auch eine axiale Verschiebung ergibt. Die Bremsbeläge sind nicht länger eben, sondern werden leicht ballenförmig, da das Reibmaterial im Kontakt zur Scheibe stärker erwärmt wird als die Rückenplatte. Dadurch kann sich eine veränderte Kontaktdruckverteilung gegenüber der Ausgangssituation einstellen, die jedoch bei längeren Bremsungen in Folge von Verschleiß wieder etwas eingeebnet wird.

## 4.3 Lineare Stabilitätsanalyse

Nachdem durch quasistatische Berechnung der Betriebspunkt des Bremssystems ermittelt wurde, wird die eigentliche Stabilitätsanalyse durchgeführt. Da die Stabilitätsanalyse nur auf die in Kapitel 2 definierten Systemmatrizen zurückgreift, müssen sämtliche Nichtlinearitäten unberücksichtigt bleiben.

### 4.3.1 Linearisierung

Nichtlineare Steifigkeiten, z.B.  $k = k(\sigma, \theta)$  können im Betriebspunkt ausgewertet werden, die daraus gegebenenfalls entstehenden Effekte höherer Ordnung werden jedoch vernachlässigt. Insbesondere können Kontakte nur noch die Zustände geöffnet, geschlossen gleitend oder geschlossen haftend annehmen. Ein Öffnen und Schließen in Folge von Schwingungen ist mathematisch nicht durch eine lineare Abhängigkeit abbildbar. Einzige Ausnahme bildet hierbei der Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelägen, in dem eine konstante Führungsgeschwindigkeit definiert ist. Diese Kontaktgleichungen können für Schwingungen näherungsweise linearisiert werden, siehe auch Kapitel 6.4 zum Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag.

### 4.3.2 Reelle Eigenwertberechnung

Nach der Linearisierung im Betriebspunkt werden die modalen Eigenschaften des Bremsystems durch die drei Matrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \widehat{\mathbf{K}}$  mit  $n$  Freiheitsgraden vollständig beschrieben, siehe Kapitel 2. Aufgrund der Modellierung ist die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit. Die Matrix der geschwindigkeitsproportionalen Terme  $\mathbf{C}$  ist reell, die verschiebungsproportionalen Terme in  $\widehat{\mathbf{K}}$  können jedoch aufgrund der Strukturdämpfung auch komplexe Einträge enthalten, siehe Kapitel 3.6.

Um nun eine Stabilitätsanalyse durchzuführen, müssen die  $m$  kleinsten Eigenwerte bis zu einer, durch die menschliche Hörschwelle vorgegebenen, Maximalfrequenz ermittelt werden.

Allgemein stellt sich folgendes Problem:

Sei  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$  und  $\mathbf{M}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit und  $\widehat{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{n,n}$ .

$$\text{Finde } \lambda_j \in \mathbb{C}, \varphi_j \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \left( \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \widehat{\mathbf{K}} \right) \varphi_j = \mathbf{0} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.1)$$

Dabei kann aus dem Eigenwert  $\lambda_j = i\omega_j - \delta_j$  die Eigenkreisfrequenz  $\omega_j$  und die Abklingkonstante  $\delta_j$  bestimmt werden.

Da nach Dassault Systèmes [2012] kein effizienter Algorithmus verfügbar ist, der dieses Problem für große  $n \in \mathbb{N}$  exakt löst, wird zuerst ein vereinfachtes System gelöst und das ursprüngliche System (4.1) dann darauf projiziert. Dies wird im Folgenden beschrieben.

Das System wird in die folgenden Matrizen aufgeteilt. Sei:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{C}^t) && \text{Dämpfungsmatrix, symmetrisch} \\ \mathbf{G} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}^t) && \text{gyroskopische Matrix, schiefsymmetrisch} \\ \mathbf{K} &:= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \widehat{\mathbf{K}} + \widehat{\mathbf{K}}^t \right) && \text{Steifigkeitsmatrix, symmetrisch} \\ \mathbf{N} &:= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \widehat{\mathbf{K}} - \widehat{\mathbf{K}}^t \right) && \text{zirkulatorische Matrix, schiefsymmetrisch} \\ \mathbf{S} &:= \operatorname{Im} \left( \widehat{\mathbf{K}} \right) && \text{Strukturdämpfungsmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es gilt dann  $\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$  und  $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{N} + i\mathbf{S}$ . Diese Matrizen entsprechen den in Kapitel 2.1 definierten Matrizen gleichen Namens.

Die  $m$  ersten reellen Eigenvektoren  $\varphi_{0,j} \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ) sind definiert durch:

$$\text{Finde } \lambda_{0,j} \in \mathbb{C}, \varphi_{0,j} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } (\lambda_{0,j}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \varphi_{0,j} = \mathbf{0} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.3)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{0,j}$  sind in diesem Fall rein imaginär und es gilt für die reellen Eigenfrequenzen  $\omega_{0,j} = \text{Im}(\lambda_{0,j})$ .

Mit  $\kappa_j = -\lambda_{0,j}^2$  ist dies ein generalisiertes, symmetrisches Eigenwertproblem erster Ordnung. Im Falle einer lumped-mass Formulierung des Finite Elemente Programms liegt  $\mathbf{M}$  als Diagonalmatrix vor, die direkt invertiert werden kann. Dann liegt ein symmetrisches Eigenwertproblem erster Ordnung vor. Das Eigenwertproblem (2.14) der in Kapitel 2.3 definierten Matrix  $\mathbf{B}$  entspricht dem Eigenwertproblem in Gleichung (4.3).

Es existieren zahlreiche effiziente Algorithmen zur Lösung dieses Problems, beispielsweise der häufig implementierte Lanczos-Algorithmus. Dieser ist bei Golub und Van Loan [1996] ausführlich beschrieben und eignet sich speziell für die Berechnung der größten bzw. kleinsten Eigenwerte einer dünnbesetzten Matrix, da er in diesem Fall schnell konvergiert. Es existieren Varianten des Lanczos-Algorithmus für symmetrische bzw. unsymmetrische Systeme, die sich im Rechenaufwand und der Konvergenzrate unterscheiden. Da an dieser Stelle nur die  $m$  ersten bzw. kleinsten Eigenwerte und Eigenvektoren eines symmetrischen Systems gesucht werden, können die Vorteile des symmetrischen Lanczos-Algorithmus genutzt werden.

Der von Kaplan [2001] und Bennighof und Leoucq [2004] beschriebene Automated-Multi-level-Substructuring (AMLS) Algorithmus ist nochmals effizienter, besitzt jedoch für massive Gussbauteile mit breitbandigen Systemmatrizen eine verringerte Genauigkeit. Da bei der im nächsten Abschnitt beschriebenen Projektion jedoch nur die Eigenvektoren  $\varphi_{0,j}$  und nicht die Eigenfrequenzen  $\omega_{0,j} = \text{Re}(\lambda_{0,j})$  weiterverwendet werden, ist eine Verwendung des AMLS Algorithmus im Allgemeinen ohne signifikante Verschlechterung der Ergebnislösung möglich.

### 4.3.3 Projektion der Systemmatrizen

Da die zirkulatorischen Terme  $\mathbf{N}$  und die Dämpfungsterme  $\mathbf{G}, \mathbf{D}, i\mathbf{S}$  bei der reellen Eigenwertanalyse nicht berücksichtigt wurden, ist das reelle System immer grenzstabil, d.h. es ist hier keine Aussage über die Systemstabilität möglich. Das Stabilitätsverhalten des entsprechenden M-K-Systems ist in Kapitel 2.3 beschrieben.

Nun kann das ursprüngliche System (4.1) auf die  $m$ , nach Satz 2.8 paarweise orthogonalen, Eigenvektoren  $\varphi_{0,j} \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ) des reellen Systems (4.3) projiziert werden. Zur

Übersichtlichkeit wird zuerst die orthogonale Matrix  $\Phi_0$  definiert.

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &:= (\varphi_{0,1}, \dots, \varphi_{0,m}) \in \mathbb{R}^{n,m} \\
M^* &:= \Phi_0^t M \Phi_0 \in \mathbb{R}^{m,m} \\
C^* &:= \Phi_0^t C \Phi_0 \in \mathbb{R}^{m,m} \\
\widehat{K}^* &:= \Phi_0^t \widehat{K} \Phi_0 \in \mathbb{C}^{m,m}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dieses Gleichungssystem wird als projiziertes oder reduziertes System bezeichnet. Die Eigenvektoren  $\psi_j \in \mathbb{C}^m$  ( $j = 1, \dots, m$ ) des reduzierten Systems sind über das folgende Differentialgleichungssystem definiert:

$$\text{Finde } \lambda_j^* \in \mathbb{C}, \psi_j \in \mathbb{C}^m \text{ mit } \left( \lambda_j^{*2} M^* + \lambda_j^* C^* + \widehat{K}^* \right) \psi_j = \mathbf{0} \quad (j = 1, \dots, m) \tag{4.5}$$

Üblicherweise ist  $m \ll n$ . Dann kann dieses Problem effizient gelöst werden. Hierfür wird das Eigenwertproblem zweiter Ordnung auf ein spezielles Eigenwertproblem erster Ordnung der Dimension  $2m$  für die Matrix  $A^*$  gebracht.

$$A^* := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{*-1} \widehat{K}^* & -M^{*-1} C^* \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Nach Berechnung der Eigenvektoren  $\psi_j \in \mathbb{R}^m$  des reduzierten Systems können die ursprünglichen Eigenvektoren  $\varphi_j$  durch Rückprojektion approximiert werden:

$$\varphi_j^* := \Phi_0 \psi_j \approx \varphi_j \quad (j = 1, \dots, m) \tag{4.7}$$

Somit wird statt dem ursprünglichen Eigenwertproblem (4.1) zuerst das reelle Eigenwertproblem (4.3) und danach das reduzierte Eigenwertproblem (4.5) gelöst. Der folgende Satz ist Grundlage dafür, dass dieses Vorgehen zu brauchbaren Ergebnissen führt.

**Satz 4.1** (Projektion):

Im oben definierten Fall gilt für  $m = n$ :

$$\lambda_j^* = \lambda_j \quad \varphi_j^* = \varphi_j \tag{4.8}$$

Beweis: Die beiden Aussagen gelten aufgrund der paarweisen Orthogonalität der Eigenvektoren  $\varphi_{0,j}$  und der daraus folgenden linearen Unabhängigkeit. Damit ist die Menge  $\varphi_{0,j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Die Projektion ist ein reiner Basiswechsel und ändert die Eigenwerte  $\lambda_j$  nicht.

Dimension m	höchste berechnete Eigenfrequenz	Zahl der Moden < 16 kHz	Zahl der instabilen Moden < 16 kHz
15	1 kHz	15	0
64	5 kHz	64	7
144	10 kHz	144	16
255	16 kHz	255	24
355	20 kHz	255	25
532	25 kHz	255	25
777	30 kHz	255	25
1280	40 kHz	256	25
1974	50 kHz	256	25

**Tabelle 4.2:** Anzahl der prognostizierten Eigenfrequenzen und Instabilitäten in Abhängigkeit von der Dimension  $m$  bei der Projektion

Bei geeigneter Wahl von  $m$  gilt für die Eigenwerte  $\lambda_j^* \approx \lambda_j$ . Somit gilt auch für die Eigenfrequenzen  $\omega_j^* \approx \omega_j$  und Abklingkonstanten  $\delta_j^* \approx \delta_j$ . Entsprechend kann ebenfalls für die Eigenvektoren  $\varphi_j^* \approx \varphi_j$  sichergestellt werden. Im Folgenden werden einige Kriterien für die Bestimmung von  $m$  analysiert.

In Tabelle 4.2 ist die Zahl der prognostizierten Instabilitäten in Abhängigkeit der, bei der Projektion verwendeten, Dimension  $m$  aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass  $m$  mindestens so groß gewählt werden muss, dass alle Eigenfrequenzen im hörbaren Bereich erfasst sind. Für größere  $m$  ändert sich die Zahl der prognostizierten Instabilitäten, die Geräusche im hörbaren Frequenzbereich verursachen können, kaum. Die Frage, ob die im Modell und den Systemmatrizen existierenden Instabilitäten prognostiziert werden oder andere, falsche Instabilitäten, kann hier nicht abschließend beantwortet werden, da keine exakte Referenzlösung mit  $m = n$  verfügbar ist. Außerdem ist keine Aussage über den Fehler im Betrag der negativen Dämpfung  $\zeta$  möglich.

Die Rechenzeit und die benötigten Speicherressourcen können minimiert werden, wenn  $m$  nicht zu groß gewählt wird. Die Wahl eines optimalen Werts für  $m$  muss für jedes System unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Rechenleistung und der gewünschten Ergebnisgüte getrennt erfolgen.

Insbesondere bei vorhandenen diskreten Dämpfungstermen in der Matrix  $\mathbf{D}$  ist eine Abhängigkeit der Ergebnisgüte von  $m$  zu erwarten. Da diese Einträge der Matrix  $\mathbf{D}$  nicht bei der reellen Eigenwertanalyse auf Grundlage des M-K-Systems berücksichtigt werden, ist die vollständige Erfassung bei der Projektion  $\mathbf{C}^* = \Phi_0^t \mathbf{C} \Phi_0$  nicht gewährleistet. Somit ergibt sich unter Umständen eine Abhängigkeit der Ergebnisse der Stabilitätsanalyse von  $m$ .

### 4.3.4 Komplexe Eigenwertberechnung

Die eigentliche Stabilitätsanalyse besteht in der Berechnung der komplexwertigen Eigenwerte  $\lambda_j^*$  und Eigenvektoren  $\psi_j$  des reduzierten Gleichungssystems (4.5).

Für die Berechnung eignet sich nach Deuffhard und Bornemann [2002] der QR-Algorithmus mit vorausgehender Konjugation auf Hessenberggestalt, da nun die Dimension  $m$  des Systems vergleichsweise gering ist, eine vollbesetzte unsymmetrische Matrix vorliegt und meist alle  $m$  Eigenwerte gesucht sind. Zuerst wird die Systemmatrix  $\mathbf{A}^*$  unter orthogonalen Transformationen auf Hessenberggestalt gebracht, d.h. bis auf die erste untere Nebendiagonale ist nur die obere rechte Hälfte der Matrix besetzt. Der QR-Algorithmus formt die Matrix dann mittels abwechselnder Givens-Rotationen und Householder-Transformationen auf rechte obere Dreiecksgestalt um.

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{QR}, \tag{4.9}$$

wobei  $\mathbf{Q}$  orthogonal ist und  $\mathbf{R}$  eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Aus dieser Dreiecksmatrix können dann die Eigenwerte  $\lambda_j^*$  abgelesen werden, siehe Golub und Van Loan [1996] für weitere Details.

Die Invertierung von  $\mathbf{M}^*$  in der Definition von  $\mathbf{A}^*$  kann vermieden werden, wenn der QZ-Algorithmus implementiert wird, der direkt das generalisierte Eigenwertproblem löst. Details dazu finden sich ebenfalls bei Golub und Van Loan [1996].

Die Interpretation der nun erhaltenen Berechnungsergebnisse wird in Kapitel 8 beschrieben.

## 5 Materialparameter

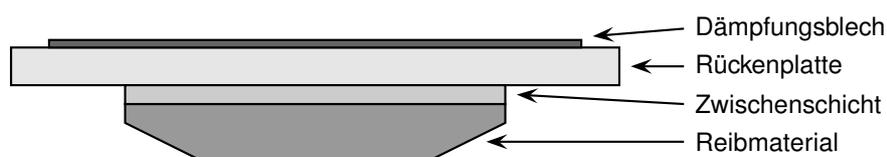
In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass es für eine prognosesichere Vorhersage von Bremsenquietschen von entscheidender Bedeutung ist, die Eigenfrequenzen des MK-Systems exakt bestimmen zu können. Die Modenkopplung, die durch die zirkulatorischen Anteile ausgelöst wird, und die mit der Modenkopplung verbundene Selbsterregung des Systems sind sehr sensibel bzgl. des Eigenfrequenzabstands benachbarter Moden. Deshalb müssen die Eigenfrequenzen relativ zueinander so genau wie möglich bestimmt werden.

Die entscheidenden Parameter sind hierbei die Dichte und die Steifigkeit der verschiedenen Materialien. Die exakte Bestimmung der Dichte ist mit geringem Aufwand durchführbar und soll hier nicht näher betrachtet werden. Demgegenüber stellt die Bestimmung der Steifigkeiten bei manchen Bauteilen, wie dem Bremsbelag, eine Herausforderung dar.

Im Folgenden werden die Besonderheiten in der Modellierung für das Reibmaterial und das sogenannte Dämpfungsblech der Bremsbeläge erläutert sowie mehrere Messverfahren zur Bestimmung der benötigten Materialparameter vorgestellt und miteinander verglichen.

### 5.1 Reibmaterial

Das Reibmaterial der Bremsbeläge ist neben der Bremsscheibe direkt an der Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme beteiligt. Deshalb unterliegt es hohen mechanischen und thermischen Belastungen. Es besteht aus einer Vielzahl unterschiedlicher Komponenten wie Kautschuk, Fasern, metallischen Zusätze, Schmierstoffe, Abrasivstoffe und weitere. Diese



**Abbildung 5.1:** Schematischer Aufbau eines PKW-Bremsbelags mit Dämpfungsblech

werden mit Hilfe von Harz bei erhöhter Temperatur zusammengepresst. Ein Überblick über die verschiedenen Inhaltstoffe und deren Einsatzzweck ist bei Burckhardt [1991] zu finden.

Häufig existiert eine weitere wenige Millimeter dicke Zwischenschicht, die zwischen der Rückenplatte und dem eigentlichen Reibmaterial liegt. Da diese nicht am Reibkontakt zur Bremsscheibe beteiligt ist, kann die Materialzusammensetzung unter anderen Prämissen erfolgen. Sie zeichnet sich oft durch einen höheren Kautschukanteil aus und ist daher weniger steif und stärker dämpfend. Das Schwingungsverhalten des gesamten Bremsbelags wird durch die Schubsteifigkeit der Zwischenschicht stark beeinflusst.

Die Steifigkeiten und Dämpfungswerte des Reibmaterials an Bremsbelägen hängen von zahlreichen Umgebungsvariablen sowie der mechanischen und thermischen Vorbelastung ab. Die Untersuchungen von Hornig und von Wagner [2011] deuten auf Frequenz- und Druckabhängigkeit hin. Yuhas und Isaacson [1998] stellten eine Temperaturabhängigkeit der Messergebnisse an Reibmaterialproben fest. Außerdem besitzt das Reibmaterial ein stark richtungsabhängiges Materialverhalten, das im nächsten Abschnitt näher beschrieben wird.

### 5.1.1 Transversale Isotropie

Da die Inhaltsstoffe im Herstellungsprozess unter hohem Druck verpresst werden, richten sich faserförmige Bestandteile des Reibmaterials und der Zwischenschicht senkrecht zur Pressrichtung aus. Yuhas und Isaacson [1998] zeigten durch Anregung von Probenkörpern im Ultraschallbereich, dass die Longitudinalwellengeschwindigkeiten verschieden sind, je nachdem, ob die Welle in Richtung der Pressung verläuft oder senkrecht dazu. Daher ist eine Modellierung des Reibmaterials als transversal isotropes Material sinnvoll.

Im Gegensatz zum isotropen Materialmodell, das mit zwei Parametern auskommt, z.B. Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$ , sind für eine vollständige Beschreibung eines transversal isotropen Materials fünf unabhängige Parameter nötig.

Die Herleitung der fünf unabhängigen Materialparameter orientiert sich an Buck [2008].

Sei  $\Sigma \in \mathbb{R}^{3,3}$  der symmetrische Cauchy'sche Spannungstensor 2. Ordnung und  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3,3}$  der symmetrische Green-Lagrange Dehnungstensor 2. Ordnung.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die Elemente beider Tensoren können in Vektorform dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

Die beiden Tensoren werden mit einem linearen Materialgesetz verknüpft.

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} \epsilon_{kl} \qquad (5.3)$$

Dieses Materialgesetz wird durch einen Tensor 4. Ordnung, den sogenannten Elastizitätstensor abgebildet, dessen Einträge durch die Matrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6,6}$  dargestellt werden.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & C_{11}^{33} & C_{11}^{23} & C_{11}^{13} & C_{11}^{12} \\ C_{11}^{22} & C_{22}^{22} & C_{11}^{33} & C_{23}^{22} & C_{13}^{22} & C_{12}^{22} \\ C_{11}^{33} & C_{22}^{33} & C_{33}^{33} & C_{23}^{33} & C_{13}^{33} & C_{12}^{33} \\ C_{11}^{23} & C_{22}^{23} & C_{33}^{23} & C_{23}^{23} & C_{13}^{23} & C_{12}^{23} \\ C_{11}^{13} & C_{22}^{13} & C_{33}^{13} & C_{23}^{13} & C_{13}^{13} & C_{12}^{13} \\ C_{11}^{12} & C_{22}^{12} & C_{33}^{12} & C_{23}^{12} & C_{13}^{12} & C_{12}^{12} \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

Unter Annahme der Existenz eines 2-fach differenzierbaren elastischen Potentials folgt nach dem Satz von Schwarz, vgl. Heuser [2002], die Symmetrie des Tensors  $\mathbf{C}$ , also  $C_{kl}^{ij} = C_{ij}^{kl}$ .

Somit besitzt der anisotrope lineare Elastizitäts-Tensor 21 unabhängige Einträge.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & C_{23}^{11} & C_{13}^{11} & C_{12}^{11} \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & C_{23}^{22} & C_{13}^{22} & C_{12}^{22} \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & C_{23}^{33} & C_{13}^{33} & C_{12}^{33} \\ C_{23}^{11} & C_{23}^{22} & C_{23}^{33} & C_{23}^{23} & C_{13}^{23} & C_{12}^{23} \\ C_{13}^{11} & C_{13}^{22} & C_{13}^{33} & C_{13}^{23} & C_{13}^{13} & C_{12}^{13} \\ C_{12}^{11} & C_{12}^{22} & C_{12}^{33} & C_{12}^{23} & C_{12}^{13} & C_{12}^{12} \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

Es existieren 3 orthogonal zueinander stehende Ebenen bzgl. derer die Einträge des Tensors invariant sind. Dies wird mit dem Begriff Orthotropie beschrieben. Eine Koordinatentransformation entsprechend einer Achsenspiegelung an den Normalen der Ebenen ändert die Einträge des Elastizitätstensors nicht, d.h.  $C_{kl}^{ij} = \beta_{i'}^i \beta_{j'}^j \beta_k^{k'} \beta_l^{l'} C_{k'l'}^{i'j'} = C_{kl}^{ij}$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && \text{Achsen Spiegelung an der 1-Achse} \\
 \beta_2 &= \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^2 & \beta_3^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && \text{Achsen Spiegelung an der 2-Achse} \\
 \beta_3 &= \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^2 & \beta_3^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Achsen Spiegelung an der 3-Achse}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dies kann nur erfüllt sein, wenn zahlreiche Einträge identisch 0 sind. Damit hat der orthotrope lineare Elastizitätstensor folgende Form:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12}^{12} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Bei transversal isotropem Material ändert sich der Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  auch dann nicht, wenn das Material in der isotropen Ebene, hier der 1,2-Ebene, um einen beliebigen Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  gedreht wird.

$$\beta_\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Drehung um die 3-Achse

Daraus folgen mit Hilfe der Identität  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  die Bedingungen  $C_{33}^{11} = C_{33}^{22}$ ,  $C_{13}^{13} = C_{23}^{23}$ ,  $C_{11}^{11} = C_{22}^{22}$  und  $C_{12}^{12} = \frac{1}{2}(C_{11}^{11} + C_{22}^{11})$  und für den Elastizitätstensor des transversal isotropen Materials schließlich:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{11}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11}) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Als fünf unabhängige Materialparameter können beispielsweise  $C_{11}^{11}$ ,  $C_{33}^{33}$ ,  $C_{22}^{11}$ ,  $C_{33}^{11}$  und  $C_{13}^{13}$  gewählt werden.

In der Anwendung der Finite Elemente Simulation werden oft die Größen  $E_{ii}$ ,  $G_{ij}$  und  $\nu_{ij}$  (engl. engineering constants) verwendet, siehe Dassault Systèmes [2012]. Diese erfüllen den folgenden Zusammenhang zwischen Spannungen  $\Sigma$  und Dehnungen  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Diese Größen können mit dem eben definierten Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{C_{33}^{33} \left( (C_{11}^{11})^2 - (C_{11}^{22})^2 \right) + 2 (C_{33}^{11})^2 (C_{22}^{11} + C_{11}^{11})}{C_{11}^{11} C_{33}^{33} - (C_{33}^{11})^2} & E_{33} &= C_{33}^{33} - 2 \frac{(C_{33}^{11})^2}{C_{11}^{11} + C_{22}^{11}} \\ G_{23} = G_{13} &= \frac{1}{2} (C_{11}^{11} - C_{22}^{11}) & G_{12} &= C_{13}^{13} \\ \nu_{23} = \nu_{13} &= \frac{(C_{11}^{11} - C_{22}^{11}) C_{33}^{11}}{C_{11}^{11} C_{33}^{33} - (C_{33}^{11})^2} & \nu_{12} &= \frac{C_{22}^{11} C_{33}^{33} - (C_{33}^{11})^2}{C_{11}^{11} C_{33}^{33} - (C_{33}^{11})^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5.1.2 Vergleich der Messverfahren

Ein ideales Messverfahren bestimmt die Materialparameter unter den identischen Rand- und Umweltbedingungen, die auch im Betriebszustand einer Bremse auftreten. Es existieren eine Reihe von verschiedenen Messverfahren, die jedoch alle Einschränkungen diesbezüglich besitzen. Die Kenntnis dieser Einschränkungen ermöglicht später eine bessere Bewertung der Prognosegüte von Ergebnissen aus der Simulation. Gegebenenfalls muss eine Kombination verschiedener Messverfahren eingesetzt werden, um die erforderliche Güte der Materialparameter zu erhalten.

In Tabelle 5.1 sind die grundlegenden Eigenschaften der einzelnen Messverfahren aufgelistet. Eine genaue Beschreibung der einzelnen Messverfahren und die Hintergründe der Vor- und Nachteile sind in den folgenden Abschnitten zu finden.

Messverfahren	Beschreibung	Vorteile	Nachteile
lokale Ultraschallmessung	Probenerstellung, statische Vorspannung, zusätzliche dynamische Anregung, Messung der Wellengeschwindigkeiten, analytische Auswertung	alle transversal isotropen Parameter bestimmbar, dynamisch	zu hohe Vorspannung, zu hoher Frequenzbereich, nicht zerstörungsfrei, aufwändige Probenerstellung
Ultraschallmessung am Gesamtbelag	statische Vorspannung, zusätzliche dynamische Anregung, Messung der Wellengeschwindigkeiten, analytische Auswertung	dynamisch, $G_{12}$ und $G_{23}$ bestimmbar, zerstörungsfrei	weder $E_{33}$ noch $E_{11}$ bestimmbar, zu hohe Vorspannung, zu hoher Frequenzbereich
Modalanalyse mit Eigenformen	Anregung durch Hammerschläge, Messung der Übertragungsfunktionen, Optimierung der Eigenfrequenzen und -formen	zerstörungsfrei, schnell durchführbar, korrekter Frequenzbereich	keine Vorspannung, $E_{33}$ nicht bestimmbar, FEM-Rechnung und Optimierung benötigt
Eigenfrequenzmessung ohne Eigenformen	Anregung durch Hammerschlag, Messung der Übertragungsfunktion, Optimierung der Eigenfrequenzen	zerstörungsfrei, sehr schnell durchführbar, korrekter Frequenzbereich	keine Vorspannung, $E_{33}$ nicht bestimmbar, FEM-Rechnung und Optimierung benötigt
Grindo Sonic	Erstellung eines Probenkörpers, Anregung durch Hammerschlag, Messung der Übertragungsfunktion, analytische Auswertung	keine FEM-Rechnung und keine Optimierung benötigt, korrekter Frequenzbereich	nicht zerstörungsfrei, keine Vorspannung, nur $E_{11}$ bestimmbar, aufwändige Probenerstellung
Kompressibilitätsmessung	statische Belastung über Bremskolben, Messung der Verformung, Vergleich mit FEM-Rechnung	zerstörungsfrei, $E_{33}$ bestimmbar	keine dynamischen Ergebnisse, falscher Bremsdruckbereich, nur $E_{33}$ bestimmbar, FEM-Rechnung nötig
dynamische Piezoanregung	Probenerstellung, statische Belastung, zusätzliche dynamische Anregung, analytische Auswertung	$E_{33}$ bestimmbar, korrekter Frequenzbereich, korrekte Vorspannung	nicht zerstörungsfrei, momentan nur $E_{33}$ bestimmbar, aufwändige Probenerstellung

**Tabelle 5.1:** Übersicht über verschiedene Messverfahren zur Bestimmung der Materialeigenschaften des Reibmaterials von Bremsbelägen

### 5.1.3 Ultraschall

Yuhas beschrieb in einem von Chen u. a. [2006] veröffentlichten Artikel die Messung der 5 unabhängigen Materialparameter von Reibmaterial mittels der Laufzeiten von Wellen im Ultraschallbereich bei 1-3 MHz. Hierfür werden Materialproben in zwei unterschiedlichen Geometrien benötigt. Über den Ultraschallmesskopf müssen sowohl Longitudinal- als auch Transversalwellen angeregt werden. Um eine rauschfreie Übertragung der Wellen vom Ultraschallsender in die Materialprobe und aus der Materialprobe in den Empfänger zu gewährleisten, muss der Messaufbau vorgespannt sein. Die benötigten Anpressdrücke sind höher als die Kontaktdrücke beim Bremsenquietschen. Da die Anregfrequenz im Bereich von 1-3 MHz liegt, ist nach Chen u. a. [2006] die Kompressionswellenlänge von der Größenordnung 1 mm. Die Länge der verpressten Fasern liegt in der gleichen Größenordnung. Somit kann nicht ausgeschlossen werden, dass das Schwingungsverhalten bei der Messung von Effekten im Zusammenhang mit Partikeln im mm-Bereich dominiert wird. Die makroskopischen Schwingungen im geräuschrelevanten unteren kHz-Bereich mit BiegeWellenlängen in der Größenordnung von 100 mm sind in diesem Fall davon zu unterscheiden.

Eine weitere zerstörungsfreie Ultraschallmessmethode wurde von Yuhas u. a. [2010] beschrieben. Dabei werden die Ultraschallwellen axial und tangential durch den gesamten Bremsbelag mit der Belagrückenplatte geleitet. Diese Messung dient jedoch primär der Qualitätskontrolle und kann nicht zur Bestimmung sämtlicher Materialparameter des Reibmaterials verwendet werden, da nur zwei Messungen durchgeführt werden.

Die Varianz der Messwerte innerhalb eines Belags ist bei Yuhas u. a. [2010] größer als die Varianz zwischen verschiedenen Belägen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass das Pressverfahren einen großen Einfluss auf das lokale Materialverhalten hat und dass dies bei Messungen, die auf einer lokalen Probenentnahme basieren, berücksichtigt werden sollte. Globale Verfahren, wie die im nächsten Abschnitt beschriebene Modalanalyse, integrieren diese lokalen Varianzen auf und liefern ein homogenes Materialmodell.

### 5.1.4 Modalanalyse, Eigenfrequenzmessung, Grindo Sonic

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Materialparameter ist der Abgleich der Eigenfrequenzen und Eigenmoden zwischen Messung und Simulation.



**Abbildung 5.2:** Hammerschlagversuch zur Modalanalyse bzw. Eigenfrequenzmessung an einem Bremsbelag, aus Tobón [2011]

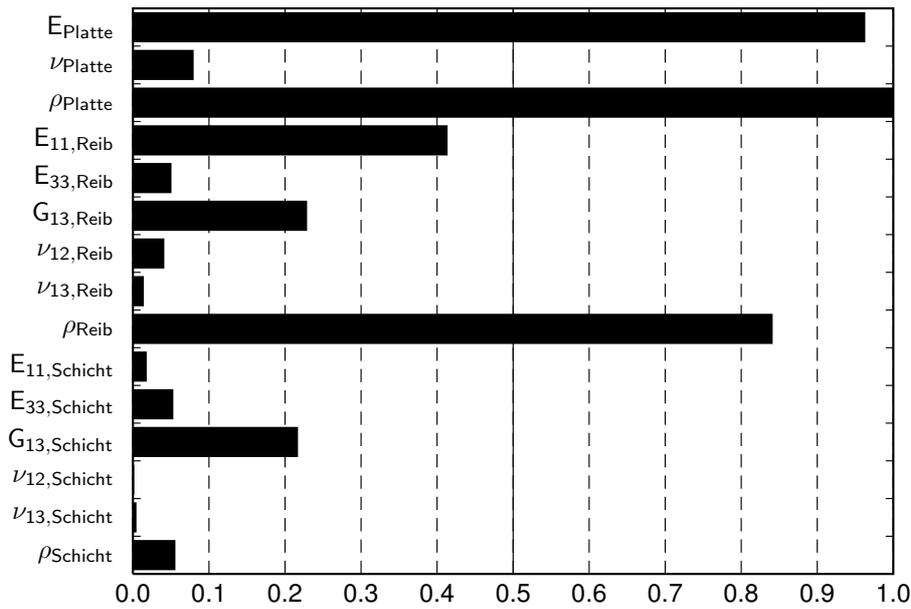
## Modalanalyse

Bei der Modalanalyse wird ein Bremsbelag bestehend aus Belagrückenplatte und Reibmaterial mit mehreren Hammerschlägen angeregt und die Beschleunigung mit Hilfe eines Beschleunigungsaufnehmers, eines Mikrofons oder eines Lasers gemessen. Aus den Übertragungskurven können die ersten Eigenfrequenzen und Eigenformen bestimmt werden. Parallel dazu werden die Eigenfrequenzen und -formen über ein Finite Elemente Modell berechnet und mit den Messwerten abgeglichen. Nun können die freien Materialparameter mittels eines Optimierungsalgorithmus bestimmt werden. Eine genauere Beschreibung des Verfahrens des Modalabgleichs ist bei Natke [1992] beschrieben.

Guggenberger [2007, 2009] zeigte, dass über einen Modalabgleich Materialparameter bestimmt werden können, die nach Buck [2008] für die Stabilitätsbewertung von Bremsen geeignet sind.

## Eigenfrequenzmessung

Eine vereinfachte Form der Modalanalyse ist die alleinige Ermittlung der Eigenfrequenzen. Die Information aus den Eigenformen wird nicht zur Optimierung genutzt. Für diese Messung ist nur ein einziger Hammerschlagversuch notwendig. Es ist jedoch eine genaue Systemkenntnis nötig, um eine geeignete Stelle für die Anregung zu finden und um später die berechneten und gemessenen Eigenfrequenzen zuordnen zu können.



**Abbildung 5.3:** Sensitivitäten  $\sum \left( \frac{\partial f_i}{\partial p} \right)^2$  der Materialparameter  $p$  auf die ersten Eigenfrequenzen  $f_i$  eines Bremsbelags normiert nach  $\max \sum \left( \frac{\partial f_i}{\partial p} \right)^2$

### Sensitivitäten der verschiedenen Materialparameter

In Abbildung 5.3 sind die Sensitivitäten der einzelnen Materialparameter auf die Eigenfrequenzen eines Bremsbelags zu erkennen. Die Sensitivitäten wurden durch Eigenfrequenzberechnungen am Finite Elemente Modell eines Bremsbelags unter Variation der hier aufgeführten Parameter ermittelt. Dabei ist der euklidische Abstand der ersten Eigenfrequenzen bis 10 kHz des Basissystems (oberer Index 0) gegenüber einem gestörten System (oberer Index  $j$ ) mit entsprechend variiertem Parameter  $p^j$  aufgetragen.

$$\frac{\sum_{i: f_i \leq 10 \text{kHz}} \left( \frac{\partial f_i}{\partial p^j} \right)^2}{\max_j \left( \sum_{i: f_i \leq 10 \text{kHz}} \left( \frac{\partial f_i}{\partial p^j} \right)^2 \right)} \approx \frac{\sum_{i: f_i \leq 10 \text{kHz}} \left( \frac{f_i^j - f_i^0}{p^j - p^0} \right)^2}{\max_j \left( \sum_{i: f_i \leq 10 \text{kHz}} \left( \frac{f_i^j - f_i^0}{p^j - p^0} \right)^2 \right)} \quad (5.12)$$

Der Parameter mit der höchsten Sensitivität ist somit auf 1 normiert.

Zahlreiche Parameter, insbesondere jene der Zwischenschicht, haben nur einen sehr geringen Einfluss auf die Eigenfrequenzen des Bremsbelags und können somit nicht durch eine Eigenfrequenzmessung bestimmt werden. Bei vorheriger Kenntnis der Dichten  $\rho_{Platte}$ ,  $\rho_{Reib}$ ,  $\rho_{Schicht}$  und des Elastizitätsmoduls der Belagrückplatte  $E_{Platte}$  können der tangentiale Elas-

tizitätsmodul  $E_{11,Reib}$  sowie die Schubmoduln  $G_{13,Reib}$  und  $G_{13,Schicht}$  bestimmt werden, da die Sensitivitäten mit einem Wert über 0.2 relevant sind. Für die Parameter  $\nu_{Platte}$ ,  $E_{33,Reib}$ ,  $\nu_{12,Reib}$ ,  $\nu_{13,Reib}$ ,  $E_{11,Schicht}$ ,  $E_{33,Schicht}$ ,  $\nu_{12,Schicht}$  und  $\nu_{13,Schicht}$  reichen die Sensitivitäten jedoch nicht aus, um diese über eine Eigenfrequenzmessung zu bestimmen.

Im Folgenden wird untersucht, ob diese Materialparameter des Bremsbelags einen Einfluss auf die Ergebnisse einer Stabilitätsuntersuchung am gesamten Bremssystem besitzen.

Abbildung 5.4 zeigt die Sensitivitäten der oben untersuchten Parameter auf die Ergebnisse von Stabilitätsanalysen am gesamten Bremssystem. Hier ist der euklidische Abstand der Lehr'schen Dämpfungsmaße  $\zeta_i$  der Eigenfrequenzen  $f_i$  bis 12 kHz aufgetragen.

$$\frac{\sum_{i: f_i \leq 12 \text{kHz}} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial p^j} \right)^2}{\max_j \left( \sum_{i: f_i \leq 12 \text{kHz}} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial p^j} \right)^2 \right)} \approx \frac{\sum_{i: f_i \leq 12 \text{kHz}} \left( \frac{\zeta_i^j - \zeta_i^0}{p^j - p^0} \right)^2}{\max_j \left( \sum_{i: f_i \leq 12 \text{kHz}} \left( \frac{\zeta_i^j - \zeta_i^0}{p^j - p^0} \right)^2 \right)} \quad (5.13)$$

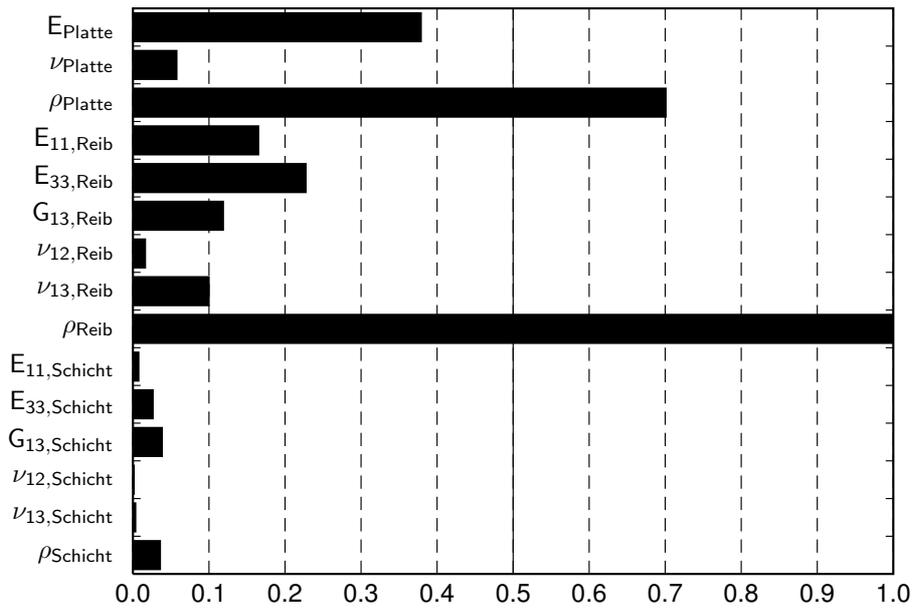
Der Parameter mit der höchsten Sensitivität ist damit wieder auf 1 normiert.

Die Parameter der Zwischenschicht haben nur einen sehr geringen Einfluss, sodass eine weniger exakte Charakterisierung dieses Materials als sinnvoll erscheint. Neben den durch die Eigenfrequenzmessung bestimmbar Parameter hat jedoch auch die Querkontraktion  $\nu_{13,Reib}$  und insbesondere der axiale Elastizitätsmodul  $E_{33,Reib}$  einen hohen Einfluss auf das Ergebnis. Da der axiale Elastizitätsmodul  $E_{33,Reib}$  nicht durch die Eigenfrequenzmessung bestimmt werden kann, werden mit der Kompressibilitätsmessung und der dynamischen Messung mit Piezoanregung in axialer Richtung im Folgenden mehrere Verfahren zu dessen statischen und dynamischen Ermittlung vorgestellt.

Zuvor folgt jedoch ein weiteres Messverfahren, das einen Spezialfall der Modalanalyse darstellt.

### Grindo Sonic

Grindo Sonic ist ein von der Fa. Lemmens vertriebenes System zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls verschiedener Materialien, das ebenfalls auf der Grundlage der Modalanalyse beruht. Nach Brecht u. a. [2003] wird eine balkenförmige, weich gelagerte Materialprobe durch einen Impuls angeregt. Mit einer Kraftmessdose bzw. einem Beschleunigungsaufnehmer wird dabei die Antwortfunktion bestimmt. Nun kann, unter der Annahme, dass keine



**Abbildung 5.4:** Sensitivitäten  $\sum \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial p}\right)^2$  der Materialparameter  $p$  auf die positiven und negativen Dämpfungen  $\zeta_i$  der Stabilitätsanalyse eines Bremssystems normiert nach  $\max \sum \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial p}\right)^2$

Lagerungseinflüsse vorhanden sind, der Elastizitätsmodul  $E$  näherungsweise durch die folgende Formel bestimmt werden:

$$E_{11} = \frac{m}{bT^2} \left( 3.9332 \left(\frac{l}{h}\right)^3 + \frac{l}{h} + 22.635 \right) \quad (5.14)$$

wobei  $l$ ,  $b$ ,  $h$  und  $m$  die Länge, Breite, Höhe und Masse des Probenkörpers sind und  $T = \frac{2}{f}$ .

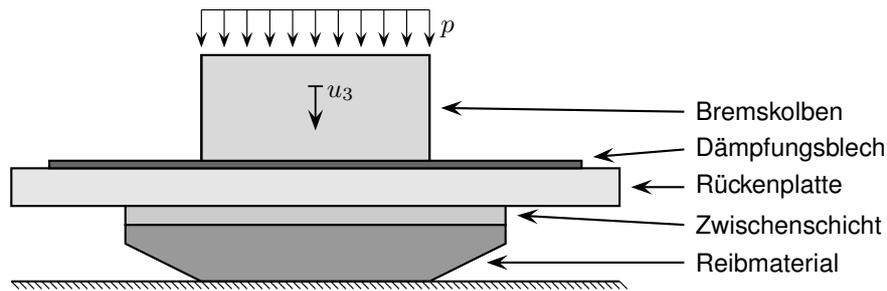
Möser und Kropp [2010] leiteten über die Euler-Bernoulli Balkentheorie analytisch die frei-frei Eigenfrequenzen an Balken endlicher Länge her. Unter Berücksichtigung der durch Reflexionen an den Balkenenden entstehenden Nahfeldern folgt für die erste Eigenfrequenz:

$$f_1 = \frac{\left(\frac{3\pi}{2} + 0.0176\right)}{2\pi} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad (5.15)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment  $I = \frac{bh^3}{12}$  und der Querschnittsfläche  $A = \rho bh$ . Aufgelöst nach dem Elastizitätsmodul  $E$  ergibt dies

$$E_{11} = 0.94646 \frac{f^2 l^4 \rho}{h^2}. \quad (5.16)$$

Das entspricht, bis auf Rundungsfehler, dem ersten Summanden in Gleichung (5.14).



**Abbildung 5.5:** Schematischer Aufbau des Messverfahrens zur Belagkompressibilität

Diese Methode ist zwar schnell und ohne Finite Elemente Modell auszuwerten, da jedoch sehr weitreichende Annahmen getroffen werden und die Anisotropie sowie der Effekt der Querkontraktion vernachlässigt werden, ist die Verwertbarkeit der Ergebnisse fraglich.

### 5.1.5 Kompressibilitätsmessung

Im Rahmen von Qualitätskontrollen während der Produktion von Bremsbelägen werden sogenannte Kompressibilitätsmessungen durchgeführt. Dies dient der Sicherstellung, dass das Bremspedal bei einer Vollbremsung vom Fahrer nicht bis zum Anschlag durchgedrückt wird. Bei der Kompressibilitätsmessung werden die Bremsbeläge wie im Fahrzeug mit einem hohen axialen Druck  $p$  belastet und die dabei auftretende Verschiebung  $u_3$  gemessen, siehe Abbildung 5.5.

Es gibt mehrere internationale Standards zur Messung der Bremsbelagkompressibilität, wie SAE J2468 [2006], ISO 6310 [2009] oder EKB 1003 [2006].

Für die Bestimmung der statischen axialen Elastizitätsmoduln  $E_{33,Reib}$  und  $E_{33,Schicht}$  können Messergebnisse nach diesen Standards zugrunde gelegt und mit einem Finite Elemente Modell des Messaufbaus abgeglichen werden. Die Spezifikationen in den Standards, wie beispielsweise eine Belastung entsprechend 100 bar bzw. 160 bar Druck am Bremskolben, Messung der Differenzverschiebung gegenüber 5 bar Kolbendruck, exakt vorgegebene Druckaufbaugeschwindigkeit und Haltezeit bei maximalem Druck, Auswertung beim dritten bzw. sechsten Belastungszyklus, zeigen, dass die Messwerte stark von der genauen Durchführung abhängen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass weitere Effekte, wie die Ebenheit des Kontakts zwischen Reibmaterial und der Auflage, das Druckniveau oder das Kriechen des Materials einen hohen Einfluss besitzen. Der für das Komfortproblem Bremsenquietschen relevante Druckbereich liegt zwischen 1 bar und 30 bar. Deshalb ist die direkte Übertragbarkeit von Ergebnissen aus Kompressibilitätsmessungen nach Standard fraglich. Gegebenenfalls muss

zumindest der Messdruck auf ein niedrigeres Niveau angepasst werden. In Abbildung 3.23 sind Messkurven bei einer Belastung bis 30 bar aufgezeichnet.

### 5.1.6 Dynamische Messung mit Piezoanregung in axialer Richtung

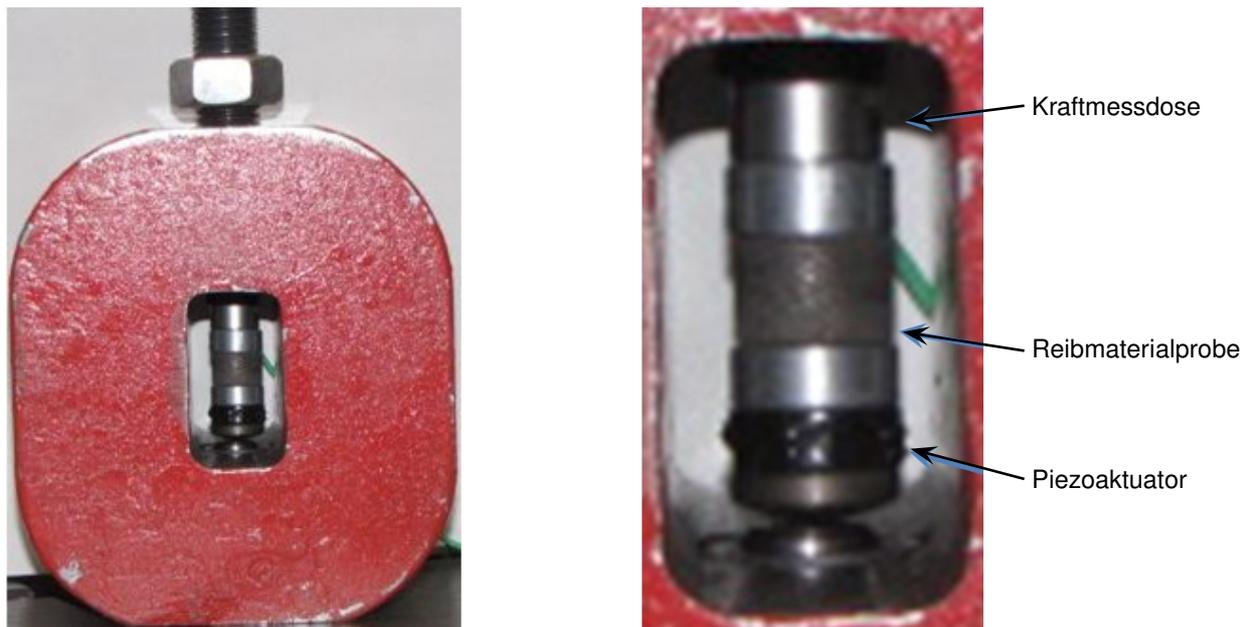
Nonaka u. a. [2010] führten Messungen an einer Reibmaterialprobe durch. Diese wurde zuerst in axialer Richtung statisch vorgespannt und danach in der gleichen Richtung mit einem Piezoaktuator im Frequenzbereich bis 4 kHz dynamisch angeregt. Die dynamischen Amplituden lagen im Bereich von  $1\ \mu\text{m}$ . Nonaka u. a. [2010] zeigten, dass die dynamische Steifigkeit unter statischer Vorspannung signifikant höher war, als die rein statische Steifigkeit. Außerdem war die dynamische Steifigkeit in starkem Maße von der statischen Vorspannung abhängig. Bei einer Erhöhung der statischen Vorspannung von 2.5 bar auf 25 bar beobachteten sie eine Vervierfachung der dynamischen Steifigkeit.

Hornig und von Wagner [2011] vermaßen mit einem ähnlichen Messaufbau Bremsbelagproben bestehend aus einem 20 mm mal 20 mm großen Stück von Rückenplatte und Reibmaterial. Die Ergebnisse zeigten ebenfalls einen Unterschied zwischen statischer und dynamischer Steifigkeit. Diese war wiederum vom statischen Vorspannkraftniveau abhängig. Die Frequenzabhängigkeit der Steifigkeit im Bereich zwischen 1 kHz und 5 kHz war kaum ausgeprägt. Das mechanische Modell der Belagprobe entsprach einem Kelvin-Voigt Material. Das heißt das Material konnte durch eine masselose Feder und einen parallel geschalteten Dämpfer abgebildet werden.

Während bei der dynamischen Messung von Hornig und von Wagner [2011] das Ziel in der Bestimmung aller fünf Materialparameter lag und die axiale Messung nur einen ersten Teil darstellt, ist bei einer vorhergehenden Bestimmung der Materialparameter durch eine Modalanalyse nur die axiale Steifigkeit  $E_{33}$  für das Bremsenquietschen von Interesse.

Tobón [2011] bestimmte die axiale Steifigkeit an Reibmaterialproben mit einem Durchmesser von 16 mm und einer Länge von 11 mm. Die Probe wurde in einem steifen Stahlrahmen eingespannt, wie in Abbildung 5.6 zu erkennen ist. Die dabei über die Vorspannschraube aufgebrachte Vorspannkraft in axialer Richtung bildete die statische Belastung beim Bremsen ab. Der Stahlrahmen wurde mit Hilfe von Finite Element Simulationen so bemessen, dass die erste frei-frei Eigenmode eine Frequenz über 9 kHz besaß und so die Messungen in einem großen Frequenzbereich möglichst gering beeinflusst wurden.

Über eine Fußpunkterregung mit einem Piezoaktuator wurde die Materialprobe in Schwingung versetzt. Diese Schwingungen konnten am oberen Ende mit einer Kraftmessdose auf-



**Abbildung 5.6:** Messverfahren von Tobón [2011]: Gesamtaufbau (links), Ausschnitt mit Probe, Kraftmessdose und Aktuator (rechts)

gezeichnet werden. Die Kraftmessdose diente außerdem der Bestimmung der statischen Vorspannkraft.

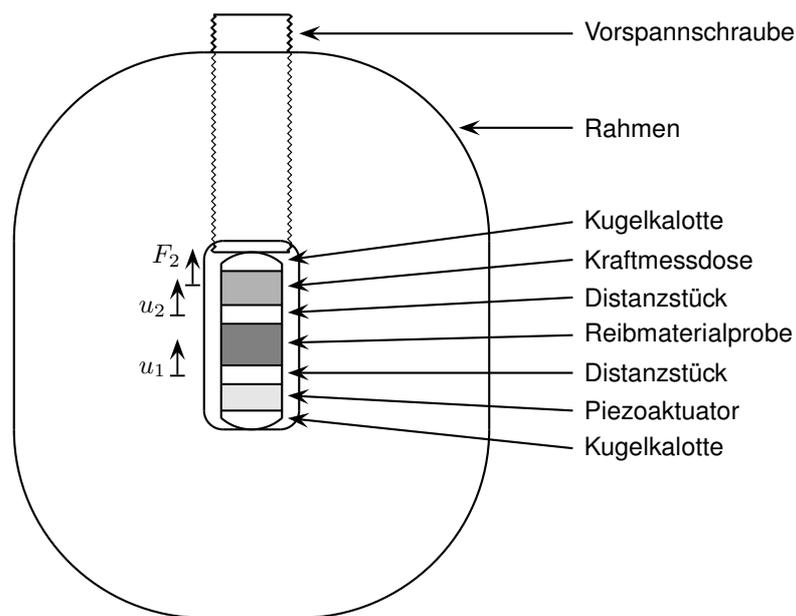
Die Verschiebungen am unteren und am oberen Ende der Materialprobe wurden mit Hilfe eines In-Plane Laservibrometers gemessen. Da die Materialprobe selbst nicht reflektierend war, wurden zwei Distanzstücke aus Aluminium eingefügt. Dadurch stellte Tobón [2011] auch eine gleichmäßige Spannungsverteilung über den Querschnitt sicher.

Über zwei Kugelkalotten am unteren und oberen Ende wurde sichergestellt, dass keine Querkräfte in der Materialprobe auftraten und dass die Anregung ausschließlich in axialer Richtung erfolgte. Der Piezoaktuator musste im eingeschalteten Zustand immer vorgespannt sein, damit keine Beschädigungen auftreten konnten. Mit Hilfe der Kugelkalotten ließ sich dies ebenfalls sicherstellen.

Über den Piezoaktuator wurde das System mit einer Frequenz zwischen 1 kHz und 5 kHz dynamisch angeregt. Tobón [2011] wertete den gemessenen Phasenwinkel zwischen den Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  aus, siehe Abbildung 5.7.

Mit Hilfe der Differentialgleichung für einen in Longitudinalrichtung schwingenden Stab

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.17)$$



**Abbildung 5.7:** Schematischer Aufbau des Messverfahrens von Tobón [2011]

konnte die Wellengeschwindigkeit  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  abgeleitet werden. Dies ermöglichte Tobón [2011] die Bestimmung des axialen Elastizitätsmoduls aus dem gemessenen Phasenversatz bei bekannter Probenlänge  $l$  und -dichte  $\rho$ .

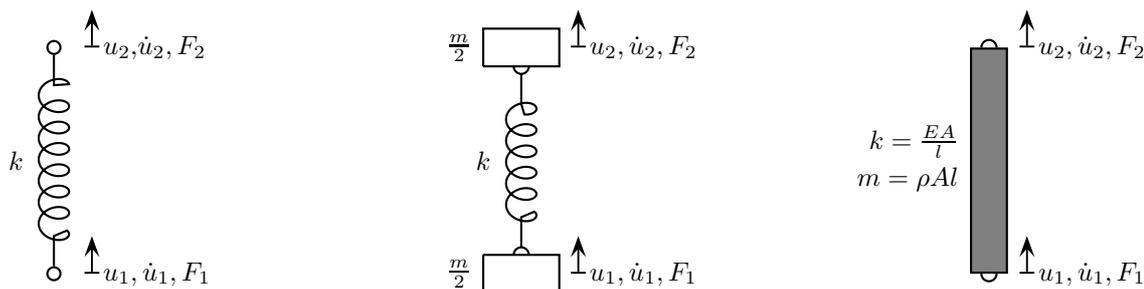
Durch Messungen von Materialien mit bekanntem Elastizitätsmodul, z.B. Stahl oder Aluminium, oder durch Messungen ohne Materialprobe erfolgte eine Validierung der Ergebnisse.

Da das eingeschwungene System in Phase schwang, musste eine Anregung mit einer Impulsfunktion erfolgen. Dadurch unterlagen die Messungen starken Schwankungen und die Wiederholbarkeit war gering.

Die Messungen von Tobón [2011] zeigen, dass die gemessenen Phasenwinkel sehr gering sind und somit das kontinuierliche Modell eines EA-Stabs im Anregungsbereich unter 5 kHz ggf. durch das von Hornig und von Wagner [2011] verwendete Kelvin-Voigt Modell ersetzt werden kann. Dabei entspricht das mechanische Modell der Reibmaterialprobe einer massefreien Feder mit komplexwertiger Federsteifigkeit  $k \in \mathbb{C}$ . Trägheitseffekte werden vernachlässigt.

Eine Verbesserung der Messgenauigkeit gegenüber den Ergebnissen von Tobón [2011] wird bei eigenen Messungen durch den Einsatz einer zweiten Kraftmessdose erreicht, siehe Abbildung 5.8. Mit den beiden Kraftmessdosen und über ein Laservibrometer stehen an beiden Enden der Materialprobe Kraft- und Geschwindigkeitsinformationen zur Verfügung. Somit kann das System auch im eingeschwungenen Zustand charakterisiert werden.





**Abbildung 5.9:** Mechanisches Modell der Reibmaterialprobe: Kelvin-Voigt bzw. masselose Feder (links), Feder mit diskreter Masseverteilung (Mitte), kontinuierlicher EA-Stab (rechts)

Modellierung der Probe als masselose Feder den Elastizitätsmodul zu berechnen.

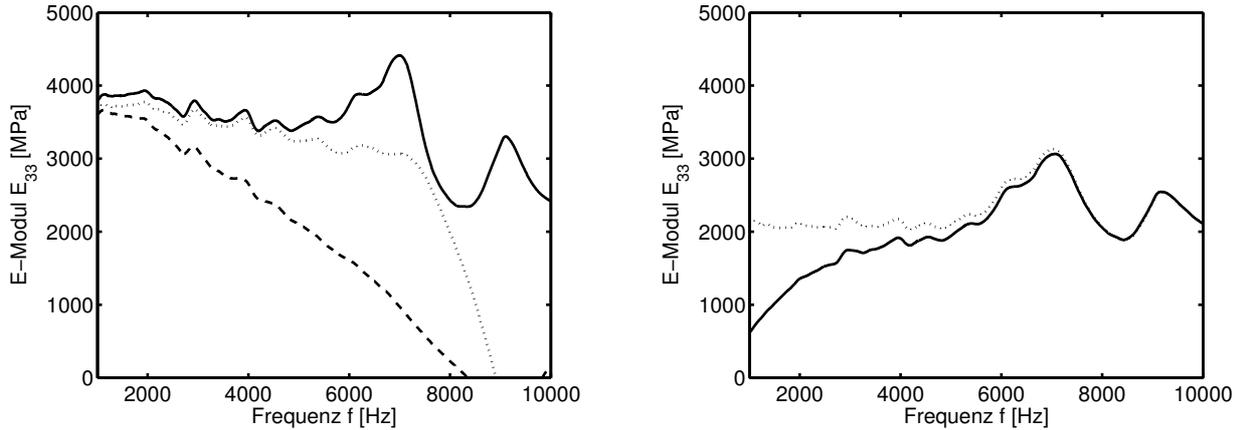
$$E_{33} = \frac{l}{A} \operatorname{Re}(k) = \frac{l}{A} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\frac{u_1}{F_1} - \frac{u_2}{F_2}}\right) \quad (5.19)$$

Dabei wird wiederum die Massenträgheit der Materialprobe vernachlässigt. Nun können die in Reihe geschalteten Impedanzen gemäß den bei Möser und Kropp [2010] beschriebenen Rechenregeln ausgewertet werden.

Das Ergebnis ist wiederum in Abbildung 5.10 aufgetragen (gestrichelte Linie). Es fällt auf, dass die beiden Kurven trotz des gleichen mechanischen Modells nur im unteren Frequenzbereich übereinstimmen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Vernachlässigung der Massenträgheit bei höheren Frequenzen nicht zu korrekten Ergebnissen führen kann.

Nach dem Modell der masselosen Feder nach Kelvin-Voigt treten in den beiden Kraftmessdosen über und unter der Materialprobe die gleichen Kräfte auf. In Abbildung 5.11 ist das Verhältnis der beiden Größen aufgetragen. Es ist erkennbar, dass diese Annahme im statischen Fall und für niedrige Anregungsfrequenzen gilt. Im Frequenzbereich über 2 kHz treten jedoch so große Abweichungen auf, dass diese Annahme nicht länger gerechtfertigt ist. Die Einflüsse aus der Massenträgheit sind dann nicht länger vernachlässigbar. Bei 8 kHz befindet sich ein Minimum der Funktion, hier tritt eine Eigenfrequenz des Gesamtsystems mit longitudinalem Anteil auf.

Um auch die Masse mit berücksichtigen zu können, wird das mechanische Modell angepasst, wie in Abbildung 5.9 in der Mitte zu erkennen ist. Neben der Federsteifigkeit  $k$  wird nun auch die Masse  $m = \rho Al + 2 \frac{m_{KMP}}{2}$  der Reibmaterialprobe und der beiden Kraftmessdosen je zur Hälfte berücksichtigt und über zwei diskrete Anteile an den beiden Enden der Feder modelliert. Der Elastizitätsmodul  $E_{33}$  wird aus der Differenz der beiden Impedanzen bestimmt.



**Abbildung 5.10:** Elastizitätsmodul  $E_{33}$  der dynamischen Messung mit Piezoanregung in axialer Richtung:  
 Kelvin-Voigt Modell (links, durchgehend)  
 Impedanzänderung mit und ohne Massenträgheit (links, gepunktet bzw. gestrichelt)  
 EA-Stab mit und ohne Korrekturfaktor (rechts, gepunktet bzw. durchgehend)

$$E_{33} = \frac{l}{A} \operatorname{Re}(k) = \frac{l}{A} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}} \right) \quad (5.20)$$

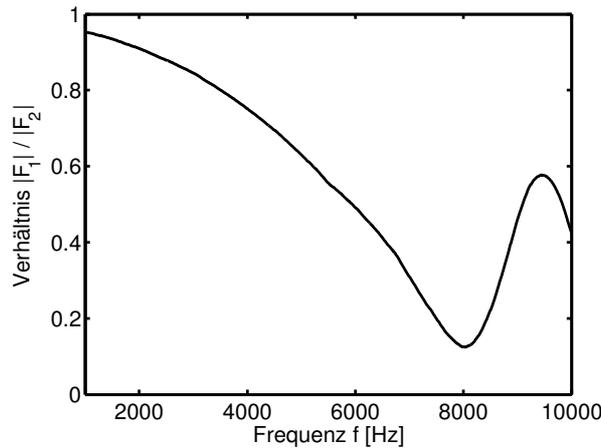
$$k_1 := \frac{u_1}{F_1} + \frac{1}{2} \Omega^2 m \quad k_2 := \frac{u_2}{F_2} - \frac{1}{2} \Omega^2 m \quad (5.21)$$

Das Ergebnis ist ebenfalls in Abbildung 5.10 aufgetragen (gepunktete Linie). Die Frequenzabhängigkeit von  $E_{33}$  ist nun im relevanten Frequenzbereich zwischen 1 kHz und ca. 5 kHz geringer ausgeprägt. Die beiden Kurven des axialen Elastizitätsmoduls  $E_{33}$  nach dem Kelvin-Voigt Modell und nach dem korrigierten Impedanzmodell stimmen bis ca. 6 kHz weitgehend überein. Die Ergebnisse zeigen jedoch weiterhin große Schwankungen gegenüber der Anregungsfrequenz.

Einen weiteren Ansatz zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_{33}$  bietet die Differentialgleichung des EA-Stabs, der in Abbildung 5.9 rechts dargestellt ist:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c := \sqrt{\frac{E_{33}}{\rho}} \quad (5.22)$$

Hierbei werden alle Trägheitseffekte der Reibmaterialprobe mit berücksichtigt. Mit den gemessenen Größen  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  kann die Differentialgleichung gelöst und die unbekannte Größe  $E_{33}$  bestimmt werden. Die Lösung der Differentialgleichung ist in Anhang B skizziert. Die noch unbekannte Wellenzahl  $\tilde{k} = \frac{\Omega}{c}$  ist die kleinste positive Lösung der folgenden



**Abbildung 5.11:** Dynamische Messung mit Piezoanregung in axialer Richtung:  
Verhältnis zwischen  $|F_1|$  und  $|F_2|$

nichtlinearen Gleichung:

$$0 = F_2 \left( u_2 - u_1 \cos \left( \tilde{k}l \right) \right) + F_1 \left( u_1 - u_2 \cos \left( \tilde{k}l \right) \right) \quad (5.23)$$

Daraus kann nun direkt der Elastizitätsmodul  $E_{33}$  bestimmt werden.

$$E_{33} = \frac{\Omega^2 \rho}{\tilde{k}^2} \quad (5.24)$$

Der in Abbildung 5.10 (rechts, durchgehend) aufgetragene Elastizitätsmodul  $E_{33}$  zeigt insbesondere im niedrigen Frequenzbereich ein von den vorhergehenden Modellierungen stark abweichendes Verhalten. Ursache hierfür ist eine numerische Instabilität des Algorithmus zur Auswertung des EA-Stabs. Für  $\tilde{k} \ll 1$  gilt:

$$0 = F_2 \left( u_2 - u_1 \cos \left( \tilde{k}l \right) \right) + F_1 \left( u_1 - u_2 \cos \left( \tilde{k}l \right) \right) \approx (F_1 - F_2) (u_1 - u_2) \quad (5.25)$$

Dies führt zu einer hohen Sensitivität des Elastizitätsmoduls  $E_{33}$  gegenüber den beiden Differenzen  $F_1 - F_2$  und  $u_1 - u_2$ . Insbesondere ist im unteren Frequenzbereich  $F_1 \approx F_2$ , siehe Abbildung 5.11. Kleine Messfehler führen damit zu großen Unsicherheiten im Ergebnis. In Abbildung 5.10 (rechts, gestrichelt) ist der Elastizitätsmodul  $E_{33}$  aufgetragen, der sich mit einer um 3,5% höheren gemessenen Kraft  $F_1$  ergeben würde. Im unteren Frequenzbereich ist der Einfluss der numerischen Instabilität gut zu erkennen.

Die Auswertung des Kelvin-Voigt Materialmodells ist im unteren Frequenzbereich  $< 4$  kHz numerisch stabiler, da hier die Summe  $F_1 + F_2$  ausgewertet wird. Damit können die Ergebnisse

des Kelvin-Voigt Materialmodells bis zu einer Frequenz von ca. 6 kHz für die Bremsgeräuschsimulation verwendet werden.

Die bei allen Modellierungen gefundene Abhängigkeit des E-Moduls  $E_{33}$  von der Frequenz  $f$  steht im Gegensatz zu dem von Hornig und von Wagner [2011] beschriebenen Verhalten. Es gibt zwei weitere Einflüsse, die diese Schwankungen erklären können. Einerseits ist die Dimension der Probe mit nur 16 mm Durchmesser und die notwendige Anordnung der Messaufnehmer in Reihe dafür verantwortlich, dass eine hohe Anfälligkeit des Messaufbaus gegenüber Biegeschwingungen besteht. Hier ist eine exakte Positionierung aller Bauteile nötig, was aufgrund des geringen Bauraumes innerhalb des Stahlrahmens schwer sicherzustellen ist. Außerdem sind die Messwerte des Lasers für die Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  insbesondere im niedrigen Frequenzbereich stark verrauscht. Hier könnten Messungen auf Basis von Beschleunigungsaufnehmern bessere Ergebnisse liefern, was jedoch wiederum den Bauraum einschränkt.

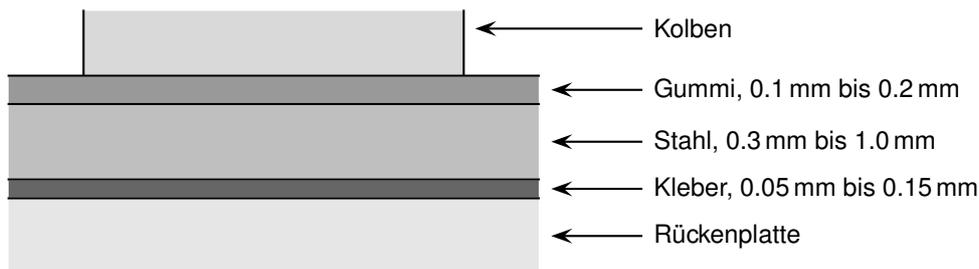
## 5.2 Dämpfungsblech

Dämpfungsbleche (engl. shims) werden auf der Rückseite der Bremsbeläge aufgebracht. Sie werden nur aus schwingungs- bzw. geräuschtechnischen Gründen in die Bremse eingebaut.

Bei einer Bremsung werden diese zuerst statisch durch den Bremsdruck axial belastet und dann durch den Reibschluss zu den Faustfingern bzw. dem Kolben auch auf Schub belastet. Sobald das Bremssystem eine Instabilität aufweist, kommen zusätzliche dynamische Deformationen hinzu, die sich durch eine Überlagerung von Biegeschwingungen und axialen Kompressionsschwingungen darstellen lassen.

### 5.2.1 Aufbau

Die Dämpfungsbleche bestehen aus einem Trägermaterial, üblicherweise ein Stahlblech, und einer oder mehreren Gummischichten. Diese werden entweder direkt auf das Blech vulkanisiert oder mit einem zusätzlichen Kleber aufgeklebt. Außerdem werden sie mit einer Kleberschicht ausgestattet, um auf die Belagrückenplatte geklebt werden zu können. In Abbildung 5.12 ist der Aufbau eines exemplarischen Dämpfungsblechs dargestellt. Die exakten Schichtdicken variieren je nach Hersteller, die angegebenen Maße stellen eine Näherung dar.



**Abbildung 5.12:** Exemplarischer Aufbau der Schichten eines Dämpfungsblechs

Als Kleber kommen beispielsweise Acryl-, Phenol- oder Silikonkleber zum Einsatz, um im gewünschten Temperatur- und Frequenzbereich eine möglichst hohe Dämpfung zu erhalten.

Neben diesem Grundsystem aus Blech, Gummi und Kleber, gibt es zahlreiche Zusatzschichten, die bestimmte weitere Eigenschaften des Dämpfungsblechs optimieren sollen. Teilweise wird auf der Rückseite eine Kleberschicht aufgebracht, um den gesamten Bremsbelag an die Bremsfaust bzw. den Kolben zu kleben. Eine zusätzliche Faserschicht verhindert das Auspressen des Klebers bei hohen Drücken. Zusätzliche Blechschichten erhöhen die Steifigkeit und ermöglichen auch den Einsatz von mehreren Klebern in einem Dämpfungsblech.

### 5.2.2 Eigenschaften von Dämpfungsblechen

Die folgende Aufzählung soll einen Überblick geben, wie ein Dämpfungsblech das Schwingungssystem des Bremsbelags bzw. der gesamten Bremse beeinflusst.

#### Steifigkeit

Das Dämpfungsblech bringt einerseits zusätzliche Masse in das System, andererseits wird aber auch die Steifigkeit durch die zusätzliche Metallschicht erhöht. Welcher dieser beiden gegenläufigen Effekte überwiegt, hängt stark von der Temperatur ab. Bei niedrigen Temperaturen erhöhen sich die Eigenfrequenzen bei einer frei-frei Eigenfrequenzmessung des Bremsbelags, d.h. der Effekt der zusätzlichen Steifigkeit ist relevanter gegenüber der zusätzlichen Masse. Dies ist beispielsweise bei Messungen von Guggenberger [2009] zu erkennen. Bei hohen Temperaturen kann aufgrund der verringerten Steifigkeit der Kleberschicht auch der umgekehrte Effekt eintreten. Die Frequenzen in Tabelle 5.2 wurden mit Hilfe eines Laser-Vibrometers an einem Bremsbelag mit und ohne Dämpfungsblech gemessen. In diesem Fall überwiegt der Steifigkeitseinfluss bei  $-10\text{ °C}$  und  $20\text{ °C}$  gegenüber der zusätzlichen Masse, bei  $60\text{ °C}$  verhält es sich umgekehrt.

Temperatur	1. Eigenfrequenz			2. Eigenfrequenz		
	-10 °C	20 °C	60 °C	-10 °C	20 °C	60 °C
ohne Dämpfungsblech	2773 Hz 1.78 %	2692 Hz 1.57 %	2588 Hz 1.24 %	4078 Hz 1.46 %	3972 Hz 1.35 %	3836 Hz 1.08 %
mit Dämpfungsblech	2877 Hz 2.04 %	2734 Hz 2.37 %	2564 Hz 1.48 %	4252 Hz 1.85 %	4008 Hz 2.38 %	3789 Hz 1.18 %

**Tabelle 5.2:** Eigenfrequenzen  $f$  und Lehr'sche Dämpfungsmaße  $\zeta$  eines Bremsbelags ohne/mit Dämpfungsblech

## Biegedämpfung

Das Dämpfungsblech soll in erster Linie die Dämpfung des gesamten Bremsbelags erhöhen, was an den Messwerten in Tabelle 5.2 ersichtlich ist.

Die hier vorgestellten theoretischen Grundlagen zur Biegedämpfung von unendlich ausgehenden Platten mit dünnen Dämpfungsschichten finden sich bei Möser und Kropp [2010].

Bei Platten mit einer einzelnen dünnen Dämpfungsschicht, einer sogenannten Entdröhn-schicht, kann die Systemdämpfung von Biegemoden unter der Annahme  $d_1 > d_2$  analytisch berechnet werden. Es gilt:

$$\zeta \approx 3 \frac{\zeta_2 \operatorname{Re}(E_2) d_2 (d_1 + d_2)^2}{E_1 d_1^3} \quad (5.26)$$

Dabei bezeichnen die Indizes  $\bullet_1$  Größen der Trägerplatte und  $\bullet_2$  Größen der Dämpfungsschicht. Um hohe Dämpfungen zu erreichen, muss das Dämpfungsmaterial einerseits einen hohen Elastizitätsmodul  $E_2$ , als auch einen hohen Verlustfaktor  $\zeta_2 = \frac{\eta_2}{2}$  besitzen. Außerdem ist die Dämpfungsschicht möglichst dick zu wählen, was mit Gewichts- und Bauraumzielen schlecht zu vereinbaren ist.

Mit Materialwerten aus Möser und Kropp [2010] kann für eine 5 mm Stahlplatte mit 1 mm Entdröhn-schicht eine Biegedämpfung von  $\zeta \approx 0.8\%$  realisiert werden.

Eine starke Verbesserung kann erreicht werden, wenn auf die Dämpfungsschicht noch eine steife dünne Platte geklebt wird. Dadurch wird die Dämpfungsschicht nicht mehr auf Längsdehnung, sondern auf Schub beansprucht (engl. constrained layer damping). Die Trägerplatte wird wieder mit  $\bullet_1$  bezeichnet, die Dämpfungsschicht mit  $\bullet_2$  und die dünne Abdeck-schicht mit  $\bullet_3$ . Es besteht nun eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfung, das Optimum des

Lehr'schen Dämpfungsmaßes  $\zeta$  beträgt:

$$\zeta_{opt} \approx 3 \frac{E_3 d_3 \zeta_2}{E_1 d_1 (2 + \sqrt{4 + \zeta_2^2})} \quad (5.27)$$

Die Frequenz dieses Maximums liegt bei

$$f_{opt} \approx \frac{1}{44} \frac{c_L d_1 \operatorname{Re}(G_2) \sqrt{4 + \zeta_2^2}}{d_2 d_3 E_3}. \quad (5.28)$$

Nach Möser und Kropp [2010] sind jedoch in einem breiten Bereich um die optimale Frequenz noch gute Dämpfungswerte zu erreichen. Hier hängt die Höhe der Dämpfung von  $\zeta_2$  und  $E_3$  ab, die nun unabhängig voneinander gewählt werden können. Der Schubmodul  $G_2$  geht nur noch in die Bestimmung der optimalen Frequenz ein. Somit können als Dämpfungsschicht vergleichsweise weiche Kunststoffe mit hohem Verlustfaktor eingesetzt werden und diese mit einem dünnen Stahlblech ergänzt werden. Die Dämpfungsbleche, die in Bremsbeläge eingebaut werden, besitzen im Allgemeinen diesen Aufbau.

Mit einem typischen Aufbau des Dämpfungsblechs bestehend aus 0.1 mm Kleber und 0.5 mm Stahlblech auf einer 5 mm Stahlplatte wird ein Dämpfungsmaximum  $\zeta \approx 20\%$  bei einer Frequenz  $f \approx 1000$  Hz erreicht. Somit kann mit einem vergleichbaren Gewichtszuwachs wie bei der reinen Dämpfungsschicht eine 25-fache Dämpfung erzielt werden.

### Hohe axiale Steifigkeit

Während einer Bremsung wird durch den aufgebauten Bremsdruck der Bremsattel aufgeweitet und die Brems Scheibe gemeinsam mit den Bremsbelägen zusammengepresst. Der dadurch für eine bestimmte Bremsverzögerung benötigte Kolbenweg ist jedoch aus Gründen des Bremsflüssigkeitshaushalts begrenzt und sollte für ein kundenwertiges Pedalgefühl minimiert werden. Ein Dämpfungsblech sollte daher eine möglichst hohe statische axiale Steifigkeit besitzen.

### Axiale Entkopplung und Dämpfung

Neben der statischen axialen Steifigkeit ist das dynamische Verhalten in axialer Richtung von Bedeutung. Aus der Theorie der Modenkopplung abgeleitet, ist dies einer der zentralen Stellhebel, um die Eigenfrequenzen von geräuschrelevanten Schwingformen zu beeinflussen, siehe Kapitel 3.3.

## Tangentiale Entkopplung und Reibung

Flint u. a. [2004] beschrieben den Einfluss der Schubsteifigkeit des Dämpfungsblechs auf das Stabilitätsverhalten von Bremsen gegenüber der axialen Entkopplung.

Diese Steifigkeit ist dabei immer im Zusammenhang mit der Reibung zwischen Dämpfungsblech und Bremskolben bzw. Bremsfaust zu betrachten. Die Wahl der Oberfläche des Dämpfungsblechs hat dabei einen entscheidenden Einfluss. Eine Minimierung der Reibung kann beispielsweise durch eine Edelstahloberfläche erreicht werden, die ggf. zusätzlich noch befeuchtet wird, siehe Kapitel 6.6. Strukturierte Gummioberflächen oder eine zusätzliche Kleberschicht, die Bremsbelag und Bremskolben fest verbindet, stellen eine maximal steife Verbindung zwischen Bremsbelag und Bremssattel sicher.

### 5.2.3 Eigenfrequenzmessung, Modalanalyse

Die Bestimmung der Biegedämpfung von Dämpfungsblechen ist Thema zahlreicher Untersuchungen. Insbesondere Flint [2002] beschrieb in seiner Dissertation zahlreiche Gesichtspunkte der Biegedämpfung.

Biegedämpfung in Form einer gedämpften Schubdeformation kann nur wirken, wenn das Dämpfungsblech auf eine steife Platte geklebt ist. Um für das Bremsenquietschen relevante Materialgrößen zu erhalten, sollten dabei sowohl die Steifigkeit, als auch die Dicke der Platte vergleichbar mit einem Bremsbelag sein. Dies folgt auch direkt aus Gleichung (5.27).

Guggenberger [2007, 2009] zeigte, dass an der Konfiguration Rückenplatte und Dämpfungsblech mit Hilfe von frei-frei Eigenfrequenzmessungen die Lehr'schen Dämpfungsmaße  $\zeta$  für die Eigenfrequenzen des Schwingsystems bestimmt werden können. Daraus lässt sich mit Hilfe eines modalen Abgleichs eine materialspezifische Dämpfung  $\zeta_2$  ermitteln. Da es sich dabei um eine auf Resonanzen basierte Methode handelt, können Dämpfungswerte nur für Eigenfrequenzen des Systems bestimmt werden.

Um die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung zu bestimmen, sollten somit Eigenfrequenzen im gesamten relevanten Frequenzbereich liegen, also ab 1 kHz. Eine weitere Bedingung ist, dass die Eigenfrequenzen der Platte möglichst weit auseinander liegen müssen. Dies erleichtert die Auswertung, da Dämpfungswerte dann auch nach der 3 dB-Methode bestimmt werden können und Messfehler sich nach Hoffrichter u. a. [2013] bei allen Auswertalgorithmen weniger in den Ergebnissen niederschlagen.

	Flint [2002]	Denys und Thompson [2010]	Hoffrichter u. a. [2013]
Größe der Platte	400mm 50mm 5mm	130mm 38mm 6mm	180mm 50mm 5mm
Eigenfrequenzen Biegung	166 Hz 459 Hz 900 Hz 1499 Hz 2224 Hz	1838 Hz 5131 Hz 9898 Hz 15969 Hz	820 Hz 2262 Hz 4419 Hz 7247 Hz
Eigenfrequenzen Torsion	780 Hz 1547 Hz 2401 Hz	3713 Hz 7700 Hz 12205 Hz 17432 Hz	1748 Hz 3633 Hz 5777 Hz 8290 Hz
Eigenfrequenzen In-Plane	1577 Hz	9584 Hz 19827 Hz	6694 Hz

**Tabelle 5.3:** Vergleich der ersten Eigenfrequenzen der Platten von Flint [2002], Denys und Thompson [2010] und Hoffrichter u. a. [2013], Werte über Finite Elemente Simulationen berechnet

Um Dämpfungswerte unabhängig von einer bestimmten Belageometrie bestimmen zu können, schlugen Flint [2002], Denys und Thompson [2010] und Hoffrichter u. a. [2013] standardisierte Messungen an rechteckigen Ersatzplatten vor. Tabelle 5.3 führt die verschiedenen Dimensionen und die sich daraus ergebende Verteilung der Eigenfrequenzen auf.

Zur Vermeidung von Fehlern in der Auswertung sollten nur solche Eigenfrequenzen berücksichtigt werden, die einen ausreichenden Frequenzabstand zu allen anderen Eigenfrequenzen haben. Die Anregung erfolgt immer orthogonal zur Plattenebene, sodass die In-Plane Schwingformen kaum angeregt werden. Eine geringe Anregung kann jedoch in der konkreten Versuchsdurchführung nicht ausgeschlossen werden. Durch Anregung und Messung in einer Ecke bzw. in der Mitte einer kurzen Seite der Platte kann die Amplitude der Biege- und Torsionsmoden verstärkt oder geschwächt werden. Eine alleinige Anregung nur der Biegemoden ist jedoch aufgrund der geringen Dimensionen der Stahlplatte praktisch nicht durchführbar. Trotzdem ermöglichen zwei getrennte Messungen gegebenenfalls eine erleichterte Auswertung.

Insgesamt stehen bei Flint [2002] 4 Eigenfrequenzen bis 900 Hz zur Verfügung, wenn die Dämpfung eine getrennte Auswertung der Eigenfrequenz bei 780 Hz und 900 Hz zulässt. Im Bereich von 1500 Hz liegen drei Eigenfrequenzen nahe beieinander, die sich gegenseitig beeinflussen. Der mögliche Auswertebereich liegt damit bei geringeren Frequenzen als der Anwendungsbereich von Dämpfungsblechen beim Bremsenquietschen.

Bei einer sorgfältigen Durchführung des Hammerschlagversuchs kann eine Anregung der In-Plane Moden ausgeschlossen werden. Somit stehen bei den Dämpfungsmessungen von Denys und Thompson [2010] 6 Eigenfrequenzen bis 12 kHz zur Verfügung. Die Schwingformen bei 15969 Hz und 17432 Hz beeinflussen sich bei höheren Dämpfungen gegenseitig, sodass diese nicht ausgewertet werden können.

Die von Hoffrichter u. a. [2013] gewählte Dimensionierung ermöglicht die Auswertung bei 8 Frequenzen bis 8 kHz, wiederum unter der Voraussetzung, dass die vorhandene In-Plane Schwingform nicht angeregt wird. Zwischen 10 kHz und 12 kHz folgen vier Schwingformen in einem engen Frequenzbereich, die den Auswertebereich begrenzen.

Nach Hoffrichter u. a. [2013] ist eine hohe Wiederholbarkeit der Messungen gegeben, wenn der Messaufbau, insbesondere die Lagerung der Platte, der Hammer zur Anregung und der Beschleunigungsaufnehmer standardisiert sind. Außerdem ist ein einheitlicher Auswertalgorithmus zur Bestimmung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes  $\zeta$  zu verwenden.

Kühn u. a. [2011] bestimmten die Steifigkeit und Dämpfung eines Dämpfungsblechs nicht am Gesamtsystem aus Rückenplatte und Dämpfungsblech, sondern maßen die Steifigkeiten der einzelnen Schichten des Dämpfungsblechs getrennt. Die Bestimmung der Steifigkeit der Kleberschicht alleine wurde dabei von Kühn u. a. [2011] als aufwändig beschrieben.

## 5.2.4 Kompressibilitätsmessung

Mit dem Standard EKB 1108 [2007] existiert ein vereinheitlichtes Messverfahren zur Bestimmung der axialen Steifigkeit von Dämpfungsblechen, das zur Kompressibilitätsmessung im vorhergehenden Abschnitt kompatibel ist und auf dem gleichen Prüfstand durchgeführt werden kann. Daher wird die axiale Steifigkeit von Dämpfungsblechen auch als Kompressibilität bezeichnet. Durch die geringere Kompressibilität von Dämpfungsblechen gegenüber dem Reibmaterial wird für die Auswertung der Kompressibilitätsmessung eine höhere Genauigkeit des Prüfaufbaus benötigt.

Bei Schwimmsattelbremsen wird das faustseitige Dämpfungsblech auf einer größeren Fläche belastet, als das kolbenseitige Dämpfungsblech. Dadurch ist der axiale Druck niedriger und die Druckverteilung gleichmäßiger. Untersuchungen, inwieweit das Druckniveau und vor allem die Druckverteilung die axiale Steifigkeit von Dämpfungsblechen beeinflussen, sind nicht bekannt.

### 5.2.5 Dynamische Messung in axialer Richtung

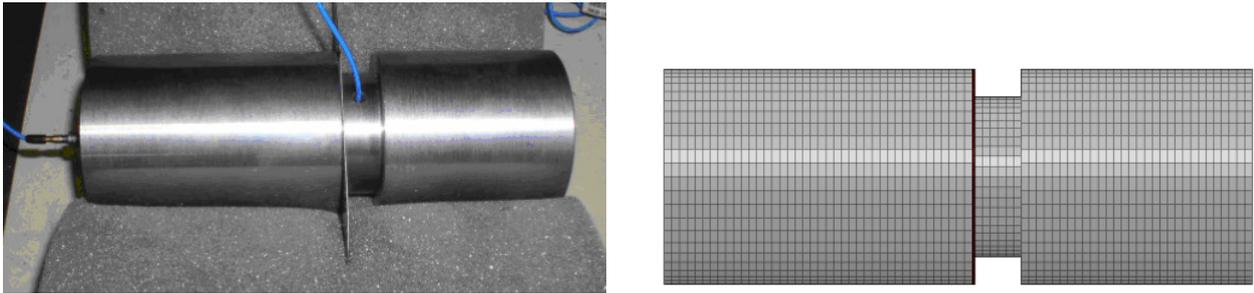
Wie beim Reibmaterial ist auch beim Dämpfungsblech zwischen der statischen und dynamischen axialen Steifigkeit zu unterscheiden. Im Folgenden werden zwei Ansätze vorgestellt, um die dynamische Steifigkeit von Dämpfungsblechen zu bestimmen. Diese unterscheiden sich vor allem in der statischen Vorspannung des Systems.

#### Messung ohne Vorspannung

Flint u. a. [2010] stellten ein Messverfahren vor, um die axialen Steifigkeiten und Dämpfungen verschiedener Dämpfungsbleche in einem breiten Frequenzband zu bestimmen. Dabei wurde ein Dämpfungsblech zwischen zwei mit Beschleunigungsaufnehmern ausgestattete Metallzylinder geklebt, die dann über einen Hammerschlag angeregt wurden. Einer der Metallzylinder war vollflächig mit dem Dämpfungsblech verklebt, der andere nur auf einem dünnen Ring, um die Druckverteilung eines Bremskolbens abzubilden. Als mechanisches Modell diente ein System aus zwei Massen, die über eine Feder verbunden waren. Je nach Steifigkeit der Feder und der Masse der Metallzylinder konnte die Eigenfrequenz des Feder-Masse Systems variiert werden. Aus den Beschleunigungskurven der beiden Massen ließ sich nun leicht auf die Steifigkeit und Dämpfung der Feder schließen, dabei war die numerische Sensitivität in der Nähe der Eigenfrequenz am größten. Grundsätzlich ist jedoch eine Auswertung in einem breiten Frequenzbereich möglich.

Flint u. a. [2010] zeigten, dass mit diesem Messverfahren Steifigkeits- und Dämpfungswerte mit hoher Reproduzierbarkeit gewonnen werden können. Es bleiben jedoch einige Einschränkungen bestehen. So ist das System nicht vorgespannt. Der Einfluss einer zusätzlichen statischen Belastung kann damit nicht beurteilt werden. Darüber hinaus muss bei den meisten Dämpfungsblechen ein zusätzlicher Kleber aufgetragen werden, um auch die kolbenseitige Masse fest mit dem Blech zu verbinden. Dies kann sowohl die Steifigkeits-, als auch die Dämpfungswerte beeinflussen.

Um aus den Steifigkeitswerten nun Materialparameter für ein Finite Elemente Modell des Dämpfungsblechs zu erhalten, wird der Messaufbau mit Finiten Elementen modelliert, siehe Abbildung 5.13 (rechts). Damit können die frequenzabhängigen Steifigkeitswerte approximiert werden. Es ist eine sehr hohe Sensitivität der Querkontraktionszahlen der Gummi- und Kleberschichten auf das Messergebnis zu erkennen. Da die Kontaktfläche der kolbenseitigen Masse schmal ist, wird das Dämpfungsblech dort nicht nur auf Kompression, sondern auch auf Schub beansprucht, was bei fast inkompressiblem Material große Unterschiede hervorruft.



**Abbildung 5.13:** Messaufbau zur Bestimmung der axialen Steifigkeit von Dämpfungsblechen: Bild aus Flint u. a. [2010] mit freundlicher Genehmigung der Fa. TRW Automotive (links), Finite Elemente Modell (rechts)

Die ermittelten Steifigkeiten hängen damit auch stark von der verwendeten Diskretisierung des Finite Elemente Netzes ab.

Nach Steinhilper und Röper [1994] ist bei fast inkompressiblem Material, z.B. Gummi, nur der Schubmodul  $G$  ein reiner Werkstoffkennwert und somit geometrieunabhängig. Der Elastizitätsmodul  $E$ , der sich durch  $E = 2(1 + \nu)G$  berechnen lässt, ist zur Berechnung nicht geeignet, da der Gummi durch die Vulkanisation an den Stahlblechen in seiner Verformung behindert wird. Die Ergebnisse sind also stark von der jeweiligen Kolbengeometrie abhängig und können insbesondere bei Faustsattelbremsen nicht auf den äußeren Bremsbelag übertragen werden, der im Kontakt mit den Faustfingern steht.

### Messung mit Vorspannung

Hornig und von Wagner [2013] untersuchten Proben mit und ohne Dämpfungsblech bei dynamischer axialer Anregung. Dabei ist zu erkennen, dass die Elastizität der Reihenschaltung Reibmaterial-Dämpfungsblech primär aus dem Reibmaterial stammt. Basierend auf diesen Ergebnissen trägt das Dämpfungsblech also nur untergeordnet zur Entkopplung in axialer Richtung bei.

### 5.2.6 Shore-Härte

Für den Gummianteil der Dämpfungsbleche können Messungen der Shore-Härte verwendet werden, um Rückschlüsse auf die Materialkennwerte  $E$  und  $G$  zu erhalten. Entsprechende Zuordnungen sind unter Berücksichtigung eines Formfaktors  $k$  bei Steinhilper und Röper [1994] zu finden. Die Shore-Härte wird durch den Widerstand des Gummis gegenüber einer normierten Metallspitze gemessen ISO 7619 [2012].

Werkstoff		Elastizitätsmodul [MPa]		
Graphitausprägung	Name	statisch	Ultraschall	Eigenfrequenz
Lamellengraphit	EN-GJL-150	92000	108000	117000
	EN-GJL-200	102000	127000	130000
Kugelgraphit	EN-GJS-400-15	164000	172000	172000
	EN-GJS-600-3	168000	173000	174000
	EN-GJS-1000-5	166000	162000	168000
Vermiculargraphit	EN-GJV-300	126000	149000	144000

**Tabelle 5.4:** Vergleich der über statische und dynamische Messungen bestimmten Elastizitätsmoduln von Graugusswerkstoffen, entnommen aus Trubitz u. a. [2004]

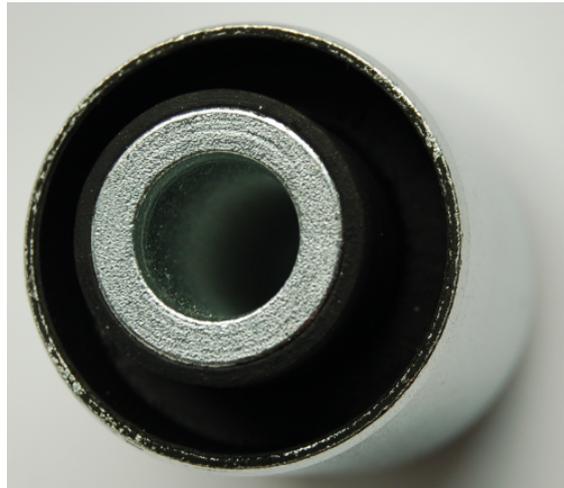
## 5.3 Stahl- und Gussbauteile

Aufgrund der Isotropie von Stahl und Gusswerkstoffen ist die Bestimmung der Materialparameter weniger aufwändig. Darüber hinaus zeigen diese Werkstoffe innerhalb des für das Bremsenquietschen relevanten Temperaturbereichs zwischen  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  und  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$  nur eine gering ausgeprägte Temperaturabhängigkeit. Andererseits bestimmen die Bremsscheibe, der Bremssattelhalter, die Bremsfaust und der Radträger aufgrund ihrer Abmessungen das Schwingverhalten der Bremse entscheidend, sodass kleine Fehler in der dynamischen Modellierung, z.B. durch ungenaue Materialkennwerte, die Prognosegüte der Bremsgeräuschsimulation stark einschränken.

Trubitz u. a. [2004] bestimmten den Elastizitätsmodul von Grauguss unterschiedlicher Ausprägungen (mit Lamellengraphit, mit Kugelgraphit und mit Vermiculargraphit) über verschiedene Messverfahren und verglichen deren Ergebnisse. Neben statischen Zug-, Druck- und Biegeversuchen wurden dynamische Messungen mittels Ultraschall bei einer Anregungsfrequenz von 1 MHz und 5 MHz durchgeführt. Außerdem wurden die Messergebnisse mit Eigenfrequenzmessungen an stabförmigen Proben von 80 mm Länge verglichen. Durch eine statistische Auswertung konnte für die Ultraschallmessung ein Fehler unter 3 % und für die Eigenfrequenzmessung unter 2 % sichergestellt werden.

Der dynamische Elastizitätsmodul war für alle untersuchten Gusswerkstoffe höher als der statisch ermittelte. Dabei war der Unterschied beim Grauguss mit Lamellengraphit am stärksten ausgeprägt, siehe Tabelle 5.4. Dieser Werkstoff wird oft zur Herstellung von Bremsscheiben verwendet.

Im Bereich zwischen  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  und  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  stellten Trubitz u. a. [2004] eine Temperaturabhängigkeit von Grauguss mit Kugelgraphit von  $-40\text{ MPa/K}$  fest. Bei einer angenommenen Genauig-



**Abbildung 5.14:** Gummilager zur Anbindung und Entkopplung eines Lenkers an die Karosserie

keit der Messung von  $\pm 2\%$  entspricht dies einer Schwankung von 172 K. Der Temperatureinfluss kann also gegenüber der Messungenauigkeit bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls vernachlässigt werden.

## 5.4 Gummilager

Neben den oben behandelten Gummischichten im Dämpfungsblech gibt es weitere Gummibauteile im Bremssystem, die zur Entkopplung verbaut sind. So besitzen die Vorder- und Hinterachse eines Fahrzeugs zahlreiche Gummilager um eine entsprechende elastokinematische Fahrwerksabstimmung realisieren zu können. Außerdem sollen dadurch Schwingungen, die durch das Abrollen des Reifens auf der Fahrbahn entstehen, durch Impedanzsprünge abgemindert und nicht an die Karosserie weitergeleitet werden.

Das dynamische Verhalten eines Gummilagers könnte durch die Bestimmung der Shore-Härte des Gummis, siehe Kapitel 5.2, und der räumlichen Modellierung des jeweiligen Gummilagers abgebildet werden. Da die Gummilager jedoch eine vergleichsweise geringe räumliche Ausdehnung besitzen, ist eine detaillierte Modellierung der Geometrie und des Materials nicht zweckmäßig. Stattdessen wird rechnerisch oder über Messungen eine Ersatzsteifigkeit ermittelt und das gesamte Gummilager als einzelne Feder im Modell abgebildet. Analog kann eine Ersatzdämpfung bestimmt werden.

Die Gummilager haben aufgrund des damit hergestellten Impedanzsprungs einen großen Einfluss auf die Wahl der Systemgrenzen und werden in Kapitel 7 gesondert betrachtet.

## 6 Kontakte

In diesem Kapitel wird die Modellierung der Kontakte näher untersucht. Insbesondere der Einfluss der Kontaktmodellierung auf die Ergebnisse der Bremsgeräuschsimulation ist von besonderem Interesse.

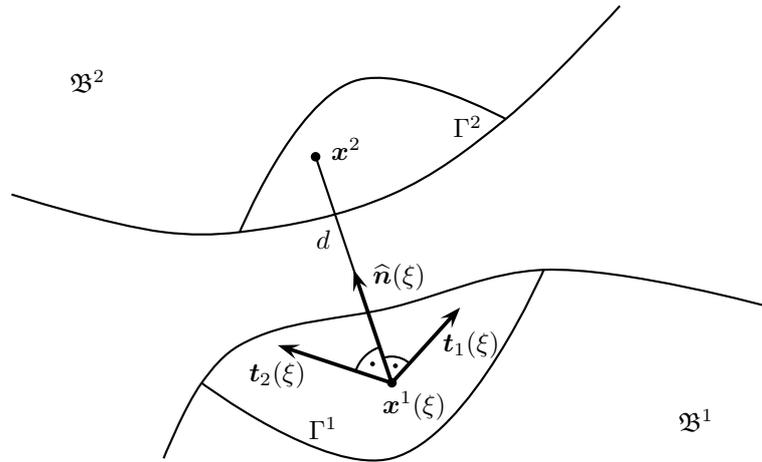
Zu Beginn werden die allgemeinen Gleichungen der Kontaktmechanik vorgestellt, um daraus die besondere Situation des gleitenden Kontakts unter Berücksichtigung einer konstanten Führungsgeschwindigkeit abzuleiten. Neben diesem speziellen Aspekt, der an der Kontaktstelle zwischen Brems Scheibe und Bremsbelag auftritt, ist auch der Kontakt zwischen Bremssattelhalter und Bremsbelagrückenplatte im Bereich der Hammerköpfe für die Finite Elemente Modellierung von großer Bedeutung.

### 6.1 Kinematik

Die folgende Darstellung der Kontaktkinematik orientiert sich an Wriggers [2002, 2006].

Die beiden Körper  $\mathfrak{B}^1$  und  $\mathfrak{B}^2$  mit den Kontaktflächen  $\Gamma_C^1$  und  $\Gamma_C^2$  definieren einen Kontakt. Dabei bezeichnet im Folgenden der obenstehende Index 1 die Master-Fläche und 2 die Slave-Fläche. Sei  $\mathbf{x}^2$  ein Knoten oder Integrationspunkt auf der Slave-Fläche  $\Gamma_C^2$ . Dieser wird auf die Master-Fläche  $\Gamma_C^1$  projiziert. Unter der Annahme, dass  $\Gamma_C^1$  in der aktuellen Konfiguration  $\xi$  zumindest lokal konvex oder eben ist, existiert eine eindeutige Projektion. Die Projektion in der aktuellen Konfiguration sei mit  $\mathbf{x}^1(\xi)$  bezeichnet, wobei  $\xi$  die Abhängigkeit vom Verschiebungszustand verdeutlicht.  $\Gamma \subset \Gamma_C^2$  bezeichne die Fläche des aktuell geschlossenen Kontakts.

Sei  $\hat{\mathbf{n}}(\xi)$  die äußere Einheitsnormale an  $\Gamma_C^1$ . Aufgrund der Projektionseigenschaft gilt dann  $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\xi) = d \hat{\mathbf{n}}$  mit dem Abstand  $d \in \mathbb{R}$ . Mit den beiden Einheitsvektoren  $\mathbf{t}_1 \perp \hat{\mathbf{n}}$  und



**Abbildung 6.1:** Kontaktkinematik mit Slave-Fläche  $\Gamma^2$  oben und Master-Fläche  $\Gamma^1$  unten

$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \times \hat{\mathbf{n}}$  wird ein lokales Koordinatensystem definiert, wie in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Durchdringung  $g_N$  ist für offene und geschlossene Kontakte definiert durch:

$$g_N = (\mathbf{x}^1(\xi) - \mathbf{x}^2)^t \hat{\mathbf{n}} = -d \quad (6.1)$$

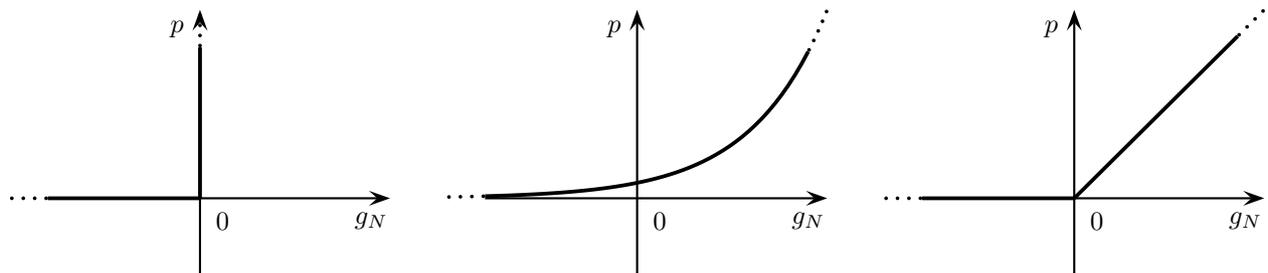
Außerdem wird noch die tangentielle Auslenkung  $\mathbf{g}_T$  benötigt. Beim Schließen des Kontakts gilt aufgrund der Projektion  $(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\xi))^t \mathbf{t}_i = 0$ . Bei reibbehafteten Kontakten können danach auch Tangentialspannungen  $\boldsymbol{\tau}$  auftreten. In diesem Fall ist

$$\mathbf{g}_T = \left( (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)^t \mathbf{t}_1 \right) \mathbf{t}_1 + \left( (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)^t \mathbf{t}_2 \right) \mathbf{t}_2 \neq 0. \quad (6.2)$$

## 6.2 Kontaktsteifigkeit

Zur Einhaltung der Kontaktbedingungen gibt es verschiedene Ansätze. Hierzu zählen Strafterme, Lagrange-Multiplikatoren oder Kombinationen aus beiden. Eine vollständigere Auflistung findet sich bei Wriggers [2002]. In dieser Arbeit wird der Einfluss unterschiedlicher Strafparameter auf die Eigenfrequenzen im hörbaren Bereich untersucht.

Bei einer Kontaktformulierung mittels Strafparametern wird die Kontaktbedingung nicht exakt erfüllt, sondern nur näherungsweise. Der Fehler findet sich in der Durchdringung  $g_N$  wieder. Wenn  $g_N \geq 0$  ist der Kontakt geschlossen, für  $g_N < 0$  findet kein Kontakt statt. Um diese Durchdringung zu minimieren, wird beim geschlossenen Kontakt ein Kräftepaar  $\mathbf{N}^1$  bzw.  $\mathbf{N}^2$  aufgetragen, das die beiden durchdringenden Bauteile wieder auseinanderdrückt. Beispiele für Relationen zwischen Durchdringung und Kontaktkraft sind in Abbildung 6.2



**Abbildung 6.2:** Kontaktsteifigkeiten: ideal (links), exponentiell (Mitte), linear (rechts)

zu finden. Dabei ist zu beachten, dass die Relation für den Idealfall nicht durch eine Funktion ausgedrückt werden kann, sondern nur approximierbar ist. Diese Funktion  $p(g_N) > 0$  wird dabei als Kontaktsteifigkeit bezeichnet. Beispiele für  $p$  sind lineare, polynomiale oder exponentielle Funktionen. Je größer die Werte von  $p$  bzw.  $\frac{\partial p}{\partial g_N}$ , desto exakter werden die Kontaktbedingungen erfüllt, allerdings verschlechtert sich dabei die Konditionierung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . In gängigen Finite Elemente Programmpaketen wie z.B. Abaqus sind standardmäßig lineare Kontaktsteifigkeitsfunktionen definiert, die eine ca. 1000-fach höhere Steifigkeit in Normalenrichtung besitzen, als das Material der beiden Körper  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$ , siehe Dassault Systèmes [2012].

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1 &:= \begin{cases} p(g_N) \hat{\mathbf{n}}(\xi) & \text{für } g_N \geq 0 \\ 0 & \text{für } g_N < 0 \end{cases} & \boldsymbol{\sigma}^2 &:= -\boldsymbol{\sigma}^1 \\ \mathbf{N}^1 &:= \int \boldsymbol{\sigma}^1 dA & \mathbf{N}^2 &:= \int \boldsymbol{\sigma}^2 dA \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dabei wird jeweils über die Kontaktfläche bzw. im diskretisierten Modell über die zu einem Knoten bzw. Integrationspunkt gehörende Elementfläche integriert.

In Koordinatenschreibweise gilt

$$\sigma := \begin{cases} p(g_N) & \text{für } g_N \geq 0 \\ 0 & \text{für } g_N < 0 \end{cases}, \quad (6.4)$$

wobei der obere Index zur Übersichtlichkeit weggelassen wird.

Wriggers [2002] folgert aus Beobachtungen in der Mikrokontaktmechanik, dass eine exponentielle Funktion  $p(g_N) = c_3 \exp(-c_4 g_N^2)$  mit  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$  oder eine polynomiale Funktion  $p(g_N) = c_N g_N^n$  mit  $2 \leq n \leq 3.33$ ,  $c_N > 0$  die im Kontakt entstehenden plastisch verformten Mikrokontaktplateaus mathematisch am besten widerspiegeln. Aufgrund fehlender Linearität dieser Kontaktgesetze und der dabei entstehenden schlechten numerischen Konditionierung

der Systemmatrizen sind jedoch lineare Kontaktgesetze bei Anwendungen häufig vorzuziehen. Weitere Details zur Mikrokontaktmechanik sind bei Popov [2010] oder Wriggers [2006] zu finden.

Wenn die Steifigkeit des Kontakts höher ist, als die der angrenzenden Bauteile, hat die konkrete Wahl der Funktion  $p(g_N)$  nur einen sehr geringen Einfluss auf die Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen im hörbaren Bereich. Die Steigung  $\frac{\partial p}{\partial g_N}$  muss hierfür ausreichend groß sein. Bei Kontaktsteifigkeitsfunktionen die einen exponentiellen Verlauf besitzen, wie in Abbildung 6.2 in der Mitte, ist dies bei niedrigen Kontaktdrücken zu bedenken und gegebenenfalls durch einen zusätzlichen linearen Term zu berücksichtigen  $p(g_N) = c_0 \exp(g_N) + c_1 g_N$ . Ein weiterer Nachteil von rein exponentiellen Kontaktsteifigkeitsfunktionen  $p$  ist, dass  $p(g_N) > 0$  für  $g_N \leq 0$ . Das heißt, dass auch bei einem nicht geschlossenen Kontakt Normalspannungen  $\sigma$  übertragen werden oder die Funktion der Normalspannung  $\sigma$  in Gleichung (6.4) nicht stetig ist.

In reibbehafteten Kontakten gelten die gleichen Überlegungen für die Tangentialspannungen  $\boldsymbol{\tau} = \tau_1 \mathbf{t}_1 + \tau_2 \mathbf{t}_2$ . Dabei ist gegebenenfalls zwischen einem haftenden und einem gleitenden Kontakt zu unterscheiden.

Im Falle eines linearen Kontaktsteifigkeitsgesetzes wird die Steifigkeit in Richtung der äußeren Einheitsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  mit  $\epsilon_N$  und im Falle von Haften in tangentialer Richtung mit  $\epsilon_T$  bezeichnet.

$$\sigma = \epsilon_N g_N \qquad \boldsymbol{\tau} = \epsilon_T \mathbf{g}_T \qquad (6.5)$$

### 6.3 Variationsformulierung

Zur Lösung der Kontaktgleichungen wird entsprechend der Kontinuumsmechanik Hamilton's Prinzip der Minimierung des Gesamtpotentials  $L = T - U$  angewandt. Aufgrund des nichtkonservativen Verhaltens von Kontakten mit Reibung ist keine Definition des Gesamtpotentials möglich, wohl aber eine Potentialvariation nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. virtuellen Kräfte.

Im Folgenden werden die Potentialvariationen  $\delta\Pi_N$  und  $\delta\Pi_T$  in Richtung der äußeren Einheitsnormalen und in tangentialer Richtung hergeleitet. Dabei ist bei  $\delta\Pi_T$  zwischen Haften, Gleiten und Gleiten mit zusätzlicher bekannter und konstanter Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  zu unterscheiden.

Um später lineare Gleichungen zur Lösung der Stabilitätsaufgabe zu erhalten, müssen diese linearisiert werden. Dazu wird die zweite Variation des Potentials bestimmt und mit dem Operator  $\Delta$  bezeichnet.

### 6.3.1 In Richtung der Einheitsnormalen

Das Potential in Richtung der Einheitsnormalen kann direkt angegeben werden.

$$\Pi_N = \int_{\Gamma} \int_0^{g_N} (\boldsymbol{\sigma}^1)^t \hat{\mathbf{n}} \, d\xi \, dA \quad (6.6)$$

Im Fall einer linearen Kontaktsteifigkeit  $p(g_N) = \epsilon_N g_N$  folgt

$$\Pi_N = \int_{\Gamma} \int_0^{g_N} \epsilon_N \xi \underbrace{\hat{\mathbf{n}}^t \hat{\mathbf{n}}}_{=1} \, d\xi \, dA = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \epsilon_N g_N^2 \, dA \quad (6.7)$$

Das Potential  $\Pi_N$  entspricht dem einer Feder mit Federsteifigkeit  $\epsilon_N$  und Auslenkung  $g_N$ , integriert über die gesamte Kontaktfläche  $\Gamma$ .

Die Potentialvariation  $\delta\Pi$  einer virtuellen Verschiebung, auch als Arbeit oder erste Potentialvariation bezeichnet, kann nun durch Anwendung des linearen Operators  $\delta$  auf  $\Pi$  bestimmt werden.

$$\delta\Pi_N = \delta \left( \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \epsilon_N g_N^2 \, dA \right) = \int_{\Gamma} \epsilon_N g_N \delta g_N \, dA = \int_{\Gamma} \sigma \delta g_N \, dA \quad (6.8)$$

Nun kann die Änderung des Potentials  $\Pi_N$  bzgl. einer infinitesimalen Verschiebung  $\delta g_N$  bestimmt werden. Dies reicht für ein nichtlineares System, wie es in der Kontaktmechanik besteht, jedoch nicht aus, hier ist auch noch die zweite Potentialvariation zu bestimmen, die für das Newton-Schema benötigt wird.

Der linearisierte Ausdruck bzw. die zweite Potentialvariation ist

$$\Delta\delta\Pi_N = \Delta \left( \int_{\Gamma} \epsilon_N g_N \delta g_N \, dA \right) = \int_{\Gamma} \epsilon_N \left( \Delta g_N \delta g_N + g_N \underbrace{\Delta\delta g_N}_{\approx 0} \right) \, dA \quad (6.9)$$

Der Term  $\Delta\delta g_N$  kann unter bestimmten Voraussetzungen unberücksichtigt bleiben. Dazu müssen die Basisvektoren  $\hat{\mathbf{n}}$  und  $\mathbf{t}_i$  während eines Iterationsschrittes des Newton-Schemas unverändert bleiben. Dies bedeutet mechanisch, dass die Kontaktflächen eben sind und nicht

verkippen. Bei der hier beschriebenen Stabilitätsanalyse mit linearen Elementen ist dies erfüllt.

Eine Herleitung der zweiten Potentialvariation unter Berücksichtigung aller Terme ist bei Wriggers [2002] zu finden.

Die Vereinfachung an dieser Stelle führt gegebenenfalls zu Fehlern in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . Diese bleiben in der konkreten Anwendung jedoch klein, da  $|\Delta g_N \delta g_N| \gg |g_N \Delta \delta g_N|$  in der Nähe des Gleichgewichts ist.

### 6.3.2 In Tangentialrichtung bei Haften

Im Fall, dass die Tangentialspannung kleiner oder gleich dem Produkt aus Reibkoeffizient und Normalspannung ist, d.h.  $\|\boldsymbol{\tau}\| \leq \mu \sigma$ , liegt Haften vor. In diesem Fall gilt  $\boldsymbol{\tau} = \epsilon_T \mathbf{g}_T$ .

Der Arbeitsausdruck in tangentialer Richtung bei haftenden Kontakten ist analog dem Ausdruck in Richtung der Einheitsnormalen.

$$\delta \Pi_T = \int_{\Gamma} \epsilon_T \mathbf{g}_T^t \delta \mathbf{g}_T dA = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}^t \delta \mathbf{g}_T dA \quad (6.10)$$

Auch die linearisierte Größe  $\Delta \delta \Pi$  bleibt analog, dabei bleibt hier  $\Delta \delta \mathbf{g}_T$  unberücksichtigt.

$$\Delta \delta \Pi_T = \Delta \left( \int_{\Gamma} \epsilon_T \mathbf{g}_T^t \delta \mathbf{g}_T dA \right) = \int_{\Gamma} \epsilon_T \left( \Delta \mathbf{g}_T^t \delta \mathbf{g}_T + \mathbf{g}_T^t \underbrace{\Delta \delta \mathbf{g}_T}_{\approx 0} \right) dA \quad (6.11)$$

Die Gleichungen in Tangentialrichtung beim Haften entsprechen exakt denen in Richtung der Einheitsnormalen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass nun vektorwertige Größen  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{g}_T$  auftreten. Als Ersatzmodell dient in beiden Fällen eine Feder mit der Federsteifigkeit  $\epsilon_N$  bzw.  $\epsilon_T$ , die bei geschlossenem Kontakt die beiden Körper  $\mathfrak{B}^1$  und  $\mathfrak{B}^2$  auseinanderdrückt bzw. am Gleiten hindert.

### 6.3.3 In Tangentialrichtung bei Gleiten

Wenn die Tangentialspannung  $\boldsymbol{\tau}$  ansteigt und die Grenze  $\mu \sigma$  überschritten wird, fangen die beiden in Kontakt befindlichen Flächen an gegenseitig zueinander zu gleiten. In diesem Fall berechnet sich die Tangentialspannung nicht mehr als Produkt aus Tangentialsteifigkeit  $\epsilon_T$

und Auslenkung  $\mathbf{g}_T$ , sondern es gilt  $|\boldsymbol{\tau}| = \mu \sigma$ . Die Richtung der Tangentialspannung folgt aus der Richtung des Vektors der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{rel}$ .

$$\mathbf{v}_{rel} := \dot{\mathbf{g}}_T \quad \mathbf{v}_{rel} = v_{rel1} \mathbf{t}_1 + v_{rel2} \mathbf{t}_2 \quad (6.12)$$

Zusätzlich sei noch der normierte Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  der Relativbewegung definiert, um die nachfolgenden Gleichungen zu vereinfachen. Dieser ist vom Basisvektor der äußeren Einheitsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  zu unterscheiden.

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} = \frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{\|\dot{\mathbf{g}}_T\|} \quad \text{für } \mathbf{v}_{rel} \neq 0 \quad (6.13)$$

Der Fall  $\|\mathbf{v}_{rel}\| = 0$  wird ausgeschlossen, da in diesem Fall Haften eintritt. Somit gilt:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \sigma \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} = \mu \sigma \mathbf{n} \quad \mathbf{n}^t \mathbf{n} = 1 \quad (6.14)$$

Der Reibkoeffizient  $\mu = \mu(\|\mathbf{v}_{rel}\|, \sigma)$  wird allgemein als abhängig vom Betrag der Relativgeschwindigkeit  $\|\mathbf{v}_{rel}\|$  und der Normalspannung  $\sigma$  angenommen. Die virtuelle Arbeit in tangentialer Richtung ist dann

$$\delta\Pi_T = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}^t \delta\mathbf{g}_T dA = \int_{\Gamma} \mu \sigma \mathbf{n}^t \delta\mathbf{g}_T dA. \quad (6.15)$$

Die ausführliche Herleitung der Linearisierung dieses Ausdrucks ist in Anhang B.2 zu finden.

$$\Delta\delta\Pi_T = \Delta\delta\Pi_{TK} + \Delta\delta\Pi_{TD-} + \Delta\delta\Pi_{TD+} \quad (6.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Pi_{TK} &:= \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu \right) \epsilon_N \mathbf{n}^t \Delta g_N \delta\mathbf{g}_T dA \\ \Delta\delta\Pi_{TD-} &:= \int_{\Gamma} \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\dot{\mathbf{g}}_T^t \delta\mathbf{g}_T dA \\ \Delta\delta\Pi_{TD+} &:= \int_{\Gamma} \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\dot{\mathbf{g}}_T^t \delta\mathbf{g}_T dA \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die mechanische Erklärung der drei Summanden folgt im nächsten Abschnitt.

In diesen Gleichungen sind jedoch die Größen  $\|\mathbf{v}_{rel}\|$  und  $\mathbf{n}$  noch unbekannt, da sie von der Unbekannten  $\Delta\dot{\mathbf{g}}_T$  abhängen. In einer Berechnung mittels explizitem Zeit-Integrationschema können die Ergebnisse aus dem vorherigen Zeitschritt betrachtet werden, um  $\|\mathbf{v}_{rel}\|$  und  $\mathbf{n}$  näherungsweise zu bestimmen. Dies ist jedoch bei einer linearen Stabilitätsanalyse auf Basis

einer Eigenwertberechnung nicht möglich. Im nächsten Abschnitt wird die Variationsformulierung unter Berücksichtigung einer zusätzlichen bekannten und konstanten Führungsbewegung betrachtet, die über den Vektor  $\mathbf{v}_0$  beschrieben wird. In diesem Fall können Ansätze für  $\|\mathbf{v}_{rel}\|$  und  $\mathbf{n}$  gefunden werden, die unabhängig von den Unbekannten  $g_N$  und  $\mathbf{g}_T$  sind.

### 6.3.4 In Tangentialrichtung bei zusätzlicher Führungsgeschwindigkeit

In der Situation des vorherigen Abschnitts wird noch eine zusätzliche konstante und bekannte Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  aufgebracht. Diese wird in der späteren Anwendung der Finite Elemente Methode nicht durch ein bewegtes Netz dargestellt, sondern wird entweder durch Euler-Koordinaten abgebildet, d.h. das Material bewegt sich im räumlich feststehenden Netz oder alternativ, nur durch die Anpassung der Gleichungen der Kontaktmechanik. Es gilt:

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{g}}_T \quad (6.18)$$

Unter der schon in Kapitel 3 getroffenen Annahme, dass die Schwinggeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{g}}_T$  viel kleiner als die konstante Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  ist, können die Ausdrücke für  $\|\mathbf{v}_{rel}\|$  und  $\mathbf{n}$  vereinfacht werden und sind dann unabhängig von  $g_N$  und  $\mathbf{g}_T$ .

$$\|\mathbf{v}_{rel}\| = \|\mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{g}}_T\| \approx \|\mathbf{v}_0\| \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \approx \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|} \quad (6.19)$$

Für die Potentialvariation gilt wie im vorherigen Fall in Gleichung (6.15):

$$\delta\Pi_T = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}^t \delta\mathbf{g}_T dA = \int_{\Gamma} \mu \sigma \mathbf{n}^t \delta\mathbf{g}_T dA. \quad (6.20)$$

Der linearisierte Ausdruck ist ebenfalls wie oben

$$\Delta\delta\Pi_T = \Delta\delta\Pi_{TK} + \Delta\delta\Pi_{TD-} + \Delta\delta\Pi_{TD+} \quad (6.21)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Pi_{TK} &:= \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu \right) \epsilon_N \mathbf{n}^t \Delta g_N \delta\mathbf{g}_T dA \\ \Delta\delta\Pi_{TD-} &:= \int_{\Gamma} \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_0\|} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\dot{\mathbf{g}}_T^t \delta\mathbf{g}_T dA \\ \Delta\delta\Pi_{TD+} &:= \int_{\Gamma} \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_0\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\dot{\mathbf{g}}_T^t \delta\mathbf{g}_T dA \end{aligned} \quad (6.22)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Größen  $\|\mathbf{v}_0\|$  und  $\mathbf{n}$  von den Unbekannten  $g_N$  und  $\mathbf{g}_T$  sind dies nun lineare Ausdrücke in  $\delta\mathbf{g}_T$  bzw.  $\Delta g_N$  und  $\Delta\dot{\mathbf{g}}_T$ . Die Herleitung ist in Anhang B.2 zu finden.

Durch  $\Delta\delta\Pi_{TK}$  folgen schiefsymmetrische Einträge in der zirkulatorischen Matrix  $\mathbf{N}$ , wie sie durch den Effekt der Modenkopplung entstehen, siehe Kapitel 3.3 oder Gleichung (3.28). Neben einem gegebenenfalls vorhandenen Gradienten des Reibwerts  $\mu$  bzgl. der Normalspannung  $\sigma$  geht der Absolutwert von  $\mu$  in das linearisierte Potential ein. Außerdem hängt die Größe der unsymmetrischen Einträge von der Kontaktsteifigkeit  $\epsilon_N$  ab.

Der Term  $\Delta\delta\Pi_{TD-}$  ergibt symmetrische Einträge in der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$ , wie sie durch das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz verursacht werden. Bei einer mit zunehmender Geschwindigkeit abfallenden Reibkennlinie sind diese Einträge negativ semidefinit, vgl. Kapitel 3.1 oder Gleichung (3.10). Außerdem geht die Normalspannung  $\sigma$  in die Höhe der negativen Dämpfung ein.

Der letzte Ausdruck  $\Delta\delta\Pi_{TD+}$  repräsentiert den Mechanismus der positiven Reibungsdämpfung aus Kapitel 3.2 oder Gleichung (3.22), der sich durch eine positiv semidefinite Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  abbilden lässt. Hier ist eine Proportionalität bzgl.  $\mu$  und  $\sigma$  gegeben, außerdem ist die zweite Variation des Potentials umgekehrt proportional zum Betrag der Relativgeschwindigkeit  $\|\mathbf{v}_0\|$ .

## 6.4 Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag

Im Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelägen besteht eine konstante Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$ . Kräfte, die durch eine Veränderung der Relativgeschwindigkeit verursacht werden, bleiben unberücksichtigt. Da Bremsenquietschen sowohl bei Stoppbremsungen, als auch bei Schleppbremsungen mit konstanter Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  auftritt, werden diese Kräfte als vernachlässigbar angesehen. Spelsberg-Korspeter [2009] zeigte, dass diese Kräfte durch nichtlineare Terme beschrieben werden, die bei einer Stabilitätsanalyse nicht betrachtet werden können.

Aufgrund der Relativgeschwindigkeit ergeben sich neben den, in jedem Kontakt auftretenden, Einträgen in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  auch die im letzten Abschnitt betrachteten Einträge in der zirkulatorischen Matrix  $\mathbf{N}$  und in der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$ .

Die Anteile der zirkulatorischen Matrix  $\mathbf{N}$  sind proportional zu  $(\frac{\partial\mu}{\partial\sigma}\sigma + \mu)\epsilon_N$ . Reibwertmessungen zeigen eine leichte Abhängigkeit des Reibkoeffizienten  $\mu$  zwischen Reibmaterial

$\frac{\epsilon_N}{E_{33} l_{el}}$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Frequenz $f$	1737 Hz	1815 Hz	1849 Hz	1846 Hz	1852 Hz	1853 Hz	1853 Hz
Dämpfung $\zeta$	4.64 %	2.70 %	0.76 %	-4.96 %	-6.78 %	-6.74 %	-6.72 %

**Tabelle 6.1:** Frequenz und ggf. negative Dämpfung einer instabilen Schwingform in Abhängigkeit der dimensionslosen Kontaktsteifigkeit  $\frac{\epsilon_N}{E_{33} l_{el}}$

und Grauguss vom Kontaktdruck  $\sigma$ , es gilt jedoch  $|\frac{\partial \mu}{\partial \sigma} \sigma| \ll \mu$ . Die Kontaktsteifigkeit  $\epsilon_N$ , die ansonsten hauptsächlich aus numerischen Aspekten bestimmt ist, geht direkt in die zirkulatorische Matrix ein.

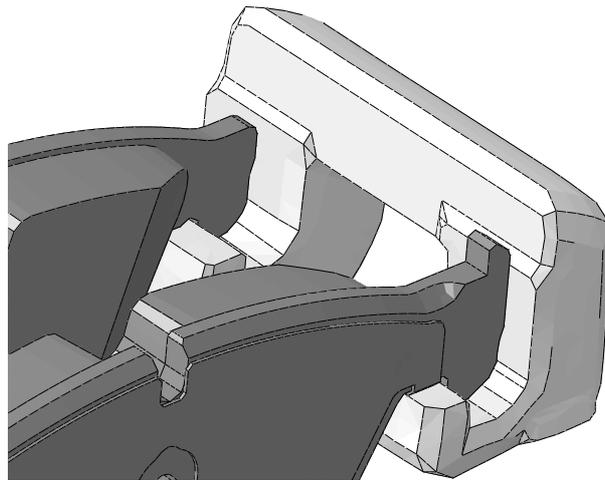
Für  $\epsilon_N \rightarrow \infty$  erhöht sich neben den zirkulatorischen Anteilen auch die Kontaktsteifigkeit in Richtung der Einheitsnormalen. Die Steifigkeit der Serienschaltung Reibmaterial - Kontakt - Bremscheibe wird dann durch das Reibmaterial bestimmt, welches das am stärksten elastische Element ist.

Numerische Untersuchungen bestätigen, dass im hörbaren Frequenzbereich die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse nicht von der konkreten Wahl von  $\epsilon_N$  abhängen, sobald die Kontaktsteifigkeit  $\epsilon_N$  deutlich höher als die axiale Materialsteifigkeit des Reibmaterials  $E_{33}$  ist, siehe Tabelle 6.1. Um eine vom gewählten Einheitensystem unabhängige Darstellung zu erhalten, wird dabei die dimensionslose Konstante  $\frac{\epsilon_N}{E_{33} l_{el}}$  betrachtet. Dabei entspricht  $l_{el}$  der charakteristischen Elementlänge.

Für  $\epsilon_N \rightarrow 0$  verschwinden die zirkulatorischen Anteile und es findet keine Modenkopplung statt. Allerdings ist der Fehler in den Kontaktbedingungen und damit den Simulationsergebnissen aufgrund der geringen Kontaktsteifigkeit groß.

## 6.5 Kontakt zwischen Belagrückenplatte und Bremsattelhalter

Die Kontakte zwischen den Belagrückenplatten im Bereich der Hammerköpfe und dem Bremsattelhalter und ggf. der Bremsfaust sind geprägt von zwei verschiedenen Zuständen. Solange keine Instabilität im Bremssystem auftritt, findet keinerlei Relativverschiebung oder dynamische Anregung zwischen den beiden Kontaktpartnern statt. Während der Geräuschabstrahlung hingegen, können tangentiale Relativbewegungen der Kontaktpartner beobachtet werden. Entsprechende Messungen mittels Laservibrometrie am Bremsengeräuschprüfstand der BMW Group zeigen diese Relativbewegungen im  $\mu\text{m}$ -Bereich.



**Abbildung 6.3:** Kontakt zwischen Belagrückenplatte (dunkel) und Bremssattelhalter (hell)

### 6.5.1 Modellierung mit Coulomb'scher Reibung

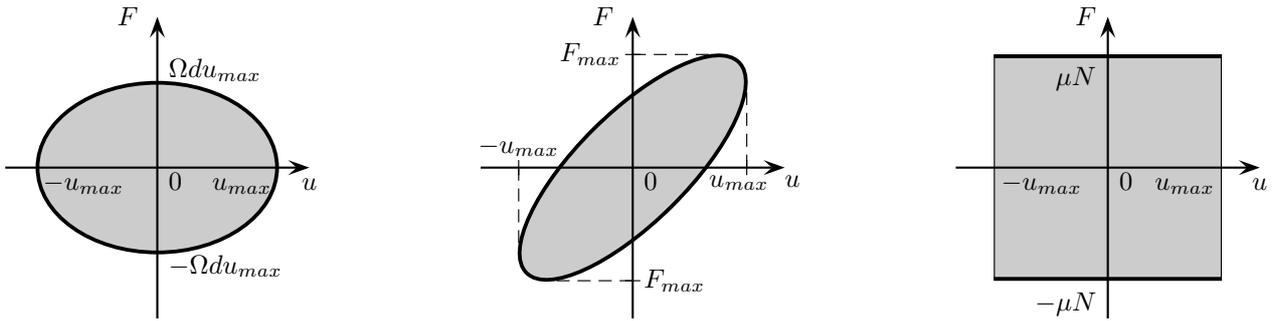
Bei quasistatischen Bewegungen und Schwingungen im unteren Hz-Bereich, deren Amplituden einige mm betragen, kann der Kontakt zwischen Belagrückenplatte und Bremssattelhalter mit dem Coulomb'schen Reibgesetz beschrieben werden, siehe Abbildung 6.3.

Die Verlustarbeit durch Coulomb'sche Reibung führt jedoch weder zu viskosen noch zu strukturellen Dämpfungstermen, wie in Abbildung 6.4 anhand der Hysteresekurven zu erkennen ist. Die Hysteresekurve für einen einzelnen viskosen Dämpfer beschreibt im Allgemeinen eine Ellipse mit waagrecht und senkrecht ausgerichteten Halbachsen. Bei einer Feder mit komplexwertiger Federsteifigkeit ist eine ellipsenförmige Hysteresekurve zu erkennen, deren Halbachsen schräg ausgerichtet sind. Die rechtwinklige Hysteresekurve eines Kontakts mit Coulomb'scher Reibung ist daher nicht direkt abzubilden.

Um den Dämpfungseffekt dennoch abbilden zu können, wird eine äquivalente viskose Dämpfung ermittelt. Sei  $u = u_{max} \cos(\Omega t)$  die Tangentialverschiebung in einem Kontakt mit Coulomb'scher Reibung während eines Schwingzyklus mit der Frequenz  $\Omega$ . Dann beträgt die Verlustarbeit  $W$  während einer Periode  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ :

$$W = 4 \mu N u_{max} \quad (6.23)$$

Hier bezeichnet  $\mu$  den Reibkoeffizienten sowie  $N$  die Normalkraft im Kontakt, siehe Abbildung 6.4. Bei der gleichen Verschiebung  $u = u_{max} \cos(\Omega t)$  in einem viskosen Dämpfer  $d$



**Abbildung 6.4:** Hysteresekurven: viskoser Dämpfer (links), Feder und viskoser Dämpfer bzw. Feder mit komplexwertiger Federsteifigkeit (Mitte), Coulomb'sche Reibung (rechts)

beträgt die Verlustarbeit  $W$  über einer Periode  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ :

$$W = \pi \Omega d u_{max}^2 \quad (6.24)$$

Die Coulomb'sche Reibung kann also mit dem äquivalenten viskosen Dämpfer

$$d = \frac{4 \mu N}{\pi \Omega u_{max}} \quad (6.25)$$

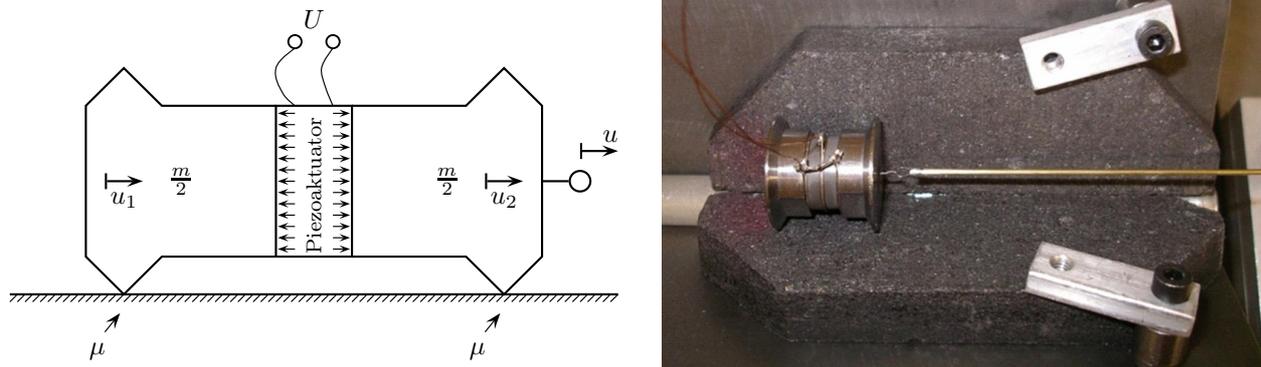
ersetzt werden.

Allerdings gilt die Äquivalenz nur für eine bestimmte Frequenz  $\Omega$  und Amplitude  $u_{max}$ . Bei einer Stabilitätsanalyse zur Simulation von Bremsenquietschen sind die anregende Frequenz  $\Omega$  und die Amplitude  $u_{max}$  jedoch im Allgemeinen unbekannte Größen. Wenn von einem parallel durchgeführten Versuch her die kritische Frequenz  $f$  bzw.  $\Omega = 2\pi f$  und über eine Laservibrometrie-Messung die Amplitude der Relativverschiebung  $u_{max}$  bekannt sind, kann ein äquivalenter viskoser Dämpfer bestimmt werden.

Im folgenden Kapitel wird nun die Gültigkeit der getroffenen Annahme von Coulomb'scher Reibung bei den bei Bremsenquietschen auftretenden Amplituden und Schwingfrequenzen untersucht.

### 6.5.2 Modellierung bei hochfrequenten Schwingungen

Popov [2010] untersuchte hochfrequente Reibungsphänomene und zeigte, dass viele Kontaktpaarungen bei hohen Frequenzen im Bereich einiger kHz einen sehr kleinen Reibungskoeffizienten  $\mu$  besitzen. Es existieren jedoch auch Kontaktpaarungen in Verbindung mit Gummi und Aluminium, die ein anderes Verhalten zeigen.



**Abbildung 6.5:** Schemazeichnung (links) und Messaufbau (rechts) der Messungen zur Ermittlung des dynamischen Reibkoeffizienten, Bild von J. Starcevic, Institut für Mechanik, TU Berlin, entnommen aus Popov [2010]

Der Versuchsaufbau von Popov [2010] besteht aus einer nahezu zylindrischen Masse, die an beiden Enden auf einer frei wählbaren Oberfläche aufliegt. Der Abstand der beiden Auflagerpunkte kann durch einen Piezoaktuator im  $\mu\text{m}$ -Bereich variiert werden, siehe Abbildung 6.5. Bei ausgeschaltetem Piezoaktuator gilt für die zum Verschieben der Masse in Richtung  $u$  benötigte Kraft  $F_{stat}$ :

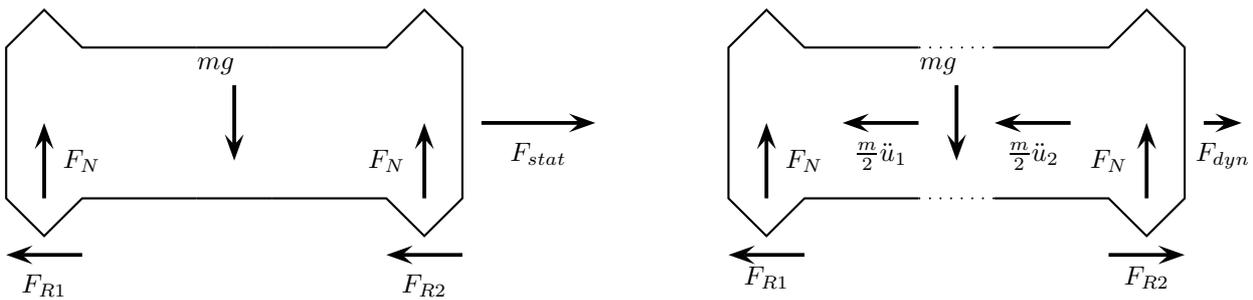
$$F_{stat} = F_{R1} + F_{R2} = 2 \mu_{stat} F_N = \mu_{stat} m g, \quad (6.26)$$

wie in Abbildung 6.6 links zu erkennen ist.

Sobald der Piezoaktuator mit einer hochfrequenten Wechselspannung  $U$  angeregt wird, fällt die zum Verschieben der Masse benötigte Kraft  $F_{dyn}$  stark ab. Durch die Längenänderung des Piezoaktuator verändert sich der Abstand der beiden Auflagerpunkte und die beiden Reibungskräfte  $F_{R1} = F_R \cos(\Omega t)$  sowie  $F_{R2} = -F_R \cos(\Omega t)$  weisen in entgegengesetzte Richtungen. Dadurch gilt bei  $\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$ :

$$F_{dyn} = F_{R1} - F_{R2} + \frac{m}{2} \ddot{u}_1 + \frac{m}{2} \ddot{u}_2 \approx 0 \quad (6.27)$$

Solange die Verschiebungsgeschwindigkeit  $u$  der gesamten Masse kleiner der Schwinggeschwindigkeit der Auflagerpunkte ist und keine große Beschleunigung der gesamten Masse stattfindet  $\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$ , bleibt dieser Effekt bestehen. Die Messungen von Popov [2010] zeigten bei einer Frequenz von etwa 60 kHz eine hohe Übereinstimmung mit der Modellierung, wenn eine ausreichende Amplitude des Piezoaktuator bestand, sodass makroskopische Effekte überwogen. Die Grenzamplitude lag bei etwa 20 bis 60 nm. Ab etwa 100 nm konnten die mikrotribologischen Effekte vernachlässigt werden.



**Abbildung 6.6:** Gleichgewicht bei ausgeschaltetem Piezoaktuator (links) und bei eingeschaltetem Piezoaktuator (rechts)

Die Reibpaarungen Stahl auf Aluminium und Stahl auf Gummi zeigen jedoch ein anderes Verhalten, hier fällt der dynamische Reibkoeffizient nicht gegenüber dem statischen ab.

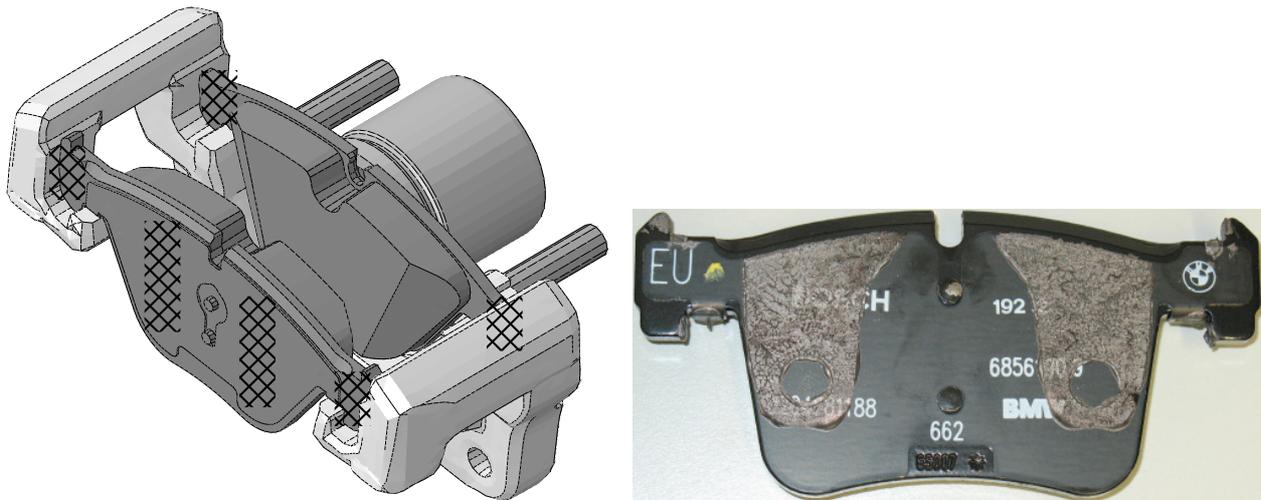
Die Beobachtungen von Popov [2010] sind ein Hinweis darauf, dass die Modellierung von Tangentialkräften in Kontakten bei hochfrequenten Schwingungen nicht vollständig durch das Coulomb'sche Gesetz beschrieben werden können.

Beim Vergleich von Simulations- und Prüfstandsergebnissen kann häufig eine bessere Übereinstimmung gefunden werden, wenn eine Unterscheidung der Kontakte zwischen Grauguss und Stahl einerseits sowie Aluminium und Gummi andererseits erfolgt. Kontakte zwischen Stahl und Stahl, Grauguss und Grauguss bzw. Stahl und Grauguss werden entsprechend ohne Reibung und ohne Tangentialkräfte modelliert. Im Gegensatz dazu werden Tangentialkräfte bei Kontakten zwischen Stahl und Aluminium bzw. zwischen Stahl und Gummi mit berücksichtigt. In der linearen Stabilitätsanalyse werden diese Kontakte als haftend modelliert, wenn sie geschlossen sind.

## 6.6 Befettung

An den Kontaktflächen zwischen Belagrückenplatte und Bremssattelhalter bzw. Bremsfaust sowie zwischen Dämpfungsblech und Bremsfaust bzw. Bremskolben kann oft durch Aufbringen eines hochviskosen Schmierstoffs eine Verbesserung des Geräuschverhaltens erreicht werden. Dies wird mit dem Begriff Befettung bezeichnet. Allerdings besteht die Gefahr, dass der Schmierstoff durch Umwelteinflüsse, z.B. bei Regen oder in der Waschanlage, wieder herausgespült wird und damit die Wirkung nicht länger vorhält.

Durch den Schmierstoff bildet sich eine dünne, viskose Schicht zwischen den befetteten Komponenten. Bei axialer oder tangentialer Beanspruchung dieser Schicht werden einer-



**Abbildung 6.7:** Bremssattelhalter mit Bremsbelägen und Bremskolben (links) mit zu befeuchtenden Kontaktflächen (schraffiert), befeuchteter Bremsbelag (rechts)

seits Schwingungen gedämpft, andererseits wird gegebenenfalls die Reibung zwischen den in Kontakt befindlichen Bauteilen verringert.

Bei kleinen Kontaktflächen, wie im Bereich der Hammerköpfe, kann davon ausgegangen werden, dass der Schmierfilm zu dünn ist, um eine makroskopisch wirksame Entkopplung normal zu den Kontaktflächen zu ermöglichen. In tangentialer Richtung kann durch die Schmierung eine Verringerung des Reibwerts und eine Entkopplung erfolgen. Bei großflächigen Kontakten ist durch den hydrostatischen Druck auch eine Entkopplung in axialer Richtung möglich.

Haag u. a. [2011] bestimmten die statischen Reibkoeffizienten  $\mu$  verschiedener Materialkombinationen über Messungen der Kräfte, die in einem Bremssattel während einer Bremsung auftreten. Für die Kombination Dämpfungsblech - Stahl, wie sie zwischen Bremsbelag und Bremskolben auftritt, bestimmten sie einen Reibkoeffizienten  $\mu = 0.26$ . Die Kombination Dämpfungsblech - Grauguss an der Kontaktstelle zwischen Bremsbelag und Bremsfaust besaß einen Reibkoeffizienten  $\mu = 0.22$ . Diese Werte wurden im trockenen, unbefetteten Zustand ermittelt. Wenn die Bremse befeuchtet wurde, stellte sich in beiden Fällen ein Wert von  $\mu = 0.05$  ein.

Ob sich während einer hochfrequenten Schwingung, wie sie beim Bremsenquietschen auftritt, an dieser Kontaktstelle Relativbewegungen aufbauen, wurde von Haag u. a. [2011] nicht untersucht.

Durch die oben erwähnten starken Einschränkungen bei der Abbildung von Reibung in einer linearen Stabilitätsanalyse, kann der Effekt der Befettung nicht vollständig abgebildet

werden. Dies betrifft insbesondere den Kontakt zwischen Stahl und Grauguss im Bereich der Hammerköpfe. Hier geht der Reibkoeffizient im hochfrequenten Umfeld ohne Befettung gegen  $\mu = 0$ , eine weitere Entkopplung ist nicht abbildbar. Bei Kontakten unter Einbeziehung von Aluminium oder Gummi kann die Entkopplung dadurch abgebildet werden, dass die tangentialen Freiheitsgrade im Kontakt bei der Linearisierung nicht gesperrt werden. Dies wird bei der Software Abaqus durch die Wahl von  $\mu = 0$  erreicht. Eine Aussage über die Tendenz einer Befettung kann damit getroffen werden. Quantitative Ergebnisse sind jedoch nicht möglich.

## 7 Randbedingungen

Im folgenden Kapitel wird untersucht, welche Komponenten des Bremssystems zu modellieren sind, um bei der Simulation von Bremsenquietschen eine hohe Übereinstimmung mit Prüfständen und Fahrzeugen sicherstellen zu können.

Neben dem Ziel, möglichst alle Schwingungsphänomene, die mit Bremsenquietschen in Verbindung stehen, korrekt abzubilden, ist dabei auch der Aufwand für die Modellerstellung und -validierung zu berücksichtigen. Nicht zuletzt steigt die Rechenzeit für ein zu umfangreiches Modell stark an.

Hinweise über die notwendigen Komponenten kann einerseits der Systemumfang an Bremsengeräuschprüfständen geben. Darüber hinaus zeigen die berechneten statischen und dynamischen Deformationen, wo eine detailgetreue Abbildung nötig ist und an welchen Stellen Vereinfachungen getroffen werden können.

### 7.1 Schwenklager und Radlager

Buck [2008] untersuchte hochfrequente Geräuschprobleme zwischen 8 kHz und 15 kHz an einem Finite Elemente Modell, das aus einer Bremsscheibe, einem Bremssattel mit Bremsbelägen und einem kleinen Teil des Schwenklagers besteht.

Laservibrometrie-Messungen am Bremsengeräuschprüfstand zeigen, dass bei Bremsenquietschen mit Frequenzen zwischen 1 kHz und 5 kHz auch weitere Bauteile der Achse in Schwingung versetzt werden. Insbesondere das Schwenklager, das mit dem Bremssattelhalter fest verschraubt ist, bildet zusammen mit diesem ein gemeinsames Schwingssystem. Somit ist zumindest das Schwenklager, an der Hinterachse der Radträger, im Modell mit zu berücksichtigen.

Die Lagerung der Bremsscheibe, die am Bremsscheibentopf zwischen Radlager und dem Rad eingespannt ist, ist differenzierter zu betrachten. Bei den meisten Schwingformen, die

Geräusche verursachen, sind Out-of-Plane (OP) Moden der Bremsscheibe erkennbar, siehe auch Anhang C. Diese weisen nur sehr geringe Deformationen des Bremsscheibentopfs auf. Daher kann eine korrekte Abbildung der meisten geräuschrelevanten Schwingformen auch ohne die Modellierung von Radlager und Rad erfolgen.

Da die Simulation von Bremsenquietschen jedoch nicht nur auf der komplexen Eigenfrequenzanalyse beruht, sondern auch eine nichtlineare statische Berechnung des Betriebspunkts beinhaltet, muss auch diese bei der Wahl der Systemgrenzen berücksichtigt werden. Für die korrekte Bestimmung der Bremskraft, die an der Bremsscheibe angreift und über das Radlager, das Schwenklager und den Bremssattelhalter zu den Bremsbelägen abgeleitet wird, ist die Abbildung der statischen Radlagersteifigkeit notwendig. In Kapitel 4.2 wird der Einfluss der Schräglage auf die Stabilitätsanalyse analysiert, die direkt mit der statischen Radlager- und Schwenklagersteifigkeit in Verbindung steht. Deshalb ist die Modellierung von Radlager und Schwenklager bzw. Radträger zwingend erforderlich. In Abbildung 7.1 (links) ist ein Finite Elemente Modell mit entsprechendem Modellumfang abgebildet.

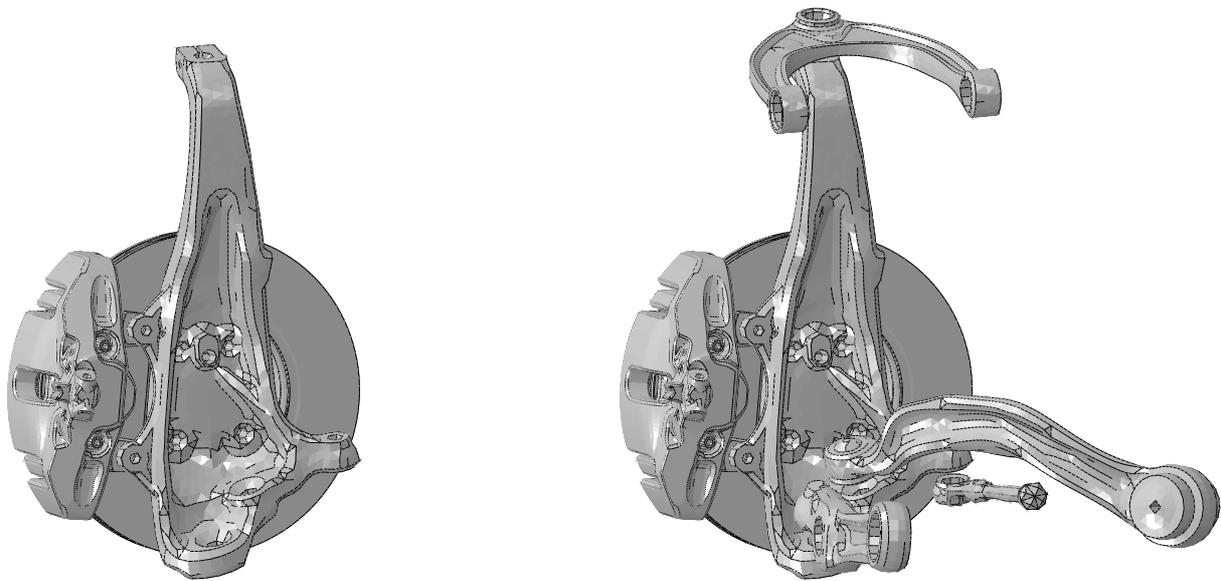
Der amerikanische Standard SAE J2521 [2013] für Bremsengeräuschprüfstände fordert einen entsprechenden Systemumfang bestehend aus Bremsscheibe, Bremssattel, Schwenklager und Radlager. Das Schwenklager wird dabei an den Verschraubungspunkten der angrenzenden Achskomponenten mit einem massiven Stahlträger verschraubt. Der Antrieb erfolgt von der Seite des Rades über die Radschrauben.

Der hier beschriebene Systemumfang wird im Englischen als rigid knuckle bezeichnet, siehe SAE J2521 [2013]. Im folgenden Abschnitt wird ein erweiterter Systemumfang (engl. corner modul) untersucht.

## 7.2 Achslenker, Federbein und Gummilager

Mit dem bisher definierten Systemumfang einschließlich Schwenklager kann bei den meisten Schwingformen eine hohe Prognosegüte hinsichtlich Bremsenquietschen erreicht werden. Dies gilt insbesondere für Frequenzen oberhalb 3 kHz.

Bei Geräuschphänomenen im Bereich zwischen 1 kHz und 3 kHz reicht jedoch allein die geometrisch korrekte Abbildung des Schwenklagers nicht aus, hier ist auch die Lagerung an den Anbindungspunkten von Bedeutung. Die frequenzabhängige Anbindungssteifigkeit wird im Folgenden mit dem Begriff der mechanischen Impedanz  $Z \in \mathbb{C}$  beschrieben. Dies ist



**Abbildung 7.1:** Finite Elemente Modell zur Stabilitätsanalyse einschließlich Schwenklager (links) und mit Achslenkern (rechts)

der Quotient aus Kraft und Geschwindigkeit  $Z = \frac{F}{v}$ . Bei den hier untersuchten harmonischen Schwingungen, unterscheiden sich Impedanz und dynamische Steifigkeit nur durch den Faktor  $i2\pi f$ . Weitere Eigenschaften der mechanischen Impedanz sind bei Möser und Kropp [2010] dargestellt.

An den Anbindungspunkten des Schwenklagers kann über feste Randbedingungen  $u_i \equiv 0$  eine unendlich große Impedanz  $Z_i \equiv \infty$  modelliert werden oder über freie Randbedingungen  $F_i \equiv 0$  eine verschwindende Impedanz  $Z_i \equiv 0$ . Dies kann nur eine sehr ungenaue Approximation der realen Situation im Fahrzeug und auch am Prüfstand sein. Hier wird immer eine endliche Impedanz  $Z \in \mathbb{C}$  vorliegen. Da die Wahl der Randbedingungen die Frequenzen und Eigenschwingformen des Schwenklagers mit angeschraubtem Bremssattelhalter stark beeinflusst, erscheint die Hinzunahme der Achslenker sinnvoll. Diese sind über Kugelgelenke an das Schwenklager angeschraubt.

Die Achslenker sind wiederum meist über Gummilager an der Karosserie befestigt, siehe Abbildung 7.1 (rechts). Die Gummilager dienen der elasto-kinematischen Lagerung des Fahrzeugs und sollen nach Heißing und Ersoy [2008] neben der Kraftübertragung auch definierte Bewegungen ermöglichen, Schwingungen dämpfen und Geräusche isolieren.

Durch die Berücksichtigung von Achslenkern und Gummilagern kann die Vorspannung der einzelnen Komponenten durch Radaufstandskraft, Bremskraft und Bremsmoment korrekt abgebildet werden. Die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen der Komponenten von der Vor-

spannung ist gering, aber die Kontakte zwischen den Bauteilen werden durch diese Vorspannung maßgeblich beeinflusst, siehe Kapitel 4.2.

Für die angrenzende Karosserie kann der folgende Ansatz zu einer vereinfachenden Modellierung herangezogen werden. Nach Möser und Kropp [2010] ist die Eingangsimpedanz  $Z$  eines einseitig unendlich ausgedehnten EA-Stabs

$$Z = A\sqrt{E\rho} \quad (7.1)$$

mit dem Querschnitt  $A$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Dichte  $\rho$ . Die Impedanz ist rein reellwertig, Kraft  $F$  und Geschwindigkeit  $v$  sind in Phase. Der EA-Stab wirkt rein dämpfend. Energetisch betrachtet wird die gesamte Energie der Anregung über Quasi-Longitudinalwellen abgeführt. Da keine Reflektion auftritt, kann keine Energie als Welle zurück zum Anregungspunkt gelangen.

Die Karosserie eines Fahrzeugs ist ein komplexes System aus Blechen, Stäben, Schweißpunkten und dämpfenden Elementen. Dieses System kann entsprechend der Statistischen Energie Analyse (SEA) in der Vibroakustik betrachtet werden. Durch die hohe Modendichte und die hohe modale Dämpfung, ausgelöst von zahlreichen Fügstellen, ist keine ausgeprägte Resonanzüberhöhung des Systems bei einer harmonischen Anregung über 1 kHz zu erwarten. Stattdessen werden die über die Gummilager eingeleiteten Longitudinalwellen an vielen Impedanzsprüngen reflektiert und ggf. in andere Wellenarten umgewandelt. Somit kommen die reflektierten Wellen am Anregungspunkt mit zufällig verteilten Phasenwinkeln an und leisten keinen Beitrag zur eingespeisten Leistung. Dies entspricht dem mechanischen Modell eines einseitig unendlich ausgedehnten EA-Stabs. Das entsprechende Ersatzmodell ist bei hohen Frequenzen, wie sie beim Bremsenquietschen auftreten, energetisch betrachtet, ein reiner viskoser Dämpfer.

Die statischen Steifigkeiten von Gummilagern erreichen Werte von 300 N/mm bis 20 kN/mm. Die Frequenzverläufe der dynamischen Steifigkeiten zeigen einen leichten Anstieg der Steifigkeiten über der Frequenz. Genaue Angaben bei Frequenzen über 1 kHz konnten jedoch nicht gemessen werden. Bei der BMW Group durchgeführte Messungen der translatorischen Eingangsimpedanzen an den Anbindungspunkten der Gummilager an einer Fahrzeugkarosserie ergeben Werte über 20 Ns/mm im Frequenzbereich zwischen 0.5 kHz und 1.6 kHz. Somit kann die Eingangsimpedanz der Karosserie im Vergleich zur Impedanz der Gummilager als um ein Vielfaches höher angenommen werden. In diesem Fall ist die Eingangsimpedanz am Gummilager nahezu identisch zur Steifigkeit des Gummilagerelements. Der Einfluss der Eingangsimpedanz der Karosserie ist gegenüber der Ungenauigkeit bei der Bestimmung der dynamischen

Steifigkeit der Gummilager vernachlässigbar. Durch den Impedanzsprung am Gummilager werden von der Bremse ausgehende Schwingungen am Gummilager entkoppelt.

Einen Sonderfall bildet die rein über Kugelgelenke angebundene Spurstange an der Vorderachse. Hier können keine entkoppelnden Gummilager eingebaut werden, da dies das Lenkverhalten des Fahrzeugs negativ beeinflussen würde. Somit ist an der Spurstange keine einfache Abschätzung der Impedanzen möglich. Bei niedrigen Geräuschfrequenzen unter 3 kHz ist gegebenenfalls eine weitergehende Modellierung des Lenkgetriebes notwendig.

Die Prüfstands aufgebauten zu Geräuschuntersuchungen bei der BMW Group umfassen ebenfalls das Bremssystem mit Schwenklager und den angebundenen Achslenkern bis hin zu den Gummilagern.

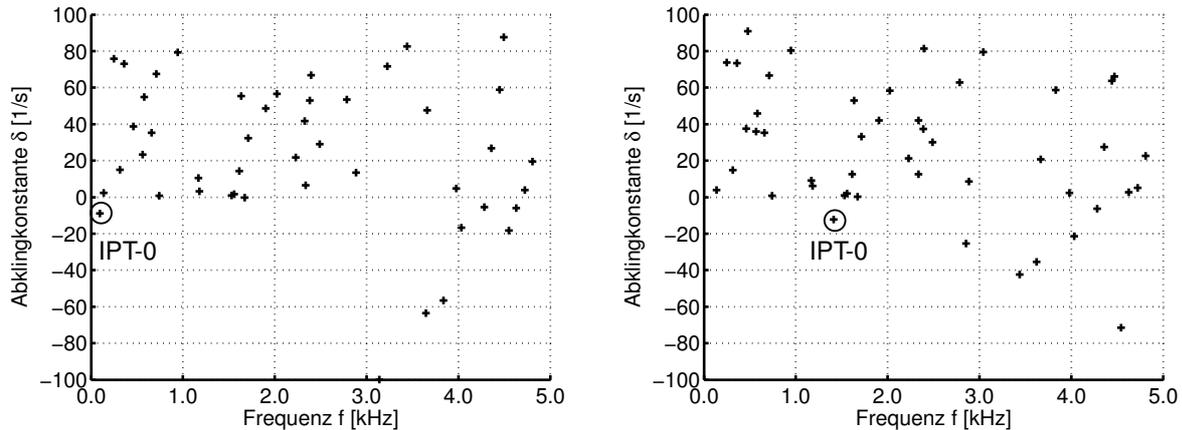
## 7.3 Rad, Reifen und Antrieb

Neben den räumlich feststehenden Achslenkern und Gummilagern auf der einen Seite des Bremssystems können auch die rotierenden Komponenten bestehend aus Abtriebswelle, Radschüssel, Radfelge und Reifen betrachtet werden. Analog zur Modellgrenze der Gummilager ist der Reifen aufgrund der Entkopplung und der hohen Materialdämpfung das begrenzende Element des betrachteten Schwingensystems bei Frequenzen über 1 kHz.

Bei der Berücksichtigung der Radschüssel und Felge ist grundsätzlich zwischen den In-Plane (IPT, IPTS) Moden und den OP Moden zu unterscheiden.

Wie oben erwähnt, ist bei OP Moden die Deformationsenergie im Bereich des Bremsscheibentopfs gering, sodass kein Hinweis darauf existiert, dass das Rad für eine hohe Prognosegüte mit abgebildet werden muss.

Buck [2008] stellte die Sensitivität von IPT und IPTS Schwingformen gegenüber einer Anfachung durch eine mit der Geschwindigkeit abfallende Reibkennlinie  $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} < 0$  dar. Bei Fahrzeugen mit belüfteten Bremsscheiben, die sich durch eine Scheibengeometrie mit großen Kühlkanälen und hohen, schmalen Kühlrippen auszeichnen, wurden Bremsgeräusche beobachtet, die durch instabile IPTS Moden verursacht werden. Mit Hilfe eines Minimalmodells und einer abfallenden Reibkennlinie kann diese Instabilität der IPTS Moden nachgestellt werden. Allerdings ist in diesem Fall zwangsläufig auch die IPT-0 Schwingform instabil, siehe Anhang C für eine Darstellung der Schwingform. Diese Mode besitzt je nach Geometrie der Bremsscheibe eine Frequenz zwischen 1.0 kHz und 1.5 kHz, wenn der Bremsscheibentopf



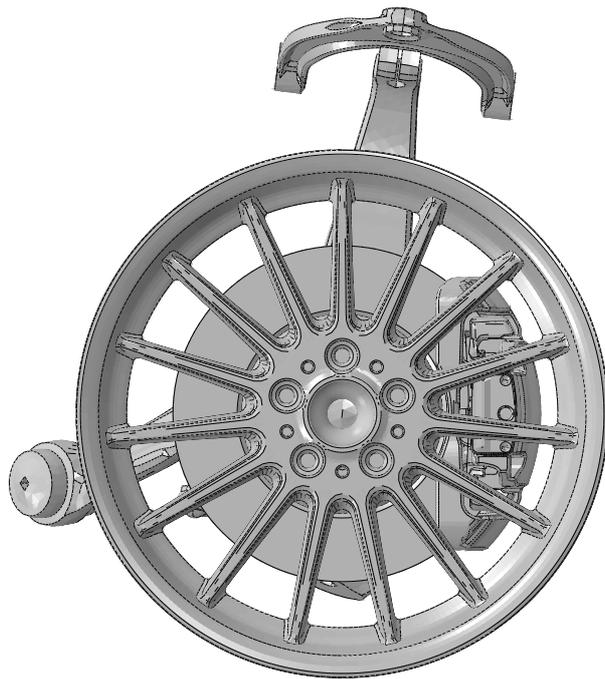
**Abbildung 7.2:** Stabilitätsanalyse eines Bremssystems bei Modellierung ohne Rad mit freier Rotation (links) und mit gesperrter Rotation (rechts)

eingespannt ist. Ein entsprechendes versuchsseitiges Geräusch wurde jedoch nicht beobachtet. Diese Abweichung zwischen Modell und Versuch konnte von Buck [2008] weder mit auftretenden Corioliskräften noch mit einer tangentialen Kopplung zwischen Bremssattel und Bremsscheibe erklärt werden und wurde mit der Modellierung der Systemgrenze in Verbindung gebracht.

Um den Einfluss von Rad und Reifen auf die Stabilität des Bremssystems eingrenzen zu können, wurden verschiedene Modellierungen der Systemgrenze untersucht. Dazu wurden Stabilitätsanalysen eines Bremssystems bei einem Bremsdruck von 30 bar berechnet und in den Abbildungen 7.2 und 7.4 dargestellt. Allen Modellierungen ist gemeinsam, dass mehrere Instabilitäten über 3 kHz auftreten. Dabei handelt es sich um OP Schwingformen der Bremsscheibe, die an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden.

Die von Buck [2008] beobachteten instabilen IPT-0 Schwingungen sind in Abbildung 7.2 rechts bei einer Frequenz von 1,4 kHz mit einer geringen negativen Dämpfung bzw. negativen Abklingkonstanten  $\delta$  zu erkennen. Die Dehnungsenergie der Schwingform liegt dabei in der Bremsscheibentopfwand zwischen Reibring und dem gegen Rotation festgehaltenen Topfboden. Die Sperrung des Rotationsfreiheitsgrades an der Systemgrenze ist aufgrund der unendlichen Impedanz  $Z$  steifer als das reale System im Fahrzeug.

Eine freie Rotation des Bremsscheibentopfs stellt das andere Extremum dar, wie in Abbildung 7.2 links zu erkennen ist. Aufgrund der verschwindenden Impedanz liegt die Frequenz der IPT-0 Schwingform nahe bei 0 Hz. Die negative Dämpfung erreicht nun einen höheren Wert. Der Realteil  $\delta$  des Eigenwerts der IPT-0 Schwingform besitzt in beiden Fällen einen Wert zwischen  $10 \frac{1}{s}$  und  $15 \frac{1}{s}$ , sodass die Anfachung je Zeiteinheit vergleichbar groß ist.

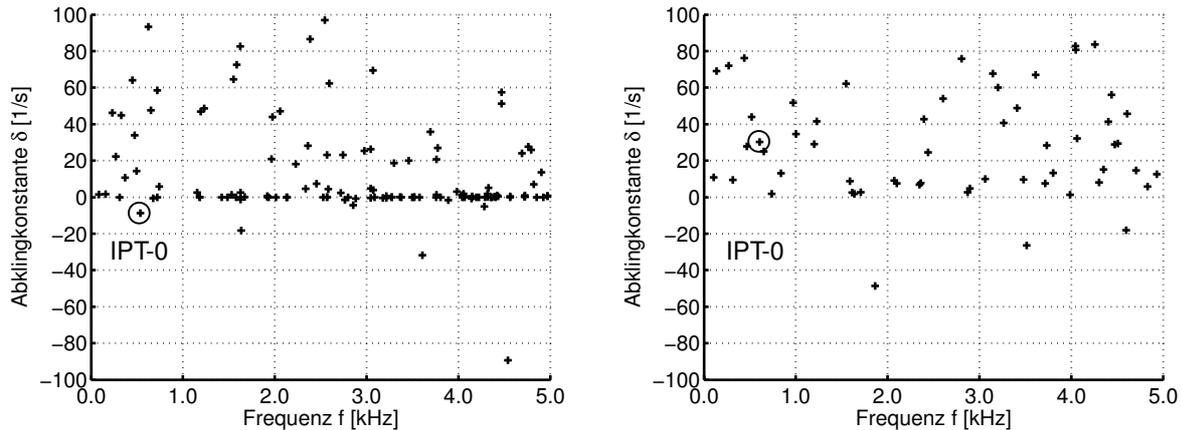


**Abbildung 7.3:** Finite Elemente Modell zur Stabilitätsanalyse einschließlich Radschüssel und Felge

In Abbildung 7.4 sind links die Simulationsergebnisse bei einer Systemerweiterung um Radschüssel und Radfelge dargestellt. Es ist zu erkennen, dass nun zwei Instabilitäten bei 0.5 kHz und 1.6 kHz auftreten. Die Instabilität bei 1.6 kHz stellt eine OP Schwingform dar. Die IPT Schwingform bei 0.5 kHz besitzt nahezu den gleichen Realteil  $\delta$  des Eigenwerts, wie die beiden weiter oben betrachteten Modellierungen. Nach diesem Ergebnis müsste eine hohe Sensitivität der Geräuschfrequenz  $f$  auf die Felgegeometrie bestehen, was jedoch im Widerspruch zu Versuchsergebnissen im Fahrzeug steht.

Die Verformung der Radschüssel und Felge bei der IPT Schwingform legt nahe, dass diese Schwingform auch den Reifen mit einbezieht und durch die dort vorhandene Materialdämpfung gedämpft wird. Der Reifen wird nun durch ein einfaches Finite Elemente Modell abgebildet. Dieses soll die Geometrie, die Elastizität und die Dämpfung des Reifengummis näherungsweise abbilden. Der untere Teil des Reifens wird zur Modellierung des Kontakts zur Fahrbahn eingespannt. Eine Berücksichtigung des Reifendrucks, der Gewebekarkasse und des Reifenprofils findet nicht statt.

Eine Stabilitätsanalyse des um den Reifen erweiterten Systems unter Verwendung eines komplexen Elastizitätsmoduls für den Reifengummi zeigt, dass die IPT-0 Schwingform der Bremsscheibe weiterhin eine Frequenz von 0.5 kHz besitzt, aber stark gedämpft ist. Die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse sind in Abbildung 7.4 rechts dargestellt. Die Anfachung



**Abbildung 7.4:** Stabilitätsanalyse eines Bremssystems bei Modellierung mit Radschüssel und Felge (links) und mit Radschüssel, Felge und Reifen inkl. Materialdämpfung im Reifen (rechts)

durch eine mit der Geschwindigkeit abfallende Reibkennlinie,  $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} < 0$ , kann somit keine Instabilität des gesamten Bremssystems mit einer IPT-0 Schwingform hervorrufen.

Bei Instabilitäten, die eine IPTS Schwingform der Bremsscheibe beinhalten, kommt die Materialdämpfung des Reifens nicht zur Geltung. Hier ist nahezu die gesamte Verformungsenergie in den Kühlrippen der Bremsscheibe gespeichert. Die Anregung über das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz kann in diesem Fall eine Instabilität des Bremssystems verursachen und hörbare Bremsgeräusche abstrahlen.

Durch die Erweiterung des Modellumfangs kann bei IPT und IPTS Moden eine Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und Beobachtungen am Fahrzeug erreicht werden. Bei Berücksichtigung eines spezifischen Anregungsmechanismus, hier die Anfandung durch eine abfallende Reibkennlinie, sind auch die entsprechenden Dämpfungsmechanismen abzubilden, um eine Überprägung zu vermeiden. Hier kann aufgrund der sehr spezifischen Anregung der IPT und IPTS Moden ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Systemstabilität und der Materialdämpfung des Reifens gefunden werden.

---

## 8 Anwendungen im Entwicklungsprozess

In diesem Kapitel stehen die Anwendungsmöglichkeiten der Simulation von Bremsenquietschen im Vordergrund.

Eine genaue Analyse von verschiedenen Ergebnisgrößen, wie zum Beispiel der Realteil der Eigenwerte, die Höhe der negativen Dämpfung, die Anzahl der instabilen Eigenschwingformen oder der minimale Reibkoeffizient, bei dem das System eine Instabilität zeigt, geben neben der binären Aussage nach Systemstabilität weiteren Aufschluss über das Systemverhalten.

Ziel des ersten Abschnittes ist eine einfache Ergebnisdarstellung, die den direkten Vergleich zweier Systeme hinsichtlich Bremsenquietschens ermöglicht.

Um ein Bremssystem als geräuschfrei abzusichern, müssen zahlreiche Betriebspunkte berechnet werden. Diese ergeben sich durch die Variation verschiedener Eingangsparameter. Hierzu zählen der Druck am Bremskolben, der Reibwert zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe, die Geometrie der Komponenten, die Materialien und die Bauteiltemperaturen. Eine effiziente Interpolationsmethode, um die Zahl der zu berechnenden Betriebspunkte zu verringern, wird in Kapitel 8.2 vorgestellt.

Falls das Ergebnis der Absicherung nicht zufriedenstellend ist, werden Verbesserungsmaßnahmen am Bremssystem gesucht. Um eine naive Trial-and-Error Suche zu vermeiden, können durch eine geeignete Interpretation der Simulationsergebnisse des Ausgangssystems zielgerichtet Verbesserungsvorschläge erarbeitet werden.

### 8.1 Ergebnisinterpretation

Im Gegensatz zur mechanisch-mathematischen Frage nach Systemstabilität, ist das zentrale Kriterium in der Anwendung immer die Wahrnehmbarkeit im Kundenbetrieb eines Fahrzeugs. Diese setzt sich einerseits aus der Lautstärke, andererseits aber auch aus der Häufigkeit der Geräuschereignisse zusammen. Außerdem wird Bremsenquietschen beim leichten

Abbremsen an einer roten Ampel stärker wahrgenommen, als bei einer Vollbremsung oder beim Bremsen auf der Autobahn, wenn Wind- und Reifengeräusche dominieren.

Diese Überlegungen gehen in die Erstellung eines Lastkollektivs ein, das für die versuchsseitige Absicherung angewendet wird und die kundenwertigen Betriebspunkte entsprechend wichtet. Idealerweise treten keinerlei Geräusche innerhalb des Lastkollektivs auf. Wenn dies im Entwicklungsprozess noch nicht gegeben ist, muss jedoch eine vielfach gestufte Bewertung der Bremse hinsichtlich des Bremsenquietschens erfolgen, um die benötigten Ressourcen während der Entwicklung abschätzen zu können. Dies kann beispielsweise anhand der beiden Größen Häufigkeit und Lautstärke geschehen.

Eine direkte Übertragung auf die Bremsgeräuschsimulation ist hier nicht möglich. Zum Einen fehlt aufgrund der Linearität der Stabilitätsanalyse die Aussage über die Amplitude und somit über die Lautstärke, andererseits wäre eine enorme Rechenleistung nötig, um die vielen Hundert oder Tausend Bremsungen, die in einem Lastkollektiv enthalten sind, zu berechnen. Andererseits bietet die Reproduzierbarkeit der Simulationsergebnisse und die Möglichkeit Parameter einzeln und unabhängig voneinander zu variieren, große Vorteile gegenüber dem Bremsengeräuschversuch.

Eine erste Möglichkeit zur Quantifizierung wäre der akustische Abstrahlgrad. Unter der Annahme, dass alle instabilen Schwingformen die gleiche Amplitude haben, könnte der Schallpegel anhand der Höhe des Abstrahlgrades bestimmt werden. Selimefendigil [2006] und Buck [2008] zeigten jedoch, dass IPTS Schwingformen von Bremssscheiben, siehe Anhang C.5, trotz des geringen Abstrahlgrads sehr hohe Schalleistungen hervorrufen können.

Der Betrag des Realteils  $\text{Re}(\lambda_j)$  bzw. die Höhe der negativen Dämpfung  $\zeta_j$  einer Instabilität bieten sich als weitere Kriterien für die Bewertung an. Hier gibt es mehrere Ansätze zur Bestimmung der Relevanz, die jedoch sehr weitreichende Annahmen beinhalten.

Aus der Tatsache, dass die Bremse beim Bremsenquietschen nur endliche Amplituden erreicht, folgt die Notwendigkeit eines nichtlinearen Effekts, der einen Grenzyklus bestimmt. Unter der Annahme, dass diese, im Modell unberücksichtigte, Nichtlinearität den gleichen Einfluss auf alle Schwingformen hat, kann aus der Höhe der negativen Dämpfung  $\zeta_j$  näherungsweise auf die Grenzamplitude geschlossen werden. Durch das im nichtlinearen Stabilitätssatz 2.6 verwendete Kriterium der Funktion  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  gibt es ein Indiz, dass ein entsprechender Zusammenhang existiert. Solange die für eine Grenzykelamplitude bestimmende Nichtlinearität nicht bekannt ist, kann jedoch keine Korrelation zwischen negativer Dämpfung  $\zeta_j$  und Amplitude  $|\varphi_j|$  angenommen werden.

Alternativ kann die negative Dämpfung  $\zeta_j$  als Kriterium für die Robustheit der Bremsgeräusche gegenüber Änderungen des Systems verwendet werden. Aus dieser Deutung der negativen Dämpfung folgt eine Wahrscheinlichkeit, mit der die prognostizierte Instabilität auch in Wirklichkeit auftritt. Dies wird in den folgenden Abschnitten weitergehend untersucht.

Wenn mehrere Stabilitätsanalysen mit unterschiedlichen Eingangsparametern durchgeführt werden, kann eine Bewertung hinsichtlich der Häufigkeit der Instabilitäten erfolgen. Sinnvollerweise erfolgt die Betrachtung für jede Frequenz bzw. jede Schwingform gesondert.

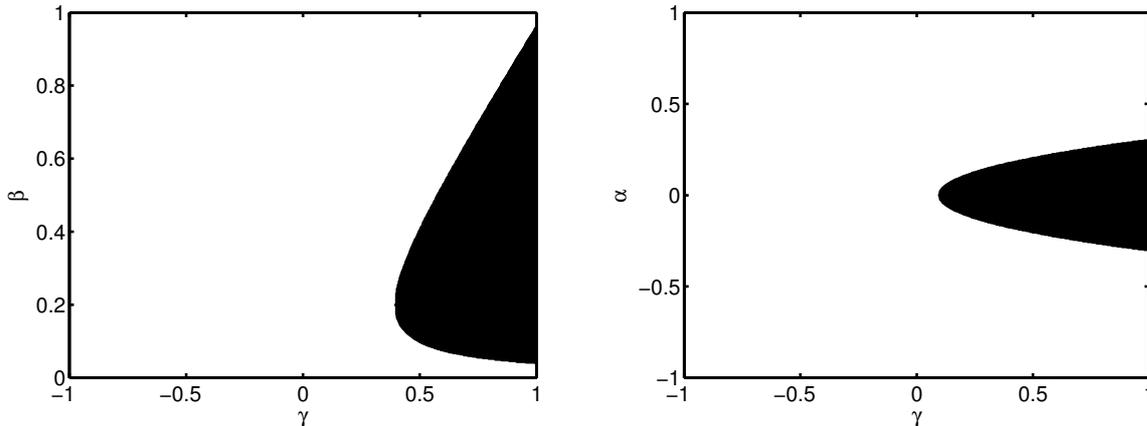
Aus den beiden Werten, der negativen Dämpfung und der Häufigkeit des Auftretens einer Instabilität, kann nun eine skalare Größe bestimmt werden, die verschiedene Bremssysteme untereinander vergleichbar macht. Mit Hilfe von empirischen Untersuchungen im Vergleich zwischen Kundenwahrnehmung bzw. Bewertung im Fahrzeugversuch einerseits und den beiden Ergebnisgrößen der Simulation – Häufigkeit und negative Dämpfung – andererseits, kann die Formel zur Berechnung der skalaren Bewertungsgröße validiert werden. Könnig u. a. [2013] schlagen eine ähnliche Bewertungsgröße vor, die ebenfalls über die Häufigkeit und negative Dämpfung ermittelt wird.

## 8.2 Robustheitsbewertung

Eine Fragestellung betrifft die Robustheit des Bremssystems gegenüber Änderungen der Geometrie, der Steifigkeiten oder weiterer Parameter. Ziel ist es, das Bremssystem so auszulegen, dass es möglichst selten wahrnehmbare Geräusche hervorruft. Dies soll mit der geplanten, idealen Nenngeometrie gelten, aber auch mit der später produktionsbedingt evtl. leicht abweichenden Realgeometrie. Darüber hinaus können einige Parameter nur approximativ bestimmt werden, wie zum Beispiel die dynamische Steifigkeit eines Bremsbelags. In der Simulation sollte dies entsprechend berücksichtigt werden können, ohne dass eine zu große Zahl von Berechnungen durchgeführt werden muss.

In Folgenden wird zuerst eine Methode dargestellt, um die binäre Aussage, ob die Bremse stabil bzw. instabil ist, zu ergänzen und die Neigung eines Systems zur Instabilität zu quantifizieren.

Später können mit Hilfe der Modellierung von Systemparametern als stochastische Größen, Aussagen über die Wahrscheinlichkeit zur Instabilität eines Systems gewonnen werden.



**Abbildung 8.1:** Stabilitätsbereiche (weiß) bei Variation dimensionsloser Parameter mit  $c_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta \in [0,1]$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (links) und  $c_0 = 1$ ,  $\alpha \in [-1,1]$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (rechts)

## 8.2.1 Stabilitätskriterien

Die Definition der Stabilitätskriterien wird anhand des Minimalsystems zur Modenkopplung mit zwei Freiheitsgraden dargestellt, siehe Kapitel 3.3. Eine Validierung der Aussagen mit Hilfe eines Finite Elemente Modells findet später in diesem Kapitel statt.

Gegeben sei die Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$  aus Gleichung (3.28) mit

$$\mathbf{B} = c_0 \begin{bmatrix} 1 + \alpha + \beta & \beta - \gamma \\ \beta & 1 - \alpha + \beta \end{bmatrix} \quad c_0 > 0 \quad \alpha \in [-1,1] \quad \beta > 0 \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

Bis auf den, für die Stabilitätsaussage irrelevanten, Faktor  $c_0$  sind alle Größen dimensionslos. Das Steifigkeitsverhältnis der beiden Freiheitsgrade wird mit  $\alpha$ , die symmetrische Kopplung mit  $\beta$  und die Systemstörung durch eine asymmetrische Kopplung mit  $\gamma$  bezeichnet.

Über das charakteristische Polynom  $\det(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I})$  können die Eigenwerte  $\kappa_{1,2}$  und damit die Stabilität des zugrunde liegenden Systems bestimmt werden, siehe Kapitel 3.3. Es gilt:

$$\kappa_{1,2} = c_0 \left( 1 + \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta(\beta - \gamma)} \right) \quad (8.2)$$

Die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und Abklingkonstante  $\delta$  des harmonischen Ansatzes berechnen sich durch  $\pm \lambda = \pm(i\omega - \delta) = \sqrt{-\kappa_{1,2}}$ . Eine stabile Lösung kann nur gewährleistet werden, wenn  $0 < \kappa_{1,2} \in \mathbb{R}$  gilt. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist das positive Vorzeichen des Wurzelausdrucks  $D := c_0(\alpha^2 + \beta(\beta - \gamma))$ . In Abbildung 8.1 sind die instabilen Bereiche des Systems dunkel eingefärbt.

Darüber hinaus interessiert hier nicht nur die Aussage, ob das System stabil ist, sondern auch wie robust es sich gegenüber Veränderungen verhält, ohne dass die Stabilität verloren geht. Ein Kriterium hierfür bietet die Diskriminante  $D = c_0 (\alpha^2 + \beta (\beta - \gamma))$ , die verwendet wird, um die Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen zu bestimmen. Eine negative Diskriminante impliziert Instabilität. Andererseits, je höhere positive Werte die Diskriminante annimmt, desto robuster verhält sich das System gegenüber kleinen Störungen.

Da  $c_0 > 0$ , muss nur der Term in der Klammer betrachtet werden. Der erste Summand  $\alpha^2$  der Diskriminante kann nicht negativ werden, insbesondere wirkt sich ein großer Wert  $\alpha$  positiv auf das Systemverhalten aus. Dies impliziert, mechanisch gesehen, dass die Eigenfrequenzen der beiden Freiheitsgrade im ungekoppelten Zustand weit voneinander abweichen. Welche Schwingform dabei die höhere Eigenfrequenz besitzt, ist nicht relevant.

Weiter darf der zweite Summand  $\beta(\beta - \gamma)$  keine betragsmäßig großen, negativen Werte annehmen. Dies ist in zwei Fällen gegeben: Einerseits für  $|\gamma| < |\beta|$ , d.h. bei einer betragsmäßig kleinen Störung  $\gamma$  bleibt der zweite Summand positiv. Für  $\gamma$  fest und  $\beta \rightarrow \pm\infty$  gilt außerdem:

$$\beta(\beta - \gamma) > 0 \quad (8.3)$$

Die Störung  $\gamma$ , die proportional zum Reibwert  $\mu$  ist, muss somit kleiner als die symmetrische Kopplung  $\beta$  sein. Diese wird von der Steifigkeit der Diagonalfeder  $k_{12}$  bestimmt. Der Spezialfall  $\gamma = 0$  tritt bei verschwindendem Reibwert  $\mu$  ein.

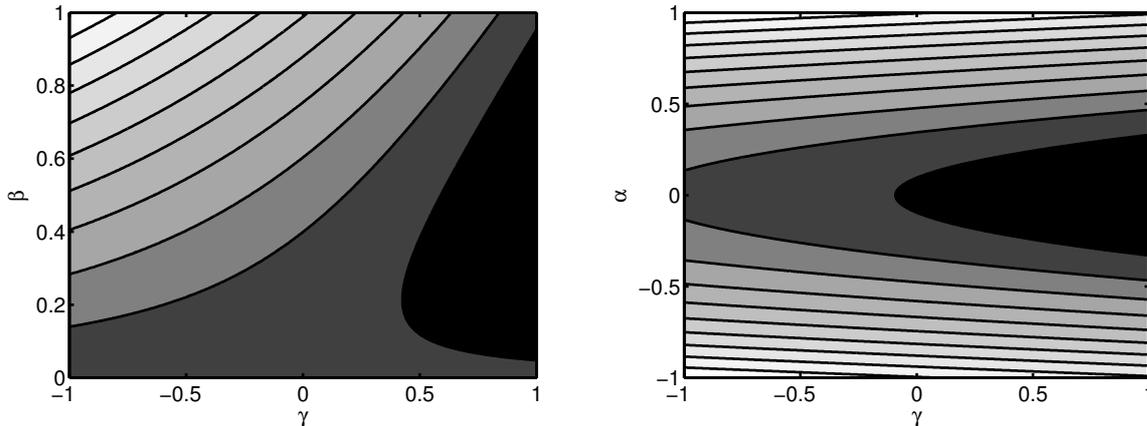
Andererseits folgt, wenn  $\alpha \neq 0$  und  $\beta \rightarrow 0$ :

$$|\beta(\beta - \gamma)| < \alpha^2 \quad (8.4)$$

Das heißt, wenn die Kopplung  $\beta$  der beiden Freiheitsgrade im Vergleich zum Steifigkeitsverhältnis  $\alpha$  klein genug ist, tritt keine Instabilität auf. Der Grenzübergang ist im Spezialfall des ungekoppelten Systems zu erkennen.

Abbildung 8.2 zeigt links den Verlauf der Diskriminante  $D$  gegenüber der Unsymmetrie  $\gamma$  und der Kopplung  $\beta$  der beiden Freiheitsgrade. Auf der rechten Seite ist die Diskriminante  $D$  gegenüber dem Steifigkeitsverhältnis  $\alpha$  aufgetragen. Im schwarzen Bereich nimmt die Diskriminante negative Werte an, dort ist das System instabil.

Für das hier betrachtete System mit zwei Freiheitsgraden gilt für die Wurzel der Diskriminante  $\sqrt{D} = |\omega_1 - \omega_2| + i|\delta_1 - \delta_2| \in \mathbb{C}$ . Somit steht eine Möglichkeit zur Berechnung der Diskriminante  $D$  aus den Eigenwerten zur Verfügung, welche keine vorherige Kenntnis der Systemparameter  $c_0, \alpha, \beta$  und  $\gamma$  voraussetzt.



**Abbildung 8.2:** Die Diskriminante  $D$  als Stabilitätskriterium mit  $c_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta \in [0,1]$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (links) und  $c_0 = 1$ ,  $\alpha \in [-1,1]$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (rechts)

Neben der Determinante kann als weiteres Kriterium die Differenz der beiden Eigenwerte  $\Delta\lambda := |\lambda_1 - \lambda_2| \in \mathbb{R}$  betrachtet werden. Eine beginnende Instabilität wird mit  $\Delta\lambda = 0$  prognostiziert. Aus  $\Delta\lambda > 0$  kann jedoch nicht allein auf ein stabiles oder instabiles Systemverhalten geschlossen werden. Im Fall des stabilen Systemverhaltens gilt der Zusammenhang  $\sqrt{D} = \Delta\lambda \in \mathbb{R}$ .

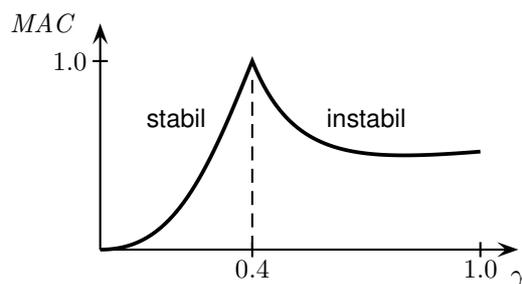
Ein anderes Stabilitätskriterium ist das Modal Assurance Criterion (MAC), das nicht über die Eigenwerte  $\lambda_i$ , sondern über die Eigenvektoren  $\varphi_i$  definiert ist. Diese aus der Signalanalyse stammende Größe wurde ursprünglich verwendet, um gemessene mit berechneten Schwingformen zu vergleichen. Allemang [2003] beschrieb den Hintergrund und verschiedene Anwendungsmöglichkeiten des MAC.

**Definition 8.1** (MAC-Wert):

Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^n$ , dann ist der MAC-Wert definiert als:

$$MAC(\varphi_1, \varphi_2) := \frac{|\overline{\varphi_1}^t \varphi_2|^2}{\|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2} \in \mathbb{R} \quad (8.5)$$

Der MAC-Wert entspricht dem Betragsquadrat des Standardskalarprodukts über  $\mathbb{C}$ . Im zweidimensionalen reellwertigen Fall kann er über das Cosinus-Quadrat des Winkels zwischen den beiden Eigenvektoren veranschaulicht werden. Der folgende Satz ist die Grundlage für die Verwendbarkeit dieses Stabilitätskriteriums bei der Simulation von Bremsenquietschen. Angewendet auf die hier vorliegende Situation folgt:



**Abbildung 8.3:** Verlauf des MAC-Werts gegenüber dem Parameter  $\gamma \in [0,1]$  mit  $c_0 = 1, \alpha = 0.2, \beta = 0.2$

**Folgerung 8.2** (MAC-Wert):

Sei  $\alpha \neq 0$  und  $\varphi_j$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\kappa_j$  von  $\mathbf{B}$  ( $j = 1,2$ ), dann gilt:

$$MAC = 0 \iff \gamma = 0 \quad \text{und} \quad MAC = 1 \iff \Delta\lambda = D = 0 \quad (8.6)$$

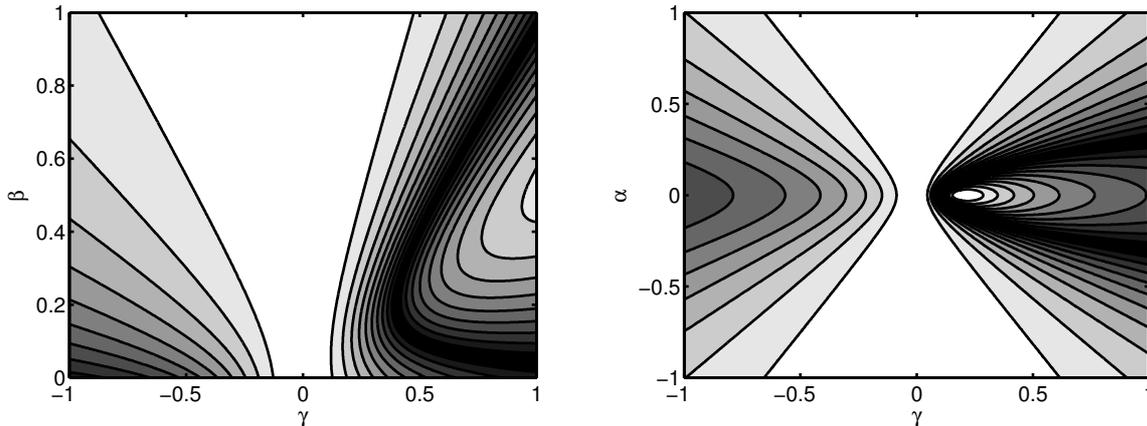
Beweis: Die obere Äquivalenz ist eine direkte Anwendung des Satzes über die orthogonale Diagonalisierbarkeit 2.8. Durch die Annahme  $\alpha \neq 0$  ist die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte immer 1 und der Eigenraum zu allen Eigenwerten eindimensional. Die untere Aussage stützt sich darauf, dass die Identität der Eigenvektoren die Gleichheit der zugehörigen Eigenwerte impliziert und bei geometrischer Vielfachheit 1 auch umgekehrt.

Aus  $MAC = 0$  folgt so, dass keine Störung der Symmetrie vorliegt, also  $\gamma = 0$ . Die andere Grenze  $MAC = 1$  zeigt die beginnende Instabilität des Systems an. Der Verlauf dazwischen ist streng monoton bzgl. der Unsymmetrie  $\gamma$ , siehe Abbildung 8.3.

Bei weiterer Zunahme der Symmetriestörung  $\gamma$  nimmt der MAC-Wert wieder ab. Dies liegt an der beginnenden Phasenverschiebung der beiden Eigenschwingformen. Die Realteile der Eigenvektoren  $\varphi_j$  sind in diesem Fall gleich, die Imaginärteile unterscheiden sich jedoch im Vorzeichen. Insofern muss der MAC-Wert immer in Kombination mit einem weiteren Stabilitätskriterium verwendet werden.

In Abbildung 8.4 ist der MAC-Wert gegenüber Variationen der Systemparameter  $\alpha$  und  $\beta$  sowie  $\gamma$  aufgezeichnet.

Ein Vorteil des MAC-Werts liegt im streng monotonen Verlauf mit den beiden festen Grenzwerten 1 bei beginnender Instabilität und 0 bei völliger Symmetrie. Der Eigenfrequenzabstand  $\Delta\lambda$  und die Diskriminante  $D$  besitzen diese zweite feste Grenze nicht. Somit kann nicht direkt bestimmt werden, ob die Systemmatrizen symmetrisch sind oder nicht.



**Abbildung 8.4:** Der MAC-Wert als Stabilitätskriterium mit  $c_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta \in [0,1]$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (links) und  $c_0 = 1$ ,  $\alpha \in [-1,1]$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma \in [-1,1]$  (rechts)

In Abbildung 8.5 ist zu erkennen, wie sich die beiden Eigenformen  $\varphi_1, \varphi_2$  bei zunehmender Unsymmetrie  $\gamma$  einander annähern. Ab einem bestimmten  $\gamma_{\text{grenz}}$  kommt es auf der rechten Seite zur Kopplung der Moden und der damit einhergehenden Instabilität. Die Kopplung kann dadurch veranschaulicht werden, dass die nun komplexe Eigenform  $\varphi_1$  als Ellipse dargestellt wird, die bei jedem Schwingzyklus Energie aus der Relativbewegung aufnimmt und somit eine ansteigende Amplitude besitzt. Die komplex konjugierte Eigenform  $\varphi_2$  wird hingegen gedämpft.

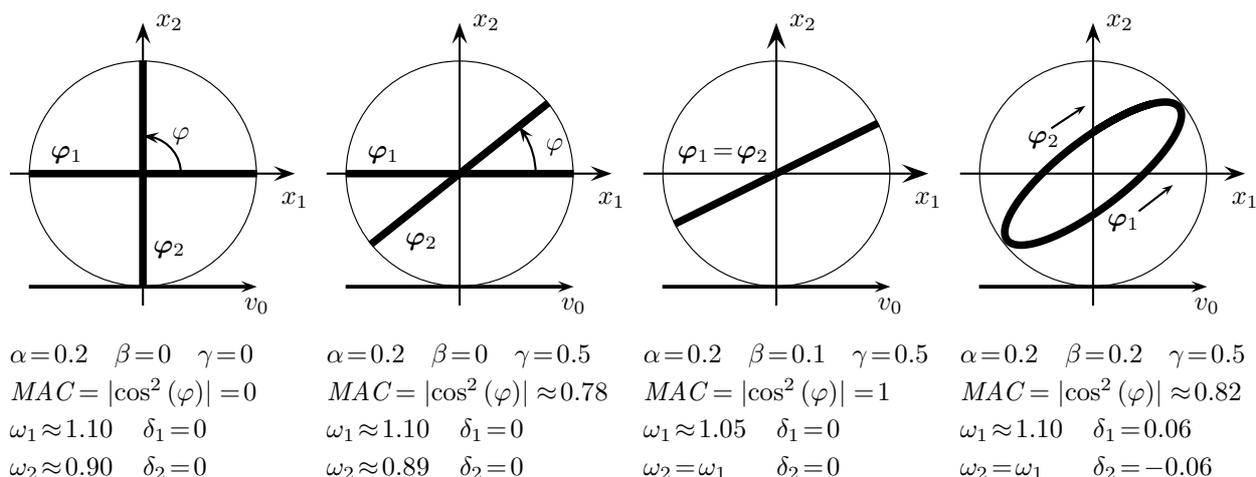
Ein Nachteil des MAC-Werts ist, dass er bei instabilen Systemen wiederum von seinem Maximalwert  $MAC = 1$  abfällt. Außerdem ist der MAC-Wert beim Übergang zur Instabilität nicht bzgl. der Eingangsgrößen differenzierbar, wie in Abbildung 8.3 zu erkennen ist. Ursache hierfür ist die beginnende Phasenverschiebung zwischen den beiden Eigenvektoren der koppelnden Moden. Diese Phasenverschiebung wird vom MAC-Wert als Unterschied in der Schwingform interpretiert, obwohl die reelle Schwingform selbst gleich ist und nur die Phase der beiden Moden variiert.

Um diesem Verhalten zu begegnen, wird eine weitere Größe definiert, die diese Nachteile zumindest für M-K-N-Systeme behebt. Dadurch geht jedoch die mathematische Interpretation als Winkel zwischen den beiden Eigenvektoren verloren.

**Definition 8.3** (MAC<sub>2</sub>-Wert):

Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^n$ , dann ist der MAC<sub>2</sub>-Wert definiert als:

$$MAC_2(\varphi_1, \varphi_2) := 2MAC(\text{Re}(\varphi_1), \text{Re}(\varphi_2)) - MAC(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R} \quad (8.7)$$



**Abbildung 8.5:** MAC-Werte, Eigenwerte und die Lage der normierten Eigenvektoren mit zunehmender Kopplung nach rechts hin, die Anfachung in Folge der Relativbewegung wird durch  $v_0$  angedeutet

Der Name  $MAC_2$  soll die Abstammung vom MAC-Wert verdeutlichen. Eine vergleichbare Definition in der Literatur ist aktuell nicht bekannt.

**Folgerung 8.4** ( $MAC_2$ -Wert):

Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

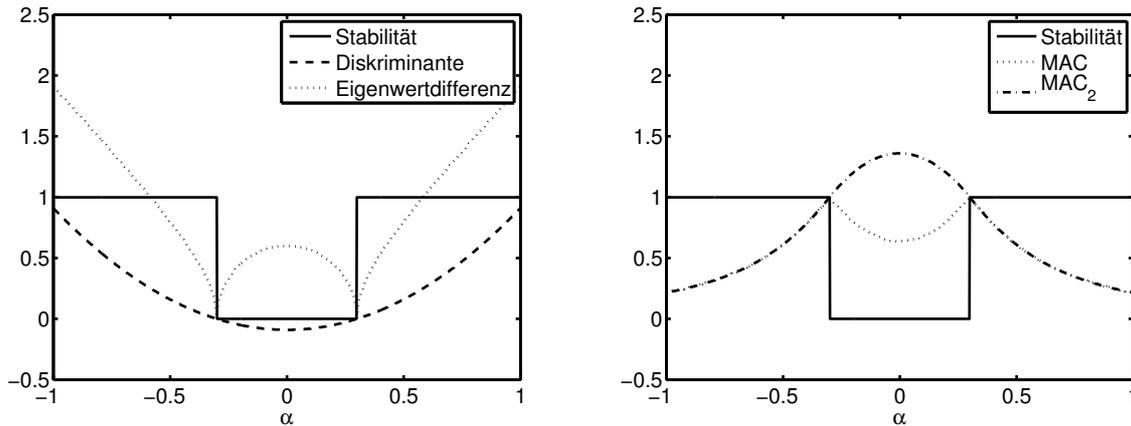
$$MAC_2(\varphi_1, \varphi_2) = MAC(\varphi_1, \varphi_2) \tag{8.8}$$

Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^n$  mit  $\text{Re}(\varphi_1) = \text{Re}(\varphi_2)$ . Dann gilt:

$$2 \geq MAC_2(\varphi_1, \varphi_2) \geq 1 \tag{8.9}$$

Solange das System stabil ist, sind die beiden Kriterien damit identisch. Bei Instabilität nimmt der  $MAC_2$ -Wert jedoch immer Werte größer 1 an. Er kann somit als alleiniges Kriterium zur Instabilität dienen. Beim Übergang zur Instabilität, d.h.  $MAC = MAC_2 = 1$ , ist der  $MAC_2$ -Wert im Gegensatz zum MAC-Wert differenzierbar. Diese Eigenschaft ist später in diesem Kapitel von Bedeutung.

In Abbildung 8.6 sind die verschiedenen Stabilitätskriterien zum Vergleich aufgetragen. Die durchgehende Linie für Systemstabilität nimmt bei prognostizierter Instabilität den Wert 0 und ansonsten den Wert 1 an. Abbildung 8.6 (links und rechts) entspricht einem Schnitt durch die drei Abbildungen 8.1 (rechts), 8.2 (rechts) und 8.4 (rechts) bei  $\gamma = 1$ .



**Abbildung 8.6:** Verlauf verschiedener Stabilitätskriterien (links und rechts) mit  $c_0 = 1, \beta = 0.1$  und  $\gamma = 1$ , das System ist für  $\alpha \in (-0.3, 0.3)$  instabil

## 8.2.2 Systeme mit Materialdämpfung

Bei Berücksichtigung von geschwindigkeitsproportionalen Kräften, wie sie zum Beispiel bei viskoser Materialdämpfung auftreten, kann das System trotz Kopplung weiter stabil sein, wie Buck [2008] an einigen Beispielen zeigte. Solange der positive Dämpfungseinfluss aus der Materialdämpfung größer als der negative aus der Modenkopplung ist, findet keine Anfachung des Systems statt. Systeminstabilität kann also nicht länger mit Modenkopplung gleichgesetzt werden, wie im ungedämpften Fall. Einige Eigenschaften von Diskriminante, Eigenfrequenzabstand, MAC-Wert und  $MAC_2$ -Wert gehen damit verloren. So ist zum Beispiel eine beginnende Instabilität nicht länger mit  $MAC = MAC_2 = 1$  gleichzusetzen.

## 8.2.3 Verallgemeinerung auf Systeme mit vielen Freiheitsgraden

Das diskretisierte Finite Elemente Modell einer Fahrzeugbremse verfügt über eine hohe Zahl an Freiheitsgraden, siehe Kapitel 4.1. Daher stellt sich die Frage nach der Skalierbarkeit der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Kriterien.

Die Eigenwerte  $\lambda$  können mit Hilfe des Lanczos-Algorithmus effizient für große Systeme berechnet werden, siehe Kapitel 4.3. Daraus werden die jeweiligen Eigenfrequenzen  $\omega$  und Abklingkonstanten  $\delta$  ermittelt, die als Kriterium für Stabilität dienen. Die Differenzen der Eigenwerte  $\Delta\lambda$  lassen sich ebenfalls leicht bestimmen und können als Kriterium für Robustheit eingesetzt werden. Dabei ist jedoch eine exakte Zuordnung der kritischen Eigenmoden nötig, welche beim Zweifreiheitsgradsystem trivial war.

Die Diskriminante ist für Gleichungen höherer Ordnung definiert und damit auf Systeme mit vielen Freiheitsgraden anwendbar. Aus  $D \geq 0$  kann für  $n > 3$  jedoch nicht mehr auf die Stabilität des Systems geschlossen werden.

Aus der oben gefundenen Äquivalenz von Diskriminante  $D$  und Eigenwertabstand  $|\omega_1 - \omega_2| + i|\delta_1 - \delta_2|$  lässt sich jedoch für einzelne Eigenmoden  $j, k$  eine Verallgemeinerung der Diskriminante definieren  $\sqrt{D}_{i,j} := |\omega_i - \omega_j| + i|\delta_i - \delta_j|$ , wobei zwischen dem  $i$  im Index und der imaginären Einheit  $i$  zu unterscheiden ist.

Die MAC-Werte und  $MAC_2$ -Werte lassen sich für große Systeme ebenfalls effizient berechnen und eignen sich, gegebenenfalls zusammen mit den Eigenfrequenzabständen, als Kriterium für Stabilität, als auch für Robustheit eines Systems.

Da zu Beginn unklar ist, welche Eigenmoden  $\varphi_j$  später für Instabilitäten verantwortlich sind, muss  $MAC(\varphi_i, \varphi_j)$  für alle  $i, j = 1, \dots, m$  berechnet werden. Die Rechenzeit hierfür ist aufgrund der Länge der Vektoren  $n$  und der Zahl der Berechnungen  $\frac{m(m+1)}{2}$  nicht vernachlässigbar. Der folgende Satz ist Grundlage für die effiziente Berechnung der MAC- und  $MAC_2$ -Werte am Bremssystem.

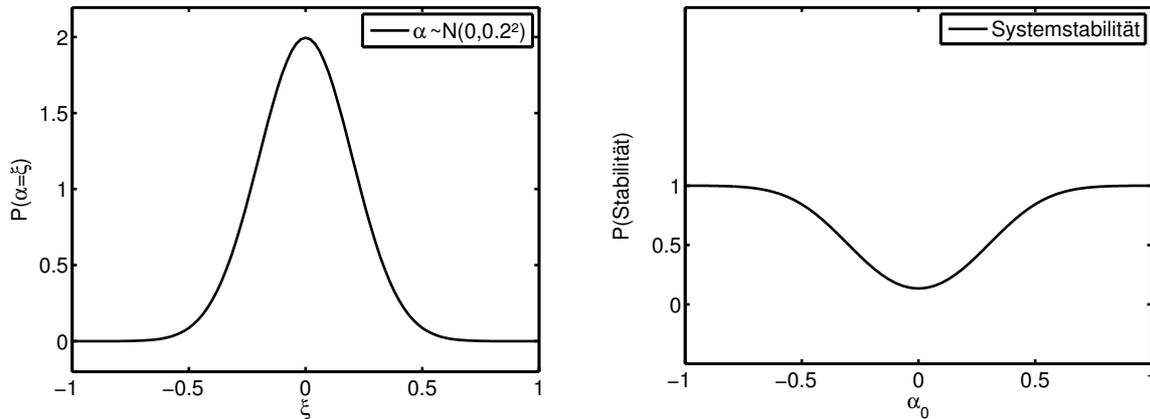
**Satz 8.5** (Generalisierte Eigenvektoren):

Seien  $\varphi_j, \varphi_{0,j}, \psi_j, \varphi_j^*$  definiert wie in Kapitel 4.3. Dann gilt  $\forall i, j \in 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} MAC(\varphi_i^*, \varphi_j^*) &= MAC(\psi_i, \psi_j) & MAC(\varphi_i^*, \varphi_{0,j}) &= (\psi_i)_j \\ MAC_2(\varphi_i^*, \varphi_j^*) &= MAC_2(\psi_i, \psi_j) & MAC_2(\varphi_i^*, \varphi_{0,j}) &= (\psi_i)_j \end{aligned} \quad (8.10)$$

Der Beweis der linken Gleichungen folgt durch direktes Nachrechnen der Definitionen der MAC und  $MAC_2$ -Werte. Die Orthogonalität der Matrix der Eigenvektoren  $\Phi_0^t \Phi_0 = I \in \mathbb{R}^{m,m}$  ist dabei essentiell. Die rechten Gleichungen folgen dann durch die beiden Identitäten  $\Phi_0 e_j = \varphi_{0,j}$  und  $MAC(\psi_i, e_j) = (\psi_i)_j$ .

Die Berechnungen können nun effizient ausgeführt werden, da  $\varphi_i^* \in \mathbb{R}^n$  und  $\psi_i \in \mathbb{R}^m$  mit  $m \ll n$ . In der Anwendung besitzen die Finite Elemente Modelle bis zu einer Million Freiheitsgrade  $n$ , die Zahl der Eigenmoden im hörbaren Bereich ist jedoch  $< 1000$ . Damit sinkt die Zahl der Rechenoperationen in etwa um den Faktor 1000.



**Abbildung 8.7:** Verteilung des Parameters  $\alpha$  (links) und Wahrscheinlichkeit für Systemstabilität am Minimalmodell (rechts)

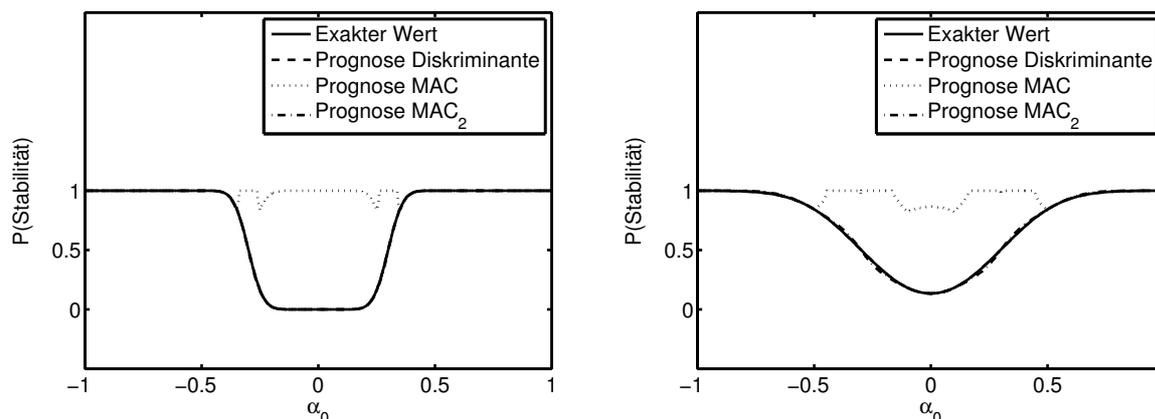
## 8.2.4 Robustheitsaussagen bei stochastisch verteilten Parametern

Für Berechnungen mit Hilfe des in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Berechnungsansatzes können manche Parameter nur mit hohem Aufwand exakt bestimmt werden. Daher soll an dieser Stelle untersucht werden, inwieweit stochastische Größen als Eingangsparameter verwendet werden können. Unbekannte Eingangsparameter können mit ungenau bestimmten Eigenfrequenzabständen in Verbindung gebracht werden, was sich im Zweifreiheitsgradsystem am stärksten mit dem Parameter  $\alpha$ , dem Steifigkeitsverhältnis der beiden Freiheitsgrade, ausdrücken lässt.

Im Folgenden wird der Parameter  $\alpha$  daher nicht mehr als deterministische Größe betrachtet, sondern als normalverteilte Zufallsvariable  $\alpha \sim \mathcal{N}(\alpha_0, \sigma^2)$  mit bekanntem Erwartungswert  $\alpha_0$  und bekannter Standardabweichung  $\sigma$ . Abbildung 8.7 links zeigt für eine exemplarische Verteilung des Parameters  $\alpha$  bei  $\alpha_0 = 0$  und  $\sigma = 0.2$ . Die Wahrscheinlichkeit  $P$  für die Stabilität des Systems ist nun

$$P(\text{Stabilität}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha = \xi) \cdot \begin{cases} 1, & \text{wenn System bei } \xi \text{ stabil} \\ 0, & \text{wenn System bei } \xi \text{ instabil} \end{cases} d\xi \quad (8.11)$$

In Abbildung 8.7 ist rechts für Erwartungswerte  $\alpha_0 \in [-1, 1]$  und  $\sigma = 0.2$  die Wahrscheinlichkeit aufgetragen, dass das System mit  $\alpha \sim \mathcal{N}(\alpha_0, \sigma^2)$  stabil ist. Im Vergleich mit der Stabilitätskurve in Abbildung 8.6 ist eine Ähnlichkeit zu erkennen, wobei im stochastischen Fall der Übergang vom Stabilitätsbereich (Wert 1) zum Instabilitätsbereich (Wert 0) nicht abrupt, sondern fließend ist.

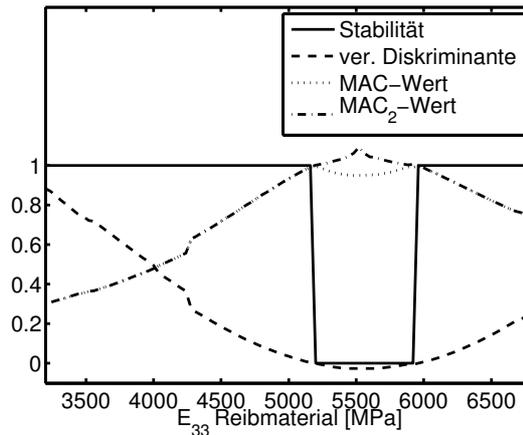


**Abbildung 8.8:** Wahrscheinlichkeit und verschiedene Prognosen für Systemstabilität am Minimalmodell:  
 $\sigma = 0.05$  (links),  $\sigma = 0.2$  (rechts)

Für komplexe Systeme mit vielen Freiheitsgraden ist der numerische Aufwand zu groß, um die Stabilitätsanalyse für viele  $\xi$  durchzuführen und damit das obige Integral (8.11) näherungsweise zu berechnen. Daher wird mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt genannten Kriterien eine Prognose durchgeführt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System stabil ist. Das System wird dabei an drei Stützstellen  $\xi = \alpha_0 - \sigma$ ,  $\xi = \alpha_0$  und  $\xi = \alpha_0 + \sigma$  berechnet und der Wert des gewählten Stabilitätskriteriums bestimmt.

Aus diesen drei Werten kann ein quadratisches Polynom bestimmt werden, das den Verlauf des gewünschten Stabilitätskriteriums für  $\xi \in \mathbb{R}$  approximiert. Dieses Polynom wird wiederum in Gleichung (8.11) eingesetzt und ausgewertet. Grundsätzlich sind auch weitere Systemauswertungen möglich, sodass ein Interpolationspolynom höheren Grades berechnet werden kann.

Die Prognosen sind in Abbildung 8.8 zusammen mit dem exakten Wahrscheinlichkeitsverlauf aufgetragen. Mit Hilfe der Diskriminante wird bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden die exakte Wahrscheinlichkeit vorhergesagt, da die Diskriminante selbst ein Polynom zweiten Grades in  $\alpha$  ist und somit durch drei Stützwerte exakt approximiert werden kann. In Abbildung 8.8 ist daher die Diskriminante mit der exakten Lösung übereinstimmend. Der MAC-Wert liefert falsche Prognosen. Dies ist in den wieder abfallenden Werten bei bestehender Instabilität und der fehlenden Differenzierbarkeit bzgl.  $\alpha$  begründet. Bei der Definition des MAC<sub>2</sub>-Werts ist dieser Nachteil behoben. Somit wird eine bessere Prognosegüte erreicht. Der MAC<sub>2</sub>-Wert liefert jedoch keine exakten Werte, da er sich nicht als Polynom zweiten Grades in  $\alpha$  darstellen lässt. Die Abweichungen sind bei diesem System jedoch vernachlässigbar gering.



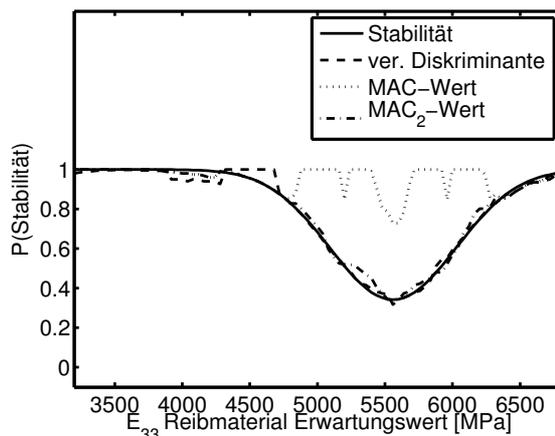
**Abbildung 8.9:** Stabilität des 13. Eigenwerts und Werte verschiedener Stabilitätskriterien bei Variation der axialen Steifigkeit  $E_{33}$  des Reibmaterials am Finite Elemente Modell

Als nächster Schritt wird diese Methode auf ein Finite Elemente Modell eines Bremssystems angewendet.

### 8.2.5 Stabilitätsprognose am Bremssystem

Ziel dieses Abschnittes ist es, die am Minimalmodell mit zwei Freiheitsgraden definierten Stabilitätskriterien an einem realistischen Anwendungsfall zu validieren. Hierfür wurde ein Finite Elemente Modell einer Bremse mit ca. 40000 Freiheitsgraden verwendet. Da die Einflüsse durch nichtlineare Effekte vor der eigentlichen linearen Stabilitätsanalyse gering gehalten werden sollen, wird der axiale Elastizitätsmodul  $E_{33}$  der Bremsbeläge als Variationsparameter gewählt. Die Stabilitätsanalyse beschränkt sich auf die Frage, ob ein bestimmter Eigenwert Instabilitäten zeigt und nicht, ob das gesamte System stabil ist. Diese Einschränkung ist in der Anwendung zulässig, da dort oft eine bestimmte Quietschfrequenz vom Prüfstand oder aus Fahrzeugen bekannt ist und somit auf einen bestimmten Eigenwert des Systems geschlossen werden kann.

In Abbildung 8.9 ist der Stabilitätsbereich des 13. Eigenwerts gegenüber dem axialen Elastizitätsmodul des Reibmaterials der Bremsbeläge aufgetragen (durchgehende Linie). Außerdem sind zum Vergleich die Werte verschiedener Stabilitätskriterien erkennbar. Der Elastizitätsmodul  $E_{33}$  wird dabei von 3000 MPa bis 7000 MPa variiert. Im Bereich der Instabilität koppelt die 13. Eigenmode mit der benachbarten 12. Eigenmode.



**Abbildung 8.10:** Wahrscheinlichkeit und verschiedene Prognosen für die Stabilität des 13. Eigenwerts am Finite Elemente Modell

Der axiale Elastizitätsmodul  $E_{33}$  des Reibmaterials der Bremsbeläge wird nicht mehr als deterministischer Wert modelliert, sondern als normalverteilte Zufallsvariable  $E_{33} \sim \mathcal{N}(E, \sigma^2)$  angenommen. Für die folgende Untersuchung wird der Erwartungswert  $E$  wieder zwischen 3000 MPa und 7000 MPa variiert. Die Standardabweichung  $\sigma$  des axialen Elastizitätsmoduls des Bremsbelags beträgt konstant 400 MPa.

In Abbildung 8.10 ist die Wahrscheinlichkeit für die Systemstabilität eingezeichnet (durchgehende Linie). Außerdem wurden Prognosen auf Basis der verallgemeinerten Diskriminante  $\sqrt{D}_{12,13}$ , des MAC-Werts und des  $MAC_2$ -Werts, wie sie im vorherigen Abschnitt definiert wurden, erstellt. Es ist wiederum erkennbar, dass die Prognosen mittels verallgemeinerter Diskriminante und  $MAC_2$ -Wert gute Ergebnisse liefern. Die Prognose über das Kriterium des MAC-Werts folgert falsche Wahrscheinlichkeiten für die Systemstabilität.

Die in diesem Kapitel definierten Stabilitätskriterien bieten somit die Möglichkeit, bei unsicheren oder unbekanntem Eingangsparemtern eine Bewertung des Systems vorzunehmen, ohne eine hohe Zahl an Rechnungen durchführen zu müssen. Bei Parametern, die einen höheren Einfluss als der axiale Elastizitätsmodul  $E_{33}$  des Bremsbelags auf den nichtlinearen, quasi-statischen Teil der Bremsgeräuschanalyse haben, ist eine geringere Übereinstimmung zwischen der Prognose und der exakten Wahrscheinlichkeit für Stabilität zu erwarten. Hier ist gegebenenfalls eine andere Interpolationsfunktion zu verwenden, die geringere Anforderungen an die Glattheit der Systemantwort stellt. Eine weitere Herausforderung stellt die Berücksichtigung mehrerer gegebenenfalls korrelierter Eingangsparemtern mit unterschiedlichen Verteilungsfunktionen dar.

## 8.3 Abhilfemaßnahmen

Mit der Bremsgeräuschsimulation können zahlreiche Ergebnisgrößen berechnet werden, die über die aus Bremsgeräuschversuchen am Fahrzeug oder am Prüfstand ermittelten Größen hinausgehen. Ein Beispiel ist die detaillierte Visualisierung der Schwingformen oder der Dehnungsenergien auch bei verborgenen Bauteilen. Daraus lassen sich oft Hinweise erlangen, wo Änderungen am Bremssystem das Geräuschverhalten beeinflussen und gegebenenfalls verbessern können. Ein genaues Verständnis des Erregungsmechanismus hilft hierbei, diese Änderungen in effizienter Weise einzubringen und somit nicht nur das Ziel einer geräuschfreien Bremse zu erreichen, sondern dabei auch Nebenbedingungen wie niedrige Herstellungskosten oder eine Minimierung der ungefederten Massen im Fahrzeug zu berücksichtigen.

### 8.3.1 Axiale Steifigkeit und Reibwertverhalten

Die Herleitung dieser Abhilfemaßnahme basiert auf dem Minimalmodell zur Modenkopplung, das in Kapitel 3.3 beschrieben ist. Bei der Analyse dieses Modells folgt, dass die Diskriminante  $D = c_0(\alpha^2 + \beta(\beta - \gamma))$  bestimmend für die Systemstabilität ist und somit dem Faktor  $\gamma = \frac{2\mu k_N}{k_1 + k_2 + k_N}$  eine hohe Bedeutung zukommt. Durch die Summation im Nenner wirken sich Änderungen nur dann relevant aus, wenn alle drei Summanden  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_N$  gleichzeitig geändert werden. Das Produkt im Zähler ist leichter zu beeinflussen.

Einerseits ist ein niedriger Reibwert  $\mu$  positiv für das Geräuschverhalten, jedoch verbunden mit den bereits früher erläuterten Beeinträchtigungen auf die Funktion der Bremse. Andererseits hilft auch eine geringe Kontaktsteifigkeit  $k_N$ . An dieser Stelle muss beachtet werden, dass die Kontaktsteifigkeit  $k_N$  nur mittelbar mit der in einer Finite Elemente Software definierten Kontaktsteifigkeit zusammenhängt. Im Minimalmodell geht außer im Parameter  $\gamma$  überall die Summe  $k_2 + k_N$  der in Reihe geschalteten Steifigkeiten in die dimensionslosen Größen ein. Die Steifigkeit zwischen Kontaktfläche und Massenpunkt entspricht  $k_N$  und  $k_2$  gibt die Steifigkeit der Lagerung dahinter an.

In der realen Fahrzeugbremse ist die Masse verteilt und wirkt nicht als Punktmasse, es kann aber eine Analogie zum Minimalmodell gefunden werden. Eine elastische Feder  $k_N$  bzw. ein elastisches Material wirkt umso positiver auf das Geräuschverhalten, je näher sie an der Kontaktfläche liegt. Ein in axialer Richtung weiches Belagmaterial, also  $E_{33}$  klein, ist ideal. Etwas weniger effizient wirkt eine weiche Zwischenschicht. Ein weiches Dämpfungsblech hilft in geringerem Maße, da die Masse des Belags und der Rückenplatte davon nicht beeinflusst werden. Zusätzliche Elastizitäten im Bereich der Bremsfaust sind noch weniger

wirksam. Eine genaue Betrachtung muss anhand der, bei einer Instabilität vorliegenden, Schwingform erfolgen. Es ist dabei zu beachten, dass die Gesamtsteifigkeit der Kette serieller Federn Belagmaterial-Zwischenschicht-Dämpfungsblech-Bremsfaust aus Gründen des Pedalwegs und des Bremsflüssigkeitsbedarfs limitiert ist.

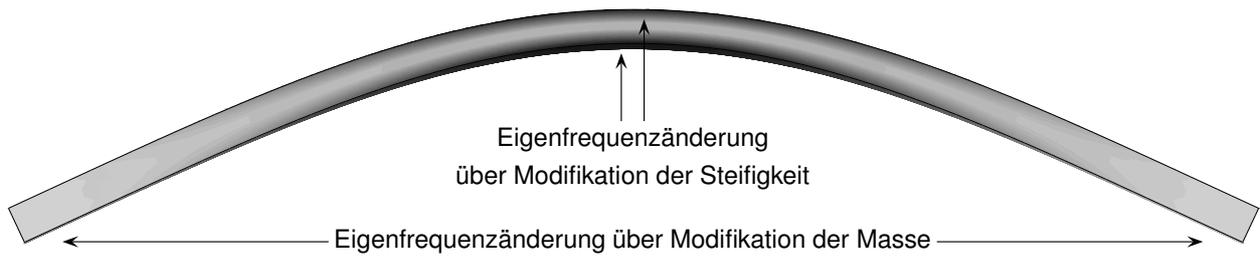
### 8.3.2 Belaglänge

In Kapitel 3.3 wurde anhand eines eindimensionalen Bremsenmodells auf Grundlage eines Euler-Bernoulli Balkens ein Zusammenhang zwischen der Belaglänge und der Höhe der Realteile der Eigenwerte  $\lambda$  bzw. der negativen Dämpfungen  $\zeta_i$  von Instabilitäten festgestellt. Einerseits ist eine kurze Belaglänge als positiv einzustufen. Andererseits wirken sich Belaglängen entsprechend der halben, ganzen oder vielfachen Wellenlänge der Brems Scheibenschwingform negativ auf das Systemverhalten aus.

Der positive Einfluss von kurzen Bremsbelägen kann auch in geometrisch exakten Finite Elemente Berechnungen nachvollzogen werden. Beim Zusammenhang zwischen Belaglänge und Wellenlänge der Scheibenschwingform ist eine Übertragbarkeit auf ein komplexes Modell fraglich, da starke Vereinfachungen für die eindimensionale Modellierung nötig sind.

Im Grenzübergang, wenn anstatt den flächigen Bremsbelägen nur noch jeweils eine Kante auf der Brems Scheibe aufliegt, werden die jeweiligen Doppelmoden der Brems Scheibe maximal voneinander getrennt. Da der Bremsbelag nun ausschließlich als zusätzliche Masse wirkt und keine Biegesteifigkeit in das System mit einbringt, wird sich eine der Doppelmoden als im Raum stehende Welle mit dem Belag im Schwingungsbau und abgesenkter Eigenfrequenz einstellen. Die andere Doppelmode bildet sich ebenfalls als stehende Welle eine Viertel-Wellenlänge versetzt aus. Hier liegt der Bremsbelag in einem Schwingungsknoten. Die zusätzliche Masse wirkt nicht. Die Eigenfrequenz bleibt gleich der Brems Scheibe ohne Belag.

Durch Abschrägungen des Reibmaterials kann die Kontaktfläche zwischen Bremsbelag und Brems Scheibe entsprechend verkleinert werden. Allerdings verringert sich dabei auch das nutzbare Verschleißmaterial des Bremsbelags. Außerdem wirkt diese Maßnahme nur im neuen, noch unverschlissenen Zustand. Sobald der Bremsbelag teilweise verschlissen ist, wird die Kontaktfläche wieder größer und der positive Effekt der kurzen Belaglänge geht verloren.



**Abbildung 8.11:** Erste frei-frei Biege-Eigenschwingung eines Balkens mit angezeigten von-Mises-Spannungen (dunkel).

### 8.3.3 Maximale Amplitude

Ausgehend von Erfahrungen am Geräuschprüfstand, lässt sich eine weitere Vorgabe zur Suche nach Gegenmaßnahmen ableiten. An Stellen mit hoher Bewegungsamplitude ist der Einfluss von Massenänderungen auf das Geräuschverhalten am größten. Analog dazu können in der Simulation bei der Betrachtung von Dehnungsenergien auch die Stellen mit der höchsten Sensitivität gegenüber Steifigkeitsänderungen identifiziert werden.

Als Beispiel ist in Abbildung 8.11 die erste Biege-Eigenschwingung eines Balkens dargestellt. An den Balkenenden ist die Verschiebung  $\mathbf{u}$  am größten und die Dehnungsenergiegedichte klein. Hier kann die Eigenfrequenz am Besten durch eine Änderung der Masse  $m$  beeinflusst werden, wobei sich die Eigenfrequenz bei zusätzlichem Material absenkt.

Die Spannungen und damit auch die Dehnungen sind in der Balkenmitte, insbesondere an der oberen und unteren Oberfläche maximal. Hier ist durch zusätzliches Material eine Beeinflussung der Steifigkeit  $k$  und damit eine Verschiebung der Eigenfrequenz nach oben möglich.

Eine Abschätzung der Eigenfrequenz  $\omega$  ist hier auch über den Rayleigh-Quotienten möglich.

$$\omega^2 \leq \frac{\int_{-l}^l EI(\xi) \mathbf{u}'' d\xi}{\int_{-l}^l \rho A(\xi) \mathbf{u} d\xi} \quad (8.12)$$

Zur Absenkung der Eigenfrequenz  $\omega$  müssen die Funktionen  $EI(\xi)$  und  $\rho A(\xi)$  bei gegebenem  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{u}''$  so bestimmt werden, dass der Rayleigh-Quotient minimal wird.

Bei der Stabilitätsanalyse an Bremssystemen kann jedoch direkt keine analoge Aussage darüber abgeleitet werden, ob nun die Masse bzw. Steifigkeit erhöht oder verringert werden soll oder wie stark der Eingriff idealerweise ist, um eine bestehende Instabilität zu beseitigen. Somit bleibt eine Reihe von Versuchen oder Simulationen nötig, um eine optimale Lösung zu finden.

### 8.3.4 Bauteilverhalten

Aufgrund der Komplexität des Bremssystems gibt es Ansätze, die Ergebnisse des Gesamtsystems auf Einzelbauteile zu projizieren und dann auf Bauteilebene Gegenmaßnahmen zu definieren. Nachdem erste Geräuschsimulationen an Finite Elemente Modellen des gesamten Bremssystems möglich waren, wurde von Zhang u. a. [2003] hierzu eine Methode vorgeschlagen. Zentraler Punkt ist dabei die Definition eines Component Contribution Factor (CCF) sowie eines Component Modal Contribution Factor (CMCF), um Aussagen nicht nur auf Systemebene, sondern auch auf Bauteilebene zu erhalten und eine Verbindung zu den Eigenschwingformen der Einzelbauteile zu ermöglichen.

Sei  $\varphi \in \mathbb{C}^n$  der Verschiebungsvektor einer instabilen Schwingung. Dieser kann umsortiert und partitioniert werden, sodass die Verschiebungsvektoren der einzelnen Bauteile direkt ablesbar sind.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{Scheibe}} \\ \varphi_{\text{Belag, innen}} \\ \varphi_{\text{Belag, außen}} \\ \varphi_{\text{Halter}} \\ \varphi_{\text{Faust}} \\ \varphi_{\text{Schwenklager}} \\ \varphi_{\text{Achslenker}} \\ \varphi_{\text{weitere Bauteile}} \\ \varphi_{\text{weitere FHG}} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Nun wird der CCF berechnet, der den Anteil eines einzelnen Bauteils  $j$  an der gesamten Schwingung ausgibt.

$$CCF_j := \frac{\rho_j \theta_j}{\|\varphi\| \|\varphi_j\|} \varphi^t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Dabei bezeichnet  $\rho_j$  die mittlere Dichte des Einzelbauteils und  $\theta_j$  ist ein Korrekturfaktor, der die Netzfeinheit berücksichtigt. Analog kann ein Beteiligungsfaktor der einzelnen Kom-

ponenten bzgl. der Dehnungsenergien berechnet werden.

Nun können die Einzelbauteile der Bremse identifiziert werden, die die höchsten Anteile an der kinematischen Energie der instabilen Schwingung haben. Mit Kenntnis der kinematischen Energien der einzelnen Bauteile können Abhilfemaßnahmen in einer ersten Abschätzung auf ihre mögliche Wirksamkeit beurteilt werden, ohne dass eine Simulation oder ein Versuch durchgeführt werden muss.

Um nicht nur das zu modifizierende Bauteil, sondern auch die genaue Stelle der Modifikation zu identifizieren, definierten Zhang u. a. [2003] den Component Modal Contribution Factor (CMCF). Hierzu sind zusätzliche Berechnungen der frei-frei Eigenmoden aller zu untersuchenden Komponenten des Bremssystems notwendig. Insbesondere ist für diese Berechnungen das gleiche Finite Elemente Netz zu verwenden, um eine eindeutige Zuordnung der Knoten zu ermöglichen.

Sei  $\psi_{j,i} \in \mathbb{R}^n$  der  $i$ -te Eigenvektor einer frei-frei Eigenwertanalyse von Bauteil  $j$ .

$$CMCF_{j,i} := \frac{\rho_j \theta_j}{\|\varphi\| \|\psi_{j,i}\|} \varphi^t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_{j,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Nach Analyse der CMCF-Werte aller Eigenschwingungen bis hin zu einer zu wählenden Grenzfrequenz, können die Schwingformen mit den höchsten Anteilen genauer betrachtet werden. Hier ergeben sich schnell Ansätze, um die Eigenfrequenz des Bauteils zu verschieben und so das Systemverhalten des Gesamtsystems zu beeinflussen. Die Maßnahmen können dann am realen Bauteil einfach durch eine Modalanalyse validiert werden.

Die Verwendung von CCF und CMCF beinhaltet jedoch einige Einschränkungen, welche die Güte der gefundenen Abhilfemaßnahmen schmälern:

- Bei Systemen mit stark gekoppelten Einzelbauteilen hängt das Systemverhalten genauso von der Kopplung, wie von den Eigenschaften der Einzelbauteile ab. Eine Partitionierung der Systemmatrix ist in diesem Falle mit einem Verlust an Prognosegüte verbunden.
- Abhilfemaßnahmen im Bereich der Kontakte werden nicht erkannt.

- Viele Einzelbauteile schwingen im Verbund anders als bei einer frei-frei Eigenfrequenzanalyse. So sind die Starrkörpermoden oft stark an einer Schwingung beteiligt, deren Eigenfrequenz jedoch nicht beeinflusst werden kann.
- Informationen aus der Phase der Eigenschwingungen werden vernachlässigt.

Um diese Nachteile zu umgehen, ist gegebenenfalls eine Betrachtung auf Systemebene sinnvoller. Diese wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 8.3.5 Trennung der koppelnden Schwingformen

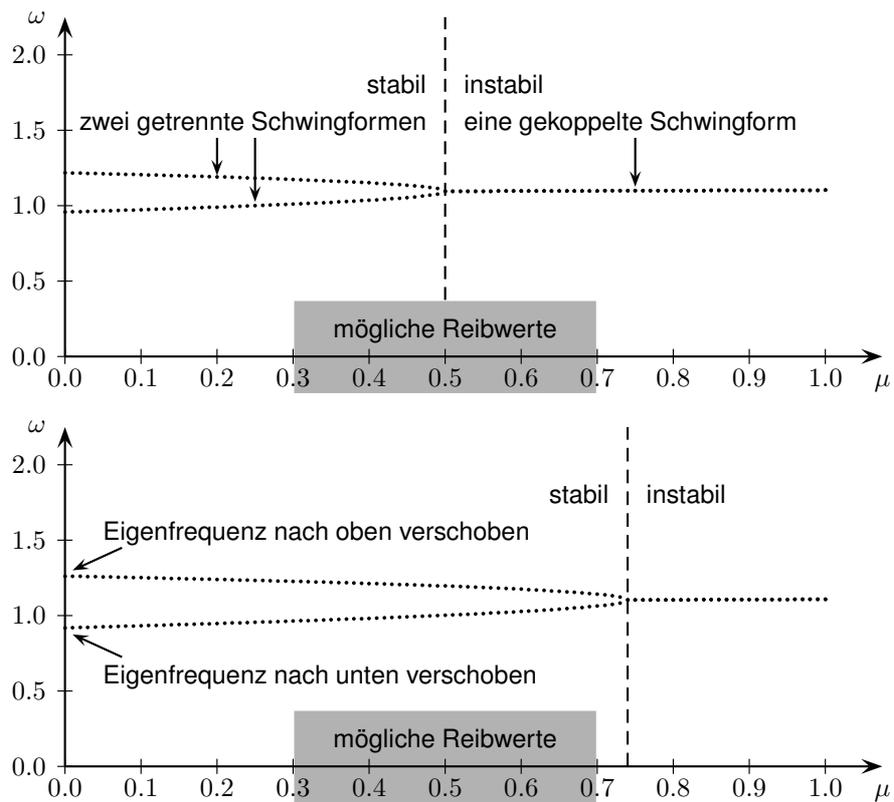
Da das Phänomen der Modenkopplung als Hauptursache für Instabilitäten angesehen wird, besteht ein Ziel darin, die beiden koppelnden Schwingformen zu identifizieren. Das Gesamtsystem soll nun so modifiziert werden, dass der Frequenzabstand dieser beiden Schwingformen maximiert wird. Dadurch wird die Modenkopplung und die damit verbundene Instabilität des Systems vermieden bzw. diese treten erst bei einem höheren Reibwert  $\mu$  auf, siehe Abbildung 8.12.

Die Herausforderung liegt darin, dass diese beiden Schwingformen im instabilen System schon gekoppelt sind und deshalb nicht direkt bestimmt werden können. Daher muss ein Ersatzsystem definiert werden, das schwingungstechnisch ein vergleichbares Verhalten zeigt, bei dem die beiden Schwingformen jedoch (noch) nicht koppeln.

Basierend auf der Kenntnis, dass bei kleinen Reibwerten  $\mu$  keine Instabilitäten auftreten, ist eine Möglichkeit, mehrere Rechnungen mit verschiedenen Reibwerten  $\mu$  durchzuführen und als Ersatzsystem jenes mit dem höchsten Wert  $\mu$  zu wählen, bei dem noch keine Kopplung auftritt.

Da das Systemverhalten stetig von den Eingangsparametern, wie z.B. dem Reibkoeffizienten  $\mu$  abhängt, müssen die beiden später koppelnden Schwingformen ähnlich zueinander und ähnlich der aufklingenden Schwingung sein. Dies kann an entsprechend hohen MAC-Werten erkannt werden. Zhang u. a. [2003] berechnete die MAC-Werte zwischen der instabilen Schwingform und allen Eigenformen des Ersatzsystems mit reduziertem Reibwert  $\mu$ . Die beiden Eigenformen mit den höchsten MAC-Werten werden als koppelnde Schwingformen identifiziert.

Die Berechnung zahlreicher Systeme mit verschiedenen Reibkoeffizienten  $\mu$  ist jedoch aufwändig. Außerdem geht der Reibkoeffizient  $\mu$  auch stark in den nichtlinearen statischen Teil der Rechnung ein, was das Ergebnis verfälschen kann.



**Abbildung 8.12:** Prinzip der Trennung der Eigenfrequenzen: Ausgangssystem mit Instabilität im relevanten Reibwertbereich (oben), modifiziertes System mit Instabilität erst oberhalb des relevanten Reibwertbereichs (unten)

Ein anderes Ersatzsystem entsteht durch Ausblenden der Dämpfungsterme und der schiefsymmetrischen Teile der Steifigkeitsmatrix, das sogenannte M-K-System, siehe Kapitel 2.3. Es ist in einigen Eigenschaften mit dem System mit  $\mu = 0$  vergleichbar, aber nicht mit diesem identisch. So sind die Verformungen, die durch das Bremsmoment und die Reibkraft  $F_R$  entstehen im M-K-System berücksichtigt, im System mit  $\mu = 0$  aber nicht. Bei gyroskopischen Kräften gilt dies entsprechend umgekehrt.

Das M-K-System ist grenzstabil und nach Satz 2.8 in  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar. Außerdem wird dieses Ersatzsystem zur späteren Projektion der Systemmatrizen ohnehin berechnet, siehe Kapitel 4.3. Somit müssen wenige zusätzliche Berechnungen durchgeführt werden. Eine entsprechende Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### 8.3.6 Sensitivitätsanalyse am reduzierten System

Durch eine Sensitivitätsanalyse kann die Abhängigkeit der Ergebnisgrößen von verschiedenen Eingangsparametern dargestellt werden. Im Zuge der Bremsgeräuschsimulation stellen sich zwei grundsätzliche Fragestellungen: Zum einen ist eine Parametrisierung des Finite Elemente Modells des Bremssystems insbesondere im Bereich der Geometrie aufwändig, andererseits sind umfangreiche Sensitivitätsanalysen bei vielen zu variierenden Parametern mit langen Rechenzeiten verbunden.

Bei Vernachlässigung des ersten nichtlinearen statischen Teils der Berechnung kann durch Wahl der reellen Eigenfrequenzen  $\omega_{0,j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) als Eingangsparameter eine effiziente Methode zur Sensitivitätsanalyse dargestellt werden, siehe Gleichung (4.3). Mit Hilfe der Ergebnisse dieser Sensitivitätsanalyse und durch Betrachtung der reellen Eigenschwingformen  $\varphi_{0,j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) kann dann eine geeignete Stelle zur Systemmodifikation identifiziert werden.

Im Kontext von Kapitel 4.3 bezeichne  $\lambda_{0,j} = \omega_{0,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{0,j} \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ) die Eigenwerte und -vektoren des reellen Systems. Die entsprechenden Größen des reduzierten Systems seien  $\lambda_j^* = i\omega_j^* - \delta_j^* \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_j \in \mathbb{C}^m$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Die Berechnung der Eigenwerte des reduzierten Systems kann auch als Diagonalisierung der Systemmatrix aufgefasst werden. Das heißt die durch  $\Psi := (\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathbb{C}^{m,m}$  definierte Koordinatentransformation führt zu einer Diagonalisierung der Systemmatrix des reduzierten Systems. Der Sonderfall einer nicht diagonalisierbaren Systemmatrix mit Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit nicht der algebraischen Vielfachheit entspricht, wird an dieser Stelle ausgeschlossen. In der Anwendung treten keine exakt identischen Eigenwerte auf.

Der verwendete Begriff Systemmatrix, im Folgenden  $\mathbf{B}^*$  genannt, ist in diesem Kontext von den Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\widehat{\mathbf{K}}$  zu unterscheiden. Die Matrix  $\mathbf{B}^*$  ist vor der Berechnung unbekannt und soll nur der Gleichung

$$\Psi^{-1} \mathbf{B}^* \Psi = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^* \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) = \text{diag}(i\omega_1^* - \delta_1^*, \dots, i\omega_m^* - \delta_m^*) \quad (8.16)$$

genügen, also die gleichen Instabilitäten wie das Bremssystem besitzen. Eine ähnliche Bedeutung hat die in Kapitel 4.3 definierte Matrix  $\mathbf{A}^*$ , die jedoch die doppelte Größe besitzt und vor der Lösung des Stabilitätsproblems bekannt ist.

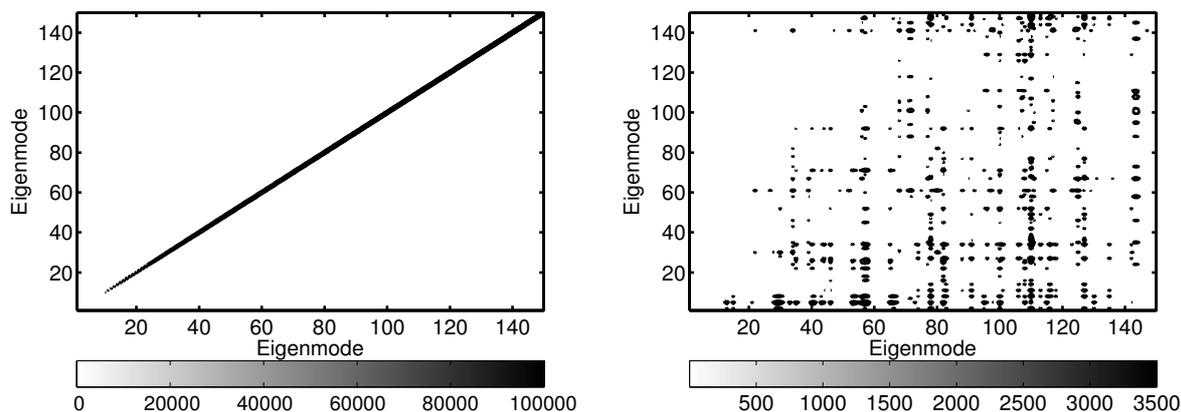
Die Systemmatrix  $\mathbf{B}^*$  ist über Gleichung (8.16) eindeutig definiert, wenn die Eigenwerte  $\lambda_j^*$  des reduzierten Systems paarweise verschieden sind, d.h. die Matrix  $\Psi$  regulär ist. Im allgemeinen Fall gilt dies nicht: Wenn zwei identische Eigenwerte  $\lambda^*$  vorliegen, sind die Eigenvektoren  $\psi$  gleich und damit linear abhängig. Identische Eigenwerte treten jedoch ausschließlich im Verzweigungspunkt beim Übergang von Stabilität zu Instabilität auf, siehe Abbildungen 3.8 und 8.12. In Anwendungsfällen kann somit vorausgesetzt werden, dass die Eigenwerte  $\lambda^*$  nicht identisch sind.

Nach Lösung des reduzierten Gleichungssystems (4.5) kann  $\mathbf{B}^*$  leicht berechnet werden

$$\mathbf{B}^* = \Psi \text{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \Psi^{-1}. \quad (8.17)$$

Nach Satz 2.8 stehen die Eigenvektoren  $\psi_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) im Allgemeinen nicht orthogonal zueinander. Daher kann  $\Psi$  numerisch schlecht konditioniert sein. Durch eine erneute Berechnung der Eigenwerte von  $\mathbf{B}^*$  und einen Vergleich mit  $\lambda_j^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ) kann überprüft werden, ob eine ggf. vorhandene schlechte Konditionierung die Berechnung von  $\mathbf{B}^*$  beeinträchtigt.

Die gesamte modale Information des Bremssystems im Betriebspunkt bis zu einer festen Grenzfrequenz ist in  $\mathbf{B}^*$  gespeichert. Die reellen Eigenformen  $\varphi_{0,j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) bilden die orthogonale Basis bzgl. der  $\mathbf{B}^*$  dargestellt ist. Die Systemmatrix  $\mathbf{B}^*$  besitzt eine charakteristische diagonaldominante Form, wie in Abbildung 8.13 links zu erkennen ist. Auf der Hauptdiagonalen sind nahezu exakt die aufsteigenden Eigenwerte  $\lambda_{0,j}$  des reellen Systems zu finden. Alle nichtdiagonalen Einträge in der Matrix  $\mathbf{B}^*$  sind um mindestens eine Größenordnung kleiner. Wenn die Hauptdiagonaleinträge ausgeblendet werden, bleibt eine riefenartige



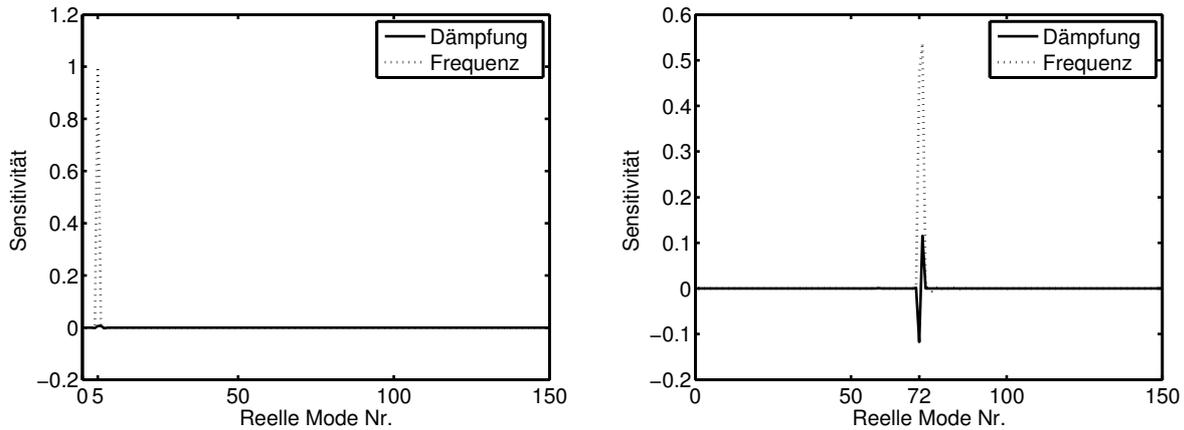
**Abbildung 8.13:** Plot des Betrags der Systemmatrix  $|B^*|$  (links) und  $|B^* - \text{diag}(\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,m})|$  (rechts)

Struktur übrig, wie in Abbildung 8.13 rechts zu sehen. Diese Einträge geben die unsymmetrischen Kopplungseinträge wieder, die durch den gleitenden Kontakt zwischen Scheibe und Belag definiert sind.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den nichtdiagonalen Einträgen der Matrix  $B^*$  und den Eigenschwingformen der Bremscheibe, wie sie in Anhang C erläutert werden. Spaltenweise sind Einträge der tangentialen Out-of-Plane (OP) Moden  $\varphi_{0,j}$  zu finden, die der In-Plane-Tangential (IPT) Moden entsprechen. Zeilen mit Werten ungleich 0. Wenn  $\varphi_{0,j}$  einen IPT Anteil im Kontakt zwischen Bremscheibe und Bremsbelag besitzt und  $\varphi_{0,i}$  einen entsprechenden OP Anteil hat, gilt  $B_{j,i}^* \neq 0$ . Eine reine IPT Mode kann keinen OP Anteil liefern und ist deshalb an einer Spalte mit Nulleinträgen zu erkennen. Dies erklärt die riefenartige Struktur in Abbildung 8.13 rechts.

Auf Grundlage dieser Matrix kann nun durch Variation der reellen Eigenwerte, d.h. der Diagonaleinträge  $\text{Im}(B_{j,j}^*) \approx \lambda_{0,j} = \omega_{0,j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ), eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt werden. Es muss nicht länger das gesamte Gleichungssystem mit  $n$  Freiheitsgraden gelöst werden, sondern nur noch das reduzierte System mit  $m \ll n$  Freiheitsgraden. Durch diese Reduktion werden Sensitivitätsanalysen mit einer großen Zahl an Parametern effizient berechenbar.

In Abbildung 8.14 sind die Sensitivitäten auf Frequenz und Dämpfung für zwei verschiedene instabile Eigenmoden dargestellt. Links ist zu erkennen, dass die 5. komplexe Eigenfrequenz  $\omega_5^*$  nur durch Änderungen der 5. reellen Eigenfrequenz  $\omega_{0,5}$  beeinflusst werden kann. An der negativen Dämpfung und der damit verbundenen Instabilität ändert sich nichts. Die 5. Eigenmode ist eine IPT Mode. Die Ursache für Instabilität ist keine Modenkopplung, sondern die



**Abbildung 8.14:** Sensitivitäten der ersten 150 reellen Eigenfrequenzen  $\omega_{0,j}$  (M-K-System) auf die Eigenfrequenz  $\frac{\partial \omega_5^*}{\partial \omega_{0,j}}$  (gepunktet) und die Dämpfung  $\frac{\partial \delta_5^*}{\partial \omega_{0,j}} / \max_{i,j} \left( \frac{\partial \delta_i^*}{\partial \omega_{0,j}} \right)$  (durchgezogen) der 5. komplexen Mode (links) und der 72. Mode (rechts)

Anregung findet über den negativen Gradienten des Reibkoeffizienten zur Relativgeschwindigkeit  $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} < 0$  statt. Der Mechanismus wird in Kapitel 3.1 an einem Minimalbeispiel erläutert. Auf der rechten Seite ist eine weitere typische Sensitivitätskurve aufgetragen. Hier wird die Instabilität der 72. komplexen Mode durch eine Modenkopplung verursacht. Neben der Frequenz  $\omega_{72}^*$  wird auch die, ggf. negative, Dämpfung  $\delta_{72}^*$  beeinflusst. Dabei kann die Instabilität einerseits durch Herabsetzung der 72. reellen Eigenfrequenz  $\omega_{0,72}$  verringert bzw. behoben werden. Andererseits kann auch die 73. reelle Eigenfrequenz  $\omega_{0,73}$  heraufgesetzt werden, um die negative Dämpfung  $\delta_{72}^*$  der 72. komplexen Mode zu verringern. Alle anderen reellen Eigenfrequenzen haben keinen signifikanten Einfluss auf die Instabilität. Letztendlich besteht das Ziel also darin, diese Frequenzen der reellen Moden 72 und 73 so zu verschieben, dass der Abstand maximal wird. Die Beeinflussung von Eigenfrequenzen eines M-K-Systems ist mathematisch und ingenieurtechnisch gesehen ein einfacheres Problem, als die Behebung von Instabilitäten eines allgemeinen M-D-G-K-N-S-Systems.

Neben den reellen Eigenfrequenzen ist die Matrix  $\mathbf{B}^*$  auch bzgl. jeder anderen geeigneten Basis darstellbar. Beispielsweise können die Eigenvektoren von frei-frei Eigenfrequenzanalysen der Einzelbauteile dazu herangezogen werden. Dann werden jedoch zahlreiche verschiedene Eigenfrequenzen mehrerer Bauteile einen signifikanten Einfluss auf die Instabilitäten haben. Ein Verhalten wie in Abbildung 8.14 mit nur zwei signifikanten Ausschlägen ist dann nicht zu erwarten.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Simulationsverfahren zur Bewertung einer Fahrzeug-Scheibenbremse hinsichtlich Bremsenquietschen untersucht. Dieses wurde von Buck [2008] vorgeschlagen und wird im Serien-Entwicklungsprozess verschiedener Fahrzeug- und Bremsenhersteller eingesetzt.

Das Verfahren basiert auf einer linearen Stabilitätsanalyse an einem Finite Elemente Modell der Fahrzeugbremse und der benachbarten Achskomponenten und soll den bislang stark auf Versuchen basierenden Entwicklungsprozess unterstützen.

Primärer Aspekt dieser Arbeit ist die Verbesserung der Prognosegüte. Durch eine tiefgreifende Analyse der Erregungsmechanismen der entstehenden Instabilitäten werden Ursachen und Zusammenhänge identifiziert, die später zu Fehlprognosen führen können. Zentraler Punkt ist dabei die konsistente Herleitung der drei reibbasierten Erregungs- und Dämpfungsmechanismen aus den Kontaktgleichungen und deren Übertragung auf Minimalmodelle.

Mit der Materialcharakterisierung der Bremsbeläge inklusive des Dämpfungsblechs und der Beschreibung geeigneter Messverfahren kann die Modellgüte an dieser als entscheidend identifizierten Stelle relevant verbessert werden. Darüber hinaus bietet eine geeignete, frequenzabhängige Wahl der Systemgrenzen die Möglichkeit die Simulationsergebnisse signifikant zu verbessern, ohne den Modellierungsaufwand unnötig zu erhöhen.

Neben der Minimierung von fehlerhaften Aussagen, besteht ein weiterer Ansatz in der Prognose der Wirkung von Abhilfemaßnahmen. Hierfür können aus Minimalmodellen, aus den Kontaktgleichungen und der vorhandenen Modellreduktion am Finite Elemente Modell wertvolle Zusammenhänge aufgezeigt werden. Diese werden zur Definition zielgerichteter Geräuschmaßnahmen verwendet und sind in ersten Serienanwendungen umgesetzt.

Darüber hinaus werden Ansatzpunkte zur weiteren Verbesserung der Bremsgeräuschsimulation identifiziert, welche auf den folgenden Seiten erläutert werden.

## 9.2 Nichtlinearität und Grenzykelberechnung

Eine zentrale Einschränkung des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Simulation von Bremsenquietschen ist die fehlende Prognose der Schwingamplituden. Durch den linearen Ansatz der Stabilitätsanalyse kann nur bewertet werden, ob ein System stabil ist oder nicht. Dabei gibt der Realteil des Eigenwerts  $\lambda$  die Anfachungsrate der Schwingung an. Um eine lineare Systemmodellierung zu ermöglichen, werden sämtliche Schwingungsamplituden als infinitesimal klein angenommen, auch wenn diese während des Quietschens endlich sind.

Das lineare Systemmodell der Stabilitätsanalyse bleibt somit unvollständig. Es existiert mit Sicherheit eine, notwendigerweise nichtlineare, mechanische Kraft, die die Amplituden der Schwingung beschränkt und zu einem Grenzykel mit endlicher Amplitude führt. Diese Amplitude bestimmt dann über den Abstrahlgrad aller schwingenden Oberflächen die Schallleistung, die beim Bremsenquietschen entsteht und damit letztendlich die Kundenrelevanz.

Es existieren zahlreiche nichtlineare Effekte im mechanischen Modell einer Fahrzeugbremse, darunter frequenzabhängige Materialkennwerte, Terme die durch Linearisierungen im Bereich der Kontakte unberücksichtigt bleiben, nichtlineare Coulomb'sche Reibung, Kräfte die aufgrund der virtuellen Rotation der Bremsscheibe vernachlässigt werden und frequenzabhängige Impedanzen an den Systemgrenzen. Welcher dieser Effekte der entscheidende für die Grenzykelamplitude ist, bleibt jedoch weiterhin offen.

Falls solche nichtlinearen Effekte mit berücksichtigt werden sollen, kann zur Bewertung von Bremsenquietschen keine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt werden. Als Alternative könnte eine explizite Zeitintegration durchgeführt werden, die jedoch aufgrund der Systemkomplexität und der hochfrequenten Schwingungen sehr rechenaufwändig ist. Meziane [2007] zeigte an einem einfachen Modell die Übereinstimmung von Ergebnissen einer expliziten Zeitintegration mit denen einer linearen Stabilitätsanalyse. Mit der heutigen Computer-Hardware ist eine explizite Zeitintegration jedoch nicht im Serien-Entwicklungsprozess von Bremssystemen einsetzbar. Vermont des Roches [2011] zeigte, dass durch Systemreduktionsansätze die Antwortzeiten signifikant reduziert werden können.

Daneben besteht die Möglichkeit, wenn die zu modellierenden nichtlinearen Kräfte bekannt sind, problemangepasste Erweiterungen der linearen Stabilitätsanalyse zu entwickeln. Somit

können die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse als Grundlage für eine nachfolgende Bestimmung der Grenzykelamplituden dienen. Grundlage hierfür ist der nichtlineare Stabilitätssatz 2.6, der eine Abschätzung des Einflusses nichtlinearer Kräfte ermöglicht. Hetzler [2013] untersuchte diesen Ansatz, um den Einfluss von nichtlinearer Coulomb'scher Reibung auf Ein- und Zweifreiheitsgradsysteme zu analysieren.

## 9.3 Zusätzliche Dämpfungsmechanismen

Einige der in Kapitel 3 betrachteten Dämpfungsmechanismen werden in der Stabilitätsanalyse nicht berücksichtigt, da die Dämpfungsanteile klein sind, die Kräfte im linearen Modell nicht berücksichtigt werden können oder weil ein geeignetes Messverfahren zur quantitativen Bestimmung der Dämpfung fehlt.

Insbesondere die Kontaktdämpfung an den zahlreichen Fügstellen und die Dämpfung an den gewählten Systemgrenzen zeigen eine hohe Sensitivität auf die Ergebnisse einer Stabilitätsanalyse. Bei Berücksichtigung dieser Dämpfungseffekte kann somit die Zahl der fehlerhaft prognostizierten Stabilitätsverluste verringert werden.

## 9.4 Materialparameter

Bei der Vermessung des dynamischen Materialverhaltens wurde der Bremsbelag, bestehend aus Reibmaterial, Zwischenschicht, Rückenplatte und Dämpfungsblech, am eingehendsten untersucht, da hier der höchste Einfluss auf das Stabilitätsverhalten besteht und die größten Unsicherheiten existieren.

Für das Reibmaterial wurden verschiedene Messverfahren vorgestellt, die alle Einschränkungen hinsichtlich der Allgemeingültigkeit der Messergebnisse haben oder die bislang noch nicht im Serienentwicklungsprozess eingesetzt werden können. Eine geeignete Strategie zur Synthese der Ergebnisse verschiedener Messverfahren kann hier zusätzlichen Aufschluss geben.

Viel größere Unsicherheiten bestehen in der Vermessung der Zwischenschicht. Diese hat im Rahmen dieser Arbeit einen signifikanten Einfluss auf das Geräuschverhalten gezeigt, jedoch sind die bekannten Messverfahren für das Reibmaterial nicht auf die Zwischenschicht übertragbar. Aus der maximal 2 bis 3 mm dicken Schicht lassen sich weder geeignete Probenkörper erstellen, noch ist die Sensitivität bei Modalanalysen ausreichend hoch, um belastbare

Ergebnisse zu erzielen. Auch die Frage, ob die Zwischenschicht ein isotropes oder transversal isotropes Materialverhalten zeigt, bleibt unbeantwortet.

Für das Dämpfungsblech existieren wie beim Reibmaterial zahlreiche Messverfahren. Hier bleibt die Frage zu beantworten, wie das Dämpfungsblech im Finite Elemente Modell modelliert werden kann, sodass eine ausreichende Prognosegüte sichergestellt wird, der Aufwand für die Messungen vertretbar bleibt und gleichzeitig alle vorhandenen Messergebnisse im Modell berücksichtigt werden können.

## 9.5 Stabilitätsbewertung bei streuenden Parametern

Die exakte Bestimmung aller Materialparameter im Bremssystem bedeutet einen unverhältnismäßig hohen Aufwand, der im Serienentwicklungsprozess aus Kosten- und Zeitgründen nicht bzw. nicht immer möglich ist. Außerdem streuen viele Größen wie Geometrie, Material und Umweltbedingungen während der Produktion und über die Laufzeit eines Fahrzeugs.

Dies hat zur Folge, dass das exakte Systemmodell einer Fahrzeugbremse nicht existieren kann, sondern dass jedes Fahrzeug zu jedem Zeitpunkt vom Systemmodell leicht abweicht, aber dennoch keine Geräusche auftreten sollen. Es stellt sich die Frage, wie diese Abweichungen und Toleranzen bestmöglich in das Modell übernommen werden können und wie der Rechenaufwand bei der Untersuchung aller Kombinationen von Toleranzen zu minimieren ist.

In Kapitel 8.2 wird ein Verfahren beschrieben, das Stabilitätsaussagen bei Existenz eines einzelnen normalverteilten Parameters ermöglicht. Die Erweiterung auf multidimensionale Verteilungen, Korrelationen verschiedener Parameter und die Generierung der Verteilungen aus statistischen Untersuchungen stellt ein Feld für weitere Untersuchungen dar.

Die Kombination aus der Wiederholbarkeit der Berechnungen und der Möglichkeit einzelne Parameter unabhängig voneinander zu variieren, stellt einen großen Vorteil der Simulation gegenüber dem Bremsgeräuschversuch dar. Dieser ist auf reale Teile angewiesen und oft kann nur schwer ermittelt werden, ob ein bestimmter Parameter innerhalb des vorgegebenen Streubands liegt.

## 9.6 Prognose von Abhilfemaßnahmen

In Kapitel 8.3 wird eine Methode vorgestellt, die bestimmt, inwieweit koppelnde Schwingformen durch eine geeignete Verschiebung der reellen Eigenfrequenzen, d.h. der Eigenwerte des zugehörigen M-K-Systems, beeinflusst werden können. Diese Methode beruht auf der Annahme, dass bei kleinen Variationen der Systemmatrizen die Änderung der Systemantwort näherungsweise linear gegenüber der Variation ist.

Die möglichen Abhilfemaßnahmen bleiben dadurch auf stetig einstellbare Parameter, wie die Geometrie einzelner Bremsenkomponenten oder Materialparameter, beschränkt. Diskret einstellbare Größen, wie das Öffnen und Schließen von Kontakten, können nur unzureichend prognostiziert werden, da hier die Annahme kleiner Änderungen nicht erfüllt ist. Genau diese diskret einstellbaren Parameter besitzen jedoch einen großen Einfluss auf das Schwingverhalten des Gesamtsystems und werden auch versuchsseitig oft zur Lösung von Geräuschproblemen eingesetzt.

## 9.7 Andere Bremsgeräusche

Mit der vorhandenen Simulationsmethode zur Prognose von Bremsenquietschen stellt sich die Frage, ob grundsätzlich auch andere Bremsgeräusche simuliert werden können.

Dazu ist einerseits der Modellumfang auf die im fraglichen Frequenzbereich auftretenden Frequenzen abzustimmen. Die in Kapitel 1.1 beschriebenen Geräusche besitzen geringere Frequenzen, somit ist der Modellumfang gegebenenfalls zu erweitern und neben den Achsenkern auch ein Teil der Karosserie zu modellieren. Außerdem ist bei frequenzabhängigem Materialverhalten zu überprüfen, inwieweit die getroffenen Annahmen im neuen Anwendungsfall noch gelten.

Die entscheidende Frage ist aber, wie der für diese Bremsgeräusche relevante Anregungsmechanismus abgebildet werden kann. Handelt es sich dabei, wie beim Bremsenquietschen, um eine selbsterregte Schwingung, also ein Stabilitätsproblem oder wird das System durch eine äußere Kraft angeregt. Bei zwei Bremsgeräuschen, dem Bremsenschrummen und dem Bremsenknarzen, besteht ein Zusammenhang mit einem Stabilitätsproblem. Somit kann eine lineare Stabilitätsanalyse grundsätzlich zur Bewertung eingesetzt werden.

Der für das Bremsenknarzen ursächliche Stick-Slip Effekt ist nichtlinear, kann jedoch durch das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz approximiert werden, siehe Kapitel 3.1 oder 7.3.

Das Simulationsmodell ist in jedem Fall daraufhin zu validieren, ob die stark vereinfachende Linearisierung des Stick-Slip Effekts noch zu brauchbaren Ergebnissen führen kann.

Ebenso können instabile Eigenschwingungen beim Bremsenschrummen vorhergesagt werden. Da es wenige Untersuchungen zum Bremsenschrummen und dessen Anregungsmechanismen gibt, ist anzunehmen, dass weitere für dieses Bremsengeräusch relevante Mechanismen existieren, die bislang nicht identifiziert worden sind.

# A Anhang: Verwendete Software

**Abaqus** Kommerzielle Finite Elemente Software für lineare und nichtlineare Berechnungen

Verwendete Versionen: v6.8-1, v6.11-1 und v6.12-3

Dokumentation: Dassault Systèmes [2012]

**Ansa** Kommerzieller Preprozessor zu Erstellung von Finite Elemente Modellen

Verwendete Versionen: 12.0.5 und 12.2.3

**Latex** Freies Softwareprogramm zur Textsatzerstellung

Verwendete Version: 2<sub>ε</sub>

Dokumentation: Braune u. a. [2006]

**Maple** Kommerzielles Computer Algebra System

Verwendete Version: 9.5

**Matlab** Kommerzielles Programm zur Lösung von Matrizenberechnungen und Visualisierung

Verwendete Versionen: R2007b und R2010

Dokumentation: MathWorks, Inc. [2010]

**Optimus** Kommerzielles Programm zur parameterbasierten Optimierung

verwendete Version: 10.0

Dokumentation: Noesis Solutions [2011]

**PSV Scanning Vibrometer Software** Softwarepaket zur Ansteuerung und Auswertung von Laser-

Vibrometrie Messsystemen der Fa. Polytec

verwendete Version: 8.8



## B Anhang: Beweise

### B.1 Beweis des linearen Stabilitätssatzes 2.5 in Kapitel 2.2

Sei  $\gamma < 0$ , d.h.  $\forall \lambda_i \in \text{Spec}(\mathbf{A}) : \text{Re}(\lambda_i) < 0$ . Jede Lösung  $\mathbf{y}(t)$  von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  lässt sich durch den Exponentialansatz  $\mathbf{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{y}(0)$  darstellen.

Es gilt  $|\exp(\mathbf{A}t)| \leq c \exp(\alpha t)$  mit  $c > 0$  hinreichend groß und  $\alpha < 0$ , siehe Walter [1990]. Mit  $t \rightarrow \infty$  folgt  $0 < |\exp(\mathbf{A}t)| \leq c \exp(\alpha t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  also  $|\exp(\mathbf{A}t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  und somit  $\mathbf{y}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , also liegt asymptotische Stabilität vor.

Sei  $\gamma = 0$ , d.h.  $\exists \lambda_i : \text{Re}(\lambda_i) = 0$ . Wähle  $\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\varphi}_i$  mit  $\boldsymbol{\varphi}_i$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$ . Es existiert eine Lösung der Differentialgleichung  $\mathbf{y}(t) = c \underbrace{\exp(\lambda_i t)}_{=1} \mathbf{y}(0) = c \mathbf{y}(0) \neq 0$  mit  $c \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

Also ist die Lösung nicht asymptotisch stabil.

Sei  $\gamma > 0$ , d.h.  $\exists \lambda_i : \text{Re}(\lambda_i) > 0$  und sei  $\epsilon > 0$  beliebig klein, aber fest. Wähle  $\mathbf{y}(0) = \epsilon \boldsymbol{\varphi}_i$ , wobei  $\boldsymbol{\varphi}_i$  normierter Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Dann gilt  $|\mathbf{y}(0)| = \epsilon > 0$ , aber es folgt  $\forall a \in \mathbb{R} \exists t > 0 : |\mathbf{y}(t)| = |\epsilon \exp(\lambda_i t)| > a$ , also nimmt  $|\mathbf{y}(t)|$  jeden beliebig großen Wert an. Somit ist die Lösung instabil.

Damit ist Satz 2.5 bewiesen.

## B.2 Herleitung der Variationsformulierung in Kapitel 6.3

Die Herleitung der linearisierten Potentialvariation ist in den beiden Fällen mit und ohne zusätzliche Führungsgeschwindigkeit identisch und muss hier nicht unterschieden werden.

Für die Linearisierung  $\Delta\delta\Pi_T$  der Potentialvariation  $\delta\Pi_T$  werden zuerst die drei Hilfsgrößen  $\Delta\|\mathbf{v}_{rel}\|$ ,  $\Delta\mathbf{n}$  und  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  berechnet.

Die virtuelle Änderung des Betrags der Relativgeschwindigkeit  $\Delta\|\mathbf{v}_{rel}\|$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta\|\mathbf{v}_{rel}\| &= \Delta\left(\sqrt{v_{rel1}^2 + v_{rel2}^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{v_{rel1}^2 + v_{rel2}^2}} (\Delta v_{rel1}^2 + \Delta v_{rel2}^2) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{v_{rel1}^2 + v_{rel2}^2}} (2\Delta v_{rel1} v_{rel1} + 2\Delta v_{rel2} v_{rel2}) \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \mathbf{v}_{rel}^t \Delta\mathbf{v}_{rel} \\
 &= \mathbf{n}^t \Delta\mathbf{v}_{rel}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die virtuelle Änderung der Richtung der Relativbewegung  $\Delta\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta\mathbf{n} &= \Delta\left(\frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|}\right) \\
 &= \frac{\Delta\mathbf{v}_{rel} \|\mathbf{v}_{rel}\| - \mathbf{v}_{rel} \Delta\|\mathbf{v}_{rel}\|}{\|\mathbf{v}_{rel}\|^2} \\
 &= \frac{\Delta\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} - \frac{(\mathbf{n}^t \Delta\mathbf{v}_{rel}) \mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|^2}.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Die virtuelle Änderung der Schubspannung  $\Delta\boldsymbol{\tau}$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta\boldsymbol{\tau} &= \Delta\left[\mu(\|\mathbf{v}_{rel}\|, \sigma) \sigma \mathbf{n}\right] \\
 &= \Delta\mu(\|\mathbf{v}_{rel}\|, \sigma) \sigma \mathbf{n} + \mu(\|\mathbf{v}_{rel}\|, \sigma) \Delta\sigma \mathbf{n} + \mu(\|\mathbf{v}_{rel}\|, \sigma) \sigma \Delta\mathbf{n} \\
 &= \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} \Delta\|\mathbf{v}_{rel}\| \sigma \mathbf{n} + \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \Delta\sigma \sigma \mathbf{n} + \mu \Delta\sigma \mathbf{n} + \mu \sigma \left(\frac{\Delta\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} - \frac{(\mathbf{n}^t \Delta\mathbf{v}_{rel}) \mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|^2}\right) \\
 &= \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{n}^t \Delta\mathbf{v}_{rel}) \sigma \mathbf{n} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu\right) \mathbf{n} \Delta\sigma + \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \left(\Delta\mathbf{v}_{rel} - \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{n}^t \Delta\mathbf{v}_{rel})\right) \\
 &= \left(\frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu\right) \epsilon_N \mathbf{n} \Delta g_N + \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel} + \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Damit kann nun  $\Delta\delta\Pi_T$  bestimmt werden. Der Term  $\Delta\delta g_T$  wird wiederum als vernachlässigbar klein angenommen. Die Voraussetzungen für diese Annahme sind in Kapitel 6.3 und bei Wriggers [2002] beschrieben.

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\Pi_T &= \int_{\Gamma} \Delta\boldsymbol{\tau}^t \delta\mathbf{g}_T + \boldsymbol{\tau}^t \underbrace{\Delta\delta\mathbf{g}_T}_{\approx 0} dA \\
&= \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu \right) \epsilon_N \mathbf{n} \Delta g_N + \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel} \right] \delta\mathbf{g}_T dA \\
&= \underbrace{\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \sigma + \mu \right) \epsilon_N \mathbf{n} \Delta g_N \delta\mathbf{g}_T dA}_{=:\Delta\delta\Pi_{TK}} + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial\mu}{\partial\|\mathbf{v}_{rel}\|} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel} \delta\mathbf{g}_T dA}_{=:\Delta\delta\Pi_{TD-}} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\mu \sigma}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{v}_{rel} \delta\mathbf{g}_T dA}_{=:\Delta\delta\Pi_{TD+}} \\
&= \Delta\delta\Pi_{TK} + \Delta\delta\Pi_{TD-} + \Delta\delta\Pi_{TD+} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Die drei Summanden entsprechen den Anteilen der Modenkopplung (TK), der negativen Reibungsdämpfung (TD-) und der positiven Reibungsdämpfung (TD+).

### B.3 Herleitung der Auswertung am EA-Stab in Kapitel 5.1

Die dynamische Auslenkung eines EA-Stabs mit Elastizitätsmodul  $E_{33}$ , Querschnitt  $A$  und Dichte  $\rho$  kann durch die Wellendifferentialgleichung beschrieben werden:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{B.5})$$

Die Lösung  $u(x,t)$  hängt vom Ort  $x$  und der Zeit  $t$  ab. Die Wellengeschwindigkeit beträgt  $c = \sqrt{\frac{E_{33}}{\rho}}$ . Die Wellenlänge ist  $\lambda = \frac{c}{\Omega}$  und die Wellenzahl  $\tilde{k} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\Omega}{c}$ . Die Anregung erfolgt harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\Omega$ . Unter der Annahme einer ebenfalls harmonischen Antwort kann ein Produktansatz zur Lösung gewählt werden.

$$u(x,t) = w(x) \cdot f(t) = \left( \alpha \sin(\tilde{k}x) + \beta \cos(\tilde{k}x) \right) (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \quad (\text{B.6})$$

Ohne Einschränkung kann  $\gamma + \delta = 1$  gewählt werden. Die Kraft  $F$  im Querschnitt ist:

$$F(x,t) = E_{33} A \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = E_{33} A \tilde{k} \left( \alpha \cos(\tilde{k}x) - \beta \sin(\tilde{k}x) \right) (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \quad (\text{B.7})$$

Die gemessenen Größen  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  sind dann:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0,t) = \beta (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \\ u_2 &= u(l,t) = \left( \alpha \sin(\tilde{k}l) + \beta \cos(\tilde{k}l) \right) (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \\ F_1 &= F(0,t) = E_{33} A \tilde{k} \alpha (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \\ F_2 &= F(l,t) = E_{33} A \tilde{k} \left( \alpha \cos(\tilde{k}l) - \beta \sin(\tilde{k}l) \right) (\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t)) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Die Differentialgleichung muss zu jedem Zeitpunkt  $t$  erfüllt sein. Da  $\gamma \sin(\Omega t) + \delta \cos(\Omega t) \neq 0$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ , kann dadurch geteilt werden. Durch Auflösen folgt Gleichung (5.23):

$$0 = F_2 \left( u_2 - u_1 \cos(\tilde{k}l) \right) + F_1 \left( u_1 - u_2 \cos(\tilde{k}l) \right) \quad (\text{B.9})$$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen. Unter der Annahme, dass  $l < \frac{\lambda}{4}$ , wird die kleinste positive Lösung  $\tilde{k}$  gesucht. Eine geschlossene Lösung für  $\tilde{k}$  ist nicht bekannt, deshalb wird die Gleichung numerisch approximativ gelöst. Der Elastizitätsmodul  $E_{33}$  kann mit den oben angegebenen Zusammenhängen aus der Wellengeschwindigkeit  $c$  berechnet werden, siehe Gleichung (5.24).

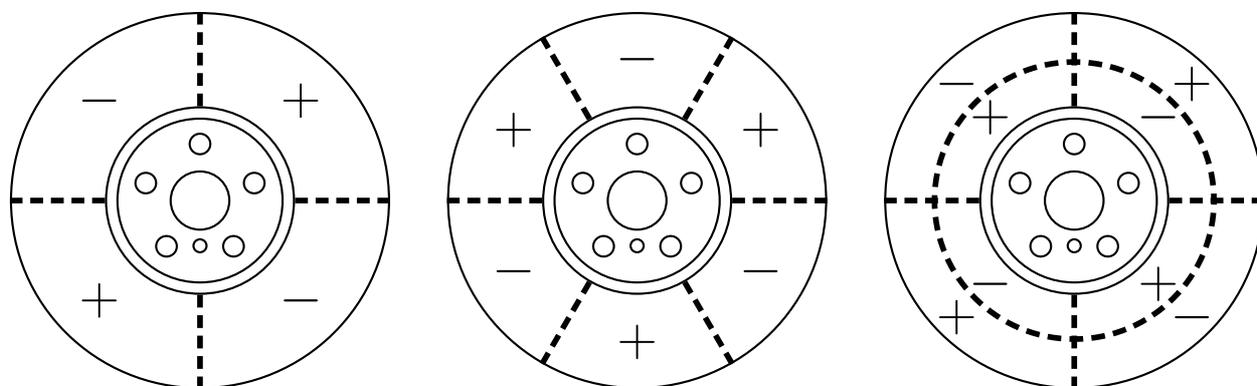
$$\begin{aligned} c &= \frac{\Omega}{\tilde{k}} \\ E_{33} &= c^2 \rho = \frac{\Omega^2 \rho}{\tilde{k}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

## C Anhang: Charakterisierung der Schwingformen von Bremscheiben

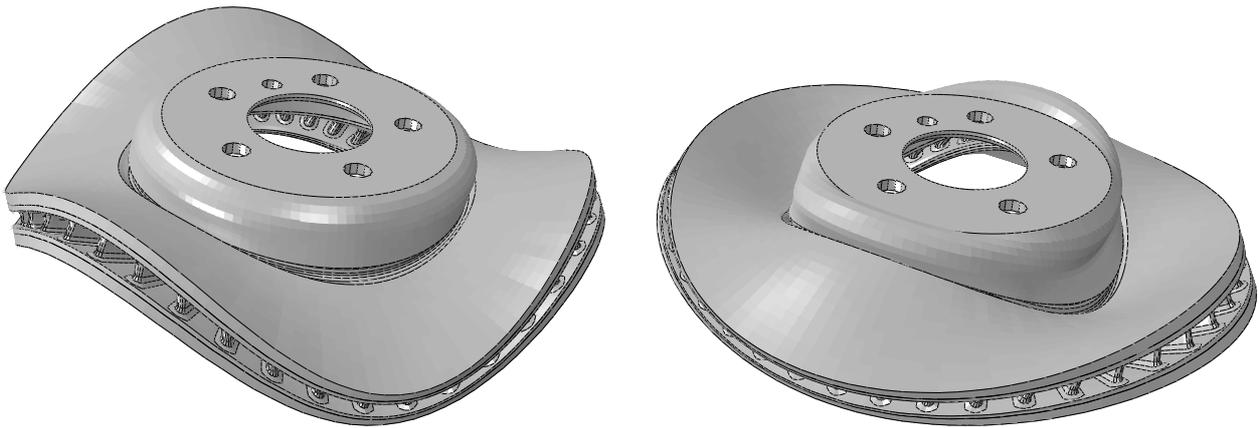
Aufgrund der charakteristischen Form einer Bremscheibe ergibt sich die Möglichkeit, die Schwingformen systematisch zu klassifizieren. Darüberhinaus bildet die Bremscheibe im eingebauten Zustand im Bremssystem oft ähnliche Schwingformen aus, als das Einzelteil im freien Zustand. Dabei ist insbesondere von Bedeutung, dass die einzelnen Schwingformen je nach axialem, radialem oder tangentialem Anteil nur für bestimmte Erregungsmechanismen in Frage kommen. Somit kann durch Kenntnis der Bremscheibenschwingform beim Bremsenquietschen schon auf den Erregungsmechanismus zurückgeschlossen werden. Buck [2008] führt eine sehr detaillierte Diskussion über die verschiedenen Schwingformen. An dieser Stelle soll deshalb nur kurz auf die Klassifikation eingegangen werden.

### C.1 Rotationssymmetrie und Doppelmoden

Die Eigenmoden von Bremscheiben treten, bis auf wenige Ausnahmen, als Doppelmoden auf, d.h. es existieren zwei Eigenschwingformen mit nahezu gleichen Eigenfrequenzen. Dies ist in der Rotationssymmetrie von Bremscheiben begründet. Die berechneten Eigenschwingformen stehen orthogonal



**Abbildung C.1:** Aufriss einer Bremscheibe mit den Schwingformen OP-2ND (links), OP-3ND (Mitte) und OP-1NC-2ND (rechts), Zeichnung nach Buck [2008]



**Abbildung C.2:** Out-of-Plane Moden einer Brems scheibe: OP-3ND (links) und OP-1NC-2ND (rechts)

zueinander, können jedoch durch eine Drehung der Brems scheibe um einige Grad ineinander überführt werden. Mathematisch gesehen handelt es sich hier nicht um zwei orthogonale Eigenräume, sondern um einen Hauptraum der Dimension 2 zu einem doppelten Eigenwert. Ein bis auf die Länge eindeutig bestimmter Eigenvektor lässt sich nicht angeben.

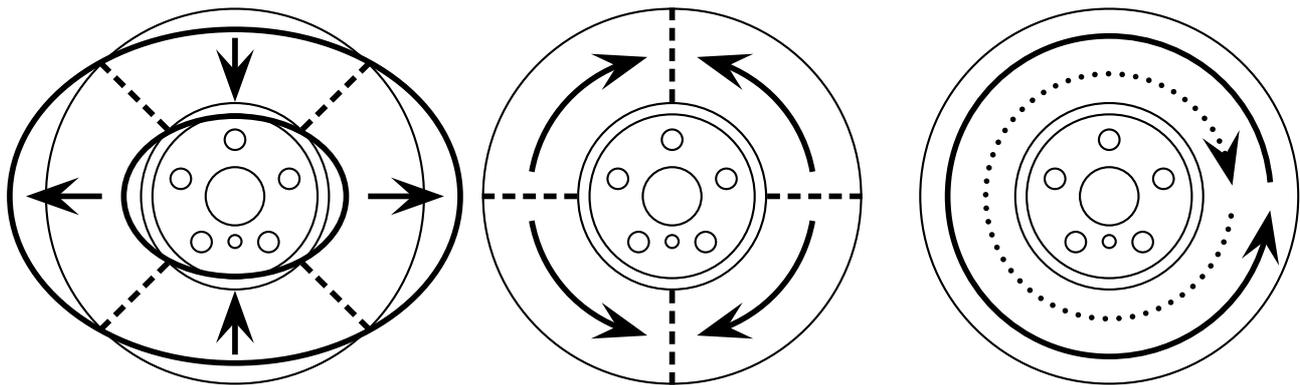
Durch zusätzliche Massen oder verstärkte Rippen im Kühlkanal können Störungen der Rotations-symmetrie eingebracht werden. Dadurch trennen sich die doppelten Eigenwerte und die beiden Eigenräume stehen wiederum eindeutig definiert, orthogonal zueinander. Weitere Ansätze zur Störung der Rotationssymmetrie und zum Einfluss der Zahl der Kühlkanäle finden sich bei Buck [2008].

## C.2 Out-of-Plane Moden

Bei Out-of-Plane (OP) Moden steht die Hauptauslenkungsrichtung senkrecht zur Reibringoberfläche, also in axialer Richtung. In Abbildung C.1 ist mit + bzw. – gekennzeichnet, welche Flächen in positive bzw. negative Richtung ausgelenkt sind. Die gestrichelten Linien geben die Lage des Nulldurchgangs an.

In Abbildung C.2 ist links eine Schwingform dritter Ordnung dargestellt. Der Reibring ist am Topf eingespannt und bewegt sich zum äußeren Radius hin am stärksten. Diese Schwingformen werden nach der Zahl  $j$  Ihrer Knotenlinien mit OP- $j$ ND bezeichnet. ND steht dabei für engl. nodal diameter. Darüber hinaus gibt es Schwingformen mit einem zusätzlichen Knotenkreis NC, engl. als nodal circle bezeichnet. Abbildung C.1 zeigt rechts eine Schwingform mit zwei Knotenlinien und einem Knotenkreis, die als OP-1NC-2ND bezeichnet wird.

Die OP Moden treten aufgrund der axialen Auslenkung am Kontakt zum Bremsbelag in Verbindung mit der Modenkopplung auf, siehe Kapitel 3.3.



**Abbildung C.3:** Aufriss einer Bremsscheibe mit den Schwingformen IPR-2ND (links), IPT-2ND (Mitte) und IPTS-0ND (rechts), Zeichnung nach Buck [2008]

## C.3 In-Plane-Radial Moden

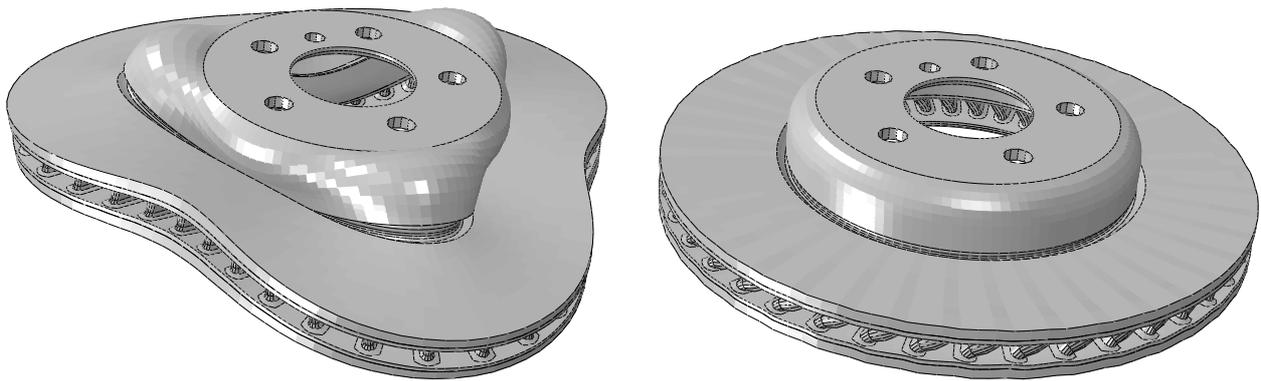
Die Hauptauslenkung bei In-Plane-Radial (IPR) Moden zeigt in radiale Richtung zur bzw. weg von der Drehachse. Eine Mode zweiter Ordnung (IPR-2ND) ist in Abbildung C.3 und eine Mode dritter Ordnung (IPR-3ND) in Abbildung C.4 dargestellt.

IPR Moden sind durch die positive Reibungsdämpfung, siehe Kapitel 3.2, im Allgemeinen stark gedämpft und treten in Verbindung mit Bremsenquietschen nicht in Erscheinung.

## C.4 In-Plane-Tangential Moden

Eine Schwingung im Reibring, die primär in tangentialer Richtung ausgebildet ist, fällt in die Gruppe der In-Plane-Tangential (IPT) Moden. Die erste Schwingform, IPT-0, die durch eine Verdrehung des Reibringes gegenüber dem Topfboden gekennzeichnet ist, wird mit Bremsenknarzen in Verbindung gebracht. Die Frequenz liegt im eingebauten Zustand der Bremsscheibe durch die Rotationsträgheiten der weiteren Bauteile unter der für das Bremsenquietschen relevanten Schwelle von 1 kHz, siehe Kapitel 7.3. IPT Moden höherer Ordnung treten nur bei hohen Frequenzen über ca. 8 kHz auf. Grundsätzlich kann eine Anregung durch den Mechanismus der negativen Reibungsdämpfung erfolgen, siehe Kapitel 3.1 und 7.3. Durch eine im Allgemeinen ebenfalls vorhandene radiale Komponente der Schwingform, sind diese Moden gedämpft und werden nicht mit Instabilitäten in Verbindung gebracht.

Eine IPT Schwingform zweiter Ordnung (IPT-2ND) ist in Abbildung C.3 dargestellt.



**Abbildung C.4:** In-Plane Moden einer Brems scheibe: IPR-3ND (links), IPTS-0 (rechts)

## C.5 In-Plane-Tangential-Shear Moden

In-Plane-Tangential-Shear (IPTS) Moden können nur bei belüfteten Brems scheiben auftreten. Durch die vergleichsweise weiche Rippenkonstruktion der Kühlkanäle können die beiden Reibringe gegengphasig schwingen, siehe auch Abbildung C.4 rechts.

In der Prinzipdarstellung in Abbildung C.3 ist die Verschiebung der beiden Reibringe mittels durchgehendem und gepunktetem Pfeil angedeutet.

Die IPTS Moden sind, bis auf diesen Phasenversatz, eng verwandt mit den IPT Moden. Insbesondere bei Brems scheibengeometrien mit hohen Kühlkanälen liegen die Eigenfrequenzen von IPTS Moden im hörbaren Bereich. In der Dissertation von Buck [2008] ist die Anregung von IPTS Moden durch negative Reibungsdämpfung ausführlich beschrieben.

## Literaturverzeichnis

- [Abu-Bakar u. a. 2005a] ABU-BAKAR, Abd R. ; OUYANG, Huajiang ; SIEGEL, Jennifer E.: Brake Pad Surface Topography Part I: Contact Pressure Distribution / SAE International. 2005 (2005-01-3941). – SAE Technical Paper 5, 79
- [Abu-Bakar u. a. 2005b] ABU-BAKAR, Abd R. ; OUYANG, Huajiang ; SIEGEL, Jennifer E.: Brake Pad Surface Topography Part II: Squeal Generation and Prevention / SAE International. 2005 (2005-01-3935). – SAE Technical Paper 5, 79
- [Allemang 2003] ALLEMANG, Randall J.: The Modal Assurance Criterion (MAC): Twenty Years of Use and Abuse. In: *Sound and Vibration Magazine* 37 (2003), August, Nr. 8, S. 14–23 146
- [Augsburg u. a. 2010] AUGSBURG, Klaus ; HEIMANN, Stefan ; ENGEL, Martin: A contribution for the specific investigation of brake drag torque at disc brakes / chassis.tech plus 2010. 2010. – Proceedings 2
- [Bajer u. a. 2003] BAJER, Andrzej ; BELSKY, Vladimir ; ZENG, Li J.: Combining a Non-linear Static Analysis and Complex Eigenvalue Extraction on Brake Squeal Simulation / SAE International. 2003 (2003-01-3349). – SAE Technical Paper 4, 35, 74
- [Bajer u. a. 2004] BAJER, Andrzej ; BELSKY, Vladimir ; KUNG, Shih-Wei: The Influence of Friction-Induced Damping and Nonlinear Effects on Brake Squeal Analysis / SAE International. 2004 (2004-01-2794). – SAE Technical Paper 5, 79
- [Bennighof und Leoucq 2004] BENNIGHOF, Jeffrey K. ; LEOUCQ, R. B.: An Automated Multilevel Substructuring Method for Eigenspace Computation in Linear Elastodynamics. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25 (2004), Nr. 6, S. 2084–2106 83
- [Braess 2003] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer, 2003 53, 73
- [Braune u. a. 2006] BRAUNE, Klaus ; LAMMARSCH, Joachim ; LAMMARSCH, Marion: *LaTeX*. Springer, 2006 173
- [Brecht 2000] BRECHT, Jörg: *Untersuchungen zum Bremsenknarzen - Ein Beitrag zur Beschreibung von Schwingungen in Bremssystemen*, Universität Siegen, Dissertation, 2000 3, 35, 39
- [Brecht u. a. 2003] BRECHT, Jörg ; ELVENKEMPER, Andreas ; BETTEN, Josef ; NAVRATH, Uwe ; MÜLTHOFF, Jörg B.: Elastic Properties of Friction Materials / SAE International. 2003 (2003-01-333). – SAE Technical Paper 96

- [Breuer und Bill 2006] BREUER, Bert ; BILL, Karlheinz: *Bremsenhandbuch*. Vieweg, 2006 2
- [Buck 2008] BUCK, Alexander: *Simulation von Bremsenquietschen (Brake Squeal)*, Technische Universität München, Dissertation, 2008 4, 33, 35, 38, 42, 47, 67, 69, 70, 88, 94, 133, 137, 138, 142, 150, 167, 179, 180, 181, 182
- [Burckhardt 1991] BURCKHARDT, Manfred ; REIMPELL, Jörn (Hrsg.): *Fahrwerktechnik: Bremsdynamik und Pkw-Bremsanlagen*. Vogel Buchverlag, 1991 88
- [Chen u. a. 2006] CHEN, Frank ; TAN, Chin A. ; QUAGLIA, Ronald L.: *Disc Brake Squeal*. SAE International, 2006 3, 93
- [Dassault Systèmes 2012] Dassault Systèmes (Veranst.): *Abaqus 6.12 Analysis User's Manual*. Dassault Systèmes. 2012 68, 82, 91, 119, 173
- [Denys und Thompson 2010] DENYS, Eric ; THOMPSON, James K.: The Development of a Brake Insulator Damping Measurement Procedure / SAE International. 2010 (2010-01-1685). – SAE Technical Paper 5, 111, 112
- [Deuffhard und Bornemann 2002] DEUFLHARD, Peter ; BORNEMANN, Folkmar: *Numerische Mathematik I*. de Gruyter, 2002 24, 86
- [EKB 1003 2006] EKB 1003: *Development Guideline on the Quality Control of Disc Brake Linings Explanations concerning the K6(K3)-cold-compressibility-measurement and cp-value-determination*. 2006 68, 98
- [EKB 1108 2007] EKB 1108: *Compressibility Test for Anti Noise Shims*. 2007 112
- [Falke 2010] FALKE, Markus: *Entwicklung einer Vorrichtung zur versuchstechnischen Simulation von gebremster bzw. ungebremster Kurvenfahrt am Bremsengeräuschprüfstand der BMW AG*, Hochschule Landshut, Diplomarbeit, 2010 77, 78
- [Flint 2002] FLINT, John: *Disc Brake Squeal*, University of Southern Denmark, Dissertation, 2002 4, 5, 49, 69, 71, 110, 111
- [Flint u. a. 2004] FLINT, John ; MCDANIEL, J. Gregory ; LI, Xianhui ; ELVENKEMPER, Andreas ; WANG, Alex ; CHEN, Shih-Emn: Measurement and Simulation of the Complex Shear Modulus of Insulators / SAE International. 2004 (2004-01-2799). – SAE Technical Paper 5, 110
- [Flint u. a. 2010] FLINT, John ; CHINNASAMY, Aneesh ; STIKVOORT, Alwin: New Method to Identify Dynamic Normal Stiffness and Damping of Shims for CAE Modeling / SAE International. 2010 (2010-01-1711). – SAE Technical Paper 5, 113, 114
- [Frik 1972] FRIK, Martin: Zur Stabilität nichtkonservativer linearer Systeme. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 52 (1972), S. T47–T49 30
- [Golub und Van Loan 1996] GOLUB, Gene H. ; VAN LOAN, Charles F.: *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1996 83, 86

- [Graf und Ostermeyer 2011] GRAF, Matthias ; OSTERMEYER, Georg-Peter: Instabilities in the sliding of continua with surface inertias: An initiation mechanism for brake noise. In: *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), S. 5269–5279 4
- [Gross u. a. 2006] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; SCHRÖDER, Jörg ; WALL, Wolfgang A.: *Technische Mechanik 3*. Springer, 2006 25
- [Guggenberger 2007] GUGGENBERGER, Johannes: Dynamische Untersuchung von Bremsenkomponenten / Müller-BBM GmbH. 2007 (M65 999/2). – Forschungsbericht 94, 110
- [Guggenberger 2009] GUGGENBERGER, Johannes: Dynamische Untersuchung von Bremsenkomponenten / Müller-BBM GmbH. 2009 (M75 612/2). – Forschungsbericht 94, 107, 110
- [Haag u. a. 2011] HAAG, Mathias ; FAN, Junli ; WINNER, Hermann ; UNGETHÜM, Ulrich ; SIMON, Dirk: Simulative Investigation of Wheel Brakes in Terms of the Anchor Load and Pad Movement / SAE International. 2011 (2011-01-2383). – SAE Technical Paper 131
- [Heißing und Ersoy 2008] HEISSING, Bernd ; ERSOY, Metin: *Fahrwerkhandbuch*. Vieweg + Teubner, 2008 135
- [Hetzler 2008] HETZLER, Hartmut: *Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens*, Universität Karlsruhe (TH), Dissertation, 2008 30, 66
- [Hetzler 2009] HETZLER, Hartmut: On the influence of contact mechanics on friction induced flutter instability. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 9 (2009), S. 275–276 4, 5, 49, 66
- [Hetzler 2013] HETZLER, Hartmut: On the effect of non-smooth Coulomb damping on flutter-type self-excitation in a non-gyroscopic circulatory 2-DoF-system. In: *Nonlinear Dynamics* (2013) 169
- [Heuser 2002] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. Teubner, 2002 89
- [Heussauff u. a. 2012] HEUSSAUFF, Arnaud ; DUBAR, Laurent ; TISON, Thierry ; WATREMEZ, Michel ; NUNES, Ronaldo F.: A methodology for the modelling of the variability of brake lining surfaces. In: *Wear* 289 (2012), S. 145–159 5, 80
- [Hochlenert 2006] HOCHLENERT, Daniel: *Selbsterregte Schwingungen in Scheibenbremsen: Mathematische Modellbildung und aktive Unterdrückung von Bremsenquietschen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2006 4, 71
- [Hoffmann und Gaul 2008] HOFFMANN, Norbert P. ; GAUL, Lothar: Friction Induced Vibrations of Brakes: Research Fields and Activities / SAE International. 2008 (2008-01-2579). – SAE Technical Paper 3, 4, 42

- [Hoffrichter u. a. 2013] HOFFRICHTER, Wolfgang ; STACHE, Axel ; BENDER, Andreas: Evaluation Strategies to Investigate Damping for Damping Shims on Thick Beam / EuroBrake. 2013 (EB2013-TM-004). – Proceedings 110, 111, 112
- [Hornig und von Wagner 2011] HORNIG, Sylwia A. ; VON WAGNER, Utz: Experimental Identification of Brake Lining Material Properties Subjected to Combined Static and High Frequency Loading - A Step Towards a Better Prediction of Disc Brake Squeal? / SAE International. 2011 (2011-01-2353). – SAE Technical Paper 5, 88, 99, 101, 106
- [Hornig und von Wagner 2013] HORNIG, Sylwia A. ; VON WAGNER, Utz: Multidimensional Dynamic Elasticity and Damping Characterization of Friction Materials for Development and FE-Modeling; Definition of Standards / EuroBrake. 2013 (EB2013-TM-017). – Proceedings 114
- [ISO 6310 2009] ISO 6310: *Road vehicles - Brake linings - Compressive strain test methods*. 2009 98
- [ISO 7619 2012] ISO 7619: *Elastomere oder thermoplastische Elastomere - Bestimmung der Eindringhärte - Teil 1: Durometer-Verfahren (Shore-Härte)*. 2012 114
- [Kaplan 2001] KAPLAN, Matthew F.: *Implementation of Automated Multilevel Substructuring for Frequency Response Analysis of Structures*, The University of Texas at Austin, Dissertation, 2001 83
- [Kühn u. a. 2011] KÜHN, Raoul-Roman ; SIMON, Dirk ; MEYER, Maren: Advances in brake noise simulation - viscoelastic damping characterization of shim material - a numerical approach. In: *chassis tech 2011*, 2011, S. 547 – 561 112
- [Kinkaid u. a. 2003] KINKAID, N.M. ; O'REILLY, Olivier M. ; PAPADOPOULOS, Panayiotis: Automotive disc brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 267 (2003), S. 105–166 3, 35
- [Könning u. a. 2013] KÖNNING, Maximilian ; HÄSLER, Karl ; JASCH, Teresa ; NUNES, Ronaldo F.: MBCANI - An Approach for a Total Evaluation of Brake Noise Simulation / EuroBrake. 2013 (EB2013-NVH-005). – Proceedings 143
- [MathWorks, Inc. 2010] The MathWorks, Inc. (Veranst.): *Matlab User's Guide*. The MathWorks, Inc. 2010 173
- [Meziane 2007] MEZIANE, Anissa: *Apport des analyses numériques temporelle et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact - Validation expérimentale*, INSA de Lyon, Dissertation, 2007 4, 168
- [Mills 1938] MILLS, H. R.: *Brake Squeak*. Institution of Automobile Engineers, 1938 3
- [Müller 1977] MÜLLER, Peter C.: *Stabilität und Matrizen*. Springer, 1977 17, 21, 22, 23, 24, 28, 30
- [Möser und Kropp 2010] MÖSER, Michael ; KROPP, Wolfgang: *Körperschall*. Springer, 2010 62, 97, 103, 108, 109, 135, 136

- [Natke 1992] NATKE, Hans G.: *Einführung in die Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg, 1992 94
- [Noesis Solutions 2011] Noesis Solutions (Veranst.): *OPTIMUS Rev 10 - Users Manual*. Noesis Solutions. Januar 2011 173
- [Nonaka u. a. 2010] NONAKA, Hiroyuki ; NISHIZAWA, Yukio ; KURITA, Yutaka ; OURA, Yasunori: Considering the Dynamic Pad Stiffness in FEM Analysis of Disc Brake Squeal / SAE International. 2010 (2010-01-1716). – SAE Technical Paper 5, 99
- [North 1972] NORTH, M. R.: *Frictionally Induced Self-Excited Vibrations in a Disc Brake System*, Loughborough University, Dissertation, 1972 4
- [Popov 2010] POPOV, Valentin: *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, 2010 34, 35, 120, 128, 129, 130
- [Popov 2009] POPOV, Valentin L.: *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, 2009 34
- [Rehm und Trinks 2000] REHM, H. P. ; TRINKS, W.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Universität Karlsruhe, Fakultät für Mathematik, 2000 18
- [Rinsdorf 1996] RINSDORF, Andreas: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Komfortoptimierung von Scheibenbremsen*, Universität-Gesamthochschule Siegen, Dissertation, 1996 38
- [SAE J2468 2006] SAE J2468: *Road Vehicles - Brake Linings - Compressibility Test Procedure*. 2006 98
- [SAE J2521 2013] SAE J2521: *Disc and Drum Brake Dynamometer Squeal Noise Test Procedure*. 2013 134
- [Selimefendigil 2006] SELIMEFENDIGIL, F.: *Sound Propagation Behaviour of Brake Discs Using Numerical Techniques*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2006 142
- [Spelsberg-Korspeter 2009] SPELSBERG-KORSPETER, Gottfried: Breaking of symmetries for stabilization of rotating continua in frictional contact. In: *Journal of Sound and Vibration* 322 (2009), S. 798–807 125
- [Spurr 1961] SPURR, R. T.: A Theory of Brake Squeal. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Automobile Division* 15 (1961), S. 33–52 4
- [Steinhilper und Röper 1994] STEINHILPER, Waldemar ; RÖPER, Rudolf: *Maschinen- und Konstruktionselemente*. Springer, 1994 114
- [Stribeck 1903] STRIBECK, R.: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. In: *Mitteilungen über Forschungsarbeiten* Heft 7 (1903), S. 1–47 34
- [Thomson und Tait 1888] THOMSON, Sir W. ; TAIT, Peter G.: *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge University Press, 1888 25, 31

- [Tönshoff und Bernhardt 1982] TÖNSHOFF, H. K. ; BERNHARDT, U.: *Gestaltung dünnwandiger Blechbauteile*. Lärmarm konstruieren VII. Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Unfallforschung Dortmund, 1982 (Forschungsbericht Nr. 321) 62
- [Tobón 2011] TOBÓN, Alejandro: *Establishment and assessment of a measurement procedure for the determination of the dynamic stiffness of brake pads in a brake squeal condition*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2011 94, 99, 100, 101, 102
- [Trubitz u. a. 2004] TRUBITZ, Peter ; REHMER, Birgit ; PUSCH, Gerhard: Die Ermittlung elastischer Konstanten von Gusseisenwerkstoffen. In: *Werkstoffprüfung* Deutsche Gesellschaft für Materialkunde e.V. (Veranst.), Werkstoff - Informationsgesellschaft mbH, 2004, S. 267 – 272 115
- [Vermont des Roches 2011] VERMONT DES ROCHES, Guillaume: *Frequency and time simulation of squeal instabilities: Application to the design of industrial automotive brakes*, Ecole Centrale Paris, Dissertation, 2011 4, 168
- [Wagner 2013] WAGNER, Jörg: *Vorlesungsskript Dynamik III*. 2013. – Universität Stuttgart 25
- [Walter 1990] WALTER, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1990 13, 15, 16, 175
- [Wriggers 2002] WRIGGERS, Peter: *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002 117, 118, 119, 122, 176
- [Wriggers 2006] WRIGGERS, Peter: *Computational Contact Mechanics*. Springer, 2006 117, 120
- [Yuhas und Isaacson 1998] YUHAS, Donald E. ; ISAACSON, Bruce: Elevated Temperature Measurements of Elastic Constants in Polymer Composites. In: *SAMPE Symposium* 43 (1998) 88
- [Yuhas u. a. 2010] YUHAS, Donald E. ; VORRES, Carol L. ; REMIASZ, Jack ; GESCH, Earl ; YAMANE, Takeshi: Comparative Studies of Non-destructive Methods for As-manufactured Brake Pads / SAE International. 2010 (2010-01-1701). – SAE Technical Paper 5, 93
- [Zhang u. a. 2003] ZHANG, Lixin ; WANG, Alex ; MAYER, Michael ; BLASCHKE, Peter: Component Contribution and Eigenvalue Sensitivity Analysis for Brake Squeal / SAE International. 2003 (2003-01-3346). – SAE Technical Paper 4, 159, 160, 161
- [Ziegler 1952] ZIEGLER, H.: Die Stabilitätskriterien in der Elastomechanik. In: *Ingenieur Archiv* 20 (1952), S. 49–56 31