

# Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als Instrument der mathematikdidaktischen Forschung

Theorie – Praxis – Empirie  
am Beispiel des Bruchzahlkonzepts

Stefan Hoch

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät TUM School of Education der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines **Doktors der Philosophie (Dr. phil.)** genehmigten Dissertation.

Vorsitzende:

Priv.-Doz. Dr. Anja Schiepe-Tiska

Prüfende der Dissertation:

1. Prof. Dr. Kristina Reiss
2. Prof. Dr. Andreas Obersteiner

Die Dissertation wurde am 28.08.2020 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät TUM School of Education am 08.12.2020 angenommen.



Für meinen Vater



# Danksagung

Es freut mich, an dieser Stelle meinen Dank all denjenigen aussprechen zu können, die mich während meiner Promotionszeit unterstützt und damit zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

Zuerst bedanke ich mich bei meiner Doktormutter, Prof. Dr. Kristina Reiss, für die Möglichkeit, im spannenden Umfeld digitaler Mathematikschulbücher zu arbeiten und zu promovieren, und für die Betreuung der gesamten Promotion. Sie hat mit wertvollen Impulsen die Entstehung dieser Arbeit in allen Phasen hilfreich begleitet. Auch meinem Zweitgutachter, Prof. Dr. Andreas Obersteiner, sei an dieser Stelle herzlich gedankt für seine konstruktiven Hinweise und sein stetes Interesse.

Die Dissertation ist eingebettet in das Forschungsprojekt *ALICE:Bruchrechnen*. Herzlichen Dank daher an meine Mitstreiter, Dr. Frank Reinhold und Dr. Bernhard Werner, für die ausnahmslos gute und freundschaftliche Zusammenarbeit über die Jahre hinweg. Ebenso danke ich Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, ohne dessen Ideen und Initiativen es das Projekt nicht in dieser Form gegeben hätte. Die Heinz Nixdorf Stiftung hat dankenswerterweise das gesamte Projekt finanziell gefördert und damit die Voraussetzungen für diese produktive Zusammenarbeit geschaffen.

Ich danke den Kolleginnen und Kollegen aus der Mathematikdidaktik, die mich als Absolvent der *Mathematik* – ganz ohne *-didaktik* – so offen aufgenommen haben. Die fachlichen Diskussionen über Forschung und Statistik, die konstruktive Kritik an Widgets, Präsentationen und Abbildungen und nicht zuletzt die gemeinsam verbrachten Kaffeepausen sind mir in guter Erinnerung. Danke dafür.

Eine Studie steht und fällt mit ihren Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Ich möchte mich daher bei allen Schulleitungen, Lehrkräften und natürlich Schülerinnen und Schülern sowie deren Eltern für die Bereitschaft bedanken, sich auf das Experiment „iPad-Unterricht“ einzulassen. Darüber hinaus gilt mein Dank den Verantwortlichen im Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus, Wissenschaft und Kunst sowie im staatlichen Schulamt München für die Genehmigung der Studie.

Besonderer Dank gilt auch dem Team von Teach@TUM, das uns bereitwillig eine größere Anzahl an iPads zur Verfügung gestellt und so eine Stichprobengröße von zwölf iPad-Klassen ermöglicht hat. In diesem Zusammenhang auch ein herzliches „Danke“ an Bert Krohn für den technischen Support.

Vor allem bin ich meiner Familie und meiner Freundin Susanne dankbar, die mich über die Jahre kontinuierlich unterstützt und mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben.



# Zusammenfassung

Als wichtiges Unterrichtsmaterial ist das Schulbuch gemäß dem Angebots-Nutzungs-Modell ein bedeutender Teil des Unterrichtsangebots. Der Lernerfolg steht demnach in Zusammenhang mit dessen Nutzungsweise. Allerdings stellt es eine Herausforderung für die empirische Bildungsforschung dar, den Umgang mit Schulbüchern im Unterricht zu erfassen. Hier bieten digitale Formate durch die Erhebung von Prozessdaten einen Lösungsansatz. Zudem ergeben sich durch die Digitalisierung gerade aus mathematikdidaktischer Perspektive vielfältige Möglichkeiten für das (individualisierte) Lernen und Lehren.

Ein Ziel des Forschungsprojekts *ALICE:Bruchrechnen* war die Umsetzung dieser Potenziale in einem digitalen und interaktiven Schulbuch zu Bruchzahlkonzepten (iBook). Ein besonderer Fokus lag auf der Entwicklung von interaktiven Diagrammen und Aufgaben, die adaptiv arbeiten, automatisches Feedback geben und häufig auf Repräsentationswechsel zurückgreifen. Außerdem wurde eine Prozessdatenerfassung konzipiert und implementiert, um die Nutzung des interaktiven Schulbuchs automatisch zu protokollieren. Im Rahmen des Projektes arbeiteten  $N = 256$  Schülerinnen und Schüler der sechsten Jahrgangsstufe (davon 151 an Gymnasien und 105 an Mittelschulen) in zwei Teilstudien für je 15 Unterrichtsstunden mit dem iBook im Mathematikunterricht.

Die erhobenen Prozessdaten ergaben ein differenziertes Bild der Nutzung des digitalen Schulbuchs; signifikante geschlechter- und schulartspezifische Unterschiede wurden sichtbar. So erreichten Mädchen im Mittel eine höhere Lösungsrate als Jungen,  $\eta_p^2 = .02$ ; Gymnasiastinnen und Gymnasiasten griffen auf ein größeres Spektrum der interaktiven Aufgaben zu als Mittelschülerinnen und Mittelschüler,  $\eta_p^2 = .13$ . Die Verwendung eines hohen Anteils an unterschiedlichen Aufgaben war positiv mit dem Lernerfolg assoziiert. Damit zeigt sich abwechslungsreiches, intelligentes Üben als zielführend für das Erlernen von Bruchzahlkonzepten. Insgesamt erwies sich die Nutzung des interaktiven Angebots in generalisierten linearen Mischmodellen als prädizierend für den Lernerfolg. Die Prozessdaten klärten dabei bis zu 52 % der Varianz auf, die nach Kontrolle des Vorwissens auf Ebene der Lernenden geschätzt wurde. Auch außerhalb von Fragestellungen zur Schulbuchnutzung können Prozessdaten einen Beitrag zur mathematikdidaktischen Forschung leisten. So zeigte sich in den interaktiven Aufgaben ein negativer Effekt der Bearbeitungszeit auf die Lösungswahrscheinlichkeit. Dieser war abhängig von der Aufgabenschwierigkeit und der Individualkompetenz. Außerdem erlauben die Prozessdaten aus zwei Visualisierungsaufgaben des iBooks eine Finger-Tracking-Analyse. In den Fingerbewegungen der Lernenden ließen sich wiederkehrende Lösungsmuster beobachten, die von der geometrischen Form der Visualisierung abhingen. Die Forschungsarbeit macht deutlich, dass Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als vielfältiges Instrument gewinnbringend für die mathematikdidaktische Forschung sind.



# Abstract

As an important teaching material, the textbook plays a prominent role in instruction. In accordance to the utilization-of-learning-opportunities model, its use has an impact on the learning outcome. However, collecting data on textbook use in classroom poses a challenge for empirical research. Here, digital approaches offer a solution in the form of process data. Additionally, the digitalization provides a wide range of possibilities for (individualized) learning and teaching – especially from a mathematics education perspective.

One goal of the research project *ALICE:fractions* was to realize this potential in a digital and interactive textbook (iBook) on fraction concepts. Special attention was given to the development of interactive diagrams and exercises that work adaptively, give automatic feedback and incorporate translations between different modes of representation. Furthermore, a method of automatically collecting process data on students' work with the interactive textbook was devised and implemented. A total of  $N = 256$  sixth grade students (151 in high education track – *Gymnasium* – and 105 in low education track – *Mittelschule*) used the iBook for 15 mathematics lessons.

The recorded process data showed a diverse picture of how students used the interactive textbook. In particular, there were significant differences regarding gender and school type, with girls achieving higher solution rates than boys,  $\eta_p^2 = .02$ ; at *Gymnasium*, students worked with a higher percentage of the interactive exercises than at *Mittelschule*,  $\eta_p^2 = .13$ . The use of a high proportion of different tasks was positively associated with learning success. This shows that varied practice is beneficial for learning fraction concepts. Textbook use in total proved to be predictive for the learning outcome, with process data explaining up to 52 % of the variance on student level in generalized linear mixed models, in addition to prior knowledge. Process data from digital textbooks also offer further research potential beyond textbooks themselves. For example, there was a negative effect of time on task on the task outcomes within the iBook. The effect varied across both students and interactive tasks. Furthermore, the process data from two visualization tasks of the iBook allow for finger tracking analysis. The recorded finger movements of students' solutions revealed recurring patterns that depend on the shape of the visualization. The work shows that process data from interactive textbooks are a multifaceted and productive instrument for research in mathematics education.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Theoretischer Teil</b>	<b>5</b>
<b>1 Bruchzahlen als Unterrichtsinhalt</b>	<b>7</b>
1.1 Mathematische Definition des Körpers der rationalen Zahlen . . . . .	7
1.2 Herausforderungen beim Erwerb von Bruchzahlkonzepten . . . . .	8
1.2.1 Schwierigkeiten . . . . .	8
1.2.2 Ursachen . . . . .	10
1.3 Didaktische Zugänge . . . . .	13
1.3.1 Verschiedene Repräsentationsformen . . . . .	13
1.3.2 Anschauliche Grundvorstellungen . . . . .	21
<b>2 Digitale Schulbücher im Kontext guten Unterrichts</b>	<b>27</b>
2.1 Unterrichtsqualität . . . . .	27
2.1.1 Merkmale guten Unterrichts . . . . .	28
2.1.2 Angebots-Nutzungs-Modell nach Helmke (2009) . . . . .	29
2.2 Das Schulbuch im Mathematikunterricht . . . . .	30
2.3 Digitale Mathematikschulbücher . . . . .	34
2.3.1 Begriffsklärung <i>Digitales (Mathematik-)Schulbuch</i> . . . . .	34
2.3.2 Unterschiede zwischen digitalen und konventionellen Schulbüchern	38
2.4 Schulbuchqualität . . . . .	49
2.4.1 Merkmale guter Schulbücher . . . . .	49
2.4.2 Implikationen der Merkmale guten Unterrichts . . . . .	53
<b>3 Nutzung von (digitalen) Schulbüchern im Unterricht</b>	<b>59</b>
3.1 Schulbuchnutzungsmodell nach Rezat (2006a) . . . . .	59
3.2 Nutzung konventioneller Schulbücher durch Schülerinnen und Schüler . .	62
3.2.1 Intendierte Nutzung . . . . .	62
3.2.2 Erhebungsmethoden . . . . .	64
3.2.3 Tatsächliche Nutzung . . . . .	66
3.3 Nutzung digitaler Schulbücher durch Schülerinnen und Schüler . . . . .	69
3.3.1 Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als Quelle von Forschungs-	
daten . . . . .	69
3.3.2 Prozessmaße als Indikatoren der E-Book-Nutzung . . . . .	72
3.3.3 Analyse von Lösungsprozessen . . . . .	75
3.3.4 Verknüpfung von Prozess- und Produktdaten . . . . .	79

<b>4</b>	<b>Forschungsstand und Fragestellungen</b>	<b>83</b>
4.1	Forschungsstand . . . . .	83
4.2	Forschungsfragen . . . . .	84
4.2.1	Nutzung von digitalen Schulbüchern . . . . .	84
4.2.2	Digitale Schulbücher als Instrument weiterer Forschungsfelder . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Praktischer Teil</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>Programmieren für iBooks Author</b>	<b>89</b>
5.1	iBooks Author . . . . .	89
5.1.1	Widgets . . . . .	90
5.1.2	Technische Details . . . . .	91
5.2	Widgetentwicklung . . . . .	92
5.2.1	Grundgerüst eines Widgets . . . . .	93
5.2.2	Anzeigegröße eines Widgets . . . . .	95
5.2.3	Daten und Dateien in Widgets . . . . .	96
5.2.4	Debugging von Widgets . . . . .	99
5.2.5	Darstellung von mathematischen Inhalten . . . . .	99
<b>6</b>	<b>ALICE:Bruchrechnen</b>	<b>105</b>
6.1	Übersicht über das interaktive Buch . . . . .	105
6.1.1	Gliederung und Aufbau des iBooks . . . . .	105
6.1.2	Kategorisierung der entwickelten Widgets . . . . .	106
6.1.3	Übersicht über die erstellten Widgets . . . . .	107
6.2	ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . . . .	109
6.2.1	Komponenten . . . . .	109
6.2.2	Funktionalitäten . . . . .	115
6.2.3	Lokalisierung . . . . .	128
6.2.4	Projektspezifische CindyJS-Erweiterungen . . . . .	129
6.3	Prozessdaten . . . . .	131
6.3.1	Datenerfassung . . . . .	131
6.3.2	Datenübermittlung . . . . .	132
6.3.3	Datenlöschung . . . . .	133
6.3.4	Datenaufbereitung . . . . .	133
6.4	Das interaktive Buch . . . . .	135
6.4.1	Kapitel 1: „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen	135
6.4.2	Kapitel 2: „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen .	141
6.4.3	Kapitel 3: „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer	145
6.4.4	Kapitel 4: „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen . . . . .	147
6.4.5	Kapitel 5: „Brüche auf dem Zahlenstrahl“ . . . . .	154
6.4.6	Kapitel 6: „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche . . . . .	160
6.4.7	Kapitel 7: „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen	162

<b>III</b>	<b>Empirischer Teil</b>	<b>167</b>
<b>7</b>	<b>Methode der Studie</b>	<b>169</b>
7.1	Übersicht über die Studie . . . . .	169
7.2	Prozessdaten und -maße . . . . .	170
7.2.1	Erfasste Prozessdaten . . . . .	170
7.2.2	Preprocessing der Prozessdaten . . . . .	171
7.2.3	Berechnete Prozessmaße . . . . .	174
7.3	Weitere Erhebungsinstrumente . . . . .	175
7.4	Durchführung der Studie . . . . .	176
7.4.1	Administrative Vorarbeiten . . . . .	176
7.4.2	Fortbildung der Lehrkräfte . . . . .	177
7.4.3	Ablauf der Intervention . . . . .	177
7.4.4	Auslesen der Daten . . . . .	179
7.5	Codierung . . . . .	179
7.5.1	Codierung des Vor- und Nachttests . . . . .	179
7.5.2	Codierung der aufgezeichneten Fingerbewegungen . . . . .	180
7.6	Beschreibung der Stichproben . . . . .	180
7.7	Verwendete Geräte . . . . .	181
7.8	Statistische Methoden und Software . . . . .	182
7.8.1	Generalisierte lineare Mischmodelle . . . . .	182
7.8.2	Verwendete Software . . . . .	184
<b>8</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>187</b>
8.1	Nutzung des digitalen Schulbuchs . . . . .	187
8.1.1	Beschreibung der Schulbuchnutzung . . . . .	187
8.1.2	Schulart- und geschlechterspezifische Unterschiede . . . . .	192
8.1.3	Zusammenhang der Prozessmaße mit dem Lernerfolg . . . . .	200
8.2	Das digitale Schulbuch als Instrument weiterer Forschungsfelder . . . . .	216
8.2.1	Finger-Tracking in kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben . . . . .	216
8.2.2	Auswirkungen von Aspekten des Lösungsprozesses auf die Aufgabenlösung . . . . .	217
<b>9</b>	<b>Diskussion</b>	<b>225</b>
9.1	Ziele der Arbeit . . . . .	225
9.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	226
9.2.1	Nutzung des digitalen Schulbuchs . . . . .	226
9.2.2	Das digitale Schulbuch als Instrument weiterer Forschungsfelder . . . . .	234
9.3	Limitationen der Studie . . . . .	237
9.3.1	Durchführung der Studie . . . . .	237
9.3.2	Optimierung des interaktiven Schulbuchs . . . . .	239
9.3.3	Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern . . . . .	244
9.4	Schlusszusammenfassung & Ausblick . . . . .	247
9.4.1	Schlusszusammenfassung . . . . .	247
9.4.2	Ausblick . . . . .	249

<b>Literatur</b>	<b>253</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>267</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>269</b>
<b>Codeverzeichnis</b>	<b>275</b>
<b>Anhang</b>	<b>277</b>
<b>A Details zu ALICE:Bruchrechnen-Widgets</b>	<b>279</b>
A.1 Tabellarische Übersicht der ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . . . .	280
A.2 Beispiele des Vergleichserklärers . . . . .	283
A.3 Mögliche Fortschrittsanzeige in Widgets . . . . .	289
<b>B Detaillierte Beschreibungen der ALICE:Bruchrechnen-Widgets nach iBook-Kapitel</b>	<b>291</b>
B.1 Kapitel 1: „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen . . . . .	292
B.2 Kapitel 2: „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen . . . . .	305
B.3 Kapitel 3: „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer . . . . .	312
B.4 Kapitel 4: „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen	319
B.5 Kapitel 5: Brüche auf dem Zahlenstrahl . . . . .	340
B.6 Kapitel 6: „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche	347
B.7 Kapitel 7: „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen . . .	350
<b>C Code</b>	<b>363</b>
C.1 Karteikasten . . . . .	364
C.2 Distraktor-Funktion in Widget W47 . . . . .	368
C.3 Injektion von CindyJS-Code aus externen Dateien . . . . .	369
C.4 Übergänge in CindyJS . . . . .	370
C.5 CindyJS-Implementierung des Zahlenstrahls . . . . .	370
C.6 JavaScript-Skript zum Senden der Daten von iBooks an den Server . . . . .	380
C.7 Serverseitiges PHP-Skript zum Empfangen der Prozessdaten . . . . .	380
C.8 Preprocessing der Zeitdaten . . . . .	381
C.9 Berechnung der Prozessmaße . . . . .	381
C.10 PHP-Skript zur Anpassung der Logzeiten im Zusammenhang mit Lösungshilfen . . . . .	383
<b>D Papierbasierte Erhebungsinstrumente</b>	<b>387</b>
D.1 Vortest . . . . .	388
D.2 Nachtest . . . . .	392
<b>E Aktivitätsgraphen der einzelnen Klassen</b>	<b>401</b>

# Einleitung

Die fortschreitende Digitalisierung der Gesellschaft ist spätestens seit dem *DigitalPakt* (Bundesministerium für Bildung und Forschung [BMBF], 2019) Thema an Schulen. Durch die COVID-19-Pandemie im Jahr 2020 haben digitale Unterrichtsformate nochmals an Relevanz gewonnen. In diesem Zusammenhang besitzen digitale Unterrichtsmaterialien das Potenzial, Unterricht nachhaltig zu verändern (Pepin, Choppin, Ruthven & Sinclair, 2017). Bei entsprechender Umsetzung bieten sich sowohl den Lernenden als auch den Lehrenden Vorteile gegenüber konventionellem Unterricht. So kann u. a. das Lernen durch adaptive Lerngelegenheiten individualisiert werden (z. B. Leutner, 2002) oder automatisches Feedback als Entlastung für die Lehrkräfte dienen (z. B. Lew, 2016). Für den Bereich des Bruchrechnens eröffnen digitale Medien vielfältige Möglichkeiten; zum Beispiel können sie durch dynamische Repräsentationen von Bruchzahlen handlungsorientierten Unterricht fördern (z. B. Lesh, Post & Behr, 1987b).

Gerade eine Digitalisierung der Schulbücher kann dabei zu Veränderungen im Mathematikunterricht führen, da sie dort traditionell einen hohen Stellenwert einnehmen (z. B. Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Bisher liegen allerdings wenige Erkenntnisse darüber vor, wie Schülerinnen und Schüler im Unterricht mit digitalen Schulbüchern arbeiten (Steen & Madsen, 2018). Insbesondere mangelt es der konventionellen Forschung zur Schulbuchnutzung an einer Erhebungsmethode, die valide Daten im natürlichen Unterrichtskontext effizient erfassen kann (Rezat, 2009). Hier eröffnen digitale Schulbücher durch die Aufzeichnung von Prozessdaten während der Nutzung die Möglichkeit, die Arbeit der Lernenden mit den digitalen Büchern automatisch und exakt zu erheben, ohne die Nutzung dabei zu stören (Junco & Clem, 2015).

Im Rahmen des gemeinsamen Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen widmet sich die vorliegende Arbeit der Nutzung eines digitalen Schulbuchs durch Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Schularten im Unterricht. Im Detail lassen sich die folgenden Ziele formulieren:

1. Beschreibung von Prozessdaten aus digitalen (Mathematik-)Schulbüchern als Erhebungsmethode der faktischen Nutzung von digitalen Schulbüchern durch die Schülerinnen und Schüler.
2. Gemeinsame Entwicklung eines interaktiven Schulbuchs (iBook) für die Einführung von Bruchzahlkonzepten für die sechste Jahrgangsstufe im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen mit Fokus auf die Konzeption und Implementierung einer Prozessdatenerfassung für digitale Bücher.
3. Durchführung einer empirischen Studie zur Validierung der Prozessdatenerfassung als Erhebungsmethode der Nutzung von Schulbüchern durch Schülerinnen und Schüler.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Der erste Teil legt auf Basis unterschiedlicher wissenschaftlicher Erkenntnisse und Theorien die theoretische Grundlage für diese Dissertation.

Kapitel 1 gibt einen Überblick über Ergebnisse zum Lehren und Lernen von Bruchzahlkonzepten, die hier fachdidaktisch relevant sind. Zunächst werden dabei Schwierigkeiten beim Erwerb von Kompetenzen im Inhaltsbereich dargelegt. Anschließend erfolgt eine Darstellung verschiedener Lösungsansätze, die im erstellten iBook berücksichtigt sind.

In Kapitel 2 werden digitale Schulbücher in den Kontext qualitativ hochwertigen Unterrichts gestellt. Dazu wird zunächst das Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht nach Helmke (2009) beschrieben, in das Schulbücher integriert werden. Anschließend wird ein Überblick über die Mathematikschulbuchforschung gegeben. In Folge dessen wird der Begriff *digitales (Mathematik-)Schulbuch* definiert; zudem werden Unterschiede – positiver wie negativer Natur – zu konventionellen Schulbüchern herausgearbeitet. Das Kapitel schließt mit dem Zusammentragen von Merkmalen für *gute* Schulbücher aus unterschiedlichen Quellen und einer Einbettung in Merkmale guten Unterrichts.

Kapitel 3 beschreibt die Nutzung von (digitalen) Schulbüchern im Unterricht. Ausgehend von einem Modell zur Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schüler nach Rezat (2006a) werden zunächst Erhebungsmethoden und Forschungsergebnisse zur Nutzung von Mathematikschulbüchern durch Lernende dargelegt. Daraufhin werden Prozessdaten, die während der Nutzung des interaktiven Schulbuchs aufgezeichnet werden können, als Erhebungsmethode für die Nutzung von digitalen Büchern vorgestellt.

Zum Abschluss des theoretischen Teils fasst Kapitel 4 den Forschungsstand zusammen und formuliert darauf aufbauend die für diese Arbeit relevanten Forschungsfragen.

Der zweite, praktische Teil thematisiert das im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen erstellte interaktive Schulbuch. Kapitel 5 führt aus, wie interaktive Diagramme und Aufgaben für das verwendete E-Book-Format programmiert werden können. Kapitel 6 beschreibt das Buch im Detail: Nach der Erläuterung der unterschiedlichen interaktiven Komponenten (sog. Widgets) wird die Prozessdatenerfassung beschrieben. Im Anschluss daran wird ein Überblick über das Buch gegeben. Es folgt eine Vorstellung der einzelnen Kapitel; dazu werden auch einzelne Widgets exemplarisch im Detail präsentiert.

Der dritte Teil umfasst die empirische Beantwortung der Forschungsfragen. In Kapitel 7 wird die Methodik der empirischen Studie detailliert, die am Gymnasium und an der Mittelschule mit dem interaktiven Schulbuch durchgeführt wurde. Die Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen werden in Kapitel 8 erläutert. Neben den Erkenntnissen, welche die Prozessdaten über die Nutzung des iBooks im Unterricht liefern, finden sich auch Resultate, die eine Verwendung des interaktiven Buchs zur Untersuchung von psychologisch motivierten Fragestellungen in der Mathematikdidaktik exemplarisch vorstellen. Der empirische Teil und die gesamte Arbeit endet mit Kapitel 9, in dem die Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert werden. Zudem geht das Kapitel auf Limitationen der Studie ein und gibt einen Ausblick auf mögliche künftige Forschung.

Einige Erkenntnisse der Arbeit wurden bereits in Konferenzproceedings (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018b, 2018c) oder Zeitschriften (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018a) zum Teil englischsprachig veröffentlicht. Auf die Veröffentlichungen wird an den entsprechenden Stellen explizit verwiesen.



**Teil I**

**Theoretischer Teil**



# 1 Bruchzahlen als Unterrichtsinhalt

## Überblick

Die Forschung zur Didaktik der Bruchrechnung ist breit gefächert und hat eine langjährige Tradition in der mathematikdidaktischen Forschung. Eine tiefgehende Behandlung der Erkenntnisse der unterschiedlichen Forschergruppen in vollem Umfang ist nicht Ziel dieser Arbeit. Um dennoch die Arbeit verorten zu können, werden in diesem Kapitel einige Eckpunkte der Didaktik der Bruchrechnung rekapituliert. Zunächst legt Abschnitt 1.1 die fachmathematische Grundlage für die Behandlung der Brüche im Unterricht. Abschnitt 1.2 beschreibt im Anschluss, welche Herausforderungen dem Bruchzahlkonzept innewohnen. Mögliche didaktische Antworten darauf werden schließlich in Abschnitt 1.3 vorgestellt; dabei wird der Bezug zu Bedeutungen für Bruchrechnenunterricht mit digitalen Schulbüchern hergestellt.

## 1.1 Mathematische Definition des Körpers der rationalen Zahlen

Der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  – der die Menge der *Brüche* beinhaltet – ist formal definiert als der Quotientenkörper des Rings der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Dieser Körper ist der kleinste Körper, der  $\mathbb{Z}$  enthält. Neben den Ringelementen enthält  $\mathbb{Q}$  die multiplikativen Inverse aller Ringelemente (außer der 0) als neue Elemente.

Algebraisch geschieht dies über eine Definition einer Äquivalenzrelation; der Körper ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen plus Erweiterungen der Addition und Multiplikation von  $\mathbb{Z}$  auf den Körper. Elemente des Körpers sind Äquivalenzklassen, die von geordneten Paaren  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  repräsentiert werden. Zwei Zahlpaare  $(a, b)$  und  $(c, d)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b, d \neq 0$  heißen äquivalent – Schreibweise  $(a, b) \sim (c, d)$  –, wenn sie Gleichung 1.1 erfüllen.

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc \quad (1.1)$$

Die formale Definition der Zahlmenge der rationalen Zahlen lautet damit  $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$ . Die Addition auf  $\mathbb{Q}$  wird definiert als  $(a, b) \oplus (c, d) := (ad + bc, bd)$ , die Multiplikation über  $(a, b) \odot (c, d) := (ac, bd)$ . Man kann zeigen, dass  $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$  einen Körper bildet (s. z. B. Karpfinger & Meyberg, 2017).

Die injektive, lineare Abbildung  $n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, z \mapsto (z, 1)$  bettet die ganzen Zahlen in den Körper der rationalen Zahlen ein. Ein multiplikatives Inverses von  $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  stellt  $(1, z) \in \mathbb{Q}$  dar.

Durch folgende – auf Schulniveau intuitive, aber eine nicht definierte Division verwendende – Umformung von Gleichung 1.1 wird der Zusammenhang zu den gewohnten Brüchen deutlich:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1.2)$$

Eine Äquivalenzklasse im Quotientenkörper  $\mathbb{Q}$  besteht also aus allen zueinander wertgleichen Brüchen.

## 1.2 Herausforderungen beim Erwerb von Bruchzahlkonzepten

Die Vermittlung wie der Erwerb von Bruchzahlkonzepten geht mit Herausforderungen einher, die im Folgenden beschrieben und begründet werden.

### 1.2.1 Schwierigkeiten

Ein formaler Zugang über die mathematische Definition (vgl. Abschnitt 1.1) scheint für Schülerinnen und Schüler zu abstrakt. Während die mathematisch-fachliche Exaktheit in der Hochschulmathematik notwendig ist, mangelt es diesem Zugang an Schulpraxisorientierung (Padberg, 2009). Um so ungeeigneter scheint die Einführung über Äquivalenzklassen vor dem Hintergrund, dass deutsche Lehrpläne die Einführung der Bruchzahlen in der Sekundarstufe I (z. B. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung [ISB], 2018a, 2018b) und internationale Curricula sie zu Teilen bereits in der Primarstufe ansiedeln (z. B. Cramer, Behr, T. & Lesh, 2009).

Moderner Bruchrechnenunterricht, wie er u. a. von Padberg und Wartha (2017) postuliert wird, wird vielmehr der Forderung von Winter (1999) folgen und sich um „mehr Sinnstiftung“ (S. 1) in der Bruchrechnung bemühen. In dieser Sinnperspektive ist das Bruchzahlkonzept ein vielschichtiger Lerngegenstand, da ein Bruch auf mehrere Arten interpretiert werden kann (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Padberg & Wartha, 2017): Brüche können bspw. als *Anteile*, *Operatoren* oder *Maßzahlen* verstanden werden (s. Abschnitt 1.3.2). Diese unterschiedlichen Interpretationsweisen bieten einerseits variable Anknüpfungspunkte an die Anschauungswelt der Schülerinnen und Schüler (s. Abschnitt 1.3.2); andererseits erschwert es die Vielzahl an diesen interagierenden *Subkonzepten* Schülerinnen und Schülern, Bruchzahlkonzepte aufzubauen (Behr et al., 1983). Dieses Problem wird zudem verstärkt, da für ein tragfähiges Bruchzahlkonzept nicht nur die einzelnen Subkonzepte verstanden werden müssen, sondern auch deren Zusammenhänge und Interaktionen erarbeitet werden müssen (z. B. Behr et al., 1983).

Probleme werden bspw. durch wiederkehrende Fehlermuster in Schülerantworten ersichtlich, die in verschiedenen Studien in unterschiedlichen Ländern beobachtbar sind (s. Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, für einen Überblick). Wiederkehrende Fehler werden nach Padberg (1996) als *typische Fehler* bezeichnet, wenn sie bei unterschiedlichen Personen auftreten. Typische Fehler sind oftmals von *systematischer* Natur: Sie entstehen

durch Anwendung fehlerhafter Algorithmen, zeugen also nicht von bspw. Unkonzentriertheit, sondern vielmehr von einem grundlegenden falschen Verständnis. Im Gegensatz zu *Flüchtigkeitsfehlern*, die nach Hinweis auf den jeweiligen Fehler von der Schülerin oder dem Schüler korrigiert werden können, werden systematische Fehler nicht korrigiert; vielmehr wird der fehlerhafte Lösungsweg von Schülerinnen und Schülern erklärt, wenn sie in Interviewstudien darauf hingewiesen werden (Padberg, 1996).

Ein Beispiel eines systematischen Fehlers aus dem Bereich der Bruchzahlen ist die fehlerhafte Umrechnung von gemischten Zahlen in unechte Brüche, die man wie folgt formalisieren kann: Seien  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $c \neq 0$ . Dann „ist“  $a \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$  – also eine fehlerhafte Addition des Ganzen zum Zähler, ohne es vorher mit dem Nenner zu multiplizieren (z. B. Herden & Pallack, 2000). Eine mögliche Erklärung für diesen Fehler ist eine fehlerhafte Übertragung eines Algorithmus: Die Vorgehensweise bei der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl wird auf die in der Umwandlung von der gemischten Zahl implizite Addition angewendet. Dem Fehler kann bspw. durch einen Repräsentationswechsel in die ikonische Ebene entgegengewirkt werden.

Die Analyse von Schülerfehlern hat im Bereich der Didaktik der Bruchrechnung eine lange Tradition und zeigt die Schwierigkeiten auf, die Schülerinnen und Schüler in diesem Themengebiet haben (Eichelmann et al., 2012). Darüber hinaus können durch die Fehleranalyse Hinweise auf die zugrunde liegenden Denkprozesse liefern, woraus sich wiederum Interventionsmaßnahmen oder auch Gestaltungskriterien für Lernsoftware ableiten lassen (Wittmann, 2007). Gerade im Bereich der Bruchrechnung kann letzterer Punkt gewinnbringend umgesetzt werden, da sich viele der beobachteten Fehler als Algorithmus formalisieren lassen. Diese Fehleralgorithmen können in die Lernsoftware eingepflegt werden, so dass sie die empirisch eruierten systematischen Fehler begehen kann. So kann das Programm eine eingegebene falsche Schülerlösung mit den Fehlermustern der systematischen Fehler vergleichen. Daraus kann in computergenerierten Aufgaben automatisch geschlossen werden, welches Missverständnis vorliegen könnte und im Feedback gezielt darauf eingegangen werden.<sup>1</sup>

Zusätzlich zu den inhaltspezifischen Herausforderungen zeigen sich in standardisierten Tests (Götz, Lingel & Schneider, 2013) in der sechsten Jahrgangsstufe, in welcher die Bruchrechnung in Deutschland verankert ist, Geschlechterunterschiede zugunsten der Jungen, die im Hinblick auf die Ergebnisse von PISA (z. B. Reiss, Weis, Klieme & Köller, 2019) als typisch für Mathematikkompetenz bezeichnet werden können. Für den Inhaltsbereich der Bruchzahlen zeigt sich hier ein diverses Bild. So berichten Moyer-Packenham und Bake (2014) in ihrer Studie mit Drittklässlerinnen und Drittklässlern von Geschlechterunterschieden im Bruchrechnenunterricht. Dieser Effekt trat allerdings nicht auf, wenn die Lernenden mit *virtual manipulatives* unterrichtet wurden. In der Studie von Ross, Scott und Bruce (2012) zeigt sich ein minimaler Vorsprung der Jungen in der Stichprobe, die 996 kanadische Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen Sieben bis Zehn umfasste. In den Untersuchungen

<sup>1</sup>Es ist zu beachten, dass dasselbe fehlerhafte Ergebnis je nach Aufgabe über unterschiedliche Fehleralgorithmen entstehen kann. Das System sollte daher so programmiert sein, dass das Feedback, welches explizit systematische Fehler anspricht, adaptiv über mehrere Aufgaben arbeitet, um den richtigen Fehlertyp zu erkennen.

von Hansen et al. (2015) und Bailey, Siegler und Geary (2014) zeigen sich hingegen keinerlei Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen in Bezug auf ihre Bruchrechnungskompetenzen, so dass tendenziell nur geringe geschlechterspezifische Herausforderungen im Bereich der Bruchrechnung vorliegen.

## 1.2.2 Ursachen

Fehler beim Umgang mit Bruchzahlen (s. Abschnitt 1.2.1) – und allgemeiner: Schwierigkeiten mit dem Bruchzahlkonzept – können unterschiedliche Ursachen haben (Eichelmann et al., 2012; Misquitta, 2011; Padberg & Wartha, 2017).

### 1.2.2.1 Fehlerquellen

Die Vorstellung von Brüchen *als Anteile* nimmt unter den unterschiedlichen Bruchzahlkonzepten eine dominante Stellung ein (Behr et al., 1983). Dies kann zu einem Übergewicht dieses Subkonzepts im mentalen Bild der Schülerinnen und Schüler von Bruchzahlen führen. Daraus können Probleme mit unechten Brüchen resultieren, die in dieses Konzept schwer einbindbar sind, da der Anteil bei unechten Brüchen *größer* als das Ganze ist. Zusätzlich entstehen Schwierigkeiten, wenn der Anteil von mehreren – und nicht *einem* – Ganzen bestimmt werden muss. Darüber hinaus ergeben sich Schwierigkeiten durch die unterschiedlichen, aber gleichzeitig zusammenhängenden und interagierenden Interpretationsweisen von Bruchzahlen, deren komplexes Beziehungsgeflecht eine Herausforderung darstellt (Behr et al., 1983).

Schülerinnen und Schülern fällt es zudem schwer, ihr intuitives Wissen sowie ihre Vorstellungen über Bruchzahlen mit deren symbolischen Darstellung zu verknüpfen (Padberg & Wartha, 2017). Auch können gültige Regeln, die jedoch ohne Anschauungsbezug verinnerlicht werden, zu Schwierigkeiten führen, selbst wenn dieses Vorgehen zunächst Erfolg in Routineaufgaben zeigt (Padberg & Wartha, 2017). Zu Problemen können auch komponentenweise Zahlauffassungen führen, also die Interpretation eines Bruchs nicht als eine Zahl, sondern die komponentenweise Auffassung von Zähler und Nenner als getrennte Zahlen. Diese Zahlauffassung kann durch die alleinige Verwendung von Mengenrepräsentationen (s. Abschnitt 1.3.1.3) zur Einführung von Bruchzahlen verstärkt werden (Carragher, 1993).

Im Bereich des Erweiterns und Kürzens tritt eine weitere Fehlerdimension auf: die sprachliche (Padberg & Wartha, 2017). Die mit den beiden Begriffen bezeichneten mathematischen Operationen auf Brüchen stehen zum Teil im Widerspruch zu ihrer alltagssprachlichen Bedeutung: So entsteht durch Erweitern eines Bruchs ein zu diesem wertgleicher Bruch, dessen Wert insbesondere nicht *größer* ist, worauf die alltagssprachliche Bedeutung des Wortes „erweitern“ hindeuten würde.<sup>2</sup> Ebenso führt Kürzen nicht zu einer verringerten Zahl; auch diese Operation lässt den Wert des Bruchs unverändert.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>erweitern: 1. in seiner Ausdehnung, in seinem Umfang größer werden; 2. weiter, größer werden (Dudenredaktion, o. D. a).

<sup>3</sup>kürzen: 1. kürzer machen; 2.a (selten) verkürzen; 2.b von etwas, was jemandem üblicherweise zusteht, zugeteilt wird, einen Teil wegnehmen; verringern; 3. in kürzere Form bringen (Dudenredaktion, o. D. b).

Eine weitere Fehlerursache ist in unzulässigen Verallgemeinerungen zu finden. So werden Wissen und Algorithmen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen übergeneralisiert (z. B. Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Auf diesen Punkt wird in Abschnitt 1.2.2.2 genauer eingegangen. Allerdings werden nicht nur Algorithmen für den Umgang mit natürlichen Zahlen übergeneralisiert, sondern auch Regeln, die nur für Sonderfälle im Bereich der Bruchzahlen gültig sind (Eichelmann et al., 2012). Ein Beispiel zur Addition zweier Brüche ist die bloße Addition der Zähler unter Beibehalten eines Nenners – also ein Verfahren, das für gleichnamige Brüche korrekt ist, im allgemeinen Fall aber zu falschen Ergebnissen wie  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{3}$  führt (Tatsuoka, 1984). Außerdem sind Übergeneralisierungen von Rechenregeln bezüglich einer Operation auf eine andere bekannt, wie z. B. die Übertragung der Multiplikationsregel auf die Addition ( $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ , Morton, 1924).

### 1.2.2.2 Probleme bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$

Empirische Studien (z. B. Hansen et al., 2015; Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2017) zeigen, dass allgemeines mathematisches Vorwissen und Wissen um natürliche Zahlen – bspw. Größenordnungsvorstellungen natürlicher Zahlen auf dem Zahlenstrahl – für das Erlernen von Brüchen förderlich sind. Dies stellt im unterrichtlichen Kontext – im Hinblick auf heterogenes oder niedriges diesbezügliches Vorwissens – Lehrkräfte vor Herausforderungen beim Vermitteln von Bruchzahlkonzepten.

Ein weiteres Problemfeld eröffnet die Tatsache, dass die rationalen Zahlen mit einigen, aus dem Zahlbereich der natürlichen oder ganzen Zahlen bekannten Konzepten brechen, während andere Konzepte erhalten bleiben (z. B. Padberg & Wartha, 2017; Prediger, 2004; Winter, 1999) – bspw., dass kleinere Zahlen weiter links auf dem Zahlenstrahl stehen. Beim Erlernen von Bruchzahlkonzepten ist es daher notwendig, bestehende Zahlkonzepte zu erweitern und ggf. zu revidieren.<sup>4</sup>

In diesem Zusammenhang zeigt sich auch eine Tendenz, für die natürlichen Zahlen gültige Konzepte fälschlicherweise auf die rationalen Zahlen zu übertragen. Dieser *Natural Number Bias* ist Gegenstand einer Vielzahl an empirischen Untersuchungen (z. B. Ni & Zhou, 2005; Obersteiner, Dooren, Hoof & Verschaffel, 2013; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). In der Literatur werden vier Facetten unterschieden:

1. *Darstellung*. Jede natürliche Zahl hat genau eine symbolische Schreibweise und umgekehrt stehen unterschiedliche Schreibweisen für unterschiedliche Zahlwerte. Im Körper  $\mathbb{Q}$  ist eine Zahl aufgrund der Wertgleichheit erweiterter und gekürzter Brüche bzw. aufgrund der Äquivalenzklassendefinition nicht mehr eindeutig durch eine Schreibweise charakterisiert. Vielmehr gibt es nun (abzählbar) unendlich viele Möglichkeiten, denselben Zahlwert – auch natürlicher Zahlen – symbolisch zu repräsentieren (z. B.  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \dots$ ). Ebenso existieren nun für denselben Punkt auf dem Zahlenstrahl unterschiedliche Schreibweisen. Probleme mit diesem Aspekt zeigen sich bspw. durch Schwierigkeiten, gleichwertige Brüche zu erkennen (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

<sup>4</sup>Wie ein solcher Konzeptwechsel gelingen kann, ist Thema der *Conceptual Change*-Theorie. Für Details siehe bspw. Posner, Strike, Hewson und Gertzog (1982) und explizit für den Bereich der Bruchrechnung bspw. Vamvakoussi und Vosniadou (2004) oder Reinhold (2019).

2. *Dichte*. Durch die Zahlbereichserweiterung von  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Q}$  geht das Konzept eines eindeutigen Nachfolgers verloren: Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen – in deren axiomatischer Definition dieses Konzept noch explizit gefordert wird – liegen die rationalen Zahlen *dicht* in der Menge der reellen Zahlen. Insbesondere liegen zwischen zwei rationalen Zahlen eine (abzählbar) unendliche Anzahl an Brüchen. Probleme mit diesem Konzeptwechsel offenbaren sich in Aufgaben wie „Gib einen Bruch an, der zwischen  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{2}$  liegt“ (Padberg & Wartha, 2017).
3. *Größe*. Des Weiteren zeigen sich Unterschiede im Größenvergleich von natürlichen Zahlen in Gegenüberstellung zu Brüchen. Im Bereich der natürlichen Zahlen ist dieser aufgrund der Kardinalität einfach durchzuführen: Durch Zählen kann die größere Zahl bestimmt werden. Im Bereich der Bruchzahlen liefert diese Strategie nur in dem Sonderfall, dass die zu vergleichenden Brüche denselben Nenner aufweisen, richtige Ergebnisse. In den anderen Fällen muss der Größenvergleich unter Betrachtung beider Komponenten – auf Basis der Anteile, die beide Brüche beschreiben – durchgeführt werden. Der Natural Number Bias zeigt sich hier bspw. in den Fehlvorstellungen, dass der größere Bruch derjenige mit dem größeren Zähler oder dem größeren Nenner ist – unabhängig von der jeweils anderen Komponente. Im ersten Fall wird – wie bei den natürlichen Zahlen – die *Anzahl* der von den Brüchen beschriebenen Teile betrachtet, ohne deren Größe zu betrachten (Padberg & Krueger, 1997).
4. *Operationen*. Auch im Bereich der Operationen unterscheiden sich die beiden Zahlbereiche. So ist das Lösen von Rechenaufgaben unter Rückgriff auf Zählstrategien (mit den Fingern) – im Unterschied zum Zahlbereich der natürlichen Zahlen – in der Bruchrechnung nicht mehr möglich (Wu, 2014). Zudem verlieren Vorstellungen über Operatoren natürlicher Zahlen im Kontext der Bruchzahlen ihre Gültigkeit (Padberg & Wartha, 2017): Eine für den Bereich der natürlichen Zahlen gültige Vorstellung ist, dass Multiplikation vergrößert, während Division verkleinert. Eine Multiplikation mit  $\frac{1}{2}$  verkleinert jedoch, während eine Division durch diesen Bruch ein Ergebnis liefert, das größer ist als die Ausgangszahl. Auch die Interpretation der Multiplikation als wiederholte Addition behält in  $\mathbb{Q}$  nur in Sonderfällen ihre Gültigkeit. Das Konzept der Division mit Rest verschwindet völlig: In  $\mathbb{Q}$  ist jede Division (durch eine Zahl  $\neq 0$ ) restlos.

Der Natural Number Bias zeigt über Fehlvorstellungen beim Erlernen von Bruchzahlkonzepten hinaus auch Auswirkungen bis in das Erwachsenenalter. Als Beispiel dafür diene hier eine empirische Untersuchung von 44 Mathematikerinnen und Mathematikern zum Größenvergleich zweier Brüche von Obersteiner et al. (2013): Sie ergab, dass Aufgaben, in denen eine Natural-Number-Bias-Größenvergleichsfehlvorstellung zu einer korrekten Antwort führt (sog. *kongruente Items*), schneller gelöst wurden als ähnliche Aufgaben, in denen das nicht der Fall war – sofern die zu vergleichenden Brüche gleiche Komponenten aufwiesen.

## Zusammenfassung

Der Erwerb von Bruchzahlkonzepten ist mit Herausforderungen verbunden, die unterschiedliche Quellen haben. So verändert sich oder verschwindet bspw. der Großteil der Zahlaspekte bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen bzw. ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen, während wenige erhalten bleiben. Ohne Berücksichtigung können sich daher (Grund-)Vorstellungen über die natürlichen (bzw. ganzen) Zahlen zu *Fehl*vorstellungen über die rationalen Zahlen entwickeln. Diese als Natural Number Bias in der Literatur benannte Tatsache kann in unterschiedlichen Aspekten des Bruchzahlkonzepts auftreten und sollte im Unterricht bzw. im Schulbuch aufgegriffen und nicht „umschiff“ (Prediger, 2004, S. 1) werden.

## 1.3 Didaktische Zugänge

Von den unterschiedlichen Ansätzen, den in Abschnitt 1.2 beschriebenen Problemen beim Erwerb von Bruchzahlkonzepten entgegenzuwirken, werden in diesem Abschnitt zwei herausgegriffen und näher erläutert: die Nutzung von unterschiedlichen Repräsentationen (Abschnitt 1.3.1) und der Aufbau anschaulicher Grundvorstellungen als Basis für die unterschiedlichen Bruchzahlkonzepte (Abschnitt 1.3.2).

### 1.3.1 Verschiedene Repräsentationsformen

Jegliche Art von Information im Allgemeinen und mathematische Inhalte im Speziellen können auf unterschiedliche Art und Weise vermittelt, erlernt und dargestellt werden. Im Bereich der Bruchrechnung begegnen der Lernerin oder dem Lerner eine Vielzahl an unterschiedlichen Möglichkeiten, Brüche zu repräsentieren, wie im Folgenden zunächst allgemein und anschließend kontextspezifisch zusammengefasst wird.

#### 1.3.1.1 Repräsentationsmodell nach Bruner (1971)

Für die unterschiedlichen Arten, wie Information dargestellt werden kann, identifiziert Bruner (1971) drei Modi der kognitiven Repräsentation:

1. Enaktive Repräsentation – Repräsentation durch Handeln
2. Ikonische Repräsentation – Repräsentation durch Bilder
3. Symbolische Repräsentation – Repräsentation durch (abstrakte) Symbole

Bruner (1971) sieht die drei Modi als Phasen an, die in der kognitiven Entwicklung des Menschen aufeinander aufbauen und sich nach und nach entwickeln. Je nach Entwicklungsstand verlagert sich nach dieser Theorie die Gewichtung der drei Modi beim Darstellen von Information; in verschiedenen Altersstufen wird das Denken und Lernen von einer der drei Formen geprägt.

Dennoch kann es bei der Vermittlung von Inhalten hilfreich sein, alle Modi aufzugreifen und die Inhalte unterschiedlich zu repräsentieren (Lesh et al., 1987b; Reiss & Hammer, 2013). Auch Bruner (1971) erwähnt, dass jede Form der Darstellung die anderen Repräsentationen unterstützen kann. Zudem stellen die Wechselwirkungen zwischen den unterschiedlichen Modi ein Hauptmerkmal des erwachsenen Intellekts dar.

Auf die einzelnen Modi – enaktive, ikonische und symbolische Repräsentation – und deren Zusammenhänge wird im Folgenden näher eingegangen.

### **Enaktive Repräsentationen**

Unter einer enaktiven Repräsentation wird eine Darstellung durch Handlung verstanden. Hauptverwendung der Repräsentationsform ist laut Bruner (1971) die Steuerung der Durchführung von der repräsentierten Handlung. Zusätzlich dient sie Kleinkindern nicht nur der Darstellung, sondern auch der Definition von bspw. Objekten: Objekte werden durch die damit durchgeführte Handlung identifiziert.

### **Ikonische Repräsentationen**

Ikonische Repräsentationen sind bildhaft. Es handelt sich also um (mentale) Bilder, Visualisierungen oder graphische Darstellungen jeglicher Art. Im Menschen entwickelt sich nach Bruner (1971) die ikonische Darstellung beginnend von Bildern, die ein Objekt als Ganzes beschreiben, hin zur Wahrnehmung von Details.

### **Symbolische Repräsentationen**

Symbolische Repräsentationen entwickeln sich als letzte Form der Repräsentation. Bruner (1971) versteht darunter hauptsächlich die Sprache und sieht die symbolische Darstellung als etwas dem Menschen Artspezifisches an. Das Hauptmerkmal symbolischer Repräsentation ist, dass sie strukturiert, hierarchisiert und kategorisiert. Sie beschreibt Prozesse oder Stadien in einer abstrakteren Art und Weise als die anderen Repräsentationsformen. Nichtsdestotrotz fußt auch die symbolische Darstellung auf Erfahrungen in der Realwelt. Im Vergleich zu den anderen Darstellungsformen arbeitet sie jedoch schneller.

### **Repräsentationswechsel**

Obwohl Bruner (1971) die Methode, Informationen durch Bilder zu repräsentieren, als relativ unabhängig vom Handeln beschreibt, sind für ihn enaktive Darstellungen eine notwendige Stütze für ikonische Repräsentationen. Insbesondere ist eine Trennung zwischen enaktiv und ikonisch nie vollständig zu sehen. Auf der anderen Seite bildet die ikonische Repräsentation die Grundlage für die symbolische. Sie schließt somit die „Lücke“ zwischen Handlung und Sprache. Beim Übergang von ikonischer zu symbolischer Repräsentation kann letztere die Vorstellungsbilder der ersteren entweder unterdrücken oder anpassen. Interaktionen zwischen enaktiver und symbolischer Darstellung werden in dieser Theorie als schwierig erachtet.

### 1.3.1.2 Repräsentationsmodell nach Lesh (1979)

Lesh (1979) erweitert die drei Ebenen der Repräsentation nach Bruner (1971, s. Abschnitt 1.3.1.1) und adaptiert sie für den Bereich des mathematischen Problemlösens. Sein Repräsentationsmodell wird vom Rational Number Project aufgegriffen, auf die Bruchzahlen angewandt und empirisch untersucht (Behr et al., 1983; Lesh et al., 1987b, s. Abschnitt 1.3.1.3 für empirische Ergebnisse zu Repräsentationen von Bruchzahlen).

#### Enaktive Repräsentationen

Der enaktive Repräsentationsmodus wird von Lesh (1979) für den mathematischen Bereich rekonzeptualisiert zu *Skripten*, die auf (Handlungs-)Erfahrungen basieren. In diesen Skripten wird Information oder Wissen durch Ereignisse in der Realwelt vermittelt. Diese können anschließend auf andere Kontexte übertragen und verallgemeinert werden.

#### Ikonische Repräsentationen

In diesem Repräsentationsmodell umfassen ikonische Repräsentationen *statische Bilder, Abbildungen oder Diagramme*. Darüber hinaus zählen hierzu auch *manipulierbare Modelle*. Diese Modelle grenzen sich durch ihre Abstraktheit von der enaktiven Repräsentation ab: Die Teile der Modelle weisen im Alltag keine direkte Bedeutung auf; die Modelle als Ganzes können aber in unterschiedlichen Situationen eingesetzt werden. Obwohl hier handelnd vorgegangen wird, ordnet Lesh diese *manipulatives* den ikonischen Repräsentationen zu, da sie – wie Abbildungen – als Bilder verinnerlicht werden.

#### Symbolische Repräsentationen

Lesh (1979) differenziert explizit zwischen gesprochener und geschriebener symbolischer Repräsentation. In beiden Fällen wird darunter nicht nur natürliche Sprache, sondern auch kontextspezifische Fachsprache und formale Sprache verstanden – wie sie z. B. im Zusammenhang mit Programmierung oder Logik auftritt.

#### Repräsentationswechsel

Bei Repräsentationswechseln kann unterschieden werden zwischen *Übersetzungen* einer Darstellungsform in eine andere (intermodaler Transfer) und *Umwandlungen* innerhalb einer Repräsentationsart (intramodaler Transfer), wobei beide Transfertypen voneinander abhängig sind. Nach Lesh et al. (1987b) sind derartige Wechsel zwischen Darstellungsformen unumgänglich, da viele Aufgaben per se multimodal im Hinblick auf Repräsentationen sind.

Die Kompetenz, Darstellungswechsel durchzuführen, zählt zum Verständnis mathematischer Konzepte, das von Lesh et al. (1987b) in Bezug auf Repräsentationssysteme wie folgt definiert wird:

1. Die Kompetenz, die Konzepte aus mehreren, unterschiedlichen Repräsentationssystemen zu erkennen.
2. Die Kompetenz, innerhalb eines Repräsentationssystems flexibel umwandeln zu können.
3. Die Kompetenz, eine Darstellung akkurat in eine andere Repräsentationsform zu übersetzen.

Abbildung 1.1 zeigt das Repräsentationsmodell mit allen Übersetzungen und Umwandlungen, wie es im Rational Number Project genutzt wird (z. B. Behr et al., 1983), kategorisiert nach den drei Repräsentationsebenen gemäß Bruner (1971). Es ist zu erwarten, dass die Lernenden dieses komplexe Übersetzungsnetzwerk nur nach und nach aufbauen werden; Unterstützung kann dabei von Seiten der Lehrenden, der Lernumgebung oder dem Schulbuch durch u. a. Vereinfachen, Verbildlichen, Konkretisieren und Einbetten in vertraute Situationen gegeben werden (Lesh et al., 1987b). Probleme beim Repräsentationswechsel können über „Umwege“ über andere Darstellungsformen, also das transitive Umwandeln über weitere Darstellungsformen, gelöst werden (s. Abbildung 1.1).

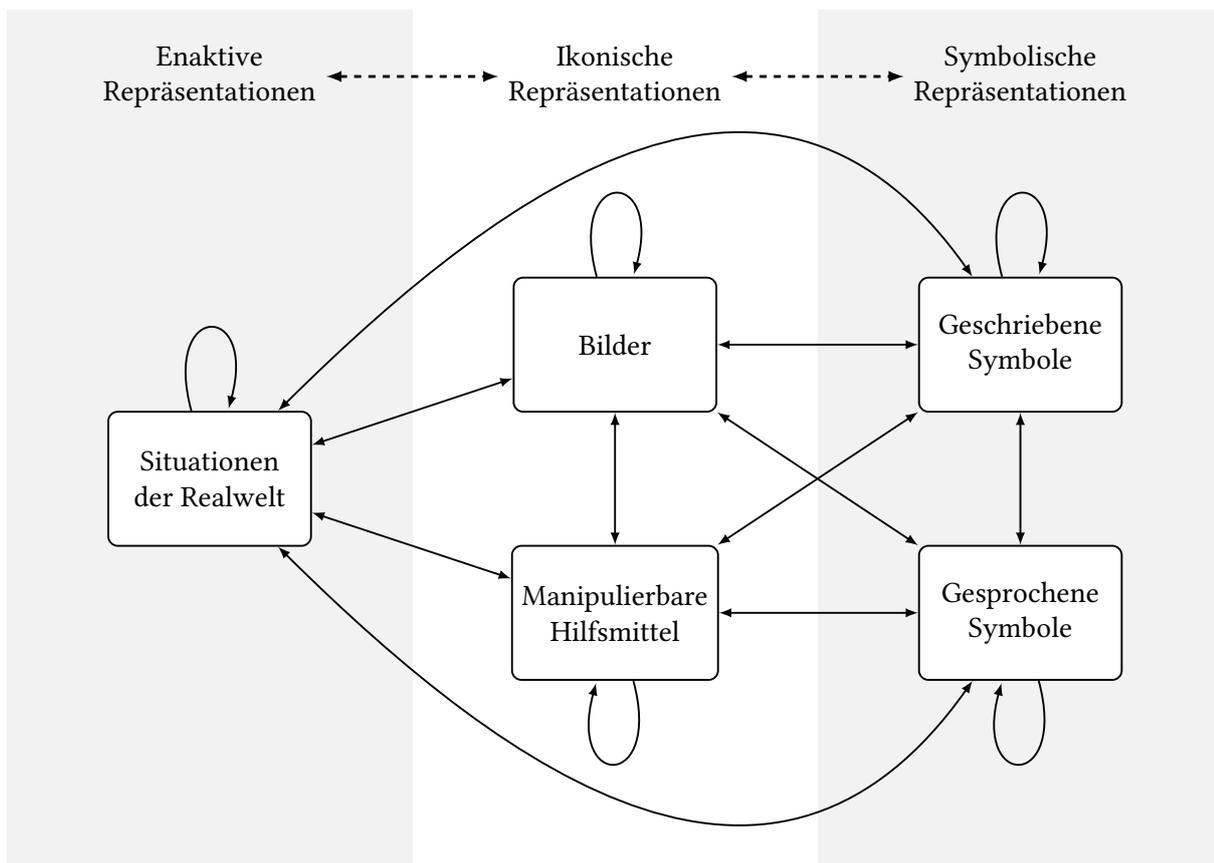


Abbildung 1.1. Repräsentationsmodell des Ration Number Projects, nach Behr, Lesh, Post und Silver (1983); kategorisiert nach den drei Repräsentationsebenen gemäß Bruner (1971).

### 1.3.1.3 Repräsentationen von Bruchzahlen

In diesem Abschnitt werden die abstrakten Beschreibungen der Repräsentationsformen aus den vorherigen Abschnitten im Kontext der Bruchrechnung konkretisiert. Dazu werden typische Darstellungen zu den einzelnen Modi beschrieben.

#### Enaktive Bruchdarstellungen

Handlungen, die Brüche – im wörtliche Sinne – begreifbar machen, treten immer dann auf, wenn aktiv gerecht geteilt und verteilt wird. Typische Beispiele sind das gerechte Aufteilen von runden Pizzen, Kuchen und Torten oder rechteckiger Schokolade. Derartige Situationen sind geeignet, um sie digital umzusetzen (vgl. Abbildung 1.2). Sie haben zudem den Vorteil, dass sie leicht auf statische ikonische Darstellungen – Kreisdiagramme bzw. Rechteckdiagramme – übertragen werden können.



Abbildung 1.2. Digitale Umsetzungen enaktiver Bruchrepräsentationen in ALICE:Bruchrechnen (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a).

#### Ikonische Repräsentation

Neben der Lesh'schen Unterscheidung in statische und manipulierbare ikonische Repräsentationen ist es im Kontext von Bruchzahlen sinnvoll, zusätzlich zwischen diskreten oder zählbaren und kontinuierlichen ikonischen Darstellungen zu unterscheiden.

*Diskrete* Visualisierungen (vgl. Abbildung 1.3) nehmen meist eine der folgenden beiden Ausprägungen an: Entweder steht ein geometrisches Objekt, das in gleich große Teile unterteilt ist, für ein Ganzes, oder es repräsentieren mehrere diskrete Objekte zusammengenommen ein Ganzes (Dienes, 1967). Die Anzahl der Teile, die das geometrische Ganze ausfüllen, entspricht im ersten Fall dem Nenner des Bruchs, die Anzahl der – z. B. farblich – markierten Teile dem Zähler. Zu typischen Beispielen zählen Kreis- und Rechteckdiagramme, aber auch der Zahlenstrahl mit gegebener Einteilung. Im zweiten Fall kann die Gesamtzahl der Objekte als Nenner und die Zahl der davon – bspw. durch Umrandung – hervorgehobenen Objekte als Zähler aufgefasst werden. In beiden Fällen kann ein diskret visualisierter Bruch stets durch zweifaches Abzählen bestimmt werden.

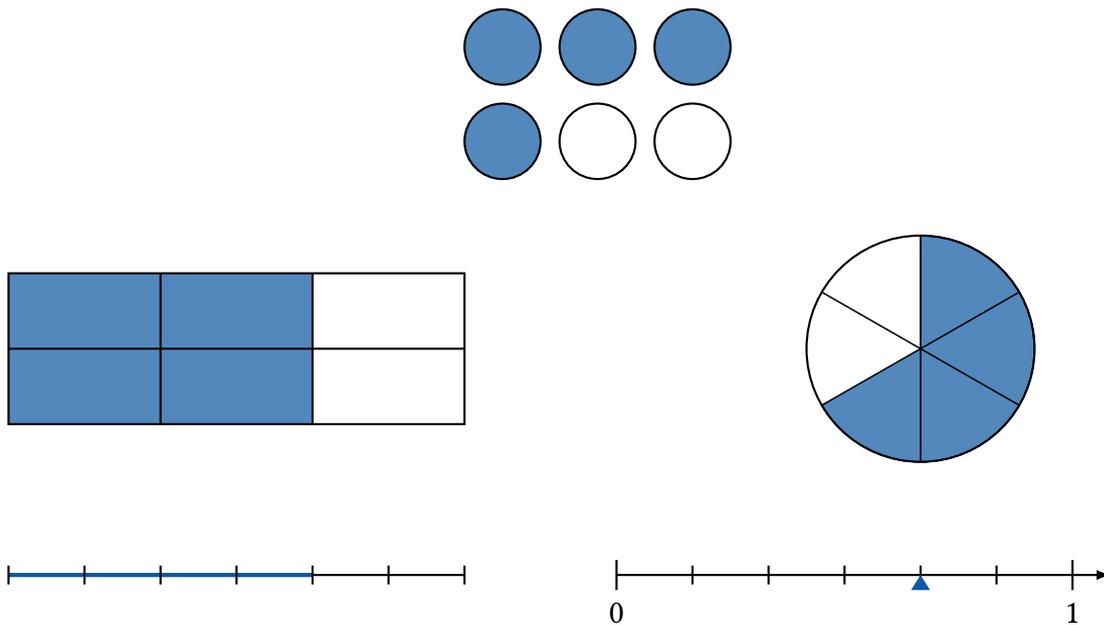


Abbildung 1.3. Diskrete Visualisierungen des Bruches  $\frac{4}{6}$ : Als Teilmenge einer diskreten Menge (vier von sechs Kreisen, oben), als markierte Teile eines unterteilten geometrischen Objekts (Rechteck und Kreis, Mitte; Strecke, unten links) und als Punkt auf dem unterteilten Zahlenstrahl (unten rechts).

Im Gegensatz dazu weisen *kontinuierliche* Visualisierungen von Brüchen keine Unterteilungen auf. Sind kontinuierlich dargestellte Brüche zu bestimmen oder ist eine kontinuierliche Visualisierung eines Bruchs zu erstellen, so ist dies nicht ohne Weiteres durch Zählen möglich. Die Lösung einer solchen Aufgaben muss vielmehr auf intuitive Art und Weise erfolgen, wie Carraher (1993) argumentiert: In seinem *dualen Repräsentationsmodell* dient ein Balken der Länge 1 als Referenzobjekt zur Bestimmung eines ebenfalls als Balken dargestellten Bruchs: Die Länge des Referenzbalkens steht für ein Ganzes; die Relation von der Länge des zweiten Balkens zur Referenzlänge erlaubt die Bestimmung der Bruchzahl (vgl. Abbildung 1.4, links). Das Modell beinhaltet zudem einen Zahlenstrahl, der unter den Balken platziert wird und so die Länge der Balken bestimmen lässt. Diese Darstellungsform lässt sich „de-arithmetisieren“ (Carraher, 1993, S. 285) – also zu einer kontinuierlichen umwandeln – indem auf den Zahlenstrahl verzichtet wird (vgl. Abbildung 1.4, rechts). Da keiner der beiden Balken Unterteilungen aufweist, ist die entstehende Darstellungsform kontinuierlich. Die Balkenlängen sind nicht mehr an die Einheit des Zahlenstrahls gebunden. Damit ist der Repräsentationswechsel nur intuitiv auf Basis des Verhältnisses der in beiden dargestellten Balken möglich.

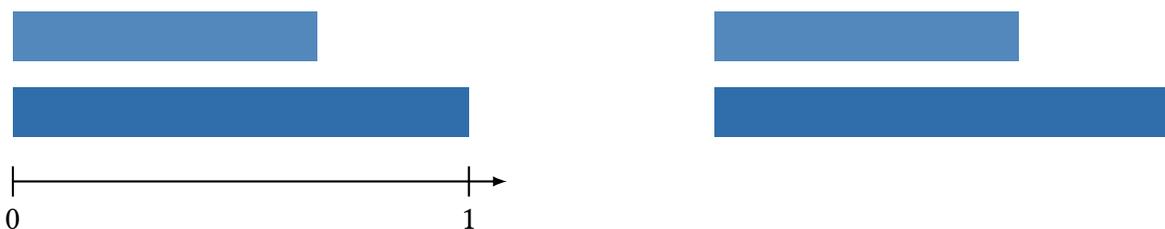


Abbildung 1.4. Der Bruch  $\frac{4}{6}$  im dualen Repräsentationsmodell nach Carraher (1993, links) und zugehörige kontinuierliche Darstellung (rechts).

Für echte Brüche kann der Referenzbalken räumlich in die Darstellung des Bruchs integriert werden (vgl. Abbildung 1.5, links). Auf ähnliche Weise entstehen kontinuierliche Darstellungsformen aus diskreten, indem die im geometrischen Ganzen gegebenen Unterteilungen entfernt werden. Referenz für das Ganze ist nun nicht mehr das Objekt als Summe seiner gleich großen Teile, sondern das Objekt als Ganzes (vgl. Abbildung 1.5, rechts).

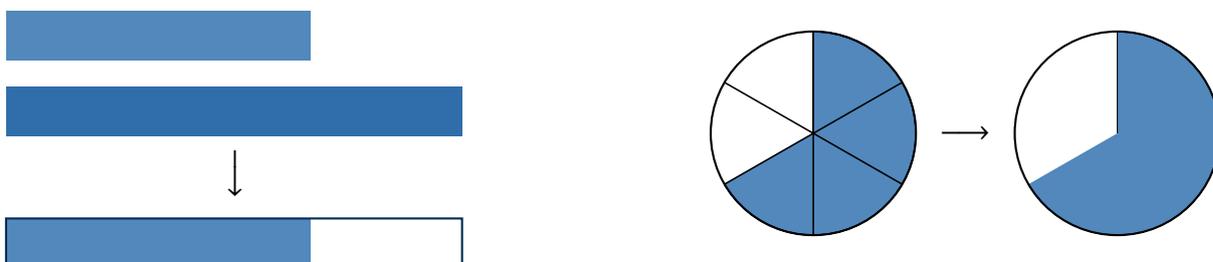


Abbildung 1.5. Transformation der de-arithmetisierten Repräsentation nach Carraher (1993) in ein kontinuierliches Balkendiagramm (links), Kontinuierung von diskreten Visualisierungen am Beispiel eines Kreisdiagramms (rechts).

Auch ein Zahlenstrahl kann als kontinuierliche Darstellung verwendet werden, indem nur zwei Werte – bspw. der erste und letzte Wert – auf dem Zahlenstrahlausschnitt markiert werden (vgl. Abbildung 1.6).



Abbildung 1.6. Kontinuierliche Visualisierungen des Bruches  $\frac{4}{6}$  als Punkt auf dem Zahlenstrahl.

In Untersuchungen des Rational Number Projects mit 77 Schülerinnen und Schülern treten besonders viele Fehler in Zusammenhang mit Darstellungen am Zahlenstrahl auf (Behr et al., 1983). Zusätzlich erwiesen sich kontinuierliche Aufgabenstellungen schwieriger als zählbare. Diese letzteren Ergebnisse wurden durch eigene Untersuchungen bestätigt (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2017).

Als Beispiele für *manipulierbare ikonische Repräsentationen* nennen Lesh, Post und Behr (1987a) Cuisenairestäbe, Rechenblöcke oder Bruchplättchen. Cuisenairestäbe sind (Holz-)Stäbchen von unterschiedlicher Länge. Stäbchen derselben Länge stehen für die selbe natürliche Zahl (bspw.  $1 \hat{=} 1 \text{ cm}$ ,  $2 \hat{=} 2 \text{ cm}$ ); diese Zuordnung wird durch Farben unterstützt. Um Bruchzahlen mit diesem Material einzuführen, werden zwei Stäbe nebeneinander gelegt und ihre Längen verglichen. Der erste Stab steht für den Zähler, der zweite für den Nenner des dargestellten Bruchs.

Bei der Repräsentation durch Bruchplättchen ist eine rechteckige oder kreisförmige Platte von fester Größe gegeben, die für das Ganze steht. Zusätzlich sind im Modell entsprechend große Rechtecke bzw. Kreissegmente gegeben, welche die Stammbrüche darstellen – jeweils ausreichend viele, um das Ganze mit Plättchen derselben Größe aufzufüllen (s. Abbildung 1.7).

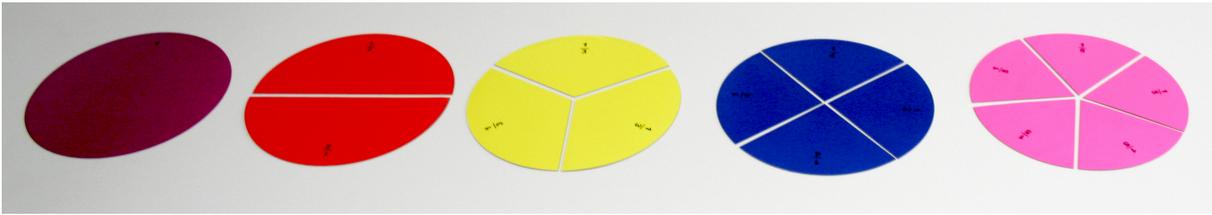


Abbildung 1.7. Manipulierbares Modell: runde Bruchplättchen zu den Nennern 1 bis 5.

Die oben erwähnten Arbeitsmittel können digital umgesetzt werden und so in computerbasierten Lernumgebungen und interaktiven Schulbüchern zur Anwendung kommen. Die entstehenden *virtuellen manipulierbaren Modelle* vereinfachen den Einsatz dieser Repräsentationsform im Unterricht und regen Lehrerinnen und Lehrer dazu an, auch die analogen Pendanten häufiger einzusetzen (Lesh et al., 1987a). Die Meta-Analyse von Moyer-Packenham und Westenskow (2013) berichtet im Bereich der Bruchrechnung höheren Lernerfolg bei Verwendung von virtuellen Darstellungsformen im Vergleich zu anderen Instruktionmethoden (mittlere Effektstärke). Insbesondere zeigte sich die Verwendung von virtuellen Modellen über alle betrachteten mathematischen Inhaltsbereiche überlegen gegenüber dem Einsatz von analogen manipulierbaren Modellen (kleine Effektstärke). Allerdings erzielte die Verwendung beider Arten zusammen bessere Ergebnisse als der alleinige Einsatz computerbasierter Modelle (mittlere Effektstärke). Zudem gibt es Evidenz, dass die Verwendung computerbasierter Darstellungsformen den Einfluss von externen Variablen auf den Lernerfolg im Bereich der Bruchrechnung mindern kann (Moyer-Packenham & Bake, 2014). Einen weiteren Vorteil virtueller Modelle sehen Zbiek, Heid, Blume und Dick (2007) darin, dass computerbasierte Modelle so programmiert werden können, dass ihre außermathematischen Einsatzmöglichkeiten eingeschränkt werden, um so Lernende am Lerngegenstand zu halten. Allerdings darf bei diesen Einschränkungen die mathematische Korrektheit des Modells nicht beeinflusst werden (Zbiek et al., 2007).

Neben diesen digitalen Umsetzungen analoger Darstellungsmöglichkeiten können durch den Einsatz von Computern neue (manipulierbare) Repräsentationen entstehen (Kaput, 1986). So ist bspw. möglich, viele statische ikonische Repräsentationen in dynamische umzuwandeln: Die statische Darstellung kann durch Programmierung um Interaktivität erweitert werden, so dass die Visualisierung nicht nur betrachtet oder durch Zeichnen des Endzustandes erstellt werden kann, sondern durch direkte Interaktion mit der Repräsentation verändert und erforscht werden kann. Umsetzbar ist bspw. eine Applikation, die ein unterteiltes geometrisches Ganzes anzeigt, dessen Teile durch Interaktion durch die Nutzerinnen und Nutzer direkt gefärbt oder entfärbt werden. Zusätzlich können durch den Einsatz von Computern mehrere Darstellungen effizienter erzeugt werden als auf analoge Weise (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013).

### Symbolische Repräsentation

Bei der symbolischen Repräsentation kann zwischen der *Aussprache* – der gesprochenen symbolischen – und der *Schreibweise* als Bruchzahl – der geschriebenen symbolischen Darstellung – von Brüchen unterschieden werden (vgl. Tabelle 1.1). Für die Aussprache ist es von Nöten, die Bildungsweise der Bezeichnung für den Nenner sowie die Vokabeln

für die Sonderfällen „Halbe“ und „Drittel“ zu kennen. Die *quasikardinale* Schreibweise – bspw. „8 Drittel“ – fasst das Nennerelement der gesprochenen symbolischen Darstellung auf und behält die symbolische Notation des Zählers bei. So wird der zum Nenner gehörige Stammbruch als Einheit verwendet (Padberg & Wartha, 2017).

Tabelle 1.1

*Unterschiedliche symbolische Darstellungen derselben Bruchzahl.*

Symbolische Notation	Quasikardinale Schreibweise	Aussprache
$\frac{8}{3}$	8 Drittel	„Acht Drittel“
$\frac{24}{9}$	24 Neuntel	„Vierundzwanzig Neuntel“
$2\frac{2}{3}$	2 Ganze und 2 Drittel	„Zwei zwei Drittel“

### Repräsentationswechsel

Zu einem umfassenden Zahlverständnis zählt nach Roche (2010) nicht nur das Wissen um die unterschiedlichen Repräsentationen der Zahlen, sondern auch die Kompetenz, die verschiedenen Darstellungsformen agil ineinander überführen zu können. Nach Duval (2006) ist sogar jedwede mathematische Arbeit ohne unterschiedliche Repräsentationsformen unmöglich; mathematische Aktivitäten beinhalten stets Übersetzungen aus ihrer Natur heraus.

Lesh et al. (1987b) betonen dies auch im Kontext der rationalen Zahlen: Die Kompetenz, sicher innerhalb einer Darstellungsform und zwischen unterschiedlichen Darstellungen zu transformieren, ist Teil davon, Bruchzahlkonzepte zu verstehen (s. Abschnitt 1.3.1.2). Zudem beobachteten sie in empirischen Untersuchungen, dass Schülerinnen und Schüler symbolisch repräsentierte Items unter Verwendung von gesprochenen Worten *und* schriftlichen Notizen lösten, also von selbst Repräsentationswechsel vollzogen.

Computerbasierte Lernumgebungen und digitale Schulbücher können hierbei hilfreich sein, da sie es den Lernenden ermöglichen, die Zusammenhänge zwischen den Repräsentationsformen zu explorieren: Die Auswirkungen von Änderungen in einer Form auf eine andere können sofort angezeigt werden (Lesh et al., 1987a; Lew, 2016; Martin & Schwartz, 2005; Yerushalmy, 2016).

### 1.3.2 Anschauliche Grundvorstellungen

Der Begriff der *mathematischen Grundvorstellungen* geht in seiner heutigen Interpretation zu großen Teilen auf vom Hofe (1995) zurück. Sie können als Bindeglied zwischen der (Anschauungs-)Welt des Lernenden und den mathematischen Inhalten verstanden werden: Auf der einen Seite stellen mathematische Grundvorstellungen also diejenigen mentalen Modelle zu mathematischen Inhalten dar, die Schülerinnen und Schüler *haben*; auf der anderen Seite stehen sie für die Modelle, die Schülerinnen und Schüler in diesem

Kontextbereich aus didaktischer Sicht *haben sollen*. In dieser zweiten, normativen Sichtweise ist für die Vermittlung von mathematischen Konzepten also die Auswahl geeigneter Anknüpfungspunkte aus der Realwelt der Lernenden bedeutsam. Hilfreich ist es zudem, Repräsentationen aufzubauen, welche den Grundvorstellungen entsprechen. So kann durch den Aufbau anschaulicher Grundvorstellungen im Unterricht der Kompetenzerwerb unterstützt werden. Dies kann auf Grundlage der Arbeit von Schülerinnen und Schülern mit konkreten Modellen gelingen (Padberg & Wartha, 2017; vom Hofe, 1995).

### 1.3.2.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

Für die unterschiedlichen, im Bereich der Bruchrechnung relevanten Grundvorstellungen finden sich in der Literatur verschiedene Bezeichnungen. So spricht bspw. das Rational Number Project von *Subkonstrukten* (Behr et al., 1983), während Winter (1999) ähnliche Konzepte als *Gesichter* bezeichnet. Zudem variiert die Anzahl der aufgegriffenen Aspekte bei den verschiedenen Autoren. Im Folgenden werden einige Grundvorstellungen näher erläutert, die aus unterschiedlichen Arbeiten zusammengetragen sind. Deren Berücksichtigung während der Vermittlung grundlegender Bruchzahlkonzepte fördert das Zahlverständnis und trägt so zur Verminderung der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Lernschwierigkeiten bei.

#### Grundvorstellungen zum Bruchzahlkonzept

Die hier betrachteten Grundvorstellungen sind: Bruch als *Anteil* (mit der Unterscheidung in *Anteil eines Ganzen* und *Anteil mehrerer Ganzer*), Bruch als *Maßzahl*, Bruch als *lineare Koordinate auf dem Zahlenstrahl*, Bruch als *Operator*, Bruch als *Quotient*, und die *Quasikardinalität* von Bruchzahlen. Diese einzelnen Subkonstrukte sind dabei nicht disjunkt, sondern weisen zum Teil erhebliche Überlappungen auf (Padberg & Wartha, 2017). Das Teil-Ganzes-Konzept wird von den Grundvorstellungen als das fundamentale Subkonstrukt rationaler Zahlen erachtet (Behr et al., 1983; Padberg & Wartha, 2017). Es beschreibt Brüche als Anteile von nicht näher spezifizierten Ganzen. Diese Interpretation hängt direkt mit der Kompetenz zusammen, dieses Ganze in gleich große Teile zu partitionieren (Behr et al., 1983). Padberg und Wartha (2017) unterscheiden innerhalb des Subkonstrukts die Teilaspekte *Teil eines Ganzen* und *Teil mehrerer Ganzer*, also bspw.  $\frac{2}{3}$  von *einem* Kuchen bzw.  $\frac{1}{3}$  von *zwei* Kuchen. Im Teilaspekt *Teil eines Ganzen* wird ein Objekt – bspw. eine Tafel Schokolade, ein Rechteck oder eine Zahl – als Ganzes interpretiert, das anschließend in *gleich große Teile* partitioniert wird. Die Anzahl der gleich großen Teile, in die das Ganze geteilt wird, entspricht dem Nenner des Bruchs. Von diesen gleich großen Teilen wird anschließend die Anzahl genommen, die dem Zähler entspricht. In der Anteilsberechnung *Bruch von Ganzem* führt dies zunächst zur Division des Ganzen durch den Nenner des Bruchs – dem Partitionieren – und anschließend zur Multiplikation mit dem Zähler. Einen Sonderfall stellt die Situation dar, in der das Ganze eine Menge an diskreten Objekten ist: Hier ist die Partitionierung bereits gegeben und der erste Schritt entfällt. Demgegenüber sind im Falle des *Teil mehrerer Ganzer*-Aspekts mehrere Objekte zum Ganzen zusammenzunehmen. Diese sind – im Unterschied zum diskreten Fall im *Teil eines Ganzen*-Aspekts – für den Bruch in kleinere Stücke aufzuteilen, bevor die entsprechende Anzahl von diesen Teilen genommen

wird. Dieser Aspekt führt in der Anteilsberechnung zu einer Vertauschung der Operationen: Zuerst wird das Ganze mit dem Zähler des Bruchs multipliziert und anschließend durch den Nenner dividiert. Beide Teilaspekte sind gleichwertig und müssen als solches erarbeitet werden (Padberg & Wartha, 2017).

Im Zusammenhang mit einer Maßeinheit treten Brüche als *Maßzahlen* auf (z. B.  $\frac{3}{4}$  m). Durch den klaren Anwendungsbezug bieten sich nach Padberg (2009) Anknüpfungspunkte zu den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler und somit Vorteile für die Einführung der Bruchzahlen.

Das Subkonstrukt *Bruch als lineare Koordinate auf dem Zahlenstrahl* scheint zunächst eine *Bruchrepräsentation* zu sein (siehe auch Abschnitt 1.3.1). Allerdings kann es als Subkonstrukt angesehen werden, das über das Teil-Ganzes-Konzept hinausgeht (Gersten, Schumacher & Jordan, 2016), da es sich maßgeblich von anderen Repräsentationen unterscheidet (Behr et al., 1983; Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988). So benötigt das Subkonstrukt (Zahl-)Zeichen, um die Einheit (das *Maß* des Ganzen) sowie den Bruch zu kennzeichnen, wie Abbildung 1.8 verbildlicht: Ohne die Beschriftungen der 0 sowie der 1 hat die Markierung keine eindeutige Zahlbedeutung; die numerische Bedeutung der Markierung ist abhängig von den Positionen der beiden Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Andere ikonische Darstellungen hingegen kommen ohne die Verwendung von Symbolik aus. Die Synthese aus symbolischer und ikonischer Information charakterisiert den Zahlenstrahl als Subkonstrukt (Bright et al., 1988). Allgemein betrachtet stellen Brüche lineare Koordinaten bzw. Punkte auf dem Zahlenstrahl dar (Behr et al., 1983). Diese Sichtweise betont, dass die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen sind.



Abbildung 1.8. Veränderung der Bedeutung einer Markierung auf dem Zahlenstrahl in Abhängigkeit von den Positionen der Zahlen 0 und 1.

Als *Operator* betrachtet beschreibt ein Bruch  $\frac{z}{n}$  eine Funktion, die eine Eingabe auf das  $\frac{z}{n}$ -fache skaliert. Insbesondere gibt die Funktion bei Eingabe  $n$  die Zahl  $z$  zurück. Angewendet auf eine Länge wird diese zunächst um das  $z$ -fache gestreckt und anschließend mit Faktor  $n$  gestaucht, oder – dazu gleichwertig – zunächst mit Faktor  $n$  gestaucht, und dann um das  $z$ -fache gestreckt. Aus dieser Perspektive werden Brüche folglich als dynamisches Konzept verstanden, das einen Prozess beschreibt – im Gegensatz zum Teil-Ganzes-Subkonstrukt, in dem der Fokus statisch auf dem Ergebnis des Prozesses der Anteilsbestimmung liegt (Padberg & Wartha, 2017). Die Sichtweise, Brüche als Operator zu interpretieren, kann beim Erlernen der Operationen Erweitern und Kürzen von Nutzen sein (Behr et al., 1983): Gleichwertige Brüche sind Operatoren bzw. Funktionen, die bei gleichem Ausgangswert bzw. gleicher Eingabe dieselben Ergebnisse liefern.

Der Bruch  $\frac{z}{n}$  kann als *Division* zweier Zahlen  $z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$  interpretiert werden:  $z : n = \frac{z}{n}$ . Diese Vorstellung kann für die Einbettung der natürlichen Zahlen in die rationalen Zahlen hilfreich sein, um die Gleichwertigkeit von bspw.  $\frac{6}{2} = 6 : 2$  und der natürlichen Zahl 3 zu

motivieren. Diese Sichtweise weist einige Überlappungen mit dem Teilaspekt *Teil mehrerer Ganzer* auf, da sie auf ähnlichen Verteilsituationen basiert.

Brüche können in Analogie zur Nutzung von natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen als *quasikardinal* aufgefasst werden: Schreibt man den Bruch  $\frac{z}{n}$  als  $z$   $n$ -tel, so beschreibt der Bruch eine Größe mit Einheit  $\frac{1}{n}$  und Maßzahl  $z$ . Diese Sichtweise ist im Größenvergleich gleichnamiger Brüche hilfreich und weiterführend bei der Addition oder Subtraktion: So scheint bspw. die Größenrelation  $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$  leicht ersichtlich, wenn man sie in quasikardinaler Schreibweise wiedergibt: 3 Fünftel sind weniger als 4 Fünftel (Padberg & Wartha, 2017).

### Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen

Die im Bereich des *Erweiterns und Kürzens* verortete Grundvorstellung des *Verfeinerns bzw. Vergrößerns einer Einteilung* beschreibt die Operationen in ihrer ikonischen Bedeutung (Malle, 2004): Das Erweitern eines Bruches bedeutet, dass die Einteilung einer geeigneten, zählbaren Visualisierung feiner wird – unter Beibehaltung der Eigenschaft, dass alle Stücke gleich groß sind. Die Gleichwertigkeit des erweiterten und des ursprünglichen Bruches wird offensichtlich, da die markierte Fläche unverändert bleibt; das algorithmische Vorgehen auf der symbolischen Ebene kann durch einen Repräsentationswechsel erschlossen werden. Auf analoge Weise kann das Kürzen als Vergrößern der Partitionierung verstanden und als Umkehroperation motiviert werden (vgl. Abbildung 1.9).

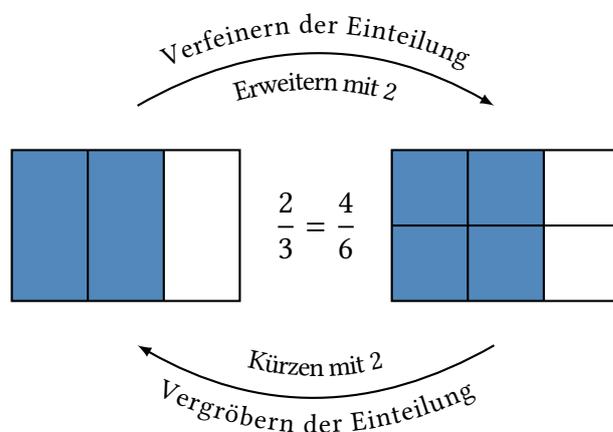


Abbildung 1.9. Erweitern und Kürzen als Verfeinern respektive Vergrößern einer Einteilung am Beispiel  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ .

Des Weiteren können Schülerinnen und Schüler über diese Grundvorstellung die Einsicht gewinnen, dass die Schreibweise für Bruchzahlen nicht eindeutig ist. Dies kann auch über das Beschriften derselben Zahl mit unterschiedlichen Brüchen am Zahlenstrahl unterstützt werden (Malle, 2004).

### Grundvorstellungen zum Größenvergleich

Auch im Bereich des Größenvergleichs ist es sinnvoll, auf der Anschauungsebene zu argumentieren. Idealerweise erfolgt der Größenvergleich zu großen Teilen basierend auf einem intuitiven Größenverständnis der beteiligten Bruchzahlen. Diese Intuition muss

auf einer holistischen Interpretation der Zahlsymbole, nicht aufgeteilt in Zähler und Nenner, fußen und kann bspw. durch geeignete Visualisierungsaufgaben gefördert werden (vgl. Abschnitt 1.3.1.3). Daher empfehlen Padberg und Wartha (2017), den Größenvergleich anschaulich einzuführen und unterschiedliche Strategien zum Größenvergleich zu thematisieren. Hierzu zählt die Behandlung der Sonderfälle, wenn beide Brüche gleiche Komponenten aufweisen, und die Einführung transitiver Vergleiche mithilfe einer Vergleichszahl (einem *benchmark*), wie etwa mit  $\frac{1}{2}$ , 1 oder anderen natürlichen Zahlen (Clarke & Roche, 2009; Post, Behr & Lesh, 1986). Die immer anwendbare Strategie, Zähler bzw. Nenner der zu vergleichenden Brüche anzugleichen, sollte zuletzt und nach gebührend langer intuitiven Behandlung des Vergleichs eingeführt werden. Ikonische Repräsentationsformen scheinen besonders geeignet, um die einzelnen Strategien zu motivieren. Außerdem kann bei Schwierigkeiten mit symbolischen Aufgabenstellungen ein Wechsel in ikonische Darstellungen Unterstützung bieten (Padberg & Wartha, 2017).

### 1.3.2.2 Grundvorstellungen im Repräsentationswechsel

Anschauliche Grundvorstellungen sind eng mit den verschiedenen Arten der Repräsentation verwoben. Einerseits dienen anschaulich repräsentierte Zahlen nicht nur der Illustration, sondern bieten auch Möglichkeiten, Grundvorstellungen aufzubauen. Repräsentationen können also als Basis von Zahlverständnis bezeichnet werden (Padberg & Wartha, 2017).

Andererseits können anschauliche Grundvorstellungen für die Übergänge zwischen den mannigfaltigen Zahldarstellungen hilfreich sein. Insbesondere zwischen der symbolischen und der ikonischen Repräsentationsform spielen sie nach Padberg und Wartha (2017) eine wichtige Rolle: Eine Übersetzung einer Bruchzahl in eine Visualisierung kann nur dann gelingen, wenn Grundvorstellungen zur Bedeutung des Nenners und Zählers im Sinne des Teil-Ganzes-Konzepts aufgebaut wurden. Abbildung 1.10 zeigt die vermittelnde Rolle, die anschauliche Grundvorstellungen zwischen den Repräsentationsformen spielen.

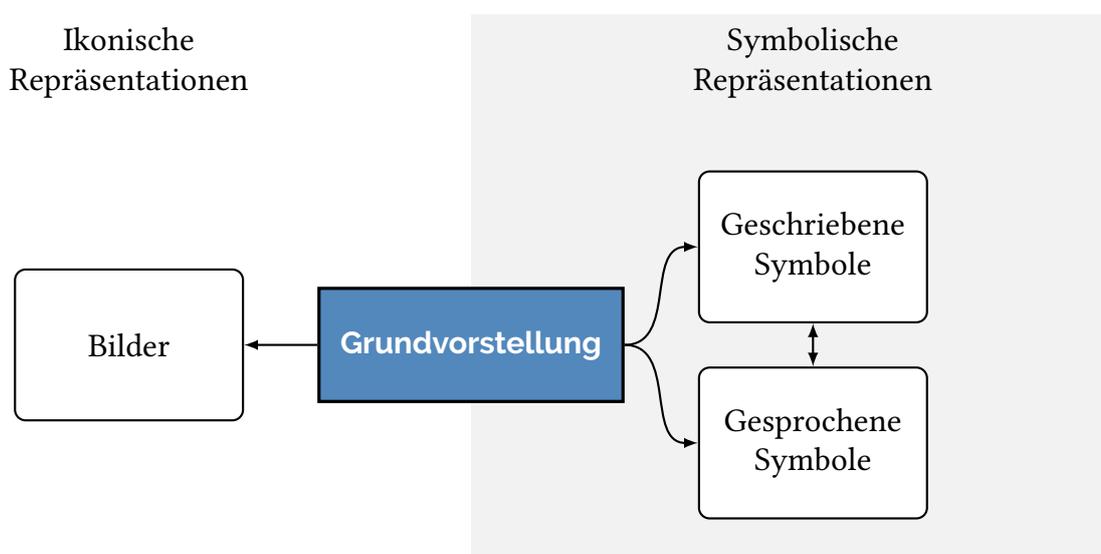


Abbildung 1.10. Grundvorstellungen als Übersetzungshilfe zwischen Repräsentationsformen von Brüchen (nach Padberg & Wartha, 2017, S. 1).

## Zusammenfassung

Das Bruchrechnen stellt einen anspruchsvollen Lerngegenstand dar, der sich durch eine Vielzahl an Subkonstrukten und Darstellungsmöglichkeiten auszeichnet (Behr et al., 1983; Padberg & Wartha, 2017). Sowohl die unterschiedlichen Subkonstrukte als auch die variablen Repräsentationsarten müssen für ein tragfähiges Zahlverständnis nicht nur für sich verstanden werden, sondern auch in ihren Interaktionen erfasst werden. Im Bereich der Darstellungen zählt hierzu auch die Kompetenz, innerhalb und zwischen den unterschiedlichen Repräsentationen transformieren zu können (Lesh et al., 1987b; Roche, 2010).

Unterricht und Lehr-/Lernmaterial sollte daher die einzelnen Aspekte sowie Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen thematisieren. Die Lehrkraft ebenso wie die Erstellerin bzw. der Ersteller des Materials sollte zudem um die Schwierigkeiten wissen, die Schülerinnen und Schüler mit der Thematik haben. Dazu zählen u. a. die Grundvorstellungsumbrüche bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen, die bewusst behandelt werden müssen (z. B. Prediger, 2004). Ziel einer Einführung wird also der Aufbau anschaulicher Grundvorstellungen sein, die aus den alltäglichen Vorerfahrungen der Lernenden motiviert werden können, und auf denen das Bruchzahlkonzept in seiner ganzen Fülle aufbauen kann (Padberg & Wartha, 2017). Hierbei gilt die Zuhilfenahme der unterschiedlichen Darstellungsformen von Bruchzahlen als förderlich, um tragfähige Bruchzahlkonzepte zu entwickeln (Lesh et al., 1987b).

Der Nutzen von digitalen Schulbüchern scheint bei der Einführung von Bruchzahlen zielführend zu sein, da es durch die Digitalität möglich wird, neben statischen diskreten ikonischen Repräsentationen auch kontinuierliche Darstellungen und Übertragungen enaktiver Darstellungsformen zu inkorporieren. Außerdem können E-Books die Antwortprozeduren vereinfachen und so den Fokus der Schülerinnen und Schüler weg vom „Antwort-Geben“ hin zum „Antwort-Finden“ lenken. Zudem wird es möglich, systematische Fehler automatisch zu erkennen und zurückzumelden. Insgesamt hat computerbasiertes Lehr-/Lernmaterial das Potenzial, auf diese Weise das Bruchzahlverständnis zu fördern (Lesh et al., 1987a).

## 2 Digitale Schulbücher im Kontext guten Unterrichts

### Überblick

Lehrbücher nehmen im Mathematikunterricht einen hohen Stellenwert ein (z. B. Valverde et al., 2002). Als Teil des Unterrichts können sie daher zur Gestaltung guten Unterrichtens beitragen. Bei der Erstellung von Lehrmaterialien – wie Schulbüchern – bietet es sich daher an, wissenschaftliche Kriterien guten Unterrichts zu Rate zu ziehen und die Lehrkraft auf diese Weise beim Abhalten eines solchen zu unterstützen. Im Folgenden wird gelungener Unterricht, wie er in der Literatur charakterisiert wird, beschrieben (Abschnitt 2.1) und in Bezug zu Schulbüchern gestellt (Abschnitt 2.4). Dazu wird die Rolle, die das Schulbuch im Unterricht spielt, näher betrachtet (Abschnitt 2.2) und auch auf Unterschiede zwischen digitalen und traditionellen Schulbüchern eingegangen (Abschnitt 2.3).

### 2.1 Unterrichtsqualität

Die Thematik des qualitativ hochwertigen Unterrichts lässt sich durch die Frage „Was ist guter Unterricht?“ (Meyer, 2014) plakativ darstellen. Hier ist zu klären, was Unterrichtsqualität ausmacht, bzw. was in der Literatur gemeint ist, wenn von *gutem Unterricht* gesprochen wird. Darauf wird in diesem Abschnitt eingegangen.

Zunächst ist festzuhalten, dass kein Unterricht per se gut ist (Meyer, 2014) und es *den* optimalen Unterricht nicht gibt (Helmke, 2009). Das Adjektiv *gut* erhält seine Tragfähigkeit erst durch den Kontext, in dem der jeweilige Unterricht eingebettet ist. Dieser Kontext kann für die Beurteilung, ob Unterricht im Einzelfall gut ist, durch folgende zwei Fragen ausgelotet werden (Helmke, 2009; Meyer, 2014):

1. *Wofür* soll der Unterricht gut sein? Je nach den Zielen des Unterrichts, aber auch je nach Fach wird sich hochwertiger Unterricht unterscheiden. Diese Frage hat auch eine zeitliche Komponente: Gilt es, unmittelbare Leistungserfolge zu erzielen, oder ist der spätere Berufserfolg das übergeordnete Ziel, an dem die Unterrichtsqualität ausgerichtet wird?
2. *Für wen* soll der Unterricht gut sein? Und das in doppelter Perspektive: Welche Schülerinnen und Schüler sollen profitieren und wer begutachtet den Unterricht? Hier sind auch unterschiedliche Startbedingungen in Betracht zu ziehen, die je nach Klassenzusammensetzung variieren können.

### 2.1.1 Merkmale guten Unterrichts

Eine Definition guten Unterrichts erscheint ob dieser Diskrepanzen schwer aufzustellen (für einen Versuch s. Meyer, 2014). Empirische Ergebnisse der Unterrichtsforschung helfen jedoch dabei, *Merkmale* guten Unterrichts zu kategorisieren. Unter derartigen Merkmalen sind Unterrichtsaspekte zu verstehen, deren positiver Effekt auf Lernergebnisse empirisch abgesichert ist (Meyer, 2014). Helmke (2009) definiert: Merkmale von Unterrichtsqualität sind diejenigen Merkmale von Unterricht, die für dessen Erfolg ausschlaggebend sind. Unter Unterrichtserfolg ist dabei das Erreichen der Ziele des Unterrichts zu verstehen, wobei diese Ziele ausdrücklich nicht nur die inhaltlichen Lernziele sind, sondern bspw. auch soziale Aspekte ansprechen können.

In der Literatur findet sich eine Vielzahl an Arbeiten, die guten Unterricht anhand derartiger Merkmale charakterisieren. Im Deutschsprachigen finden sich mit den Büchern von Helmke (2009) und Meyer (2014) zwei ausführliche Werke, die jeweils zehn Merkmale guten Unterrichts aufstellen. Auch in englischer Sprache existieren ähnliche Arbeiten (z. B. Borich, 2010; Brophy, 2002; Walberg & Paik, 2003). Die einzelnen aufgestellten Merkmale beziehen sich dabei auf unterschiedliche Aspekte des Unterrichts. Im Folgenden werden Ergebnisse der unterschiedlichen Autorinnen und Autoren paraphrasiert. Die Kategorisierung folgt dabei der von Helmke (2009) vorgenommenen Unterteilung in zehn Merkmale.

1. **Klassenführung.** Die *Klassenführung* – oder das *classroom management* – gilt international als das Merkmal guten Unterrichts, welches am konsequentesten mit dessen Erfolg zusammenhängt. Einen Teilaspekt stellen die Nutzung der Unterrichtszeit und die Schaffung von aktiver Lernzeit (z. B. Slavin, 1994) dar. Die Steigerung der Lernzeit gilt für Chickering und Gamson (1989) als entscheidendes Prinzip effektiven Unterrichts; auch Helmke (2009) konstatiert einen positiven, „zunächst linear[en]“ (S. 81) Zusammenhang zum Lernerfolg.
2. **Klarheit und Strukturiertheit.** Das Merkmal der *Klarheit und Strukturiertheit* bezieht sich auf die im Unterricht vermittelten Inhalte. Deren Präsentation ist meist der Beginn von Lernprozessen, woraus sich die Wichtigkeit ihrer Qualität unmittelbar ergibt (Helmke, 2009).
3. **Konsolidierung und Sicherung.** Nachhaltiges Lernen bedeutet für Wellenreuther (2013) den „Aufbau einer breiten und tiefen Wissensbasis“ (S. 110) durch wiederholtes Trainieren, Wiederaufgreifen und Anwenden. Daraus ergibt sich eine „Notwendigkeit des Wiederholens und Übens“ (Helmke, 2009, S. 200), um den Lernstoff zu *konsolidieren* und zu *sichern*. Guter Unterricht gibt also Schülerinnen und Schülern ausreichend Gelegenheit zu üben und darüber hinaus das Geübte anzuwenden (Brophy, 2002).
4. **Aktivierung.** Schülerinnen und Schüler können im Unterricht auf unterschiedlichen Ebenen *aktiviert* werden. Helmke (2009) thematisiert bspw. die *soziale* und die *kognitive* Aktivierung.
5. **Motivierung.** Viele Arbeiten zur Unterrichtsqualität nehmen die *Motivierung* als Aspekt guten Unterrichts auf (s. Helmke, 2009): Motivation ist nötig, um zu lernen (s. a.

Slavin, 1994). Für Slavin (1994) ist sie (engl.: *incentive*) daher eine der vier Säulen in seinem QAIT<sup>1</sup>-Modell für effektiven Unterricht.

6. **Lernförderliches Klima.** Das Qualitätsmerkmal des *lernförderlichen Klimas* ist Teil mehrerer Sammlungen von Qualitätsmerkmalen (Brophy, 2002; Helmke, 2009; Meyer, 2014) und bezieht sich auf die Gestaltung der Lernumgebung. Ziel ist es, diese so zu gestalten, dass sie das Lernen der Schülerinnen und Schüler nicht erschwert, beeinträchtigt oder einen anderweitigen negativen Einfluss darauf hat.
7. **Schülerorientierung.** Unter dem Merkmal *Schülerorientierung* versteht Helmke (2009) nicht eine Orientierung an dem Lernstand der Schülerinnen und Schüler oder ihre Motivierung, sondern affektive Aspekte der Beziehung zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern. Unterricht sollte sich so an Schülerinnen und Schülern orientieren, dass sich diese als Individuen wahr und ernst genommen sowie wertgeschätzt fühlen (Helmke, 2009).
8. **Kompetenzorientierung.** Im Zuge der Bildungsreform nach der PISA-Studie 2000 (Programme for International Student Assessment, Baumert et al., 2001) wurden Bildungsstandards aufgestellt, welche Kompetenzen formulieren, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende ihrer Schullaufbahn erwerben sollen (z. B. Kultusministerkonferenz [KMK], 2003). Guter Unterricht verfolgt als Ziel die Vermittlung dieser Kompetenzen – ist also *kompetenzorientiert* (Helmke, 2009; Meyer, 2014).
9. **Umgang mit Heterogenität.** Die Schülerinnen und Schüler einer Klasse sind in der Regel eine heterogene Gruppe bezüglich des individuellen Vorwissens, Migrationshintergrunds, Entwicklungsstands etc. (z. B. Helmke, 2009; Reiss et al., 2019), auf die der Unterricht abgestimmt sein muss. Damit diese Unterrichtsadaption oder individuelle Förderung gelingen kann, spielen auch die zur Verfügung stehenden nicht-personellen Ressourcen eine große Rolle (Helmke, 2009; Walberg & Paik, 2003). Neben Zeit, Raum und Geld für Förderung zählt dazu auch das für den Unterricht zur Verfügung stehende Material, darunter Aufgaben und Lösungshilfen (Meyer, 2014) sowie für differenzierten Unterricht ausgelegte Lehrbücher (Wellenreuther, 2013).
10. **Angebotsvariation.** Die Qualität von Unterricht kann sich in Methodenvielfalt, die zur *Angebotsvariation* zählt, zeigen. Sie kann dabei helfen, die Konzentration der Schülerinnen und Schüler beim Unterrichtsgeschehen zu halten (Helmke, 2009). Darüber hinaus kann sie dazu beitragen, die Motivation der Schülerinnen und Schüler zu wahren (vgl. bspw. Walberg & Paik, 2003).

### 2.1.2 Angebots-Nutzungs-Modell nach Helmke (2009)

Es ist zu beachten, dass schulischer (Lern-)Erfolg nicht allein vom Unterricht bzw. seiner Qualität abhängt, sondern vielmehr von unterschiedlichen weiteren Faktoren beeinflusst wird. Helmkes *Angebots-Nutzungs-Modell* von Unterricht versucht dieser Tatsache gerecht zu werden. Aufbauend auf Weinert (1996) wird in diesem Modell Unterricht als ein Angebot

---

<sup>1</sup>Quality, Appropriateness, Incentive, Time

von Seiten der Lehrkraft angesehen, das von den Lernenden wahrgenommen und interpretiert wird. Diese Nutzung spiegelt sich in Lernaktivitäten wider, die zu den Wirkungen und Zielen von Unterricht führen können.

Zusätzlich sind weitere Aspekte im Modell integriert, die sich einerseits auf die Lehrperson sowie die Lernenden beziehen und andererseits Mediationsprozesse zwischen den einzelnen Faktoren aufgreifen. Abbildung 2.1 zeigt die schematische Darstellung des Modells und verbildlicht die Tatsache, dass die Auswirkungen von Unterricht nicht direkt vom Unterricht allein abhängen. Vielmehr kommt es darauf an, wie das Unterrichtsangebot genutzt wird. Diese Nutzung selbst wird wiederum von unterschiedlichen Faktoren beeinflusst, so dass das Angebots-Nutzungs-Modell Stellschrauben offenbart, um die Qualität von Unterricht zu steuern.

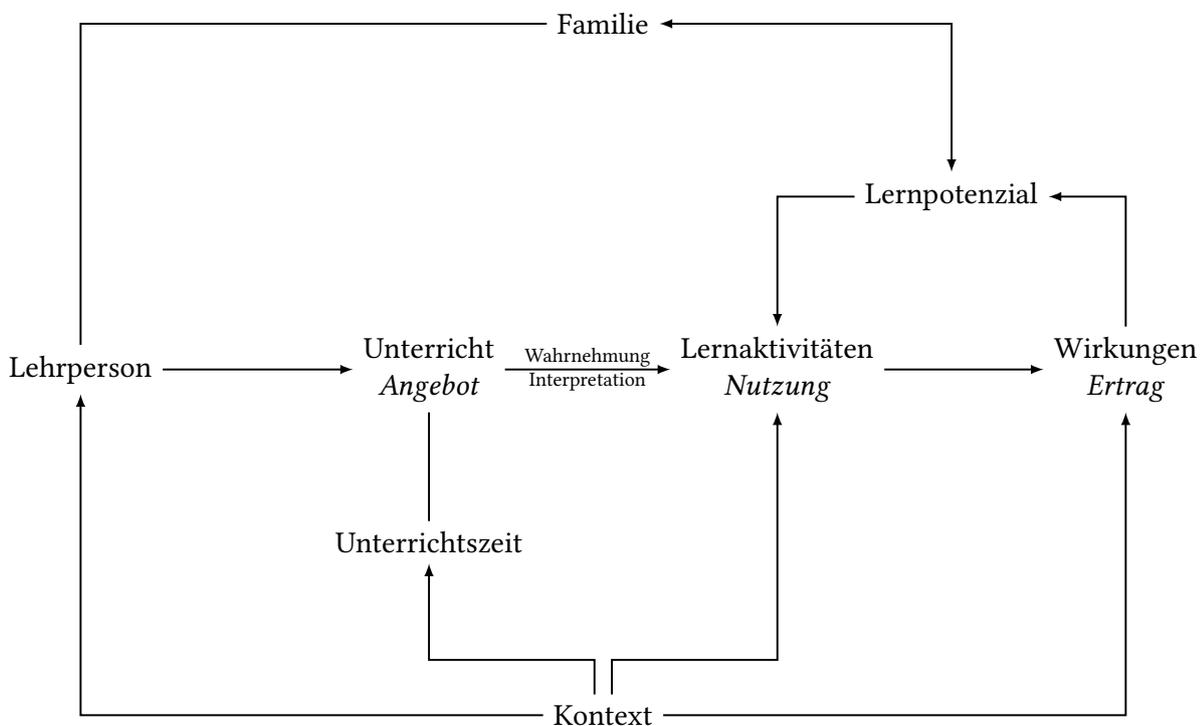


Abbildung 2.1. Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht (nach Helmke, 2009).

## 2.2 Das Schulbuch im Mathematikunterricht

Die Qualität von Unterricht wird durch die eingesetzten Materialien erheblich beeinflusst (Helmke, 2009; Wellenreuther, 2013). Wie im Folgenden erläutert wird, stellt gerade im Mathematikunterricht das Schulbuch eines der Hauptunterrichtsmaterialien dar, so dass sich hier ein besonders großer Einflussfaktor ergibt.

### Die Rolle des Schulbuchs im Mathematikunterricht

Schulbücher gelten als eine der größten Gemeinsamkeiten von Schulsystemen im internationalen Vergleich (Valverde et al., 2002). Das Schulbuch spielt eine bedeutsame Rolle im Unterricht; das *Mathematikschulbuch* im *Mathematikunterricht* in besonderem Maße (Fan, Zhu & Miao, 2013; Rezat, 2008; Valverde et al., 2002). Für Rezat (2008) „zählen [sie] zu den bedeutendsten Instrumenten des Lehrens und Lernens von Mathematik“ (S. 1). Die Bedeutung des Schulbuchs für den Mathematikunterricht ist in der Literatur unumstritten (Fan et al., 2013; Rezat, 2008).

Es erscheint daher plausibel, zur Untersuchung von Lerngelegenheiten im Unterricht Schulbücher zu analysieren (Valverde et al., 2002). Eine der größten Studien des 20. Jahrhunderts, welche u. a. diesen Weg beschritt, ist TIMSS.<sup>2</sup> Die 1995 durchgeführte Studie war die bis dato größte internationale Bildungsvergleichsstudie. Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Klassenstufen aus über 40 Nationen wurden bezüglich ihrer Leistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften untersucht. Zusätzlich stand die Analyse und der Vergleich auf curricularer Ebene im Fokus, wobei Schulbücher ein Vergleichspunkt von mehreren waren (Baumert & Lehmann, 1997).

Valverde et al. (2002) analysieren die im Zuge von TIMSS erhobenen Schulbuchdaten. Dabei stellen sie ein Modell vor, das Schulbücher in Zusammenhang mit Lehrplan, Unterricht und Lernerfolg setzt. Es basiert auf einem Curriculum-Modell der *International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)*, welches zwischen vorgesehenem, umgesetztem und erreichtem Curriculum unterscheidet (C. C. Knight, 1979). Zum *vorgesehenen Curriculum* zählen bildungspolitische Absichten, Zielsetzungen und Ziele, wie sie auf schulübergreifender Ebene in Lehrplänen und Bildungsstandards verankert sind. Das *umgesetzte Curriculum* bezieht sich auf die Schul- und Unterrichtsebene und beschreibt, welche Teile der bildungspolitischen Intentionen in der Unterrichtspraxis umgesetzt werden. Die Inhalte und Kompetenzen, die von Schülerinnen und Schülern erlernt werden, bilden schließlich das *erreichte Curriculum*. Dabei geht das Modell explizit nicht davon aus, dass ein intendiertes Ziel sicher im Unterricht umgesetzt oder auf Schülerebene erreicht wird. Es wird aber angenommen, dass vorgesehene Ziele mit größerer Wahrscheinlichkeit im Unterricht umgesetzt werden als andere. Auch wird nicht ausgeschlossen, dass im Unterrichtsangebot oder -ertrag Aspekte außerhalb übergeordneter Ebenen enthalten sind.

Das Modell von Valverde et al. (2002, s. Abbildung 2.2) sieht Schulbücher – und anderes, von Dritten bereitgestelltes Unterrichtsmaterial – als Bindeglied zwischen Lehrplan und umgesetzten Inhalten; sie bilden das *potentiell umgesetzte Curriculum* und mediiieren zwischen Intention von Lehrplänen oder Standards und deren Implementation im Unterricht. Diese Mediation ist für Valverde et al. (2002) nötig, da Standards oftmals ohne konkrete Implikationen für die Unterrichtspraxis formuliert sind. Schulbücher können hier als primäre Umformulierung verstanden werden, die Interpretationen der bildungspolitischen Vorgaben für Lehrkräfte sowie Schülerinnen und Schüler zur Verfügung stellen. Dabei beschränken sich diese Interpretationen nicht nur auf die Inhalte, sondern umfassen auch Leistungs-

<sup>2</sup>Die *Third International Mathematics and Science Study* wurde 1995 durchgeführt. Die späteren Durchläufe der Studie unter demselben Akronym (*Trends in International Mathematics and Science Study*) fanden ohne eine tiefere Schulbuchanalyse statt.

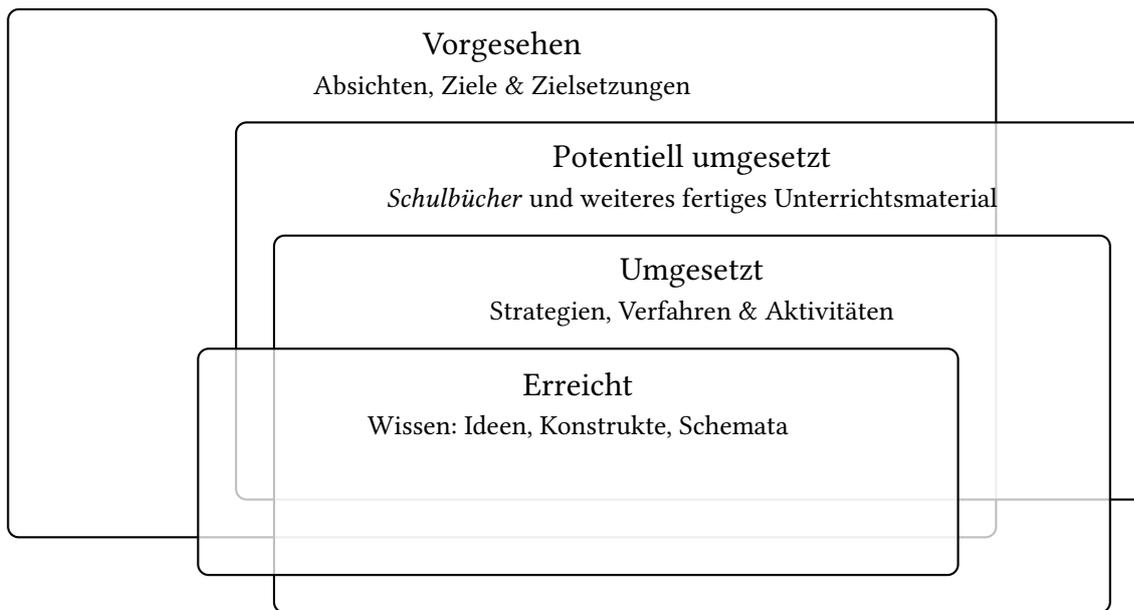


Abbildung 2.2. Schulbücher als Mediatoren zwischen Lehrplänen und Unterricht (nach Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002).

und Anwendungserwartungen gemäß den Auffassungen der Schulbuchautorinnen und -autoren (Valverde et al., 2002).

„Textbooks are written to support and to guide classroom interaction“ (Valverde et al., 2002, S. 167): Wie das verwendete Schulbuch Inhalte präsentiert, so werden diese vermutlich auch gelehrt. Schulbücher versuchen ebenso durch die Themenauswahl und -strukturierung sowie durch das Bereitstellen von Aktivitäten zu spezifizieren, wie der Unterricht strukturiert werden kann. Valverde et al. (2002) sehen in Schulbüchern also *Modelle für den Unterricht*, welche die Vorgaben der Lehrpläne konkretisieren und Empfehlungen für die Umsetzung von Unterricht geben. Dabei stellt die Aufbereitung, Anordnung und Gewichtung der Inhalte die Sichtweise der Autorinnen und Autoren auf das jeweilige Fach dar. Diese Sichtweise prägt die Anschauung von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften auf das Schulfach; zusätzlich definieren Schulbücher die jeweiligen Schulfächer für die Öffentlichkeit und haben daher auch politische Bedeutung (Valverde et al., 2002).

Die Größe der Rolle, die *Mathematikschulbücher* für den Mathematikunterricht haben, wird in den Untersuchungen von Fan und Kaeley (2000) deutlich: Lehrkräfte unterschieden sich in ihrem Unterrichten je nachdem, welches Schulbuch sie verwendeten. Darüber hinaus stellen Valverde et al. (2002) in einem Vergleich mehrerer Studien länderübergreifend fest, dass die verschiedenen Schulbücher sowohl die Inhalte des Unterrichts als auch die Zeit, die von Lehrkräften im Unterricht auf die unterschiedlichen Inhalte verwandt wird, signifikant beeinflussen. Jedoch zeigen die Ergebnisse von Thompson und Senk (2014), dass dasselbe Schulbuch nicht denselben Mathematikunterricht impliziert, da das Schulbuch von den verschiedenen Nutzerinnen und Nutzern – Lehrkräften wie Schülerinnen und Schülern – unterschiedlich eingesetzt und genutzt wird (vgl. Abschnitt 2.1.2 und s. Kapitel 3). Der „precise impact on instruction“ (Valverde et al., 2002, S. 13) variiert also und ist von anderen Unterrichtsvariablen abhängig.

## Aufgaben im Mathematikschulbuch

Aufgaben spielen eine wichtige Rolle im Unterricht (z. B. Jordan et al., 2008; Matthes & Schütze, 2011). Dies gilt für den Mathematikunterricht noch mehr als in anderem Fachunterricht, da er „zentral auf geeigneten Problemen oder Aufgabenstellungen“ (Obersteiner, Reiss & Martel, 2011, S. 303) basiert.

Diese Bedeutsamkeit von Aufgaben im Unterricht liegt zum einen in ihrer vermittelnden Rolle zwischen Theorie und Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler begründet (Matthes & Schütze, 2011; Obersteiner et al., 2011). Zum anderen kann durch geeignete Aufgabenstellungen neues Wissen erarbeitet und bestehendes Wissen vertieft werden (Menck, 2011; Obersteiner et al., 2011). Das Lösen von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler erfüllt eine ambivalente Funktion im Unterricht: Einerseits sollen die Schülerinnen und Schüler durch die Bearbeitung (Teil-)Kompetenzen erwerben, andererseits zeigen, ob oder auf welchem Niveau sie über diese Kompetenzen verfügen (z. B. Wiater, 2011). Insgesamt prägen Aufgaben das Bild, das Schülerinnen und Schülern zum Fach Mathematik aufbauen (Obersteiner et al., 2011).

Demzufolge wird Aufgaben in Mathematikschulbüchern viel Raum gegeben (z. B. Rezat, 2008): Mathematikschulbücher „intend students to engage in a great deal of skill practice“ (Valverde et al., 2002, S. 143; s. aber Wellenreuther, 2013, für nationale Einschränkungen). Wegen des hohen Gewichts von Aufgaben im Mathematikunterricht scheint es naheliegend, dass mathematikdidaktische Forschung zu Schulbüchern auch diesen Aspekt fokussiert (Fan et al., 2013). In seiner Analyse deutscher Mathematikschulbücher stellt bspw. Rezat (2008) aufgabenbedingte Auswirkungen auf die Struktur der Bücher fest: Die Einteilung der Kapitel in einzelne Lerneinheiten geschieht oftmals gemäß einzelnen Aufgabentypen. Jeder Einheit liegt ein bestimmter Typus zugrunde. Rezat (2008) spricht dementsprechend sogar von einer „Aufgabendidaktik“ (S. 59, nach Lenné, 1969) innerhalb von Mathematikschulbüchern. In diesem Zusammenhang stellt Wellenreuther (2013) fest, dass deutsche Mathematikbücher oft auf das Üben fokussieren und weniger auf Erklärungen, Aufgaben also übergewichten.

### Zusammenfassung

Insgesamt zeigt sich das Mathematikschulbuch als wichtiges Medium für den Unterricht. Für Lehrkräfte stellt es Einführungen, Text und vor allem Aufgaben bereit, die diese in ihrer Vorbereitung und im Unterricht einsetzen können. Im Angebots-Nutzungs-Modell kann das Schulbuch somit als Teil des Unterrichtsangebots eingeordnet werden. Demnach wird eine Schulbuchnutzung durch die Schülerinnen und Schüler die Wirkungen von Unterricht beeinflussen.

## 2.3 Digitale Mathematikschulbücher

Die fortschreitende Digitalisierung der Gesellschaft erreicht auch die Schulen (vgl. den *DigitalPakt*, BMBF, 2019) und damit das Schulbuchwesen. Digitale Schulbücher scheinen daher ein naheliegender Entwicklungsschritt, welcher nach Höhne (2003), der von der historischen Entwicklung des Schulbuchs interpoliert, sogar unausweichlich ist. Allerdings steckt die Forschung zu digitalen Schulbüchern, insbesondere für das Fach Mathematik, noch in den Kinderschuhen (z. B. Fan et al., 2013). Dieser Abschnitt beschreibt einen Teil der vorhandenen Forschung zu dieser Thematik. Dabei werden zunächst *digitale Mathematikschulbücher* definiert (Abschnitt 2.3.1). Anschließend wird auf die Unterschiede zu konventionellen Schulbüchern eingegangen (Abschnitt 2.3.2).

### 2.3.1 Begriffsklärung *Digitales (Mathematik-)Schulbuch*

Der Begriff des digitalen (Mathematik-)Schulbuchs scheint schwer fassbar. So existieren in der Literatur eine Vielzahl an sich unterscheidenden Definitionen, die im Folgenden (Abschnitt 2.3.1.1) vorgestellt werden. Im Anschluss daran werden die naturgemäß weiten Definitionen durch verschiedene Klassifikationsschemata unterschiedlicher Autorinnen und Autoren verfeinert (Abschnitt 2.3.1.2).

#### 2.3.1.1 Definition digitaler (Mathematik-)Schulbücher

In diesem Abschnitt soll die Frage geklärt werden, wie ein *digitales Mathematikschulbuch* definiert ist. Der Wortbedeutung nach ist es zunächst ein digitales Buch (E-Book<sup>3</sup>), das als Mathematikschulbuch eingesetzt werden kann. Es ist daher als Erstes zu klären, was unter dem Begriff *digitales Buch* bzw. *E-Book* zu verstehen ist.

In der Literatur finden sich eine große Anzahl an Definitionen für den Begriff (Vassiliou & Rowley, 2008). In dem Bemühen, einen Konsens zu finden, analysieren Vassiliou und Rowley (2008) 37 Definitionen verschiedener Autorinnen und Autoren. Sie identifizieren dabei fünf Schlüsselkonzepte von E-Books, die in den Definitionen aufgegriffen werden: (1) die digitale Natur von E-Books, (2) der Inhalt, (3) eine Analogie zu (traditionellen) Büchern, (4) die Technologie, die benötigt wird, um das E-Book anzuzeigen, sowie (5) mögliche Besonderheiten, die in Papierbüchern nicht umsetzbar sind. Die Autorinnen folgern, dass eine umfassende Definition des E-Bookbegriffs diese Subkonzepte referenzieren muss.

Gründe für die Diversität der Definitionen werden in der Vielzahl an Möglichkeiten des Inhalts sowie in der fortschreitenden Entwicklung der E-Book-Technologien gesehen (Vassiliou & Rowley, 2008). Daher besteht die Definition von E-Books der Autorinnen (Definition 1) aus zwei Teilen: einem ersten, welcher die persistenten Teile des Begriffs umfasst, die keinem Wandel aufgrund der Weiterentwicklung von E-Books unterliegen, und einem zweiten, der an Aktualität verlieren kann und dementsprechend revidiert werden muss.

<sup>3</sup>Ein Kurzwort aus *electronic book*. Die wörtliche Übersetzung wäre daher eher *elektronisches Buch* und nicht *digitales Buch*. Diese beiden Begriffe werden jedoch als synonym verstanden (Vassiliou & Rowley, 2008).

- Definition 1** (E-Book, Vassiliou und Rowley, 2008, S. 363). 1. *An e-book is a digital object with textual and/or other content, which arises as a result of integrating the familiar concept of a book with features that can be provided in an electronic environment.*
2. *E-books, typically have in-use features such [sic!] search and cross reference functions, hypertext links, bookmarks, annotations, highlights, multimedia objects and interactive tools.*

In Folge der Vielzahl an unterschiedlichen Definitionen für ein digitales Buch ist die Definition eines digitalen *Schulbuchs* ebensowenig einheitlich (s. a. Pepin, Gueudet, Yerushalmy, Trouche & Chazan, 2015). Dabei unterscheiden sich nicht nur die Definitionen für digitale Schulbücher, sondern auch die verwendeten Bezeichnungen – im Englischsprachigen bspw. *e-textbook*, *digital textbook* oder *interactive textbook* (Gu, Wu & Xu, 2015).

Definition 2 von digitalen Schulbüchern stammt aus Südkorea (Lee, Messom & Yau, 2013), das als Vorreiter im Bereich der Digitalisierung von Schulbüchern gilt (Pepin et al., 2015). Neben der Digitalität des E-Books betont Definition 2 die Approbation von staatlicher Seite für den Einsatz an Schulen.

**Definition 2** (E-Textbook, Lee et al., 2013, S. 32). *An electronic textbook (e-Textbook) is a digitized (or electronic) form of textbook, which normally needs an endorsement by the national or state government when it is used in the K-12 education system.*

Der Korea Education Research Information Service (KERIS) spezifiziert digitale Schulbücher mehr nach den Möglichkeiten, die sie bieten (s. Definition 3).

**Definition 3** (Digital Textbooks, KERIS, 2012, zitiert nach Bonitz, 2013). *Digital Textbooks offer various interactive functions, and provide the learner with a combination of textbooks, reference books, workbooks, dictionaries, and multimedia contents such as video clips, animations, and virtual reality. Digital Textbooks are based on various interaction functions and are designed to fit students' personal characters and levels.*

Eine ähnliche Betonung der *Features* findet sich bei Young (2013). Hier wird dafür plädiert, digitale Schulbücher nicht als Schulbücher zu bezeichnen, da sie vielmehr Programme seien, die entwickelt wurden, um eine Mischung aus Text, Videos und Hausaufgaben zur Verfügung zu stellen. Ein solcher Ausweg aus dem Definitionsdilemma scheint jedoch nicht wünschenswert, da ein digitales Schulbuch dieselbe Rolle im Unterricht wie ein traditionelles Schulbuch einnehmen (vgl. Abschnitt 2.2) und daher weiter als Schulbuch bezeichnet werden sollte.

Für den deutschen Bildungsbereich definiert Bonitz (2013) aufbauend auf Definition 2 und Definition 3:

**Definition 4** (Digitale Schulbücher, Bonitz, 2013, S. 129). *Unter digitalen Schulbüchern [sind] solche zu verstehen, die in digitalisierter (oder elektronischer) Form vorliegen und für den Einsatz im Schulunterricht, normalerweise offiziell durch das Approbationsverfahren*

des zuständigen Ministeriums, zugelassen sind. Die Aufbereitung der Inhalte zeichnet sich besonders dadurch aus, dass verschiedene interaktive Funktionen und multimediale Inhalte, wie Videoclips, Animationen und Virtual Reality, in unterschiedlicher Kombination darin angeboten werden können. Digitale Schulbücher sind in besonderer Weise dafür konzipiert, den persönlichen Eigenschaften und Bedürfnissen der Lehrer[innen und Lehrer] entgegen zu kommen.

Es scheint bemerkenswert, dass die Definition von Bonitz (2013, Definition 4) – im Vergleich zu Definition 3 – die Aufbereitung der Inhalte zu Möglichkeiten relativiert, nicht aber die Adaptierbarkeit. Zudem setzt sie den Bezug weg von den Schülerinnen und Schülern hin zu den Lehrkräften. Einen ähnlichen Lehrkraftbezug weist die Definition aus dem *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* auf:

**Definition 5** (E-Textbook, Pepin et al., 2015, S. 644). *[W]e can define an e-textbook as an evolving structured set of digital resources, dedicated to teaching, initially designed by different types of authors, but open for redesign by teachers, both individually and collectively.*

Die Definition wirkt speziell auf die in Pepin et al. (2015) betrachteten Beispiele zugeschnitten und restriktiert den Begriff, indem sie Veränderbarkeit durch die Nutzerinnen und Nutzer und eine stetige Weiterentwicklung vorschreibt. Die in Definition 1 geforderte Analogie zu traditionellen Büchern wird zudem auf eine Strukturiertheit des Inhalts reduziert.

Alle bisher vorgestellten Definitionen – selbst die aus dem *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (Pepin et al., 2015) – beschäftigen sich mit dem Begriff des digitalen Schulbuchs, lassen sich aber durch eine Ergänzung von „für den Mathematikunterricht“ o. ä. zu Definitionen von *digitalen Mathematikschulbüchern* spezifizieren. Expliziten Mathematikbezug findet sich in der Definition eines digitalen Mathematikschulbuchs von Usiskin (2018, Definition 6).

**Definition 6** (Digitales Mathematikschulbuch, nach Usiskin, 2018). *Ein digitales Mathematikschulbuch ist*

1. *ein Mathematikschulbuch, das insbesondere Erklärungen der mathematischen Inhalte und Aufgaben für Schülerinnen und Schüler enthält.*
2. *ein Mathematikschulbuch, das ausgerichtet an Unterricht ist und nach Unterrichtsstunden oder Themen sortiert ist; insbesondere ist es ein Mathematikschulbuch, konzipiert für den Einsatz im Klassenzimmer.*
3. *ein digitales Buch, optimiert für die Anzeige auf unterschiedlichen digitalen Anzeigegeräten, das die Digitalität nutzt, z. B. durch Verlinkungen.*

Auch Definition 6 enthält Forderungen an ein digitales Mathematikschulbuch, das einige Formate aus dem Begriff ausschließt, wie Bücher die nicht für *unterschiedliche* Anzeigegeräte ausgelegt sind (s. auch Abschnitt 2.3.1.2). Ein ähnliches Problem zeigen auch Definitionen

des E-Book-Begriffs, die zuweilen zu spezifisch bestimmte Technologien inkorporieren (Vassiliou & Rowley, 2008).

Alle der referenzierten Definitionen stellen Forderungen an digitale Schulbücher, die den Begriff unnötig einschränken, wie die Veränderbarkeit durch Nutzerinnen und Nutzer (Definition 5), der alleinige Fokus Lehrkräfte (Definitionen 4 & 5) oder Schülerinnen und Schüler (Definitionen 3 & 6) oder gar Vorschriften bezüglich der Autorenschaft (Definition 5). Aufgrund der vielfältigen Kritikpunkte an bereits bestehende Definitionen eines digitalen Mathematikschulbuchs, gibt diese Arbeit mit der folgenden Definition 7 eine weitere Definition, die versucht, die Limitationen der vorgestellten Definitionen zu vermeiden.

**Definition 7** (Digitales Mathematikschulbuch). *Ein digitales Mathematikschulbuch ist ein E-Book, das zum Lehren und Lernen von Mathematik entsprechende Ressourcen – wie Erklärungen und Aufgaben – bereitstellt.*

Insbesondere muss ein digitales Mathematikschulbuch nach Definition 7 weder zwingend auf unterschiedlichen Plattformen benutzbar sein, noch von Lehrkräften, Schülerinnen oder Schülern in seiner Struktur verändert werden können oder besondere Möglichkeiten des digitalen Mediums nutzen.

Es erscheint jedoch sinnvoll, digitale Schulbücher, die das didaktische Potenzial des Mediums nutzen – wie Interaktivität, Adaptivität oder automatisches Feedback, s. Abschnitt 2.3.2.2 – in einem Begriff zu fassen. Definition 8 führt dazu den Begriff des *interaktiven Mathematikschulbuchs* ein.

**Definition 8** (Interaktives Mathematikschulbuch). *Ermöglicht ein digitales Mathematikschulbuch Interaktivität, die über die Möglichkeiten von konventionellen Schulbüchern hinausgeht, handelt es sich um ein interaktives Mathematikschulbuch.*

### 2.3.1.2 Klassifikationen digitaler (Mathematik-)Schulbücher

Über Definitionen eines digitalen Schulbuchs hinaus finden sich in der Literatur *Klassifikationen*, die unterschiedliche Typen von digitalen Büchern beschreiben. Dies geschieht oftmals auf ähnliche, jedoch nicht gleiche Weise, so dass je nach Autorinnen und Autoren unterschiedliche, in der Regel nicht deckungsgleiche Kategoriensysteme entstehen. Bemerkenswerterweise klassifizieren die entsprechenden Arbeiten dabei digitale Schulbücher, die nicht in ihre Definition eines solchen passen.

So unterscheiden Pepin et al. (2015) zunächst *Generationen* von digitalen (Schul-)Büchern: Bücher der ersten Generation sind reine digitalisierte Kopien traditioneller Papierbücher; außer den Navigationsmöglichkeiten digitaler Dokumente lassen sie das interaktive Potenzial unberührt – insbesondere sind derartige Bücher nicht veränderbar, so dass sie gemäß der Definition der Autorinnen und Autoren (Definition 5) nicht als digitales Schulbuch gelten. In der zweiten Generation werden Gelegenheiten eröffnet, mit dem Buch – das an dieser Stelle von seiner ursprünglichen Wortbedeutung merklich abweicht – zu interagieren, es zu personalisieren und seinen Inhalt weiterzuentwickeln.

In einem ähnlichen Sinne kategorisieren Chenglin, Xuehai und Sanguo (2012) drei *E-Book-Formate*. Das 1.0-Format entspricht der ersten Generation von E-Books nach Pepin et al. (2015) – also E-Books mit gedruckter Vorlage. Für E-Books im 2.0-Format hingegen existiert kein solches Druckpendant; die E-Books weisen aber auch keine besonderen digitalen Merkmale auf. Ist das E-Book durch derartige Features – z. B. Interaktionen – angereichert (engl.: *enhanced*), liegt es im 3.0-Format vor (Chenglin et al., 2012; s. a. Bonitz, 2013).

Auf vergleichbare Weise unterscheidet Usiskin (2018) drei *Formen* digitaler Schulbücher (basierend auf Adler, 2000; Pepin et al., 2017; Remillard, 2005): *Minimal* (digitalisierte) E-Books sind digitalisierte, maximal layouttechnisch umgestaltete Varianten eines traditionellen Buchs (entspricht erste Generation bzw. Format 1.0). *Hybride* Ansätze lassen Lehrkräften die Wahl, wie weit sie ihren Unterricht digitalisieren, indem das Schulbuch sowohl digital – mit Interaktionen – als auch analog – ohne jedwede Interaktion – angeboten wird. *Exklusiv* digital verfügbare Schulbücher haben kein analoges Pendant und treten für Usiskin (2018) in zwei Unterformen auf: frei verfügbar bzw. *open source* oder kostenpflichtig über Verlage.

Zusätzlich differenzieren Pepin et al. (2015) drei *Typen* digitaler Schulbücher: *Integrative* digitale Schulbücher stellen der Nutzerin oder dem Nutzer weitere (digitale) Lernressourcen zur Verfügung, die für gewöhnlich nicht Teil von Schulbüchern sind. Schulbücher dieser Art können ohne diese *Add-Ons* als digitale Fassung eines konventionellen Schulbuchs verwendet werden. „*Lebende*“ (Pepin et al., 2015, S. 640) E-Books befinden sich in einer kontinuierlichen Weiterentwicklung durch die Schulbuchautorinnen und -autoren. Diese Weiterentwicklung findet auf Grundlage von Feedback von Nutzerinnen und Nutzern des E-Books statt. Ein *interaktives* digitales Schulbuch ist für Pepin et al. (2015) explizit als solches geschrieben und basiert auf interaktiven Elementen wie interaktiven Diagrammen und Aufgaben; eine andere Nutzung ist nicht vorgesehen. Im Unterschied zu den beiden anderen Typen sind die Interaktionen wesentlicher Bestandteil (und keine Add-Ons) des Buchs. Außerdem ermöglicht es eine nicht-lineare Navigation; seine Inhalte können in unterschiedlicher Reihenfolge gelehrt und gelernt werden.

Darüber hinaus – und unabhängig von den eben beschriebenen Kategorien – lassen sich E-Books nach ihrem Layout kategorisieren (Rockinson-Szapkiw, Courduff, Carter & Bennett, 2013): Während *seitentreue* (engl.: *page-fidelity*) digitale Bücher ein starres Seitenlayout besitzen, können Seiteninhalte eines *textflussvariablen* (engl.: *reflowable*) E-Books an den Bildschirm des jeweiligen Ausgabegerätes angepasst werden.

### 2.3.2 Unterschiede zwischen digitalen und konventionellen Schulbüchern

In der Begriffsklärung zum Konzept *digitales Schulbuch* (Abschnitt 2.3.1) charakterisieren sich E-Books im Vergleich zu traditionellen Schulbüchern durch ihre digitale Natur. Je nachdem, wie weit diese Digitalisierung umgesetzt ist, ergeben sich Neuerungen für den Unterricht, die ohne digitale Medien nicht möglich sind, weshalb digitalen Schulbüchern das Potenzial zugeschrieben wird, (Mathematik-)Unterricht grundlegend zu verändern (Gu et al., 2015; Pepin et al., 2017). Andererseits gehen mit der Verwendung auch einige neue Herausforderungen einher, die bei Nichtbeachtung zu Störungen im Unterricht führen

können. Dieser Abschnitt fokussiert auf die Veränderungen für die Nutzerinnen und Nutzer – Schülerinnen und Schüler sowie Lehrerinnen und Lehrer – von digitalen Schulbüchern im Vergleich zu Papiersschulbüchern. Darüber hinaus ergeben sich Möglichkeiten für die Schulbuch- bzw. Mathematikdidaktikforschung, auf die in Kapitel 3 eingegangen wird.

### 2.3.2.1 Herausforderungen digitaler Schulbücher

Die Einführung von digitalen Schulbüchern stellt das Bildungssystem – insbesondere aber Lehrkräfte sowie Schülerinnen und Schüler – vor große Herausforderungen auf unterschiedlichen Gebieten (Lee et al., 2013). Die unterschiedlichen Arbeiten zu digitalen Schulbüchern führen verschiedene Schwierigkeiten auf, die sich gliedern lassen in Aspekte, welche die *Technologie*, das *Management*, die *Lehrkräfte*, die *Schülerinnen und Schüler* und das *Lesen* betreffen. Zusätzlich zu diesen existieren für digitale *Mathematikschulbücher* einige weitere Spezifika.

#### Herausforderungen der Technologie

Die Nutzung von digitalen Schulbüchern verlangt das Vorhandensein einer technischen Infrastruktur an den Schulen bzw. im Klassenzimmer. Diese umfasst neben der Hardware zum Anzeigen der E-Books (z. B. Choppin, Carsons, Bory, Cerosaletti & Gillis, 2014; Lee et al., 2013; Lew, 2016) auch die dazu passende Software (Embong, Noor, Hashim, Ali & Shaari, 2012; Lee et al., 2013) und zudem architektonische Aspekte wie eine ausreichende Anzahl an Steckdosen im Klassenzimmer (Embong et al., 2012; Gu et al., 2015).

Obwohl Forschungssynthesen zum Lernen mit digitalen Medien zu dem Ergebnis kommen, dass eine gemeinsame Nutzung von u. a. digitalen Schulbüchern lernförderlich ist (Hillmayr, Ziernwald, Reinhold, Hofer & Reiss, 2020), sind manche digitale Schulbücher auf eine sog. 1 : 1-Nutzung ausgelegt, d. h. ein Gerät pro Person (Pepin et al., 2017). Eine derartige Einschränkung kann aufgrund der verwendeten Individualisierungsmöglichkeiten (s. Abschnitt 2.3.2.2) vorgenommen sein und erschwert eine gemeinsame Nutzung (Embong et al., 2012). Somit kann auch die Anzahl der verfügbaren Geräte entscheidend für einen gelungenen Einsatz von digitalen Schulbüchern sein. Das Bereitstellen dieser Infrastruktur ist mit erheblichen Kosten verbunden, wofür die nötigen Ressourcen zum Teil nicht vorhanden sind (Gu et al., 2015). Digitale Schulbücher sind stellenweise also nicht zugänglich (R. Wilson, Landoni & Gibb, 2002); neben den Schulen betrifft dies zu Teilen auch die Elternhäuser (Choppin et al., 2014).

Einige der E-Book-Angebote sind zudem abhängig von konstantem Internetzugriff (Choppin et al., 2014; Landoni, Wilson & Gibb, 2000). Dies stellt einen weiteren Kosten- und Infrastrukturfaktor dar und impliziert die Herausforderung, die digitalen Schulbücher auch offline verfügbar zu machen (z. B. Lee et al., 2013; R. Wilson et al., 2002). Des Weiteren sind die zur Nutzung der E-Books unumgänglichen Geräte und Programme mitunter fehleranfällig (Vassiliou & Rowley, 2008) und teilweise wenig benutzerfreundlich (Embong et al., 2012). Hieraus entsteht die Herausforderung, geeignete Soft- und Hardware auszuwählen (Lee et al., 2013).

### Herausforderungen im Management

Der Einsatz von E-Books an Schulen ist mit einem Verwaltungsaufwand verbunden (Vassiliou & Rowley, 2008). Insbesondere muss sichergestellt werden, dass die Bücher in ausreichender Menge (Gu et al., 2015) und über einen ausreichend langen Zeitraum zur Verfügung stehen (Gu et al., 2015; Lee et al., 2013). Durch die Möglichkeit häufiger und schneller Updates (ein oft genannter *Vorteil* digitaler Bücher, s. Abschnitt 2.3.2.2) entsteht die Notwendigkeit, diese wiederholt auf die Endgeräte zu distribuieren, was je nach Software und Internetverfügbarkeit einen logistischen Aufwand darstellt (Choppin et al., 2014; Gu et al., 2015).

### Herausforderungen für Lehrkräfte

Digitale Schulbücher haben das Potenzial, den Unterricht zu verändern (Lew, 2016; Pepin et al., 2017); damit einhergehend verändert sich auch die Rolle, welche die Lehrkraft im Unterricht einnimmt (Usiskin, 2018). Für gelungenen Unterricht mit digitalen Schulbüchern scheinen daher neue didaktische Methoden nötig, um den Einsatz gewinnbringend zu gestalten (Lee et al., 2013); insbesondere eine freiere Struktur innerhalb von E-Books wird als Herausforderung für Lehrerinnen und Lehrer angesehen (Yerushalmy, 2016). Zudem berichtet Yerushalmy (2016), dass Lehrkräfte der Meinung sind, den Wissenstand ihrer Schülerinnen und Schüler unzureichend abschätzen zu können, wenn das Lernen in komplexen Lernumgebungen stattfindet, wie interaktive Schulbücher es sein können. Lehrkräfte scheinen also zum Teil nicht adäquat ausgebildet zu sein, um mit E-Books zu unterrichten (Embong et al., 2012; Gu et al., 2015). Lew (2016) fordert daher eine neue Art der Lehrer(fort)bildung, um Lehrkräfte auf diese Herausforderungen vorzubereiten. Derartige Veranstaltungen können auch genutzt werden, um eine eventuelle „Technophobie“ (Vassiliou & Rowley, 2008, S. 359) der Lehrkräfte abzubauen (s. bspw. Reinhold, Strohmaier, Finger-Collazos & Reiss, eingereicht).

### Herausforderungen für Schülerinnen und Schüler

Die Bedienung der Endgeräte, auf denen die digitalen Schulbücher laufen, benötigt ein gewisse Maß an Medienkompetenz, das bei den Schülerinnen und Schülern nicht immer vorhanden ist (Vassiliou & Rowley, 2008). Zudem zeigen die Untersuchungen von Goldhammer, Naumann und Keßel (2013), dass Mädchen länger für Aufgabenstellungen aus der basalen Computerkompetenz benötigen als Jungen. Je nach Umsetzung der E-Books kann es demnach zu Herausforderungen gerade für Schülerinnen aufgrund der Digitalität kommen. Allerdings existiert empirische Evidenz, dass die Art und Weise der Nutzung von E-Books nicht oder nur in geringem Maße vom Geschlecht abhängig ist (Bozkurt, Okur & Karadeniz, 2016; Cuttler, 2019; Sheen & Luximon, 2017; Woody, Daniel & Baker, 2010). Mayrberger (2013) sieht außerdem die Gefahr, dass die Interaktionsfülle, die digitale Schulbücher bieten können, die Schülerinnen und Schüler überfordert oder sie vom Lerngegenstand ablenkt.

### Herausforderungen im Lesen digitaler Texte

Gemäß ihrer Natur werden digitale Schulbücher auf elektronischen Bildschirmen gelesen. Forschungen zum Einfluss der digitalen Darstellung auf den Leseprozess und die Informationsaufnahme kommen zu unterschiedlichen Ergebnissen (z. B. Delgado, Vargas, Ackerman & Salmerón, 2018). So berichten bspw. Daniel und Woody (2013) längere Lesezeiten an Bildschirmen, wobei die Autoren kein Unterschied im Lernerfolg zwischen Papierbüchern und E-Books feststellen. Demgegenüber finden Mangen, Walgermo und Brønnick (2013) signifikant bessere Ergebnisse in der Papier-Bedingung. Die Meta-Analysen von Delgado et al. (2018) und Clinton (2019) bestätigen die Ergebnisse von Mangen et al. (2013).

Der Unterschied kann zum Teil durch das beim Lesen am Bildschirm notwendige Scrollen von digitalen Texten erklärt werden: Werden Texte nicht seitenweise angezeigt, sondern muss zum vollständigen Lesen gescrollt werden, so erzeugt die räumliche Verschiebung der Information zusätzlichen *Cognitive Load* (vgl. Delgado et al., 2018; Mangen et al., 2013; s. a. R. Wilson et al., 2002).

### Herausforderungen für *Mathematikschulbücher*

Digitale Mathematikschulbücher zu erstellen, gilt als größere Herausforderung im Vergleich zu E-Books anderer Fachbereiche. So erachtet Lew (2016) den Umstieg auf digitale Mathematikschulbücher in Südkorea als „*failed*“ (S. 39), da die entwickelten Mathematikschulbücher das Potenzial der digitalen Medien wenig ausschöpfen (Usiskin, 2018). Der Grund wird teilweise in den mangelhaften Werkzeugen für die Erstellungen von digitalen Mathematikschulbüchern gesehen (Lew, 2016).

Usiskin (2018) untersucht fünf mathematische Aspekte – symbolische Repräsentationen, ikonische und enaktive Repräsentationen, Argumentieren, Modellieren und Algorithmen – auf ihre Umsetzbarkeit innerhalb digitaler Schulbücher. Er kommt zu dem Schluss, dass nicht alle dieser Facetten in gewinnbringender Weise rein digital umgesetzt werden können; vor allem der Bereich des mathematischen Argumentierens scheint digital schwierig realisierbar. Als Gründe nennt Usiskin (2018) die kleinen Bildschirmgrößen, die Offenheit des Systems (die bspw. zu widersprüchlichen Informationen aus dem Internet führen kann) sowie verdeckte Annahmen in bspw. dynamischen Geometriesystemen.

#### 2.3.2.2 Vorteile digitaler Schulbücher

Digitalen Schulbüchern wird im Allgemeinen das Potenzial zugeschrieben, Lerngelegenheiten zu verändern (Choppin & Borys, 2017; Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2017) und sie – durch Anreicherung des Unterrichts – zu verbessern (z. B. Embong et al., 2012), da sie im Vergleich zu Papierbüchern eine größere Auswahl an Lerngelegenheiten bieten können (R. Wilson et al., 2002), während sie die Eigenschaften von normalen Schulbüchern weitgehend beibehalten (Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017). Darüber hinaus kann ihr Einsatz im Unterricht auf affektiver Ebene dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler mehr Freude am Lernen haben (Embong et al., 2012; Gu et al., 2015).

Im Detail finden sich in der Literatur mannigfaltige Vorzüge digitaler Schulbücher, die sich gliedern lassen in Vorteile aufgrund *äußerer Merkmale* und im *Management* sowie wegen der Möglichkeit, *Notizen und Hervorhebungen* anzulegen; Vorteile bezüglich der *Navigation*, in der *Struktur*, für *Lehrkräfte* und bezüglich der *Zusammenarbeit*; Vorteile bezogen auf den möglichen *Inhalt*, insbesondere im *Aufgabenangebot*, hierbei auch spezifische Vorteile digitaler *Mathematikschulbücher* und den Vorteil der *Adaptivität*.

### Vorteile aufgrund äußerer Merkmale

Viele der in der Literatur beschriebenen Vorzüge beziehen sich weniger auf Möglichkeiten, die durch die Digitalisierung im Inhalt möglich werden, sondern vielmehr auf äußere Merkmale wie

- geringere Kosten (Choppin & Borys, 2017; Embong et al., 2012; Gu et al., 2015; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Pepin et al., 2015; Rhodes & Rozell, 2015),
- geringeres Gewicht (Embong et al., 2012; Gu et al., 2015; Lee et al., 2013; Pepin et al., 2015; Rhodes & Rozell, 2015) und
- eine damit einhergehende Transportabilität (Landoni et al., 2000; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Rhodes & Rozell, 2015; Vassiliou & Rowley, 2008).

Genannt wird zudem die Möglichkeit, die Bücher im Dunkeln zu lesen (Gu et al., 2015; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017); Erwähnung finden auch Umweltaspekte (weniger Papierverbrauch, Embong et al., 2012).

### Vorteile im Management

Digitale Schulbücher „*ease the management process*“ (Embong et al., 2012, S. 1804). Dies bezieht sich einerseits auf die Verwaltung der Bücher selbst, die einfach aufzubewahren und an die (Geräte der) Schülerinnen und Schüler zu verteilen sind (Choppin et al., 2014; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017). Andererseits wird dabei auf den Umgang mit neuen Versionen digitaler Schulbücher Bezug genommen – zumeist auf das Entfernen von Fehlern (Lee et al., 2013; Usiskin, 2018; Yerushalmy, 2014). Die überarbeiteten Fassungen gelangen zügig an die Schulen; der logistische Aufwand und Kosten bleiben dabei gering (Choppin et al., 2014; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017, vgl. hierzu aber die korrespondierenden Herausforderungen in Abschnitt 2.3.2.1).

Zusätzlich lassen sich digitale Schulbücher in schulweite Verwaltungssysteme einbinden (Pepin et al., 2017; Sigarchian et al., 2017). Dies erlaubt es, die Überprüfung von Hausaufgaben oder Schulaufgaben und die Kontrolle der Anwesenheit zu automatisieren (Pepin et al., 2017; Sigarchian et al., 2017).

### Vorteil Notizen und Hervorhebungen

Darüber hinaus führt eine Vielzahl an Publikationen zu digitalen Schulbüchern als *Feature* auf, Textabschnitte farblich markieren bzw. unterstreichen sowie Notizen im Buchtext

anlegen zu können (z. B. Landoni et al., 2000; Sheen & Luximon, 2017; Vassiliou & Rowley, 2008; R. Wilson, Landoni & Gibb, 2003) – beides Eigenschaften, die auch Papierbücher aufweisen. Nach Gu et al. (2015) gehören diese Merkmale zu den am meisten genutzten in digitalen Büchern. Zusätzlich findet sich in der Literatur das Feature, Zeichnungen im Buch anfertigen (Embong et al., 2012; Lew, 2016; Usiskin, 2018), oder Textabschnitte für den Gebrauch außerhalb des E-Books kopieren und zusammenfügen zu können (Gu et al., 2015; Vassiliou & Rowley, 2008).

### **Vorteile bezüglich der Navigation**

Im Bereich der Navigation in E-Books sind es vor allen Dingen Hyperlinks, also Verknüpfungen im Text zu anderen Teilen des Buchs – anderen Abschnitten oder Strukturelementen wie dem Inhaltsverzeichnis, dem Index oder einem Glossar –, die in der Literatur Erwähnung finden (z. B. Choppin & Borys, 2017; Landoni et al., 2000; Pepin et al., 2015; Rhodes & Rozell, 2015; Vassiliou & Rowley, 2008; R. Wilson et al., 2003; Yerushalmy, 2016). Ein weiterer Vorzug wird in der Möglichkeit gesehen, derartige Verknüpfungen selbst in Form von Lesezeichen anzulegen (Gu et al., 2015; Landoni et al., 2000; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Sheen & Luximon, 2017; Vassiliou & Rowley, 2008; R. Wilson et al., 2002) – ein Feature, das auch analog existiert. Die Potenziale des Papierformats überschreiten allerdings Suchfunktionen, die von vielen Autorinnen und Autoren als Vorteil digitaler Bücher genannt werden (Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Pepin et al., 2015; Vassiliou & Rowley, 2008; R. Wilson et al., 2002, 2003; Yerushalmy, 2016) und zu den von Schülerinnen und Schülern am meisten genutzten Eigenschaften digitaler Schulbücher zählen (Gu et al., 2015).

### **Vorteile in der Struktur**

Die angesprochenen Möglichkeiten, innerhalb von E-Books (z. B. mittels Hyperlinks) zu navigieren, gestatten es den Erstellerinnen und Erstellern von digitalen Schulbüchern, eine nicht-lineare Struktur anzulegen (Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2017; Pepin et al., 2015). In gewissem Sinne stellt diese eine Interaktivität dar, da die Nutzerinnen und Nutzer durch ihre Aktionen den Fluß des Inhalts beeinflussen (Choppin & Borys, 2017). Als konkretes Strukturelement, das sich durch die Digitalisierung verändert, nennen R. Wilson et al. (2003) das Inhaltsverzeichnis: Es kann so gestaltet werden, dass es ohne Navigationsaufwand zu jeder Zeit verfügbar ist.

Ebenso können E-Books Eigenschaften traditioneller Bücher aufgreifen – und sollten dies auch (Landoni et al., 2000; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017), um Vorteile des Mediums *Buch* durch die Digitalisierung nicht zu verlieren. Dazu zählen u. a. Cover, die dem Buch eine Identität und einen Wiedererkennungswert verleihen, und Seitenzahlen, die den Nutzerinnen und Nutzern Orientierung im Buch bieten.

### **Vorteile für Lehrkräfte**

Die Verwendung digitaler Schulbücher ist mitunter mit einem Wandel der Rolle der Lehrkraft im Unterricht verbunden (Usiskin, 2018). Dabei bieten E-Books diesen einige Vorzüge

gegenüber traditionellen Unterrichtsmedien.

*Vor* dem Unterricht vermögen es digitale Schulbücher, den Lehrkräften weiterführende Informationen zum Unterrichtsthema (Usiskin, 2018) oder zusätzliche Multimediaressourcen (Choppin et al., 2014) zur Verfügung zu stellen. Außerdem ist es denkbar, das digitale Buch so zu programmieren, dass Lehrkräfte es flexibel auf ihren Unterricht anpassen können – durch die Auswahl der Inhalte (z. B. Pepin et al., 2015; Sheen & Luximon, 2017; Usiskin, 2018; Yerushalmy, 2014) und deren Umordnung (Choppin et al., 2014). Diese Anpassungen sind so umsetzbar, dass die Lehrkraft einzelnen Schülerinnen und Schülern individualisierte Bücher zuweisen kann (Choppin et al., 2014; Lee et al., 2013; Yerushalmy, 2016).

*Während* des Unterricht haben E-Books – z. B. eingebunden in Learning Management Systeme (Sheen & Luximon, 2017; Sigarchian et al., 2017) – das Potenzial, die Lehrerin oder den Lehrer dabei zu unterstützen, die einzelnen Schüleraktivitäten (Embong et al., 2012; Gu et al., 2015; Usiskin, 2018) oder die Lernfortschritte der Schülerinnen und Schüler durch die Übermittlung von Live-Daten zu überwachen (Choppin et al., 2014). Durch die Übermittlung der individuellen und häufigsten Fehler bei der Arbeit mit E-Book-Aufgaben können digitale Schulbücher Lehrkräfte auf eventuellen Vertiefungs- bzw. Wiederholungsbedarf hinweisen (Embong et al., 2012).

Digitale Schulbücher können zudem Teile der Leistungserfassung übernehmen (Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2017; R. Wilson et al., 2002), die Testbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler automatisch benoten (Pepin et al., 2017) und an die Lehrkräfte (Choppin et al., 2014; Sigarchian et al., 2017) oder das zentrale Notenverwaltungssystem der Schule (Sigarchian et al., 2017) übermitteln.

### **Vorteile bezüglich der Zusammenarbeit**

Einige – hauptsächlich mathematikdidaktische – Arbeiten sehen Vorteile von digitalen Schulbüchern darin, dass durch die Einbindung von entsprechenden sozialen Netzwerken digitale soziale Interaktionen und Kollaborationen herstellbar sind (z. B. Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2015; Usiskin, 2018).

Die in der Literatur beschriebene Zusammenarbeit reicht dabei vom einfachen Teilen der Schülernotizen per Beamer (Lew, 2016; Sheen & Luximon, 2017) über Nachrichtensysteme, die den Austausch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern oder zwischen Schülerinnen und Schülern untereinander erlauben (Choppin et al., 2014; Vassiliou & Rowley, 2008; R. Wilson et al., 2002), bis hin zu kollaborativen Dokumenten (Choppin et al., 2014).

Pepin et al. (2015) sehen zudem die Möglichkeit, dass das digitale Schulbuch Lehrerinnen und Lehrer dazu anregt, ihre Stunden gemeinsam zu planen, und darüber hinaus sie in dieser kollaborativen Arbeit unterstützt. Dabei können sich auch Interaktionen zwischen Lehrkräften und Schulbuchautorinnen und -autoren entwickeln.

Weitere soziale Interaktionen bietet bspw. die *Khan Academy*<sup>4</sup>, die es ihren Nutzerinnen und Nutzern erlaubt, Fragen an externe Experten zu richten (vgl. Sheen & Luximon, 2017).

### Vorteile bezogen auf den Inhalt

Als eine der definierenden Eigenschaften (vgl. Abschnitt 2.3.1.1) gilt die hohe inhaltliche Diversität von E-Books (Vassiliou & Rowley, 2008). Sie wird möglich, da die Endgeräte in der Regel eine hohe Speicherkapazität aufweisen (Gu et al., 2015; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017).

Besonders häufig werden hier Multimediainhalte – wie Videos (z. B. Lew, 2016; Sheen & Luximon, 2017; Usiskin, 2018; R. Wilson et al., 2002; Yerushalmy, 2016) oder auch Tonaufnahmen (Embong et al., 2012; Lee et al., 2013; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Sheen & Luximon, 2017) – genannt (Vassiliou & Rowley, 2008). Bei diesen Multimediainhalten kann es sich bspw. um aufgezeichneten Unterricht handeln (Choppin et al., 2014) oder um Medien, die Themen aus der Realwelt aufzeigen (Sigarchian et al., 2017; Usiskin, 2018). Sie gelten als Vorteile digitaler Schulbücher, da sie die Aufmerksamkeit und das Interesse der Schülerinnen und Schüler erregen können (Lee et al., 2013).

Des Weiteren können solche Zusatzmaterialien auch außerhalb der E-Books gespeichert und aus den digitalen Schulbüchern verlinkt werden (Sheen & Luximon, 2017; Vassiliou & Rowley, 2008). Die extern abgelegten Ressourcen können einfach und kontinuierlich aktualisiert werden (Yerushalmy, 2014). Andere verlinkbare Informationsquellen stellen Wörterbücher und Enzyklopädien dar, die es den Schülerinnen und Schülern erlauben, unklare Begriffe nachzuschlagen oder weiterführende Informationen zu finden (Embong et al., 2012; Lew, 2016; Sheen & Luximon, 2017; Vassiliou & Rowley, 2008).

Ein weiterer, oft angeführter Vorzug ist, dass E-Books „*interactive resources that could never be part of a paper textbook*“ (Usiskin, 2018, S. 851f) beinhalten können – zumeist ohne, dass diese *Interaktivität* (Gould, 2011; Gu et al., 2015; Rhodes & Rozell, 2015) weiter ausgeführt wird. Sie wird meist vage beschrieben – als variantenreich (Yerushalmy, 2016), als in einem hohen Maße möglich (Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017) oder als verbessert und größer im Vergleich zum konventionellen Schulbuch (Choppin & Borys, 2017; Choppin et al., 2014). Bei den Beispielen, die von Autorinnen und Autoren näher erläutert werden, handelt es sich um digital umgesetzte Experimente (R. Wilson et al., 2002, 2003), Spiele (Choppin et al., 2014; Lee et al., 2013), Augmented Reality-Inhalte (Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017), Systeme, die Schülerinnen und Schüler bei ihrem Zeitmanagement unterstützen (Sheen & Luximon, 2017), oder mathematikspezifische Interaktionen, die im Folgenden beschrieben werden.

Durch das Bereitstellen von Interaktivität erzeugen E-Books Gelegenheiten für die Lehrkräfte, diese zur Unterstützung des Lehrens und Lernens zu nutzen (Gould, 2011). Interaktivität – und damit interaktiven Schulbüchern – wird zudem zugeschrieben, die Informationsaufnahme zu verbessern und besonders die Kompetenz, Konzepte zu visualisieren, zu steigern (R. Wilson et al., 2002).

---

<sup>4</sup><https://khanacademy.org>

### Vorteile im Aufgabenangebot

Die Bedeutung von Aufgaben innerhalb von Schulbüchern wurde bereits thematisiert (s. Abschnitt 2.2); sie bleibt in *digitalen* Lehrwerken erhalten. Pepin et al. (2017) bedauern, dass auch die Aufgabentypen weitgehend erhalten bleiben und sich Neuerungen oftmals auf Multiple-Choice-Formate oder Kurztextantwort-Formate beschränken (s. a. Choppin et al., 2014; Yerushalmy, 2016). Die Gründe für diese Einschränkung sind wohl in der informatischen Komplexität der automatischen Korrektur komplexerer Antwortformen zu sehen. Diese ist notwendig, um die Lehrkräfte zu entlasten (s. u.) und die Aufgaben des digitalen Schulbuchs adaptiv – basierend auf der Leistung der Schülerinnen und Schüler – zu gestalten (Choppin & Borys, 2017; Choppin et al., 2014; Embong et al., 2012; Yerushalmy, 2016, mehr zu Adaptivität am Ende dieses Abschnitts). Durch die Digitalisierung werden jedoch auch neuartige Aufgabenformate möglich, die handlungsbasiert sein können – wie das Manipulieren von Darstellungen (Lew, 2016; Yerushalmy, 2016, s. a. Abschnitt 1.3.1.3).

Unabhängig vom Format können die meisten Aufgabentypen so gestaltet werden, dass sie – ggf. gesteuert durch Parameter – auf Wunsch der Schülerinnen und Schüler stets neue Aufgaben generieren (Usiskin, 2018; Yerushalmy, 2014). Zudem können Lösungshilfen, die sich im traditionellen Unterricht als förderlich für die Selbstregulation erwiesen haben (z. B. Reiss & Hammer, 2013), für die Schülerinnen und Schüler in den Aufgaben digitaler Schulbücher zur Verfügung gestellt werden (Usiskin, 2018).

Als besonders Feature digitaler Schulbücher wird die Möglichkeit angesehen, den Lernenden automatisiertes Feedback zu geben (z. B. Choppin et al., 2014; Embong et al., 2012; Lew, 2016). Insbesondere kann dies Kriterien guten Feedbacks (Hattie & Timperley, 2007) entsprechend sofort (Choppin & Borys, 2017; R. Wilson et al., 2002) und in einer wertschätzenden Art und Weise (Yerushalmy, 2014) erfolgen. Außerdem erlaubt die digitale Natur der E-Books, dass sich das Feedback auf mehrere Erklärungen bezieht (R. Wilson et al., 2002) und unterschiedliche Repräsentationen verwendet (Yerushalmy, 2016), um Verständnis zu erreichen. In Fachbereichen, in denen *typische Schülerfehler* empirisch belegt und erforscht sind – wie etwa der Bruchrechnung, vgl. Abschnitt 1.2.1 –, können diese zur Gestaltung von Feedback hinzugezogen werden und die Rückmeldungen an die Schülerinnen und Schüler verbessert werden (Wittmann, 2007), indem sie die zugrunde liegende Fehlvorstellungen aufgreifen und gezielt dagegen intervenieren. In das Feedback eingebunden, oder separat davon, kann den Schülerinnen und Schülern zudem nach Abschluss der Bearbeitung eine Lösung zu den jeweiligen Aufgaben automatisch bereitgestellt werden (Lew, 2016; Usiskin, 2018).

### Vorteile digitaler *Mathematik*schulbücher

In digitalen *Mathematik*schulbüchern eröffnen sich für Aufgaben oder *interaktive Diagramme* (Yerushalmy, 2016) weitere Vorteile gegenüber konventionellen *Mathematik*schulbüchern. So werden dynamische Repräsentationen (vgl. Abschnitt 1.3.1.3), in denen die Lernenden mit den Repräsentationen interagieren (Kaput, 1986; Yerushalmy, 2016), in Schulbüchern erst durch E-Books möglich (Usiskin, 2018). Die Interaktion ist bspw. durch veränderbare Parameter in Abbildungen oder Gleichungen realisierbar (Choppin et al.,

2014). Derartige dynamische Repräsentationen können zudem mit anderen Darstellungsformen verknüpft werden (Lew, 2016; Yerushalmy, 2014), so dass die Auswirkungen von Veränderungen der einen Darstellung sofort in den anderen sichtbar werden (vgl. Abschnitt 1.3.1.3).

Darüber hinaus sieht Usiskin (2018) Vorzüge digitaler Schulbücher im Bereich des mathematischen Modellierens, da die zu modellierenden Situationen der Realwelt durch ins Buch eingebundene Videos motiviert werden können. Durch den Zugriff auf reale Datensätze und Lösungen zu ähnlichen Problemen (bspw. über das Internet) kann den Schülerinnen und Schülern nahegebracht werden, dass Mathematik „*a living and important discipline*“ (Usiskin, 2018, S. 858) ist.

Zusätzlich können mathematische Werkzeuge (z. B. Gleichungsedatoren, Funktionsplotter oder geometrische Werkzeuge, Pepin et al., 2017) oder vollwertige mathematische Software (Usiskin, 2018) zur Lösung von mathematischen Aufgabenstellungen in E-Books direkt eingebunden werden (Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2017).

### Vorteil Adaptivität

Ein weiterer Vorteil von digitalen Schulbüchern ist die Tatsache, dass sie auf computerähnlichen Geräten angezeigt werden – z. B. Tablet-PCs, E-Reader oder Computer selbst – und somit in Teilen als computerbasierte Lernumgebung fungieren können. Im Bereich der computerbasierten Lernumgebungen ist der Umgang mit Heterogenität in der Nutzerschaft über die (automatische) Anpassung der Lernumgebung an die Lernenden ein Aspekt, der bereits in früherer Forschung in den 1950er und 1960er Jahren zu sog. Lehrmaschinen thematisiert wurde (s. Leutner, 1992). Hier spricht man von der *Adaption* der Umgebung an die Lernenden bzw. von der *Adaptivität* der Umgebung (Leutner, 1992, 2002). Der Begriff der Adaptivität ist abzugrenzen von dem der *Adaptierbarkeit*: Während letzterer Systeme beschreibt, die anpassbar sind, umschließt ersterer die autonome Eigenschaft der Umgebungen, dies selbst zu tun (Leutner, 1992, 2002). Dabei müssen adaptive Systeme nicht zwingend *intelligente* Systeme sein – also solche, die auf einer künstlichen Intelligenz basieren. Die der Adaptivität zugrunde liegenden Regeln können auf Basis simplerer informatischer Prinzipien implementiert sein (Leutner, 2002).

Leutner (1992) kategorisiert Adaption mittels dreier Kriterien: anhand des *Zwecks* – wozu wird adaptiert? –, anhand der *Rate* – wie oft finden Anpassungen statt? – und anhand der *Maßnahmen* – welche Eigenschaften des Systems werden angepasst?

Je nachdem, welchen *Zweck* die Anpassung verfolgt, wird von unterschiedlichen Adaptionmodellen gesprochen. Unter einem Fördermodell wird dabei verstanden, Lernende gezielt zu fördern, um Defizite auszugleichen. In einem Kompensationsmodell wird versucht durch die Lernumgebung affektive Zustände zu kompensieren, die das Lernen behindern – wie bspw. ein Mangel an Motivation. Erfolgt die Adaption nach einem Präferenzmodell, so werden Präferenzen in Bezug auf bspw. Lehrmethoden genutzt, um die Lernenden zu fördern (Leutner, 1992). Ist der Adaptionzweck fixiert, so beantworten Adaptionsrate und -maßnahmen die Frage nach dem *Wie* der Anpassung bzw. der Adaptivität.

Die *Adaptionsrate* bewegt sich auf einer kontinuierlichen Skala von Mikro- bis hin zu Makro-Adaption. In grobschrittigen (Makro-)Verfahren erfolgt die Anpassung der Lernumgebung an die Lernenden in größeren Abständen, bspw. zu Beginn jeder Lerneinheit. Dies erscheint sinnvoll, wenn sich die Eigenschaften der Lernenden, auf die sich die Adaption beruft, wenig verändern, wie bspw. deren kognitive Grundfähigkeiten (Leutner, 2002). Demhingegen kann eine Mikro-Adaption nach jeder einzelnen Benutzeraktion erfolgen. Mikro-Adaptionen können in der Regel nur automatisiert, sprich in adaptiven Systemen, erfolgen und sind besonders dann sinnvoll, wenn die Eigenschaften der Lernenden, die zur Anpassung zu Rate gezogen werden, sich schnell verändern; zu nennen ist hier bspw. der aktuelle Lernstand (Leutner, 2002).

Das Kriterium der *Adaptionsmaßnahme* beachtet, welche Eigenschaften oder Parameter der Lernumgebung im Zuge der Adaption bzw. Adaptivität angepasst werden. Die Literatur zu digitalen Schulbüchern bezieht sich hier auch auf den Inhalt der E-Books (Choppin & Borys, 2017; Pepin et al., 2015). So kann es den Schülerinnen und Schülern überlassen werden, die Inhalte frei anzureihen (z. B. Choppin et al., 2014). Alternativ ist es umsetzbar, die Abfolge der Themen adaptiv vom digitalen Buch festlegen zu lassen, wobei die Leistung der Schülerinnen und Schüler als Referenzpunkt dient (Choppin et al., 2014; Pepin et al., 2017). Zusätzlich kann die Anpassung einer oder mehrerer der folgenden Parameter erfolgen (Leutner, 2002): Abfolge der Inhalte in der Lernsequenz, Umfang des Stoffes und die dafür zugewiesene Lernzeit, Bearbeitungszeit von Aufgaben, Schwierigkeit von Aufgaben, Unterstützung durch Hinweise, Einführung neuer Begriffe oder Aufweisen von Verknüpfungen.

Die Wirksamkeit von Adaptivität kann als empirisch erwiesen angesehen werden: Metaanalysen berichten einen höheren Lernzuwachs von Lernenden, die mit einer adaptiven Lernumgebung arbeiten im Vergleich zu nicht-adaptiven Systemen (Gerard, Matuk, McElhane & Linn, 2015; Hillmayr et al., 2020). Insbesondere Lernende mit geringerem Vorwissen oder Lernschwierigkeiten profitieren von derartigen Systemen (Anderson-Inman & Horney, 2007; Gerard et al., 2015), da integrierbare Diagnosetools den Bedarf an zusätzlicher Unterstützung von Schülerinnen und Schülern erkennen und diese anbieten können (Choppin et al., 2014).

Digitale Schulbücher haben als adaptive oder adaptierbare Lernumgebungen das Potenzial, die Lernerfahrung der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu individualisieren und sich an ihre Bedürfnisse anzupassen – bzw. es den Lehrkräften (Choppin & Borys, 2017; Choppin et al., 2014) oder den Lernenden (Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017) zu ermöglichen, dies zu tun. Im Hinblick auf Lernende mit visuellen Einschränkungen kann die Adaptierbarkeit von Schriftgröße, -art und -farbe (Choppin et al., 2014; Embong et al., 2012; R. Wilson et al., 2002) oder die Integration von Sprachausgaben (Sheen & Luximon, 2017; Sigarchian et al., 2017) dazu beitragen, dass diese Schülerinnen und Schüler inklusiv am Unterricht teilnehmen können (Rhodes & Rozell, 2015).

Insgesamt haben digitale Schulbücher das Potenzial, die Lernerfahrung der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu individualisieren und sich an ihre Bedürfnisse anzupassen – oder es den Lehrkräften zu ermöglichen, dies zu tun (Choppin & Borys, 2017; Choppin et al., 2014).

## 2.4 Schulbuchqualität

Schulbücher spielen im Unterricht – gerade des Fachs Mathematik – eine große Rolle (s. Abschnitt 2.2). Es scheint daher plausibel, guten Unterricht durch gute Schulbücher zu unterstützen (Ruthven, 2014). Wellenreuther (2013) sieht die Qualität der Unterrichtsmaterialien sogar als „wesentliche Voraussetzung“ (S. 8) für Unterrichtsqualität an. Er spricht in diesem Zusammenhang von einem doppelten Einfluss, da die Materialien oder Schulbücher sowohl das direkte Lernen der Schülerinnen und Schüler als auch das Lehren der Lehrerinnen und Lehrer unterstützen (vgl. Abschnitt 2.2). Im Folgenden werden daher allgemeine Kriterien für gute Schulbücher aufgestellt (Abschnitt 2.4.1). Darüber hinaus wird betrachtet, wie die in der Literatur beschriebenen und in Abschnitt 2.1 paraphrasierten Qualitätsmerkmale guten Unterrichts für die Gestaltung guter Schulbücher von Nutzen sein können (Abschnitt 2.4.2).

### 2.4.1 Merkmale guter Schulbücher

Gemäß Wellenreuther (2010) scheint es naheliegend, Qualitätsstandards für Schulbücher zu fordern und Kriterien für ein *gutes Schulbuch* – ähnlich wie für guten Unterricht (s. Abschnitt 2.1) – zu spezifizieren. Ebenso wie dort scheint es unmöglich, *das* gute Schulbuch zu definieren; nichtsdestotrotz ist eine qualitative Bewertung von Schulbüchern notwendig (Maier, 2009) und – nach der eben angeführten Argumentation – ein wichtiger Teil der Qualitätskontrolle des Unterrichts. In Deutschland durchlaufen Schulbücher in der Regel kein „strenges, empirisch fundiertes Zertifizierungsverfahren“ (Wellenreuther, 2013, S. 481), wie es bspw. in Japan der Fall ist (Wellenreuther, 2010, 2013). Stattdessen basiert zum Beispiel das Zulassungsverfahren für Schulbücher in Bayern auf den Gutachten zweier Sachverständiger (ZLV, 2008, §3). Zur Orientierung gibt das Bayerische Staatsministerium für Bildung und Kultus den Gutachtern und Schulbuchautorinnen und -autoren einen *Kriterienkatalog* zur Hand (KM Bayern, 2016a), der durch schulart- und fächerspezifische Hinweise ergänzt wird (z. B. KM Bayern, 2015, 2016b).

Auf dieser Basis und in Kombination mit Forschungsarbeiten zur Qualität von Schulbüchern werden im Folgenden *Merkmale guter Schulbücher* beschrieben, die für analoge wie digitale Werke gleichermaßen gelten. Besonderheiten digitaler Schulbücher werden explizit betrachtet. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Merkmale gegliedert in Kriterien betreffend das *Layout und die Struktur*, die *Sprache*, den *Inhalt* und das *didaktische Design* – wobei in letzterer Kategorie ein Großteil der Merkmale auf die im Schulbuch verwandten Aufgaben entfällt.

#### 2.4.1.1 Layout & Struktur

Layout und Struktur von *guten* Schulbüchern folgen dem Paradigma, eine kohärente Wissensstrukturierung abzubilden (Wellenreuther, 2010). Grundlegend dafür ist eine übersichtliche Gestaltung des Lehr-/Lernmittels (KM Bayern, 2016a; Maier, 2009; Wellenreuther, 2010). Diese spiegelt sich auf den verschiedenen Strukturebenen (vgl. Rezat, 2008; Valverde et al., 2002) durch eine klare und kohärente Strukturierung des Inhalts wider (Ivić, Pešikan

& Antić, 2013), die eine einfache Navigation innerhalb des Buchs ermöglicht (Maier, 2009). Konkret fordern die verschiedenen Kriterienkataloge die Existenz von Inhalts- und Stichwortverzeichnissen (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013). Insgesamt sollte sich die Struktur des Buchs an der Struktur des jeweiligen Fachs (Ivić et al., 2013; Wellenreuther, 2010) und fachdidaktischen Erkenntnissen (Maier, 2009; Wellenreuther, 2010) orientieren. Sie sollte zudem den (Lern-)Zielen des Schulbuches dienen und Raum für eigenständiges Arbeiten der Schülerinnen und Schüler bieten (Ivić et al., 2013).

Optimierungsmöglichkeiten sieht Wellenreuther (2013) darin, die Struktur des Schulbuchs für Schülerinnen und Schüler offen zu legen, indem Übersichten und Ausblicke gegeben werden, die über die Struktur vorab informieren. Diese Transparenz der Struktur kann durch das Layout bzw. Design des Buchs oder E-Books unterstützt werden, wenn illustratorische und typographische Mittel über das gesamte Buch hinweg konsistent eingesetzt werden (Ivić et al., 2013; Maier, 2009). Insgesamt sollte das Layout zweckdienlich sein und sich an entsprechenden Designtheorien orientieren (Maier, 2009).

Gerade bei digitalen Schulbüchern hat das Design einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Nutzung: Ein gutes Design scheint eine Voraussetzung für einen gelungen Einsatz im Unterricht zu sein (Chong, Lim & Ling, 2009; Drijvers, 2015; Landoni et al., 2000). Um häufig genannte Probleme mit der Handhabung zu vermeiden (Gu et al., 2015; Vassiliou & Rowley, 2008), weisen gute digitale Schulbücher eine möglichst „natürliche“ (Gould, 2011, S. 9), d. h. intuitive Benutzeroberfläche auf. Konkrete Empfehlungen geben R. Wilson et al. (2002, 2003): So dient z. B. das Übernehmen des Konzepts der Seitennummerierung von konventionellen Büchern dazu, den Leserinnen und Lesern eine grobe Orientierung zu geben, an welcher Stelle im Buch sie sich befinden.

### 2.4.1.2 Sprache

Im Bereich der Sprache von (digitalen) Schulbüchern lassen sich zwei Hauptqualitätsmerkmale identifizieren: ihre *Angemessenheit* und ihre *Verständlichkeit*.

Dabei bezieht sich die Angemessenheit der Sprache zum einen auf die Zielgruppe des Schulbuchs. Es ist nicht nur die jeweilige Jahrgangsstufe zu berücksichtigen, sondern auch die intendierte Schulform (KM Bayern, 2015, 2016a). Stellschrauben stellen hierbei bspw. die Wortwahl und die Satzlänge dar (Ivić et al., 2013). Ziel ist es, das Interesse der Schülerinnen und Schüler sprachlich zu wecken („What makes a good textbook?“, 1982) und Demotivation durch zu komplexe Sprache zu vermeiden (Maier, 2009). Zum anderen soll ein gutes Schulbuch sprachlich *angemessen* mit gesellschaftlicher Heterogenität umgehen (KM Bayern, 2016a), insbesondere die Geschlechter gleichberechtigt behandeln (KM Bayern, 2016a; s. hierzu auch die entsprechende Forschung in Fan et al., 2013) und niemanden diskriminieren (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013; Maier, 2009).

Mit angemessener Sprache teilweise einhergehend ist ihre *Verständlichkeit*, der Wellenreuther (2013) eine zentrale Bedeutung für das Lernen von Mathematik beimisst. Auch Britton, Gulgoz und Glynn (1993) konstatieren der Sprachqualität von Lehrtexten einen Einfluss auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler. Daher ist unabhängig von der Zielgruppe eine einfache, konsequent aufeinander bezogene Sprache zu bevorzugen, die eine hohe

kognitive Belastung vermeidet (Wellenreuther, 2013). Allgemein sollte sich die Sprachgestaltung in Schulbüchern auf Ergebnisse der Verständlichkeitsforschung stützen (s. bspw. Langer, Schulz von Thun, Meffert & Tausch, 1973). Sind Erklärungen in Schulbüchern verständlich gestaltet, so nützen sie auch Lehrkräften, effektiv zu unterrichten, indem sie diese unverändert in ihren Unterricht integrieren (Wellenreuther, 2013, s. auch dort für eine detaillierte Beschreibung zur verständlichen Gestaltung von Schulbüchern).

### 2.4.1.3 Inhalt

Die bayerische Verordnung über die Zulassung von Lernmitteln (ZLV, 2008) nennt vier Kriterien, die Schulbücher erfüllen müssen, damit sie zugelassen werden können: Schulbücher müssen gesetzes- und lehrplankonform, zielgruppengerecht und werbefrei sein; Schulbücher für den Religionsunterricht müssen zudem den Glaubensgrundsätzen der jeweiligen Religion entsprechen.

Im Gegensatz zu dem in Abbildung 2.2 veranschaulichten und in Abschnitt 2.2 beschriebenen Modell haben bayerische Schulbücher *alle* Kompetenzen, Inhalte und Ziele des Lehrplans abzudecken. Außerdem dürfen die behandelten Inhalte nicht zu weit über die Vorgaben der staatlichen Curricula hinausgehen (KM Bayern, 2015, 2016a). Diese Einschränkung bezieht sich – bis auf Ausnahmen – auch auf die dort niedergeschriebene Reihung der Inhalte (KM Bayern, 2015). Im Gegensatz dazu fordern wissenschaftliche Arbeiten zur Schulbuchqualität (z. B. Ivić et al., 2013; Maier, 2009) nur eine *Kompatibilität* zu den Rahmenlehrplänen. Der Inhalt von guten Schulbüchern wird daher auf die Erreichung der im Lehrplan festgelegten Zielkompetenzen und Lernziele hinarbeiten (Ivić et al., 2013), wird aber auch der Überprüfung und Sicherung von Grundwissen genügend inhaltlichen Raum geben (KM Bayern, 2015; Ivić et al., 2013).

Neben der bereits erwähnten sprachlichen Zielgruppengerechtigkeit ist in Schulbüchern auf ein der jeweiligen Situation angemessenes Tempo zu achten (KM Bayern, 2016a; Maier, 2009; ZLV, 2008). Gute Schulbücher stellen zudem Verknüpfungen zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler – inklusive ihrer sozio-kulturellen Hintergründe (Ivić et al., 2013; Maier, 2009) – sowie zu ihrem Vorwissen (Wellenreuther, 2010) und zu anderen, verwandten Fachbereichen (Ivić et al., 2013; Maier, 2009) her.

Die gesetzliche Forderung nach Werbefreiheit erstreckt sich explizit nicht auf weiterführende Informationen für Schülerinnen und Schüler (bspw. im Sinne der individuellen Förderung, Maier, 2009), der Freistaat Bayern erlaubt aber keine Verlinkungen von Webseiten außer denen staatlicher Institutionen, deren Langlebigkeit als gesichert gilt (KM Bayern, 2016a).

Darüber hinaus dürfen Schulbücher keine sachlichen Fehler enthalten (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013) und sollten den neuesten Stand der Wissenschaft vermitteln (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013; Maier, 2009).

### 2.4.1.4 Didaktisches Design

Bezüglich des *Didaktischen Designs* orientieren sich gute Schulbücher am aktuellen Forschungsstand der (Fach-)Didaktik (KM Bayern, 2016a). Digitale Schulbücher sollten demen-

sprechend die Vorteile von E-Books aufgreifen und die potenziellen Herausforderungen beachten (s. Abschnitt 2.3.2).

Die Vermittlung des Lernstoffes sollte in einer motivierenden Art und Weise erfolgen (KM Bayern, 2016a; „What makes a good textbook?“, 1982). Dazu kann es hilfreich sein, die Inhalte auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen darzustellen; es gilt das „Prinzip der Variation der Veranschaulichung“ (KM Bayern, 2016a, S. 6; s. auch KM Bayern, 2016b). Auf die Verwendung von Abbildungen ohne didaktische oder strukturerklärende Funktion sollte verzichtet werden (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013).

Es ist förderlich, neue Begriffe direkt bei der ersten Verwendung zu definieren; auf bereits getätigte Definitionen ist dabei im Wortlaut zurückzugreifen (Ivić et al., 2013). Im Zuge der Begriffseinführung verknüpfen gute Schulbücher das neue Wissen mit dem Vorwissen (Ivić et al., 2013; Wiater, 2011).

### Aufgaben in Schulbüchern

Mit Blick auf die Bedeutung von Aufgaben im (Mathematik-)Unterricht (s. Abschnitt 2.2) scheint es nicht verwunderlich, dass Ivić et al. (2013) deren Existenz als Kriterium für gute Schulbücher fordern. Es ist also naheliegend, dass die Qualität der Schulbuchaufgaben Teil der Qualität von Schulbüchern ist. Im Folgenden werden daher Kriterien guter Aufgaben zusammengestellt.

Die Aufgabenstellung sollte verständlich formuliert sein und realistischen Umfang aufweisen (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013). Die Verwendung geeigneter Operatoren ist dabei hilfreich (KM Bayern, 2015). Ziel ist es, Aufgaben zu stellen, die auch im Selbststudium bearbeitbar sind (Wellenreuther, 2013) – bspw. durch Angabe einer Lösung unterstützt (Wellenreuther, 2010), um Zeit für die Lehrkräfte zu schaffen, Schülerinnen und Schüler individuell im Unterricht zu betreuen (Wellenreuther, 2013). Interaktive Schulbücher können dies durch automatisches Feedback begünstigen (z. B. Choppin et al., 2014; Embong et al., 2012; Lew, 2016). Ist es möglich, Aufgaben eigenständig zu bearbeiten, so können Schülerinnen und Schülern damit den Lernstoff wiederholen z. B. im Zuge der Vorbereitung auf Leistungsnachweise (KM Bayern, 2016a; Wiater, 2011). Dabei sollte auch Gelegenheit gegeben werden, Grundwissen zu überprüfen (KM Bayern, 2016a; Wiater, 2011) oder sich als Schülerin oder Schüler selbst zu testen (Ivić et al., 2013; Maier, 2009; Wellenreuther, 2010).

Inhaltlich behandeln Aufgaben guter Schulbücher realistische und relevante Sachsituationen, die – wo möglich – einen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler herstellen (KM Bayern, 2016a; Wellenreuther, 2013; Wiater, 2011). Dabei sind den Lehrkräften durch Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades Optionen zur Differenzierung an die Hand zu geben (KM Bayern, 2016a; Ivić et al., 2013; Maier, 2009; Wellenreuther, 2010; Wiater, 2011). Gute *interaktive* Schulbücher passen in diesem Zusammenhang das Anforderungsniveau der Aufgaben adaptiv an die Lernenden an (s. Abschnitt 2.3.2.2).

Aufgaben in Schulbüchern sollten auf die in den Lehrplänen verankerten Ziele und Kompetenzen hinarbeiten (Ivić et al., 2013) und im Fach Mathematik insbesondere das gesamte

Kompetenzspektrum gleichermaßen fördern (KM Bayern, 2015). Wichtig ist außerdem, dass die Übungsaufgaben der nachhaltigen Konsolidierung der Inhalte dienen und das neue Wissen mit dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler vernetzen (Wellenreuther, 2010, 2013; Wiater, 2011).

Idealerweise werden die Aufgabentypen hinsichtlich Sozialform und Offenheit (Ivić et al., 2013; Wellenreuther, 2010) variiert und fördern selbstreguliertes Arbeiten (KM Bayern, 2015, 2016a; Wellenreuther, 2013), Kreativität und kritisches Denken (Ivić et al., 2013).

## 2.4.2 Implikationen der Merkmale guten Unterrichts

Ruthven (2014) sieht eine „*potential role of textbooks in supporting quality of teaching*“ (S. 28). Wie guter Unterricht aussehen kann, wurde in Abschnitt 2.1 zusammengefasst; wie die dort paraphrasierten Merkmale guten Unterrichts auf (digitale) Schulbücher angewandt werden bzw. wie diese guten Unterricht in jenen Merkmalen unterstützen können, wird im Folgenden erläutert.

### Klassenführung

Das Merkmal der *Klassenführung* scheint durch Unterrichtsmaterial nur in geringem Maße beeinflussbar. Ein Aspekt des *classroom managements*, das im Zusammenhang mit Schulbüchern betrachtet werden kann, ist die Vermeidung von Ablenkungen im Unterricht. Als Element des Unterrichts kann ein Schulbuch – oder ein Teil davon – Quelle einer solchen Ablenkung sein. Diese Befürchtung betrifft das digitale Schulbuch in besonderem Maße (s. Abschnitt 2.3.2.1). Ein Beispiel sind Figuren, welche die Lernenden in ihrem Lernfortschritt begleiten sollen (Elliott, Rickel & Lester, 1999). Während sich solche *Agents* als hilfreich erweisen können, ist es ebenso möglich, dass sie – sofern mit ihnen interagiert werden kann – den Fokus der Schülerinnen und Schüler weg vom Lerninhalt lenken. Im Sinne der *Cognitive Load Theory* (z. B. Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011) stellen solche Elemente einen lernhinderlichen *extraneous cognitive load* dar. Derartige ablenkende kognitive Last kann auch in Aufgabenstellungen in Erscheinung treten, bspw. in Form von unnötigen Zusatzinformationen (Lehner, 2019).

### Klarheit und Strukturiertheit

Das Qualitätsmerkmal der *Klarheit und Strukturiertheit* von Unterricht (Helmke, 2009; Meyer, 2014) lässt sich ohne nennenswerte Einschränkungen direkt auf Schulbücher übertragen: Ihre Strukturiertheit wird durch die Gliederung ersichtlich; sie kann optimiert werden durch Ausblicke, Übersichten und Zusammenfassungen des Stoffs in den jeweiligen Buchabschnitten, durch die ausdrückliche Angabe von Lernzielen und die explizite Verknüpfung zu bereits Gelerntem (vgl. Abschnitt 2.4.1).

In Arbeiten zur Unterrichtsqualität wird im Zusammenhang mit der Klarheit von Unterricht vor allem die sprachliche Verständlich- und Verstehbarkeit betont. Dieselbe Forderung

gilt uneingeschränkt für die Sprache, die in Schulbuchtexten verwendet wird, siehe Abschnitt 2.4.1.2. Des Weiteren betrifft – wie im Unterricht – die Forderung der Klarheit auch den Inhalt der Bücher: Das Vermittelte muss fachlich korrekt und inhaltlich kohärent sein (Helmke, 2009; Slavin, 1994). Gleiches gilt für im Unterricht gestellte Aufgaben (z. B. Meyer, 2014).

### **Konsolidierung und Sicherung**

Im Bereich des Unterrichtsqualitätsmerkmals der *Konsolidierung und Sicherung* spielen geeignete Übungsaufgaben eine wichtige Rolle (vgl. Brophy, 2002; Helmke, 2009). Gute Schulbücher können die Lehrkräfte hier unterstützen, indem sie eben solche anbieten. Um ein *intelligentes Üben* gemäß Meyer (2014) zu ermöglichen, müssen die Übungsaufgaben für die Lernenden angemessen sein (engl.: *appropriateness*, vgl. Slavin, 1994), insbesondere also auf unterschiedliches Vorwissen ausgelegt sein. Schulbücher sollten daher ein differenziertes Angebot an Aufgaben – ggf. unterstützt durch integrierte Hilfestellungen – für Lehrkräfte wie Schülerinnen und Schüler bereit halten (s. auch Meyer, 2014; Wellenreuther, 2013).

In diesem Zusammenhang zeigt sich ein Vorteil digitaler Schulbücher, da sie nicht nur Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades und mit variablen Unterstützungshilfen integrieren können, sondern diese Merkmale auch selbstständig an die Lernenden anpassen können (s. Abschnitt 2.3.2.2).

Für die Wirksamkeit des Übens unerlässlich ist zeitnahes Feedback (z. B. Brophy, 2002). In E-Books können automatische Rückmeldungen implementiert werden, welche die Empfehlungen zu förderlichem Feedback (z. B. Hattie & Timperley, 2007) umsetzen (s. Abschnitt 2.3.2.2). Dadurch kann ein gutes digitales Schulbuch die Lehrkräfte entlasten. In der Studie von Rezat (2019) zu Feedback in E-Books zeigt sich jedoch, dass es noch fokussierter Forschung bedarf, welche Arten von Feedback in digitalen Schulbüchern gewinnbringend sind.

### **Aktivierung**

Schülerinnen und Schüler können durch kooperatives Lernen im Unterricht *sozial aktiviert* werden (Helmke, 2009). Für Brophy (2002) zählt die Schaffung von Möglichkeiten, kooperativ zu lernen, zu zwölf Merkmalen effektiven Lehrens, da kooperatives Lernen Interesse und Wertschätzung gegenüber dem Unterrichtsfach fördern kann. Zudem zeigt die Meta-Analyse von Kyndt et al. (2013) mittlere positive Effekte von kooperativem Lernen auf den Lernerfolg. Damit solches Lernen für alle Beteiligten gewinnbringend ist, erfordert es u. a. eine umsichtige Planung von Seiten der Lehrkraft (vgl. Slavin, 1995). Schulbücher können hier gerade bezüglich der zu verwendenden Materialien durch ein entsprechendes Angebot die Planungszeit verkürzen.

*Kognitiv aktivierender* Unterricht kann die Lehrkräfte entlasten, wenn er Schülerinnen und Schüler zum selbstständigen Lernen anregt (Helmke, 2009). Dafür benötigen sie (meta-)kognitive Lernstrategien, die ihnen zumeist erst vermittelt werden müssen. Schulbücher tragen hierzu bei, wenn sie vom rein fachlichen abweichen und solche Strategien – und zwar an den passenden Stellen – explizit erwähnen und demonstrieren (Brophy, 2002) sowie

den Lernenden den Raum geben, diese Strategien anzuwenden (Brophy, 2002; Helmke, 2009). In digitalen Versionen können die Lernstrategien zudem ins automatische Feedback einfließen, was positive Effekte auf den Lernerfolg bewirkt (Hattie & Timperley, 2007). Unabhängig von der Art des Schulbuchs sieht Helmke (2009) in Aufgaben, die mehrere korrekte Lösungen aufweisen, ein passendes Angebot zur Förderung selbstständigen oder selbstregulierten Lernens.

### Motivierung

Da Schulbücher vorrangig den Lerninhalt vermitteln wollen, sind ihre Möglichkeiten, die *Motivation* der Schülerinnen und Schüler zu fördern, primär im Bereich der intrinsischen Motivation zu sehen. Nach Slavin (1994) kann Motivierung durch Überraschungen – bspw. auch inhaltlicher Art in Form eines *kognitiven Konflikts* (vgl. Helmke, 2009) – oder Herstellen eines Bezugs zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler erfolgen. Ebenso können interessante und variierte Aufgabenstellungen Motivation fördern (Brophy, 2002).

Digitale Schulbücher können zudem Motivationssysteme integrieren und durch Token-Systeme oder Spielarten der *Gamification* Motivation extrinsisch fördern (Friedemann, Jantke & Baumbach, 2016). Zudem zeigen sich in einigen Studien motivierende Effekte von sog. neuen Medien wie digitalen Schulbüchern (s. bspw. Hillmayr et al., 2020, für eine Meta-Analyse). Dabei ist jedoch zu beachten, dass diese Effekte oft auch durch einen *Neuheitseffekt* zu erklären sind, der mit einem Methodenwechsel im Unterricht begründet werden kann (vgl. Walberg & Paik, 2003).

### Lernförderliches Klima

Ein wichtiger Aspekt eines *lernförderlichen Klimas* im Unterricht ist der Umgang mit Fehlern und Feedback (Helmke, 2009). Wie unter dem Punkt Konsolidierung und Sicherung bereits erwähnt, können digitale Schulbücher die Lehrkraft in diesem Bereich unterstützen; da die Formulierung des Feedbacks in diesem Fall nicht mehr in den Händen der Lehrkraft liegt, sondern in denen der Schulbuchautorinnen und -autoren bzw. der Programmiererinnen und Programmierer, ist es an ihnen, durch u. a. wertschätzende Formulierungen dafür zu sorgen, dass das automatische Feedback zu einem lernförderlichen Klima beiträgt. Weitere Punkte, die in der Literatur zu diesem Unterrichtsqualitätsmerkmal gezählt werden, sind eine entspannte Atmosphäre im Unterricht (z. B. Meyer, 2014) oder die Gestaltung von Lehrer-Schüler-Gesprächen (z. B. Helmke, 2009). Eine Unterstützung von Seiten der Schulbücher scheint hier nur bedingt möglich.

### Schülerorientierung

Eine Möglichkeit, Unterricht *schülerorientiert* zu gestalten, ist die Einbindung der Schülerinnen und Schüler in den Prozess der Inhaltssequenzierung (Helmke, 2009). In der Tat gilt es für Pepin et al. (2015) als charakterisierendes Merkmal *digitaler* Schulbücher, dass die Reihung der Inhalte verändert werden kann (vgl. Abschnitt 2.3.1). Wenn E-Books in schulweite Informationssysteme eingebunden sind oder Lehrkräften Livedaten zur Verfügung

stellen (vgl. Abschnitt 2.3.2.2), ist es zudem denkbar, Formen des Schülerfeedbacks direkt in E-Books zu integrieren, da in diesen Fällen ein entsprechender Kommunikationskanal bereits besteht. Andere Aspekte der Schülerorientierung, die sich mehr auf die Lehrkräfte persönlich beziehen, scheinen durch Schulbücher schwer aufzugreifen.

### Kompetenzorientierung

*Kompetenzorientierter Unterricht*, wie er in den Werken zu Unterrichtsqualität als guter Unterricht beschrieben ist (z. B. Helmke, 2009), scheint ohne kompetenzorientierte Unterrichtsmaterialien schwer möglich. Gerade im Mathematikunterricht ist das Schulbuch das Hauptmaterial für die Unterrichtsgestaltung (z. B. Valverde et al., 2002). Um die Kompetenzorientierung des (Mathematik-)Unterrichts mithilfe von Schulbüchern zu fördern, sollten diese also ebenso kompetenzorientiert sein (vgl. Abschnitt 2.4.1). In erster Linie bedeutet dies, dass kompetenzorientierte Aufgabenstellungen zur Verfügung stehen müssen. Darüber hinaus hat die Forderung der Kompetenzorientierung Auswirkungen auf den Erstellungsprozess von Schulbüchern: Die Vermittlung der Inhalte in einem kompetenzorientierten Unterricht erfolgt von langfristigen Zielen her gedacht und muss daher entsprechend geplant werden (Helmke, 2009). Diese Implikation gilt im selben Maße für die Planung des Buchs: Auch die Strukturierung des Buchinhalts ist „vom Ende her“ zu denken und muss bereits in der Erstellung so angelegt werden, dass das Buch auf übergreifende Kompetenzziele hinarbeitet.

### Umgang mit Heterogenität

Für Wellenreuther (2013) stellen Lehrbücher, die für differenzierten Unterricht ausgelegt sind, einen wichtigen Grundstock für den *Umgang mit Heterogenität* im Klassenzimmer dar. Um jeder Schülerin und jedem Schüler eine möglichst *individuelle Förderung* zukommen zu lassen (vgl. Meyer, 2014), können Schulbücher unterschiedliche Aufgaben anbieten, so dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler nicht überfordert werden und gleichzeitig leistungsstärkere Lernende Möglichkeiten finden, ihre Kompetenzen zu erweitern. Des Weiteren können Lösungshilfen integriert werden, die den Lernenden die Gelegenheit zum selbstregulierten Lernen geben (z. B. Reiss & Hammer, 2013; Usiskin, 2018) und dadurch die Lehrkräfte entlasten.

Digitale Schulbücher erlauben es hier, Aufgaben wie Lösungshilfen adaptiv zu gestalten (z. B. Leutner, 1992, vgl. Abschnitt 2.3.2.2) und so Lehrerinnen und Lehrer zu unterstützen, mit Heterogenität im Klassenzimmer umzugehen. Die Verbindung von guten digitalen Schulbüchern und gutem Unterricht wird hier besonders deutlich, da sich Helmke (2009) sich in seinen Merkmalen guten Unterrichts für den Bereich Umgang mit Heterogenität im Klassenzimmer explizit auf dieselben Modelle bezieht, die Leutner (1992) im Bereich des Zwecks der Adaption von digitalen Lernumgebungen beschreibt.

### Angebotsvariation

So wie Unterricht möglichst abwechslungsreich gestaltet werden sollte (Meyer, 2014), können auch Schulbücher entsprechend facettenreich sein. So ist es bspw. im Bereich der Sozialformen denkbar, direkt im Buch Vorschläge für Partner- oder Gruppenarbeiten bereit zu stellen, indem andere am Unterrichtsgeschehen beteiligte Personen im Schulbuchttext explizit einbezogen werden.

Ein weiterer Teil des Unterrichtsangebots, das variiert werden kann, besteht in den Aufgaben (Helmke, 2009). Dieser Aspekt der Angebotsvariation lässt sich daher direkt auf Schulbücher bzw. die darin enthaltenen Aufgaben beziehen. Neben Aufgaben in unterschiedlichen Anforderungsniveaus (s. o.) sollten also auch unterschiedliche Kontexte und Vorgehensweisen angeboten werden. In Abschnitt 1.3.1.3 wurde bereits argumentiert, dass auch eine Variation der verwendeten Repräsentationen mathematischer Objekte im Mathematikunterricht von Vorteil ist; diese lässt sich durch digitale Formate geeignet umsetzen (s. Abschnitt 2.3.2.2).

Digitale Schulbücher scheinen besonders geeignet, diesen Bereich der Unterrichtsqualität zu unterstützen, da sie zum einen unterschiedliche Angebote wie Video und Audio direkt integrieren können. Zum anderen können sie – bei einer hinreichend intelligenten Programmierung – durch adaptive Steuerung den jeweiligen Lernenden individuelle inhaltliche Angebote machen. Zudem kann der Einsatz digitaler Schulbücher allein – sofern er nicht der Norm entspricht – bereits einen Methodenwechsel darstellen und so zu gutem Unterricht beitragen.

### Zusammenfassung

Nach dem Angebots-Nutzungs-Modell wird Unterricht als ein *Angebot* verstanden, das von Schülerinnen und Schülern genutzt werden kann, um Kompetenzen zu erwerben und andere Unterrichtsziele zu erreichen. Auf die Trilogie aus Angebot, Nutzung und Ertrag haben Schulbücher einen erheblichen Einfluss – gerade im Mathematikunterricht, wo sie zu den wichtigsten Unterrichtsmaterialien zählen. Die Qualität der Schulbücher wirkt sich daher auf die Qualität des Unterrichts aus. Dies trifft auch auf *digitale* Schulbücher zu, die sich von konventionellen insbesondere in Bezug auf die Interaktionsmöglichkeiten zwischen E-Book und Lernenden unterscheiden. Hier entstehen auf der einen Seite Herausforderungen, die mit der Digitalisierung einhergehen. Auf der anderen Seite eröffnen sich in interaktiven Schulbüchern vielfältige Potenziale, das Lehren und Lernen von Mathematik über die Möglichkeiten traditioneller Bücher hinaus zu fördern, wie dynamische Repräsentationen, adaptive Aufgaben oder automatisches Feedback.



# 3 Nutzung von (digitalen) Schulbüchern im Unterricht

## Überblick

Love und Pimm (1996) stellen einen Mangel an Forschung zur Nutzung von (Mathematik-)Schulbüchern durch Schülerinnen und Schüler fest. Dieser Mangel wird auch in neuerer Forschung bestätigt (Rezat, 2009; Yerushalmy, 2014). So finden sich im Review von Steen und Madsen (2018) zu Forschung über Mathematikschulbücher nur zwei Studien, die sich dieser Thematik widmen.

Das folgende Kapitel trägt die wenigen Ergebnisse dieser Forschung zusammen. Zunächst wird das theoretische Modell von Schulbuchnutzung nach Rezat (2006a, 2009) beschrieben (Abschnitt 3.1). Anschließend wird die Forschung zur Nutzung konventioneller (Mathematik-)Schulbücher durch Schülerinnen und Schüler betrachtet. Dabei kommen auch mögliche Erklärungsansätze für den geringen Umfang derartiger Forschung zur Sprache (Abschnitt 3.2). Zum Abschluss thematisiert Abschnitt 3.3 die Nutzung digitaler (Mathematik-)Schulbücher. In diesem Zusammenhang wird die Analyse von Nutzungsdaten, die von den digitalen Büchern während des Arbeitsprozesses der Schülerinnen und Schüler unauffällig aufgezeichnet werden können (*Prozessdaten*), als neuartige Forschungsmethode zur Untersuchung von Schulbuchnutzung vorgestellt.

## 3.1 Schulbuchnutzungsmodell nach Rezat (2006a)

Die Thematik der Schulbuchnutzung im Unterricht betreffen einige Dichotomien, die sich nach Rezat (2006a) zu den folgenden Fragen zusammenfassen lassen:

1. Ist das Schulbuch Gegenstand oder Mittel des Lernens?
2. Richtet sich das Schulbuch an Lehrkräfte oder Schülerinnen und Schüler?
3. Sollen Lehrkräfte die Nutzung des Schulbuchs mediiern oder ist das Schulbuch auf eine Nutzung ohne Lehrkraft ausgelegt?

Die Beantwortung dieser Fragen wird je nach Schulbuch unterschiedlich ausfallen; dementsprechend unterschiedlich ist auch die Nutzung der jeweiligen Bücher zu betrachten. Ebenso variabel sind daher die Modelle für Schulbuchnutzung, die Rezat (2006a, 2009) basierend auf der Tätigkeitstheorie entwickelt und die im Folgenden vorgestellt werden.

In der *Tätigkeits-* oder *Aktivitätstheorie* (Vygotsky, 1997; s. auch Engeström, Mietinen, Punamäki et al., 1999) werden Aktivitäten beschrieben, in denen die Interaktion zwischen

Subjekt und Objekt durch ein Artefakt – oder auch durch Personen – mediiert wird. Verbildlicht wird diese Mediation in der Regel durch Dreiecke, wobei eine Ecke des Dreiecks das Subjekt, eine andere das Objekt und die dritte Ecke das mediiierende Artefakt darstellt. Zumeist wird das Dreieck so orientiert, dass die Artefaktecke nach oben zeigt (s. Abbildung 3.1). Daher wird in Abbildungen meist darauf verzichtet, die Rollen der einzelnen Ecken auszuführen.

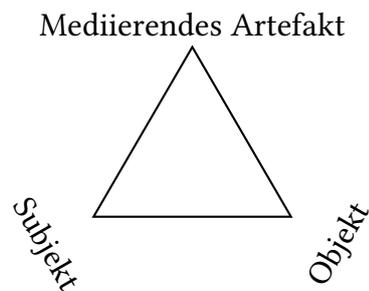


Abbildung 3.1. Typische Darstellung einer Interaktion zwischen Subjekt und Objekt, die durch ein Artefakt mediiert wird, nach der Tätigkeitstheorie.

In Rezats (2006a, 2009) erstem Modell zur Schulbuchnutzung (s. Abbildung 3.2) ist das Schulbuch das Mittel, mit dem Schülerinnen und Schüler Mathematik lernen; es ist das Artefakt, das die Interaktion zwischen den Lernenden und der Mathematik mediiert. Die Lehrkraft ist in dem Modell nicht berücksichtigt. Daher scheint es mit gängiger mathematikdidaktischer Theorie unvereinbar, welche die Lehrerin oder den Lehrer als Mediator der Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern ansieht (z. B. Love & Pimm, 1996; Pepin & Haggarty, 2001).

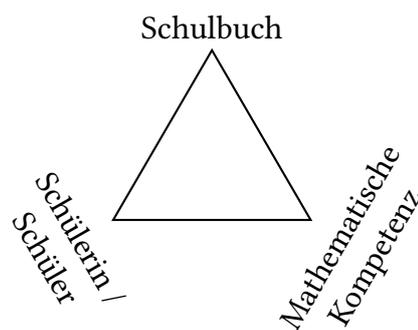


Abbildung 3.2. Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern mit dem Ziel, mathematische Kompetenz zu erreichen, nach Rezat (2006a, S. 411).

Modell 2 (Rezat, 2006a) adressiert dieses Defizit. In ihm tritt die Lehrkraft an die mediiierende Stelle und das Schulbuch wird zum Lernobjekt (s. Abbildung 3.3). Im Hinblick auf die in Abschnitt 2.2 beschriebene Rolle des Schulbuchs als potenziell umgesetztes Curriculum im Unterricht, scheint dieses Modell jedoch nicht völlig adäquat, da es übergeordnete Ziele wie die zu erwerbenden Kompetenzen ausblendet.

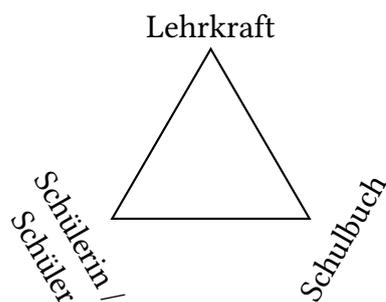


Abbildung 3.3. Von der Lehrkraft medierte Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern zum Erlernen des Schulbuchinhalts, nach Rezat (2006a, S. 412).

Eine mögliche Lösung bietet Modell 3 (Rezat, 2006a, s. Abbildung 3.4), das die beiden bisher vorgestellten Modelle vereint: Die Schülerin oder der Schüler wird als Nutzerin oder Nutzer des Schulbuchs modelliert. Diese Nutzung wird durch die Lehrkraft mediert; ihr Ziel ist mathematische Kompetenz.

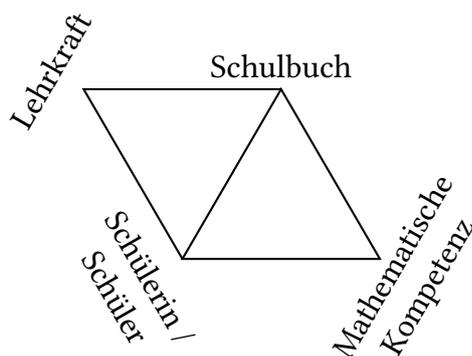


Abbildung 3.4. Von der Lehrkraft medierte Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern mit dem Ziel, mathematische Kompetenz zu erreichen, nach Rezat (2006a, S. 412).

Während das Modell für den Nutzung von Schülerinnen und Schüler adäquat erscheint, blendet es eine wichtige Komponente aus: Auch Lehrerinnen und Lehrer nutzen Schulbücher (z. B. Love & Pimm, 1996; Pepin & Haggarty, 2001, vgl. Abschnitt 2.2) – bspw. um Unterricht zu planen. Eine Integration der Lehrkraftnutzung in das Modell der Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern lässt sich nach Rezat (2006a) über die dreidimensionale Struktur eines Tetraeders darstellen (s. Abbildung 3.5).<sup>1</sup> Das Modell schließt außerdem ein *Nicht-Nutzen* des Schulbuchs von Seiten der Lehrkraft ein, um mathematische Inhalte und Kompetenzen zu vermitteln (vgl. Love & Pimm, 1996; Valverde et al., 2002).

Dass das Modell, in dem umfangreiche Interaktionen um das Artefakt Schulbuch integriert sind, allgemein gehalten ist, kann auch als Limitation angesehen werden (Rezat, 2013): Weder für die einzelnen Ecken noch für die über die Kanten modellierten Beziehungen wird Theorie zur Verfügung gestellt. Für die einzelnen Aspekte existieren in der Literatur

<sup>1</sup>Für eine Einbindung des Modells in das soziale Umfeld der Schule siehe Rezat und Sträßer (2012).

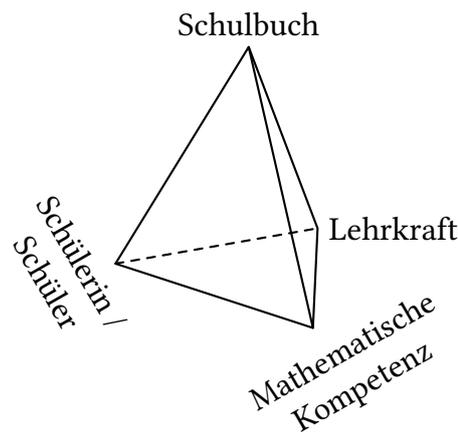


Abbildung 3.5. Modell zur Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern sowie von Lehrkräften, nach Rezat (2006a, S. 413).

teilweise eigenständige Ansätze; zu nennen ist hier bspw. das Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht (Helmke, 2009, s. Abschnitt 2.1.2).

Für die vorgestellten Modelle ist die Digitalität des Schulbuchs unbedeutend; sie können sowohl auf die Nutzung digitaler als auch konventioneller Schulbücher angewandt werden. Schuh, Van Horne und Russell (2018) stellen explizite Modelle zur Nutzung digitaler Schulbücher auf, die mit den hier beschriebenen Modellen nach Rezat (2006a) weitgehend übereinstimmen.

## 3.2 Nutzung konventioneller Schulbücher durch Schülerinnen und Schüler

Ähnlich zu dem in Abschnitt 2.2 vorgestellten Unterschied zwischen vorgesehenem und umgesetztem Curriculum ist bei Schulbüchern zwischen ihrer *intendierten* und ihrer *tatsächlichen* Nutzung zu unterscheiden (Rezat, 2011). Die tatsächliche Nutzung der Schülerinnen und Schüler muss der intendierten nicht entsprechen (Rezat, 2006b, 2009, 2011; Weinberg, Wiesner, Benesh & Boester, 2012). Ergebnisse zur tatsächlichen Nutzung werden in Abschnitt 3.2.3 beschrieben; der folgende Abschnitt 3.2.1 erläutert in der Literatur berichtete intendierte Nutzungsarten.

### 3.2.1 Intendierte Nutzung

Unter der intendierten Nutzung eines Schulbuchs und seiner Komponenten ist die Nutzung zu verstehen, die von den jeweiligen Autorinnen und Autoren – oder im Kontext des Unterrichts von der Lehrkraft – vorgesehen wurde (Rezat, 2011; Weinberg et al., 2012). Sie unterscheidet sich in der Regel zwischen den einzelnen Strukturelementen<sup>2</sup> im Buch,

<sup>2</sup>In den in Deutschland verbreiteten Mathematikschulbüchern bspw. Lehrtexte, Kernwissen, Zusatzinformationen, Einstiegsaufgaben, Aufgaben mit Lösungen, Musterbeispiele, Übungsaufgaben, Wiederholungs-

weshalb Rezat (2011) die Schulbuch*analyse* (z. B. Rezat, 2006c; Valverde et al., 2002) als eine wichtige Vorarbeit von Nutzungsstudien ansieht. Außerdem übt die Struktur des Schulbuchs einen Einfluss auf die Nutzung aus: Je komplexer und spezifischer die Struktur des Buchs, desto spezifischer und elaborierter fallen die Nutzungsschemata aus, die Schülerinnen und Schüler für die Nutzung benötigen. In diesem Zusammenhang ist festzuhalten, dass Mathematikschulbücher – als in der Regel hochstrukturierte Bücher – sehr spezielle Nutzungsschemata bedingen, welche die Schülerinnen und Schüler zum Teil zunächst entwickeln müssen (Rezat, 2013). Dies trifft in besonderer Weise auf *digitale* Mathematikschulbücher zu (vgl. Abschnitt 2.3.2.1). Des Weiteren kann eine entsprechende Kennzeichnung der unterschiedlichen Strukturelemente im Buchlayout den gezielten Zugriff auf bestimmte Komponenten vereinfachen und so gewisse Nutzungsweisen ermöglichen (s. Rezat, 2011).

Ausgehend von einer Strukturanalyse deutscher Mathematikschulbücher für die Sekundarstufe identifiziert Rezat (2006c, 2009, 2011) vier intendierte Zwecke der Nutzung durch Schülerinnen und Schüler: Erstens sollen sich Lernende neue mathematische Inhalte mit dem Schulbuch eigenständig aneignen. Dazu dienen in typischen Schulbüchern die Einsteige und die Einstiegsaufgaben, weitere Aufgaben, für die Lösungen bereitgestellt sind, der Buchtext sowie Kästen mit Merkwissen, die den Inhalt zusammenfassen. Zweitens sind Schulbücher dazu vorgesehen, bei der Bearbeitung von Aufgaben zu Hilfe genommen zu werden. Zu diesem Zweck können Zusatzinformationen gegeben sein, die besonders der Unterstützung dienen, oder Musterbeispiele, aus denen sich Lösungsstrategien ableiten lassen. Drittens ergibt sich eine intendierte Nutzung für die Bearbeitung von Aufgaben im Sinne eines *intelligenten Übens* (Meyer, 2014), bei dem das Erlernte angewandt, konsolidiert und mit früherem Wissen vernetzt wird. Schulbücher können dafür ein umfangreiches Angebot verschiedener Aufgaben für Übung, Wiederholung oder Anwendung bieten (vgl. Abschnitt 2.4.1). Viertens haben Schulbücher den beabsichtigten Zweck, Schülerinnen und Schülern die selbstständige Überprüfung des eigenen Lernfortschritts zu ermöglichen. Hierfür werden zum Teil spezielle Aufgaben bereitgestellt, zu denen sich – im Vergleich zu anderen Aufgabenstellungen des Schulbuchs – Lösungen nachschlagen und somit die eigenen Bearbeitungen validieren lassen.

Für den tertiären Bildungsbereich beschreiben Weinberg et al. (2012) drei Situationen zur Nutzung von Mathematiklehrbüchern basierend auf den Erfahrungen von 27 Studierenden: die Vorbereitung der Lehrveranstaltung, die Bearbeitung von Hausaufgaben und die Klausurvorbereitung. Zusätzlich führen sie neun potentielle Gründe auf, ein Lehrbuch zu nutzen: (1) das eigene Verständnis verbessern, (2) Definitionen und Sätze verstehen, (3) Definitionen und Sätze nachschlagen, (4) Zusammenfassungen erstellen, (5) Aufgabenstellungen lesen, (6) Lösungen nachschlagen (ohne die Aufgaben selbst bearbeitet zu haben), (7) Übungsaufgaben lesen, um häufige Ideen zu erkennen, (8) eigene Lösungen anhand von gegebenen überprüfen, (9) weitere Aufgaben bearbeiten, um den eigenen Lernstand zu überprüfen.

Diese Gründe lassen sich in die von Rezat (2006c, 2009, 2011) aufgestellten Nutzungszwecke einordnen: Gründe (1)–(4) dienen dem Aneignen von neuem bzw. vertieftem Wissen, Nutzungen aufgrund der in (5)–(6) beschriebenen Motive unterstützen die Bearbeitung von Aufgaben, Gründe (7) und (8) beschreiben Aspekte des Übens und Grund (9) erläutert eine

---

aufgaben oder weiterführende Aufgaben (Rezat, 2006c, 2008).

Lernfortschrittsüberprüfung mittels Aufgaben. Die von Weinberg et al. (2012) beschriebenen Gründe für eine Lehrbuchnutzung können daher als feinere Aufschlüsselung der intendierten Nutzung nach Rezat (2006c, 2009, 2011) angesehen werden.

### 3.2.2 Erhebungsmethoden

Love und Pimm (1996) führen die Schwierigkeit, valide Daten über die Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schüler zu erheben, als Grund dafür an, dass zu diesem Bereich wenige Forschungsarbeiten vorliegen (s. auch Rezat & Sträßer, 2015). Studien zur Mathematikschulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern stützen sich zur Datenakquise in der Regel auf eine – oder eine Kombination – der folgenden Erhebungsmethoden:

- Fragebögen (z. B. Berry, Cook, Hill & Stevens, 2010; Cuttler, 2019; French et al., 2015)
- Tagebücher (z. B. Rezat, 2009, 2011; Weinberg et al., 2012)
- Interviews (z. B. Gallos Cronberg, 2016; Rezat, 2009, 2011; Weinberg et al., 2012)
- Beobachtung (z. B. Randahl, 2012; Rezat, 2009, 2011)
- Videographie (z. B. Gallos Cronberg, 2016; Lithner, 2003)

Diese Methoden kommen zum Teil auch in Nutzungsanalysen von digitalen Schulbüchern zum Einsatz (z. B. Landrum, Gurung & Spann, 2012; Pohl & Schacht, 2019; Wang & Xing, 2019, mehr zu Forschung über die Nutzung von digitalen Schulbüchern in Abschnitt 3.3). Ihnen ist allen gemein, dass sie den Kriterien nicht gerecht werden, die nach Rezat (2009, basierend auf Lamnek, 2005) eine Erhebungsmethode zur Schulbuchnutzung idealerweise erfüllt:

1. Die Erhebungsmethode soll die faktische Nutzung des Schulbuchs erheben.
2. Die Erhebungsmethode darf die Schulbuchnutzung nicht beeinflussen, um ökologische Validität zu gewährleisten. Insbesondere sollte sie unabhängig von Zeit und Ort der Nutzung einsetzbar sein.
3. Die Situation, in der die Schulbuchnutzung stattfindet, soll nach Möglichkeit ebenfalls erfasst werden.
4. Aus den erhobenen Daten soll hervorgehen, welche Teile des Schulbuchs genau genutzt wurden. Zusätzlich sollten Rückschlüsse auf den Zweck der Schulbuchnutzung möglich sein.

So erscheint die Verwendung von Fragebögen „gänzlich ungeeignet“ (Rezat, 2009, S. 116), da sie das Selbstkonzept der Nutzung abfragen, nicht die tatsächliche Nutzung. Auch ist die konkrete Erfassung der genutzten Teile des Schulbuchs denkbar schwierig. Zudem erfolgt die Befragung nicht im natürlichen Kontext der Nutzung, so dass keine ökologische Validität gegeben ist (Rezat, 2009). Ähnliche Probleme zeigen Interviews mit Schülerinnen und Schülern zu deren Schulbuchnutzung und Tagebücher, in denen die tägliche Nutzung festzuhalten ist: Wie bei Fragebögen beschreiben die Daten, die mit diesen Methoden erhoben werden, die *berichtete* Schulbuchnutzung. Diese kann u. a. durch soziale Kriterien – bspw. welche Nutzung erwartet wird oder erwünscht ist – von der tatsächlichen Nutzung abweichen (Rezat & Sträßer, 2015). Die drei Erhebungsmethoden verbindet dabei, dass die

Erhebung nicht während, sondern mit einem gewissen zeitlichen Abstand zur Nutzung des Schulbuchs erfolgt, wodurch die Ergebnisse zusätzlich verzerrt werden können.

Die Beobachtung und Videographie – Letzteres eine zeitversetzte Form des Ersteren – sind gleichermaßen problembehaftet: Die Anwesenheit der beobachtenden Person(en) oder Videokamera(s) stört die Authentizität der Situation, in der das Schulbuch genutzt wird. Studien, die sich auf Videoaufzeichnung oder Beobachtung zur Datenerfassung stützen, finden zuweilen außerdem unter künstlichen Laborbedingungen statt, was die ökologische Validität weiter verletzt (z. B. Lithner, 2003; Pohl & Schacht, 2019). Darüber hinaus ist eine präzise Dokumentation über die genutzten Teile des Schulbuchs kaum zu leisten. Allerdings erlauben es die beiden Methoden, die faktische Nutzung und die situativen Bedingungen zu erfassen.

Ein in den Kriterien von Rezat (2009) nicht beachteter Punkt ist der *Erhebungsaufwand*. Während die Erfassung der Schulbuchnutzung bei einer größeren Anzahl an Lernenden mittels Fragebögen effektiv umzusetzen ist, erfordert das Durchführen und Codieren von Interviews oder Unterrichtsbeobachtungen bzw. -videoaufzeichnungen einen nicht unerheblichen Zeitaufwand. Es ist daher nachzuvollziehen, dass Studien mit großer Stichprobe (wie Berry et al., 2010; Cuttler, 2019; French et al., 2015) die beschriebenen Nachteile in Kauf nehmen und auf Fragebögen als Erhebungsinstrument zurückgreifen. Ebenso erschließt sich daraus die Tatsache, dass das Forschungsgebiet von kleinen Stichproben geprägt ist (vgl. Rezat, 2013).

Es erscheint daher sinnvoll, nach anderen Methoden zu suchen oder durch eine Kombination der Erhebungstechniken die jeweiligen Nachteile abzufedern. So untersucht Rezat (2009) die Nutzung von Schulbüchern durch 74 Gymnasiastinnen und Gymnasiasten im Unterricht mittels einer Mischung von Markierung im Buch, um genutzten Elemente zu identifizieren, und tagebuchartigen Beschreibungen der Nutzung. Unklare Beschreibungen wurden durch Interviews geklärt und die Daten durch Beobachtung ergänzt. In ähnlicher Art und Weise basieren die Daten, die Gallos Cronberg (2016) verwendet, auf Videographie von Unterricht, Interviews (mit Schülerin und Lehrkraft) und Unterrichtsdokumenten, wie bspw. Ablaufplänen. Randahl (2012) supplementiert Daten aus Fragebögen ebenso durch Beobachtungen und Interviews, allerdings nur mit einem Bruchteil der Stichprobe. Auch Weinberg et al. (2012) ergänzen Fragebogendaten durch Daten weniger Studierenden aus anderen Erhebungsmethoden (Tagebücher und Interviews).

Auch diese Mischungen von Methoden weisen Problematiken auf und werden den Kriterien nicht vollständig gerecht. So ist bspw. in der Untersuchung von Rezat (2009, 2011) zu befürchten, dass die Schülerinnen und Schüler durch das Markieren der Schulbuchabschnitte von der eigentlichen Nutzung abgelenkt werden und so Kriterium 2 in Frage zu stellen ist (Rezat, 2009). Rezat (2009) schätzt die Nachteile einer Mischung allerdings geringer ein als die Mängel der einzelnen Methoden für sich genommen. Zudem sieht er die Möglichkeit, die tatsächliche Nutzung aus den unterschiedlichen Datenquellen zu triangulieren.

Insgesamt bleibt die Erhebung von belastbaren Daten über die Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schülern eine Herausforderung.

### 3.2.3 Tatsächliche Nutzung

Studien zur Nutzung von Mathematikschulbüchern durch Schülerinnen und Schülern sind rar (Love & Pimm, 1996; Steen & Madsen, 2018; Yerushalmy, 2014). Die Problematik der Datenerhebung wurde in Abschnitt 3.2.2 bereits dargelegt. Die negativen Auswirkungen der einzelnen Erhebungsmethoden – z. B. kleine Stichproben – werden durch die im Folgenden vorgestellten Studien nochmals verdeutlicht. Zusätzlich ist es möglich, den Forschungsman- gel durch die Annahme, die Schülernutzung sei vollständig durch die Lehrkraft mediiert (z. B. Pepin & Haggarty, 2001), zu erklären (Rezat, 2013). Ein erheblicher Teil der Forschung beschäftigt sich mit dem tertiären Bildungsbereich (z. B. Lithner, 2003; Randahl, 2012; Weinberg et al., 2012) – und daher mit der Nutzung der dort verwendeten Mathematik*lehrbücher* durch *Studierende*.

So untersucht Lithner (2003) mittels Videoaufzeichnungen die Nutzung von Mathematikbüchern während der Hausaufgaben dreier Informatikstudierender in einer Laborstudie. Die qualitative Fallstudie kommt zu dem Ergebnis, dass diese Studierenden ihr Lehrbuch während der Bearbeitung von Aufgaben zum Nachschlagen von Lösungen und für die Suche nach Informationen verwenden. Dabei werden Informationen anhand von oberflächlichen Ähnlichkeiten zu den aktuellen Aufgaben gesucht.

Randahl (2012) stützt sich in ihrer Untersuchung der Mathematikbuchnutzung von 50 Erstsemesterstudierenden der Fachrichtung Maschinenbau auf Daten aus Fragebögen, Beobachtungen und drei Fallinterviews. Die Auswertung des Fragebogens deutet an, dass das Buch im universitären Lehrkontext eine andere Rolle spielt als im Mathematikunterricht der Schule: Nur 35 % der Studierenden gaben das Lehrbuch als Hauptquelle ihres Lernens an. Ein Ergebnis aus den Beobachtungen der Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben ist, dass einige Studierende mit dem Buch unvertraut zu sein schienen – empirische Indizien für den Bedarf an speziellen Nutzungsschemata für Mathematik(schul)bücher (Rezat, 2013, s. Abschnitt 3.2.1).

Ebenso im Universitätskontext angesiedelt ist die Studie von Weinberg et al. (2012). Mittels eines Fragebogens befragten diese 1156 Studierende unterschiedlicher Fachrichtungen und untersuchten, welche Teile des Mathematikbuchs sie wann und zu welchem Zweck nutzen. Dabei zeigten sich signifikante Unterschiede in der Häufigkeit der Nennung der unterschiedlichen Strukturelemente. So berichteten bspw. im Vergleich zu allen anderen Buchkomponenten signifikant weniger Studierende, die Kapiteleinleitungen zu nutzen. Weinberg et al. (2012) bestätigen damit das Ergebnis von Love und Pimm (1996), dass Lernende „*often impatient with the exposition*“ (S. 387) sind, die Einführungen also auslassen und gleich zu den – ihrer Ansicht nach – wichtigen Inhalten springen. In Bezug auf die Nutzungszeit gaben die Studierenden an, ihr Mathematikbuch hauptsächlich dann zu gebrauchen, wenn sie Hausaufgaben bearbeiten oder sich auf Prüfungen vorbereiten. Als Gründe für die Nutzung wurden das Nachschlagen und Verstehen von Definitionen und allgemeine Aussagen wie „zum besseren Verständnis“ von etwa 90 % der Studierenden genannt. Dazu verwendeten die Studierenden v. a. die beiden Strukturelemente Beispiele und Lösungen – und nicht die von den Lehrbuchautorinnen und -autoren intendierten Einführungen und Lehrtexte. Darüber hinaus stellen Weinberg et al. (2012) einen Einfluss der Lehrenden (vgl. Abschnitt 3.1) und der Übereinstimmung von Unterricht und Buch

(vgl. die Unterscheidung zwischen potentiell umgesetztem und umgesetztem Curriculum in Abschnitt 2.2) auf die Nutzung fest.

Die Fallstudie von Gallos Cronberg (2016) betrachtet eine Achtklässlerin im Umgang mit ihrem Mathematikschulbuch. Die Studie gibt leichte Evidenz für das Modell der Schulbuchnutzung nach Rezat (2006a, 2009, s. Abschnitt 3.1): Das Schulbuch diene der Schülerin als Instrument zum Erlernen linearer Zusammenhänge. Die Schülerin nutze das Schulbuch hierbei hauptsächlich für das Bearbeiten von Aufgaben inklusive Überprüfung der eigenen Lösungen.

Rezat (2009, 2011, 2013) untersucht die Schulbuchnutzung von 74 Gymnasialschülerinnen und -schülern (insgesamt zwei 6. und zwei 12. Klassen) im Mathematikunterricht mit der in Abschnitt 3.2.2 bereits erwähnten Mischung aus Tagebüchern, Unterrichtsbeobachtung und Interviews. Es zeigten sich fünf Kategorien an Nutzungszwecken, wenn Schülerinnen und Schüler selbstgesteuert mit dem Buch arbeiteten (Rezat, 2009, 2011), in die sich auch die Aktivitäten der anderen Studien einordnen lassen:

1. Unterstützung bei dem Bearbeiten von Aufgaben. In diese Kategorie fallen alle Aktivitäten mit dem Schulbuch, um eine Aufgabe lösen zu können. Hierzu zählt auch das Verstehen der Aufgabenstellung. Dazu werden – auf unterschiedliche Weise – Informationen im Buch gesucht.
2. Konsolidierung von Wissen. Hier zuzuordnen ist eine Schulbuchnutzung, welche der Erhöhung der eigenen Mathematikkompetenz dient; dazu gehört das Bearbeiten von Übungsaufgaben oder die Nutzung von speziell zu diesem Zweck ausgelegten Strukturelementen (bspw. weiterführende Aufgaben).
3. Aneignung neuer Inhalte. Im Gegensatz zum vorherigen Punkt stehen in dieser Kategorie alle Aktivitäten im Fokus, die sich auf Lernstoff beziehen, der noch nicht im Unterricht behandelt wurde oder aufgrund von Abwesenheit eigenständig zu erarbeiten ist. Ersteres kann bspw. durch Arbeit in fortgeschritteneren Kapiteln indiziert werden.
4. Nutzung aus Interesse – sowohl mathematischem als auch außermathematischem. Rezat (2011) schließt hier ausdrücklich eine Nutzung ein, die von oberflächlichen Merkmalen wie optischer Auffälligkeit induziert wird.
5. Metakognition. Hierzu zählen die Kontrolle bearbeiteter Aufgaben und die Überprüfung des eigenen Verständnisses.

Auf den ersten Blick decken sich die beobachteten tatsächlichen Nutzungszwecke mit den intendierten (s. Abschnitt 3.2.1). Bei genauerer Betrachtung stellt Rezat (2009, 2011) fest, dass Schülerinnen und Schüler auf der Mikroebene die einzelnen Strukturelemente in ihrer Nutzung von der intendierten entfremden. Bei manchen Strukturelementen ist dies verständlich – bspw. bei der Nutzung eines Merksatzes sowohl für die Unterstützung während der Aufgabenbearbeitung als auch für die Konsolidierung von Wissen. Andere Nutzungsweisen hingegen – z. B. die Verwendung von Einstiegsaufgaben zur Festigung von Wissen – scheinen weniger einleuchtend. Rezat (2011) schließt daraus, dass den Schülerinnen und Schülern oft unklar ist, welche intendierte Nutzung die einzelnen Schulbuchteile

aufweisen, und in Folge dessen für ihren Nutzungszweck weniger geeignete Elemente auf unintendierte Art und Weise verwenden.

Darüber hinaus identifiziert Rezat (2009, 2013) *Nutzungsschemata*. Diese beziehen sich darauf, wie Schülerinnen und Schüler Inhalte des Schulbuchs auswählen (bspw. auf Basis der Empfehlungen der Lehrkraft, fokussiert auf einzelne Mikrostrukturelementtypen oder aufgrund von optischer Auffälligkeit) und wofür (z. B. um eine Aufgabe zu lösen oder zur Konsolidierung). Ein konkretes Vorgehen, um Unterstützung bei der Bearbeitung einer Aufgabe zu finden, ist es, Merksätze im Buch nach relevanten Informationen abzusuchen (Rezat, 2009).

Von Studien zur Nutzung von Schulbüchern in anderen Fächern sei an dieser Stelle die Untersuchung von French et al. (2015) erwähnt. Sie stellt eine der wenigen Studien dar, die den Zusammenhang von Buchnutzung und Leistung untersucht. Zu diesem Zweck werteten die Autorinnen und Autoren Fragebögen zur Lehrbuchnutzung von 1023 Studierenden der Naturwissenschaften aus. Von diesen gaben 77 % an, ihr Lehrbuch häufig zu nutzen. Diese Studierenden erreichten eine signifikant höhere Endnote als diejenigen, welche berichten, das Lehrbuch manchmal zu nutzen. Allerdings erzielte auch die Gruppe der Studierenden, die ihr Buch nur selten nutzten, signifikant bessere Leistungen als letztere Gruppe. French et al. (2015) erklären dieses widersprüchliche Resultat dadurch, dass diese Studierenden weitere Ressourcen verwendeten, um sich die Lerninhalte anzueignen.

### Zusammenfassung

Die Nutzung von Schulbüchern durch Schülerinnen und Schüler kann in der Aktivitätstheorie wissenschaftlich fundiert und als eine Interaktion zwischen Lernendem und Lerninhalt modelliert werden, die von der Lehrkraft moderiert wird. Des Weiteren lässt sich die intendierte Nutzung, die von den Autorinnen und -autoren für die Lernenden vorgesehen wird, aus den Strukturelementen der Schulbücher erschließen und theoretisch herleiten. Die Erforschung der tatsächlichen Nutzung gestaltet sich jedoch als schwierig, da die typischen Erhebungsmethoden dieses Forschungsgebiets ineffizient sind oder nicht belastbare Daten liefern. Es ist anzunehmen, dass aus diesem Grund Forschungsergebnisse zur Nutzung von konventionellen Mathematikschulbüchern durch Schülerinnen und Schüler nur in geringem Umfang vorliegen. Die Aussagen der wenigen existierenden Erhebungen verbleiben zudem entweder relativ grob (z. B. „häufige Nutzung“) oder können die Schulbuchnutzung – aufgrund der zum Teil sehr kleinen Stichprobengrößen – nur exemplarisch abbilden. So existiert in diesem Bereich der mathematikdidaktischen Forschung immer noch ein Forschungsdesiderat, das bereits vor über 20 Jahren von Love und Pimm (1996) festgestellt wurde.

## 3.3 Nutzung digitaler Schulbücher durch Schülerinnen und Schüler

In diesem Abschnitt wird vorgestellt, wie mit E-Books Daten erfasst werden können, um sowohl die Schulbuchnutzung zu analysieren als auch weiterführende Forschungsfragen zu beantworten. Zu diesem Zweck führt Abschnitt 3.3.1 Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als potenzielle Datenquelle ein. Abschnitt 3.3.2 beschreibt anschließend, welche Maße aus Prozessdaten berechnet werden können, um Analysen durchzuführen. Abschnitt 3.3.3 erläutert, wie es Prozessdaten ermöglichen, Lösungsprozesse zu untersuchen. Zum Abschluss des Kapitels führt Abschnitt 3.3.4 die Möglichkeit aus, Prozess- mit Produktdaten in Verbindung zu setzen, wie etwa dem Lernerfolg oder Aufgabenlösungen.

### 3.3.1 Prozessdaten aus digitalen Schulbücher als Quelle von Forschungsdaten

Ein digitales Schulbuch kann so entwickelt werden, dass es während der Schulbuchnutzung Daten erhebt. Nur durch Speicherkapazität begrenzt ist es theoretisch möglich, dass sämtliche Aktivitäten und Aktionen der Schülerinnen und Schüler im E-Book während der Nutzung gespeichert werden. Da die Aufzeichnung der Daten während des *Prozesses* der Arbeit mit dem Schulbuch erfolgt, werden die erfassten Daten als *Prozessdaten* bezeichnet (z. B. Goldhammer, Naumann, Rölke, Stelter & Tóth, 2017; Goldhammer et al., 2014; Zheng, Fancsali, Ritter & Berman, 2019).

Diese Bezeichnung wird – eventuell aufgrund der relativen Neuheit der Methode – jedoch nicht einheitlich verwendet. Die unterschiedlichen Autorinnen und Autoren bezeichnen ihre Daten als *Spurdaten* (engl.: *trace data*, z. B. Kovanović et al., 2015), *Klick-Abfolge-Daten* (engl.: *click stream data*, z. B. Crossley, Karumbaiah, Ocumpaugh, Labrum & Baker, 2019), *Nutzungsdaten* (engl.: *usage data*, z. B. Cuillier & Dewland, 2014; Junco & Clem, 2015), *Interaktionsdaten* (engl.: *interaction data*, z. B. Koh, Fouh, Farghally, Shahin & Shaffer, 2018), *Betrachtungsdaten* (engl.: *viewing data*, z. B. Mesa, Mali & Castro-Rodriguez, 2019; O’Halloran, Beezer & Farmer, 2018) oder verwenden keine Spezifizierung der Daten (z. B. Prasad, Totaram & Usagawa, 2016; Van Horne, Russell & Schuh, 2016). Eine Mehrheit scheint sich für den Begriff *Logdaten* zu entscheiden (engl.: *log [file] data*, z. B. Fouh, Breakiron, Hamouda, Farghally & Shaffer, 2014; Koh et al., 2018; Lim, Song & Lee, 2012; Mouri, Ren, Uosaki & Yin, 2019; Theobald, Bellhäuser & Imhof, 2018; Yin & Wang, 2017); einige Autorinnen und Autoren umschreiben hier die Daten auch durch die stattfindende Analyse (engl.: *log file analysis*, z. B. Boubekki, Kröhne, Goldhammer, Schreiber & Brefeld, 2016; Greiff, Niepel, Scherer & Martin, 2016).

Der Name *Logdaten* bezieht sich auf die Art der Datenspeicherung: Die einzelnen aufgezeichneten Aktivitäten werden *geloggt* – entsprechend der Einträge in das Logbuch im Bereich der Schifffahrt – und zumeist in sog. *Logdateien* gespeichert. Die Terminologie und Technik hat ihren Ursprung in der Informatik, wo bspw. die Zugriffe auf einen Server oder Programmfehler in Logdateien protokolliert werden. Logdateien enthalten in der Regel neben der erfassten Aktion auch den Zeitpunkt, an dem diese vom System verarbeitet

wurde – einen *Zeitstempel* – und (sofern verfügbar) einen Identifikator, der den Urheber der Aktion angibt (ein solcher Identifikator kann z. B. durch die IP-Adresse des Webseitenbesuchers oder durch den Namen des in das System eingeloggtten Users gegeben sein). Beide Informationen (Zeitstempel und Identifikator) sind für die wissenschaftliche Verwendung der Daten von großer Bedeutung (s. Abschnitt 3.3.2.2).

Durch die Aufzeichnung der Interaktionen von Nutzerinnen und Nutzern mit dem E-Book entsteht eine große Datenmenge. Diese Rohdaten müssen vor der weiteren Verwendung aufbereitet werden. Dieses *Preprocessing* der Daten ist ein wichtiger Prozess, der sich – je nach Qualität der Rohdaten – als zeitintensiv erweisen kann (z. B. Ruiz, Marquardt & Becker, 2004). Im Detail kann die Datenaufbereitung die Identifikation und das Entfernen von irrelevanten Datenpunkten, die Zuordnung von Daten zu den einzelnen Schülerinnen und Schülern, das Erkennen von einzelnen Lerneinheiten bzw. Unterrichtsstunden und – sofern möglich – die Reparatur von fehlenden oder fehlerhaften Logs umfassen (Chitrea & Davamani, 2010, hier bereits übertragen auf das *Preprocessing* von Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern).

Angesichts der Verbreitung von Logdateien im Bereich des Word Wide Web scheint es naheliegend, dass viele bildungswissenschaftliche Untersuchungen, die sich Prozessdaten bedienen, das Lernen in webbasierten Lernumgebungen (engl.: *webbased learning*) untersuchen. Dieser Forschungsbereich wird im Allgemeinen als *Learning Analytics* bezeichnet. Unter dem Begriff wird jedoch nicht nur die Analyse der Daten an sich verstanden, sondern ein Prozess, der mit der Datenerhebung beginnt und letztendlich in eine Verbesserung des Lernsystems mündet (Campbell, DeBlois & Oblinger, 2007; Ferguson, 2012). Dabei werden die erhobenen Daten einerseits als Grundlage für die Forschung und die Weiterentwicklung der Lernumgebung verwendet und können andererseits Lehrkräften und Lernenden direkt zur Verfügung gestellt werden (S. Knight & Shum, 2017). Dazu werden die Daten zielgruppengerecht aufbereitet und visualisiert (für Forschung hierzu s. bspw. O’Halloran et al., 2018). So bietet die Lernumgebung Lehrenden wie Lernenden die Möglichkeit, basierend auf der bisherigen Nutzung fundierte Entscheidungen darüber zu treffen, auf welche Weise weiter gearbeitet werden soll (Campbell et al., 2007).

Von besonderem wissenschaftlichen Interesse ist der Teil der *Learning Analytics*, welcher sich mit der Prädiktion des Lernerfolgs beschäftigt (Campbell et al., 2007; Ferguson, 2012; Junco & Clem, 2015). Hierbei wird versucht, anhand der Prozessdaten aus der Nutzung der Lernumgebung eine Prognose zu erstellen, wie sich die Kompetenzen der Lernenden entwickeln. Insbesondere sollen Lernende identifiziert werden, die eventuell gezielter Förderung bedürfen. Zusätzlich dienen derartige prädiktive Modelle der Beantwortung der Frage, welche Nutzungsweisen digitaler Angebote für das Lernen gewinnbringend sind.

Stammen die Daten, die den Analysen zugrunde liegen, aus digitalen Schulbüchern, so sprechen Junco und Clem (2015) von *Textbook Analytics*.<sup>3</sup> *Textbook Analytics* können als vielversprechende Möglichkeit angesehen werden, die Nutzung von digitalen Schulbüchern zu erforschen. Auch im Hinblick auf die Bedingungen, die Rezat (2009) an eine Forschungsmethode für die Untersuchung der Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schülern

<sup>3</sup>Nicht zu verwechseln mit *Textbook Analyses*, der (Struktur-)Analyse von Schulbüchern, einem weiteren Feld der Schulbuchforschung (Fan et al., 2013).

stellt (s. Abschnitt 3.2.2), erscheinen Prozessdaten als eine geeignete Methode: Durch das Mitschreiben sämtlicher Interaktionen zwischen Schülerin oder Schüler und dem Schulbuch erfassen Prozessdaten die faktische Nutzung des digitalen Schulbuchs. Die Erhebung erfolgt automatisch und völlig im Hintergrund, ohne dass die Nutzerinnen und Nutzer in ihrer Arbeit mit dem E-Book beeinträchtigt werden (Junco & Clem, 2015). Insbesondere entfällt die Erzeugung einer Laborsituation: Da die Datenerhebung durch das Anzeigegerät bzw. das Schulbuch selbst erfolgt, ist sie weder zeit- noch ortsgebunden und lässt somit die Erhebung von Daten im Unterricht ohne Weiteres zu. Mit hoher Präzision spiegeln Prozessdaten wider, welche Teile der Schulbücher genutzt werden. Allerdings kann die Situation, in der die Nutzung des digitalen Schulbuchs erfolgt, durch Prozessdaten nur bedingt abgebildet werden, da nur Aktivitäten *im* Schulbuch aufgezeichnet werden können. Stammen die Prozessdaten aus einer Verwendung von E-Books im Unterricht, so lässt die Betrachtung der Daten der gesamten Klassen hier gewisse Rückschlüsse zu. Auch die Intention der Arbeit mit dem Buch lässt sich bis zu einem bestimmten Grad aus dem Klassenkontext, aus den Zeitpunkten der Nutzung (bspw. innerhalb vs. außerhalb der Unterrichtszeiten) und den aufgezeichneten Aktivitäten (bspw. Arbeit in Einführungsaufgaben vs. Arbeit in Übungsaufgaben) interpolieren. Darüber hinaus kann die Erhebung der Daten im Vergleich zu herkömmlichen Methoden schneller durchgeführt und als objektiver angesehen werden (Prasad et al., 2016).

Die beschriebenen Vorzüge treffen allerdings nur bei entsprechender Umsetzung der Datenerhebung zu. Koh et al. (2018) berichten detailliert von Problemen, die bei einer unzureichenden Implementierung entstehen. So kann die parallele Nutzung – bspw. auf unterschiedlichen Geräten – durch dieselbe Nutzerin oder denselben Nutzer inkonsistente Daten erzeugen. Zusätzlich können Schwierigkeiten entstehen, wenn die Daten durch Dritte verwaltet und aufbereitet werden; so bleibt in der Studie von Junco und Clem (2015) unklar, wie eine Variable des statistischen Modells zustande kommt, da die Berechnung ein Betriebsgeheimnis des E-Book-Verlags ist. Außerdem können Schülerinnen und Schüler durch nicht vor(her)gesehenes Verhalten invalide Daten erzeugen (Fouh et al., 2014; Koh et al., 2018). Zudem ist bei der Implementierung des Systems sicherzustellen, dass die Datenerfassung die Benutzbarkeit nicht beeinträchtigt. So sollte bspw. die begrenzte Speicherkapazität des Anzeigegeräts berücksichtigt werden. Wird dieses Problem durch die Speicherung auf einem externen Server umgangen, ist zu gewährleisten, dass ein Verlust der Verbindung zwischen E-Book und Server nicht zu Datenverlust führt.

Unter Beachtung dieser Herausforderungen erscheinen Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern geeignet, effektiv und unaufdringlich Daten zur Schulbuchnutzung im realen Unterrichtskontext zu erheben (Fouh et al., 2014) und damit eine wichtige Forschungslücke zu schließen (Fan et al., 2013). Die erfassten Rohdaten müssen jedoch auf Fehler untersucht und aufbereitet werden (z. B. Kovanović et al., 2015).

### 3.3.2 Prozessmaße als Indikatoren der E-Book-Nutzung

Für die eigentliche Analyse der E-Book-Nutzung werden aus den Prozessdaten *Prozessmaße* berechnet, wie sie dieser Abschnitt vorstellt. Hierbei kann zwischen Zählmaßen, Zeitmaßen und Leistungsmaßen unterschieden werden, so dass die folgenden Abschnitte in diese Kategorien gegliedert sind.

#### 3.3.2.1 Zählmaße

Eines der einfachsten Maße, die Prozessdaten zur Verfügung stellen, sind sog. *Zählmaße* (engl.: *count measures*, Kovanović et al., 2015). Durch Summation der geloggtten Aktionen einer Schülerin oder eines Schülers lassen sich Fragen wie „Wie oft interagieren Schülerinnen und Schüler mit ihrem interaktiven Schulbuch?“ beantworten. Durch geeignete Aggregation auf bestimmte Aktivitätstypen lässt sich feststellen, wie oft die unterschiedlichen Elemente des E-Books genutzt werden – und insbesondere, welche wenig bis nicht. Die in der Literatur berichteten Zählmaße sind u. a. die Anzahl an individuell betrachteten Seiten (z. B. Yin, 2017), die Anzahl an gesetzten Hervorhebungen, Lesezeichen oder erstellten Notizen (z. B. Van Horne et al., 2016) oder die Menge an bearbeiteten freiwilligen Selbsttests (z. B. Theobald et al., 2018) oder Aufgaben (z. B. Feng, Heffernan & Koedinger, 2006; Fouh et al., 2014; Zheng et al., 2019). Denkbar ist auch die Beantwortung von Fragestellungen zur Nutzung von Feedback oder anderer Unterstützung, die im E-Book bereitgestellt wird. Hierzu können Zählmaße wie die totale oder durchschnittliche Anzahl an abgerufenen Lösungshilfen Verwendung finden (z. B. Anozie & Junker, 2006; Feng et al., 2006; Zheng et al., 2019).

Dies ist u. a. dann von Interesse, wenn im Vergleich zu traditionellen Schulbüchern untersucht werden soll, ob die als positiv erachteten Erweiterungen, die das E-Book-Konzept bietet (s. Abschnitt 2.3.2.2), auch tatsächlich genutzt werden. So stellten bspw. Van Horne et al. (2016) in einer Untersuchung von 274 Studierenden unter Verwendung von Zählmaßen fest, dass die meisten interaktiven Fähigkeiten des E-Books von einem Großteil der Studierenden nicht genutzt wurden.

Im Bereich der Mathematikdidaktik können durch Zählmaße typische Schülerfehler (vgl. Abschnitt 1.2.1) erforscht werden (Ebner & Pronegg, 2015; Ebner, Schön & Neuhold, 2013). Auf der einen Seite können diejenigen Schülerinnen und Schüler zeitnah identifiziert werden, deren Aufgabebearbeitungen bekannten Fehlvorstellungen folgen, um die ebenso bekannten Gegenmaßnahmen einzuleiten. Auf der anderen Seite ergibt sich die Möglichkeit, durch die effektive Erhebung großer Datenmengen – wie es Prozessdaten erlauben – bisher unbekannte typische Schülerfehler aufzudecken.

Insgesamt können Zählmaße aus digitalen Schulbüchern einen Überblick über die Lernaktivität von Schülerinnen und Schülern geben (Kovanović et al., 2015). Sie werden zusätzlich erfolgreich in prädiktiven Modellen eingesetzt (s. Abschnitt 3.3.4). Allerdings erlauben Prozessdaten auch die Erfassung von feineren Maßen, wie die folgenden Abschnitte zeigen.

### 3.3.2.2 Zeitmaße

Dadurch, dass Prozessdaten in der Regel inklusive des Zeitpunkts der Aufzeichnung gespeichert werden, ist es möglich, *Zeitmaße* zu berechnen.

#### Zeitpunkte der Nutzung

Zunächst können die gespeicherten Zeitstempel dazu dienen, die *Zeitpunkte* zu identifizieren, an denen mit dem digitalen Buch gearbeitet wird. Dies ist v. a. in Situationen, in denen der Einsatz des E-Books nicht oder nicht ausschließlich innerhalb des Unterrichts erfolgt, von wissenschaftlichem Interesse (z. B. Fouh et al., 2014; O'Halloran et al., 2018). Im universitären Kontext zeigen hier empirische Studien unter Verwendung von Prozessdaten, dass der Großteil der Studierenden kurz vor Prüfungen mit digitalen Lehrbüchern lernt (Fouh et al., 2014; Theobald et al., 2018) und Hausaufgaben kurz vor Abgabeschluss erledigt (Fouh et al., 2014).

Bei ausschließlichem Einsatz des digitalen Schulbuchs im Klassenzimmer ist der primäre Nutzungszeitpunkt auf die Unterrichtsstunden fixiert. Hier sind derartige *Zeitmaße* eine Möglichkeit, die Nutzung der unterschiedlichen Schulbuchkomponenten im Unterrichtsverlauf zu untersuchen. So können Interaktionen mit dem E-Book zeitlich innerhalb einer Unterrichtsstunde verortet werden, und damit Erkenntnisse gewonnen werden, in welcher zeitliche Verteilung das digitale Schulbuch im Unterricht genutzt wird, oder in welcher Reihenfolge auf die einzelnen Komponenten zugegriffen wird.

#### Dauer der Nutzung

Da in der Regel der Startzeitpunkt jeder Aktivität geloggt wird, kann durch Subtraktion des Zeitstempels von dem der nächsten geloggtten Aktion die *Dauer* von Aktivitäten berechnet werden. In digitalen Schulbüchern ergibt sich so ein Instrument, um feingliedrig aufzuzeichnen, wie lange Schülerinnen und Schüler die unterschiedlichen Schulbuchelemente nutzen. Auch das gezielte Erfassen der Bearbeitungszeit einzelner Aufgaben wird so möglich.

*Zeitmaße* sind insbesondere von Interesse, da davon ausgegangen wird, dass die in digitalen Lernumgebungen verbrachte Zeit in einem hohen Maße mit der Lernzeit bzw. der *Time-on-Task* der Schülerinnen und Schüler verbunden ist (s. Abschnitt 2.1). Die Erhöhung dieser gilt in der Unterrichtsforschung als wichtiges Mittel, um Unterricht und Lernen effektiv zu gestalten. Beim Einsatz von digitalen Lernumgebungen mit integrierter Prozessdatenerfassung können *Zeitmaße* also benutzt werden, um jenes Kriterium von Unterrichtsqualität zu erheben. Da die Erhebung von *Time-on-Task* als schwierig oder sehr aufwendig gilt (Hattie & Yates, 2013; Kovanović et al., 2015) und die erhobenen Daten oft sehr grob sind (bspw. die Anzahl an Unterrichtsstunden als *Time-on-Task*-Maß in Admiraal, Wubbels & Pilot, 1999), können hier Prozessdaten effizient ein zuverlässigeres und feineres Bild liefern.

Allerdings sind auch mit Prozessdaten aufgezeichnete *Zeitmaße* mit Herausforderungen verbunden: Da nur Aktionen geloggt werden können, welche die Schülerinnen und Schüler innerhalb des Systems vornehmen, können die Daten keinerlei Aussagen über *Off-Task*-Verhalten außerhalb des digitalen Schulbuchs treffen. Der Analyse von *Zeitmaßen* aus

Prozessdaten liegt daher stets die Annahme zugrunde, dass die gesamte technisch bestimmte Zeit innerhalb des Systems und insbesondere auf der Aktivität verbracht wurde, die das Prozessmaß erfasst (del Valle & Duffy, 2009; Goldhammer et al., 2014). Bei Aktivitäten mit einem klaren – und aufgezeichneten – Ende (wie bspw. bei der Bearbeitung einer Aufgabe in einem System, das keine Multi-Task-Optionen bietet) liefert die automatische Zeitmessung einen Zeitwert, der als obere Schranke für die wahre Zeitspanne angesehen werden kann, welche die Lernerin oder der Lerner für diese Aktivität aufgewandt hat.

Durch *Off-Task*-Aktivitäten unterschiedlicher Art entstehen mitunter überlange Zeitwerte. Der Umgang mit diesen Ausreißern ist nach Kovanović et al. (2015) eine der Herausforderungen für Prozessdatenanalysen. Zeitliche Ausreißer entstehen durch Unterbrechungen der Arbeit mit dem Schulbuch, ohne dass diese dem System mitgeteilt werden. Derartige Pausen können im Unterricht durch Interaktionen mit der Lehrkraft oder mit Mitschülerinnen und Mitschülern entstehen. Besonders große Ausreißer ergeben sich, wenn die letzte Aktivität nicht oder nach einem Stundenwechsel oder dem Schulschluss abgeschlossen wird (engl.: *last-action estimation problem*, Kovanović et al., 2015). Werden in nur einem Fach interaktive Schulbücher verwendet und liegen zwischen den einzelnen Stunden dieses Faches mehrere Tage, werden hier extrem lange Zeitspannen vom System gemessen, wenn eine Aktivität in einer Unterrichtsstunde begonnen und erst in der nächsten Unterrichtsstunde des Faches beendet wird.

Die Vorbereitung (engl.: *preprocessing*) für die statistische Auswertung von Zeitmaßen, die mit derartigen Problemen behaftet sind, lässt sich in zwei Schritte aufspalten: die *Erkennung* von und der *Umgang* mit Ausreißern (Kovanović et al., 2015). Für beides gibt es unterschiedliche Ansätze, die im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Als Ausreißer gelten diejenigen Zeiten, die über einer gegebenen Schranke, der *Cut-Off-Schranke*, liegen. Diese Schranke kann heuristisch oder empirisch festgelegt werden. Im ersteren Fall wird sie von den Forscherinnen und Forschern festgesetzt. Der Wert wird je nach betrachteter Aktivität sowie Thema schwanken und kann somit in einem Zeitrahmen von Sekunden (z. B. 70 s bei Baker, 2007; 180 s bei Grabe & Sigler, 2002) bis hin zu mehreren Stunden (z. B. Kovanović et al., 2015; Perera, Kay, Koprinska, Yacef & Zaïane, 2009) definiert werden. Ein zweiter Ansatz ist es, die Schranke empirisch zu bestimmen. Eine solche Möglichkeit ist, alle Zeitmaße, die mindestens zwei oder drei Standardabweichungen über dem Mittelwert der Stichprobe liegen, als Ausreißer zu behandeln (z. B. Goldhammer et al., 2014).

Für den Umgang mit identifizierten Ausreißern finden sich in der Literatur unterschiedliche Vorgehensweisen. So können die Ausreißer zum einen aus den Analysen ausgeschlossen werden (z. B. Kovanović et al., 2015). Dies minimiert eventuelle Schätzfehler, geht aber offensichtlich mit Informationsverlust einher. Zum anderen kann der gemessene Zeitwert durch einen anderen ersetzt werden, entweder durch die *Cut-Off-Schranke* an sich (z. B. Goldhammer et al., 2014) oder durch eine Schätzung – wie durch den Mittelwert aller erfassten Zeitwerte (der jeweiligen Schülerin oder des jeweiligen Schülers) für die betreffende Aktivität (z. B. del Valle & Duffy, 2009).

Jeder der Ansätze kann als berechtigt angesehen werden und findet in unterschiedlichen Studien Verwendung. Die Analyse von Kovanović et al. (2015) zeigt, dass keines der Verfahren als das beste einzustufen ist und dass die Wahl des Verfahrens das Ergebnis der statistischen Auswertungen beeinflussen kann. In Sinne der Interpretation von Zeitmaßen aus Prozessdaten als obere Schranke für die eigentliche Interaktionszeit scheint die Ersetzung durch die *Cut-Off-Schranke* am schlüssigsten, da dieses Vorgehen die Gefahr einer Unterschätzung minimiert.

### 3.3.2.3 Leistungsmaße

Digitale Schulbücher bieten die Gelegenheit, die Leistung von Schülerinnen und Schülern fortwährend zu erfassen. Einfache Multiple-Choice-Fragen oder längere Selbsttests, welche die Lernenden selbstreguliert beantworten, können *Leistungsmaße* (engl.: *performance measures*) aus dem Lernprozess liefern, wie die Anzahl an korrekt gelösten (Teil-)Aufgaben oder Lösungsraten (Fouh et al., 2014; Tempelaar, Rienties & Giesbers, 2014; Theobald et al., 2018). Diese Maße geben Auskunft über den Lernstand der Schülerinnen und Schüler während des Unterrichts – und nicht nach Abschluss einer Lerneinheit, wie es bei schulischen Leistungserhebungen oder Posttests im Rahmen von Studien in der Regel der Fall ist (Tempelaar et al., 2014). Die Informationen können sowohl an die Lernenden selbst als auch an ihre Lehrkräfte weitergegeben werden (S. Knight & Shum, 2017; Tempelaar et al., 2014) und ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern, umfangreicheres Feedback zu erhalten als gewöhnlich (Tempelaar et al., 2014).

Neben Leistungsmaßen aus Testsituationen können Lösungsraten aus digitalen Schulbüchern während der Erarbeitung oder Festigung von Lerninhalten ein fortschreitendes, aktuelles Bild des Leistungsstandes der Klasse liefern. Für adaptiv arbeitende Lernumgebungen sind diese Maße von hohem Wert, da sie eine Anpassung der Aufgabenschwierigkeit und des Feedbacks an das individuelle Verständnissniveau der Lernenden ermöglichen (s. Abschnitt 2.3.2.2). Die Tatsache, dass den Leistungsmaßen aus Übungsaufgaben der Test-Charakter der oben genannten Datenerhebung fehlt und sie während des Erlernens erfasst werden, ist in weiterführenden Analysen zu beachten (vgl. Tempelaar et al., 2014).

Insgesamt eignen sich derartige Leistungsmessungen aus dem Lernprozess sehr zur Prädiktion des Lernerfolgs (Pardos, Baker, Pedro, Gowda & Gowda, 2014; Tempelaar et al., 2014, s. auch Abschnitt 3.3.4).

## 3.3.3 Analyse von Lösungsprozessen

Durch eine feinmaschige Aufzeichnung des Bearbeitungsprozesses erlauben es Prozessdaten zu untersuchen, auf welche Art und Weise Lernende beim Lösen von Aufgaben vorgehen.

### 3.3.3.1 Lösungsstrategien

Komplexe Problemlöseaufgaben (engl.: *complex problem solving*, CPS) gelten als besonders für die Prozessdatenforschung geeignet, da sie besonders reichhaltige Daten liefern können

(Greiff et al., 2016). In computerbasierten CPS-Aufgaben sind oftmals Einflüsse mehrerer Variablen auf ein Modell zu erarbeiten. Die Lernenden können die Variablen – bspw. durch Schieberegler – verändern, woraufhin die Aufgabe die Auswirkungen im Modell anzeigt. Der Aufgabentyp wurde durch PISA 2012 populär (Greiff et al., 2016).

Durch die Aufzeichnung der einzelnen Lösungsschritte lassen Prozessdaten die Rekonstruktion des Lösungsprozesses zu, was dessen eingehende Analyse im Nachhinein ermöglicht. Insbesondere kann die in diesem Zusammenhang zielführende VOTAT-Strategie (*Vary One Thing At a Time*, Tschirgi, 1980) zuverlässig identifiziert werden, nach welcher die Auswirkung der einzelnen Variablen nacheinander untersucht wird, während die anderen Variablen auf neutralem Niveau gehalten werden.

So untersuchten bspw. Greiff et al. (2016) die Lösungsprozesse von 1476 finnischen Neuntklässlerinnen und Neuntklässlern in neun verschiedenen CPS-Aufgaben. Im Fokus der Studie stehen Aspekte der Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler. Unter der Kontrolle von der Anwendung der VOTAT-Strategie zeigte sich ein positiver Einfluss auf die Aufgabenlösung, wenn die Lernenden die Modelle auch beobachteten, ohne die Variablen zu verändern; häufige Änderungen der Parameter waren hingegen mit schlechterer Leistung verbunden.

### 3.3.3.2 Finger-Tracking

Prozessdaten erlauben nicht nur die Erfassung von punktuellen Ereignissen. Bei einer entsprechend verfügbaren Speicherkapazität können auch kontinuierliche Daten – wie die Position des Mauszeigers (des *Cursors*) auf dem Bildschirm und dessen Bewegungen –, erhoben werden.

Dieses Verfahren, das in psychologischen Laborstudien Verwendung findet (z. B. Faulkenberry & Rey, 2014), wird als *Mouse-Tracking* bezeichnet (Spivey, Grosjean & Knoblich, 2005). Die Mausbewegungen können aufgezeichnet werden, indem die Mauszeigerposition (in  $x,y$ -Koordinaten der Bildschirmpixel) verknüpft mit dem Zeitstempel in regelmäßigen Zeitabständen gespeichert wird. Adäquat implementierte Software erlaubt anschließend das Abspielen oder das statistische Auswerten der Trajektorien durch die Forscherin oder den Forscher.

Die Bedienung von Touchscreen-Geräten – wie Smartphones oder Tablet-PCs – erfolgt über Berührung des Bildschirms mit einem (oder mehreren) Finger(n). Die Aufzeichnung und Analyse der Fingerbewegungen auf dem Touchscreen wird dementsprechend als *Finger-Tracking* bezeichnet. Die Nutzerinnen und Nutzer interagieren mit Touchscreen-Geräten direkt an der Stelle, an der sie es berühren; der Umweg über die Maus auf dem Tisch zum Cursor auf dem Bildschirm entfällt. Insbesondere existiert eine direkte 1:1-Beziehung zwischen der Geste der Hand und der Bewegung auf dem Bildschirm – dies ist im Mouse-Tracking nicht zwingend gegeben (Fischer & Hartmann, 2014). Ein weiterer Vorteil von Finger-Tracking gegenüber Mouse-Tracking ist, dass die Bedienung über Berührung als natürlicher angesehen wird als die über Computermäuse (Black, Segal, Vitale & Fadjo, 2012; Dotan & Dehaene, 2013).

Aufgezeichnete Bewegungstrajektorien sind von wissenschaftlichem Interesse, da davon ausgegangen wird, dass die Bewegungen der Hände mentale Prozesse widerspiegeln („*Hand in motion reveals mind in motion*“, Freeman, Dale & Farmer, 2011, S. 1). Die Theorien der *embodied cognition* Theorie (z. B. M. Wilson, 2002) und neuropsychologische Forschungsergebnisse stützen diese Vermutung (s. Fischer & Hartmann, 2014; Freeman et al., 2011). Der besondere Fokus auf mathematische Fragestellungen, die bereits unter Verwendung dieser Methoden untersucht wurden (Faulkenberry & Rey, 2014; Fischer & Hartmann, 2014, s. auch unten), zeigt die Relevanz der Tracking-Ansätze für die psychologisch-mathematikdidaktische Forschung.

Besonderes Augenmerk wird in der Forschung auf Entscheidungsaufgaben gelegt (Faulkenberry & Rey, 2014; Fischer & Hartmann, 2014; Freeman et al., 2011), in denen eine von zwei Alternativen zu wählen ist, indem die Maus oder der Finger von einem festen Startpunkt zwischen den beiden Optionen ausgehend auf eine der beiden Möglichkeiten bewegt wird (für eine schematische Darstellung s. Abbildung 3.6). Dabei werden Abweichungen von einer linearen Trajektorie – im Extremfall eine Bewegung durch die Hemisphäre der falschen Antwortmöglichkeit – als Ablenkung des Distraktors verstanden (Faulkenberry & Rey, 2014; Freeman et al., 2011; s. aber Fischer & Hartmann, 2014). Für Beispiele dieses Aufgabentyps werden im folgenden Absatz zwei Studien vorgestellt.

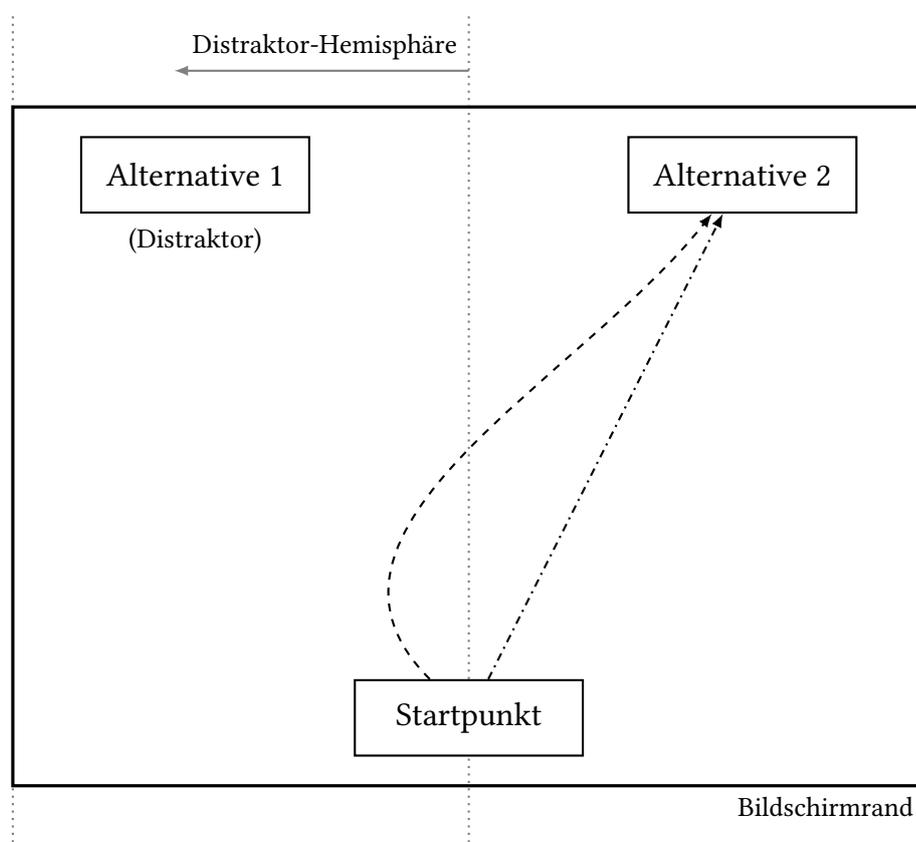


Abbildung 3.6. Schematische Darstellung einer typischen Entscheidungsaufgabe in einer Finger-Tracking-Studie. Die gestrichelte Linie stellt eine typische Trajektorie dar, die eine Ablenkung durch den Distraktor zugrunde liegt.

Santens, Goossens und Verguts (2011) untersuchen die Fingerbewegungen von Studierenden bei der Entscheidung, ob eine einstellige Zahl größer oder kleiner als fünf ist. Abhängig vom Abstand zu diesem Benchmark stellen sie eine umso größere Ablenkung hin zur falschen Antwort fest, je näher die Zahl an der Bezugsgröße liegt. Insbesondere wird die Entscheidung für eine der beiden Alternativen nicht vor, sondern während der Fingerbewegung getroffen. In einem ähnlichen Studiendesign lassen Faulkenberry und Rey (2014) Studierende Brüche mittels Mausbewegungen als größer oder kleiner als  $\frac{1}{2}$  einordnen. Auch hier entschieden die Versuchspersonen erst während der Bewegung, wohin sie den Cursor ziehen: Die Mausbewegungen vor richtigen Lösungen wiesen darauf hin, dass die Studienteilnehmenden zunächst die Komponenten der Brüche verglichen, bevor sie die Größe des Bruches an sich betrachteten.

Die Forschungsfragen, die sich mit Mouse- bzw. Finger-Tracking untersuchen lassen, gehen aber über die Untersuchung von Entscheidungssituationen hinaus. So nutzen Dotan und Dehaene (2013) Finger-Tracking, um zu analysieren, wie Erwachsene eine positive zweistellige Zahl  $< 40$  auf einem kontinuierlichen Zahlenstrahl (von 0 bis 40) positionieren. In ihrer Studie wurde die Zahl unterhalb des Zahlenstrahls angezeigt und musste auf diesen geschoben werden. Bei der Analyse der aufgezeichneten Fingerbewegungen erwies sich das Platzieren auf dem Zahlenstrahl als mehrstufiger Prozess, auf den zunächst die Einerstelle und anschließend die Zahl als Ganzes einen Einfluss ausübte.

Mit Blick auf diese Forschungsergebnisse aus der Kognitionspsychologie erscheinen Finger-Tracking-Ansätze gerade in Bezug auf kontinuierliche, dynamische Repräsentationen – bspw. von Bruchzahlen, vgl. Abschnitt 1.3.1.3 – als eine vielversprechende Forschungsmethode. Zudem existieren deutliche Parallelen zur Aufzeichnung und Analyse von Blickbewegungen (*Eye-Tracking*, s. Magnuson, 2005, für eine Gegenüberstellung der beiden Methoden), worin sich bereits eine Tradition innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung etabliert hat (Barmby, Andrà, Gomez, Obersteiner & Shvarts, 2014; Strohmaier, MacKay, Obersteiner & Reiss, 2020).

Da die Methoden des Mouse- bzw. Finger-Trackings – im Gegensatz bspw. zum Eye-Tracking-Verfahren – unabhängig von zusätzlicher Hardware sind und nur eine entsprechend programmierte Software benötigen, können sie in digitale Schulbücher integriert werden. Dies erlaubt es, Finger- bzw. Mouse-Tracking-Forschungsfragen außerhalb von Laborbedingungen zu untersuchen und so eventuelle Effekte, die durch die unauthentischen Situationen in klinischen Studien entstehen können, zu minimieren. Zudem ermöglicht es der Einsatz der Methoden im unterrichtlichem Kontext, individuelle Entwicklungen der Trajektorien im Lernprozess zu beobachten.

Allerdings müssen bei der Integration in digitale Schulbücher einige Restriktionen aufgegeben werden, die in psychologischen Laborstudien üblich sind, um die Validität der Daten sicherzustellen. So wurde in der Finger-Tracking-Studie von Dotan und Dehaene (2013) bspw. die Aufgabenstellung erst ersichtlich, nachdem der Finger auf dem Touchscreen platziert wurde. Zusätzlich erlaubten die Forscher keine Änderungen der Eingabe; die Aufgabe musste mit einem Fingerzug gelöst werden. Beide Einschränkungen scheinen aus didaktischer Perspektive in einem digitalen Schulbuch schwer vertretbar. Bei Schulbü-

chern für niedrige Klassenstufen ist zudem zu beachten, dass Kinder den Touchscreen bei Drag-and-Drop-Operationen nicht durchgängig berühren (G. Revelle & Reardon, 2009).

### 3.3.4 Verknüpfung von Prozess- und Produktdaten

Im Allgemeinen werden digitale Schulbücher aufgrund ihrer Vorteile gegenüber konventionellen Papierbüchern (s. Abschnitt 2.3.2.2) als Bereicherung für das Lernen angesehen. Die Meta-Analyse von Jang, Yi und Shin (2016) über die Auswirkungen vom Einsatz digitaler Schulbücher in Südkorea bestätigt diese Vermutung, auch wenn sich insgesamt nur ein kleiner bis mittlerer Effekt ergibt. Gerade im Bereich der Mathematik ist die Effektstärke niedrig (Jang et al., 2016).

Ein Grund für fehlende oder kleine Effekte wird unabhängig vom Fach darin gesehen, dass Schülerinnen und Schüler die Möglichkeiten nicht gebrauchen, die digitale Schulbücher bieten (z. B. Van Horne et al., 2016; Woody et al., 2010). Zudem kann es vorkommen, dass die Schülerinnen und Schüler eine lernhinderliche Nutzung an den Tag legen (z. B. Baker, 2007).

Prozessdaten können darüber Auskunft geben, wie oft und wann bestimmte Teile des digitalen Schulbuchs genutzt werden und wie lange (Abschnitte 3.3.2.1 & 3.3.2.2); außerdem darüber, mit welchen Strategien (Abschnitte 3.3.3.1 & 3.3.3.2) oder mit welchem Erfolg (Abschnitt 3.3.2.3) gearbeitet wird. Um herauszufinden, welche Art und Weise der Nutzung für den Lernerfolg am Ende einer Unterrichtssequenz förderlich ist, können diese Prozessmaße im Zusammenhang mit *Produktmaßen* untersucht werden. Unter Produktmaßen sind hier Leistungsmaße zu verstehen, die am Ende von Lernprozessen stehen – wie Ergebnisse in Nachtests oder schulischen Leistungsprüfungen.

#### 3.3.4.1 Prädiktion des Lernerfolgs

Für Campbell et al. (2007) gehört die Prognostizierung des Lernerfolgs ausgehend von Prozessmaßen zu den wichtigen Schritten der *Learning Analytics*. Ziel in Live-Analysen ist dabei zumeist die Identifikation von Lernenden mit Unterstützungsbedarf (Ferguson, 2012; Junco & Clem, 2015). Darüber hinaus sind derartige Analysen von wissenschaftlichem Interesse, zumal bisweilen unklar ist, *welche* Prozessmaße für die Prädiktion – und welche Art der Nutzung für den Lernerfolg – hilfreich sind (vgl. Junco & Clem, 2015). In der Literatur werden daher die verschiedensten Variablen in Prädiktionsmodellen verwendet. So findet sich eine Reihe von Studien, die anhand desselben Datensatzes mittels unterschiedlicher statistischer Methoden unterschiedliche Prädiktionsmodelle aufstellen und untersuchen (Anozie & Junker, 2006; Ayers & Junker, 2008; Feng et al., 2006; Junker, 2007).

Prädiktionen basierend auf Prozessdaten gelten als aussagekräftiger als Prognosen, denen *Paper-Pencil*-Zwischentests zugrunde liegen (Anozie & Junker, 2006). Zudem gibt es Evidenz, dass die Nutzung von Prozessmaßen in prädizierenden Modellen die Erhebung von demographischen Daten obsolet machen kann (Zheng et al., 2019). In den meisten der hier zitierten Untersuchungen zeigt sich zusätzlich eine prädizierende Kraft von Vorwissen,

die nicht durch die Verwendung von Prozessmaßen aufgelöst werden kann. Von den unterschiedlichen statistischen Verfahren werden (generalisierte) lineare Mischmodelle als besonders geeignet für die Analyse von Prozessdaten angesehen (Ayers & Junker, 2008; Goldhammer et al., 2014; Zheng et al., 2019).

Bei den meisten in Prädiktionsmodellen verwendeten Prozessmaßen handelt es sich um Zählmaße. Ein besonderer Fokus wird dabei auf die Verwendung von Features wie Hervorhebungen, Notizen oder Lesezeichen gelegt. Hier erreichen Lernende, die diese Möglichkeiten digitaler Bücher intensiver nutzen als andere, höhere Leistungen (z. B. Dennis, 2011; Van Horne et al., 2016; Yin & Wang, 2017). Bei der zusätzlichen Betrachtung von anderen Variablen können Junco und Clem (2015) in ihrer Studie mit 233 Studierenden unterschiedlicher Fachrichtungen keinen signifikanten Einfluss dieser Zählmaße auf den Lernerfolg finden, was sie auf verzerrte Maße zurückführen. Stattdessen zeigt sich ein hochsignifikanter positiver Prädiktor in der Anzahl an Tagen, an denen die Studierenden auf das E-Book zugreifen – also in einem (einfachen) Zeitmaß. Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen Theobald et al. (2018): Diejenigen der 424 Studierenden in ihrer Studie, welche die Lernumgebung in einer größeren Anzahl an Wochen verwendeten, erreichten bessere Noten. Allerdings zeigte sich kein signifikanter Einfluss der gesamten Zeit, die in der Lernumgebung verbracht wurde. Die Autorinnen und der Autor erklären dies dadurch, dass verteiltes Lernen (d. h. über mehrere Wochen hinweg) lernförderlicher ist als gesammeltes Lernen derselben Dauer kurz vor der Prüfung.

Leistungsmaße erweisen sich – gerade im Bereich der Mathematik – als gute Prädiktoren des Lernerfolgs (z. B. Junker, 2007; Pardos et al., 2014; Tempelaar et al., 2014; Zheng et al., 2019). So zeigen sich in den Ergebnissen von Tempelaar et al. (2014) während des Lernprozesses erhobene Leistungsmaße von 1840 Studierenden als stärkste Prädiktoren für die finale Mathematiknote. Dabei ergibt sich für die Autoren kein Mehrwert darin, einfache Zählmaße in das Modell aufzunehmen. Hingegen erreichen in den Studien zum US-amerikanischen *ASSISTment system* (Anozie & Junker, 2006; Ayers & Junker, 2008; Feng et al., 2006; Junker, 2007) Prädiktionsmodelle, die eine Mischung aus Leistungs-, Zähl- und Zeitmaßen berücksichtigen, die höchste Vorhersagekraft.

Allerdings finden Leistungsmaße nicht in allen Studien Verwendung. So schließen Theobald et al. (2018) die Lösungsraten von Selbsttests, die während der Arbeit mit der Lernumgebung absolviert wurden, zugunsten des – damit in ihrer Studie hoch korrelierten – Zählmaßes der Anzahl an abgelegten Selbsttests sogar aus. Fouh et al. (2014) berichten bei der Untersuchung der Prozessdaten aus einem interaktiven Lehrbuch in einer Stichprobe von ca. 700 Informatikstudierenden nur eine niedrige positive Korrelationen zwischen der Anzahl an im E-Book korrekt gelösten Aufgaben und der finalen Klausurnote.

Insgesamt ergibt sich aus den unterschiedlichen Studien ein vielversprechendes Bild für die Untersuchung der Beziehung zwischen Prozess- und Produktmaßen. Als problematisch ist dabei jedoch zu sehen, dass teilweise der Einfluss auf die Endnote von Aktivitäten, die in die Benotung einfließen, untersucht wird (s. Junco & Clem, 2015).

Viele der Studien sind jedoch im *Online-Learning* auf Universitätsniveau in unterschiedlichsten Fachgebieten angesiedelt. Für die Untersuchung von Prozessdaten im Bereich

der Mathematik im Kontext Schule finden sich einige Studien aus dem Primar- (Ebner & Pronegg, 2015; Ebner et al., 2013) und Sekundarbereich (Anozie & Junker, 2006; Ayers & Junker, 2008; Feng et al., 2006; Junker, 2007). Allerdings beziehen diese ihre Daten nicht aus digitalen Schulbüchern, sondern punktuell eingesetzten computerbasierten Lernumgebungen. Für die Bruchrechnung scheinen bisher keinerlei Ergebnisse in Verbindung mit Prozessdaten vorzuliegen.

### 3.3.4.2 Auswirkungen auf die Lösung einzelner Aufgaben

Neben den in Abschnitt 3.3.4.1 beschriebenen Einflüssen auf den Erfolg der Schülerinnen und Schüler nach der Behandlung des Lernstoffes wird in der Literatur auch der Zusammenhang von Prozessdaten, die während der Bearbeitung von einzelnen Aufgaben aufgezeichnet werden, mit dem Lösungserfolg der jeweiligen Aufgaben untersucht (Goldhammer et al., 2017).

So stellten Goldhammer et al. (2014) auf Basis von Zeitmaßen aus den Lösungsprozessen von 1020 Erwachsenen fest, dass der Einfluss der Bearbeitungszeit auf die Aufgabenlösung vom Aufgabenkontext (Lesekompetenz oder Problemlösekompetenz) und zusätzlich sowohl von der Aufgabenschwierigkeit als auch der individuellen Kompetenz moderiert wird. In Aufgaben zur Lesekompetenz traten korrekte Antworten im Zusammenhang mit kürzeren Bearbeitungszeiten auf, während bei Problemlöseitems eine längere *Time-on-Task* mit richtigen Lösungen assoziiert war. Zusätzlich nutzten Goldhammer et al. (2014) generalisierte lineare Mischmodelle, um folgende Variationen der Effekte über Items und Personen festzustellen: Der positive Effekt im Bereich des Problemlösens verstärkte sich mit der Aufgabenschwierigkeit und wurde mit steigender Individualkompetenz schwächer. Für den negativen Effekt im Bereich der Lesekompetenz zeigte sich ein konträres Bild: Je schwerer die Aufgabe, desto schwächer war der negative Effekt, während höhere Individualkompetenz den negativen Effekt verstärkte.

Diese Ergebnisse werden von Greiff et al. (2016) in Frage gestellt, die in komplexen Problemlöseaufgaben auch einen möglichen quadratischen Einfluss von *Time-on-Task* auf die Lösung untersuchten. In ihrer Prozessdatenanalyse von 1476 finnischen Neuntklässlerinnen und Neuntklässlern, die auf neun verschiedenen Aufgaben basiert, stellten sie einen signifikanten Einfluss sowohl der linearen als auch der quadratischen Bearbeitungszeit fest. Der aus der Modellschätzung entstehende Zeit-Korrektheit-Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Dies indiziert, dass der Effekt von *Time-on-Task* auf die Korrektheit der Lösung im Problemlösen nicht zwingend positiv linear ist (wie in Goldhammer et al., 2014), sondern dass es eine optimale Bearbeitungszeit zu geben scheint: Kürzere wie längere Zeiten als dieses Optimum sind in der Studie von Greiff et al. (2016) mit niedrigeren Lösungswahrscheinlichkeiten assoziiert.

## Zusammenfassung

Der Einsatz digitaler Schulbücher im Unterricht eröffnet die Möglichkeit, diese selbst als Instrument zur Protokollierung der Schulbuchnutzung zu verwenden. Durch die Aufzeichnung der einzelnen Interaktionen der Schülerinnen und Schüler mit dem digitalen Schulbuch ergeben sich Daten über den tatsächlichen Nutzungsprozess – sei es im Unterricht oder außerhalb. Diese *Prozessdaten* lassen sich – ohne die Erhebungssituation zu beeinflussen – zeit- und ortsunabhängig sowie objektiv und effektiv erfassen, sofern die Datenerfassung entsprechend implementiert ist. Neben der Analyse der Schulbuchnutzung bieten Prozessdaten das Potenzial, Lösungsstrategien innerhalb einzelner Aufgaben zu untersuchen oder Schülerfehler zu erkennen, zu dokumentieren und entsprechend darauf zu reagieren. Darüber hinaus entstehen aus den Erkenntnissen der *Learning Analytics* vielversprechende Möglichkeiten für die mathematikdidaktische Forschung: So gestatten es Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern, die Wirksamkeit unterschiedlicher Nutzungsweisen hinsichtlich des Lernprozesses und des Lernerfolgs zu untersuchen, z. B. durch Prädiktionsmodelle.

# 4 Forschungsstand und Fragestellungen

## 4.1 Forschungsstand

Digitale Schulbücher haben das Potenzial, Unterricht zu verändern (z. B. Pepin et al., 2017). In Anbetracht der hohen Bedeutung, die dem Mathematikschulbuch im Mathematikunterricht zugemessen wird (Valverde et al., 2002), trifft dies auch auf das Lehren und Lernen von Bruchzahlkonzepten zu. Ein Faktor des Veränderungspotenzials ist dabei der Reichtum an Features, den digitale Schulbücher gegenüber konventionellen aufweisen. Dieser umfasst u. a. Interaktivität in Aufgaben und Darstellungen sowie Adaptivität in Anforderung und Feedback.

Digitale Schulbücher können deshalb das Unterrichtsangebot erweitern und stellen nicht nur daher einen Aspekt von Unterrichtsqualität dar (Helmke, 2009). Es ist also „*important to examine [...] their use in real classrooms*“ (Fan et al., 2013, S. 640). Allerdings zeigt sich in der Literatur ein Mangel an Forschungsarbeiten zur Nutzung von Mathematikschulbüchern durch Schülerinnen und Schüler – für systematische Reviews siehe Steen und Madsen (2018) oder Fan et al. (2013). Dies gilt gleichermaßen für konventionelle wie digitale Schulbücher. Ein Grund hierfür wird in der Herausforderung gesehen, valide Daten zu erfassen (Love & Pimm, 1996; Rezat & Sträßer, 2015), da die üblicherweise angewandten Methoden – Fragebögen oder Formen der Beobachtung – entweder als unzuverlässig oder die Nutzung beeinflussend gelten (Rezat, 2009). Studien, die sich zu Datenerhebung auf Videographie oder Beobachtung stützen, haben meist klinischen Charakter und sind auf kleine Stichproben beschränkt.

Hier eröffnen digitale Schulbücher die Möglichkeit, die Nutzung automatisch zu erfassen, indem sie Prozessdaten aufzeichnen, während Schülerinnen und Schüler mit dem E-Book arbeiten. Diese Erhebungsmethode beeinflusst die Nutzung dabei nicht, ist zeit- sowie ortsunabhängig und auf große Stichproben skalierbar. Derartige *textbooks analytics*-Ansätze (Junco & Clem, 2015) werden in den meisten Forschungsarbeiten in universitären Kontexten angewandt. Die wenigen Forschungsarbeiten in der Sekundarstufe fokussieren sich auf US-amerikanische Stichproben; für deutsche Schülerinnen und Schüler sowie den Inhaltsbereich der Bruchrechnung scheinen bisher keinerlei Studien vorzuliegen, die diese Methodik verfolgen.

Gerade für den Bereich der Entwicklung von Bruchzahlkonzepten eröffnen sich durch digitale Schulbücher Möglichkeiten, handlungsorientierten Unterricht zu fördern – bspw. durch dynamische Repräsentationen von Bruchzahlen (z. B. Lesh et al., 1987a; Yerushalmy, 2016). Derartige enaktive und ikonische Zugänge können den Aufbau von anschaulichen

Grundvorstellungen erleichtern und so dazu beitragen, typische Schülerfehler zu vermeiden (Padberg & Wartha, 2017). Es ist allerdings unklar, wie Schülerinnen und Schüler mit solchen neuen Aufgabenstellungen arbeiten. Hier können die Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern ein Bild aus dem natürlichen Kontext des Lernens zeichnen und so neben der Weiterentwicklung der Schulbuchforschung auch Forschungsfragen zu Lösungsstrategien – bspw. über Finger-Tracking – außerhalb von klinischen Untersuchungen beantworten.

## Erfassung von Prozessdaten in digitalen Büchern

Aufgrund der relativen Neuheit digitaler Schulbücher und der Idee, in ihnen Prozessdaten während der Nutzung zu erfassen, existieren derzeit keine kanonischen Buchformate, Programme zur Erstellung von E-Books für den schulischen Kontext oder Erhebungssysteme für Nutzungsdaten. Die verwendete Software und die verfügbaren Daten hängen daher von den Schulbuchautorinnen und -autoren, Forscherinnen und Forschern und Softwareentwicklerinnen und -entwicklern ab. Eine frei verfügbare Software zum Erstellen von E-Books ist das Programm iBooks Author (Apple Inc., 2017), das es ermöglicht, interaktive Komponenten in digitale Bücher einzubinden. Für iBooks Author liegt keine inhärente Erfassungssystematik für Daten aus der Nutzung der E-Books vor, die mit diesem Programm erstellt wurden. Es ist daher Teil der vorliegenden Arbeit, ein Verfahren zur Erfassung von Prozessdaten in iBooks Author zu konzipieren und umzusetzen (s. Teil II).

## 4.2 Forschungsfragen

Im Folgenden werden die Forschungsfragen für diese Arbeit formuliert. Zum einen beziehen sich diese auf die in Teil I dargelegten Theorien und Forschungsergebnisse zu (digitalen) Schulbüchern und zur Didaktik der Bruchrechnung, zum anderen auf das in Teil II beschriebene interaktive Schulbuch zu Bruchzahlkonzepten sowie die darin umgesetzte Prozessdatenerfassung. Die Forschungsfragen betreffen dabei einerseits die Nutzung des interaktiven Schulbuchs durch die Schülerinnen und Schüler (Abschnitt 4.2.1) und andererseits die exemplarische Verwendung des interaktiven Schulbuchs als Forschungsinstrument über die Schulbuchforschung hinaus (Abschnitt 4.2.2).

### 4.2.1 Nutzung von digitalen Schulbüchern

Im Hinblick auf die Nutzung von digitalen Schulbüchern werden folgende Forschungsfragen aufgestellt:

1. Lassen Prozessdaten aus einem digitalen Schulbuch, das die Einführung von Bruchzahlkonzepten interaktiv umsetzt, Rückschlüsse darüber zu, auf welche Art und Weise dieses E-Book im Regelunterricht der sechsten Jahrgangsstufe genutzt wird?

Diese Frage wird explorativ untersucht. Prozessdaten gelten als unauffällige Methode, um die Nutzung von digitalen Schulbüchern exakt zu erfassen; allerdings können die situativen Gegebenheiten der Nutzung nicht abgedeckt werden (Abschnitt 3.3.1).

Vermutet wird daher, dass sich keine detaillierten Informationen über den Unterricht manifestieren, während die Nutzung des interaktiven Angebots exakt widergespiegelt wird.

2. Welche Unterschiede zeigen sich in der Nutzung eines E-Books zur Einführung von Bruchzahlkonzepten für die sechste Jahrgangsstufe zwischen Mädchen und Jungen sowie zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Lernenden hinsichtlich folgender Prozessmaße, die das interaktive Angebot des E-Books abbilden: Anzahl an bearbeiteten Aufgaben und genutzter Widgets, Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen, Lösungsrate im E-Book sowie gesamte Bearbeitungszeit und mittlere Zeit in Feedbackphasen?

Es existiert empirische Evidenz, dass die Art und Weise der Nutzung von E-Books nicht vom Geschlecht abhängig ist, sich jedoch je nach individueller Kompetenz verschiedene Features von E-Books als lernförderlich erweisen (vgl. Abschnitt 2.3.2). Dementsprechend wird vermutet, dass in den reinen Nutzungsvariablen weniger Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen als vielmehr zwischen leistungsschwächeren und leistungsstärkeren Lernenden zu beobachten sind. Aufgrund des variablen Bilds bezüglich Leistungsunterschieden im Bereich der Bruchrechnung (s. Abschnitt 1.2) wird angenommen, dass sich in den Lösungsraten im iBook Unterschiede zugunsten der allgemein leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler sowie ein marginaler Leistungsvorsprung der Jungen zeigen.

3. Beeinflusst die Nutzung eines interaktiven Schulbuchs und seiner Features – indiziert durch die in Forschungsfrage 2 aufgeführten Prozessmaße – den Lernerfolg von Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern? Ist der etwaige Einfluss abhängig davon, ob ikonische oder symbolische Aspekte des Bruchzahlkonzepts betrachtet werden?

Sowohl dem Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht zufolge (Helmke, 2009, s. auch Abschnitt 2.1.2) als auch aufgrund der Features digitaler Schulbücher, die als Vorteil für die Lernenden gegenüber traditionellen Schulbüchern angesehen werden (s. Abschnitt 2.3.2.2), kann ein Effekt der Nutzung auf den Lernerfolg erwartet werden. Vermutet wird insbesondere ein positiver Effekt der Zeit, welche die Lernenden mit dem iBook verbringen (*time on task*). Gemäß den Ergebnissen der Prozessdatenforschung kann zudem eine starke Prädiktionskraft von Leistungsmaßen erwartet werden, die während der Nutzung erhoben werden – wie etwa von einer iBook-internen Lösungsrate (s. Abschnitt 3.3.4.1).

## 4.2.2 Digitale Schulbücher als Instrument weiterer Forschungsfelder

Um aufzuzeigen, wie digitale Schulbücher als Forschungsinstrument außerhalb der Schulbuchnutzung verwendet werden können, werden die folgenden Forschungsfragen untersucht:

4. Lassen sich Bearbeitungsmuster in den Fingerbewegungen von Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern identifizieren, die in interaktiven Visualisierungsaufgaben eines E-Books zur Einführung von Bruchzahlkonzepten aufgezeichnet werden?

Diesbezüglich existieren – nach bestem Wissen des Autors – keine bisherigen Forschungsergebnisse. Daher wird diese Frage explorativ beantwortet.

5. Welchen Effekt hat die Bearbeitungszeit einzelner Aufgaben auf die Korrektheit der Lösung innerhalb eines E-Books zur Einführung von Bruchzahlkonzepten in der sechsten Jahrgangsstufe für leistungsstärkere bzw. leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler? Welchen Einfluss übt das Aufrufen von Lösungshilfen unter denselben Rahmenbedingungen aus?

Folgt man den Forschungsarbeiten zu ähnlichen Fragestellungen, die allesamt außerhalb der Mathematikdidaktik angesiedelt sind und deren Stichproben zudem aus Personen anderer Altersgruppen zusammengesetzt sind, so ist bezüglich der Bearbeitungszeit einer der folgenden zwei Effekte zu erwarten (s. Abschnitt 3.3.4.2): ein linearer Einfluss, abhängig von Aufgabenschwierigkeit und Individualkompetenz, oder ein quadratischer Einfluss, der die Existenz einer *optimalen* Bearbeitungszeit impliziert. Gemäß ihrer Natur sollen die Lösungshilfen die Lernenden zu einer korrekten Lösung führen. Daher wird vermutet, dass sich ein positiver Effekt vom Aufrufen einer Lösungshilfe auf die Aufgabenlösung zeigt.

**Teil II**

**Praktischer Teil**



# 5 Programmieren für iBooks Author

## Überblick

Das Erstellen von digitalen Schulbüchern für den Mathematikunterricht gilt im Vergleich zu anderen Fachbereichen als anspruchsvoller (Lew, 2016); dabei ist insbesondere die Umsetzung von Interaktivität eine Herausforderung (Usiskin, 2018). Ein Tool zum Gestalten von interaktiven Büchern, das es den Autorinnen und Autoren ermöglicht, interaktive Komponenten selbst zu entwickeln, ist iBooks Author (Apple Inc., 2017). Das folgende Kapitel erläutert, wie interaktive Mathematikschulbücher mit iBooks Author erstellt werden können. Dazu gibt Abschnitt 5.1 einen Überblick über die Möglichkeiten und technischen Details des Autorentools. Im Anschluss wird beschrieben, wie interaktive Komponenten für die Bücher implementiert werden (Abschnitt 5.2). Besonderer Fokus wird dabei auf das für die Forschung notwendige Speichern von Daten im digitalen Buch (Abschnitt 5.2.3) und die für Mathematikschulbücher wichtige Darstellung von mathematischen Inhalten (Abschnitt 5.2.5) gelegt.

## 5.1 iBooks Author

iBooks Author (Apple Inc., 2017) ist eine freie<sup>1</sup> Software von Apple Inc. zur Gestaltung von interaktiven Büchern, sog. *iBooks*. Dazu stellt das Programm im Stile eines WYSIWYG-Editors<sup>2</sup> eine Benutzeroberfläche zur Verfügung, welche die üblichen Textverarbeitungsmöglichkeiten bietet, wie etwa ein Wordprozessor oder eine Bildschirmpräsentationssoftware (s. Abbildung 5.1). Ähnlich zum Folienmaster von Bildschirmpräsentationen kann man in iBooks Author mittels *Layouts* das Design des gesamten Buchs verändern (Apple Inc., 2016).

Der Inhalt eines iBooks kann in Kapitel unterteilt und diese wiederum in Abschnitte gegliedert werden. Daraus lassen sich automatische Inhaltsverzeichnisse auf den unterschiedlichen Ebenen generieren. Zudem hängt die Darstellung des Inhalts im iBook von der Strukturierung ab.

<sup>1</sup>Hier im Sinne von kostenfrei, aber nicht quelloffen.

<sup>2</sup>WYSIWYG = What You See Is What You Get, die Bildschirmanzeige beim Bearbeiten spiegelt also die Anzeige im Endprodukt wider.

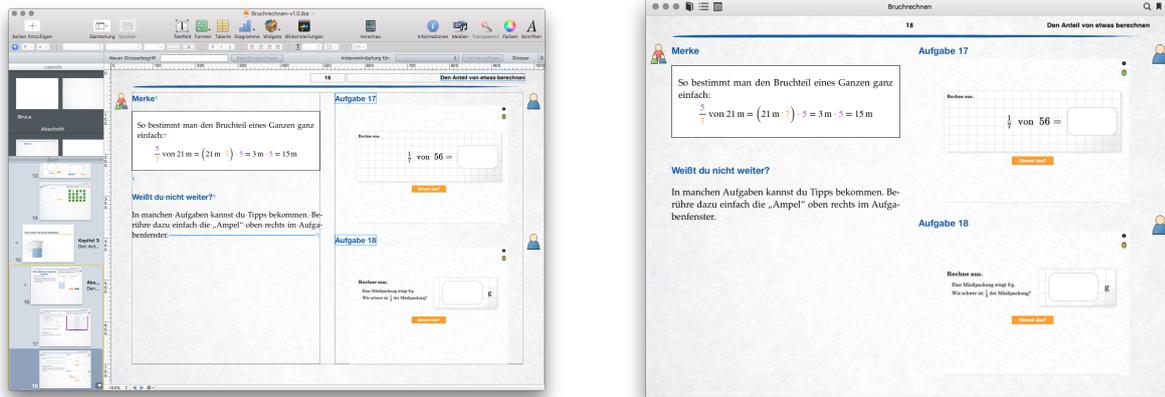


Abbildung 5.1. Die Benutzeroberfläche von iBooks Author (links) im Vergleich zur Darstellung der entsprechenden Seite im iBook (rechts).

## 5.1.1 Widgets

Zusätzlich zu Features der Text- und Bildgestaltung bietet iBooks Author die Möglichkeit, interaktive Elemente einzubinden. Diese *Widgets* stellen frei platzierbare Darstellungselemente dar, in denen der Leserin bzw. dem Leser weit mehr geboten werden kann als Texte und Bilder. Die Software stellt hier einige vorgefertigte Interaktionen zur Verfügung (s. Tabelle 5.1), die von der Erstellerin bzw. dem Ersteller des iBooks direkt in iBooks Author angepasst werden können.

Tabelle 5.1  
Vorgefertigte Widgets in iBooks Author.

Widget	Beschreibung
Galerie	Darstellungen von mehreren Bildern, durch die geblättert werden kann
Medien	Einbindung von Video und Audio im Buch
Wiederholung	Multiple-Choice-Quiz mit automatischer Korrektur
Keynote	Einbindung von Keynote-Bildschirmpräsentationen
Interaktives Bild	Durch das Festlegen von Ankeren auf dem Bild können Zusatzinformationen zu den jeweiligen Bereichen in Form von Texten angegeben werden, die durch Antippen aufgerufen werden können
3D	Darstellung von 3D-Objekten, die im iBook von der Nutzerin oder dem Nutzer frei gedreht werden können
Scrollbalken	Längere Textpassagen können in diesem Widget platziert werden
Popover	Bilder können über dieses Widget mit Zusatzinformationen versehen werden, die durch Antippen aufgerufen werden können

Neben der Verwendung der von iBooks Author zur Verfügung gestellten Widgets ist es auch möglich, eigene Widgets zu programmieren und in iBooks einzubinden. Es handelt sich dabei um Webseiten, die vollständig in das iBook kopiert werden und maßgeschneidert

für die jeweilige Situation im Buch erstellt werden können. Bei der Entwicklung kann nahezu auf das volle Spektrum der Möglichkeiten zurückgegriffen werden, welche die (Front-End-)Webentwicklung bietet. HTML5-Widgets können nur unveränderbar entwickelt werden; Widgetvorlagen, die in iBooks Author verändert werden können, wie es bei den vorgefertigten Widgets möglich ist, können nicht erstellt werden. Ein detaillierterer Einblick in die Widget-Entwicklung für iBooks findet sich in Abschnitt 5.2.

## 5.1.2 Technische Details

iBooks Author speichert interaktive Bücher zunächst im .iba-Format, das dem Entwerfen des Buchs dient und nur auf Computern – nicht auf mobilen Endgeräten – geöffnet und bearbeitet werden kann. Zur Benutzung auf dem iPad – insbesondere für eine Veröffentlichung – muss der Entwurf in ein iBook im Format .ibooks exportiert werden, das keine Änderungen erlaubt. Eine Ausnahme bildet hier die Buchvorschau, die es der Erstellerin oder dem Ersteller erlaubt, die derzeit in Bearbeitung befindliche iBooks Author-Datei in iBooks für Mac oder auf einem via USB-Kabel an den Computer angeschlossenen iOS-Gerät in voller Funktion zu testen. Grundvoraussetzung ist stets, dass auf dem iOS-Gerät die iBooks-App installiert ist. Diese Vorschau kann jedoch nicht mit anderen Nutzerinnen und Nutzern geteilt werden.

Das .ibooks-Format ist eine proprietäre Erweiterung des EPUB3-Standards durch Apple Inc., der zum Zeitpunkt der Erstveröffentlichung von iBooks noch nicht ausgereift war (Bjarnason, 2012b). Insbesondere ist es dadurch nur auf Geräten der Firma (wie Mac, iPad, iPhone) möglich, digitale Bücher im .ibooks-Format zu lesen. Wie bei EPUB3-Dateien handelt es sich bei iBooks auf Dateisystemebene um komprimierte Verzeichnisse, die eine bestimmte Struktur aufweisen. Auch das bearbeitbare .iba-Format stellt ein ähnliches Archiv dar.

Jedes iBook wird von iBooks Author mit einer eindeutigen, für den Nutzer unsichtbaren, internen Kennung (GUID) versehen (Apple Inc., 2018a). Diese GUID bleibt auch erhalten, wenn größere Änderungen an der Datei vorgenommen werden oder .iba-Dateien auf dem Dateisystem dupliziert werden. Damit soll gewährleistet werden, dass neue Versionen eines iBooks als Aktualisierungen und nicht als Kopie eingepflegt werden können, auch wenn diese – bspw. zur internen Versionierung – einen zur alten Version unterschiedlichen Dateinamen aufweisen. Beim Übertragen eines iBooks auf iPads scheint die iBooks-App der mobilen Geräte jedoch die neue Datei nicht als Aktualisierung des bestehenden Buchs anzusehen, wenn bereits ein iBook mit derselben GUID vorhanden ist. Im Gegenteil erachtet die App die bereits installierte Version als die aktuellste. Dementsprechend wird *keine* Aktualisierung des Buchs durchgeführt und der Leserin oder dem Leser weiterhin die alte Fassung angezeigt. Abhilfe kann geschaffen werden, indem das bestehende iBook zunächst vom Gerät gelöscht wird. Um ein neues iBook basierend auf einem alten anzulegen, so dass beide iBooks parallel auf iPads gespeichert werden können, kann iBooks Author über die Funktion „Für iBooks Store zurücksetzen“ für ein iBook eine neue GUID vergeben.

Widgets werden in Browserfenstern angezeigt, die im iBook eingebunden laufen. Dabei handelt es sich um sog. *WebViews*. WebViews sind von den Browserentwicklern bereitge-

stellte Elemente zur Einbindung in andere Programme oder Apps, so dass diese Webseiten anzeigen können, ohne in den eigentlichen Browser wechseln zu müssen. Obwohl sich Browser und WebView sehr ähneln, können durchaus Unterschiede auftreten. Angedeutet werden diese bereits vom *UserAgent*, einem String, in dem Informationen über den Browser bereitgestellt sind (Fielding & Reschke, 2014). So gibt das WebView, in dem die iBooks-App in iOS 10.3.3 Widgets anzeigt, folgende Information zurück: *Mozilla/5.0 (iPad; CPU OS 10\_3\_3 like Mac OS X) AppleWebKit/603.3.8 (KHTML, like Gecko) Mobile/14G60*.

Im Vergleich dazu der native Browser Safari auf demselben iPad: *Mozilla/5.0 (iPad; CPU OS 10\_3\_3 like Mac OS X) AppleWebKit/603.3.8 (KHTML, like Gecko) Version/10.0 Mobile/14G60 Safari/602.1*.

Beim Einbinden von Widgets in iBooks Author gibt es die Wahl zwischen „Wiedergabe in der Seite“ (Inpage-Widgets) und „Vollbildwiedergabe“ (Vollbildwidgets). Vollbildwidgets werden durch Antippen bzw. Anklicken geöffnet und nehmen den gesamten Bildschirm ein. Aus ihnen wechselt man über einen Schließen-Button (weißes X in schwarzem Kreis) in der linken oberen Ecke des Widgets zurück ins Buch. Bei Inpage-Widgets kann gewählt werden, ob die Interaktion beim Aufblättern der Seite automatisch gestartet wird (Autoplay-Widgets) oder ob die Interaktion wie bei Vollbild-Widgets erst nach Antippen bzw. Anklicken startet.

## 5.2 Widgetentwicklung

Dieser Abschnitt gibt eine Einführung in die Entwicklung eigener Widgets für die Verwendung in iBooks.

Eigene Widgets sind als Webseiten in HTML5 zu erstellen (Apple Inc., 2018b). HTML(5)<sup>3</sup> stellt den Kern des Webs dar, wie der User es sieht. Eine HTML-Datei gibt die Struktur eines Webdokuments vor, definiert Kopf-, Menü- oder Inhaltsbereich, kennzeichnet Texte als Überschriften, bindet Bilder ein und definiert Listen und Tabellen. Die Struktur ist dabei hierarchisch; ein Elternelement enthält (mehrere) Kindelemente, die selbst wiederum Kindelemente enthalten können, usw.. Diese Baumstruktur wird von Webbrowsern übersetzt und nutzerfreundlich angezeigt.

Im engeren Sinne bezeichnet HTML5 die Spezifikationen des W3C (World Wide Web Consortium, Eicholz, Faulkner, Leithead, Danilo & Moon, 2017), die einen Standard festlegen, welche Funktionalitäten Webbrowser unterstützen sollten, um die korrekte Anzeige und Funktionalität aktueller Webseiten zu gewährleisten. Bei der Widgetentwicklung kann nahezu auf den vollen Umfang des Spektrums der HTML5-Webtechnologie zurückgegriffen werden, insbesondere auf *Canvas* (Munro, Hickson, Mann, Cabanier & Wiltzius, 2015) und *WebStorage* (Hickson, 2016), was das dynamische Rendern von Graphiken einerseits und das Speichern von Daten auf dem Endgerät andererseits ermöglicht.

Zusätzlich eröffnet CSS3<sup>4</sup> (Etemad, Rivoal & Atkins, 2017) zahlreiche Gestaltungsmöglichkeiten. Vereinfacht gesprochen: Stellt HTML das Grundgerüst einer Webseite dar, so steuert

<sup>3</sup>Hypertext Markup Language, dt.: Auszeichnungssprache für Hypertext

<sup>4</sup>Cascading Style Sheets, dt.: gestufter Gestaltungsbogen

CSS das Aussehen. Über die Steuerung von Position und Abständen einzelner Elemente oder Gruppen von Elementen mittels der entsprechenden CSS-Eigenschaften wird das Layout der Seite festgelegt. Darstellungselemente können etwa hinsichtlich Farbe, Schrift, Hintergrund, Rahmung zudem über CSS-Eigenschaften angepasst werden. Dank der *animation-* und *transition-*Eigenschaften können Änderungen anderer CSS-Eigenschaften auch graduell und animiert dargestellt werden; so ist für die Realisierung bspw. einer Bewegung die Angabe von lediglich zwei CSS-Eigenschaften erforderlich: Endposition und Dauer der Bewegung.

Darüber hinaus können durch die Nutzung von JavaScript anspruchsvolle Programmierungen durchgeführt werden. JavaScript (ECMA International, 2018) ist die Skriptsprache des Webs, die viele Interaktionen erst möglich macht. Ausschlaggebend ist dabei die Verzahnung mit dem sog. *Document Object Model* (DOM), das die Inhaltselemente des HTML-Dokuments widerspiegelt und so der Skriptsprache erlaubt, auf die Struktur Einfluss zu nehmen. Im Kern ist JavaScript eine objektorientierte Skriptsprache, in der nach Bedarf aber auch prozedural oder funktional programmiert werden kann. Für die (Widget-)Entwicklung kann dabei auf viele existierende Bibliotheken wie bspw. jQuery (jQuery Foundation, 2018) oder Lodash (Lodash Utilities, 2018) zurückgegriffen werden.

Auch der Zugriff auf externe Webseiten oder Ressourcen aus dem World Wide Web ist – sofern das Widget durch eine Benutzerinteraktion gestartet wird und nicht bei Seitenaufruf startet – möglich, das Öffnen von Dateien aus dem Dateisystem des Endgeräts jedoch nicht (Apple Inc., 2018b). Grund für diese Einschränkungen sind vermutlich Sicherheitsbedenken.

Die Details der Widgetentwicklung für iBooks bezeichnet Bjarnason (2012a) als „*nightmare*“ (Absatz 8), da iBooks u. a. keine Möglichkeiten bietet, bei Fehlern festzustellen, wo diese genau auftreten. Die folgenden Abschnitte geben daher Hilfestellung zu den unterschiedlichen Herausforderungen bei der Entwicklung von interaktiven Komponenten.

### 5.2.1 Grundgerüst eines Widgets

Für die Verwendung in iBooks müssen die erstellten Webseiten in ein Widget gekapselt werden, das anschließend an die gewünschte Position im Buchlayout gezogen werden kann. Damit die Webseiten als Widget erkannt werden, muss die Kapselung eine gewisse Struktur aufweisen, deren Grundgerüst in diesem Abschnitt näher beschrieben wird.

Im Hinblick auf die Organisation im Dateisystem ist ein Widget ein Verzeichnis mit der Endung *.wdgt*. Damit das Widget von iBooks Author erkannt wird, muss es mindestens drei Dateien enthalten (Apple Inc., 2018b), die im Folgenden näher erläutert werden: eine Informationsdatei (mit Dateinamen *Info.plist*), eine Haupt-HTML-Datei und ein Vorschaubild (mit Dateinamen *Default.png*). Neben diesen können weitere, für die Darstellung oder Funktionalität benötigte Dateien im Widgetverzeichnis abgelegt werden, wie Bilder und andere Medien, JavaScript-Bibliotheken, Schriftarten oder CSS-Stylesheets.

## Info.plist

Die Datei Info.plist stellt iBooks (Author) Hintergrundinformationen über das Widget bereit, wie z. B. den Namen des Widgets. Es handelt sich um eine XML-Datei<sup>5</sup>, die eine *XML property list* (XML-Eigenschaftenliste), kurz PList, enthält. Die PList der Info.plist-Datei besteht aus einem sog. Dictionary, eine ungeordnete Liste an Schlüssel-Wert-Paaren (Key-Tag mit dem Schlüssel, gefolgt von einem Tag mit dem Wert).

In diesem Dictionary sind für ein Widget erforderlich anzugeben (Apple Inc., 2018b): ein Name (CFBundleName), eine Kennzeichnung (CFBundleIdentifier) in umgekehrten Domainformat (also bspw. de.tum.www statt www.tum.de) und der Name der Haupt-HTML-Datei (MainHTML). Zusätzlich können u. a. Breite (Width) und Höhe (Height) des Widgets angegeben sowie Zugriff auf das Internet gefordert werden (AllowNetworkAccess).

Code 5.1 zeigt eine beispielhafte Ausprägung der XML-Datei für ein Widget mit dem Namen *VisualizeCircle*, das Zugriff auf das Internet benötigt, die Abmessungen 1024 × 768 aufweist und dessen Haupt-HTML-Datei den Dateinamen *visualizeCircle.html* hat.

Code 5.1. Info.plist-Datei von Widget W9, Visualisierungen am Kreis.

```

1 | <?xml version="1.0" encoding="UTF-8" ?>
2 | <!DOCTYPE plist PUBLIC "-//Apple//DTD PLIST 1.0//EN"
3 |   "http://www.apple.com/DTDs/PropertyList-1.0.dtd">
4 | <plist version="1.0">
5 |   <dict>
6 |     <key>AllowNetworkAccess</key>
7 |     <true/>
8 |     <key>CFBundleIdentifier</key>
9 |     <string>edu.tum.ma.visualizecircle</string>
10 |    <key>CFBundleName</key>
11 |    <string>VisualizeCircle</string>
12 |    <key>Width</key>
13 |    <integer>1024</integer>
14 |    <key>Height</key>
15 |    <integer>768</integer>
16 |    <key>MainHTML</key>
17 |    <string>visualizeCircle.html</string>
18 |   </dict>
19 | </plist>

```

## Haupt-HTML-Datei

Die Haupt-HTML-Datei wird beim Öffnen des Widgets angezeigt. In ihr werden die unterschiedlichen Elemente und Interaktionen programmiert. Ihr Dateiname darf keine Steuerzeichen beinhalten, ist aber sonst beliebig, solange er dem in der Info.plist festgelegten entspricht. Die Dateiendung muss *.html* lauten.

<sup>5</sup>XML = Extensible Markup Language, erweiterbare Auszeichnungssprache. XML findet an vielen Stellen Verwendung, an denen Daten hierarchisch verwaltet werden.

## Default.png

Das Bild `Default.png` wird sowohl in iBooks Author als auch in den iBooks-Apps an der Stelle im Text angezeigt, an der das Widget eingebunden ist. Es wird solange als Vorschau des Widgets angezeigt, bis das Widget geladen ist; anschließend wird auf das eigentliche Widget umgeschaltet. Im Fall von Vollbild-Widgets wird das Vorschaubild zunächst auf Bildschirmgröße vergrößert; während des Ladeprozesses zeigt der gesamte Bildschirm das Vorschaubild.

Auf den Zeitpunkt der Umschaltung von Vorschaubild auf eigentliches Widget kann Einfluss genommen werden: Durch Hinzufügen des Schlüssels `IBNotifiesOnReady` mit dem Wert `true` in die PList der `Info.plist` wird iBooks mitgeteilt, dass das Widget ein Signal sendet, wann von der Anzeige des Vorschaubildes umgeschaltet werden soll. Dieses Signal wird in der Haupt-HTML-Datei durch den Aufruf von `widget.notifyContentIsReady()` an die App gesendet. Das dazu benötigte Objekt `widget` entstammt der JavaScript-Datei `AppleWidget.js`, die auf allen Endgeräten vorhanden ist und im Code über `AppleClasses/AppleWidget.js` einzubinden ist; das Verzeichnis `AppleClasses` ist dabei nicht im Widgetverzeichnis anzulegen. Unterlässt man das Einbinden des Skripts oder den Funktionsaufruf, so verbleibt das Widget beim Anzeigen des Vorschaubildes.

### 5.2.2 Anzeigegröße eines Widgets

Es gibt mehrere Faktoren, die einen Einfluss darauf haben, in welcher Größe das Widget angezeigt wird. Während Vollbildwidgets den gesamten Bildschirm überdecken, werden Inpage-Widgets in der vom Vorschaubild im Layout eingenommenen Abmessungen dargestellt.

Dabei richtet sich die Anzeigegröße des Inhalts bei Vollbildwidgets zunächst nach den in der `Info.plist` angegebenen Breiten- und Höhenangaben. Fehlt mindestens eine dieser Angaben, so werden die Dimensionen der `Default.png` verwendet. Eventuell verbleibender Platz wird dabei mit Schwarz aufgefüllt; Widgets, deren Abmessungen die Bildschirmgröße übersteigen, werden dementsprechend verkleinert dargestellt.

Besitzen Inpage-Widgets durch `Info.plist` oder `Default.png` festgelegte Dimensionen, welche die Abmessung des im Layout platzierten Platzhalterbildes übersteigen, wird der Inhalt des Widgets dementsprechend gestaucht, um eine komplette Anzeige zu gewährleisten. Liegen die Dimensionen unter den Abmessungsmaßen des Platzhalters, so wird das Widget in der angegebenen Größe im Platzhalter zentriert angezeigt.

Inhaltselemente des Widgets, die außerhalb der so ermittelten Abmessungen liegen, werden nicht angezeigt. Auch bieten Widgets in iBooks der Nutzerin oder dem Nutzer nicht die Kommodität, den Bildschirminhalt zu scrollen, um diese einzublenden, wie das in Webbrowsern für gewöhnlich möglich ist. Benötigt man Scrollfunktionalitäten, so sind diese extra zu programmieren (Gern, 2012; Wilde, 2012). Diese Einschränkung kann allerdings auch dazu benutzt werden, Elemente des Widgets außerhalb des Bildschirms zu „verstecken“, was neue Gestaltungsmöglichkeiten erschließt, wie bspw. das Einfahren zusätzlicher Informationen in die Interaktionen bei Bedarf.

### 5.2.3 Daten und Dateien in Widgets

Bezüglich des Zugriffs auf Widgets im iBook gibt es zwei Sichtweisen: Auf der einen Seite werden sie im WebView geöffnet, wozu als Protokoll `x-ibooks-th://` und als Domain die GUID des iBooks (s. Abschnitt 5.1.2) verwendet wird. Die Subdomain unterscheidet sich je nach Starttyp (*autoplay* bei Autoplay-Widgets, *manual* sonst). Abbildung 5.2 zeigt den vollständigen Domainpfad. Die Subdomain spielt in der Datenverwaltung (s. Abschnitt 5.2.3.1) im iBook eine wichtige Rolle, da die einzelnen Verfahren domainspezifisch arbeiten. Auf der anderen Seite existieren Widgets als Verzeichnisse im komprimierten Dateisystem der `.iBook-Datei`, was für die Dateiverwaltung (s. Abschnitt 5.2.3.2) im iBook von Bedeutung sein kann.

$$x-ibooks-th:// \begin{cases} \text{autoplay} \\ \text{manual} \end{cases} \cdot \text{GUID}/\text{assets}/\text{widgets}/\text{WIDGETNAME}.wdgt/$$

Start-Typ

Abbildung 5.2. Zusammensetzung des internen Domain-Pfads der Widgets im iBook (ausgelesen mittels JavaScripts `location.href`). *GUID* GUID des iBooks, *WIDGETNAME* Name des angezeigten Widgets im Dateisystem.

#### 5.2.3.1 Speichern von Daten

Die Entwicklung von HTML-Widgets ermöglicht es, die Webtechnologien zur Speicherung von Daten auf dem Endgerät zu nutzen. Allgemein ist dabei zu beachten, dass Apple die Persistenz der gespeicherten Daten zwar zusichert (Apple Inc., 2011), dass die Daten aber zumindest in gewissen Betriebssystemversionen vom System bei Speicherknappheit gelöscht werden (Evet, 2015). Da die Daten meist als Zeichenkette gespeichert werden, bietet es sich an, für komplexere Datenstrukturen das *JSON<sup>6</sup> Data Interchange Standard* (kurz *JSON*, ECMA International, 2017) zu nutzen. JSON ist ein Datenaustauschformat, mit dem strukturierte Objekte, wie Dictionaries oder Listen, per Spezifikation in Zeichenketten und umgekehrt umgewandelt werden können. Das Format wird von einer großen Anzahl an Programmiersprachen unterstützt.<sup>7</sup>

Die unterschiedlichen Alternativen, die zum Speichern von Daten in Frage kommen, werden im Folgenden erläutert.

#### Cookies

Cookies erlauben das Speichern von Daten auf dem Rechner der Webseitenbesucherin bzw. des -besuchers in Form von Zeichenketten. Cookies werden bei jedem Seitenaufruf an den Server übermittelt, der die Webseite bereitstellt. Nach geltendem Standard für HTTP-Cookies (Barth, 2011) sind pro Domäne – in einem iBook pro Widgetstarttyp – 50 Cookies und 4096 Bytes pro Cookie erlaubt. Insgesamt ergibt das folglich einen Speicherplatz 200

<sup>6</sup>JavaScript Object Notation

<sup>7</sup>Für eine umfassende Liste der unterstützenden Sprachen s. [www.json.org](http://www.json.org)

Kilobyte für ein iBook. Sobald größere Datenmengen aufgezeichnet werden sollen, stellen Cookies also keine praktikable Alternative dar.

### Web Storage

Web Storage (Hickson, 2016) erlaubt es Webseiten – und damit auch Widgets –, in der sog. `localStorage` Daten auf dem Rechner des Besuchers zu speichern, die der Seite beim nächsten Besuch zur Verfügung stehen – ähnlich zu Cookies. Im Gegensatz zu einem Cookie ist `localStorage` eine Liste an Schlüssel/Wert-Paaren, die jeweils aus einer Zeichenkette bestehen. Außerdem verbleiben die Daten in der `localStorage` stets auf dem Rechner des Besuchers. Unter Angabe des Schlüssels kann über JavaScript die hinterlegte Zeichenkette ausgelesen, eingeschrieben oder gelöscht werden.

Hickson (2016) empfiehlt den Browserherstellern, maximal 5 MB pro Domain in der `localStorage` zu erlauben. Tatsächlich variiert die Speicherkapazität aber nach Hersteller (Kitamura, 2014). Für den mobilen Browser Safari von Apple, auf dem die Darstellung der Widgets von iBooks Author basiert, liegt die Speicherbegrenzung jedoch bei den empfohlenen 5 MB. Beim Speichern von Daten innerhalb eines iBooks muss also darauf geachtet werden, dass diese Datenmenge nicht überschritten wird, da es sonst zu Datenverlusten oder Störungen in der Funktionalität der Widgets kommen kann.

### Web SQL Database

Web SQL Database (Hickson, 2010) ist eine nicht fertiggestellte API<sup>8</sup>, die das Speichern und Abrufen von Daten in einer relationalen Datenbank mittels eines nicht spezifizierten Dialekts von SQL<sup>9</sup> erlaubt. Insbesondere im Hinblick auf eine statistische Auswertung bietet sich Web SQL Database als Speicher-API an, da die Datenbank die Daten in einem ähnlichen Format speichert wie gängige Statistiksoftware. Dadurch entfällt zudem das Codieren der Daten in JSON-Zeichenketten und zurück. Jedoch wurde die Entwicklung des Standards eingestellt (Hickson, 2010). Insbesondere ist deswegen nicht sichergestellt, dass die Unterstützung der API nach künftigen Softwareupdates noch gegeben ist. Im Sinne der Langlebigkeit der erstellten iBooks bietet sich diese Form der Speicherung daher nicht an.

### IndexedDB

IndexedDB (Mehta et al., 2015) kann als „Nachfolger“ von Web SQL Database angesehen werden und bietet eine API zur Speicherung größerer Datenmengen in relationalen Datenbanken. Der oben angesprochene Vorteil bezüglich der Ähnlichkeit zwischen den Speicherarten auf den Endgeräten und der Software zur Datenanalyse bleibt damit bestehen. Jedoch ist die Implementierung der API in den Betriebssystemen iOS 8 und iOS 9 fehlerhaft (Camden, 2014) und daher nicht für den Einsatz außerhalb von Entwicklungsumgebungen ratsam, solange Geräte mit diesen Betriebssystemen als Endgeräte in Frage kommen. Für

<sup>8</sup>Application Programming Interface, Schnittstelle zur Entwicklung von Anwendungen

<sup>9</sup>Standard Query Language, eine standardisierte Abfragesprache für Datenbanksysteme

zukünftige iBooks-Projekte sollte IndexedDB jedoch als ernsthafte Alternative in Betracht gezogen werden.

## Speicherung auf externem Server

Daten, die nicht allein der Funktionalität der Widgets dienen, sondern auch bspw. zu Nutzungsanalysen verwendet werden, müssen von den Endgeräten an die Entwicklerin oder den Entwickler übermittelt werden. Hier ist es sinnvoll, die Daten an einen zentralen Server zu übertragen. Es scheint dabei also naheliegend, den Zwischenschritt der Speicherung im iBook auszulassen und die Daten direkt an den Server zu senden. Technisch ist ein derartiges direktes Senden an einen Server umsetzbar (bspw. mittels XHR, vgl. Abschnitt 6.3.2). Datenverlust kann dabei allerdings nur ausgeschlossen werden, wenn die Kommunikation zwischen Anzeigegerät und Server sichergestellt ist. Gerade beim Einsatz von iBooks in Schulen ist dies in Frage zu stellen: So stand im Schuljahr 2016/17 an weniger als der Hälfte aller Schulen in Bayern drahtloses Internet zu Verfügung (Bayern, 2016). Zudem ist zu beachten, dass die sendenden Geräte ohne weitere Vorarbeit vom Server nicht unterschieden werden können (s. Abschnitt 6.3.2).

### 5.2.3.2 Zugriff auf Dateien

Die Existenz der Widgets als Verzeichnisse im Dateisystem des iBooks ermöglicht einem Widget den Zugriff auf Ressourcen, die in jeweils anderen Verzeichnissen bzw. Widgets im iBook liegen – unabhängig davon, ob die Widgets beim Öffnen aus dem iBook dieselbe Subdomain aufweisen oder nicht. Auch direktes Aufrufen der Haupt-HTML-Datei eines anderen Widgets ist somit möglich und damit der Wechsel von einem Widget in ein anderes, ohne dafür ins iBook zurückkehren zu müssen.

Insbesondere bietet es sich daher an, Ressourcen, die von allen bzw. mehreren Widgets benutzt werden – wie etwa JavaScript-Bibliotheken oder CSS-Stylesheets –, nur in einem Widget-Verzeichnis in das iBook einzukopieren, das die Dateien für die Kernfunktionalitäten gebündelt enthält. Die jeweils anderen Widgets können auf diese Ressourcen über relative Pfade zugreifen (bei Widgetname *core.wdgt* über *../core.wdgt/RESSOURCE*). Zum einen kann dadurch die Dateigröße des iBooks reduziert werden, da die unterschiedlichen Bibliotheken nicht für jedes Widget einzeln eingebunden werden müssen. Zum anderen können Updates der Ressourcen durch das Update eines einzelnen Widgets für das gesamte Buch bereitgestellt werden. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass sich beim Update eines Widgets in iBooks Author (aber auch beim Löschen und erneuten Einfügen desselben Widgets) unter Umständen der Dateiname des Widgets im iBook ändern kann: Wohl um sicherzustellen, dass das Update über die Programmfunktionen wieder rückgängig gemacht werden kann, behält iBooks Author die alte Version unter dem ursprünglichen Namen zunächst bei. Die Verweise der anderen Widgets referenzieren somit weiterhin die alte Version. Abhilfe kann geschaffen werden, indem das alte Widget aus der *.iba*-Datei gelöscht, die Datei ohne das Widget gespeichert und iBooks Author geschlossen wird. Beim anschließenden erneuten Öffnen der iBooks Author-Datei kann die neue Version des

Widgets an die – nun freie – Stelle des alten gezogen werden, ohne dass sein Name sich ändert.

### 5.2.4 Debugging von Widgets

Weder in den Hilfe-Seiten von Apple zu iBooks Author noch in den Internetcommunities zur Widgetentwicklung finden sich Hinweise auf interne Werkzeuge zur Fehlerbehandlung in Widgets (s. Bjarnason, 2012a). Für jede Überprüfung der Funktionalität und des Layouts muss zudem mindestens eine Vorschau eines iBooks erstellt werden: Auch wenn ein Widget in Desktopbrowsern fehlerfrei arbeitet und korrekt dargestellt wird, kann nicht ohne Weiteres davon ausgegangen werden, dass beides im iBook auf dieselbe Weise gegeben ist.

Ein erster Eindruck der Darstellung und Funktionsweise eines HTML-Widgets auf einem Touchscreen kann gewonnen werden, indem man die Haupt-HTML-Datei auf einem iPad im mobilen Browser Safari öffnet. Ist dieses zudem via USB-Kabel mit einem Mac verbunden, können die Webentwicklerwerkzeuge des Desktop-Safaris im Browser auf dem iPad angewendet werden (Apple Inc., 2018d). Da ein direktes Öffnen der sich auf dem Entwicklungsrechner befindlichen HTML-Datei auf einem iPad nicht möglich ist, muss diese zunächst über einen Server bereitgestellt werden. Dieser kann bspw. auch auf dem Rechner installiert werden, wodurch ein Upload entfällt. Über eine (lokale) Netzwerkverbindung kann die HTML des Widgets anschließend auf dem iPad getestet werden.

Zusätzlich muss allerdings beachtet werden, dass die Anzeige im iBook nicht vollends der im mobilen Safari entspricht. Neben den offensichtlichen Unterschieden (im mobilen Safari auf Grund der Adressleiste kleinere Anzeigefläche, mobiler Safari scrollt) existieren auch feine Unterschiede bezüglich des zugrunde liegenden Systems (s. Abschnitt 5.1.2). Insbesondere kann es durchaus sein, dass ein Widget im mobilen Safari fehler- und warnungsfrei läuft, im iBook aber Probleme aufweist. Um die Ursachen solcher Fehler zu finden, benötigt es vielfältige Programmierkenntnisse und kreatives Denken. Zur Unterstützung beim Beheben dieser Probleme kann laut Lange (2012) ein JavaScript-basiertes Entwicklerwerkzeug (z. B. Firebug Lite, Mozilla, 2008) direkt in Widgets eingebunden werden.

### 5.2.5 Darstellung von mathematischen Inhalten

Bei der Erstellung von digitalen Mathematikschulbüchern ist eine Einbindung von mathematischen Inhalten meist unerlässlich. Während iBooks Author die Darstellung von mathematischen Formeln im iBooktext direkt unterstützt (Apple Inc., 2018c), erstreckt sich dieses Merkmal nicht direkt auf Widgets. Bei der Widgetentwicklung muss für die Darstellung mathematischer Inhalte auf Ressourcen der Webentwicklung zurückgegriffen werden. Die folgenden Abschnitte erläutern Möglichkeiten, mathematische Symbolik (Abschnitt 5.2.5.1) und dynamische Geometrie Konstruktionen (Abschnitt 5.2.5.2) in Webseiten – und damit HTML5-Widgets – darzustellen.

### 5.2.5.1 Darstellung mathematischer Symbolik

Die Herausforderung in der Darstellung von Mathematik ist laut Carlisle, Miner und Ion (2014, Kapitel 1) Folgendes: „[...] *to capture both notation and content (that is, its meaning) in such a way that documents can utilize the highly evolved notation of written and printed mathematics as well as the new potential for interconnectivity in electronic media.*“ Des Weiteren ist es langwierig, alle Nuancen und Sonderfälle mathematischer Notation für Computer aufzuschreiben, denn: „*The manuals describing the nuances of present-day computer typesetting and composition systems can run to hundreds of pages*“ (Carlisle et al., 2014, Kapitel 1).

Als grundlegende Eigenschaft von mathematischer Notation beschreiben Carlisle et al. (2014) ihre Zweidimensionalität: Elemente innerhalb mathematischer Notation stehen nicht nur horizontal (links von/rechts von), sondern auch vertikal (über/unter) in Beziehung. So besteht die gemischte Zahl  $1\frac{3}{5}$  aus der Zahl 1, die links vom Bruch  $\frac{3}{5}$  steht, der wiederum aus den Zahlen 3 und 5 sowie einem (Bruch-)Strich besteht, die übereinander platziert werden müssen.

MathML<sup>10</sup> (Carlisle et al., 2014) ist der Versuch des W3C, diesen Anforderungen gerecht zu werden. Im Stile von XML/HTML werden zusammengehörige mathematische Elemente in Tags zusammengefasst und die Darstellungsstruktur als Baum aufgeschlüsselt. Zusätzlich können über sog. *annotations* Kommentare zur Semantik mit dem Markup verknüpft werden. Das Ergebnis ist eine maschinenfreundliche, jedoch nicht unbedingt menschenfreundliche Sprache, wie Code 5.2 an einem Beispiel demonstriert.

Code 5.2. MathML-Markup für den Bruch  $\frac{1}{3}$ .

```

1 <math>
2   <mrow>
3     <mfrac>
4       <mn>1</mn>
5       <mn>3</mn>
6     </mfrac>
7   </mrow>
8 </math>
```

Die Unterstützung in den Browsern ist uneinheitlich (Deveria, 2018). So entschied sich Google, MathML aus dem Browser Chrome zu entfernen, so dass der aktuell (Stand April 2020) populärste Browser (StatCounter, 2020) die Darstellung von Mathematik nicht nativ unterstützt (Shankland, 2013). Darüber hinaus ist MathML in den unterschiedlichen Browsern meist nicht vollständig implementiert (Deveria, 2018), so dass die Suche nach Alternativen – trotz des ausgearbeiteten Standards – notwendig scheint.

Im Bereich der Printmedien existiert mit  $\text{\TeX}$  (Knuth, 1984) ein weit verbreiteter Standard, der in der Fachwissenschaft auch wegen seines eleganten Formelsatzes geschätzt wird

<sup>10</sup>Mathematical Markup Language, Mathematische Auszeichnungssprache

(vgl. Abbildung 5.3).  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  und darauf aufbauende Software, wie  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , übersetzen die in codifizierter Form eingegebenen Formeln in die gewünschte mathematische Notation.

$$\backslash\text{frac}13 \quad \backslash\text{frac}\{1\}\{3\}$$

Abbildung 5.3.  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Markups für den Bruch  $\frac{1}{3}$ .

Unterschiedliche Projekte haben sich zum Ziel gesetzt, diese Übersetzung in lesbare Mathematik auch für das Web zur Verfügung zu stellen. Verbreitet ist die Softwarebibliothek MathJax (Davide, Sorge, Perfect & Krautzberger, 2009), die u. a. von der American Mathematical Society gesponsert wird. Neben  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  unterstützt MathJax auch weitere Eingabemethoden und mehrere Arten, Formeln zu setzen. Ein weiteres Feature ist bspw. die Kopierbarkeit des generierten Formelsatzes in die Office-Suite von Microsoft. Die Vielzahl an Features verringert jedoch bei MathJax die Geschwindigkeit des Renderings.

Ein konkurrierendes Softwarepaket ist  $\text{K}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  (2018), das deutlich schneller arbeitet als MathJax (Bourne, 2018).  $\text{K}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  befindet sich in einem früheren Entwicklungsstadium wie MathJax und unterstützt daher noch weniger  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Befehle als der Konkurrent. Wegen des Geschwindigkeitsvorteils und der einfachen Handhabung kann  $\text{K}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  für Projekte, die mit dem eingeschränkten Spektrum der unterstützten Funktionen auskommen, jedoch die bessere Alternative darstellen.

MathJax wie  $\text{K}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  transformieren das  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Formelmarkup in einen Strukturbaum, der anschließend von unterschiedlichen Renderern in MathML- oder HTML-Markup übersetzt wird. Im letzteren Fall wird die endgültige, korrekte Platzierung zueinander über CSS geregelt (vgl. Code 5.3).

### 5.2.5.2 Darstellung dynamischer Geometrie

Eine dynamische Geometriesoftware (DGS) ist ein Computerprogramm, das das Erstellen von dynamischen geometrischen Konstruktionen erlaubt. Unter *dynamisch* ist hier die Eigenschaft der Konstruktion zu verstehen, dass man die Konstruktion selbst oder ihre Komponenten beliebig verschieben kann, während die festgelegten Gegebenheiten (bspw. rechter Winkel zwischen zwei Geraden) erhalten bleiben. Als Anwendungen in Lernkontext nennt Labs (2008) das Entdecken von mathematischen Tatsachen und das intuitive Erfahren von mathematischen Gegebenheiten.

Eine frei verfügbare DGS ist das Programm *Cinderella* (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2012), das die typischen Eigenschaften von DGS aufweist und sich darüber hinaus durch u. a. folgende Besonderheiten auszeichnet (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2012):

- Cinderella unterstützt gleichzeitiges Manipulieren und Erstellen einer Konstruktion, ohne zwischen Programmmodi umschalten zu müssen.
- Nicht-euklidische Geometrien (projektive, hyperbolische und elliptische Geometrien) werden von Cinderella standardmäßig unterstützt.
- Der gesamte Code von Cinderella basiert auf mathematischen Grundlagen, wodurch Inkonsistenzen wie z. B. springende Punkte in Konstruktionen vermieden werden.

Code 5.3. Von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  generiertes HTML-Markup für den Bruch  $\frac{1}{3}$  zur Demonstration der Komplexität der Thematik „Darstellung von mathematischer Symbolik im Web“, Zeilenumbrüche und Einrückung vom Autor eingefügt.

```

1 <span class="katex">
2   <span class="katex-html" aria-hidden="true">
3     <span class="base">
4       <span class="strut" style="height: 2.00744em; vertical-align:
5         -0.686em;"></span>
6     <span class="mord">
7       <span class="mopen nulldelimiter"></span>
8       <span class="mfrac">
9         <span class="vlist -t vlist -t2">
10          <span class="vlist -r">
11            <span class="vlist" style="height: 1.32144em;">
12              <span class="" style="top: -2.314em;">
13                <span class="pstrut" style="height: 3em;"></span>
14                <span class="mord">3</span>
15              </span>
16              <span class="" style="top: -3.23em;">
17                <span class="pstrut" style="height: 3em;"></span>
18                <span class="frac-line" style="border-bottom-
19                  width: 0.04em;"></span>
20              </span>
21              <span class="" style="top: -3.677em;">
22                <span class="pstrut" style="height: 3em;"></span>
23                <span class="mord">1</span>
24              </span>
25            </span>
26          <span class="vlist -s"></span>
27        </span>
28      <span class="vlist -r">
29        <span class="vlist" style="height: 0.686em;">
30          <span class=""></span>
31        </span>
32      </span>
33    <span class="mclose nulldelimiter"></span>
34  </span>
35 </span>
36 </span>
37 </span>

```

- Cinderella erlaubt es, Fraktale aus iterierten Funktionensystemen zu berechnen und zu visualisieren.
- Mit Cinderella ist es möglich, interaktive Übungsblätter zu erstellen, in denen Schülerinnen und Schüler eigene Konstruktionen (evtl. mit eingeschränkten Funktionen) fertigen.
- Im *CindyLab* können physikalische Simulationen durchgeführt werden.
- *CindyScript* ist eine funktionale Programmiersprache, die es erlaubt, die in Cinderella erzeugten geometrischen Konstruktionen und Zeichnungen über Code zu steuern. Dadurch ist es insbesondere möglich, mit Cinderella elaborierte Konstruktionen zu entwickeln, die auch programmartiges Aussehen aufweisen können.

## CindyJS

Cinderella-Konstruktionen konnten im Web lange Zeit über sog. Java-Applets angezeigt werden. In den letzten Jahren sinkt die Browserunterstützung von Java-Plugins aufgrund von wiederkehrender Sicherheitslücken zunehmend. Demgegenüber entwickeln sich die nativen Browserfähigkeiten in JavaScript und HTML5 stetig weiter, so dass vieles, das vormals ohne externe Plugins im Browser nicht möglich gewesen ist, nach und nach ohne zusätzliche Software auf Seiten des Endnutzers verfügbar wird.

Vor diesem Hintergrund ist auch das Projekt CindyJS (z. B. von Gagern, Kortenkamp, Richter-Gebert & Strobel, 2016) einzuordnen: „*CindyJS aims to be a viewer for interactive mathematical content (generated by Cinderella or by explicit coding) in modern web browsers.*“ (von Gagern et al., 2016, S. 320) Ziel des CindyJS-Projektes ist es also, die Darstellung von Cinderella-Inhalten in modernen Browsern ohne die Nutzung von Java zu ermöglichen. Dazu wird ein JavaScript-Skript entwickelt, das die Funktionalitäten von Cinderella zur Verfügung stellt. Die graphische Ausgabe geschieht in einem HTML Canvas Element (Munro et al., 2015); Konstruktionen werden bei Initialisierung als Liste der geometrischen Objekte codiert (für ein Beispiel s. Code 5.4). Die Kompatibilität mit Cinderella umfasst auch einen Parser für CindyScript.

Da iBooks keine Java-Unterstützung bietet (Apple Inc., 2018b), können Cinderella-Java-Applets nicht in iBooks eingebunden werden. Hier wird es mit CindyJS durch die Implementierung in HTML5 und JavaScript möglich, dynamische Konstruktionen aus Cinderella in iBooks zu verwenden.

Darüber hinaus kann CindyJS durch Plugins erweitert werden (von Gagern & Richter-Gebert, 2016). Plugins, die in JavaScript entwickelt werden und über eine Schnittstelle mit (den Objekten) der Konstruktion kommunizieren können, stellen weitere Funktionalitäten in CindyJS bereit, wie bspw. die Darstellung von 3D-Graphiken. Auch die Darstellung mathematischer Formeln in Konstruktionen regelt ein Plugin: Das *katex-plugin* (von Gagern & Richter-Gebert, 2016) integriert  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  in CindyJS und übersetzt den von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  erzeugten Strukturbaum direkt auf der Zeichenfläche in korrekte mathematische Schreibweise. Da das Plugin tiefere Änderungen am Code von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  selbst vornimmt, verbleibt es auf  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Version 0.7.0, so dass einige erst später entwickelte Features von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  nicht zur Verfügung stehen (bspw. die Funktion `\text{textcolor}\{\}`).

Code 5.4. JavaScript-Code zur Initialisierung von CindyJS. Die Konstruktion zeigt ein beschriftetes Dreieck *ABC*, dessen Ecken frei bewegt werden können.

```
1 createCindy({
2   geometry:[
3     {name:"A", type:"Free", pos:[1.0,-4.0,1.0], labeled:true},
4     {name:"B", type:"Free", pos:[8.0,-4.0,1.0], labeled:true},
5     {name:"C", type:"Free", pos:[4.0, 2.0,1.0], labeled:true},
6     {name:"a", type:"Segment", args:["B","C"], labeled:true},
7     {name:"b", type:"Segment", args:["C","A"], labeled:true},
8     {name:"c", type:"Segment", args:["A","B"], labeled:true},
9   ],
10  ports:[{id:"CSCanvas", width:680, height:336}],
11 });
```

## Zusammenfassung

iBooks Author erweist sich dank der unterstützten Formeldarstellung und der Möglichkeit, interaktive Komponenten einzubinden, als fähiges Tool zur Erstellung von interaktiven Mathematikschulbüchern. Insbesondere können in Form von HTML5-Widgets interaktive Aufgaben entwickelt werden, welche die Potenziale interaktiver Schulbücher umsetzen. Da für die Widgetentwicklung auf viele Webtechnologien zurückgegriffen werden kann, ist es zudem möglich, Daten in iBooks zu erheben und so eine Prozessdatenerfassung für die Analyse der iBook-Nutzung umzusetzen.

# 6 ALICE:Bruchrechnen

## Überblick

Im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen (s. bspw. Reinhold, Hoch, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018) wurde ein interaktives iBook zur Einführung von positiven rationalen Zahlen entwickelt (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a), welches in diesem Abschnitt vorgestellt wird. Abschnitt 6.1 gibt einen kurzen Überblick über das iBook und seine interaktiven Komponenten (Widgets). Abschnitt 6.2 beschreibt die wiederholt auftretenden für das Projekt spezifischen Gestaltungselemente und Funktionalitäten. Anschließend enthält Abschnitt 6.3 Informationen über die im iBook integrierte und eigens entwickelte Prozessdatenerfassung. In Abschnitt 6.4 werden die einzelnen Kapitel des iBooks näher beschrieben. Dabei werden jeweils exemplarisch einige Widgets herausgegriffen, deren Implementierung im Detail erläutert wird.

## 6.1 Übersicht über das interaktive Buch

Das Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen<sup>1</sup> zielt auf die Entwicklung und Evaluation eines interaktiven Schulbuchs (im Sinne von Definition 8, s. Abschnitt 2.3.1.1) zur Einführung von Bruchzahlkonzepten (iBook). Das iBook entstand in Kooperation zwischen dem Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik und dem Lehrstuhl für Geometrie und Visualisierung der Technischen Universität München (TUM). Für ein vollständiges Bild des entwickelten interaktiven Schulbuchs ist es daher umungänglich, die Arbeit anderer Projektmitglieder zu beschreiben. Erläutert eine der folgenden Ausführungen einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag anderer zum iBook, so wird dies im Sinne der Transparenz im Text gekennzeichnet.

### 6.1.1 Gliederung und Aufbau des iBooks

Das iBook ist in sieben Kapitel gegliedert, die je einen Aspekt des Bruchzahlkonzepts behandeln:

1. „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen
2. „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen
3. „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer
4. „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen

<sup>1</sup>ursprünglich: „Lernen mit dem Tablet-PC: Eine Einführung in das Bruchrechnen für Klasse 6“. Das gesamte Projekt wurde von der Heinz Nixdorf Stiftung vom Januar 2015 bis zum Dezember 2018 finanziell gefördert.

5. „Brüche auf dem Zahlenstrahl“
6. „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche
7. „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen

Die Kapitel folgen in sich einem einheitlichen Schema und beinhalten *Einführungs-* und *Übungsteile*. Einführungsteile führen die Leserin oder den Leser zu einem neuen Thema hin. Dazu kommt mindestens ein interaktives Widget zum Einsatz, oft auch mehrere. Begleitend wird die Thematik im iBook-Text erläutert. Einführungsteile schließen mit einer Zusammenfassung des Stoffes in einem Merksatz (durch einen gerahmten weißen Kasten vom übrigen iBook-Text abgehoben). In Übungsteilen findet sich schließlich je eine Sammlung an interaktiven Aufgaben, welche die Aspekte des Kapitels abbilden. Der Übungsteil kann zu einzelnen, kurzen Aspekten auch entfallen.

Das interaktive Buch wurde direkt als solches geplant und implementiert. Nach den Klassifikationen digitaler Schulbücher in der Literatur (s. Abschnitt 2.3.1.2) handelt es sich daher um ein digitales Schulbuch zweiter Generation im E-Book-Format 3.0. Da nach der Erstellung des E-Book ein Arbeitsbuch als analoges Pendant erstellt wurde (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018b), weist iBook eine *hybride Form* nach Usiskin (2018) auf.

Die Reihung der Inhalte und das Verfassen der iBook-Texte oblag federführend Frank Reinhold in Rücksprache mit dem Projektteam; für didaktische Begründungen der Abfolge siehe daher Reinhold (2019). Die Konzeption und Umsetzung der interaktiven Inhalte verantwortete hauptsächlich der Autor dieser Arbeit. Die iBook-Kapitel und ihre interaktiven Komponenten werden in Abschnitt 6.4 genauer beschrieben.

Das Layout des iBooks ist durchgängig zweispaltig gehalten (vgl. Abbildung 5.1), so dass jede iBookseite eine Doppelseite eines klassischen Buchs widerspiegelt. Eine weitere Parallele zum traditionellen Buch wird durch die Verwendung von Seitenzahlen gezogen (Landoni et al., 2000; Öngöz & Mollamehmetoğlu, 2017; Vassiliou & Rowley, 2008). Icons am Seitenrand geben Anregungen für den Einsatz im Unterricht (Lehrer-Schüler-Gespräch, Partnerarbeit, Einzelarbeit) und machen die didaktische Struktur des iBooks ersichtlich (vgl. Abschnitt 2.4.1.1). Das Layout ist seitentreu, lässt sich also nicht durch Zoomen oder anderweitig von den Nutzerinnen und Nutzern anpassen (s. Abschnitt 2.3.1.2).

## 6.1.2 Kategorisierung der entwickelten Widgets

Die Widgets in ALICE:Bruchrechnen sind ausnahmslos HTML5-Widgets (s. Abschnitt 5.1.1), die von den Doktoranden im Projekt (Stefan Hoch, Frank Reinhold, Bernhard Werner) erstellt wurden. Dadurch konnten die einzelnen Interaktionen angepasst an die jeweilige Situation entworfen und implementiert werden.

Die Widgets lassen sich in zwei Kategorien aufteilen:

- *Interaktive Aufgaben* beinhalten stets konkrete Aufgabenstellungen mit automatischem Feedback auf die Antwort der Schülerin oder des Schülers (s. Abbildung 6.1 für ein Beispiel). Das Feedback greift dabei die Empfehlungen von Hattie und Timperley (2007) für gutes Feedback auf und erfolgt sofort, gibt die korrekte Lösung an und verwendet nach

Möglichkeit unterschiedliche Repräsentationen – wie dies als Vorteil digitaler Schulbücher gilt (Choppin & Borys, 2017; Usiskin, 2018; Yerushalmy, 2016).

Interaktive Aufgaben unterscheiden sich – neben ihrem Inhalt – durch die Anzahl der zu bearbeitenden Einzelaufgaben: In *Übungsaufgaben* werden automatisch so lange zufällige neue Aufgaben generiert, wie es von der Nutzerin oder dem Nutzer angefordert wird – ein Vorteil von digitalen Schulbüchern gegenüber konventionellen Formaten (Usiskin, 2018; Yerushalmy, 2014). *Einführungsaufgaben* sind hingegen mit einem festen Aufgabenpool versehen; nach erfolgreicher Bearbeitung dieses Pools kann die Aufgabe geschlossen oder zurückgesetzt werden, wobei in letzterem Falle dieselben Aufgaben erneut bearbeitet werden können.

- *Interaktive Diagramme* hingegen bieten keine Möglichkeit, eine Antwort einzugeben (s. Abbildung 6.2 für ein Beispiel). Sie dienen in der Regel der Einführung neuer Konzepte und können frei exploriert werden. In ALICE:Bruchrechnen wird für interaktive Diagramme häufig von der Möglichkeit digitaler Mathematikbücher Gebrauch gemacht, nicht nur statische, sondern auch manipulierbare Darstellungen einzubinden (Lew, 2016; Yerushalmy, 2016).

In Bezug auf die Widgettypen in iBooks (s. Abschnitt 5.1.2) ist der Großteil der interaktiven Aufgaben und Diagramme als Vollbildwidget eingebunden. Beim Öffnen der Widgets werden daher der Buchtext und damit eventuell für die Widgetnutzung nützliche Informationen verdeckt. Allerdings stellt die Einbindung als Inpage-Widgets in den meisten Fällen keine praktikable Alternative dar, da das zweispaltige Layout des iBooks zu wenig Platz bietet, um alle Informationen und Interaktionen der meisten Widgets lesbar und bedienfreundlich im Fließtext darzustellen. In drei Fällen konnte der Inhalt der Widgets in Spaltenbreite dargestellt werden; diese wurden daher als Inpage-Autoplay-Widgets eingebunden.

### 6.1.3 Übersicht über die erstellten Widgets

Insgesamt wurden für die Kapitel in ALICE:Bruchrechnen 88 Widgets entwickelt; eine Übersicht findet sich in Tabelle A.1. Davon sind 73 Widgets interaktive Aufgaben in dem in Abschnitt 6.1.2 beschriebenen Sinne, die restlichen 15 Widgets interaktive Diagramme. In den Übungsteilen der Kapitel finden sich insgesamt 53 Widgets, die übrigen 35 kommen in der Einführung der unterschiedlichen Themen zum Einsatz. 32 Widgets arbeiten mit Visualisierungen, in 34 sind symbolische Rechnungen durchzuführen. Die eigens für ALICE:Bruchrechnen entwickelte Handschrifterkennung (Werner, 2019, s. Abschnitt 6.2.1.3) wird in 31 Widgets verwendet. 15 Widgets bieten den Schülerinnen und Schülern gestufte Lösungshilfen, davon blenden sieben die Lösungshilfen nach einer falschen Antwort ein und erlauben es, dieselbe Aufgabe erneut zu bearbeiten. In sieben der 15 Widgets zum Größenvergleich kommt der Vergleichserklärer (s. Abschnitt 6.2.2.1) zum Einsatz. 79 der Übungsaufgaben arbeiten adaptiv (s. Abschnitt 6.2.2.2). 71 interaktive Aufgaben verwalten die Einzelaufgaben nach dem Karteikastensystem (s. Abschnitt 6.2.2.3). 29 der Widgets greifen extensiv auf CindyJS zurück. Insgesamt wurden 74 Widgets vom Autor entwickelt, die verbleibenden 14 von Bernhard Werner (elf Widgets) und Frank Reinhold (drei Widgets).

Umrande  $\frac{3}{4}$  der Äpfel. i

Das war nicht richtig.  
Du hast zu wenig Äpfel  
umrandet.

Neue Aufgabe

Abbildung 6.1. Beispiel einer interaktiven Aufgabe (W13), mit Korrektur.

Du kannst dir den Zahlenstrahl auch als „geschrumpftes“ i  
Rechteck vorstellen:

Nenner:

3 4 5 8 10

Verwandeln

Abbildung 6.2. Beispiel eines interaktiven Diagramms (W55).

## 6.2 ALICE:Bruchrechnen-Widgets

Dieser Abschnitt beschreibt die Widgets in ALICE:Bruchrechnen. Dabei werden zunächst wiederkehrende Komponenten der Widgets dargelegt (Abschnitt 6.2.1); anschließend wird auf wichtige Funktionalitäten eingegangen (Abschnitt 6.2.2) und erläutert, wie die Widgets multilingual umgesetzt wurden (Abschnitt 6.2.3); abschließend erfolgt eine Beschreibung der projektspezifischen Erweiterungen von CindyJS (Abschnitt 6.2.4).

### 6.2.1 Komponenten

In diesem Abschnitt werden die sichtbaren und unsichtbaren Komponenten beschrieben, die in vielen Widgets Verwendung finden. Zunächst erfolgt eine kurze Beschreibung der einzelnen Elemente der Benutzeroberfläche, die in Abbildung 6.3 gezeigt sind. Anschließend werden Skripte beschrieben, die in mehreren Widgets eingesetzt werden, um die Funktionalität der Widgets zu erweitern.

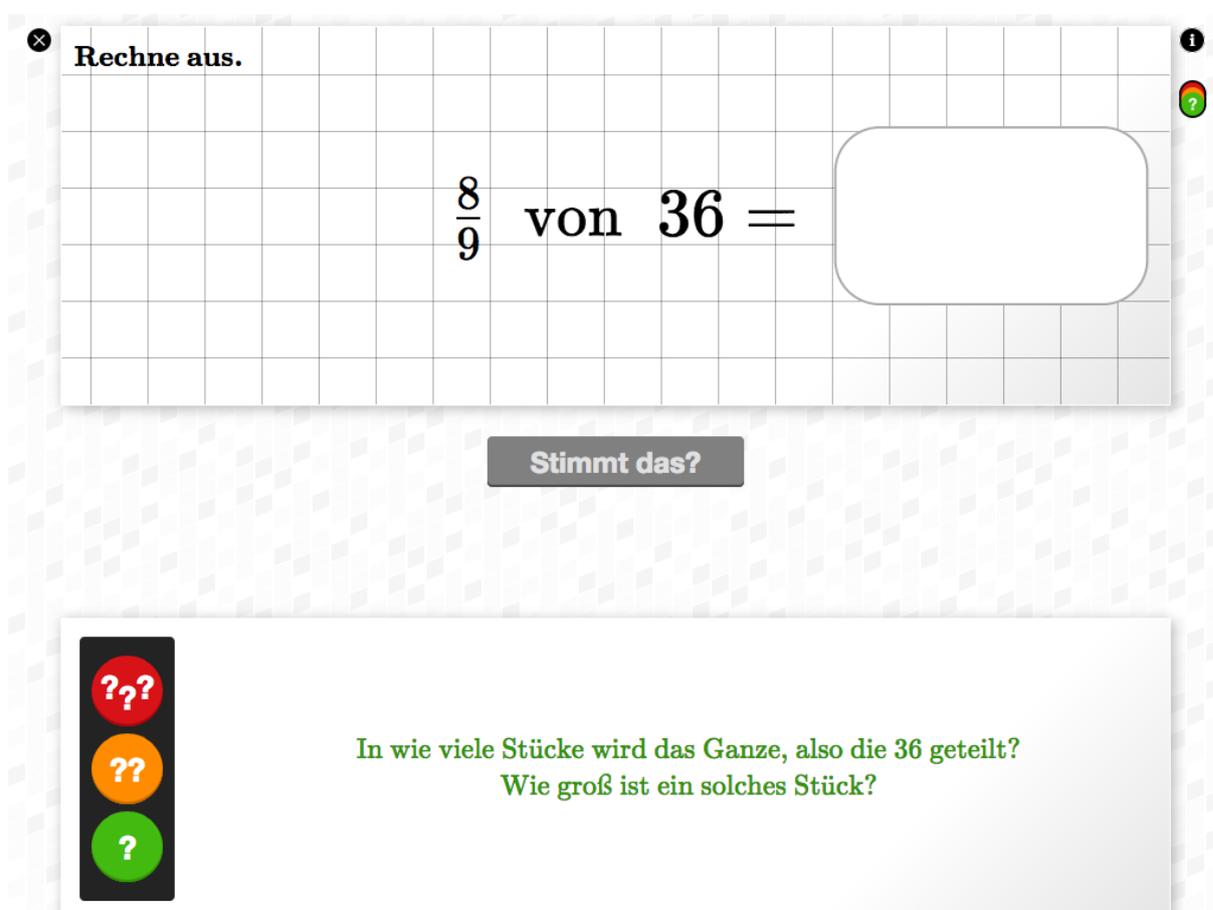


Abbildung 6.3. Elemente der Benutzeroberfläche in ALICE:Bruchrechnen-Widgets. Buttons, Karte, Lösungshilfen, Feld der Handschrifterkennung in Widget W17.

### 6.2.1.1 Elemente und Gestaltung der Benutzeroberfläche

Entsprechend der Merkmale guter digitaler Schulbücher (vgl. Abschnitt 2.4.1.1) wurden bei der Gestaltung des iBooks und insbesondere der Widgets die iOS Human Interface Guidelines (Apple Inc., 2015) sowie Ergebnisse zur Gestaltung von mobilen Lernplattformen für Kinder (Anthony, Brown, Nias, Tate & Mohan, 2012; G. Revelle & Reardon, 2009) berücksichtigt. So besitzen Elemente, mit denen interagiert werden kann, eine Mindestabmessung von 44 px mal 44 px. Interaktionen mit Elementen nahe des Bildschirmrandes sind größtenteils so gestaltet, dass sie auch bei Berührungen zwischen Element und Rand ausgelöst werden. Des Weiteren berücksichtigen die Widgets die Empfehlungen in Bezug auf Schriftgrößen und verwenden in der Regel eine Schriftgröße von 18 pt und nie eine Schriftgröße kleiner als 11 pt.

#### Farben

Für das iBook wurde von Bernhard Werner mithilfe von paletton.com ein Farbschema entworfen, das aus zwei Primärfarben (Blau und Orange), zwei Korrekturfarben (Rot und Grün), einem Grau und fünf Sekundärfarben (Violett, Türkis, Gelb, Braun und Magenta) besteht. Jede Farbe liegt in fünf Helligkeitsstufen vor (s. Abbildung 6.4).

Text ist innerhalb und außerhalb von Widgets in Schwarz gehalten; Hervorhebungen werden durch die Primärfarben Blau und Orange gekennzeichnet, die bei Bedarf durch die Sekundärfarben ergänzt werden. Die Farben Rot und Grün sind der Markierung von Falschem bzw. Richtigem vorbehalten. Mit Rücksicht auf eine mögliche Rot-Grün-Sehschwäche wird jedoch nie allein Farbe eingesetzt, um dies zu kennzeichnen. So werden richtige Antworten zusätzlich mit einem Haken, falsche mit einem Kreuz gekennzeichnet. In der Regel erfolgt zusätzlich textuelles Feedback zur Korrektheit der Eingabe – „Richtig!“ oder „Das stimmt!“ für korrekte Antworten und „Das war nicht richtig.“ für falsche Antworten.



Abbildung 6.4. ALICE-Farbschema.

## Buttons

Drückbare Knöpfe – Buttons – sind einheitlich als einfarbige, abgerundete Rechtecke dargestellt. Eine leichte Schattierung am unteren bzw. oberen Rand stilisiert die Gestaltungselemente als drückbar bzw. gedrückt. Dabei wird die Farbe Orange ausschließlich für den Button zur Korrektur von Aufgaben verwendet, während die restlichen Knöpfe in Blau gehalten sind. Dies entspricht der Forderung von Apple Inc. (2015), dass das Aussehen von Elementen mit gleicher Funktionalität über die Umgebung hinweg gleich gehalten werden soll.

## Karten

Als weiteres wiederkehrendes Designelement begegnen der Nutzerin oder dem Nutzer stilisierte, rechteckige *Karten*, die durch einen Schlagschatten vom Widgethintergrund abgesetzt sind. Karten enthalten in der Regel wichtige Aufgabeninhalte. Beinhaltet die Karte mathematische Symbolik, so ist sie mit einem karierten Hintergrund versehen, wie die Schülerinnen und Schüler ihn aus typischen Schulheften kennen. Der Hintergrund ist so dimensioniert und positioniert, dass der Bruchstrich der Brüche, die auf der Karte dargestellt sind, stets in der Mitte eines Kästchens liegt. Dadurch sollen die Schülerinnen und Schüler an eine Schreibweise gewöhnt werden, die sie auch im Schulheft anwenden können.

## Informationspanel

Alle Vollbildwidgets im iBook enthalten einen Informationstext, der das Widget detailliert beschreibt, falls Nutzerinnen oder Nutzern Aufgabenstellung oder Bedienung unklar sein sollte. Dieser Text ist auf einer grauen Karte geschrieben, die über einen Knopf in der rechten oberen Ecke des Bildschirms aufgerufen werden kann (vgl. Abbildung 6.5). Der Knopf ist dem Schließen-Knopf nachempfunden, der von iBooks in der linken oberen Ecke aller Vollbildwidgets eingeblendet wird, und zeigt ein kleines *i* (s. Abbildung 6.3).

### 6.2.1.2 Gestufte Lösungshilfen

In einigen Widgets sind gestufte Lösungshilfen hinterlegt, die als Mittel der individuellen Förderung (Meyer, 2014) und Unterstützung selbstregulierten Lernens (Reiss & Hammer, 2013) in E-Books eingebunden werden können (Usiskin, 2018). In diesen Widgets werden zur Unterstützung der Aufgabenbearbeitung stets drei Hinweise angeboten. Dadurch ist das Design der Lösungshilfen über die Widgets hinweg gleich gehalten. Der Grad der Unterstützung, die der jeweilige Hinweis gibt, ist sowohl mit Farben (Grün–Gelb–Rot) als auch über die Anzahl an Fragezeichen (?–??–???) in der Buttonbeschriftung codiert. Als Gestaltungselement dient daher zum Aufruf der Hinweise eine Ampel – stilisiert zur Einblendung der Hilfekarte und vollständig zur Wahl der Lösungshilfe (s. Abbildung 6.3).

Lösungshilfen können jederzeit im Bearbeitungsprozess aufgerufen werden; der Unterstützungsgrad ist dabei frei wählbar. Einige Aufgaben bieten zusätzlich nach einer falschen Antwort die Möglichkeit, diese unter Zuhilfenahme eines Hinweises zu korrigieren.

The screenshot shows a math problem interface. At the top left, there is a close button (X) and the text "Rechne aus.". Below this is a grid where the fraction  $\frac{8}{9}$  and the text "von 36" are displayed. A button labeled "Stimmt das?" is positioned below the grid. On the left side, there is a vertical traffic light with three circles: a red circle with "???", a yellow circle with "??", and a green circle with "?". Below the traffic light, the question is written in green: "In wie viele Stücke wird das Ganze, also die 36 geteilt? Wie groß ist ein solches Stück?". On the right side, there is an information panel titled "Den Bruchteil berechnen". The text in the panel reads: "Bestimme den Bruchteil. Schreibe deine Antwort einfach mit dem Finger in das Kästchen." followed by "Wenn du mal nicht weiter weißt, tippe auf die Ampel um einen Tipp zu erhalten." and "Fertig? Tippe auf den orangenen Knopf *Stimmt das?* um deine Lösung zu überprüfen. Dann kannst du weiter üben, indem du auf den dunkelblauen Knopf *Neue Aufgabe* tippst." At the bottom of the panel is a blue button labeled "Aufgabe zurücksetzen".

Abbildung 6.5. Eingebledetes Informationspanel in Widget W17.

### 6.2.1.3 Handschrifterkennung

Die Eingabe von Zahlen als Lösung erfolgt in den Widgets über eine eigens von Bernhard Werner in CindyJS entwickelte Handschrifterkennung (Werner, 2019). Die Entscheidung, diese Methode der Eingabe zu ermöglichen, ist bereits früh im Entwicklungsprozess gefallen. Ein Nachteil der typischen Eingabe in iOS über die Tastatur ist, dass diese im Querformat etwa die Hälfte des Bildschirms einnimmt und so Informationen nicht mehr dargestellt werden können. Zudem steht eine ausgedehnte Nutzung der Tastatur nicht in Übereinstimmung mit der sonstigen, auf natürliche Fingergesten ausgelegten Bedienung des iBooks und widerspricht somit dem korrespondierenden Qualitätsmerkmal für gute digitale Schulbücher (vgl. Abschnitt 2.4.1.1)

Die Funktionsweise der Handschrifterkennung wird im Folgenden kurz beschrieben. Für den ausführlichen mathematischen Hintergrund und die detaillierte Funktionalität sei an dieser Stelle auf Werner (2019) verwiesen.

Das in ALICE:Bruchrechnen eingesetzte Verfahren zur Erkennung von Handschrift ist ein sog. *Onlineverfahren*. Im Gegensatz zu einem *Offlineverfahren*, in dem von einem festen, bspw. gescannten Bild über Kantenerkennung versucht wird, die geschriebenen Symbole zu klassifizieren, benutzen *Onlineverfahren* nicht die Bildpunkte an sich, sondern vielmehr die direkte Eingabe in Form der eingegebenen Striche (engl. *strokes*). Beide Verfahren haben

Vor- und Nachteile. So liegen bei Onlineverfahren mehr Informationen über die Symbole vor, gleichzeitig können diese Verfahren auch durch unterbrochene oder zusätzliche Strokes beeinträchtigt werden, die bspw. die Darstellung des Symbols auf dem Bildschirm für das menschliche Auge vervollständigen.

Die ALICE-Handschrifterkennung berechnet aus der Liste an Strokes geometrische Eigenschaften (siehe auch Delaye & Anquetil, 2013). Für jede zu erkennende Ziffer ist für jedes berechnete Feature eine Wahrscheinlichkeit festgelegt, die beschreibt, wie wahrscheinlich eine handschriftliche Eingabe jener Ziffer dieses Feature aufweist. Aus der Liste der Wahrscheinlichkeiten und den beobachteten Features wird anschließend die wahrscheinlichste Ziffer für diese Eingabe bestimmt und ausgegeben (für Details siehe Werner, 2019).

Die Darstellung in den Widgets ist stets gleich: Ein abgerundetes Rechteck mit grauem Rand, das an ein vergrößertes Eingabefeld erinnert, wie man es aus Onlineformularen kennt, signalisiert, dass hier mit dem Finger Ziffern geschrieben werden können. Zur Eingabe von Brüchen werden zwei dieser Felder eingebunden und durch einen Bruchstrich getrennt (s. Abbildung 6.6). Die Fingerbewegungen auf dem Touchscreen werden innerhalb der Felder in blauer Farbe aufgezeichnet. Sobald 750 ms lang keine Berührung erfolgt oder in einem anderen Feld zu schreiben begonnen wird, startet die Erkennung der Ziffern. Die vom Algorithmus als am wahrscheinlichsten bestimmten Ziffern ersetzen die nachgezeichneten Strokes und werden mittig im Eingabefeld in der  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Serifenschrift angezeigt. Ist die Eingabe keiner Ziffernfolge zuzuordnen, wird ein Fragezeichen ausgegeben.

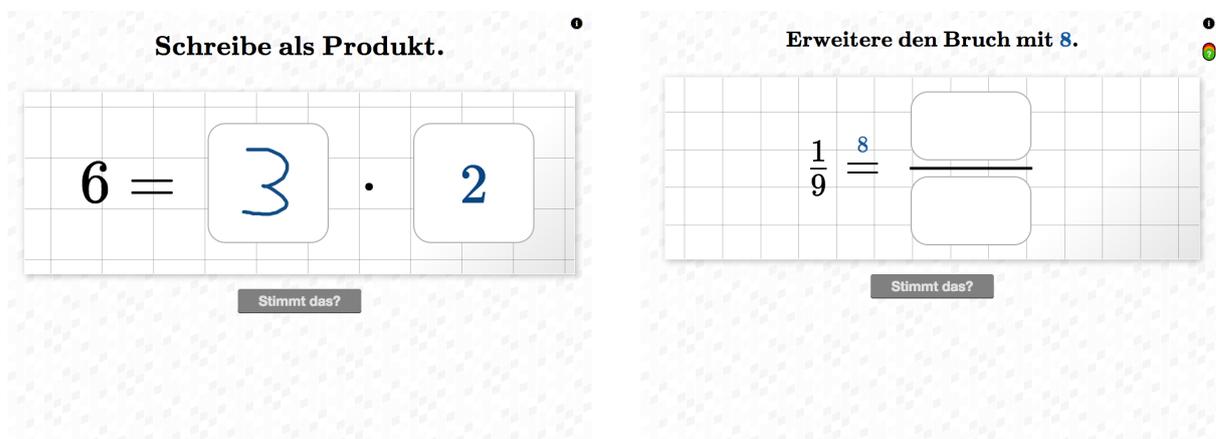


Abbildung 6.6. Eingabefelder mit Handschrifterkennung in Widget W40 (links, typische abgerundete Rechtecke als Eingabeflächen, Darstellung der Handschrifteingabe und des erkannten Symbols). Typische Eingabemaske für Brüche in Widget W41 (rechts).

Da die Handschrifterkennung parallel zu den Widgets entwickelt wurde und dementsprechend häufigen Änderungen im Code unterlag, wurde der CindyJS-Code zur Erkennung von Handschrift in eine externe JavaScript-Datei ausgelagert, die den Text beim Laden der Webseite an die passende Stelle in den CindyJS-Code injiziert<sup>2</sup>. Dieses Vorgehen erlaubt die

<sup>2</sup>Die Handschrifterkennung wurde in CindyJS verfasst. Da CindyJS-Plugins zum damaligen Zeitpunkt in JavaScript geschrieben werden mussten, konnte kein Plugin die Funktionalität bereitstellen. Die Code-Injektion erfolgte nach dem in Abschnitt C.3 beschriebenen Verfahren.

Reduktion der Dateigröße des iBooks, da die externe Datei in einem Kernfunktionalitäts-Widget abgelegt werden kann, und so nicht mit jedem Widget einkopiert werden muss (vgl. Abschnitt 5.2.3).

#### 6.2.1.4 Zeichenfläche

Vollständig implementiert, aber letztlich nicht im iBook verwendet, wurde auch eine in CindyJS geschriebene *Zeichenfläche*, um Notizen zur zu bearbeitenden Aufgabe direkt im Widget zu ermöglichen. Sie kann über ein kleines Stiftsymbol am linken unteren Bildschirmrand eingeblendet werden. Anschließend kann mit unterschiedlichen „Stiften“, die am unteren Bildschirmrand zur Auswahl stehen, auf den gesamten Anzeigebereich des Widgets gezeichnet werden. Für die Stifte stehen fünf Farben am unteren Bildschirmrand zur Wahl. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die Zeichnung schrittweise oder gänzlich zurückzusetzen. Zudem können Teile der Zeichnung mit dem Radierer gelöscht werden (s. Abbildung 6.7). Nach dem Ausblenden wird die Zeichnung halbtransparent über dem Widget angezeigt, so dass ggf. getätigte Notizen zur Aufgabenbearbeitung zur Verfügung stehen.

Auf eine Einbindung in der finalen Version des iBooks wurde verzichtet, da mit den Elementen des Widgets nicht interagiert werden kann, während die Zeichenfläche eingeblendet ist, weil in diesem Fall alle Fingerbewegungen als Zeichenvorgang interpretiert werden. Das nötige Ausblenden der Zeichenfläche, um die Aufgaben zu beantworten, wurde in internen Tests als störend und der natürlichen Bedienung abträglich bewertet.

Der gesamte Code ist in einem JavaScript-Objekt *Scribble* gekapselt. Die Implementierung ist dabei so angelegt, dass zur Nutzung der Zeichenfläche lediglich das externe Skript eingebunden werden muss, das den Code enthält. Das Skript erstellt alle benötigten HTML-Elemente und initialisiert CindyJS für die Zeichenfläche. Zum Löschen der Zeichnung – bspw. beim Anzeigen einer neuen Aufgabe – stellt das Scribble-Objekt die Funktion `clear()` bereit, die im Widgetcode an der gewünschten Stelle aufgerufen werden kann.

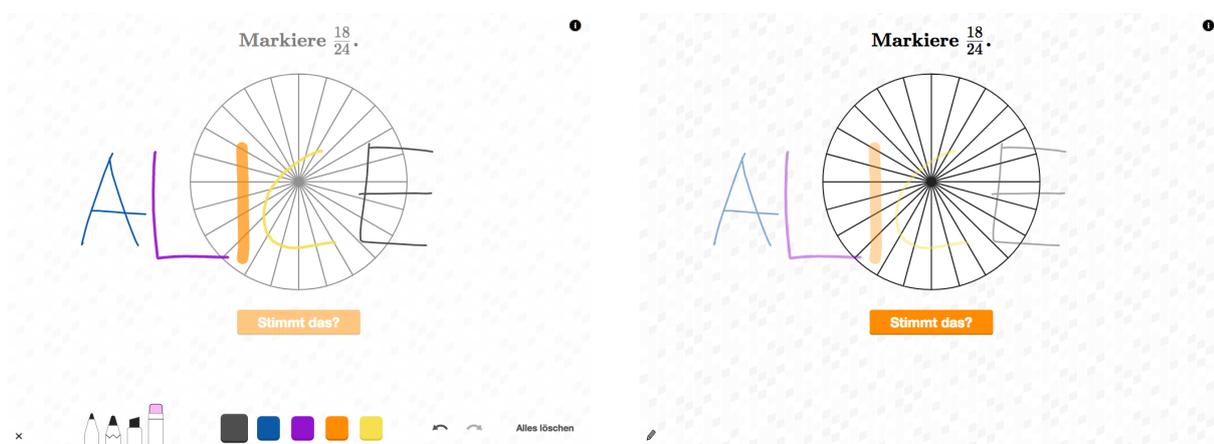


Abbildung 6.7. Scribblefläche, zu Demonstrationszwecken eingebunden in Widget W9. Aktive Zeichenfläche mit ausgewähltem Radierer (links) und ausgeblendete Scribblefläche (rechts).

## 6.2.2 Funktionalitäten

Neben den sichtbaren Designelementen greifen die Widgets in ALICE:Bruchrechnen auf einige im Hintergrund laufende, mehrfach verwendete Ressourcen zurück, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Für die Darstellung mathematischer Formeln wird in allen Widgets auf  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  (2018, s. auch Abschnitt 5.2.5.1) zurückgegriffen. In einigen Widgets unterstützt jQuery (jQuery Foundation, 2018) die Interaktionen.

### 6.2.2.1 Vergleichserklärer

Brüche können auf unterschiedliche Art und Weise verglichen werden (s. Abschnitt 1.3.2.1). Zur Förderung unterschiedlicher Strategien ist in den Vergleichsaufgaben im iBook ein automatischer Vergleichserklärer integriert, den die Schülerinnen und Schüler nach einer falschen Antwort über einen Button aufrufen können und der die geschickteste Strategie zum aktuellen Vergleichspaar auswählt.

Um diese Auswahl zu treffen, überprüft das Skript die einprogrammierten Strategien nach einer festgelegten Reihenfolge (s. Abbildung 6.8). Die erste mögliche Strategie wird verwendet, um den Vergleich schrittweise zu erklären (s. Abbildung 6.9 für ein Beispiel und Abschnitt A.2 für Beispiele aller Strategien). Dabei wird nur dann, wenn keine eigenschaftsbasierte Strategie greift, auf die stets anwendbare Strategie zurückgegriffen, beide Brüche auf den selben Zähler oder Nenner zu bringen. Durch Minimierung des Rechenaufwands<sup>3</sup> entscheidet das Skript, welche dieser beiden Strategien angewendet werden soll.

Alle Erklärungen werden mittels ikonischer Darstellungen (Kreis, falls beide Nenner kleiner als 12 sind, sonst Rechteck) verbildlicht. Ist die Unterteilung der Ganzen gemäß dem Nenner nicht sinnvoll darzustellen – d. h. ist die Breite der zu zeichnenden Teile in Pixeln zu klein –, so werden die Brüche ohne Unterteilung visualisiert.

<sup>3</sup>Der Rechenaufwand wird im Skript wie folgt berechnet: Zunächst werden für die zu vergleichenden Brüche  $\frac{z_1}{n_1}$  und  $\frac{z_2}{n_2}$  der kleinste gemeinsame Zähler  $z_{12} = \text{kgV}(z_1, z_2)$  und der kleinste gemeinsame Nenner  $n_{12} = \text{kgV}(n_1, n_2)$  berechnet. Zusätzlich werden die Zahlen  $Z_1, Z_2$  bestimmt, mit denen die Brüche erweitert/gekürzt werden müssen, um auf den gemeinsamen Zähler zu kommen, sowie die Zahlen  $N_1, N_2$ , mit denen die Brüche erweitert/gekürzt werden müssen, um auf den gemeinsamen Nenner zu kommen. Der Rechenaufwand  $A_Z$  für das „Auf-den-gleichen-Zähler-Bringen“ ist nun definiert als

$$A_Z = \begin{cases} 0 & Z_1 = 1 \\ Z_1 \cdot (z_1 + n_1) & \text{sonst} \end{cases} + \begin{cases} 0 & Z_2 = 1 \\ Z_2 \cdot (z_2 + n_2) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Rechenaufwand  $A_N$  für das Erweitern/Kürzen beider Brüche auf denselben Nenner ist analog definiert. Das Skript berechnet beide Werte und wählt die Strategie mit dem kleineren Rechenaufwand.

$$x < y, \quad x = \frac{z_1}{n_1}, \quad y = \frac{z_2}{n_2}, \quad \text{kgZ} = \text{kgV}(z_1, z_2), \quad \text{kgN} = \text{kgV}(n_1, n_2)$$

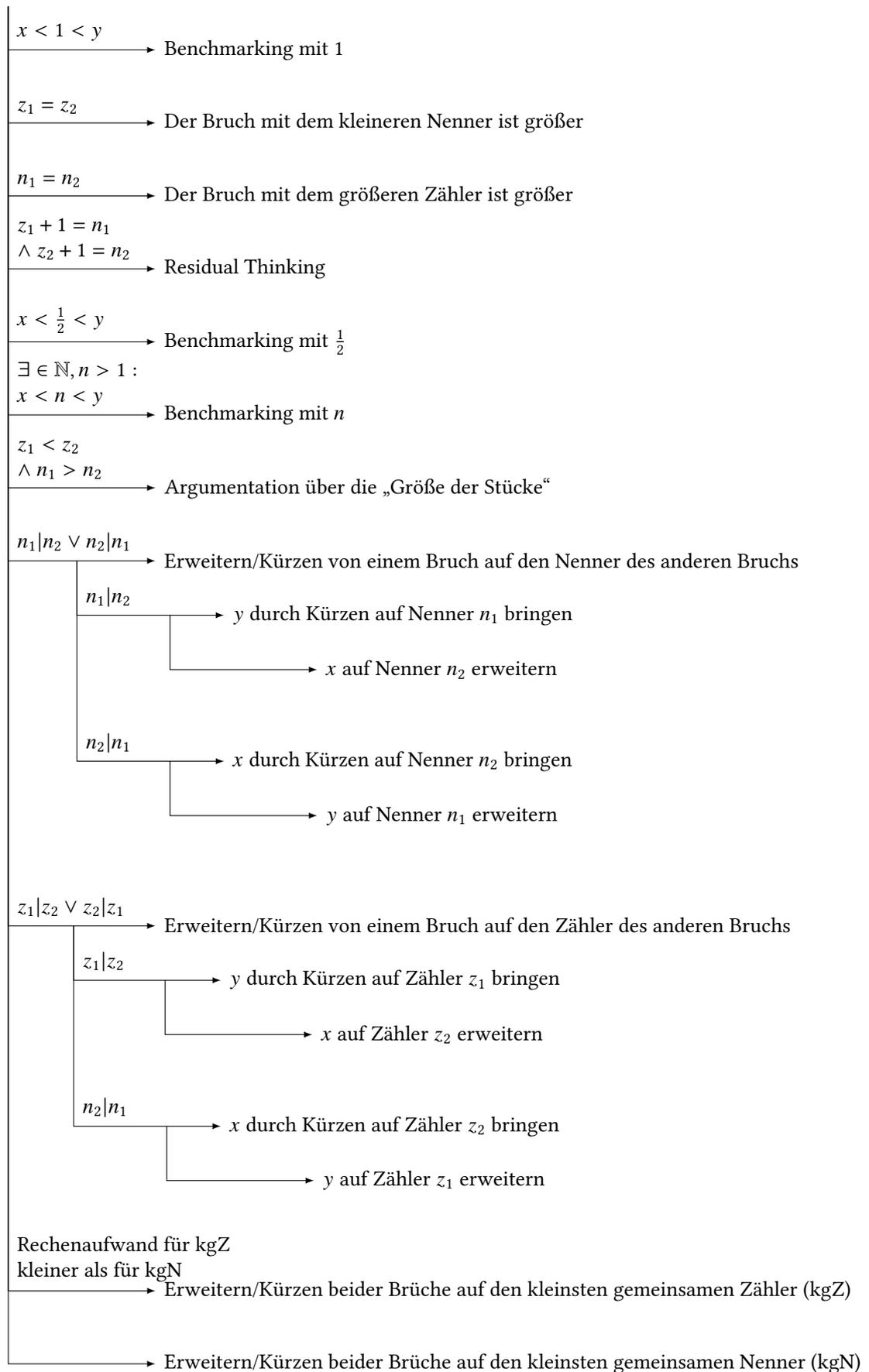
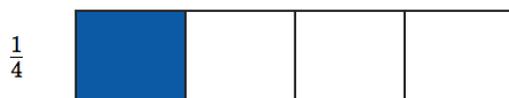


Abbildung 6.8. Interner Entscheidungsbaum des Vergleichserklärers.

Bei  $\frac{1}{4}$  ist der Zähler **kleiner** als der Nenner. Der Bruch ist also **kleiner** als 1.



Bei  $\frac{3}{2}$  ist der Zähler **größer** als der Nenner. Der Bruch ist also **größer** als 1.



Es ist also  $\frac{1}{4} < 1 < \frac{3}{2}$ , und daher

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{2}.$$

Abbildung 6.9. Automatisch generierte Erklärung zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{3}{2}$ .

### 6.2.2.2 Adaptivität

Die meisten Übungsaufgaben in ALICE:Bruchrechnen passen ihren zugrunde liegenden Aufgabengenerierungsalgorithmus im Laufe der fortwährenden Bearbeitung an die Nutzerin bzw. den Nutzer an. In der Unterscheidung nach Leutner (2002) arbeiten die Widgets *adaptiv*, da dies vollautomatisch geschieht. Die Widgets sind – von der Möglichkeit der vollständigen Zurücksetzung abgesehen – durch die Benutzerin bzw. den Benutzer nicht *adaptierbar*.

In der Regel sind die Aufgaben so angelegt, dass ihr Anforderungsniveau im Verlauf der Bearbeitung steigt (Adaptionsmaßnahme): In ALICE:Bruchrechnen entscheidet jedes adaptive Widget anhand der Lösungsrate der vorhergehenden Aufgabenlösungen über die Schwierigkeit der nächsten Aufgaben. Es handelt sich demnach um eine Adaptionsrate im Bereich der Mikroadaptation (Leutner, 2002). Die Adaptivität arbeitet *nicht* widgetübergreifend, da sich die unterschiedlichen Widgets zumeist auf unterschiedliche Aspekte der Bruchrechnung beziehen und von einer hohen Lösungsrate in einem Widget nicht ohne Weiteres auf eine ähnliche Kompetenz in einem anderen Widget geschlossen werden kann.

Im Detail sind in jedem Widget unterschiedliche Generierungsalgorithmen hinterlegt, die Aufgaben aus unterschiedlichen (Schwierigkeits-)Stufen bzw. Leveln erzeugen können. Auf jeder Stufe generieren die Widgets mehrere Aufgaben – ein *Set*. Die Anzahl an erzeugten Aufgaben – die *Länge* des Sets – ist in jedem Widget für jede Stufe festgelegt. Während der Bearbeitung des Sets zählen die Widgets mit, wie viele Einzelaufgaben fehlerhaft gelöst werden. Sind alle Aufgaben eines Sets gelöst, wird anhand der Lösungsrate im Set bestimmt, ob die Schwierigkeit des nächsten Sets angepasst wird: Liegt die Anzahl an falsch gelösten Aufgaben unter einem gewissen Prozentsatzes der Setlänge – 30 % bis 50 %, je nach Widget –, so wird das nächste Set aus dem nächsthöheren Level generiert. Andernfalls verbleibt die Nutzerin oder der Nutzer auf derselben Stufe.

Details zu den einzelnen Leveln in den einzelnen Widgets finden sich in den Beschreibungen der Widgets in den Abschnitten 6.4.1–6.4.7 und in Anhang B.

### 6.2.2.3 Karteikasten

Hinter der Aufgabenverwaltung läuft in vielen Widgets ein Karteikartensystem, wie es häufig zum Lernen von Vokabeln in einer Fremdsprache eingesetzt wird und von Leitner (2011) entwickelt wurde. In diesem System sind zu lernende Fakten oder zu beantwortende Fragen auf Karteikarten geschrieben, die in Fächern organisiert sind. Je nach Fach nutzt man die Karten seltener oder häufiger, um sich abzufragen. Eine Karteikarte wandert bei einer richtigen Reaktion (im Fremdsprachenfall die korrekte Übersetzung der Vokabel) ein Fach nach hinten, während eine falsch beantwortete je nach Spielart entweder im selben Fach verbleibt, oder in das erste Fach zurückgestuft wird (Leitner, 2011). Insgesamt wird ein Prinzip der geplanten Wiederholung verfolgt.

Widgets in iBooks wird diese Funktionalität über einen JavaScript-Prototyp *Leitner* bereitgestellt. Die unterschiedlichen Fächer sind dabei als Liste von Listen implementiert. Die Unterlisten enthalten die Karteikarten, die schrittweise abgearbeitet werden. Ist ein Fach leer, wird die nächste Karte aus dem nächsthöheren, gefüllten Fach gezogen. Ein Plugin stellt den Karteikasten auch in CindyJS zur Verfügung. Der vollständige Code der Implementierung findet sich in Abschnitt C.1.

Während beim Lernen von Fremdsprachen die Karten mit den Vokabeln beschriftet sind, enthalten die „Karteikarten“ – wiederum JavaScript-Objekte – in ALICE:Bruchrechnen alle für das Widget nötigen Informationen, um die Aufgabe korrekt darzustellen (vgl. Abbildung 6.10). Zusätzlich zählt jede Karteikarte, wie oft diese Aufgabe wiederholt wurde. Darüber hinaus enthält das Karteikartenobjekt einen Rückbezug zum Karteikastenobjekt und die Information, in welchem Fach des Karteikastens sich die Karte befindet.

Ist der Karteikasten eines Widgets leer, so wird er bei Anforderung einer neuen Aufgabe mit einem Set an Aufgaben gefüllt (s. auch Abschnitt 6.2.2.2). Während die technische Umsetzung der Lernkartei den vollen Funktionsumfang mit mehreren Fächern unterstützt, kommen im iBook nur Karteikästen mit Länge 1 zum Einsatz. Konkret bedeutet das, dass falsch gelöste Aufgaben der Schülerin oder dem Schüler am Ende des Sets erneut gestellt werden, während richtig gelöste Aufgaben direkt aus dem Karteikasten verschwinden. Diese Dopplung zunächst falsch gelöster Aufgaben ist gewollt, da die Schülerinnen und Schüler ihre Lösung durch die automatische Korrektur nicht aktiv verbessern können. Wird die letzte Karte im Kasten falsch beantwortet, so wird sie direkt danach im Anschluss gestellt – solange, bis sie richtig beantwortet wird (der Karteikasten ist danach leer) oder neue Karten vor ihr eingefügt werden.

### 6.2.2.4 Datenmanager

Von den unterschiedlichen Alternativen, Daten auf den Endgeräten zu speichern (s. Abschnitt 5.2.3.1), kommt in ALICE:Bruchrechnen *Web Storage* (Hickson, 2016) zum Einsatz. Aufgrund der zu erwartenden hohen Datenmengen werden Cookies nicht genutzt; auch die

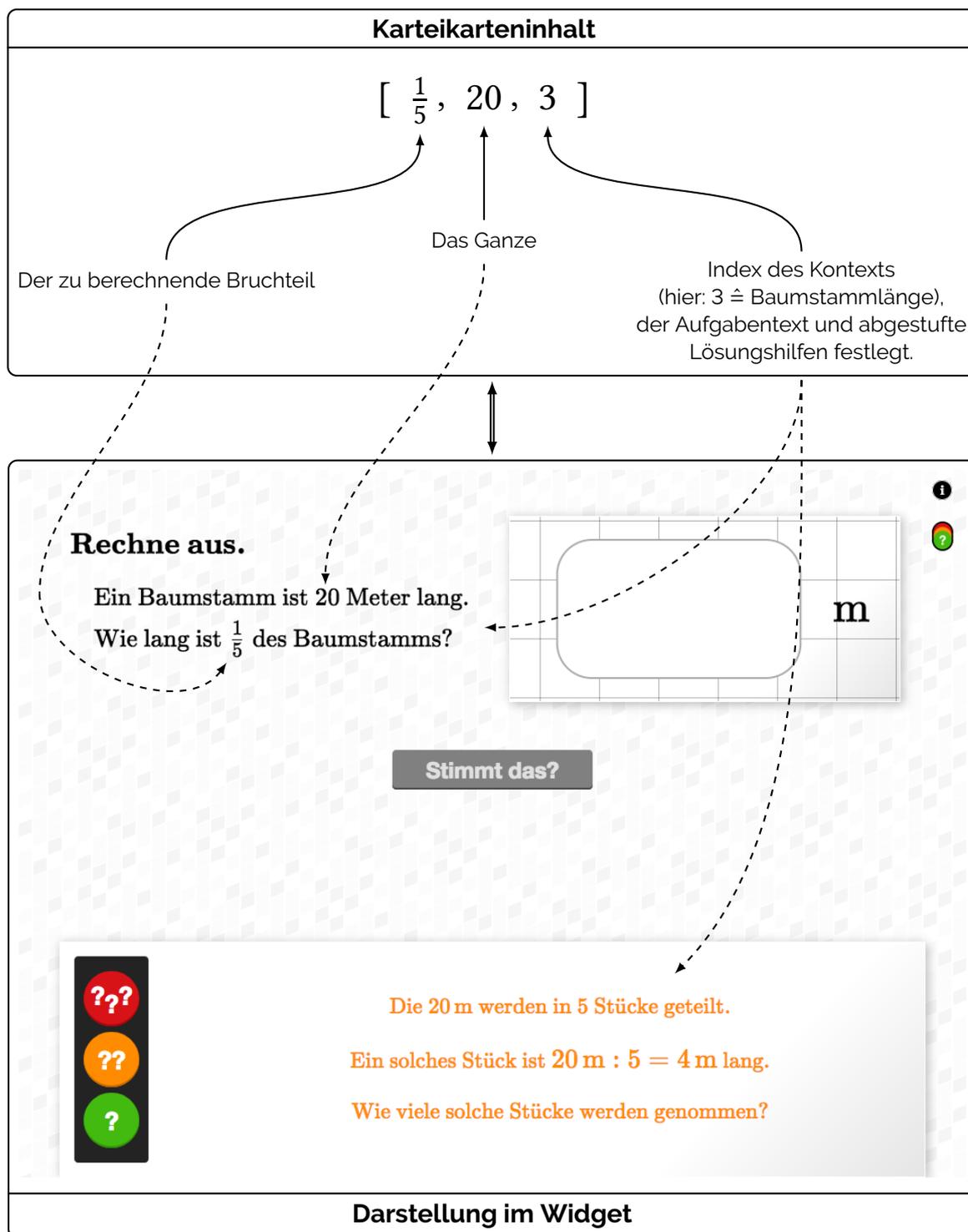


Abbildung 6.10. Beispiel eines Karteikarteninhalts (oben) und korrespondierende Darstellung in Widget W18 (unten).

Verwendung der datenbankbasierten Speichermethoden ist wegen der in Abschnitt 5.2.3.1 genannten Einschränkungen ausgeschlossen (zum Zeitpunkt der Erhebung waren die problematischen iOS-Versionen aktuell).

Um die Datenverarbeitung im iBook zu vereinfachen, wurde ein JavaScript-Prototyp *Data-*

*Manager* entwickelt, der das Speichern und Laden von Daten bündelt. Diese Bündelung in ein externes Script hat mehrere Vorteile: Zum einen steht so eine Schnittstelle zur Speicherung von Daten zur Verfügung, die das häufige Kopieren derselben Funktionalität überflüssig macht. Dies reduziert einerseits den benötigten Speicherplatz, andererseits können so projektweite Änderungen an der Datenverarbeitung an einer Stelle bewerkstelligt werden. Bspw. könnte die zugrunde liegende Speichertechnologie geändert werden, ohne dass weder die Funktionalität der eigentlichen Widgets beeinträchtigt wird, noch deren Programmierung angepasst werden muss. Zum anderen kann die Schnittstelle anderen Programmierern und Programmierern zur Verfügung gestellt werden und somit ein einheitliches Format der gesammelten Daten gesichert werden, selbst wenn – wie im Fall von ALICE:Bruchrechnen – unterschiedliche Personen Interaktionen entwickeln. Ein CindyJS-Plugin, das die Schlüsselfunktionen des DataManagers bereitstellt, ermöglicht die Datenerhebung und den Zugriff auf gespeicherte Daten auch aus CindyJS bzw. in reinen CindyJS-Widgets.

Objekte des Typs DataManager werden bei ihrer Erzeugung mit einem identifizierenden Schlüssel versehen, welcher der Konstrukturfunktion im Widgetcode übergeben wird. Der neu erzeugte DataManager lädt die gespeicherten Daten aus der localStorage, die dort unter demselben Schlüssel gespeichert sind. Zum Abschluss des Initialisierungsprozesses wird der vom System bereitgestellte aktuelle Zeitstempel notiert.

DataManager bieten zwei Speichermöglichkeiten: den *Store* und die *History*. Die Daten im Store sind so abgespeichert, dass sie im Widget jederzeit wiederverwendet werden können. So werden in ALICE:Bruchrechnen bspw. die generierten Aufgabensets im Store abgelegt und beim nächsten Aufgabenaufruf wieder geladen. Aktivitäten des Users im Widget werden in der History *geloggt*. Einzelne Logeinträge sind Objekte, welche die vom Widgetcode übergebenen Daten, eine Endzeit der geloggten Aktivität (den aktuellen Zeitstempel) und eine Startzeit der Aktivität (den zuletzt im DataManager gespeicherten Zeitstempel) beinhalten (für ein Beispiel siehe Tabelle 6.1). Der DataManager speichert den Zeitstempel bei der Initialisierung, nach einem Log oder bei explizitem Funktionsaufruf.

Tabelle 6.1

Beispiel einer DataManager-History (aus Widget W7).

Startzeit	Endzeit	Korrektheit <sup>a</sup>	Gefragter Bruch <sup>b</sup>	Eingabe <sup>b</sup>
2016-10-14 07:37:50.831	2016-10-14 07:38:41.611	1	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$
2016-10-14 07:38:43.031	2016-10-14 07:38:52.994	0	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{16}$
2016-10-14 07:39:00.963	2016-10-14 07:39:24.280	1	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$
2016-10-14 07:39:25.940	2016-10-14 07:39:39.911	1	$\frac{19}{47}$	$\frac{19}{47}$
2016-10-14 07:39:46.258	2016-10-14 07:40:06.873	0	$\frac{36}{42}$	$\frac{86}{42}$

Anmerkung. <sup>a</sup> 1 Eingabe korrekt, 0 Eingabe falsch. <sup>b</sup> Bruch  $\frac{E}{D}$  gespeichert als JSON-Zeichenkette der Form {whole: 0, enumerator: E, denominator: D}

Neben dem Loggen und Speichern verfügt der DataManager über eine Resetfunktion, die der Löschung der Daten des aktuellen DataManagers dient. Hier bietet die Implementierung die Möglichkeiten, einen Softreset durchzuführen, der nur die im Store abgelegten Daten entfernt, um bspw. den Aufgabenfortschritt zurückzusetzen. Außerdem können über einen Hardreset sämtliche Daten – Store und in der History gespeicherte Logs – gelöscht werden. Beide Methoden entfernen die Daten sowohl aus dem JavaScript-Objekt als auch aus der Speicherung auf dem Gerät.

Beim Schließen des Widgets – oder bei explizitem Funktionsaufruf in der Programmierung – wird das gesamte DataManager-Objekt in eine JSON-Zeichenkette umgewandelt und in die localStorage gespeichert. Der zeitliche Ablauf, den ein DataManager in einem Widget durchläuft, ist in Abbildung 6.11 schematisch dargestellt.

Da CindyJS keine Objekte unterstützt, werden Logs im CindyJS-Plugin im Format {start-Time, endTime, data} gespeichert, wobei data der Bildschirmausgabe des zu loggenden CindyJS-Elements entspricht.

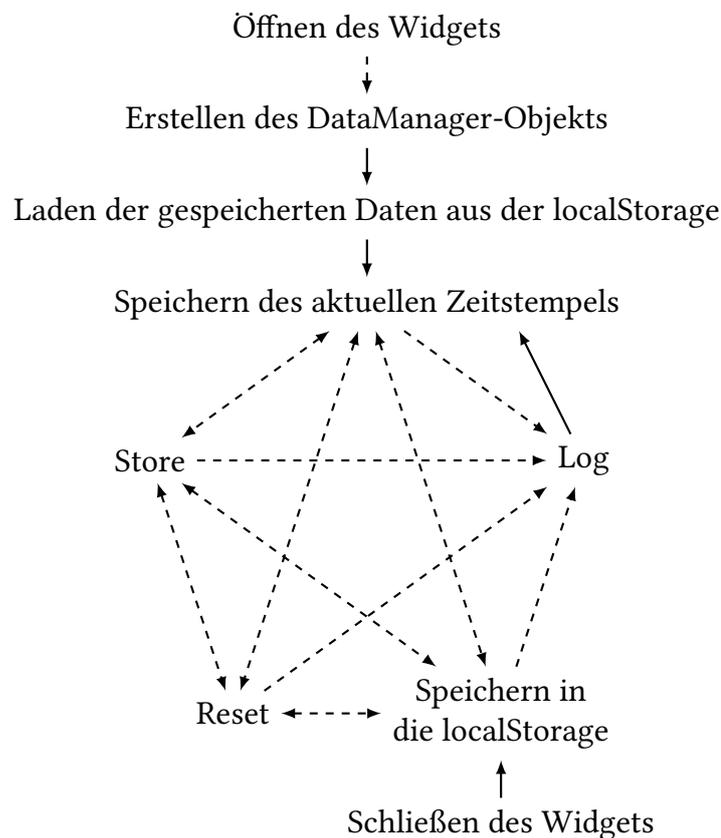


Abbildung 6.11. Lebenszyklus eines DataManagers. Durchgezogene Pfeile repräsentieren Schritte, die automatisch ablaufen, während gestrichelte Pfeile erst durch Funktionsaufrufe angestoßen werden müssen.

### 6.2.2.5 Rationale Zahlen in JavaScript

JavaScript unterstützt – wie die meisten Programmier-/Skriptsprachen – nativ keine rationalen Zahlen. Alle Zahlen werden gemäß IEEE 754-2008 (IEEE, 2008) in doppelter Präzision

als Gleitkommazahl gespeichert (ECMA International, 2018). Neben Gleitkommazahlen kennt JavaScript die „Zahlen“ NaN (Not-a-Number, bspw. das als Ergebnis der Division  $0 : 0$ ), sowie  $\pm\text{Infinity}$  – aber keine Brüche.

Daher wurde ein JavaScript-Prototyp *Fraction* erstellt, der Zähler und Nenner als Eigenschaften speichert. Durch die zusätzliche – rechnerisch nicht notwendige – Speicherung einer weiteren Zahl, die das Ganze einer gemischten Zahl repräsentiert, können gemischtzahlige Eingaben so verglichen werden, wie sie eingegeben wurden. Dies ist insbesondere wichtig, um unvollständige Umwandlungen zu erkennen (z. B.  $\frac{17}{3} = 4\frac{5}{3}$ , anstelle von  $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ ).

Die Objekte des Typs *Fraction* unterstützen alle Operationen auf Brüchen, neben den vier Grundrechenarten insbesondere den Größenvergleich und das Erweitern sowie (vollständige) Kürzen mit gegebenen Zahlen und auf gegebene Nenner. Zusätzlich verringern Konvertierungsfunktionen den Programmieraufwand, die aus bestehenden JavaScript-Objekt-Typen – bspw. Zeichenketten der Form *Zähler/Nenner* – das neue Bruchobjekt erzeugen und umgekehrt.

### Erzeugung pseudozufälliger Brüche

Ein wichtiger Aspekt der Aufgaben in ALICE:Bruchrechnen ist die zufällige<sup>4</sup> Generierung von neuen Aufgaben. Im Zentrum dieser steht oft die Erzeugung von Brüchen. Zu diesem Zweck besitzt der *Fraction*-Prototyp eine statische Methode, die unter Berücksichtigung übergebener Parameter einen oder mehrere Brüche erzeugt. Grundsätzlich ist die Funktion darauf ausgelegt, mehrere Brüche zufällig zu generieren. Das hat gegenüber dem mehrfachen Funktionsaufruf einer Generatorfunktion den Vorteil, dass im Wert unterschiedliche Brüche effizienter erzeugt werden können. Die Funktion unterscheidet zwischen drei Arten: Brüche mit gleichem Zähler, Brüche mit gleichem Nenner und keine Restriktionen (Standardmodus). In allen Modi können die Brüche auf echte oder gekürzte Brüche eingeschränkt werden.

In den ersten beiden Fällen wird zunächst der Zähler bzw. Nenner festgelegt, der allen generierten Brüchen gemein ist. Diese Zahl kann der Funktion direkt übergeben werden, ansonsten wird sie zufällig aus einem Pool an möglichen Zahlen gewählt. Dieser Pool kann der Funktion direkt als Array übergeben werden; alternativ wird er über einen Minimal- und Maximalwert angegeben; hierfür sind Standardwerte hinterlegt (1 bzw. 50). Wenn nur echte Brüche generiert werden sollen, wird anschließend der Pool für die jeweils andere Zahl (Nenner bzw. Zähler) entsprechend eingeschränkt, der auf analoge Art und Weise übergeben werden kann. Aus diesem Pool wird anschließend über einen Sampling-Algorithmus (implementiert nach Knuth, 1997, Algorithmus S) dopplungsfrei die entsprechende Anzahl

<sup>4</sup>Da Computer jedoch deterministisch arbeiten, handelt es sich bei von Computern „zufällig“ generierten Zahlen um sog. Pseudozufallszahlen, die nur zufällig erscheinen, jedoch exakt berechenbar sind. Im Detail benutzen die Widgets die JavaScript-Funktion `Math.random()`, um Pseudozufallszahlen zu erzeugen. Die Funktion gibt eine pseudozufällige Zahl aus dem halboffenen Intervall  $[0; 1)$  zurück, das über Addition, Multiplikation und Rundung auf die in der Regel gewollte ganzzahlige Zahlmenge abgebildet wird. Mehr Details über Pseudozufallszahlen, die auch eine Rolle in der Kryptographie spielen, findet sich bspw. in Knuth (1997, Abschnitt 3.1). Der Lesbarkeit halber wird im Folgenden statt „pseudozufällig“, „pseudorandomisiert“ oder „Pseudozufall“ von „zufällig“, „randomisiert“ bzw. „Zufall“ gesprochen.

an Zahlen ausgewählt, die dann über eine Implementation des Fisher-Yates-Shuffle (Fisher & Yates, 1948) in eine zufällige Reihenfolge gebracht werden. Eine weitere Option steuert, ob alle Brüche abschließend vollständig gekürzt werden oder nicht.

Im Standardmodus wird zunächst auf die oben beschriebene Weise der Pool an möglichen Nennern ausgewählt. Aus diesem wird anschließend ein Nenner zufällig ausgewählt, passend zu diesem der Pool an möglichen Zählern ermittelt und eine dieser Zahlen per Zufall als Zähler ausgewählt. Sollen nur wertungleiche Brüche generiert werden, wird der so ermittelte Bruch mit allen bereits erzeugten Brüchen verglichen und nur im Falle einer Verschiedenheit in die zurückzugebenden Brüche aufgenommen. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis die gewünschte Anzahl an Brüchen generiert ist. Sind die Parameter zu restriktiv, um genügend Brüche zu erzeugen, so wird nach einer gewissen Anzahl an Versuchen abgebrochen und ggf. eine zu geringe Anzahl an Brüchen zurückgegeben. Es liegt in der Hand des Widgetentwicklers zu verhindern, dass dies geschieht.

## Visualisierungen

Fraction-Objekte unterstützen die Visualisierung von Brüchen zur Ausgabe in HTML auf unterschiedliche Art und Weise. Durch die Auslagerung des Visualisierungscodes in das Fraction-Objekt ist es in der Widgetentwicklung möglich, jederzeit eine ikonische Darstellung eines Bruches einzubinden. So erzeugt der Aufruf von `var f = new Fraction(4, 5); f.visualize();` eine Darstellung von  $\frac{4}{5}$  in einem unterteilten Rechteck.

Grundsätzlich bietet die `visualize()`-Funktion die Möglichkeit, Brüche im Kreisdiagramm, im Rechteckdiagramm, als Teilmenge einer Menge diskreter Objekte und als Teil einer Schokoladentafel darzustellen. Für die Darstellung auf einem Zahlenstrahl steht die Funktion `numberline()` zur Verfügung. Abbildung 6.12 zeigt die unterschiedlichen Darstellungen von Brüchen, wie sie von den Funktionen erzeugt werden.

Der Rückgabewert der Funktionen ist stets eine Zeichenkette, die korrektes HTML enthält und direkt als Quellcode in das gewünschte HTML-Element eingefügt werden kann. Für die Weiterverarbeitung der Visualisierung im Widgetcode existiert eine Option, die von der Funktion berechnete Werte mit zurückgibt, die für die Visualisierung von Bedeutung sind (bspw. Größe eines Stückes oder Gesamtgröße der Visualisierung).

Zu jeder Darstellung bietet die Funktion eine Anzahl an Optionen, mit der die Eigenschaften der Visualisierung beeinflusst werden können. So können Größe und Farbe der Visualisierung angepasst werden. Bei der Darstellung in Kreis- oder Rechteckdiagramm kann zwischen einer kontinuierlichen und einer diskreten Darstellung gewählt werden. Beim Rechteckdiagramm steht zudem die Option zur Wahl, den Bruch an einem Balken darzustellen (Unterteilung des Rechtecks nur in horizontaler Richtung). In den diskreten Visualisierungen sowie bei der Darstellung als Teilmenge kann zusätzlich festgelegt werden, ob die Markierung am Stück oder zufällig auf die Teile/Objekte verteilt erfolgt. Die Darstellung als Teilmenge unterstützt als Objekte Kreise und Rechtecke, von denen die dem Bruch entsprechende Anzahl gefärbt wird, während der Rest mit weißem Hintergrund ausgegeben wird. Die Objekte werden zufällig innerhalb der angegebenen Ausmaße verteilt.

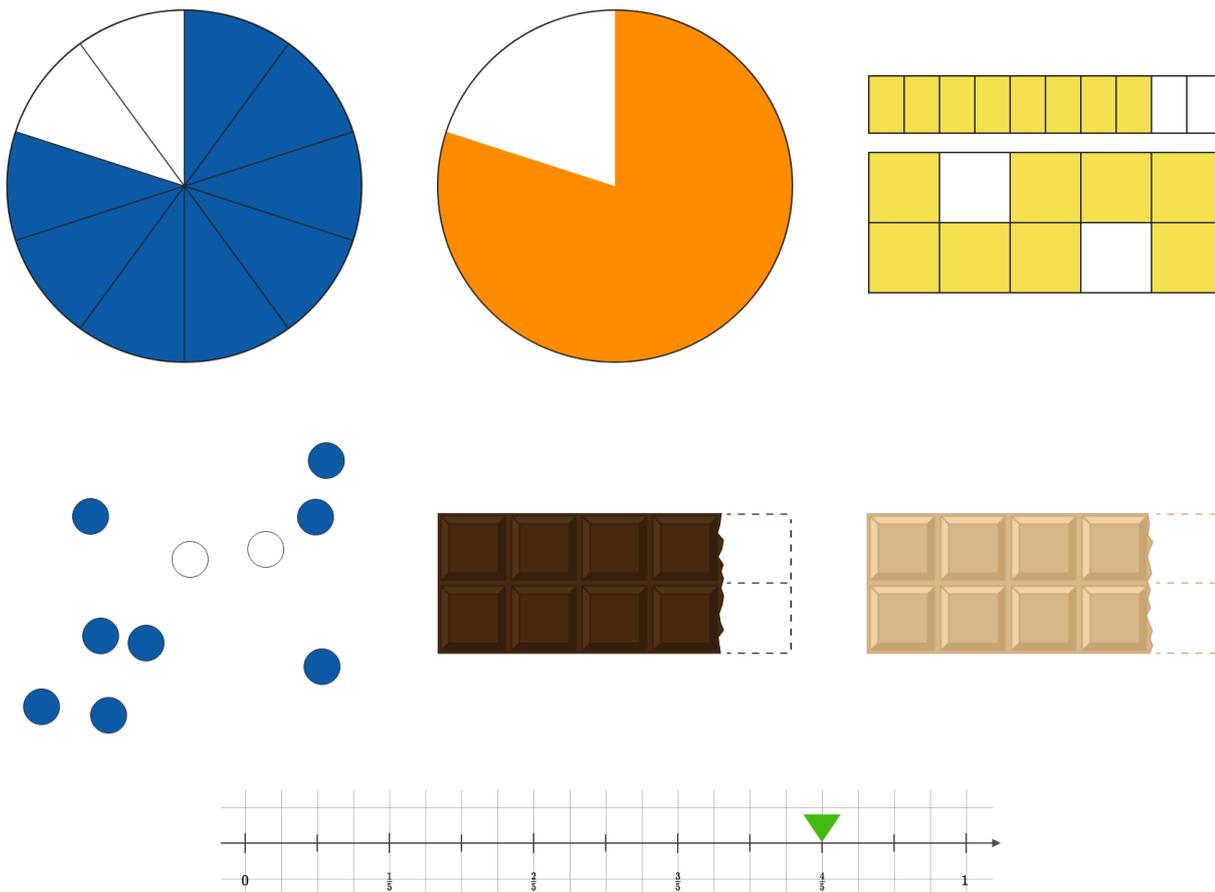


Abbildung 6.12. In Fraction-Objekten implementierte Visualisierungen.

Die Darstellung als Teil einer Schokoladentafel basiert auf einem von Bernhard Werner designten Stück Schokolade, das in den „Geschmacksrichtungen“ Dunkel, Vollmilch und Weiß vorliegt. Gestrichelte Linien symbolisieren die Lage der „aufgegessenen“ Stücke. Um die Darstellung realistischer zu gestalten, generiert die Funktion randomisierte Bruchkanten. Die ikonische Repräsentation ist daher mathematisch nicht exakt.

Darüber hinaus ist das Skript in der Lage, einen Bruch an einem beliebigen Zahlenstrahl darzustellen. Dabei kann der angezeigte Ausschnitt aus dem Zahlenstrahl durch die Angabe des ersten und letzten angezeigten Bruchs frei gewählt werden. Zusätzlich gibt es unterschiedliche Optionen, die das Aussehen des Zahlenstrahls verändern. Neben allgemeinen Parametern wie Größe oder Höhe der Visualisierung werden Parameter zu Beschriftung, Unterteilung und Markierung des dazustellenden Bruchs unterstützt. So funktioniert die Beschriftung des Zahlenstrahls automatisch: Alle Brüche innerhalb des eingestellten Ausschnitts mit dem übergebenen Nenner werden unterhalb des Zahlenstrahls beschriftet. Weitere Beschriftungen können als Array von Fraction-Objekten übergeben werden. Über zwei weitere Parameter wird gesteuert, ob die Beschriftungen als gekürzte Brüche oder Dezimalbrüche dargestellt werden. Auch die angezeigte Unterteilung in  $n$ -tel kann durch Angabe von  $n$  frei gewählt werden. Insbesondere muss die Unterteilung nicht der Beschriftung entsprechen. Über weitere Parameter kann die Höhe der Unterteilungsstriche festgelegt werden – abhängig davon, ob sie mit einer Beschriftung übereinstimmen oder nicht. Sowohl für die Beschriftung als auch für die Unterteilung existieren Parameter, welche die Beschrif-

tion bzw. Markierung des Zahlenstrahlstarts und -endes erlauben, falls diese nicht durch die automatischen Verfahren berücksichtigt werden. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit, den Zahlenstrahl mit einem Gitter zu hinterlegen, dessen Maschenbreite wählbar ist. Der darzustellende Bruch wird auf dem Zahlenstrahl wahlweise mit einem Dreieck unter dem Zahlenstrahl, einem gefüllten Kreis auf dem Zahlenstrahl oder einem Unterteilungsstrich markiert. Die Farbe der Markierung ist dabei frei wählbar. Der HTML-Zahlenstrahl wurde im Laufe der Entwicklung für die Widgets im iBook durch eine – funktional vergleichbare – CindyJS-Version ersetzt (s. Abschnitt 6.2.2.6).

Während die Darstellungen im Rechteck oder am Zahlenstrahl auf reines, mit CSS gestyltes HTML zurückgreifen, werden für die Darstellung am Kreis, als Schokolade oder als Teil einer diskreten Menge Vektorgraphiken im SVG-Format<sup>5</sup> generiert.

### 6.2.2.6 Zahlenstrahl

Für die interaktiven Aufgaben in Bezug auf den Zahlenstrahl wurde vom Autor dieser Arbeit ein positiv-rationaler Zahlenstrahl in CindyJS eigens für ALICE:Bruchrechnen konzipiert und implementiert. Der Code der implementierten CindyJS-Funktionen findet sich in Abschnitt C.5. Die Umsetzung ist allgemein angelegt und kann in unterschiedlichen Situationen eingesetzt werden, indem die Variablen angepasst werden. Das Layout kann durch folgende Parameter variiert werden:

- Position und Dimensionen des Zahlenstrahls innerhalb der CindyJS-Konstruktion,
- erster und letzter auf dem Zahlenstrahl dargestellter Bruch,
- hinterlegtes Gitter,
- Einteilungen,
- Beschriftungen und
- auf dem Zahlenstrahl markierte Brüche.

Die Position des Zahlenstrahls auf der Zeichenfläche wird über einen Punkt in CindyJS-Koordinaten angegeben. Der Zahlenstrahl erstreckt sich von diesem Punkt nach rechts. Die horizontale Ausdehnung wird über eine Breitenangabe festgelegt. Zu ihr addieren sich 25 px, die von der Pfeilspitze am rechten Ende des Zahlenstrahls eingenommen werden. Die ebenfalls frei definierbare Höhe wird symmetrisch um den Zahlenstrahl verteilt; sie hat hauptsächlich Auswirkungen auf das Gitter, mit welchem der Zahlenstrahl hinterlegt werden kann.

Eine der Hauptdarstellungsoptionen ist die Definition des ersten (im Folgenden *Start* des Zahlenstrahls) und des letzten Wertes (im Folgenden *Ende* des Zahlenstrahls) auf dem Zahlenstrahl. Beide Werte sind in Variablen als Brüche hinterlegt, die als Zähler-Nenner-Paar codiert sind, und können nach Bedarf angepasst werden. Aus Start, Ende und Breite wird bei jeder Aktualisierung der Zeichnung die Breite der Einheit berechnet – also die (evtl. theoretische) Darstellungsbreite des Strahls von 0 bis 1. Dieses ständige Aktualisieren ist notwendig, da die Implementierung die dynamische Veränderung von Start bzw. Endpunkt

<sup>5</sup>SVG = Scalable Vector Graphic, skalierbare Vektorgraphik, ein Bildformat, welches das verlustfreie Vergrößern und Verkleinern von Bildern erlaubt, da es nicht auf Pixel- sondern Vektordaten basiert.

unterstützt. So kann der angezeigte Ausschnitt verschoben, vergrößert oder verkleinert werden. Zu diesem Zweck sind Animationen implementiert, die den Zahlenstrahl innerhalb des vorgegebenen Darstellungsfensters verschieben, schrumpfen oder ausdehnen, um die neuen Start- und Endpunkte einzublenden. Die Animationen greifen auf die vom Autor entwickelte Animationsbibliothek zurück (s. Abschnitt 6.2.4).

Optional kann der Zahlenstrahl mit einem grauen Gitter hinterlegt werden. Dieses erstreckt sich über die gesamte definierte Abmessung und ist so ausgerichtet, dass der Zahlenstrahl auf der mittleren horizontalen Gitterlinie liegt. Die Feinheit des Gitters wird über die Angabe einer Zahl gesteuert, die definiert, wie viele Gitterparzellen den Abstand zwischen 0 und 1 auf dem Strahl ausfüllen bzw. wie viele ihn theoretisch ausfüllen würden, falls der Zahlenstrahl einen kleineren oder anderen Ausschnitt zeigt.

Der Zahlenstrahl kann durch Striche in regelmäßigen Abständen segmentiert werden. Diese Einteilungen werden auf ähnliche Art und Weise definiert wie das Gitter. Auch hier gibt eine Zahl an, in wie viele Teile das Intervall  $[0; 1]$  geteilt wird. Ist also  $n \in \mathbb{N}$  die für die Segmentierung übergebene Zahl, so wird der Zahlenstrahl in  $n$ -tel eingeteilt. Die Implementierung unterstützt mehrere Einteilungen, die unterschiedliche Höhe und Farbe aufweisen können. So können bspw. natürliche Zahlen am Zahlenstrahl hervorgehoben werden. Die Segmentierungen werden als Liste von Zahl-Höhe-Farbe-Tripel im Skript angelegt. Die Höhe wird dabei relativ zu einer im Skript definierten Einteilungseinheit festgelegt (im iBook 25 px), so dass die Verhältnisse zwischen den Einteilungshöhen bei einer Skalierung erhalten bleiben. So teilt bspw. das Tripel  $[4, 0.5, [0, 0, 0]]$  den Zahlenstrahl in Viertel (4) ein; die Segmente werden mit schwarzen  $([0, 0, 0])$  Strichen gekennzeichnet, deren Höhe der Hälfte (0.5) der Einteilungseinheit entspricht (vgl. Abbildung 6.13). Beim Zeichnen des Zahlenstrahls sortiert die Implementierung die Liste an Einteilungs-Tripeln zunächst pro Farbe absteigend nach der Höhe. Anschließend wird für jeden Listeneintrag jeder Einteilungsstrich zwischen Start und Ende auf die CindyJS-Zeichenfläche gezeichnet, sofern an der Stelle des Zahlenstrahls nicht bereits ein anderer Strich derselben Farbe gezeichnet wurde. Dieses Vorgehen verhindert es, dass Striche an derselben Stelle mehrfach gezogen werden, da dies je nach Bildschirm zu einem ungleichmäßigen Bild führen kann. Die Sortierung nach der Höhe stellt sicher, dass alle Striche die gewünschte Höhe aufweisen, da so die höchsten Striche zuerst gezeichnet werden.

Für Beschriftungen (*Labels*) des Zahlenstrahls gibt es die Möglichkeit, alle Brüche mit demselben Nenner innerhalb des gezeigten Ausschnittes automatisch beschriften zu lassen. Das Skript verarbeitet dazu Quadrupel bestehend aus dem Nenner, der Farbe der Beschriftung und zwei booleschen Werten. Der erste boolesche Wert sagt aus, ob die Brüche als gemischte Zahlen (wahr) oder unechter Brüche (falsch) dargestellt werden; der zweite gibt an, ob die Brüche für die Beschriftung vollständig gekürzt werden. Für die Beschriftung aller Brüche mit Nenner 4 im angezeigten Intervall in schwarzer Schriftfarbe ist also bspw. das Quadrupel  $[4, [0, 0, 0], \text{true}, \text{false}]$  zu übergeben. Die resultierenden Labels werden als ungekürzte, gemischte Zahlen angezeigt (vgl. Abbildung 6.13). Es können mehrere solcher automatischen Beschriftungen angelegt werden; das Skript verarbeitet eine Liste solcher Quadrupel. Darüber hinaus können einzelne Brüche beschriftet werden. Dazu verarbeitet das Skript Tupel, die den zu beschriftenden Bruch als Zähler-Nenner-Paar, die Farbe der

Beschriftung, einen booleschen Wert und optional eine alternative Beschriftung enthalten. Der boolesche Wert bestimmt, ob der Bruch als gemischte Zahl (wahr) oder unechter Bruch (falsch) dargestellt wird. Die alternative Beschriftung ist bspw. in den Widgets zum Eintragen von Bedeutung, um einen falsch platzierten Bruch auf dem Zahlenstrahl darzustellen und zu korrigieren.

Für die Anzeige des Zahlenstrahls wird zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache  $d$  von den Nennern aller Beschriftungen gebildet und eine Liste `stack` mit der Länge  $l = (\text{Ende} - \text{Start}) \cdot d$  erstellt. In diese Liste werden anschließend die einzelnen Labels eingefügt. Position 0 im `stack` entspricht den Labels am Start des Zahlenstrahls, Position 1 denen für den Bruch  $\text{Start} + \frac{1}{d}$ , 2 denen für den Bruch  $\text{Start} + \frac{2}{d}$ , usw., Position  $d$  schließlich den Labels am Ende des Zahlenstrahls. Da dieselbe Stelle auf dem Zahlenstrahl mit unterschiedlichen Beschriftungen versehen werden kann, enthält `stack` Listen an Labels, in denen die verschiedenen Label für die jeweilige Position gesammelt werden. Diese werden später so abgearbeitet, dass Labels mit geradem Index über, mit ungeradem Index unter dem Zahlenstrahl dargestellt werden. Um die Label einer automatische Beschriftung auf derselben Seite des Zahlenstrahls zu halten, werden diese zuerst eingefügt. Dabei wird ggf. ein leeres Element in die Liste eingefügt, um einen ungeraden Index zu erzielen. Anschließend werden die einzeln definierten Beschriftungen in den `stack` eingefügt. Dabei werden die Lücken, die evtl. durch das automatische Beschriften entstanden sind, zunächst aufgefüllt. Sind keine Lücken vorhanden, wird das Label an das Ende der Liste der jeweiligen Position gesetzt. Die Schriftgröße und der Zeilenabstand zwischen den Beschriftungen desselben Bruchs werden global durch im Skript veränderbare Variablen geregelt.

Einzelne Brüche können auf dem Zahlenstrahl auch explizit markiert werden, wie bspw. der abzulesende Bruch im entsprechenden Widgettyp (s. Abschnitt 6.4.5.1). Auch hier können mehrere Brüche gleichzeitig gekennzeichnet werden, so dass ebenfalls eine Liste von Markierungen verarbeitet wird. Jede Markierung ist als Quadrupel codiert. Dieses enthält den zu kennzeichnenden Bruch, die Art (Dreieck ober- bzw. unterhalb des Zahlenstrahls, Kreis, dickerer Strich, Unterteilungsstrich), Farbe und Größe der Markierung (vgl. Abbildung 6.13).

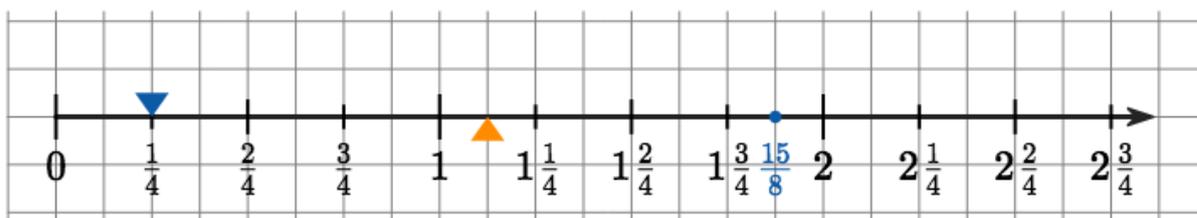


Abbildung 6.13. Mit dem CindyJS-Skript erzeugter Zahlenstrahl mit *Start* 0 und *Ende*  $2\frac{3}{4}$ , hinterlegt mit einem Achtel-Gitter. Der Zahlenstrahl ist mit drei Einteilungen mit unterschiedlicher Strichlänge jeweils an den Ganzen, den Halben und den Vierteln versehen. Alle Halben wurden automatisch beschriftet, wobei die Label als gemischte Zahlen ausgegeben werden. Zusätzlich: Beschriftung des Bruchs  $\frac{15}{8}$  in Blau und Markierungen der Brüche  $\frac{15}{8}$ ,  $\frac{9}{8}$  und  $\frac{1}{4}$  in unterschiedlichen Markierungsoptionen.

Die Trennung von Beschriftung, Unterteilung und Markierung erlaubt es, die unterschiedlichen Aspekte getrennt voneinander zu steuern und so ausgewählte Informationen zu

verbergen, um die unterschiedlichen Aufgaben zu realisieren. Zum Beispiel ist es für Aufgaben zum Ablesen eines Bruchs von einem Zahlenstrahl unerlässlich, dass der Bruch markiert werden kann, ohne dass er automatisch beschriftet wird.

### 6.2.3 Lokalisierung

Um das iBook in Folgeprojekten in anderen Ländern evaluieren zu können, wurde eine Lokalisierung (Übersetzung) des iBooks ins Englische sowie ins Spanische geplant.

Die Erstellung von multilingualen Büchern ist über iBooks Author nicht möglich: „Lokalisierte Strings und Medien werden in iBooks Author nicht unterstützt. Deshalb sollten für den Benutzer sichtbare Textstrings in der Zielsprache eingebunden werden“ (Apple Inc., 2018b, Absatz *Lokalisierung*). Daher konnte für die Übersetzung des Buchtexts kein Buch mit Sprachwahl entwickelt werden, sondern es musste für jede Sprache je ein neues iBook erstellt werden.

Die Widgets hingegen konnten so (um-)programmiert werden, dass die angezeigten Texte nicht direkt im Code eingebunden werden müssen, sondern aus einem in einer externen Datei hinterlegten Dictionary (assoziatives Array) in der passenden Sprache ausgelesen werden. Derselbe Widgetcode kann dadurch in allen Sprachen verwendet werden; allerdings muss dennoch – da auch das Vorschaubild zu lokalisieren ist und dieses nicht per Programmierung veränderbar ist – jedes .wdgt-Verzeichnis für jede Sprache erstellt werden. Das Vorschaubild ist jedoch die einzige Datei, die sich in den Widgetverzeichnissen zwischen den Sprachen unterscheidet.

Zur Übersetzung der Texte innerhalb der Widgets wird an den Stellen, an denen Text mittels Code verändert wird, eine Funktion aufgerufen, die den passenden Text anhand des Schlüssels aus dem Dictionary in der passenden Sprache zurückgibt. Um die richtige Position von bspw. mathematischen Inhalten im Satz über allen Sprachen hinweg zu gewährleisten, wurden Platzhalter implementiert. Diese finden sich in für derartige Platzhalter typischer Art als Zeichenketten der Form %X im lokalisierten Text wieder (s. Abbildung 6.14). Beim Funktionsaufruf muss daher zusätzlich zum Schlüssel des zu lokalisierenden Texts ein Objekt mit der Belegung eventueller Platzhalter übergeben werden. Als Nachteil muss nun auch statischer Widgettext einmalig aus dem Dictionary ausgelesen und in das jeweilige HTML-Element eingefügt werden.

Das Dictionary wurde per Hand aus den ursprünglich ohne Lokalisierung entwickelten Widgets erstellt. Dazu wurden alle deutschen Texte aus den Widgetquellcodes extrahiert und durch die passenden Funktionsaufrufe ersetzt. Mit Platzhaltern versehen wurden die Textbausteine ins Dictionary eingefügt und anschließend von Mitgliedern des erweiterten Projektteams übersetzt.

Die gesamte Lokalisierungsfunktionalität ist in einem JavaScript-Objekt *Localization* gebündelt, das auch das Dictionary enthält. Die Eigenschaft *currentLanguage* des Objektes legt die Sprache aller ausgegebener Zeichenketten fest. Ein CindyJS-Plugin stellt diese Funktionalität in der Funktion *babl()*<sup>6</sup> zur Verfügung. Die CindyJS-native Übersetzungs-

<sup>6</sup>angelehnt an Babel Fish, einem der ersten online verfügbaren Übersetzungsdienste

funktion `tr()` bot sich im Projekt aufgrund der fehlenden Unterstützung von Platzhaltern nicht an.

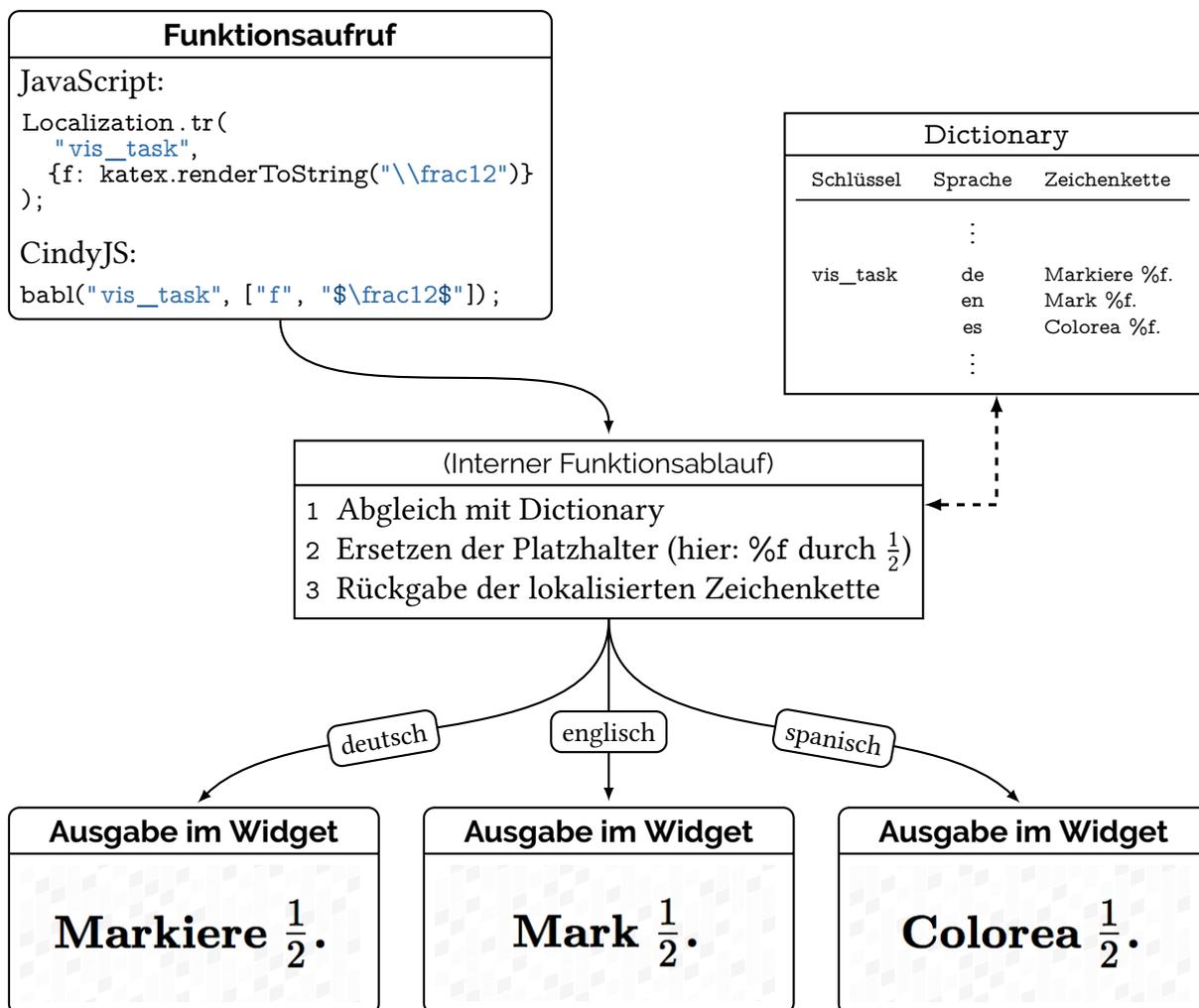


Abbildung 6.14. Schematische Darstellung der Lokalisierung in ALICE:Bruchrechnen.

## 6.2.4 Projektspezifische CindyJS-Erweiterungen

Für das Projekt wurden einige Erweiterungen für CindyJS geschrieben, die teils in Form von Plugins, teils in Form von injizierten Codes (s. Abschnitt C.3) umgesetzt wurden. Neben den bereits erwähnten Plugins, welche die Funktionalitäten des DataManager (Abschnitt 6.2.2.4), des Karteikastens (Abschnitt 6.2.2.3) und des Bruchgenerators (Abschnitt 6.2.2.5) bereitstellen, existieren noch weitere Adaptionen, die im Folgenden vorgestellt werden.

## CindyTeX

Da zu Beginn des Projektes eine Darstellung von mathematischer Symbolik noch nicht in CindyJS implementiert war, wurde ein Plugin *CindyTeX* entwickelt, das eine Nutzung von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  aus CindyJS ermöglicht. Dieses Plugin lässt Formeln zu deren Darstellung von  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  in ein HTML-Element rendern und positioniert dieses anschließend mittels CSS absolut an der passenden Stelle über der eigentlichen CindyJS-Zeichnung.

Aufgrund des fortwährendem (teilweisen) Neuzeichnens der Zeichenfläche müssen auch die vom Plugin erzeugten Elemente laufend aktualisiert werden. Um ein ständiges Löschen und Neuerstellen der  $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Darstellung zu vermeiden, verlangt die von CindyTeX bereitgestellte Funktion `drawtex()` neben der Position und der zu rendernden mathematischen Symbolik auch eine identifizierende Zeichenkette. Diese wird samt dem  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Markup im HTML-Element als Attribut hinterlegt, so dass dieses nur bei Änderungen der darzustellenden Symbolik oder der Position aktualisiert werden muss.

Aufgrund des zusätzlichen Parameters ist kein einfacher Wechsel zwischen  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Renderung und Darstellung von normalem Text möglich, da die native Funktion `drawtext()` für Letzteres nur die Parameter Position und Text erwartet. Zusätzlich hat das Plugin den Nachteil, dass mathematische Ausdrücke stets über der Zeichnung dargestellt werden.

## Übergänge

CSS3 unterstützt eine Reihe von fließenden Übergängen von Wechseln in Position, Farbe, Rahmen uvm. über das Angeben einer einzelnen Eigenschaft, *transition* (Baron, Birtles, Hyatt & Jackson, 2018). Über sog. *Timing-Functions* (dt.: Zeitablaufsfunktionen) lässt sich die Geschwindigkeit der Übergänge über den zeitlichen Verlauf hinweg variieren. So kann bspw. ein sich bewegendes Objekt zunächst langsam „anfahen“ und vor Erreichen seiner Endposition wieder „bremsen“. Insbesondere können Animationen dadurch natürlicher aussehen, als das bei einer linearen Veränderung der Fall wäre.

Animationen in CindyJS können in einem sog. *Tickskript* realisiert werden, in dem die graduelle Veränderung der Konstruktion gesteuert wird. Um dieses zu unterstützen, enthält das vom Autor entwickelte Skript *cindyEasings* (s. Abschnitt C.4) eine Übertragung der in CSS3 vordefinierten *Timing-Functions* nach CindyJS, die in den Widget-CindyJS-Code beim Laden des Widgets injiziert werden. Diese *CindyJS-Timing-Functions* erwarten einen Parameter  $0 \leq t \leq 1$ , der angibt, zu wie viel Prozent die Animation zeitlich bereits beendet ist. Die Funktionen berechnen anschließend den Prozentsatz der Änderung, der zu diesem Zeitpunkt gemäß der *Timing-Function* vollendet sein sollte. Dieser Prozentsatz kann verwendet werden, um bspw. das sich bewegendes Objekt an die passende Position zwischen Start- und Zielpunkt der Animation zu platzieren (s. Code 6.1 für ein Beispiel).

Die Zeitablaufsfunktionen – mit Ausnahme der linearen – sind in der Umsetzung für CindyJS wie in CSS3 als kubische Bezierkurven  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, t \mapsto [x, y]$  im Einheitsquadrat definiert. Dabei gibt der x-Wert der Kurve den Zeitanteil an und der y-Wert den Anteil der Änderung. Um den y-Wert bei gegebenem x-Wert zu finden, führt die Implementierung

Code 6.1. *Tickscript* für eine natürliche Bewegung des Punktes A von (0,0) nach (10,0). Die Animation wird über `resetclock();playanimation()` gestartet; dadurch gibt `seconds()` die seit Animationsstart vergangene Zeit zurück. Durch die Nutzung der Minimumsfunktion bleibt der Punkt nach vier Sekunden bei (10,0) stehen.

```

1 | start = [0, 0];
2 | end = [10, 0];
3 | duration = 4; //Sekunden
4 |
5 | A.xy = start
6 | + ANItimingEase(min(1, seconds()/duration)) * (end - start);

```

eine binäre Suche über  $t$  aus, bis ein  $t$ -Wert gefunden ist, so dass  $|B(t)_1 - x| \leq 0.001$  ist. Der korrespondierende  $y$ -Wert  $B(t)_2$  wird zurückgegeben.

## Farben

Über eine Codeinjektion stellt `cindyColor.js` die ALICE-Farbpalette (Abschnitt 6.2.1.1) für die Nutzung in CindyJS bereit: Der injizierte CindyJS-Code beinhaltet die Definition der Funktion `iBruLeColor(name, brightness)`, welche die Farbe mit dem entsprechenden Namen und der gewünschten Helligkeit (von -2 bis 2) als CindyJS-Farb-Tripel (Prozentsatz Rot, Prozentsatz Grün, Prozentsatz Blau) zurückgibt.

## 6.3 Prozessdaten

Dieser Abschnitt beschreibt die in ALICE:Bruchrechnen umgesetzte Prozessdatenerfassung. Dabei werden auch das Auslesen der Daten von den einzelnen Geräten und die Überführung in eine relationale Datenbank thematisiert.

### 6.3.1 Datenerfassung

Während mit den Widgets in ALICE:Bruchrechnen gearbeitet wird, zeichnen sie Prozessdaten auf. Dazu verwendet jedes Widget einen `DataManager` (s. Abschnitt 6.2.2.4), der während des Ladens der Haupt-HTML-Seite erzeugt wird. Alle erfassten Daten werden also auf dem Gerät mittels `Web Storage` (Hickson, 2016) gespeichert.

Während das Widget geöffnet ist, werden Einträge in die `History` getätigt. Der Zeitpunkt des Loggens wird dabei im jeweiligen Widgetcode festgelegt. In interaktiven Aufgaben wird in der Regel bei Korrekturanforderung und beim Aufruf von Lösungshilfen geloggt. Die Unterscheidung von unterschiedlichen Logtypen geschieht über eine Zeichenkette, die entsprechend des aufgezeichneten Ereignisses miterfasst wird.

Die gesicherten Daten sind von Widget zu Widget verschieden, beinhalten aber stets Zeitinformationen und bei interaktiven Aufgaben in der Regel die Aufgabencharakteristika, die gegebene Antwort und deren Korrektheit. Details über die erfassten Daten der einzelnen Widgets finden sich im Anhang in den Abschnitten B.1–B.7.

Die Möglichkeit, die im Store gespeicherten Informationen zu löschen (Softreset), ist für die Nutzerinnen und Nutzer über einen Button im Infobereich (vgl. Abschnitt 6.2.1.1) zur Verfügung gestellt. In den ALICE:Bruchrechnen-Widgets bedeutet der Softreset das Zurücksetzen der Aufgabe. Insbesondere wird in Aufgaben mit adaptiven Anforderungsniveaus der Schwierigkeitsgrad auf das niedrigste Level gesetzt. Die erfassten Prozessdaten bleiben dadurch unberührt.

### 6.3.2 Datenübermittlung

Zum Auslesen der im iBook gespeicherten Daten wurde ein eigenes Widget entwickelt. Direkt beim Öffnen des Widgets werden die im iBook gespeicherten Daten an einen Server gesendet, der jedes empfangene Datenpaket in eine Textdatei speichert. Aufgrund des benötigten Internetzugriffs darf das Widget nicht als Autoplay-Widget eingebunden werden (Apple Inc., 2018b). Insbesondere ist es dadurch nicht möglich, in Autoplay-Widgets gespeicherte Daten an einen Server zu übermitteln, da in Widgets gespeicherte Daten nur aus Widgets desselben Starttyps aufgerufen werden können (s. Abschnitt 5.2.3).

Im Detail wird zur Übertragung das `localStorage`-Objekt, das alle im iBook gespeicherten Daten enthält (s. Abschnitt 6.2.2.4), in ein als Zeichenkette codiertes JSON-Objekt umgewandelt. Dieser String wird anschließend mittels XHR<sup>7</sup> an ein PHP-Skript<sup>8</sup> als POST-Variable<sup>9</sup> gesendet. Meldet dieses Erfolg, so wird der Bildschirm grün gefärbt und der Dateiname des Datenpakets auf dem Server angezeigt. Schlägt die Übermittlung fehl, so färbt sich der Bildschirm rot. Die Datenübertragung kann durch Schließen und erneutes Öffnen wiederholt werden, da eine Kopie der Daten verschickt wird.

Das PHP-Skript auf Serverseite empfängt die übermittelten POST-Daten, schreibt die empfangene Zeichenkette (mittels der PHP-Funktion `file_put_contents()`) in eine Textdatei und benennt diese mit dem aktuellen Zeitstempel, der in der üblichen Form als die Anzahl der Sekunden, die seit dem Beginn der UNIX-Epoche (Mitternacht, 1. Januar 1970) vergangen sind, codiert ist. Wurden die Daten auf diese Weise korrekt gespeichert, gibt das Skript den Dateinamen aus. Im Fall eines Fehlers wird die Zeichenkette „FAILED“ ausgegeben.

Außer dem verwendeten Browser, der IP-Adresse und dem Betriebssystem liegen dem Widget bzw. dem PHP-Skript keine weiteren Informationen über das Endgerät vor, das die Daten sendet. Da der auf dem Server verwendete Dateiname im Widget des sendenden iBooks angezeigt wird, kann dennoch händisch zugeordnet werden, von welchem Endgerät die Daten stammen, sofern die Datenübermittlung so organisiert ist, dass das Dateisystem des Servers einzusehen ist.

<sup>7</sup>XMLHttpRequest, eine Methode, um HTTP-Anfragen aus JavaScript zu senden (van Kesteren, 2018)

<sup>8</sup>Das Backronym PHP steht für „PHP: Hypertext Preprocessor“. PHP (Achour et al., 2018) ist eine serverseitige Skriptsprache.

<sup>9</sup>POST ist eine Methode zur Übermittlung von Daten im HTTP.

### 6.3.3 Datenlöschung

Die gespeicherten Daten können über ein Reset-Widget vollständig aus dem iBook entfernt werden. Um Missbrauch durch Schülerinnen und Schüler zu vermeiden, liest das Widget zunächst eine auf dem Server hinterlegte Textdatei ein. Falls der Inhalt der Datei „OK“ lautet, werden die gesamten Daten über den Aufruf von `localStorage.clear()` unwiderruflich gelöscht. Dabei ist zu beachten, dass das Widget nicht den Speicher von Autoplay-Widgets zurücksetzen kann: Da zum Laden der Serverdatei Internetzugriff von Nöten ist und iBooks Autoplay-Widgets nicht mit dem Internet kommunizieren lässt (Apple Inc., 2018b), kann das Widget nur über manuelles Starten seine Funktionalität bereitstellen. Daher hat das Widget keinen Zugriff auf die Daten von Autoplay-Widgets (s. Abschnitt 5.2.3).

Eine Variante des Widgets, die nur den Store der gesicherten DataManager-Objekte leert (Softreset), wurde ebenfalls entwickelt. Da dieses keine forschungsrelevanten Daten vernichtet, kommt es ohne die Rücksicherung über die Serverdatei aus. Das Aufrufen dieses Widgets setzt den Aufgabenfortschritt in allen Vollbildwidgets zurück.

### 6.3.4 Datenaufbereitung

Nach der Datenübertragung liegen die gesammelten Daten als Textdateien vor. Eine Datei enthält sämtliche Daten eines Endgeräts bzw. einer Schülerin oder eines Schülers. Die Dateien müssen vor einer statistischen Nutzung aufbereitet werden.

Zur Verwaltung der Rohdaten werden die Daten aus ALICE:Bruchrechnen in eine relationale Datenbank eingeschrieben. Unter einer relationalen Datenbank versteht man eine Datenstruktur, die miteinander verknüpfte Datensätze in mehreren Tabellen sammelt. In den Tabellen entspricht jede Zeile einem Datenpunkt. Informationen über den jeweiligen Datenpunkt finden sich in den Spalten der jeweiligen Tabellenzeile – bspw. die Information, von welcher Schülerin oder welchem Schüler der Datenpunkt stammt oder wann der Datenpunkt aufgezeichnet wurde. Die Tabellen können untereinander in Relation stehen, indem sie in Spalten Verweise auf andere Tabellen enthalten. Eine Datenbank ist vereinfacht gesprochen eine Sammlung solcher Tabellen. Befehle (*Queries*) an die Datenbank werden in einer Datenbanksprache verfasst. Weit verbreitet sind Dialekte von SQL, einer standardisierten Sprache, die satzähnliche Semantik aufweist (vgl. Code 6.2). In *Queries* können Tabelleninhalte – ganz oder teilweise – zielgenau abgefragt werden. Dabei können unterschiedliche Tabellen in Verbindung zueinander gesetzt werden, Einträge nach Spalten gruppiert ausgewertet werden und vieles anderes mehr.

*Code 6.2.* SQL-Query zur Abfrage der Spalte *startTime* aller Zeilen der Tabelle *table1*, in denen die Spalte *id* den Wert 17 hat.

```
1|SELECT startTime
2|FROM table1
3|WHERE id = 17
```

In ALICE:Bruchrechnen kommt das Datenbankmanagementsystem MySQL (Oracle Corporation, 2018) zum Einsatz. In der Datenbank, in welche die Prozessdaten eingelesen werden, existiert für jedes datenerfassende Widget eine Tabelle (im Gegensatz zu den Rohdateien: eine Datei pro Gerät), deren Spalten den erfassten Daten entsprechen (s. Abschnitte 6.4.1–6.4.7 und Anhang B). Brüche werden dabei mit je einer Spalte pro Komponente (Zähler, Nenner, ggf. ganze Zahl) abgebildet. Eine Zeile in einer Tabelle entspricht einem Eintrag in der History eines DataManagers aus dem korrespondierenden Widget (vgl. Abbildung 6.15).

Neben den widgetspezifischen Spalten enthalten alle Tabellen eine Spalte *ipad\_id*, in der das datenliefernde iPad verzeichnet ist, sowie Spalten für Start- und Endzeitpunkt des Logeintrags. Eine durchgehende Nummerierung (*id*) der Zeilen sichert die direkte Abrufbarkeit sowie die Referenzierbarkeit einzelner Log-Einträge.

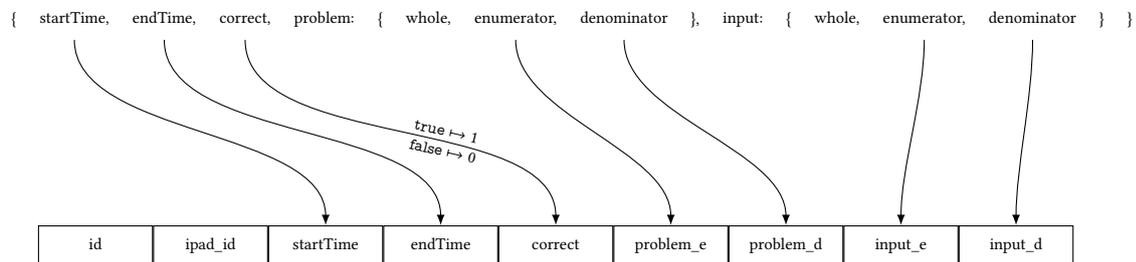


Abbildung 6.15. Form eines *History*-Eintrags aus Widget W8 (JSON, nur Schlüssel; oben) und die korrespondierende Zeile in der MySQL-Tabelle (unten). Da Widget W8 nur echte Brüche behandelt, ist das *whole*-Attribut von *problem* und *input* stets 0 und muss daher nicht in die Datenbank übertragen werden.

Zusätzlich zu den Tabellen der Widgetdaten existiert in der Datenbank eine Tabelle, welche die Logs jeglicher Aufgabenbearbeitungen aller Aufgaben-Widgets enthält. Die Spalten konzentrieren sich dabei auf diejenigen, die in allen Widgettabellen enthalten sind: iPad-ID, Start- und Endzeit und Korrektheit. Zudem enthält die Tabelle Spalten, in denen das Widget und die Nummer in der Tabelle des entsprechenden Widgets verzeichnet werden. Diese Tabelle vereinfacht den Zugriff auf die Gesamtheit der Daten aus den interaktiven Aufgaben aller Schülerinnen und Schüler.

Das Befüllen der Datenbank übernimmt ein PHP-Skript, das die vom Server generierten Dateien einzeln einliest. Es erzeugt aus dem enthaltenen String ein assoziatives Log-Array, das die *localStorage* des iPads widerspiegelt. Anschließend iteriert das Skript über eine Liste an Widgets, die importiert werden sollen. Existiert zum angegebenen Widget ein Schlüssel im Log-Array, so liegen Daten zum Widget vor. Der Eintrag im Log-Array ist ein Dictionary; zum Einlesen der Daten wird die Liste, die unter dem Schlüssel *history* hinterlegt ist, Eintrag für Eintrag einem *Worker* übergeben. Der *Worker* erstellt aus jedem *History*-Eintrag ein assoziatives Array, dessen Schlüssel den Spalten der mit dem Widget korrespondierenden Tabelle entsprechen und das mit den jeweiligen Log-Daten gefüllt ist. Aus diesem Array wird im Anschluss ein SQL-Befehl generiert, der diesen Log-Eintrag in die Tabelle in der Datenbank einfügt. *Worker* stellen dabei PHP-Klassen dar, die eine statische Methode *adapt()* enthalten, welche die geloggtten Daten verarbeitet und bspw. die Brüche auf die unterschiedlichen Spalten aufspaltet. Da die Logs vieler Widgets dieselbe

Struktur aufweisen, können einige Worker für unterschiedliche Widgets verwendet werden. Als iPad-ID wird stets der Dateiname der eingelesenen Datei verwendet.

## 6.4 Das interaktive Buch

In diesem Abschnitt wird das im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen erstellte interaktive Schulbuch detailliert beschrieben. Neben der Zusammenfassung des Inhalts werden für jedes iBook-Kapitel einige Widgets bezüglich der didaktischen Gestaltung, der technischen Umsetzung und der erfassten Prozessdaten vorgestellt. Die einzelnen Widgetbeschreibungen gliedern sich dabei in (1) (didaktische) Beschreibung und Bedienung, (2) Feedback, (3) Anforderungsniveaus, (4) Prozessdaten sowie (5) ggf. technische Besonderheiten. Entsprechende Ausführungen für sämtliche Widgets des iBooks finden sich in Anhang B.

### 6.4.1 Kapitel 1: „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen

Das erste Kapitel des iBooks dient der Einführung von Bruchzahlen. Der Fokus liegt hierbei auf der korrekten Aussprache der symbolischen Schreibweise und der Darstellung von Brüchen in geometrischen Objekten, wie Rechtecken oder Kreisen, um den Erwerb von Bruchzahlkonzepten und anschaulichen Grundvorstellungen zu fördern (s. Abschnitt 1.3). Dabei wird auch ein intuitives Größenverständnis durch Aufgaben gefördert, in denen kontinuierliche Visualisierungen zu erstellen sind.

#### 6.4.1.1 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Die Einführung von Bruchzahlen geschieht in ALICE:Bruchrechnen über den Teilaspekt *Teil eines Ganzen*, welcher der Teil-Ganzen-Grundvorstellung zugeordnet ist (s. Abschnitt 1.3.2.1). Dazu werden lebensnahe Situationen aufgegriffen, indem Lebensmittel (runde Pizzen und rechteckige Schokolade – u. a. stilisiert in entsprechenden Kreis- bzw. Rechteckdiagrammen) gerecht zu verteilen sind.

Das erste Widget des iBooks macht die Schülerinnen und Schüler niederschwellig mit der Interaktivität des iBooks bekannt. Es handelt sich um eine einzelne Multiple-Choice-Frage, die mit automatischer Korrektur ausgestattet ist: In Widget W1 gilt es, diejenigen Antwortmöglichkeiten auszuwählen, die eine gesechstele Pizza korrekt beschreiben. Im Lernkontext ist es Zweck der Aufgabe, den Zusammenhang von Brüchen und Aufteilsituationen aufzuzeigen. Ebenso wird thematisiert, dass Teile eines Ganzen, die in Aufteilkontexten erstellt werden, im Zusammenhang von Brüchen stets gleiche Größe haben müssen.

Die Begriffe *Zähler*, *Bruchstrich* und *Nenner* werden im Anschluss anhand einer ikonischen Repräsentation des Bruches  $\frac{3}{8}$  in einem Kreisdiagramm eingeführt. Dabei wird sowohl die syntaktische als auch die semantische Bedeutung thematisiert. Mithilfe eines interaktiven Lückentexts (Widget W3) erfolgt eine Übertragung von Brüchen im Kreisdiagramm auf Darstellungen im Rechteckdiagramm, wobei speziell der Bruch  $\frac{7}{12}$  betrachtet wird. Ein

Merksatz im iBook, der die Bruchschreibweise als Repräsentation von Teilen eines Ganzen zusammenfasst, beschließt die Einführung.

Der Übungsteil des Kapitels stellt 10 interaktive Aufgaben zur Bearbeitung bereit. Dabei werden vor allem Repräsentationswechsel behandelt (vgl. Abschnitt 1.3.1). Die ersten beiden Widgets konzentrieren sich auf die korrekte Aussprache von Bruchzahlen (intramodaler Repräsentationswechsel auf symbolischer Ebene). Beide Widgets greifen auf einen eigens entwickelten automatischen Übersetzer zurück, der zwischen Brüchen in symbolischer Notation, Zahlwortschreibweise, quasikardinaler Schreibweise und Dezimalbruchschreibweise transformieren kann (Details zu den Widgets im Anhang, Abschnitt B.1.2.1).

Die restlichen Widgets des Kapitels behandeln ikonische Darstellungen von Brüchen. Dabei liegt der Hauptfokus auf dem Erstellen von unterschiedlichen Visualisierungen, also dem Wechsel von einer symbolischen zu einer ikonischen Repräsentation. Einige dieser interaktiven Aufgaben werden im Folgenden detailliert beschrieben (s. Abschnitt 6.4.1.2). Das Kapitel endet mit Widget W14, einer Adaption des Spiels „Memory“. Es ist das einzige Widget im iBook mit ausgeprägtem Spielcharakter.

#### 6.4.1.2 Detaillierte Beschreibung ausgewählter Widgets

In diesem Abschnitt werden fünf der insgesamt 14 Widgets des ersten Kapitels beschrieben. Es handelt sich dabei um interaktive Aufgaben des Übungsteils, in denen ikonische Repräsentationen von Bruchzahlen zu erstellen sind. Insbesondere werden mit Widgets W10 und W11 die für Forschungsfrage 4 relevanten Visualisierungsaufgaben vorgestellt. Eine entsprechende Ausführung aller Widgets des Kapitels findet sich im Anhang, Abschnitt B.1.

##### **W8 & W9: Visualisierung in unterteilten Ganzen**

In Widgets W8 und W9 ist es die Aufgabe, einen gegebenen Bruch in einem passend vorunterteilten Rechteck (W8) bzw. Kreis (W9) zu markieren. In beiden Widgets entspricht die Anzahl der Teile, in die Rechteck bzw. Kreis unterteilt ist, stets dem Nenner des zu markierenden Bruchs. Diese Teile können durch Antippen oder Überstreichen mit dem Finger markiert werden; so markierte Teile werden vom Widget sofort blau gefärbt. Auf demselben Weg kann ein bereits markiertes Stück wieder entfärbt werden.

**Feedback** Als Reaktion auf die Eingabe einer Lösung geben die Widgets Rückmeldung, ob die Eingabe richtig oder falsch war. Richtige Markierungen werden grün eingefärbt und mit einem Haken versehen. Im Falle einer falschen Antwort wird die Richtung des Fehlers angegeben („Du hast zu viel/wenig markiert“). Außerdem werden zu viel markierte Teile nach und nach rot gefärbt bzw. wird die Eingabe mit roten Teilen zu einer richtigen Antwort ergänzt. Am Rechteck ergänzt ein weißes Kreuz in den roten Teilen die Korrektur. Zusätzlich erfolgt die Angabe des markierten Bruchs in symbolischer Schreibweise (vgl. Abbildung 6.16).

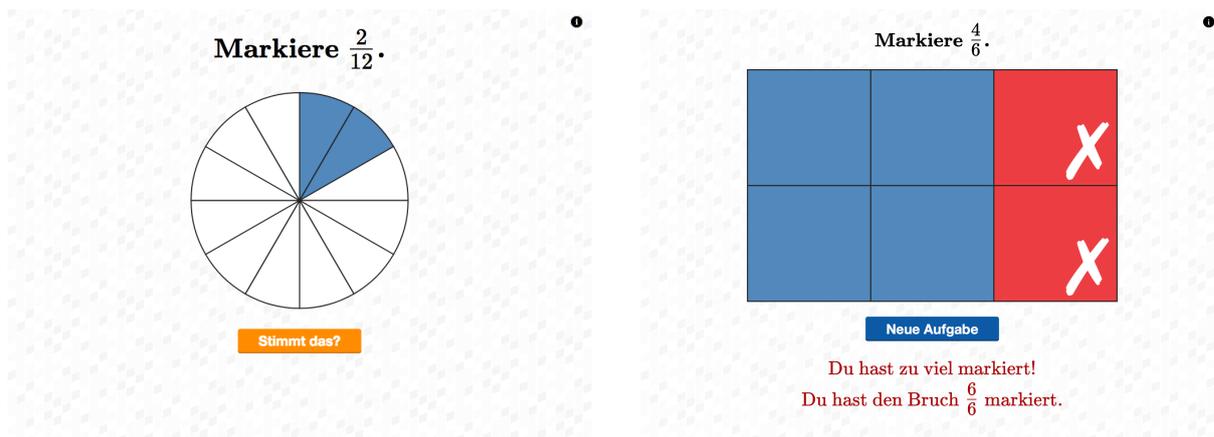


Abbildung 6.16. Widgets W8 & W9: Visualisieraufgaben am vorunterteilten Kreis (links) und Rechteck (rechts, mit Korrektur).

**Anforderungsniveaus** In den Widgets sind je drei Anforderungsniveaus implementiert. In jeder der drei Schwierigkeitsstufen werden fünf zufällige echte Brüche generiert. Der maximal mögliche Nenner steigt über die Niveaus hin an: Auf der ersten Stufe ist der Nenner  $\leq 8$ , auf der zweiten  $\leq 16$  und auf der dritten  $\leq 25$  (Widget W8) bzw.  $\leq 20$  (Widget W9).

**Prozessdaten** Wenn die Korrektur der Eingabe angefordert wird, werden die Korrektheit der Lösung, der fragte Bruch und der markierte Bruchteil geloggt.

**Implementationsdetails** Technisch sind die Teile im Rechteck als gitterförmig angeordnete HTML-Elemente, im Kreis als SVG-Pfade umgesetzt. Beides erlaubt die unkomplizierte und direkte Reaktion auf Eingaben über JavaScript-Ereignisse. Die Animationen basieren auf CSS.

### W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierung

Widgets W10 und W11 stellen die kontinuierlichen Pendanten zu Widgets W9 bzw. W8 dar: Gegeben ist ein Bruch und ein nicht-unterteiltes Ganzes in Form eines Kreises (W10) oder eines Balkens (W11), das mit dem Finger dem Bruchteil entsprechend zu färben ist. Dazu kann die Färbung durch Ziehen mit dem Finger kontinuierlich verändert werden oder durch Tippen an der jeweiligen Stelle im Ganzen eingestellt werden. Entgegen der Reihung im iBook entstand zuerst Widget W11 als Umsetzung des dualen Repräsentationsmodell nach Carraher (1993, vgl. Abschnitt 1.3.1.3) und anschließend die Übertragung auf den Kreis (W10). Die Widgets dienen demnach auch der Förderung eines intuitiven Größenordnungsverständnisses.

**Feedback** Die Widgets geben textuell und farbcodiert Feedback, ob die Eingabe als richtig oder falsch gewertet wurde. Lösungen gelten als korrekt, wenn die betragsmäßige Abweichung von der exakten Lösung 4% bzw. 6.25% nicht überschreitet.<sup>10</sup> Lösungen mit einem Fehler von maximal 0.5% werden mit „Perfekt!“ korrigiert. Das Feedback wird ergänzt, indem eine dem Nenner entsprechende Unterteilung des Ganzen in gleich große Stücke

<sup>10</sup>Die Abweichungen wurden auf einen „Fingerbreit“ festgelegt.

eingblendet wird. Zusätzlich zeigen die Widgets die Abweichung zur exakten Lösung in Rot bzw. Grün (vgl. Abbildung 6.17).

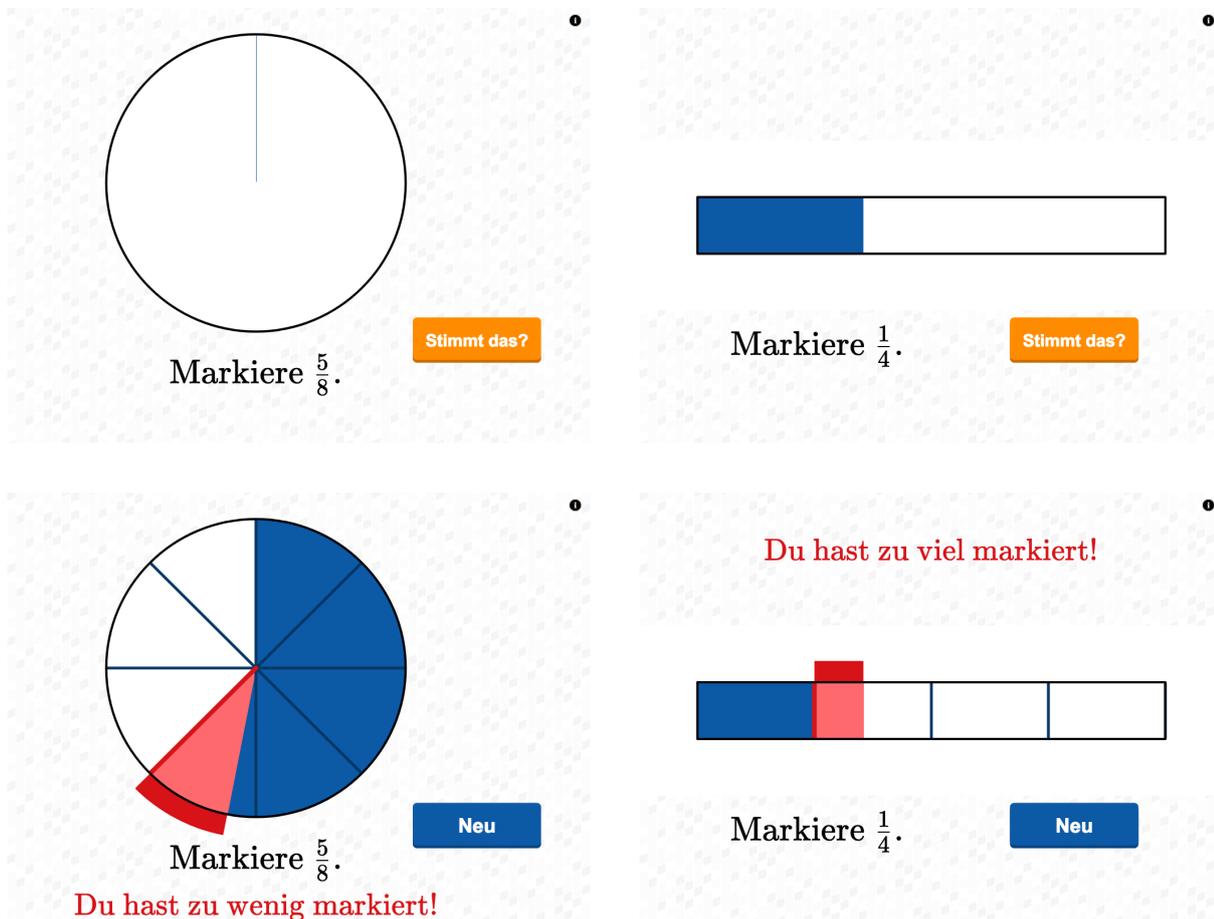


Abbildung 6.17. Widgets W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierungsaufgaben am Kreis (links) und Balken (rechts) mit (unten) und ohne Korrektur (oben).

**Anforderungsniveaus** In beiden Widgets sind drei Schwierigkeitsstufen vorgesehen, wobei sich die erste zwischen den beiden Widgets nicht unterscheidet. In allen Levels sind echte Brüche zu visualisieren. Sets der ersten Stufe bestehen jeweils aus fünf paarweise wertungleichen Brüchen mit Nenner 2, 4 oder 8. Sets der Stufe 2 weisen ebenfalls Länge 5 auf und bestehen am Kreis (W10) aus paarweise wertungleichen Brüchen mit Nenner 2, 3, 4, 6 oder 12 – also aus Brüchen, die in einer Zwölftel-Einteilung vorkommen, wie sie von einer Analoguhr bekannt ist. Am Balken (W11) besteht der Nennerpool in Stufe 2 aus den Brüchen 2, 5 und 10. Auf Schwierigkeitsstufe 3 generieren beide Widgets Sets bestehend aus zehn paarweise wertungleichen Brüchen. Bei der Erzeugung jedes Bruches wird in beiden Widgets ein Zahlenpool zufällig gewählt, aus dem der Nenner per Zufall gezogen wird. In Widget W10 wird zwischen den Pools  $\{5, 7, 11\}$  und  $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$  entschieden, in W11 zwischen den drei Pools  $\{2, 4, 8, 12\}$ ,  $\{3, 6, 9\}$  (3 mit doppelter Wahrscheinlichkeit) und  $\{5, 7, 10, 11\}$ .

**Prozessdaten** Bei Anforderung der Korrektur speichern die Widgets einen Wahrheitswert, ob die Lösung der Schülerin oder dem Schüler als korrekt angezeigt wurde, den

gefragten Bruch als Zähler-Nenner-Paar, den markierten Anteil als Gleitkommazahl und eine Aufzeichnung der während der Aufgabenbearbeitung auf dem Touchscreen vollführten Fingerbewegungen.

**Implementationsdetails** Beide Widgets wurden von Bernhard Werner in CindyJS entwickelt und vom Autor dieser Arbeit um die Aufzeichnung der Fingerbewegungen erweitert. Die Fingerbewegungen werden als Liste von Fingerzügen (*Strokes*) gespeichert. Ein Fingerzug auf dem Touchscreen wird hierbei als Liste von Punkt-Zeit-Paaren codiert. Die Koordinaten der gespeicherten Punkte geben die Position der Fingerberührung im CindyJS-Koordinatensystem an und die Sekunden (mit drei Nachkommastellen), die seit der ersten Bildschirmberührung seit Aufgabenstart vergangen sind. Zur Reduktion des Speicherbedarfs werden die Strokes geglättet. Um Pausen zu bewahren, wird der Fingerzug vor der Glättung an Stellen, an denen mindestens eine halbe Sekunde verweilt wurde, aufgeteilt und ein neuer, künstlicher Stroke begonnen. Zur Glättung wird eine Implementierung des Ramer-Douglas-Peucker-Algorithmus (Douglas & Peucker, 1973; Ramer, 1972) verwendet. Jeder einzelne Stroke wird mit einer Toleranz von 2.5 Pixeln geglättet. Das bedeutet, dass aus der Liste an Punkten schrittweise Punkte ausgeschlossen werden, sofern sich durch den Ausschluss eines Punktes der so größer definierte Streckenzug nicht mehr als 2.5 Pixel von dem ursprünglichen unterscheidet (vgl. Abbildung 6.18).

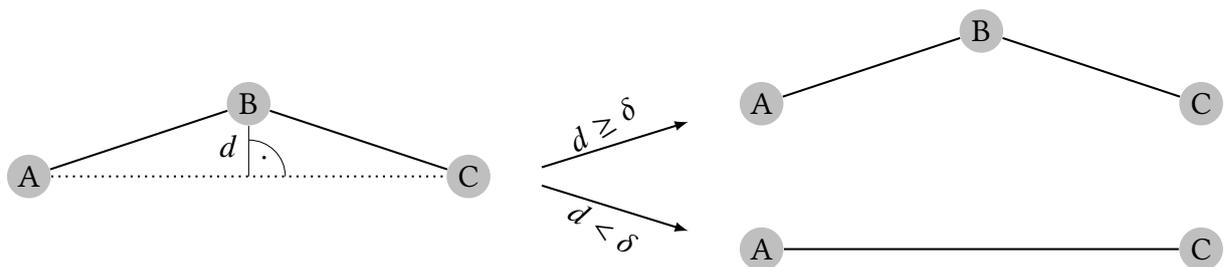


Abbildung 6.18. Schematische Darstellung eines Schritts des Ramer-Douglas-Peucker-Algorithmus. Der Punkt  $B$  wird bei der Glättung aus der Definition des Zugs entfernt, sofern sein Abstand  $d$  zu  $AC$  kleiner als die vorgegebene Toleranz  $\delta$  ist. Der Algorithmus überprüft diese Bedingung an dem Punkt, der zur Strecke zwischen Start- bis Endpunkt den größten Abstand aufweist. Nach einem Divide-and-Conquer-Schema wird der Stroke an Punkten, deren Abstand größer als die Toleranz ist, geteilt und der Algorithmus auf die beiden Teilstrokes angewendet, bis der gesamte Stroke geglättet ist.

### W13: Visualisierungen in diskreten Mengen

Widget W13 ist eine interaktive Umsetzung einer klassischen Darstellung von Bruchzahlen (Dienes, 1967, vgl. Abschnitt 1.3.1.3): Von einer gegebenen Anzahl an diskreten Objekten (Äpfel, Orangen, Figuren, Peperoni oder Eier) ist der gegebene Bruchteil auszuwählen, indem man den entsprechenden Anteil mit dem Finger umrandet.

**Feedback** Als erklärendes Feedback werden die zu Beginn zufällig auf dem Bildschirm verteilten Objekte in ein Raster sortiert. Jede Spalte entspricht dabei dem Stammbruch. Diese Sortierung erfolgt animiert und leicht zeitversetzt, so dass sich die Elemente nach und nach anordnen. Durch eine Klammer wird die korrekte Anzahl an Spalten gekennzeichnet.

Je nach Richtung des Fehlers werden entweder zu viel umrandete Objekte oder die nicht ausgewählten Objekte in den geklammerten Spalten rot gekennzeichnet (vgl. Abbildung 6.19). Eine textuelle Bewertung der Eingabe vervollständigt das Feedback.

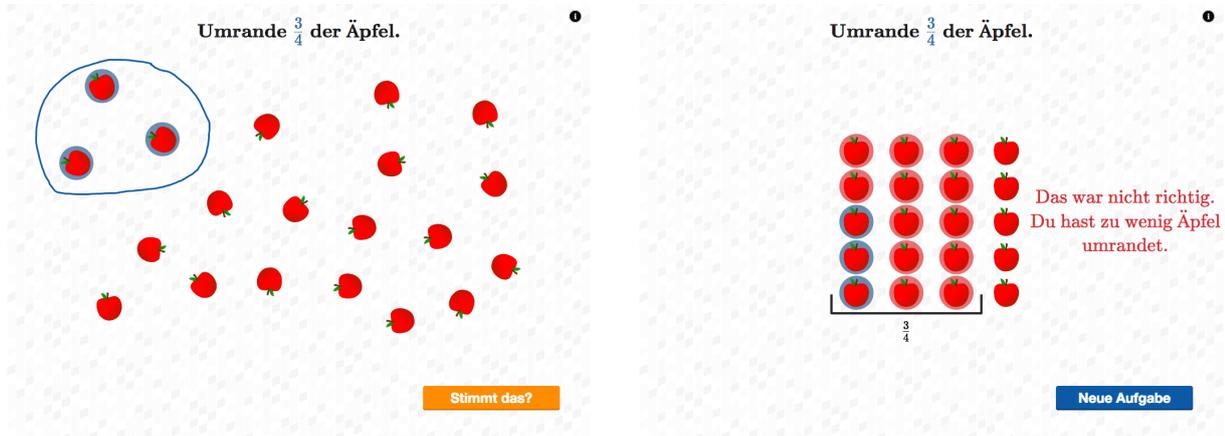


Abbildung 6.19. Widget W13: Anteile einer diskreten Menge umranden. Darstellung einer Aufgabe mit Selektion dreier Objekte (links) und Korrektur dieser Eingabe.

**Anforderungsniveaus** Im Widget sind zwei Schwierigkeitsstufen hinterlegt. In der ersten Stufe (Setlänge 3) entspricht der Nenner des zu markierenden Bruchs der Anzahl der Objekte auf dem Bildschirm. In der zweiten Schwierigkeitsstufe (Setlänge 5) entspricht die Anzahl der angezeigten Objekte einem Vielfachen des Nenners. Dabei besteht das Ganze mindestens aus dem Doppelten des Nenners und maximal aus 32 Objekten. Dies stellt sicher, dass der Raum zwischen allen Objekten für das Umkreisen ausreichend ist. In beiden Stufen ist der Nenner stets  $\leq 8$ .

**Prozessdaten** Bei Korrekturanforderung werden der gefragte Bruch, die Anzahl der angezeigten Objekte, die Anzahl der umrandeten Objekte und die Tatsache, ob diese dem Bruchteil entsprechen (wahr/falsch), geloggt.

**Implementationsdetails** Zur Umrandung zeichnet das Widget die Bewegungen eines Fingers auf dem Bildschirm nach. Die so entstehende Linie wird kontinuierlich geglättet, indem der vorletzte aufgenommene Punkt durch das arithmetische Mittel der letzten drei aufgezeichneten Punkte ersetzt wird (s. Abbildung 6.20).

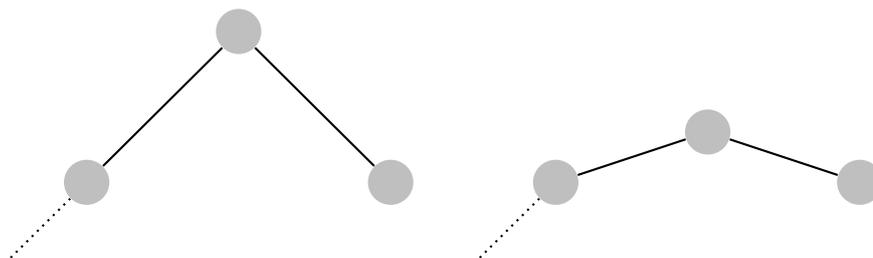


Abbildung 6.20. Schematische Darstellung der Glättung aufgezeichneten Fingerbewegung: Linie vor (links) und nach der Glättung (rechts).

Beim Heben des Fingers vom Touchscreen wird die gezeichnete Markierung automatisch auf direktem Weg zum Startpunkt der Markierung geschlossen. Anschließend wird überprüft, welche Objekte innerhalb der Umrandung liegen; diese werden mit einem blauen Kreis hinterlegt. Objekte werden als umrandet erkannt, sobald ihre Mittelpunkte innerhalb des aufgezeichneten Polygons liegen (Überprüfung über die Windungszahl, s. Sunday, 2012). Eine bestehende Markierung kann erweitert werden, indem eine neuen Linie innerhalb des bestehenden Polygons begonnen wird. Beginnt man außerhalb der bestehenden Markierung, so wird diese verworfen. Einzelne Objekte können zudem durch Antippen ausgewählt werden.

Die in dem Widget verwendeten Animationen machen sich die vom Autor implementierte Übertragung der CSS3-Animation für CindyJS zunutze (s. Abschnitt 6.2.4).

## 6.4.2 Kapitel 2: „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen

Das zweite Kapitel des iBooks dient der Einführung von ersten Rechenoperationen mit Bruchzahlen. Diese sind die Berechnung eines Anteils über das Schema „Dividieren durch den Nenner, Multiplizieren mit dem Zähler“ – wie es dem Teilaspekt *Teil eines Ganzen* der Teil-Ganzen-Grundvorstellung entspricht (s. Abschnitt 1.3.2.1) – und die Umkehrung dieser Operation.

### 6.4.2.1 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Zunächst führt das iBook die Operation „Den Anteil von etwas berechnen“ anhand eines interaktiven Diagramms (Widget W15) ein. Das Widget führt die Rechnung „ $\frac{a}{b}$  von 1000 ml sind X ml“ schrittweise vor. Als Veranschaulichung dient dabei eine Karaffe mit Wasser, deren Wasserstand mit dem Finger in Schritten des wählbaren Nenners verändert werden kann. Das Widget aktualisiert automatisch Rechnung und Ergebnis. Auf der folgenden iBook-Seite wird das Vorgehen zur Berechnung eines Anteils von einem gegebenen Ganzen mithilfe einer Strecke erneut beschrieben. Widget W16 dient anschließend der Übertragung auf ein Verfahren ohne den Rückgriff auf eine Hilfszeichnung. Dazu werden exemplarisch  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke berechnet. Das Widget zielt dabei auf das Vorgehen „Durch den Nenner dividieren, mit dem Zähler multiplizieren“ ab, indem der Rechenweg schrittweise vorgeführt wird und der jeweils nächste Schritt erst nach korrekter Beantwortung einer Zwischenfrage, die auf die Bedeutung von Nenner bzw. Zähler in diesem Zusammenhang abzielt, angezeigt wird (der Lückentext „wächst“, s. Abbildung 6.21). Ein Merksatz im iBook-Text dient der Konsolidierung des Rechenwegs. Zwei interaktive Aufgaben, die in Abschnitt 6.4.2.2 im Detail betrachtet werden, ermöglichen es den Lernenden, die Rechnung in rein symbolischen und eingekleideten Aufgaben anzuwenden.

Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit der Umkehrung der Anteilsbestimmung, also dem Schließen von gegebenem Bruch- und Anteil auf das ursprüngliche Ganze. Die Einführung erfolgt zunächst über den Spezialfall Stammbrüche, die an dieser Stelle im iBook

### Aufgabe 16

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:

In wie viele gleich große Stücke wird das Ganze, also die 21 m, geteilt?

### Aufgabe 16

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:

In wie viele gleich große Stücke wird das Ganze, also die 21 m, geteilt?

Dann ist ein solches Stück

$$21 \text{ m} : 7 = 3 \text{ m lang.}$$

Wie viele dieser gleich großen Stücke werden genommen?

Abbildung 6.21. Widget W16: Wachsender Lückentext zur Aufgabe  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke bestimmen, initiale Aufgabenstellung (links) und Aufgabenstellung nach erster korrekter Antwort (rechts).

definiert werden. Zur Rückwärtsrechnung mit Stammbrüchen steht eine eigene interaktive Aufgabe (Widget W19) zur Verfügung. Darauf aufbauend wird das Vorgehen auf allgemeine Brüche erweitert. Eine Visualisierung im iBook-Text sowie ein Lückentextwidget W20, das den Rechenweg schrittweise abstrahiert, unterstützen die Erarbeitung; ein Merksatz hält die gewonnenen Erkenntnisse fest. Zur Konsolidierung stehen eine kontextuierte (W21, im Folgenden ausgeführt) und eine rein symbolische Aufgabe (W22) zur Verfügung.

#### 6.4.2.2 Detaillierte Beschreibung ausgewählter Widgets

Im Folgenden werden zwei der acht Widgets aus Kapitel 2 beschrieben. Weitere Informationen zu allen Widgets des Kapitels finden sich im Anhang, Abschnitt B.2.

##### W17: Den Anteil eines Ganzen berechnen

Widget W17 stellt Aufgaben, in denen rein symbolisch der Anteil eines Ganzen zu berechnen ist (vgl. Abbildung 6.22). Die Eingabe der Lösung erfolgt handschriftlich. Zur Unterstützung stehen zum ersten Mal im iBook gestufte Lösungshilfen (vgl. Tabelle 6.2) zur Verfügung.

**Feedback** Als Feedback wird angezeigt, ob die Antwort richtig oder falsch war. Die Rückmeldung ist dabei farblich angepasst (richtige Antwort – Grün, falsche Antwort – Rot). Bei einer falschen Antwort gibt das Widget die Möglichkeit, dieselbe Aufgabe direkt erneut zu bearbeiten. Dabei kann eine Lösungshilfe zu Hilfe genommen werden (Texteinblendung „Möchtest du einen Tipp?“, vgl. Abbildung 6.22). Die Hinweiskarte wird automatisch eingeblendet, um die Nutzung zu fördern. Im Gegensatz zu einem Aufruf während der Aufgabenbearbeitung enthält die Karte zusätzlich einen Button, um eine neue Aufgabe anzufordern.

**Anforderungsniveaus** Im Widget sind drei Schwierigkeitsstufen hinterlegt. Das Ganze wird in allen Stufen als ein zufälliges Vielfaches des Nenners gewählt (maximal das Zehnfache). Zunächst sind zwei Aufgaben mit Stammbrüchen (Nenner  $\leq 12$ ) zu bearbeiten – hier ist das Ganze folglich nur durch den Nenner zu dividieren. In Stufe 2 werden die Brüche auf

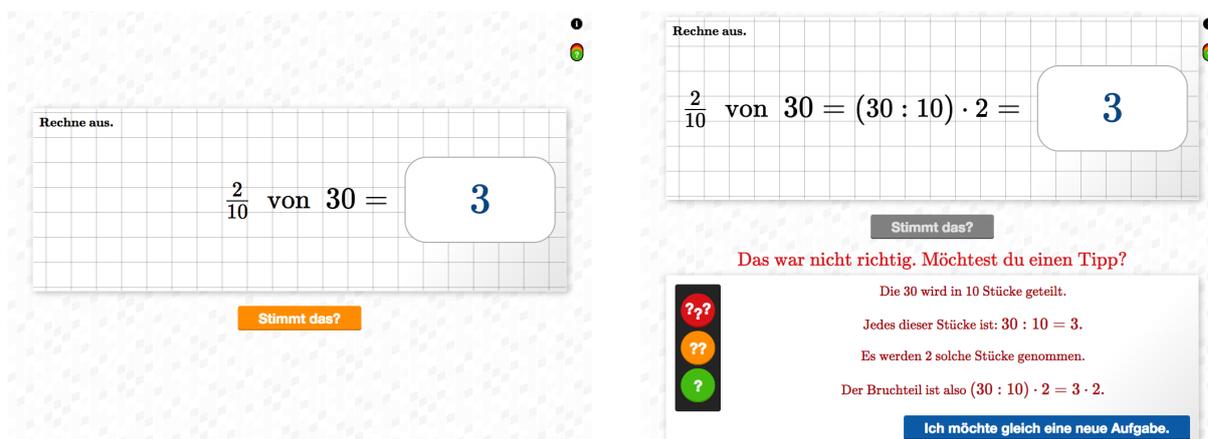


Abbildung 6.22. Widget W17: Den Bruchteil von etwas berechnen, Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von hohem Unterstützungsgrad (rechts).

Tabelle 6.2

Gestufte Lösungshilfen in Widget W17 am Beispiel „Rechne aus.  $\frac{8}{9}$  von 36“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
Gering	In wie viele Stücke wird das Ganze, also die 36 geteilt? Wie groß ist ein solches Stück?
Mittel	Die 36 wird in 9 Stücke geteilt. Jedes dieser Stücke ist: $36 : 9 = 4$ . Wie viele solche Stücke werden genommen?
Hoch <sup>a</sup>	Die 36 wird in 9 Stücke geteilt. Jedes dieser Stücke ist: $36 : 9 = 4$ . Es werden 8 solche Stücke genommen. Der Bruchteil ist also $(36 : 9) \cdot 8 = 4 \cdot 8$ .

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich wird die dargestellte Aufgabe zu „ $\frac{8}{9}$  von 36 =  $(39 : 9) \cdot 8$ “ ergänzt.

echte Brüche erweitert, so dass beide Schritte des Rechenwegs durchzuführen sind (selbe Einschränkung für den Nenner; Setlänge 5). Sets der Stufe 3 entsprechen denen von Stufe 2, allerdings ist die Schranke für den Nenner auf 20 erhöht.

**Prozessdaten** Das Widget loggt bei zwei Ereignissen Daten: Bei Korrekturanforderung werden die Korrektheit der Eingabe, der eingegebene Bruch und die Aufgabe als Bruch-Ganzes-Paar geloggt. Beim Aufrufen einer Lösungshilfe loggt das Widget den Grad der Unterstützung, die Aufgabe und – falls vorhanden – die Eingabe. Die Logs werden über einen String „*solution*“ respektive „*tip*“ voneinander unterscheidbar gemacht.

### W18: Den Anteil eines Ganzen berechnen (kontextuiert)

Widget W18 ist eine kontextuierte Variante von W17 (vgl. Abbildung 6.23). Aufgabe und Lösungshilfen werden in einen von vier möglichen Kontexten gekleidet (Video – zeitliche Länge, Reise – zeitliche Länge, Müsli – Gewicht, Baum – räumliche Länge, vgl. Tabelle 6.3 bzw. Tabelle 6.4).

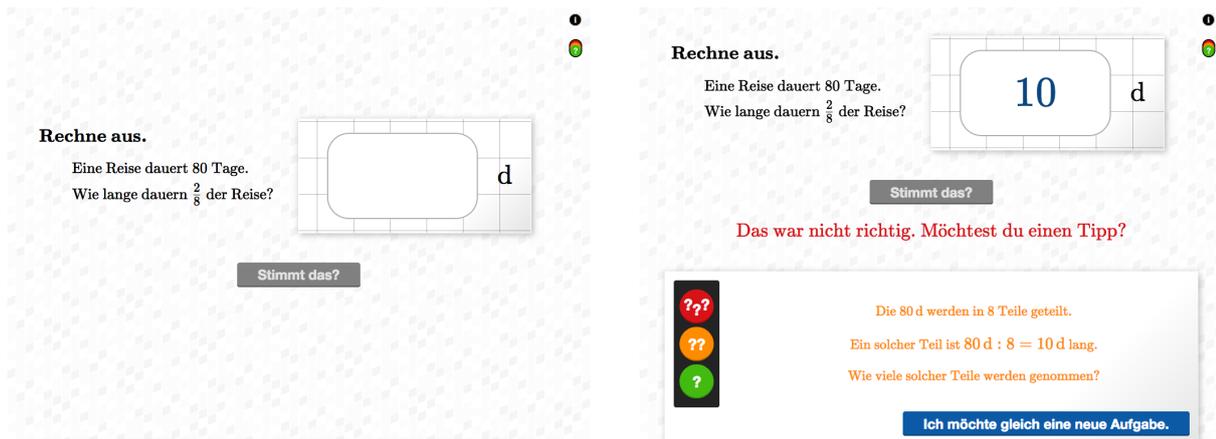


Abbildung 6.23. Widget W18: Den Bruchteil von etwas berechnen (kontextuiert), Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von mittlerem Unterstützungsgrad (rechts).

Tabelle 6.3

Widget W18: den Anteil eines Ganzen berechnen. Dieselbe Aufgabe ( $\frac{1}{8}$  von 24) in den unterschiedlichen Kontexten.

Kontext	(interne ID)	Aufgabentext
Video	0	Ein Video dauert 24 Minuten. Wie lange dauert $\frac{1}{8}$ des Videos?
Reise	1	Eine Reise dauert 24 Tage. Wie lange dauert $\frac{1}{8}$ der Reise?
Müsli	2	Eine Müslipackung wiegt 24 Gramm. Wie schwer ist $\frac{1}{8}$ der Müslipackung?
Baum	3	Ein Baumstamm ist 24 Meter lang. Wie lang ist $\frac{1}{8}$ des Baumstamms?

Tabelle 6.4

Gestufte Lösungshilfen in Widget W18 am Beispiel „Rechne aus. Ein Video dauert 12 Minuten. Wie lange dauern  $\frac{10}{12}$  des Videos?“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
Gering	In wie viele Teile wird das Ganze, also die 12 Minuten geteilt? Wie lange ist ein solches Teil?
Mittel	Die 12 Minuten werden in 12 Teile geteilt. Ein solcher Teil ist $12 : 12 = 1$ min lang. Wie viele solche Teile werden genommen?
Hoch	Die 12 Minuten werden in 12 Teile geteilt. Ein solcher Teil ist $12 \text{ min} : 12 = 1$ min lang. Es werden 10 solcher Teile genommen. Der Bruchteil ist also $(12 \text{ min} : 12) \cdot 10 = 1 \text{ min} \cdot 10$ lang.

**Feedback** Feedback in Widget W18 entspricht W17; insbesondere gibt auch Widget W18 die Möglichkeit, eine falsch beantwortete Aufgabe direkt im Anschluss erneut zu bearbeiten.

**Anforderungsniveaus** Die Aufgabengenerierung folgt dem Algorithmus von Widget W17 und ist entsprechend in drei Anforderungsniveaus gestuft. Zusätzlich wird bei jeder Aufgabe ein Kontext zufällig ausgewählt, der sich vom Kontext der vorherigen Aufgabe im selben Set unterscheidet.

**Prozessdaten** Die Datenerfassung entspricht Widget W17. Dabei wird das Bruch-Ganzes-Tupel, das die Aufgabe beschreibt, um den Kontext zu einem Tripel erweitert.

### 6.4.3 Kapitel 3: „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer

Im dritten Kapitel des iBooks werden Brüche als *Teile mehrerer Ganzer* eingeführt (vgl. Abschnitt 1.3.2.1). Dabei wird auch die Gleichwertigkeit der Teilaspekte *Teil mehrerer Ganzer* und *Teil eines Ganzen* (iBook-Kapitel 2) motiviert.

#### 6.4.3.1 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Widget W23 motiviert die Gleichwertigkeit von „ $\frac{3}{4}$  einer Pizza“ und „ $\frac{1}{4}$  von drei Pizzen“. Das Widget ist eine Übertragung einer aus der Literatur bekannten Aufgabenstellung (Padberg, 2009; Streefland, 1991; Winter, 1999).<sup>11</sup> In der interaktiven Aufgabe sind drei Pizzen auf vier Personen gerecht zu verteilen: zunächst jede Pizza einzeln, dann die drei Pizzen gleichzeitig. Es wird herausgestellt, dass in beiden Varianten jeder Gast  $\frac{3}{4}$  einer Pizza erhält.

Die folgenden zwei Widgets greifen das Verteilen von Lebensmitteln auf Personen erneut auf: Drei Schokoladenriegel sollen auf vier Kinder verteilt werden. Dabei sollen die Resultate „Ein Kind bekommt  $\frac{1}{4}$  der gesamten Schokolade“ ( $\hat{=}$  Bruch als Teil mehrerer Ganzer) und „Ein Kind bekommt  $\frac{3}{4}$  von einem Schokoriegel“ ( $\hat{=}$  Bruch als Teil eines Ganzen) als äquivalent erkannt werden.

Die Übertragung auf die symbolische Rechenoperation erfolgt im iBook anhand des Beispiels „ $\frac{3}{4}$  einer 1 m langen Strecke“, die zunächst auf das Dreifache verlängert und anschließend in vier gleich große Stücke geteilt wird. Widget W26, ein wachsender Lückentext (vgl. Abschnitt 6.4.2), fördert die Berechnung ohne Zuhilfenahme einer Skizze. Dazu wird die Rechnung „Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke“ über das Schema „Multiplizieren mit dem Zähler, Dividieren durch den Nenner“ schrittweise durchgeführt.

Ein Merksatz im iBook wiederholt die beide Rechenwege gemäß den Aspekten *Teil mehrerer Ganzer* und *Teil eines Ganzen* und zeigt an einem Beispiel durch dasselbe Ergebnis auf, dass die Aspekte gleichwertig sind. Anschließend stellt das Kapitel zwei interaktive Aufgaben (rein symbolisch und kontextuiert) bereit, um den im iBook-Kapitel thematisierten Rechenweg anwenden zu können. Das rein symbolische Widget ist in seiner Umsetzung in Abschnitt 6.4.3.2 detailliert.

Im zweiten Einführungsteil des Kapitels werden Brüche als Quotient natürlicher Zahlen eingeführt. Dazu dient die Hausaufgabe eines fiktiven Viertklässlers, der die Division  $3 : 4$

<sup>11</sup>Umsetzung als CindyJS-Widget: Bernhard Werner.

nicht lösen kann. Der zweite Übungsteil besteht aus Widget W30, in dem zu einer gegebenen Division anzugeben ist, ob das Ergebnis eine natürliche Zahl ist; das Ergebnis der Division soll entsprechend als natürliche Zahl oder als Bruch eingegeben werden.

### 6.4.3.2 Detaillierte Beschreibung ausgewählter Widgets

Eines der insgesamt acht Widgets des dritten iBook-Kapitels wird im Folgenden näher ausgeführt; entsprechende Beschreibungen für alle Widgets des Kapitels sind im Anhang, Abschnitt B.3, nachzulesen.

#### W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer)

In Widget W27 ist wie in Widget W17 ein Anteil zu berechnen. Die rein symbolische Aufgabenstellung lautet „Anteil von Ganzem = □“. Das Widget unterscheidet sich von Widget W17 (s. Abschnitt 6.4.2.2) hauptsächlich durch die generierten Brüche und Ganzen: Durch nicht-gekürzte Brüche und passend gewählte Ganze ist eine Lösung über das „Dividieren durch den Nenner, multiplizieren mit den Zähler“-Schema des Vorkapitels (Teil eines Ganzen) nicht möglich. Vielmehr kann eine Lösung ohne einen Rückgriff auf die – zu diesem Zeitpunkt noch nicht behandelte – Grundvorstellung des Kürzens nur über den Weg „Multiplizieren mit dem Zähler, dividieren durch den Nenner“ (Teil mehrerer Ganzer) erfolgen. Dementsprechend stellt das Widget den Arbeitsauftrag „Löse die Aufgabe wie eben gelernt“. Zur Eingabe der Lösung kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz.

**Feedback & Prozessdaten** Logs und Feedback entsprechen denen von Widget W17. Insbesondere wird nach einer falschen Antwort angeboten, die Aufgabe erneut mit Unterstützung durch die Lösungshilfen zu bearbeiten. Diese sind an den neuen Rechenweg angepasst (vgl. Tabelle 6.5).

Tabelle 6.5

Gestufte Lösungshilfen in Widget W27 am Beispiel „Löse die Aufgabe wie eben gelernt.  $\frac{8}{12}$  von 6 = □“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Erst Vervielfachen, danach in gleich große Stücke teilen.
 Mittel <sup>a</sup>	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{8}{12}$ von 6 = (6·8) : 12
 Hoch <sup>a</sup>	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{8}{12}$ von 6 = (6·8) : 12 = 48 : 12

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich: Ergänzung der dargestellten Aufgabe zu „ $\frac{8}{12}$  von 6 = (6 · 8) : 12“.

**Anforderungsniveaus** Das Anforderungsniveau wird über die Größe der Zahlen gestuft. Diese werden in dreifacher Staffelung größer (jeweils Setlänge 5): Der maximal mögliche Nenner des ursprünglich generierten Bruchs steigt über die Level von 4 über 6 bis 8 an; das maximal mögliche generierte Ganze von 50 über 75 bis 100.

**Implementationsdetails** Die Aufgabengenerierung läuft wie folgt ab: Zunächst wird ein zufälliger echter und vollständig gekürzter Bruch erzeugt. Zudem wird eine Zahl  $r$  per Zufall aus der Menge  $\{2, 3, 4\}$  ausgewählt. Zur Wahl des Ganzen wird der Nenner mit einer zufälligen natürlichen Zahl multipliziert, die nicht durch  $r$  teilbar ist. Der Bruch wird abschließend mit  $r$  erweitert. Dadurch wird erreicht, dass das Ganze nicht durch den Nenner des angezeigten Bruchs teilbar ist und zunächst das Ganze mit dem Zähler multipliziert werden muss, um die Aufgabe zu lösen.

So wurde bspw. für die Aufgabe in Abbildung 6.24,  $\frac{3}{9}$  von 3, zunächst der Bruch  $\frac{1}{3}$  generiert und  $r = 3$  gewählt. Für das Ganze 3 wurde der zufällige Multiplikator 1 gewählt und mit dem Nenner 3 multipliziert. Für die Aufgabenstellung, wie sie im Widget angezeigt wird, wurde abschließend  $\frac{1}{3}$  mit  $r = 3$  erweitert.

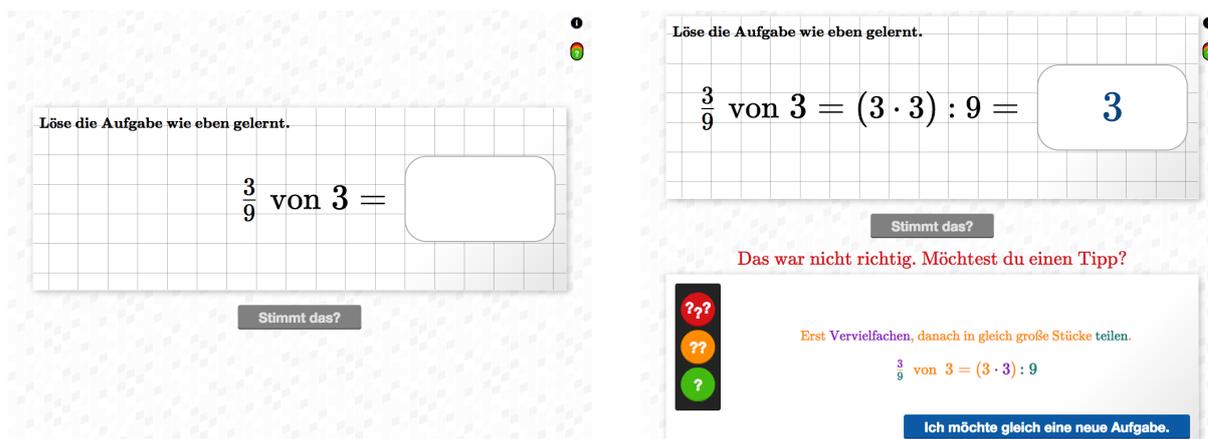


Abbildung 6.24. Widget W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer).

## 6.4.4 Kapitel 4: „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen

Das vierte Kapitel enthält 23 Widgets und ist damit das umfangreichste des iBooks. In diesem Kapitel wird das Subkonzept „Erweitern und Kürzen“ eingeführt.

### 6.4.4.1 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Die Einführung in das Erweitern und Kürzen erfolgt über schrittweise Repräsentationswechsel vom Enaktiven über das Ikonische hin zum Symbolischen (vgl. Abschnitt 1.3.1). Zu Beginn werden die Lernenden im iBook-Text dazu aufgefordert, ein quadratisches Blatt Papier zur Hand zu nehmen, in der Mitte zu falten, eine Hälfte farbig zu markieren und das Blatt erneut in der Mitte zu falten. So wird die Gleichheit  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$  haptisch erfahrbar.

Der Repräsentationswechsel ins Ikonische erfolgt in Widget W32: Hier ist die Thematik von gefaltetem Papier digital umgesetzt; das gefaltete Papier ist als Rechteckdiagramm stilisiert dargestellt. In Widget W33 wird die ikonische Bedeutung des Erweiterns von den in W32 verwendeten Quadraten auf eine Bruchdarstellung am Kreis übertragen: In dem interaktiven Diagramm können unterschiedliche Brüche an einem Kreisdiagramm dargestellt werden. Somit wird die Grundvorstellung vom Erweitern und Kürzen als Verfeinern und Vergrößern einer Einteilung gefördert (vgl. Abschnitt 1.3.2.1).

Anschließend dient eine Behauptung einer fiktiven Schülerin („Ich habe gemerkt, dass ich einfach oben und unten immer das Selbe machen muss.“) als Impuls für die Lernenden, eine Strategie zum Finden wertgleicher Brüche auf symbolischer Ebene zu formulieren. Auf den folgenden iBook-Seiten werden die Begriffe *Erweitern* und *Kürzen* in ihrer symbolischen wie ikonischen Bedeutung definiert; ebenso wird das *vollständige Kürzen* eingeführt. Ein Merksatz hebt abschließend hervor, dass diese Operationen den Wert des Bruches nicht verändern.

Der Übungsteils des vierten iBook-Kapitels beinhaltet 19 interaktive Aufgaben. Das Angebot umfasst dabei Aufgaben zum Erkennen von wertgleichen Brüchen in unterschiedlichen Repräsentationen und Widgets, die auf rein ikonischer Ebene operieren – so sind bspw. in Widget W38 Bruchzahlen an feiner vorunterteilten Rechtecken zu visualisieren und in W39 Brüche graphisch zu kürzen. Der Großteil der interaktiven Aufgaben fokussiert sich auf die formal-symbolische Ebene und stellt unterschiedliche Aufgabenstellungen zum Erweitern und Kürzen digital bereit. Neben den in Abschnitt 6.4.4.2 ausgeführten Aufgaben sind in den Widgets Brüche mit vorgegebenen Zahlen zu erweitern und zu kürzen, gemeinsame Nenner zu bilden sowie natürliche Zahlen als Bruchzahlen zu schreiben.

#### 6.4.4.2 Detaillierte Beschreibung ausgewählter Widgets

Um das breite Aufgabenspektrum des Kapitels aufzuzeigen, werden im Folgenden sieben der 23 Widgets vorgestellt (siehe Abschnitt B.4 für die restlichen Widgets).

##### **W43–W46: Erweiterungs- und Kürzungszahl bestimmen**

In den vier Widgets W43, W44, W45 und W46 ist die Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl zu erschließen. Dies geschieht pro Operation einmal ausgehend von symbolischen und einmal ausgehend von ikonischen Repräsentationen; die Verteilung der Operationen und Repräsentationen auf die Widgets ist Tabelle 6.6 zu entnehmen.

Ausgangsbruch und Endbruch der jeweiligen Operation sind auf dem Bildschirm dargestellt; ein Pfeil gibt die Richtung der Operation an (vgl. Abbildung 6.25). Die Antwort wird über ein Feld der Handschrifterkennung eingegeben.

**Feedback** Als Feedback auf eine Antwort wird die Repräsentation der Aufgabenstellung durch die jeweils andere ergänzt. In den ikonischen Darstellungen werden die Linien, die durch die Operation hinzugefügt (Erweitern) bzw. entfernt (Kürzen) werden, gestrichelt dargestellt. In den Widgets mit symbolischer Aufgabenstellung wird der Rechenweg einblendet. Als Reaktion auf eine falsche Antwort wird die richtige Antwort angegeben

Tabelle 6.6  
Charakteristika der Widgets W43–W46.

Widget	Mit welcher Zahl wurde ...	Repräsentation der Operation
W43	... erweitert?	ikonisch
W44	... gekürzt?	ikonisch
W45	... erweitert?	symbolisch
W46	... gekürzt?	symbolisch

und in einem kurzen Text erklärt. Die Erklärung entspricht der Lösungshilfe mit hohem Unterstützungsgrad (vgl. Tabellen 6.7 & 6.8).

**Anforderungsniveaus** Alle vier Widgets generieren ihre Aufgaben auf dieselbe Art und Weise. Aufgaben sind charakterisiert durch einen Bruch und eine Zahl, mit welcher der Bruch erweitert wird. Je nach Aufgabe stellt der erweiterte Bruch Ausgangspunkt (Widgets W44 und W46) oder Ergebnis (Widgets W43 und W45) der zu untersuchenden Operation dar.

Die Widgets umfassen zwei Anforderungsniveaus: Begonnen wird mit einem Set, das aus zwei Aufgaben besteht, welche durch einen zufälligen Stammbruch mit Nenner  $\leq 20$  (aber nicht gleichzeitig  $> 10$  und prim) und einer zufälligen Zahl zwischen 2 und 7 definiert sind. Im Anschluss werden Sets der Länge 5 generiert. In diesen Sets werden echte Brüche ohne die Einschränkung auf Stammbrüche randomisiert generiert; die Limitationen für die Nenner und Erweiterungszahlen bleiben erhalten.

**Prozessdaten** Die Widgets loggen jeweils den gekürzten Bruch, die Zahl, mit welcher der Bruch (evtl. intern) erweitert wurde, die Korrektheit der Eingabe und die gegebene Antwort. Zusätzlich wird beim Aufruf einer Lösungshilfe geloggt, welcher Unterstützungsgrad angefordert wurde. Die beiden Logtypen sind durch mitaufgezeichnete Strings voneinander zu unterscheiden.

**Implementationsdetails** Die Anzeige der Brüche bzw. Visualisierungen geschieht über CindyJS. Alle Texte werden in HTML-Elementen angezeigt, die über der CindyJS-Canvas platziert werden.

### W47: Kürzungszahlen auswählen

In Widget W47 ist es die Aufgabe, zu einem gegebenen Bruch diejenigen Zahlen auszuwählen, mit denen er gekürzt werden kann. Zur Auswahl stehen dabei maximal zehn Antwortmöglichkeiten aus der Menge aller Teiler von Zähler oder Nenner. Zusätzlich kann immer „Mit keiner [sc. Zahl kann der Bruch gekürzt werden].“ ausgewählt werden.

Der Bruch wird in der Bildschirmmitte auf einer karierten Karte angezeigt; die Antwortmöglichkeiten platzieren sich links und rechts von der Karte. Sie können durch Antippen ausgewählt werden, wodurch sie sich vergrößern und blaue Schriftfarbe annehmen.

Tabelle 6.7  
Lösungshilfen der Widgets W43 & W44.

Widget	Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
W43	 Gering	Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden.
	 Mittel	Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden. <sup>a</sup>
	 Hoch	Jedes Stück wurde in $X$ gleich große Teile geteilt. <sup>a</sup> Die Einteilung des Ganzen ist $X$ -mal so fein wie vor dem Erweitern.
W44	 Gering	Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden.
	 Mittel	Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden. <sup>a</sup>
	 Hoch	Immer $X$ gleich große Teile werden zu einem Stück zusammengefasst. <sup>a</sup> Die Einteilung des Ganzen ist $X$ -mal so fein wie vor dem Kürzen.

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich Strichelung der entsprechenden Linien

Tabelle 6.8  
Lösungshilfen der Widgets W45 & W46.

Widget	Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
W45	 Gering	Beim Erweitern wird die Einteilung <i>feiner</i> . Um wie viel wird sie hier feiner?
	 Mittel	Beim Erweitern wird die Einteilung <i>feiner</i> . Das heißt: Zähler und Nenner werden mit der gleiche Zahl mal genommen.
	 Hoch	Beim Erweitern mit $X$ wird die Einteilung $X$ -mal so fein. Das heißt: Zähler und Nenner werden mit $X$ mal genommen.
W46	 Gering	Beim Kürzen wird die Einteilung <i>gröber</i> . Um wie viel wird sie hier gröber?
	 Mittel	Beim Kürzen wird die Einteilung <i>gröber</i> . Das heißt: Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl geteilt.
	 Hoch	Beim Kürzen mit $X$ wird die Einteilung $X$ -mal so grob. Das heißt: Zähler und Nenner werden durch $X$ geteilt.

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich Strichelung der entsprechenden Linien

**Gib an, mit welcher Zahl der dargestellte Bruch erweitert wurde.**

Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden.

Erweitert wurde mit:

0

???

??

?

**Stimmt das?**

**Gib an, mit welcher Zahl der Bruch erweitert wurde.**

Beim Erweitern mit 5 wird die Einteilung 5-mal so fein.  
Das heißt: Zähler und Nenner werden mit 5 mal genommen.

$\frac{1}{13}$

Erweitert wurde mit:

1

Das war nicht richtig.  
Die richtige Antwort ist 5.

$$\frac{1}{13} \stackrel{5}{=} \frac{1 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{5}{65}$$

**Neue Aufgabe**

**Gib an, mit welcher Zahl der dargestellte Bruch gekürzt wurde.**

Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden.

Gekürzt wurde mit:

1

???

??

?

**Stimmt das?**

**Gib an, mit welcher Zahl der Bruch gekürzt wurde.**

Beim Kürzen mit 4 wird die Einteilung 4-mal so grob.  
Das heißt: Zähler und Nenner werden durch 4 geteilt.

$\frac{4}{100}$

Gekürzt wurde mit:

7

Das war nicht richtig.  
Die richtige Antwort ist 4.

$$\frac{4}{100} \stackrel{4}{=} \frac{4 : 4}{100 : 4} = \frac{1}{25}$$

**Neue Aufgabe**

Abbildung 6.25. Widgets W43, W45, W44 und W46: Erweiterungs- (oben) bzw. Kürzungszahl (unten) bestimmen. Aufgabe mit Lösungshilfen (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

**Feedback** Das Feedback gibt Auskunft, ob die Antwort korrekt ist, und meldet bei Bedarf die korrekt und die zu viel bzw. zu wenig ausgewählten Antwortmöglichkeiten zurück. Symbole und farbliche Codierung der einzelnen Antwortmöglichkeiten veranschaulichen das Feedback. Zudem fordert ein Text unterhalb der Aufgabenstellung dazu auf, die Zahlen anzutippen, mit denen der Bruch kürzbar ist. Dies führt zur Anzeige der Kürzung auf der Karte (vgl. Abbildung 6.26). Tippt man eine Zahl an, mit der nicht gekürzt werden kann, so wird die Aufforderung mit der Information ersetzt, dass der Bruch mit der gewählten Zahl nicht kürzbar ist.

**Anforderungsniveaus** Eine einzelne Aufgabe im Widget ist durch einen kürzbaren Bruch charakterisiert. Die Distraktoren werden bei der Anzeige (und nicht bei Generierung) der Aufgabe gewählt (für den genauen Auswahlalgorithmus siehe Abschnitt C.2). Zur Generierung werden vollständig gekürzte, echte Brüche per Zufall erzeugt, die anschließend mit einer zufällig gewählten natürlichen Zahl erweitert werden. Die Schwierigkeit der Aufgabe wird über den maximal möglichen Nenner und die Erweiterungszahl gesteuert.

Im Widget sind drei Anforderungsniveaus definiert. Im ersten Set sind zwei Stammbrüche (Nenner  $\leq 12$ ) zu bearbeiten, die mit einer zufälligen Primzahl  $\leq 10$  erweitert wurden. Auf der zweiten Stufe (Setlänge 5) weisen die Brüche einen Nenner  $\leq 10$  auf; jeder Bruch wird



Abbildung 6.26. Widget W47: Kürzungszahlen auswählen. Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer Auswahl nach Tippen auf die Zahl 3 (rechts).

mit einer zufälligen, natürlichen Zahl  $\leq 10$  erweitert (Erweiterung auch mit 1 möglich). Im höchsten Level (Setlänge 5) beträgt der maximal mögliche Nenner 15; die Erweiterungszahl wird für jeden Bruch zufällig, aber  $\leq 9$  gewählt.

**Prozessdaten** Das Widget loggt den angezeigten Bruch, eine Liste der korrekten, aber nicht ausgewählten Zahlen und eine Liste der fälschlicherweise ausgewählten Zahlen (ist eine Aufgabe also korrekt gelöst, so sind beide Listen leer).

**Implementationsdetails** Beim Wechsel zu einer neuen Aufgabe bewegen sich die Antwortmöglichkeiten über den unteren Rand des Bildschirms hinaus, anschließend bewegen sich die neuen Antwortmöglichkeiten von dort in den Bildschirmausschnitt hinein. Währenddessen ahmt eine Animation ein Umblättern der Karte nach; auf der „Rückseite“ der Karte ist die neue Aufgabe zu sehen. Die Animationen der Antwortmöglichkeiten ähneln denen aus Widget W13 (s. Abschnitt 6.4.1.2).

Das Widget wurde in HTML5 und JavaScript umgesetzt. Insbesondere wurde für die Animationen (Einfliegen der Auswahlmöglichkeiten, Umblättern der Karte) nur CSS verwendet.

### W48 & W49: Zähler oder Nenner ergänzen

In Widgets W48 und W49 soll jeweils eine fehlende Zahl in einer Erweiterung oder Kürzung ergänzt werden. Die Operation wird dabei zufällig gewählt. In der symbolischen Darstellung des jeweiligen Bruchs ist anstelle des einzutragenden Nenners bzw. Zählers ein Feld der Handschrifterkennung eingebunden. Während in Widget W48 stets der Zähler des Ergebnisses zu ergänzen – und damit der Bruch auf den gegebenen Nenner zu bringen – ist, ist der Platzhalter in W49 zufällig auf eine der vier Komponenten der zwei Brüche verteilt.

**Feedback** Feedback erfolgt in beiden Aufgaben in Form von Text unter Angabe der Korrektheit. Bei falscher Beantwortung wird die richtige Antwort genannt. Zusätzlich bietet Widget W48 eine Erklärung in Form des Rechenwegs, die über einen Knopf angezeigt werden kann (vgl. Abbildung 6.27). In Widget W49 wird die Rechnung über Rechteckdiagramme

visualisiert dargestellt (vgl. Abbildung 6.28). In beiden Widgets stehen Lösungshilfen zur Unterstützung bereit (vgl. Tabellen 6.9 & 6.10).

Bringe den Bruch auf den gegebenen Nenner.

$$\frac{20}{22} = \frac{\quad}{44}$$

Stimmt das?

Bringe den Bruch auf den gegebenen Nenner.

$$\frac{20}{22} = \frac{20}{44}$$

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig. Die richtige Antwort ist 40.

Um  $\frac{20}{22}$  auf Nenner 44 zu bringen, muss man  $\frac{20}{22}$  mit 2 erweitern:  $(44 : 22 = 2)$ .

Es ist also  $\frac{20}{22} = \frac{20 \cdot 2}{22 \cdot 2} = \frac{40}{44}$ .

Erklär's mir!

Abbildung 6.27. Widget W48: Einen Bruch auf einen gegebenen Nenner bringen. Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer falschen Antwort mit eingblendetem Rechenweg (rechts).

Gib die fehlende Zahl ein.

$$\frac{12}{\quad} = \frac{6}{9}$$

Stimmt das?

Gib die fehlende Zahl ein.

$$\frac{12}{2} = \frac{6}{9}$$

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig. Die richtige Antwort ist 18.

Hier wurde gekürzt. Überlege Dir, mit welcher Zahl.

Kürzen mit 2

Abbildung 6.28. Widget W49: Die fehlende Zahl in einer Bruchgleichung ergänzen. Aufgabenstellung mit Lösungshilfe mittleren Unterstützungsgrades (links) und Korrektur einer falschen Antwort (rechts).

**Anforderungsniveaus** Eine einzelne Aufgabe ist in beiden Widgets festgelegt durch einen Bruch, die Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl und die Operation selbst. Letztere wird in allen Stufen per Zufall festgelegt. Der Bruch und die Zahl durchlaufen in beiden Widgets zwei Level; die Setlänge ist dabei stets 5. Sind Brüche zu kürzen, so wird der generierte Bruch mit der zufällig gewählten Zahl intern erweitert.

In Widget W48 werden zunächst echte Brüche mit Nenner  $\leq 33$  generiert. Zu erweitern bzw. kürzen ist mit 2 oder 3 – dadurch bleiben die Zahlen zweistellig. In der zweiten Stufe wird der maximal mögliche Nenner auf 12 gesenkt. Zu erweitern bzw. kürzen ist mit einer per Zufall gewählten Zahl zwischen 2 und 10. Die erste Schwierigkeitsstufe von Widget W49 entspricht der zweiten von W48. Die zweite unterscheidet sich von der ersten nur durch den maximal möglichen Nenner, der hier 20 beträgt. Zusätzlich wird in Widget W49 für jede Aufgabe eine der vier Komponenten der Brüche ausgewählt, die in der Aufgabe zu ergänzen ist.

**Prozessdaten** Widget W48 loggt die Korrektheit, die Aufgabe in Form der beiden Brüche auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung sowie die eingegebene Zahl. Widget W49 loggt ebenfalls die Korrektheit und eingegebene Zahl. Die Aufgabenstellung wird in Form des generierten Bruchs, Operation (Kürzen 1, Erweitern 0), der beteiligten Zahl und der fehlenden Komponente gesichert. Beide Widgets loggen beim Aufruf einer Lösungshilfe, welcher Unterstützungsgrad angefordert wurde. Widget W48 loggt zusätzlich, wenn nach einer falschen Antwort die Erklärung eingeblendet wird. Alle Logs sind durch Strings voneinander zu unterscheiden.

Tabelle 6.9

*Gestufte Lösungshilfen in Widget W48.*

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Überlege, ob Du erweitern oder kürzen musst und womit.
 Mittel	Um $f$ auf Nenner $d$ zu bringen, muss man $f$ erweitern/kürzen. Überlege Dir, mit welcher Zahl.
 Hoch	Um $f$ auf Nenner $d$ zu bringen, muss man $f$ mit $r$ erweitern/-kürzen: ( $d : n = r$ ).

Tabelle 6.10

*Gestufte Lösungshilfen in Widget W49.*

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Überlege Dir, ob erweitert oder gekürzt wurde und mit welcher Zahl.
 Mittel	Hier wurde erweitert/gekürzt. Überlege Dir, mit welcher Zahl.
 Hoch	Hier wurde mit $X$ erweitert/gekürzt.

### 6.4.5 Kapitel 5: „Brüche auf dem Zahlenstrahl“

In Kapitel 5 wird die Darstellung von Brüchen auf dem Zahlenstrahl behandelt. Zu diesem Zweck kommen drei Arten von Widgets zum Einsatz: interaktive Diagramme, Widgets zum Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl und Widgets zum Ablesen von einem Zahlenstrahl. Da dieselben Widgets mehrfach an unterschiedlichen Stellen im Kapitel mit unterschiedlicher Parametrisierung bezüglich vorkommender Brüche und Einteilung des Zahlenstrahls eingesetzt werden, wird zunächst jede Widgetart einzeln beschrieben (Abschnitt 6.4.5.1). Anschließend wird die didaktische Reihung der Widgets mit ihren spezifischen Charakteristika im Kapitel dargestellt (Abschnitt 6.4.5.2).

### 6.4.5.1 Beschreibung der Widgettypen

In diesem Abschnitt werden die drei Widgettypen des Kapitels vorgestellt. Alle Widgets sind in CindyJS implementiert.

#### Interaktive Diagramme

Vier interaktive Diagramme dienen der explorativen Einführung des Zahlenstrahls. Dabei wird in allen Fällen eine bereits bekannte graphische Darstellungsform durch eine Animation in einen Zahlenstrahl verwandelt: In einem der vier Widgets wird ein Kreisdiagramm auf einen Zahlenstrahl abgewickelt<sup>12</sup>, in den anderen dreien ein Rechteck geschumpft (s. Abbildung 6.29).

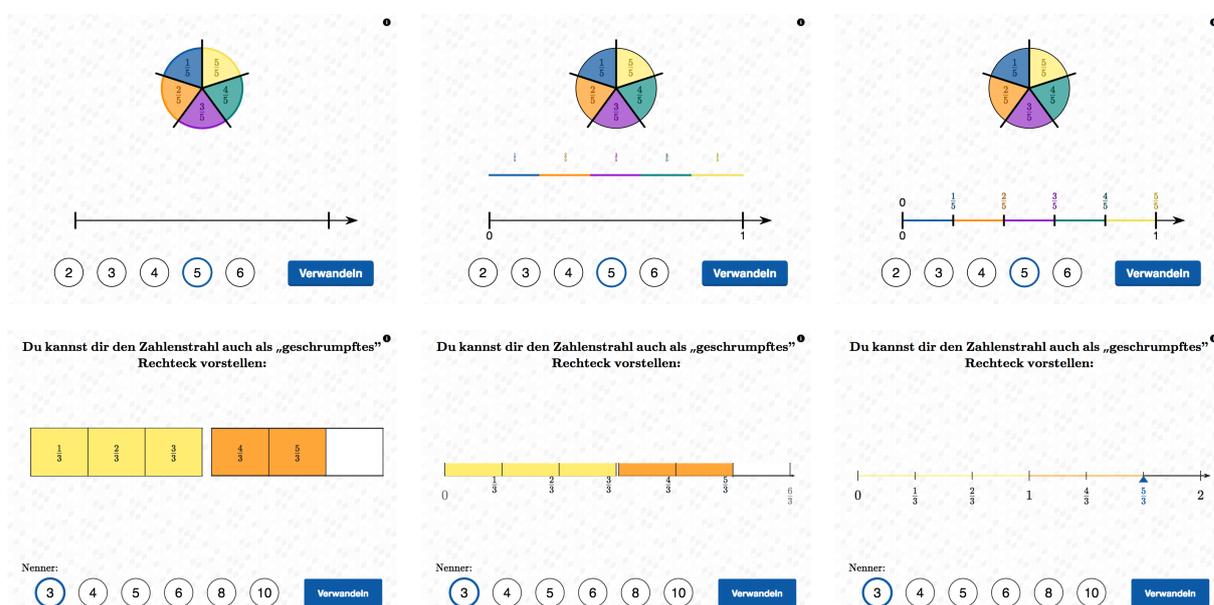


Abbildung 6.29. Interaktive Diagramme in iBook-Kapitel 5. Abwickeln eines Kreisdiagramms (oben) und Schrumpfen eines Rechteckdiagramms (unten). Von links nach rechts jeweils Beginn, Mitte und Ende der Animation.

Beide Widgettypen erlauben es, einen Nenner auszuwählen (aus der Menge  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  im Kreistyp und aus der Menge  $\{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$  im Rechtecktyp). Die Visualisierung wird dementsprechend in gleich große Stücke unterteilt. Im Falle der Rechteckdiagramme wird zusätzlich ein zufälliger Anteil gefärbt und beschriftet, während im Kreisdiagramm alle Kreisteile durchnummeriert werden.

Beim Drücken des Buttons „Verwandeln“ startet eine Animation, welche die Darstellung auf bzw. in einen Zahlenstrahl transformiert. Das erneute Drücken des Buttons löst eine Animation zurück zum Anfangszustand aus. Für die Animationen greifen die Widgets auf die Animationsbibliothek zurück, die vom Autor für CindyJS entwickelt wurde (s. Abschnitt 5.2.5.2).

<sup>12</sup>Programmierung: Bernhard Werner

## Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen

Auf einem Zahlenstrahl einzutragende Brüche werden in den entsprechenden Widgets mittig unterhalb des Zahlenstrahls angezeigt. Über Drag-and-Drop können sie mit dem Finger auf dem Zahlenstrahl platziert werden.

**Feedback** Um das Feedback besser fokussieren zu können, ist in den meisten Widgets des iBooks nur ein Bruch auf den Zahlenstrahl zu schieben. Feedback erfolgt sowohl in Text als auch in Bildform: Eine richtige Antwort wird grün markiert. Ein falsch platzierter Bruch wird mit einem roten, semitransparenten Kreuz durchgestrichen und mit der korrekten Beschriftung für diese Position darüber korrigiert. An der richtigen Stelle wird der Bruch mit einem grünen Dreieck auf dem Zahlenstrahl markiert und beschriftet. Zusätzlich wird der Stammbruch angetragen, der den Nenner des einzutragenden Bruchs aufweist. Gebogene Pfeile von Einteilung zu Einteilung visualisieren den Zählprozess bis zur richtigen Position (vgl. Abbildung 6.30).

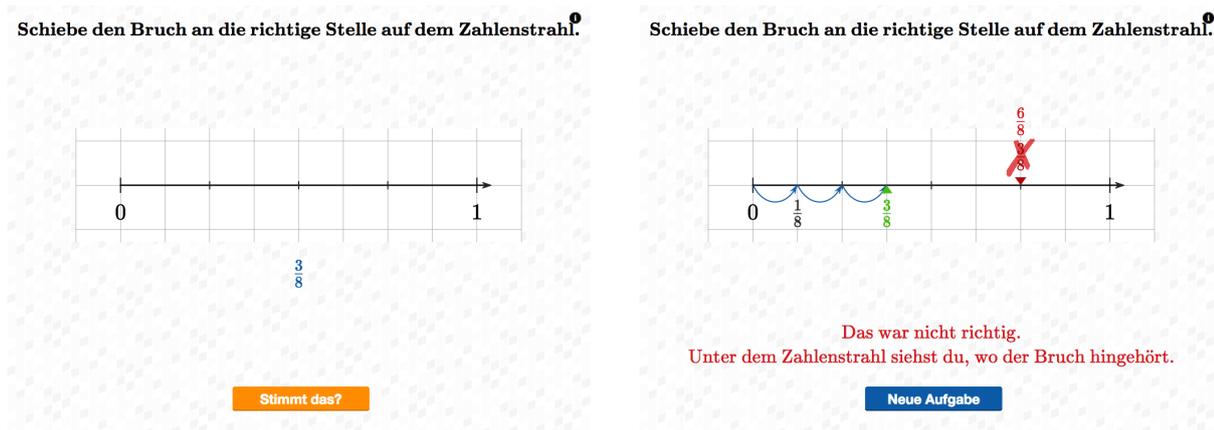


Abbildung 6.30. Widget zum Eintragen eines Bruchs auf einen Zahlenstrahl. Grundstellung der Aufgabe (links) und Korrektur eines fehlplatzierten Bruches (rechts).

**Prozessdaten** Bei Korrekturanforderung speichern die Widgets, ob der Bruch korrekt platziert wurde. Zusätzlich wird der Bruch selbst und Stelle des Zahlenstrahls erfasst, auf die er geschoben wurde (jeweils als Zähler-Nenner-Paar).

**Implementationsdetails** Die Widgets basieren auf der in Abschnitt 6.2.2.6 dargelegten Umsetzung des Zahlenstrahls in CindyJS. Beim Verschieben wird stets der Bruch verschoben, der dem Finger auf dem Touchscreen am nächsten liegt. Damit der Bruch nicht vom verschiebenden Finger verdeckt wird, springt dieser bei der Berührung des Touchscreens um 50 px nach oben. Sobald sich der Bruch dem Zahlenstrahl auf 50 px nähert, springt er auf die nächstgelegene Stelle auf dem Zahlenstrahl. Diese Sprungstellen müssen nicht notwendigerweise auf der angezeigten Einteilung liegen, sondern können im Widgetcode feiner definiert werden.

## Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen

Im letzten Widgettyp, der innerhalb des Kapitels eingesetzt wird, ist es stets die Aufgabe, einen Bruch zu bestimmen, der mit einem blauen Dreieck auf einem Zahlenstrahl markiert ist. Die Antwort wird mit dem Finger in die Zahlenfelder unterhalb des Zahlenstrahls eingetragen (vgl. Abbildung 6.31). Hierbei kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz.

Abbildung 6.31. Widget zum Ablesen eines Bruchs von einem Zahlenstrahl. Beispiel einer Aufgabenstellung (oben links), unterschiedliche Feedback-Modi (oben rechts und unten links) und Auswirkung auf die Darstellung, wenn der eingegebene Bruch nicht innerhalb des ursprünglich angezeigten Intervalls liegt (unten rechts).

**Feedback** Wurde der Bruch korrekt abgelesen, so wird dies textuell zurückgemeldet und die Eingabe mit einem grünen Haken versehen. Im Falle einer falschen Antwort unterscheidet sich das Feedback in Abhängigkeit davon, ob der abzulesende Bruch auf der Einteilung liegt. In beiden Fällen wird die korrekte Antwort in einem kurzen Text erklärt:

- Im ersten Aufgabentyp entspricht die Einteilung des Zahlenstrahls dem Nenner des abzulesenden Bruchs. Daher wird zur Bestimmung des Bruches zunächst beschrieben, in wie viele gleich große Stücke der Zahlenstrahl zwischen 0 und 1 unterteilt ist und anschließend angegeben, wie viele solcher Stücke links von der Markierung liegen. Ein auf den Zahlenstrahl aufgelegtes, orangenes Rechteck der Länge 1, das dem Nenner entsprechend in gleich große Stücke unterteilt ist, unterstützt die verbale Beschreibung

des Nenners. Für den Zähler wird in gleicher Weise ein violettes Rechteck über dem orangenen eingeblendet. Es reicht vom Start des Zahlenstrahls bis zum markierten Bruch und entspricht in seiner Segmentierung dem orangenen Rechteck, welches das Ganze visualisiert. Der Zählvorgang wird in beiden Rechtecken durch eine leichte Abstufung der Füllfarbe im Wechsel erleichtert (vgl. Abbildung 6.31).

- Im zweiten Aufgabentyp liegt der abzulesende Bruch immer mittig in einem Segment, das von der Unterteilung auf dem Zahlenstrahl erzeugt wird. Für eine korrekte Antwort muss die Einteilung des Zahlenstrahls also gedanklich verfeinert werden. Das textuelle Feedback beschreibt einen Lösungsweg, indem es zunächst die beiden Brüche auf dem Zahlenstrahl angibt, die das entsprechende Segment begrenzen. Der gesuchte Bruch ist genau in der Mitte zwischen diesen beiden verortet. Daher werden sie mit zwei erweitert angegeben, so dass sich der gesuchte Bruch leicht bestimmen lässt (vgl. Abbildung 6.31).

Der Button „Wo liegt mein Bruch?“ gibt im Falle einer falschen Antwort zusätzlich die Möglichkeit, sich den eingegebenen Bruch auf dem Zahlenstrahl anzeigen zu lassen. Der Bruch wird mit einem roten Dreieck auf dem Zahlenstrahl markiert und in roter Schriftfarbe beschriftet. Liegt der Bruch auf dem Zahlenstrahl außerhalb des dargestellten Ausschnittes, so wird der Ausschnitt vergrößert bis die nächstgrößere ganze Zahl – und damit der Bruch selbst – dargestellt werden kann (vgl. Abbildung 6.31).

**Prozessdaten** Bei Korrekturanforderung wird gespeichert, ob der Bruch korrekt abgelesen wurde. Außerdem loggen die Widgets den auf dem Zahlenstrahl markierten Bruch und den eingegebenen Bruch (jeweils als Zähler-Nenner-Paar).

### 6.4.5.2 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Das Kapitel gliedert sich in mehrere Teile, welche das Subkonzept *Brüche als lineare Koordinate auf dem Zahlenstrahl* (vgl. Abschnitt 1.3.2.1) in unterschiedlichen Fällen betrachten und jeweils ein entsprechendes Angebot an Übungsaufgaben beinhalten. Die Widgets im abschließenden Übungsteil behandeln die Thematik nochmals übergreifend.

#### Echte Brüche auf dem Zahlenstrahl

Am Beginn des Kapitels stehen zwei interaktive Diagramme, welche durch Animationen verbildlichen, wie echte Brüche von einer Darstellung am Kreis- (W54) bzw. Rechteckdiagramm (W55) auf eine Darstellung am Zahlenstrahl von 0 bis 1 übertragen werden kann (s. Abschnitt 6.4.5.1). Ein Merksatz fasst diesen intermodalen Repräsentationswechsel zusammen, bevor zwei interaktive Aufgaben zur Verfügung stehen, die das Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl (W56, s. Abschnitt 6.4.5.1) bzw. das Ablesen von einem Zahlenstrahl (W57, s. Abschnitt 6.4.5.1) mit echten Brüchen trainieren. Die Unterteilung des Zahlenstrahls entspricht in beiden Widgets immer dem Nenner des einzutragenden bzw. abzulesenden Bruchs.

### Unechte Brüche auf dem Zahlenstrahl

Die folgenden drei Widgets erweitern die Darstellung am Zahlenstrahl auf unechte Brüche. Zur Einführung dient eine Animation (W55, s. Abschnitt 6.4.5.1) mit mehreren Rechtecken, die einen unechten Bruch darstellen. Für diesen wird ein zufälliger, echter Bruch mit dem eingestellten Nenner generiert, zu dem anschließend ein oder zwei Ganze addiert werden (stets ein Ganzes, falls Nenner 10 gewählt ist, um die Darstellung lesbar zu halten).

Nach einem Merksatz zu unechten Brüchen folgen zwei Widgets, mit denen geübt werden kann, einen unechten Bruch auf einem Zahlenstrahl einzutragen (W59) bzw. von einem Zahlenstrahl abzulesen (W60). Die Unterteilung des Zahlenstrahls entspricht in beiden Widgets immer dem Nenner des einzutragenden bzw. abzulesenden Bruchs.

### Allgemeiner Zahlenstrahl

Im Anschluss werden Brüche auf einem Zahlenstrahl thematisiert, dessen Einteilungsstruktur nicht dem jeweiligen Nenner entspricht. Zur Einführung zeigt ein interaktives Diagramm (W61, s. Abschnitt 6.4.5.1), wie sich die Rechteckdarstellung eines Bruches in einen bereits gegebenen Zahlenstrahl transformiert. Der Zahlenstrahl ist – im Gegensatz zu den vorherigen Variationen des interaktiven Diagramms – bereits vor der Animation sichtbar und weist eine gröbere Einteilung auf als die Rechteckdarstellung des Bruches.

Ein Merksatz fasst die Gesetzmäßigkeiten zusammen, die für das Verfeinern einer Zahlenstrahleinteilung gelten. Darauf folgt im iBook erneut ein Widgetpaar zum Eintragen und Ablesen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl (Eintragen: W62, Ablesen: W63), das die Aspekte des Merksatzes aufnimmt. Als einzutragender bzw. abzulesender Bruch wird ein zufälliger, echter Bruch mit Nenner  $2n$  und ungeradem Zähler erzeugt. Durch Segmentierung des Zahlenstrahl in  $n$ -tel liegt der so generierte Bruch stets in der Mitte zwischen zwei Segmentierungen auf dem Zahlenstrahl. In Widget W62 (Eintragen auf einem Zahlenstrahl) wechselt dieser Aufgabentyp mit Aufgaben ab, die einen Zahlenstrahl mit feinerer Einteilung vorgeben (vgl. Abbildung 6.32). Für diesen zweiten Aufgabentyp wird ein zufälliger, echter Bruch mit Nenner  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  generiert und der Zahlenstrahl in  $2n$  gleich große Stücke unterteilt.

### Wertgleiche Brüche auf dem Zahlenstrahl

Im letzten Einführungsteil des Kapitels werden wertgleiche Brüche auf dem Zahlenstrahl thematisiert. Zu diesem Zweck kommt ein Widget zum Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl zum Einsatz, das sich von den anderen Widgets dieser Art leicht unterscheidet. Widget W64 vermittelt, dass wertgleiche Brüche denselben Platz auf dem Zahlenstrahl einnehmen. Daher sind im Widget – im Unterschied zu den anderen interaktiven Aufgaben des Kapitels – mehrere Brüche ( $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{10}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{5}{3}$  und  $\frac{10}{3}$ ) auf demselben Zahlenstrahl einzutragen.

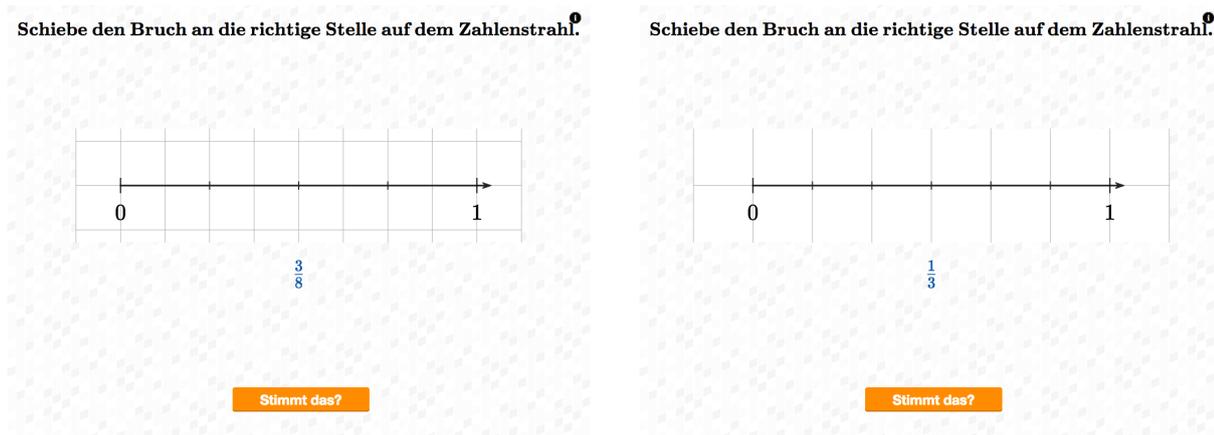


Abbildung 6.32. Widget W62: Eintragen eines Bruches auf einem Zahlenstrahl, dessen Unterteilung gröber (links) bzw. feiner (rechts) als der Nenner des einzutragenden Bruches ist.

## Übungsteil

Den Abschluss des Kapitels bilden Widgets W65 und W66, deren Anforderungsniveaus hier dargelegt werden:

In Widget W65 ist ein Bruch auf einem Zahlenstrahl einzutragen (s. Abschnitt 6.4.5.1). Die vier Anforderungsniveaus orientieren sich an den vorherigen Widgets dieser Art: Ein Set des ersten Niveaus besteht aus sechs zufälligen, echten Brüchen mit Nenner  $\leq 12$ , wobei der erste Bruch stets Nenner 10 aufweist. Der Zahlenstrahl, auf dem die Brüche platziert werden sollen, reicht von 0 bis 1 und ist entsprechend dem jeweiligen Nenner vorunterteilt. Auf Stufe 2 werden pro Set vier zufällige, echte Brüche generiert. Die Hälfte davon wird mit einem Nenner  $\in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  und ungeradem Zähler erzeugt; auf dem Zahlenstrahl ist eine Einheit der Unterteilung als die Hälfte des Nenners definiert. Für die andere Hälfte des Sets werden echte Brüche mit Nenner  $\leq 6$  zufällig generiert und als Unterteilung das Zwei- oder Dreifache des Nenners gewählt. Die Generierung von Aufgaben des dritten Levels entspricht der des zweiten, allerdings wird hier stets zum erzeugten Bruch die natürliche Zahl 1 addiert, so dass unechte Brüche entstehen. Sets der abschließenden vierten Stufe bestehen aus je zwei Aufgaben der drei vorherigen Stufen.

Widget W66 ist das Gegenstück zu W65: Hier sollen Brüche von einem Zahlenstrahl abgelesen werden (s. Abschnitt 6.4.5.1). Die Aufgabengenerierung folgt derselben Stufung wie Widget W65. Allerdings entfällt auf dem zweiten Niveau die Variante, in der der Zahlenstrahl feiner unterteilt ist als der Nenner des erzeugten Bruchs, da sich diese Variante beim Ablesen nicht von den Aufgaben der ersten Stufe unterscheidet.

## 6.4.6 Kapitel 6: „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche

Das sechste Kapitel des iBooks dient der Einführung von gemischten Zahlen. Die Einführung erfolgt auf ikonischer Ebene; der symbolische Algorithmus zur Umwandlung wird ebenso aus diesem Repräsentationsmodus hergeleitet.

### 6.4.6.1 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Das Kapitel beginnt mit einem interaktiven Diagramm, welches an das vorherige Kapitel anschließt: Die Brüche  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{11}{3}$  sollen auf einem Zahlenstrahl platziert werden. Der Zahlenstrahl zeigt das Intervall  $[0; 4]$  und ist mit einem Gitter hinterlegt, das ein Ganzes drittelt. In einem Texteingabewidget (W68, vgl. Abschnitt B.1.1.2) sollen die oben genannten Brüche zusätzlich in die Gruppen „Mehr als ein Ganzes“ und „Weniger als ein Ganzes“ eingeordnet werden. Darauf aufbauend wird die Terminologie *unechte Brüche* und *gemischte Zahlen* im iBook-Text eingeführt und an einem Zahlenstrahl visualisiert.

Über eine Darstellung des unechten Bruches  $\frac{11}{3}$  an Kreisdiagrammen erfolgt die Übertragung auf den symbolischen Algorithmus zur Umrechnung von unechten Brüchen in gemischte Zahlen. Dieser kann in Widget W69 ausgeführt werden. Dasselbe Vorgehen wird genutzt, um den Rechenweg von einer gemischten Zahl zu einem unechten Bruch am Beispiel  $2\frac{3}{7}$  aufzuzeigen. Widget W70 dient der Anwendung dieser Rechnung.

Den Abschluss des Kapitels bilden drei interaktive Aufgaben: In Widget W71 sind aus einer Anzahl an unechten Brüchen und gemischten Zahlen die jeweils wertgleichen zu finden. Widget W72 bündelt die Aufgabenstellungen aus W69 und W70 (s. Abschnitt 6.4.6.2) in einem Widget. In Widget W73, einer Erweiterung von W9 (s. Abschnitt 6.4.1.2) ist es abschließend Aufgabe, unechte Brüche im Kreisdiagramm zu visualisieren.

### 6.4.6.2 Detaillierte Beschreibung ausgewählter Widgets

Drei miteinander verwandte interaktive Aufgaben des Kapitels werden im Folgenden näher erläutert. Im Anhang (Abschnitt B.6) finden sich entsprechende Ausführungen zu den anderen vier Widgets.

#### Widgets W69, W70 & W72: Gemischte Zahlen und unechte Brüche

Obwohl sich die beiden Widgets W69 und W70 im Einführungsteil des Kapitels befinden, sind sie als vollständige Übungsaufgaben ausgearbeitet. Jedes der beiden Widgets kann als Umkehrung des jeweils anderen verstanden werden: Während es in Widget W69 Aufgabe ist, einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umzuwandeln, so ist in W70 eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch umzuwandeln. In Widget W72 sind die Aufgabenstellungen aus W69 und W70 (s. Abschnitt 6.4.6.2) in einem Widget gebündelt: Per Zufall wird bei der Setgenerierung für jeden Bruch entschieden, ob ein unechter Bruch in eine gemischte Zahl umgewandelt werden soll oder umgekehrt.

In allen Widgets kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz; im Fall von W69 zum ersten Mal für gemischte Zahlen mit drei Feldern (s. Abbildung 6.33).

**Feedback** Das Feedback meldet textuell zurück, ob die eingegebene Lösung korrekt war oder nicht. Die Eingabe wird außerdem entweder insgesamt mit einem großen Haken abgehakt oder jede einzelne Komponenten der Eingabe mit einem kleinen Haken bzw. Kreuz als richtig bzw. falsch gekennzeichnet (vgl. Abbildung 6.33). Für ein detaillierteres Feedback kann man sich in beiden Widgets über den von unten einfahrenden „Erklär’s

mir!“-Button den Rechenweg einblenden lassen. Die Farben, die dabei für die jeweiligen Zwischenschritte genutzt werden, entsprechen denen des Merksatzes im iBooktext.

Wandle den unechten Bruch in eine gemischte Zahl um!

Wandle die gemischte Zahl in einen unechten Bruch um!

Stimmt das?

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig.

Erklär's mir!

$$1 \frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Abbildung 6.33. Widgets W69 (links) & W70 (mit Feedback, rechts): Umwandeln zwischen unechten Brüchen und gemischten Zahlen.

**Anforderungsniveaus** Die drei Widgets greifen zur Aufgabengenerierung auf dieselbe Definition von Stufen zurück. Die generierten Zahlen haben stets einen zufälligen Nenner  $\leq 20$ . Dabei werden zunächst echte Brüche generiert und anschließend mit einer natürlichen Zahl summiert, um einen unechten Bruch zu erhalten. Die Darstellung und interne Repräsentation erfolgt je nach Rechenrichtung als gemischte Zahl oder als unechter Bruch. Es werden drei Stufen durchlaufen: In den ersten beiden Stufen sind je Sets der Größe 3 zu bearbeiten. In Stufe 1 liegt die umzurechnende Zahl zwischen 1 und 2, in Stufe 2 zwischen 2 und 3 oder 3 und 4 (per Zufall gewählt). In der letzten Stufe bestehen die Sets aus fünf umzurechnenden Zahlen; zu dem generierten echten Bruch wird eine zufällige natürliche Zahl  $\leq 5$  addiert.

**Prozessdaten** Die Widgets erfassen in den Logdaten über einen Wahrheitswert die Information, ob die Aufgabe korrekt gelöst wurde. Darüber hinaus werden die gegebene gemischte Zahl bzw. der gegebene unechte Bruch und der eingegebene Bruch bzw. die eingegebene gemischte Zahl geloggt.

## 6.4.7 Kapitel 7: „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen

Das siebte und letzte Kapitel des iBooks widmet sich dem Größenvergleich zweier Bruchzahlen. Dabei konzentrieren sich Einführung und Widgets auf die Bestimmung des *größeren* Bruchs. Insbesondere werden nur wertungleiche Brüche betrachtet.

In den Widgets des Kapitels wird für Feedback oft auf den automatischen Größenvergleichserklärer zurückgegriffen (s. Abschnitt 6.2.2.1).

### 6.4.7.1 Detaillierte Beschreibung häufiger Widgettypen

Da sich im Kapitel dieselben Aufgabentypen mit unterschiedlichen Parametern wiederholen, werden die entsprechenden Widgets im Folgenden zunächst erläutert.

#### Den größeren Bruch auswählen

Ein Single-Choice-Widget, in dem aus zwei gegebenen Brüchen der größere gewählt werden soll, ist das Kernwidget dieses Kapitels. Das Widget präsentiert zwei Brüche auf zwei karierten Karten nebeneinander. Durch Antippen einer Karte wird diese ausgewählt. Dies zeigt sich durch einen blauen Rand und Hintergrund (vgl. Abbildung 6.34). Die Auswahl kann solange geändert werden, bis ein ausgewählter Bruch über Drücken des Buttons „Stimmt das?“ als Antwort eingeloggt wird.

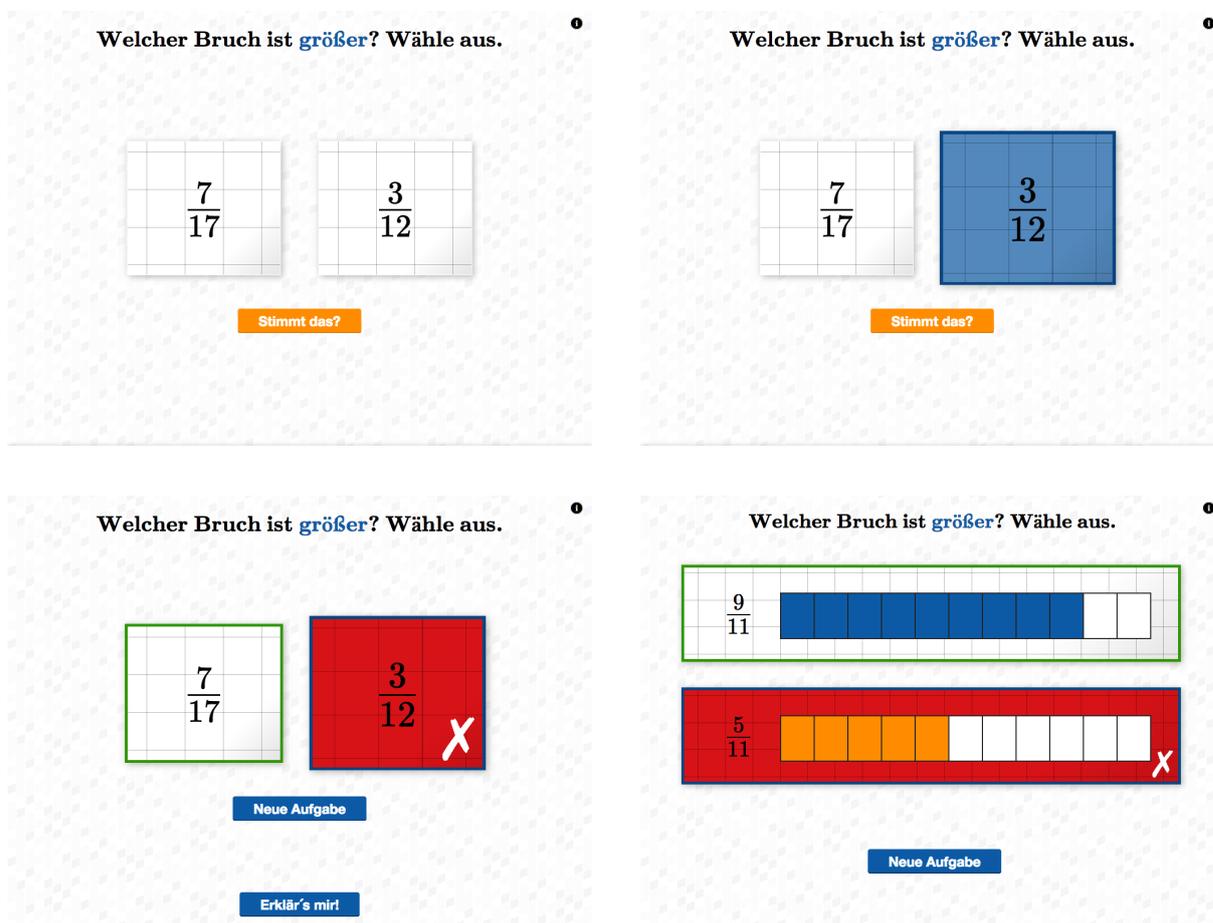


Abbildung 6.34. Widgettyp *Welcher Bruch ist größer? Wähle aus.* Grundstellung der Aufgabe (oben links), Darstellung eines ausgewählten Bruchs (oben rechts), Korrektur einer falschen Antwort mit Einbezug des Vergleichserklärers (unten links) und unter Zuhilfenahme von Visualisierungen (unten rechts).

**Feedback** Wurde die Aufgabe korrekt gelöst, so färbt sich die ausgewählte Karte grün und ein weißer Haken signalisiert, dass der gewählte Bruch der größere ist. Bei einer falschen Antwort wird diese mit einem roten Hintergrund und einem weißen Kreuz als solche gekennzeichnet (vgl. Abbildung 6.34). Die richtige Antwort wird grün umrandet.

Das Widget kann das Feedback auf zwei Weisen unterstützen: Einerseits ist es möglich, den Vergleichserklärer (s. Abschnitt 6.2.2.1) einzubeziehen. Dazu bewegt sich ein blauer Knopf („Erklär’s mir!“) von unten in den Bildschirm hinein. Durch Drücken überlagert dann eine Karte die Aufgabe, auf welcher der vom Vergleichserklärer erzeugte Text angezeigt wird. Andererseits kann die Anzeige um ikonische Darstellungen der beiden Brüche ergänzt werden (vgl. Abbildung 6.34): Dazu bewegen sich die Karten untereinander, während die Brüche in einem Balkendiagramm rechts von der Bruchzahl dargestellt werden.

**Prozessdaten** Beim Einloggen einer Antwort speichert das Widget die angezeigten Brüche und die Korrektheit der Auswahl – und damit den gewählten Bruch. Zusätzlich wird erfasst, wann der Vergleichserklärer eingeblendet wird.

**Implementationsdetails** Die Reihenfolge der Darstellung der beiden Karten entspricht der Reihung der Brüche im Kartenobjekt des Karteikastens. Allerdings werden die Brüche bei jeder wiederholten Bearbeitung vertauscht. Dieses Vorgehen soll die Strategie unterbinden, sich beim Feedback die Position des größeren Bruchs auf dem Bildschirm zu merken und die Aufgabe nicht inhaltlich zu bearbeiten.

### Positionierung von Brüchen in graphischen Darstellungen

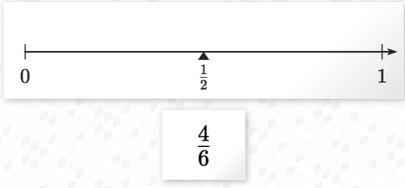
Zwei Widgettypen beschäftigen sich mit der Positionierung von Brüchen in graphischen Darstellungen. Dabei behandeln zwei Widgets die Position eines Bruches auf dem Zahlenstrahl relativ zu einem Benchmark (1 oder  $\frac{1}{2}$ ). Ein weiteres Widget thematisiert die Platzierung im richtigen Segment eines Kreises, der gröber unterteilt ist, als es dem Nenner entspräche (vgl. Abbildung 6.35).

In beiden Typen wird zu dem gefragten Bruch eine unterteilte Darstellung präsentiert (Zahlenstrahl von 0 bis 2, unterteilt an den natürlichen Zahlen; Zahlenstrahl von 0 bis 1, unterteilt an Vielfachen von  $\frac{1}{2}$ ; Kreisdiagramm mit gröberer Unterteilung). Mit dem Finger ist der Bereich anzutippen, in dem der Bruch liegt. Im Fall der Zahlenstrahl-Widgets werden die Bereiche zusätzlich durch Text angegeben (z. B. „Links von der 1“, vgl. Abbildung 6.35).

**Feedback** Feedback erfolgt in den Widgets textuell und durch Eintragen des Bruches in die jeweilige Visualisierung. Dazu wird der angezeigte Zahlenstrahl bzw. der Kreis auch dem Nenner des jeweiligen Bruchs entsprechend eingeteilt. Eine Färbung des Hintergrunds der gewählten Option unterstützt das Feedback. In den Zahlenstrahl-Widgets wird die Auswahl außerdem abgehakt oder durch ein Kreuz als falsch gekennzeichnet. Im Falle eines Benchmarks 1 wird ein Lösungsweg angegeben (bspw. „Bei  $\frac{1}{5}$  ist der Zähler kleiner als der Nenner, d. h.  $\frac{1}{5}$  ist kleiner als 1“).

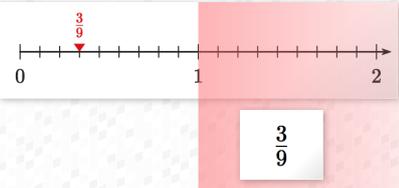
**Prozessdaten** In allen Widgettypen werden der gefragte Bruch und die Korrektheit der Auswahl geloggt. Das Kreisdiagramm-Widget speichert zusätzlich die Unterteilung des Kreises und den gewählten Sektor.

Liegt der Bruch auf dem Zahlenstrahl links oder rechts von  $\frac{1}{2}$ ?



Links von  $\frac{1}{2}$ .      Rechts von  $\frac{1}{2}$ .

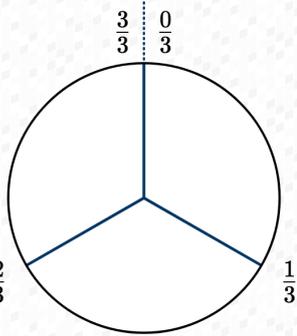
Liegt der Bruch auf dem Zahlenstrahl links oder rechts von der 1?



Links von der 1.      Rechts von der 1.

Das war nicht richtig.  
Bei  $\frac{3}{9}$  ist der Zähler kleiner als der Nenner, d. h.  $\frac{3}{9}$  ist kleiner als 1.

Wo liegt  $\frac{16}{30}$ ?



Das war nicht richtig.

$\frac{1}{3} < \frac{16}{30}$

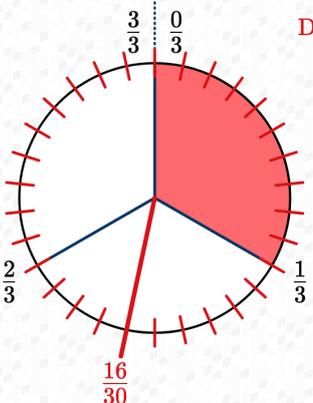


Abbildung 6.35. Widgettypen zum Positionieren von Brüchen in ikonischen Darstellungen. Zahlenstrahl anhand von Benchmarks (oben;  $\frac{1}{2}$  links und 1 rechts) und Kreis (unten). Aufgabenstellungen (links) und Anzeige mit Feedback (rechts).

### 6.4.7.2 Inhalt und Aufbau des Kapitels

Der Einführungsteil des Kapitels behandelt den Größenvergleich schrittweise. Zunächst werden Sonderfälle in unterschiedlichen Widgets erarbeitet und in Merksätzen gesichert. Dazu kommen auch Aufgabenwidgets zum Einsatz, die explizit festgelegte Einzelaufgaben zeigen und nach deren Lösung als vollständig gelöst gelten. Im Anschluss an die erfolgreiche Bearbeitung aller hinterlegten Aufgaben fordern diese Widgets dazu auf, das Widget wieder zu schließen.

Zunächst wird ein Größenvergleich über sog. Benchmarking-Strategien eingeführt: Zwei Brüche können miteinander verglichen werden, indem man beide in Beziehung zu einem Benchmark setzt und anschließend über die Transitivität der Größer-Relation den größeren Bruch bestimmt (vgl. Abschnitt 1.3.2.1). Im iBook wird zuerst das Benchmark 1 behandelt. Das implizite Lernziel ist es also zu erkennen, dass unechte Brüche stets größer als echte Brüche sind. Im Anschluss wird der Größenvergleich mithilfe des Benchmarks  $\frac{1}{2}$  thematisiert. Für beide Bezugsgrößen dient je ein Positionierungswidget am Zahlenstrahl (s. Abschnitt 6.4.7.1) der Förderung des Größenvergleichs von Brüchen mit dem Benchmark und je ein Single-Choice-Widget (s. Abschnitt 6.4.7.1) mit fest vorgegebenen Aufgaben zur Anwendung der Strategie. Wie das Wissen um die Relation eines Bruchs zu 1 bzw.  $\frac{1}{2}$  für

den Größenvergleich zweier Brüche genutzt werden kann, wird im iBooktext zudem in jeweils einem Merksatz festgehalten.

Das iBook wendet sich im Folgenden dem Größenvergleich zweier Brüche zu, die eine gemeinsame Komponente aufweisen. Zunächst wird der Fall behandelt, dass die zu vergleichenden Brüche denselben Zähler besitzen. Um derartige Aufgaben zu bearbeiten, wird im iBooktext Hilfestellung durch den Hinweis „Je kleiner der Nenner, desto größer die Stücke“ gegeben. Diese Strategie kann in zwei interaktiven Aufgaben (s. Abschnitt 6.4.7.1) auf Stammbrüche (W78) und auf allgemeine echte Brüche, die gleichen Zähler aufweisen (W79), angewandt werden. Ein Merksatz fasst das Vorgehen zusammen: „Bei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat“. Auf ähnliche Weise wird der Vergleich von Brüchen, die einen gemeinsamen Nenner besitzen, eingeführt. Für diese Situation gibt das iBook die Hilfe „Je kleiner der Zähler, desto weniger Stücke!“. In der interaktiven Aufgabe W80 kann die Strategie angewandt werden: Das Single-Choice-Widget (s. Abschnitt 6.4.7.1) präsentiert stets zwei Brüche mit gleichem Nenner. Im Anschluss an das Widget fasst ein Merksatz die Regel abschließend zusammen.

Der Größenvergleich von Brüchen, die weder gleichen Zähler oder Nenner aufweisen noch über ein Benchmark durchführbar ist, wird über das interaktive Diagramm W82 eingeführt. Darin stehen zwei in Zweiunddreißigstel unterteilte Rechtecke zur Verfügung, um das folgende Szenario nachzustellen: „Steffen und Franziska kaufen sich in der Mittagspause jeder eine Tafel Schokolade. Steffen hat  $\frac{1}{4}$  und Franziska  $\frac{2}{32}$  der Tafel übrig“. Das Widget zielt also auf die Erweiterung  $\frac{1}{4} = \frac{8}{32}$  ab, um diesen Größenvergleich auf den bereits behandelten Fall von zwei Brüchen mit gleichem Nenner zurückzuführen. Nach dem Widget wird der Größenvergleich über das Angleichen von Zähler bzw. Nenner im iBook erläutert und kann in einer interaktiven Aufgabe adaptiv angewandt werden: Im Single-Choice-Widget W83 (s. Abschnitt B.7.1.1) sind die zu vergleichenden Brüche so gewählt, dass meist eine der beiden Strategien mit deutlich kleineren Zahlen auskommt als die andere.

Im Übungsteil des Kapitels befinden sich u. a. das Single-Choice-Widget mit zufälliger Aufgabengenerierung (W84) sowie ein Widgets zum Ordnen mehrerer Brüche der Größe nach (W85). Sie sind mit den anderen Widgets im Anhang, Abschnitt B.7, detailliert.

### Zusammenfassung

Das im Projekt ALICE:Bruchrechnen erarbeitete iBook zur Einführung von Bruchzahlkonzepten greift die Vorteile interaktiver Mathematikschulbücher auf. Insbesondere werden mannigfaltige interaktive Diagramme und Aufgaben eingesetzt, die auf eine gemeinsame Basis an Gestaltungskomponenten und Funktionalitäten zurückgreifen, so dass den Lernenden ein einheitliches Nutzungserlebnis geboten wird. Die interaktiven Aufgaben verwenden häufig Repräsentationswechsel, passen sich adaptiv in ihrem Schwierigkeitsgrad an die Nutzerinnen und Nutzer an, geben automatisches Feedback und bieten teilweise gestufte Lösungshilfen. Für Forschungszwecke ist eine Prozessdatenerfassung implementiert, die unauffällig im Hintergrund arbeitet und widgetspezifische Daten während der Arbeit mit den Widgets aufzeichnet.

**Teil III**

**Empirischer Teil**



# 7 Methode der Studie

## Überblick

Dieses Kapitel erläutert die Studie im Detail. Zunächst wird in Abschnitt 7.1 eine Übersicht gegeben. Anschließend folgt eine kurze Beschreibung des interaktiven Schulbuchs (Abschnitt 7.2), welche die wesentlichen Punkte aus Kapitel 6 zusammenfasst. Abschnitt 7.3 legt die neben dem iBook verwendeten Erhebungsinstrumente dar. Daraufhin wird die Durchführung der Studie (Abschnitt 7.4) und die Codierung (Abschnitt 7.5) geschildert. Schließlich werden die beiden Stichproben (Abschnitt 7.6) und die verwendeten Geräte vorgestellt (Abschnitt 7.7). Das Kapitel schließt mit der Darstellung der Methoden, die in der statistischen Auswertung verwendet wurden (Abschnitt 7.8).

## 7.1 Übersicht über die Studie

Im Zuge des Projekts ALICE:Bruchrechnen<sup>1</sup>, in das diese Dissertation eingegliedert ist, wurden zwei Interventionen in der sechsten Jahrgangsstufe zur Entwicklung des Bruchzahlkonzepts durchgeführt. Nach der Entwicklung und Programmierung des interaktiven Schulbuchs zur Einführung des Bruchzahlkonzepts (s. Kapitel 6) fand im Herbst 2016 die erste Teilstudie statt. Teilnehmende Schulen waren Gymnasien aus dem Großraum München. Ein Schuljahr später erfolgte als zweite Teilstudie eine Erhebung an Mittelschulen.<sup>2</sup>

Im Hinblick auf die unterschiedlichen Bildungsziele der beiden Schularten (BayEUG, 2000) sowie den wiederholt verifizierten Leistungsunterschieden zwischen ihnen (z. B. Götz et al., 2013; Reiss et al., 2019), wird im Projekt ALICE:Bruchrechnen das Leistungsniveau der Lernenden über die Zugehörigkeit zu den Schulen operationalisiert: Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums werden als tendenziell leistungsstärker angenommen, Schülerinnen und Schüler der Mittelschule als tendenziell leistungsschwächer (vgl. Reinhold, 2019). Dementsprechend werden die Analysen für beide Teilstichproben in dieser Arbeit zumeist getrennt nach Schulart durchgeführt und im Anschluss vergleichend gegenübergestellt.

Für den Zeitraum der Interventionen wurden die teilnehmenden Klassen in drei Gruppen aufgeteilt: Die *iPad-Gruppe* arbeitete mit dem interaktiven Schulbuch, während die *Arbeitsbuchgruppe* mit einer gedruckten Variante des interaktiven Schulbuchs unterrichtet wurde.

<sup>1</sup>Das Forschungsprojekt wurde unter dem Namen „Lernen mit dem Tablet-PC: eine Einführung in das Bruchrechnen für Klasse 6“ von der Heinz Nixdorf Stiftung finanziell gefördert.

<sup>2</sup>Das bayerische Schulsystem gliedert sich nach der Grundschule in *Mittelschulen* (früher *Hauptschulen*), *Realschulen* und *Gymnasien* (BayEUG, 2000). „Die Mittelschule vermittelt eine grundlegende Allgemeinbildung [...] und schafft Voraussetzungen für eine qualifizierte berufliche Bildung“ (BayEUG, 2000, Art. 7a, 1). Das Gymnasium hingegen arbeitet auf die allgemeine Hochschulreife hin.

Zusätzlich arbeitete eine Kontrollgruppe mit regulären Unterrichtswerken. Die iPad-Gruppe, die aus  $N = 256$  Schülerinnen und Schülern bestand, ist Fokus dieser Arbeit.<sup>3</sup>

Ein Vortest (s. Abschnitt 7.3) zu Beginn des Schuljahrs diente der Erhebung von Vorkenntnissen zu Brüchen. Während der Intervention erfolgte Regelunterricht unter Verwendung des entwickelten iBooks (s. Kapitel 6). Die Lehrkräfte waren dabei angehalten, in ihrem Unterricht hauptsächlich das digitale Unterrichtswerk einzusetzen. Hierfür wurden die Klassen der iPad-Gruppe vom Projekt mit iPads ausgestattet. Während der Arbeit mit den interaktiven Aufgaben wurden Prozessdaten erfasst, welche die Grundlage für die Analysen in dieser Arbeit sind. Im Anschluss an die Intervention überprüfte ein Nachtest (s. Abschnitt 7.3) den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler.

Die Erhebungen an den beiden Schularten fanden unter den gleichen Bedingungen statt; insbesondere wurden jeweils dieselben Vor- und Nachtests verwendet. Auch das interaktive Schulbuch war – bis auf die Behebung weniger Fehler – identisch. Unterschiede ergaben sich nur durch die Erweiterung der Prozessdatenerhebung (vgl. Abschnitt 7.2.1), welche die Nutzung des iBooks nicht beeinflusste.

## 7.2 Prozessdaten und -maße

Das iBook diente sowohl als Unterrichtsmaterial als auch als Messinstrument: In den interaktiven Komponenten wurden Daten während der Benutzung gesammelt – sog. Prozessdaten (vgl. Kapitel 3). Die technische Realisierung ist unter Abschnitt 6.3 beschrieben. Im Folgenden wird ausgeführt, welche Prozessdaten erfasst wurden (Abschnitt 7.2.1), wie diese für die Analysen aufbereitet wurden (Abschnitt 7.2.2) und welche Prozessmaße aus ihnen berechnet wurden (Abschnitt 7.2.3).

### 7.2.1 Erfasste Prozessdaten

Zu jedem Datenpunkt liegen Start- und Endzeit vor, bei geloggten Aufgabenbearbeitungen in der Regel zusätzlich, ob die Antwort der Schülerin oder des Schülers korrekt war, die Antwort selbst und alle Aufgabencharakteristika, um die Aufgabenstellung rekonstruieren zu können. In Aufgaben mit abgestuften Lösungshilfen wurde außerdem das Aufrufen der Hinweise protokolliert. In drei Widgets (W10, W11 & W12) wurde der gesamte Lösungsprozess – entweder über die Fingerbewegungen auf dem Touchscreen oder über die einzelnen Interaktionsschritte codifiziert als Zeichenkette – aufgenommen. Abschnitt 6.2 bietet eine genaue Beschreibung der erfassten Daten für ausgewählte Widgets; entsprechende Ausführungen für sämtliche Widgets sind in Anhang B zu finden.

Da zwischen den Erhebungen an den beiden Schularten die Prozessdatenerhebung erweitert und wenige Fehler behoben wurden, ergeben sich einige Unterschiede in den vorliegenden Daten der beiden Schularten:

---

<sup>3</sup>Für Forschung zu den anderen Gruppen siehe bspw. Reinhold (2019) und Reinhold, Hoch, Werner, Richter-Gebert und Reiss (2020).

Im Vergleich zum Gymnasium wurden an der Mittelschule aus einer größeren Anzahl an Widgets Rohdaten erhoben – insbesondere aus den interaktiven Diagrammen. Dabei wurden alle Datenquellen, die am Gymnasium verwendet wurden, auch an der Mittelschule genutzt. Die einzige Ausnahme hiervon sind die Daten aus Widget W51a („Dieser Bruch ist durch Erweitern entstanden. Aus welchem Bruch könnte er entstanden sein?“), das an der Mittelschule durch W51b („Kürze soweit wie möglich“) ersetzt wurde.

Zur Vereinfachung des *Preprocessings* wurde an der Mittelschule zu jeder Aufgabe auch die Schwierigkeitsstufe gespeichert. Für die Gymnasialstichprobe wurden die Anforderungsniveaus aus den gespeicherten Aufgabencharakteristika, der Anzahl der Bearbeitungen und der Korrektheit der Antworten rekonstruiert.

Für die Mittelschulstichprobe wurden innerhalb der Feedbackphasen Logeinträge zum Aufruf und Schließen des Größenvergleicherklärsers (s. Abschnitt 6.2.2.1) gespeichert. Außerdem wurden die interaktiven Diagramme W3, W15, W24, W54, W55, W58 und W61 mit DataManagern ausgestattet, so dass hier Daten vorliegen. Schließlich wurde die Aufzeichnung der Fingerbewegungen auf alle Aufgaben zum Eintragen auf einem Zahlenstrahl (W56, W59, W62, W64, W65 und W67, vgl. Abschnitt 6.4.5) erweitert.

Im Rahmen der Überarbeitung des iBooks wurden auch Fehler in der Datenaufzeichnung entfernt. So loggten Widgets W35 und W36 („Finde drei wertgleiche Brüche“) an der Mittelschule nicht mehr auf denselben Schlüssel, so dass zwischen den Logs der beiden Widgets unterschieden werden kann. Darüber hinaus existieren aus der Mittelschule Daten zu Widget W70 („Wandle die gemischte Zahl in einen unechten Bruch um“), das in der Gymnasialstichprobe wegen eines Softwareupdates nicht funktionstüchtig war. Außerdem liegen von den Mittelschülerinnen und Mittelschülern aus Widgets W74, W76 und W86 (vgl. Abschnitt 6.4.7) nicht nur Zeitdaten, sondern auch die Antworten vor.

Insgesamt wurden in beiden Stichproben 235 596 Logeinträge erfasst. Davon entfallen 114 489 auf die Gymnasialstichprobe und 121 107 auf die Mittelschulstichprobe. Im Durchschnitt existieren pro Schülerin oder Schüler am Gymnasium  $M = 690$  ( $SD = 259$ ), an der Mittelschule  $M = 977$  ( $SD = 551$ ) Datenpunkte. Der Unterschied in den Mittelwerten zwischen den Schularten ist dabei auch auf die Ausweitung der Datenerhebung zurückzuführen. Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde die Datenmenge auf die Daten aus denselben Quellen reduziert, so dass für die Analysen in dieser Arbeit die Prozessdaten aus 66 Widgets verwendet wurden. Eine Aufschlüsselung der Daten auf die einzelnen interaktiven Komponenten ist Tabelle 7.1 zu entnehmen.

## 7.2.2 Preprocessing der Prozessdaten

Da das *Preprocessing* der Prozessrohdaten eine wichtige Rolle in der Prozessdatenforschung spielt (s. Abschnitt 3.3.2.2), wird das Vorgehen in dieser Arbeit im Folgenden detailliert beschrieben; die entsprechende Umsetzung in R befindet sich in Anhang C.8.

Das in ALICE:Bruchrechnen umgesetzte Logverfahren (s. Abschnitt 6.2.2.4) sieht vor, dass Aktivitäten (wie die Bearbeitung von Aufgaben) an ihrem Ende geloggt werden. Dementsprechend wird der Logzeitpunkt als Endzeitpunkt der Aktivität erfasst. Weil die Lösungshilfen

Tabelle 7.1

*Anzahl der erfassten Logs pro Widget.*

Widget	Gymnasium		Mittelschule		Widget	Gymnasium		Mittelschule	
	$\Sigma$	$M$	$\Sigma$	$M$		$\Sigma$	$M$	$\Sigma$	$M$
W1 <sup>a</sup>	–	–	–	–	W45	801	5.30	303	2.89
W2	390	2.58	177	1.69	W46	916	6.07	642	6.11
W3	–	–	939	8.94	W47	1209	8.01	1035	9.86
W4 <sup>s</sup>	155	1	104	0.99	W48	349	2.31	1067	10.16
W5	1293	8.56	1451	13.82	W49	391	2.59	387	3.69
W6	621	4.11	791	7.53	W50	742	4.91	755	7.19
W7	1104	7.31	855	8.14	W51a/b	383	2.54	337	3.21
W8	2440	16.16	1960	18.67	W52	596	3.95	417	3.97
W9	3134	20.76	1960	18.67	W53	3080	20.40	1439	13.70
W10	2653	17.57	1391	13.25	W54	–	–	3179	30.28
W11	2019	13.37	1051	10.01	W55	–	–	–	–
W12	2175	14.40	1405	13.38	W56	2289	15.16	1807	17.21
W13	3425	22.68	2105	20.05	W57	1163	7.70	660	6.29
W14 <sup>0</sup>	–	–	–	–	W58 <sup>f</sup>	–	–	4572	43.54
W15	–	–	18980	180.76	W59	1450	9.60	1466	13.96
W16	–	–	3127	29.78	W60	747	4.95	351	3.34
W17	1943	12.87	2270	21.62	W61	–	–	1469	13.99
W18	1115	7.38	991	9.44	W62	1299	8.60	1225	11.67
W19	932	6.17	928	8.84	W63	655	4.34	378	3.60
W20	–	–	1687	16.07	W64	1059	7.01	335	3.19
W21	933	6.18	784	7.47	W65	1239	8.21	527	5.02
W22	430	2.85	214	2.04	W66	528	3.50	62	0.59
W23	369	2.44	208	1.98	W67	553	3.66	454	4.32
W24	–	–	1503	14.31	W68	305	2.02	183	1.74
W25 <sup>a</sup>	–	–	–	–	W69	963	6.38	1441	13.72
W26	–	–	1353	12.89	W70	439	2.91	1320	12.57
W27	2032	13.46	1860	17.71	W71	5389	35.69	3270	31.14
W28	919	6.09	775	7.38	W72	584	3.87	276	2.63
W29	319	2.11	214	2.04	W73	3643	24.13	1891	18.01
W30	1407	9.32	1107	10.54	W74	2479	16.42	2899	27.61
W31	198	1.31	56	0.53	W75	315	2.09	303	2.89
W32	396	2.62	275	2.62	W76	3894	25.79	2846	27.10
W33 <sup>a</sup>	–	–	–	–	W77	255	1.69	186	1.77
W34 <sup>s</sup>	147	0.95	60	0.57	W78	2562	16.97	1285	12.24
W35 <sup>f</sup>	9229	61.12	5894	56.13	W79	1284	8.50	767	7.30
W36	–	–	1854	17.66	W80	1739	11.52	950	9.05
W37	2677	17.73	2299	21.90	W81	247	1.64	149	1.42
W38	3399	22.51	3146	29.96	W82	851	5.64	647	6.16
W39	4523	29.95	3271	31.15	W83	683	4.52	354	3.37
W40	1080	7.15	743	7.08	W84	2394	15.85	1589	15.13
W41	938	6.21	1012	9.64	W85	2196	14.54	1505	14.33
W42	789	5.23	453	4.31	W86	1828	12.11	1684	16.04
W43	988	6.54	675	6.43	W87	2687	17.79	1306	12.44
W44	1014	6.72	1071	10.20	W88	3638	24.09	1404	13.37

*Anmerkung.* Ausgegraute Widgets wurden in dieser Arbeit aus den Analysen ausgeschlossen. <sup>a</sup> Autoplay-Widget, kein Auslesen der Daten möglich (Abschnitt 6.3.2). <sup>s</sup> Scribble-Widget, maximal ein Log pro Schülerin oder Schüler. <sup>0</sup> Keine Prozessdatenerfassung. <sup>f</sup> Aufgrund eines Fehlers in der Datenerfassung (teilweise) Logs eines anderen Widgets umfassend.

allerdings parallel zur Aufgabenbearbeitung angezeigt sowie genutzt werden und daher das Ende der Auseinandersetzung mit einer Lösungshilfe nicht klar identifiziert werden kann, wurde das Aufrufen einer Lösungshilfe direkt bei ihrer Anzeige geloggt. Daher entsprechen die *Endzeitpunkte* der Lösungshilfen-Logs den tatsächlichen *Anzeigezeitpunkten* der Lösungshilfen. Zur Vereinfachung der Interpretation wurden die Startzeitpunkte der Log-Einträge mithilfe des in Abschnitt C.10 abgedruckten PHP-Skripts durch die jeweiligen Endzeitpunkte ersetzt. Eine weitere Folge der eben beschriebenen Tatsache ist, dass die in den Rohdaten vermerkte Aufgabenbearbeitungszeit zu kurz ist, wenn sie durch Lösungshilfenaufrufe unterbrochen wurde: Die Logs verorten die Aufgabenbearbeitung in diesem Fall zeitlich zwischen Aufrufen der letzten Lösungshilfe und dem Einloggen des Lösungsvorschlags (vgl. Abbildung 7.1). Die betroffenen Bearbeitungszeiten wurden durch dasselbe PHP-Skript an die tatsächliche angepasst.

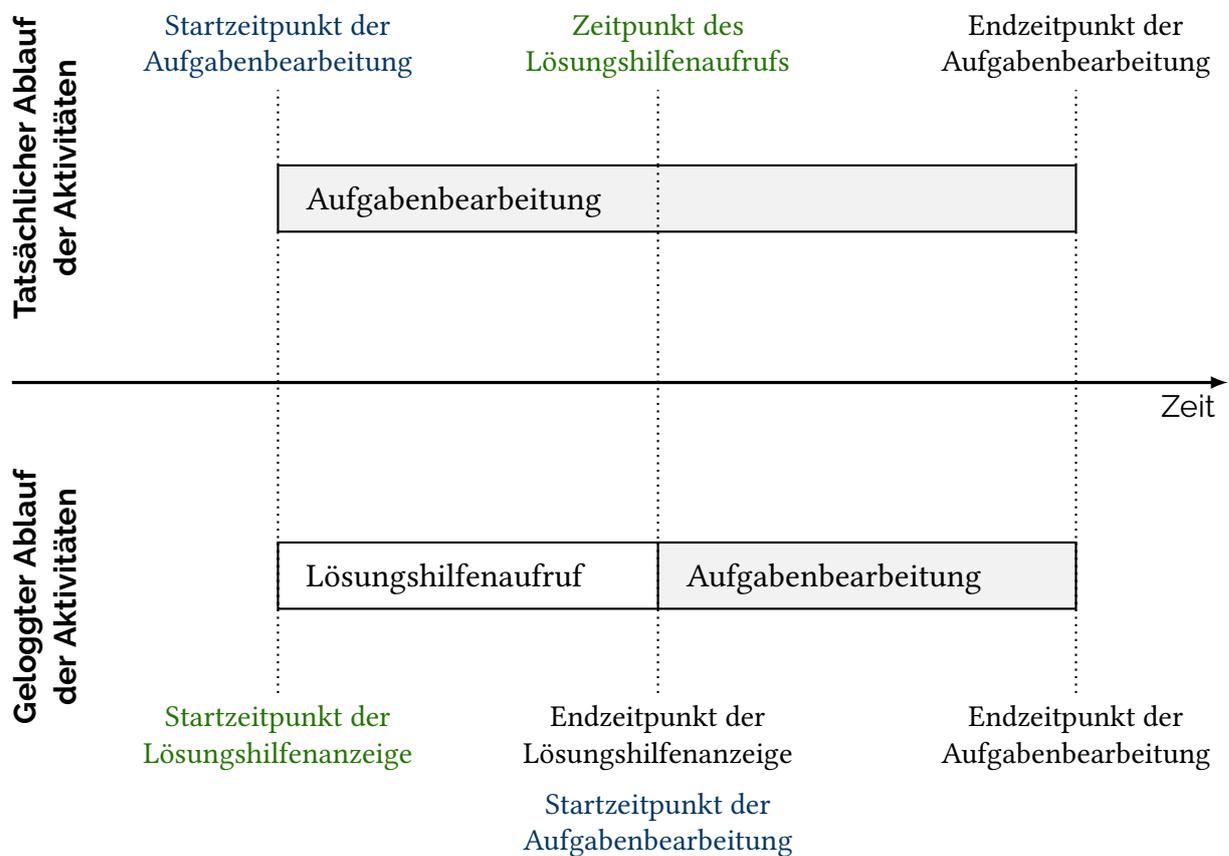


Abbildung 7.1. Unterschied zwischen tatsächlichem und geloggtm Aktivitätsablauf.

Nach diesen Vorarbeiten wurde die Dauer der jeweiligen aufgezeichneten Aktivität berechnet, indem die erfasste Anfangszeit von der geloggten Endzeit subtrahiert wurde. Alle Aktivitäten mit einer Dauer, die 0.5 s unterschreitet, wurden aus den weiteren Analysen ausgeschlossen. Insgesamt wurden so 4 323 Datenpunkte im *Preprocessing* entfernt (Gymnasium: 2783, Mittelschule: 1540), was einem Prozentsatz von 2.57 % entspricht (Gymnasium: 2.79 %, Mittelschule: 2.24 %). Von den verbleibenden Aktivitäten wurde die maximale Dauer auf 45 Minuten (eine Schulstunde) gesetzt und alle längeren Aktivitäten auf diesen Wert be-

grenzt. Anschließend wurde die Dauer logarithmiert, um Ausreißer näher an den Mittelwert zu ziehen (wie bspw. in Goldhammer et al., 2014). Für jedes Widget wurde daraufhin eine Cut-Off-Schranke festgelegt, die der Summe aus Mittelwert und drei Standardabweichungen entsprach. Die logarithmische Dauer von Aktivitäten, die über der Cut-Off-Schranke lag, wurde durch diesen Wert ersetzt. Die ersetzten Zeiten wurden abschließend wieder exponiert. Dies betraf im Ganzen 6 958 Aktivitäten (Gymnasium: 4 002, Mittelschule: 2 956) oder 4.06 % (Gymnasium: 4.03 %, Mittelschule: 4.16 %).

### 7.2.3 Berechnete Prozessmaße

Aus den Prozessdaten wurden für die Analysen in dieser Arbeit mehrere Prozessmaße berechnet: drei Zählmaße, zwei Zeitmaße und ein Leistungsmaß. Die Prozessmaße wurden dabei so in Anlehnung an die Literatur (u. a. Anozie & Junker, 2006; Feng et al., 2006; Fouh et al., 2014; Goldhammer et al., 2014; Tempelaar et al., 2014) gewählt, dass sie die Nutzung der unterschiedlichen Features des iBooks abdecken. Im Detail bilden die im Folgenden beschriebenen Maße die Verwendung der interaktiven Aufgaben, der gestuften Lösungshilfen und des automatischen Feedbacks ab. Eine Übersicht findet sich in Abbildung 7.2.

- Zählmaße
  - Anzahl bearbeiteter Aufgaben
  - Anteil bearbeiteter Widgets
  - Anzahl aufgerufener Lösungshilfen
- Zeitmaße
  - Gesamte Bearbeitungszeit
  - Mittlere Zeit in Feedbackphasen
- Leistungsmaße
  - iBook-Lösungsrate

*Abbildung 7.2.* Aus den Prozessdaten von ALICE:Bruchrechnen für diese Arbeit gewonnene Prozessmaße.

Um die Nutzung der interaktiven Aufgaben abzubilden, wurde die **Anzahl bearbeiteter Aufgaben** anhand der eingeloggtten Antworten auf Einzelaufgaben für jede Schülerin und jeden Schüler als Zählmaß bestimmt. Als weiteres Zählmaß wurde berechnet, welchen **Anteil der Widgets** die einzelnen Lernenden im iBook nutzten. Zudem liegt durch Summation der Zeitdauer aller Aufgabenbearbeitungen die **gesamte Bearbeitungszeit in Widgets** als Zeitmaß für die Auswertung vor.

Um die Nutzung des automatischen Feedbacks durch ein Prozessmaß zu erfassen, wurde die Zeit betrachtet, in der Schülerinnen und Schülern Feedback angezeigt wurde. Da diese Zeitspanne nicht direkt per Log aufgezeichnet wurde, musste das Prozessmaß aus den Logs aufeinanderfolgender Aufgabenbearbeitungen desselben Widgets berechnet werden: Indem vom Startzeitpunkt einer Aufgabenbearbeitung der Endzeitpunkt der vorherigen subtrahiert

wird, ergibt sich das Zeitfenster, in welchem die Widgets Feedback zu letzterer anzeigen. Auf diese Zeiten wurde dasselbe *Preprocessing* angewandt wie auf die Aktivitätsdauer (s. Abschnitt 7.2.2); dabei wurden 4.62 % der Zeiten (Gymnasium: 2663/4.33 %, Mittelschule: 1993/4.44 %) ersetzt. Durch Mittelwertbildung resultiert die **mittlere Zeit in Feedbackphasen** als Prozessmaß zur Beschreibung der Feedbacknutzung.

Zur Abbildung der Nutzung der gestuften Lösungshilfen wurde mit der **Gesamtanzahl an aufgerufenen Lösungshilfen** ein weiteres Zählmaß bestimmt.

Als Leistungsmaß wurde die Lösungsrate einer jeden Schülerin und eines jeden Schülers zunächst auf Widgetebene berechnet und anschließend zu einem Maß pro Lernendem gemittelt, der **iBook-Lösungsrate**. Dabei wurden die Widgets W74, W76 und W86 ausgeschlossen, da für die Gymnasialstichprobe aus diesen interaktiven Aufgaben keine Leistungsdaten vorlagen (s. Abschnitt 7.2.1).

Die sechs Prozessmaße wurden für jede Schülerin und jeden Schüler der Stichprobe je dreimal berechnet:

1. auf Grundlage der Prozessdaten aller 66 in dieser Arbeit betrachteten Widgets,
2. mit den Prozessdaten aus den 31 Widgets, die mit ikonischen Repräsentationen arbeiten (*ikonische Subskala der Prozessmaße*) und
3. unter Verwendung der Prozessdaten aus den 35 Widgets, die auf rein symbolischer Ebene operieren (*symbolische Subskala der Prozessmaße*).

Die Zuordnung der Widgets zu den Repräsentationsformen kann anhand von Tabelle A.1 nachvollzogen werden.

## 7.3 Weitere Erhebungsinstrumente

Dieser Abschnitt beschreibt mit dem Vortest und dem Nachtest die weiteren, papierbasierten Erhebungsinstrumente, die neben dem iBook selbst in der Studie zur Datenerhebung eingesetzt wurden. Beide Tests wurden jeweils in allen teilnehmenden Klassen durchgeführt. Sie finden sich in voller Länge in Anhang D abgedruckt. Für die Entwicklung der Tests und die statistische Validierung sei hier auf Reinhold (2019) verwiesen.

Der Vortest diente der Ermittlung der bereits vorhandenen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler zum Bruchzahlkonzept. Die elf Testitems lehnen sich größtenteils an den Vorwissenstest von Padberg (2002) an. In den Stichproben der vorliegenden Studie erreichte der Test eine Reliabilität von  $\omega = .82$  (Reinhold, 2019). Der Vortest wurde in allen Klassen in einer der ersten Mathematikstunden des Schuljahrs – spätestens vor der ersten Unterrichtsstunde zur Bruchrechnung – durchgeführt. Für die schriftliche Beantwortung der Fragen stand eine Bearbeitungszeit von 15 Minuten zur Verfügung.

Der schriftliche Nachtest, der direkt im Anschluss an die Intervention durchgeführt wurde, besteht aus 21 Items und ist für eine Dauer von 55 Minuten ausgelegt. Der Test wurde im Rückgriff auf bereits bestehende Jahrgangsstufentests und Tests zu Bruchzahlkonzepten

(Götz et al., 2013; Padberg, 1995) so konzipiert, dass die im iBook vorrangig behandelten Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Teil vom Ganzen, Erweitern und Kürzen, Größenvergleich) sowohl in symbolischer als auch ikonischer Repräsentation erfasst werden. Zusätzlich umfasst das Testheft zwei Items zum Erklären geeigneter Strategien beim Größenvergleich zweier Brüche. Die Verteilung der Items auf die einzelnen Aspekte ist Tabelle 7.2 zu entnehmen. Der Nachtest weist eine Reliabilität von  $\omega = .82$  auf (Reinhold, 2019). Die Reliabilitäten der einzelnen Subskalen – *ikonische Subskala*, *symbolische Subskala*<sup>4</sup> und *Subskala Erklären* – finden sich in Tabelle 7.2.

Tabelle 7.2

Anzahl an Nachtestitems zu den einzelnen Aspekten Teil vom Ganzen, Erweitern und Kürzen sowie Größenvergleich und Reliabilitäten (McDonalds  $\omega$ ) der ikonischen und symbolischen Subskalen sowie der Subskala Erklären.

	Teil vom Ganzen		Erweitern und Kürzen		Größenvergleich		Gesamtskala	
	<i>n</i>	$\omega$	<i>n</i>	$\omega$	<i>n</i>	$\omega$	<i>n</i>	$\omega$
Ikonisch	6	.56	3	.47	2	.41	11	.67
Symbolisch	4	.62	3	.51	1	.40	8	.71
Erklären	0	–	0	–	2	.51	2	.51
gesamt	10		6		5		21	.82

Anmerkung.  $\omega$ -Werte nach Reinhold (2019).

## 7.4 Durchführung der Studie

Der folgende Abschnitt beschreibt die durchgeführte Studie im zeitlichen Ablauf, der in den Tabellen 7.3 und 7.4 zusammengefasst ist. Abschnitt 7.4.1 legt die administrative Vorbereitung der Studie dar. Abschnitt 7.4.2 informiert kurz über die Einweisung der beteiligten Lehrkräfte; die Intervention selbst erläutert Abschnitt 7.4.3. Das Auslesen der Prozessdaten von den iPads wird in Abschnitt 7.4.4 ausgeführt.

### 7.4.1 Administrative Vorarbeiten

Die Durchführung der Interventionen wurde vom Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst für Gymnasien im Schuljahr 2016/2017 unter dem Geschäftszeichen X.7-BO5106/141/8 bzw. vom Staatlichen Schulamt München für Mittelschulen im Schuljahr 2017/2018 unter dem Geschäftszeichen SchR/III/Erh106/1 genehmigt. Die Teilnahme an der Studie war für alle Beteiligten – Schulen, Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler – freiwillig. Alle Schulen der jeweiligen Schulart in München wurden per Brief vor dem Genehmigungsverfahren (Mittelschulen) bzw. im Anschluss daran (Gymnasien) eingeladen, an der Studie teilzunehmen. Das Projektteam verteilte die positiven Rückmeldungen klassenweise und teil-randomisiert auf die drei Interventionsgruppen (iPad-Gruppe, Arbeitsbuchgruppe und Kontrollgruppe). Dabei wurde darauf geachtet, dass

<sup>4</sup> „Subskala Visualisierung“ bzw. „Subskala Arithmetik“ in Reinhold (2019)

sich die iPad-Klassen nicht auf wenige Schulen konzentrieren. Die Erziehungsberechtigten der Schülerinnen und Schüler in den teilnehmenden Klassen wurden per Elternbrief informiert und um ihr Einverständnis für die Studienteilnahme ihrer Kinder gebeten.

Da nur je drei Klassen für den Interventionszeitraum von vier Wochen gleichzeitig mit iPads ausgestattet werden konnten, erklärten sich an beiden Schularten je drei Lehrkräfte bereit, den Stoff der Intervention vier Wochen versetzt zu bearbeiten. Dadurch konnte die Stichprobengröße der iPad-Gruppe auf je sechs iPad-Klassen pro Schulart erhöht werden (s. auch Abschnitt 7.6). Im Folgenden werden die je drei Klassen, die verzögert mit dem iBook arbeiteten, als *Teilgruppe 2* bezeichnet, die übrigen je drei Klassen der iPad-Gruppe als *Teilgruppe 1*.

### 7.4.2 Fortbildung der Lehrkräfte

Alle beteiligten Lehrkräfte waren eingeladen, vor der Studie die Universität zu besuchen, um das Forschungsprojekt kennenzulernen. In jeweils ca. 90-minütigen Fortbildungen wurden das Projekt als Ganzes sowie der Interventionsablauf und die interaktiven Inhalte des iBooks vorgestellt. Anschließend hatten die Lehrkräfte die Möglichkeit, sich mit dem iBook auf iPads vertraut zu machen. Zusätzlich stand allen Lehrkräften eine 19-seitige Handreichung zur Verfügung, in der das Projekt beschrieben wurde. Diese enthielt für jedes Kapitel des iBooks formulierte Lernziele und eine Übersicht über die interaktiven Inhalte. Das Projektteam stand während der gesamten Zeit für individuelle Rückfragen zur Verfügung.

### 7.4.3 Ablauf der Intervention

Der zeitliche Ablauf der Studie war an den Gymnasien und Mittelschulen – auch in den einzelnen Teilgruppen – gleich. Die einzige Ausnahme hiervon stellte dabei der Vortest dar, der auch in den zweiten Teilgruppen zu Beginn des Schuljahres durchgeführt wurde.

Die Lehrkräfte erhielten am ersten Tag der Intervention die Tablet-PCs von wissenschaftlichen Mitarbeitern des Projektteams. Vor Ort wurden die Lehrerinnen und Lehrer in die Bedienung der Tablet-Wagen eingewiesen, in denen jeweils 32 Geräte geladen und transportiert werden konnten. Die Geräte waren fortlaufend nummeriert (Nummern 101 bis 132, 201 bis 232 und 301 bis 332). Jeder Schülerin und jedem Schüler wurde zu Beginn der Intervention von ihrer bzw. seiner Lehrkraft eine Nummer zugewiesen, so dass alle Lernenden über den gesamten Interventionszeitraum dasselbe Gerät verwenden konnten. Auf diese Weise dienten die Nummern der eindeutigen, aber anonymisierten Zuordnung der Testhefte zu den Prozessdaten.

Der 15-minütige Vortest fand zu Beginn des Schuljahres in der ersten Mathematikunterrichtsstunde statt. Die Durchführung oblag den Lehrkräften, die vom Projektteam hierfür eine genau zu befolgende Anweisung erhalten hatten. Die ausgefüllten Testhefte wurden postalisch an die Universität zur Codierung übermittelt. Im Anschluss erfolgte der iPad-gestützte Unterricht; für die sieben iBook-Kapitel standen vier Unterrichtswochen zur Verfügung – jeweils etwa zwei Unterrichtsstunden (90 Minuten) pro Kapitel. Die Lehrkräfte

Tabelle 7.3  
*Zeitlicher Ablauf der Studiendurchführung an den Gymnasien.*

Datum	Teilgruppe 1	Teilgruppe 2
Di, 11.09.2016	Ausliefern der iPads an die drei Klassen	
⋮	⋮	
	Vortest iPad-Unterricht	Vortest regulärer Unterricht (kein Stoff der Intervention)
⋮	⋮	⋮
Do, 13.10.2016	Auslesen der Daten Zurücksetzen der Geräte	
⋮	⋮	Ausliefern der iPads an die drei Klassen
	Nachtest	iPad-Unterricht
⋮		⋮
Fr, 18.11.2016		Abholung der iPads Auslesen der Daten
		⋮
		Nachtest

Tabelle 7.4  
*Zeitlicher Ablauf der Studiendurchführung an den Mittelschulen.*

Datum	Teilgruppe 1	Teilgruppe 2
Di, 12.09.2017	Ausliefern der iPads an die drei Klassen	
⋮	⋮	
	Vortest iPad-Unterricht	Vortest regulärer Unterricht (kein Stoff der Intervention)
⋮	⋮	⋮
Do, 06.10.2017	Auslesen der Daten Zurücksetzen der Geräte	
⋮	⋮	Ausliefern der iPads an die drei Klassen
	Nachtest	iPad-Unterricht
⋮		⋮
Fr, 27.10.2017		Abholung der iPads Auslesen der Daten
		⋮
		Nachtest

waren in ihrer Unterrichtsgestaltung frei; allerdings waren sie dazu angehalten, zur Einführung der einzelnen Themen die entsprechenden Widgets im iBook zu nutzen und insgesamt in mindestens der Hälfte der Unterrichtszeit die iPads einzusetzen. Für die Hausaufgaben und zur Sicherung über den Interventionszeitraum hinaus wurde den Schülerinnen und Schülern eine Druckfassung des iBooks an die Hand gegeben, da die iPads aus rechtlichen Gründen in den Schulen verbleiben mussten.

#### 7.4.4 Auslesen der Daten

Die Prozessdaten wurden mithilfe des Datenübermittlungswidgets (s. Abschnitt 6.3.2) von den einzelnen Geräten an den Server der Universität übertragen. Für Teilgruppe 1 erfolgte dies direkt an den Interventionsschulen; zu diesem Zweck wurden die iPads einzeln mit einem mobilen Hotspot verbunden. Die Daten der Teilgruppe 2 wurden an der Universität über das dortige WLAN-Netzwerk übermittelt.

In beiden Teilgruppen wurde der Übermittlungsprozess durch den Aufruf des Datenübermittlungswidgets initiiert; dies musste auf jedem iPad einzeln erfolgen. Wenn das Widget eine erfolgreiche Übertragung signalisierte, wurden die auf dem iPad gespeicherten Daten durch das Aufrufen des Reset-Widgets (s. Abschnitt 6.3.3) gelöscht und die vom Server empfangenen Dateien händisch mittels eines FTP-Clients so benannt, dass der jeweilige Dateiname mit der Nummer des iPads korrespondierte. Aufgrund der unterschiedlichen Domänen der Widgettypen (s. Abschnitt 5.2.3) mussten die beiden Multiple-Choice-Widgets per Hand zurückgesetzt werden. Zum Abschluss des Prozesses wurde auf jedem iPad das iBook manuell auf die erste Seite geblättert, um Teilgruppe 2 dieselben Startbedingungen wie Teilgruppe 1 zu bieten.

Im Fall der Teilgruppe 1 wurden die iPads nach dem Auslesen der Daten am selben Tag an die Schulen der Teilgruppe 2 ausgeliefert, so dass diese das iBook mit Beginn des nächsten Unterrichtstags einsetzen konnten. In allen Fällen fand der Nachtest nach Abgabe der Geräte statt. In der Gymnasialteilstudie erfolgte die Durchführung erneut durch die Lehrerinnen und Lehrer der jeweiligen Klassen, in der Mittelschuleteilstudie durch einen wissenschaftlichen Mitarbeiter des Projekts.

## 7.5 Codierung

In diesem Abschnitt wird die Codierung der schriftlichen Tests (Abschnitt 7.5.1) und der in einigen Widgets aufgezeichneten Fingerbewegungen (Abschnitt 7.5.2) erläutert.

### 7.5.1 Codierung des Vor- und Nachtests

Sämtliche Testhefte (Vor- und Nachtest) der Schülerinnen und Schülern, die an der Studie teilgenommen hatten, wurden von je zwei Wissenschaftlerinnen oder Wissenschaftlern codiert. Grundlage der Codierung waren vom Projektteam erstellte und im Vorfeld der Gymnasialteilstudie pilotierte Manuale. Die Beobachterübereinstimmung lag dabei zwischen

.94 und .97 (s. Reinhold, 2019). Abweichungen in der Codierung wurden von zwei wissenschaftlichen Mitarbeitern des Projekts überprüft und neu codiert. Aus den kategorialen Codierungen wurde anschließend für jede Itemlösung ein Wert zwischen 0 (entspricht einer falschen Antwort) und 1 (entspricht einer vollständig korrekten Antwort) berechnet.

### 7.5.2 Codierung der aufgezeichneten Fingerbewegungen

In Widgets W10 und W11 wurden sämtliche Fingerbewegungen aufgezeichnet, die während der Aufgabenbearbeitung vom Touchscreen erfasst wurden (Abschnitt 6.4.1.2).

Zur Pilotierung wurden die Aufgabenlösungen einer Klasse analysiert und typische Muster in den Lösungsprozessen abgeleitet (vgl. auch Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018c). Diese dienten der Codierung sämtlicher Fingerbewegungen in die folgenden Kategorien: *direkte Eingaben*, *korrigierende Verfahren*, *Verfahren mit Pausen* und *sonstige Verfahren*.

Zur Codierung wurde vom Autor dieser Dissertation für die beiden Widgets je eine Web-Applikation entwickelt, welche die Wiedergabe der gespeicherten Fingerbewegungen ermöglicht. Mithilfe dieser Applikation wurden die 2 901 Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schüler aus den sechs Gymnasialklassen vom Autor dieser Arbeit oder einer wissenschaftlichen Hilfskraft unabhängig betrachtet und codiert. Für die 11 % doppelt codierten Daten ergab sich ein Cohens  $\kappa$  von 0.61, das gemäß Landis und Koch (1977) als *substantial agreement* gewertet werden kann.

## 7.6 Beschreibung der Stichproben

Zur Teilnahme an der Studie meldeten sich 14 Gymnasien aus dem Großraum München an. Auf die hier relevante iPad-Gruppe entfielen fünf Gymnasien, von denen eines zwei iPad-Klassen in jeweils einer Teilgruppe stellte. Die sechs Interventionsklassen bestanden insgesamt aus 166 Schülerinnen und Schülern. Für elf von diesen lag keine Einverständniserklärung der Erziehungsberechtigten vor. Bei vier Schülerinnen und Schülern schlug die Übertragung der Prozessdaten fehl,<sup>5</sup> so dass schließlich 151 Sechstklässlerinnen und Sechstklässler in der Stichprobe verblieben, nach eigenen Angaben 63 Mädchen und 88 Jungen. Die Verteilung der Anzahl an Schülerinnen und Schülern auf die Klassen und die Geschlechterverteilung innerhalb der einzelnen Klassen finden sich in Tabelle 7.5.

Für die zweite Erhebung an Mittelschulen konnten acht Schulen aus dem Großraum München gewonnen werden. Sechs Schulen wurde eine iPad-Klasse zugeordnet. In diesen wurde die Intervention ebenfalls in zwei Teilgruppen zeitlich versetzt durchgeführt. Die iPad-Gruppe an der Mittelschule umfasste 105 Schülerinnen und Schüler. Die Erziehungsberechtigten aller Kinder stimmten einer wissenschaftlichen Verwendung der erhobenen

<sup>5</sup>Die Daten wurden nur teilweise übertragen, aber als vollständig übertragen vom Gerät angezeigt. Die Gründe hierfür sind unklar. Da alle Logs inmitten von Freitextantworten abbrachen, liegt die Vermutung nahe, dass bestimmte Zeichen im Text den beteiligten Skripten suggerierten, dass die Übertragung abgeschlossen sei.

Tabelle 7.5

Übersicht über die Anzahl an Schülerinnen und Schülern sowie die Geschlechterverteilung in Klassen der Gymnasialstichprobe.

Klasse	Teilgruppe 1			Teilgruppe 2			gesamt
	G11	G12	G13	G21	G22	G23	
Mädchen	9	12	9	8	15	10	63
Jungen	17	12	15	15	11	18	88
gesamt	28	24	24	23	26	28	151

Anmerkung. Die Klassenbezeichnungen setzen sich zusammen aus einem G (für Gymnasium), der Teilgruppe (1 oder 2) und der Nummer des zugewiesenen iPad-Wagens (1–3).

Daten zu. Es traten keine Fehler bei der Übertragung der Prozessdaten von den Geräten an den Server der Universität auf. Gemäß den Angaben der Lernenden auf den schriftlichen Tests nahmen 49 Mittelschülerinnen und 56 Mittelschüler an der Studie teil. Die Verteilung der Anzahl an Schülerinnen und Schülern auf die Klassen und die Geschlechterverteilung innerhalb der einzelnen Klassen finden sich in Tabelle 7.6.

Tabelle 7.6

Übersicht über die Anzahl an Schülerinnen und Schülern sowie die Geschlechterverteilung in Klassen der Mittelschulstichprobe.

Klasse	Teilgruppe 1			Teilgruppe 2			gesamt
	M11	M12	M13	M21	M22	M23	
Mädchen	12	9	6	8	8	6	49
Jungen	6	8	15	8	8	11	56
gesamt	18	17	21	16	16	17	105

Anmerkung. Die Klassenbezeichnungen setzen sich zusammen aus einem M (für Mittelschule), der Teilgruppe (1 oder 2) und der Nummer des zugewiesenen iPad-Wagens (1–3).

## 7.7 Verwendete Geräte

Die für den tabletgestützten Unterricht benötigten Geräte wurden den iPad-Klassen für den Interventionszeitraum von der Technischen Universität München zur Verfügung gestellt. Bei den Tablets handelte es sich um Geräte des Typs Apple iPad Air 2 (Ende 2014, Modellbezeichnung des Herstellers: MH182FD/A). In der Mittelschulstudie kamen zusätzlich Apple iPads der 5. Generation (2017, Modellbezeichnung des Herstellers: MP2J2FD/A) zum Einsatz. Beide Modelle verfügen über einen 9,7" Multitouch-Bildschirm und 2 GB Arbeitsspeicher. Es kann davon ausgegangen werden, dass die unterschiedlichen Geräte keine Verzerrung der Studienergebnisse bewirkten.

Zur Aufbewahrung und zum Laden der Geräte stand den Lehrkräften je ein Tablet-

Managementwagen der Firma Ergotron (Modellbezeichnung des Herstellers: DM32-1004-2) zur Verfügung, der ein simultanes Laden von bis zu 32 iPads, die Verwahrung und den Transport innerhalb des Schulhauses ermöglichte.

In teilstandardisierten Interviews bewerteten die Lehrkräfte die technische Integration der Geräte in ihren Unterricht als problemlos.

## 7.8 Statistische Methoden und Software

In diesem Abschnitt werden *generalisierte lineare Mischmodelle* (kurz GLMMs) beschrieben, die für die Auswertung der Daten in dieser Arbeit methodisch relevant sind (Abschnitt 7.8.1). Im Anschluss wird kurz über die verwendete Statistiksoftware informiert (Abschnitt 7.8.2).

### 7.8.1 Generalisierte lineare Mischmodelle

Das Ziel bei der Approximation von *linearen Modellen* ist es, eine lineare Beziehung zwischen einer abhängigen Variablen  $Y$  und mehreren unabhängigen (Prädiktor-)Variablen  $X_i$  zu finden. Dazu nutzt man Beobachtungen, die zu allen Variablen vorliegen, und sucht nach Koeffizienten  $\beta_i$  – sog. (festen) Effekten –, so dass Gleichung 7.1 für alle Datenpunkte  $(Y, X_1, \dots, X_n)$  mit möglichst kleinem Fehler  $\epsilon$  erfüllt ist:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + \epsilon \quad (7.1)$$

Der Koeffizient  $\beta_0$  wird dabei auch als *konstanter Term* bezeichnet. Da Gleichung 7.1 im Fall nur eines festen Effekts zu einer Geradengleichung  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \epsilon$  wird, sind im Englischen auch die Bezeichnungen *intercept* (dt.: Achsenabschnitt) für  $\beta_0$  und *slope* (dt.: Steigung) für feste Effekte üblich.

Die Grundannahme in linearen Modellen ist, dass die abhängige Variable  $Y$  normalverteilt ist. Als Erweiterung erlauben *generalisierte lineare Modelle* nicht-normalverteilte abhängige Variablen. Insbesondere bieten solche Modelle die Möglichkeit, kategoriale abhängige Variablen zu schätzen. Dazu kommen sog. *Linkfunktionen* zum Einsatz, welche die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die kategorialen Variablen angenommen werden, auf eine unbeschränkte stetige Skala abbilden, deren Wert vom Modell geschätzt wird. Der berechnete Schätzwert kann anschließend über die Umkehrfunktion der Linkfunktion in die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gefragte Kategorie eintritt, umgewandelt werden.

Im Fall von dichotomen oder kategorialen Variablen wird kanonischerweise als Linkfunktion die sog. *logit*-Funktion (Gleichung 7.2) verwendet:

$$\text{logit}: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad (7.2)$$

Die Umkehrfunktion der *logit*-Funktion ist in Gleichung 7.3 gegeben:

$$\text{logit}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], l \mapsto \frac{e^l}{1 + e^l} \quad (7.3)$$

Effekte, die in Logits – oder auch *Log-Odds* – geschätzt werden, können vor der Umrechnung in Wahrscheinlichkeiten addiert werden, um die entsprechende Wahrscheinlichkeit beim Auftreten mehrerer Effekte zur gleichen Zeit zu berechnen. Daher gilt für die Interpretation die Faustregel, dass positive *Log-Odds* die korrespondierende Wahrscheinlichkeit erhöhen, während negative *Log-Odds* sie verringern.

**Beispiel 1.** Betrachtet man zwei mögliche Outcomes, „richtig“ (codiert als 1) und „falsch“ (codiert als 0), und erhält als durchschnittliche Schätzung einen Logitwert, so errechnet sich über das Einsetzen dieses Werts in die Umkehrfunktion der Logit-Funktion (Gleichung 7.3) die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit für den Outcome „richtig“. Ergibt die Modellschätzung bspw. einen Logit-Wert von 0, so liegt die zugehörige Wahrscheinlichkeit bei 50 %:

$$\text{logit}^{-1}(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

(Generalisierte) Lineare Mischmodelle erweitern die eben beschriebenen Modelle um sog. zufällige Effekte (*random effects*), beachten also eine Mischung aus festen und zufälligen Effekten (s. bspw. Bolker et al., 2009; Brauer & Curtin, 2018). *Random effects* beschreiben dabei, auf welche Weise feste Effekte innerhalb definierter Gruppierungen variieren (z. B. innerhalb der Gesamtheit einer gesetzten Anzahl an Klassen), wenn jeweils mehrere Datenpunkte der Gruppierungselemente (im Beispiel: der einzelnen Klassen) in die Schätzung einfließen. Die zufälligen Effekte werden dabei als normalverteilt um den Wert 0 innerhalb der jeweiligen Gruppierung angenommen; das statistische Verfahren schätzt dabei die Varianz dieser Verteilung.

Im Fall eines Modells mit einer Prädiktorvariable und einer berücksichtigten Gruppierung ergibt sich folgende Modellgleichung 7.4:

$$\begin{array}{ll} Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 & \text{Fixed Effects} \\ + e_0 + e_1 & \text{Random Effects der Gruppierung} \\ + \epsilon & \text{Fehler} \end{array} \quad (7.4)$$

Innerhalb der Gruppierung variiert der Effekt von  $X_1$  auf  $Y$  normalverteilt um  $\beta_1$  mit der für  $e_1$  geschätzten Varianz. Ebenso verteilt sich der *intercept* der einzelnen Gruppierungselemente normalverteilt um  $\beta_0$  mit der für  $e_0$  geschätzten Varianz. In Anlehnung an die Bezeichnung für feste Effekte spricht man bei  $e_0$  vom *random intercept* und bei  $e_1$  von einem *random slope*.

Zusätzlich zu den Varianzen der zufälligen Effekte gibt die Modellschätzung Korrelationen zwischen den *random effects* an. Die Signifikanz dieser Korrelationen kann überprüft werden, indem man das geschätzte Modell mit restriktierten Modellen vergleicht, in denen die

Korrelationen zwischen den *random effects* auf 0 festgesetzt wurden. Für derartige Modellvergleiche von (G)LMMs sind *Likelihood-Ratio-Tests* angemessen (Bolker et al., 2009).

(G)LMMs gelten gegenüber klassischen Verfahren wie linearen Modellen oder ANOVAs als überlegen, da sie abhängige und fehlende Daten handhaben können (Brauer & Curtin, 2018).

Um die Güte der Passung eines Modells zu der Datengrundlage zu überprüfen, empfehlen Merlo, Yang, Chaix, Lynch und Råstam (2005), die *relative Veränderung der Varianz* der zufälligen Effekte (eng.: *proportional change in variance*, kurz *PCV*) im Vergleich zu einem Nullmodell zu bestimmen (eine Möglichkeit, diese Nullmodell zu spezifizieren, ist, das Modell ohne *fixed slopes* zu definieren). Für jeden *random effect* wird nun ein PCV-Wert über die folgende Gleichung 7.5 berechnet:

$$PCV := 1 - \frac{\text{Varianz des } random\ effects\ \text{im Modell}}{\text{Varianz des } random\ effects\ \text{im Nullmodell}} \quad (7.5)$$

Die PCV-Werte beschreiben daher, um wie viel Prozent sich die Varianzen der zufälligen Effekte im Vergleich zum Nullmodell verändern.

**Beispiel 2.** *Im Fall eines Modells, das gemäß Gleichung 7.4 definiert ist, lässt sich ein Nullmodell über folgende Gleichung aufstellen:*

$$Y = \beta_0 + e_0^{(0)} + e_1^{(0)} + \epsilon$$

Die zwei PCV-Werte (für  $e_0$  und  $e_1$ ) werden nun wie folgt berechnet:

$$PCV(e_0) = 1 - \frac{\text{Var}(e_0)}{\text{Var}(e_0^{(0)})} \quad PCV(e_1) = 1 - \frac{\text{Var}(e_1)}{\text{Var}(e_1^{(0)})}$$

## 7.8.2 Verwendete Software

Für die Auswertung wurde hauptsächlich auf die Software *R* (R Core Team, 2016) zurückgegriffen, eine freie Statistiksoftware, die für viele Plattformen verfügbar ist. *R* kann durch sog. *packages* um weitere Funktionen erweitert werden. Diese Pakete stehen dezentral im *CRAN* (The Comprehensive R Archive Network, bspw. <https://cloud.r-project.org/>) frei zur Verfügung.

Von den für diese Dissertation verwendeten Paketen sind besonders *ggplot2* (Wickham, 2009) und *lme4* (Bates, Mächler, Bolker & Walker, 2015) zu erwähnen, die zur Erstellung der Diagramme einerseits, und zur Berechnung der GLMMs (vgl. Abschnitt 7.8.1) andererseits verwendet wurden. Darüber hinaus war das Paket *RMySQL* (Ooms, James, DebRoy, Wickham & Horner, 2017) unerlässlich für die Kommunikation mit der Datenbank, in der alle Prozessdaten hinterlegt waren. Eine Übersicht der genutzten Pakete samt Verwendungszweck findet sich in Tabelle 7.7.

Tabelle 7.7

*Zur statistischen Analyse verwendete R-Pakete.*

Paket	Verwendung in der Dissertation
ggplot2 (Wickham, 2009) scales (Wickham, 2017)	Diagramme
lme4 (Bates, Mächler, Bolker & Walker, 2015) lmerTest (Kuznetsova, Brockhoff & Christensen, 2017)	Schätzung von GLMMs
MuMIn (Bartoń, 2018) DescTools (Andri Signorell et mult. al., 2020) car (Fox & Weisberg, 2011)	$R^2$ -Berechnung für GLMMs $\eta_p^2$ -Berechnung F-Statistiken für LMMs Umcodierung der Testantworten
RMySQL (Ooms, James, DebRoy, Wickham & Horner, 2017)	Datenbankkommunikation
psych (W. Revelle, 2017)	Einlesen der Testdaten
reshape2 (Wickham, 2007) plyr (Wickham, 2011) tidyr (Wickham & Henry, 2018) dplyr (Wickham, François, Henry & Müller, 2020)	Transformation der Daten

### Zusammenfassung

An der vorliegenden empirischen Studie nahmen zwölf Klassen teil. Die 256 Sechstklässlerinnen und Sechstklässler wurden für den Interventionszeitraum von vier Wochen mit dem interaktiven Schulbuch zu Bruchzahlkonzepten von ihren Lehrkräften unterrichtet. Das iBook erfasste während der Nutzung automatisch Prozessdaten, die in Verbindung mit papierbasierten Tests zu Vorkenntnissen und zum Lernerfolg die Datengrundlage für die im folgenden Kapitel beschriebenen Analysen darstellen. Für diese statistischen Auswertungen wird dabei zum Teil auf generalisierte lineare Mischmodelle zurückgegriffen.



# 8 Ergebnisse

## Überblick

Kapitel 8 beschreibt die Ergebnisse der Studie. Dabei betrachtet Abschnitt 8.1 die Nutzung des digitalen Schulbuchs durch die Schülerinnen und Schüler: Abschnitt 8.1.1 beschreibt, wie das iBook im Unterricht eingesetzt wurde. In Abschnitt 8.1.2 werden Unterschiede in den berechneten Prozessmaßen zwischen Schularten sowie Geschlechtern aufgezeigt. Die Prozessmaße werden in Abschnitt 8.1.3 genutzt, um die Ergebnisse des Posttests zu präzisieren.

Abschnitt 8.2 beschreibt die Ergebnisse aus der exemplarischen Verwendung des digitalen Schulbuchs als Forschungsinstrument: In Abschnitt 8.2.1 werden die Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schüler in kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben auf wiederkehrende Lösungsmuster untersucht. Abschnitt 8.2.2 thematisiert die Auswirkungen von Aspekten des Lösungsprozesses auf die Aufgabenlösung (Abschnitt 8.2.2.1 – Zeit, Abschnitt 8.2.2.2 – Abruf von Lösungshilfen).

## 8.1 Nutzung des digitalen Schulbuchs

Dieser erste Teil der Ergebnisse bezieht sich auf die Nutzung des digitalen Schulbuchs durch die Schülerinnen und Schüler und beantwortet Forschungsfragen 1–3 (s. Abschnitt 4.2). Zunächst wird in Abschnitt 8.1.1.1 beschrieben, welches Bild die Prozessdaten von der Verwendung des iBooks zeichnen. Anschließend zeigt Abschnitt 8.1.2 Unterschiede in der Schulbuchnutzung – wie sie von den berechneten Prozessmaßen indiziert wird – zwischen Schularten sowie Geschlechtern auf. Abschnitt 8.1.3 erläutert abschließend, wie die Prozessmaße in Prädiktionsmodellen in Zusammenhang mit den Ergebnissen des Posttests gestellt werden.

### 8.1.1 Beschreibung der Schulbuchnutzung

Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, welche Rückschlüsse die Prozessdaten und -maße auf die Nutzung des interaktiven Buchs durch die Schülerinnen und Schüler im Unterricht zulassen.

### 8.1.1.1 Nutzung des interaktiven Schulbuchs im Unterricht

Durch Betrachtung der Anzahl an aktiven iPads pro Minute innerhalb einer Klasse ergeben sich Aktivitätsgraphen, die darüber Aufschluss geben, wann die Schülerinnen und Schüler ihre iPads während einer Unterrichtsstunde nutzten. Dabei wird ein iPad in einer Minute als *aktiv* definiert, wenn auf ihm innerhalb der Minute mindestens eine interaktive Aufgabe zu bearbeiten begonnen wurde. Somit ergeben sich Übersichten der Unterrichtsstunden, die aufzeigen, welche Zeit die Lehrkräfte für die Bearbeitung von Aufgaben zur Verfügung stellten. In den zwölf Klassen der Studie sind meist lange iPad-Arbeitsphasen zu beobachten. Eine typische iPad-Stunde begann mit einer geringen Anzahl an aktiven iPads oder gänzlich ohne aktive Geräte; in der zweite Hälfte der Unterrichtszeit arbeiteten die meisten Schülerinnen und Schüler an interaktiven Aufgaben (s. Abbildung 8.1, oben, für zwei typische Klassen-Aktivitätsgraphen). Zusätzlich finden sich wenige reine iPad-Stunden, in denen die jeweilige Klasse durchgängig in interaktiven Aufgaben aktiv war (s. Abbildung 8.1, Mitte, für zwei entsprechende Klassen-Aktivitätsgraphen). Nur in wenigen Unterrichtsstunden waren kaum iPads aktiv (s. Abbildung 8.1, unten, für zwei Beispiele). Die Aktivitätsgraphen aller Klassen und Unterrichtsstunden finden sich in Anhang E. Die Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen lassen also Erkenntnisse darüber zu, wie das interaktive Buch im Unterricht eingesetzt wurde.

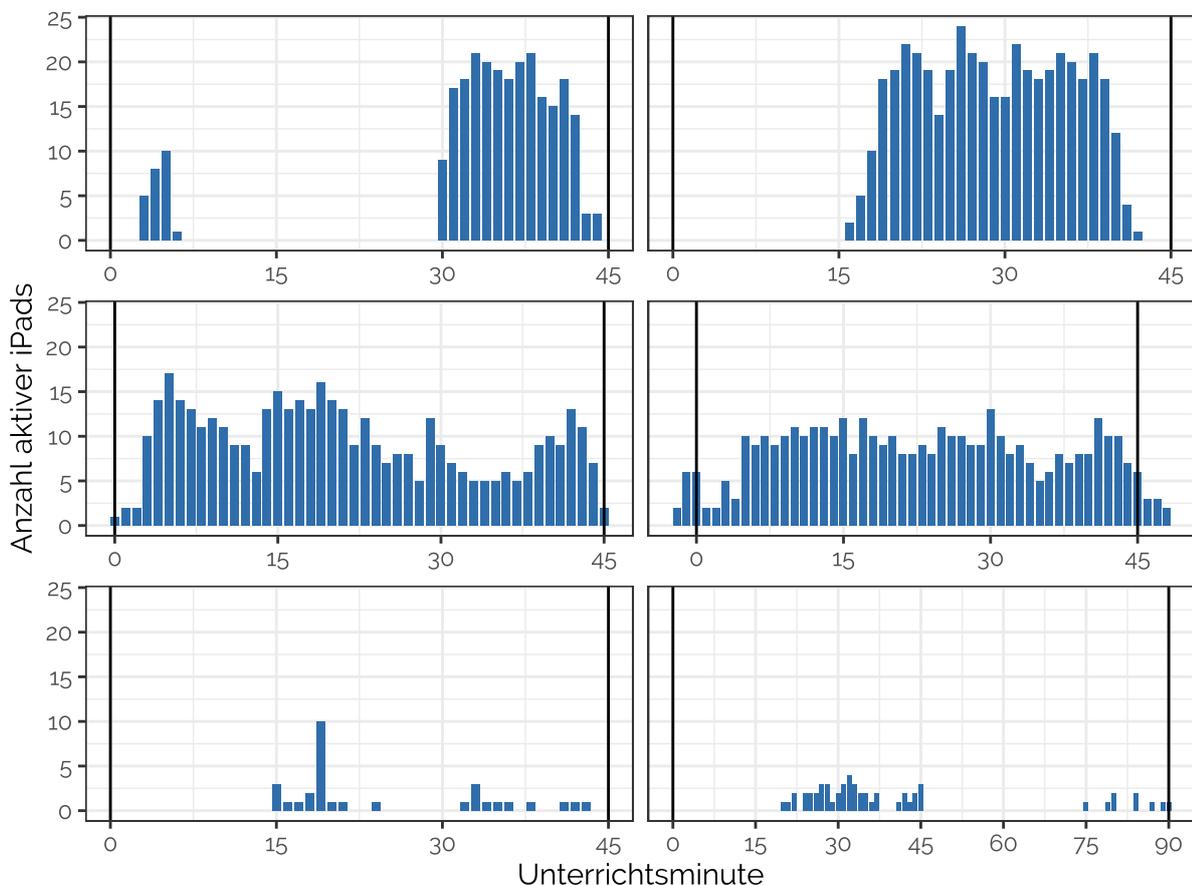


Abbildung 8.1. Klassenaktivitätsgraphen (aktive iPads pro Minute). Oben: Häufig beobachteter Unterrichtsverlauf mit iPad-Nutzung. Mitte: Reine iPad-Stunden. Unten: Unterrichtsstunden mit geringer iBooknutzung.

Durch Betrachtung der Widgetaktivitäten auf Klassenebene wird auch sichtbar, dass einige Schülerinnen und Schüler im Stoff eigenständig vorausarbeiteten. Indizien hierfür geben bearbeitete Aufgaben aus Kapiteln, die dem Kapitel folgen, das zum entsprechenden Zeitpunkt von der Mehrheit der Klasse bearbeitet wurde – und damit vermutlich von der Lehrkraft intendiert war (vgl. Abbildung 8.2). In gleicher Weise finden sich Bearbeitungen früherer Kapitel.

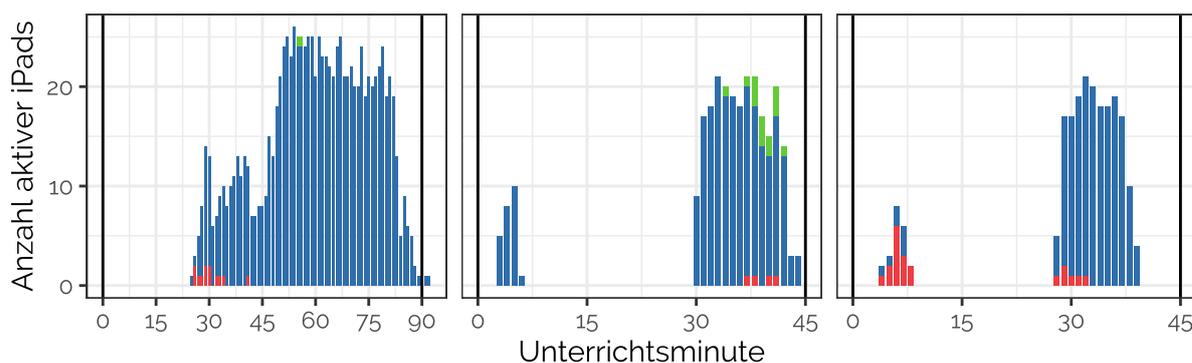


Abbildung 8.2. Klassenaktivitätsgraphen mit Aufgabenbearbeitungen außerhalb des aktuellen Kapitels (rot = vorherige Kapitel, grün = folgende Kapitel).

Noch deutlicher wird derartiges Nutzungsverhalten sichtbar, wenn man den chronologischen Verlauf der genutzten Widgets einer Unterrichtsstunde für die einzelnen Schülerinnen und Schüler beobachtet, wie dies in Abbildung 8.3 verbildlicht wird.

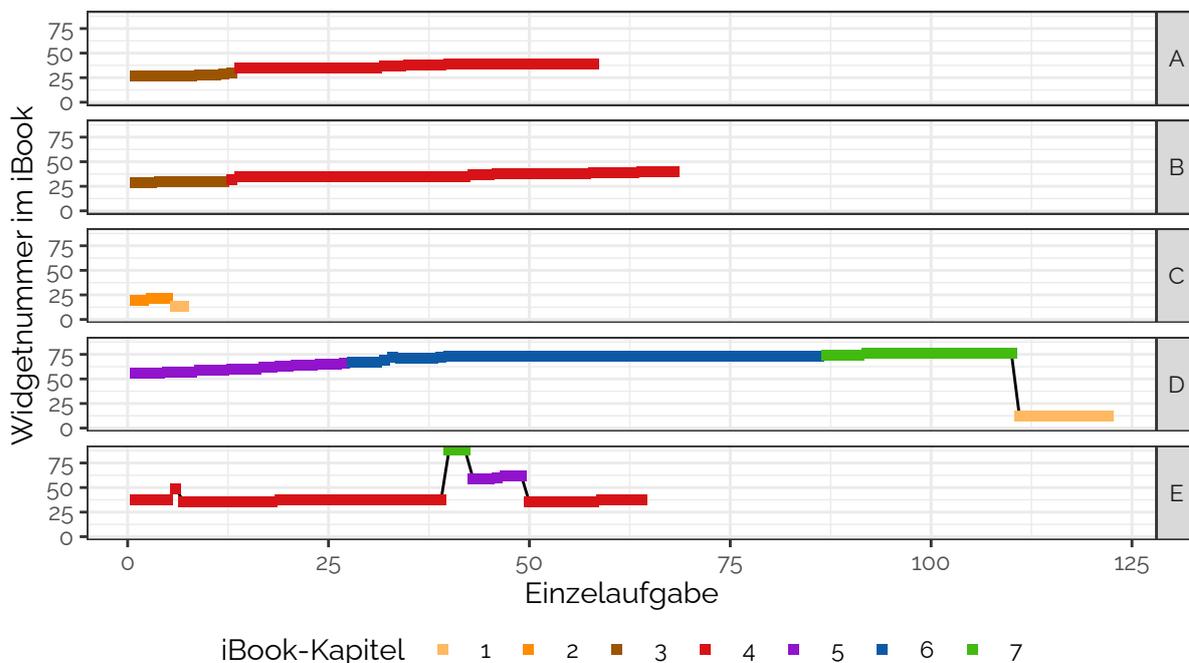


Abbildung 8.3. Beispiele für Progression durch die interaktiven Inhalte des iBooks in einer Unterrichtsstunde einer Gymnasialklasse. Verläufe A & B: Prototypische Verläufe für den Großteil der Klasse. Verläufe C, D & E: Verläufe, die von den prototypischen in verschiedene Richtungen abweichen.

### 8.1.1.2 Beschreibung der Nutzung durch Prozessmaße

Die im Folgenden berichteten Mittelwerte und Standardabweichungen der aus den Prozessdaten berechneten Prozessmaße (s. Abschnitt 7.2.3) geben einen Überblick über die durchschnittliche Nutzung des iBooks und seiner Features. Unterschiede zwischen den beiden Schularten Gymnasium und Mittelschule sowie zwischen Mädchen und Jungen werden in Abschnitt 8.1.2 untersucht.

Der Analyse der Prozessdaten zufolge verbrachten die Schülerinnen und Schüler  $M = 125.27$  Minuten der gesamten Unterrichtszeit (Stichprobenmittel der gesamten Bearbeitungszeit,  $SD = 53.14$ ) während der Studie mit der Bearbeitung von interaktiven Aufgaben. In dieser Zeit bearbeiteten sie im Durchschnitt 669 Einzelaufgaben, wobei dieser Wert stark streut ( $SD = 265$ ): In den Extremfällen bearbeitete ein Schüler am Gymnasium 100 Aufgaben, während eine Gymnasialschülerin in derselben Unterrichtszeit 1691 Aufgaben bearbeitete. Insgesamt lösten die Lernenden im Durchschnitt 64.04 % ( $SD = 12.96$ ) der bearbeiteten Einzelaufgaben in den interaktiven Aufgaben. Nur eine Schülerin verwendete alle hier beachteten Widgets mit Prozessdatenerfassung; im Durchschnitt griffen die Lernenden auf 71.90 % ( $SD = 15.37$ ) der 66 Widgets zu. Neben der Bearbeitungszeit verbrachten die Lernenden Zeit in den Feedbackphasen der Widgets. Hier zeigt das entsprechende Prozessmaß eine mittlere Zeit von  $M = 3.50$  Sekunden ( $SD = 2.70$ ), in denen nach jeder Einzelaufgabe Feedback angezeigt wurde. In den Aufgaben, in denen gestufte Lösungshilfen zur Verfügung standen, riefen die Schülerinnen und Schüler im Mittel  $M = 15.23$  ( $SD = 18.00$ ) Lösungshilfen auf; dies entspricht 0.26 Lösungshilfen pro Aufgabenbearbeitung ( $SD = 0.34$ ).

### 8.1.1.3 Adaptivität des interaktiven Schulbuchs

Neben Informationen darüber, welche Kapitel die Schülerinnen und Schüler im interaktiven Buch zu welchem Zeitpunkt bearbeiten (vgl. Abschnitt 8.1.1.1), ermöglichen es Prozessdaten auch zu untersuchen, welche Einzelaufgaben sie innerhalb der Widgets lösen. Im Falle der interaktiven Aufgaben von ALICE:Bruchrechnen kann in diesem Zusammenhang analysiert werden, wie sich die adaptive Aufgabenschwierigkeit an die Lernenden anpasst und ob die Schülerinnen und Schüler das volle Spektrum des Angebots nutzen.

Abbildung 8.4 zeigt exemplarisch, wie unterschiedliche Lernende der Studie die Aufgabenniveaus in einem Widget mit drei hinterlegten Anforderungsniveaus durchschritten. Die Abbildung lässt erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler der Stichprobe auf unterschiedlichen Niveaus Schwierigkeiten dabei hatten, die Aufgaben korrekt zu lösen (in der Abbildung Mitte und unten), und zum Teil die Bearbeitung einstellten, ohne alle Stufen durchlaufen zu haben (in der Abbildung rechts). In Abbildung 8.5 sind die Adaptivitätsverläufe aller Schülerinnen und Schüler desselben Widgets übereinander gelegt. Es ist zu erkennen, auf welcher unterschiedlichen Art und Weise die Lernenden die Schwierigkeitsstufen durchschritten und dass einige Schülerinnen und Schüler vor dem Erreichen des höchsten Anforderungsniveaus abbrachen. Insbesondere wird deutlich, dass Schülerinnen und Schüler der Mittelschule in diesem Widget auf den Anforderungsniveaus 1 und 2 verblieben, während dies am Gymnasium nicht der Fall war.

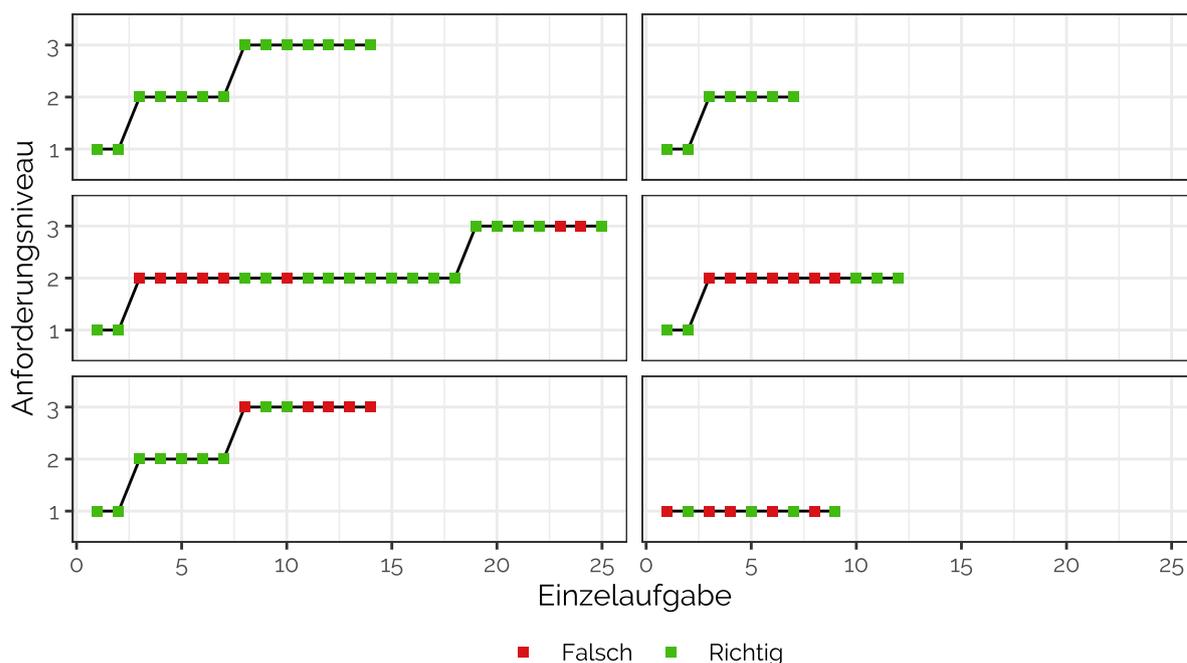


Abbildung 8.4. Exemplarische Verläufe des Anforderungsniveaus in Widget W18.

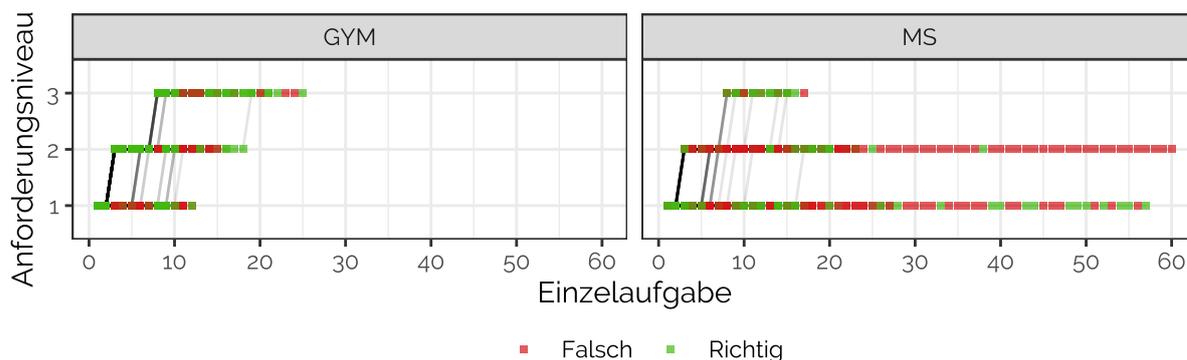


Abbildung 8.5. Überlagerung aller erfassten Verläufe des Anforderungsniveaus in Widget W18.

Insgesamt zeigt sich, dass im Schnitt 39.37 % der Schülerinnen und Schüler ( $SD = 30.37$ ) in den Widgets das höchste Anforderungsniveau erreichten. Demgegenüber verblieben durchschnittlich 41.50 % ( $SD = 25.41$ ) auf dem niedrigsten Level.

Ein GLMM (s. Abschnitt 7.8.1), das die *Log-Odds* für die Lösung einer Einzelaufgabe in Abhängigkeit vom Anforderungsniveau mit *random intercepts* für Lernende, Klassen, Schularten und Widgets<sup>1</sup> schätzt, ergibt einen negativen Einfluss der Schwierigkeitsstufe (Schätzwert  $-0.06$ ,  $SE = 0.01$ ),  $z = -5.55$ ,  $p < .001$ . Mit steigendem Anforderungsniveau sank also die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Lösung in den interaktiven Aufgaben des iBooks.

Ebenso zeigt ein lineares Mischmodell mit *random intercepts* für Klassen, Schularten und

<sup>1</sup>Lernendenvarianz 0.22 ( $SD = 0.47$ ), Klassenvarianz 0.04 ( $SD = 0.20$ ), Schulvarianz 0.10 ( $SD = 0.31$ ), Widgetvarianz 0.80 ( $SD = 0.90$ ).

Widgets<sup>2</sup>, dass die Anzahl an Schülerinnen und Schüler, die eine bestimmte Schwierigkeitsstufe erreichten, umso niedriger war, je anspruchsvoller das Anforderungsniveau war (Schätzwert:  $-3.89$ ,  $SE = 0.15$ ),  $F(1, 665.98) = 1203.22$ ,  $p < .001$ .

## 8.1.2 Schultart- und geschlechterspezifische Unterschiede

In diesem Abschnitt werden Unterschiede in der Nutzung des digitalen Schulbuchs – indiziert durch die aus den Prozessdaten gewonnenen Maße – zwischen Mädchen und Jungen einerseits und leistungsstärkeren (Gymnasialstichprobe) und leistungsschwächeren (Mittelschulstichprobe) Lernenden andererseits beschrieben. Dazu werden die Ergebnisse mehrerer  $2 \times 2$ -ANOVAs berichtet, die jeweils ein Prozessmaß der Interaktion von Geschlecht und Schultart gegenüberstellen. Signifikante (Haupt-)Effekte des Geschlechts bzw. der Schultart auf das Prozessmaß sind als Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen bzw. Lernenden des Gymnasiums und der Mittelschule zu interpretieren. Signifikante Interaktionseffekte weisen auf schultartspezifische Geschlechterunterschiede und/oder geschlechterspezifische Schultartunterschiede hin. Die Ergebnisse werden für alle Widgets (Abschnitt 8.1.2.1), die ikonischen (Abschnitt 8.1.2.2) sowie die symbolischen Widgets (Abschnitt 8.1.2.3) berichtet; die Gruppierung der Maße folgt dabei der in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Einteilung in Zählmaße, Zeitmaße und Leistungsmaße.

Abbildung 8.6 zeigt sog. *Pirate Plots* (Phillips, 2018) der Prozessmaße für die Gesamtstichprobe sowie für die schultart- und geschlechterspezifischen Teilstichproben. Diese Plots geben eine graphische Übersicht über die Prozessmaße und deren Verteilung innerhalb der einzelnen Stichprobengruppen: Schwarmdiagramme sowie vertikal und symmetrisch abgebildete Dichtekurven (*Violin Plot*) bilden die Verteilungen ab; die darüber platzierte Box markiert den jeweiligen Mittelwert (Linie) mit Standardabweichungen nach oben und unten. Abbildung 8.7 zeigt entsprechende Plots für die ikonische und symbolische Subskala der Prozessmaße.

### 8.1.2.1 Unterschiede in der gesamten Prozessmaß-Skala

Die Prozessmaße indizieren in den einzelnen Stichprobengruppen eine durchschnittliche Nutzung des interaktiven Schulbuchs, wie sie in Tabelle 8.1 samt Standardabweichungen tabellarisch aufgeführt ist.

#### Zählmaße

Bezüglich der Anzahl an insgesamt bearbeiteten interaktiven Aufgaben zeigen sich keine signifikanten Unterschiede, weder zwischen den Schularten,  $F(1, 252) = 0.57$ ,  $p = .453$ , noch zwischen den Geschlechtern,  $F(1, 252) = 0.01$ ,  $p = .926$ . Auch die Schultart-Geschlecht-Interaktion ist nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.51$ ,  $p = .477$ .

<sup>2</sup>Klassenvarianz 5.32 ( $SD = 2.31$ ), Schulvarianz 16.46 ( $SD = 4.06$ ), Widgetvarianz 15.35 ( $SD = 3.92$ ), Residualvarianz 21.15 ( $SD = 4.60$ ).

Wie Abbildung 8.6 andeutet, bearbeiteten Mädchen im Mittel einen signifikant größeren Anteil an verschiedenen Widgets als Jungen,  $F(1, 252) = 9.45, p = .002, \eta_p^2 = .04$ , unabhängig von der Schulart (Interaktion:  $F(1, 252) = 0.20, p = .656$ ). Außerdem waren Mittelschülerinnen und -schüler im Durchschnitt in einem signifikant kleineren Anteil an verschiedenen Widgets aktiv als die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten,  $F(1, 252) = 44.56, p < .001, \eta_p^2 = .15$ .

In Bezug auf die Verwendung der integrierten, gestuften Lösungshilfen ergeben sich signifikante Unterschiede zwischen den Schularten: So nutzten in der Stichprobe Schülerinnen und Schüler der Mittelschulen das Feature im Mittel signifikant häufiger als die Sechstklässlerinnen und Sechstklässler am Gymnasium,  $F(1, 252) = 36.03, p < .001, \eta_p^2 = .13$  (s. Tabelle 8.1). Weder ergibt sich ein signifikanter Geschlechterunterschied,  $F(1, 252) = 3.22, p = .074$ , noch ist die Interaktion signifikant,  $F(1, 252) = 1.72, p = .191$ .

### Zeitmaße

Unabhängig von der Schulart (Interaktion:  $F(1, 252) = 0.37, p = .545$ ) verbrachten Mädchen im Stichprobendurchschnitt signifikant mehr Zeit mit der Bearbeitung von Aufgaben als Jungen,  $F(1, 252) = 9.55, p = .002, \eta_p^2 = .04$  (vgl. Abbildung 8.6). Zwischen den Schularten konnte kein signifikanter Unterschied festgestellt werden,  $F(1, 252) = 0.08, p = .779$ .

Bezüglich der mittleren Zeit in den Feedbackphasen der Widgets findet sich ein signifikanter Schulartunterschied,  $F(1, 252) = 5.54, p = .019, \eta_p^2 = .02$ , wobei der Mittelwert an den Gymnasien höher war als an den Mittelschulen (s. Tabelle 8.1). Der Geschlechtervergleich fällt hingegen nicht signifikant aus,  $F(1, 252) = 1.33, p = .250$ . Dies trifft auch auf die Interaktion zwischen den beiden Variablen zu,  $F(1, 252) = 1.35, p = .247$ .

### Leistungsmaß

Die berechnete iBook-Lösungsrate unterscheidet sich zwischen den Teilstichproben in signifikantem Maße (s. Tabelle 8.1). So lösten Mädchen im Durchschnitt einen größeren Anteil an Aufgaben korrekt als Jungen,  $F(1, 252) = 4.23, p = .041, \eta_p^2 = .02$ . Auch zwischen den Schularten zeigt sich ein signifikanter Unterschied: In der Stichprobe lösten Schülerinnen und Schüler der sechsten Klasse am Gymnasium im Mittel einen signifikant größeren Anteil an Aufgaben korrekt als an den Mittelschulen,  $F(1, 252) = 111.34, p < .001, \eta_p^2 = .31$ . Die Geschlecht-Schulart-Interaktion war hingegen nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.57, p = .453$ .

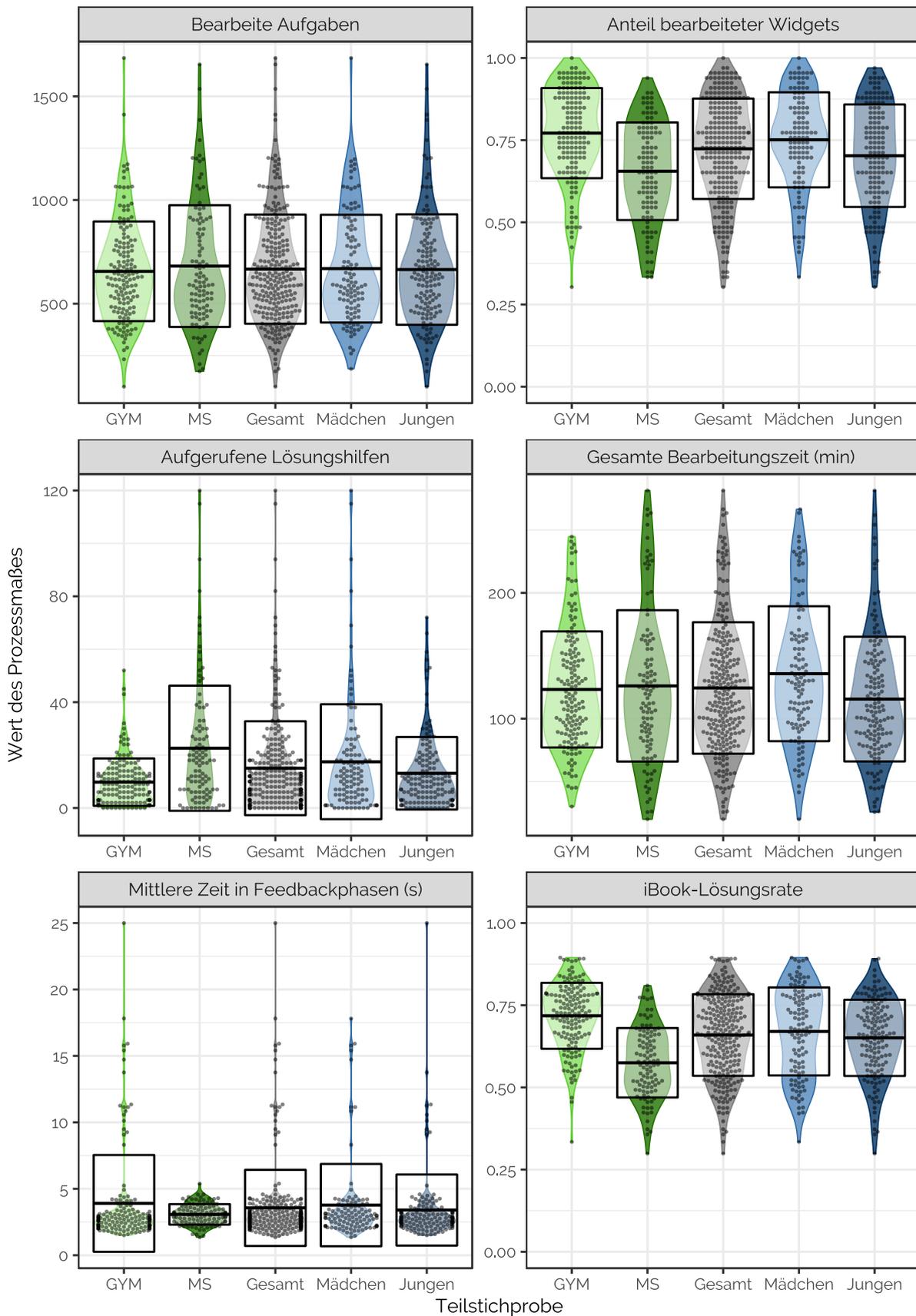


Abbildung 8.6. Pirate Plots der Prozessmaße für die Gesamtstichprobe sowie für die schulart- und geschlechter-spezifischen Teilstichproben. Schwarmdiagramme sowie vertikal und symmetrisch abgebildete Dichtekurven (Violin Plot) beschreiben die Verteilungen. Zusätzlich gezeigt werden Mittelwerte (Linie) mit Standardabweichungen nach oben und unten (Box).

Tabelle 8.1  
Mittelwerte und Standardabweichungen der Prozessmaße.

Prozessmaß	Geschlecht				Schulart				GYM		MS			
	Mädchen		Jungen		GYM		MS		Mädchen		Jungen			
	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)		
Anzahl bearbeiteter Aufgaben	666.65	(263.12)	669.07	(259.90)	664.76	(266.50)	656.23	(240.24)	681.64	(293.48)	669.68	(269.42)	668.29	(249.88)
Anteil bearbeiteter Widgets	.72	(0.15)	.75	(0.14)	.70	(0.16)	.77	(0.14)	.66	(0.15)	.81	(0.12)	.68	(0.14)
Anzahl abgerufener Lösungshilfen	15.02	(17.76)	17.47	(21.73)	13.12	(13.70)	9.77	(8.96)	22.58	(23.66)	10.60	(9.50)	26.31	(28.87)
Gesamte Bearbeitungszeit (min)	124.40	(52.24)	135.75	(53.62)	115.58	(49.54)	123.24	(46.11)	126.07	(60.15)	136.88	(52.13)	134.29	(56.00)
Mittlere Zeit in Feedbackphasen (s)	3.56	(2.87)	3.77	(3.10)	3.40	(2.67)	3.90	(3.64)	3.07	(0.77)	4.35	(3.99)	3.03	(0.80)
iBook-Lösungsrate	.64	(0.13)	.65	(0.14)	.63	(0.12)	.70	(0.11)	.56	(0.11)	.72	(0.12)	.57	(0.11)
											.69	(0.09)	.55	(0.12)

Anmerkung. GYM Gymnasium, MS Mittelschule; *M* Mittelwert, *SD* Standardabweichung

### 8.1.2.2 Unterschiede in der ikonischen Subskala der Prozessmaße

In diesem Abschnitt werden Unterschiede berichtet, die zwischen den Stichprobengruppen bezüglich der Nutzung derjenigen Widgets festgestellt wurden, deren Aufgabenstellung ikonische Repräsentationen von Bruchzahlen thematisiert. Eine tabellarische Übersicht über die Mittelwerte und Standardabweichungen der einzelnen Stichprobengruppen für die ikonische Prozessmaß-Subskala findet sich in Tabelle 8.2.

#### Zählmaße

In Bezug auf die Anzahl der bearbeiteten Einzelaufgaben in Widgets, die ikonische Repräsentationen in der Aufgabenstellung enthalten, ergeben sich keine signifikanten Effekte, weder zwischen Mädchen und Jungen,  $F(1, 252) = 0.46, p = .497$ , noch zwischen den Schularten,  $F(1, 252) = 1.10, p = .295$ , oder in der Interaktion,  $F(1, 252) = 0.00, p = .974$ .

Die Mädchen der Stichprobe nutzten im Mittel einen signifikant größeren Anteil der ikonischen Widgets als die Jungen,  $F(1, 252) = 7.41, p = .007, \eta_p^2 = .03$ . Unabhängig davon (Interaktion:  $F(1, 252) = 0.00, p = .989$ ) wurden an den Gymnasien signifikant mehr Widgets verwendet als an den Mittelschulen,  $F(1, 252) = 41.16, p < .001, \eta_p^2 = .14$ .

Bezüglich der Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen zeigt sich eine signifikante Interaktion zwischen Geschlecht und Schulart,  $F(1, 252) = 5.07, p = .025, \eta_p^2 = .02$ : An der Mittelschule riefen die Mädchen der Stichprobe signifikant mehr Lösungshilfen auf als die anderen Teilstichproben (s. Tabelle 8.2). Zusätzlich ist der Haupteffekt der Schulart signifikant,  $F(1, 252) = 4.93, p = .027, \eta_p^2 = .02$ , der Geschlechtereffekt hingegen nicht,  $F(1, 252) = 2.01, p = .158$ .

#### Zeitmaße

Auch in Widgets mit ikonischen Repräsentationen verbrachten Mädchen im Mittel signifikant mehr Zeit als Jungen,  $F(1, 252) = 5.27, p = .022, \eta_p^2 = .02$  (vgl. Abbildung 8.7). Zwischen den Schularten ergibt sich kein signifikanter Unterschied,  $F(1, 252) = 3.18, p = .076$ ; auch die Geschlecht-Schulart-Interaktion ist nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.02, p = .899$ .

In der gemessenen mittleren Zeit in Feedbackphasen zeigt sich ein signifikanter Schulartunterschied,  $F(1, 252) = 6.80, p = .010, \eta_p^2 = .03$ , wobei Lernende der Gymnasialstichprobe sich im Mittel längere Zeit zwischen einzelnen Aufgaben aufhielten als die der Mittelschulstichprobe (s. Tabelle 8.2). Die anderen beiden Effekte sind nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.08, p = .778$  (Geschlecht) bzw.  $F(1, 252) = 0.17, p = .683$  (Interaktion).

#### Leistungsmaß

In Bezug auf die iBook-Lösungsrate lassen sich in den ikonischen Widgets signifikante Geschlechterunterschiede zugunsten der Mädchen,  $F(1, 252) = 5.51, p = .020, \eta_p^2 = .02$  und zugunsten der Gymnasialstichprobe feststellen,  $F(1, 252) = 60.86, p < .001, \eta_p^2 = .20$  (vgl. Abbildung 8.7). Die Interaktion der beiden Variablen erweist sich als nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.10, p = .752$ .

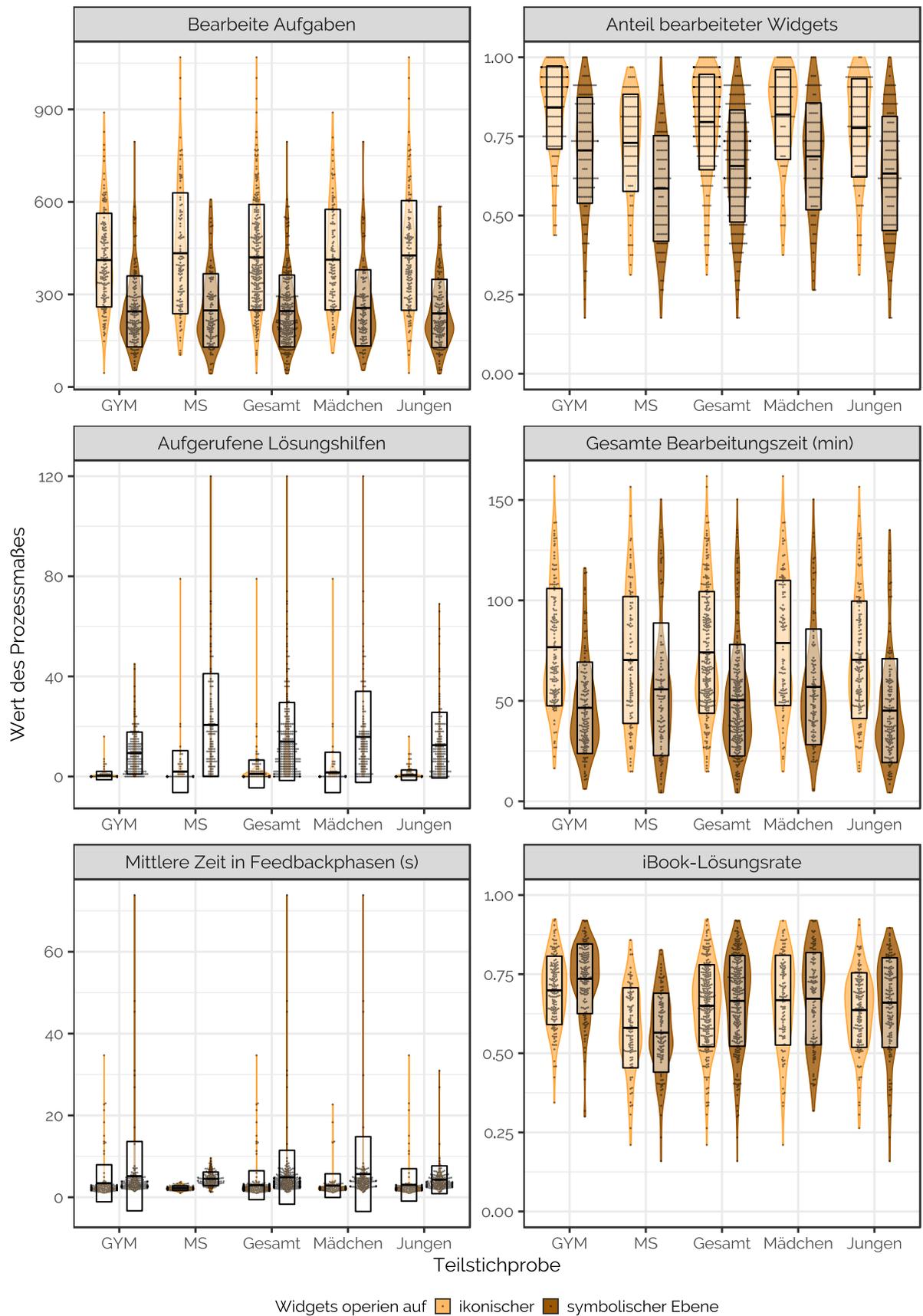


Abbildung 8.7. Pirate Plots der Prozessmaße (ikonische und symbolische Subskalen) für die Gesamtstichprobe sowie für die schulart- und geschlechterspezifischen Teilstichproben. Schwarmdiagramme sowie vertikal und symmetrisch abgebildete Dichtekurven (Violin Plot) beschreiben die Verteilungen. Zusätzlich gezeigt werden Mittelwerte (Linie) mit Standardabweichungen nach oben und unten (Box).

Tabelle 8.2  
Mittelwerte und Standardabweichungen der Prozessmaße (Subskalen).

Prozessmaß	Geschlecht				Schulart				GYM		MS	
	Mädchen		Jungen		GYM		MS		Mädchen	Jungen	Mädchen	Jungen
	M (SD)	M	(SD)	M	(SD)							
<b>Ikonsische Subskala</b>												
Anzahl bearbeiteter Aufgaben	420.47 (171.31)	412.80 (162.98)	426.44 (177.86)	411.36 (151.85)	433.56 (195.98)	403.11 (152.36)	425.25 (176.52)	417.27 (152.08)	440.84 (212.88)			
Anteil bearbeiteter Widgets	.80 (0.15)	.82 (0.14)	.78 (0.16)	.84 (0.13)	.73 (0.15)	.87 (0.12)	.76 (0.14)	.82 (0.14)	.71 (0.16)			
Anzahl abgerufener Lösungshilfen	1.04 (5.55)	1.63 (8.05)	0.58 (2.04)	0.38 (1.66)	1.97 (8.37)	0.19 (0.84)	3.47 (11.95)	0.52 (2.05)	0.66 (2.04)			
Gesamte Bearbeitungszeit (min)	74.10 (30.30)	78.80 (31.15)	70.44 (29.20)	76.71 (29.19)	70.34 (31.59)	82.02 (32.29)	74.67 (29.43)	72.92 (26.28)	66.55 (33.16)			
Mittlere Zeit in Feedbackphasen (s)	2.94 (3.53)	2.84 (2.89)	3.02 (3.97)	3.42 (4.52)	2.25 (0.52)	3.26 (3.78)	2.30 (0.56)	3.54 (5.00)	2.21 (0.49)			
iBook-Lösungsrate	.64 (0.14)	.65 (0.15)	.62 (0.13)	.68 (0.11)	.56 (0.14)	.71 (0.12)	.58 (0.14)	.67 (0.10)	.55 (0.14)			
<b>Symbolische Subskala</b>												
Anzahl bearbeiteter Aufgaben	248.42 (118.67)	258.84 (125.08)	240.31 (113.20)	247.01 (116.50)	250.44 (122.25)	269.19 (136.90)	245.53 (107.94)	231.14 (97.12)	254.73 (134.36)			
Anteil bearbeiteter Widgets	.65 (0.18)	.68 (0.17)	.63 (0.18)	.70 (0.17)	.58 (0.17)	.74 (0.16)	.60 (0.16)	.67 (0.17)	.56 (0.18)			
Anzahl abgerufener Lösungshilfen	14.20 (15.88)	16.12 (18.57)	12.70 (13.29)	9.53 (8.60)	20.91 (20.84)	10.67 (9.84)	23.12 (24.15)	8.72 (7.54)	18.96 (17.44)			
Gesamte Bearbeitungszeit (min)	50.30 (27.73)	56.95 (28.77)	45.14 (25.83)	46.53 (22.74)	55.74 (33.00)	54.86 (25.48)	59.63 (32.60)	40.56 (18.51)	52.33 (33.27)			
Mittlere Zeit in Feedbackphasen (s)	4.89 (6.59)	5.67 (9.15)	4.28 (3.40)	5.16 (8.47)	4.50 (1.65)	6.74 (12.05)	4.30 (1.63)	4.02 (4.13)	4.68 (1.66)			
iBook-Lösungsrate	.64 (0.15)	.65 (0.15)	.64 (0.15)	.71 (0.12)	.55 (0.13)	.73 (0.13)	.55 (0.11)	.70 (0.11)	.54 (0.15)			

Anmerkung. GYM Gymnasium, MS Mittelschule; M Mittelwert, SD Standardabweichung

### 8.1.2.3 Unterschiede in der symbolischen Subskala der Prozessmaße

In diesem Abschnitt wird die Nutzung der Widgets, die auf rein symbolischer Ebene arbeiten, auf Unterschiede untersucht, die zwischen Mädchen und Jungen und der Gymnasial- und Mittelschulstichprobe auftreten. Eine tabellarische Übersicht über die Mittelwerte und Standardabweichungen der einzelnen Stichprobengruppen für die symbolische Prozessmaß-Subskala findet sich in Tabelle 8.2.

#### Zählmaße

Bezüglich der Anzahl an bearbeiteten Einzelaufgaben in Widgets, die auf rein symbolischer Ebene operieren, lassen sich weder signifikante Unterschiede zwischen den Geschlechtern,  $F(1, 252) = 1.48, p = .225$ , noch zwischen den Schularten,  $F(1, 252) = 0.03, p = .875$ , feststellen. Auch die Geschlecht-Schulart-Interaktion ist nicht signifikant,  $F(1, 252) = 2.46, p = .118$ .

In Übereinstimmung mit den bisher berichteten Ergebnissen (vgl. Abschnitte 8.1.2.1 und 8.1.2.2) nutzten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in der Studie einen größeren Anteil an symbolischen Widgets als Mittelschülerinnen und Mittelschüler,  $F(1, 252) = 34.60, p < .001, \eta_p^2 = .12$  – unabhängig vom Geschlecht,  $F(1, 252) = 0.52, p = .471$  (Interaktion). Ebenso zeigt sich ein signifikanter Geschlechterunterschied,  $F(1, 252) = 8.38, p = .004, \eta_p^2 = .03$ : Die Mädchen nutzten einen größeren Anteil an Widgets als die Jungen (vgl. Abbildung 8.7).

Mittelschülerinnen und Mittelschüler riefen in symbolischen Widgets mehr Lösungshilfen auf als die Lernenden der Gymnasialstichprobe,  $F(1, 252) = 35.68, p < .001, \eta_p^2 = .12$  (s. Tabelle 8.2). Der Geschlechtereffekt und die Schulart-Geschlecht-Interaktion sind bezüglich dieses Prozessmaßes nicht signifikant,  $F(1, 252) = 2.26, p = .134$  bzw.  $F(1, 252) = 0.42, p = .519$ .

#### Zeitmaße

Auch für die symbolische Subskala ergibt sich ein signifikanter Unterschied zwischen Mädchen und Jungen in der Zeit, welche die Schülerinnen und Schüler für die Bearbeitung von Aufgaben aufwendeten,  $F(1, 252) = 11.30, p = .001, \eta_p^2 = .04$  (vgl. Abbildung 8.7). Dieser Unterschied ist unabhängig von der Schulart,  $F(1, 252) = 1.04, p = .309$  (Interaktion). Die schulartspezifischen Teilstichproben unterschieden sich allerdings im Gegensatz zu den anderen Skalen in signifikantem Maße,  $F(1, 252) = 6.40, p = .012, \eta_p^2 = .03$ , wobei die Mittelschülerinnen und Mittelschüler im Mittel mehr Zeit für die Aufgabenbearbeitung aufwendeten als die Lernenden am Gymnasium (s. Tabelle 8.2).

Die ANOVA bezüglich der mittleren Zeit in Feedbackphasen für Widgets, die auf rein symbolischer Ebene operieren, ergibt keine signifikanten Effekte,  $F(1, 252) = 3.03, p = .083$  (Geschlecht),  $F(1, 252) = 0.76, p = .383$  (Schulart) bzw.  $F(1, 252) = 3.43, p = .065$  (Interaktion). Der in Abschnitt 8.1.2.1 berichtete Schulartunterschied für dieses Prozessmaß ist somit auf die ikonischen Widgets zurückzuführen (vgl. Abschnitt 8.1.2.2).

## Leistungsmaß

In Bezug auf die symbolische Subskala der Prozessmaße zeigt sich in der iBook-Lösungsrate nur ein signifikanter Schulartunterschied,  $F(1, 252) = 111.43, p < .001, \eta_p^2 = .31$ , wobei die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten höhere Lösungsraten erzielten als die Schülerinnen und Schüler aus den Mittelschulen (vgl. Abbildung 8.7). Der Geschlechtereffekt ist – im Gegensatz zu den anderen Skalen, vgl. Abschnitte 8.1.2.1 und 8.1.2.2 – für die symbolische Subskala nicht signifikant,  $F(1, 252) = 2.39, p = .123$ . Auch der Interaktionseffekt ist nicht signifikant,  $F(1, 252) = 0.70, p = .404$ .

### 8.1.3 Zusammenhang der Prozessmaße mit dem Lernerfolg

In diesem Abschnitt werden die Prozessmaße mit den Nachtestergebnissen der Schülerinnen und Schüler für die beiden Schularten in Zusammenhang gestellt. Die dazu benutzten Modelle werden in Abschnitt 8.1.3.1 beschrieben. In den Abschnitten 8.1.3.2 und 8.1.3.3 finden sich die Ergebnisse für die tendenziell leistungsstärkere Gymnasialstichprobe bzw. die leistungsschwächere Mittelschulstichprobe, jeweils bezüglich der gesamten Posttestskala sowie der ikonischen und symbolischen Subskala (s. Abschnitte 7.2.3 und 7.3). Die schulartspezifischen Ergebnisse werden in Abschnitt 8.1.3.4 gegenübergestellt.

#### 8.1.3.1 Verwendete Modelle

Im Folgenden werden für die beiden Stichproben der Studie (Gymnasium und Mittelschule) die vier GLMMs beschrieben, die zur Prädiktion der Posttests genutzt wurden. Dazu wurde die Lösungswahrscheinlichkeit der einzelnen Items in Abhängigkeit von den Prozessmaßen geschätzt. Die Verknüpfung zu der dichotomen Codierung der Lösung (0 = falsch, 1 = richtig) erfolgte über eine binomiale Linkfunktion; die geschätzten Parameter liegen als *Log-Odds* vor, die wie in Abschnitt 7.8.1 beschrieben in Wahrscheinlichkeiten umgerechnet werden können.

Die vier Modelle bauen hierarchisch aufeinander auf; Null- und Vergleichsmodell stellt dabei Modell 0 dar, das die Lösungswahrscheinlichkeit von Posttestitems in Abhängigkeit von der Lösungsrate im Pretest (0.00–1.00) und dem Geschlecht (0 = Mädchen, 1 = Junge) schätzt. Zusätzlich berücksichtigt das Modell *random intercepts* auf Item-, Lernenden- sowie Klassenebene. Diese können interpretiert werden als Variation in der Schwierigkeit der Posttestitems, in der Kompetenz der Lernenden und im allgemeinen Leistungsniveau der Klassen.

Die zudem betrachteten Modelle erweitern das Nullmodell, indem die in Abschnitt 7.2.3 beschriebenen Prozessmaße schrittweise als *fixed effects* aufgenommen werden.<sup>3</sup>

Modell 1 benutzt als Prozessmaßprädiktoren die drei Zählmaße – **Anzahl bearbeiteter Aufgaben** (aus Skalierungsgründen dividiert durch 100), **Anteil an bearbeiteten Widgets** (0.00–1.00) und **Anzahl an genutzten Lösungshilfen**.

<sup>3</sup>Für eine volle Spezifizierung mit den entsprechenden *random slopes* gemäß Barr, Levy, Scheepers und Tily (2013) ist die Datenmenge zu gering.

Modell 2 betrachtet neben den Zählmaßen die beiden Zeitmaße – *gesamte Bearbeitungszeit* in Minuten und *mittlere Zeit in Feedbackphasen* in Sekunden.

Modell 3 nimmt zusätzlich zu den betrachteten Zähl- und Zeitmaßen die durchschnittliche *iBook-Lösungsrate* als Leistungsmaß auf.

Abbildung 8.8 gibt einen Überblick über die unterschiedlichen Modelle. Die hierarchische Gliederung der Modelle, in der das Nullmodell zunächst nur um Zählmaße, anschließend um Zähl- und Zeitmaße und abschließend um Zähl- und Zeitmaße sowie um das Leistungsmaß erweitert wird, erlaubt es, die Prädiktionsgüte der unterschiedlichen Prozessmaßarten zu beobachten.

$Y \sim \beta_0$	<i>Fixed Intercept</i> (in allen Modellen)
+ $\beta_1$ Vortest	<i>Fixed Effect</i> (in allen Modellen)
+ $\beta_2$ Geschlecht	<i>Fixed Effect</i> (in allen Modellen)
+ $\beta_3$ Bearbeitete Aufgaben	<i>Fixed Effects</i> (nur in Modellen 1–3)
+ $\beta_4$ Anteil bearbeiteter Widgets	
+ $\beta_5$ Aufgerufene Lösungshilfen	
+ $\beta_6$ Mittlere Zeit in Feedbackphasen	<i>Fixed Effects</i> (nur in Modellen 2–3)
+ $\beta_7$ Gesamte Bearbeitungszeit	
+ $\beta_8$ iBook-Lösungsrate	<i>Fixed Effect</i> (nur in Modell 3)
+ $(b_{0i})$	<i>Random Intercept</i> über Items (in allen Modellen)
+ $(b_{0s})$	<i>Random Intercept</i> über Schülerinnen und Schülern (in allen Modellen)
+ $(b_{0c})$	<i>Random Intercept</i> über Klassen (in allen Modellen)

Abbildung 8.8. Prädiktorvariablen in den Prädiktionsmodellen.  $Y$  generierte Prädiktion (*Log-Odds* für die korrekte Lösung eines Posttestitems).

Die Modellschätzungen erfolgen mit am Stichprobenmittelwert zentrierten Daten. Daher kann der *fixed intercept* in allen Modellen interpretiert werden als die *Log-Odds*, ein Item des Nachtests korrekt zu beantworten, die ein Mädchen<sup>4</sup> der Stichprobe hatte, welches für alle betrachteten Maße im Stichprobendurchschnitt lag. Bei signifikanten Effekten der Prädiktoren (hier: Vortestergebnis und Prozessmaße) stehen positive (hier: überdurchschnittliche) Schätzwerte für eine Erhöhung dieser *Log-Odds*, negative (hier: unterdurchschnittliche) für eine Verminderung. Diese Interpretation gilt auch in Übertragung auf die Lösungswahrscheinlichkeiten.

Die folgenden Abschnitte 8.1.3.2 (Gymnasium) und 8.1.3.3 (Mittelschule) beschreiben die schulartspezifischen Ergebnisse. Sie sind jeweils wie folgt gegliedert: Zunächst werden

<sup>4</sup>aufgrund der Geschlechtercodierung 0 = Mädchen, 1 = Junge

die Schätzungen, die aus den eben beschriebenen Modellen 0–3 resultieren, für die Lösungswahrscheinlichkeiten sämtlicher Posttestitems, das heißt für den gesamten Nachtest, berichtet. Dabei werden die Lösungswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von den Prozessmaßen geschätzt, welche aus den Nutzungsdaten des gesamten iBooks bestimmt wurden. Im Anschluss werden die Resultate für die Lösungswahrscheinlichkeiten der Items aus den ikonischen und symbolischen Subskalen im Nachtest ausgeführt. Zu Prädiktion dieser Skalen werden jeweils dieselben vier Modelle genutzt (Abbildung 8.8); allerdings werden zur Schätzung die entsprechenden Subskalen der Prozessmaße verwendet (vgl. Abschnitt 7.2.3): Der Posttest-Subskala entsprechend werden nur jeweils die Widgets berücksichtigt, die ikonische Repräsentationen beinhalten (ikonische Subskala) bzw. auf symbolischer Ebene operieren (symbolische Subskala). Im Bericht der Ergebnisse der Subskalen werden die Resultate bezüglich des gesamten Nachtests referenziert.

### 8.1.3.2 Ergebnisse der Gymnasialstichprobe

Der folgende Abschnitt beschreibt die Ergebnisse der Modellschätzungen für die Gymnasialstichprobe ( $N = 151$ ). Dabei wird zunächst die Schätzung für die Lösungswahrscheinlichkeit sämtlicher Posttestitems berichtet. Anschließend werden die Ergebnisse für die Items der ikonischen und symbolischen Subskalen mit den entsprechend eingeschränkten Prozessmaßen dargestellt. Die Ergebnisse werden jeweils zu den Prädiktionsmodellen des gesamten Nachtests in Bezug gesetzt.

#### Gesamter Posttest

Die Parameterschätzungen der Modelle finden sich in Tabelle 8.3.

Alle Modelle zeigen einen signifikanten *fixed intercept* (Modell 0:  $z = 5.66$ ; Modell 1:  $z = 6.06$ ; Modell 2:  $z = 5.71$ ; Modell 3:  $z = 5.57$ ),  $ps < .001$ . Dieser kann als Grund-Log-Odd für die korrekte Lösung einer Aufgabe im Posttest von einem Mädchen mit mittlerem Vorwissen angesehen werden. Die korrespondierenden Lösungswahrscheinlichkeiten sind 76.0 % (Modell 0), 74.8 % (Modell 1), 73.7 % (Modell 2) bzw. 73.2 % (Modell 3). Zudem ergibt sich jeweils ein signifikanter, positiver Effekt des *Vorwissens* (Modell 0:  $z = 8.04$ ; Modell 1:  $z = 7.38$ ; Modell 2:  $z = 7.76$ ; Modell 3:  $z = 5.89$ ),  $ps < .001$ .

In keinem Modell zeigt sich ein signifikanter Effekt des *Geschlechts* oder der *mittleren Zeit in Feedbackphasen* auf die Lösungswahrscheinlichkeiten im Posttest.<sup>5</sup> Die *Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen* fließt nur in Modell 1 signifikant ein,  $z = -2.03$ ,  $p = .042$ . Mit  $\beta_5 = -0.01$  liegt hier jedoch ein sehr kleiner Effekt vor. Der *fixed effect* der *Anzahl an bearbeiteten Aufgaben* ist nur in Modell 2 signifikant,  $z = -2.027$ ,  $p = .043$ .

<sup>5</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: *Geschlecht* (Modell 0:  $z = -1.48$ ,  $p = .138$ ; Modell 1:  $z = -0.63$ ,  $p = .530$ ; Modell 2:  $z = 0.22$ ,  $p = .825$ ; Modell 3:  $z = 0.57$ ,  $p = .569$ ), *Anzahl bearbeiteter Aufgaben* (Modell 1:  $z = -0.05$ ,  $p = .958$ ; Modell 3:  $z = -0.69$ ,  $p = .491$ ), *Anzahl aufgerufener Lösungshilfen* (Modell 2:  $z = -1.50$ ,  $p = .134$ ; Modell 3:  $z = -0.57$ ,  $p = .569$ ), *mittlere Zeit in Feedbackphasen* (Modell 2:  $z = 0.58$ ,  $p = .565$ ; Modell 3:  $z = 0.35$ ,  $p = .724$ ).

Tabelle 8.3  
Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle (Gymnasialstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
<i>Fixed Effects</i>	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
Intercept	1.15***	0.20	1.09***	0.18	1.03***	0.18	1.01***	0.18
Vortest	1.72***	0.21	1.50***	0.20	1.54***	0.20	1.21***	0.21
Geschlecht	-0.18	0.12	-0.07	0.12	0.03	0.12	0.06	0.11
Bearbeitete Aufgaben			-0.00	0.03	-0.08*	0.04	-0.03	0.04
Anteil bearbeiteter Widgets			2.40***	0.51	1.77***	0.53	1.11*	0.53
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.01*	0.01	-0.01	0.01	-0.00	0.01
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					0.01	0.02	0.01	0.02
Gesamte Bearbeitungszeit					0.42**	0.15	0.20	0.15
iBook-Lösungsrate							2.70***	0.67
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	0.91	0.95	0.90	0.95	0.90	0.95	0.90	0.95
Schülerin/Schüler	0.35	0.59	0.29	0.54	0.26	0.51	0.22	0.47
Klasse	0.05	0.23	0.00	0.06	0.01	0.08	0.01	0.10
<i>PCV</i>	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		.01		.01		0.00	
Schülerin/Schüler	-		.16		.25		.38	
Klasse	-		.94		.89		.79	
<i>R<sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>
	.05	.32	.07	.32	.08	.32	.08	.32
<i>Likelihood Ratio Test</i>	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		24.13***		9.25**		15.22***	

Anmerkung. 5738 Datenpunkte, 151 Schülerinnen und Schüler; 6 Klassen; 38 Items. Schätzungen in *Log-Odds*. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$ .

In allen Prozessmaßmodellen zeigt sich ein signifikanter, positiver Einfluss des **Anteils an bearbeiteten Widgets** auf die Lösungswahrscheinlichkeit im Posttest (Modell 1:  $z = 4.74$ ,  $p < .001$ ; Modell 2:  $z = 3.32$ ,  $p < .001$ ; Modell 3:  $z = 2.09$ ,  $p = .037$ ). Der signifikante, positive Einfluss der gemessenen **gesamten Bearbeitungszeit** (Modell 2:  $z = 2.88$ ,  $p = .004$ ) wird durch die Aufnahme der **iBook-Lösungsrate** als Prädiktor aufgelöst (Modell 3:  $z = 1.35$ ,  $p = .176$ ). Diese erweist sich mit  $\beta_8 = 2.70$  als signifikanter, positiver Effekt,  $z = 4.01$ ,  $p < .001$ .

Von den im Nullmodell bestimmten Varianzen werden 15.7 % der Varianz auf Lernendenebene, 93.6 % der Varianz auf Klassenebene und 0.6 % auf Itemebene durch Modell 1 aufgeklärt. In Modell 2 steigt die relative Veränderung der Varianz auf Lernendenebene auf 25.0 %, während sich der PCV-Wert auf Itemebene kaum verändert (0.6 %) und der Wert auf Klas-

senebene sinkt (88.6 %). Modell 3 erklärt schließlich 38.0 % der in Modell 0 berechneten Varianz auf Ebene der Schülerinnen und Schüler. Die beiden anderen PCV-Werte sinken im Vergleich zu den Modellen 1 und 2 leicht auf 0.5 % (Itemebene) bzw. 79.2 % (Klassenebene).

### Ikonische Subskala

Angewandt auf die Posttestitems der ikonischen Subskala und unter Verwendung der Prozessmaße aus den Widgets, die mit ikonischen Repräsentationen von Bruchzahlen arbeiten, ergeben die Modelle Effektschätzungen und Signifikanzen, wie sie in Tabelle 8.4 aufgelistet sind.

Tabelle 8.4

Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die ikonische Subskala (Gymnasialstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
<i>Fixed Effects</i>	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
Intercept	1.43***	0.20	1.18***	0.29	1.19***	0.29	1.22***	0.28
Vortest	1.66***	0.24	1.57***	0.24	1.58***	0.23	1.15***	0.25
Geschlecht	-0.17	0.14	-0.09	0.14	-0.06	0.14	0.02	0.13
Bearbeitete Aufgaben			-0.03	0.05	-0.09	0.07	-0.02	0.07
Anteil bearbeiteter Widgets			1.73**	0.63	1.46*	0.66	1.11	0.64
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.02	0.04	-0.01	0.04	-0.01	0.04
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					0.01	0.02	0.02	0.01
Gesamte Bearbeitungszeit					0.40	0.25	0.20	0.25
iBook-Lösungsrate							2.34***	0.67
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	0.41	0.64	0.41	0.64	0.41	0.64	0.41	0.64
Schülerin/Schüler	0.29	0.54	0.25	0.50	0.24	0.49	0.19	0.43
Klasse	0.04	0.21	0.05	0.22	0.05	0.22	0.05	0.22
<i>PCV</i>	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		-0.00		-0.00		-0.00	
Schülerin/Schüler	-		.12		.18		.35	
Klasse	-		-.09		-.19		-.19	
<i>R<sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>
	.05	.23	.06	.23	.07	.23	.08	.23
<i>Likelihood Ratio Test</i>	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		8.05*		3.77		11.70***	

Anmerkung. 2718 Datenpunkte, 151 Schülerinnen und Schüler; 6 Klassen; 18 Items. Schätzungen in Log-Odds. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

In Übereinstimmung mit den Prädiktionsmodellen für den gesamten Posttest ergibt sich auch hier jeweils ein signifikanter, positiver *fixed intercept* in allen Modellen (Modell 0:  $z = 7.02$ ; Modell 1:  $z = 4.11$ ; Modell 2:  $z = 4.15$ ; Modell 3:  $z = 4.34$ ),  $ps < .001$ , mit korrespondierenden Lösungswahrscheinlichkeiten von 80.7 % (Modell 0), 76.6 % (Modell 1), 76.7 % (Modell 2) bzw. 77.2 % (Modell 3); diese liegen stets über den geschätzten Lösungswahrscheinlichkeiten für sämtliche Nachtestitems. Ebenso ist der Einfluss des *Vorwissens* stets signifikant und positiv, (Modell 0:  $z = 6.87$ ; Modell 1:  $z = 6.66$ ; Modell 2:  $z = 6.75$ ; Modell 3:  $z = 4.53$ ),  $ps < .001$ .

In Modellen 1 und 2 zeigt sich der *Anteil an bearbeiteten Widgets* als einziger signifikanter *fixed effect* eines Prozessmaßes (Modell 1:  $z = 2.75$ ,  $p = .006$ ; Modell 2:  $z = 2.21$ ,  $p = .027$ ). Wird die *iBook-Lösungsrate* als *fixed effect* in das Modell aufgenommen, so wird diese Signifikanz aufgelöst (Modell 3:  $z = 1.73$ ,  $p = .084$ ); dies ist im entsprechenden Modell, das sich auf den gesamten Posttest bezieht, nicht der Fall. Ebenso keine Signifikanzen ergeben sich für die – im entsprechenden Gesamtposttestmodell signifikanten – *fixed effects* der *Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen* in Modell 1 ( $z = -0.56$ ,  $p = .577$ ) und der *gesamten Bearbeitungszeit* in Visualisierungswidgets ( $z = 1.58$ ,  $p = .114$ ) sowie der *Anzahl an bearbeiteten Aufgaben* in Modell 2 ( $z = -0.35$ ,  $p = .727$ ). Die *iBook-Lösungsrate* ist auch für die ikonische Subskala ein signifikanter, positiver Prädiktor,  $z = 3.50$ ,  $p < .001$ .

Alle weiteren *fixed effects* sind – wie im Modell bezogen auf die Gesamtskala – nicht signifikant.<sup>6</sup>

Die Modelle zeigen in den *random effects*, dass die Subskala-Items in ihrer Schwierigkeit variieren. Diese Varianz auf Itemebene fällt geringer aus als bei Betrachtung aller Posttestitems und wird durch die Prozessmaßmodelle nicht nennenswert verringert. Zudem ergeben die Modelle eine Variation auf Ebene der Schülerinnen und Schüler, die von  $\text{Var}(b_{0s}) = 0.29$  ( $\text{SD}(b_{0s}) = 0.54$ , Modell 0) schrittweise bis auf  $\text{Var}(b_{0s}) = 0.19$  ( $\text{SD}(b_{0s}) = 0.43$ , Modell 3) reduziert wird. Die geschätzten Lernendenvarianzen bewegen sich dabei stets leicht unter denen aus den Modellen für den gesamten Nachtest. Die geringe Klassenvarianz in Modell 0 von  $\text{Var}(b_{0c}) = 0.04$  ( $\text{SD}(b_{0c}) = 0.21$ ) wird durch kein Prozessmaßmodell nennenswert erklärt. Hier unterscheiden sich die Modellschätzungen der Subskala deutlich von denen der Gesamtskala.

### Symbolische Subskala

Nutzt man zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit, Posttestitems aus der symbolischen Subskala korrekt zu lösen, die Prozessmaße aus denjenigen Widgets, die auf rein symbolischer Ebene operieren, so ergibt sich ein zu den Ergebnissen der Gesamtskala ähnliches Bild (s. Tabelle 8.5).

<sup>6</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: *Geschlecht* (Modell 0:  $z = -1.25$ ,  $p = .213$ ; Modell 1:  $z = -0.62$ ,  $p = .539$ ; Modell 2:  $z = -0.44$ ,  $p = .660$ ; Modell 3:  $z = 0.17$ ,  $p = .867$ ), *Anzahl bearbeiteter Aufgaben* (Modell 1:  $z = -0.49$ ,  $p = .621$ ; Modell 3:  $z = -0.29$ ,  $p = .774$ ), *Anzahl aufgerufener Lösungshilfen* (Modell 2:  $z = -0.35$ ,  $p = .727$ ; Modell 3:  $z = -0.19$ ,  $p = .849$ ), *mittlere Zeit in Feedbackphasen* (Modell 2:  $z = 0.94$ ,  $p = .349$ ; Modell 3:  $z = 1.08$ ,  $p = .279$ ), *gesamte Bearbeitungszeit* (Modell 3:  $z = 0.82$ ,  $p = .413$ ).

Tabelle 8.5

Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die symbolische Subskala (Gymnasialstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
<i>Fixed Effects</i>	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
Intercept	0.86*	0.33	1.07***	0.32	1.03**	0.31	0.95**	0.31
Vortest	1.77***	0.26	1.52***	0.25	1.56***	0.24	1.44***	0.24
Geschlecht	-0.14	0.15	-0.02	0.14	0.12	0.15	0.13	0.15
Bearbeitete Aufgaben			0.05	0.08	-0.24*	0.11	-0.14	0.12
Anteil bearbeiteter Widgets			2.11***	0.52	1.23*	0.55	0.98	0.55
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.02*	0.01	-0.01	0.01	-0.01	0.01
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					-0.00	0.01	-0.00	0.01
Gesamte Bearbeitungszeit					1.43***	0.41	1.03*	0.43
iBook-Lösungsrate							1.55*	0.66
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	1.39	1.18	1.38	1.18	1.38	1.17	1.38	1.17
Schülerin/Schüler	0.42	0.65	0.33	0.57	0.27	0.52	0.25	0.50
Klasse	0.13	0.35	0.04	0.20	0.03	0.18	0.02	0.15
<i>PCV</i>	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		.01		.01		.01	
Schülerin/Schüler	-		.22		.35		.39	
Klasse	-		.67		.73		.82	
<i>R<sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>
	.05	.40	.08	.40	.09	.40	.09	.40
<i>Likelihood Ratio Test</i>	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		24.14***		12.35**		5.34*	

Anmerkung. 2718 Datenpunkte, 151 Schülerinnen und Schüler; 6 Klassen; 18 Items. Schätzungen in *Log-Odds*. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = *conditional R<sup>2</sup>* (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

Im Gleichklang zu den Ergebnissen der gesamten Posttestskala sowie der ikonischen Subskala ergeben sich für die symbolische Subskala signifikante *fixed intercepts* (alle Modelle; Modell 0:  $z = 2.59$ ,  $p = .010$ ; Modell 1:  $z = 3.37$ ,  $p < .001$ ; Modell 2:  $z = 3.27$ ,  $p = .001$ ; Modell 3:  $z = 3.04$ ,  $p = .002$ ), die äquivalent zu folgenden Lösungswahrscheinlichkeiten sind: 70.3 % (Modell 0), 74.4 % (Modell 1), 73.6 % (Modell 2) bzw. 72.1 % (Modell 3). Für die symbolische Subskala fallen diese Grundwahrscheinlichkeiten niedriger aus als für die ikonische Subskala sowie die Gesamtskala. Ebenso zeigen sich in Übereinstimmung mit den bisher für diese Stichprobe berichteten Ergebnissen signifikante *fixed effects* des *Vorwissens* (alle Modelle; Modell 0:  $z = 6.83$  Modell 1:  $z = 6.09$  Modell 2:  $z = 6.45$  Modell 3:  $z = 5.92$ ),  $ps < .001$ , des *Anteils an bearbeiteten Widgets* in Modellen 1 & 2 (Modell 1:  $z = 4.09$ ,  $p < .001$ ; Modell 2:  $z = 2.24$ ,  $p = .025$ ), der *Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen*

in Modell 1 ( $z = -2.16, p = .031$ ), der Anzahl an bearbeiteten Aufgaben in Modell 2 ( $z = -2.17, p = .030$ ), der gesamten Bearbeitungszeit in Modell 2 ( $z = 3.52, p < .001$ ) und der iBook-Lösungsrate (Modell 3:  $z = 2.34, p = .020$ ). Hingegen lässt sich kein signifikanter Einfluss des Geschlechts und der mittleren Zeit in Feedbackphasen in allen Modellen feststellen.<sup>7</sup>

Im Gegensatz zu den Modellschätzungen bezüglich des gesamten Nachtests bleibt für die symbolische Subskala der Einfluss der gesamten Bearbeitungszeit in Modell 3 signifikant ( $z = 2.40, p = .016$ ); dahingegen verliert der Effekt des Anteils an bearbeiteten Widgets in Modell 3 seine Signifikanz ( $z = 1.78, p = .075$ ).

Die Modelle ergeben *random intercepts* auf Itemebene zwischen 1.39 (Modell 0) und 1.38 (Modell 1), können also kaum Varianz zwischen den Items aufklären (PCV maximal 0.7 %, vgl. Tabelle 8.5). Auf Klassenebene zeigt sich im Nullmodell eine Varianz von  $\text{Var}(b_{0c}) = 0.13$  ( $\text{SD}(b_{0c}) = 0.35$ ), die durch die Prozessmaßmodelle um bis zu 81.7 % (Modell 3; Modell 1: 66.6 %, Modell 2: 72.9 %) aufgeklärt werden kann. Auch die Varianz auf Ebene der Schülerinnen und Schüler in Modell 0 (0.42) wird durch die Prozessmaßmodelle sukzessive bis zu 39.0 % reduziert (Modell 3; Modell 1: 21.6 %, Modell 2: 34.8 %). Alle Varianzen der *random effects* fallen höher aus als in den Schätzungen bezüglich des gesamten Nachtests.

### 8.1.3.3 Ergebnisse der Mittelschulstichprobe

Aufgrund des – im Vergleich zur Gymnasialstichprobe kleineren – Stichprobenumfangs ( $N = 105$ ) sind die in Abschnitt 8.1.3.1 beschriebenen Modelle 1–3 für die Mittelschuldaten überspezifiziert. Daher werden im Folgenden die Modellschätzungen für entsprechende Modelle ohne den *random intercept* auf Klassenebene berichtet. Das volle Nullmodell, das auch mit der Mittelschulstichprobe ohne Einschränkungen berechnet werden kann, schätzt die Varianz auf Klassenebene auf 0.04, so dass der Informationsverlust durch die Exklusion des *random intercepts* als gering eingestuft werden kann.

### Gesamter Posttest

Alle Modelle zeigen einen signifikanten, negativen *fixed intercept* (Modell 0:  $z = -4.55$ ; Modell 1:  $z = -4.69$ ; Modell 2:  $z = -4.85$ ; Modell 3:  $z = -4.86$ ),  $ps < .001$ . Die korrespondierenden Lösungswahrscheinlichkeiten lauten 27.0 % (Modell 0), 26.7 % (Modell 1), 26.0 % (Modell 2) bzw. 26.3 % (Modell 3). Es ergibt sich jeweils ein signifikanter, positiver Einfluss des Vorwissens (Modell 0:  $z = 4.99$ ; Modell 1:  $z = 4.26$ ; Modell 2:  $z = 4.38$ ; Modell 3:  $z = 3.41$ ),  $ps < .001$ , auf die Log-Odds für die Lösung von Posttestitems. Zusätzlich weisen die Modelle 1–3 signifikante *fixed effects* von der Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen auf (Modell 1:  $z = -3.20, p = .001$ , Modell 2:  $z = -3.23, p = .001$ , Modell 3:  $z = -2.91, p = .004$ );

<sup>7</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: Geschlecht (Modell 0:  $z = -0.96, p = .336$ ; Modell 1:  $z = -0.12, p = .905$ ; Modell 2:  $z = 0.81, p = .421$ ; Modell 3:  $z = 0.87, p = .382$ ), Anzahl bearbeiteter Aufgaben (Modell 1:  $z = 0.71, p = .477$ ; Modell 3:  $z = -1.20, p = .231$ ), Anzahl aufgerufener Lösungshilfen (Modell 2:  $z = -1.73, p = .083$ ; Modell 3:  $z = -1.37, p = .172$ ), mittlere Zeit in Feedbackphasen (Modell 2:  $z = -0.22, p = .829$ ; Modell 3:  $z = -0.07, p = .943$ ).

das Maß zeigt allerdings einen leicht negativen Einfluss. Die Parameterschätzungen der Modelle finden sich in Tabelle 8.6.

Tabelle 8.6  
Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle (Mittelschulstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
<i>Fixed Effects</i>	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
Intercept	-0.99***	0.22	-1.01***	0.22	-1.05***	0.22	-1.03***	0.21
Vortest	1.67***	0.33	1.32***	0.31	1.33***	0.30	0.97***	0.28
Geschlecht	-0.03	0.15	-0.01	0.14	0.07	0.15	0.04	0.13
Bearbeitete Aufgaben			0.04	0.03	-0.03	0.05	0.04	0.05
Anteil bearbeiteter Widgets			1.66**	0.62	1.54*	0.65	1.00	0.60
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.01**	0.00	-0.01**	0.00	-0.01**	0.00
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					-0.03	0.09	0.06	0.09
Gesamte Bearbeitungszeit					0.24*	0.12	-0.05	0.13
iBook-Lösungsrate							3.08***	0.67
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	1.37	1.17	1.37	1.17	1.37	1.17	1.37	1.17
Schülerin/Schüler	0.37	0.61	0.27	0.52	0.25	0.50	0.18	0.42
<i>PCV</i>	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		0.00		0.00		0.00	
Schülerin/Schüler	-		.28		.33		.52	
<i>R<sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>
	.03	.36	.05	.36	.05	.36	.06	.36
<i>Likelihood Ratio Test</i>	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		22.86***		4.10		19.31***	

Anmerkung. 3990 Datenpunkte, 105 Schülerinnen und Schüler; 38 Items. Schätzungen in *Log-Odds*. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = *conditional R<sup>2</sup>* (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

Weder konnte ein signifikanter Effekt des Geschlechts (alle Modelle) noch der Anzahl an bearbeiteten Aufgaben (Modelle 1–3) oder der mittleren Zeit in Feedbackphasen (Modelle 2 und 3) gefunden werden.<sup>8</sup>

Der signifikante, positive Einfluss der gemessenen gesamten Bearbeitungszeit in Modell 2 ( $z = 2.02, p = .043$ ) wird durch die Aufnahme der iBook-internen Lösungsrate in die

<sup>8</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: Geschlecht (Modell 0:  $z = -0.23, p = .821$ ; Modell 1:  $z = -0.06, p = .951$ ; Modell 2:  $z = 0.47, p = .639$ ; Modell 3:  $z = 0.27, p = .790$ ), Anzahl bearbeiteter Aufgaben (Modell 1:  $z = 1.09, p = .275$ ; Modell 2:  $z = -0.57, p = .571$ ; Modell 3:  $z = 0.80, p = .426$ ), mittlere Zeit in Feedbackphasen (Modell 2:  $z = -0.35, p = .728$ ; Modell 3:  $z = 0.71, p = .480$ ).

Modellrechnung aufgelöst (Modell 3:  $z = -0.42, p = .675$ ), ebenso der in Modellen 1–2 signifikante *fixed effect* des **Anteils an bearbeiteten Widgets** (Modell 1:  $z = 2.69, p = .007$ ; Modell 2:  $z = 2.37, p = .018$ ; Modell 3:  $z = 1.66, p = .096$ ). Die **iBook-Lösungsrate** erweist sich als signifikant positiver Effekt,  $z = 4.59, p < .001$ .

Den PCV-Werten zufolge erklären die Modelle faktisch keine der im Nullmodell ermittelten Varianz auf Itemebene (Modell 1: 0.0 %; Modell 2: 0.0 %; Modell 3: 0.1 %). Auf Ebene der Schülerinnen und Schüler hingegen ergibt sich in Modell 1 eine relative Veränderung der Varianz um 27.7 %, in Modell 2 um 32.8 % und in Modell 3 um 51.8 %.

### Ikonische Subskala

Für die Wahrscheinlichkeit, Nachtestitems aus der ikonischen Subskala korrekt zu lösen, ergibt sich bei Verwendung der Prozessmaße, die aus den entsprechenden Widgets berechnet wurden, ein signifikanter, negativer *fixed intercept* in allen Modellen (Modell 0:  $z = -2.09, p = .037$ ; Modell 1:  $z = -3.19, p = .001$ ; Modell 2:  $z = -3.11, p = .002$ ; Modell 3:  $z = -3.06, p = .002$ ). Die entsprechenden Lösungswahrscheinlichkeiten lauten 37.5 % (Modell 0), 30.3 % (Modell 1), 27.7 % (Modell 2) bzw. 28.6 % (Modell 3); sie fallen allesamt höher aus als in den Modellschätzungen, die den Gesamttest betreffen. Ein signifikanter, positiver *fixed effect* hingegen zeigt sich in allen Modellen im **Vorwissen** (Modell 0:  $z = 4.38, p < .001$ ; Modell 1:  $z = 3.77, p < .001$ ; Modell 2:  $z = 3.42, p < .001$ ; Modell 3:  $z = 2.68, p = .007$ ). Zudem fließt der **Anteil bearbeiteter Widgets** in den Modellen 1 und 2 signifikant positiv in die Prädiktion ein (Modell 1:  $z = 2.63, p = .008$ ; Modell 2:  $z = 2.56, p = .010$ ). Diese Schätzungen stimmen bezüglich der Signifikanz und des Vorzeichens mit den eben betrachteten für den gesamten Posttest überein.

Durch die Aufnahme der **iBook-Lösungsrate**, die – wie im Modell für die Gesamtskala – einen signifikanten Einfluss ausübt ( $z = 3.34, p < .001$ ), verliert der Effekt des **Anteils bearbeiteter Widgets** wie in Ergebnissen für den gesamten Posttest seine Signifikanz (Modell 3:  $z = 1.82, p = .068$ ). Der Einfluss der **Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen** wird in Modell 3 signifikant ( $z = -2.18, p = .029$ ), im Unterschied zur Prädiktion des gesamten Posttests allerdings nicht in Modell 1 ( $z = -1.85, p = .064$ ) und Modell 2 ( $z = -1.93, p = .054$ ). Die restlichen *fixed effects* sind nicht signifikant, insbesondere der im Gesamtmodell signifikante Einfluss der **gesamten Bearbeitungszeit** in Modell 2 (hier:  $z = 0.77, p = .442$ ).<sup>9</sup> Die Parameterschätzungen sind in Tabelle 8.7 aufgeführt.

Der *random intercept* auf Itemebene zeigt, dass die Schwierigkeiten der Items – wie bei Betrachtung des gesamten Posttests – variieren; die Varianz fällt dabei im Vergleich geringer aus als auf der Gesamtskala und wird von den Prozessmaßmodellen nicht nennenswert verringert (Modell 0:  $\text{Var}(b_{0i}) = 0.86, \text{SD}(b_{0i}) = 0.93$ ; Modell 1:  $\text{Var}(b_{0i}) = 0.86, \text{SD}(b_{0i}) = 0.93$ ; Modell 2:  $\text{Var}(b_{0i}) = 0.86, \text{SD}(b_{0i}) = 0.93$ ; Modell 3:  $\text{Var}(b_{0i}) = 0.86, \text{SD}(b_{0i}) = 0.93$ ). Auf Ebene der Schülerinnen und Schüler erklären die Modelle 1–3 bis zu 46.2 % (Modell 3;

<sup>9</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: **Geschlecht** (Modell 0:  $z = -0.29, p = .776$ ; Modell 1:  $z = 0.05, p = .959$ ; Modell 2:  $z = 0.28, p = .779$ ; Modell 3:  $z = 0.21, p = .831$ ), **Anzahl bearbeiteter Aufgaben** (Modell 1:  $z = 0.14, p = .890$ ; Modell 2:  $z = -0.64, p = .523$ ; Modell 3:  $z = 0.76, p = .450$ ), **mittlere Zeit in Feedbackphasen** (Modell 2:  $z = -0.81, p = .418$ ; Modell 3:  $z = -0.36, p = .721$ ), **gesamte Bearbeitungszeit** (Modell 3:  $z = -0.97, p = .331$ ).

Tabelle 8.7

Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die ikonische Subskala (Mittelschulstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
<i>Fixed Effects</i>								
Intercept	-0.51*	0.25	-0.83**	0.26	-0.96**	0.31	-0.92**	0.30
Vortest	1.52***	0.35	1.25***	0.33	1.17***	0.34	0.89**	0.33
Geschlecht	-0.04	0.15	0.01	0.15	0.04	0.15	0.03	0.15
Bearbeitete Aufgaben			0.01	0.05	-0.05	0.08	0.06	0.08
Anteil bearbeiteter Widgets			1.57**	0.60	1.57*	0.61	1.09	0.60
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.02	0.01	-0.02	0.01	-0.02*	0.01
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					-0.12	0.15	-0.05	0.15
Gesamte Bearbeitungszeit					0.20	0.26	-0.28	0.29
iBook-Lösungsrate							2.09***	0.63
<i>Random Effects</i>								
	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	0.86	0.93	0.86	0.93	0.86	0.93	0.86	0.93
Schülerin/Schüler	0.29	0.54	0.21	0.46	0.21	0.45	0.15	0.39
<i>PCV</i>								
	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		0.00		0.00		0.00	
Schülerin/Schüler	-		.26		.28		.46	
<i>R<sup>2</sup></i>								
	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>m</sub><sup>2</sup></i>	<i>R<sub>c</sub><sup>2</sup></i>
	.02	.28	.04	.28	.04	.28	.05	.28
<i>Likelihood Ratio Test</i>								
	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		13.94**		0.93		10.62**	

Anmerkung. 1890 Datenpunkte, 105 Schülerinnen und Schüler; 18 Items. Schätzungen in *Log-Odds*. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

Modell 1: 26.3 %, Modell 2: 28.4 %) der Varianz von  $\text{Var}(b_{0s}) = 0.29$  ( $SD(b_{0s}) = 0.54$ ) im Nullmodell, die in allen Modellen etwas geringer ausfällt als in den Modellen der Gesamtskala.

### Symbolische Subskala

Wie in den bisher betrachteten Modellen weisen die Prädiktionsmodelle bezüglich der symbolischen Subskala jeweils einen signifikanten *fixed intercept* auf (Modell 0:  $z = -4.37$ ,  $p < .001$ ; Modell 1:  $z = -3.53$ ,  $p = .001$ ; Modell 2:  $z = -3.54$ ,  $p < .001$ ; Modell 3:  $z = -3.78$ ,  $p < .001$ ), der jeweils einer der folgenden Lösungswahrscheinlichkeiten entspricht: 18.3 % (Modell 0), 23.9 % (Modell 1), 21.7 % (Modell 2) bzw. 20.5 % (Modell 3). Sie liegen unter den Lösungswahrscheinlichkeiten, die für die Gesamtskala und für die ikonische Subskala ermittelt wurden.

Ebenso in Übereinstimmung zeigt sich ein signifikanter *fixed effect* des Vorwissens (Modell 0:  $z = 3.98, p < .001$ ; Modell 1:  $z = 3.27, p = .001$ ; Modell 2:  $z = 3.40, p < .001$ ; Modell 3:  $z = 2.99, p = .003$ ). Zusätzlich zu diesem Effekt ergibt sich ein signifikanter, negativer Einfluss von der Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen in den Modellen 1 und 2 (Modell 1:  $z = -2.29, p = .022$ ; Modell 2:  $z = -2.49, p = 0.013$ ). In Modell 3 erweist sich allein die iBook-Lösungsrate als signifikanter *fixed effect* eines Prozessmaßes ( $z = 3.66, p < .001$ ).

Die übrigen *fixed effects* (s. Tabelle 8.8) sind nicht signifikant, insbesondere die im Gesamtmodell signifikanten Effekte des Anteils an bearbeiteten Widgets in allen Prozessmaßmodellen (Modell 1:  $z = 1.74, p = .083$ ; Modell 2:  $z = 1.41, p = .158$ ; Modell 3:  $z = 1.16, p = .245$ ), der Einfluss der gesamten Bearbeitungszeit in Modell 2 ( $z = 1.72, p = .085$ ) sowie der Effekt der Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen in Modell 3 ( $z = -1.78, p = .075$ ).<sup>10</sup>

Die in Modell 0 geschätzte Itemvarianz von  $\text{Var}(b_{0i}) = 1.73$  ( $SD(b_{0i}) = 1.32$ ) wird durch die Hinzunahme von Prozessmaßen in das Modell kaum verändert (Modell 1:  $\text{Var}(b_{0i}) = 1.73, SD(b_{0i}) = 1.32$ ; Modell 2:  $\text{Var}(b_{0i}) = 1.73, SD(b_{0i}) = 1.32$ ; Modell 3:  $\text{Var}(b_{0i}) = 1.73, SD(b_{0i}) = 1.32$ ). Hingegen wird die im Nullmodell ermittelte Varianz auf Lernendenebene ( $\text{Var}(b_{0s}) = 0.48, SD(b_{0s}) = 0.69$ ) durch die Modelle 1–3 sukzessive zu 48.7 % (Modell 3; Modell 1: 26.70 %; Modell 2: 31.50 %) aufgeklärt. Die Varianzen bewegen sich dabei stets über denen, die in den Modellen zur Prädiktion aller Posttestitems geschätzt wurden.

#### 8.1.3.4 Deskriptive Gegenüberstellung der schulartspezifischen Ergebnisse

Im Folgenden werden die Resultate der Modellschätzungen für die tendenziell leistungsstärkere Gymnasialstichprobe mit denen der Modellschätzungen für die leistungsschwächere Mittelschulstichprobe verglichen. Dies geschieht unter der Einschränkung, dass für die beiden Stichproben leicht unterschiedliche Modelle zum Einsatz kamen (s. Abschnitt 8.1.3.3). Aufgrund der geringen Varianz auf dem Klassenniveau in der Gymnasialstichprobe und im berechneten Nullmodell mit Klassen-*random intercept* für die Mittelschulstichprobe erscheinen die Prädiktionen dennoch vergleichbar.

#### Gesamter Posttest

Die Modellschätzungen weisen folgende Gemeinsamkeiten auf: An beiden Schularten zeigt sich der Vortest in allen Modellen als ein signifikanter, positiver Prädiktor, während das Geschlecht keinen signifikanten Einfluss auf das Nachtestergebnis hat. Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die im Vortest besser abschnitten, hatten demnach sowohl am Gymnasium als auch an der Mittelschule eine höhere Lösungswahrscheinlichkeit im Nachtest. Außerdem findet sich sowohl in der Mittelschulstichprobe als auch in der Gymnasialstichprobe ein signifikanter positiver *fixed effect* des Anteils an genutzten Widgets, der

<sup>10</sup>Im Text nicht ausgeführte nicht signifikante Effekte: Geschlecht (Modell 0:  $z = 0.18, p = .854$ ; Modell 1:  $z = 0.30, p = .768$ ; Modell 2:  $z = 0.55, p = .582$ ; Modell 3:  $z = 0.57, p = .568$ ), Anzahl bearbeiteter Aufgaben (Modell 1:  $z = 1.42, p = .156$ ; Modell 2:  $z = 0.12, p = .904$ ; Modell 3:  $z = 0.18, p = .854$ ), mittlere Zeit in Feedbackphasen (Modell 2:  $z = 0.30, p = .766$ ; Modell 3:  $z = 0.63, p = .527$ ), gesamte Bearbeitungszeit (Modell 3:  $z = 0.76, p = .448$ ).

Tabelle 8.8

Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die symbolische Subskala (Mittelschulstichprobe).

	Modell 0		Modell 1		Modell 2		Modell 3	
<i>Fixed Effects</i>	B	SE	B	SE	B	SE	B	SE
Intercept	-1.49***	0.34	-1.16**	0.36	-1.28***	0.36	-1.35***	0.36
Vortest	1.69***	0.42	1.31**	0.40	1.35***	0.40	1.13**	0.38
Geschlecht	0.03	0.19	0.05	0.18	0.10	0.19	0.10	0.18
Bearbeitete Aufgaben			0.16	0.11	0.02	0.15	0.03	0.15
Anteil bearbeiteter Widgets			1.31	0.75	1.13	0.80	0.88	0.76
Aufgerufene Lösungshilfen			-0.01*	0.00	-0.01*	0.00	-0.01	0.00
Mittlere Zeit in Feedbackphasen					0.02	0.06	0.03	0.05
Gesamte Bearbeitungszeit					0.45	0.26	0.19	0.25
iBook-Lösungsrate							2.58***	0.70
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Var	SD	Var	SD	Var	SD
<i>Intercepts</i>								
Item	1.73	1.32	1.73	1.32	1.73	1.32	1.73	1.32
Schülerin/Schüler	0.48	0.69	0.35	0.59	0.33	0.57	0.24	0.49
<i>PCV</i>	PCV		PCV		PCV		PCV	
Item	-		-0.00		-0.00		-0.00	
Schülerin/Schüler	-		.27		.32		.49	
$R^2$	$R_m^2$	$R_c^2$	$R_m^2$	$R_c^2$	$R_m^2$	$R_c^2$	$R_m^2$	$R_c^2$
	.02	.42	.05	.42	.05	.42	.07	.42
<i>Likelihood Ratio Test</i>	$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$		$\chi^2$	
	-		16.05**		3.43		12.67***	

Anmerkung. 1890 Datenpunkte, 105 Schülerinnen und Schüler; 18 Items. Schätzungen in *Log-Odds*. Geschlecht 0 = Mädchen, 1 = Junge. Alle anderen Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. B = Schätzung, SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, PCV = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012). Signifikanzniveaus: \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$ .

in der Mittelschulstichprobe durch Aufnahme der iBook-Lösungsrate als Prädiktor jedoch aufgelöst wird. An beiden Schularten war die Wahrscheinlichkeit, ein Item im Nachtest zu lösen, daher umso höher, je mehr unterschiedliche Widgets die Schülerinnen und Schüler bearbeitet hatten. Hingegen zeigte sich in Übereinstimmung kein Effekt der mittleren Zeit in Feedbackphasen für beide Teilstichproben. An beiden Schularten fließt in Modell 2 die gesamte Bearbeitungszeit signifikant positiv ein; längere Bearbeitungszeiten während des Unterrichts waren also nach dem Zeitmaßmodell mit besseren Nachtestlösungen assoziiert. Diese Signifikanz wird allerdings durch die Aufnahme der iBook-Lösungsrate in die Modelle aufgehoben, die an beiden Schularten einen signifikant positiven *fixed effect* darstellt. Die Schülerinnen und Schüler, die während der Arbeit im iBook bereits eine höhere Lösungsrate erzielt hatten, erreichten auch eine höhere Lösungsrate im Nachtest.

Im Vergleich der Modellschätzungen ergeben sich folgende Unterschiede: Nur an den Gymnasien wird in Modell 2 die Anzahl an bearbeiteten Einzelaufgaben signifikant. Nach diesem

Modell erlangen die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, welche im Durchschnitt mehr Aufgaben bearbeiteten, leicht niedrigere Lösungswahrscheinlichkeiten im Nachtest. Für die tendenziell leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler der Mittelschulen ergibt sich durchgängig ein signifikanter, leicht negativer Effekt der **Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen**, der für die leistungsstärkere Gymnasialstichprobe nur in Modell 1 auftritt. Für Lernende, die öfter auf Lösungshilfen zurückgriffen, war es also an den Mittelschulen geringfügig weniger wahrscheinlich, Items im Nachtest korrekt zu lösen. Für die Gymnasialstichprobe wurde dieser Einfluss nur im ersten Prozessmaßmodell – ohne Zeit- und Leistungsmaße als Prädiktoren – festgestellt werden. Des Weiteren unterscheiden sich die Modellschätzungen im *fixed intercept*, der an den Mittelschulen durchgängig signifikant negativ und an den Gymnasien signifikant positiv ist. In Übereinstimmung mit der Operationalisierung hatten die leistungsschwächeren Lernenden (Mittelschule) demnach eine niedrigere Lösungswahrscheinlichkeit in den Nachtestaufgaben als die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler (Gymnasium).

Beide Nullmodelle zeigen in den *random intercepts*, dass sowohl die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler als auch die Schwierigkeit der Nachtestitems in beiden Datenpools variieren. Hierbei sind die geschätzten Varianzen auf Lernendenebene ähnlich; allerdings erklären die Prozessmaßmodelle in den Schätzungen unter Verwendung der Mittelschuldaten im Vergleich prozentual mehr Varianz. Bezüglich der Itemvarianzen können die Modelle 1–3 in beiden Schularten wenig Varianz aufklären; im Gymnasial-Nullmodell lässt sich eine niedrigere Varianz feststellen, die Itemschwierigkeit unterlag hier demnach weniger Schwankungen als in der Mittelschulstichprobe.

### Ikonische Subskala

Die Modelle bezüglich der ikonischen Subskala zeigen in Übereinstimmung für beide Schularten signifikante Einflüsse vom **Anteil der bearbeiteten Widgets** in den Modellen ohne Leistungsmaß, welches in Modell 3 einen signifikanten *fixed effect* in beiden Stichproben darstellt. Auch für die ikonischen Items im Nachtest erwies es sich für beide Stichproben als vorteilhaft, einen größeren **Anteil an unterschiedlichen Widgets** mit ikonischen Repräsentationen zu bearbeiten. Ebenso zeigten diejenigen Lernenden, welche eine höhere **Lösungsrate im iBook** erreicht hatten, höhere Wahrscheinlichkeiten, ikonische Items im Nachtest korrekt zu lösen. Alle Modellschätzungen weisen signifikante *fixed intercepts* auf. Während diese in den Gymnasialmodellen stets positiv ausfallen, werden in den Mittelschulmodellen negative Werte geschätzt. Die Grundwahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen der jeweiligen Stichprobe im Nachtest ein Item aus der ikonischen Subskala korrekt löst, lag demnach am Gymnasium über und an der Mittelschule unter 50 %.

Als Unterschied in den Effekten ergibt sich nur für die leistungsschwächere Mittelschulstichprobe in Modell 3 ein signifikanter, negativer Einfluss von der **Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen**. Der Rückgriff auf Lösungshilfen während der Arbeit mit den interaktiven Aufgaben war daher auch für ikonische Items ein Indiz für leicht niedrigere Lösungswahrscheinlichkeiten. Die verbleibenden *fixed effects* sind in Übereinstimmung zwischen den beiden Schularten nicht signifikant, insbesondere der in den jeweiligen Modellen in Bezug auf den Gesamttest signifikante Einfluss der **gesamten Bearbeitungszeit** in Modell 2.

In den Mittelschulmodellen werden im Schulartvergleich höhere Itemvarianzen geschätzt; die empirische Schwierigkeit der ikonischen Items schwankte also in der Mittelschulstichprobe mehr als in der Gymnasialstichprobe. Für keine Schulart können die Prozessmaßmodelle die Varianz auf Itemebene nennenswert reduzieren. Dies ist für die Varianz auf Ebene der Lernenden der Fall; hier klären die Modelle 1–3 an der Mittelschule mehr Varianz auf als am Gymnasium. Die in den Nullmodellen ermittelte Lernendenvarianz ist für beide Schularten ähnlich; die beobachtete Kompetenz variierte also zwischen Lernenden der Mittelschulen bzw. des Gymnasien in ähnlichem Maße.

### Symbolische Subskala

In Übereinstimmung erweist sich für beide Schularten in den Modellen zur Prädiktion der symbolischen Subskala der *fixed intercept* als durchgängig signifikant. Für die Mittelschulstichprobe fällt dieser durchgängig negativ aus, für die Gymnasialstichprobe stets positiv. Die Grundwahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen der jeweiligen Stichprobe im Nachtest ein Item aus der symbolischen Subskala korrekt löste, wird demnach für Mittelschülerinnen auf unter 50 % und für Sechstklässlerinnen des Gymnasiums auf über 50 % geschätzt. Für beide Schularten erweist sich der *Vortest* als signifikanter, positiver Prädiktor, ebenso die *iBook-Lösungsrate*. Umfassendere Vorkenntnisse über Bruchzahlen sowie eine höhere Lösungsrate vor dem Nachtest wirkten sich daher positiv auf den gemessenen Lernerfolg aus. In den jeweiligen Modellen 1 wird der Effekt der *Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen* als signifikanter, negativer *fixed effect* geschätzt. Griffen Schülerinnen und Schüler auf Lösungshilfen in symbolischen iBook-Aufgaben zurück, so ergab sich in diesem Modell für sie eine leicht niedrigere Lösungswahrscheinlichkeit in den Nachtestitems der symbolischen Subskala.

Die schulartspezifischen Modellschätzungen zeigen Unterschiede dahin gehend, welche der *fixed effects* signifikant sind: So ergibt sich nur am Gymnasium ein signifikanter Einfluss des *Anteils an bearbeiteten Widgets* (Modelle 1 & 2) und der *gesamten Bearbeitungszeit* (Modelle 2 & 3); dieser Effekt wird in allen anderen Skalen und in der Mittelschulstichprobe durch die *iBook-Lösungsrate* aufgelöst bzw. ist per se nicht signifikant. Die Modellschätzungen sagen also aus, dass es für die tendenziell leistungsstärkeren Gymnasiastinnen und Gymnasiasten der Stichprobe im Hinblick darauf, Nachtestitems der symbolischen Subskala korrekt zu lösen, von Vorteil war, längere Zeit in den entsprechenden Widgets zu verbringen sowie eine größere Anzahl von diesen zu bearbeiten. Nur für die Mittelschulstichprobe bleibt der Effekt von der *Anzahl an aufgerufenen Lösungshilfen* bei der Aufnahme der Zeitmaße ins Modell signifikant (Modell 2). Für die symbolische Subskala zeigt sich in der Gymnasialstichprobe ein negativer, signifikanter Einfluss der *Anzahl an bearbeiteten Aufgaben* (Modell 2). Außerdem ergibt die Modellschätzung im dritten Prozessmaßmodell einen signifikanten, positiven Effekt der gesamten Bearbeitungszeit, der in allen anderen Skalen und in der Mittelschulstichprobe durch die *iBook-Lösungsrate* aufgelöst wird bzw. per se nicht signifikant ist. Hier nicht explizit erwähnte Effekte wurden in Übereinstimmung als nicht signifikant geschätzt.

In den *random effects* zeigt sich an der Mittelschule eine im Schulartvergleich höhere Varianz auf Item- und Lernendenebene als am Gymnasium. Die empirische Itemschwierigkeit

unterlag – bezogen auf die symbolische Subskala – in der Mittelschulstichprobe größeren Schwankungen als in der Gymnasialstichprobe. Dies trifft mit Ausnahme des vollen Prozessmaßmodells 3 auch auf die Individualkompetenz der Schülerinnen und Schüler zu. Auf beiden Ebenen sind die PCV-Werte der schulartspezifischen Modelle ähnlich: Die Itemvarianzen werden durch die Modelle 1–3 kaum verändert, die Lernendenvarianzen können durch die Prozessmaßmodelle um bis zu 49,7 % (Mittelschulmodell 3) reduziert werden.

### Zusammenfassung

In Beantwortung der Forschungsfragen zeigt sich, dass Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern die Nutzung im Unterricht abbilden können – ohne dabei den Lernprozess zu stören. Insbesondere ergeben sich in Bezug auf Forschungsfrage 1 erste Einblicke in den Unterricht mit einem E-Book und Erkenntnisse zum Lerntempo einzelner Schülerinnen und Schüler. Zudem wird in Beantwortung von Forschungsfrage 2 ersichtlich, dass Mädchen und Jungen unterschiedlich mit dem digitalen Angebot umgehen: Unter anderem nutzten Mädchen einen größeren Anteil an unterschiedlichen Widgets und erzielten eine höhere Lösungsrate als Jungen. Ähnliche Unterschiede finden sich zwischen den als leistungsstärker eingestuften Lernenden der Gymnasien und den tendenziell leistungsschwächeren Mittelschülerinnen und -schülern: Hier nutzte die Gymnasialstichprobe den größeren Anteil an interaktiven Aufgaben als die Mittelschulstichprobe, wobei sie eine höhere Lösungsrate erreichte. In Übereinstimmung mit der zu Forschungsfrage 3 formulierten Vermutung erweisen sich die Prozessmaße als signifikante Prädiktoren des Lernerfolgs. Allerdings zeigen sich Unterschiede darin, welche Prozessmaße einen signifikanten Einfluss ausüben, je nach betrachteter Stichprobe und untersuchtem Teilaspekt der Bruchzahlkompetenz. Alle betrachteten Prozessmaßmodelle tragen jedoch deutlich zur Reduktion der beobachteten Varianzen auf Lernenden- und Klassenebenen bei. Prozessdaten können demnach dazu beitragen, Unterschiede zwischen Lernenden und Klassen im Lernprozess aufzuklären.

## 8.2 Das digitale Schulbuch als Instrument weiterer Forschungsfelder

Der folgende Abschnitt beschreibt die Ergebnisse zu den Forschungsfragen 4 und 5 (s. Abschnitt 4.2). Dabei dienen die Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen als Grundlage, um psychologisch motivierte Fragestellungen zu beantworten, die unabhängig von der Schulbuchnutzung sind.

### 8.2.1 Finger-Tracking in kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben<sup>11</sup>

In den interaktiven, kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben W10 und W11 (s. Abschnitt 6.4.1.2) können die Lösungswege der Schülerinnen und Schüler durch aufgezeichnete Fingerbewegungen analysiert werden. Die Verfahren der Lernenden lassen sich kategorisieren in (1) *direkte Eingaben*, (2) *korrigierende Verfahren*, (3) *Verfahren mit Pausen* und (4) *sonstige Verfahren*. Bei direkten Eingaben geben Schülerinnen und Schüler ihre erste Markierung – sei es durch Ziehen oder Tippen – zur Korrektur ab. Korrigierende Verfahren hingegen lassen eine Anpassung der Eingabe am Ende des Markierungsprozesses erkennen. Verfahren mit Pausen weisen klar identifizierbare Unterbrechungen in den Fingerbewegungen auf. Sie unterscheiden sich untereinander darin, an welchen Stellen im Markierungsprozess die Pausen stattfinden. Hervorzuheben sind hier Unterbrechungen an bestimmten Brüchen – wie  $\frac{1}{2}$  oder den jeweiligen Stammbrüchen und deren Vielfachen (für eine Darstellung eines entsprechenden Prozesses siehe Abbildung 8.9).

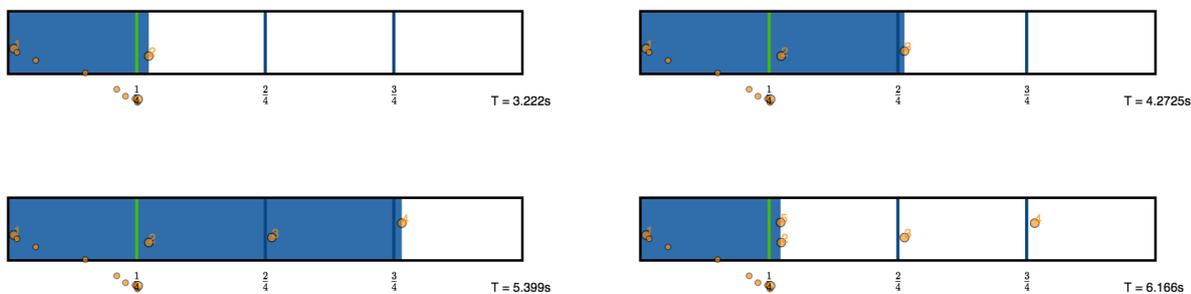


Abbildung 8.9. Lösungsprozess zur Aufgabe „Markiere  $\frac{1}{4}$ “ in Widget W11. Rekonstruktion der Fingerbewegungen (kleine Punkte) und der Pausen im Lösungsprozess (große Punkte). Die blaue Fläche kennzeichnet die Markierung zum jeweiligen Zeitpunkt im Lösungsprozess (jeweils links unten angetragen); die Markierung rechts unten entspricht der eingeloggt Lösung. Eingefügte Segmentierung der Balken zur Veranschaulichung.

Die Gymnasialschülerinnen und -schüler verwendeten beim Markieren am Kreis (W10) mehrheitlich direkte Eingaben (52 % aller Lösungen), während sie beim Markieren am Balken (W11) überwiegend korrigierende Verfahren anwandten (48 % aller Lösungen). Bei den Lernenden, welche beide Aufgabentypen bearbeiteten, konnte beobachtet werden, dass

<sup>11</sup>Teile der folgenden Analyse wurden bereits in Konferenzproceedings veröffentlicht, siehe Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert und Reiss (2018c).

die prozentuale Verteilung der Lösungsverfahren dabei vom Widget abhängig war: Die Interaktion zwischen Verfahrenskategorie und Widget zeigt in einem linearen Mischmodell<sup>12</sup> einen signifikanten Effekt auf die Prozentzahl,  $F(1, 142) = 9.27, p = .003$ . Die Verteilung der Verfahrenskategorien in den beiden Widgets ist in Tabelle 8.9 gegenübergestellt.

Tabelle 8.9

Prozentuale Verteilung der Lösungsverfahren in Widgets W10 und W11 auf die Kategorien.

Widget	Direkte Eingaben	Korrigierende Verfahren	Verfahren mit Pausen	Sonstige Lösungen
Kreis	52 %	35 %	7 %	6 %
Balken	41 %	48 %	8 %	3 %

Bei der Bearbeitung von Aufgaben am Kreis (W10) zeigten zwei der Schülerinnen und Schüler mindestens ein Lösungsverfahren, das auf ein Unterteilen des Ganzen in gleich große Teile schließen lässt. In den Lösungsverfahren zu Aufgaben am Balken (W11) sind entsprechende Vorgehensweisen in den Lösungen von neun Schülerinnen und Schülern erkennbar. Dies ist nach einem McNemar-Test ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Widgets im Anteil der Lernenden, die auf ein solches Lösungsverfahren zurückgriffen,  $p = .035$ .

Von den 151 Schülerinnen und Schülern nutzten am Kreis 24 Lernende mindestens einmal ein Verfahren, in dem eine Pause bei  $\frac{1}{2}$  zu erkennen ist, am Balken waren es 16. Auch hier ergibt ein McNemar-Test einen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Widgets,  $p < .001$ .

## 8.2.2 Auswirkungen von Aspekten des Lösungsprozesses auf die Aufgabenlösung

In diesem Abschnitt wird der Forschungsfrage nachgegangen, welchen Einfluss der Lösungsprozess – beschrieben durch Prozessdaten, die während der Aufgabenbearbeitung erfasst wurden – auf beobachtete Lösungen hat. Zu diesem Zweck werden in Abschnitt 8.2.2.1 die Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen genutzt, um den Effekt der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Antwort der Schülerinnen und Schüler zu untersuchen. Abschnitt 8.2.2.2 legt anschließend dar, inwiefern das Nutzen von Lösungshilfen im Lösungsprozess die Korrektheit der Antwort beeinflusst.

<sup>12</sup>Modellgleichung: Prozentzahl  $\beta_0 + \beta_1\text{Kategorie} + \beta_2\text{Widget} + \beta_3\text{Kategorie} \cdot \text{Widget} + b_0 + b_1 + b_2 + b_3$ . Die Modellschätzung ergibt  $\beta_0 = 0.65, \beta_1 = -0.16, \beta_2 = 0.12, \beta_3 = -0.06$ . Die zufälligen Effekte sind konfundiert und werden daher nicht angegeben; die Analyse entspricht einer ANOVA mit Messwiederholung (Brauer & Curtin, 2018).

### 8.2.2.1 Effekt der Bearbeitungszeit auf die Aufgabenlösung<sup>13</sup>

In diesem Abschnitt wird der Einfluss untersucht, den die Zeit, welche die Schülerinnen und Schüler mit der Bearbeitung einer Einzelaufgabe in einem Widget des iBooks verbringen, auf die Korrektheit ihrer Antwort für diese Aufgabe ausübt. Den Analysen liegt dabei folgendes GLMM (vgl. Abschnitt 7.8.1) zugrunde:

$$\begin{aligned}
 Y &\sim \beta_0 + \beta_1 \text{Bearbeitungszeit } t_{sw} && \text{Fixed Effects} \\
 &+ (b_{0s} + b_{1s} \text{Bearbeitungszeit } t_{sw}) && \text{Random Effects über Schülerinnen und Schülern} \\
 &+ (b_{0w} + b_{1w} \text{Bearbeitungszeit } t_{sw}) && \text{Random Effects über Widgets}
 \end{aligned}$$

Das Modell enthält den Einfluss der Bearbeitungszeit auf die Lösungswahrscheinlichkeit als *fixed effect*. Ein Einfluss der quadratischen Bearbeitungszeit konnte im Gegensatz zu den Ergebnissen von Greiff et al. (2016) nicht festgestellt werden und ist daher im hier berichteten Modell nicht berücksichtigt. Das Modell folgt den Empfehlungen von Barr et al. (2013) und weist maximale *random effects*-Struktur auf: Es enthält sowohl *random intercepts* als auch *random slopes* für beide relevanten Gruppierungen innerhalb der Daten: Schülerinnen und Schüler sowie Widgets.

Die Ergebnisse der Modellschätzungen liegen in *Log-Odds* vor, die in Lösungswahrscheinlichkeiten umgerechnet werden können (s. Abschnitt 7.8.1). Der *random intercept* der Schülerinnen und Schüler  $b_{0s}$  kann interpretiert werden als deren individuelle Kompetenz: Je höher diese ist, desto höher ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass diejenige Schülerin bzw. derjenige Schüler eine Aufgabe löst. Je größer der *random intercept* der Widgets  $b_{0w}$  ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass eine Aufgabe des Widgets korrekt gelöst wird;  $b_{0w}$  beschreibt daher die Leichtigkeit des Widgets  $w$ .

Die *random slopes*  $b_{1s}$  und  $b_{1w}$  (zufällige Bearbeitungszeit-Effekte) modellieren die Variation des Bearbeitungszeit-Effekts im Hinblick auf die einzelnen Schülerinnen und Schüler bzw. Widgets. Durch die geschätzten Korrelationen zwischen *random intercept* und *random slope* innerhalb einer Gruppierung (Widgets bzw. Schülerinnen und Schüler) lassen sich Veränderungen des *fixed effects* in Abhängigkeit von der Individualkompetenz bzw. Widgetleichtigkeit ablesen.

### Ergebnisse der Gymnasialstichprobe

Die Modellschätzung zeigt für die Stichprobe am Gymnasium einen signifikanten *fixed intercept*  $\beta_0 = 1.03$  ( $SE = 0.12$ ),  $z = 8.60$ ,  $p < .001$ . Nach Umrechnung dieses *Log-Odds*-Wertes ergibt sich eine Lösungswahrscheinlichkeit von 73.77 % für eine durchschnittliche Schülerin oder einen durchschnittlichen Schüler, die bzw. der die Aufgabe in einer für das Widget durchschnittlichen Zeit bearbeitet. Dabei unterscheidet sich diese *Grundwahrscheinlichkeit*

<sup>13</sup>Der in diesem Abschnitt u. a. berichtete Einfluss der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Aufgabenlösung wurde für die Gymnasialstichprobe bereits in englischer Sprache veröffentlicht (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018a). Abweichungen von den dort berichteten Zahlwerten sind auf das an die Mittelschulstichprobe angepasste *Preprocessing* zurückzuführen.

je nach Widget ( $\text{Var}(b_{0w}) = 0.75$ ,  $\text{SD}(b_{0w}) = 0.87$ ) sowie je nach Schülerin oder Schüler ( $\text{Var}(b_{0s}) = 0.24$ ,  $\text{SD}(b_{0s}) = 0.49$ ).

Die Lösungswahrscheinlichkeit wurde durch die Bearbeitungszeit signifikant negativ beeinflusst ( $\beta_1 = -0.94$ ,  $SE = 0.29$ ),  $z = -3.27$ ,  $p = .001$ ; längere Bearbeitungszeiten resultierten in der Stichprobe also eher in falschen Antworten. Auch dieser Effekt schwankt zwischen den Schülerinnen und Schülern ( $\text{Var}(b_{1s}) = 0.13$ ,  $\text{SD}(b_{1s}) = 0.36$ ) und zwischen den Widgets ( $\text{Var}(b_{1w}) = 4.08$ ,  $\text{SD}(b_{1w}) = 2.02$  – d. h. in auch ins Positive; demnach waren in einigen Widgets längere Bearbeitungszeiten eher mit richtigen Antworten assoziiert).

In Modellvergleichen mit restriktierten Modellen (vgl. Abschnitt 7.8.1) wird ersichtlich, dass die Korrelationen zwischen den *random effects* auf Lernenden- und Widgetebene signifikant sind,  $\chi^2(1) = 32.97$ ,  $p < .001$  (Lernendenebene) bzw.  $\chi^2(1) = 15.74$ ,  $p < .001$  (Widgetebene). Die Korrelation zwischen den *random effects* auf Schülerinnen- und Schülerebene ist mit  $-.83$  negativ, d. h. für kompetentere Lernende war der negative Effekt der Bearbeitungszeit stärker ausgeprägt, während er für weniger kompetente Schülerinnen und Schüler schwächer auftrat. Ebenso beschreibt die negative Korrelation  $-.55$  zwischen *random intercept* und *random slope* auf Widgetebene, dass der negative Effekt der Bearbeitungszeit in einfacheren Aufgaben stärker und in schwierigeren Aufgaben niedriger war. In besonders anspruchsvollen Widgets wandte sich der Effekt ins Positive.

### Ergebnisse der Mittelschulstichprobe

Für die Mittelschulen zeigt sich im Vergleich zu den Gymnasialklassen (s. Abschnitt 8.2.2.1) ein ähnliches Bild: Hier ergibt sich ein signifikanter *fixed intercept* von  $\beta_0 = 0.38$  ( $SE = 0.13$ ),  $z = 2.87$ ,  $p = .004$ . Dieser bezeichnet umgerechnet eine durchschnittliche Lösungswahrscheinlichkeit von 59.43 %. Die *random intercepts* lassen eine Variation sowohl auf Lernenden- ( $\text{Var}(b_{0s}) = 0.19$ ,  $\text{SD}(b_{0s}) = 0.44$ ) als auch auf Widgetebene ( $\text{Var}(b_{0w}) = 0.93$ ,  $\text{SD}(b_{0w}) = 0.96$ ) erkennen.

Der *fixed effect* der Bearbeitungszeit auf die Lösungswahrscheinlichkeit ist signifikant und negativ ( $\beta_1 = -0.34$ ,  $SE = 0.17$ ),  $z = -1.97$ ,  $p = .049$ ; längere Bearbeitungszeiten waren also eher mit falschen Antworten assoziiert. Dieser Zusammenhang unterliegt Schwankungen sowohl auf Lernenden- ( $\text{Var}(b_{1s}) = 0.10$ ,  $\text{SD}(b_{1s}) = 0.32$ ) als auch auf Widgetebene ( $\text{Var}(b_{1w}) = 1.12$ ,  $\text{SD}(b_{1w}) = 1.06$  – d. h. in bestimmten Widgets auch ins Positive).

Die geschätzten Korrelationen zwischen den *random effects* sind innerhalb der beiden Ebenen signifikant,  $\chi^2(1) = 7.52$ ,  $p = .006$  bzw.  $\chi^2(1) = 19.32$ ,  $p < .001$ . Die negative Korrelation von  $-.46$  zwischen den *random effects* auf Schülerinnen- und Schülerebene deutet darauf hin, dass der negative Effekt der Bearbeitungszeit für kompetentere Lernende stärker ausgeprägt war, während er für weniger kompetente Schülerinnen und Schüler schwächer auftrat. Die Korrelation zwischen *random intercept* und *random slope* auf Widgetebene ist ebenso negativ ( $-.64$ ). Der negative Effekt der Bearbeitungszeit war demnach in einfacheren Aufgaben stärker und in schwierigeren Aufgaben niedriger; in Aufgaben von besonders hohem Anforderungsniveau lag sogar ein positiver Effekt vor.

## Deskriptive Gegenüberstellung der schulartspezifischen Ergebnisse

Die Modellschätzungen für die beiden Stichproben sind in Tabelle 8.10 gegenübergestellt.

Die Ergebnisse von Gymnasial- und Mittelschulstichprobe stimmen weitgehend überein. In den schulartspezifischen Modellen zeigt sich jeweils ein negativer Effekt der Bearbeitungszeit auf die Lösung einer Aufgabe in den Widgets des iBooks. Dieser Effekt ist in leichteren Widgets sowie für kompetentere Schülerinnen und Schüler stärker ausgeprägt und für Lernende von geringerem Kompetenzniveau sowie in interaktiven Aufgaben von höherer Schwierigkeit dagegen schwächer ausgeprägt. In Widgets mit hohem Schwierigkeitsgrad wird der Effekt an beiden Schularten positiv.

Allerdings ist sowohl der *fixed intercept* als auch der negative *fixed effect* der Bearbeitungszeit im Gymnasialmodell betragsmäßig größer als im Mittelschulmodell. Einerseits weist dies auf eine höhere Grundwahrscheinlichkeit innerhalb der Gymnasialstichprobe hin, eine Aufgabe im iBook korrekt zu lösen; andererseits hängt die Lösungswahrscheinlichkeit der Gymnasialschülerinnen und -schüler in einem höheren Maße von der Bearbeitungszeit ab als in der Mittelschulstichprobe. Auch die beobachteten Variationen auf Lernenden- und Widgetebene (*random intercepts* und *random slopes*) fallen für die Gymnasialstichprobe – mit Ausnahme des *random intercepts* auf Widgetebene  $b_{0w}$  – weiter aus.

Tabelle 8.10

Parameterschätzungen der GLMMs zum Effekt der Bearbeitungszeit auf die Aufgabenlösung.

	Gymnasium			Mittelschule		
<i>Fixed Effects</i>	$\beta$	$SE(\beta)$		$\beta$	$SE(\beta)$	
Intercept $\beta_0$	1.03***	0.12		0.38 **	0.13	
Bearbeitungszeit $\beta_1$	-0.94**	0.29		-0.34 *	0.17	
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Korr.	Var	SD	Korr.
Lernenebene						
Intercept $b_{0s}$	0.24	0.49		0.19	0.44	
Bearbeitungszeit $b_{1s}$	0.13	0.36	-.83***	0.10	0.32	-.46**
Widgetebene						
Intercept $b_{0w}$	0.75	0.87		0.93	0.96	
Bearbeitungszeit $b_{1w}$	4.08	2.02	-.55***	1.12	1.06	-.64***
$R^2$	$R_m^2$	$R_c^2$		$R_m^2$	$R_c^2$	
	.01	.27		0.00	.27	

*Anmerkung.* Gymnasium: 74921 Datenpunkte, 151 Schülerinnen und Schüler, 59 Widgets. Mittelschule: 51271 Datenpunkte, 105 Schülerinnen und Schüler, 59 Widgets. Schätzungen in *Log-Odds*. Alle Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. *SE* = Standardfehler, *Var* = Varianz, *SD* = Standardabweichung, *Korr.* = Korrelation,  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = *conditional*  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012).

### 8.2.2.2 Einfluss von Lösungshilfenaufrufen auf die Aufgabenlösung

Unter den hier berücksichtigten Widgets bieten 14 interaktive Aufgaben Unterstützung in Form von gestuften Lösungshilfen. Diese können während des Lösungsprozesses aufgerufen

werden und daher die Korrektheit der Aufgabenlösung beeinflussen. In diesem Abschnitt wird untersucht, inwiefern in den Daten ein Effekt vom Aufrufen einer Lösungshilfe auf die Lösungswahrscheinlichkeit existiert. Dazu wird folgendes GLMM für Gymnasium und Mittelschule betrachtet:

$$\begin{aligned}
 Y &\sim \beta_0 + \beta_1 \text{ Aufruf einer Lösungshilfe } l_{sw} && \text{Fixed Effects} \\
 &+ (b_{0s} + b_{1s} \text{ Aufruf einer Lösungshilfe } l_{sw}) && \text{Random Effects über Schülerinnen und Schülern} \\
 &+ (b_{0w} + b_{1w} \text{ Aufruf einer Lösungshilfe } l_{sw}) && \text{Random Effects über Widgets}
 \end{aligned}$$

In dem Modell ist der Einfluss, den der Aufruf mindestens einer Lösungshilfe auf die Lösung der Aufgabe hat, als *fixed effect* aufgenommen. Das Modell weist maximale *random effects*-Struktur auf (gemäß Barr et al., 2013): Es enthält sowohl *random intercepts* als auch *random slopes* für beide relevanten Gruppierungen innerhalb der Daten – Schülerinnen und Schüler sowie Widgets.

Die *random slopes*  $b_{1s}$  und  $b_{1w}$  (*random effects* des Lösungshilfenaufrufs) modellieren dabei die Variation des Effekts im Hinblick auf die einzelnen Schülerinnen und Schüler bzw. Widgets. Durch die geschätzten *Korrelationen* zwischen *random intercept* und *random slope* innerhalb einer Gruppierung (Schülerinnen und Schüler bzw. Widgets) lassen sich Veränderungen des *fixed effects* in Abhängigkeit von der Individualkompetenz bzw. Widgetleichtigkeit ablesen.

Wie die folgenden beiden Abschnitte ausführen, kann an beiden Schularten kein signifikanter *fixed effect* des Aufrufs von mindestens einer Lösungshilfe auf die Lösung der Aufgaben in den Widgets festgestellt werden.

## Gymnasium

Die Modellschätzung am Gymnasium ergibt einen singulären Fit, so dass im Folgenden die Ergebnisse des Modells ohne *random slope* auf Widgetebene berichtet werden (der Ausschluss des *random slopes* auf Lernenebene löst die Singularität des Fits nicht auf).

Hier zeigt sich ein signifikanter *fixed intercept* von  $\beta_0 = 1.03$  ( $z = 8.21, p < .001$ ). Der Effekt des Lösungshilfenaufrufs ( $\beta_1 = -0.10$ ) auf die Lösungswahrscheinlichkeit ist nicht signifikant ( $z = -0.93, p = .355$ ). Die Lösungswahrscheinlichkeit variiert von Widget zu Widget leicht ( $\text{Var}(b_{0w}) = 0.17, \text{SD}(b_{0w}) = 0.41$ ), auf Personenebene im Vergleich dazu stärker ( $\text{Var}(b_{0s}) = 0.43, \text{SD}(b_{0s}) = 0.66$ ); ebenso unterliegt der Einfluss des Aufrufs von Lösungshilfen leichten Schwankungen zwischen den Schülerinnen und Schülern ( $\text{Var}(b_{1s}) = 0.13, \text{SD}(b_{1s}) = 0.35$ ).

Tabelle 8.11 zeigt neben den vorgestellten Ergebnissen die Resultate einer Modellschätzung, in der nur Schülerinnen und Schüler betrachtet wurden, welche insgesamt mehr als drei<sup>14</sup>

<sup>14</sup>Die Widgets in ALICE:Bruchrechnen bieten stets drei Lösungshilfen mit unterschiedlichem Unterstützungsgrad (Abschnitt 6.2.1.2). Wenn Lernende während ihrer gesamten Arbeit mit dem iBook insgesamt weniger als drei Lösungshilfen aufriefen, wird dies hier als Erkundung des Features interpretiert; somit werden diese Schülerinnen und Schüler nicht als Nutzerinnen und Nutzer von Lösungshilfen angesehen.

Lösungshilfen in Anspruch nahmen (84 Lernende). Diese Einschränkung führt jedoch zu keinen signifikanten Veränderungen im Modell.

Tabelle 8.11

GLMM-Schätzungen zum Einfluss des Aufrufs von Lösungshilfen auf die Aufgabenlösung (Gymnasialstichprobe).

	Volle Stichprobe			Eingeschränkte Stichprobe		
<i>Fixed Effects</i>	$\beta$	$SE(\beta)$		$\beta$	$SE(\beta)$	
Intercept $\beta_0$	1.03***	0.13		0.95 ***	0.13	
Lösungshilfenaufruf $\beta_1$	-0.10	0.10		-0.01	0.11	
<i>Random Effects</i>	Var	SD	Korr.	Var	SD	Korr.
Widgetebene						
Intercept $b_{0w}$	0.17	0.41		0.16	0.40	
Lernendenebene						
Intercept $b_{0s}$	0.43	0.66		0.39	0.63	
Lösungshilfenaufruf $b_{1s}$	0.12	0.35	-.96	0.12	0.34	-.95
$R^2$	$R_m^2$	$R_c^2$		$R_m^2$	$R_c^2$	
	0.00	0.14		0.01	0.29	

Anmerkung. Volle Stichprobe: 10820 Datenpunkte, 151 Schülerinnen und Schüler, 14 Widgets. Eingeschränkte Stichprobe: 6285 Datenpunkte, 84 Schülerinnen und Schüler, 14 Widgets. Schätzungen in Log-Odds. Alle Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert. SE = Standardfehler, Var = Varianz, SD = Standardabweichung, Korr. = Korrelation,  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012).

## Mittelschule

An der Mittelschule ergibt sich in der Modellschätzung kein signifikanter Effekt vom Aufruf von Lösungshilfen auf die Lösungswahrscheinlichkeiten in den entsprechenden Einzelaufgaben ( $\beta_1 = 0.47$ ,  $z = 1.21$ ,  $p = .225$ ). Auch der *fixed intercept*  $\beta_0 = 0.02$  ist nicht signifikant ( $z = 0.10$ ,  $p = .922$ ). Die Modellschätzung zeigt eine Variation des *intercepts* auf Personen- ( $\text{Var}(b_{0s}) = 0.50$ ,  $SD(b_{0s}) = 0.70$ ) sowie auf Widgetebene ( $\text{Var}(b_{0w}) = 0.26$ ,  $SD(b_{0w}) = 0.51$ ). Ebenso variiert der Einfluss des Lösungshilfenaufrufs auf beiden Ebenen (Schülerinnen und Schüler:  $\text{Var}(b_{1s}) = 0.68$ ,  $SD(b_{1s}) = 0.82$ ; Widgets:  $\text{Var}(b_{1w}) = 1.65$ ,  $SD(b_{1w}) = 1.29$ ).

Eine Einschränkung auf alle 76 Lernenden, die insgesamt mehr als dreimal eine Lösungshilfe anforderten, verändert die Ergebnisse auch für die Mittelschulstichprobe nur geringfügig, wie Tabelle 8.12 zeigt.

Tabelle 8.12

GLMM-Schätzungen zum Einfluss des Aufrufs von Lösungshilfen auf die Aufgabenlösung (Mittelschulstichprobe).

	Volle Stichprobe			Eingeschränkte Stichprobe		
	$\beta$	$SE(\beta)$		$\beta$	$SE(\beta)$	
<i>Fixed Effects</i>						
Intercept $\beta_0$	0.02	0.16		-0.03	0.18	
Lösungshilfenaufruf $\beta_1$	0.47	0.38		0.49	0.37	
<i>Random Effects</i>						
	Var	SD	Korr.	Var	SD	Korr.
Widgetebene						
Intercept $b_{0w}$	0.26	0.51		0.35	0.59	
Lösungshilfenaufruf $b_{1w}$	1.65	1.29	0.91	1.52	1.23	0.95
Lernendenebene						
Intercept $b_{0s}$	0.50	0.70		0.54	0.74	
Lösungshilfenaufruf $b_{1s}$	0.68	0.82	-0.64	0.71	0.84	-0.65
$R^2$	$R_m^2$	$R_c^2$		$R_m^2$	$R_c^2$	
	0.01	0.25		0.01	0.29	

Anmerkung. Volle Stichprobe: 8780 Datenpunkte, 104 Schülerinnen und Schüler, 14 Widgets. Eingeschränkte Stichprobe: 7410 Datenpunkte, 76 Schülerinnen und Schüler, 14 Widgets. Schätzungen in Log-Odds. Alle Variablen am Stichprobenmittelwert zentriert.  $SE$  = Standardfehler, Var = Varianz,  $SD$  = Standardabweichung,  $PCV$  = relative Veränderung der Varianz (Merlo, Yang, Chaix, Lynch & Råstam, 2005),  $R_m^2$  = Marginales  $R^2$ ,  $R_c^2$  = conditional  $R^2$  (Nakagawa & Schielzeth, 2012).

## Zusammenfassung

Über die Ergebnisse zur Schulbuchnutzung hinaus erweisen sich Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern in dieser Studie als geeignetes Instrument, um psychologisch motivierte Forschungsfragen in der Mathematikdidaktik zu beantworten. So werden bezüglich Forschungsfrage 4 in den Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schüler, die während dem Lösen von kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben aufgezeichnet wurden, wiederkehrende Lösungsmuster ersichtlich. Zudem offenbart sich ein negativer Effekt der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Lösung für die interaktiven Aufgaben. Dieser Effekt ist dabei abhängig von der Schwierigkeit der interaktiven Aufgaben und von der Individualkompetenz: In leichteren Aufgaben oder für kompetentere Lernende ist der negative Effekt stärker ausgeprägt, während er für anspruchsvollere Aufgaben oder weniger kompetente Lernende schwächer ausgeprägt und in Teilen sogar positiv ist. Außerdem lässt sich in den Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen kein Effekt vom Aufrufen von Lösungshilfen auf die Aufgabenlösungen eruieren; dies eröffnet bereits Fragestellungen für weiterführende Studien.



# 9 Diskussion

## Überblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Studie, die Studienkonzipierung und -durchführung sowie weiterführende Forschungsfragen diskutiert. Zunächst rekapituliert Abschnitt 9.1 die Ziele der Arbeit. Im Anschluss werden in Abschnitt 9.2 die Ergebnisse der Studie zusammengefasst und interpretiert. Darauf folgt eine kritische Reflexion (Abschnitt 9.3), bevor die Arbeit mit einem Fazit (Abschnitt 9.4) schließt.

## 9.1 Ziele der Arbeit

Schwerpunkt dieser Arbeit sind die theoretische Herleitung und praktische Umsetzung der Potenziale, die digitale Schulbücher für das Erlernen von Bruchzahlkonzepten und für die mathematikdidaktische Forschung bieten. Beide Aspekte konzentrieren sich hierbei auf die Nutzung von E-Books durch Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht, wozu bislang wenige Forschungsarbeiten vorliegen (Steen & Madsen, 2018; Yerushalmy, 2014). Ein Grund hierfür ist in der Herausforderung zu sehen, valide Daten über die Schulbuchnutzung zu erlangen (Love & Pimm, 1996; Rezat & Sträßer, 2015). Daher stellt die Arbeit Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als mögliche Erhebungsmethode vor. Da der Mathematikunterricht in Deutschland im internationalen Vergleich weniger unter Verwendung von digitalen Medien durchgeführt wird (Eickelmann et al., 2019) und dies zum Teil auf den Mangel an zugänglichen digitalen Angeboten zurückgeführt werden kann, war es ein Ziel des Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen, zu dem diese Arbeit zählt, ein fachdidaktisch fundiertes E-Book zu entwickeln und zu evaluieren. Als Themengebiet für dieses E-Book erschien aufgrund der breiten Forschungsbasis zur Didaktik der Bruchrechnung (vgl. Kapitel 1) die Entwicklung von Bruchzahlkonzepten als geeignet.

Dementsprechend lassen sich die Ziele der vorliegenden Arbeit wie folgt zusammenfassen:

1. Gemeinsame Entwicklung eines interaktiven Schulbuchs zur Einführung von Bruchzahlkonzepten für die sechste Jahrgangsstufe im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt dabei auf der technischen Umsetzung der interaktiven Komponenten (Diagramme, Aufgaben) in iBooks Author (Kapitel 6). Dabei wird von den Möglichkeiten digitaler Bücher zur Unterstützung guten Unterrichts (Kapitel 2) Gebrauch gemacht; außerdem werden Ergebnisse der Fachdidaktik im Bereich der Bruchrechnung berücksichtigt (Kapitel 1).

2. Beschreibung von Prozessdaten aus digitalen (Mathematik-)Schulbüchern als Erhebungsmethode der faktischen Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schüler (Kapitel 3).
3. Konzeption und Implementierung einer Prozessdatenerfassung für digitale Bücher – insbesondere solche, die mit iBooks Author erstellt werden (Kapitel 5 & 6). Besondere Berücksichtigung erfährt dabei die Anforderung, dass die Umsetzung unabhängig von kontinuierlichem Internetzugang funktionstüchtig sein muss, um die Datenerfassung im Regelunterricht zu ermöglichen.
4. Durchführung einer empirischen Studie zur Validierung der Prozessdatenerfassung als Erhebungsmethode der Schulbuchnutzung durch Schülerinnen und Schüler (Kapitel 7). Neben der Untersuchung der Schulbuchnutzung durch unterschiedliche Gruppen an Schülerinnen und Schülern (Mädchen und Jungen sowie leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Lernenden) werden die erhobenen Daten auch mit der Leistung in Verbindung gesetzt, welche die Lernenden nach dem Unterricht mit dem interaktiven Schulbuch zeigten. Zusätzlich wird das Forschungspotenzial der Methode für Fragestellungen außerhalb der Schulbuchnutzung aufgezeigt (Kapitel 8).

## 9.2 Diskussion der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der empirischen Studie diskutiert. Die Gliederung des Abschnittes orientiert sich dabei am Aufbau von Kapitel 8.

### 9.2.1 Nutzung des digitalen Schulbuchs

In diesem Abschnitt erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse in Bezug auf die Nutzung des digitalen Schulbuchs.

#### 9.2.1.1 Beschreibung der Schulbuchnutzung

Die Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen geben einen Einblick in die Art und Weise, wie das interaktive Buch im Unterricht eingesetzt wurde. Die Umsetzung der Datenerhebung im Rahmen dieser Forschungsarbeit erfüllt dabei einen Großteil der Kriterien, die eine Erhebungsmethode der Schulbuchnutzung nach Rezat (2009) realisieren sollte: Die Prozessdatenerfassung arbeitet vollständig im Hintergrund, um die ökologische Validität der Daten zu gewährleisten; sie findet im natürlichen Kontext, dem Regelunterricht, statt und ist dementsprechend zeit- und ortsunabhängig implementiert; außerdem sind die Quellen der Prozessdaten in den Logs klar gekennzeichnet, so dass aus den Daten eindeutig hervorgeht, welche Teile des interaktiven Schulbuchs genutzt wurden.

### Nutzung des interaktiven Schulbuchs im Unterricht

Die Klassenaktivitätsgraphen der Unterrichtsstunden zeigen einen hohen Anteil an Zeit, der von den Lehrkräften zur Arbeit mit interaktiven Aufgaben bereitgestellt wurde. Entsprechend hoch sind die Werte für die durchschnittliche Nutzungsdauer der iPads durch die Schülerinnen und Schüler. Dies stimmt mit der erwiesenen Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht überein (Abschnitt 2.2). Die Rolle der Lehrkraft während der aktiven iPad-Phasen bleibt durch die vorliegenden Daten offen. Es ist daher keine Aussage zu treffen, inwieweit die Lehrerinnen und Lehrer das automatische Feedback als alleinige Hilfestellung verwendeten und wie selbstgesteuert die Schülerinnen und Schüler in ihrem Unterricht lernten.

Als typische Aktivitätsgraphen zeigen sich Unterrichtsstunden, die zu Beginn keine bis wenig Aktivität aufweisen – hier erfolgt vermutlich die Einführung in das Thema durch die Lehrkraft oder die Besprechung der Hausaufgaben – gefolgt von relativ durchgehender iPad-Arbeit bis zum Stundenende. Daneben fallen in Bezug auf die iPad-Aktivität extreme Aktivitätsgraphen auf, also solche, in denen wenige iPads aktiv waren oder in denen durchgehend von mehreren Schülerinnen und Schülern mit dem iPad gearbeitet wurde. Es ist hier zu beachten, dass Unterrichtsstunden, in denen die Lehrkräfte ohne iPads unterrichteten, nicht in den Logs ersichtlich werden können. Daher ist es theoretisch möglich, dass auch Stunden ohne iPad-Einsatz während der Intervention stattfanden; die Lehrkräfte waren allerdings angehalten, mit dem iPad zu unterrichten.

Die Klassenaktivitätsgraphen lassen die Nutzung der Unterrichtszeit in Teilen offen; diese können von den Prozessdaten nicht beschrieben werden. Erklärungsansätze für derartige Zeitfenster ohne iPad-Aktivität sind vielfältig. So können in diesen Zeiten bspw. Lehrer-Schüler-Gespräche stattgefunden haben, analoge Hausaufgaben verbessert worden sein oder schlichtweg Unterbrechungen im Unterrichtsgeschehen aufgetreten sein. Nichtsdestotrotz ist nicht ausgeschlossen, dass in diesen Zeitfenstern dennoch mit dem iBook gearbeitet wurde: So liegen u. a. keinerlei Daten aus der Nutzung des iBooks außerhalb der Widgets vor (z. B. Lehrtexte und Merksätze, s. auch Abschnitt 9.3.3). Außerdem wurden für die Vergleichbarkeit der beiden Teilstudien einige Widgets als Datenquelle ausgeschlossen. Darüber hinaus ist es denkbar, dass die Lehrkräfte – gerade zu Beginn des Unterrichts – Inhalte auf ihrem iPad für die gesamte Klasse vorführten; die Lehrkraft-iPads wurden für diese Studie nicht ausgewertet.

Obwohl die Prozessmaße Lücken in der Unterrichtsbeschreibung lassen, eröffnen sich mit vergleichsweise geringem Aufwand Einblicke in das reale Unterrichtsgeschehen, ohne dieses durch externe Beobachter zu beeinflussen oder auf unzuverlässige Selbstberichte zurückgreifen zu müssen. Manche der Lücken in der Datenerfassung können durch spezielle Herangehensweisen geschlossen werden (s. Abschnitt 9.3.3). Mit derartigen Verbesserungen können interaktive Schulbücher als gewinnbringende Ergänzung oder – je nach Forschungsfrage – als Alternative zu gängigen Methoden der Unterrichtsbeobachtung angesehen werden.

Durch die Prozessdaten ist es zudem möglich aufzudecken, ob die Schülerinnen und Schüler sich mit den intendierten Lerninhalten beschäftigen. Die Klassenaktivitätsgraphen

und chronologischen Verläufe der Widgetnutzung zeigen hier deutlich, dass sich Schülerinnen und Schüler fremdbeschäftigten. Während dies im vorliegenden Fall von ALICE:Bruchrechnen nur in der Retrospektive funktioniert, ist es umsetzbar, derartige Informationen live an die Lehrkraft zu übertragen und so deren *classroom management* zu unterstützen (s. auch Gu et al., 2015; Usiskin, 2018). Der Grund der Fremdbeschäftigung lässt sich aus den Prozessdaten allein nicht eindeutig bestimmen. Im Gesamtbild der Klassenaktivitäten legen manche Beobachtungen jedoch gewisse Interpretationen nahe. So lassen sich bspw. Sprünge über mehrere Kapitel (wie in Abbildung 8.3) als Fremdbeschäftigung deuten, die auf geringe Lernmotivation zu dem gegebenen Zeitpunkt schließen lässt. Arbeiten außerhalb des vorgesehenen Inhalts können aber auch auf ein individuelles Lerntempo hinweisen. Die chronologischen Widgetverläufe in Abbildung 8.3 können ein solches bspw. sichtbar machen: Der Großteil der Klasse (indiziert durch die dargestellten Widgetverläufe A, B & E) bearbeitet Aufgaben aus den iBook-Kapiteln 3 und 4. Im Vergleich dazu scheint sich der Schüler von Verlauf C mit Aufgaben aus den Einführungskapiteln zu beschäftigen, während sich der Schüler von Verlauf D kontinuierlich durch die Widgets der Kapitel 5–7 durcharbeitet. Durch die Möglichkeiten von E-Books – wie Adaptivität und automatisches Feedback (s. Abschnitt 2.3.2.2) – kann die Technologie somit zur Individualisierung und Differenzierung des Unterrichts beitragen.

### **Beschreibung der iBook-Nutzung durch Prozessmaße**

Die Prozessmaße spiegeln die faktische Nutzung der interaktiven Aufgaben in ALICE:Bruchrechnen wider. Unter Zuhilfenahme der Prozessdaten kann genau bestimmt werden, welcher Teil der Aufgaben bearbeitet wurde. Die Mittelwerte der Prozessmaße (s. Abschnitt 8.1.1.2) vermitteln daher einen Eindruck davon, wie Schülerinnen und Schüler das Angebot der interaktiven Aufgaben nutzten.

Mit etwa 44 gelösten einzelnen Aufgaben pro Unterrichtseinheit kamen die Lernenden im iBook vermutlich auf eine höhere Anzahl als in traditionellem Unterricht; insbesondere kann davon ausgegangen werden, dass darunter mit etwa 28 Bearbeitungen ein erhöhter Anteil an Aufgaben war, die auch auf einer ikonischen Repräsentationsebene operieren.

Es fällt aber auf, dass im Mittel knapp 30 % der Widgets von den Schülerinnen und Schülern nicht genutzt wurden und nur eine Schülerin das volle Spektrum der interaktiven Aufgaben bearbeitete. Gerade im Hinblick darauf, dass sich der Anteil an bearbeiteten Widgets als präzisierend für die Nachttestleistung erweist (s. Abschnitt 8.1.3), wurde hier das Potenzial des iBook-gestützten Unterrichts noch nicht ausgeschöpft. Allerdings obliegt es nicht dem iBook, die Schülerinnen und Schüler darauf hinzuweisen, die zur Verfügung stehende Zeit auf verschiedene Widgets zu verteilen. Vielmehr ist diesbezüglich den Lehrkräften zu empfehlen, in ihren Unterricht das volle Spektrum des interaktiven Aufgabenangebots zu integrieren.

Der Mittelwert von 0.26 Lösungshilfen pro Aufgabenbearbeitung indiziert zunächst eine rege Nutzung des Features. Allerdings schwankt dieser Wert sehr ( $SD = 0.34$ ); mehrere Schülerinnen und Schüler griffen im gesamten Buch auf keine bis wenige Lösungshilfen zurück. Zudem zeigen die Ergebnisse in Abschnitt 8.2.2.2 keinen Einfluss vom Aufrufen

einer Lösungshilfe auf die Wahrscheinlichkeit, die korrespondierende Aufgabe zu lösen. Es ist daher anzunehmen, dass die Anzahl der aufgerufenen Lösungshilfen eine wirkliche Nutzung der gebotenen Unterstützung nicht in allen Fällen adäquat misst. Eventuell deckt ein Zeitmaß die wirkliche Nutzung besser ab als das betrachtete Zählmaß. Eine isolierte Zeit, in der sich die Lernenden mit den Lösungshilfen befassen, lässt sich in den vorliegenden Prozessdaten jedoch nicht von der Bearbeitungszeit der Aufgaben differenzieren, da die Lösungshilfen parallel zur Aufgabe angezeigt werden. Hierzu müsste man die Darstellung der Unterstützung bspw. so abändern, dass sie den gesamten Bildschirm einnimmt, damit eine klare Endzeit für die Bestimmung der Anzeigedauer vorliegt. Dies würde aber die Informationen der Lösungshilfen räumlich von der Aufgabe trennen, auf die sie sich beziehen, und somit einen *Cognitive Load* produzieren, welcher an dieser Stelle als lernhinderlich einzustufen wäre (*Split-Attention*-Effekt, s. bspw. Sweller, 2012).

Die gemessene gesamte Aufgabebearbeitungszeit lag im Durchschnitt bei 125 Minuten. Unter Beachtung der Klassenunterschiede ergibt sich ein durchschnittlicher Anteil von 18.29 % ( $SD = 7.61$ ) der nominellen Unterrichtszeit, welchen die Schülerinnen und Schüler mit der Bearbeitung von interaktiven Aufgaben verbrachten. Diese Zeit ist nicht als die alleinige *aktive Lernzeit* (nach Helmke, 2009) anzusehen, da sie einerseits Lernzeiten im iBook außerhalb der Prozessdatenerfassung – wie die Arbeit mit interaktiven Diagrammen – nicht umfasst und andererseits die Zeiten nicht berücksichtigt, in denen sich die Schülerinnen und Schüler mit Feedback beschäftigten. Die Prozessdaten schätzen letztere im Mittel mit 3.50 s ( $SD = 2.70$ ) pro Einzelaufgabe als relativ gering ein. Diese kurze gemessene Zeitspanne kann zum Teil durch die hohe Lösungsrate erklärt werden, da sich die Rückmeldungen auf korrekte Antworten in den Widgets meist bewusst auf die Meldung „Das stimmt!“ beschränken. In der Tat liegt die mittlere Zeit in Feedbackphasen nach einer falschen Lösung mit 6.67 s ( $SD = 10.89$ ) fast doppelt so hoch.

Die mittlere iBook-Lösungsrate von 64.04 % ( $SD = 12.96$ ) scheint im Hinblick auf die gemischte Stichprobe zunächst tendenziell höher als erwartet. Allerdings ist hier zu beachten, dass dieses Mittel nicht aus einem Test zur Leistungserhebung der Schülerinnen und Schüler entspringt, sondern aus der unterrichtlichen Einführung und Einübung von Bruchzahlkonzepten. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in diese Lösungsrate alle Aufgabebearbeitungen des gesamten Lernprozesses eingeschlossen wurden und darunter ein erheblicher Teil von einfacheren Aufgaben zur Einführung enthalten ist, kann das Anforderungsniveau der interaktiven Aufgaben von ALICE:Bruchrechnen als adäquat eingestuft werden.

### **Adaptivität des interaktiven Schulbuchs**

Im Hinblick auf die in Abschnitt 6.2.2.2 beschriebene Adaptivität der interaktiven Aufgaben, in denen insbesondere unterschiedliche Schwierigkeitsstufen hinterlegt sind, zeigt sich ein differenziertes Bild. Im Schnitt erreichten pro Widget knapp 40 % der Lernenden das jeweils höchste Anforderungsniveau, während ein ähnlicher Prozentsatz die niedrigste Schwierigkeitsstufe nicht verließ. Mit ansteigendem Anforderungsniveau lässt sich insgesamt eine fallende Anzahl an Schülerinnen und Schülern feststellen. Unter der Prämisse, dass sämtliche Lernende die Aufgabenstellungen der niedrigsten Schwierigkeitsstufe lösen sollten und

die Anzahl der Schülerinnen und Schüler mit zunehmendem Kompetenzniveau sinkt (vgl. Reiss et al., 2019), lässt sich die Adaptivität als funktionierend beurteilen. Zusätzlich wird durch den negativen Effekt der Anforderungsniveaus auf die Lösungswahrscheinlichkeit verifiziert, dass die Schwierigkeit der Aufgaben tatsächlich steigt.

Auffallend ist jedoch, dass der Erfolg in niedrigen Anforderungsniveaus einige Schülerinnen und Schüler scheinbar dazu verleitet, das Widget vorzeitig zu schließen und die höheren Level nicht zu bearbeiten. Gerade in Widgets, in denen die unteren Anforderungsniveaus einfachere Sonderfälle behandeln (bspw. Stammbrüche in W42), können auf diese Weise wichtige Aspekte unberücksichtigt bleiben. Zudem zeigen die Adaptivitätsverläufe (s. Abschnitt 8.1.1.3), dass Schülerinnen und Schüler zum Teil erst in höheren Schwierigkeitsstufen auf Probleme stießen. Ein vorzeitiger Abbruch der Aufgabenbearbeitung kann hier zu einer Überschätzung der eigenen Kompetenz führen.

Ein Grund für diese Beobachtungen kann darin liegen, dass die Adaptivität im Hintergrund arbeitet, ohne der Nutzerin oder dem Nutzer mitzuteilen, auf welcher Stufe sie respektive er arbeitet. Auch fehlt der Endnutzerin bzw. dem Endnutzer jegliche Information darüber, wie viele Aufgaben im aktuellen Set noch zu bearbeiten sind oder wie viele Einzelaufgaben sie respektive er bereits gelöst hat. Um dem eben beschriebenen Phänomen entgegenzuwirken, bietet sich die Einbindung einer Fortschrittsanzeige als *Task-Level-Feedback* (Hattie & Timperley, 2007) an, um Schülerinnen und Schülern Aufgaben höheren Niveaus in Aussicht zu stellen und so zur Weiterarbeit – auch nach den leichten Aufgaben zu Beginn – zu motivieren. Die Implementierung einer Fortschrittsanzeige wurde nach Abschluss der Datenerfassung am Gymnasium aufgenommen, von ihrer Vollendung und dem Einbau vor dem Beginn der zweiten Erhebung an der Mittelschule allerdings abgesehen, um diesbezüglich keine Verzerrungen durch unterschiedliche Studienbedingungen zu bewirken. Eine Beschreibung der Grundfunktionalität findet sich in Anhang A.3.

### **9.2.1.2 Schular- und geschlechterspezifische Unterschiede in der indizierten Nutzung**

Die von den Prozessmaßen beschriebene Nutzung des interaktiven Schulbuchs weist einige Unterschiede zwischen den Geschlechtern und Schularten auf (s. Abschnitt 8.1.2).

So nutzten die Mädchen der Stichprobe den größeren Anteil an Widgets, verbrachten mehr Zeit mit der Bearbeitung interaktiver Aufgaben und erreichten eine höhere iBook-Lösungsrate als die Jungen. Gerade letzterer Unterschied ist überraschend, da sowohl standardisierte Tests in der sechsten Jahrgangsstufe (Götz et al., 2013) als auch die Ergebnisse der PISA-Studien (z. B. Reiss et al., 2019) Leistungsunterschiede zugunsten der Jungen feststellen (auch wenn diese Ergebnisse für das Inhaltsgebiet der Bruchzahlen nicht eindeutig sind, vgl. Abschnitt 1.2). Hier scheint das iBook ein Format zu bieten, durch welches die Schülerinnen der vorliegenden Stichprobe dem allgemeinen Trend entgegen höhere Mathematikleistungen erreichten. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich der Leistungsunterschied nur in den Widgets, die ikonische Repräsentationen verwenden, während in symbolischen Aufgaben kein signifikanter Geschlechterunterschied festzustellen ist. Dies erweckt den Eindruck, dass von den Repräsentationswechseln, die allgemein als förderlich

für die Entwicklung von Bruchzahlkonzepten gelten (vgl. Abschnitt 1.3.1.3), besonders die Mädchen der Stichprobe profitierten. Ein Erklärungsansatz für die Diskrepanz bezüglich der Bearbeitungszeit kann darin gefunden werden, dass Untersuchungen zu basalen Computerfähigkeiten eine längere Arbeitszeit bei Mädchen feststellen (Goldhammer et al., 2013). Angesichts der Tatsache, dass die Bedienung des iBooks intuitiv gestaltet wurde (s. Kapitel 6), sind die Ergebnisse von Goldhammer et al. (2013) jedoch nicht auf ALICE:Bruchrechnen übertragbar. Es scheint plausibler, die längeren Bearbeitungszeiten auf einen gewissenhafteren Umgang der Mädchen mit den interaktiven Aufgaben zurückzuführen. Dafür spricht auch der höhere Anteil an Widgets, welche die Schülerinnen im Vergleich zu den Schülern nutzten.

Die iBook-Lösungsrate unterschied sich zudem signifikant zwischen den Teilstichproben der beiden Schularten, wobei die Gymnasialstichprobe eine höhere Lösungsrate erreichte. Dies erscheint u. a. aufgrund des allgemeinen Kompetenzunterschieds zwischen den Schularten (vgl. Götz et al., 2013; Reiss et al., 2019) als erwartungsgemäß und bestätigt die vorgenommene Operationalisierung in tendenziell leistungsstärkere und tendenziell leistungsschwächere Lernende. Hieraus kann möglicherweise auch das erhöhte Bedürfnis nach Unterstützung in der Mittelschulstichprobe abgeleitet werden, welches sich im höheren Ausmaß an abgerufenen Lösungshilfen zeigt. Hier offenbart sich zudem in den ikonischen Widgets ein schulartspezifischer Geschlechterunterschied: Mittelschülerinnen riefen im Vergleich mehr Lösungshilfen auf als Mittelschüler, während dies am Gymnasium nicht der Fall war. Vor dem Hintergrund der anderen Ergebnisse erscheint dies schlüssig: Die tendenziell leistungsschwächeren Lernenden nutzten das Feature per se häufiger und Mädchen beschäftigten sich intensiver mit dem iBook.

Zusätzlich zu dem berichteten Geschlechterunterschied verbrachten die Lernenden der Mittelschulstichprobe in den symbolischen Widgets mehr Zeit als die der Gymnasialstichprobe. Da sich die Anzahl der bearbeiteten symbolischen Aufgaben zwischen den Schularten nicht signifikant unterschied, ist hier davon auszugehen, dass die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler länger für die Bearbeitung dieser Aufgaben benötigten als die leistungsstärkeren. Im Gegensatz zeigte sich in den ikonischen Prozessmaßen eine signifikant längere mittlere Zeit in Feedbackphasen für Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums. Dies kann so interpretiert werden, dass sich die leistungsstärkeren Lernenden intensiver mit den Rückmeldungen in ikonischen Aufgaben auseinandersetzten.

Für die übrigen Prozessmaße konnten keine signifikanten Unterschiede – weder zwischen den Schularten noch den Geschlechtern – festgestellt werden. Mit Ausnahme der eben beschriebenen Besonderheiten kann demnach davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler der Stichprobe das digitale Angebot in ähnlichem Maße nutzten. Insbesondere trifft dies auf das automatische Feedback in symbolischen Aufgaben zu, wie die mittlere Zeit in Feedbackphasen indiziert.

### 9.2.1.3 Zusammenhang der Prozessmaße mit dem Lernerfolg

Die Ergebnisse der Posttestprädiktion lassen darauf schließen, dass die Nutzung des digitalen Angebots in Form von interaktiven Aufgaben, wie sie durch die Prozessmaße indiziert

wird, präzisierend für den Lernerfolg ist. Dies stimmt mit den Aussagen des Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht (Helmke, 2009, s. Abschnitt 2.1.2) überein, gemäß dem die Unterrichtswirkung vom Unterrichtsangebot sowie von dessen Nutzung durch die Schülerinnen und Schüler abhängig ist.

Dabei ist zu beachten, dass sich sowohl für die verschiedenen Nachtestskalen als auch die beiden Teilstichproben nicht stets dieselben Prozessmaße als signifikant erweisen. Diese Tatsache wird in der folgenden Diskussion berücksichtigt.

Neben Helmke (2009) legen auch andere Theorien des Lernens im unterrichtlichen Kontext (z. B. Slavin, 1994) nahe, dass ein hoher Anteil an echter Lernzeit (*Time on Task*) lernförderlich ist. Die Schätzungen der Prädiktionsmodelle deuten hier darauf hin, dass eine Operationalisierung dieses Aspekts durch die Bearbeitungszeit von Aufgaben – also einer relativ wörtlichen Übersetzung des Begriffes *Time on Task* – nicht ausreichend ist: Das entsprechende Prozessmaß erweist sich nicht in allen Modellen als signifikanter Prädiktor. Insbesondere scheint die Bearbeitungszeit im iBook keinen entscheidenden Einfluss auf die Beantwortung von Visualisierungsaufgaben zu nehmen. Vor dem Hintergrund der Lernförderlichkeit von Feedback liegt die Vermutung nahe, dass die Zeit in Feedbackphasen zur *Time on Task* zu zählen ist. Allerdings findet sich keine korrespondierende Signifikanz für den *fixed effect* des entsprechenden Prozessmaßes; dies kann aber auch darauf zurückgeführt werden, dass das Maß der mittleren Zeit in Feedbackphasen die tatsächliche Nutzung des Feedbacks nicht adäquat abbildet (s. auch Abschnitt 9.3.3.1).

Der nahezu durchgängig signifikante, positive Einfluss des Anteils an unterschiedlichen bearbeiteten Widgets auf die Lösungswahrscheinlichkeit bestätigt zunächst, dass es für ein gutes Abschneiden in einem Test nützlich ist, zuvor ein möglichst breites Spektrum des entsprechenden Fachinhalts zu bearbeiten. Zusammen mit dem Ergebnis, dass sich in keinem der Prädiktionsmodelle – weder schulartspezifisch noch skalenabhängig – ein signifikant positiver Einfluss der Gesamtanzahl an bearbeiteten Aufgaben findet, lassen die Ergebnisse aber auch eine weitere Interpretation zu: Lernförderlich erscheint nicht die Bearbeitung einer großen Masse an Aufgaben, sondern vielmehr ein *intelligentes Üben* (Meyer, 2014; Winter, 1984), das unterschiedliche Aufgabenformate einbezieht und den Lernenden so eine umfassende Perspektive auf das inhaltliche Konzept – hier Bruchzahlen – vermittelt. Insbesondere zeigt sich in Übereinstimmung mit anderen Forschungsarbeiten (vgl. Hillmayr et al., 2020) Evidenz, dass ein Üben nach *Drill-and-Practice*-Manier mit möglichst hoher Aufgabenzahl nicht gewinnbringend ist.

Die Anzahl der aufgerufenen Lösungshilfen erweist sich vor allem an den Mittelschulen als signifikanter Prädiktor für die Wahrscheinlichkeit, Items im Nachtest korrekt zu lösen. Der Betrag des Effekts ist allerdings gering, so dass der Einfluss nicht überbewertet werden sollte. Da der Effekt dabei stets negativ ist, kann das Maß jedoch als Indikator für den Bedarf an Förderung der tendenziell leistungsschwächeren Lernenden interpretiert werden und so eines der Ziele der *Learning Analytics* erfüllen (vgl. Ferguson, 2012).

Im Hinblick auf Ergebnisse der *Learning Analytics* (s. Abschnitt 3.3.2.3) sind die durchgängig signifikanten, positiven *fixed effects* des Leistungsmaßes auf den Lernerfolg nicht verwunderlich. Hier zeigt sich die iBook-Lösungsrate zusätzlich zu den Vorkenntnissen

als starker Prädiktor für den Nachtest. Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern erlauben daher einen zu Leistungsnachweisen ähnlichen Erkenntnisgewinn, ohne Unterrichtszeit für die Leistungserhebung zu nutzen und ohne eine Testsituation zu initiieren (vgl. Junco & Clem, 2015).

Auch wenn die Forschungsergebnisse zu geschlechterspezifischen Leistungsunterschieden im Bereich der Bruchzahlen uneindeutig sind (s. Abschnitt 1.2), waren gemäß den Ergebnissen aus standardisierten Tests (Götz et al., 2013) und internationalen Vergleichsstudien (Reiss et al., 2019) im Nachtest ein Geschlechterunterschied zugunsten der Jungen zu erwarten. Im Gegensatz dazu findet sich in keinem der betrachteten Modelle ein Einfluss des Geschlechts auf die Wahrscheinlichkeit, ein Nachtestitem zu lösen. Diese Diskrepanz ist möglicherweise durch die unterschiedliche Nutzung des iBooks (vgl. Abschnitt 8.1.2) zu erklären: Mädchen zeigen sowohl einen höheren Anteil an bearbeiteten Widgets als auch eine höhere Lösungsrate in den interaktiven Aufgaben; beide Maße sind prädizierend für den Posttest. Durch ihren Umgang mit dem iBook scheinen die Mädchen daher den üblicherweise gefundenen Leistungsvorsprung der Jungen aufzuholen. Im Hinblick darauf, dass in den Vergleichsgruppen von Reinhold (2019), die denselben Nachtest ablegten – jedoch ohne vorangegangenen iBook-Unterricht –, ebenfalls keine Geschlechterunterschiede im Posttest aufzufinden sind, erscheint diese Erklärung nicht völlig zufriedenstellend.

Die Itemschwierigkeiten – wie in den *random intercepts* auf Itemebene zu sehen – erweisen sich als robust gegenüber den Prozessmaßen. Dies lässt sich dahingehend interpretieren, dass sich die beobachteten Schwankungen nicht durch Personenvariablen zu erklären sind, sondern dass sich die Items per se in ihren Anforderungen unterscheiden. Über alle Prädiktionsmodelle hinweg wird durch die PCV-Werte ersichtlich, dass die Modelle mit Prozessmaßeffekten bis zu 52 % der Varianz auf Lernenebene aufklären, die sich bei der alleinigen Verwendung der Kontrollvariablen Geschlecht und Vortestergebnis findet. Die Erfassung und Analyse von Prozessdaten erscheinen daher hilfreich, um zusätzliche Informationen zu erlangen. Da die vollen Prozessmaßmodelle stets die niedrigste Varianz auf Ebene der Schülerinnen und Schüler schätzen, ist es zielführend, sowohl Zähl- als auch Zeit- als auch Leistungsmaße zu betrachten. Die unterschiedlichen signifikanten Effekte sowie die unterschiedlich hohen PCV-Werte zeigen jedoch auf, dass die Prädiktionskraft von weiteren Faktoren wie dem Aufgabentyp oder dem Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler abhängt. Hier sind tiefergehende Untersuchungen von Interesse, um den Zusammenhang zwischen Nutzung und Leistung differenziert zu analysieren.

## 9.2.2 Das digitale Schulbuch als Instrument weiterer Forschungsfelder

Nachfolgend werden die Ergebnisse aus der Verwendung des digitalen Schulbuchs als Forschungsinstrument diskutiert.

### 9.2.2.1 Finger-Tracking in kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben

Im Rahmen von Forschungsfrage 4 wurden die Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schüler in den Widgets W10 und W11 aufgezeichnet. Bei beiden Widgets handelt es sich um interaktive Aufgaben, in denen ein symbolisch repräsentierter Bruch in einem gegebenen Ganzen ikonisch darzustellen ist. Das geometrische Objekt (W11: Balken, W10: Kreis) stellt dabei jeweils keine Vorunterteilung bereit; es handelt sich daher um kontinuierliche Visualisierungsaufgaben (vgl. Abschnitt 1.3.1.3).

Die Auswertung der Fingerbewegungen (s. Abschnitt 8.2.1) zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler je nach Widget – und damit zugrunde liegendem geometrischen Ganzen – unterschiedliche Lösungsmuster bevorzugten. Insbesondere findet sich in den Lösungsverfahren in Widget W11 (Balken) ein höherer Anteil an Korrekturen der Eingabe am Ende des Lösungsprozesses. Hingegen wurde in Widget W10 (Kreis) öfter die erste Eingabe eingeloggt. Eine mögliche Erklärung hierfür kann sein, dass sich die Schülerinnen und Schüler unsicher bezüglich ihrer Lösung waren, wenn sie Brüche an einem Balken ohne gegebene Segmentierung markierten. Hierfür spricht auch der höhere Anteil an beobachteten Partitionsprozessen, welche als Rückgriff auf Zählstrategien gedeutet werden können.

Außerdem zeigen sich am Kreis bei einer größeren Anzahl an Schülerinnen und Schülern Lösungsmuster, die eine Unterbrechung der Fingerbewegungen bei  $\frac{1}{2}$  erkennen lassen. Hier liegt die Interpretation nahe, dass die Lernenden den zu markierenden Bruch mit  $\frac{1}{2}$  verglichen, um sich anschließend entsprechend der Relation auf eine Lösung festzulegen. Der Unterschied zwischen den Widgets scheint sich dadurch zu erklären, dass die Markierung der Hälfte am Kreis (W10) leichter zu bewerkstelligen ist als am Balken (W11), vgl. Abbildung 9.1.

Zusammenfassend ergibt sich aus den Ergebnissen die Tendenz, dass Lernende bei Aufgaben am Kreis eher eine Benchmarkingstrategie – hier mit  $\frac{1}{2}$  – verfolgten, während sie am Balken eher auf Zählstrategien zurückgriffen.

Da im Finger-Tracking nur Interaktionen mit dem Touchscreen aufgezeichnet werden können, ist es möglich, dass die erfassten Fingerbewegungen Teile des Lösungsprozesses nicht abdecken. Über eventuelle manuelle Überlegungen der Schülerinnen und Schüler – wie etwa ein Partitionieren –, die ohne Berührung angestellt wurden, können keinerlei Aussagen getroffen werden. Außerdem kann durch das *Preprocessing* mittels Ramer-Douglas-Peucker-Algorithmus (s. Abschnitt 6.4.1.2) Information verloren gehen, da im Zuge der Glättung Datenpunkte entfernt werden. Allerdings war es nicht möglich, diesen Einschränkungen im iBook-Setting zu begegnen: Erstens war eine Informationsreduktion nötig, da es aufgrund des begrenzten Speicherplatzes notwendig war, Ressourcen schonend einzusetzen, um Logs aus anderen Widgets zu ermöglichen. Zweitens scheint es unangebracht, in einem digitalen

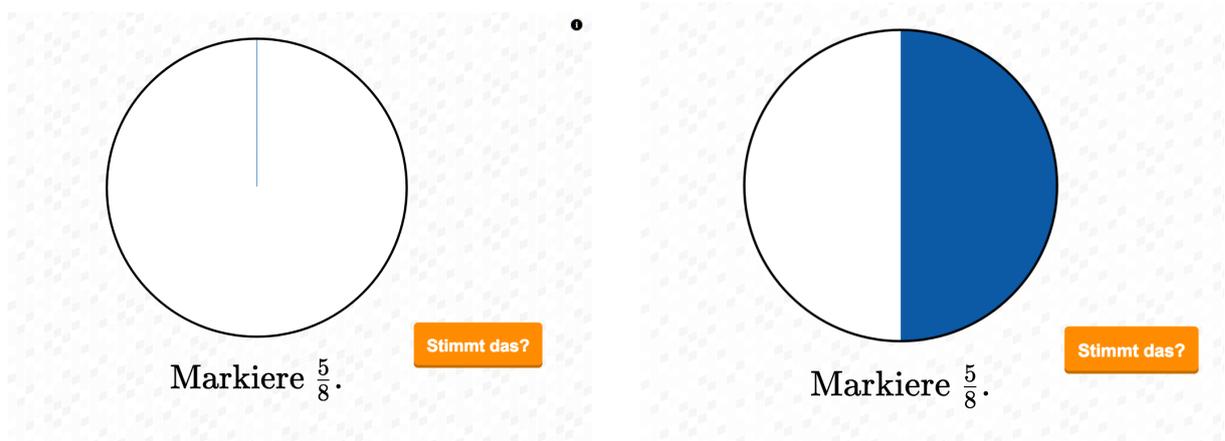


Abbildung 9.1. Markierung von  $\frac{1}{2}$  in Widget W10. Die Kennzeichnung der 0 durch die dünne Linie (links) kann zur einfachen Markierung genutzt werden, indem ein gestreckter Winkel erzeugt wird (rechts).

Schulbuch klinische Restriktionen einzuführen und z. B. den andauernden Kontakt zum Touchscreen einzufordern wie Dotan und Dehaene (2013) es in ihrer Finger-Tracking-Studie tun. Einerseits würden derartige Einschränkungen das natürliche Umfeld verzerren und somit den Vorteil einer Erhebung mittels Prozessdaten aufheben; andererseits zeigen die Beobachtungen von G. Revelle und Reardon (2009), dass gerade jüngere Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten mit Touchscreens immer wieder den Kontakt zu diesem ungewollt verlieren.

Die vorliegenden Ergebnisse sind als erste Schritte einzuordnen, die Lösungsstrategien beim Arbeiten mit kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben digital zu erfassen und zu analysieren. Gerade im Hinblick auf die suboptimale Interrater-Reliabilität sind weitere Forschungsarbeiten nötig, um die Methodik zu verfeinern und zu systematisieren (s. auch Abschnitt 9.4.2).

### 9.2.2.2 Auswirkungen von Aspekten des Lösungsprozesses auf die Aufgabenlösung

Forschungsfrage 5 widmet sich den Auswirkungen von Aspekten des Lösungsprozesses auf die Aufgabenlösung. Im Detail wurde der Einfluss der Bearbeitungszeit sowie des Aufrufens von Lösungshilfen untersucht. Die jeweiligen Ergebnisse, die in Abschnitt 8.2.2 ausgeführt sind, werden im Folgenden diskutiert.

#### Bearbeitungszeit

Die Analyse des Effekts der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Lösung (interaktiver) Einzelaufgaben ergab für beide Schularten einen negativen Effekt, das heißt falsche Antworten entstanden eher nach längerer Bearbeitung, während kurze Bearbeitungszeiten mit richtigen Antworten assoziiert waren.

Die Korrelationen zwischen den *random effects* der GLMMs offenbaren jeweils eine Abhängigkeit des (linearen) Effekts der Bearbeitungszeit von der individuellen Kompetenz der

Schülerinnen und Schüler sowie vom Anforderungsniveau der einzelnen Widgets. Dabei war der Effekt bei Lernenden mit höherer Kompetenz oder Widgets von niedrigerem Anforderungsniveau stärker ausgeprägt, während er für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler oder anspruchsvollere interaktive Aufgaben schwächer ausgeprägt war. Sowohl an der Mittelschule als auch am Gymnasium ergibt die Modellschätzung bei den Widgets, deren Schwierigkeit in den Stichproben eine Standardabweichung über dem Durchschnitt lag, eine Veränderung des Bearbeitungszeiteffekts ins Positive. Für die Mittelschulstichprobe zeigt sich ein betragsmäßig kleinerer Einfluss der Bearbeitungszeit als für die Gymnasialstichprobe; der negative *fixed effect* war also für diese Stichprobe weniger stark. Dies kann als Bestätigung der beobachteten Abhängigkeit des Effekts von der Individualkompetenz angesehen werden, da Mittelschülerinnen und Mittelschüler in den Leistungsmaßen der Studien (Vortest, Nachtest und Prozessmaß iBook-Lösungsrate) im Durchschnitt signifikant schlechter abschnitten als die Gymnasialstichprobe.

Ein Einfluss der quadratischen Bearbeitungszeit gibt – sofern negativ – die Existenz einer optimalen Bearbeitungszeit an. Ein derartiger Effekt – wie er von Greiff et al. (2016) beobachtet wird – lässt sich für die Prozessdaten aus ALICE:Bruchrechnen nicht erkennen. Dabei ist zu beachten, dass sich die Daten der Studien maßgeblich unterscheiden: Die Bearbeitungszeiten der hier betrachteten Stichprobe liegen mit durchschnittlich 0.19 Minuten ( $SD = 0.05$ ) unter denen der Daten von Greiff et al. (2016), die eine mittlere Bearbeitungszeit von 0.60 Minuten aufweisen ( $SD = 0.36$ ). Zudem unterscheidet sich die Datenquelle: In der Studie von Greiff et al. (2016) ist diese ein computerbasierter Test, der insbesondere eine maximale Bearbeitungszeit von drei Minuten erzwingt und die noch zur Verfügung stehende Zeit anzeigt. Ein erklärtes Ziel im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen war es dagegen, Erkenntnisse über das Lernen im natürlichen Unterrichtskontext zu gewinnen, wofür derartige Zeitrestriktionen kontraproduktiv erscheinen. Des Weiteren ergibt sich in den Schätzungen von Greiff et al. (2016) ein positiver Effekt der Bearbeitungszeit (auch ohne Beachtung eines quadratischen Einflusses, s. Scherer, Greiff & Hautamäki, 2015) – im Gegensatz zu dem hier gefundenen negativen *fixed effect*.

Zunächst erscheint dieser negative Effekt der Bearbeitungszeit auf die Korrektheit der Aufgabenlösung überraschend, da gemäß dem *Speed-Accuracy-Tradeoff* (Wickelgren, 1977), ungenauere bzw. schlechtere Antworten bei schnellerer Aufgabenbearbeitung erwartet werden. Der negative Einfluss der Bearbeitungszeit, dessen Abhängigkeit von Individualkompetenz sowie Aufgabenschwierigkeit und die Richtung dieser Abhängigkeit stehen aber in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Goldhammer et al. (2014): In ihren Studien zur Lese- und Problemlösekompetenz finden die Autorinnen und Autoren mit den Prozessdaten von 1020 Erwachsenen für den – nach ihrer Auffassung einfacheren Bereich – der Lesekompetenz einen negativen Effekt, während der Einfluss der Bearbeitungszeit in Problemlöseitems positiv ausgeprägt ist. Beide Effekte sind zusätzlich weiter abhängig von der Kompetenz der Testpersonen und der Itemschwierigkeit. Als Begründung für die Effekte führen Goldhammer et al. (2014) die *Dual Processing*-Theorie an (z. B. Shiffrin & Schneider, 1977). Diese Theorie unterscheidet mentale Prozesse in automatische und kontrollierte Prozesse. Während automatische Prozesse ohne aktive Beeinflussung durch die Denker ablaufen und sich dadurch schnell vollziehen, benötigen kontrollierte Prozesse aktive mentale Steuerung, wodurch sie verlangsamt werden. Für leichtere Aufgaben – konkret

also solche, die eine automatische Bearbeitung zulassen – ist in diesem Sinne ein negativer Effekt durchaus zu erwarten; im Hinblick auf die durchschnittlichen Lösungsraten von 70 % (Gymnasium) bzw. 56 % (Mittelschule) können die Widgets aus ALICE:Bruchrechnen als solche angesehen werden.

### Lösungshilfen

Wider Erwarten ließ sich für keine der beiden Schularten ein signifikanter *fixed effect* vom Aufrufen einer Lösungshilfe auf die Korrektheit der Aufgabenlösung feststellen. Dabei war es unerheblich, ob für die Modellschätzung die gesamte Stichprobe verwendet wurde oder ob diese zuvor auf diejenigen Schülerinnen und Schüler reduziert wurde, welche Lösungshilfen insgesamt mehr als dreimal in Anspruch nahmen. Während zudem am Gymnasium die beobachtete Varianz in den *random effects* relativ gering ausfiel, zeigt sich für die Mittelschulstichprobe eine hohe Varianz auf Widgetebene. Dies lässt darauf schließen, dass sich die Lösungshilfen in den unterschiedlichen Widgets für die Mittelschülerinnen und Mittelschüler unterschiedlich hilfreich erwiesen.

Zudem stellt sich die Frage, ob das *Aufrufen* von Lösungshilfen den Schluss auf deren *Nutzung* zulässt, oder ob diese – aufgrund der freien Verfügbarkeit – bspw. bei Unsicherheit über die Aufgabenlösung aufgerufen wurden, ohne das Unterstützungsangebot inhaltlich wahrzunehmen.

## 9.3 Limitationen der Studie

In diesem Abschnitt wird die empirische Studie dieser Arbeit und das iBook kritisch diskutiert. Zunächst erfolgt die Diskussion der Durchführung der Studie (Abschnitt 9.3.1). Daraufhin werden mögliche Verbesserungen des iBooks beschrieben (Abschnitt 9.3.2). Zum Abschluss der kritischen Betrachtung wird die Prozessdatenerfassung thematisiert (Abschnitt 9.3.3).

### 9.3.1 Durchführung der Studie

Nachfolgend wird die Wahl der Stichprobe, die in der empirischen Studie untersucht wurde, deren Operationalisierung in leistungsstärkere und leistungsschwächere Lernende, die Fortbildungen zum interaktiven Schulbuch vor der Intervention sowie die Umsetzung im Unterricht diskutiert.

#### 9.3.1.1 Stichprobenwahl

Die Klassen, die an der Studie teilnahmen, stammten aus dem Großraum München; die Stichprobenwahl kann daher zu einer Verzerrung der Ergebnisse geführt haben. Diese Tatsache muss bei der Interpretation – gerade hinsichtlich der Generalisierbarkeit – bedacht werden. Der Grund für die Auswahl der Stichprobe war organisatorischer Natur, da die iPads am Ende des Interventionszeitraumes der ersten Teilgruppe innerhalb eines Tages

von den Schulen abgeholt, ausgelesen und an andere Schulen ausgeliefert werden mussten. Dies war nur dank der geographischen Nähe der teilnehmenden Schulen möglich. Zudem sollte bei Problemen mit der – oftmals für Lehrkräfte wie Schülerinnen und Schüler neuen – Technik schnell Unterstützung vor Ort geboten werden.

Durch die Erfassung der Daten im Klassenkontext – und nicht in einer randomisierten klinischen Situation – kann es außerdem zu Verzerrungen durch die Klassenzugehörigkeit kommen. Allerdings adressiert die Arbeit explizit Forschungsfragen im natürlichen Unterrichtskontext, der im Regelunterricht in Klassen stattfindet. Um etwaigen Effekten auf Klassenebene Rechenschaft zu tragen, wurden *random effects* auf Klassenebene in den Modellen berücksichtigt. Daher kann davon ausgegangen werden, dass eine Beeinflussung der Ergebnisse aufgrund der Klassenstruktur der Stichprobe minimal ist.

### 9.3.1.2 Operationalisierung des Leistungsniveaus

Im Forschungsprojekt ALICE:Bruchrechnen wird das Leistungsniveau der Lernenden mit der Schulartzugehörigkeit operationalisiert: Gymnasiastinnen und Gymnasiasten werden als eher leistungsstärker angenommen, während Schülerinnen und Schüler der Mittelschule als tendenziell leistungsschwächer eingestuft werden. Diese Operationalisierung geschieht aufgrund des belegten Leistungsunterschieds in Mathematik zwischen den Schularten sowohl in Bildungsvergleichsstudien (Reiss et al., 2019, z. B.) als auch standardisierten Tests für die sechste Jahrgangsstufe (Götz et al., 2013) und den unterschiedlichen Bildungsprofilen der beiden Schularten (BayEUG, 2000).

Die in dieser Studie gefundenen Ergebnisse – insbesondere der Unterschied in der durchschnittlichen Grundwahrscheinlichkeit der jeweiligen Schülerinnen und Schüler, ein Item im Posttest zu lösen (s. Abschnitt 8.1.3), und der Unterschied in der mittleren iBook-internen Lösungsrate (s. Abschnitt 8.1.2) – rechtfertigen die vorgenommene Operationalisierung zudem.

Eine Übertragung der Ergebnisse auf die Nutzung interaktiver Schulbücher durch leistungsstärkere und leistungsschwächere Lernende im Allgemeinen ist fraglich – gerade auch im Hinblick auf die in Klassen sowie geographisch geclusterte Stichprobe. Dass sich die Erkenntnisse teilweise generalisieren lassen, erscheint schlüssig, kann aber durch diese Studie nicht abschließend geklärt werden.

### 9.3.1.3 Fortbildungen im Vorfeld der Studie

Im Vorfeld der Studie wurden die beteiligten Lehrkräfte im Zuge von 90-minütigen Veranstaltungen über das interaktive Schulbuch und die Ziele der Erhebung informiert. Zu dieser Fortbildung waren auch die Lehrkräfte aus den anderen Interventionsgruppen des Forschungsprojektes geladen, von denen die hier berichteten Stichproben nur einen Teil darstellen (s. Reinhold, 2019; Reinhold et al., 2020). Daher wurde in den Fortbildungen nicht allein der iPad-gestützte Unterricht thematisiert. Im Rahmen der Veranstaltung hatten die Lehrkräfte Gelegenheit, das iBook kennenzulernen und sich bei den anwesenden

Projektmitgliedern tiefgehend zu informieren. Zusätzlich stand den Lehrerinnen und Lehrern eine Handreichung zur Verfügung, welche die einzelnen Unterrichtseinheiten und Lernziele erläuterte und Hinweise zur Unterrichtsdurchführung darbot (s. Abschnitt 7.4.2). Im Hinblick auf die Ergebnisse der Meta-Analyse von Hillmayr et al. (2020), die zeigen, dass Lehrkräftefortbildungen im Zusammenhang mit digitalen Medien förderlich sind, erscheint eine iBook-spezifische Fortbildung vor ähnlichen Studien angeraten.

Da davon ausgegangen wurde, dass aufgrund der hohen Verfügbarkeit an Touchscreenegeräten im Alltag der Lernenden (mpfs, 2016) die Bedienung der Tablet-PCs unproblematisch war, wurde auf eine Schulung der Schülerinnen und Schüler durch das Projekt verzichtet. Für weitere Erhebungen kann eine Einführung der Lernenden in das interaktive Schulbuch und seine Möglichkeiten jedoch sinnvoll sein: Gerade vor dem Hintergrund der Ergebnisse zur Adaptivität und zur Nutzung der Lösungshilfen (vgl. Abschnitt 8.1.1) erscheint dies gewinnbringend, um die Schülerinnen und Schüler für die unterschiedlichen Anforderungsniveaus innerhalb der interaktiven Aufgaben und für die Lösungshilfen zu sensibilisieren.

#### 9.3.1.4 Implementierungskontrolle

Die Lehrkräfte der Studie waren instruiert, für ihren Unterricht möglichst häufig auf das iBook zurückzugreifen. In der Handreichung (s. Abschnitt 7.4.2) waren zusätzlich die Lernziele für die einzelnen iBook-Kapitel ausgeführt. Abgesehen von diesen Aspekten stand es den Lehrkräften der Studien frei, wie sie ihren Unterricht gestalteten und durchführten, da es das explizite Ziel des Forschungsprojektes war, das interaktiven Schulbuchs im Regelunterricht zu untersuchen. Es ist daher möglich, dass aufgrund verschiedenen Unterrichts klassenbezogene Unterschiede in der Studie existieren. Wo es die Datenlage zulässt, werden daher in der vorliegenden Arbeit Klasseneffekte (in Form von *random effects*) berücksichtigt, um derartige Einflüsse abzufedern.

Die Lehrerinnen und Lehrer waren in ihrem Unterrichten auch insofern frei, als von Seiten des Forschungsprojektes keine Beobachtung des Unterrichts oder Abfrage von Unterrichtsdokumenten durchgeführt wurde. Explizit wurde also nicht kontrolliert, ob die Lehrkräfte auf das iBook zurückgriffen. Hier geben die Prozessdaten Auskunft darüber, dass in den Unterrichtsstunden mit den interaktiven Aufgaben gearbeitet wurde. Demnach kann der Einsatz des iBooks im Unterricht als gegeben angesehen werden.

### 9.3.2 Optimierung des interaktiven Schulbuchs

Dieser Abschnitt beschreibt die potenzielle Optimierung des interaktiven Schulbuchs, die über die Implikationen aus der Diskussion der Ergebnisse (s. Abschnitt 9.2) hinausgeht. Einige der unten ausgeführten Entwicklungsansätze gehen auf Aussagen an der Studie beteiligter Lehrkräfte zurück, die nach Abschluss der Erhebungen in teilstandardisierten Interviews zu ihrem Unterricht mit dem iBook befragt wurden.

### 9.3.2.1 Bereitstellung der Prozessdaten an Lernende und Lehrende

Die Prozessdaten werden vollständig im Hintergrund erfasst; aus ihnen wird weder den Lehrkräften noch den Schülerinnen und Schülern irgendeine Art von Information zur Verfügung gestellt. Insbesondere bleibt den Lernenden verborgen, in welchem Umfang sie in den verschiedenen Widgets insgesamt gearbeitet haben. Da die Daten jedoch auf den Geräten gespeichert werden (s. Abschnitt 5.2.3.1), können sie den einzelnen Lernenden als Optimierung des iBooks leicht zugänglich gemacht werden.

Nach Hattie und Timperley (2007) dient Feedback zur Beantwortung der drei folgenden Fragen: „*Where am I going? How am I going? and Where to next?*“ (S. 86). Im Zusammenhang der zweiten Frage (*How am I going?*) können Prozessmaße als Feedback kommuniziert werden: Über die bereits diskutierte Fortschrittsanzeige hinaus (s. Abschnitt 9.2.1.1) können auf Widgetebene bspw. Prozessmaße wie die Anzahl an bearbeiteten Aufgaben, die gesamte Bearbeitungszeit oder die Lösungsrate einen Einblick in den aktuellen Stand bezüglich des jeweiligen Widgets vermitteln. Erfolgt eine derartige Übersicht in einem eigenständigen, globalen Widget, in dem den Lernenden widget- oder kapitelweise der aktuelle Status präsentiert wird, so können Prozessmaße Unterstützung bei der Antwort auf die Frage *Where to next?* bieten, indem sie Widgets mit unterdurchschnittlicher Nutzung aufzeigen. Ein derartiger Überblick – eine Art von automatisch generiertem Lerntagebuch – kann die Schülerinnen und Schüler bei ihrem selbstgesteuerten Lernen unterstützen.

Zusätzlich erscheint eine Live-Übermittlung von Informationen über die iBook-Nutzung der Lernenden an die Lehrkräfte für eine effektive Unterrichtsgestaltung hilfreich (Choppin et al., 2014; Usiskin, 2018), um bspw. gezielten Förderbedarf erkennen zu können oder eine zeitnahe Reaktion auf Lernende zu ermöglichen, die sich außerhalb des intendierten Lernstoffes bewegen (vgl. Abschnitt 8.1.1.1; für weitere Anwendungsfälle siehe bspw. Embong et al., 2012; Sheen & Luximon, 2017; Sigarchian et al., 2017). Die Realisierung einer Live-Übermittlung setzt allerdings den kontinuierlichen Zugriff aller Geräte im Klassenzimmer auf zumindest ein lokales Netzwerk voraus, in dem ein entsprechend programmierter Server die Daten der iBooks empfängt. Zudem ist die Entwicklung einer Benutzeroberfläche erforderlich, welche die Daten für die Lehrkräfte fortlaufend aufbereitet und darstellt. Hierbei sind zusätzlich Fragen bezüglich des Datenschutzes und der Persönlichkeitsrechte der Lernenden zu bedenken.

### 9.3.2.2 Weiterentwicklung der Adaptivität

Die Adaptivität der interaktiven Aufgaben in ALICE:Bruchrechnen ist so implementiert, dass anhand der Lösungsrate der Aufgaben in einem Set entschieden wird, ob das Anforderungsniveau angepasst wird (s. Abschnitt 6.2.2.2). Sie folgt damit der Forderung von Leutner (1992) für adaptive Lernsysteme, „den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben dynamisch an den sich verändernden Kenntnisstand anzupassen“ (S. 32). Das Vorgehen ist allerdings starr; komplexere Ansätze verwenden für die Adaption Formen der künstlichen Intelligenz, die vielversprechend erscheinen (z. B. Fenza, Orciuoli & Sampson, 2017). Jedoch ist es gemäß Leutner (2002) für adaptive Systeme nicht notwendig, künstliche Intelligenz zu verwenden, um wirksam zu sein.

Unabhängig davon kann nicht nur das Anforderungsniveau, sondern ggf. auch die Setlänge adaptiv angepasst werden (vgl. auch Leutner, 1992), um Schülerinnen und Schülern das Arbeiten auf entsprechendem Anforderungsniveau und im eigenen Lerntempo zu ermöglichen. Auf diese Art und Weise kann die Unterstützung von individualisiertem Unterricht (z. B. Helmke, 2009) durch das iBook optimiert werden.

Außerdem arbeitet die Adaptivität widgetspezifisch. Während dies bei der Einführung neuer Themen als sinnvoll zu erachten ist, könnte diese Tatsache bei ähnlichen Widgets zu einer Unterforderung führen. Bspw. wäre es hier denkbar, die Daten verwandter Aufgaben zu nutzen, um entweder auf entsprechenden Anforderungsniveaus zu starten oder zumindest die Sets zu Beginn der jeweiligen Widgets zu verkürzen.

### 9.3.2.3 Optimierung der gestuften Lösungshilfen und des Feedbacks

Zur Unterstützung der Lernenden stellt das interaktive Schulbuch gestufte Lösungshilfen und automatisches Feedback bereit; beide Aspekte können weiterentwickelt werden, um ihre Auswirkungen auf das Lernen zu optimieren.

#### Gestufte Lösungshilfen

Gestufte Lösungshilfen standen den Schülerinnen und Schülern in 14 Widgets, die für beide Schularten im iBook eingebunden waren, zur Verfügung. Hier scheint eine Erweiterung des Angebots auf einen größeren Anteil sinnvoll. Gerade in iBook-Kapitel 5 – „Brüche auf dem Zahlenstrahl“ – findet sich kein Widget, das diese Unterstützung anbietet.

Debattierbar ist auch die im Projekt vorgenommene Fixierung auf drei Lösungshilfen pro Aufgabentyp. Manche Lösungsprozesse zerfallen auf natürliche Weise in mehr oder weniger Schritte, die durch eine entsprechende Anzahl an Lösungshilfen besser aufgegriffen werden können. Demgegenüber steht das Designziel der Konsistenz (z. B. Apple Inc., 2015), an dem sich gute digitale Schulbücher orientieren (vgl. Abschnitt 2.4.1).

#### Feedback

In einigen interaktiven Aufgaben findet das Feedback auf rein symbolischer Ebene statt. Insbesondere betrifft dies die symbolischen Aufgaben zum Bestimmen des Anteils bzw. des Ganzen (W17 & W27 bzw. W22). Gerade hier wäre eine Erweiterung um einen Repräsentationswechsel in die ikonische Ebene sinnvoll – wie er zur Einführung im iBook-Text vollzogen wird und allgemein für die Entwicklung von Bruchzahlkonzepten als hilfreich gilt (z. B. Lesh et al., 1987b, vgl. auch Abschnitt 1.3.1.3).

Des Weiteren beziehen sich die Rückmeldungen, die in den Widgets implementiert sind, nicht explizit auf den Text des iBooks – wie z. B. auf die Merksätze, wenn auch sie deren Formulierungen übernehmen – oder auf andere Widgets – wie zur Thematik passende interaktive Diagramme. Gerade Verweise auf die Einführungstexte und -widgets scheinen angebracht, um Schülerinnen und Schülern bei Verständnisproblemen ausführlicher als im Widgetfeedback Unterstützung zu bieten.

### 9.3.2.4 Ausweitung der Aufgabeneinkleidung

Die Kontextualität der Aufgaben in den Widgets W18, W21 und W28 greift den Lebensweltbezug auf, der im iBook für die Einführung von Bruchzahlen verwendet wird. Ziel ist es, realitätsnahe Aufgaben bereitzustellen – wie dies u. a. für qualitativ hochwertigen Unterricht gefordert wird (z. B. Brophy, 2002) und im Lehrplan verankert ist (ISB, 2018a). In den Widgets dienen vier verschiedene Kontexte (s. Abschnitt 6.4.2.2) dazu, ebendies zu befördern. Allerdings ist – da es sich bei den Aufgaben im iBook um *eingekleidete Aufgaben* handelt – der Lebensweltbezug als gering einzustufen (Leiss, Plath & Schwippert, 2019). Nichtsdestotrotz scheint eine Ausweitung auf mehrere, unterschiedliche Kontexte eine Möglichkeit, Realitätsbezüge facettenreich darzustellen. Zusätzlich sollten eine größere Anzahl als die vorhandenen drei interaktiven Aufgaben im iBook Realitätskontext bieten, um auch in anderen Teilbereichen der Bruchzahlkonzepte zusätzliche lebensnahe Aufgabenangebote bereitzustellen.

### 9.3.2.5 Erweiterung des Aufgabenangebots

Als ein Vorteil von digitalen Schulbüchern gilt es, dass sie nahezu unbeschränkt Inhalte zur Verfügung stellen können (s. Abschnitt 2.3.2); das derzeitige Angebot des iBooks kann daher erweitert werden. In Bezug auf die interaktiven Aufgaben sind hier Möglichkeiten, weitere Kompetenzen abzudecken sowie weitere Aufgabenformate anzubieten.

### Aufgaben zu weiteren Kompetenzen

Wie die Übersicht in Tabelle A.1 zeigt, fokussieren die Aufgaben in ALICE:Bruchrechnen den Umgang mit Darstellungen und den formal-rechnerischen Aspekt von Bruchzahlen (Kompetenzen K4 respektive K5 der Bildungsstandards, s. KMK, 2003). Andere Kompetenzen werden nur von wenigen Widgets gefördert. Eine Ursache dafür liegt darin, dass die interaktiven Aufgaben in ALICE:Bruchrechnen weitgehend mit automatischer Korrektur – als wichtigem Vorteil von E-Books (vgl. Abschnitt 2.3.2.2) – ausgestattet werden sollten. Während diese für die K4- und K5-Aufgaben umsetzbar war, war sie im Zuge des Projekts für Aufgaben bspw. zum Modellieren oder Kommunizieren nicht zu realisieren; auch allgemein gelten derartige Aufgabenformate und deren Korrektur in digitalen Formaten als schwer umsetzbar (vgl. Usiskin, 2018; Zehner, 2016).

Diesem Mangel im Aufgabenspektrum sei an dieser Stelle mit dem Hinweis begegnet, dass der Einsatz von ALICE:Bruchrechnen *begleitend* zu traditionellem Material konzipiert ist. Im Sinne einer vollständigen Ersetzbarkeit eines Schulbuchs bestünde die Möglichkeit, nicht-interaktive Aufgaben im iBook zu hinterlegen und diese ggf. mit einer aufrufbaren Musterlösung zu versehen.

### Weitere Aufgabenformate

Neben der Erweiterung des Aufgabenangebots in Bezug auf das Kompetenzspektrum bietet es sich an, bestehende interaktive Aufgabenformate auf andere Inhaltsbereiche des

iBooks auszuweiten. So ist als konsequente Folgerung der kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben am Kreis und am Balken (W10 & W11, vgl. auch Abschnitt 1.3.1.3) ein Widget anzustreben, das die Auseinandersetzung mit Brüchen an einem kontinuierlichen Zahlenstrahl ermöglicht. In ähnlicher Weise kann die Ergänzung einer fehlenden Zahl in Erweiterungs- und Kürzungsoperationen (W49) auf Aufgaben zur Bestimmung von Anteil und Ganzen in den iBook-Kapiteln 2 und 3 übertragen werden. Ein entsprechendes Widget vereinigt beide Rechnungen in einer Aufgabenstellung und ist somit für den Abschluss der Thematik geeignet sein.

Allgemein kann das iBook um Widgets am Kapitelende ergänzt werden, in denen der Lerninhalt rekapituliert wird. Derartige Möglichkeiten zur Selbstkontrolle des eigenen Lernfortschritts gelten als Merkmal guter Schulbücher (s. Abschnitt 2.4.1). Solche Widgets können in Form von Multiple-Choice-Aufgaben oder durch eine Abfolge an Einzelaufgaben aus dem jeweiligen Kapitel realisiert werden.

### 9.3.2.6 Zusammenfassung von Widgets

Das interaktive Lehrbuch enthält Widgets, die Ähnlichkeiten bezüglich ihrer Funktionalität aufweisen. So sind in mehreren Widgets des ersten iBook-Kapitels Brüche am unterteilten bzw. am kontinuierlichen Ganzen zu markieren (W8 und W9: Markieren am unterteilten Rechteck und Kreis; W10 und W11: Markieren am kontinuierlichen Kreis und Balken; s. Abschnitt 6.4.1). Korrespondierend dazu existiert ein einzelnes Widget, in dem ikonische Darstellungen in symbolische Schreibweise zu übersetzen sind, wobei die Darstellungen zufällig zwischen Kreis, Rechteck und Schokolade variieren. Es liegt daher nahe, die Widgets W8 und W9 bzw. W10 und W11 jeweils zusammenzufassen und den Lernenden so die Auswahl an Widgets zu erleichtern sowie die Aufgaben abwechslungsreicher zu gestalten. Dabei ist den Ergebnissen der Prozessdatenanalyse zufolge zu beachten, dass sich die Aufgabentypen am kontinuierlichen Ganzen bezüglich der beobachteten Lösungsprozesse unterscheiden (Abschnitt 8.2.1).

iBookkapitel 4 – „Verschiedene Brüche mit dem gleichen Wert“ – thematisiert das Erweitern und Kürzen von Brüchen. Es enthält im Vergleich zu den anderen Kapiteln des Buches die meisten Widgets; daher kann hier eine Reduktion der Widgetzahl sinnvoll erscheinen, um damit die für 90 Minuten ausgelegte Unterrichtseinheit zu entlasten. So ähneln sich vier Widgets zum Erweitern (W43, W45) und Kürzen (W44, W46) im Wortlaut der Aufgabenstellung („Gib an, mit welcher Zahl der (dargestellte) Bruch erweitert/gekürzt wurde“, s. Abschnitt 6.4.4.2). In jedem der beiden Bereiche arbeitet eine interaktive Aufgabe mit ikonischen Darstellungen, die andere Aufgabe mit symbolischen Repräsentationen. Um die hohe Widgetdichte zu reduzieren, erscheint eine Zusammenlegung der unterschiedlichen Aspekte – zumindest in Teilen – angebracht. Gleiches gilt für die Widgets W41 und W42 („Erweitere/Kürze den Bruch mit ...“). Auch wäre auf diese Weise ein höheres Maß an flexiblem Denken erforderlich, um die passende Lösungsstrategie zu wählen, da ein routinemäßiges Anwenden derselben Strategie innerhalb eines Widgets nicht mehr stets zu richtigen Lösungen führen würde. Allerdings ermöglicht es die separate Präsentation der Aufgabentypen, gezielt den jeweiligen Lösungsweg zu üben, und scheint daher als Lernangebot zur Erarbeitung der Thematik angemessen.

### 9.3.3 Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern

In diesem Abschnitt wird die Prozessdatenerfassung in ALICE:Bruchrechnen kritisch betrachtet.

#### 9.3.3.1 Kritische Reflexion der erhobenen Daten

Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern sind in der Lage, die Nutzung der verschiedenen Komponenten des Schulbuchs effektiv zu erfassen – ohne dabei den Prozess der Nutzung selbst zu stören (z. B. Junco & Clem, 2015). Sie erfüllen damit wesentliche Forderungen, die Rezat (2009) an eine Methode stellt, welche die Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern erhebt. Durch die Art der Umsetzung in ALICE:Bruchrechnen ist die Erhebung zudem sowohl zeit- als auch ortsunabhängig; die Prozessdaten lokalisieren die erfassten Aktivitäten im iBook exakt und bieten gleichzeitig genaue Informationen über die zugehörigen Nutzungszeiten. Allerdings erfüllen digitale Schulbücher als Erhebungsinstrument andere der Anforderungen von Rezat (2009) nicht: So können die Zeitpunkte der Nutzung nur Hinweise auf den Zweck der Nutzung bieten (bspw. kann eine Bearbeitung von unterschiedlichen Widgets aller Kapitel am Ende der Intervention auf eine Wiederholung des Stoffes hindeuten), ihn aber nicht sicher erfassen. Ebenso bleibt die jeweilige Situation – z. B. der unterrichtliche Klassenkontext – größtenteils verborgen.

Da das iBook für den Einsatz im Unterricht konzipiert ist, konnte die Datenerfassung in der Studie nicht so spezifisch implementiert werden, wie dies bei einer klinischen Untersuchung möglich ist. Im Spagat zwischen Datenerfassung und didaktischer Umsetzung hatte es Priorität, den Schülerinnen und Schülern bestmögliche Lerngelegenheiten zu bieten. Im Detail war es in den Prozessdaten der Studie schwer möglich, die Nutzung der Lösungshilfen gezielt zu untersuchen oder die Feedbacknutzung genau zu terminieren. Auch die Aufzeichnung der Fingerbewegung für die Beantwortung von Forschungsfrage 4 unterliegt Einschränkungen, die im Einsatz des Finger-Trackings innerhalb eines interaktiven Schulbuchs begründet liegen (vgl. Abschnitt 9.2.2.1).

#### Zeitmaße

Zeitmaße aus Prozessdaten unterliegen der Annahme, dass die gesamte gemessene Zeit mit der betrachteten Aktivität – hier: Bearbeitung von interaktiven Aufgaben, Zeit in Feedbackphasen – verbracht wird (Goldhammer et al., 2014). Es handelt sich bei den Zeitmaßen daher um Schätzungen für die tatsächliche Zeitspanne, in welcher die Schülerinnen und Schüler die interaktiven Aufgaben bearbeiteten bzw. sich mit Feedback auseinandersetzten.

Gerade für das Zeitfenster zwischen aufeinanderfolgenden Einzelaufgaben, das in dieser Arbeit als Schätzung für die Zeit in Feedbackphasen verwendet wird, kann diese Annahme in Frage gestellt werden, da das Ende einer Aufgabenbearbeitung auch einen natürlichen Endpunkt dafür darstellt, die Arbeit im Widget zu unterbrechen. Daher wird in dieser Arbeit für dieses Maß der Durchschnittswert verwendet, um den Einfluss langer Zeitspannen, welche vermutlich außerhalb des Feedbacks verbracht wurden, zu reduzieren.

Des Weiteren ist in diesem Zusammenhang zu beachten, dass Zeitmaße aus Prozessdaten besonders anfällig gegenüber Ausreißern sind. Daher müssen die Daten vor der Auswertung aufbereitet werden. Die Strategie der Datenaufbereitung kann dabei die Ergebnisse der statistischen Analysen erheblich beeinflussen (Kovanović et al., 2015); das in dieser Arbeit angewandte *Preprocessing* ist ein in der Literatur übliches Verfahren (z. B. Goldhammer et al., 2014) und darauf ausgelegt, die Zeitmaße möglichst konservativ im Sinne einer oberen Schranke zu schätzen, wodurch es zu einer Überschätzung der tatsächlichen Zeitspannen kommen kann.

### Wahl der Prozessmaße

In Abschnitt 7.2.3 sind die sechs Prozessmaße beschrieben, die in dieser Arbeit aus den Prozessrohdaten für die einzelnen Schülerinnen und Schüler berechnet und in den Analysen verwendet wurden. Diese Auswahl der Prozessmaße kann nahezu beliebig erweitert und verändert werden: In anderen wissenschaftlichen Arbeiten, die Prozessmaße bspw. zur Lernerfolgsprädiktion verwenden, fließen mitunter zunächst bis zu 28 verschiedene Prozessmaße in die Modelle ein (z. B. Anozie & Junker, 2006; Zheng et al., 2019). Die Auswahl der Maße für das finale Modell erfolgt in diesen Studien über die Signifikanz in einem ersten Prädiktionsmodell. Die Prozessmaße für diese Arbeit sind hingegen so gewählt, dass sie die Nutzung des interaktiven Schulbuchs und seiner Features abbilden (vgl. Kapitel 6). Sie umfassen daher die Nutzung der interaktiven Aufgaben, der Lösungshilfen und des automatischen Feedbacks. Im Hinblick auf die genutzten Lösungshilfen scheint das gewählte Maß aber die wirkliche Nutzung nicht vollständig zu erfassen (s. Abschnitt 9.2.1.1), so dass hier offene Fragen bleiben. Andere Aspekte, wie die Nutzung der verschiedenen interaktiven Aufgaben, werden durch die Prozessmaße jedoch in einem zufriedenstellenden Maße beschrieben.

#### 9.3.3.2 Erweiterung der Prozessdatenerfassung

Die erfassten Prozessdaten lassen einige Lücken in der Unterrichtsbeschreibung. Dabei sind diese Leerstellen nicht allein darauf zurückzuführen, dass das iBook innerhalb dieser Zeitfenster nicht im Unterricht eingesetzt wurde. Vielmehr erheben die Prozessdaten nicht die gesamte Nutzung der iBooks (s. Abschnitt 9.2.1.1).

So wurden zwar alle Lehrkräfte mit jeweils einem iPad für den Gebrauch im Unterricht ausgestattet; Daten aus den Lehrkraftgeräten wurden jedoch nicht analysiert. Zudem wurden für die Gymnasialstichprobe keine Daten aus interaktiven Diagrammen gesammelt, so dass diese aus Vergleichbarkeitsgründen auch für die Mittelschulstichprobe aus den Analysen ausgeschlossen wurden.

Außerdem wurden die Prozessdaten aus den Widgets, die direkt in eine Seite des iBooks eingebettet sind, nicht ausgelesen, da ein Zugriff durch das Widget, welches die Datenübermittlung an den Server der Universität durchführte (vgl. Abschnitt 6.3.2), nicht möglich ist. Die Ursache dafür ist, dass die Inpage-Widgets als Autoplay-Widgets intern eine andere Subdomain aufweisen als die anderen Widgets (s. Abschnitt 5.2.3) und dass die verwendete

Speichertechnologie domänenspezifisch arbeitet (vgl. Abschnitt 5.2.3.1). Ein zweites Übermittlungswidget, das selbst automatisch startet, hätte zwar Zugriff auf diese Daten, könnte diese aber nicht an den Server übermitteln, da es als Autoplay-Widget keinen Zugang zum Internet hätte (Apple Inc., 2018b). Im Hinblick darauf, dass nur drei der insgesamt 88 Widgets direkt in die iBook-Seiten eingebettet sind, fällt dieser Datenverlust nicht zu sehr ins Gewicht, zumal es sich bei Zweien davon um Multiple-Choice-Widgets handelt, die auf eine einmalige Benutzung ausgelegt sind. Zudem wären diese Logs bezüglich der Zeitdaten zurückhaltend zu betrachten, da der erste erfasste Zeitstempel nicht das Öffnen des Widgets loggen würde, sondern das Aufblättern der jeweiligen Seite, die neben dem Widget weitere Elemente beinhaltet. Damit einhergehend kann ein Beginn der Aufgabenbearbeitung beim Aufblättern dieser Seiten nicht angenommen werden. Diese Problematik ist genuin für viele Logfileanalysen und wird bspw. im Kontext von *Learning Analytics als First-Action-Detection Problem* (Kovanović et al., 2015) diskutiert.

Durch die Verwendung von iBooks Author als Grundgerüst des interaktive Schulbuchs bleibt der Zugriff auf Markierungen von Nutzerinnen und Nutzern oder Protokolle zum Blätterverhalten verwehrt, die in anderer Forschung zum Lernen mit digitalen Büchern zum Einsatz kommen (vgl. Abschnitt 3.3). Zumindest das Endstadium der Markierungen könnte händisch ausgezählt werden. Dieses Vorgehen hat allerdings den Nachteil, dass geänderte oder gelöschte Markierungen nicht erfasst werden. Außerdem benötigt die Auswertung jedes einzelnen iBooks auf markierte Passagen ein hohes Maß an zeitlichen Ressourcen, die in der engen – aus Studiensicht notwendigen – Taktung von erster und zweiter iPad-Gruppe nicht vorhanden waren. Über das Blätterverhalten innerhalb der Aufgabenblocks der einzelnen Kapitel geben die Daten aus den Widgets selbst zu einem gewissen Maße Auskunft, indem die chronologischen Verläufe der Widgetaktivitäten betrachtet werden (vgl. Abschnitt 8.1.1.1). Genaue Informationen über das allgemeine Leseverhalten sind aufgrund der Einschränkungen des iBook-Formates nicht zu erheben: Ein auf jeder iBook-Seite eingefügtes, unsichtbares Autoplay-Widget, das die Zeitspannen zwischen Anzeigen und Ausblenden der Seiten mitprotokolliert, könnte zwar Daten über die Anzeigedauer der entsprechenden Seiten sammeln; da diese allerdings nicht vom iPad ausgelesen werden können (s. Abschnitt 6.3.2), ist hier nach anderen Lösungswegen zu suchen.

Trotz der Datenfülle, die in dieser Studie gesammelt wurde – über 200 000 Logeinträge – ist das Logverhalten der Widgets relativ unpräzise: Geloggt werden in der Regel nur Aufgabenlösungen und der Aufruf von Lösungshilfen. Feinere Logs sind durchaus denkbar. Aus Forschungssicht wäre es interessant, sämtliche Interaktionen der Schülerinnen oder Schüler mit dem Touchscreen nach dem Anzeigen der Aufgabenstellung zu speichern, um u. a. den Beginn der Antworteingabe als zusätzliche Information für *Time on Task*-Analysen bereitzustellen. Lange Bearbeitungszeiten, die im *Preprocessing* als Ausreißer erkannt werden, könnten dadurch exakter auf eine plausible Länge geschätzt werden. Zudem würde sich so ein vollständigeres Bild der Aufgabenbearbeitung ergeben: Das Loggen jeder einzelnen Eingabe (auch ohne Korrekturanforderung) würde es bspw. erlauben, Lösungsversuche der Schülerinnen und Schüler vor der abschließenden Antwortabgabe zu erfassen und so weitere Informationen über den Lösungsprozess zu erhalten. Das Speichern der Handschriftrohdaten würde im Nachhinein die Überprüfung zulassen, inwiefern vom System als fehlerhaft vermerkte Antworten auf einer unleserlichen Handschrift beruhen

bzw. inwiefern die jeweiligen Schreibweisen dem Erkennungsalgorithmus unbekannt sind. In der Praxis sind jedoch die Begrenzungen der Speicherkapazität zu beachten, die im iBook gelten, so dass derartig feine Aufzeichnungen nicht mit dem verwendeten E-Book-Format und mit der gewählten Speichertechnologie vereinbar sind.

### 9.3.3.3 Automatisierung der Prozessdatenzuordnung

Das im Projekt angewandte Verfahren zum Auslesen der gespeicherten Daten (Abschnitt 6.3.2) vergibt als Dateinamen für die auf dem Server eingehenden Logdaten den aktuellen Zeitstempel. Dieser Dateiname wurde gewählt, da weder dem Datenübertragungswidget noch dem Server identifizierende Informationen über das sendende Gerät vorliegen. Die Dateien wurden anschließend händisch umbenannt und damit dem jeweiligen iPad zugeordnet. Dieses Vorgehen hat den Nachteil, dass die Datenauslese nur einzeln erfolgen kann und durch das Umbenennen zeitaufwändig ist.

Als Abhilfe wäre – gerade für Projekte, in denen Daten mehrmals ausgelesen werden – eine Lösung denkbar, die dem Server einen iPad-Namen übermittelt. Da dieser jedoch – wie beschrieben – nicht automatisch ausgelesen werden kann, müsste er einmalig innerhalb des iBooks auf jedem verwendeten Gerät hinterlegt werden. Bspw. könnte über ein Eingabefeld in einem Widget ein Name in den lokalen Speicher gesichert werden, der bei der Datenübermittlung an den Server zusätzlich zu den gespeicherten Daten übergeben wird und so das iPad identifiziert. Allerdings sollten Maßnahmen ergriffen werden, die eine Veränderung des hinterlegten Namens von Seiten Unbefugter verhindern, um die korrekte Zuordnung zu garantieren. Im Fall von ALICE:Bruchrechnen wurden die Geräte pro Teilstudie zweimal ausgelesen. Das Verfahren wäre daher insgesamt nur marginal beschleunigt worden.

## 9.4 Schlusszusammenfassung & Ausblick

Zum Abschluss der Arbeit werden in Abschnitt 9.4.1 einige Kernresultate zusammengefasst, bevor Abschnitt 9.4.2 einen Ausblick gibt, wie Forschung in Sinne dieser Dissertation fortgeführt werden kann.

### 9.4.1 Schlusszusammenfassung

Diese Arbeit zeigt in Zusammenhang mit den weiteren Arbeiten, die im Rahmen des Forschungsprojekts ALICE:Bruchrechnen entstanden sind (u. a. Reinhold, 2019; Werner, 2019), wie ein interaktives Schulbuch zur Bruchrechnung konzipiert und realisiert werden kann, das Ergebnisse der mathematikdidaktischen Forschung berücksichtigt und die Vorteile des digitalen Mediums – insbesondere der Tablet-PCs – nutzt (Kapitel 1, 2 & 6). Dabei liegt der Fokus auch darauf, praktische Informationen für die Umsetzung eines interaktiven Schulbuchs zu geben (Kapitel 5), so dass Erstellerinnen und Erstellern sowohl eine Synopse der Möglichkeiten und Herausforderungen von digitalen Lehrwerken als auch Hilfestellung für die Implementierung vorliegen.

In einer Synthese verschiedener Forschungsbereiche, die sich auf die Nutzung konventioneller Schulbücher und die Arbeit mit Prozessdaten erstrecken, stellt diese Arbeit vor, wie digitale Schulbücher eingesetzt werden können, um ihre Nutzung zu erheben (Kapitel 3). In diesem Zusammenhang geben die Ergebnisse der empirischen Studie, die an zwei Schularten durchgeführt wurde (Kapitel 7), Einblicke, wie und mit welchen Unterschieden Schülerinnen und Schüler von Gymnasien und Mittelschulen das interaktive Schulbuch im Unterricht nutzten (Abschnitt 8.1).

Im Detail arbeiteten die Mädchen beider Stichproben im Vergleich zu den Jungen länger und in einem größeren Anteil des interaktiven Angebots, wobei sie zudem eine höhere Lösungsrate erzielten. Interpretiert man dies als intensivere Beschäftigung mit oder Interesse an den Inhalten, so zeigen sich interaktive Schulbücher – zumindest für Bruchzahlkonzepte – in der Lage, Mädchen in Mathematik zu fördern; dies scheint vor dem Resultat der PISA-Studien, dass Mädchen geringere Freude und Interesse an Mathematik in Deutschland angeben (Prenzel, Sälzer, Klieme & Köller, 2013), bedeutsam.

In Übereinstimmung mit gängigen Theorien erweist sich die Nutzung des interaktiven Schulbuchs in dieser Arbeit als präzisierend für den Lernerfolg. Insbesondere ergibt sich ein positiver Effekt des Anteils an bearbeiteten unterschiedlichen Widgets. Dies kann als empirische Evidenz für die Sinnhaftigkeit des Plädoyers nach einem facettenreichen, intelligenten Üben (Meyer, 2014; Winter, 1984) verstanden werden. Das Ergebnis erscheint für den Mathematikunterricht im Allgemeinen – nicht notwendigerweise unter Verwendung interaktiver Schulbücher – von Bedeutung und impliziert die Empfehlung, verschiedene Aufgabenarten im Unterricht anzubieten, die ein Konzept – wie das der Bruchzahlen – von verschiedenen Seiten sowie mit unterschiedlichen Repräsentationsformen behandeln, und so den Aufbau anschaulicher Grundvorstellungen zu unterstützen.

Zusätzlich zu den Ergebnissen, welche die Nutzung des interaktiven Schulbuchs betreffen, zeigt diese Arbeit auf, dass E-Books auch einen Erkenntnisfortschritt bezüglich eher psychologisch motivierter Forschungsfragen in der Mathematikdidaktik ermöglichen – und dies, ohne das natürliche Umfeld zu verlassen (Abschnitt 8.2). Hier liegt mit den Ergebnissen zu kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben eine Pionierstudie für Finger-Tracking-Forschung in der Mathematikdidaktik vor. Schon diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass unterschiedliche Darstellungsformen intuitive Größenvorstellungen von Bruchzahlen auf verschiedene Art und Weise aktivieren und unterschiedliche Lösungsprozesse auslösen. Hieraus ergibt sich für den Unterricht erneut die Empfehlung, vielfältige ikonische Repräsentationen zu verwenden, um die Entwicklung von tragfähigen Bruchzahlkonzepten zu fördern.

Des Weiteren bestätigt die Arbeit den negativen Effekt der Bearbeitungszeit auf die Aufgabenlösungen für Aufgaben mit allgemein niedrigerem Anforderungsniveau, der in anderen Forschungsarbeiten gefunden wird (z. B. Goldhammer et al., 2014). Ebenso verifizieren die Ergebnisse die Abhängigkeit dieses Effekts von der spezifischen Aufgabenschwierigkeit sowie von der Individualkompetenz. Dabei erweitert die vorliegende empirische Studie die bisherigen Erkenntnisse auch durch den Blick auf eine vergleichsweise jüngere Stichprobe (Schülerinnen und Schüler der sechsten Jahrgangsstufe) und durch die Datenerfassung außerhalb von Testsituationen.

## 9.4.2 Ausblick

Diese Forschungsarbeit macht am Beispiel der Entwicklung von Bruchzahlkonzepten deutlich, wie vielfältig Forschung mit Prozessdaten aus interaktiven Mathematikschulbüchern sein kann. Dabei kann die Arbeit nicht alle Fragen abschließend beantworten, sondern eröffnet vielmehr Raum für weitere Forschungsarbeiten.

Die erhobene Datenfülle von insgesamt über 200 000 Rohdatenpunkten gestattet weitere Analysen, welche über die in dieser Arbeit vorgestellten hinausgehen. Aufgrund der Vielzahl an erhobenen Aufgabenlösungen zu denselben Aufgabentypen bietet es sich an, die Prozessdaten auf wiederkehrende Fehler zu untersuchen. Typische Schülerfehler sind für den Bereich der Bruchrechnung gut dokumentiert (vgl. Abschnitt 1.2.1); die vorliegenden Daten können hier einerseits zur Verifikation bekannter Fehler beitragen und andererseits eventuell neuartige Fehlermuster aufdecken. Außerdem ist es denkbar, dass in diesem Zusammenhang Effekte durch das interaktive Schulbuch zu beobachten sind, welche mithilfe der Prozessdaten analysiert werden können.

Des Weiteren ist es möglich, die Daten im Klassen- und Unterrichtskontext ausführlicher zu untersuchen, als dies im Rahmen dieser Dissertation durchgeführt wurde, in der das Hauptaugenmerk auf die Nutzung der einzelnen Schülerinnen und Schüler gerichtet ist. Daher liegt eine intensive Auseinandersetzung auf Grundlage der bisherigen Erkenntnisse nahe, um genauere Informationen darüber zu erhalten, wie die an der Studie beteiligten Lehrkräfte ihre Unterrichtsstunden mit dem interaktiven Schulbuch gestalteten. Neben der Ableitung von Implikationen für E-Book-gestützten Unterricht kann so die Verwendung von Prozessdaten als Instrument der Unterrichtsbeobachtung evaluiert werden. Dies erscheint gerade für die Mittelschulstichprobe relevant, da aus dieser Teilstichprobe Prozessdaten für alle interaktiven Diagramme vorliegen. Diese Datenquelle wurde in der vorliegenden Studie bewusst nicht berücksichtigt, um die Vergleichbarkeit zur Gymnasialstichprobe zu wahren. Über die Analyse des Unterrichts hinaus scheint es von mathematikdidaktischem Interesse, den Umgang der Schülerinnen und Schüler mit diesem Teil des digitalen Angebots zu untersuchen, um Erkenntnisse über die Angebotsnutzung außerhalb von interaktiven *Aufgaben* zu gewinnen.

Für weitere Studien sowie den Einsatz des iBooks im Unterricht bietet es sich an, die Ergebnisse und Daten dieser Arbeit zu nutzen, um das im Forschungsprojekt erstellte interaktive Schulbuch zu optimieren. Insbesondere können die Prozessmaße dazu dienen, interaktive Aufgaben zu erkennen, deren Veränderung sich als sinnvoll erweist, oder dazu, die Anforderungsniveaus in den einzelnen Aufgaben zu verifizieren und zu schärfen. Dabei können ggf. auch die Setlängen verkürzt oder die Aufgabenparameter angepasst werden, um die Schwierigkeitssteigerungen zu regulieren.

Inhaltlich deckt ALICE:Bruchrechnen nach derzeitigem Entwicklungsstand (Sommer 2020) das Bruchzahlkonzept ab, ohne das *Rechnen* mit Brüchen zu behandeln. Offen bleibt, in welcher Form sich das Konzept des iBooks auf den gesamten Lerninhalt der rationalen Zahlen ausweiten lässt und ob sich die Ergebnisse des Projektes in Interventionen, die den gesamten Stoff umfassen, replizieren lassen. Ebenso erscheint eine Übertragung des Studienkonzepts auf andere Themenbereiche des Mathematikunterrichts von Interesse, um

einerseits die Forschungsergebnisse vor einem eventuell anderen Altersspektrum zu reflektieren und andererseits Lernenden und Lehrenden ein breiteres Angebot an wissenschaftlich fundiertem digitalen Lernmaterial zur Verfügung zu stellen.

Viele der Einschränkungen, die in Abschnitt 9.3 aufgeführt werden, resultieren aus der Nutzung von iBooks Author als Grundlage für das interaktive Schulbuch. Sofern diese Einschränkungen für weiterführende Studien zu limitierend erscheinen, sollte demgemäß nach Alternativen gesucht werden. Bei entsprechender Umsetzung wird es so zudem möglich, das interaktive Schulbuch plattformübergreifend einzusetzen, so dass es für eine breitere Öffentlichkeit zur Verfügung steht. Auf [www.alice.edu.tum.de](http://www.alice.edu.tum.de) befindet sich seit Mai 2020 eine Umsetzung des iBooks aus dem Projekt ALICE:Bruchrechnen als Internetseite – allerdings erfasst diese *Web Version* keine Prozessdaten.

Darüber hinaus ergeben sich aus der vorliegenden Dissertation Forschungsfragen, deren Beantwortung weiterer Studien bedarf.

So zeigen sich in den Ergebnissen keine Effekte vom Aufrufen von Lösungshilfen auf die Korrektheit der Aufgabenantwort. Hier kann auf Grundlage der erfassten Daten nicht abschließend geklärt werden, ob die Schülerinnen und Schüler das Unterstützungsangebot im Sinne der Konzipierung nutzten oder die Lösungshilfen aufriefen, ohne sich mit deren Inhalten zu beschäftigen. Zur Klärung können etwa eine abgewandelte Umsetzung der Lösungshilfen und der Prozessdatenerfassung oder zusätzliche Erhebungsmethoden eingesetzt werden.

Die Ergebnisse in Bezug auf das Finger-Tracking deuten die Relevanz der Forschungsmethode für die mathematikdidaktisch-psychologische Forschung an. In Fortführung der Studie scheint hier eine systematische Untersuchung angebracht, die es ermöglicht, spezifischere Aussagen über die Lösungsverfahren beim Visualisieren von Brüchen in kontinuierlichen Darstellungen zu treffen. Aufschlussreich können dabei auch mögliche Zusammenhänge zwischen Fingerbewegungen und den zu markierenden Brüchen sowie der Kompetenz der Lernenden sein. Zudem bietet es sich an, die Methodik auf andere Fragestellungen anzuwenden, etwa das Platzieren von Brüchen auf dem Zahlenstrahl oder die Entscheidung beim Größenvergleich zweier Brüche.

Ein Schwerpunkt der Arbeit ist die Beschreibung der Nutzung des interaktiven Schulbuchs und deren Einfluss auf den Lernerfolg (gemessen durch den Nachtest). Dabei decken die Resultate einerseits Unterschiede in der Nutzung zwischen einzelnen Teilstichproben auf – und andererseits eine den Lernerfolg präzisierende Eigenschaft der Prozessmaße. Zur abschließenden Klärung der Hintergründe dieser Unterschiede ist die Konzeption und Durchführung weiterer Analysen und Studien nötig. Denkbar sind Einflüsse motivationaler oder affektiver Variablen, die in dieser Studie nicht erhoben wurden. Da das interaktive Schulbuch ein digitales Angebot darstellt, sind zudem Effekte der außerschulischen Mediennutzung der Lernenden möglich, welche ebenfalls in diesem Zusammenhang erforscht werden sollten. Derartige Kontrollvariablen können zusätzlich den Lernerfolg beeinflussen, wie dies auch im Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht (Helmke, 2009) modelliert wird. Es ist daher sinnvoll, sie in entsprechenden Studien in die Prädiktionsmodelle aufzunehmen, um ihre Effekte zu analysieren. Ebenso erscheint es vielversprechend, Lernende

anhand ihrer Schulbuchnutzung zu clustern, um Profile unterschiedlicher Nutzungstypen zu identifizieren. Indem anhand dieser Profile untersucht wird, welche Auswirkungen die Nutzung der digitalen Angebote auf den Lernerfolg zeigt, können zielführende Nutzungsweisen für das interaktive Schulbuch bestimmt werden. Aufbauend auf so eruierten Nutzungsschemata ist es anschließend möglich, konkrete Empfehlungen für den Einsatz interaktiver Schulbücher in der Praxis auszusprechen.

### Schlussbemerkung

Im Zuge der gesellschaftlichen Entwicklung zeigt sich die Digitalisierung der Schulen als aktuelles Thema. Für den Mathematikunterricht stellen dabei digitale Schulbücher einen Schlüsselaspekt dar, so dass es von großer Bedeutung ist, hier qualitativ hochwertige Angebote zu schaffen. Im theoretischen Teil dieser Dissertation sind daher Merkmale guter Schulbücher erläutert; dabei sind die Möglichkeiten digitaler Formate zur Förderung von gutem Unterricht ausgeführt, die über das Angebotspektrum konventioneller Lehrwerke hinausgehen. Wichtige Gesichtspunkte sind hier u. a. Interaktivität, Adaptivität und automatisches Feedback. Ein wirksames elektronisches Schulbuch berücksichtigt zudem die Erkenntnisse der jeweiligen Fachdidaktik. Hier erweist sich das Themengebiet der Bruchzahlkonzepte als besonders geeignet für eine Vermittlung über ein E-Book-Format: Unter anderem durch interaktive Repräsentationen können Grundvorstellungen gefördert werden; des Weiteren ist es bspw. möglich, das integrierte Feedback aufgrund der umfangreichen Forschung zu Problemen von Lernenden zu optimieren. Das interaktive E-Book zu Bruchzahlkonzepten, das im Forschungsprojekt *ALICE:Bruchrechnen* an der Technischen Universität München für den Einsatz auf Tablet-PCs konzipiert und realisiert wurde, greift die Vorteile des digitalen Mediums auf und setzt aktuelle fachdidaktische Empfehlungen um. Es ist im praktischen Teil der Arbeit beschrieben.

Über die Nutzung interaktiver Schulbücher im Unterricht liegen bisher relativ wenige Forschungsarbeiten vor. Hier stellt diese Arbeit die Erhebung von Prozessdaten als eine Methode vor, die es erlaubt, Daten über die Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern zu erlangen. Der praktische Teil gibt zudem eine Detaillierung einer entsprechenden Implementierung. Die Prozessdatenerfassung wurde in einer empirischen Studie evaluiert, an der 151 Gymnasialschülerinnen und -schüler sowie 105 Mittelschülerinnen und -schüler teilnahmen. In den Ergebnissen dieser Dissertation wird deutlich, dass E-Books genutzt werden können, um deren Verwendung im Regelunterricht zu untersuchen.

Insgesamt ergibt sich durch Prozessdaten das Potenzial, einen Teil der Digitalisierung des schulischen Alltags wissenschaftlich zu begleiten, ohne dabei die Nutzung der E-Books selbst zu beeinflussen. Des Weiteren eröffnet die beschriebene Prozessdatenerfassung (mathematikdidaktische) Forschungsmöglichkeiten weit über das Feld der Schulbuchforschung hinaus.



# Literatur

- Achour, M., Betz, F., Dovgal, A., Lopes, N., Magnusson, H., Richter, G., ... Vrana, J. et al. (2018). *PHP Manual*. Verfügbar unter <http://php.net/manual/en/>
- Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205–224. doi:10.1023/A:1009903206236
- Admiraal, W., Wubbels, T. & Pilot, A. (1999). College Teaching In Legal Education: Teaching Method, Students' Time-on-Task, and Achievement. *Research in Higher Education*, 40(6), 687–704. doi:10.1023/A:1018712914619
- Anderson-Inman, L. & Horney, M. A. (2007). Supported eText: Assistive technology through text transformations. *Reading Research Quarterly*, 42(1), 153–160. doi:10.1598/rrq.42.1.8
- Andri Signorell et mult. al. (2020). *DescTools: Tools for Descriptive Statistics*. R package version 0.99.34. Verfügbar unter <https://cran.r-project.org/package=DescTools>
- Anozie, N. O. & Junker, B. W. (2006). Predicting end-of-year accountability assessment scores from monthly student records in an online tutoring system. In *AAAI'06 workshop on Educational Data Mining*, Boston.
- Anthony, L., Brown, Q., Nias, J., Tate, B. & Mohan, S. (2012). Interaction and recognition challenges in interpreting children's touch and gesture input on mobile devices. In *Proceedings of the 2012 ACM international conference on interactive tabletops and surfaces* (S. 225–234). ACM.
- Apple Inc. (2011, 21. September). Key-Value Storage. Verfügbar unter <https://developer.apple.com/library/archive/documentation/iPhone/Conceptual/SafariJSDatabaseGuide/Name-ValueStorage/Name-ValueStorage.html>
- Apple Inc. (2015). iOS Human Interface Guidelines. Verfügbar unter <https://developer.apple.com/library/ios/documentation/UserExperience/Conceptual/MobileHIG/>
- Apple Inc. (2016, 7. Dezember). iBooks Author: Erstellen oder Ändern eines Layouts. Verfügbar unter <https://support.apple.com/kb/PH2763>
- Apple Inc. (2017). iBooks Author. Tolle Multi-Touch Bücher für das iPad erstellen und veröffentlichen. Verfügbar unter <https://www.apple.com/de/ibooks-author/>
- Apple Inc. (2018a, 29. Juni). Ein neues Buch in iBooks Author erstellen, das dieselbe Gestaltung wie ein zuvor erstelltes Buch aufweist. Verfügbar unter <https://support.apple.com/de-de/HT202692>
- Apple Inc. (2018b, 27. August). HTML 5-Widgets für iBooks Author erstellen. Verfügbar unter <https://support.apple.com/de-de/HT204433>
- Apple Inc. (2018c, 12. Oktober). Informationen zur Unterstützung von LaTeX und MathML in Pages, Numbers, Keynote und iBooks Author. Verfügbar unter <https://support.apple.com/de-de/HT202501>
- Apple Inc. (2018d, 24. Oktober). Safari Web Inspector Guide. Verfügbar unter [https://developer.apple.com/library/archive/documentation/AppleApplications/Conceptual/Safari\\_Developer\\_Guide/GettingStarted/GettingStarted.html](https://developer.apple.com/library/archive/documentation/AppleApplications/Conceptual/Safari_Developer_Guide/GettingStarted/GettingStarted.html)
- Ayers, E. & Junker, B. (2008). IRT Modeling of Tutor Performance to Predict End-of-Year Exam Scores. *Educational and Psychological Measurement*, 68(6), 972–987. doi:10.1177/0013164408318758
- Bailey, D. H., Siegler, R. S. & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775–785. doi:10.1111/desc.12155
- Baker, R. S. (2007). Modeling and Understanding Students' Off-task Behavior in Intelligent Tutoring Systems. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (S. 1059–1068). doi:10.1145/1240624.1240785
- Barmby, P., Andrà, C., Gomez, D., Obersteiner, A. & Shvarts, A. (2014). The use of eye-tracking technology in Mathematics Education Research. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Bd. 1, S. 253). Vancouver, Canada: PME.

- Baron, D., Birtles, B., Hyatt, D. & Jackson, D. (2018). *CSS Transitions*. W3C. <https://www.w3.org/TR/2018/WD-css-transitions-1-20181011/>.
- Barr, D. J., Levy, R., Scheepers, C. & Tily, H. J. (2013). Random effects structure for confirmatory hypothesis testing: Keep it maximal. *Journal of Memory and Language*, 68(3), 255–278. doi:10.1016/j.jml.2012.11.001
- Barth, A. (2011). *HTTP State Management Mechanism* (RFC Nr. 6265). doi:10.17487/rfc6265
- Bartoń, K. (2018). *MuMIn: Multi-Model Inference*. R package version 1.40.4. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=MuMIn>
- Bates, D., Mächler, M., Bolker, B. & Walker, S. (2015). Fitting Linear Mixed-Effects Models Using lme4. *Journal of Statistical Software*, 67(1), 1–48. doi:10.18637/jss.v067.i01
- Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., ... Weiß, M. (Hrsg.). (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.
- Baumert, J. & Lehmann, R. (1997). *TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.
- Bayerisches Gesetz über das Erziehungs- und Unterrichtswesen (BayEUG) in der Fassung der Bekanntmachung vom 31. Mai 2000 (GVBl. S. 414, 632, BayRS 2230-1-1-K), das zuletzt durch § 5 Abs. 16 des Gesetzes vom 23. Dezember 2019 (GVBl. S. 737) geändert worden ist.
- Fachspezifischer Kriterienkatalog zur Beurteilung von Lernmitteln Gymnasium LehrplanPLUS. (2015). München: Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.
- Kriterien zur Begutachtung von Lernmitteln. (2016a). München: Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.
- Kriterien zur Begutachtung von Lernmitteln Mittelschule LehrplanPLUS. (2016b). München: Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.
- Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.). (2016). *Schule und Bildung in Bayern 2016*. München: Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational-Number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (S. 91–126). New York: Academic Press.
- Berry, T., Cook, L., Hill, N. & Stevens, K. (2010). An Exploratory Analysis of Textbook Usage and Study Habits: Misperceptions and Barriers to Success. *College Teaching*, 59(1), 31–39. doi:10.1080/87567555.2010.509376
- Bjarnason, B. (2012a, 29. Februar). Javascript in ebooks. Verfügbar unter <https://www.baldurbjarnason.com/notes/javascript-in-ebooks/>
- Bjarnason, B. (2012b, 19. Januar). The iBooks 2.0 textbook format. Verfügbar unter <http://www.baldurbjarnason.com/notes/the-ibooks-textbook-format/>
- Black, J. B., Segal, A., Vitale, J. & Fadjo, C. L. (2012). Embodied Cognition and Learning Environment Design. In D. Jonassen & S. Land (Hrsg.), *Theoretical Foundations of Learning Environments* (2. Aufl., S. 198–223). New York: Routledge.
- Bolker, B. M., Brooks, M. E., Clark, C. J., Geange, S. W., Poulsen, J. R., Stevens, M. H. H. & White, J.-S. S. (2009). Generalized linear mixed models: a practical guide for ecology and evolution. *Trends in Ecology & Evolution*, 24(3), 127–135. doi:10.1016/j.tree.2008.10.008
- Bonitz, A. (2013). Digitale Schulbücher in Deutschland – ein Überblick. In E. Matthes, S. Schütze & W. Wiater (Hrsg.), *Digitale Bildungsmedien im Unterricht* (S. 127–138). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Borich, G. D. (2010). *Effective teaching methods* (7. internat. ed.). Boston, MA: Pearson Education.
- Boubekki, A., Kröhne, U., Goldhammer, F., Schreiber, W. & Brefeld, U. (2016). Data-Driven Analyses of Electronic Text Books. In S. Michaelis, N. Piatkowski & M. Stolpe (Hrsg.), *Solving Large Scale Learning Tasks. Challenges and Algorithms: Essays Dedicated to Katharina Morik on the Occasion of Her 60th Birthday* (S. 362–376). doi:10.1007/978-3-319-41706-6\_20
- Bourne, M. (2018, 4. September). KaTeX and MathJax Comparison Demo. Verfügbar unter <https://www.intmath.com/cg5/katex-mathjax-comparison.php>
- Bozkurt, A., Okur, M. R. & Karadeniz, A. (2016). Use of digital books at academic level: Perceptions, attitudes and preferences of post-graduate students. *Journal of Human Sciences*, 13(1), 663–673. doi:10.14687/ijhs.v13i1.3534

- Brauer, M. & Curtin, J. J. (2018). Linear mixed-effects models and the analysis of nonindependent data: A unified framework to analyze categorical and continuous independent variables that vary within-subjects and/or within-items. *Psychological Methods*, 23(3), 389–411. doi:10.1037/met0000159
- Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215–232.
- Britton, B. K., Gulgoz, S. & Glynn, S. (1993). Impact of good and poor writing on learners: Research and theory. In B. K. Britton, A. Woodward & B. Marilyn (Hrsg.), *Learning from Textbooks: Theory and Practice* (S. 1–46). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Brophy, J. (2002). *Teaching*. International Academy of Education.
- Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung: eine kooperative Untersuchung am „Center for Cognitive studies“ der Harvard-Universität* (S. 21–44). Stuttgart: Klett.
- Bundesministerium für Bildung und Forschung. (2019, 16. Mai). Verwaltungsvereinbarung DigitalPakt Schule 2019 bis 2024. Berlin.
- Camden, R. (2014, 25. September). IndexedDB on iOS 8 - Broken Bad. Verfügbar unter <https://www.raymondcamden.com/2014/09/25/IndexedDB-on-iOS-8-Broken-Bad/>
- Campbell, J. P., DeBlois, P. B. & Oblinger, D. G. (2007). Academic analytics: A new tool for a new era. *EDUCAUSE review*, 42(4), 40–57.
- Carlisle, D., Miner, R. R. & Ion, P. D. F. (2014). *Mathematical Markup Language (MathML) Version 3.0 2nd Edition*. W3C. <http://www.w3.org/TR/2014/REC-MathML3-20140410/>.
- Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 281–305. doi:10.1007/BF01273903
- Chenglin, L., Xuehai, M. & Sanguo, C. (2012). The Pace of Ebook Development in China. *Logos*, 23(2), 14–20. doi:10.1163/1878-4712-11111113
- Chickering, A. W. & Gamson, Z. F. (1989). Seven principles for good practice in undergraduate education. *Biochemical Education*, 17(3), 140–141. doi:10.1016/0307-4412(89)90094-0
- Chitraa, V. & Davamani, A. S. (2010). A Survey on Preprocessing Methods for Web Usage Data. *International Journal of Computer Science and Information Security*, 7(3), 78–83.
- Chong, P. F., Lim, Y. P. & Ling, S. W. (2009). On the Design Preferences for Ebooks. *IETE Technical Review*, 26(3), 213–222. doi:10.4103/0256-4602.50706
- Choppin, J. & Borys, Z. (2017). Trends in the design, development, and use of digital curriculum materials. *ZDM*, 49(5), 663–674. doi:10.1007/s11858-017-0860-x
- Choppin, J., Carsons, C., Bory, Z., Cerosaletti, C. & Gillis, R. (2014). A typology for analyzing digital curricula in mathematics education. *International Journal of Education in Mathematics Science and Technology*, 2(1), 11–25.
- Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127–138. doi:10.1007/s10649-009-9198-9
- Clinton, V. (2019). Reading from paper compared to screens: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Research in Reading*, 42(2), 288–325. doi:10.1111/1467-9817.12269
- Cramer, K., Behr, M., T., P. & Lesh, R. (2009). Rational Number Project: Initial Fraction Ideas.
- Crossley, S., Karumbaiah, S., Ocumpaugh, J., Labrum, M. J. & Baker, R. S. (2019). Predicting Math Success in an Online Tutoring System Using Language Data and Click-Stream Variables: A Longitudinal Analysis. In M. Eskevich, G. de Melo, C. Fäth, J. P. McCrae, P. Buitelaar, C. Chiarcos, ... M. Dojchinovski (Hrsg.), *2nd Conference on Language, Data and Knowledge (LDK 2019)* (Bd. 70, 25:1–25:13). doi:10.4230/OASlcs.LDK.2019.25
- Cuillier, C. A. & Dewland, J. C. (2014). Understanding the Key Factors for E-textbook Integration Into a Business Course: A Case Study. *Journal of Business & Finance Librarianship*, 19(1), 32–60. doi:10.1080/08963568.2013.824338
- Cuttler, C. (2019). Students' Use and Perceptions of the Relevance and Quality of Open Textbooks Compared to Traditional Textbooks in Online and Traditional Classroom Environments. *Psychology Learning & Teaching*, 18(1), 65–83. doi:10.1177/1475725718811300
- Daniel, D. B. & Woody, W. D. (2013). E-textbooks at what cost? Performance and use of electronic v. print texts. *Computers & Education*, 62, 18–23. doi:10.1016/j.compedu.2012.10.016

- Davide, C., Sorge, V., Perfect, C. & Krautzberger, P. (2009). MathJax. Verfügbar unter <https://www.mathjax.org>
- Delaye, A. & Anquetil, E. (2013). HBF49 feature set: A first unified baseline for online symbol recognition. *Pattern Recognition*, 46(1), 117–130. doi:10.1016/j.patcog.2012.07.015
- Delgado, P., Vargas, C., Ackerman, R. & Salmerón, L. (2018). Don't throw away your printed books: A meta-analysis on the effects of reading media on reading comprehension. *Educational Research Review*, 25, 23–38. doi:10.1016/j.edurev.2018.09.003
- del Valle, R. & Duffy, T. M. (2009). Online learning: Learner characteristics and their approaches to managing learning. *Instructional Science*, 37(2), 129–149. doi:10.1007/s11251-007-9039-0
- Dennis, A. (2011). e-Textbooks at Indiana University: A summary of two years of research. Indiana University Kelly School of Business Research Report. Verfügbar unter <https://assets.uits.iu.edu/pdf/eText%20Pilot%20Data%202010-2011.pdf>
- Deveria, A. (2018). Can I use... Support tables for HTML5, CSS3, etc. Verfügbar unter <https://caniuse.com/#feat=mathml>
- Dienes, Z. P. (1967). *Fractions: An operational approach*. Harlow, Essex: Educational Supply Association.
- Dotan, D. & Dehaene, S. (2013). How do we convert a number into a finger trajectory? *Cognition*, 129(3), 512–529. doi:10.1016/j.cognition.2013.07.007
- Douglas, D. H. & Peucker, T. K. (1973). Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 10(2), 112–122. doi:10.3138/FM57-6770-U75U-7727
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). In S. J. Cho (Hrsg.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (S. 135–151). doi:10.1007/978-3-319-17187-6\_8
- Dudenredaktion. (o. D. a). „erweitern“ auf Duden online. Verfügbar unter <https://www.duden.de/node/810100/revisions/1737713/view>
- Dudenredaktion. (o. D. b). „kürzen“ auf Duden online. Verfügbar unter <https://www.duden.de/node/150179/revision/150215/view>
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z
- Ebner, M. & Pronegg, M. (2015). Use of Learning-Analytics-Applications in Mathematic with Elementary Learners. *International Journal of Academic Research in Education*, 1(2), 26–39. doi:10.17985/ijare.37247
- Ebner, M., Schön, M. & Neuhold, B. (2013). Learning Analytics in basic math education – first results from the field. *eLearning Papers*, 36, 24–27.
- ECMA International. (2017, Dezember). Standard ECMA-404: The JSON Data Interchange Format. Verfügbar unter <http://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-404.htm>
- ECMA International. (2018). Standard ECMA-262: ECMAScript 2018 Language Specification. Verfügbar unter <http://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-262.htm>
- Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), 29–57. doi:10.1007/s13138-011-0031-5
- Eicholz, A., Faulkner, S., Leithead, T., Danilo, A. & Moon, S. (2017). *HTML 5.2. W3C*. Verfügbar unter <https://www.w3.org/TR/2017/REC-html52-20171214/>
- Eickelmann, B., Bos, W., Gerick, J., Goldhammer, F., Schaumburg, H., Schwippert, K., ... Vahrenhold, J. (Hrsg.). (2019). *ICILS 2018 #Deutschland – Computer- und informationsbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im zweiten internationalen Vergleich und Kompetenzen im Bereich Computational Thinking*. Münster: Waxmann Verlag.
- Elliott, C., Rickel, J. & Lester, J. (1999). Lifelike Pedagogical Agents and Affective Computing: An Exploratory Synthesis. In M. J. Wooldridge & M. Veloso (Hrsg.), *Artificial Intelligence Today: Recent Trends and Developments* (S. 195–211). doi:10.1007/3-540-48317-9\_8
- Embong, A. M., Noor, A. M., Hashim, H. M., Ali, R. M. & Shaari, Z. H. (2012). E-Books as Textbooks in the Classroom. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 47, 1802–1809. doi:10.1016/j.sbspro.2012.06.903
- Engeström, Y., Miettinen, R., Punamäki, R.-L. et al. (Hrsg.). (1999). *Perspectives on Activity Theory*. doi:10.1017/CBO9780511812774
- Etemad, E., Rivoal, F. & Atkins, T. J. (2017). *CSS Snapshot 2017*. W3C. <https://www.w3.org/TR/2017/NOTE-css-2017-20170131/>.

- Evelt, M. (2015, 12. Mai). The Nuts and Bolts of Developing Interactive eBooks. Part 2. Verfügbar unter <https://artemisconsultinginc.com/blog/The-Nuts-and-Bolts-of-Developing-Interactive-iBooks.-Part-2>
- Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). The Influence of Textbooks on Teaching Strategies: An Empirical Study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13(4), 2–9.
- Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633–646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x
- Faulkenberry, T. J. & Rey, A. E. (2014). Extending the reach of mousetracking in numerical cognition: a comment on Fischer and Hartmann (2014). *Frontiers in Psychology*, 5, 1436. doi:10.3389/fpsyg.2014.01436
- Feng, M., Heffernan, N. T. & Koedinger, K. R. (2006). Predicting State Test Scores Better with Intelligent Tutoring Systems: Developing Metrics to Measure Assistance Required. In M. Ikeda, K. D. Ashley & T.-W. Chan (Hrsg.), *Intelligent Tutoring Systems* (S. 31–40). doi:10.1007/11774303\_4
- Fenza, G., Orciuoli, F. & Sampson, D. G. (2017). Building Adaptive Tutoring Model Using Artificial Neural Networks and Reinforcement Learning. In *2017 IEEE 17th International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (S. 460–462). Timisoara.
- Ferguson, R. (2012). Learning analytics: drivers, developments and challenges. *International Journal of Technology Enhanced Learning*, 4(5/6), 304–317. doi:10.1504/ijtel.2012.051816
- Fielding, R. & Reschke, J. (Hrsg.). (2014). *Hypertext Transfer Protocol (HTTP/1.1): Semantics and Content* (RFC Nr. 7231). doi:10.17487/rfc7231
- Fischer, M. H. & Hartmann, M. (2014). Pushing forward in embodied cognition: may we mouse the mathematical mind? *Frontiers in Psychology*, 5, 1315. doi:10.3389/fpsyg.2014.01315
- Fisher, R. A. & Yates, F. (1948). *Statistical tables for biological, agricultural and medical research* (3. Aufl.). London: Oliver und Boyd.
- Fouh, E., Breakiron, D. A., Hamouda, S., Farghally, M. F. & Shaffer, C. A. (2014). Exploring students learning behavior with an interactive etextbook in computer science courses. *Computers in Human Behavior*, 41, 478–485. doi:10.1016/j.chb.2014.09.061
- Fox, J. & Weisberg, S. (2011). *An R Companion to Applied Regression* (Second). Thousand Oaks CA: Sage. Verfügbar unter <http://socserv.socsci.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion>
- Freeman, J. B., Dale, R. & Farmer, T. A. (2011). Hand in Motion Reveals Mind in Motion. *Frontiers in Psychology*, 2, 59. doi:10.3389/fpsyg.2011.00059
- French, M., Taverna, F., Neumann, M., Kushnir, L. P., Harlow, J., Harrison, D. & Serbanescu, R. (2015). Textbook Use in the Sciences and Its Relation to Course Performance. *College Teaching*, 63(4), 171–177. doi:10.1080/87567555.2015.1057099
- Friedemann, S., Jantke, K. P. & Baumbach, L. (2016). Textbook Gamification: Methods and Technologies. In S. Zvacek, M. T. Restivo, J. Uhomobhi & M. Helfert (Hrsg.), *Computer Supported Education* (S. 406–424). Cham: Springer International Publishing.
- Gallos Cronberg, F. (2016). Learning linear relationships through independent use of the mathematics textbook. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 2(21), 5–22.
- Gerard, L., Matuk, C., McElhaney, K. & Linn, M. C. (2015). Automated, adaptive guidance for K-12 education. *Educational Research Review*, 15, 41–58. doi:10.1016/j.edurev.2015.04.001
- Gern, C. (2012, 20. Mai). Scrolling HTML widgets [Online Forum Post]. Verfügbar unter <https://discussions.apple.com/thread/3967165>
- Gersten, R., Schumacher, R. F. & Jordan, N. C. (2016). Life on the Number Line: Routes to Understanding Fraction Magnitude for Students With Difficulties Learning Mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6), 655–657. doi:10.1177/0022219416662625
- Goldhammer, F., Naumann, J. & Keßel, Y. (2013). Assessing Individual Differences in Basic Computer Skills. *European Journal of Psychological Assessment*, 29(4), 263–275. doi:10.1027/1015-5759/a000153
- Goldhammer, F., Naumann, J., Rölke, H., Stelter, A. & Tóth, K. (2017). Relating Product Data to Process Data from Computer-Based Competency Assessment. In D. Leutner, J. Fleischer, J. Grünkorn & E. Klieme (Hrsg.), *Competence Assessment in Education: Research, Models and Instruments* (S. 407–425). doi:10.1007/978-3-319-50030-0\_24
- Goldhammer, F., Naumann, J., Stelter, A., Tóth, K., Rölke, H. & Klieme, E. (2014). The time on task effect in reading and problem solving is moderated by task difficulty and skill: Insights from a computer-based large-scale assessment. *Journal of Educational Psychology*, 106(3), 608–626. doi:10.1037/a0034716
- Götz, L., Lingel, K. & Schneider, W. (2013). *Deutscher Mathematiktest für sechste Klassen*. Göttingen: Hogrefe.

- Gould, P. (2011). Electronic mathematics textbooks: Old wine in new skins? Paper presented at APEC-Tsukuba International Conference V (Tsukuba Session). Japan. Verfügbar unter [http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2011/19-20/02\\_PeterGould-paper.pdf](http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2011/19-20/02_PeterGould-paper.pdf)
- Grabe, M. & Sigler, E. (2002). Studying online: evaluation of an online study environment. *Computers & Education*, 38(4), 375–383. doi:10.1016/S0360-1315(02)00020-9
- Greiff, S., Niepel, C., Scherer, R. & Martin, R. (2016). Understanding students' performance in a computer-based assessment of complex problem solving: An analysis of behavioral data from computer-generated log files. *Computers in Human Behavior*, 61, 36–46. doi:10.1016/j.chb.2016.02.095
- Gu, X., Wu, B. & Xu, X. (2015). Design, development, and learning in e-Textbooks: what we learned and where we are going. *Journal of Computers in Education*, 2(1), 25–41. doi:10.1007/s40692-014-0023-9
- Hansen, N., Jordan, N. C., Fernandez, E., Siegler, R. S., Fuchs, L., Gersten, R. & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of sixth-graders' knowledge of fractions. *Cognitive Development*, 35, 34–49. doi:10.1016/j.cogdev.2015.02.001
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. doi:10.3102/003465430298487
- Hattie, J. & Yates, G. C. R. (2013). *Visible Learning and the Science of How We Learn*. doi:10.4324/9781315885025
- Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität* (2., aktualisierte Aufl.). Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer.
- Herden, G. & Pallack, A. (2000). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(3), 259–279. doi:10.1007/BF03338921
- Hickson, I. (2010). *Web SQL Database*. W3C. <http://www.w3.org/TR/2010/NOTE-webdatabase-20101118/>.
- Hickson, I. (2016). *Web Storage (Second Edition)*. W3C. <http://www.w3.org/TR/2016/REC-webstorage-20160419/>.
- Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I. & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, 103897. doi:https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2017). Prozessdatenanalysen: Darstellung von Brüchen. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 424–428). doi:10.17877/DE290R-18527
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2018a). *Bruchrechnen. Bruchzahlen & Bruchteile greifen & begreifen* (Deutsche Apple iBooks Version). München: Technische Universität München. Verfügbar unter <http://go.tum.de/623496>
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2018b). *Bruchrechnen. Bruchzahlen & Bruchteile greifen & begreifen* (Deutsche Version). doi:10.14459/2018md1436808
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018a). Design and research potential of interactive textbooks: the case of fractions. *ZDM Mathematics Education*, 50(5), 839–848. doi:10.1007/s11858-018-0971-z
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018b). Geschlechtsunterschiede beim Umgang mit dem interaktiven Schulbuch ALICE:Bruchrechnen – eine Analyse von Prozessdaten. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (Bd. 4, S. 2075–2076). Münster: WTM-Verlag.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018c). How do students visualize fractions? A finger tracking study. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 5, S. 64). Umeå, Schweden: PME.
- Höhne, T. (2003). *Schulbuchwissen: Umrisse einer Wissens- und Medientheorie des Schulbuches*. Frankfurt: Fachbereich Erziehungswissenschaften der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität.
- IEEE. (2008). *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*. doi:10.1109/IEEESTD.2008.4610935
- Ivić, I., Pešikan, A. & Antić, S. (2013). *Textbook quality: a guide to textbook standards*. Göttingen: V & R Unipress.
- Jang, D.-H., Yi, P. & Shin, I.-S. (2016). Examining the Effectiveness of Digital Textbook use on Students' Learning Outcomes in South Korea: A Meta-analysis. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 25(1), 57–68. doi:10.1007/s40299-015-0232-7

- Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., ... Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(2), 83–107. doi:10.1007/BF03339055
- jQuery Foundation. (2015, 11. März). *Widget Factory*. Verfügbar unter <http://learn.jquery.com/jquery-ui/widget-factory/>
- jQuery Foundation. (2018). jQuery. Verfügbar unter <https://jquery.com/>
- Junco, R. & Clem, C. (2015). Predicting course outcomes with digital textbook usage data. *The Internet and Higher Education*, 27, 54–63. doi:10.1016/j.iheeduc.2015.06.001
- Junker, B. (2007). Using On-line Tutoring Records to Predict End-of-Year Exam Scores: Experience with the ASSISTments Project and MCAS 8th Grade Mathematics. In R. W. Lissitz (Hrsg.), *Assessing and modeling cognitive development in school*. Maple Grove: JAM press.
- Kaput, J. J. (1986). Information technology and mathematics: Opening new representational windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5(2), 187–207.
- Karpfinger, C. & Meyberg, K. (2017). Grundbegriffe der Ringtheorie. In *Algebra: Gruppen - Ringe - Körper* (S. 169–185). doi:10.1007/978-3-662-54722-9\_13
- KaTeX. (2018). KaTeX – The fastest math typesetting library for the web. Verfügbar unter <https://katex.org>
- Kitamura, E. (2014). Working with quota on mobile browsers. Verfügbar unter <https://www.html5rocks.com/en/tutorials/offline/quota-research>
- Knight, C. C. (1979). Model for the Study. In *Second Study of Mathematics. Bulletin No. 4* (S. 16–18).
- Knight, S. & Shum, S. B. (2017). Theory and Learning Analytics. In C. Lang, G. Siemens, A. Wise & D. Gašević (Hrsg.), *Handbook of Learning Analytics* (S. 17–22). doi:10.18608/hla17
- Knuth, D. E. (1984). *The TeXbook*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming: Bd. 2. Seminumerical algorithms* (3. Aufl.). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Professional.
- Koh, K. H., Fouh, E., Farghally, M. F., Shahin, H. & Shaffer, C. A. (2018). Experience: Learner Analytics Data Quality for an eTextbook System. *J. Data and Information Quality*, 9(2), 10:1–10:10. doi:10.1145/3148240
- Kovanović, V., Gašević, D., Dawson, S., Joksimović, S., Baker, R. S. & Hatala, M. (2015). Does time-on-task estimation matter? Implications for the validity of learning analytics findings. *Journal of Learning Analytics*, 2(3), 81–110. doi:10.18608/jla.2015.23.6
- Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Luchterhand.
- Kuznetsova, A., Brockhoff, P. B. & Christensen, R. H. B. (2017). lmerTest Package: Tests in Linear Mixed Effects Models. *Journal of Statistical Software*, 82(13), 1–26. doi:10.18637/jss.v082.i13
- Kyndt, E., Raes, E., Lismont, B., Timmers, F., Cascallar, E. & Dochy, F. (2013). A meta-analysis of the effects of face-to-face cooperative learning. Do recent studies falsify or verify earlier findings? *Educational Research Review*, 10, 133–149. doi:10.1016/j.edurev.2013.02.002
- Labs, O. (2008). Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen. Vorlesungsskript. Verfügbar unter [http://www.oliverlabs.net/data/0708\\_DynGeo.pdf](http://www.oliverlabs.net/data/0708_DynGeo.pdf)
- Lamnek, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.
- Landis, J. & Koch, G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159–174.
- Landoni, M., Wilson, R. & Gibb, F. (2000). From the Visual book to the WEB book: the importance of design. *The Electronic Library*, 18(6), 407–419. doi:10.1108/02640470010361169
- Landrum, R. E., Gurung, R. A. R. & Spann, N. (2012). Assessments of Textbook Usage and the Relationship to Student Course Performance. *College Teaching*, 60(1), 17–24. doi:10.1080/87567555.2011.609573
- Lange, M. (2012, 3. März). iBook-widgets. Verfügbar unter <http://widged.github.io/iBook-widgets/>
- Langer, I., Schulz von Thun, F., Meffert, J. & Tausch, R. (1973). Merkmale der Verständlichkeit schriftlicher Informations- und Lehrtexte. *Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie*, 20, 269–286.
- Lee, H. J., Messom, C. & Yau, K.-L. A. (2013). Can an Electronic Textbooks be Part of K-12 Education?: Challenges, Technological Solutions and Open Issues. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 12(1), 32–44.
- Lehner, M. C. (2019). *Mathematikaufgaben für Leistungserhebungen im universitären Kontext: Grundlegung und empirische Untersuchung von Aufgabenschwierigkeit und individuellen Lösungsprozessen*. doi:10.1007/978-3-658-24578-8

- Leiss, D., Plath, J. & Schwippert, K. (2019). Language and Mathematics - Key Factors influencing the Comprehension Process in reality-based Tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(2), 131–153. doi:10.1080/10986065.2019.1570835
- Leitner, S. (2011). *So lernt man lernen: Der Weg zum Erfolg* (18. Aufl.). Hamburg: Nikol.
- Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett.
- Lesh, R. (1979). Mathematical Learning Disabilities: Considerations for Identification, Diagnosis, Remediation. In R. Lesh, M. D. & M. G. Kantowski (Hrsg.), *Applied mathematical problem solving* (S. 111–180). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987a). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In I. Wirsup & R. Streit (Hrsg.), *Developments in school mathematics education around the world* (S. 647–680). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987b). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Leutner, D. (1992). *Adaptive Lehrsysteme*. Weinheim: Psychologie-Verl.-Union.
- Leutner, D. (2002). Adaptivität und Adaptierbarkeit multimedialer Lehr- und Informationssysteme. In L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet: Lehrbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., Kap. 8, S. 115–126). Weinheim: Beltz.
- Lew, H. (2016). Developing and Implementing “Smart” Mathematics Textbooks in Korea: Issues and Challenges. In M. Bates & Z. Usiskin (Hrsg.), *Digital curricula in school mathematics* (S. 35–52). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.
- Lim, C., Song, H.-D. & Lee, Y. (2012). Improving the usability of the user interface for a digital textbook platform for elementary-school students. *Educational Technology Research and Development*, 60(1), 159–173. doi:10.1007/s11423-011-9222-5
- Lithner, J. (2003). Students’ mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 29–55. doi:10.1023/A:1023683716659
- Lodash Utilities. (2018). Lodash. Verfügbar unter <https://lodash.com>
- Love, E. & Pimm, D. (1996). ‘This is so’: a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (S. 371–409). doi:10.1007/978-94-009-1465-0\_11
- Magnuson, J. S. (2005). Moving hand reveals dynamics of thought. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(29), 9995–9996. doi:10.1073/pnas.0504413102
- Maier, R. (2009). Was ist ein gutes Schulbuch? *Eckert.Beiträge*, 2009/3.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, 123, 4–8.
- Mangen, A., Walgermo, B. R. & Brønnick, K. (2013). Reading linear texts on paper versus computer screen: Effects on reading comprehension. *International Journal of Educational Research*, 58, 61–68. doi:10.1016/j.ijer.2012.12.002
- Manister, L. (1998). *The “data” URL scheme* (RFC Nr. 2397). RFC Editor. doi:10.17487/RFC2397
- Martin, T. & Schwartz, D. L. (2005). Physically Distributed Learning: Adapting and Reinterpreting Physical Environments in the Development of Fraction Concepts. *Cognitive Science*, 29(4), 587–625. doi:10.1207/s15516709cog0000\_15
- Matthes, E. & Schütze, S. (2011). Aufgaben im Schulbuch. Einleitung. In E. Matthes (Hrsg.), *Aufgaben im Schulbuch* (S. 9–18). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Mayrberger, K. (2013). Digitale Bildungsmedien – Eine kritische Sicht aus mediendidaktischer Perspektive auf aktuelle Entwicklungen. In E. Matthes, S. Schütze & W. Wiater (Hrsg.), *Digitale Bildungsmedien im Unterricht* (S. 26–41). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (Hrsg.). (2016). *JIM-Studie 2016: Jugend, Information, (Multi-) Media* [Basisstudie zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger in Deutschland]. Verfügbar unter [https://www.mpfs.de/fileadmin/files/Studien/JIM/2016/JIM\\_Studie\\_2016.pdf](https://www.mpfs.de/fileadmin/files/Studien/JIM/2016/JIM_Studie_2016.pdf)
- Mehta, N., Bell, J., Graff, E., Sicking, J., Popescu, A. & Orlow, J. (2015). *Indexed Database API*. W3C. <http://www.w3.org/TR/2015/REC-IndexedDB-20150108/>.
- Menck, P. (2011). Aufgaben – der Dreh- und Angelpunkt von Unterricht. In E. Matthes (Hrsg.), *Aufgaben im Schulbuch* (S. 19–30). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

- Merlo, J., Yang, M., Chaix, B., Lynch, J. & Råstam, L. (2005). A brief conceptual tutorial on multilevel analysis in social epidemiology: investigating contextual phenomena in different groups of people. *Journal of Epidemiology & Community Health*, 59(9), 729–736. doi:10.1136/jech.2004.023929
- Mesa, V., Mali, A. & Castro-Rodriguez, E. (2019). Instructor and student uses of technologically enhanced undergraduate mathematics textbooks. 2019 annual meeting of the American Educational Research Association (AERA). doi:10.302/1442990
- Meyer, H. (2014). *Was ist guter Unterricht?* (10. Aufl.). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice*, 26(2), 109–119.
- Morton, R. L. (1924). An Analysis of Pupils' Errors in Fractions. *The Journal of Educational Research*, 9(2), 117–125. doi:10.1080/00220671.1924.10879439
- Mouri, K., Ren, Z., Uosaki, N. & Yin, C. (2019). Analyzing Learning Patterns Based on Log Data from Digital Textbooks. *International Journal of Distance Education Technologies*, 17(1), 1–14. doi:10.4018/ijdet.2019010101
- Moyer-Packenham, P. S. & Bake, J. (2014). Predictors of Achievement When Virtual Manipulatives are Used for Mathematics Instruction. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(2), 121–150. doi:10.4471/redimat.2014.46
- Moyer-Packenham, P. S. & Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 4(3), 35–50. doi:10.4018/jvple.2013070103
- Mozilla. (2008). Firebug Lite : Firebug. Verfügbar unter <https://getfirebug.com/releases/lite/1.2/>
- Munro, J., Hickson, I., Mann, J., Cabanier, R. & Wiltzius, T. (2015). *HTML Canvas 2D Context*. W3C. <http://www.w3.org/TR/2015/REC-2dcontext-20151119/>.
- Nakagawa, S. & Schielzeth, H. (2012). A general and simple method for obtaining  $R^2$  from generalized linear mixed-effects models. *Methods in Ecology and Evolution*, 4(2), 133–142. doi:10.1111/j.2041-210x.2012.00261.x
- Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. doi:10.1207/s15326985ep4001\_3
- O'Halloran, K. L., Beezer, R. A. & Farmer, D. W. (2018). A new generation of mathematics textbook research and development. *ZDM*, 50(5), 863–879. doi:10.1007/s11858-018-0959-8
- Obersteiner, A., Dooren, W. V., Hoof, J. V. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64–72. doi:10.1016/j.learninstruc.2013.05.003
- Obersteiner, A., Reiss, K. & Martel, A. (2011). Offene Aufgaben in Schulbüchern und ihr Einsatz im Mathematikunterricht. In E. Matthes (Hrsg.), *Aufgaben im Schulbuch* (S. 31–42). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Öngöz, S. & Mollamehmetoğlu, M. (2017). Determination of secondary students' preferences regarding design features used in digital textbooks. *Digital Education Review*, 32, 1–21.
- Ooms, J., James, D., DeRoy, S., Wickham, H. & Horner, J. (2017). *RMySQL: Database Interface and 'MySQL' Driver for R*. R package version 0.10.13. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=RMySQL>
- Oracle Corporation. (2018). *MySQL 8.0 Reference Manual*. Verfügbar unter <https://dev.mysql.com/doc/refman/8.0/>
- Padberg, F. (1995). Diagnostischer Test: Bruchzahlbegriff und Rechenoperationen mit gemeinen Brüchen. In *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche* (2. Aufl., S. 208–222). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Padberg, F. (1996). Aus Fehlern lernen: Den Mathematikunterricht durch Fehleranalysen verbessern. *Friedrich Jahresheft*, 14 Prüfen und beurteilen, 56–59.
- Padberg, F. (2002). Anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff und zu einfachen Rechenoperationen mit Brüchen in Modellierungskontexten. In *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche* (3. Aufl., S. 289–299). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Padberg, F. & Krueger, H. (1997). Ordnen von Brüchen – Lösungsstrategien und typische Fehler. *Mathematische Unterrichtspraxis*, 18(2), 35–41.
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). doi:10.1007/978-3-662-52969-0

- Pardos, Z. A., Baker, R. S., Pedro, M. S., Gowda, S. M. & Gowda, S. M. (2014). Affective States and State Tests: Investigating How Affect and Engagement during the School Year Predict End-of-Year Learning Outcomes. *Journal of Learning Analytics*, 1(1), 107–128. doi:10.18608/jla.2014.11.6
- Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K. & Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM*, 49(5), 645–661. doi:10.1007/s11858-017-0879-z
- Pepin, B., Gueudet, G., Yerushalmy, M., Trouche, L. & Chazan, D. I. (2015). E-textbooks in/for teaching and learning mathematics: A potentially transformative educational technology. In L. D. English & D. Kirshner (Hrsg.), *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (S. 636–661). Taylor und Francis Inc.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158–175. doi:10.1007/BF02656616
- Perera, D., Kay, J., Koprinska, I., Yacef, K. & Zaïane, O. R. (2009). Clustering and Sequential Pattern Mining of Online Collaborative Learning Data. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 21(6), 759–772. doi:10.1109/TKDE.2008.138
- Phillips, N. D. (2018). pirateplot(). In *YaRrr! The Pirate's Guide to R*. Verfügbar unter <https://bookdown.org/ndphillips/YaRrr/pirateplot.html>
- Pohl, M. & Schacht, F. (2019). How do students use digital textbooks? In S. Rezat, L. Fan, M. Hattermann, J. Schumacher & H. Wuschke (Hrsg.), *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (S. 39–44). doi:10.17619/UNIPB/1-768
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211–227. doi:10.1002/sce.3730660207
- Post, T. R., Behr, M. & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39–48.
- Prasad, D., Totaram, R. & Usagawa, T. (2016). Development of Open Textbooks Learning Analytics System. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 17(5). doi:10.19173/irrodl.v17i5.2541
- Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen. *mathematik lehren*, 123, 10–13.
- Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.). (2013). *Pisa 2012*. Münster: Waxmann.
- R Core Team. (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Verfügbar unter <https://www.R-project.org/>
- Ramer, U. (1972). An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves. *Computer Graphics and Image Processing*, 1(3), 244–256. doi:10.1016/S0146-664X(72)80017-0
- Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook – opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal*, 24(3), 239–256. doi:10.1007/s13394-012-0040-9
- Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive*. doi:10.1007/978-3-658-23924-4
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Reiss, K. & Richter-Gebert, J. (2018). *Tablet-PCs im Mathematikunterricht der Klasse 6. Ergebnisse des Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen*. Münster: Waxmann. Verfügbar unter <https://www.waxmann.com/buch3857>
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: What matters for high-achieving and low-achieving students? *Learning and Instruction*, 65, 101264. doi:10.1016/j.learninstruc.2019.101264
- Reinhold, F., Strohmaier, A., Finger-Collazos, Z. & Reiss, K. (eingereicht). Considering Teachers' Value, Self-Efficacy, and Anxiety Towards Teaching Mathematics with Digital Media: An In-Service Teacher Training. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. doi:10.1007/978-3-0346-0647-9
- Reiss, K., Weis, M., Klieme, E. & Köller, O. (2019). *PISA 2018. Grundbildung im internationalen Vergleich*. doi:10.31244/9783830991007
- Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. doi:10.3102/00346543075002211
- Revelle, G. & Reardon, E. (2009). Designing and Testing Mobile Interfaces for Children. In *Proceedings of the 8th International Conference on Interaction Design and Children* (S. 329–332). doi:10.1145/1551788.1551876

- Revelle, W. (2017). *psych: Procedures for Psychological, Psychometric, and Personality Research*. R package version 1.7.8. Northwestern University. Evanston, Illinois. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=psych>
- Rezat, S. (2006a). A model of textbooks use. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 409–416). Prague: PME.
- Rezat, S. (2006b). Mathematikschulbücher – Struktur und Nutzungsmöglichkeiten. In I. Schwank (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 425–428). Hildesheim: Franzbecker.
- Rezat, S. (2006c). The structures of German mathematics textbooks. *ZDM*, 38(6), 482–487. doi:10.1007/BF02652785
- Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(1), 46–67. doi:10.1007/BF03339361
- Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers* (1. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Rezat, S. (2011). Wozu verwenden Schüler ihre Mathematikschulbücher? Ein Vergleich von erwarteter und tatsächlicher Nutzung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(2), 153. doi:10.1007/s13138-011-0028-0
- Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM*, 45(5), 659–670. doi:10.1007/s11858-013-0529-z
- Rezat, S. (2019). Analysing the effectiveness of a combination of different types of feedback in a digital textbook for primary level. In S. Rezat, L. Fan, M. Hattermann, J. Schumacher & H. Wuschke (Hrsg.), *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development, 16–19 September 2019, Paderborn, Germany* (S. 51–56). Paderborn: Universitätsbibliothek Paderborn.
- Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, 44(5), 641–651. doi:10.1007/s11858-012-0448-4
- Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3–4(20), 247–266.
- Rhodes, A. E. & Rozell, T. G. (2015). A constructivist approach to e-text design for use in undergraduate physiology courses. *Advances in Physiology Education*, 39(3), 172–180. doi:10.1152/advan.00011.2015
- Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (2012). *The Cinderella.2 Manual: Working with The Interactive Geometry Software*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Roche, A. (2010). Decimats: Helping Students to Make Sense of Decimal Place Value. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 4–10.
- Rockinson-Szapkiw, A. J., Courduff, J., Carter, K. & Bennett, D. (2013). Electronic versus traditional print textbooks: A comparison study on the influence of university students' learning. *Computers & Education*, 63, 259–266. doi:10.1016/j.compedu.2012.11.022
- Ross, J. A., Scott, G. & Bruce, C. D. (2012). The Gender Confidence Gap in Fractions Knowledge: Gender Differences in Student Belief–Achievement Relationships. *School Science and Mathematics*, 112(5), 278–288. doi:10.1111/j.1949-8594.2012.00144.x
- Ruiz, D. D., Marquardt, C. G. & Becker, K. (2004). A Pre-Processing Tool for Web Usage Mining in the Distance Education Domain. In *Proceedings. International Database Engineering and Applications Symposium, 2004. IDEAS '04*. (S. 78–87). doi:10.1109/IDEAS.2004.1319780
- Ruthven, K. (2014). The textbook is dead: Long live the textbook. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson & L. Fan (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (S. 25–28). Southampton: University of Southampton.
- Santens, S., Goossens, S. & Verguts, T. (2011). Distance in Motion: Response Trajectories Reveal the Dynamics of Number Comparison. *PLOS ONE*, 6(9), 1–6. doi:10.1371/journal.pone.0025429
- Scherer, R., Greiff, S. & Hautamäki, J. (2015). Exploring the Relation between Time on Task and Ability in Complex Problem Solving. *Intelligence*, 48, 37–50. doi:10.1016/j.intell.2014.10.003
- Schuh, K. L., Van Horne, S. & Russell, J.-e. (2018). E-textbook as object and mediator: interactions between instructor and student activity systems. *Journal of Computing in Higher Education*, 30(2), 298–325. doi:10.1007/s12528-018-9174-4
- Shankland, S. (2013, 5. November). Google subtracts MathML from Chrome, and anger multiplies. Verfügbar unter <https://www.cnet.com/news/google-subtracts-mathml-from-chrome-and-anger-multiplies/>

- Sheen, K. A. & Luximon, Y. (2017). Student perceptions on future components of electronic textbook design. *Journal of Computers in Education*, 4(4), 371–393. doi:10.1007/s40692-017-0092-7
- Shiffrin, R. M. & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending and a general theory. *Psychological Review*, 84(2), 127–190. doi:10.1037/0033-295X.84.2.127
- Sigarchian, H. G., Logghe, S., Verborgh, R., de Neve, W., Salliau, F., Mannens, E., ... Schuurman, D. (2017). Hybrid e-TextBooks as comprehensive interactive learning environments. *Interactive Learning Environments*, 26(4), 486–505. doi:10.1080/10494820.2017.1343191
- Slavin, R. E. (1994). Quality, appropriateness, incentive, and time: A model of instructional effectiveness. *International Journal of Educational Research*, 21(2), 141–157. doi:https://doi.org/10.1016/0883-0355(94)90029-9
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative Learning: Theory, Research, and Practice* (2. Aufl.). Boston: Allyn und Bacon.
- Spivey, M. J., Grosjean, M. & Knoblich, G. (2005). Continuous attraction toward phonological competitors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(29), 10393–10398. doi:10.1073/pnas.0503903102
- Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. (2018a). LehrplanPLUS - Gymnasium - 6 - Mathematik - Fachlehrpläne. Verfügbar unter <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/6/mathematik>
- Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. (2018b). LehrplanPLUS - Mittelschule - 6 - Mathematik - Fachlehrpläne. Verfügbar unter <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/mittelschule/6/mathematik>
- StatCounter. (2020). Browser Market Share Worldwide | StatCounter Global Stats. Verfügbar unter <http://gs.statcounter.com/browser-market-share#monthly-201904-202004>
- Steen, N. & Madsen, M. S. (2018). The textbook in mathematics: findings from a systematic review. In G. Schubring, L. Fan & V. Geraldo (Hrsg.), *Proceedings of the Second International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (S. 214–225). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. doi:10.1007/978-94-011-3168-1
- Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A. & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*. doi:10.1007/s10649-020-09948-1
- Sunday, D. (2012). Inclusion of a Point in a Polygon. Verfügbar unter [http://geomalgorithms.com/a03-\\_inclusion.html](http://geomalgorithms.com/a03-_inclusion.html)
- Sweller, J. (2012). Cognitive Load Theory. In N. M. Seel (Hrsg.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (S. 601–605). doi:10.1007/978-1-4419-1428-6\_446
- Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. doi:10.1007/978-1-4419-8126-4
- Tatsuoka, K. K. (1984). *Analysis of Errors in Fraction Addition and Subtraction Problems. Final Report*. University of Illinois.
- Tempelaar, D. T., Rienties, B. & Giesbers, B. (2014). Computer Assisted, Formative Assessment and Dispositional Learning Analytics in Learning Mathematics and Statistics. In M. Kalz & E. Ras (Hrsg.), *Computer Assisted Assessment. Research into E-Assessment* (S. 67–78). Cham: Springer International Publishing.
- Theobald, M., Bellhäuser, H. & Imhof, M. (2018). Identifying individual differences using log-file analysis: Distributed learning as mediator between conscientiousness and exam grades. *Learning and Individual Differences*, 65, 112–122. doi:https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.05.019
- Thompson, D. R. & Senk, S. L. (2014). The same geometry textbook does not mean the same classroom enactment. *ZDM*, 46(5), 781–795. doi:10.1007/s11858-014-0622-y
- Tschirgi, J. E. (1980). Sensible reasoning: A hypothesis about hypotheses. *Child development*, 51(1), 1–10.
- Usiskin, Z. (2018). Electronic vs. paper textbook presentations of the various aspects of mathematics. *ZDM*, 50(5), 849–861. doi:10.1007/s11858-018-0936-2
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. doi:10.1007/978-94-007-0844-0

- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453–467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
- Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2017). Number sense in the transition from natural to rational numbers. *British Journal of Educational Psychology*, 87(1), 43–56. doi:10.1111/bjep.12134
- Van Horne, S., Russell, J.-e. & Schuh, K. L. (2016). The adoption of mark-up tools in an interactive e-textbook reader. *Educational Technology Research and Development*, 64(3), 407–433. doi:10.1007/s11423-016-9425-x
- van Kesteren, A. (2018). *XMLHttpRequest*. WHATWG. <https://xhr.spec.whatwg.org/>.
- Vassiliou, M. & Rowley, J. (2008). Progressing the definition of “e-book”. *Library Hi Tech*, 26(3), 355–368. doi:10.1108/07378830810903292
- Verordnung über die Zulassung von Lernmitteln (Zulassungsverordnung – ZLV) in der Fassung der Bekanntmachung vom 17. November 2008 (GVBl. S. 902, BayRS 2230-3-1-1-K), die zuletzt durch § 1 Abs. 214 der Verordnung vom 26. März 2019 (GVBl. S. 98) geändert worden ist.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.
- von Gagern, M., Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. & Strobel, M. (2016). CindyJS. In G.-M. Greuel, T. Koch, P. Paule & A. Sommese (Hrsg.), *Mathematical Software – ICMS 2016* (S. 319–326). Cham: Springer International Publishing.
- von Gagern, M. & Richter-Gebert, J. (2016). CindyJS Plugins. In G.-M. Greuel, T. Koch, P. Paule & A. Sommese (Hrsg.), *Mathematical Software – ICMS 2016* (S. 327–334). Cham: Springer International Publishing.
- Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Hrsg.), *The Collected Works of L. S. Vygotsky: Bd. 3. Problems of the theory and history of psychology* (S. 85–89). New York: Plenum Press.
- Walberg, H. J. & Paik, S. J. (2003). *Effective educational practices*. International Academy of Education.
- Wang, X. & Xing, W. (2019). Understanding Elementary Students’ Use of Digital Textbooks on Mobile Devices: A Structural Equation Modeling Approach. *Journal of Educational Computing Research*, 57(3), 755–776. doi:10.1177/0735633118758643
- Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B. & Boester, T. (2012). Undergraduate Students’ Self-Reported Use of Mathematics Textbooks. *PRIMUS*, 22(2), 152–175. doi:10.1080/10511970.2010.509336
- Weinert, F. E. (1996). *Psychologie des Lernens und der Instruktion*. Göttingen: Hogrefe.
- Wellenreuther, M. (2010). Schulbücher – eine Lernhilfe für Schüler und Lehrer. *Schulverwaltung NRW*, 21(5), 144–146.
- Wellenreuther, M. (2013). *Lehren und Lernen - aber wie?* (6., vollst. überarb. Aufl.). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.
- Werner, B. O. (2019). *Stroke-based Handwriting Recognition: Theory and Applications* (Dissertation, Technische Universität München, München).
- What makes a good textbook? (1982). *Nature*, 295(5849), 459–459. doi:10.1038/295459a0
- Wiater, W. (2011). Aufgaben im Schulbuch. In E. Matthes (Hrsg.), *Aufgaben im Schulbuch* (S. 31–42). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Wickelgren, W. A. (1977). Speed-accuracy tradeoff and information processing dynamics. *Acta Psychologica*, 41(1), 67–85. doi:10.1016/0001-6918(77)90012-9
- Wickham, H. (2007). Reshaping Data with the reshape Package. *Journal of Statistical Software*, 21(12), 1–20. Verfügbar unter <http://www.jstatsoft.org/v21/i12/>
- Wickham, H. (2009). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. Verfügbar unter <http://ggplot2.org>
- Wickham, H. (2011). The Split-Apply-Combine Strategy for Data Analysis. *Journal of Statistical Software*, 40(1), 1–29. Verfügbar unter <http://www.jstatsoft.org/v40/i01/>
- Wickham, H. (2017). *scales: Scale Functions for Visualization*. R package version 0.5.0. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=scales>
- Wickham, H., François, R., Henry, L. & Müller, K. (2020). *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. R package version 0.8.5. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>
- Wickham, H. & Henry, L. (2018). *tidyr: Easily Tidy Data with 'spread()' and 'gather()' Functions*. R package version 0.8.0. Verfügbar unter <https://CRAN.R-project.org/package=tidyr>

- Wilde, E. (2012, 24. September). Scrolling eBooks HTML Widget Boilerplate. Verfügbar unter <https://github.com/edwilde/iBooks-HTML-Widget-Boilerplate>
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic bulletin & review*, 9(4), 625–636.
- Wilson, R., Landoni, M. & Gibb, F. (2002). Guidelines for Designing Electronic Books. In M. Agosti & C. Thanos (Hrsg.), *Research and Advanced Technology for Digital Libraries* (S. 47–60). doi:10.1007/3-540-45747-X\_4
- Wilson, R., Landoni, M. & Gibb, F. (2003). The WEB Book experiments in electronic textbook design. *Journal of Documentation*, 59(4), 454–477. doi:10.1108/00220410310485721
- Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 2, 4–16.
- Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht – dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Aachen. Verfügbar unter <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf>
- Wittmann, G. (2007). Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3.2007 in Berlin* (Bd. 1, S. 175–178). doi:10.17877/DE290R-11194
- Woody, W. D., Daniel, D. B. & Baker, C. A. (2010). E-books or textbooks: Students prefer textbooks. *Computers & Education*, 55(3), 945–948. doi:10.1016/j.compedu.2010.04.005
- Wu, H.-H. (2014). *Fractions, decimals, and rational numbers*. University of California. Verfügbar unter <https://math.berkeley.edu/~wu/NMPfractions.pdf>
- Yerushalmy, M. (2014). Challenges to the authoritarian roles of textbooks. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson & L. Fan (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (S. 13–20). Southampton: University of Southampton.
- Yerushalmy, M. (2016). Inquiry Curriculum and E-Textbooks: Technology Changes that Challenge the Representation of Mathematics Pedagogy. In M. Bates & Z. Usiskin (Hrsg.), *Digital curricula in school mathematics* (S. 87–108). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.
- Yin, C. (2017). How to Mine Student Behavior Patterns in the Traditional Classroom. In *The 2017 International Conference on Advanced Technologies Enhancing Education (ICAT2E 2017)*. doi:10.2991/icat2e-17.2016.24
- Yin, C. & Wang, Y. (2017). Relationship between Learning Achievement and Learning Strategies in the use of Digital Textbook Reading Logs. In *The 2017 International Conference on Advanced Technologies Enhancing Education (ICAT2E 2017)*. doi:10.2991/icat2e-17.2016.25
- Young, J. R. (2013). The Object Formerly Known as the Textbook. *The Chronicle of Higher Education*. Verfügbar unter <https://www.chronicle.com/article/Dont-Call-Them-Textbooks/136835>
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Bd. 2, S. 1169–1207). Information Age Charlotte, NC.
- Zehner, F. (2016). *Automatic Processing of Text Responses in Large-Scale Assessments* (Dissertation, Technische Universität München, München).
- Zheng, G., Fancsali, S. E., Ritter, S. & Berman, S. R. (2019). Using Instruction-Embedded Formative Assessment to Predict State Summative Test Scores and Achievement Levels in Mathematics. *Journal of Learning Analytics*, 6(2), 153–174. doi:10.18608/jla.2019.62.11

# Tabellenverzeichnis

1.1	Unterschiedliche symbolische Darstellungen derselben Bruchzahl . . . . .	21
5.1	Vorgefertigte Widgets in iBooks Author . . . . .	90
6.1	Beispiel einer DataManager-History . . . . .	120
6.2	Gestufte Lösungshilfen in Widget W17 am Beispiel „Rechne aus. $\frac{8}{9}$ von 36“ . .	143
6.3	Widget W18: den Anteil eines Ganzen berechnen. Dieselbe Aufgabe ( $\frac{1}{8}$ von 24) in den unterschiedlichen Kontexten . . . . .	144
6.4	Gestufte Lösungshilfen in Widget W18 . . . . .	144
6.5	Gestufte Lösungshilfen in Widget W27 . . . . .	146
6.6	Charakteristika der Widgets W43–W46 . . . . .	149
6.7	Lösungshilfen der Widgets W43 & W44 . . . . .	150
6.8	Lösungshilfen der Widgets W45 & W46 . . . . .	150
6.9	Gestufte Lösungshilfen in Widget W48 . . . . .	154
6.10	Gestufte Lösungshilfen in Widget W49 . . . . .	154
7.1	Anzahl der erfassten Logs pro Widget . . . . .	172
7.2	Anzahl an Nachtestitems zu den einzelnen Aspekten <i>Teil vom Ganzen</i> , <i>Erwei- tern und Kürzen</i> sowie <i>Größenvergleich</i> und Reliabilitäten (McDonalds $\omega$ ) der <i>ikonischen</i> und <i>symbolischen</i> Subskalen sowie der Subskala <i>Erklären</i> . . . . .	176
7.3	Zeitlicher Ablauf der Studiendurchführung an den Gymnasien . . . . .	178
7.4	Zeitlicher Ablauf der Studiendurchführung an den Mittelschulen . . . . .	178
7.5	Übersicht über die Anzahl an Schülerinnen und Schülern sowie die Geschlech- terverteilung in Klassen der Gymnasialstichprobe . . . . .	181
7.6	Übersicht über die Anzahl an Schülerinnen und Schülern sowie die Geschlech- terverteilung in Klassen der Mittelschulstichprobe . . . . .	181
7.7	Zur statistischen Analyse verwendete R-Pakete . . . . .	185
8.1	Mittelwerte und Standardabweichungen der Prozessmaße . . . . .	195
8.2	Mittelwerte und Standardabweichungen der Prozessmaße (Subskalen) . . . . .	198
8.3	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle (Gymnasialstichprobe) . . . . .	203
8.4	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die ikonische Subskala (Gymnasialstichprobe) . . . . .	204
8.5	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die symbolische Subskala (Gymnasialstichprobe) . . . . .	206
8.6	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle (Mittelschulstichprobe) . . . . .	208
8.7	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die ikonische Subskala (Mit- telschulstichprobe) . . . . .	210

8.8	Parameterschätzungen der Prädiktionsmodelle für die symbolische Subskala (Mittelschulstichprobe) . . . . .	212
8.9	Prozentuale Verteilung der Lösungsverfahren in Widgets W10 und W11 auf die Kategorien . . . . .	217
8.10	Parameterschätzungen der GLMMs zum Effekt der Bearbeitungszeit auf die Aufgabenlösung . . . . .	220
8.11	GLMM-Schätzungen zum Einfluss des Aufrufs von Lösungshilfen auf die Aufgabenlösung (Gymnasialstichprobe) . . . . .	222
8.12	GLMM-Schätzungen zum Einfluss des Aufrufs von Lösungshilfen auf die Aufgabenlösung (Mittelschulstichprobe) . . . . .	223
A.1	Übersicht über die ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . . . .	280
B.1	Codierung der Interaktionen im Prozesstring der Logs aus Widget W12 . . . . .	303
B.2	Gestufte Lösungshilfen in Widget W17 . . . . .	308
B.3	Widget W18: Den Anteil eines Ganzen berechnen. Dieselbe Aufgabe ( $\frac{1}{8}$ von 24) in den unterschiedlichen Kontexten . . . . .	309
B.4	Gestufte Lösungshilfen in Widget W18 . . . . .	309
B.5	Gestufte Lösungshilfen in Widget W21 . . . . .	311
B.6	Gestufte Lösungshilfen in Widget W27 . . . . .	316
B.7	Gestufte Lösungshilfen in Widget W28 . . . . .	317
B.8	Codierung der Selektionsstatus in Matching-Widget . . . . .	323
B.9	Verteilung der Visualisierungen in Widget W37 . . . . .	324
B.10	Gestufte Lösungshilfen in Widget W41 . . . . .	329
B.11	Gestufte Lösungshilfen in Widget W42 . . . . .	329
B.12	Charakteristika der Widgets W43–W46 . . . . .	330
B.13	Lösungshilfen der Widgets W43–W46 . . . . .	331
B.14	Gestufte Lösungshilfen in Widget W48 . . . . .	335
B.15	Gestufte Lösungshilfen in Widget W49 . . . . .	335
B.16	Gestufte Lösungshilfen in Widget W51a . . . . .	336
B.17	Gestufte Lösungshilfen in Widget W51b . . . . .	337
B.18	Gestufte Lösungshilfen in Widget W52 . . . . .	339
B.19	Abstufungen in der Setgenerierung von Widget W84 (Mittelschulstudie) . . . . .	358
B.20	Abstufungen in der Setgenerierung von Widget W84 (Gymnasialstudie) . . . . .	359

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Repräsentationsmodell des Ration Number Projects . . . . .	16
1.2	Digitale Umsetzungen enaktiver Bruchrepräsentationen in ALICE:Bruchrechnen	17
1.3	Diskrete Visualisierungen des Bruches $\frac{4}{6}$ . . . . .	18
1.4	Duales Repräsentationsmodell nach Carraher (1993) . . . . .	18
1.5	Kontinuierliche Visualisierungen von diskreten Visualisierungen . . . . .	19
1.6	Kontinuierliche Visualisierungen des Bruches $\frac{4}{6}$ . . . . .	19
1.7	Manipulierbares Modell: runde Bruchplättchen zu den Nennern 1 bis 5 . . . . .	20
1.8	Veränderung der Bedeutung einer Markierung auf dem Zahlenstrahl in Abhängigkeit von den Positionen der Zahlen 0 und 1 . . . . .	23
1.9	Erweitern und Kürzen als Verfeinern respektive Vergrößern einer Einteilung .	24
1.10	Grundvorstellungen als Übersetzungshilfe zwischen Repräsentationsformen von Brüchen . . . . .	25
2.1	Angebots-Nutzungs-Modell von Unterricht (nach Helmke, 2009) . . . . .	30
2.2	Schulbücher als Mediatoren zwischen Lehrplänen und Unterricht . . . . .	32
3.1	Typische Darstellung einer Interaktion zwischen Subjekt und Objekt, die durch ein Artefakt mediiert wird, nach der Tätigkeitstheorie . . . . .	60
3.2	Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern mit dem Ziel, mathematische Kompetenz zu erreichen . . . . .	60
3.3	Von der Lehrkraft mediierte Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern zum Erlernen des Schulbuchinhalts . . . . .	61
3.4	Von der Lehrkraft mediierte Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern mit dem Ziel, mathematische Kompetenz zu erreichen . . . . .	61
3.5	Modell zur Schulbuchnutzung von Schülerinnen und Schülern sowie von Lehrkräften . . . . .	62
3.6	Schematische Darstellung einer typischen Entscheidungsaufgabe in einer Finger-Tracking-Studie . . . . .	77
5.1	Die Benutzeroberfläche von iBooks Author im Vergleich zur Darstellung der entsprechenden Seite im iBook . . . . .	90
5.2	Zusammensetzung des internen Domain-Pfads der Widgets im iBook . . . . .	96
5.3	$\text{\TeX}$ -Markups für den Bruch $\frac{1}{3}$ . . . . .	101
6.1	Beispiel einer interaktiven Aufgabe . . . . .	108
6.2	Beispiel eines interaktiven Diagramms . . . . .	108
6.3	Elemente der Benutzeroberfläche in ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . . . .	109
6.4	ALICE-Farbschema . . . . .	110
6.5	Eingeblendetes Informationspanel in Widget W17 . . . . .	112

6.6	Eingabefelder mit Handschrifterkennung in ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . .	113
6.7	Scribblefläche, zu Demonstrationszwecken eingebunden in Widget W9 . . . . .	114
6.8	Interner Entscheidungsbaum des Vergleichserklärers . . . . .	116
6.9	Automatisch generierte Erklärung zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	117
6.10	Beispiel eines Karteikarteninhalts und korrespondierende Darstellung im Widget	119
6.11	Lebenszyklus eines DataManagers . . . . .	121
6.12	In Fraction-Objekten implementierte Visualisierungen . . . . .	124
6.13	Zahlenstrahl, erzeugt mit dem eigens entwickelten CindyJS-Skript . . . . .	127
6.14	Schematische Darstellung der Lokalisierung in ALICE:Bruchrechnen . . . . .	129
6.15	Form eines <i>History</i> -Eintrags eines DataManagers und die korrespondierende Zeile in der MySQL-Tabelle . . . . .	134
6.16	Widgets W8 & W9: Visualisieraufgaben am vorunterteilten Kreis und Rechteck	137
6.17	Widgets W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierungsaufgaben am Kreis und Balken . . . . .	138
6.18	Schematische Darstellung eines Schritts des Ramer-Douglas-Peucker-Algorithmus	139
6.19	Widget W13: Anteile einer diskreten Menge umranden . . . . .	140
6.20	Schematische Darstellung der Glättung aufgezeichneten Fingerbewegung . . .	140
6.21	Widget W16: Wachsender Lückentext zur Aufgabe $\frac{5}{7}$ einer 21 m langen Strecke bestimmen . . . . .	142
6.22	Widget W17: Den Bruchteil von etwas berechnen . . . . .	143
6.23	Widget W18: Den Bruchteil von etwas berechnen (kontextuiert) . . . . .	144
6.24	Widget W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer) . . . . .	147
6.25	Widgets W43, W45, W44 und W46: Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl bestimmen	151
6.26	Widget W47: Kürzungszahlen auswählen . . . . .	152
6.27	Widget W48: Einen Bruch auf einen gegebenen Nenner bringen . . . . .	153
6.28	Widget W49: Die fehlende Zahl in einer Bruchgleichung ergänzen . . . . .	153
6.29	Interaktive Diagramme in iBook-Kapitel 5 . . . . .	155
6.30	Widget zum Eintragen eines Bruchs auf einen Zahlenstrahl . . . . .	156
6.31	Widget zum Ablesen eines Bruchs von einem Zahlenstrahl . . . . .	157
6.32	Widget W62: Eintragen eines Bruches auf einem Zahlenstrahl, dessen Unter- teilung nicht dem Nenner des einzutragenden Bruches entspricht . . . . .	160
6.33	Widgets W69 & W70: Umwandeln zwischen unechten Brüchen und gemischten Zahlen . . . . .	162
6.34	Widgettyp <i>Welcher Bruch ist größer? Wähle aus.</i> . . . . .	163
6.35	Widgettypen zum Positionieren von Brüchen in ikonischen Darstellungen . .	165
7.1	Unterschied zwischen tatsächlichem und geloggtm Aktivitätsablauf . . . . .	173
7.2	Aus den Prozessdaten von ALICE:Bruchrechnen gewonnene Prozessmaße . .	174
8.1	Klassenaktivitätsgraphen . . . . .	188
8.2	Klassenaktivitätsgraphen mit Aufgabenbearbeitungen außerhalb des aktuellen Kapitels . . . . .	189
8.3	Beispiele für Progression durch die interaktiven Inhalte des iBooks in einer Unterrichtsstunde einer Gymnasialklasse . . . . .	189
8.4	Exemplarische Verläufe des Anforderungsniveaus in Widget W18 . . . . .	191
8.5	Überlagerung aller erfassten Verläufe des Anforderungsniveaus in Widget W18	191

8.6	<i>Pirate Plots</i> der Prozessmaße für die Gesamtstichprobe, sowie für die schulart- und geschlechterspezifischen Teilstichproben . . . . .	194
8.7	<i>Pirate Plots</i> der Prozessmaße (ikonische und symbolische Subskalen) für die Gesamtstichprobe, sowie für die schulart- und geschlechterspezifischen Teilstichproben . . . . .	197
8.8	Prädiktorvariablen in den Prädiktionsmodellen . . . . .	201
8.9	Lösungsprozess zur Aufgabe „Markiere $\frac{1}{4}$ “ in Widget W11 . . . . .	216
9.1	Markierung von $\frac{1}{2}$ im Kreisdiagramm (kontinuierliche Visualisierungsaufgabe)	235
A.1	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Benchmarking mit 1</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	283
A.2	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Gleicher Zähler</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	284
A.3	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Gleicher Nenner</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	284
A.4	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Residual Thinking zu 1</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	285
A.5	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Benchmarking mit <math>\frac{1}{2}</math></i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	285
A.6	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Benchmarking mit einer natürlichen Zahl &gt; 1</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	286
A.7	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Größe der Stücke</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	286
A.8	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Auf gleichen Zähler bringen</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	287
A.9	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Auf gleichen Nenner bringen</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	287
A.10	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Auf gleichen Zähler bringen</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	288
A.11	Automatisch generierte Erklärung der Strategie <i>Auf gleichen Nenner bringen</i> zum Größenvergleich zweier Brüche . . . . .	288
A.12	Mockup einer Fortschrittsanzeige . . . . .	290
B.1	iBookseite (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a, S. 7) mit Widget W1: Multiple Choice (Pizza) . . . . .	293
B.2	Widget W2: Texteingabewidget zu einer gezeichneten Pizza . . . . .	294
B.3	Widget W3: Lückentext zur Aussprache und Bedeutung von Brüchen . . . . .	295
B.4	Widget W4: Zeichenfläche – Brüche benennen . . . . .	296
B.5	Widget W5 & Widget W6: Aufgaben zur Übersetzung zwischen symbolischer Schreibweise und Zahlworten . . . . .	298
B.6	Widget W7: Widget zum Umwandeln einer ikonischen in eine symbolische Darstellung . . . . .	299
B.7	Widgets W8 & W9: Visualisierungsaufgaben am vorunterteilten Kreis und Rechteck . . . . .	300

B.8	Widgets W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierungsaufgaben am Kreis und Balken . . . . .	301
B.9	Widget W12: Darstellen von Brüchen im Rechteck . . . . .	302
B.10	Widget W13: Anteile einer diskreten Menge umranden . . . . .	304
B.11	Widget W14: Memory . . . . .	305
B.12	Widget W15: Den Bruchteil einer 1000 <i>ml</i> -Karaffe bestimmen . . . . .	306
B.13	Widget W16: Wachsender Lückentext . . . . .	307
B.14	Widget W17: Den Bruchteil von etwas berechnen . . . . .	307
B.15	Widget W18: Den Bruchteil von etwas berechnen (kontextuiert) . . . . .	308
B.16	Widget W19: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert, nur Stammbrüche) .	310
B.17	Widget W20: Wachsender Lückentext . . . . .	310
B.18	Widget W21: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert) . . . . .	311
B.19	Widget W22: Zurück aufs Ganze schließen . . . . .	312
B.20	Widget W23: Verteilen von drei Pizzen an vier Gäste . . . . .	313
B.21	Widgets W24 & W25: Verteilen von Schokolade an vier Kinder . . . . .	314
B.22	Widget W26: Wachsender Lückentext . . . . .	315
B.23	Widget W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer) . . . . .	316
B.24	Widget W28: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer, kontextuiert) . . . . .	317
B.25	Widget W30: Brüche als Quotienten natürlicher Zahlen . . . . .	319
B.26	Widget W32: Falten als enaktives Erweitern von Brüchen . . . . .	320
B.27	Widget W33: Erweitern am Kreisdiagramm . . . . .	321
B.28	Widgets W35 & W36: Wertgleiche Brüche identifizieren . . . . .	322
B.29	Widget W37: Einordnen . . . . .	324
B.30	Widget W38: Brüche am Rechteckdiagramm darstellen . . . . .	325
B.31	Widget W39: Graphisch Kürzen . . . . .	326
B.32	Widget W40: Faktorisieren einer natürlichen Zahl . . . . .	327
B.33	Widgets W41 & W42: Erweitern und Kürzen mit einer gegebenen Zahl . . . . .	328
B.34	Widgets W43, W45, W44 und W46: Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl bestimmen	332
B.35	Widget W47: Kürzungszahlen auswählen . . . . .	333
B.36	Widget W48: Einen Bruch auf einen gegebenen Nenner bringen . . . . .	334
B.37	Widget W49: Die fehlende Zahl in einer Bruchgleichung ergänzen . . . . .	334
B.38	Widget W50: Einen gemeinsamen Nenner angeben . . . . .	335
B.39	Widgets 51a & 51b: Symbolische Aufgaben zum Kürzen von Brüchen . . . . .	337
B.40	Widget W52: Eine natürliche Zahl als Bruch schreiben . . . . .	338
B.41	Widget W53: Sind die Brüche wertgleich? . . . . .	340
B.42	Interaktive Diagramme in Kapitel 5 . . . . .	341
B.43	Widget zum Eintragen eines Bruchs auf einen Zahlenstrahl . . . . .	342
B.44	Widget zum Ablesen eines Bruchs von einem Zahlenstrahl . . . . .	344
B.45	Widget W62: Eintragen eines Bruches auf einem Zahlenstrahl, dessen Unterteilung nicht dem Nenner des einzutragenden Bruches entspricht . . . . .	345
B.46	Widget W64: Eintragen mehrerer, zum Teil wertgleicher Brüche auf einem Zahlenstrahl . . . . .	346
B.47	Widgets W69 & W70: Umwandeln zwischen unechten Brüchen und gemischten Zahlen . . . . .	348

B.48	Widget W71: Wertgleiche unechte Brüche und gemischte Zahlen identifizieren	349
B.49	Widget W73: Visualisierung von unechten Brüchen . . . . .	350
B.50	Widgettyp <i>Welcher Bruch ist größer? Wähle aus</i> . . . . .	351
B.51	Widgettypen zum Positionieren von Brüchen in ikonischen Darstellungen . .	353
B.52	Widget W76: Ikonischer Vergleich mit $\frac{1}{2}$ . . . . .	354
B.53	Widget W82: Einführung in den Größenvergleich von Brüchen durch Anglei- chen der Nenner . . . . .	357
B.54	Widget W84 (hohes Anforderungsniveau): „Welcher Bruch ist am größten? Wähle aus“ . . . . .	358
B.55	Widget W85: Ordne die Brüche von klein nach groß . . . . .	360
B.56	Widget W88: Den größeren der dargestellten Brüche auswählen . . . . .	361
B.57	Widgets zum Förderung der Benchmarking-Strategien . . . . .	362
E.1	Aktivitätsgraphen der Klasse G11 . . . . .	402
E.2	Aktivitätsgraphen der Klasse G12 . . . . .	403
E.3	Aktivitätsgraphen der Klasse G13 . . . . .	404
E.4	Aktivitätsgraphen der Klasse G21 . . . . .	405
E.5	Aktivitätsgraphen der Klasse G22 . . . . .	406
E.6	Aktivitätsgraphen der Klasse G23 . . . . .	407
E.7	Aktivitätsgraphen der Klasse M11 . . . . .	408
E.8	Aktivitätsgraphen der Klasse M12 . . . . .	409
E.9	Aktivitätsgraphen der Klasse M13 . . . . .	410
E.10	Aktivitätsgraphen der Klasse M21 . . . . .	411
E.11	Aktivitätsgraphen der Klasse M22 . . . . .	412
E.12	Aktivitätsgraphen der Klasse M23 . . . . .	413



# Codeverzeichnis

5.1	Info.plist-Datei von Widget W9, Visualisierungen am Kreis . . . . .	94
5.2	MathML-Markup für den Bruch $\frac{1}{3}$ . . . . .	100
5.3	Von $\text{K}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ generiertes HTML-Markup für den Bruch $\frac{1}{3}$ zur Demonstration der Komplexität der Thematik „Darstellung von mathematischer Symbolik im Web“, Zeilenumbrüche und Einrückung vom Autor eingefügt . . . . .	102
5.4	JavaScript-Code zur Initialisierung von CindyJS. Die Konstruktion zeigt ein beschriftetes Dreieck $ABC$ , dessen Ecken frei bewegt werden können . . . . .	104
6.1	<i>Tickscript</i> für eine natürliche Bewegung des Punktes A von (0,0) nach (10,0). Die Animation wird über <code>resetclock();playanimation()</code> gestartet; dadurch gibt <code>seconds()</code> die seit Animationsstart vergangene Zeit zurück. Durch die Nutzung der Minimumsfunktion bleibt der Punkt nach vier Sekunden bei (10,0) stehen .	131
6.2	SQL-Query zur Abfrage der Spalte <i>startTime</i> aller Zeilen der Tabelle <i>table1</i> , in denen die Spalte <i>id</i> den Wert 17 hat . . . . .	133



# Anhang



# A Details zu ALICE:Bruchrechnen-Widgets

A.1	Tabellarische Übersicht der ALICE:Bruchrechnen-Widgets . . . . .	280
A.2	Beispiele des Vergleichserklärers . . . . .	283
A.3	Mögliche Fortschrittsanzeige in Widgets . . . . .	289

## A.1 Tabellarische Übersicht der ALICE:Bruchrechnen-Widgets

Tabelle A.1

Übersicht über die ALICE:Bruchrechnen-Widgets.

Nr.	Kurzbeschreibung	Typ	E-I-S	Level	$\mathcal{H} \rightarrow H$		Programmierung
W1	Multiple Choice – Gesechstelte Pizza	IA		1			Stefan Hoch
W2	Texteingabe – Gesechstelte Pizza	ID		1			Stefan Hoch
W3	Lückentext – Benennung und Interpretation der Bruchzahlkomponenten	ID	S	1			Stefan Hoch
W4	Zeichenfläche – Brüche benennen	ID		1			Stefan Hoch
W5	Aussprache von Brüchen	IA	S	1			Stefan Hoch
W6	Aussprache von Brüchen	IA	S	1	✓		Stefan Hoch
W7	Brüche aus Darstellungen ablesen	IA	I → S	2	✓		Stefan Hoch
W8	Visualisierung im unterteilten Rechteck	IA	S → I	3			Stefan Hoch
W9	Visualisierung im unterteilten Kreis	IA	S → I	4			Stefan Hoch
W10	Kontinuierliche Visualisierung am Balken	IA	S → I	3			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W11	Kontinuierliche Visualisierung am Kreis	IA	S → I	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W12	Visualisierungen im Rechteck erstellen	IA	I → S	2			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W13	Visualisierungen in diskreten Mengen	IA	S → I	2			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W14	Memory – symbolische und ikonische Repräsentationen	ID	I + S	1			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W15	Bruchteil einer 1000 ml-Karaffe bestimmen	ID	I + S	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W16	Wachsender Lückentext – Den Bruchteil von einer Strecke berechnen	IA	S	1			Stefan Hoch
W17	Den Anteil eines Ganzen berechnen	IA	S	3	✓		Stefan Hoch
W18	Den Anteil eines Ganzen berechnen (kontextuiert)	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W19	Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert, nur Stammbrüche)	IA	S	1	✓		Stefan Hoch
W20	Wachsender Lückentext – Zurück aufs Ganze schließen	IA	S	1			Stefan Hoch
W21	Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert)	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W22	Zurück aufs Ganze schließen	IA	S	3	✓		Stefan Hoch
W23	Pizza verteilen	ID	E	1			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W24	Schokolade verteilen	ID	E	1			Frank Reinhold <sup>c</sup>
W25	Multiple Choice – Schokolade verteilen	IA		1			Stefan Hoch
W26	Wachsender Lückentext: Rechnung Teil mehrerer Ganzer	IA	S	1			Stefan Hoch
W27	Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer)	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W28	Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer, kontextuiert)	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W29	Brüche als Ergebnis von Divisionen natürlicher Zahlen	IA	S	1	✓		Stefan Hoch

Nr.	Kurzbeschreibung	Typ	E-I-S	Level	$\mathcal{H} \rightarrow H$		Programmierung
W30	Ist das Ergebnis eine natürliche Zahl?	IA	S	1	✓		Stefan Hoch
W31	Zeichenfläche Papierfalten – Erweitern am Rechteckdiagramm	ID		1			Stefan Hoch
W32	Papierfalten – Erweitern am Rechteckdiagramm	IA	I → S	1	✓		Stefan Hoch
W33	Erweitern am Kreisdiagramm	ID	I + S	1			Frank Reinhold <sup>c</sup>
W34	Texteingabe – Erweiterungsregel	ID		1			Stefan Hoch
W35	Wertgleiche Brüche identifizieren (Erweitern und Kürzen)	IA	I + S	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W36	Wertgleiche Brüche identifizieren (Erweitern und Kürzen) II	IA	I + S	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W37	Visualisierungen einordnen	IA	I + S	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W38	Einen Bruch am Rechteckdiagramm darstellen II	IA	S → I	3			Stefan Hoch
W39	Graphisch Kürzen	IA	I	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W40	Faktorisieren	IA	S	2	✓		Stefan Hoch
W41	Erweitern mit einer gegebenen Zahl	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W42	Kürzen mit einer gegebenen Zahl	IA	S	3	✓	✓ <sup>P</sup>	Stefan Hoch
W43	Erweiterungszahl einer graphischen Erweiterung bestimmen	IA	S	2	✓	✓	Stefan Hoch <sup>c</sup>
W44	Kürzungszahl einer graphischen Erweiterung bestimmen	IA	I	2	✓	✓	Stefan Hoch <sup>c</sup>
W45	Erweiterungszahl bestimmen	IA	S	2	✓	✓	Stefan Hoch <sup>c</sup>
W46	Kürzungszahl bestimmen	IA	I	2	✓	✓	Stefan Hoch <sup>c</sup>
W47	Kürzungszahlen auswählen	IA	S	3			Stefan Hoch
W48	Auf einen gegebenen Nenner bringen	IA	S	2	✓	✓	Stefan Hoch
W49	Zähler oder Nenner ergänzen	IA	S	2	✓	✓	Stefan Hoch
W50	Einen gemeinsamen Nenner finden	IA	S	5	✓	✓	Stefan Hoch
W51	Vollständig Kürzen	IA	S	3	✓	✓	Stefan Hoch
W52	Natürliche Zahlen als Brüche schreiben	IA	S	1	✓	✓	Stefan Hoch
W53	Wertgleichheit erkennen	IA	S	3			Stefan Hoch
W54	Transformation einer Kreisdarstellung auf einen Zahlenstrahl	ID	I	1			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W55	Transformation einer Rechteckdarstellung in einen Zahlenstrahl (echte Brüche)	ID	I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W56	Echte Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen	IA	S → I	2			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W57	Echte Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen	IA	I → S	2	✓		Stefan Hoch <sup>c</sup>
W58	Unechte Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen	ID	I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W59	Unechte Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen	IA	S → I	2			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W60	Unechte Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen	IA	I → S	2	✓		Stefan Hoch <sup>c</sup>
W61	Transformation einer Rechteckdarstellung auf einen vorgegebenen Zahlenstrahl	ID	I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W62	Echte Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen II	IA	S → I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>

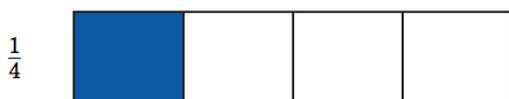
Nr.	Kurzbeschreibung	Typ	E-I-S	Level	$\mathcal{H} \rightarrow H$		Programmierung
W63	Echte Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen II	IA	I $\rightarrow$ S	1	✓		Stefan Hoch <sup>c</sup>
W64	Mehrere, auch wertgleiche Brüche auf einem Zahlenstrahl platzieren	IA	S $\rightarrow$ I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W65	Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen (Übungsaufgabe)	IA	S $\rightarrow$ I	4			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W66	Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen (Übungsaufgabe)	IA	I $\rightarrow$ S	4	✓		Stefan Hoch <sup>c</sup>
W67	Mehrere, auch unechte Brüche auf einem Zahlenstrahl platzieren	IA	S $\rightarrow$ I	1			Stefan Hoch <sup>c</sup>
W68	Texteingabe – Echte und unechte Brüche	ID		1			Stefan Hoch
W69	Uechte Brüche in gemischte Zahlen umrechnen	IA	S	3	✓		Stefan Hoch
W70	Gemischte Zahlen in unechte Brüche umrechnen	IA	S	3	✓		Stefan Hoch
W71	Wertgleiche Brüche identifizieren (gemischte Zahlen)	IA	S	3			Bernhard Werner <sup>c</sup>
W72	Uechte Brüche und gemischte Zahlen ineinander umrechnen	IA	S	3	✓		Stefan Hoch
W73	Uechte Brüche am Kreisdiagramm darstellen	IA	S $\rightarrow$ I	4			Stefan Hoch
W74	Relation von Brüchen zu 1 auf dem Zahlenstrahl	IA	I	1			Stefan Hoch
W75	Den größeren Bruch auswählen (Benchmark 1)	IA	S	1			Stefan Hoch
W76	Relation von Brüchen zu $\frac{1}{2}$ in Kreis- und Rechteckdiagrammen	IA	I	1			Stefan Hoch
W77	Den größeren Bruch auswählen (Benchmark $\frac{1}{2}$ )	IA	S	1			Stefan Hoch
W78	Den größeren Bruch auswählen (Stammbrüche)	IA	S	2			Stefan Hoch
W79	Den größeren Bruch auswählen (Brüche mit gleichem Zähler)	IA	S	2			Stefan Hoch
W80	Den größeren Bruch auswählen (Brüche mit gleichem Nenner)	IA	S	2			Stefan Hoch
W81	Den größeren Bruch auswählen (Brüche mit gleichem Zähler oder Nenner)	IA	S	1			Stefan Hoch
W82	Größenvergleich von $\frac{1}{4}$ und $\frac{9}{32}$ mithilfe von Rechteckdarstellungen	IA	S $\rightarrow$ I	1			Stefan Hoch
W83	Den größeren Bruch auswählen (Zähler oder Nenner angleichen)	IA	S	1			Stefan Hoch
W84	Den größeren/größten Bruch auswählen	IA	S	11			Stefan Hoch
W85	Brüche anordnen	IA	S	5			Stefan Hoch
W86	Relation von Brüchen zu $\frac{1}{2}$ auf dem Zahlenstrahl	IA	I	1			Stefan Hoch
W87	Platzierung von Brüchen im Kreisdiagramm	IA	I	1			Stefan Hoch
W88	Größenvergleich ikonischer Repräsentationen	IA	I	5			Bernhard Werner <sup>c</sup>
		IA	I	5			Stefan Hoch

Anmerkung. E–I–S verwendete Repräsentationen nach Bruner (1971). Level Anzahl der Anforderungsniveaus.  $\mathcal{H} \rightarrow H$  Handschrifterkennung.  Lösungshilfen. IA Interaktive Aufgabe. ID Interaktives Diagramm. E Enaktive Repräsentation. I Ikonische Repräsentation. S Symbolische Repräsentation. Sind zwei Repräsentationsformen mit einem Pfeil angegeben, so ist im Widget in dieser Richtung ein Repräsentationswechsel durchzuführen. <sup>P</sup> In diesen Aufgaben erscheint nach falscher Antwort nicht direkt eine neue Aufgabe, sondern erst die Nachfrage, ob ein Lösungshinweis angezeigt werden soll. <sup>c</sup> Implementierung nutzt hauptsächlich CindyJS.

## A.2 Beispiele des Vergleichserklärers

In diesem Abschnitt finden sich Beispiele aller im Vergleichserklärer (vgl. Abschnitt 6.2.2.1) eingearbeiteten Strategien zum Vergleich von Brüchen. Die Reihenfolge der Abbildungen entspricht der Reihenfolge, in der die Strategien vom Skript auf Passung an den aktuellen Fall überprüft werden (s. Abbildung 6.8).

Bei  $\frac{1}{4}$  ist der Zähler **kleiner** als der Nenner. Der Bruch ist also **kleiner** als **1**.



Bei  $\frac{3}{2}$  ist der Zähler **größer** als der Nenner. Der Bruch ist also **größer** als **1**.



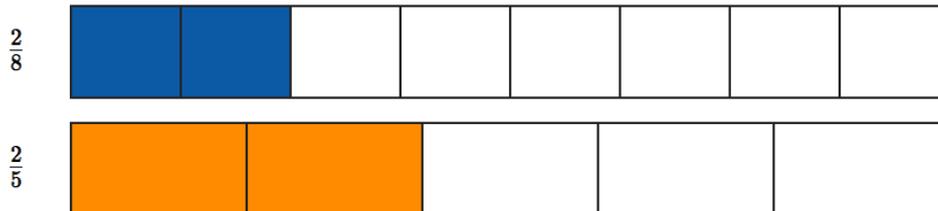
Es ist also  $\frac{1}{4} < 1 < \frac{3}{2}$ , und daher

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{2}.$$

Abbildung A.1. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Benchmarking mit 1* zum Größenvergleich zweier Brüchen am Beispiel des Bruchpaars  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{3}{2}$ .

Die Brüche  $\frac{2}{5}$  und  $\frac{2}{8}$  haben den gleichen Zähler.

Von zwei Brüchen mit gleichen Zähler ist derjenige **kleiner**, der den **größeren** Nenner hat: In je mehr Teile das Ganze geteilt wird, desto kleiner sind die einzelnen Teile.



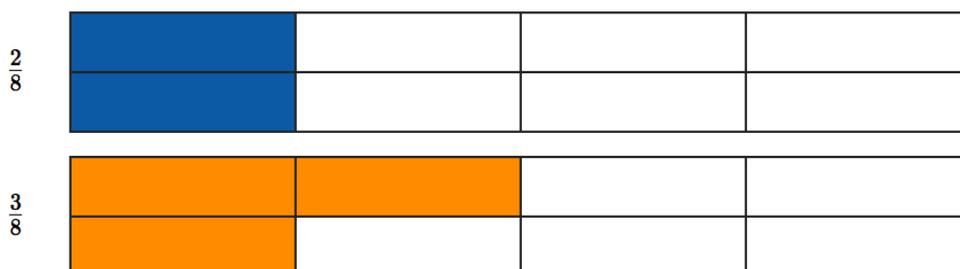
Weil 8 größer als 5 ist, ist also

$$\frac{2}{8} < \frac{2}{5}.$$

Abbildung A.2. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Gleicher Zähler* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaares  $\frac{2}{8}$  und  $\frac{2}{5}$ .

Die Brüche  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{2}{8}$  haben den gleichen Nenner.

Die Größe der Teile, die jeweils vom Ganzen genommen werden, ist also gleich. Daher kommt es nur darauf an, wie viele genommen werden. Das gibt der Zähler an.



Weil 2 kleiner als 3 ist, ist also

$$\frac{2}{8} < \frac{3}{8}.$$

Abbildung A.3. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Gleicher Nenner* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaares  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{2}{8}$ .

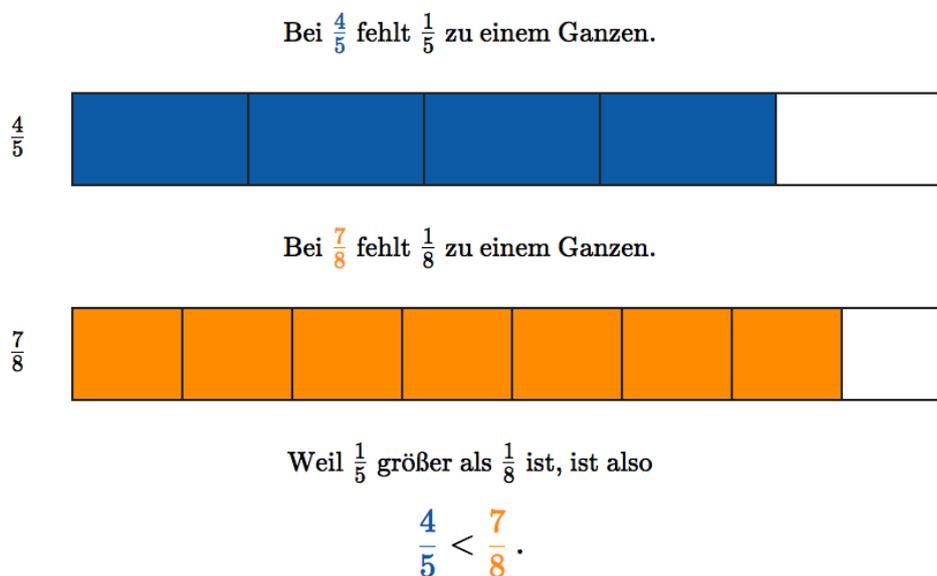


Abbildung A.4. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Residual Thinking zu 1* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaars  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{7}{8}$ .

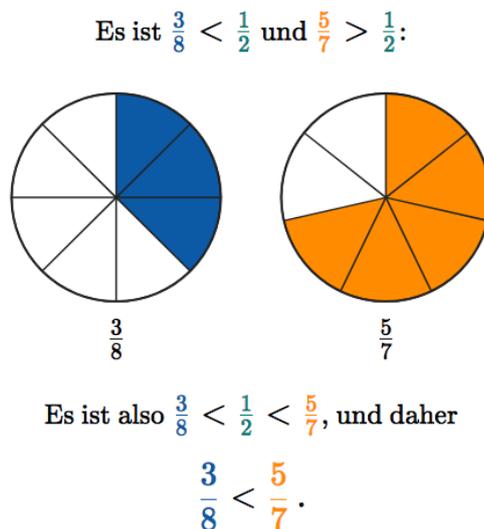
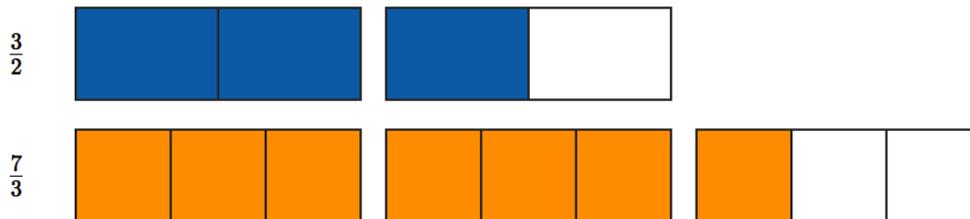


Abbildung A.5. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Benchmarking mit  $\frac{1}{2}$*  zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaars  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{5}{7}$ .

Geschrieben als gemischte Zahl ist  $\frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$  und  $\frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$ .

Es ist  $2 \frac{1}{3}$  größer als 2 und  $1 \frac{1}{2}$  kleiner als 2.



Es ist also  $\frac{3}{2} < 2 < \frac{7}{3}$ , und daher

$$\frac{3}{2} < \frac{7}{3}.$$

Abbildung A.6. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Benchmarking mit einer natürlichen Zahl*  $> 1$  zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaares  $\frac{3}{2}$  und  $\frac{7}{3}$ .

Bei  $\frac{6}{10}$  teilen wir ein Ganzes in 10 gleich große Teile und nehmen 6 solcher Teile.



Bei  $\frac{7}{9}$  teilen wir ein Ganzes in 9 gleich große Teile und nehmen 7 solcher Teile.



Die einzelnen Teile bei  $\frac{7}{9}$  sind **größer** und wir nehmen **mehr** Teile als bei  $\frac{6}{10}$ . Daher ist

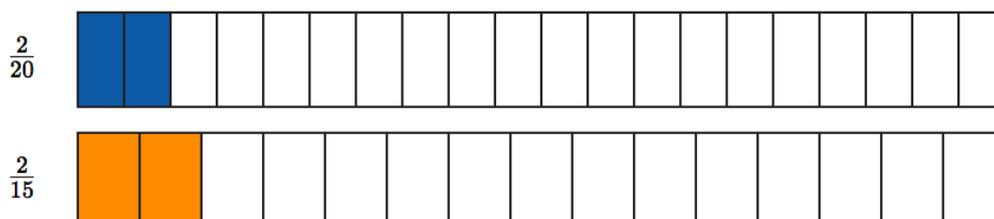
$$\frac{7}{9} > \frac{6}{10}.$$

Abbildung A.7. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Größe der Stücke* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaares  $\frac{6}{10}$  und  $\frac{7}{9}$ .

$$\text{Es ist } \frac{1}{10} \stackrel{2}{=} \frac{2}{20}.$$

Die Brüche  $\frac{2}{20}$  und  $\frac{2}{15}$  haben den gleichen Zähler.

Von zwei Brüchen mit gleichen Zähler ist derjenige **kleiner**, der den **größeren** Nenner hat: In je mehr Teile das Ganze geteilt wird, desto kleiner sind die einzelnen Teile.



Weil 20 größer als 15 ist, ist also

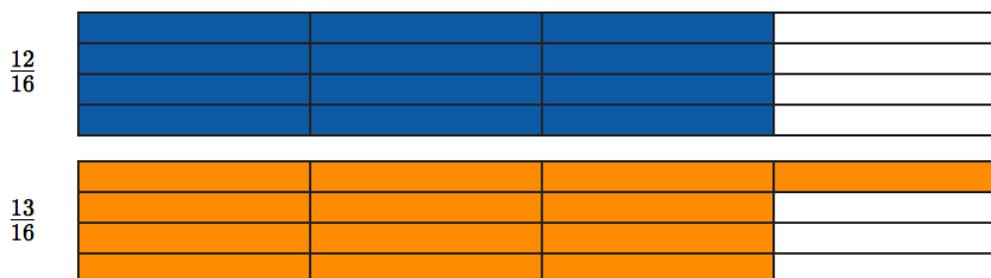
$$\frac{2}{20} < \frac{2}{15} \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{10} < \frac{2}{15}.$$

Abbildung A.8. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Auf gleichen Zähler bringen* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaars  $\frac{1}{10}$  und  $\frac{2}{15}$ .

$$\text{Es ist } \frac{3}{4} \stackrel{4}{=} \frac{12}{16}.$$

Die Brüche  $\frac{12}{16}$  und  $\frac{13}{16}$  haben den gleichen Nenner.

Die Größe der Teile, die jeweils vom Ganzen genommen werden, ist also gleich. Daher kommt es nur darauf an, wie viele genommen werden. Das gibt der Zähler an.



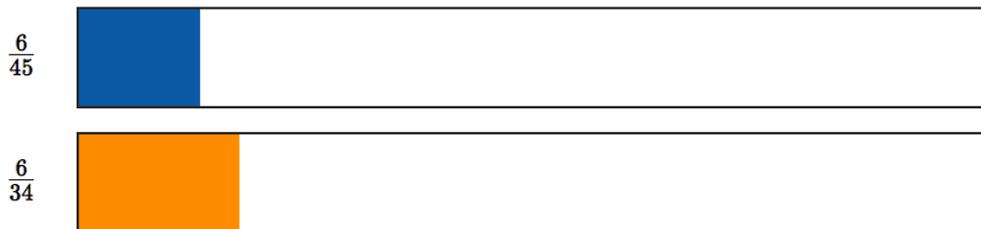
Weil 12 kleiner als 13 ist, ist also

$$\frac{12}{16} < \frac{13}{16} \quad \text{d. h.} \quad \frac{3}{4} < \frac{13}{16}.$$

$$\text{Es ist } \frac{2}{15} \stackrel{3}{=} \frac{6}{45} \text{ und } \frac{3}{17} \stackrel{2}{=} \frac{6}{34}.$$

Die Brüche  $\frac{6}{45}$  und  $\frac{6}{34}$  haben den gleichen Zähler.

Von zwei Brüchen mit gleichen Zähler ist derjenige **kleiner**, der den **größeren** Nenner hat: In je mehr Teile das Ganze geteilt wird, desto kleiner sind die einzelnen Teile.



Weil 45 größer als 34 ist, ist also

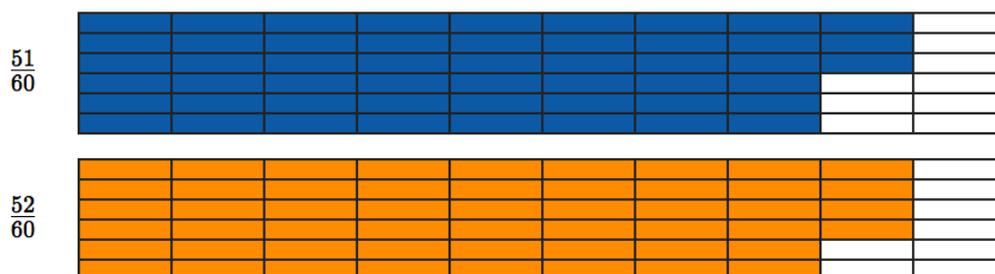
$$\frac{6}{45} < \frac{6}{34} \quad \text{d. h.} \quad \frac{2}{15} < \frac{3}{17}.$$

Abbildung A.10. Automatisch generierte Erklärung der Strategie *Auf gleichen Zähler bringen* zum Größenvergleich zweier Brüche am Beispiel des Bruchpaars  $\frac{2}{15}$  und  $\frac{3}{17}$ .

$$\text{Es ist } \frac{17}{20} \stackrel{3}{=} \frac{51}{60} \text{ und } \frac{13}{15} \stackrel{4}{=} \frac{52}{60}.$$

Die Brüche  $\frac{51}{60}$  und  $\frac{52}{60}$  haben den gleichen Nenner.

Die Größe der Teile, die jeweils vom Ganzen genommen werden, ist also gleich. Daher kommt es nur darauf an, wie viele genommen werden. Das gibt der Zähler an.



Weil 51 kleiner als 52 ist, ist also

$$\frac{51}{60} < \frac{52}{60} \quad \text{d. h.} \quad \frac{17}{20} < \frac{13}{15}.$$

## A.3 Mögliche Fortschrittsanzeige in Widgets

In den Prozessdaten von ALICE:Bruchrechnen finden sich Schülerinnen und Schüler, die – scheinbar vom Erfolg in niedrigen Anforderungsniveaus dazu verleitet – Widgets vorzeitig schließen und die höheren Level nicht bearbeiten (s. Abschnitt 8.1.1.3).

Ein Grund für diese Beobachtungen kann darin liegen, dass die Adaptivität im Hintergrund arbeitet, ohne Information mit dem Lernenden zu teilen. Zur Abhilfe war hierzu eine Fortschrittsanzeige geplant, die auf Gründen der Vergleichbarkeit zwischen den beiden Stichproben nicht final umgesetzt wurde. Hier folgt eine Detaillierung der angedachten Implementierung in Form eines Fortschrittsbalkens, wie man ihn aus dem Computeralltag kennt.

Der Punkt 100 % sollte nach dem erfolgreichen Bearbeiten eines Sets der höchsten Schwierigkeitsstufe erreicht werden. Die naive Herangehensweise, den Balken in gleich große Teile einzuteilen, deren Anzahl der Summe der Setlängen über die Schwierigkeitsstufen entspricht, und anschließend bei richtiger Bearbeitung ein Teil fortzuschreiten und bei falscher Beantwortung auf dem aktuellen Stand zu verharren, zieht in Probleme nach sich, wenn eine Schwierigkeitsstufe wiederholt werden muss. Vielmehr muss der angezeigte Fortschritt nach einer korrekten Bearbeitung adaptiv gewählt werden, um den vollen Balken nicht vorzeitig zu erreichen.

Eine Vorgehensweise wäre bspw., den gesamten Balken in die Anzahl an hinterlegten Schwierigkeitsstufen zu teilen und in jedem diese Teile wie folgt zu verfahren: Bei richtiger Antwort wird solange um 1/Setlänge des Teils fortgeschritten, bis die Lösungsrate im Set unter die benötigte Quote fällt, um nach dem Set in die höhere Schwierigkeitsstufe eingestuft zu werden (vgl. Abschnitt 6.2.2.2). In diesem Fall wird die verbleibende Distanz im Teil in kleineren Schritten fortgeschritten. Dieses Verfahren wird bei Bedarf solange iteriert, bis schließlich ein Set erfolgreich abgearbeitet wurde und das n-tel der Schwierigkeitsstufe gefüllt ist. Dadurch erfolgt kein Rückschritt, allerdings wird bei wiederholtem Scheitern der sichtbare Fortschritt bei richtiger Lösung geringer. Aufgrund des geringen Platzes, der auf dem iPad zur Verfügung steht, sollte der Fortschrittsbalken nicht direkt sichtbar (bspw. im Infobereich, s. Abschnitt 6.2.1.1) oder am Rand der Widgets untergebracht werden.

Abbildung A.12 zeigt eine mögliche, unauffällige Darstellung in Widget W8 als Fortschrittsring, der sich in der oben beschriebenen Weise im Uhrzeigersinn blau füllt.

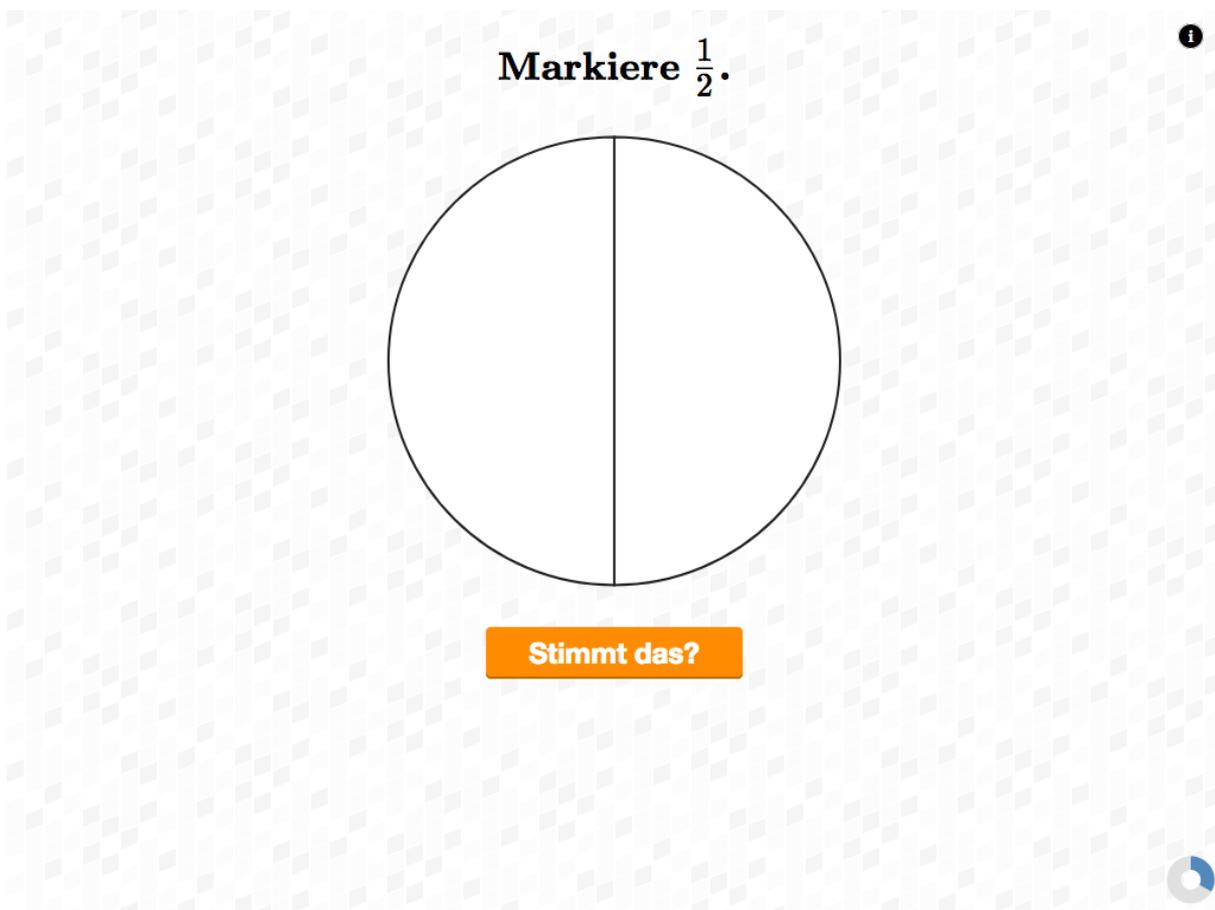


Abbildung A.12. Mockup einer Fortschrittsanzeige (unten rechts) nach Erreichen der zweiten von drei Anforderungsniveaus, eingebunden in Widget W8.

## B Detaillierte Beschreibungen der ALICE:Bruchrechnen-Widgets nach iBook-Kapitel

B.1	Kapitel 1: „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen . . .	292
B.2	Kapitel 2: „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen . . . . .	305
B.3	Kapitel 3: „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer . . . . .	312
B.4	Kapitel 4: „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen	319
B.5	Kapitel 5: Brüche auf dem Zahlenstrahl . . . . .	340
B.6	Kapitel 6: „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche	347
B.7	Kapitel 7: „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen . . .	350

### Hinweis

Die folgenden Abschnitte beschreiben die einzelnen Widgets im Detail. Dabei werden auch diejenigen Widgets ausgeführt, die in Kapitel 6 bereits erläutert wurden. So bietet der vorliegende Anhang ein vollständiges Nachschlagewerk zu den interaktiven Komponenten des interaktiven Schulbuchs.

## B.1 Kapitel 1: „Eine Pizza wird geteilt“ – Brüche darstellen und benennen

Das erste Kapitel des iBooks dient der Einführung von Bruchzahlen. Der Fokus liegt hierbei auf der korrekten Aussprache der symbolischen Schreibweise und der Darstellung von Brüchen in üblichen geometrischen Objekten, wie Rechtecken oder Kreisen. Dabei wird auch ein intuitives Größenverständnis durch Aufgaben gefördert, in denen kontinuierliche Visualisierungen erstellt werden. Die für das Kapitel entwickelten Interaktionen werden im Folgenden beschrieben.

### B.1.1 Einführungsteil

#### B.1.1.1 W1: Multiple Choice – Gesechstelte Pizza

Das erste Widget im Buch macht die Schülerinnen und Schüler niederschwellig mit der Interaktivität des iBooks bekannt. Es handelt sich um eine einzelne Multiple-Choice Frage, die mit automatischer Korrektur ausgestattet ist.

In Widget W1 gilt es, diejenigen Antwortmöglichkeiten auszuwählen, die eine gesechstelte Pizza korrekt beschreiben (s. Abbildung B.1). Im Lernkontext dient die Aufgabe als Aufhängepunkt, um den Zusammenhang von Brüchen und Aufteilungssituationen zu thematisieren. Ebenso kommt zur Sprache, dass Teile eines Ganzen, die in Aufteilungskontexten im Zusammenhang von Brüchen erstellt werden, stets gleiche Größe haben müssen. Aufgrund seiner Kompaktheit läuft das Widget direkt in der Buchseite.

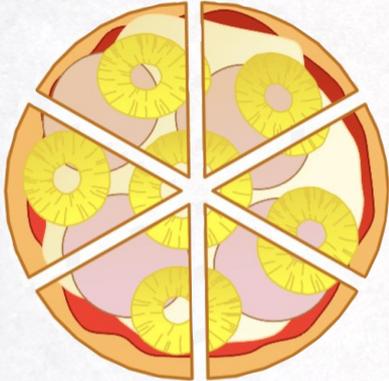
Die automatische Korrektur färbt Antwortmöglichkeiten, die richtigerweise ausgewählt oder nicht ausgewählt wurden, grün und versieht sie mit einem grünen Haken. Fälschlicherweise angehakte Distraktoren oder nicht angehakte korrekte Antwortmöglichkeiten werden rot gefärbt und mit einem roten Kreuz gekennzeichnet. Ausgewählte Distraktoren werden zusätzlich rot durchgestrichen, um die Fehlerhaftigkeit der Aussage zu unterstreichen. Anschließend können Korrektur und gesetzte Haken zurückgesetzt werden, um die Aufgabe erneut zu bearbeiten. Die Antwortmöglichkeiten werden bei jedem Widgetstart zufällig angeordnet, so dass einerseits ein erneutes Bearbeiten nach „Muster“ und andererseits „Abschauen“ verhindert werden kann.

Das Widget ist so programmiert, dass die Antwortmöglichkeiten von der Funktionalität des Multiple Choice getrennt sind. Dadurch kann der Programmiercode ohne größeren Aufwand mehrfach verwendet werden, um Multiple-Choice-Fragen einzubinden: zur Erstellung eines Multiple-Choice-Widgets wird nur eine Liste der Antwortmöglichkeiten (plus Indikator, welche als richtig gewertet werden sollen) und das vom Autor erstellte Multiple-Choice-Skript benötigt. In ALICE:Bruchrechnen geschieht dies noch ein mal (Widget W25, s. Abschnitt B.3.1.2). Aufgrund der unterschiedlichen Domänen von Autoplay und Manuellstart-Widgets wurden von dieser Aufgabe keine Daten ausgelesen (vgl. Abschnitt 5.2.3).

7 Eine Pizza wird geteilt

## Eine Pizza wird geteilt

Anna möchte eine Pizza mit ihren fünf Freundinnen teilen. Sie schneidet sie in gleich große Stücke.



**Aufgabe 1** Was stimmt?

- ~~Man braucht mindestens sechs Schnitte, um die Pizza so aufzuteilen.~~ ✗
- Die Pizza wurde in sechs Stücke geteilt. ✓
- Man kann die Pizza gerecht auf sechs Personen verteilen. ✗
- Vier der Stücke ergeben eine halbe Pizza. ✓
- Jedes Mädchen bekommt ein Sechstel der Pizza. ✗

noch einmal ↻

Abbildung B.1. iBookseite (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a, S. 7) mit Widget W1: Multiple Choice (Pizza).

### B.1.1.2 W2: Texteingabe – Gesechstelte Pizza

Widget zwei präsentiert das erste Vollbildwidget. Thema ist weiterhin die gesechstelte Pizza. Nach Wiederholung der Frage aus dem iBooktext, „Kannst du erklären, wie Anna geschnitten hat [sc. um eine solche Aufteilung einer Pizza zu erhalten]?“, befindet sich im Widget ein Textfeld, in dem die Schülerinnen und Schüler die Frage in Schriftform beantworten können. Der einzige Button im Widget dient zum Löschen des Textes; eine automatische Korrektur wurde nicht implementiert, auch wenn sie im Hinblick auf aktuelle Forschungsergebnisse (Zehner, 2016) realisierbar scheint.

Bei diesem Texteingabe-Widget handelt es sich um einen der drei Widgettypen, die auf die Tastatur des Tabletbetriebssystems zurückgreifen. Da das iBook auf die Nutzung mit dem Finger – und ohne Stylus – ausgelegt ist, wurde hier bewusst darauf verzichtet, eine handschriftliche Eingabe zu erlauben, da der beschränkte Platz auf dem Bildschirm das Verfassen eines längeren, fingerschriftlichen Textes erschwert.

Für diesen Widgettyp war es angedacht, den von den Schülerinnen und Schülern eingegebenen Text anschließend im Fließtext des iBooks als Autoplay-Inpage-Widget einzubinden, um die Antwort im Buchkontext besprechen zu können. Während Web Storage zwar die Reaktion auf Änderungen im Storage zulässt (über das JavaScript-Ereignis *StorageEvent*, Hickson, 2016) und dadurch ein automatisches Aktualisieren eines angezeigten Texts mit der jeweils

neuesten Texteingabe umsetzbar ist, scheiterte das Vorhaben an den unterschiedlichen Domänen von Widget W2 und der geplanten Im-Text-Anzeige (vgl. Abschnitt 5.2.3).

Dieses Widget ist das erste im iBook, in dem der DataManager zum Einsatz kommt. Beim Schließen des Widgets wird der aktuell eingegebene Text geloggt. Ebenso wird beim Betätigen des „Alles löschen“-Buttons vor der Leerung des Textfeldes der Inhalt des Eingabefeldes gesichert. Beim Öffnen des Widgets wird der letzte Text aus der History des DataManagers in das Texteingabefeld geladen, so dass am Stand der letzten Bearbeitung weitergearbeitet werden kann.



## Aufgabe 2

Kannst du erklären, wie Anna geschnitten hat? Schreibe deine Antwort auf und vergleiche dann mit deinem Banknachbarn.

Anna hat als erstes die Pizza halbiert hat sie jede Hälfte in drei kleine Teile geteilt 🍷🍷🍷



Alles löschen

Abbildung B.2. Widget W2: Texteingabewidget zu einer gesehstelten Pizza, echte Schülerlösung.

### B.1.1.3 W3: Lückentext – Benennung und Interpretation der Bruchzahlkomponenten

Auch in Widget W3 kommt die Bildschirmtastatur zum Einsatz. Es handelt sich um einen Lückentext, in dem die unterschiedlichen Komponenten eines Bruches (Zähler, Bruchstrich, Nenner) am Beispiel  $\frac{7}{12}$  benannt werden sollen. Zudem soll die korrekte Aussprache von  $\frac{7}{12}$  verschriftlicht und eingetragen werden, welche der beiden Zahlen die insgesamt Anzahl der Stücke bzw. die genommene Anzahl beschreibt, wenn man den Anteil eines Ganzen bestimmt, indem man es in so viele gleich große Stücke aufteilt, wie der Nenner angibt,

und anschließend dem Zähler entsprechend viele Stücke „nimmt“. Eine Visualisierung des Bruches in einem Rechteck dient dabei der Unterstützung. Beides – Komponenten wie deren Bedeutung – werden auf der iBookseite davor am Beispiel  $\frac{3}{8}$  erläutert.

Feedback wird bei korrektem Auffüllen einer Lücke sofort gegeben und nach Drücken des „Überprüfen“-Buttons. Dabei werden richtig geschlossene Lücken grün und mit einem Haken markiert, falsche rot und mit einem Kreuz (vgl. Abbildung B.3).

Die Programmierung des Widgets macht sich die *jQuery UI Widget Factory* (jQuery Foundation, 2015) zunutze und ist auf Wiederverwendung ohne größere Programmierkenntnisse ausgelegt: das Skript generiert den Lückentext direkt aus dem HTML-Markup. Zur Erstellung einer Lücke ist der HTML-Tag `<ins>` an der gewünschten Stelle im Markup einzufügen; korrekte Antwortmöglichkeiten können darin durch Semikola getrennt aufgelistet werden. Auch die Vergabe des Schlüssels für den DataManager (vgl. Abschnitt 6.2.2.4) findet automatisch statt, indem ein sog. Hash des Lückentext-Strings generiert und als Schlüssel verwendet wird. In ALICE:Bruchrechnen findet sich jedoch kein zweites Lückentext-Widget dieser Art.

Sowohl beim Anfordern einer Korrektur über den Button als auch beim Verlassen des Widgets werden alle eingegebenen Texte in den Lücken geloggt.

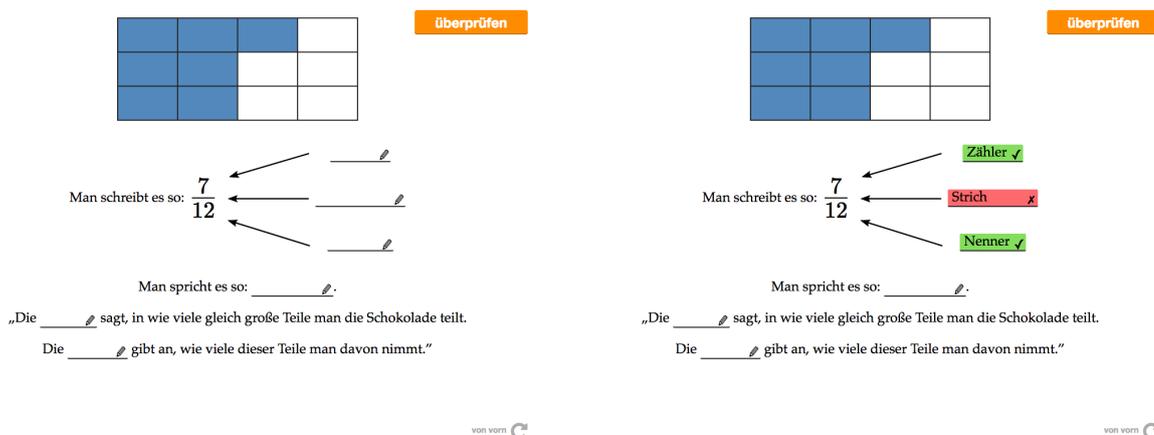


Abbildung B.3. Widget W3: Lückentext zur Aussprache und Bedeutung von Brüchen. Leere Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer Teillösung (rechts).

#### B.1.1.4 W4: Zeichenfläche – Brüche benennen

Widget W4 schließt thematisch an den Lückentext W3 an. Es fordert Nutzerinnen und Nutzer dazu auf, mit dem Banknachbarn zusammenzuarbeiten und sich gegenseitig ähnliche Aufgaben wie Widget W3 zu stellen. Dazu steht eine Zeichenfläche zur Verfügung, welche die Bewegungen des Fingers auf dem Touchscreen in Schwarz nachzeichnet. Über einen „Löschen“-Button kann die Zeichenfläche geleert werden (vgl. Abbildung B.4).

Die Bilddaten werden als sog. *data URL* (Manister, 1998) gespeichert, welche die Pixeldaten des Bildes als Zeichenkette codiert. Die Zeichenfläche hat eine Größe von 1024 Pixel mal 582 Pixel; die im PNG-Format gespeicherten Bilder haben als data URL eine Größe von etwa



## Aufgabe 4

Vergleiche deine Lösung jetzt mit deinem Banknachbarn. Stellt euch anschließend ähnliche Aufgaben mit runden Pizzen und rechteckigen Schokoladen.

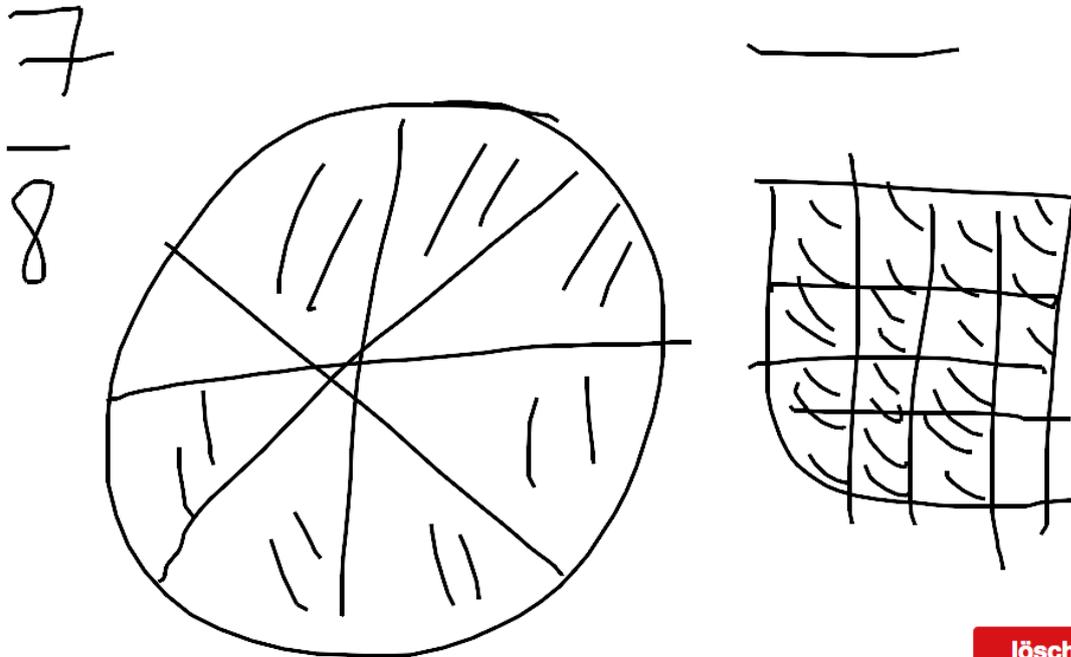


Abbildung B.4. Widget W4: Zeichenfläche – Brüche benennen, echte Zeichnung des Schülers 1312<sub>GYM</sub>.

19 bis 146 Kilobytes. Ohne die Erfassung anderer Daten in einem iBook könnten also etwa 50 Bildversionen in der localStorage gespeichert werden (s. Abschnitt 5.2.3.1). Aufgrund der hohen Speicherintensität wird in ALICE:Bruchrechnen nur die letzte erstellte Zeichnung gespeichert. Daher findet in diesen Widgets auch nicht der DataManager Verwendung, dessen History so angelegt ist, dass alle Zeichnungen erfasst würden, sondern ein eigener Code, der jedoch auf dieselbe Webtechnologie zurückgreift. Die Speicherung erfolgt automatisch beim Schließen des Widgets oder vor der Löschen der Zeichnung. Im letzten Fall wird die Zeichnung zunächst nur als gelöscht markiert. Das gespeicherte Bild wird beim nächsten Öffnen des Widgets aus der localStorage geladen und auf der Zeichenfläche angezeigt, sofern es nicht als gelöscht markiert ist.

Ein Merksatz im iBook, der die Thematik der letzten zwei Widgets zusammenfasst, und der Hinweis, dass Brüche auch mehr als ein Ganzes bezeichnen können, beschließen den Einführungsteil.

### B.1.2 Übungsteil

Mit Widget W5 beginnt der Übungsteil des Kapitels. Die ersten beiden Widgets konzentrieren sich auf die korrekte Aussprache von Bruchzahlen. Beide Widgets greifen auf einen eigens entwickelten automatischen Übersetzer zurück, der zwischen Brüchen in

symbolischer Notation, Zahlwortschreibweise, quasikardinaler Schreibweise und Dezimalbruchschreibweise transformieren kann.

Die restlichen Widgets des Kapitels behandeln ikonische Darstellungen von Brüchen. Dabei liegt der Fokus auf dem Erstellen von unterschiedlichen Visualisierungen, was sich in der Aufgabenfülle zu dieser Richtung der Übersetzung zwischen symbolischer und ikonischer Repräsentation widerspiegelt.

### B.1.2.1 W5 & W6: Aussprache von Brüchen

#### Widget W5

Widget W5 beschäftigt sich mit dem Umwandeln der Zahlschreibweise in Zahlworte und präsentiert die zu übersetzende Bruchzahl auf einer Karte. In der unteren Hälfte des Bildschirms werden Wörter angezeigt, die durch Antippen zu einer Antwort zusammen gestellt werden können (vgl. Abbildung B.5). So kann die Korrektur dank verhinderter Rechtschreibfehler vereinfacht und Aufgabenbearbeitung beschleunigt werden. Neben dem Zähler als Zahlwort und dem Nenner werden als Distraktoren die Komponenten des übersetzten Kehrbuchs und zwei der Bindewörter „Strich“, „Minus“, „durch“, „über“, „unter“, „hoch“, „und“, „auf“ und „Linie“ angeboten. Bei Nennern  $\leq 3$  stehen zudem zusätzlich typische falsche Sprechweisen („Einstel“, „Zweitel“ bzw. „Dreitell“) zur Auswahl.

Aufgrund des vorausgesetzten Vorwissens um Zahlworte sind in W5 keine Schwierigkeitsstufen hinterlegt. Das Widget beginnt beim ersten Öffnen mit dem Bruch  $\frac{1}{2}$  und generiert anschließend zufällige, echte Brüche mit Nenner  $\leq 50$ . Zur Korrektur versucht der automatische Übersetzer, die zusammengestellten Wörter in einen Bruch zu verwandeln und ihn anschließend mit der Angabe zu vergleichen. Schlägt die Konversion oder der Vergleich fehl, so wird wortweise die eingegebene Übersetzung mit der vom Übersetzer bereitgestellten Lösung verglichen und Abweichungen markiert und korrigiert. Die Übersetzung „Zähler durch Nenner“ wird – da sie in gewissem Sinne zwar nicht falsch, aber zu diesem Zeitpunkt nicht wünschenswert ist – in Orange mit „in Ordnung“ (i. O.) korrigiert.

Bei Korrektur loggt das Widget einen Wahrheitswert – ob die Eingabe korrekt war –, den zu übersetzenden Bruch und die Eingabe als Zeichenkette.

#### Widget W6

W6 verwendet als erstes Widget die integrierte Handschrifterkennung (s. Abschnitt 6.2.1.3). Es thematisiert die Übersetzung von der Zahlwortrepräsentation (stilisiert durch die Darstellung in einer Sprechblase, vgl. Abbildung B.5) in die symbolische Schreibweise. Als Gegenstück zu W6 folgt das Widget demselben Generationsalgorithmus für neue Aufgaben und beinhaltet insbesondere keine Abstufung in der Aufgabenschwierigkeit. Zur Korrektur wird der gefragte Bruch mit dem eingegebenen verglichen. Im Falle einer falschen Antwort wird die Übersetzung der Eingabe neben dieser angezeigt, sofern sie einem existenten Bruch entspricht.

Bei Korrektur loggt das Widget die Korrektheit der Antwort, den zu übersetzenden Bruch und die Eingabe als JavaScript-Bruchobjekte.



Abbildung B.5. Widget W5 (links) & Widget W6 (rechts): Aufgaben zur Übersetzung zwischen symbolischer Schreibweise und Zahlworten (mit Korrektur einer falschen Eingabe).

### B.1.2.2 W7: Brüche aus Darstellungen ablesen

In Widget W7 erfolgt zum ersten Mal im iBook der Einsatz von abgestuften Schwierigkeiten. Die Schülerinnen und Schüler haben hier die Aufgabe, eine ikonische Darstellung des eines echten Bruches in eine symbolische umzuwandeln. Die Darstellung des Bruches ist randomisiert: Das Ganze ist entweder ein Rechteck, ein Kreis oder eine Schokolade, wobei die Darstellung am Kreis nur bei einem Nenner  $\leq 12$  verwendet wird. Die symbolische Lösung kann handschriftlich eingegeben werden; die Eingabe wird von der Handschrifterkennung ausgewertet.

Richtige Eingaben werden durch grüne Haken und die Anzeige „Das stimmt!“ oder „Richtig!“ in grüner Schriftfarbe gekennzeichnet. Falsche Antworten werden getrennt nach Zähler und Nenner bewertet. Abweichungen im Zähler bzw. Nenner um eins werden durch die Aufforderung, genauer zu zählen, korrigiert. Falls der eingegebene Bruch in derselben Darstellungsform wie die Aufgabenstellung sinnvoll darzustellen ist, wird er rechts neben der Handschrifteingabe visualisiert. Zusätzlich gibt das Widget erklärendes Feedback, indem es die Semantik der Begriffe Zähler und Nenner im Sinne der Teil-eines-Ganzen-Vorstellung am unteren Rand des Bildschirms beschreibt (vgl. Abbildung B.6).

In den zwei hinterlegten Schwierigkeitsstufen sind je Sets der Länge 5 zu bearbeiten. Sie unterscheiden sich sowohl durch die möglichen Nenner als auch durch die Art des dargestellten Bruches: In Stufe 1 sind die Stammbrüche  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  und  $\frac{1}{6}$  in zufälliger Reihenfolge abzulesen. In der zweiten Schwierigkeitsstufe besteht jedes Set aus fünf unterschiedlichen, echten Brüchen mit einem Nenner aus der Menge  $\{8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$ .

Logdaten werden bei der Anforderung einer Korrektur erfasst. Das Widget loggt jeweils die Korrektheit der Lösung, den gefragten Bruch, die Eingabe sowie die Darstellungsform (Rechteck, Kreis, Schokolade).

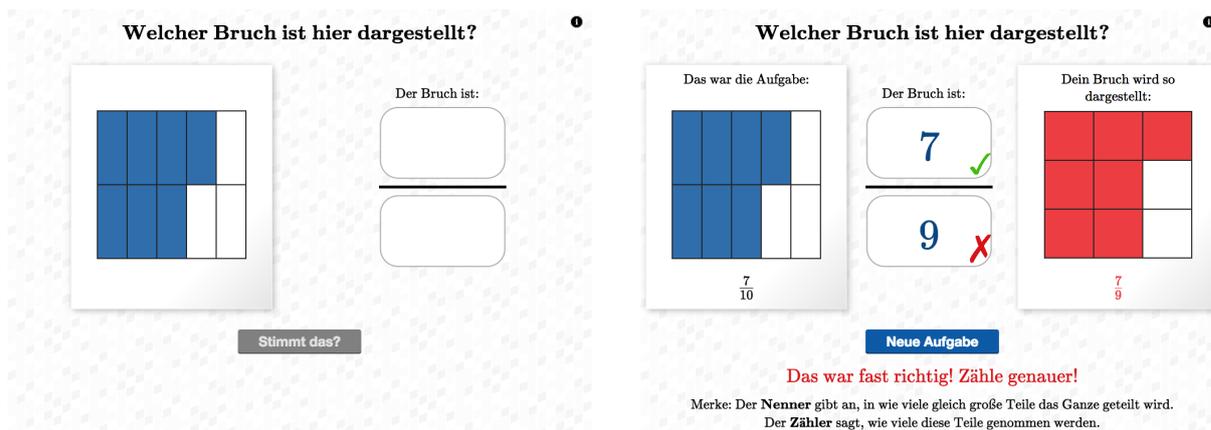


Abbildung B.6. Widget W7: Widget zum Umwandeln einer ikonischen in eine symbolische Darstellung. Aufgabe (links) und Korrektur (rechts).

In den folgenden sechs Widgets sind symbolische Repräsentationen in ikonische umzuwandeln. Die einzelnen Widgets unterscheiden sich durch die ikonische Repräsentation, in der die Brüche dargestellt werden sollen und die auch die Wahl der darzustellenden Brüche beeinflusst. Die Schwierigkeitsstufen innerhalb aller sechs Widgets unterscheiden sich hauptsächlich durch den Pool der Nenner, aus dem während der Aufgabengenerierung gezogen wird.

### B.1.2.3 W8 & W9: Visualisierung in unterteilten Ganzen

In Widgets W8 und W9 ist es die Aufgabe, einen gegebenen Bruch in einem passend vorunterteilten Rechteck (W8) bzw. Kreis (W9) zu markieren. In beiden Widgets entspricht die Anzahl der Teile, in die Rechteck bzw. Kreis unterteilt ist, stets dem Nenner des zu markierenden Bruchs. Diese Teile können durch Antippen oder Überstreichen mit dem Finger markiert werden. So markierte Teile werden vom Widget sofort blau gefärbt. Auf dem selben Weg kann ein bereits markiertes Stück wieder entfärbt werden.

Auf eine Antwort geben die Widgets Rückmeldung, ob die Eingabe richtig oder falsch war. Richtige Markierungen werden grün eingefärbt und mit einem Haken versehen. Im Falle einer falschen Antwort wird die Richtung des Fehlers angegeben („Du hast zu viel/wenig markiert“). Außerdem werden zu viel markierte Teile nach und nach rot gefärbt bzw. wird die Eingabe mit roten Teilen zu einer richtigen Antwort ergänzt. Am Rechteck ergänzt ein weißes Kreuz in den roten Teilen die Korrektur. Zusätzlich erfolgt die Angabe des markierten Bruchs in symbolischer Schreibweise (vgl. Abbildung B.7).

In jeder der drei Schwierigkeitsstufen werden fünf zufällige echte Brüche generiert. Der maximal mögliche Nenner steigt über die Niveaus hin an: In Stufe 1 ist der Nenner  $\leq 8$ , in Stufe 2  $\leq 16$  und in Stufe 3  $\leq 25$  (Widget W8) bzw.  $\leq 20$  (Widget W9).

Bei Korrektur werden die Korrektheit der Lösung, der gefragte Bruch und der markierte Bruchteil geloggt.

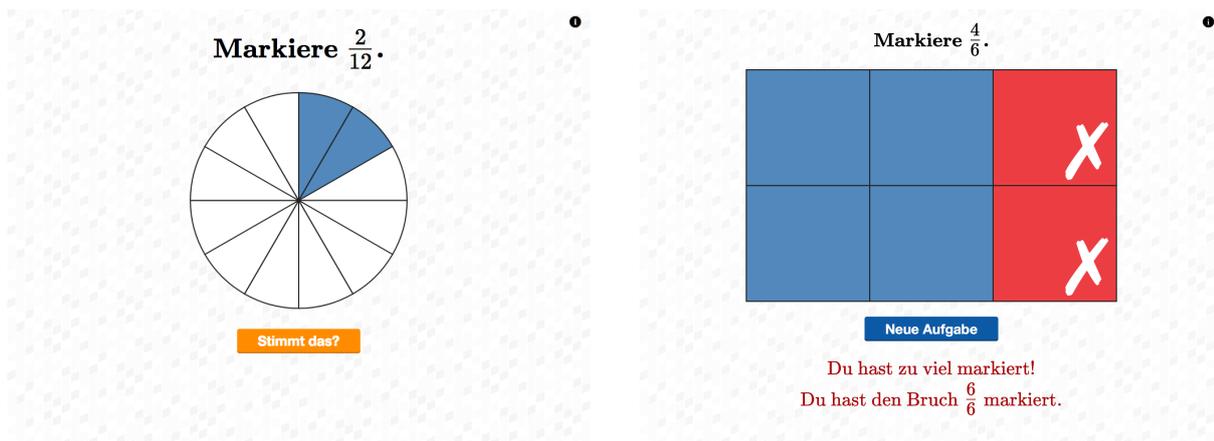


Abbildung B.7. Widgets W8 & W9: Visualisierungsaufgaben am vorunterteilten Kreis (links) und Rechteck (rechts, mit Korrektur).

Technisch sind die Teile im Rechteck als gitterförmig angeordnete HTML-Elemente, im Kreis als SVG-Pfade umgesetzt. Beides erlaubt die unkomplizierte und direkte Reaktion auf Eingaben über JavaScript-Ereignisse. Die Animationen basieren auf CSS.

#### B.1.2.4 W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierung

Widgets W10 und W11 stellen die kontinuierlichen Pendanten zu Widgets W9 bzw. W8 dar: Gegeben ist ein Bruch und ein nicht-unterteiltes Ganzes in Form eines Kreises (W10) oder eines Balkens (W11), das mit dem Finger dem Bruchteil entsprechend zu färben ist. Dazu kann die Färbung durch Ziehen mit dem Finger kontinuierlich verändert werden oder durch Tippen an der jeweiligen Stelle im Ganzen eingestellt werden. Die Widgets dienen demnach auch der Förderung eines intuitiven Größenordnungsverständnisses. Entgegen der Reihung im iBook entstand zuerst W11 als Umsetzung des dualen Repräsentationsmodell nach Carraher (1993, vgl. Abschnitt 1.3.1.3) und anschließend die Übertragung an den Kreis (W10).

Die Widgets geben textuell und farbcodiert Feedback, ob die Eingabe als richtig oder falsch gewertet wurde. Lösungen gelten als korrekt, wenn die betragsmäßige Abweichung von der exakten Lösung 4% bzw. 6.25% nicht überschreitet. Lösungen mit einem Fehler von maximal 0.5% werden mit „Perfekt!“ korrigiert. Das Feedback wird ergänzt, indem eine dem Nenner entsprechende Unterteilung des Ganzen in gleich große Stücke eingeblendet wird. Zusätzlich zeigen die Widgets die Abweichung zur exakten Lösung in Rot bzw. Grün (vgl. Abbildung B.8).

In beiden Widgets sind drei Schwierigkeitsstufen vorgesehen, wobei sich die erste zwischen den beiden Widgets nicht unterscheidet. In allen Levels sind echte Brüche zu visualisieren. Sets der ersten Stufe bestehen jeweils aus fünf paarweise wertungleichen Brüchen mit Nenner 2, 4 oder 8. Sets der Stufe zwei ebenfalls Länge 5 und bestehen am Kreis (W10) aus paarweise wertungleichen Brüchen mit Nenner 2, 3, 4, 6 oder 12 – also aus Brüchen, die in einer Zwölftel-Einteilung vorkommen, wie sie von einer Analoguhr bekannt ist. Am Balken (W11) besteht der Nennerpool in Stufe zwei aus den Brüchen 2, 5 und 10.

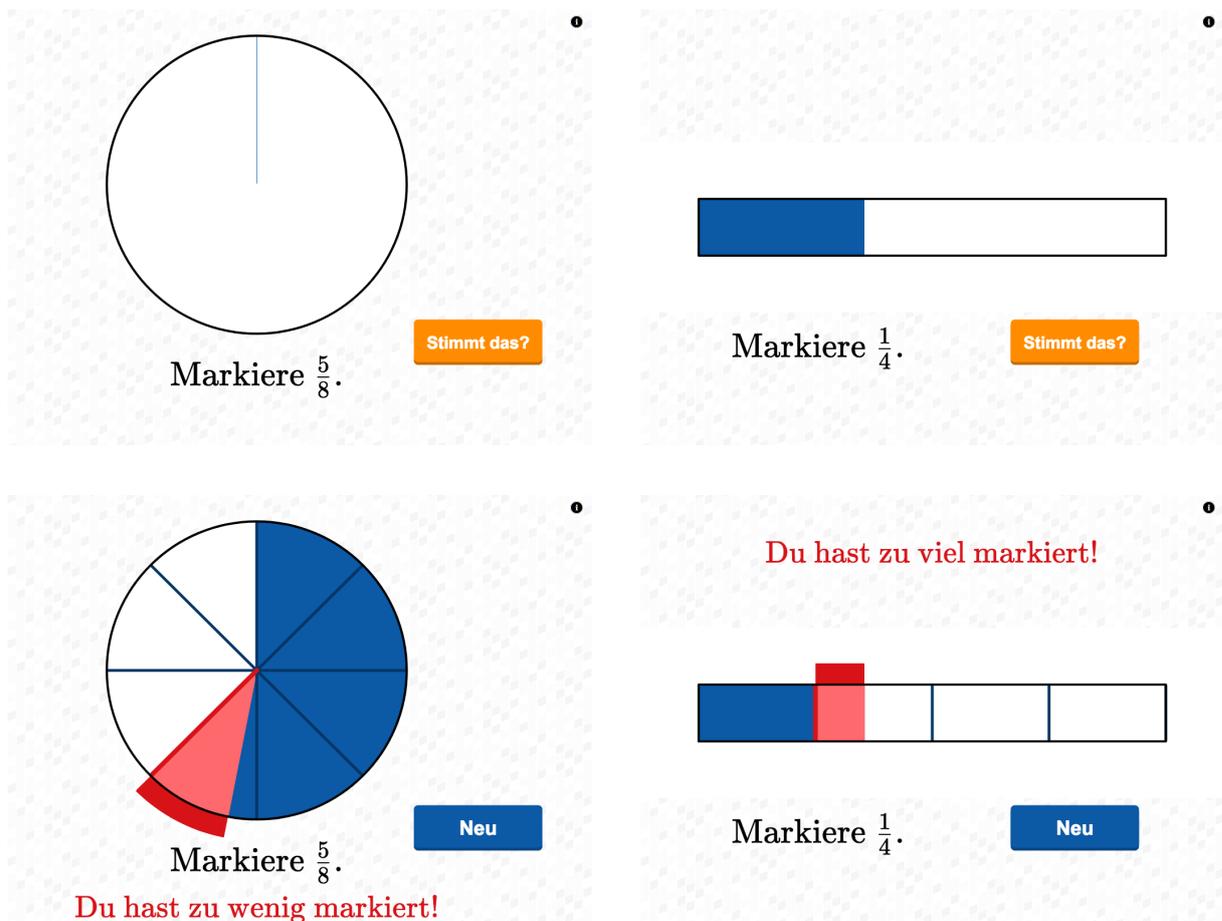


Abbildung B.8. Widgets W10 & W11: Kontinuierliche Visualisierungsaufgaben am Kreis (links) und Balken (rechts) mit (unten) und ohne Korrektur (oben).

Auf Schwierigkeitsstufe 3 generieren beide Widgets Sets bestehend aus zehn paarweise wertungleichen Brüchen. Bei der Erzeugung jedes Bruches wird in beiden Widgets ein Zahlenpool zufällig gewählt, aus dem der Nenner per Zufall gezogen wird. In Widget W10 wird zwischen den Pools  $\{5, 7, 11\}$  und  $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$  entschieden, in W11 zwischen den drei Pools  $\{2, 4, 8, 12\}$ ,  $\{3, 6, 9\}$  (3 mit doppelter Wahrscheinlichkeit) und  $\{5, 7, 10, 11\}$ .

Bei Korrektur speichern die Widgets einen Wahrheitswert, ob die Lösung der Schülerin oder dem Schüler als korrekt angezeigt wurde, den gefragten Bruch als Zähler-Nenner-Paar, den markierten Anteil als Gleitkommazahl und eine Aufzeichnung der während der Aufgabenbearbeitung auf den Touchscreen vollführten Fingerbewegungen.

Beide Widgets wurden von Bernhard Werner in CindyJS entwickelt und vom Autor um die Aufzeichnung der Fingerbewegungen erweitert. Die Fingerbewegungen werden als Liste von Fingerzügen (*Strokes*) gespeichert. Ein Fingerzug auf dem Touchscreen wird hierbei als Liste von Punkt-Zeit-Paaren codiert. Die Koordinaten der gespeicherten Punkte geben die Position der Fingerberührung im CindyJS-Koordinatensystem an und die Sekunden (mit drei Nachkommastellen), die seit der ersten Bildschirmberührung seit Aufgabenstart vergangen sind. Zur Reduktion des Speicherbedarfs werden die Strokes geglättet. Um Pausen zu bewahren, wird der Fingerzug vor der Glättung an Stellen, an denen mindestens eine halbe

Sekunde verweilt wurde, aufgebrochen und ein neuer, künstlicher Stroke begonnen. Zur Glättung wird eine Implementierung des Ramer-Douglas-Peucker-Algorithmus (Douglas & Peucker, 1973; Ramer, 1972) verwendet. Jeder einzelne Stroke wird mit einer Toleranz von 2,5 Pixel geglättet. Das bedeutet, dass aus der Liste an Punkten schrittweise Punkte ausgeschlossen werden, sofern durch den Ausschluss eines Punktes sich der so größer definierte Streckenzug nicht mehr als 2,5 Pixel von dem ursprünglichen unterscheidet (vgl. Abbildung 6.18).

### B.1.2.5 W12: Visualisierungen im Rechteck erstellen

Widget W12 ähnelt W8: ein gegebener Bruch soll in einem Rechteck dargestellt werden. Im Gegensatz zu Widget W8 kann hier die Unterteilung selbst erstellt werden. Zu diesem Zweck ist es über zwei Knöpfe + und – an beiden Seiten des Rechtecks (vgl. Abbildung B.9) möglich, die Unterteilung des Rechtecks in gleich große Stücke entlang der jeweiligen Seite zu verfeinern bzw. zu vergrößern. Anschließend kann mit dem Finger – wie schon von Widget W8 bekannt – der gewünschte Anteil markiert werden. Zwei Buttons am unten Bildschirmrand dienen dem schrittweisen bzw. vollständigen Zurücksetzen der Aufgabe.

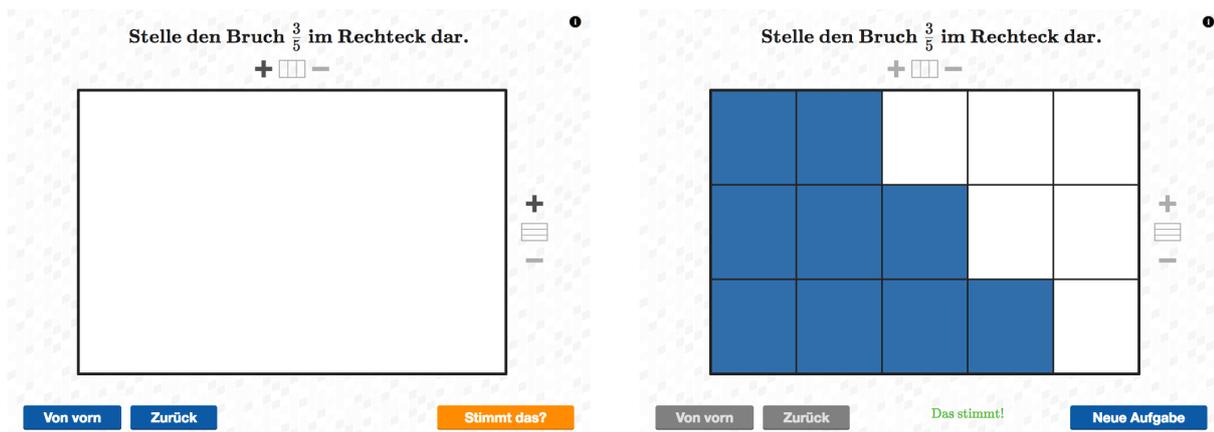


Abbildung B.9. Widget W12: Darstellen von Brüchen im Rechteck. Aufgabenstellung (links) und Korrektur (rechts).

Feedback erfolgt textuell. Das Widget korrigiert die erstellte Visualisierung und gibt bei einer korrekten Lösung zusätzlich den Hinweis, dass entlang beiden Seiten des Rechtecks unterteilt werden kann, falls nur eine Seite unterteilt wurde, obwohl eine Unterteilung in beide Richtungen effizienter gewesen wäre. Im Fall einer falschen Visualisierung wird auch zurückgemeldet, ob die erstellte Aufteilung des Ganzen in gleich große Stücke die Visualisierung des Bruches zulässt oder nicht.

Im Widget sind zwei Stufen an Schwierigkeiten implementiert. Im ersten, drei Aufgaben enthaltenden Set muss der Bruch  $\frac{1}{2}$ , einer der Brüche  $\frac{1}{3}$  oder  $\frac{2}{3}$ , und ein echter Bruch mit Nenner 5 visualisiert werden. Alle Nenner in diesem Set sind also Primzahlen, so dass für eine Minimallösung das Rechteck nur in eine Richtung unterteilt werden muss. Sets der Stufe 2 haben Länge 5 und beinhalten echte Brüche mit Nennern  $\leq 16$ , die aber nicht

gleichzeitig  $> 10$  und prim sind (Nenner dopplungsfrei). Insbesondere ist es hier je nach Nenner auch sinnvoll, die Unterteilung in beide Richtungen zu verändern.

Neben der Korrektheit der erstellten Visualisierung, dem gefragten Bruch und dem dargestellten Bruch wird bei Korrektur zusätzlich eine Zeichenkette geloggt, die den Visualisierungsprozess wiedergibt. Diese Zeichenkette wird während der Aufgabenbearbeitung erstellt und enthält – ohne Zeitstempel – die Abfolge an eingegebenen Befehlen. So steht bspw. der Prozessstring HC:1,1. für die Halbierung des Rechtecks in horizontaler Richtung (H) und anschließender Färbung der oberer Hälfte (C:1,1.). Die unterschiedlichen aufgezeichneten Operationen sind Tabelle B.1 zu entnehmen.

Tabelle B.1

*Codierung der Interaktionen im Prozessstring der Logs aus Widget W12.*

Element des Prozessstrings	Bedeutung
H	Hinzufügen einer horizontalen Linie
h	Entfernen einer horizontalen Linie
V	Hinzufügen einer vertikalen Linie
v	Entfernen einer vertikalen Linie
U	Widerufen der vorhergehenden Aktion anderer Art
R	Löschen aller Linien & getätigten Markierungen
C:x,y.	Füllen des Feldes in Spalte $x$ , Reihe $y$ mit der Farbe $C$ (0 = weiß, 1 = blau).

### B.1.2.6 W13: Visualisierungen in diskreten Mengen

In Widget W13 ist von einer gegebenen Anzahl an diskreten Objekte (Äpfel, Orangen, Figuren, Peperoni oder Eier) der gegebene Bruchteil auszuwählen, indem man den entsprechenden Anteil umrandet. Zur Umrandung zeichnet das Widget die Bewegungen eines Fingers auf dem Bildschirm nach. Die so entstehende Linie wird kontinuierlich geglättet, indem der vorletzte aufgenommene Punkt durch das arithmetische Mittel der letzten drei aufgezeichneten Punkt ersetzt wird (s. Abbildung 6.20).

Beim Heben des Fingers vom Touchscreen wird die gezeichnete Markierung automatisch auf direktem Weg zum Startpunkt der Markierung geschlossen. Anschließend wird überprüft, welche Objekte innerhalb der Umrandung liegen; diese werden mit einem blauen Kreis hinterlegt. Objekte werden als umrandet erkannt, sobald ihre Mittelpunkte innerhalb des aufgezeichneten Polygons liegen (Überprüfung über die Windungszahl, s. Sunday, 2012). Eine bestehende Markierung kann erweitert werden, indem eine neuen Linie innerhalb des bestehenden Polygons begonnen wird. Beginnt man außerhalb der bestehenden Markierung, so wird diese verworfen. Einzelne Objekte können zudem durch Antippen ausgewählt werden.

Im Widget sind zwei Schwierigkeitsstufen hinterlegt. In der ersten Stufe (Setlänge 3) entspricht der Nenner des zu markierenden Bruchs der Anzahl der Objekte auf dem Bildschirm.

In der zweiten Schwierigkeitsstufe (Setlänge 5) entspricht die Anzahl der angezeigten Objekte einem Vielfachen des Nenners. Dabei besteht das Ganze mindestens aus dem Doppelten des Nenners und maximal aus 32 Objekten. Dies stellt sicher, dass der Raum zwischen allen Objekten für das Umkreisen ausreichend ist. In beiden Stufen ist der Nenner stets  $\leq 8$ .

Als erklärendes Feedback werden die zu Beginn zufällig auf dem Bildschirm verteilten Objekte in ein Raster sortiert. Jede Spalte entspricht dabei dem Stammbruch. Diese Sortierung erfolgt animiert und leicht zeitversetzt, so dass sich die Elemente nach und nach anordnen. Durch eine Klammer wird die korrekte Anzahl an Spalten gekennzeichnet. Je nach Richtung des Fehlers werden entweder zu viel umrandete Objekte oder die nicht ausgewählten Objekte in den geklammerten Spalten rot gekennzeichnet (vgl. Abbildung B.10). Eine textuelle Bewertung der Eingabe vervollständigt das Feedback. Die in dem Widget verwendeten Animationen machen sich die vom Autor implementierte Übertragung der CSS3-Animation für CindyJS zunutze (s. Abschnitt 6.2.4).

Bei Korrekturanforderung werden der gefragte Bruch, die Anzahl der angezeigten Objekte, die Anzahl der umrandeten Objekte und die Tatsache, ob diese dem Bruchteil entsprechen oder nicht (wahr/falsch) geloggt.

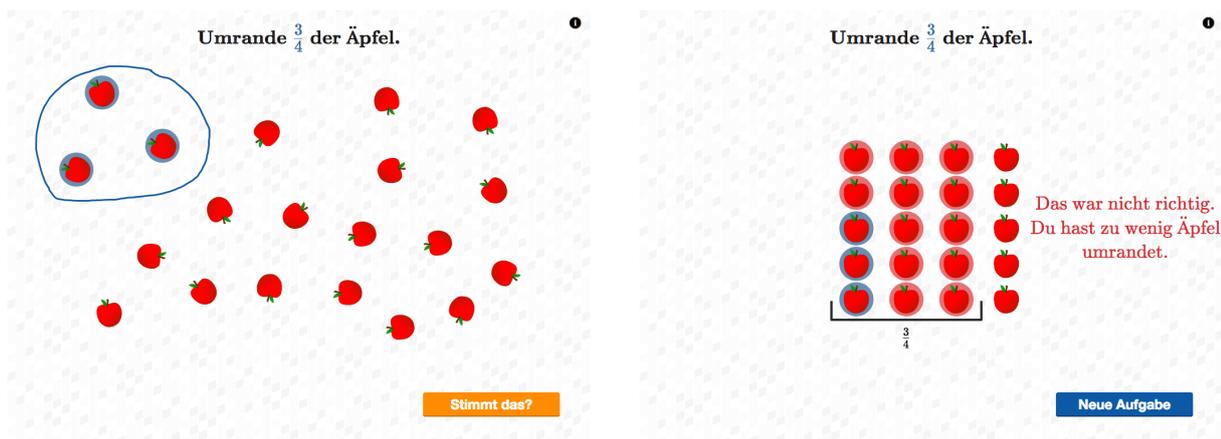


Abbildung B.10. Widget W13: Anteile einer diskreten Menge umranden. Darstellung einer Aufgabe mit Selektion dreier Objekte (links) und Korrektur dieser Eingabe.

### B.1.2.7 W14: Memory – symbolische und ikonische Repräsentationen (Programmierung: Bernhard Werner)

Das Kapitel endet mit Widget W14 (s. Abbildung B.11), einer Adaption des Spiels „Memory“. Es ist das einzige Widget im iBook mit ausgeprägtem Spielcharakter. Insbesondere ist eine zweite Spielerin oder ein zweiter Spieler nötig. Anstelle von zwei gleichen Bildern sind jedoch je ein Bruch in symbolischer Schreibweise und eine Visualisierung in einem Kreis oder Rechteck zusammengehörig. Dabei treten nur echte Brüche mit Nenner  $\leq 9$  auf. Jedes Spiel besteht aus sechs Paaren.

Das Widget verwendet weder den Karteikasten noch den DataManager; es werden demnach keinerlei Nutzungsdaten erfasst.

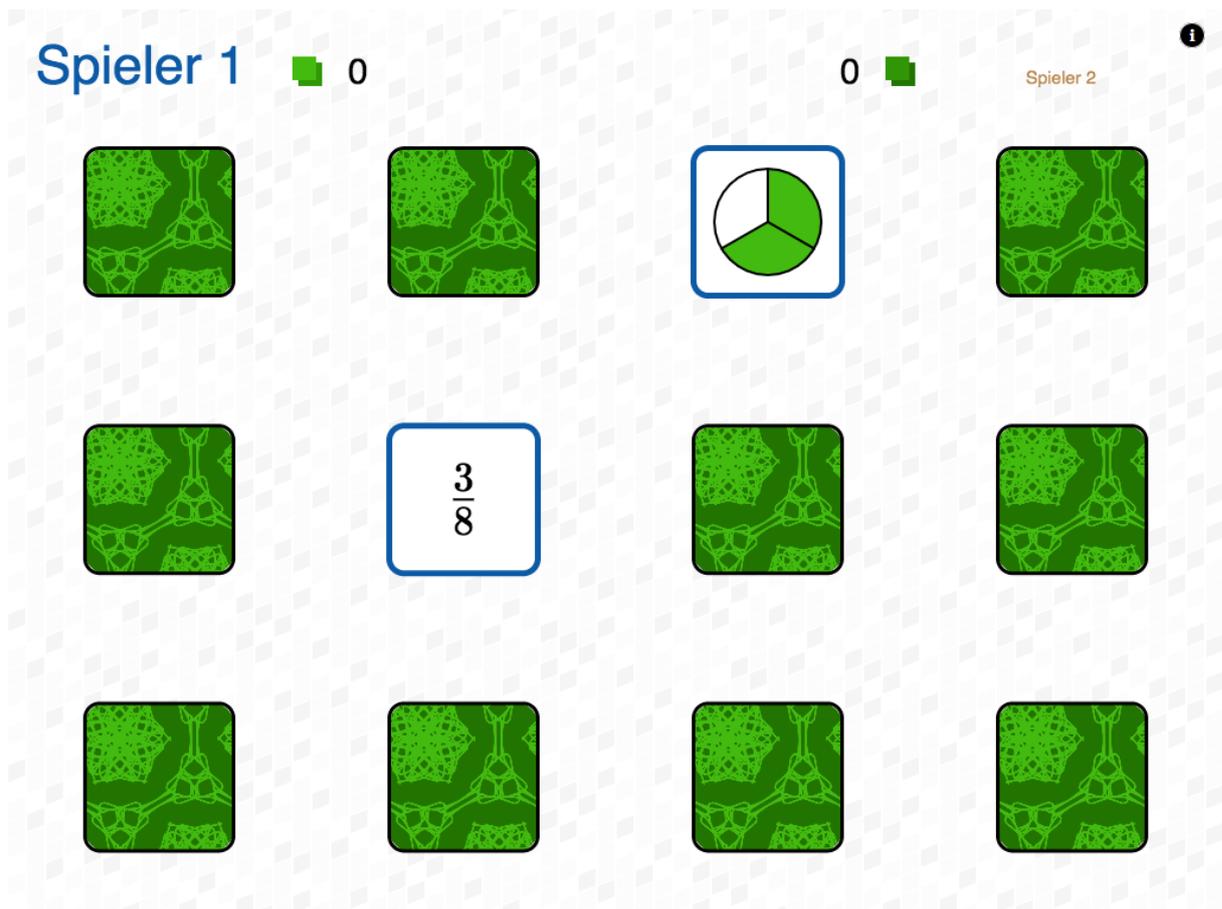


Abbildung B.11. Widget W14: Memory.

## B.2 Kapitel 2: „Den Anteil von etwas berechnen“ – Teil eines Ganzen

Das zweite Kapitel des iBooks dient der Einführung von ersten Rechenoperationen mit Bruchzahlen: die Berechnung eines Anteils über das Schema „Dividieren durch den Nenner, Multiplizieren mit dem Zähler“ und die Umkehrung dieser Operation.

### B.2.1 Einführungsteil I

Zunächst führt das iBook die Operation „Den Anteil von etwas berechnen“ ein.

#### B.2.1.1 W15: Bruchteil einer 1000 ml-Karaffe bestimmen (Programmierung: Frank Reinhold)

Ein interaktives Diagramm dient der Einführung der Operation. Das Widget führt die Rechnung  $\frac{a}{b}$  von 1000 ml sind  $X$  ml schrittweise vor. Als Veranschaulichung dient dabei eine Karaffe mit Wasser. Der Wasserstand in der Karaffe kann mit dem Finger in Schritten des wählbaren Nenners (Kreise oben) verändert werden. Das Widget aktualisiert automatisch

Rechnung und Ergebnis. Die einzelnen Schritte der Rechnung können über die Buttons „Weiter“ und „Zurück“ ein- bzw. ausgeblendet werden (vgl. Abbildung B.12).

Als interaktives Diagramm stellt Widget W15 keine zu beantwortenden Aufgaben. Insbesondere kommt der Karteikasten nicht zum Einsatz. Bei Veränderung des Wasserstandes oder des Nenners und bei Betätigung eines der Buttons werden als Prozessdaten der eingestellte Wasserstand und die Anzahl der angezeigten Rechenschritte erfasst.

Frank Reinhold setzte das Widget in CindyJS um.

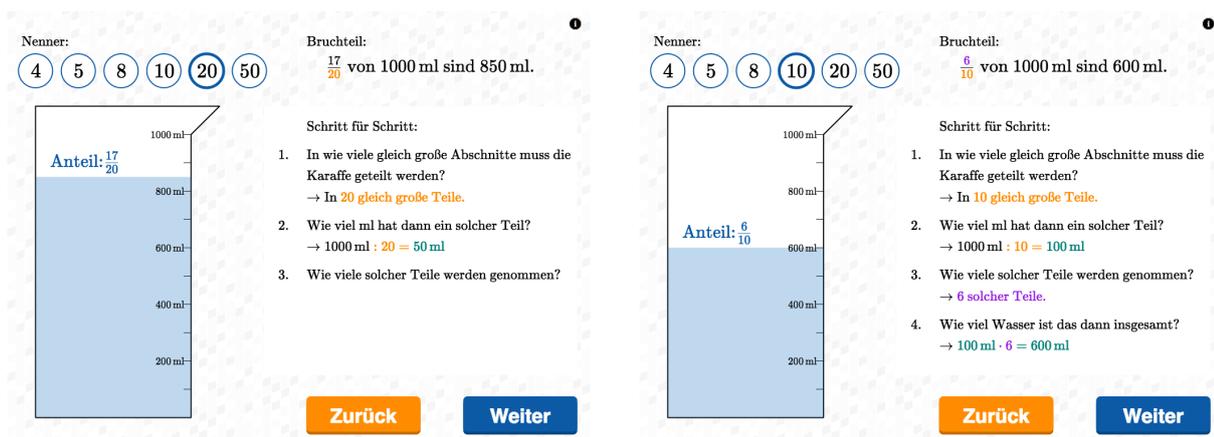


Abbildung B.12. Widget W15: Den Bruchteil einer 1000 ml-Karaffe bestimmen.

### B.2.1.2 W16: Wachsender Lückentext – Den Bruchteil von einer Strecke berechnen

Widget W16 dient der Übertragung des in W15 anhand des Wasserstands und auf der iBookseite mithilfe einer Strecke beschriebenen Vorgehens zur Berechnung eines Anteils von einem gegebenen Ganzen auf ein Verfahren ohne den Rückgriff auf eine Hilfszeichnung. Dazu werden exemplarisch  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke berechnet. Das Widget zielt dabei auf das Vorgehen „Durch den Nenner dividieren, mit dem Zähler multiplizieren“ ab, indem es nach Bedeutung von Zähler und Nenner fragt und die weiteren Rechenschritte erst nach korrekter Eingabe der numerischen Antwort anzeigt (der Lückentext „wächst“, s. Abbildung B.13). Dazu kommt die iOS-Bildschirmtastatur zum Einsatz. Falsche Antworten werden rot hinterlegt. Bei Zifferneingabe in die Kästchen wird die jeweils eingegebene Zahl geloggt.

Der Rechenweg wird anschließend im iBooktext in einem Merksatz wiederholt.

## B.2.2 Übungsteil I

### B.2.2.1 W17: Den Anteil eines Ganzen berechnen

Widget W17 stellt Aufgaben, in denen rein symbolisch der Anteil eines Ganzen zu berechnen ist (vgl. Abbildung B.14). Hierfür stehen zum ersten Mal im iBook abgestufte Lösungshilfen (vgl. Tabelle B.2) zur Verfügung. Die Eingabe der Lösung erfolgt handschriftlich.

## Aufgabe 16

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
In wie viele gleich große Stücke wird das Ganze, also die 21 m, geteilt?

## Aufgabe 16

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
In wie viele gleich große Stücke wird das Ganze, also die 21 m, geteilt?  7  
Dann ist ein solches Stück  
 $21 \text{ m} : 7 = 3 \text{ m lang.}$   
Wie viele dieser gleich großen Stücke werden genommen?

## Aufgabe 16

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
In wie viele gleich große Stücke wird das Ganze, also die 21 m, geteilt?  7  
Dann ist ein solches Stück  
 $21 \text{ m} : 7 = 3 \text{ m lang.}$   
Wie viele dieser gleich großen Stücke werden genommen?  5  
Dann ist der Bruchteil  
 $3 \text{ m} \cdot 5 = 15 \text{ m lang.}$

Abbildung B.13. Widget W16: Wachsender Lückentext. Schrittweises Lösen der Aufgabe „Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke“.

Als Feedback wird angezeigt, ob die Antwort richtig oder falsch war. Die Rückmeldung ist dabei farblich angepasst (richtige Antwort – grün, falsche Antwort – rot). Bei einer falschen Antwort gibt das Widget die Möglichkeit, dieselbe Aufgabe direkt erneut zu bearbeiten. Dabei kann eine Lösungshilfe zu Hilfe genommen werden (Texteinblendung „Möchtest du einen Tipp?“). Die Hinweiskarte wird automatisch eingeblendet, um die Nutzung zu fördern. Im Gegensatz zu einem Aufruf während der Aufgabenbearbeitung enthält die Karte zusätzlich einen Button, um sofort eine neue Aufgabe anzufordern.

Abbildung B.14. Widget W17: Den Bruchteil von etwas berechnen, Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von hohem Unterstützungsgrad (rechts).

Im Widget sind drei Schwierigkeitsstufen hinterlegt. Das Ganze wird in allen Stufen als ein zufälliges Vielfaches des Nenners gewählt (maximal das Zehnfache). Zunächst sind zwei Aufgaben mit Stammbrüchen (Nenner  $\leq 12$ ) zu bearbeiten – hier ist das Ganze folglich nur durch den Nenner zu dividieren. In Stufe 2 werden die Brüche auf echte Brüche erweitert, so dass beide Schritte des Rechenwegs durchzuführen sind (selbe Einschränkung für den Nenner; fünf Aufgaben). In den Sets der Stufe 3, welche jeweils fünf Brüche enthalten, sind die beteiligten Zahlen größer als in Stufe 2 (Nenner  $\leq 20$ ).

Das Widget loggt bei zwei Ereignissen Daten: Bei Korrekturanforderung werden die Korrektheit der Eingabe, der eingegebene Bruch und die Aufgabe als Bruch-Ganzes-Paar geloggt. Beim Aufrufen einer Lösungshilfe loggt das Widget den Grad der Unterstützung, die Aufgabe und – falls vorhanden – die Eingabe. Die Logs werden über einen String „solution“ respektive „tip“ voneinander unterscheidbar gemacht.

Tabelle B.2

Gestufte Lösungshilfen in Widget W17 am Beispiel „Rechne aus.  $\frac{8}{9}$  von 36“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	In wie viele Stücke wird das Ganze, also die 36 geteilt? Wie groß ist ein solches Stück?
 Mittel	Die 36 wird in 9 Stücke geteilt. Jedes dieser Stücke ist: $36 : 9 = 4$ . Wie viele solche Stücke werden genommen?
 Hoch <sup>a</sup>	Die 36 wird in 9 Stücke geteilt. Jedes dieser Stücke ist: $36 : 9 = 4$ . Es werden 8 solche Stücke genommen. Der Bruchteil ist also $(36 : 9) \cdot 8 = 4 \cdot 8$ .

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich wird die dargestellte Aufgabe zu  $\frac{8}{9}$  von  $36 = (39 : 9) \cdot 8$  ergänzt.

### B.2.2.2 W18: Den Anteil eines Ganzen berechnen (kontextuiert)

Widget W18 ist eine kontextuierte Variante von W17. Aufgabe und Lösungshilfen werden in einen von vier möglichen Kontexten (Video – zeitliche Länge, Reise – zeitliche Länge, Müsli – Gewicht, Baum – räumliche Länge; vgl. Tabelle B.3) gekleidet (vgl. Tabelle B.4 für die Lösungshilfen).

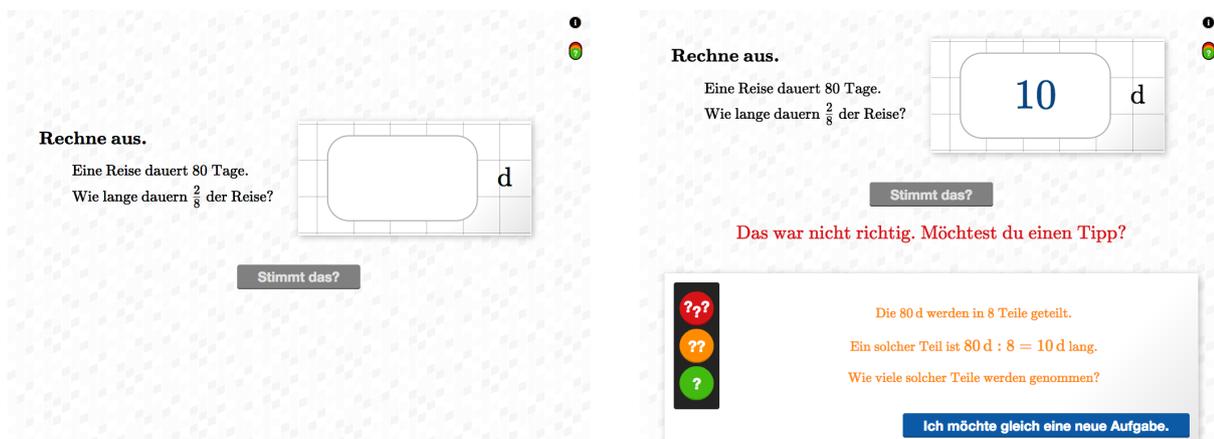


Abbildung B.15. Widget W18: Den Bruchteil von etwas berechnen (kontextuiert), Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von mittlerem Unterstützungsgrad (rechts).

Die Aufgabengenerierung folgt dem Algorithmus von Widget W17. Zusätzlich wird bei jeder Aufgabe ein Kontext zufällig ausgewählt, der sich vom Kontext der vorherigen Aufgabe im selben Set unterscheidet.

Wie Widget W17 gibt auch W18 die Möglichkeit, eine falsch beantwortete Aufgabe direkt im Anschluss erneut zu bearbeiten.

Die Datenerfassung entspricht Widget W17. Dabei wird das Bruch-Ganzes-Tupel, das die Aufgabe beschreibt, um den Kontext zu einem Tripel erweitert.

Tabelle B.3

Widget W18: Den Anteil eines Ganzen berechnen. Dieselbe Aufgabe ( $\frac{1}{8}$  von 24) in den unterschiedlichen Kontexten.

Kontext	(interne ID)	Aufgabentext
Video	0	Ein Video dauert 24 Minuten. Wie lange dauert $\frac{1}{8}$ des Videos?
Reise	1	Eine Reise dauert 24 Tage. Wie lange dauert $\frac{1}{8}$ der Reise?
Müsli	2	Eine Müslipackung wiegt 24 Gramm. Wie schwer ist $\frac{1}{8}$ der Müslipackung?
Baum	3	Ein Baumstamm ist 24 Meter lang. Wie lang ist $\frac{1}{8}$ des Baumstamms?

Tabelle B.4

Gestufte Lösungshilfen in Widget W18 am Beispiel „Rechne aus. Ein Video dauert 12 Minuten. Wie lange dauern  $\frac{10}{12}$  des Videos?“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	In wie viele Teile wird das Ganze, also die 12 Minuten geteilt? Wie lange ist ein solches Teil?
 Mittel	Die 12 Minuten werden in 12 Teile geteilt. Ein solcher Teil ist $12 : 12 = 1$ min lang. Wie viele solche Teile werden genommen?
 Hoch	Die 12 Minuten werden in 12 Teile geteilt. Ein solcher Teil ist $12 \text{ min} : 12 = 1 \text{ min}$ lang. Es werden 10 solcher Teile genommen. Der Bruchteil ist also $(12 \text{ min} : 12) \cdot 10 = 1 \text{ min} \cdot 10$ lang.

## B.2.3 Einführungssteil II

Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit der Rückwärtsrechnung, in der vom gegebenen Bruch- und Anteil auf das ursprüngliche Ganze geschlossen werden soll. Die Einführung erfolgt zunächst über den Spezialfall Stammbrüche, die an dieser Stelle im iBook definiert werden. Die Rückwärtsrechnung mit Stammbrüchen kann in Widget W19 geübt werden. Anschließend wird das Vorgehen auf allgemeine Brüche erweitert, im iBooktext mit Unterstützung einer Visualisierung beschrieben, mit einem Lückentextwidget W20 auf den Rechenweg abstrahiert und in einem Merksatz festgehalten. Zum Abschluss dient eine kontextuierte (W21) und eine rein symbolische Aufgabe (W22) dem Üben.

### B.2.3.1 W19: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert, nur Stammbrüche)

Widget W19 thematisiert die Rückwärtsrechnung im Spezialfall Stammbrüche und stellt kontextuierte Aufgaben. Die vier Kontexte (Video, Reise, Müsli, Baum) entsprechen denen von Widget W18 (s. Abschnitt B.2.2.2). Die ganzzahlige Antwort wird in ein Feld der Handschrifterkennung eingetragen. Feedback erfolgt textuell. Jeweils farbcodiert wird zurückgemeldet, ob die eingegebene Zahl dem tatsächlichen Ganzen entspricht. Ist dies nicht der Fall, wird das richtige Ganze samt Rechenweg eingeblendet.

Rechne aus.  $\frac{1}{8}$  eines Baumstamms ist 5 Meter lang. Wie lang ist der ganze Baumstamm?

Rechne aus.  $\frac{1}{8}$  eines Baumstamms ist 5 Meter lang. Wie lang ist der ganze Baumstamm?

Stimmt das?

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig. Die richtige Antwort ist 40 Meter.  
 $5\text{m} \cdot 8 = 40\text{m}$

Abbildung B.16. Widget W19: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert, nur Stammbrüche), Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Das Widget arbeitet nicht adaptiv. Alle Aufgaben werden in Sets der Länge 5 als Stammbrüche mit Nenner  $\leq 8$  und einem zufälligen ganzzahligen Anteil  $\leq 10$  generiert. Im Falle des Kontextes „Müsli“ wird der Anteil verzehnfacht, um unrealistische Aufgaben mit zu kleinen Portionen zu vermeiden.

Als Logdaten erfasst das Widget bei Korrekturanforderung die Aufgabencharakteristika (Bruch, gefragtes Ganzes, Kontext) und die Eingabe sowie deren Korrektheit.

### B.2.3.2 W20: Wachsender Lückentext – Zurück aufs Ganze schließen

In Widget W20 ist eine Rechnung als wachsender Lückentext in zwei Schritten durchzuführen. (vgl. Widget W16). Die durchzuführende Rechnung lautet: „Wenn  $\frac{5}{7}$  einer Strecke 15 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke?“ (s. Abbildung B.17).

**Aufgabe 20**

Wenn  $\frac{5}{7}$  einer Strecke 15 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke? Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
 Wie viele gleich großen Stücke wurden genommen? 5

Dann ist ein solches Stück

$21\text{ m} : 5 = 3\text{ m lang.}$

In wie viele solche 3 m langen Stücke wurde das unbekannte Ganze geteilt? 7

**Aufgabe 20**

Wenn  $\frac{5}{7}$  einer Strecke 15 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke? Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
 Wie viele gleich großen Stücke wurden genommen? 5

Dann ist ein solches Stück

$21\text{ m} : 5 = 3\text{ m lang.}$

In wie viele solche 3 m langen Stücke wurde das unbekannte Ganze geteilt? 7

Dann ist das Ganze

$3\text{ m} \cdot 7 = 21\text{ m lang.}$

**Aufgabe 20**

Wenn  $\frac{5}{7}$  einer Strecke 15 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke? Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:  
 Wie viele gleich großen Stücke wurden genommen? 5

Dann ist ein solches Stück

$21\text{ m} : 5 = 3\text{ m lang.}$

In wie viele solche 3 m langen Stücke wurde das unbekannte Ganze geteilt? 7

Dann ist das Ganze

$3\text{ m} \cdot 7 = 21\text{ m lang.}$

Abbildung B.17. Widget W20: Wachsender Lückentext. Schrittweises Lösen der Aufgabe „Wenn  $\frac{5}{7}$  einer Strecke 15 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke?“.

## B.2.4 Übungsteil II

Der zweite Übungsteil im Kapitel beinhaltet zwei interaktive Aufgaben, in denen eingekleidete bzw. rein symbolische Aufgaben gelöst werden können.

### B.2.4.1 W21: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert)

Der Rechnungstyp „Zurück aufs Ganze schließen“ kann in W21 kontextuiert geübt werden. Dazu steht eine Aufgabe ähnlich zu Widget W19 zur Verfügung, welche die Einschränkung auf Stammbrüche von W19 aufhebt und sich auf einen Kontext konzentriert: die Länge einer Strecke (vgl. Abbildung B.18). Zu den Aufgaben stehen gestufte Lösungshilfen (vgl. Tabelle B.5) zur Verfügung.

Abbildung B.18. Widget W21: Zurück aufs Ganze schließen (kontextuiert), Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von hohem Unterstützungsgrad (rechts).

Tabelle B.5

Gestufte Lösungshilfen in Widget W21 am Beispiel „Rechne aus. Wenn  $\frac{2}{11}$  einer Strecke 4 m sind, wie lang ist dann die ganze Strecke?“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
Gering	Die Strecke wurde in gleich große Stücke geteilt. Es wurden 2 solche Stücke genommen. Wie lang ist ein solches Stück?
Mittel	2 Stücke sind 4 m lang. Ein Stück ist also $4 \text{ m} : 2 = 2 \text{ m}$ lang. Der Nenner sagt, in wie viele solche Stücke die ganze Strecke geteilt wurde. Wie lang ist also die ganze Strecke?
Hoch	2 Stücke sind 4 m lang. Ein Stück ist also $4 \text{ m} : 2 = 2 \text{ m}$ lang. Die ganze Strecke wurde in 11 solche Stücke geteilt. Also ist die ganze Strecke $11 \cdot 2 \text{ m}$ lang.

Im niedrigsten Anforderungsniveau bestehen die Aufgaben aus Stammbrüchen und aus einem zufälligen ganzzahligen Ganzen  $\leq 10$  (Setlänge 2). Die beiden verbleibenden Schwierigkeitsstufen unterscheiden sich nur durch den Pool der möglichen Nenner. Die Setlänge beträgt jeweils 5, das Ganze wird stets als zufälliges ganzzahliges Vielfaches des Zählers gewählt. Die generierten Brüche sind echt und haben in Stufe 2 einen Nenner  $\leq 12$  und in Stufe 3 einen Nenner  $\leq 20$ .

Die Datenerfassung entspricht Widget W17.

### B.2.4.2 W22: Zurück aufs Ganze schließen

Das letzte Widget im Kapitel, Widget W22, stellt eine kontextfreie Variante von Widget W21 und die Umkehrung von Widget W17 dar: Es ist bei gegebenem Bruch- und Anteil auf das ursprüngliche Ganze zu schließen; die beteiligten Zahlen treten allesamt einheitenlos auf. Die Aufgabengenerierung folgt denselben Regeln wie Widget W21 – ohne die zufällige Wahl eines Kontextes. Im Gegensatz zum kontextuierten Pendant bietet das Widget allerdings *keine* Lösungshilfen. Dementsprechend werden Logdaten nur bei Korrektur erhoben und speichern Korrektheit, Eingabe und Aufgabe als Bruch-Ganzes-Paar. Als Feedback gibt das Widget eine textuelle Rückmeldung, ob die Eingabe korrekt war oder nicht. Im Falle einer falschen Eingabe wird der korrekte Rechenweg angezeigt (s. Abbildung B.19).

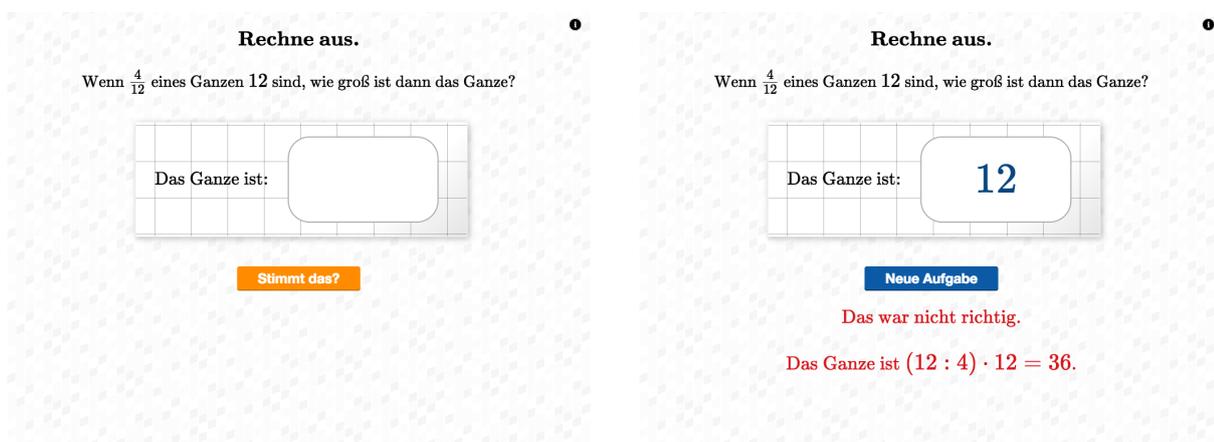


Abbildung B.19. Widget W22: Zurück aufs Ganze schließen, Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

## B.3 Kapitel 3: „Pizza und Schokolade verteilen“ – Teil mehrerer Ganzer

Im dritten Kapitel des iBooks werden Brüche als *Teile mehrerer Ganzer* eingeführt und es wird die Gleichwertigkeit des Teilaspekts zum Teilaspekt *Teil eines Ganzen* des vorherigen Kapitels motiviert.

### B.3.1 Einführungsteil I

#### B.3.1.1 W23: Pizza verteilen (Programmierung: Bernhard Werner)

Widget W23 motiviert die Gleichwertigkeit von „ $\frac{3}{4}$  einer Pizza“ und „ $\frac{1}{4}$  von drei Pizzen“. Das Widget ist eine Übertragung einer aus der Literatur bekannte Aufgabenstellung (Padberg, 2009; Streefland, 1991; Winter, 1999) in ein CindyJS-Widget (Programmierung: Bernhard Werner). In der interaktiven Aufgabe ist einem fiktiven Pizzabäcker Donatello zu helfen, drei Pizzen auf vier Gäste (im Widget durch Teller symbolisiert) zu verteilen. Diese Aufgabe wird auf drei unterschiedliche Arten und Weisen gestellt. Zunächst soll jede Pizza einzeln

aufgeteilt werden. Die Aufgabe wird iteriert, indem zunächst wieder eine, dann zwei Pizzen gleichzeitig zu verteilen sind. Schließlich erscheinen die drei Pizzen zu derselben Zeit.

Die Pizzen im Widget unterscheiden sich von Iteration zu Iteration durch den Belag, der für jede Stufe aus einer Menge von zehn vorgefertigten Belägen zufällig gewählt wird. Mit dem Finger können die einzelnen Pizzen zerschnitten werden, indem man den Finger von außen durch die Pizza hindurchzieht (Schnitt bis zur Mitte ebenso möglich). Bei Berührung der Pizza selbst oder eines Pizzastücks kann diese bzw. dieses verschoben werden. Symbole (Messer bzw. Hand) nahe des Fingers zeigen die aktuell mit der Pizza durchgeführte Operation an (vgl. Abbildung B.20).

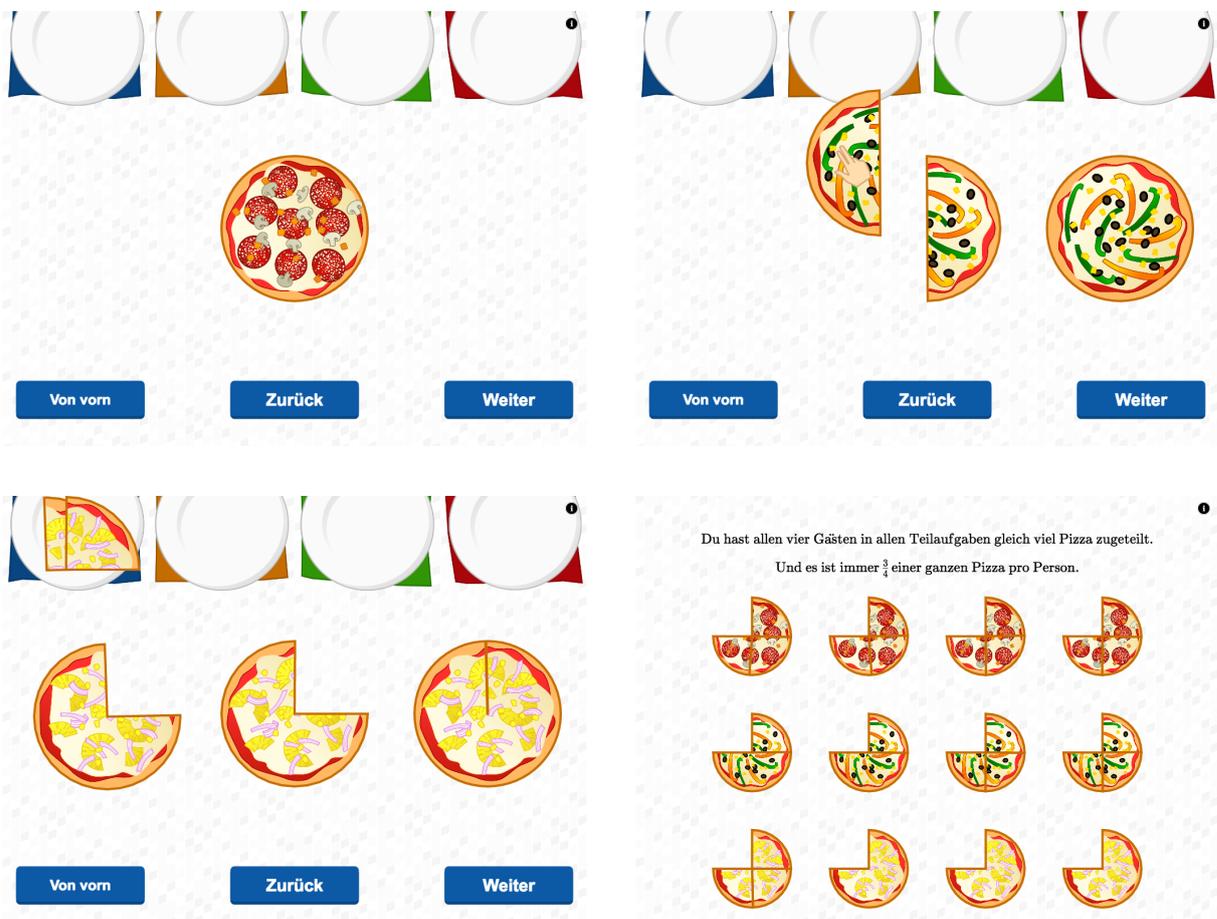


Abbildung B.20. Widget W23: Verteilen von drei Pizzen an vier Gäste. Verteilsituation mit einer Pizza, zwei und drei Pizzen gleichzeitig, sowie Endbildschirm.

Durch Drücken des Buttons „Weiter“ wird die aktuelle Verteilung überprüft. Wurde gerecht verteilt, wird zum nächsten Teil der Aufgabe fortgeschritten, ansonsten gibt das Widget den Fehler in Textform zurück. Zusätzlich stehen Buttons die „Zurück“ und „Von vorn“ zur Verfügung, um den letzten Schnitt oder die letzte Verschiebung rückgängig zu machen bzw. um die Aufgabe auf den Beginn der aktuellen Iteration zurückzusetzen.

Nach erfolgreicher Bearbeitung aller drei Iterationen thematisiert ein Endbildschirm, dass in allen Varianten jeder Gast  $\frac{3}{4}$  einer Pizza bekommen hat (vgl. Abbildung B.20). Die gezeigten

Unterteilungen der Pizzen entsprechen dabei (gerundet) den während der Aufgabenbearbeitung getätigten.

Beim Anzeigen des Endbildschirms werden Logdaten erfasst: Für jede der drei Iterationen wird für jeden Gast als Liste gespeichert, welchen Winkel (in Grad) die ihm zugeteilten Stücke aufweisen.

### B.3.1.2 W24 & W25: Schokolade verteilen

Die folgenden zwei Widgets greifen das Verteilen von Essen auf Personen erneut auf. In Widget W24 (Programmierung: Frank Reinhold, CindyJS) sollen drei Schokoladenriegel auf vier Kinder verteilt werden (vgl. Abbildung B.21). Jeder Riegel besteht dabei aus vier Schokoladenstücken. Die einzelnen Stücke können mit dem Finger bewegt werden und auf die stilisierten Stanniolpapiere der Kinder gelegt werden. Das Widget ist dabei so programmiert, dass die Stücke auf einem unsichtbaren Gitter einrasten. Feedback erfolgt in Form von farbcodiertem Text, der angibt, ob die Aufgabe richtig gelöst wurde.

Im Multiple-Choice-Widget W25 (vgl. auch Abschnitt B.1.1.1), das als Inpage-Widget eingebunden ist, sollen die Antwortmöglichkeiten „Karl bekommt  $\frac{1}{4}$  der gesamten Schokolade“ (Teil mehrerer Ganzer) und „Gabi bekommt  $\frac{3}{4}$  von einem Schokoriegel“ (Teil eines Ganzen) als richtig erkannt werden. Nach dem Einloggen der ausgewählten Antworten gibt das Widget farbcodiert Feedback. Zusätzlich wird eine Zusammenfassung unterhalb der Antwortmöglichkeiten eingeblendet, welche die richtigen Antwortmöglichkeiten auf alle Kinder verallgemeinert (s. Abbildung B.21).

Verteile die Schokolade gerecht an die vier Kinder.

Tim

Karl

Willi

Gabi

Gabi bekommt  $\frac{3}{4}$  von einem Schokoriegel.

Karl bekommt zwei Schokostücke.

Tim bekommt  $\frac{1}{4}$  von einem Schokoriegel.

Gabi fehlt ein Stück zu einem ganzen Schokoriegel.

Karl bekommt  $\frac{1}{4}$  von der gesamten Schokolade.

**Zusammenfassung**

Jedes Kind bekommt  $\frac{1}{4}$  der drei Schokoriegel. Das sind  $\frac{3}{4}$  von einem Schokoriegel!

Neu **Stimmt das?** Das war nicht richtig. noch einmal ↻

Abbildung B.21. Widgets W24 (links) & W25 (rechts, mit Korrektur): Verteilen von Schokolade an vier Kinder.

### B.3.1.3 W26: Wachsender Lückentext: Rechnung Teil mehrerer Ganzer

Die Übertragung vom Verteilen auf das Rechnen erfolgt im iBook anhand einer 1 m langen Strecke, die zunächst auf das Dreifache verlängert und anschließend durch vier geteilt wird. So erhält man den Bruchteil  $\frac{3}{4}$  m.

Widget W26, ein wachsender Lückentext (vgl. Abschnitt B.2.1.2), dient der Berechnung ohne Zuhilfenahme einer Skizze. Dazu wird die Rechnung „Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke.“ über das Schema „Multipliziert mit dem Zähler, Dividiert durch den Nenner“ schrittweise durchgeführt (s. Abbildung B.17).

#### Aufgabe 26

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke nach der anderen Methode. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:

Zuerst wird das Ganze ver-  -facht.

#### Aufgabe 26

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke nach der anderen Methode. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:

Zuerst wird das Ganze ver-  -facht.

$$21 \text{ m} \cdot 5 = 105 \text{ m}$$

Das Ergebnis teilen wir in  gleich große Stücke.

#### Aufgabe 26

Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke nach der anderen Methode. Dazu kannst du in zwei Schritten vorgehen:

Zuerst wird das Ganze ver-  -facht.

$$21 \text{ m} \cdot 5 = 105 \text{ m}$$

Das Ergebnis teilen wir in  gleich große Stücke.

$$105 \text{ m} : 7 = 15 \text{ m}$$

Abbildung B.22. Widget W26: Wachsender Lückentext. Schrittweises Lösen der Aufgabe „Bestimme  $\frac{5}{7}$  einer 21 m langen Strecke“.

Ein Merksatz im iBook wiederholt beide Rechenwege (Teil mehrerer Ganzer und Teil eines Ganzen) und zeigt durch dasselbe Ergebnis auf, dass sie gleichwertig sind.

## B.3.2 Übungsteil I

### B.3.2.1 W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer)

In Widget W27 ist wie in Widget W17 ein Anteil zu berechnen. Die rein symbolische Aufgabenstellung lautet „Anteil von Ganzem = □“. Das Widget unterscheidet sich von Widget W17 (Abschnitt B.2.2.1) hauptsächlich durch die generierten Brüche und Ganzen: durch nicht-gekürzte Brüche und passend gewählte Ganze ist eine Lösung über das „Dividieren durch den Nenner, multiplizieren mit den Zähler“-Schema des Vorkapitels nicht möglich. Vielmehr kann eine Lösung ohne einen Rückgriff auf die – zu diesem Zeitpunkt noch nicht behandelte – Grundvorstellungen des Kürzens nur über den Weg „Multiplizieren mit dem Zähler, dividieren durch den Nenner“ (Teil mehrerer Ganzer) erfolgen. Dementsprechend stellt das Widget den Arbeitsauftrag „Löse die Aufgabe wie eben gelernt“. Zur Eingabe der Lösung kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz. Logs und Feedback entsprechen denen von W17. Insbesondere wird nach einer falschen Antwort angeboten, die Aufgabe erneut mit Unterstützung durch die Lösungshilfen zu bearbeiten. Diese wurden an den neuen Rechenweg angepasst (vgl. Tabelle B.6).

Die Aufgabengenerierung läuft wie folgt ab: Zunächst wird ein zufälliger echter und vollständig gekürzter Bruch erzeugt. Zudem wird eine Zahl  $r$  per Zufall aus der Menge  $\{2, 3, 4\}$  ausgewählt. Zur Wahl des Ganzen wird der Nenner mit einer zufälligen natürlichen Zahl multipliziert, die nicht durch  $r$  teilbar ist. Der Bruch wird abschließend mit  $r$  erweitert. Dadurch wird erreicht, dass das Ganze nicht durch den Nenner des angezeigten Bruchs teilbar ist und zunächst das Ganze mit dem Zähler multipliziert werden muss, um die Aufgabe zu lösen.

Tabelle B.6

Gestufte Lösungshilfen in Widget W27 am Beispiel „Löse die Aufgabe wie eben gelernt.  $\frac{8}{12}$  von 6 = □“.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Erst Vervielfachen, danach in gleich große Stücke teilen.
 Mittel <sup>a</sup>	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{8}{12}$ von 6 = (6·8) : 12
 Hoch <sup>a</sup>	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{8}{12}$ von 6 = (6·8) : 12 = 48 : 12

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich: Ergänzung der dargestellten Aufgabe zu  $\frac{8}{12}$  von 6 = (6 · 8) : 12.

So wurde bspw. für die Aufgabe in Abbildung B.23,  $\frac{3}{9}$  von 3, zunächst der Bruch  $\frac{1}{3}$  generiert und  $r = 3$  gewählt. Für das Ganze 3 wurde der zufällige Multiplikator 1 gewählt und mit dem Nenner 3 multipliziert. Für die Aufgabenstellung, wie sie im Widget angezeigt wird, wurde abschließend  $\frac{1}{3}$  mit  $r = 3$  erweitert.

Die beteiligten Zahlen werden in dreifacher Stufung größer (Setlänge jeweils 5): Der maximal mögliche Nenner des ursprünglich generierten Bruchs steigt über die Stufen von 4 über 6 bis 8 an; das maximal mögliche generierte Ganze von 50 über 75 bis 100.

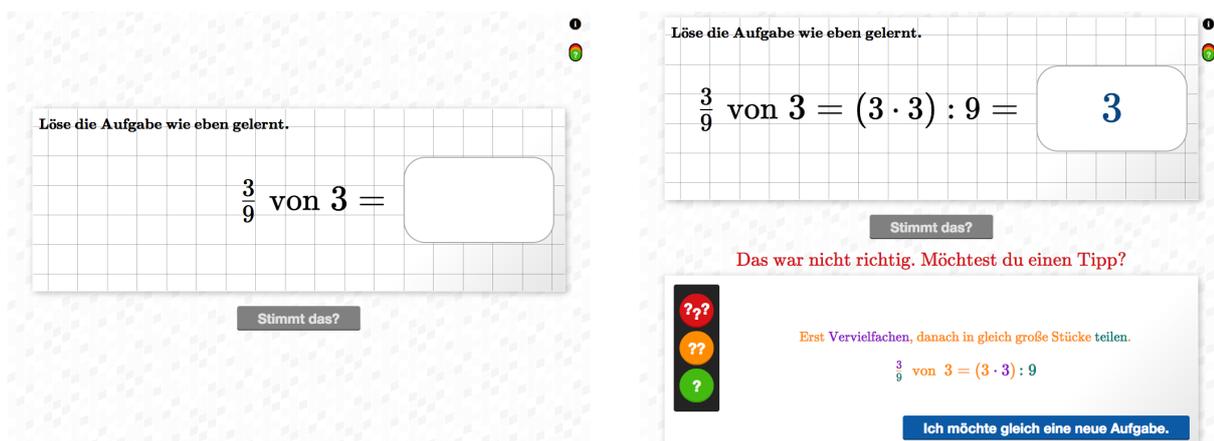


Abbildung B.23. Widget W27: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer). Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe mit Anzeige einer Lösungshilfe von mittlerem Unterstützungsgrad (links).

### B.3.2.2 W28: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer, kontextuiert)

Widget W28 (vgl. Abbildung B.24) ist eine kontextuierte Variante von W27. Die vier Kontexte entsprechen denen aus Widget W18 (Video, Müsli, Baumstamm, Reise). Die Aufgabengene-

rierung läuft wie in Widget W27 ab. Zusätzlich wird dabei der Kontext für jede Aufgabe zufällig gewählt. Dabei wird darauf geachtet, dass der Kontext der vorherigen Aufgabe nicht erneut verwendet wird. Für jeden Kontext wurden die Lösungshilfen von Widget W27 um die passende Einheit ergänzt (vgl. Tabelle B.7).

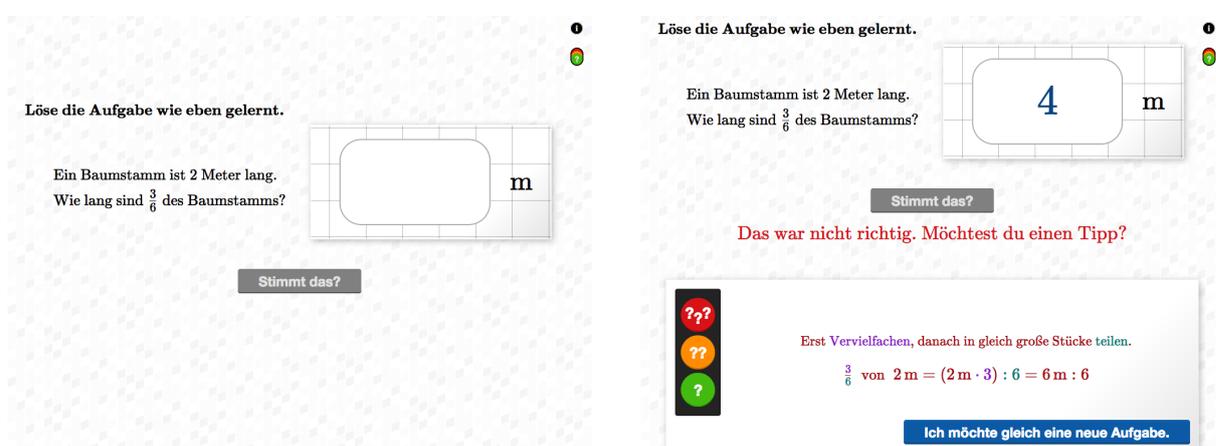


Abbildung B.24. Widget W28: Den Anteil von etwas berechnen (Teil mehrerer Ganzer, kontextuiert). Aufgabenstellung (links) und Korrektur mit eingblendeter Lösungshilfe hohen Unterstützungsgrads (rechts).

Tabelle B.7

Gestufte Lösungshilfen in Widget W28 am Beispiel „Löse die Aufgabe wie eben gelernt. Ein Video dauert 4 Minuten. Wie lange dauern  $\frac{4}{16}$ “.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
Gering	Erst Vervielfachen, danach in gleich große Stücke teilen.
Mittel	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{4}{16}$ von 4 min = (4 min · 4) : 16
Hoch	Erst <b>Vervielfachen</b> , danach in gleich große Stücke <b>teilen</b> .
	$\frac{4}{16}$ von 4 min = (4 min · 4) : 16 = 16 min : 16

### B.3.3 Einführungsteil II

Im zweiten Einführungsteil des Kapitels werden Brüche als Quotient natürlicher Zahlen eingeführt. Dazu dient die Hausaufgabe eines fiktiven Viertklässlers, der die Division 3 : 4 nicht lösen kann.

### B.3.3.1 W29: Brüche als Ergebnis von Divisionen natürlicher Zahlen

In Widget W29 soll das Ergebnis, das ein Sechstklässler angeben würde ( $\frac{3}{4}$ ), über die Handschrifterkennung eingegeben werden. Das Widget vergleicht die Eingabe mit dem Bruch  $\frac{3}{4}$  und gibt textuell und über Haken bzw. Kreuz Rückmeldung, ob die Eingabe korrekt war. Im Falle einer richtigen Eingabe ist die Interaktivität des Widgets beendet. Bei jeder Korrekturanforderung wird der eingegebene Bruch geloggt.

Im folgenden iBooktext werden Brüche als Ergebnis einer Division von beliebigen natürlichen Zahlen definiert.

## B.3.4 Übungsteil II

Der zweite Übungsteil des Kapitels greift Brüche als Ergebnis von Divisionen natürlicher Zahlen auf. Der Übungsteil besteht aus einem Widget, in dem zu einer gegebenen Division angegeben werden muss, ob das Ergebnis eine natürliche Zahl ist. Je nachdem soll das Ergebnis anschließend als natürliche Zahl oder als Bruch eingegeben werden.

### B.3.4.1 W30: Ist das Ergebnis eine natürliche Zahl?

Das Widget präsentiert auf einer karierten Karte eine Division zweier natürlicher Zahlen (vgl. Abbildung B.25). Aufgabe ist es zunächst, zu bestimmen, ob das Ergebnis der Division eine natürliche Zahl ist oder nicht, und die passende Antwort auszuwählen. Wird die falsche Antwort gewählt, wird dies zurückgemeldet und das Ergebnis der Division eingblendet. Wird die richtige Antwort gewählt, folgt im zweiten Teil der Aufgabe die Aufforderung, das Ergebnis über die Handschrifterkennung einzugeben. Diese Eingabe wird wiederum automatisch korrigiert; auf eine falsche Antwort wird ebenso das korrekte Ergebnis eingblendet.

Alle Aufgaben im Widget werden nach demselben Algorithmus generiert und sind in ihrem Anforderungsniveau ähnlich. Die einzelnen Aufgaben werden so erzeugt, dass zunächst eine zufällige natürliche Zahl  $\leq 50$  als Divisor gewählt wird. Der Dividend wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % als zufälliges Vielfaches des Divisors gewählt, im übrigen Fall ebenso als zufällige natürliche Zahl  $\leq 50$  (auch hier ist die Wahl eines Vielfaches des Divisors möglich). Es werden stets sieben Aufgaben generiert und in einen Karteikasten eingefügt. Dies führt zur Wiederholung von falsch bearbeiteten Aufgaben.

Logs können in diesem Widget zu zwei Zeitpunkten anfallen: Bei der Auswahl der falschen Option auf die beginnende Frage und bei der Korrektur der eingegebenen Lösung der Division. Im letzteren Fall wird zusätzlich zur Korrektheit auch die Eingabe selbst geloggt, so dass beide Logereignisse in der Auswertung unterschieden werden können.

The image shows four screenshots of a math widget interface, arranged in a 2x2 grid. Each screenshot has a question at the top: "Ist das Ergebnis eine natürliche Zahl? Wähle aus." (Is the result a natural number? Choose).

- Top-left:** The question is followed by the equation  $31 : 27$ . Below the grid are two radio buttons labeled "Ja" and "Nein". A button labeled "Stimmt das?" is at the bottom.
- Top-right:** The question is followed by the equation  $31 : 27$ . Above the grid, red text says "Das war nicht richtig. 31 ist nur mit Rest durch 27 teilbar. Es ist  $31 : 27 = \frac{31}{27}$ ". Below the grid, the "Ja" button has a red 'X' over it, and the "Nein" button is circled in red. A button labeled "Neue Aufgabe" is at the bottom.
- Bottom-left:** The question is followed by the equation  $82 : 41 =$  and a square input box. Above the grid, green text says "Richtig! Gib das Ergebnis an." (Correct! Enter the result). Below the grid is a button labeled "Stimmt das?".
- Bottom-right:** The question is followed by the equation  $48 : 38 =$  and a fraction box containing  $\frac{38}{48}$ . Above the grid, red text says "Das war nicht richtig. Es ist  $48 : 38 = \frac{48}{38}$ ". Below the grid is a button labeled "Neue Aufgabe".

Abbildung B.25. Widget W30: Brüche als Quotienten natürlicher Zahlen. Aufgabe (oben links) und Korrektur einer falschen Eingabe im Single-Choice-Teil (oben rechts), sowie Anzeige (ganzzahlige Lösung, unten links) und Korrektur einer falschen Eingabe im zweiten Aufgabenteil (Quotient als Bruch, unten rechts) .

## B.4 Kapitel 4: „Verschiedene Brüche mit gleichem Wert“ – Erweitern und Kürzen

Das vierte Kapitel ist das umfangreichste des iBooks und enthält 23 Widgets. In diesem Kapitel wird das Subkonzept „Erweitern und Kürzen“ eingeführt.

### B.4.1 Einführungsteil

Die Einführung beginnt mit der Aufforderung im iBooktext, ein quadratisches Blatt Papier in der Mitte zu falten, eine Hälfte farbig zu markieren und das Blatt erneut in der Mitte zu falten. Dieses enaktive Verfahren beschreibt die Gleichheit  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ . Die Aufforderung, darüber zu reden, „wie [man] den markierten Bruch jetzt nennen“ würde (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a, S. 30), dient als Impuls, diese Gleichheit zu erkennen. Eine Zeichenfläche (W31, vgl. Abschnitt B.1.1.4) im iBook dient dabei als „Notizblock“.

### B.4.1.1 W32: Papierfalten – Erweitern am Rechteckdiagramm

In Widget W32 wird die Thematik von gefaltetem Papier digital umgesetzt. Das gefaltete Papier ist als Rechteckdiagramm idealisiert dargestellt (s. Abbildung B.26). Betrachtet wird der Bruch  $\frac{3}{4}$ . Das „Papier“ wurde hier nicht nur zweimal, sondern dreimal jeweils in der Mitte gefaltet; es entstehen dadurch Darstellungen der zu  $\frac{3}{4}$  wertgleichen Brüche  $\frac{6}{8}$  und  $\frac{12}{16}$ . Im Widget sind diese Brüche jeweils unter den Darstellungen über die Handschrifterkennung zu benennen.

Abbildung B.26 zeigt zwei Sichten des Widgets W32. Links ist die Aufgabenstellung dargestellt: Ein Textfeld enthält die Aufgabe: „Otto hat  $\frac{3}{4}$  seines Quadrats farbig markiert und es dann erneut gefaltet.“. Darunter sind drei Rechteckdiagramme, die das Quadrat in 4, 8 und 16 Teile unterteilt zeigen. Die ersten drei Teile sind jeweils blau markiert. Darunter befindet sich eine Gleichung  $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$  mit zwei leeren Brüchenfeldern. Ein Button mit der Aufschrift „Stimmt das?“ ist ebenfalls sichtbar.

Rechts ist die Reaktion auf die Eingabe  $\frac{3}{4}$  dargestellt. Die Gleichung  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  ist nun mit den Zahlen 3 und 4 in den Feldern ausgefüllt. Die Eingaben sind mit orangefarbenen Haken markiert. Darunter steht der Text: „Richtig, die Brüche sind immer noch  $\frac{3}{4}$ ! Wie kannst du sie noch nennen?“.

Abbildung B.26. Widget W32: Falten als enaktives Erweitern von Brüchen. Aufgabenstellung (links) und Reaktion auf die Eingabe  $\frac{3}{4}$  (rechts).

Feedback kann erst angefordert werden, sobald beide Brüche bestimmt sind. Die einzelnen Komponenten werden dabei mit kleinen Kreuzen bzw. Haken korrigiert. Textuell erfolgt die Rückmeldung „Das war nicht richtig.“, falls mindestens ein Bruch nicht der Darstellung entspricht, „Richtig, die Brüche sind immer noch  $\frac{3}{4}$ ! Wie kannst du sie noch nennen?“ in dem Fall, dass mindestens ein Bruch mit  $\frac{3}{4}$  beschriftet wurde und „Das war richtig.“, wenn beide Brüche mit einem zu  $\frac{3}{4}$  wertgleichen, aber kürzbaren Bruch beschriftet wurden. Aus Platzgründen erscheint das Textfeedback an der Position des Buttons, über den die Korrektur angefordert werden kann. Dieser wird erneut eingeblendet, sobald in ein Feld der Handschrifterkennung geschrieben wird.

### B.4.1.2 W33: Erweitern am Kreisdiagramm

In Widget W33 wird statt den in W32 verwendeten Rechteckdarstellungen eine Darstellung des Erweiterns am Kreis betrachtet. In dem interaktiven Diagramm können unterschiedliche Brüche an einem Kreisdiagramm dargestellt werden. Dazu stehen die Nenner zwei bis sieben zur Auswahl; der Kreis wird der Auswahl entsprechend in blauer Farbe eingeteilt. Über einen Schieberegler „Größe des Kreissektors“ ist der blau markierte Anteil des Kreises variierbar; so kann der Zähler des Bruches verändert werden. Ein weiterer Schieberegler „Einteilung verfeinern“ dient der graphischen Erweiterung des visualisierten Bruchs. Die Verfeinerung der Einteilung wird mit orange eingezeichnet (Abbildung B.27). Die dargestellte Erweiterung wird auch in einer Gleichung gezeigt, die automatisch aktualisiert wird, wenn die Position eines Schiebereglers oder der Nenner verändert wird.

Das Widget erhebt keine Daten und ist als Autoplay-Widget direkt in der Seite eingebunden.

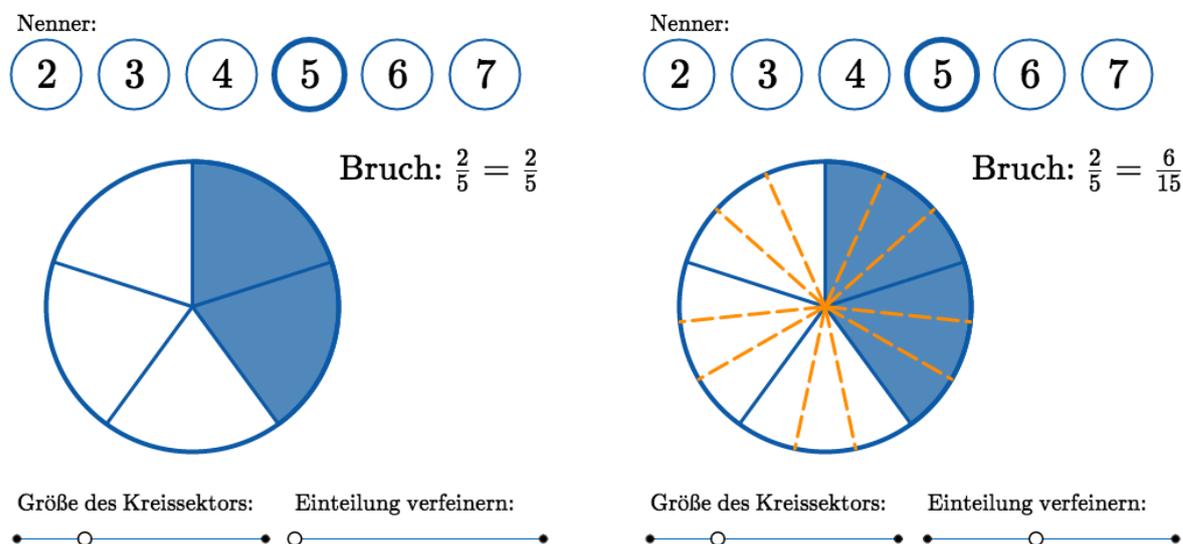


Abbildung B.27. Widget W33: Erweitern am Kreisdiagramm. Grundstellung (links) und Darstellung einer Erweiterung mit 3 (rechts).

### B.4.1.3 W34: Texteingabe – Erweiterungsregel

Widget W34, ein Widget zur Texteingabe (vgl. Abschnitt B.1.1.2), ist das letzte Widget im Einführungsteil. In ihm soll eine Strategie gefunden werden, wie man wertgleiche Brüche findet. Eine Formulierung dieser Strategie – bspw. „Man muss Zähler und Nenner mit der selben Zahl multiplizieren“ – soll in das vom Widget bereitgestellte Texteingabefeld eingetragen werden. Als Impuls dient dazu die Behauptung einer fiktiven Schülerin Marie „Ich habe gemerkt, dass ich einfach oben und unten immer das Selbe machen muss.“ (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a, S. 31).

Auf den folgenden iBookseiten werden die Begriffe *Erweitern* und *Kürzen* in ihrer symbolischen wie ikonischen Bedeutung definiert sowie das vollständige Kürzen. In einem Merksatz wird anschließend hervorgehoben, dass die Operationen den Wert des Bruches nicht verändern.

## B.4.2 Übungsteil

### B.4.2.1 Widgets W35 & W36: Wertgleiche Brüche identifizieren (Programmierung: Bernhard Werner)

Mit Widgets W35 und W36 beginnt der Übungsteil von Kapitel 4. Aufgabe in beiden Widgets ist es, je drei wertgleiche Brüche aus einer Menge von zwölf angezeigten Brüchen zu identifizieren. Mindestens eine Darstellung ist dabei ikonisch und mindestens eine

symbolisch. Während die graphisch dargestellten Brüche in Widget W35 durch segmentierte Kreise visualisiert werden, nutzt W36 eine kontinuierliche Darstellung in Kreisen ohne Segmentierung. Die symbolische Darstellung ist mittig in einem weißen Kreis platziert, der denselben Radius aufweist wie die Kreisdiagramme (vgl. Abbildung B.28). Durch Antippen der Kreisdiagramme oder Kreise mit symbolischer Beschriftung können diese ausgewählt werden (erkennbar an der grünen Umrandung). Sind alle Tripel gefunden, startet nach einer Sekunde die nächste Aufgabe automatisch.

Die Aufgaben kommen ohne textuelles Feedback aus. Werden drei Kreise mit demselben Wert ausgewählt, schrumpfen diese in sich zusammen und verschwinden schließlich vom Bildschirm. Bis zum Ende der Aufgabenbearbeitung ist an ihrer Stelle ein grüner Haken zu sehen. Wird zu einer bestehenden Auswahl ein Bruch mit unterschiedlichem Wert ausgewählt, so färben sich die Ränder der Kreise rot. Zusätzlich wackelt die Auswahl für eine Sekunde. Anschließend wird die Auswahl aufgehoben.

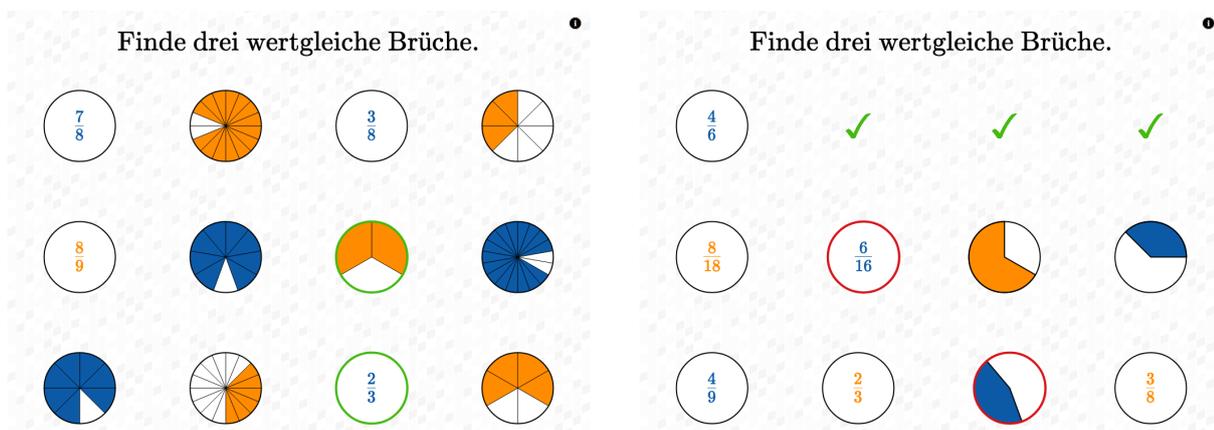


Abbildung B.28. Widgets W35 (links, mit Selektion zweier wertgleicher Darstellungen) & W36 (rechts, Selektion zweier wertungleicher Darstellungen): Wertgleiche Brüche identifizieren.

Eine Aufgabe der Widgets ist definiert durch vier echte, paarweise wertungleiche Brüche und drei Zahlen, mit denen diese jeweils symbolisch bzw. ikonisch erweitert werden. Die drei in den Widgets definierten Level unterscheiden sich durch den maximal möglichen Nenner sowie die drei Zahlen, die auf einer Stufe jedoch stets gleich sind. So sind die Nenner der Brüche in Stufe 1 (Setlänge 3)  $\leq 10$ , in Level 2 (Setlänge 3)  $\leq 5$  und auf Niveau 3 (Setlänge 5)  $\leq 7$ . In Widget W35 werden stets eine symbolische und zwei ikonische Repräsentationen erzeugt. Auf dem ersten Anforderungsniveau werden die vier Brüche selbst symbolisch und ikonisch dargestellt. Die zweite Visualisierung entspricht den mit zwei erweiterten Brüchen. Im zweiten Level werden die Brüche für die symbolische Darstellung mit vier erweitert; visualisiert werden die Brüche selbst sowie eine Erweiterung mit zwei oder drei – diese Erweiterungszahl wird bei Generierung des Sets für alle Aufgaben des Sets gewählt. Auf Stufe 3 wird jeder Bruch nicht, mit zwei und mit drei erweitert. Bei Seterzeugung wird festgelegt, welcher der resultierenden Brüche in symbolischer Repräsentation angezeigt wird. Diese Auswahl erfolgt zufällig, ist aber für alle Aufgaben aus dem Set identisch: wird bspw. der unerweiterte Bruch gewählt, so wird in allen fünf Aufgaben des Sets immer der unerweiterte Bruch symbolisch angezeigt.

Widget W36 folgt denselben Level-Restriktionen. Da die ikonischen Darstellungen in W36 kontinuierlich sind und sich insbesondere dadurch Repräsentationen wertgleicher Brüche nicht unterscheiden, werden stets zwei Brüche symbolisch und einer ikonisch repräsentiert. Die Auswahl wird komplementär zu Widget W35 getroffen: in W35 ikonisch repräsentierte Erweiterungen werden in W36 symbolisch dargestellt und umgekehrt.

Die Widgets erfassen Logdaten bei jeder Selektion eines Bruchs. Dabei wird für jede angezeigte Bruchrepräsentation der aktuelle Selektionsstatus gespeichert. Dabei werden vier Status unterschieden und mit 0, 1, 2, oder 3 codiert (s. Tabelle B.8 für die Bedeutung der Codes). Insbesondere erlauben diese Logs, den Lösungsprozess 1:1 wiederzugeben. Bernhard Werner implementierte beide Widgets in CindyJS.

Tabelle B.8

*Codierung der Selektionsstatus in Matching-Widgets (B. Werner, Persönliche Kommunikation, 28. September 2016).*

Code	Bedeutung
0	Darstellung nicht ausgewählt
1	Darstellung ausgewählt; alle ausgewählten Darstellungen haben denselben Wert; noch nicht alle wertgleichen Brüche selektiert
2	Darstellung ausgewählt; nicht alle ausgewählten Darstellungen haben denselben Wert
3	Darstellung ausgewählt; alle ausgewählten Darstellungen haben denselben Wert; alle wertgleichen Brüche selektiert

#### B.4.2.2 W37: Visualisierungen einordnen (Programmierung: Bernhard Werner)

In Widget W37 sind unterschiedliche Darstellungen von vier paarweise wertungleichen Brüchen dem richtigen Bruch zuzuordnen. Dazu sind vier orangene Kreise (im Folgenden *Körbe* genannt) mit den vier Brüchen beschriftet. Je Korb sind zwei bis vier Visualisierungen in der Mitte des Bildschirms angezeigt, die dem Bruch selbst oder einer Erweiterung mit zwei bzw. drei entsprechen (vgl. Abbildung B.29). Die Visualisierungen wechseln zwischen Kreis und Rechteck (s. Tabelle B.9). Diese Kreis- und Rechteckdarstellungen sollen in die Körbe eingeordnet werden, indem sie mit dem Finger in diese gezogen werden.

Ein Zähler unterhalb der Aufgabenstellung gibt die Anzahl der Versuche an, die für die aktuelle Aufgabe benötigt wurden. Wenn Feedback angefordert wird, wird dieser Zähler um eins erhöht und richtig platzierte Visualisierungen wechseln ihre Farbe von blau nach grün, falsch platzierte nach rot. Zusätzlich bewegen sich fehlerhaft eingeordnete Brüche zurück in die Mitte, während richtig eingeordnete sich so in den Körben verteilen, dass sie sich nicht überlappen. Sind alle Visualisierungen richtig eingeordnet, wird dies textuell zurückgemeldet. Wurden für die Lösung mehr als drei Versuche benötigt, wird auf die übermäßige Anzahl an Versuchen hingewiesen („Löse das in weniger Versuchen!“), da eine Lösung in vier Versuchen nach dem Trial-and-Error-Prinzip immer möglich ist: Zieht man alle noch in der Mitte befindlichen Darstellungen in einen noch leeren Korb, so

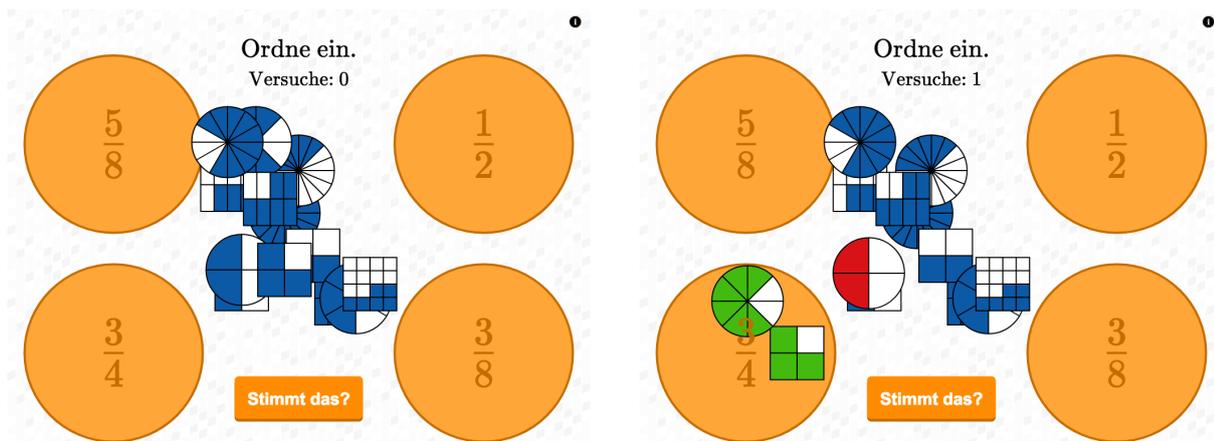


Abbildung B.29. Widget W37: Einordnen. Korrektur eingeordnete Visualisierungen grün, beim letzten Versuch falsch eingeordnete rot, noch nicht eingeordnete blau.

Tabelle B.9

Verteilung der Visualisierungen in Widget W37.

Anzahl an Visualisierungen	Visualisierte Brüche	Verwendete Visualisierungen
2	$f / f_2$	Rechteck/Kreis
3	$f / f_2 / f_2$	Rechteck/Kreis/Rechteck oder Kreis/Rechteck/Kreis
4	$f / f_2 / f_2 / f_3$	Rechteck/Kreis/Rechteck/Kreis oder Kreis/Rechteck/Kreis/Rechteck

Anmerkung.  $f$  generierter Bruch,  $f_2, f_3$  mit 2 bzw. 3 erweiterter Bruch

verbleiben beim Feedback nur die korrekt eingeordneten Darstellungen in diesem Korb. Nach dreifacher Wiederholung dieses Verfahrens sind alle Brüche korrekt platziert.

Das Widget beginnt mit einem Set der Länge 3, in welchem für jede Aufgabe vier echte Brüche zufällig generiert werden, die paarweise wertungleich sind und in der Aufgabe auf der Körben eingeblendet werden. Der Nenner eines Bruchs ist dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{9}$  2 und mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils  $\frac{4}{9}$  4 bzw. 8. Im folgenden Level werden die Nenner gleichverteilt aus der Menge  $[2; 10] \cap \mathbb{N}$  gewählt, im letzten aus der Menge  $[2; 7] \cap \mathbb{N}$ . Hier werden in den Visualisierungen gefüllten Teile des Ganzen zusätzlich zufällig gewählt, so dass die Brüche nicht mehr zusammenhängend markiert sein müssen.

Prozessdaten werden beim Drücken des Buttons „Stimmt das?“ erhoben. Das Widget sichert die Brüche, die für die Körbe festgelegt sind, und die visualisierten Brüche jeweils als Liste von Zähler-Nenner-Paaren. Eine Liste an natürlichen Zahlen sichert den Verteilungszustand: Ist der  $i$ te Eintrag der Liste die Zahl  $j$ , so bedeutet dies, dass der  $i$ te Bruch aus der gespeicherten Liste der Darstellungen im  $j$ ten Korb platziert wurde. Die Belegung von  $j = 0$  bedeutet dabei, dass der Bruch noch in der Mitte liegt. Zusätzlich erfasst das Widget die Versuchsnummer für diese Aufgabenstellung. Das Widget in CindyJS umgesetzt.

### B.4.2.3 W38: Einen Bruch am Rechteckdiagramm darstellen II

Widget W38 ist eine Variation von Widget W8 (s. Abschnitt B.1.2.3). Aufgabe ist es wieder, einen Bruch in einem gegebenen, segmentierten Rechteck zu visualisieren. Im Gegensatz zu Widget W8 ist die gegebene Einteilung jedoch stets feiner, als es der Nenner des darzustellenden Bruchs vorgibt. Das Feedback entspricht dem von Widget W8. Falls eine falsche Eingabe auf den Nenner des gefragten Bruchs gebracht werden kann, wird sie zusammen mit dem auf den Nenner gekürzten Bruch zurückgemeldet (vgl. Abbildung B.30).

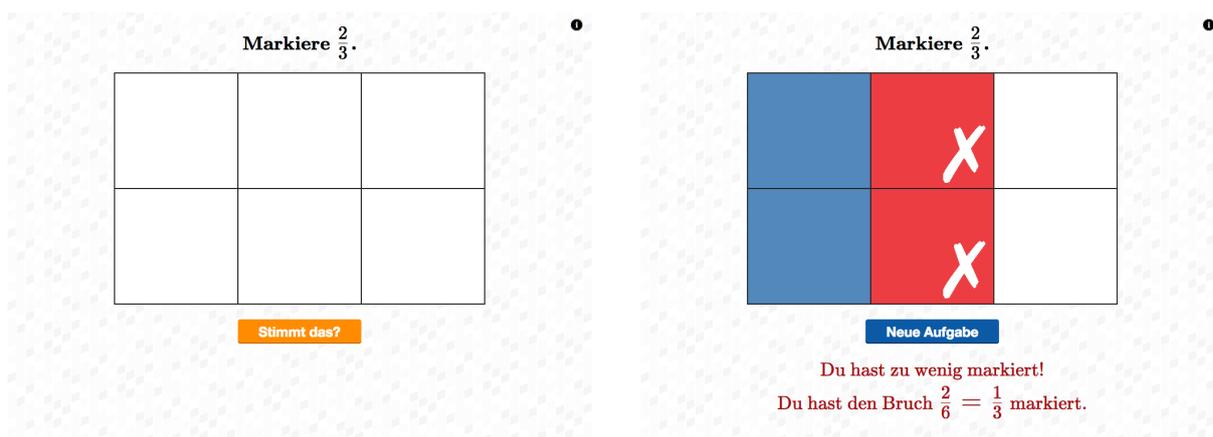


Abbildung B.30. Widget W38: Brüche am Rechteckdiagramm darstellen, dessen Einteilungsstruktur nicht dem zu markierenden Bruch entspricht. Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Neben dem gefragten Bruch wird eine einzelne Aufgabe durch die Zahl charakterisiert, die die Einteilung des Rechtecks festlegt. Sie ist stets ein Vielfaches des Nenners des zu markierenden Bruchs.

Der Generierungsalgorithmus kennt drei Anforderungsniveaus, in denen jeweils Sets der Länge 5 erzeugt werden. Für eine einzelne Aufgabe wird ein echter Bruch generiert. Die dabei maximal möglichen Nenner steigen von 8 über 16 auf 25. Dabei werden keine Nenner gewählt, die gleichzeitig größer als 10 und prim sind. Für die Einteilung des Rechtecks wird ein Faktor zufällig gewählt, um den der Nenner für die Segmentierung vervielfacht wird. Der Zahlenpool für den Faktor wird dabei so eingeschränkt, dass das Rechteck in weniger als 32 (50 in der letzten Stufe) Stücke eingeteilt wird.

An Logdaten erfasst das Widget einen Wahrheitswert, ob der korrekte Bruch markiert wurde, den zu markierenden Bruch und die Eingabe in Form des ungekürzten, markierten Bruchs.

### B.4.2.4 W39: Graphisch Kürzen (Programmierung: Bernhard Werner)

Widget W39 thematisiert die Grundvorstellung des Kürzens von Brüchen als Vergrößern einer Einteilung. In einem Rechteckdiagramm ist ein Bruch visualisiert, der auch in symbolischer Schreibweise angezeigt wird. Aufgabe ist es nun, die Darstellung so zu verändern, dass sie dem mit der zusätzlich gegebenen Zahl gekürzten Bruches entspricht. Dazu können aus dem Rechteckdiagramm Unterteilungen entfernt werden, indem die einzelnen Linien

im Rechteck mit dem Finger nachgefahren werden (vgl. Abbildung B.31). Zwei Buttons am unten Bildschirmrand dienen dem schrittweisen bzw. vollständigen Zurücksetzen der Aufgabe. Das Widget ist mithilfe von CindyJS umgesetzt.

Das Widget reagiert auf Korrekturanforderungen mit textuellem Feedback, das an Stelle der Aufgabenstellung eingeblendet wird. Das Feedback reagiert differenziert auf folgende Fehler:

- Die durch das Entfernen von Linien entstandenen Stücke sind nicht gleich groß.
- Es existieren Stücke, die nicht vollständig gefüllt sind.
- Es wurde mit einer anderen Zahl als der gefragten gekürzt.
- Es wurde nicht gekürzt.

Bei den ersten beiden Fehlern werden die entsprechenden Stücke rot umrandet (s. Abbildung B.31). Eine Aufgabe ist so lange zu bearbeiten, bis sie richtig gelöst ist. In diesem Fall gibt das Widget zusätzlich zur Bestätigung das symbolische Ergebnis an.

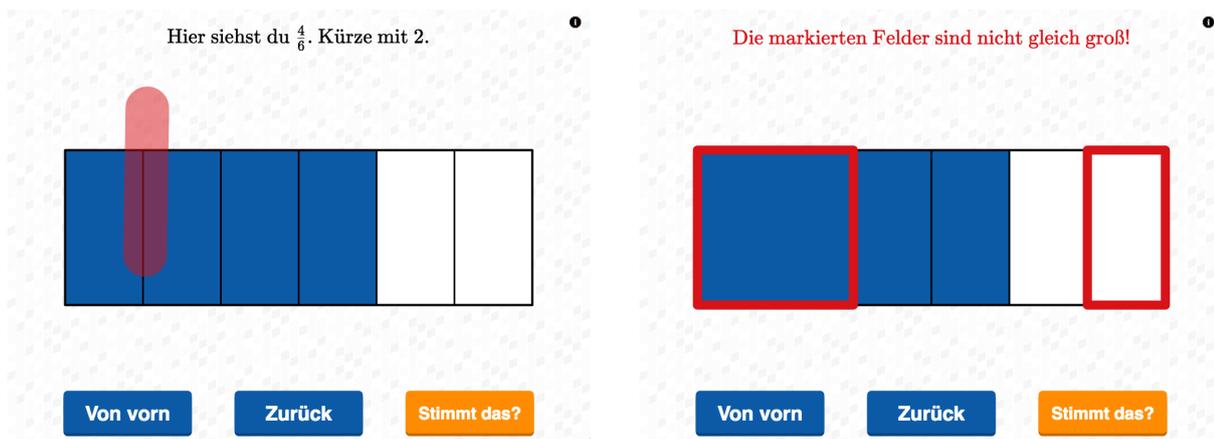


Abbildung B.31. Widget W39: Graphisch Kürzen. Aufgabe mit aktiver Fingerbewegung (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Das Widget durchläuft drei Schwierigkeitsstufen: Zunächst ist dreimal eine Darstellung eines echten Bruchs mit Nenner aus der Menge  $\{3, 5, 7\}$  aus einer Darstellung des mit zwei erweiterten Bruchs zu erstellen (graphisch Kürzen mit 2). In der darauffolgenden Stufe sind es fünf echte Brüche, die einen Nenner aus der Menge  $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$  aufweisen. Die Ausgangsdarstellung ist der mit 4 erweiterte Bruch (graphisch Kürzen mit 4). In der letzten Stufe wird die Zahl, mit der die Kürzung graphisch durchgeführt werden soll, für jeden der fünf Brüche aus dem Set zufällig als natürliche Zahl  $\leq 6$  gewählt. Der darzustellende Bruch weist einen Nenner  $\leq 16$  auf, der aber nicht gleichzeitig  $> 10$  und prim ist. Darüber hinaus wird der Bruch hier nicht zusammenhängend markiert angezeigt, sondern die gefüllten Felder in der Ausgangsdarstellung zufällig gewählt.

Als Logdaten liegen aus dem Widget folgende Informationen vor: die Korrektheit, die Aufgabenstellung und die Eingabe. Die Aufgabenstellung wird abgebildet durch den Ergebnisbruch als Zähler-Nenner-Paar, die Zahl, mit der zu kürzen ist, und eine Liste der blau gefärbten Felder. Die Eingabe wird über die Linien gesichert, die nach der Bearbeitung angezeigt werden. Die Linien sind über über Start- und Endpunkt codiert.

### B.4.2.5 W40: Faktorisieren

Widget W40 nimmt eine Sonderrolle im iBook ein: Es ist das einzige Widget, das keine Brüche behandelt. Stattdessen ist es hier Aufgabe, eine natürliche Zahl in zwei natürliche Faktoren zu faktorisieren, die über zwei Felder der Handschrifterkennung eingegeben sind (vgl. Abbildung B.32). Diese Übung soll die Fähigkeit schulen, Zahlen zu finden, mit denen Brüche gekürzt werden können.

Feedback erfolgt textuell und in Form eines farbcodierten Hakens bzw. Kreuzes. Auf eine falsche Antwort wird eine korrekte Faktorisierung angegeben. Sind mehrere Faktorisierungen möglich, wird dies präsentierte Lösung explizit als Beispiel gekennzeichnet. An sich richtige Antworten, in denen ein Faktor die Zahl 1 ist, werden vom Widget nicht akzeptiert. In diesem Fall erfolgt die Aufforderung, eine andere Faktorisierung zu eingeben.

Die Aufgabenschwierigkeit ist im Widget abgestuft in das „kleine“ (Faktoren  $\leq 10$ ) und „große“ (ein Faktor  $\leq 10$ , ein Faktor  $\leq 20$ ) Einmaleins. In jeder Stufe bestehen Sets aus zehn zu faktorisierenden Zahlen. Zur Generierung einer Aufgabe werden zwei Faktoren zufällig gewählt und für die Aufgabenstellung miteinander multipliziert.

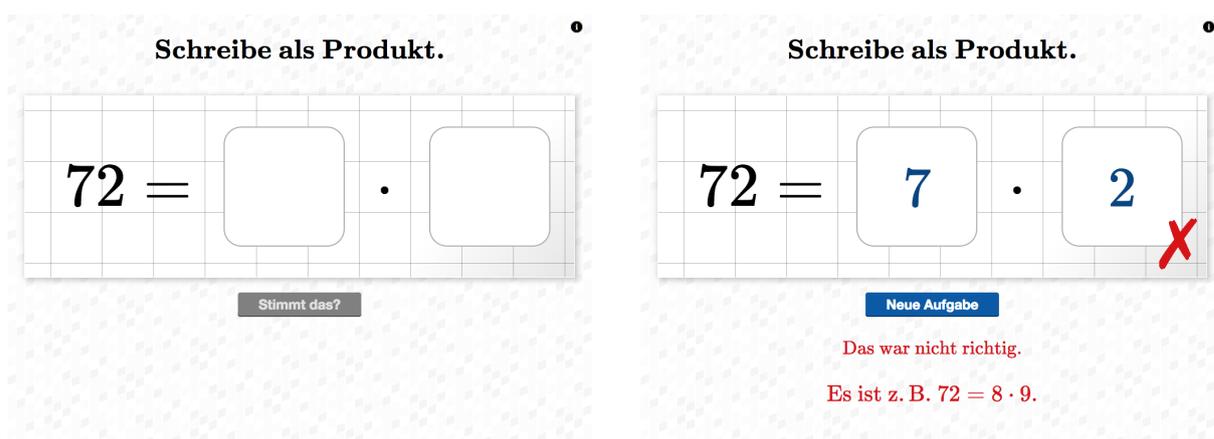


Abbildung B.32. Widget W40: Faktorisieren einer natürlichen Zahl. Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Das Widget loggt bei Korrekturanforderung die Korrektheit, die generierten und die eingegebenen Faktoren.

### B.4.2.6 Widgets W41 & W42: Erweitern bzw. Kürzen mit einer gegebenen Zahl

Widgets W41 und W42 dienen dem Anwenden des symbolischen Erweiterungs- bzw. Kürzalgorithmus: Es ist jeweils ein gegebener Bruch mit einer gegebenen Zahl zu erweitern respektive zu kürzen (vgl. Abbildung B.33).

In beiden Widgets stehen gestufte Lösungshilfen zur Verfügung (s. Tabelle B.10 und Tabelle B.11).

Feedback erfolgt in Textform, gestützt durch kongruente Farbcodierung und einen Haken bzw. ein Kreuz. Es enthält nur die Rückmeldung über die Korrektheit der Eingabe. Nach

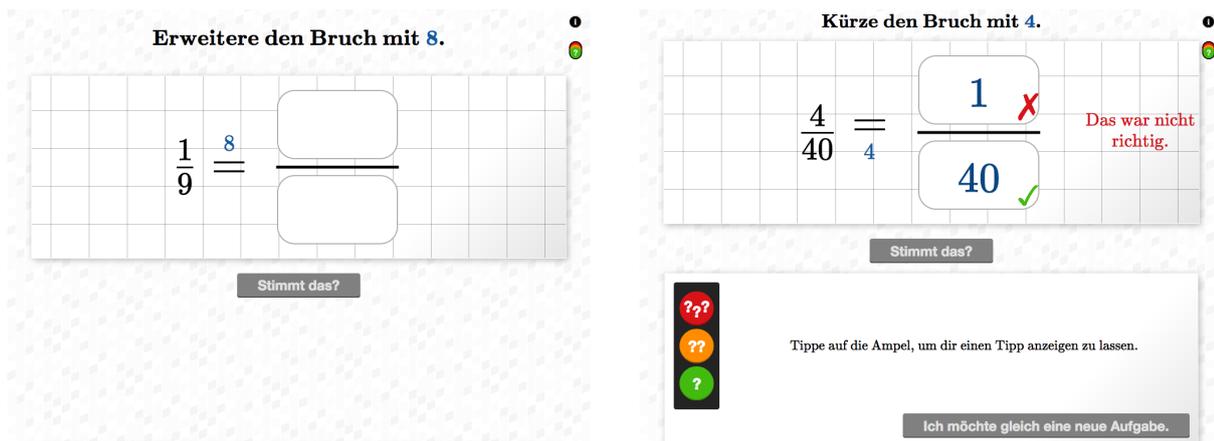


Abbildung B.33. Widgets W41 & W42: Erweitern (links) und Kürzen (rechts, mit Korrektur) mit einer gegebenen Zahl.

einer falschen Antwort kann die Aufgabe weiterbearbeitet werden. Zur Unterstützung blendet das Widget die Karte mit den Lösungshilfen ein.

Eine einzelne Aufgabe ist durch einen Bruch und eine Erweiterungs- (Widget W41) bzw. eine Kürzungszahl  $r$  (Widget W42) definiert. In Widget W41 ist der Bruch mit  $r$  zu erweitern. In Widget W42 wird der Bruch zunächst intern mit der Zahl  $r$  erweitert; Aufgabe ist es dann, den erweiterten Bruch mit  $r$  zu kürzen. In der Aufgabengenerierung greifen beide Widgets auf dieselben Abstufungen zurück. Die Stufen unterscheiden sich nur durch die generierten Brüche; die Zahl  $r$  wird stets als zufälliges Vielfaches des Zählers gewählt (Faktor  $\leq 10$ ). Zunächst enthält ein Set zwei zufällige Stammbrüche mit Nenner  $\leq 12$ , anschließend fünf zufällige echte Brüche mit Nenner  $\leq 12$  und abschließend fünf zufällige echte Brüche mit Nenner  $\leq 20$ .

#### B.4.2.7 W43–W46: Erweiterungs- und Kürzungszahl bestimmen

Die vier Widgets W43, W44, W45 und W46 sind als komplementärer Gegenpart zu W41 und W42 zu betrachten, da hier die Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl zu erschließen ist. Dies geschieht pro Operation einmal ausgehend von symbolischen und einmal ausgehend von ikonischen Repräsentationen. Ausgangsbruch und Endbruch der Operation sind jeweils auf dem Bildschirm dargestellt; ein Pfeil gibt die Richtung der Operation an (vgl. Abbildung B.34). Die Antwort wird über ein Feld der Handschrifterkennung eingegeben. Die Verteilung der Operationen und Repräsentationen auf die Widgets ist Tabelle B.12 zu entnehmen.

Als Feedback auf eine Antwort wird die Repräsentation der Aufgabenstellung durch die jeweils andere ergänzt. In den ikonischen Darstellungen werden die Linien, die durch die Operation hinzugefügt (Erweitern) bzw. entfernt (Kürzen) werden, gestrichelt dargestellt. In den Widgets mit symbolischer Aufgabenstellung wird der Rechenweg eingeblendet. Als Reaktion auf eine falsche Antwort wird die richtige Antwort angegeben und in einem kurzen Text erklärt. Die Erklärung entspricht der Lösungshilfe mit hohem Unterstützungsgrad (vgl. Tabelle B.13).

Tabelle B.10

Gestufte Lösungshilfen in Widget W41 am Beispiel „Erweitere den Bruch mit 6.  $\frac{1}{7} \stackrel{6}{=} \frac{\square}{\square}$ “:

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Erweitern bedeutet, dass die Einteilung verfeinert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in mehr Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert.
 Mittel	Erweitern bedeutet, dass die Einteilung verfeinert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in mehr Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert. Das heißt, dass Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden.
 Hoch	Nach dem Erweitern mit 6 ist die Einteilung 6-mal so fein wie davor. Man muss Zähler und Nenner also mit 6 multiplizieren:

$$\frac{1}{7} \stackrel{6}{=} \frac{1 \cdot 6}{7 \cdot 6}$$

Tabelle B.11

Gestufte Lösungshilfen in Widget W42 am Beispiel „Kürze den Bruch mit 11.  $\frac{11}{22} = \frac{\square}{\square}$ “:

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Kürzen bedeutet, dass die Einteilung vergrößert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in weniger Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert.
 Mittel	Kürzen bedeutet, dass die Einteilung vergrößert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in weniger Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert. Das heißt, dass Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl geteilt werden.
 Hoch	Nach dem Kürzen mit 11 ist die Einteilung 11-mal so grob wie davor. Man muss also Zähler und Nenner durch 11 teilen:

$$\frac{11}{22} = \frac{11 : 11}{22 : 11}$$

Tabelle B.12

*Charakteristika der Widgets W43–W46.*

Widget	Mit welcher Zahl wurde ...	Repräsentation der Aufgabenstellung
W43	... erweitert?	ikonisch
W44	... gekürzt?	ikonisch
W45	... erweitert?	symbolisch
W46	... gekürzt?	symbolisch

Alle vier Widgets generieren ihre Aufgaben auf dieselbe Art und Weise. Aufgaben sind charakterisiert durch einen Bruch und eine Zahl, mit welcher der Bruch erweitert wird. Je nach Aufgabe stellt der erweiterte Bruch Ausgangspunkt (Widgets W44 und W46) oder Ergebnis (Widgets W43 und W45) der zu untersuchenden Operation dar. Die Widgets beginnen mit einem Set, das aus zwei Aufgaben besteht, welche durch einen Stammbruch mit Nenner  $\leq 20$  (aber nicht gleichzeitig  $> 10$  und prim) und einer Zahl zwischen 2 und 7 definiert sind. Im Anschluss werden Sets der Länge 5 generiert. In diesen Sets werden echte Brüche ohne die Einschränkung auf Stammbrüche generiert; die Limitationen für die Nenner und Erweiterungszahlen bleiben erhalten.

Die Widgets loggen jeweils den gekürzten Bruch, die Zahl, mit welcher der Bruch (evtl. intern) erweitert wurde, die Korrektheit der Eingabe und die gegebene Antwort. Zusätzlich wird beim Aufruf einer Lösungshilfe geloggt, welcher Unterstützungsgrad angefordert wurde. Die beiden Logtypen sind durch mitaufgezeichnete Strings voneinander zu unterscheiden.

Die Anzeige der Brüche bzw. Visualisierungen geschieht über CindyJS. Alle Texte werden in HTML-Elementen angezeigt, die über der CindyJS-Canvas platziert werden.

#### B.4.2.8 W47: Kürzungszahlen auswählen

In Widget W47 ist es die Aufgabe, zu einem gegebenen Bruch diejenigen Zahlen auszuwählen, mit denen er gekürzt werden kann. Zur Auswahl stehen dabei maximal zehn Antwortmöglichkeiten aus der Menge aller Teiler von Zähler oder Nenner. Zusätzlich kann immer „Mit keiner [sc. Zahl kann der Bruch gekürzt werden].“ ausgewählt werden.

Der Bruch wird in der Bildschirmmitte auf einer karierten Karte angezeigt; die Antwortmöglichkeiten platzieren sich links und rechts von der Karte. Sie können durch Antippen ausgewählt werden, wodurch sie sich vergrößern und blaue Schriftfarbe annehmen.

Beim Wechsel zu einer neuen Aufgabe bewegen sich die Antwortmöglichkeiten über den unteren Rand des Bildschirms hinaus, anschließend bewegen sich die neuen Antwortmöglichkeiten von dort in den Bildschirmausschnitt hinein. Dabei scheint die Karte sich umzublättern, auf der „Rückseite“ der Karte ist die neue Aufgabe zu sehen. Die Animationen der Antwortmöglichkeiten ähneln denen aus Widget W13 (s. Abschnitt B.1.2.6).

Das Feedback gibt Auskunft, ob die Antwort korrekt ist, und meldet bei Bedarf die korrekt und die zu viel bzw. zu wenig ausgewählten Antwortmöglichkeiten zurück. Symbole und

Tabelle B.13

Lösungshilfen der Widgets W43–W46.

Widget	Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
W43	 Gering	Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden.
	 Mittel	Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden. <sup>a</sup>
	 Hoch	Jedes Stück wurde in $X$ gleich große Teile geteilt. Die Einteilung des Ganzen ist $X$ -mal so fein wie vor dem Erweitern.
W44	 Gering	Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden.
	 Mittel	Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden. <sup>a</sup>
	 Hoch	Immer $X$ gleich große Teile werden zu einem Stück zusammengefasst. Die Einteilung des Ganzen ist $X$ -mal so fein wie vor dem Kürzen.
W45	 Gering	Beim Erweitern wird die Einteilung <i>feiner</i> . Um wie viel wird sie hier feiner?
	 Mittel	Beim Erweitern wird die Einteilung <i>feiner</i> . Das heißt: Zähler und Nenner werden mit der gleiche Zahl mal genommen.
	 Hoch	Beim Erweitern mit $X$ wird die Einteilung $X$ -mal so fein. Das heißt: Zähler und Nenner werden mit $X$ mal genommen.
W46	 Gering	Beim Kürzen wird die Einteilung <i>gröber</i> . Um wie viel wird sie hier gröber?
	 Mittel	Beim Kürzen wird die Einteilung <i>gröber</i> . Das heißt: Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl geteilt.
	 Hoch	Beim Kürzen mit $X$ wird die Einteilung $X$ -mal so grob. Das heißt: Zähler und Nenner werden durch $X$ geteilt.

Anmerkung. <sup>a</sup> Zusätzlich Strichelung der entsprechenden Linien

**Gib an, mit welcher Zahl der dargestellte Bruch erweitert wurde.**

Überlege Dir, in wie viele gleich große Teile die Stücke geteilt werden.

Erweitert wurde mit:

0

Stimmt das?

**Gib an, mit welcher Zahl der Bruch erweitert wurde.**

Beim Erweitern mit 5 wird die Einteilung 5-mal so fein.  
Das heißt: Zähler und Nenner werden mit 5 mal genommen.

$\frac{1}{13}$

Erweitert wurde mit:

1

Stimmt das?

Das war nicht richtig.  
Die richtige Antwort ist 5.

$$\frac{1}{13} \stackrel{5}{=} \frac{1 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{5}{65}$$

Neue Aufgabe

**Gib an, mit welcher Zahl der dargestellte Bruch gekürzt wurde.**

Überlege Dir, wie viele gleich große Teile jeweils zu einem neuen Stück zusammengefasst werden.

Gekürzt wurde mit:

1

Stimmt das?

**Gib an, mit welcher Zahl der Bruch gekürzt wurde.**

Beim Kürzen mit 4 wird die Einteilung 4-mal so grob.  
Das heißt: Zähler und Nenner werden durch 4 geteilt.

$\frac{4}{100}$

Gekürzt wurde mit:

7

Stimmt das?

Das war nicht richtig.  
Die richtige Antwort ist 4.

$$\frac{4}{100} \stackrel{4}{=} \frac{4 : 4}{100 : 4} = \frac{1}{25}$$

Neue Aufgabe

Abbildung B.34. Widgets W43, W45, W44 und W46: Erweiterungs- (oben) bzw. Kürzungszahl (unten) bestimmen. Aufgabe mit Lösungshilfen (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

farbliche Codierung der einzelnen Antwortmöglichkeiten veranschaulichen das Feedback. Zudem fordert ein Text unterhalb der Aufgabenstellung dazu auf, die Zahlen anzutippen, mit denen der Bruch kürzbar ist. Dies führt zur Anzeige der Kürzung auf der Karte (vgl. Abbildung B.35). Tippt man eine Zahl an, mit der nicht gekürzt werden kann, so wird die Aufforderung wird mit der Information ersetzt, dass der Bruch mit der gewählten Zahl nicht kürzbar ist.

Eine einzelne Aufgabe im Widget ist durch einen kürzbaren Bruch charakterisiert. Die Distraktoren werden bei der Anzeige (und nicht bei Generierung) der Aufgabe gewählt (für den genauen Auswahlalgorithmus siehe Abschnitt C.2). Zur Generierung werden vollständig gekürzte, echte Brüche per Zufall erzeugt, die dann mit einer zufällig gewählten natürlichen Zahl erweitert werden. Die Schwierigkeit der Aufgabe wird über den maximal möglichen Nenner und die Erweiterungszahl gesteuert. Im Widget sind drei Anforderungsniveaus definiert. Im ersten Set sind zwei Stammbrüche (Nenner  $\leq 12$ ) zu bearbeiten, die mit einer zufälligen Primzahl  $\leq 10$  erweitert wurden. Auf der zweiten Stufe (Setlänge 5) weisen die Brüche einen Nenner  $\leq 10$  auf; jeder Bruch wird mit einer zufälligen, natürlichen Zahl  $\leq 10$  erweitert (Erweiterung auch mit 1 möglich). Im höchsten Level (Setlänge 5) beträgt der maximal mögliche Nenner 15; die Erweiterungszahl wird für jeden Bruch zufällig, aber  $\leq 9$  gewählt.



Abbildung B.35. Widget W47: Kürzungszahlen auswählen. Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer Auswahl nach Tippen auf die Zahl 3 (rechts).

Das Widget loggt den angezeigten Bruch, eine Liste der korrekten, aber nicht aus gewählten Zahlen, und eine Liste der fälschlicherweise ausgewählten Zahlen (ist eine Aufgabe also korrekt gelöst, so sind beide Listen leer).

Das Widget wurde in HTML5 und JavaScript umgesetzt. Insbesondere wurde für die Animationen (Einfliegen der Auswahlmöglichkeiten, Umblättern der Karte) nur CSS verwendet.

#### B.4.2.9 W48 & W49: Zähler oder Nenner ergänzen

In Widgets W48 und W49 soll jeweils eine fehlende Zahl in einer Erweiterung oder Kürzung ergänzt werden. Die Operation wird dabei zufällig gewählt. In der symbolischen Darstellung des jeweiligen Bruchs ist anstelle des einzutragenden Nenners bzw. Zählers ein Feld der Handschrifterkennung eingebunden. Während in Widget W48 stets der Zähler des Ergebnisses zu ergänzen – und damit der Bruch auf den gegebenen Nenner zu bringen – ist, ist der Platzhalter in W49 zufällig auf eine der vier Komponenten der zwei Brüche verteilt.

Feedback erfolgt in beiden Aufgaben in Form von Text unter Angabe der Korrektheit. Bei falscher Beantwortung wird die richtige Antwort genannt. Zusätzlich bietet Widget W48 eine Erklärung in Form des Rechenwegs, die über einen Knopf angezeigt werden kann (Abbildung B.36). In Widget W49 wird die Rechnung über Rechteckdiagramme visualisiert dargestellt (Abbildung B.37).

In beiden Widgets stehen Lösungshilfen zur Unterstützung bereit (vgl. Tabelle B.14 und Tabelle B.15).

Eine einzelne Aufgabe ist in beiden Widgets festgelegt durch einen Bruch, die Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl und die Operation selbst. Letztere wird in allen Stufen per Zufall festgelegt. Der Bruch und die Zahl durchlaufen in beiden Widgets zwei Level; die Setlänge ist dabei stets 5. Sind Brüche zu kürzen, so wird der generierte Bruch mit der zufällig gewählten Zahl erweitert. In Widget W48 werden zunächst echte Brüche mit Nenner  $\leq 33$  generiert. Zu erweitern bzw. kürzen ist mit 2 oder 3 – dadurch bleiben die Zahlen zweistellig. In der

Bringe den Bruch auf den gegebenen Nenner.

$$\frac{20}{22} = \frac{\quad}{44}$$

Stimmt das?

Bringe den Bruch auf den gegebenen Nenner.

$$\frac{20}{22} = \frac{40}{44}$$

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig. Die richtige Antwort ist 40.

Um  $\frac{20}{22}$  auf Nenner 44 zu bringen, muss man  $\frac{20}{22}$  mit 2 erweitern:  $(44 : 22 = 2)$ .

Es ist also  $\frac{20}{22} \cdot \frac{2}{2} = \frac{40}{44}$ .

Erklär's mir!

Abbildung B.36. Widget W48: Einen Bruch auf einen gegebenen Nenner bringen. Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer falschen Antwort mit eingblendetem Rechenweg (rechts).

Gib die fehlende Zahl ein.

$$\frac{12}{\quad} = \frac{6}{9}$$

Stimmt das?

Gib die fehlende Zahl ein.

$$\frac{12}{2} = \frac{6}{9}$$

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig. Die richtige Antwort ist 18.

Kürzen mit 2

Abbildung B.37. Widget W49: Die fehlende Zahl in einer Bruchgleichung ergänzen. Aufgabenstellung mit Lösungshilfe mittleren Unterstützungsgrades (links) und Korrektur einer falschen Antwort (rechts).

zweiten Stufe wird der maximal mögliche Nenner auf 12 gesenkt. Zu erweitern bzw. kürzen ist mit einer per Zufall gewählten Zahl zwischen 2 und 10. Die erste Schwierigkeitsstufe von Widget W49 entspricht der zweiten von W48. Die zweite unterscheidet sich von der ersten nur durch den maximal möglichen Nenner, der hier 20 beträgt. Zusätzlich wird in Widget W49 für jede Aufgabe eine der vier Komponenten der Brüche ausgewählt, die in der Aufgabe zu ergänzen ist.

Widget W48 loggt die Korrektheit, die Aufgabe in Form der beiden Brüche auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung sowie die eingegebene Zahl. Widget W49 loggt ebenfalls die Korrektheit und eingegebene Zahl. Die Aufgabenstellung wird in Form des generierten Bruchs, Operation (Kürzen 1, Erweitern 0), der beteiligten Zahl und der fehlenden Komponente gesichert. Beide Widgets loggen beim Aufruf einer Lösungshilfe, welcher Unterstützungsgrad angefordert wurde. Widget W48 loggt zusätzlich, wenn nach einer falschen Antwort die Erklärung eingblendet wird. Alle Logs sind durch Strings voneinander zu unterscheiden.

Tabelle B.14

Gestufte Lösungshilfen in Widget W48.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Überlege, ob Du erweitern oder kürzen musst und womit.
 Mittel	Um $f$ auf Nenner $d$ zu bringen, muss man $f$ erweitern/kürzen. Überlege Dir, mit welcher Zahl.
 Hoch	Um $f$ auf Nenner $d$ zu bringen, muss man $f$ mit $r$ erweitern/-kürzen: ( $d : n = r$ ).

Anmerkung.  $f$  Bruch,  $d$  Zielnenner,  $r$  Erweiterungs- bzw. Kürzungszahl

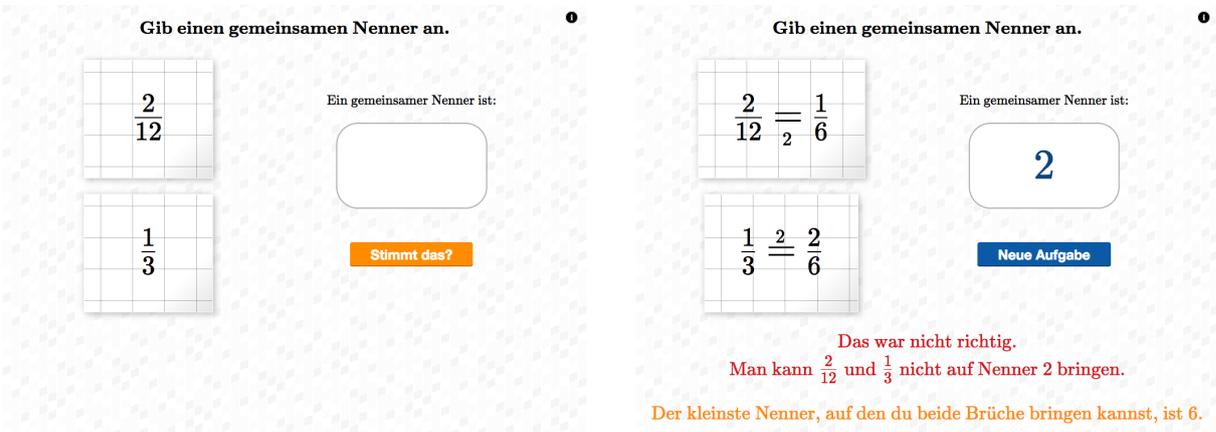
Tabelle B.15

Gestufte Lösungshilfen in Widget W49.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Überlege Dir, ob erweitert oder gekürzt wurde und mit welcher Zahl.
 Mittel	Hier wurde erweitert/gekürzt. Überlege Dir, mit welcher Zahl.
 Hoch	Hier wurde mit $X$ erweitert/gekürzt.

### B.4.2.10 W50: Einen gemeinsamen Nenner finden

Das Widget W50 präsentiert zwei Brüche auf zwei karierten Karten. Aufgabe ist es, einen gemeinsamen Nenner zu finden und diesen über ein Feld der Handschrifterkennung einzugeben. Das Widget gibt daraufhin Auskunft, ob die beiden Brüche auf den angegebenen Nenner gebracht werden können. Weicht dieser von dem kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner (kgN) ab, so wird der kgN angezeigt. Die beiden Karten werden um den jeweiligen Bruch mit einem gemeinsamen Nenner ergänzt – bei einer richtigen Antwort mit dem eingegebenen, bei einer falschen mit dem kleinstmöglichen (vgl. Abbildung B.38).



Gib einen gemeinsamen Nenner an.

Ein gemeinsamer Nenner ist:

Stimmt das?

Gib einen gemeinsamen Nenner an.

Ein gemeinsamer Nenner ist:

2

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig.  
Man kann  $\frac{2}{12}$  und  $\frac{1}{3}$  nicht auf Nenner 2 bringen.  
Der kleinste Nenner, auf den du beide Brüche bringen kannst, ist 6.

Abbildung B.38. Widget W50: Einen gemeinsamen Nenner angeben. Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Die fünf Schwierigkeitsstufen des Widgets sind so angelegt, dass in den ersten Level gesteuert wird, wie viele Operationen durchgeführt werden müssen, um einen gemeinsamen Nenner zu erhalten. So werden in den ersten drei Level bei der Aufgabengenerierung zuerst zwei ungleiche echte Brüche erzeugt, die denselben, zufällig gewählten, gleichen Nenner  $\leq 12$  aufweisen. In Level 1 wird anschließend einer der beiden mit einem Teiler des Nenners erweitert. In Level 2 wird diese Erweiterungszahl zufällig aus den natürlichen Zahlen im Intervall  $[2; 10]$  gewählt. In beiden Level ist also nur eine Kürzung oder Erweiterung durchzuführen, um einen gemeinsamen Nenner zu erhalten. Auf Stufe 3 kann ein gemeinsamer Nenner gefunden werden, indem beide Brüche gekürzt werden. Dazu werden bei der Generierung der Aufgabe beide Brüche mit unterschiedlichen natürlichen Zahlen aus Intervall  $[2; 10]$  erweitert. Der Generierungsalgorithmus für Stufe 4 erzeugt Aufgaben, die durch Kürzen des einen und Erweitern des anderen Bruchs gelöst werden können. Dazu werden zwei vollständig gekürzte, echte Brüche mit Nenner  $\leq 7$  erzeugt. Einer der beiden Brüche wird zunächst auf den kgN erweitert und anschließend nochmals mit einer zufälligen Erweiterungszahl  $\leq 10$ . In der letzten Stufe werden zwei echte, vollständig gekürzte Brüche mit unterschiedlichen Nennern  $\leq 20$  erzeugt. Die Setlänge beträgt in allen Stufen 3.

Das Widget loggt die Eingabe, deren Korrektheit sowie die Aufgabe in Form eines Tupels, das beide Brüche enthält.

#### B.4.2.11 W51: Kürzen

Das ursprüngliche Widget W51 (im Folgenden W51a) greift eine Aufgabenstellung aus Padberg und Wartha (2017) auf: „Der Bruch [...] ist durch Erweitern entstanden. Aus welchem Bruch kann er entstanden sein?“ (S. 54). Dieses Widget wurde im Laufe des zweiten Entwicklungszyklus durch Widget W51b „Kürze soweit wie möglich.“ ersetzt, da die Aufgaben in W51a einen Übergang vom Erweitern hin zum Kürzen vermittelt, der dem Ablauf im iBook nicht entspricht. In beiden Widgets wird auf einer karierten Karte die Gleichung einer Kürzung angezeigt, von der eine Seite (W51a: linke Seite, W51b: rechte Seite) auszufüllen ist (Abbildung B.39). Dabei kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz; Lösungshilfen können zur Unterstützung herangezogen werden (vgl. Tabelle B.16 und Tabelle B.17).

Tabelle B.16

*Gestufte Lösungshilfen in Widget W51a.*

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
 Gering	Beim Erweitern ändert sich der Wert des Bruches nicht. Überlege, was mit Zähler und Nenner passiert.
 Mittel	Erweitern bedeutet, dass die Einteilung des Ganzen verfeinert wird. Zähler und Nenner werden um den <i>gleichen Faktor vergrößert</i> .
 Hoch	Ein zu $f$ gleichwertiger Bruch mit kleinerem Zähler und Nenner ist zum Beispiel $g$ .

*Anmerkung.*  $f$  Bruch der Aufgabenstellung.  $g$  vollständig gekürzter Bruch

**Der Bruch ist durch Erweitern entstanden.**  
Aus welchem Bruch könnte er entstanden sein?

$\frac{\quad}{\quad} = \frac{9}{72}$

Stimmt das?

Erweitern bedeutet, dass die Einteilung des Ganzen verfeinert wird.  
Zähler und Nenner werden um den gleichen Faktor vergrößert.

**Kürze soweit wie möglich.**

$\frac{9}{36} = \frac{3}{12} = \frac{\quad}{\quad}$

Stimmt das?

Das war fast richtig. Man kann  $\frac{3}{12}$  noch weiter kürzen!

Abbildung B.39. Widgets 51a (links) & 51b (rechts): Symbolische Aufgaben zum Kürzen von Brüchen. Aufgabe aus Widget W51a mit Lösungshilfe von mittlerem Unterstützungsgrad (links) und Reaktion von Widget W51b auf nicht vollständig gekürzte Eingabe.

Tabelle B.17

Gestufte Lösungshilfen in Widget W51b.

Grad der Unterstützung	Text der Lösungshilfe
?	Gering Kürzen bedeutet, dass die Einteilung vergrößert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in weniger Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert.
??	Mittel Kürzen bedeutet, dass die Einteilung vergrößert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in weniger Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert. Überlege dir, mit welchen Zahlen du kürzen kannst.
???	Hoch Kürzen bedeutet, dass die Einteilung vergrößert wird. Das bedeutet, dass das Ganze in weniger Stücke unterteilt wird. Der Wert des Bruches bleibt dabei unverändert. Du kannst mit X kürzen.

Für die Erzeugung einer Aufgabe des Widgets W51a wird der Bruch generiert, der in der Aufgabe einzugeben ist, und mit einer zufälligen Zahl zwischen 2 und 10 erweitert. Dieser erweiterte Bruch wird im Widget auf der rechten Seite der Gleichung angezeigt. Im ersten Level werden Zweier-Sets an Stammbrüchen (Nenner  $\leq 12$ ) generiert. Anschließend wird die Einschränkung auf Stammbrüche aufgehoben (Setlänge 5, Nenner weiterhin  $\leq 12$ ), im letzten Level (Setlänge 5) wird der maximal mögliche Nenner des Ergebnisbruchs zusätzlich auf 20 erhöht.

Nach der Erstellung von Widget W51b wurden auch die Level angepasst, um die Kürzbarkeit mit mehr als einer Zahl zu garantieren. Auch hier wird der Ergebnisbruch über den Bruchgenerator erzeugt und mit einer zufälligen Zahl erweitert. Die Abstufung in drei Anforderungsniveaus bleibt aus Widget W51a erhalten. Die Setlänge ist zunächst 3, ab Stufe 2 5. Generiert werden nur vollständig gekürzte, echte Brüche, deren in den ersten Leveln maximaler Nenner 12 und in der letzten Stufe 20 ist. Erweitert werden die Brüche

mit einer zufällig gewählten Zahl, die mindestens zwei Primfaktoren hat. In Stufe 1 ist diese Erweiterungszahl 4, 6 oder 9, in Stufe 2 4, 6, 8, 9 oder 12, und in Stufe 3 6, 8, 9 oder 15.

Beide Widgets loggen die Eingabe sowie deren Korrektheit. Die jeweils aktuelle Aufgabe wird über den vollständig gekürzten Bruch und die Erweiterungszahl gesichert. Beim Aufruf einer Lösungshilfe wird aufgezeichnet, welcher Unterstützungsgrad angefordert wurde. Die Logs sind durch Strings voneinander zu unterscheiden.

#### B.4.2.12 W52: Natürliche Zahlen als Brüche schreiben

Widget W52 thematisiert die Einbettung von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Q}$  und stellt die Aufgabe, eine gegebene natürliche Zahl als Bruch zu schreiben. Teilweise ist dabei der Zähler oder Nenner des Bruchs bereits vorgegeben. Für die Brucheingabe kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz (vgl. Abbildung B.40).

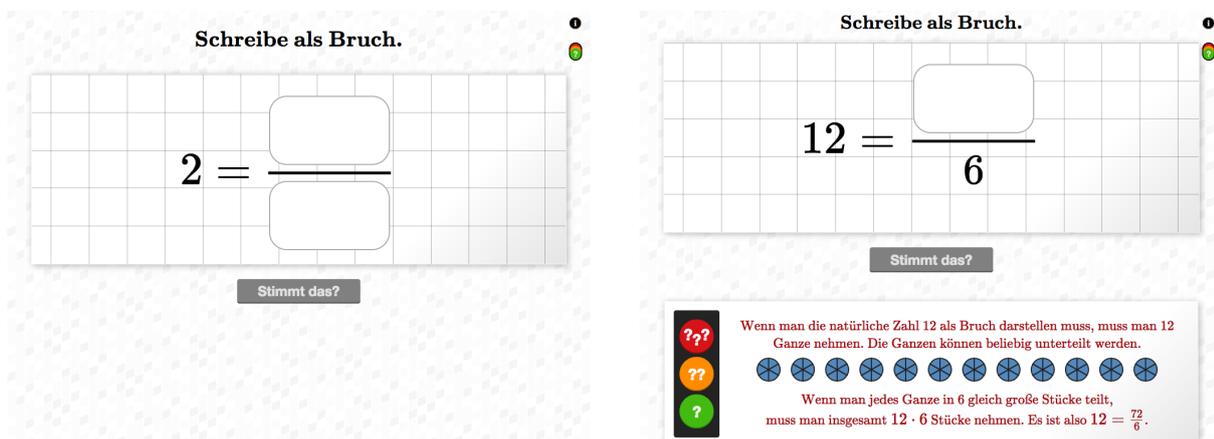


Abbildung B.40. Widget W52: Eine natürliche Zahl als Bruch schreiben. Aufgabenstellung (links) und eingblendete Lösungshilfen mit hohem Unterstützungsgrad (rechts).

Das Widget gibt textuell Rückmeldung, ob die Aufgabe korrekt gelöst wurde. Zusätzlich wird bei falschen Lösungen eine bzw. die richtige Lösung angegeben. Die übliche Symbolik und Farbgebung unterstützt das Feedback.

Im Widget sind gestufte Lösungshilfen hinterlegt (s. Tabelle B.18), die auch einen Repräsentationswechsel zu einer ikonischen Darstellung vollziehen.

Die einzubettenden natürlichen Zahlen werden zufällig gewählt. Die maximal mögliche Zahl steigt über drei Niveaus von 12 über 15 auf 20 an. Die erste Stufe hat Setlänge 2, die folgenden 5. Ab zweiter Stufe ist entweder der Zähler oder der Nenner vorgegeben, um Einbettungen der Form  $\frac{n}{1}$  auszuschließen. Welche Komponente gegeben ist, wird per Zufall entschieden. Sie wird durch zufällige Wahl des Nenners ( $\leq 10$ ) bei der Aufgabengenerierung festgelegt.

Bei Korrekturanforderung loggt das Widget die Korrektheit, die Eingabe und die Aufgabe, die durch die natürliche Zahl und den ggf. gegebenen Zähler oder Nenner charakterisiert

Tabelle B.18  
Gestufte Lösungshilfen in Widget W52.

Grad der Unterstützung	vorgegebene Komponente	Text der Lösungshilfe
 Gering		Wenn man die natürliche Zahl $N$ als Bruch darstellen muss, muss man $N$ Ganze nehmen. Die Ganzen können beliebig unterteilt werden.
 Mittel	keine	Am einfachsten ist es, jedes Ganze in <b>ein</b> Stück, das heißt gar nicht zu teilen.
	Zähler $e$	Wenn $e$ Stücke also $N$ Ganze sind, muss jedes Ganze in $e : N$ gleich große Stücke geteilt werden.
	Nenner $d$	Wenn man jedes Ganze in $d$ gleich große Stücke teilt, muss man insgesamt $d \cdot N$ Stücke nehmen.
 Hoch		Es ist also $N = \frac{e}{d}$ .

*Anmerkung.* Der in der Tabelle angegebene Text wird jeweils zum Text der Lösungshilfen mit niedrigerem Unterstützungsgrad hinzugefügt. Zusätzlich werden auf der Karte  $N$  Kreise angezeigt, die bei einer vorgegebenen Komponente dem Nenner entsprechend eingeteilt sind.

ist. Bei Anforderung einer Lösungshilfe wird der angeforderte Unterstützungsgrad aufgezeichnet. Logs der beiden Ereignisse können durch einen jeweils mitgeloggten String („solution“ bzw. „tip“) unterschieden werden.

#### B.4.2.13 W53: Wertgleichheit erkennen

Der Übungsteil und damit das gesamte Kapitel enden mit Widget W53. Es handelt sich dabei um ein Single-Choice-Widget, in dem durch Antippen einer der Antwortmöglichkeiten „Ja“ bzw. „Nein“ entschieden werden muss, ob die beiden Brüche wertgleich sind, die auf einer Karte dargestellt werden (vgl. Abbildung B.41).

Beim Einloggen einer Antwort wird die Karte durch das korrekte (Un-)gleichheitssymbol ergänzt, das durch eine Animation aus der Vertikalen zum Bildschirm einzufliegen scheint. Durch eine Farbcodierung (ergänzttes Symbol grün: richtige Antwortmöglichkeit ausgewählt, ergänztes Symbol rot: falsche Antwortmöglichkeit ausgewählt) wird das textuelle Feedback über die Korrektheit der Antwort ergänzt.

Bei der Generierung von Aufgaben wird für jede Aufgabe mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% eine Wertgleichheit erzwungen: es wird ein zufälliger Bruch gemäß der Einschränkungen des Levels generiert und der zweite aus diesem durch Erweiterung mit einer zufälligen Zahl erzeugt. Ansonsten werden zwei zufällige, wertungleiche Brüche mit Nenner  $\leq 50$  als Aufgabe generiert. Der Nenner der Brüche ist im Fall einer Wertgleichheit eingeschränkt:

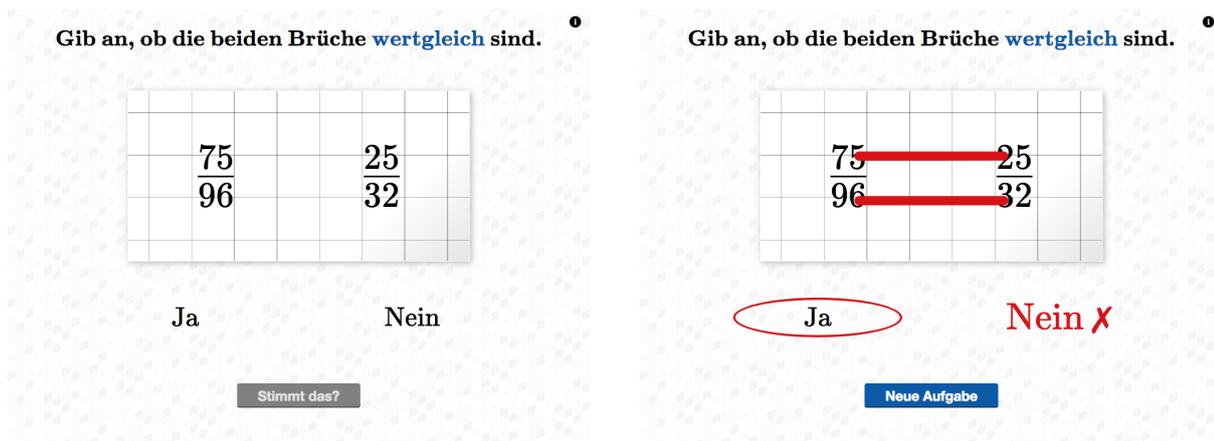


Abbildung B.41. Widget W53: Sind die Brüche wertgleich? Aufgabenstellung (links) und Korrektur einer falschen Antwort (rechts; während der Animation).

Zu Beginn werden die Nenner  $\leq 25$ , in Stufe 2 zwischen 10 und 25 und in Stufe 3  $\leq 50$  gewählt. Setlänge ist stets 5.

Beim Einloggen einer Antwortmöglichkeit werden als Prozessdaten die beiden Brüche sowie die Korrektheit der Antwort geloggt.

## B.5 Kapitel 5: Brüche auf dem Zahlenstrahl

In Kapitel 5 wird die Darstellung von Brüchen auf dem Zahlenstrahl behandelt. Zu diesem Zweck kommen drei Arten von Widgets zum Einsatz: interaktive Diagramme, Widgets zum Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl und Widgets zum Ablesen von einem Zahlenstrahl. Da dieselben Widgets mehrfach an unterschiedlichen Stellen im Kapitel mit unterschiedlicher Parametrisierung bezüglich vorkommender Brüche und Einteilung des Zahlenstrahls eingesetzt werden, wird zunächst jede Widgetart beschrieben (Abschnitt B.5.1). Die Abfolge der Widgets im Kapitel mit ihren Charakteristika beschließt das Kapitel (Abschnitt B.5.2).

### B.5.1 Beschreibung der Widgettypen

In diesem Abschnitt werden die drei Widgettypen des Kapitels vorgestellt. Alle Widgets sind in CindyJS implementiert.

#### B.5.1.1 Interaktive Diagramme

Vier interaktive Diagramme dienen der explorativen Einführung des Zahlenstrahls. Dabei wird in allen Fällen eine bereits bekannte graphische Darstellungsform durch eine Animation in einen Zahlenstrahl verwandelt: In einem der vier Widgets wird ein Kreisdiagramm auf einen Zahlenstrahl „abgewickelt“ (Programmierung: Bernhard Werner), in den anderen dreien ein Rechteck „geschrumpft“ (s. Abbildung B.42).

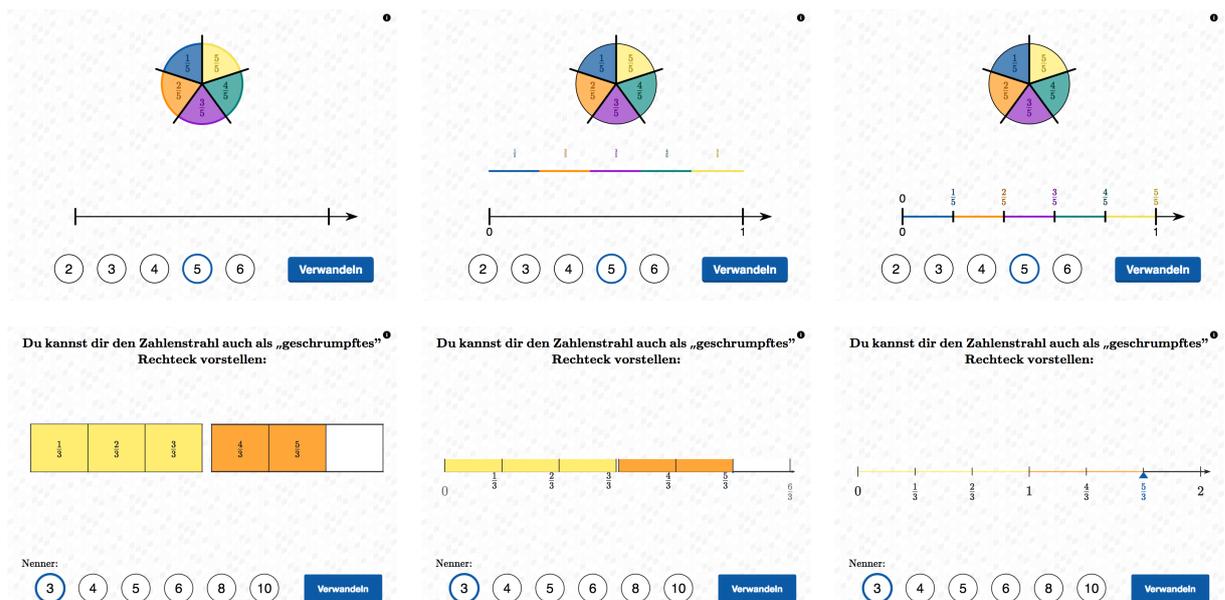


Abbildung B.42. Interaktive Diagramme in Kapitel 5. Abwickeln eines Kreisdiagramms (oben) und Schrumpfen eines Rechteckdiagramms (unten). Von links nach rechts jeweils Beginn, Mitte und Ende der Animation.

Beide Widgettypen erlauben es, einen Nenner auszuwählen (aus der Menge  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  im Kreistyp und aus der Menge  $\{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$  im Rechtecktyp). Die Visualisierung wird dementsprechend in gleich große Stücke unterteilt. Im Falle der Rechteckdiagramme wird zusätzlich ein zufälliger Anteil gefärbt und beschriftet, während im Kreisdiagramm alle Kreisteile durchnummeriert werden.

Bei Drücken des Buttons „Verwandeln“ startet eine Animation, welche die Darstellung auf bzw. in einen Zahlenstrahl transformiert. Das erneute Drücken des Buttons löst eine Animation zurück zum Anfangszustand aus. Für die Animationen greifen die Widgets auf die Animationsbibliothek zurück, die vom Autor für CindyJS entwickelt wurde (s. Abschnitt 6.2.4).

### B.5.1.2 Brüche auf einem Zahlenstrahl eintragen

In den Widgets zum Eintragen auf einem Zahlenstrahl werden die einzutragenden Brüche mittig unterhalb des Zahlenstrahls angezeigt. Über Drag-and-Drop können sie mit dem Finger auf dem Zahlenstrahl platziert werden. Dabei wird stets der Bruch verschoben, der dem Finger auf dem Touchscreen am nächsten liegt. Damit der Bruch nicht vom verschiebenden Finger verdeckt wird, springt dieser bei der Berührung des Touchscreens um 50 px nach oben. Sobald sich der Bruch dem Zahlenstrahl auf 50 px nähert, springt er auf die nächstgelegene Stelle auf dem Zahlenstrahl. Diese Sprungstellen müssen nicht notwendigerweise auf der angezeigten Einteilung liegen, sondern können im Widgetcode feiner definiert werden.

Der Widgettyp unterstützt das Eintragen mehrerer Brüche innerhalb einer Aufgabe. Um das Feedback besser fokussieren zu können, ist in den meisten Widgets des iBooks jedoch stets nur ein Bruch auf den Zahlenstrahl zu schieben.

Feedback erfolgt sowohl in Text- als auch in Bildform: Eine richtige Antwort wird grün markiert. Ein falsch platzierter Bruch wird mit einem roten, semitransparenten Kreuz durchgestrichen und mit der korrekten Beschriftung für diese Position darüber korrigiert. An der richtigen Stelle wird der Bruch mit einem grünen Dreieck auf dem Zahlenstrahl markiert und beschriftet. Zusätzlich wird der Stammbruch angetragen, der den Nenner des einzutragenden Bruchs aufweist. Gebogene Pfeile von Einteilung zu Einteilung visualisiert den Zählprozess bis zur richtigen Position (vgl. Abbildung B.43).

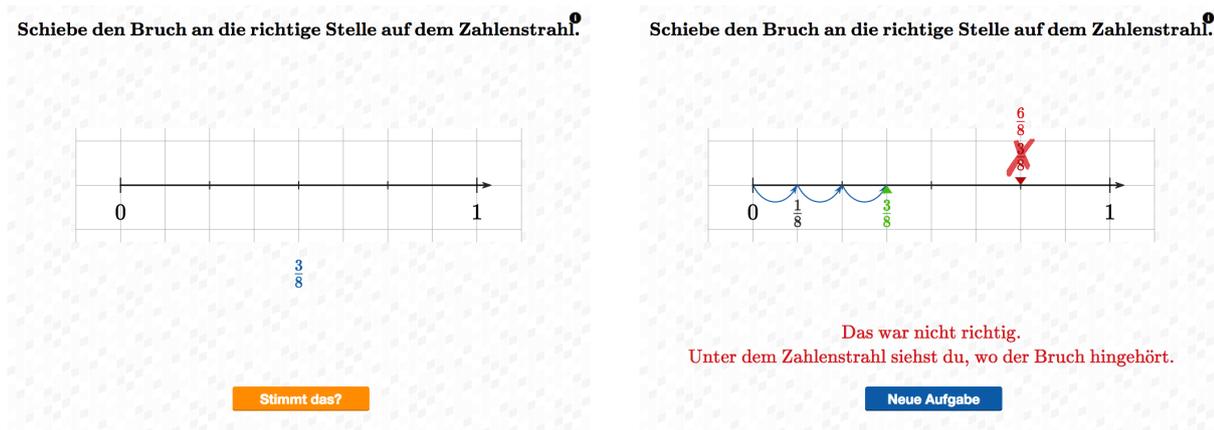


Abbildung B.43. Widget zum Eintragen eines Bruchs auf einen Zahlenstrahl. Grundstellung der Aufgabe (links) und Korrektur eines fehlplatzierten Bruches (rechts).

Bei Korrektur speichern die Widgets, ob der Bruch korrekt platziert wurde. Zusätzlich wird der Bruch selbst und Stelle des Zahlenstrahls erfasst, auf die er geschoben wurde (jeweils als Zähler-Nenner-Paar). Zusätzlich loggen die Widgets die Fingerbewegungen, die zwischen Aufgabenstart und Korrekturanforderung auf dem Touchscreen getätigt wurden. Sie werden vor dem Speichern auf dieselbe Art und Weise wie in Widgets W10 und W11 aufgezeichnet und geglättet (s. Abschnitt B.1.2.4).

### B.5.1.3 Brüche von einem Zahlenstrahl ablesen

Im letzten innerhalb des Kapitels eingesetzten WIDGETTYP ist es stets die Aufgabe, einen Bruch zu bestimmen, der mit einem blauen Dreieck auf einem Zahlenstrahl markiert ist. Die Antwort wird mit dem Finger in die Zahlenfelder unterhalb des Zahlenstrahls eingetragen (vgl. Abbildung B.44). Hierbei kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz.

Wurde der Bruch korrekt abgelesen, so wird dies textuell zurückgemeldet und die Eingabe mit einem grünen Haken versehen. Im Falle einer falschen Antwort unterscheidet sich das Feedback je nachdem, ob der abzulesende Bruch auf der Einteilung liegt oder nicht. In beiden Fällen wird die korrekte Antwort in einem kurzen Text erklärt:

Im ersten Aufgabentyp entspricht die Einteilung des Zahlenstrahls dem Nenner des abzulesenden Bruchs. Daher wird zur Bestimmung des Bruches zunächst beschrieben, in wie viele gleich große Stücke der Zahlenstrahl zwischen 0 und 1 unterteilt ist und anschließend angegeben, wie viele solcher Stücke links von der Markierung liegen. Ein auf den

Zahlenstrahl aufgelegtes, orangenes Rechteck der Länge 1, das dem Nenner entsprechend in gleich große Stücke unterteilt ist, unterstützt die verbale Beschreibung des Nenners. Für den Zähler wird in gleicher Weise ein violettes Rechteck über dem orangenen eingeblendet. Es reicht vom Start des Zahlenstrahls bis zum markierten Bruch und entspricht in seiner Segmentierung dem orangenen Rechteck, welches das Ganze visualisiert. Der Zählvorgang wird in beiden Rechteck durch eine leichte Abstufung der Füllfarbe im Wechsel erleichtert (vgl. Abbildung B.44).

Im zweiten Aufgabentyp liegt der abzulesende Bruch immer mittig in einem Segment, das von der Unterteilung auf dem Zahlenstrahl erzeugt wird. Für eine korrekte Antwort muss die Einteilung des Zahlenstrahls also gedanklich verfeinert werden. Das textuelle Feedback gibt einen Lösungsweg an, indem es zunächst die beiden Brüche auf dem Zahlenstrahl angibt, die das Segment begrenzen. Der gesuchte Bruch ist genau in der Mitte zwischen diesen beiden verortet. Daher werden sie mit zwei erweitert angegeben, so dass sich der gesuchte Bruch leicht bestimmen lässt (vgl. Abbildung B.44).

Der Button „Wo liegt mein Bruch?“ gibt im Falle einer falschen Antwort zusätzlich die Möglichkeit, sich den eingegebenen Bruch auf dem Zahlenstrahl anzeigen zu lassen. Der Bruch wird mit einem roten Dreieck auf dem Zahlenstrahl markiert und in roter Schriftfarbe beschriftet. Liegt der Bruch auf dem Zahlenstrahl außerhalb des dargestellten Ausschnittes, so wird der Ausschnitt vergrößert bis die nächstgrößere ganze Zahl – und damit der Bruch selbst – dargestellt werden kann (vgl. Abbildung B.44).

Bei Korrekturanforderung wird gespeichert, ob der Bruch korrekt abgelesen wurde. Außerdem loggen die Widgets den auf dem Zahlenstrahl markierten Bruch und den eingegebenen Bruch (jeweils als Zähler-Nenner-Paar).

## B.5.2 Aufbau des Kapitels

Das Kapitel gliedert sich in mehrere Teile, welche die Thematik „Brüche auf Zahlenstrahlen“ in unterschiedlichen Fällen behandeln und auch Übungsaufgaben zu den angesprochenen Aspekten beinhalten. Sie werden in den Abschnitten B.5.2.1–B.5.2.4 beschrieben. Im abschließenden Übungsteil wird die Thematik allgemein behandelt (s. Abschnitt B.5.2.5).

### B.5.2.1 Echte Brüche auf dem Zahlenstrahl

Das Kapitel startet mit zwei interaktiven Diagrammen (s. Abschnitt B.5.1.1), welche die Übertragung von einer Darstellung eines echten Bruches am Kreis- (W54) bzw. Rechteckdiagramm (W55) auf eine Darstellung am Zahlenstrahl von 0 bis 1 durch Animationen verbildlichen. Dieser Lerngegenstand wird anschließend in einem Merksatz festgehalten, bevor zwei interaktive Aufgaben zur Verfügung stehen, in denen mit echten Brüchen das Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl (W56, s. Abschnitt B.5.1.2) bzw. das Ablesen von einem Zahlenstrahl (W57, s. Abschnitt B.5.1.3) trainiert werden kann. Die Unterteilung des Zahlenstrahls entspricht in beiden Widgets immer dem Nenner des einzutragenden bzw. abzulesenden Bruchs. Die Aufgaben sind leicht nach Schwierigkeitsgrad gestuft: Wenn ein

**Bestimme den markierten Bruch.**

0  $\frac{1}{4}$  1

Stimmt das?

**Bestimme den markierten Bruch.**

0  $\frac{1}{4}$  1

Das war nicht richtig. Der markierte Bruch ist  $\frac{1}{4}$ .  
Der Zahlenstrahl ist von 0 bis 1 in 4 gleich große Stücke geteilt.  
Ein solches Stück liegt links von der Markierung.

2  
5

Neue Aufgabe Wo liegt mein Bruch?

**Bestimme den markierten Bruch.**

0  $\frac{2}{3}$   $\frac{5}{6}$  1

Das war nicht richtig.  
Der markierte Bruch liegt genau in der Mitte zwischen  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  und  $\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ .  
Er ist also  $\frac{5}{6}$ .

5  
3

Neue Aufgabe Wo liegt mein Bruch?

**Bestimme den markierten Bruch.**

0  $\frac{2}{3}$  1  $\frac{5}{3}$  2

Das war nicht richtig.  
Der markierte Bruch liegt genau in der Mitte zwischen  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  und  $\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ .  
Er ist also  $\frac{5}{6}$ .

5  
3

Neue Aufgabe Wo liegt mein Bruch?

Abbildung B.44. Widget zum Ablesen eines Bruchs von einem Zahlenstrahl. Beispiel einer Aufgabenstellung (oben links), unterschiedliche Feedback-Modi (oben rechts und unten links) und Auswirkung auf die Darstellung, wenn der eingegebene Bruch nicht innerhalb des ursprünglich angezeigten Intervalls liegt (unten rechts).

Set von drei zufälligen, echten Brüchen mit Nenner  $\leq 5$  erfolgreich bearbeitet ist, generieren die Widget anschließend Sets von fünf zufälligen, echten Brüchen mit Nenner  $\leq 12$ .

### B.5.2.2 Unechte Brüche auf dem Zahlenstrahl

Die folgenden drei Widgets erweitern die Darstellung am Zahlenstrahl auf unechte Brüche. Zur Einführung dient eine Animation (Widget W55) mit mehreren Rechtecken (s. Abschnitt B.5.1.1), die einen unechten Bruch darstellen. Für diesen wird ein zufälliger, echter Bruch mit dem eingestellten Nenner generiert, zu dem anschließend ein oder zwei Ganze addiert werden (stets ein Ganzes, falls Nenner 10 gewählt ist, um die Darstellung lesbar zu halten).

Nach einem Merksatz zu unechten Brüchen folgen zwei Widgets, mit denen geübt werden kann, einen unechten Bruch auf einem Zahlenstrahl einzutragen (W59) bzw. von einem Zahlenstrahl abzulesen (W60). Dazu stufen sich die Aufgaben in zwei Level. Zunächst sind drei Brüche aus dem Intervall  $(1; 2)$  mit Nenner  $\leq 5$  einzutragen bzw. abzulesen. Sets der Stufe 2 bestehen aus je fünf Brüchen mit Nenner  $\leq 12$ , die alle zwischen 1 und 4 liegen und

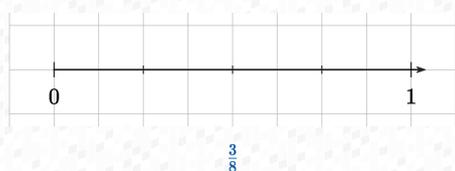
deren Wert nicht ganzzahlig ist. Die Unterteilung des Zahlenstrahls entspricht in beiden Widgets immer dem Nenner des einzutragenden bzw. abzulesenden Bruchs.

### B.5.2.3 Allgemeine Zahlenstrahlen

Im Anschluss werden Brüche auf Zahlenstrahlen thematisiert, deren Einteilungsstruktur nicht dem jeweiligen Nenner entspricht. Zur Einführung zeigt ein interaktives Diagramm (Widget W61), wie sich die Rechteckdarstellung eines Bruches in einen bereits gegebenen Zahlenstrahl transformieren kann (s. Abschnitt B.5.1.1). Der Zahlenstrahl ist – im Gegensatz zu den vorherigen Verwendungen des interaktiven Diagramms – bereits vor der Animation sichtbar und weist eine gröbere Einteilung auf als die Rechteckdarstellung des Bruches.

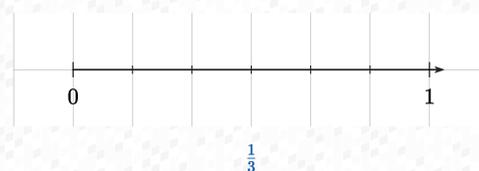
Ein Merksatz fasst zusammen, welche Gesetzmäßigkeiten für die Verfeinerung einer Zahlenstrahleinteilung gelten. Darauf folgt im iBook erneut ein Widgetpaar zum Eintragen und Ablesen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl (Eintragen: W62, Ablesen: W63), das die Aspekte des Merksatzes aufnimmt. Die Aufgaben der Widgets weisen ein einheitliches Anforderungsniveau auf. Der Karteikasten kommt dennoch zum Einsatz, um falsch bearbeitete Aufgaben den Nutzerinnen und Nutzern erneut zu präsentieren. Es werden stets sechs Aufgaben generiert. Dazu wird für jede Aufgabe zunächst eine zufällige Zahl  $n$  aus der Menge  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  gewählt und der Zahlenstrahl in  $n$ -tel unterteilt. Als einzutragender bzw. abzulesender Bruch wird ein zufälliger, echter Bruch mit Nenner  $2n$  und ungeradem Zähler erzeugt. Der so generierte Bruch liegt stets in der Mitte zwischen zwei Segmentierungen auf dem Zahlenstrahl. In Widget W62 (Eintragen auf einem Zahlenstrahl) wird dieser Aufgabentyp im Wechsel mit einem Zahlenstrahl mit feinerer Einteilung eingesetzt (vgl. Abbildung B.45). Für diesen zweiten Aufgabentyp wird ein zufälliger, echter Bruch mit Nenner  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  generiert und der Zahlenstrahl in  $2n$  gleich große Stücke unterteilt

Schiebe den Bruch an die richtige Stelle auf dem Zahlenstrahl.



Stimmt das?

Schiebe den Bruch an die richtige Stelle auf dem Zahlenstrahl.



Stimmt das?

Abbildung B.45. Widget W62: Eintragen eines Bruches auf einem Zahlenstrahl, dessen Unterteilung gröber (links) bzw. feiner (rechts) als der Nenner des einzutragenden Bruches ist.

### B.5.2.4 Wertgleiche Brüche auf dem Zahlenstrahl

Im letzten Einführungsteil des Kapitels werden wertgleiche Brüche auf dem Zahlenstrahl thematisiert. Zu diesem Zweck kommt ein Widget zum Eintragen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl zum Einsatz, das sich von den anderen Widgets dieser Art leicht unterscheidet. Zweck des Widgets W64 ist es, zu vermitteln, dass wertgleiche Brüche denselben Platz auf dem Zahlenstrahl einnehmen. Daher sind im Widget nicht nur einer, sondern mehrere Brüche ( $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{10}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{5}{3}$  und  $\frac{10}{3}$ ) auf einem Zahlenstrahl einzutragen. Der Zahlenstrahl reicht von 0 bis 4, ist an natürlichen Zahlen unterteilt und mit einem Sechstel-Gitter hinterlegt (s. Abbildung B.46). Diese Auswahl an Brüchen stellt die einzige Aufgabe dar, die in diesem Widget bearbeitet werden kann.

**Schiebe die Brüche an die richtige Stelle auf dem Zahlenstrahl.**

Du hast noch nicht alle Brüche platziert!

**Stimmt das?**

Abbildung B.46. Widget W64: Eintragen mehrerer, zum Teil wertgleicher Brüche auf einem Zahlenstrahl.

Als Korrektur färbt das Widget richtig platzierte Brüche grün, falsch platzierte Brüche rot und noch nicht platzierte Brüche orange. Das textuelle Feedback gibt Rückmeldung, dass Brüche noch nicht platziert sind bzw. falsch platziert sind – aber nicht, welche dies betrifft. Ist die Aufgabe korrekt gelöst, wird dies zurückgemeldet und angezeigt, dass die Aufgabe jetzt geschlossen werden kann.

Bei jeder Korrekturanforderung werden als Prozessdaten die Fingerbewegungen während der Aufgabenbearbeitungen geloggt sowie die Vollständigkeit der Aufgabenlösung.

### B.5.2.5 Übungsteil

Den Abschluss des Kapitels bilden Widgets W65 und W66.

In Widget W65 ist ein Bruch auf einem Zahlenstrahl einzutragen (s. Abschnitt B.5.1.2). Die unterschiedlichen Anforderungsniveaus orientieren sich an den vorherigen Widgets dieser Art: Ein Set des ersten Niveaus besteht aus sechs zufälligen, echten Brüchen mit Nenner  $\leq 12$ , wobei der erste Bruch stets Nenner 10 aufweist. Der Zahlenstrahl, auf dem die Brüche platziert werden sollen, reicht von 0 bis 1 und ist entsprechend dem jeweiligen Nenner vorunterteilt. Auf Stufe 2 werden pro Set vier zufällige, echte Brüche generiert. Die Hälfte davon wird mit einem Nenner  $\in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  und ungeradem Zähler erzeugt; eine Einheit der Unterteilung ist als die Hälfte des Nenners definiert. Für die andere Hälfte des Sets werden echte Brüche mit Nenner  $\leq 6$  zufällig generiert und als Unterteilung das zwei- oder dreifache des Nenners gewählt. Die Generierung von Aufgaben des dritten Levels entspricht der des zweiten, allerdings wird hier stets zum erzeugten Bruch die natürliche Zahl 1 addiert, so dass unechte Brüche entstehen. Sets der abschließenden vierten Stufe bestehen aus je zwei Aufgaben der drei vorherigen Stufen.

Widget W66 ist das Gegenstück zu W65: Hier sollen Brüche von einem Zahlenstrahl abgelesen werden (s. Abschnitt B.5.1.3). Die Aufgabengenerierung folgt derselben Stufung wie Widget W65. Allerdings entfällt auf dem zweiten Niveau die Variante, in der der Zahlenstrahl feiner unterteilt ist, als der Nenner des erzeugten Bruchs, da diese Variante sich beim Ablesen nicht von den Aufgaben der ersten Stufe unterscheidet.

## B.6 Kapitel 6: „Mehr als ein Ganzes“ – Gemischte Zahlen und unechte Brüche

Das sechste Kapitel des iBooks dient der Einführung von gemischten Zahlen.

### B.6.1 Einführungsteil

Das Kapitel beginnt mit einem interaktiven Diagramm, welches das vorherige Kapitel aufgreift: Die Brüche  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{11}{3}$  sollen auf einem Zahlenstrahl platziert werden. Der Zahlenstrahl zeigt das Intervall  $[0; 4]$  und ist mit einem Gitter hinterlegt, das ein Ganzes drittelt. Funktionalität, Feedback und Datenerhebung sind dieselben wie in Widget W64 (s. Abschnitt B.5.2.4).

In einem Texteingabewidget (W68, vgl. Abschnitt B.1.1.2) sollen die oben genannten Brüche in die Gruppen „mehr als ein Ganzes“ und „weniger als ein Ganzes“ eingeordnet werden.

Anschließend wird die Terminologie *unechte Brüche* und *gemischte Zahlen* im iBooktext eingeführt und an einem Zahlenstrahl visualisiert. Über eine Darstellung des unechten Bruches  $\frac{11}{3}$  an Kreisdiagrammen erfolgt anschließend die Übertragung auf den symbolischen Algorithmus zur Umrechnung von unechten Brüchen in gemischte Zahlen.

Dieser kann in Widget W69 angewendet werden. Dasselbe Vorgehen wird anschließend genutzt, um den Rechenweg von einer gemischten Zahl zu einem unechten Bruch am Beispiel  $2\frac{3}{7}$  vorzuführen. Widget W70 dient der Anwendung dieser Rechnung.

### B.6.1.1 Widgets W69 & W70: Gemischte Zahlen und unechte Brüche

Obwohl sich die beiden Widgets W69 und W70 im Einführungsteil des Kapitels befinden, sind sie als vollständige Übungsaufgaben ausgearbeitet. Jedes der beiden Widget kann als Umkehrung des jeweils anderen verstanden werden: Während es in Widget W69 Aufgabe ist, einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umzuwandeln, so ist in W70 eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch umzuwandeln.

In beiden Widgets kommt die Handschrifterkennung zum Einsatz; im Fall von W69 zum ersten Mal für gemischte Zahlen mit drei Feldern (s. Abbildung B.47).

Das Feedback meldet textuell zurück, ob die eingegebene Lösung korrekt war oder nicht. Die Eingabe wird außerdem entweder insgesamt mit einem großen Haken abgehakt, oder die einzelnen Komponenten der Eingabe mit kleinen Haken bzw. Kreuzen als richtig bzw. falsch gekennzeichnet (vgl. Abbildung B.47). Für ein detaillierteres Feedback kann man in beiden Widgets über den von unten einfahrenden „Erklär´s mir!“-Button sich den Rechenweg einblenden lassen. Die Farben, die dabei für die jeweiligen Zwischenschritte genutzt werden, entsprechen denen des Merksatzes im iBooktext.

**Wandle den unechten Bruch in eine gemischte Zahl um!**

$\frac{3}{2} =$

Stimmt das?

**Wandle die gemischte Zahl in einen unechten Bruch um!**

$1\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig.

$1\frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

Erklär's mir!

Abbildung B.47. Widgets W69 (links) & W70 (mit Feedback, rechts): Umwandeln zwischen unechten Brüchen und gemischten Zahlen.

Beide Widgets greifen zur Aufgabengenerierung auf dieselbe Definition von Stufen zurück. Die generierten Zahlen haben stets einen zufälligen Nenner  $\leq 20$ . Dabei werden zunächst echte Brüche generiert und anschließend mit einer natürlichen Zahl summiert, um einen unechten Bruch zu erhalten. Die Darstellung und interne Repräsentation erfolgt je nach Rechenrichtung als gemischte Zahl oder als unechter Bruch. Es werden drei Stufen durchlaufen: In den ersten beiden Stufen sind je Sets der Größe drei zu bearbeiten. In Stufe 1 liegt die umzurechnende Zahl zwischen eins und zwei, in Stufe 2 zwischen zwei und drei oder drei und vier (per Zufall gewählt). In der letzten Stufe bestehen die Sets aus fünf

umzurechnenden Zahlen; zu dem generierten echten Bruch wird eine zufällige natürliche Zahl  $\leq 5$  addiert.

Die Widgets erfassen in den Logdaten über einen Wahrheitswert die Information, ob die Aufgabe korrekt gelöst wurde. Darüber hinaus werden die gegebene gemischte Zahl bzw. der gegebene unechte Bruch und der eingegebene Bruch bzw. die eingegebene gemischte Zahl geloggt.

## B.6.2 Übungsteil

Der Übungsteil in Kapitel 6 besteht aus drei Widgets.

Widget W71 (Programmierung: Bernhard Werner) ist eine Adaption der „Finde drei wertgleiche Brüche“-Widgets W35 & W36 (s. Abschnitt B.4.2.1) auf gemischte Zahlen und unechte Brüche: aus zehn angezeigten Zahlen (fünf davon unechte Brüche, fünf davon gemischte Zahlen) sollen wertgleiche Paare zusammengesucht werden. Die Auswahl der Zahlen erfolgt durch Antippen, das Widget reagiert darauf auf die in Abschnitt B.4.2.1 beschriebene Art und Weise. Alle dabei angezeigten Brüche haben denselben Nenner, um ein Zuordnen nur über die Nenner auszuschließen. Im Gegensatz zu den vorherigen Widgets mit gleicher Funktionalität werden die Darstellungen hier nicht in einem Gitter, sondern zufällig auf dem Bildschirm verteilt (s. Abbildung B.48). In der Aufgabengenerierung sind drei Stufen hinterlegt. In jeder Stufe wird zunächst ein zufälliger Nenner  $d$  gewählt (Level 1:  $6 \leq d \leq 26$ , Level 2:  $4 \leq d \leq 24$ , Level 3:  $2 \leq d \leq 22$ ). Anschließend werden fünf zufällige unechte Brüche generiert, die in Level 1 zwischen eins und zwei in Level 2 zwischen zwei und vier und in Level 3 zwischen eins und sechs liegen. Zu jedem unechten Bruch wird die gemischte Zahl berechnet und jeder der beiden Schreibweisen in einem Kreis angezeigt. In jeder Stufe sind fünf Aufgaben zu bearbeiten.

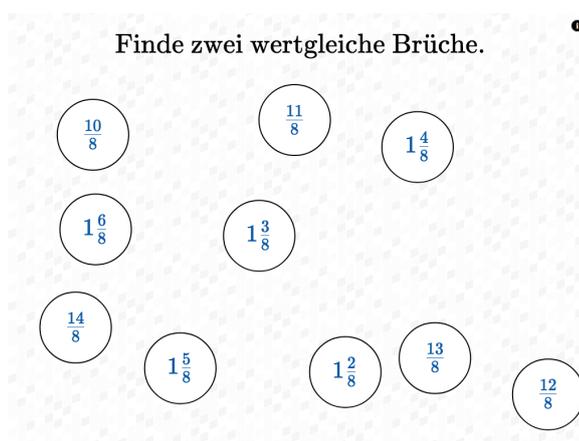


Abbildung B.48. Widget W71: Wertgleiche unechte Brüche und gemischte Zahlen identifizieren.

In Widget W72 sind die Aufgabenstellungen aus W69 und W70 (s. Abschnitt B.6.1.1) in einem Widget gebündelt. Per Zufall wird bei der Setgenerierung für jeden Bruch entschieden, ob ein unechter Bruch in eine gemischte Zahl umgewandelt werden soll oder umgekehrt.

Die Anzeige der Aufgabe entspricht dann je nachdem W69 bzw. W70; alle weiteren Charakteristika stimmen mit denen der beiden vorherigen Widgets überein. Die Aufgabenrichtung kann in den Logs anhand der Form des gegebenen Bruchs (gemischte Zahl bzw. unechter Bruch) erkannt werden.

Das Kapitel schließt mit Widget W73, einer Erweiterung von W9 (Brüche am Kreis darstellen, s. Abschnitt B.1.2.3) auf gemischte Zahlen: Ein gegebener unechter Bruch ist in den passend (dem Nenner entsprechend) vorunterteilten Kreisen zu visualisieren. Dazu können die einzelnen Kreissektoren wie in W9 mit dem Finger durch Antippen oder Überstreichen blau gefärbt werden. Auch das Feedback und die Datenerhebung entsprechen dem genannten Widgets (vgl. Abbildung B.49). Im Widget können vier Schwierigkeitsstufen durchlaufen werden. Das Set der ersten Stufe besteht aus einer Aufgabe, in der ein zufälliger unechter Bruch mit Nenner  $\leq 8$  und Wert  $< 2$  in zwei Kreisen visualisiert werden muss. In Stufe 2 liegt der Bruch zwischen zwei und drei oder drei und vier; ein Set setzt sich aus zwei Aufgaben zusammen. Auf dem dritten Level werden pro Set zwei echte Brüche mit Nenner  $\leq 12$  generiert und anschließend mit einer zufälligen Zahl aus der Menge  $\{1, 2, 3\}$  summiert. Kennzeichnend für Stufe 1–3 ist es, dass die angezeigte Anzahl an Kreisen der minimal benötigten entspricht. Level 4 unterscheidet sich in diesem Aspekt von den vorherigen. Sie folgt derselben Generierungsvorschrift wie Stufe 3, allerdings werden hier fünf Brüche pro Set generiert und stets fünf Kreise angezeigt.

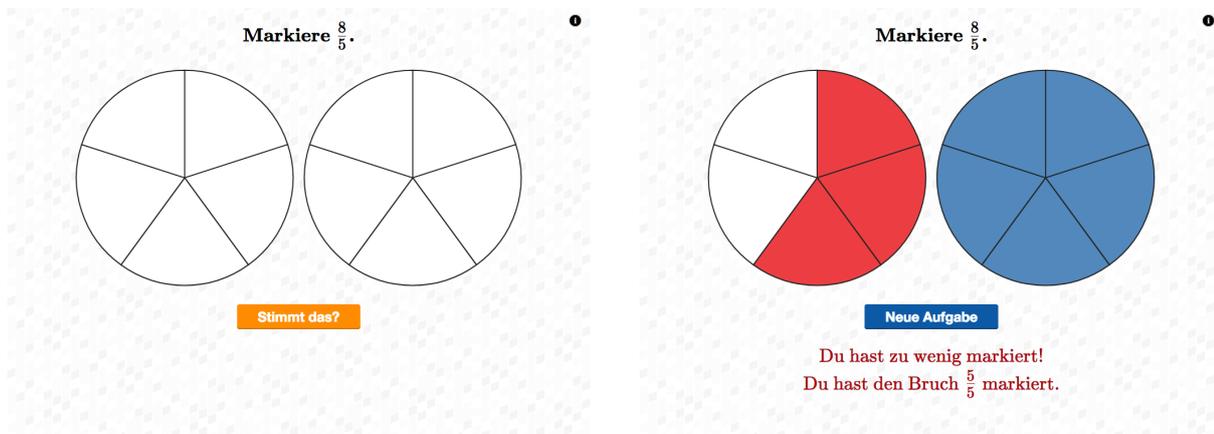


Abbildung B.49. Widget W73: Visualisierung von unechten Brüchen. Dieselbe Aufgabe in Stufe 1 (links) und Stufe 4 (rechts, mit Korrektur einer falschen Eingabe).

## B.7 Kapitel 7: „Welcher Bruch ist größer?“ – Größenvergleich von Brüchen

Das siebente und letzte Kapitel des iBooks widmet sich dem Größenvergleich zweier Bruchzahlen. Dabei konzentrieren sich Einführung und Widgets auf die Bestimmung des *größeren* Bruchs. Insbesondere werden nur wertungleiche Brüche betrachtet.

In den Widgets des Kapitels wird für Feedback oft auf den automatischen Größenvergleichserklärer zurückgegriffen (s. Abschnitt 6.2.2.1).

## B.7.1 Beschreibung der Widgettypen

### B.7.1.1 Den größeren Bruch auswählen

Ein Single-Choice-Widget, in dem aus zwei gegebenen Brüchen der größere gewählt werden soll, ist das Kernwidget dieses Kapitels. Es ist im Laufe des Kapitels mehrfach mit unterschiedlichen Parametern eingebunden und wird im Folgenden näher beschrieben.

Das Widget präsentiert zwei Brüche auf zwei karierten Karten nebeneinander. Die Reihenfolge der Darstellung entspricht der Reihung der Brüche im Kartenobjekt des Karteikastens. Allerdings werden die Brüche bei jeder wiederholten Bearbeitung vertauscht. Dieses Vorgehen soll die Strategie unterbinden, sich beim Feedback die Position des größeren Bruchs auf dem Bildschirm zu merken und die Aufgabe nicht inhaltlich zu bearbeiten. Durch Antippen einer Karte wird diese ausgewählt. Dies zeigt sich durch einen blauen Rand und Hintergrund (vgl. Abbildung B.50). Die Auswahl kann solange geändert werden, bis ein ausgewählter Bruch über Drücken des Buttons „Stimmt das?“ als Antwort eingeloggt wird.

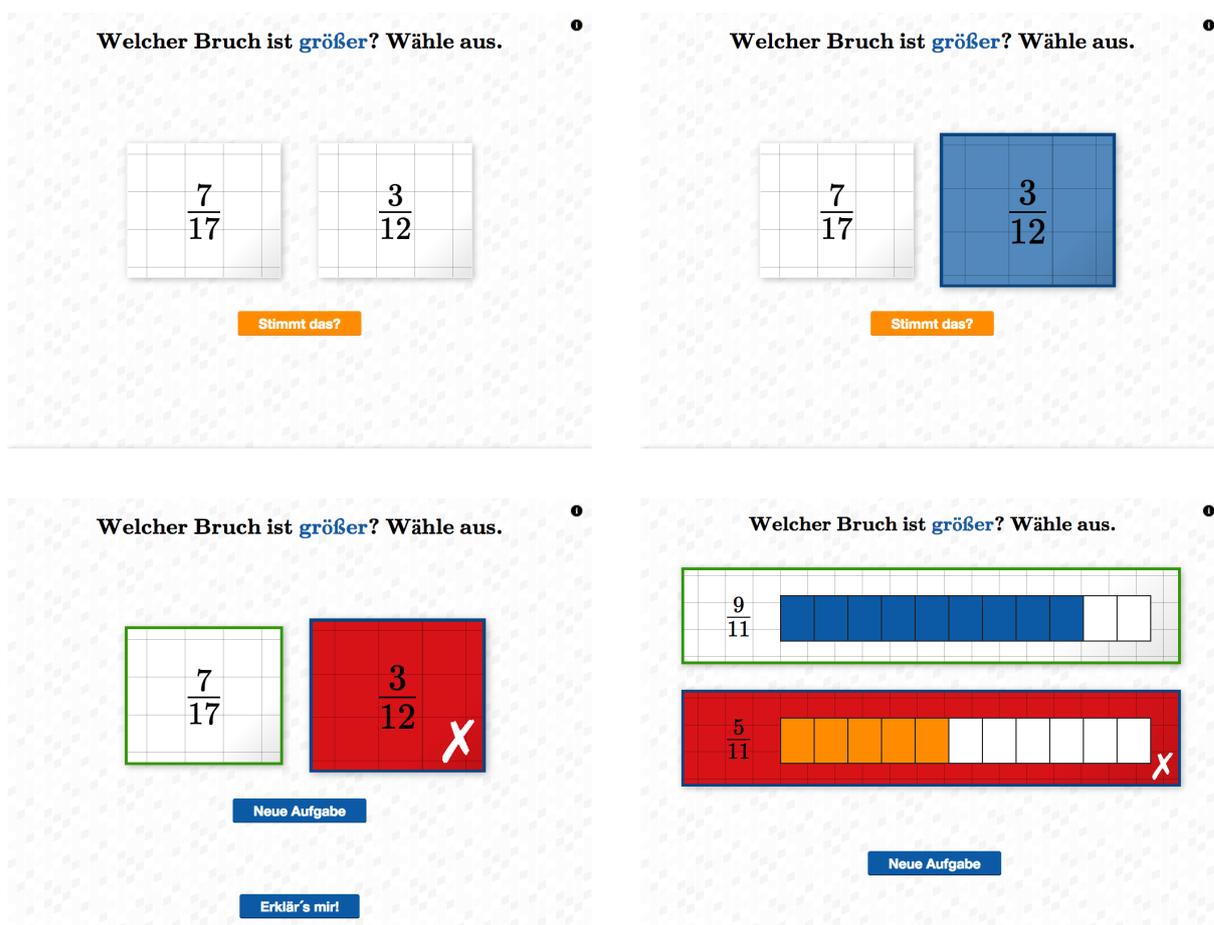


Abbildung B.50. Widgettyp *Welcher Bruch ist größer? Wähle aus.* Grundstellung der Aufgabe (oben links), Darstellung eines ausgewählten Bruchs (oben rechts), Korrektur einer falschen Antwort mit Einbezug des Vergleichserklärers (unten links) und unter Zuhilfenahme von Visualisierungen (unten rechts).

Das Widget gibt anschließend Feedback. Wurde die Aufgabe korrekt gelöst, so färbt sich die ausgewählte Karte grün und ein weißer Haken signalisiert, dass der gewählte Bruch

der größere ist. Bei einer falschen Antwort wird diese mit einem roten Hintergrund und einem weißen Kreuz als solche gekennzeichnet (vgl. Abbildung B.50). Die richtige Antwort wird grün umrandet und blinkt dreimal grün auf. Das Widget kann das Feedback auf eine von zwei Weisen unterstützen: Einerseits ist es möglich, den Vergleichserklärer (s. Abschnitt 6.2.2.1) einzubeziehen. Dazu bewegt sich ein blauer Knopf „Erklär’s mir!“ von unten in den Bildschirm hinein. Durch Drücken überlagert dann eine Karte die Aufgabe, auf welcher der vom Vergleichserklärer erzeugte Text angezeigt wird. Andererseits kann die Anzeige um ikonische Darstellungen der beiden Brüche ergänzt werden (vgl. Abbildung B.50): Dazu bewegen sich die Karten untereinander, während die Brüche in einem Balkendiagramm rechts der Bruchzahl dargestellt werden.

Beim Einloggen einer Antwort speichert das Widget die angezeigten Brüche und die Korrektheit der Auswahl – und damit den gewählten Bruch. Zusätzlich wird erfasst, wann der Erklärer eingeblendet wird.

### B.7.1.2 Positionierung von Brüchen in graphischen Darstellungen

Zwei Widgettypen beschäftigen sich mit der Positionierung von Brüchen in graphischen Darstellungen. Dabei behandeln zwei Widgets die Position eines Bruches auf dem Zahlenstrahl relativ zu einem Benchmark (1 oder  $\frac{1}{2}$ ). Ein weiteres Widget thematisiert die Platzierung im richtigen Segment eines Kreises, der gröber unterteilt ist als es dem Nenner entspräche (vgl. Abbildung B.51).

In beiden Typen wird zu dem gefragten Bruch eine unterteilte Darstellung präsentiert (Zahlenstrahl von 0 bis 2, unterteilt an den natürlichen Zahlen; Zahlenstrahl von 0 bis 1, unterteilt an Vielfachen von  $\frac{1}{2}$ ; Kreisdiagramm mit gröberer Unterteilung). Mit dem Finger ist der Bereich anzutippen, in dem der Bruch liegt. Im Fall der Zahlenstrahl-Widgets werden die Bereiche zusätzlich durch die Hinweise angegeben (z. B. „Links von der 1“).

Feedback erfolgt in den Widgets textuell und durch Eintragen des Bruches in die jeweilige Visualisierung. Dazu wird der angezeigte Zahlenstrahl bzw. der Kreis auch dem Nenner des jeweiligen Bruchs entsprechend eingeteilt. Eine Färbung des Hintergrunds der gewählten Option unterstützt das Feedback. In den Zahlenstrahl-Widgets wird die Auswahl außerdem abgehakt oder durch ein Kreuz als falsch gekennzeichnet. Im Falle eines Benchmarks 1 wird ein Lösungsweg angegeben (bspw. „Bei  $\frac{1}{5}$  ist der Zähler kleiner als der Nenner, d. h.  $\frac{1}{5}$  ist kleiner als 1“).

In allen Widgettypen werden der gefragten Bruch und die Korrektheit der Auswahl geloggt. Das Kreisdiagramm-Widget speichert zusätzlich die Unterteilung des Kreises und den gewählten Sektor.

## B.7.2 Einführungsteil

Der Einführungsteil des Kapitels behandelt den Größenvergleich schrittweise. Zunächst werden Sonderfälle in unterschiedlichen Widgets betrachtet und in Merksätzen zusammengefasst. Dazu kommen auch Aufgabenwidgets zum Einsatz, die explizit festgelegte

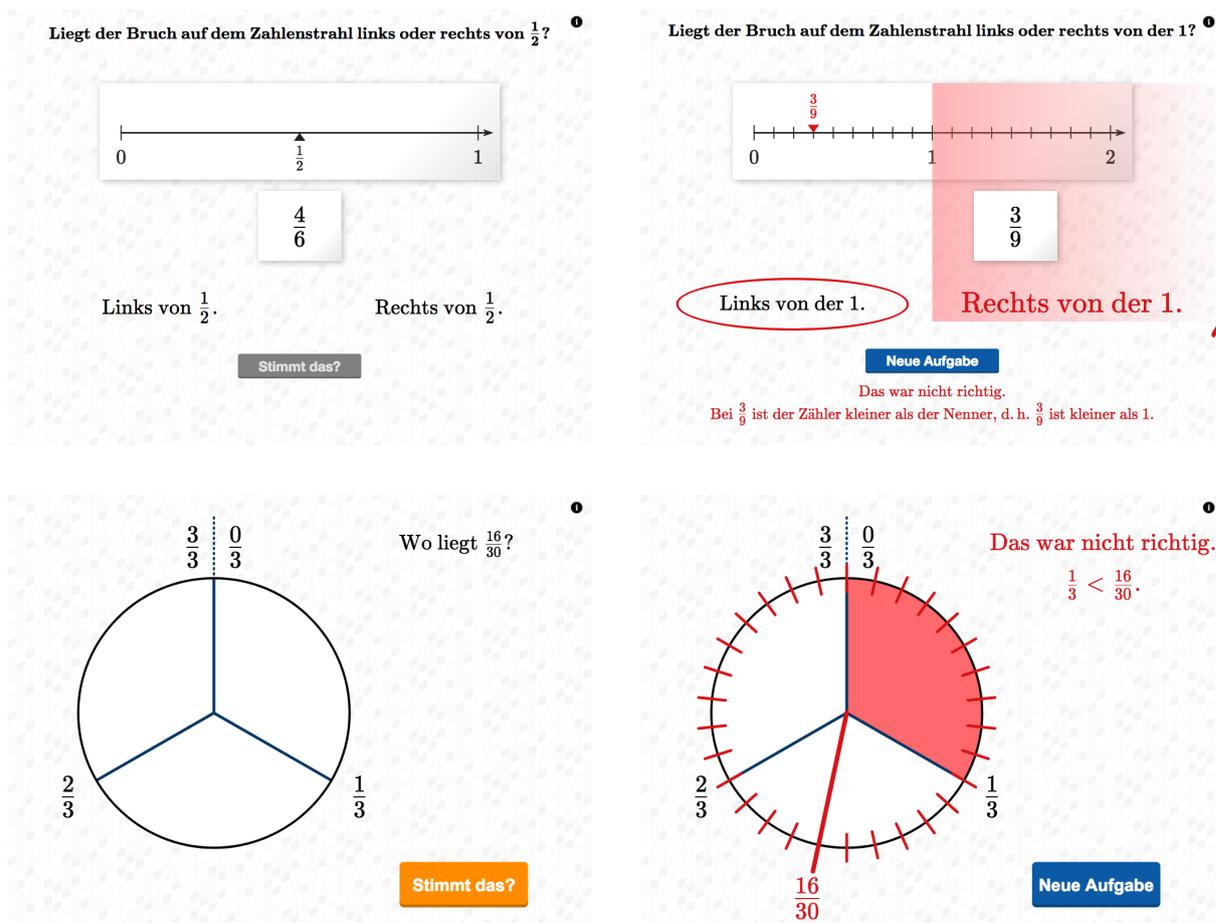


Abbildung B.51. Widgettypen zum Positionieren von Brüchen in ikonischen Darstellungen. Zahlenstrahl anhand von Benchmarks (oben;  $\frac{1}{2}$  links und 1 rechts) und Kreis (unten). Aufgabenstellungen (links) und Anzeige mit Feedback (rechts).

Einzelaufgaben zeigen und nach Lösung dieser als vollständig gelöst gelten. Nach erfolgreicher Bearbeitung aller hinterlegter Aufgaben fordern diese Widgets dazu auf, das Widget wieder zu schließen.

### B.7.2.1 W74 & W75: Größenvergleich über Benchmarking mit 1

Zunächst wird ein Größenvergleich über sog. Benchmarking-Strategien eingeführt: Zwei Brüche können miteinander verglichen werden, indem man beide zu einem Benchmark in Beziehung setzt und anschließend über die Transitivität der „Größer“-Relation schließt, welcher Bruch der größere ist (vgl. Abschnitt 1.3.2.1).

Im iBook wird zuerst das Benchmark 1 behandelt. Das implizite Lernziel ist also die Erkenntnis, dass unechte Brüche stets größer als echte Brüche sind. Zu diesem Zweck dient ein Positionierungswidget (W74) der Förderung des Größenvergleichs von Brüchen mit der Zahl 1: Ein Bruch soll dem Bereich links oder rechts von der Zahl 1 am Zahlenstrahl zugeordnet werden (s. Abschnitt B.7.1.2). Innerhalb der Aufgaben findet keine Stufung der Schwierigkeit statt; das Widget generiert stets Sets der Länge 7 bestehend aus je einem zufälligen, echten oder unechten Bruch  $< 2$  mit Nenner  $\leq 12$ .

Nach einer Zusammenfassung als Merksatz kann die Benchmarking-Strategie in Widget W75 an fünf Bruchpaaren angewandt werden. Dazu kommt das Single-Choice-Widget (s. Abschnitt B.7.1.1) zum Einsatz, im dem nacheinander die Brüche  $\frac{4}{7}$  und  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{9}{8}$ ,  $\frac{3}{2}$  und  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{13}{12}$  und  $\frac{27}{30}$  sowie  $\frac{15}{17}$  und  $\frac{5}{4}$  verglichen werden sollen, von denen je einer größer und der andere kleiner als 1 ist. Die fünf Aufgaben sind in einen Karteikasten hinterlegt. Nach korrekter Beantwortung aller Aufgaben erscheint der Hinweis, dass das Widget geschlossen werden kann.

### B.7.2.2 W76 & W77: Größenvergleich über ein Benchmarking mit $\frac{1}{2}$

Im Anschluss an den Vergleich mithilfe des Benchmarks 1 wird der Größenvergleich über den Vergleich mit  $\frac{1}{2}$  thematisiert.

Zunächst steht dazu mit Widget W76 eine interaktive Aufgabe zur Verfügung, in der anhand einer gegebenen ikonischen Bruchdarstellung entschieden werden soll, ob der dargestellte Bruch größer bzw. kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist. Der Bruch ist in einem Rechteck- bzw. Kreisdiagramm visualisiert, wobei die Darstellung am Kreisdiagramm nur gewählt wird, falls der Nenner  $\leq 12$  ist (vgl. Abbildung B.52). Feedback erfolgt lediglich über eine Rückmeldung über die Korrektheit der Auswahl in Form von Text und kongruenten Symbolen. In Sets der Länge 7 werden zufällige Brüche generiert, die einen Nenner  $\leq 20$  aufweisen, der aber nicht gleichzeitig prim und größer als 10 ist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % wird der Zähler so gewählt, dass der entstehende Bruch größer bzw. kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist. Das Widget loggt den visualisierten Bruch und die Korrektheit der Antwort.

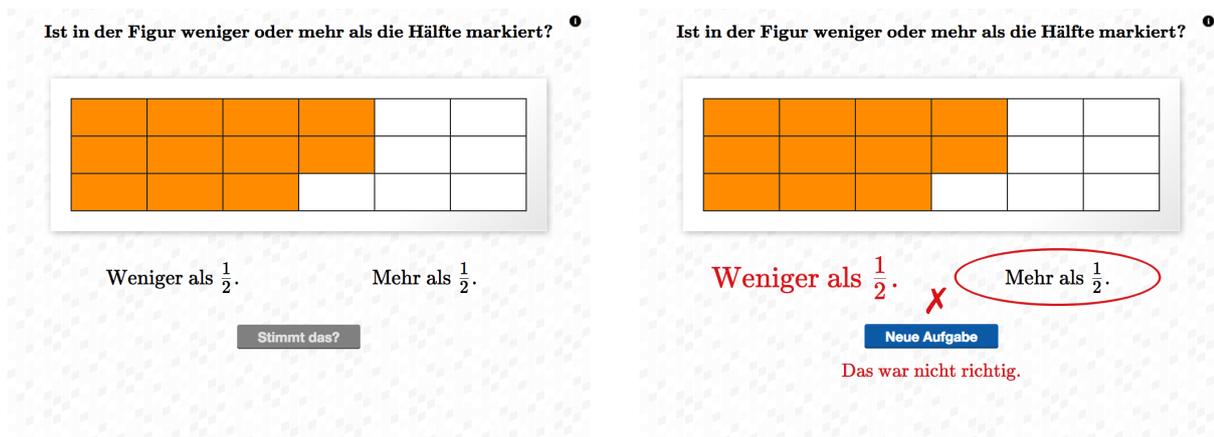


Abbildung B.52. Widget W76: Ikonischer Vergleich mit  $\frac{1}{2}$ .

Wie das Wissen um die Relation eines Bruchs zu  $\frac{1}{2}$  für den Größenvergleich zweier Brüche genutzt werden kann, wird im iBooktext in einem Merksatz festgehalten.

Das Benchmark  $\frac{1}{2}$  kann in Widget W77 benutzt werden, um nacheinander den größeren der Brüche  $\frac{4}{6}$  und  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{10}$  und  $\frac{7}{12}$ ,  $\frac{3}{9}$  und  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{13}{21}$  und  $\frac{9}{23}$  sowie  $\frac{17}{33}$  und  $\frac{11}{23}$  zu bestimmen. Bei allen Bruchpaaren ist stets ein Bruch größer und ein Bruch kleiner als  $\frac{1}{2}$ . Im Widget sind die Brüche in dem in Abschnitt B.7.1.1 beschriebenen Format zu vergleichen. Der Karteikasten

kommt zum Einsatz. Nach korrekter Beantwortung aller Aufgaben erscheint ein Hinweis, dass das Widget geschlossen werden kann.

### B.7.2.3 W78–W81: Größenvergleich von Brüchen mit gleichem Zähler bzw. Nenner

Das iBook wendet sich im Folgenden dem Größenvergleich zweier Brüche mit einer gemeinsamen Komponente zu.

#### Brüche mit gleichem Zähler

Zunächst wird der Fall behandelt, dass die zu vergleichenden Brüche denselben Zähler aufweisen. Um derartige Aufgaben zu bearbeiten, wird im iBooktext Hilfestellung durch den Hinweis „Je kleiner der Nenner, desto größer die Stücke“ gegeben.

Diese Strategie kann in zwei interaktiven Aufgaben mit Stammbrüchen (Widget W78) und mit allgemeinen echten Brüchen mit gleichem Zähler (W79) angewandt werden. Beide Widgets sind Ausprägungen des Single-Choice-Widgets (s. Abschnitt B.7.1.1) und beginnen mit einem Set aus zwei Aufgaben, in denen die Nenner  $\leq 12$  sind. Nach erfolgreicher Bearbeitung dieses Sets bestehen die nachfolgenden Sets aus je vier Brüchen mit Nenner  $\leq 24$ . Feedback erfolgt stets unter Einbezug einer Visualisierung (s. Abschnitt B.7.1.1).

Ein den Widgets im iBook folgender Merksatz fasst das Vorgehen zusammen: „Bei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat“.

#### Brüche mit gleichem Nenner

Auf ähnliche Weise wird der Vergleich von Brüchen, die einen gemeinsamen Nenner besitzen, eingeführt. Für diese Situation gibt das iBook die Hilfe „Je kleiner der Zähler, desto weniger Stücke!“.

In der interaktiven Aufgabe W80 kann die Strategie angewandt werden: Das Single-Choice-Widget präsentiert stets zwei Brüchen mit gleichem Nenner. Die Einschränkungen bezüglich der Nenner während der Aufgabengenerierung und das Feedback entsprechen denen von Widgets W78 und W79.

Ein Merksatz nach dem Widget fasst die Regel abschließend zusammen.

Die eingeführten Strategien sollen in Widget W81 angewandt werden: Die Variante des Single-Choice-Widgets (s. Abschnitt B.7.1.1) stellt zu jeder der drei Typen feste Items bereit. Dabei entfallen auf den Vergleich von Stammbrüchen ein Item ( $\frac{1}{5}$  vs.  $\frac{1}{7}$ ), auf den Vergleich von Brüchen mit gleichem Zähler zwei Items ( $\frac{3}{8}$  vs.  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{4}{7}$  vs.  $\frac{6}{7}$ ) und auf den Vergleich von Brüchen mit gleichem Nenner ebenfalls zwei Items ( $\frac{13}{17}$  vs.  $\frac{13}{20}$  und  $\frac{9}{17}$  vs.  $\frac{11}{17}$ ). Erklärendes Feedback kann dabei vom Größenvergleichserklärer angefordert werden.

### B.7.2.4 W82 & W83: Größenvergleich von Brüchen über Angleichen von Zähler bzw. Nenner

Der Größenvergleich von Brüchen, die weder gleichen Zähler oder Nenner aufweisen, noch über ein Benchmark durchführbar ist, wird über das interaktive Diagramm W82 eingeführt. Darin stehen zwei in Zweiunddreißigstel unterteilte Rechtecke zur Verfügung, um das folgende Szenario nachzustellen: „Steffen und Franziska kaufen sich in der Mittagspause jeder eine Tafel Schokolade. Steffen hat  $\frac{1}{4}$  und Franziska  $\frac{9}{32}$  der Tafel übrig“. Die Rechtecke lassen sich wie in Widget W8 (s. Abschnitt B.1.2.3) mit dem Finger markieren (vgl. Abbildung B.53). Das Widget zielt also auf die Erweiterung  $\frac{1}{4} = \frac{8}{32}$  ab, um den Größenvergleich durchzuführen.

Aus Platzgründen gibt das Widget zunächst nur zurück, ob bei Steffen (oberes Rechteck) zu viel bzw. zu wenig markiert wurde. Erst wenn das Viertel korrekt markiert wird, erfolgt Rückmeldung über die Markierung im unteren Rechteck (Franziska). Sind beide Anteile korrekt markiert, so wird dazu aufgefordert, sich zu überlegen, wer von beiden mehr Schokolade übrig hat. Anstelle des Korrekturknopfes erscheint die Meldung, dass die Aufgabe geschlossen werden kann – eine Antwort auf die Frage wird nicht gegeben.

Über einen blauen Button „Von vorn“ kann stets die getätigte Markierung zurückgesetzt und ggf. der Korrekturknopf wieder eingeblendet werden. Dies wird über einen Logeintrag mit der Zeichenkette „Redo“ festgehalten. Des Weiteren loggt das Widget beim Geben von Feedback die Markierung in Form von zwei Listen, die den Rechtecken entsprechen.

Nach dem Widget wird der Größenvergleich über das Angleichen von Zähler bzw. Nenner im iBook erläutert.

Mit Widget W83 kommt zum letzten Mal das Single-Choice-Widget (s. Abschnitt B.7.1.1) mit festgelegten Aufgaben zum Einsatz. Dabei wird dazu aufgefordert, sich selbstständig für die effektivere Strategie – Angleichen von Zähler oder Nenner – zu entscheiden. Die zu vergleichenden Brüche ( $\frac{3}{11}$  und  $\frac{12}{41}$ ,  $\frac{7}{15}$  und  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{15}{31}$  und  $\frac{5}{13}$ ,  $\frac{7}{9}$  und  $\frac{11}{18}$ ,  $\frac{3}{13}$  und  $\frac{2}{11}$  sowie  $\frac{16}{21}$  und  $\frac{5}{7}$ ) sind dabei so gewählt, dass meist eine der beiden Strategien mit deutlich kleineren Zahlen auskommt als die andere.

## B.7.3 Übungsteil

### B.7.3.1 W84: Den größeren/größten Bruch auswählen

Der Übungsteil des letzten Kapitels beginnt mit einer „endlos“-Variante des Single-Choice-Widgets (s. Abschnitt B.7.1.1). Eine Überschrift im Buch fordert dazu auf, selbst die passende Strategie zu wählen. Feedback erfolgt stets ohne ikonische Darstellungen der angezeigten Brüche, aber mit Vergleichserklärer. Als Neuerung stehen in den höheren Schwierigkeitsstufen je drei Brüche zu Auswahl, von denen der größte ausgewählt werden soll (vgl. Abbildung B.54). In diesem Fall wird als erklärendes Feedback gegeben, zunächst je zwei Brüche miteinander zu vergleichen. Der größere der beiden größeren Brüche aus den ersten zwei Vergleichen ist dann der größte der drei Brüche (vgl. Abbildung B.54). Die Stufen

Markiere, wie viel Schokolade übrig ist.

Steffen hat  $\frac{1}{4}$  übrig:

Franziska hat  $\frac{9}{32}$  übrig:

Von vorn

Stimmt das?

Markiere, wie viel Schokolade übrig ist.

Steffen hat  $\frac{1}{4}$  übrig:

Franziska hat  $\frac{9}{32}$  übrig:

Du hast bei Steffen zu viel markiert!

Von vorn

Stimmt das?

Markiere, wie viel Schokolade übrig ist.

Steffen hat  $\frac{1}{4}$  übrig:

Franziska hat  $\frac{9}{32}$  übrig:

Du hast bei Franziska zu viel markiert!

Von vorn

Stimmt das?

Markiere, wie viel Schokolade übrig ist.

Steffen hat  $\frac{1}{4}$  übrig:

Franziska hat  $\frac{9}{32}$  übrig:

Richtig! Überlege jetzt, wer von beiden mehr Schokolade übrig hat.

Von vorn

Du kannst die Aufgabe jetzt schließen.

Abbildung B.53. Widget W82: Einführung in den Größenvergleich von Brüchen durch Angleichen der Nenner. Aufgabe (oben links), Korrektur falscher Eingaben (oben rechts, unten links) und Endbildschirm (unten rechts)

iterieren durch die im Einführungsteil behandelten Fälle und sind Tabellen B.19 & B.20 zu entnehmen.

### B.7.3.2 W85: Brüche anordnen

In Widget W85 ist es die Aufgabe, Brüche von klein nach groß zu sortieren (vgl. Abbildung B.55). Zu diesem Zweck können die Brüche mit dem Finger verschoben werden. Die jeweils anderen Brüche weichen dem verschobenen Bruch nach links bzw. rechts aus.

Im Feedback werden drei Fälle unterschieden:

1. Korrekte Antwort. Das Widget fügt grüne Kleinerzeichen („<“) zwischen alle Brüche ein und hakt die Zeile ab. Zusätzlich wird textuell zurückgemeldet, dass die Aufgabe gelöst wurde.
2. Falsche Sortierreihenfolge (Brüche von groß nach klein sortiert). Wird die Antwort in der falschen Reihenfolge gegeben (kleinster Bruch rechts), so wird die Zeile mit einem orangenen Kreuz als falsch markiert. Zusätzlich erscheint der Text „Das war nicht richtig. Du hast von groß nach klein sortiert!“.

Abbildung B.54. Widget W84 (hohes Anforderungsniveau): „Welcher Bruch ist am größten? Wähle aus“. Aufgabe (links) und eingblendeter Erklärttext (rechts).

Tabelle B.19

Abstufungen in der Setgenerierung von Widget W84 (Mittelschulstudie).

Niveau	Setlänge	Anzahl zu vergleichender Brüche	Generierungseinschränkungen
0	5	2	Ein Bruchpaar aus Stammbrüchen, ein Bruchpaar mit gleichem Zähler, ein Bruchpaar mit gleichem Nenner, ein Bruchpaar, das Benchmarking ermöglicht, jeweils Nenner $\leq 25$ ,
1	5	2	ein Bruchpaar, mit ungleichen, primen Nennern $\leq 11$ (und $\neq 2$ ) und ungleichem Zähler wie Niveau 0, in zufälliger Reihenfolge; jeweils Nenner $\leq 50$ statt $\leq 25$ .
2	3	2	Bruchpaare, die Benchmarking ermöglichen (je einmal mit 1, 2 und $\frac{1}{2}$ ); jeweils Nenner $\leq 25$
3	3	2	wie Niveau 2; jeweils Nenner $\leq 50$
4	5	2	echte Brüche (Nenner $\leq 25$ )
5	5	3	echte Brüche (Nenner $\leq 50$ )

3. Andere inkorrekte Antwort. Das Widget fügt zwischen die ersten beiden Brüche, die in falscher Reihenfolge angeordnet sind, ein rotes Größerzeichen („>“) ein. Die Zeile wird durch ein rotes Kreuz als falsch markiert. Die Tatsache, dass die Antwort nicht richtig war, wird in Form von Text zurückgemeldet. Dazu werden die in der Zeile gekennzeichneten Brüche als Beispiel dafür genannt, dass die Anordnung falsch bestimmt wurde. Der Größenvergleich der beiden Brüche kann über den eingblendeten Button „Erklär’s mir!“ mit dem Vergleichserklärer nachgelesen werden.

Tabelle B.20

Abstufungen in der Setgenerierung von Widget W84 (Gymnasialteilstudie).

Niveau	Setlänge	Anzahl zu vergleichender Brüche	Generierungseinschränkungen
0	2	2	Stammbrüche (Nenner $\leq 50$ )
1	3	2	Brüche mit gleichem Zähler (Nenner $\leq 50$ )
2	3	2	Brüche mit gleichem Nenner (Nenner $\leq 50$ )
3	5	2	Bruchpaare, die Benchmarking ermöglichen (bei je zwei Paaren mit 1 bzw. 2, bei einem mit $\frac{1}{2}$ ).
4	5	2	Je ein Fall der vorherigen Stufen <i>UND</i> ein Bruchpaar bestehend aus echten Brüchen mit Nennern aus der Menge $\{3, 5, 7, 11\}$ und ungleichen Zählern.
5	5	2	echte Brüche (Nenner $\leq 25$ )
6	3	3	Stammbrüche (Nenner $\leq 50$ )
7	3	3	Brüche mit gleichem Zähler (Nenner $\leq 50$ )
8	3	3	Brüche mit gleichem Nenner (Nenner $\leq 50$ )
9	5	3	echte Brüche (Nenner $\leq 25$ )
10	5	3	echte Brüche (Nenner $\leq 50$ )

Eine falsche Antwort kann direkt korrigiert werden. Nach dem zweiten Fehlversuch blendet das Widget einen blauen Button „Neue Aufgabe“ ein, mit dem zur nächsten Aufgabenstellung im Karteikasten übergegangen werden kann.

In den ersten drei Level (Setlänge 3) sind zunächst vier Stammbrüche, dann vier Brüche mit gleichem Zähler und schließlich vier Brüche mit gleichem Nenner anzuordnen (Nenner jeweils  $\leq 24$ ). Auf den zwei folgenden Stufen (Setlänge 5) sind zunächst drei und schließlich vier echte Brüche mit Nenner  $\leq 12$  anzuordnen.

Das Widget loggt die Korrektheit der Antwort sowie die aktuelle Position der einzelnen Brüche in Form einer Zeichenkette, welche die Brüche von links nach rechts in der Notation Zähler/Nenner, getrennt durch  $<$ , enthält.

### B.7.3.3 W86: Relation von Brüchen zu $\frac{1}{2}$ auf dem Zahlenstrahl

Widget W86 trainiert den Größenvergleich echter Brüche in Relation mit dem Benchmark  $\frac{1}{2}$ . Dementsprechend soll ein gegebener Bruch als kleiner oder größer als das Benchmark beurteilt werden, indem er links oder rechts von  $\frac{1}{2}$  auf dem Zahlenstrahl eingeordnet wird. Das Widget basiert auf dem Code von Widget W74 (s. Abschnitt B.7.1.2).

Das Widget generiert stets Sets der Länge 7; die Nenner der beteiligten Brüche, von denen einer kleiner und der andere größer als  $\frac{1}{2}$  ist, sind  $\leq 12$ .

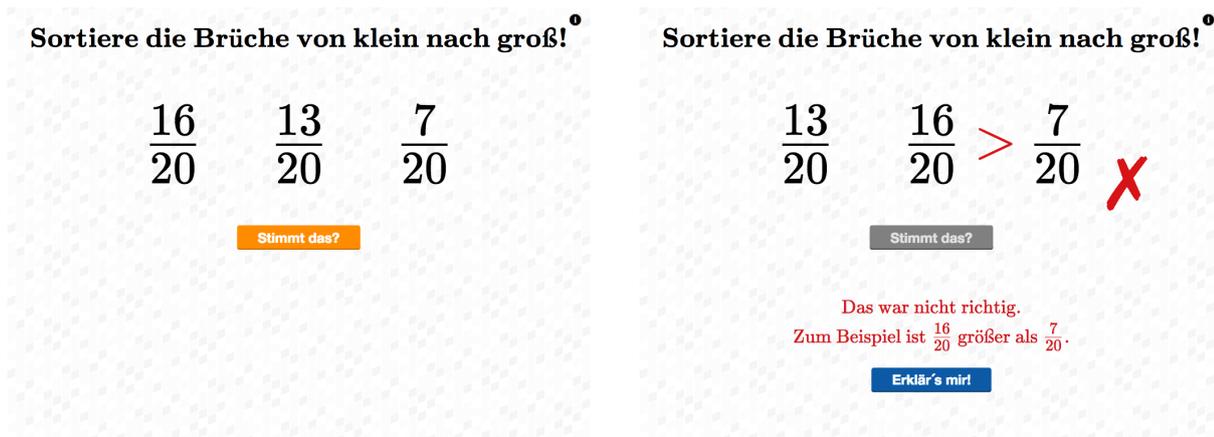


Abbildung B.55. Widget W85: Ordne die Brüche von klein nach groß. Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

In der im iBooks Store veröffentlichten Variante (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a) befindet sich dieses Widget im Einführungsteil des Kapitels hinter Widget W76.

#### B.7.3.4 W87: Wo liegt der Bruch (im Kreisdiagramm)? (Programmierung: Bernhard Werner)

In Widget W87 sind echte Brüche in ein Segment eines unterteilten Kreisdiagramms einzuordnen (s. Abschnitt B.7.1.2). Die gefragten Brüche werden zufällig mit einem Nenner  $\leq 30$  generiert. Die vorgegebene Unterteilung des Kreises verfeinert sich in den ersten vier Aufgaben von Halben schrittweise zu Fünfteln; anschließend wird sie zufällig aus Halben, Dritteln, Vierteln und Fünfteln gewählt. Der Karteikasten kommt nicht zum Einsatz. Bernhard Werner setzte das Widget in CindyJS um.

#### B.7.3.5 W88: Größenvergleich ikonischer Repräsentationen

Widget W88 greift zum letzten Mal das Single-Choice Widget „Welcher Bruch ist größer?“ (s. Abschnitt B.7.1.1) auf. Anstelle der Bruchzahlen werden auf den Karten jedoch kontinuierliche Darstellungen der Brüche in einem Kreis- bzw. Balkendiagramm gezeigt (vgl. Abbildung B.56). Kreisradius und Abmessungen des Rechtecks sind dabei so gewählt, dass die Flächeninhalte in Quadratpixeln nahezu gleich sind (durch die ganzzahligen Werte für Breite, Länge und Radius entsteht eine leichte Diskrepanz). Die beiden Brüche sind farblich unterschiedlich markiert; die Farben werden dabei zufällig aus der erweiterten Farbpalette (s. Abbildung 6.4) gewählt.

Als Feedback wird zurückgemeldet, ob die richtige Antwortmöglichkeit ausgewählt wurde. Zudem werden die dargestellten Brüche benannt und ihre Relation zueinander beschrieben. Unterstützt wird das Textfeedback, indem Unterteilungen in die Diagramme eingefügt werden, um die exakte Bestimmung der Brüche zu ermöglichen. Zudem wird der Button „Erklär's mir“ eingeblendet, über den der Vergleichserklärer aufgerufen werden kann (vgl. Abbildung B.56).

Wo wurde der **größere** Anteil markiert? Wähle aus.

Wo wurde der **größere** Anteil markiert? Wähle aus.

Stimmt das?

Neue Aufgabe

Das war nicht richtig.  
 $\frac{3}{6}$  ist größer als  $\frac{2}{6}$ .

Erklär's mir!

Abbildung B.56. Widget W88: Den größeren der dargestellten Brüche auswählen. Aufgabe (links) und Korrektur einer falschen Eingabe (rechts).

Die Aufgaben im Widget sind so gestuft, dass die Differenz der beiden dargestellten Brüche immer kleiner wird. Dabei ist – mit Ausnahme der ersten Stufe (Setlänge 2) – die Setlänge in allen Level 4. Zur Generierung der Sets wird für jede Aufgabe zunächst ein Bruch  $f$  über den Generator erzeugt und anschließend ein zweiter Bruch  $g$  dazu passend gewählt. Im ersten Level weist  $f$  einen zufälligen Nenner zwischen drei und zwölf auf. Für den Bruch  $g$  wird der Nenner von  $f$  übernommen und nur der Zähler zufällig gewählt. Dabei wird darauf geachtet, dass die beiden Brüche auf unterschiedlichen Seiten von  $\frac{1}{2}$  liegen (Gleichheit in einem Fall möglich). Der Nenner  $n$  von  $f$  liegt in Level 2 zwischen frei und zwölf und in Level 3 zwischen fünf und zwölf. In Level 4 ist  $n$  stets 6. Für die Wahl von  $g$  wird auf diesen Anforderungsniveaus der Bruch  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{n}$  bzw.  $\frac{1}{2n}$  zu  $f$  addiert oder von  $f$  subtrahiert.

### B.7.4 Nachträglich hinzugefügte Widgets

Für die Veröffentlichung im iBooks Store (Hoch, Reinhold, Werner, Reiss & Richter-Gebert, 2018a) wurde das iBook um zwei weitere Widgets zur Förderung der Benchmark-Strategien ergänzt. Es handelt sich dabei um Varianten der Widgets, die das Zuordnen wertgleicher Brüche thematisieren (s. Abschnitt B.4.2.2). Statt die Brüche dem wertgleichen Bruch zuzuordnen, sind sie gemäß ihren Relationen zu einem gegebenen Benchmark in zwei Alternativen (größer bzw. kleiner als das Benchmark) zu sortieren (vgl. Abbildung B.57). Das veröffentlichte iBook enthält im Einführungsteil ein Widget zum Benchmark 1 (nach Widget W74). Das andere neu erstellte Widget befindet sich am Ende des Übungsteils. Die hier betrachteten Benchmarks wechseln zwischen 1, 2 und  $\frac{1}{2}$ . Eine Aufgabe besteht dabei aus einem Benchmark und acht Brüchen mit Nenner  $\leq 20$ . Von diesen entfallen mindestens drei Brüche auf jede Alternative.

The image shows two side-by-side interactive widget screens. Each screen has a light gray background with a pattern of small dots. At the top of each screen, it says "Ordne ein." and "Versuche: 0".

**Left Screen:** The left circle is labeled with  $< 1$  and the right circle is labeled with  $> 1$ . Between the circles are several fractions:  $\frac{3}{6}$ ,  $\frac{7}{18}$ ,  $\frac{8}{11}$ ,  $\frac{6}{20}$ ,  $\frac{15}{9}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{17}{15}$ , and  $\frac{7}{6}$ . At the bottom center is an orange button with the text "Stimmt das?".

**Right Screen:** The left circle is labeled with  $< \frac{1}{2}$  and the right circle is labeled with  $> \frac{1}{2}$ . Between the circles are several fractions:  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{6}{19}$ ,  $\frac{11}{18}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{6}{6}$ , and  $\frac{10}{18}$ . At the bottom center is an orange button with the text "Stimmt das?".

Abbildung B.57. Widgets zum Förderung der Benchmarking-Strategien.

# C Code

C.1	Karteikasten . . . . .	364
C.2	Distraktor-Funktion in Widget W47 . . . . .	368
C.3	Injektion von CindyJS-Code aus externen Dateien . . . . .	369
C.4	Übergänge in CindyJS . . . . .	370
C.5	CindyJS-Implementierung des Zahlenstrahls . . . . .	370
C.6	JavaScript-Skript zum Senden der Daten von iBooks an den Server . . . . .	380
C.7	Serverseitiges PHP-Skript zum Empfangen der Prozessdaten . . . . .	380
C.8	Preprocessing der Zeitdaten . . . . .	381
C.9	Berechnung der Prozessmaße . . . . .	381
C.10	PHP-Skript zur Anpassung der Logzeiten im Zusammenhang mit Lösungshilfen . . . . .	383

## C.1 Karteikasten

```
1 // Flashcards, also called Leitner-System
2
3 function Leitner(length, strict) {
4   if (length % 1 !== 0 || length <= 0) {
5     throw new TypeError("Leitner depth not a positive integer.");
6   }
7   this.groups = new Array(length);
8   for (var i = 0; i < length; i++) {
9     this.groups[i] = [];
10  }
11
12  //This determines whether a wrong answer will put the card into
13  group 1 (true) or in the previous one (false)
14  this.strict = strict;
15
16  this._activeGroup = 0;
17 }
18 Object.defineProperty(Leitner.prototype, "cardCount", {
19   get: function(){
20     return this.groups.reduce(function(v, group){ return v + group.
21       length }, 0);
22   })
23
24 Leitner.prototype.clear = function(){
25   this.groups = new Array(length);
26   for (var i = 0; i < length; i++) {
27     this.groups[i] = [];
28   }
29   this._activeGroup = 0;
30   return this;
31 }
32
33 Leitner.prototype.addCard = function (c) {
34   return new FlashCard(c, this);
35 }
36
37 Leitner.prototype.addCards = function(array) {
38   for (var i = 0; i < array.length; i++) {
39     this.addCard(array[i]);
40   }
41   return this;
42 }
43
44 Leitner.prototype.nextCard = function(random){
45   if (!this.groups[this._activeGroup].length) {
46     var group = 0;
47     while (group < this.groups.length && !this.groups[group].length
48       ){
49     group++;
```

```

50     if (group === this.groups.length) return null;
51     this._activeGroup = group;
52   }
53   if (random) {
54     return this.groups[this._activeGroup][Math.floor(Math.random()
55       * this.groups[this._activeGroup].length)];
56   } else {
57     return this.groups[this._activeGroup][0];
58   }
59 }
60 Leitner.prototype.toJSON = function(){
61   var decycled = {strict: this.strict, _activeGroup: this._
62     activeGroup};
63   decycled.groups = this.groups.map(function(group){return group.
64     map(function(card){ return {content: card.content, fails: card
65       .fails} }));
66   return JSON.stringify(decycled);
67 }
68
69 Leitner.fromJSON = function(input){
70   if (typeof input === 'string'){
71     input = JSON.parse(input, function(k,v) {
72       if (typeof isFraction === 'function' && isFraction(v) && v.
73         constructor !== Fraction) {
74         return new Fraction(v);
75       } else {
76         return v;
77       }
78     });
79   }
80   if (input.groups){
81     var leitner = new Leitner(input.groups.length, input.strict);
82     input.groups.forEach(function(group, i){
83       group.forEach(function(card){
84         new FlashCard(card.content, leitner, i, card.fails);
85       });
86     });
87     leitner._activeGroup = input._activeGroup;
88     return leitner;
89   } else {
90     return null;
91   }
92 }
93
94 function FlashCard(data, parent, group, fails){
95   var group = (group) ? group : 0;
96   if (parent.constructor !== Leitner) {
97     throw new TypeError("Parent of FlashCard must be a Leitner
98       object.");
99   }
100  this.fails = +fails || 0;
101  this.content = data;

```

```
98   this.leitner = parent;
99   parent.groups[group].push(this);
100
101   Object.defineProperty(this, 'group', {
102     get: function(){ return group; },
103     set: function(v){
104       if (v % 1 === 0 && v >= 0) {
105         this.leitner.groups[group].splice(this.leitner.groups[group]
106           .indexOf(this), 1);
107         group = v;
108         if (v < this.leitner.groups.length){
109           this.leitner.groups[v].push(this);
110         }
111       } else {
112         if (v % 1 !== 0) {
113           throw new RangeError();
114         } else {
115           throw new TypeError();
116         }
117       }
118     });
119 }
120
121 FlashCard.prototype.move = function(forward) {
122   if(forward) {
123     this.moveOn();
124   } else {
125     this.moveBack();
126   }
127 }
128
129 FlashCard.prototype.moveOn = function() {
130   this.group++;
131   return this;
132 }
133
134 FlashCard.prototype.moveBack = function(){
135   this.fail++;;
136   this.group = (this.leitner.strict || this.group == 0) ? 0 : this.
137     group - 1;
138   return this;
139 }
140
141 FlashCard.prototype.remove = function(){
142   this.group = this.leitner.groups.length;
143   return true;
144 }
145
146 FlashCard.prototype.next = function(){
147   return this.leitner.nextCard();
148 }
149 //CindyJS - Plugin
```

```
149 if (typeof createCindy === 'function' && createCindy.registerPlugin
    ) {
150
151 createCindy.registerPlugin(1, "leitner", function(api) {
152   var leitner;
153   var currentCard;
154
155   api.defineFunction("initleitner", 1, function(args, mods) {
156     if (typeof cindyDM !== 'undefined') {
157       leitner = cindyDM.store("leitner");
158     }
159     if (!leitner)
160       leitner = new Leitner(
161         api.evaluateAndVal(args[0]).value.real,
162         (mods.strict && mods.strict.value)
163       );
164     if (typeof cindyDM !== 'undefined') {
165       cindyDM.store("leitner", leitner);
166     }
167   });
168
169   api.defineFunction("clearleitner", 0, function(){
170     if (leitner) leitner.clear();
171   });
172
173   api.defineFunction("newcard", 1, function(args, modif) {
174     var data;
175     if (leitner) {
176       data = api.evaluateAndVal(args[0]);
177       new FlashCard(data, leitner);
178     }
179   });
180
181   api.defineFunction("movecard", 1, function(args, mods) {
182     if (currentCard) {
183       if (api.evaluateAndVal(args[0]).value) {
184         currentCard.moveOn();
185       } else {
186         currentCard.moveBack();
187       }
188     }
189   });
190
191   api.defineFunction("nextcard", 0, function(args, mods) {
192     if (leitner) {
193       currentCard = leitner.nextCard();
194       return (currentCard) ? currentCard.content : api.nada;
195     } else {
196       return api.nada;
197     }
198   });
199
200   api.defineFunction("cardcount", 0, function() {
201     if (leitner) {
```

```

202     return {ctype: 'number', value: {real: leitner.cardCount,
203           imag: 0}}
204   } else {
205     return api.nada;
206   }
207 });
208 api.defineFunction("cardcount", 1, function(args, mods) {
209   if (leitner) {
210     var group = api.evaluateAndVal(args[0]);
211     if (group.ctype === 'number') {
212       group = group.value.real;
213       if (0 < group && group <= leitner.groups.length) {
214         return {ctype: 'number', value: {real: leitner.groups[
215           group-1].length, imag: 0}};
216       } else {
217         return api.nada;
218       }
219       return {ctype: 'number', value: {real: leitner.cardCount,
220         imag: 0}};
221     } else {
222       return api.nada;
223     }
224   });
225 });
226 }

```

## C.2 Distraktor-Funktion in Widget W47

```

1 function getChoices(f) {
2   var max, min, Dmax, Dmin, choices, bad;
3   max = Math.max(f.enumerator, f.denominator);
4   min = Math.min(f.enumerator, f.denominator);
5   minD = (min !== 1) ? divisors(min, true) : [];
6   maxD = divisors(max, true);
7   choices = setJoin(minD, maxD);
8   if (choices.length < 5) {
9     choices.push(max);
10    if (min > 1) {
11      if (max % min !== 0) choices.push(min);
12      if (choices.length < 4) choices.push(min * max);
13    } else {
14      choices = choices.concat(
15        randomSelection(5 - choices.length, 2, 8, false).map(
16          function(cv) {
17            return max * cv;
18          }
19        )
20      );
21    }
22  }
23 }

```

```

20 | } else if (choices.length > 10) {
21 |     bad = [];
22 |     choices = choices.filter(function(cv, i){
23 |         if (min % cv === 0 && max % cv === 0) {
24 |             return true;
25 |         } else {
26 |             bad.push(cv);
27 |             return false;
28 |         }
29 |     });
30 |     if (choices.length < 10) {
31 |         choices = choices.concat(bad.slice(0, 10 - choices.length));
32 |     }
33 | }
34 | choices.push(Localization.tr("isReduced"));
35 | return choices;
36 | }

```

## C.3 Injektion von CindyJS-Code aus externen Dateien

Mit folgendem JavaScript-Skript kann CindyJS-Code aus externen Dateien eingebunden werden (nach S. Kranich, persönliche Kommunikation, 24. Juli 2015). Das Skript injiziert den in der Variablen `code` hinterlegten Text in das `<script>`-Element mit der `id`, die beim Einbinden im Attribut `data-scriptid` angegeben wurde.

```

1 | (function(){
2 |     var code = document.createTextNode('
3 | // zu injezierender Cindy-JS-Code
4 | ');
5 |
6 |     var scriptId, scriptElement;
7 |
8 |     if (document.currentScript) {
9 |         scriptId = document.currentScript.dataset.scriptid;
10 |     }
11 |     if (!scriptId) scriptId = 'csinit';
12 |
13 |     scriptElement = document.getElementById(scriptId);
14 |     if (!scriptElement) {
15 |         scriptElement = document.createElement("script");
16 |         scriptElement.id = scriptId;
17 |         scriptElement.type = "text/x-cindyscript";
18 |         document.head.appendChild(scriptElement);
19 |     }
20 |     if (scriptElement.firstChild) {
21 |         scriptElement.insertBefore(code, scriptElement.firstChild);
22 |     } else {
23 |         scriptElement.appendChild(code);
24 |     }
25 |
26 | })();

```

## C.4 Übergänge in CindyJS

```

1 cubicBezier(t, P1, P2) := 3*(1-t)^2*t*P1 + 3*(1-t)*t^2*P2 + t^3*
  [1,1];
2
3 getCubicBezierYFromX(x, P1, P2) := (
4   regional(tolerance, l, u, P, t);
5   tolerance = 0.001;
6
7   l = 0; u = 1; t = 0.5;
8
9   if(0 < x & x <= 1,
10    P = cubicBezier(t, P1, P2);
11    while(|x - P_1| > tolerance,
12     if(x > P_1, l = t, u = t);
13     t = (l+u) / 2;
14     P = cubicBezier(t, P1, P2);
15   );
16   , // else
17   if (x <= 0,
18     P = [0, 0];
19   , // else
20     P = [1, 1];
21   );
22 );
23 P_2
24 );
25 getCubicBezierYFromX(x, x1, y1, x2, y2) := getCubicBezierYFromX(x,
  [x1, y1], [x2, y2]);
26
27 //Timing-Functions
28 ANItimingLinear(t) := max(0, min(1, t));
29 ANItimingEase(t) := getCubicBezierYFromX(t, [0.25, 0.1], [0.25,
  1.0]);
30 ANItimingEaseIn(t) := getCubicBezierYFromX(t, [0.42, 0], [1, 1]);
31 ANItimingEaseInOut(t) := getCubicBezierYFromX(t, [0.42, 0], [0.58,
  1]);
32 ANItimingEaseOut(t) := getCubicBezierYFromX(t, [0, 0], [0.58, 1]);

```

## C.5 CindyJS-Implementierung des Zahlenstrahls

Brüche sind codiert als [Zähler, Nenner].

```

1 // Variables {{{
2 screen = screenbounds();
3 BLACK = (36, 35, 35)/255;
4
5 //Position des Zahlenstrahl auf der Zeichenfläche & Abmessungen
6 NL = [((screen_1 + screen_3)/2).x - 12.5, 8], 25, 8];
7 NLtop = NL_1_2;
8 NLleft = NL_1_1;

```

```

 9 NLwidth = NL_2;
10 NLheight = NL_3;
11
12 NLstart = [0,1]; //Start des Zahlenstrahls
13 NLend = [5,2]; //Ende des Zahlenstrahls
14 NLunit = fr2fl(frDiv([NLwidth,1], frSub(NLend, NLstart)));
15
16 grid = 20;
17
18 snapper = 10;
19 snapThreshold = [0.49, 2];
20
21 segmentationHeightUnit = 1;
22 //denominator, percentage of segmentationHeightUnit, color
23 segmentations = [
24   [1, 1, (0,0,0)],
25   [2, 0.75, (0,0,0)],
26   [10, 0.5, (0,0,0)]
27 ];
28
29 labelLineHeight = 2.5;
30 labelSize = 40;
31 // label, color, mixed numbers, differentLabel, additionalInfo
32 labels = [
33 ];
34 //denominator, color, mixed numbers, reduce labels
35 labelAll = [
36   [1, (0,0,0), true, false]
37 ];
38 labelStacks = [];
39
40 markers = [];
41
42 //Variables for Dragging
43 dragging = 0;
44 dragOrigin = ((screen_1 + screen_3)/2).xy + [0, -4];
45 dragOffset = [0, 2];
46 dragXY = [];
47 dragColors = [];
48 dragSnapped = [];
49 dragOrder = [];
50 dragWrong = [];
51
52 blocked = false;
53 doDrawCorrection = false;
54 // }}}
55
56 frToPos(f) := (
57   regional(tmp);
58   tmp = frSub(f, NLstart);
59   [NLleft + NLunit * tmp_1 / tmp_2, NLtop];
60 );
61 posToFr(P, d) := (
62   frAdd(NLstart, [round((P.x - NLleft) / NLunit * d), d]);

```

```

63 );
64
65 labelWidth(f, mixed) := (
66   regional(w, g, l10);
67   l10 = log(10);
68
69   if(f_1 == 0,
70     if(mixed == 1, 1, 0.7) * labelSize/50;
71   , // else
72     if(mixed == 1,
73       w = floor(f_1/f_2);
74       g = [f_1 - w * f_2, f_2];
75
76       if(w != 0, (floor(log(|w|)/l10) + 1) * labelSize, 0)/50
77         + if(g_1 != 0, labelWidth(g, false), 0);
78     , // else
79     0.7 * (floor(log(max(apply(f, |#|)))/l10) + 1) * labelSize/50
80   );
81 );
82 );
83 // updateLabelStacks {{{
84 updateLabelStacks() := (
85 // 1. find least common denominator d of all labels
86 // 2. put labels in a list according to enumerator of raised to D
87   label
88 // put all labelAll labels first
89 // - have all labelAlls on same side
90 // put remaining labels
91   regional(s, l, lu, lw, d, f, P, firstLabel);
92   labelStacks = [];
93
94   d = NLend_2;
95   forall(labelAll,
96     d = lcm(d, #_1);
97   );
98   forall(labels,
99     d = lcm(d, #_1_2);
100  );
101   labelStacks = apply(1..(frRaiseTo(NLend, d)_1 + 1), []);
102
103   repeat(length(labelAll),
104     l = labelAll_#; //denominator, color, mixed numbers, reduce
105     labels
106     lu = NLunit / l_1;
107     firstLabel = [ceil(fr2fl(NLstart) * l_1), l_1];
108
109     repeat(floor(fr2fl(frSub(NLend, firstLabel)) * l_1) + 1, i,
110       f = frAdd(firstLabel, [i - 1, l_1]);
111       lw = labelWidth(f, l_3);
112
113       if (lw <= lu % mod(i, ceil(lw/lu)) == 1,
114         f = frRaiseTo(f, d);
115         s = labelStacks_(f_1 + 1);
116         s = s ++ apply(1..(2 * # - 2 - length(s)), false);

```

```

115     labelStacks_(f_1 + 1) = s
116     :> [f, l_2, l_3,
117         if(l_4, frReduce(f), frRaiseTo(frReduce(f), l_1))]
118     );
119 );
120 );
121 forall(labels_dragOrder, // label, color, mixed numbers,
        differentLabel, additionalInfo
122     if (frCompare(NLstart, #_1) <= 0 & frCompare(#_1, NLEnd) <= 0,
123         f = frRaiseTo(#_1, d);
124         s = labelStacks_(f_1 + 1);
125         l = if(#_5 > 0, 2, 1); //we are putting everything draggy
            above.
126         P = false;
127         while(l <= length(s),
128             if(s_l == false,
129                 s_l = #;
130                 P = true;
131                 l = length(s) + 1;
132             );
133             l = l + 2;
134         );
135         labelStacks_(f_1 + 1) = if(!P,
136             if(mod(length(s), 2) == 0 & #_5 > 0,
137                 s :> false :> #
138             , // else
139                 s :> #
140             );
141             , // else
142             s;
143         );
144     );
145 );
146 );
147 // }}}
148
149 // drag {{{
150 startDrag(xy) := (
151     regional(D, d, lst, y);
152     //find points with minimal distance to xy, but at most with
        distance D
153     D = 5;
154     repeat(length(dragXY),
155         d = |xy - dragXY_#|;
156         if(d < D,
157             D = d;
158             dragging = #;
159         );
160     );
161     if (dragging > 0,
162         if(!dragSnapped_dragging,
163             dragXY_dragging = dragXY_dragging + dragOffset;
164         );
165     markers_dragging_2 = "triangle-down";

```

```

166     dragColors_dragging = iBruLeColor("blue");
167
168     dragOrder = dragOrder -- [dragging] :> dragging;
169
170     //move fraction above the finger
171     //startAnimation(dragging, "dragStart");
172 );
173 );
174
175 stopDrag() := (
176     if (dragging > 0,
177         markers_dragging_2 = "triangle-down";
178         dragColors_dragging = iBruLeColor("blue");
179         repaint();
180
181         dragging = 0;
182     );
183 );
184
185 snap(i, xy) := (
186     regional(snapUnit, snapEnum, maxSnap);
187
188     snapUnit = NLunit / snapper;
189     //if close enough
190     if(|xy.y - NLtop| < snapThreshold.y & (NLleft - snapThreshold.x
191         <= xy.x)
192         & (xy.x <= NLleft + NLwidth + snapThreshold.x),
193         dragSnapped_i = true;
194         snapEnum = round((dragXY_i.x - NLleft) / snapUnit);
195         if(snapEnum < 0,
196             snapEnum = 0;
197             , // else
198             maxSnap = floor(frRaiseTo(NLend, snapper)_1);
199             if(snapEnum > maxSnap,
200                 snapEnum = maxSnap;
201             ));
202         dragXY_i = [NLleft + snapEnum * snapUnit, NLtop];
203         , // else
204         if(dragSnapped_i,
205             labels_i_1 = [-1,1];
206             markers_i_1 = [-1,1];
207             updateLabelStacks();
208             dragSnapped_i = false;
209         );
210     );
211 // }}}
212
213 // draw {{{
214 drawNumberline() := (
215     regional(start);
216     NLunit = fr2fl(frDiv([NLwidth,1], frSub(NLend, NLstart)));
217
218     drawGrid(grid);

```

```

219
220   start = NL_1 - if(NLstart_1 != 0, [1, 0], [0, 0]);
221   draw(
222     [start, NL_1 + [NLwidth, 0] + [1, 0]],
223     color->BLACK,
224     size->3,
225     arrowshape->"jet",
226     arrowsides->"==>"
227   );
228   drawSegmentations();
229   if(doDrawCorrection, drawCorrection());
230   drawMarkers();
231   drawLabels();
232 );
233 //
234 drawGrid(d) := (
235 //draws a grid, each box of length 1/d.
236   regional(rs, cs, start, end, clr, gridUnit);
237
238   clr = iBruLeColor("grey", 1);
239
240   gridUnit = NLunit / d;
241
242   start = NL_1 - if(NLstart_1 != 0, [gridUnit * ceil(1/gridUnit),
243     0], [gridUnit, 0]);
244   end = NL_1 + [NLwidth + gridUnit * (if(gridUnit < 1.5, 1, 0) +
245     ceil(1/gridUnit)), 0];
246
247   fillpoly(
248     [
249       start + [0, NLheight/2], end + [0, NLheight/2],
250       end - [0, NLheight/2], start - [0, NLheight/2],
251     ],
252     color->(1,1,1)
253   );
254
255   cs = floor((end_1 - start_1) / gridUnit);
256   rs = floor(NLheight / gridUnit);
257
258   //draw rows, one above and one below the number line
259   repeat(floor(rs/2) + 1,
260     draw([start + (#-1) * [0, gridUnit], end + (#-1) * [0, gridUnit
261       ]],
262       color->clr
263     );
264
265     draw([start - (#-1) * [0, gridUnit], end - (#-1) * [0, gridUnit
266       ]],
267       color->clr
268     );
269   );
270
271   //draw columns one by one
272   start_2 = start_2 + NLheight/2;
273   repeat(cs + 1,

```

```

269     draw(
270         [start + [(#-1) * gridUnit, 0], start + [(#-1) * gridUnit, -
           NLheight]],
271         color->clr
272     );
273 );
274 );
275 );
276 );
277
278 drawLabels() := (
279 // go through list and draw labels
280 regional(P);
281
282 forall(labelStacks, stack,
283     repeat(length(stack),
284         if(stack_# != false,
285             P = frToPos(stack_#_1);
286             if(mod(#, 2) == 1,
287                 P_2 = P_2
288                     - segmentationHeightUnit * 1.5 * labelSize/25
289                     - (# - 1)/2 * labelLineHeight;
290             , // else above
291                 P_2 = P_2
292                     + segmentationHeightUnit * 1 * labelSize/25//note: not
293                       1.5
294                     + (#/2 - 1) * labelLineHeight;
295             );
296             if(stack_#_4 != "",
297                 drawtext(P,
298                     frToTeX(if(stack_#_4 != false, stack_#_4, stack_#_1),
299                         stack_#_3, "$"),
300                     color->stack_#_2,
301                     size->labelSize,
302                     align->"mid"
303                 );
304             );
305             if(length(stack_#) == 5,
306                 if(dragging != stack_#_5,
307                     dragXY_(stack_#_5) = P;
308                 );
309             );
310         );
311     );
312 );
313
314 drawMarker(kind, P, r, clr) := (
315     if(kind == "triangle",
316         fill(
317             polygon([
318                 P,
319                 P + [ r, -sqrt(2) * r],
320                 P + [-r, -sqrt(2) * r]

```

```

321     ) ,
322     color -> clr
323   );
324   , // else
325   if(kind == "triangle-down" ,
326     fill(
327       polygon([
328         P,
329         P + [ r, sqrt(2) * r],
330         P + [-r, sqrt(2) * r]
331       ]),
332       color -> clr
333     );
334   , // else
335
336   if(kind == "dot" ,
337     fill(circle(P, r), color -> clr)
338   , // else tick standard
339     draw([P + [0, -r], P + [0, r]], size -> 2, color -> clr);
340   ));
341
342 );
343
344 drawMarkers() := (
345   regional(P);
346   forall(markers ,
347     if (frCompare(NLstart, #_1) <= 0 & frCompare(#_1, NLend) <= 0,
348       P = frToPos(#_1);
349       drawMarker(#_2, P, #_4, #_3);
350     );
351   );
352 );
353
354 drawSegmentations() := (
355   regional(ordered, drawn, d, segUnit, x, y);
356
357   ordered = sort(segmentations, 1/#_2);
358   d = 1;
359   forall(ordered,
360     d = lcm(d, #_1);
361   );
362
363   drawn = apply(1..(frRaiseTo(NLend, d)_1 + 1), false);
364
365   forall(markers,
366     if(#_2 == "tick" & mod(d, #_2) == 0,
367       drawn_(frRaiseTo(#_1, d)_1 + 1) = true;
368     );
369   );
370
371
372   forall(ordered,
373     segUnit = NLunit / #_1;
374     if (#_1 == 1 % segUnit > 0.25,

```

```

375     repeat(floor(NLwidth / segUnit + 0.000000000001) + 1, i,
376         if(drawn_((i-1) * d / #_1 + 1) == false,
377             x = (i - 1) * segUnit;
378             y = segmentationHeightUnit / 2 * #_2;
379             if (NLunit > 0.25 % mod(i, round(1/NLunit))) == 1,
380                 draw(
381                     [NL_1 + [x, y], NL_1 + [x, -y]],
382                     color->#_3,
383                     size-> 2,
384                     lineCap->"square"
385                 );
386                 drawn_((i-1) * d / #_1 + 1) = true;
387             );
388         );
389     );
390 );
391 );
392 );
393
394 drawDrags() := (
395     regional(f);
396
397     repeat(length(dragXY), i,
398         if(dragSnapped_i,
399             f = posToFr(dragXY_i, snapper);
400
401             labels_i_1 = f;
402             labels_i_2 = dragColors_i;
403             markers_i_1 = f;
404             markers_i_3 = dragColors_i;
405             updateLabelStacks();
406         , // else
407             drawtext(
408                 dragXY_i,
409                 frToTeX(cc_i, false, "$"),
410                 color->dragColors_i,
411                 size->labelSize,
412                 align->"mid"
413             );
414         );
415     );
416 );
417
418 casteljau(p, t) := (
419     regional(n, np);
420     n = length(p);
421     if(n == 1,
422         p_1
423     , // else
424         np = zerovector(n - 1);
425         repeat(n - 1,
426             np_# = (1 - t) * p_# + t * p_(# + 1)
427         );
428         casteljau(np, t);

```

```

429 );
430 );
431
432 bezier(thru, steps) := (
433   regional(curve);
434   curve = zerovector(steps);
435   curve_1 = thru_1;
436   repeat(steps - 1,
437     curve_(# + 1) = casteljau(thru, # / (steps - 1));
438   );
439   curve
440 );
441
442 drawCorrection() := (
443   regional(isWrong, cXY, unit, curve, v);
444   isWrong = 0;
445   repeat(length(dragWrong),
446     if(dragWrong_#,
447       drawimage(dragXY_# + [-1, -1], dragXY_# + [1, -1], "crossRed",
448         alpha->0.75);
449     isWrong = #;
450   );
451 );
452 //this only works for one fraction.
453 if(isWrong > 0 & cc_1_1 != 1,
454   unit = NLunit / cc_1_2;
455   cXY = NL_1;
456   curve = bezier(
457     [cXY + [1/25, -1/25], cXY + [unit/4, -unit/2],
458     cXY + [3 * unit/4, -unit/2], cXY + [unit - 1/25, -1/25]],
459     25
460 );
461 repeat(cc_1_1,
462   connect(curve,
463     color->iBruLeColor("blue"),
464     size->2
465   );
466   //arrow
467   cXY_1 = cXY_1 + unit - 1/25;
468   v = curve_22 - cXY;
469   draw(cXY + 0.01 * v/|v|, cXY,
470     color->iBruLeColor("blue"),
471     arrowsize->1,
472     arrowshape->"jet",
473     arrowsides->"==>"
474   );
475   cXY_1 = cXY_1 + 1/25;
476   curve = apply(curve, # + [unit, 0]);
477 );
478 );
479 );
480 //}}}}
481

```

```
482 | updateLabelStacks();
```

## C.6 JavaScript-Skript zum Senden der Daten von iBooks an den Server

```

1 | var oReq = new XMLHttpRequest();
2 | oReq.open("POST", SERVER_SCRIPT_PATH, true);
3 |
4 | oReq.onreadystatechange = function() {
5 |     var tmp;
6 |     if (oReq.readyState == 4 && oReq.status == 200) {
7 |         if(oReq.responseText.trim() != "FAILED") {
8 |             for (var i = 0; i < localStorage.length; i++) {
9 |                 try{
10 |                     tmp = JSON.parse(localStorage.getItem(localStorage.key(i)
11 |                                     ));
12 |                     if (tmp && tmp.history){
13 |                         tmp.history = [];
14 |                         localStorage.setItem(localStorage.key(i), JSON.
15 |                             stringify(tmp));
16 |                     }
17 |                 } catch(e) {
18 |                 }
19 |             }
20 |             document.body.style.backgroundColor = "#83DE5C";
21 |             document.body.innerHTML = "Done: " + oReq.responseText;
22 |         } else {
23 |             document.body.style.backgroundColor = "#FD696D";
24 |         }
25 |     }
26 | }
27 | oReq.setRequestHeader("Content-type", "application/x-www-form-
    urlencoded");
28 | oReq.send("data=" + JSON.stringify(localStorage));

```

## C.7 Serverseitiges PHP-Skript zum Empfangen der Prozessdaten

```

1 | header("Access-Control-Allow-Origin: *");
2 | header("Access-Control-Allow-Headers: content-type");
3 | if (isset($_POST['data'])) {
4 |     try{
5 |         $fn = "dump".time().".txt";
6 |         if(file_put_contents($fn, $_POST['data'], LOCK_EX) !== false) {
7 |             echo "Data dumped to $fn";
8 |         } else {

```

```

9     echo "FAILED";
10  }
11  } catch(Exception $e) {
12     echo "FAILED";
13  }
14 }

```

## C.8 Preprocessing der Zeitdaten

*Preprocessing* der Zeitdaten aus Spalte `time` in `data.frame` `df`.

```

1 df$time[df$time > 45*60] = 45*60;
2 df$logtime = log(df$time);
3 df = df[df$time > 0.5,];
4 maxlogtimes = aggregate(logtime ~ widget, data = df, FUN = function
   (x) mean(x) + 2 * sd(x));
5 names(maxlogtimes)[2] = "maxlogtime";
6 df = merge(df, maxlogtimes, by = "widget");
7 df$logtime[df$logtime > df$maxlogtime] = df$maxlogtime[df$logtime >
   df$maxlogtime];
8 df$time[df$logtime == df$maxlogtime] = exp(df$maxlogtime[df$logtime
   == df$maxlogtime]);

```

## C.9 Berechnung der Prozessmaße

`df` ein `data.frame` mit allen Aufgabenbearbeitungen (Spalten: `ipad_id`, `school`, `class`, `gender`, `startTime`, `endTime`, `correct`, `firsty`, `widget`).

`tips` ein `data.frame` mit allen Aufrufen von Lösungshilfen (Spalten: `ipad_id`, `school`, `class`, `gender`, `tipcount`).

`excludeWidgets.correct` ein Vektor mit Bezeichnern der Widgets, die für die Lösungsra-  
tenbestimmung nicht berücksichtigt werden sollen.

```

1 # Zählmaße:
   -----
2 #Anzahl bearbeiteter Einzelaufgaben
3 M = aggregate(widget ~ school + class + ipad_id + gender,
4   data = df,
5   FUN = length
6 )
7 names(M)[5] = "tasks.count"
8
9 #Anteil bearbeiteter Widgets
10 M = merge(M, aggregate(widget ~ ipad_id + gender + class + school,
11   data = df,
12   FUN = function(x) length(unique(x))),
13   ALL = TRUE)
14 names(M)[6] = "widgets.count"
15 M$widgets.perc = M$widgets.count / 66

```

```

16
17 #Anzahl aufgerufener Lösungshilfen
18 M = merge(M, aggregate(tipcount ~ ipad_id + gender + class + school
19     ,
20     data = tips ,
21     FUN = sum),
22     all = TRUE)
23 names(M)[7] = "tips.count"
24 M$tips.count[is.na(M$tips.count)] = 0;
25 #   Zeitmaße
26 -----
27 # Gesamte Bearbeitungszeit in Minuten
28 df$tot = as.numeric(strptime(tbt$endTime, format="%Y-%m-%d %H:%M:%
29     OS")) -
30     as.numeric(strptime(tbt$startTime, format="%Y-%m-%d %H:%M:%OS"))
31 M = merge(M, aggregate(tot/60 ~ ipad_id + school ,
32     data = df ,
33     FUN = sum),
34     all = TRUE)
35 names(M)[8] = "tot.sum"
36 # Mittlere Zeit in Feedbackphasen
37 df$tbtt = 0;
38 lastipad = df$ipad_id[1]
39 # do not calculate if there is a widget-change
40 lastwidget = df$widget[1]
41 for(i in 2:(nrow(df))){
42     if ((lastipad == df$ipad_id[i]) & (lastwidget == df$widget[i])) {
43         df$df[i-1] = as.numeric(strptime(df$startTime[i], format="%Y-%m
44             -%d %H:%M:%OS")) -
45             as.numeric(strptime(df$endTime[i-1], format="%Y-%m-%d %H:%M
46                 :%OS"))
47     } else {
48         lastipad = df$ipad_id[i]
49         lastwidget = df$widget[i]
50     }
51 }
52 #
53 # [Preprocessing wie in \autoref{app:code:preprocessing}]
54 #
55 M = merge(M, aggregate(tbt ~ ipad_id + gender + school, data = df,
56     FUN = mean))
57 #   Leistungsmaße:
58 -----
59 slr.firsty = do.call(data.frame, aggregate(correct ~ ipad_id +
60     gender + class + school + widget,
61     data = df %>% dplyr::filter(!is.na(correct) & firsty == 1 & !
62         widget %in% excludeWidgets.correct),
63     FUN = my.st
64 ))
65 M = merge(M, aggregate(correct.mean ~ ipad_id + gender + class +

```

```

    school ,
61     data = slr.firsty ,
62     FUN = mean),
63     all = TRUE);
64 names(M)[10] = "correct.firsty.mean"

```

## C.10 PHP-Skript zur Anpassung der Logzeiten im Zusammenhang mit Lösungshilfen

```

1 // Extrahiert die Aufgabencharakteristika aus $log
2 function problem($log) {
3     $result = [];
4
5     if (isset($log['problem_e'])) {
6         $result['problem_e'] = $log['problem_e'];
7         $result['problem_d'] = $log['problem_d'];
8     } elseif (isset($log['problem_e1'])) {
9         $result['problem_e1'] = $log['problem_e1'];
10        $result['problem_d1'] = $log['problem_d1'];
11        $result['problem_e2'] = $log['problem_e2'];
12        $result['problem_d2'] = $log['problem_d2'];
13    }
14    if (isset($log['problem_n']))
15        $result['problem_n'] = $log['problem_n'];
16    if (isset($log['context']))
17        $result['context'] = $log['context'];
18
19    return $result;
20 }
21
22 // Das sind die Widgets mit Lösungshilfen
23 $sections = [
24     'aufgabenFromPartToWholeUnit', //Widget W19
25     'aufgabenPrerreduce', //Widget W51a, nur GYM
26     'aufgabenReduce', //Widget W51b, nur MS
27     'aufgabenRaiseWith', //Widget W41
28     'aufgabenReduceWith', //Widget W42
29     'aufgabenTEG', //Widget W17
30     'aufgabenTEGctx', //Widget W18
31     'aufgabenTMG', //Widget W27
32     'aufgabenTMGctx', //Widget W28
33     'missingNumberEK', //Widget W49
34     'raisedWithSymbolic', //Widget W45
35     'raisedWithVisual', //Widget W43
36     'raiseToDenom', //Widget W48
37     'reducedWithSymbolic', //Widget W46
38     'reducedWithVisual', //Widget W44
39     'writeNasQ' //Widget W52
40 ];
41 $last = ["kind" => "", "ipad_id" => "0"];
42 $firstTip = [];

```

```

43
44 foreach($sections as $table) {
45     echo " $table \n";
46     echo "===== \n";
47     echo "Creating Backup\n";
48     $res = $mysql->query("SHOW CREATE TABLE $table");
49     $qry = $res->fetch_assoc()['Create Table'];
50     $qry = str_replace(" AUTO_INCREMENT,", ",", $qry);
51     $qry = str_replace($table, $table."ALT", $qry);
52     $mysql->query($qry);
53     $qry = "INSERT INTO $table"."ALT SELECT * FROM $table";
54     $mysql->query($qry);
55
56     echo "===== \n";
57     $res = $mysql->query("SELECT * FROM $table");
58
59     while ($row = $res->fetch_assoc()) {
60 /* WENN vor einer solution ein tip steht
61     UND die endTime vom Tip gleich der startTime von der solution
62     ist
63     DANN setze die startTime der solution auf die startTime des
64     ersten Tips zu dieser Aufgabe */
65     if ($last['ipad_id'] != $row['ipad_id']) {
66         echo "NEW IPAD: ".$row['ipad_id']. "
67         ----- \n";
68         $last['kind'] = "";
69     }
70     echo "Row ".$row['id']. " is a ";
71     if ($row['kind'] == "tip") {
72         echo "tip.";
73         if (($last['kind'] != "tip") || problem($row) != problem($
74             last)){
75             echo " It is the first tip for a new problem.";
76             $firstTip = $row;
77         }
78     } else { //kind == solution
79         echo "solution.";
80         if ( ($last['kind'] == "tip") && ($last['endTime'] == $row['
81             startTime'])) {
82             echo " It was preceded by tip(s) for the same problem, so
83             we adjust its startTime from ";
84             echo $row['startTime']. " to ".$firstTip['startTime']. " (
85             row ".$firstTip['id']. "):\n";
86             $qry = "UPDATE $table SET startTime = \"".$firstTip['
87                 startTime']. "\" WHERE id = ".$row['id'];
88             $mysql->query($qry);
89         }
90     }
91     $last = $row;
92     echo "\n";
93 }
94 echo "===== \n";
95 echo "Updating tips' startTimes and endTimes.\n";
96 //Setze die startTime von allen 'tip's auf ihre endTime

```

```
89 $qry = "UPDATE $table SET startTime = endTime WHERE kind = 'tip'"
90 ;
91 $mysql->query($qry);
92 //Setze die endTime von allen 'tip's auf die startTime (alte
93   endTime) des folgenden Eintrags desselben ipads
94 $qry = "UPDATE $table neu, ".$table."ALT alt
95   SET neu.endTime = alt.endTime
96   WHERE neu.kind = 'tip'
97   AND neu.id = alt.id-1
98   AND alt.ipad_id = neu.ipad_id";
99 $mysql->query($qry);
100 echo "$table done.\n";
101 echo "=====\n";
102 }
103 // Update META
104 foreach($sections as $table) {
105 // $qry = "UPDATE META m, 'SJ1617Kap1'.$table w
106 $qry = "UPDATE META m, $table w
107   SET m.startTime = w.startTime , m.endTime = w.endTime
108   WHERE m.widget = \"$table\" AND m.widget_id = w.id;";
109 $mysql->query($qry);
110 }
```



# D Papierbasierte Erhebungsinstrumente

D.1	Vortest	388
D.2	Nachtest	392

## D.1 Vortest

Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik  
TUM School of Education  
Technische Universität München



### Was weißt du schon über Brüche?

Schule:
Klasse:
Schülernummer:
Datum:
Geschlecht: <input type="checkbox"/> Mädchen <input type="checkbox"/> Junge

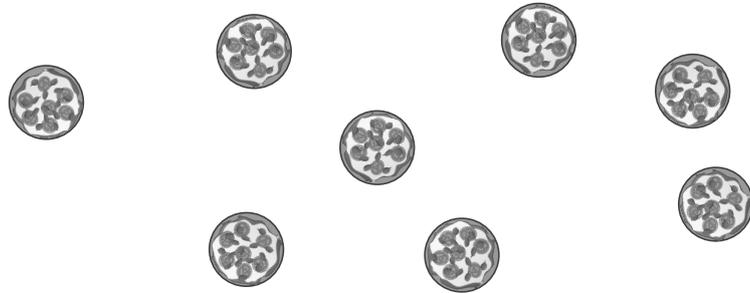
Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig und anonym. Bitte schreibe deinen Namen **nicht** auf dieses Heft.

Die Aufgaben in diesem Heft gehen über den Stoff der **6. Klasse**. Es ist **nicht** schlimm, wenn du eine Frage nicht beantworten kannst. Sei dann bitte ehrlich und kreuze das Kästchen am Rand an.

Ich weiß es nicht.

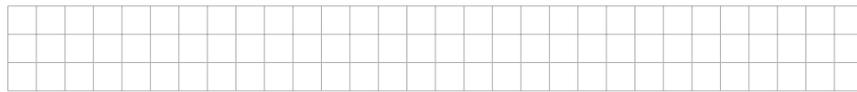
**Aufgabe 1** Kreise *drei Viertel* der Pizzen ein.

Ich weiß es nicht.



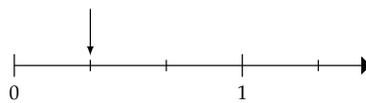
**Aufgabe 2** Gib an, welcher Anteil des Balkens grau gefärbt ist.

Ich weiß es nicht.

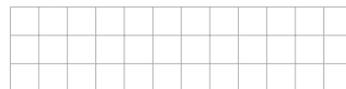


**Aufgabe 3** Auf dem Zahlenstrahl ist ein Bruch markiert. Gib ihn an.

Ich weiß es nicht.

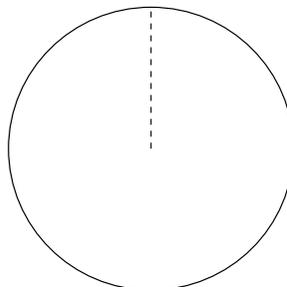


Bruch:



**Aufgabe 4** Markiere *zwei Drittel* des Kreises farbig.

Ich weiß es nicht.







## D.2 Nachtest

Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik  
TUM School of Education  
Technische Universität München



### Was weißt du über Brüche?

Schule:
Klasse:
Schülernummer:
Datum:
Geschlecht: <input type="checkbox"/> Mädchen <input type="checkbox"/> Junge

Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig und anonym. Bitte schreibe deinen Namen **nicht** auf dieses Heft.

Bei manchen Aufgaben sind mehrere Antworten vorgegeben. Bei diesen Fragen ist immer nur **eine** Antwort richtig. Kreuze die richtige Antwort an.

**Beispiel** Wie viele Ecken hat ein Rechteck? Kreuze an.

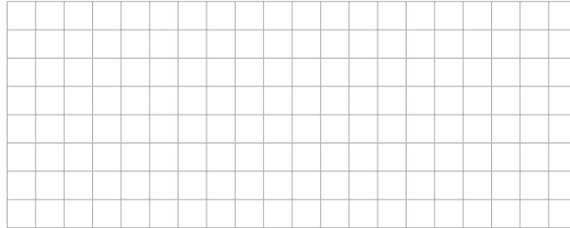
 1 2 3 4 5



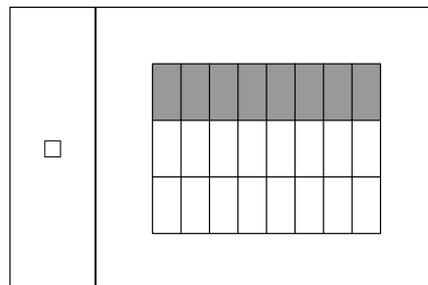
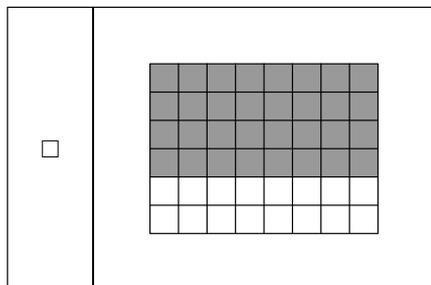
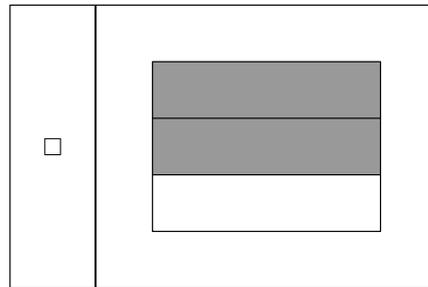
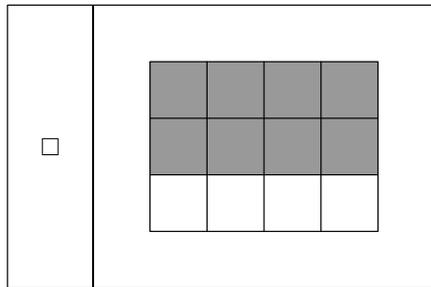
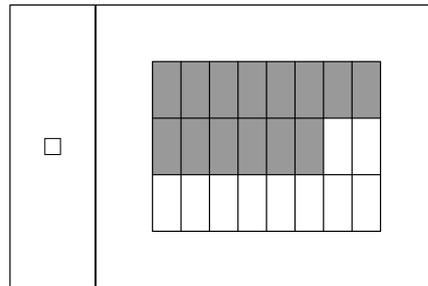
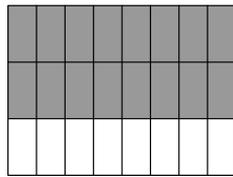
**Aufgabe 4** Welche Zahl gehört in die Lücke? Setze ein.

$$\frac{2}{\boxed{\phantom{00}}} \text{ von } 30 = 12$$

Platz für Nebenrechnungen:



**Aufgabe 5** Der dargestellte Bruch soll zeichnerisch mit 2 gekürzt werden. Kreuze das richtige Bild an.





**Aufgabe 10** Erweitere den dargestellten Bruch zeichnerisch mit 3.



**Aufgabe 11** Welche Zahl gehört in die Lücke? Kreuze an.

$$\frac{2}{7} \text{ von } \blacksquare = 14$$

 14

 21

 28

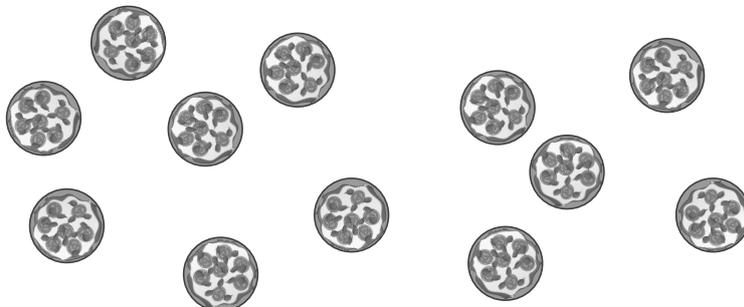
 49

 56

**Aufgabe 12** Markiere  $\frac{1}{3}$  des Balkens farbig.



**Aufgabe 13** Kreise  $\frac{2}{3}$  der Pizzen ein.







**Aufgabe 20** Vergleiche die Brüche. Trage das richtige Symbol „>“, „<“ oder „=“ in den Kästen ein.

a)  $\frac{3}{7}$    $\frac{5}{7}$

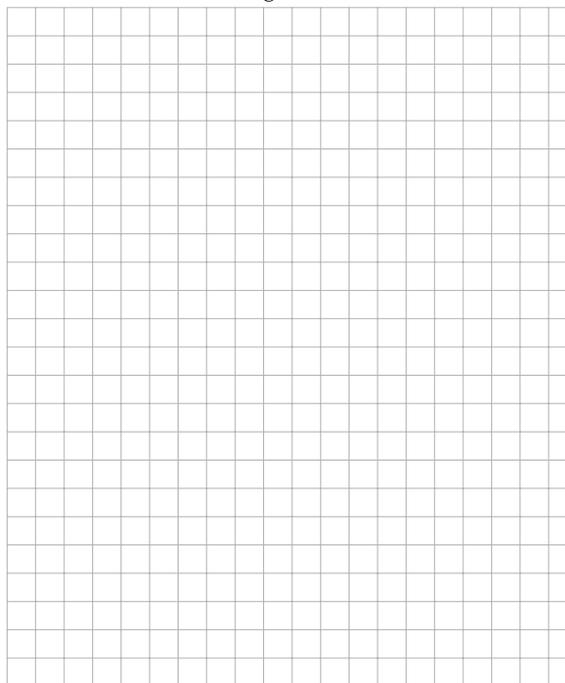
b)  $\frac{4}{5}$    $\frac{4}{7}$

c)  $\frac{3}{9}$    $\frac{5}{15}$

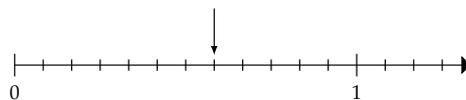
d)  $\frac{20}{21}$    $\frac{9}{10}$

e)  $\frac{15}{13}$    $\frac{16}{17}$

Platz für Nebenrechnungen:



**Aufgabe 21** Liegen die Brüche auf dem Zahlenstrahl links oder rechts vom Pfeil? Kreuze an.



- a)  $\frac{3}{4}$        links vom Pfeil       rechts vom Pfeil
- b)  $\frac{7}{15}$        links vom Pfeil       rechts vom Pfeil
- c)  $\frac{5}{4}$        links vom Pfeil       rechts vom Pfeil
- d)  $\frac{6}{10}$        links vom Pfeil       rechts vom Pfeil



## **E Aktivitätsgraphen der einzelnen Klassen**

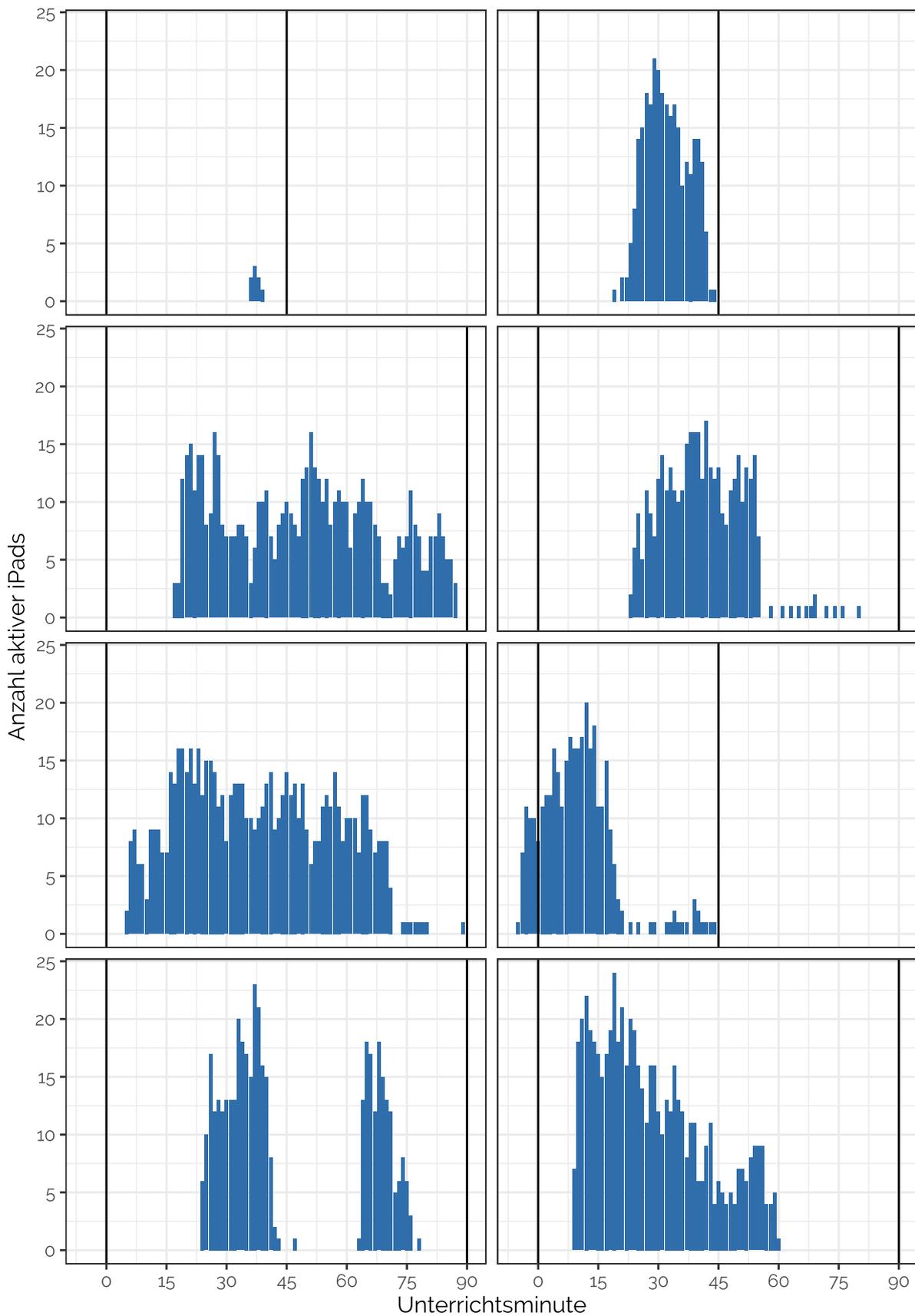


Abbildung E.1. Aktivitätsgraphen der Klasse G11; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

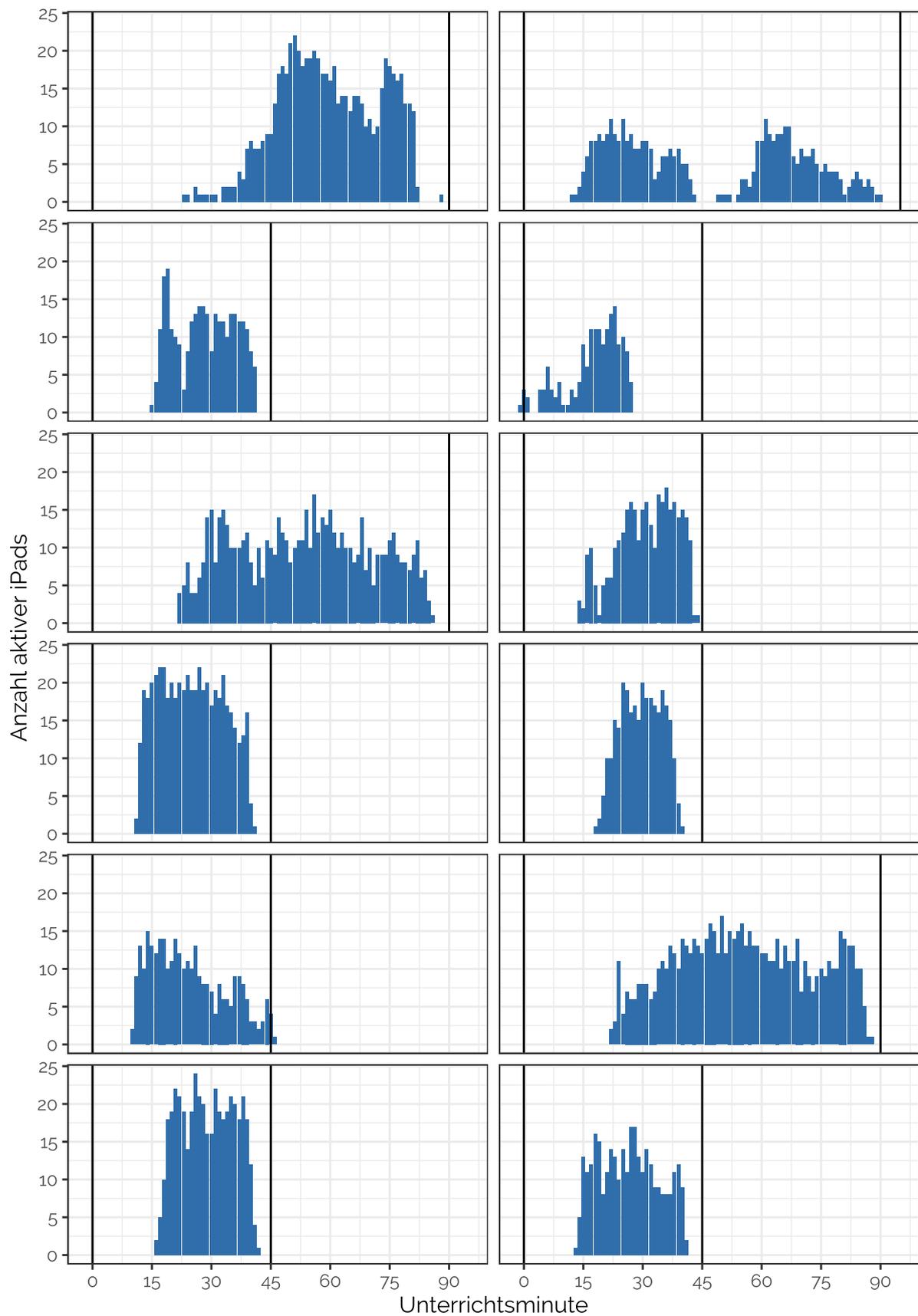


Abbildung E.2. Aktivitätsgraphen der Klasse G12; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

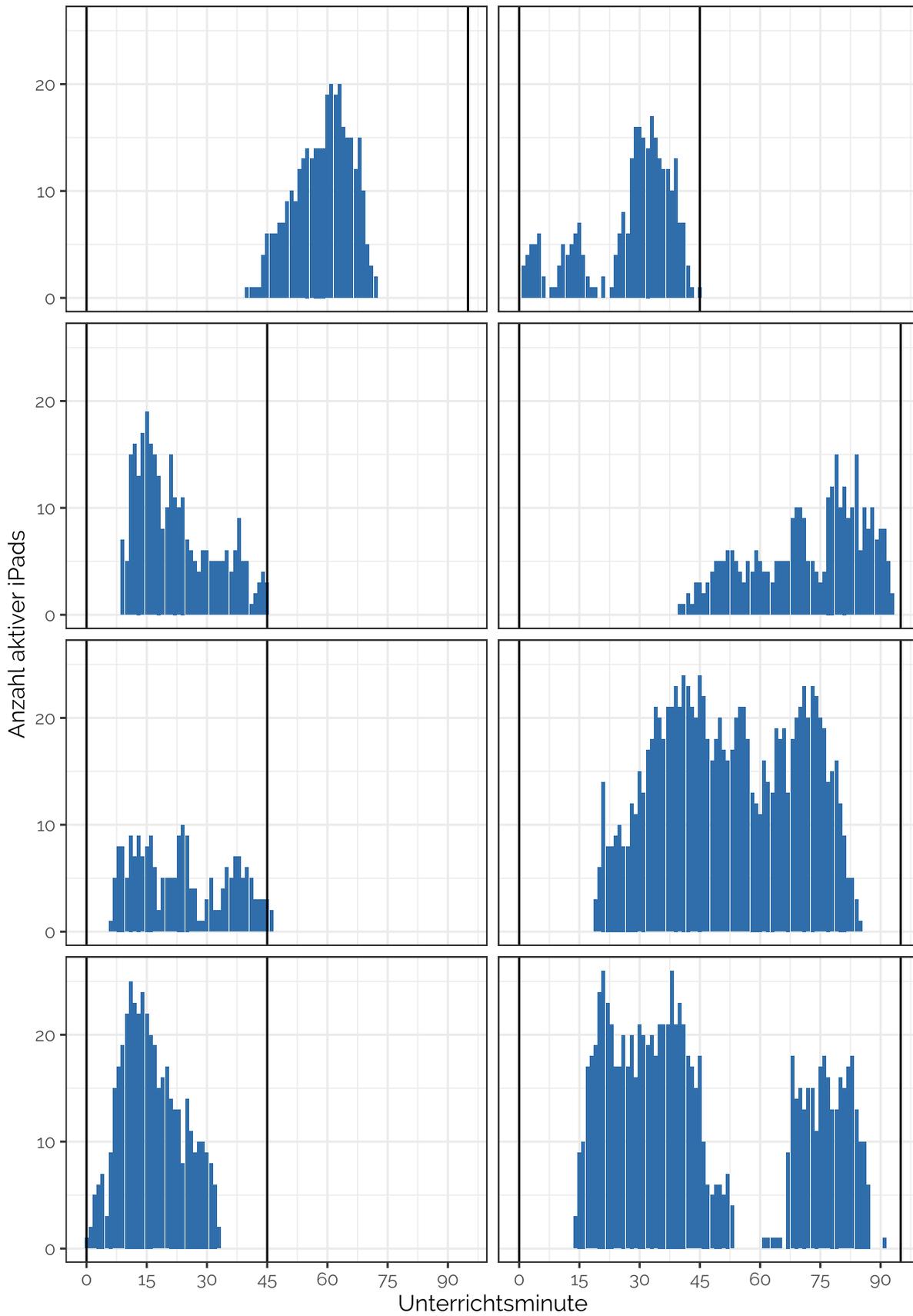


Abbildung E.3. Aktivitätsgraphen der Klasse G13; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

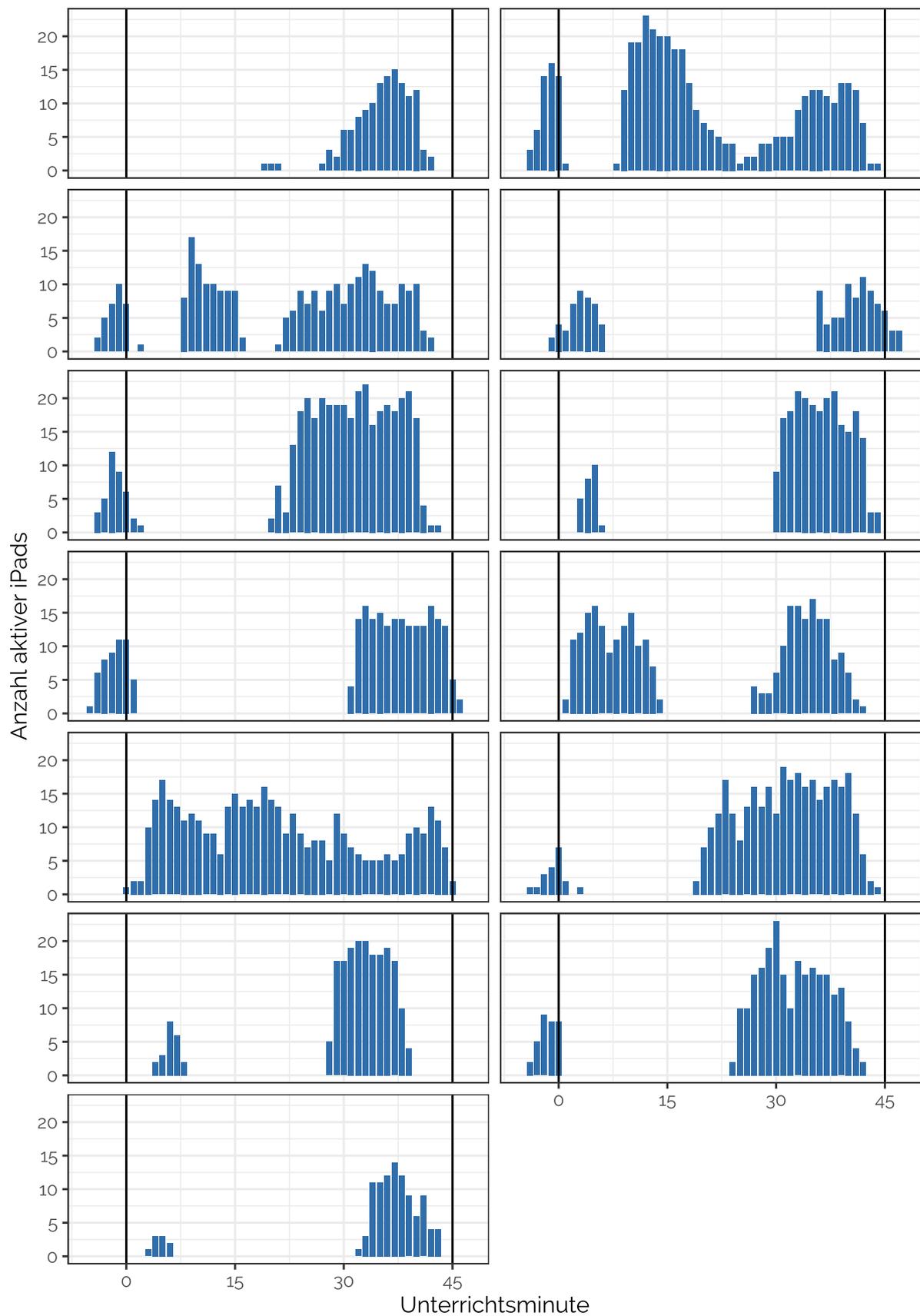


Abbildung E.4. Aktivitätsgraphen der Klasse G21; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

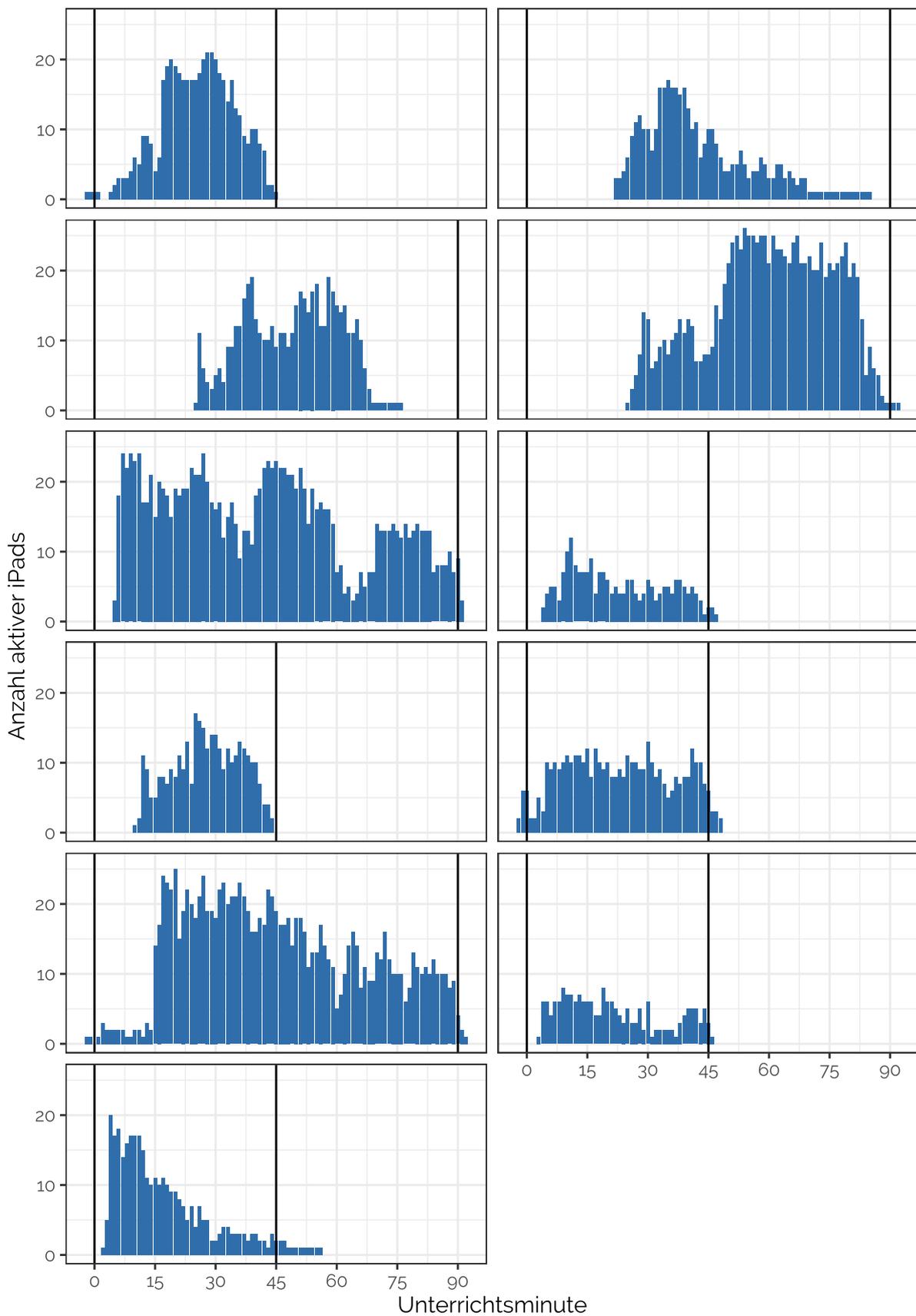


Abbildung E.5. Aktivitätsgraphen der Klasse G22; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

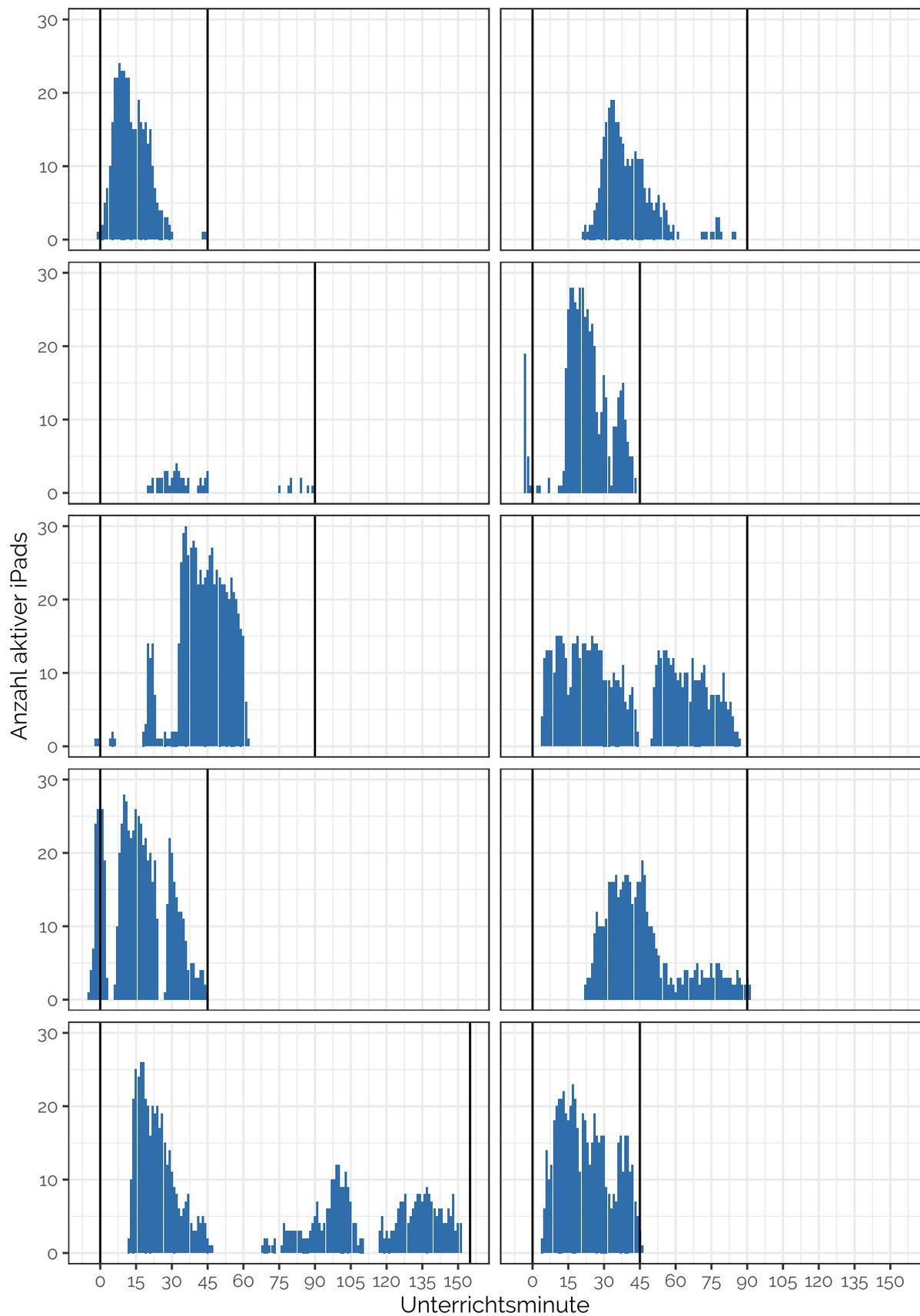


Abbildung E.6. Aktivitätsgraphen der Klasse G23; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

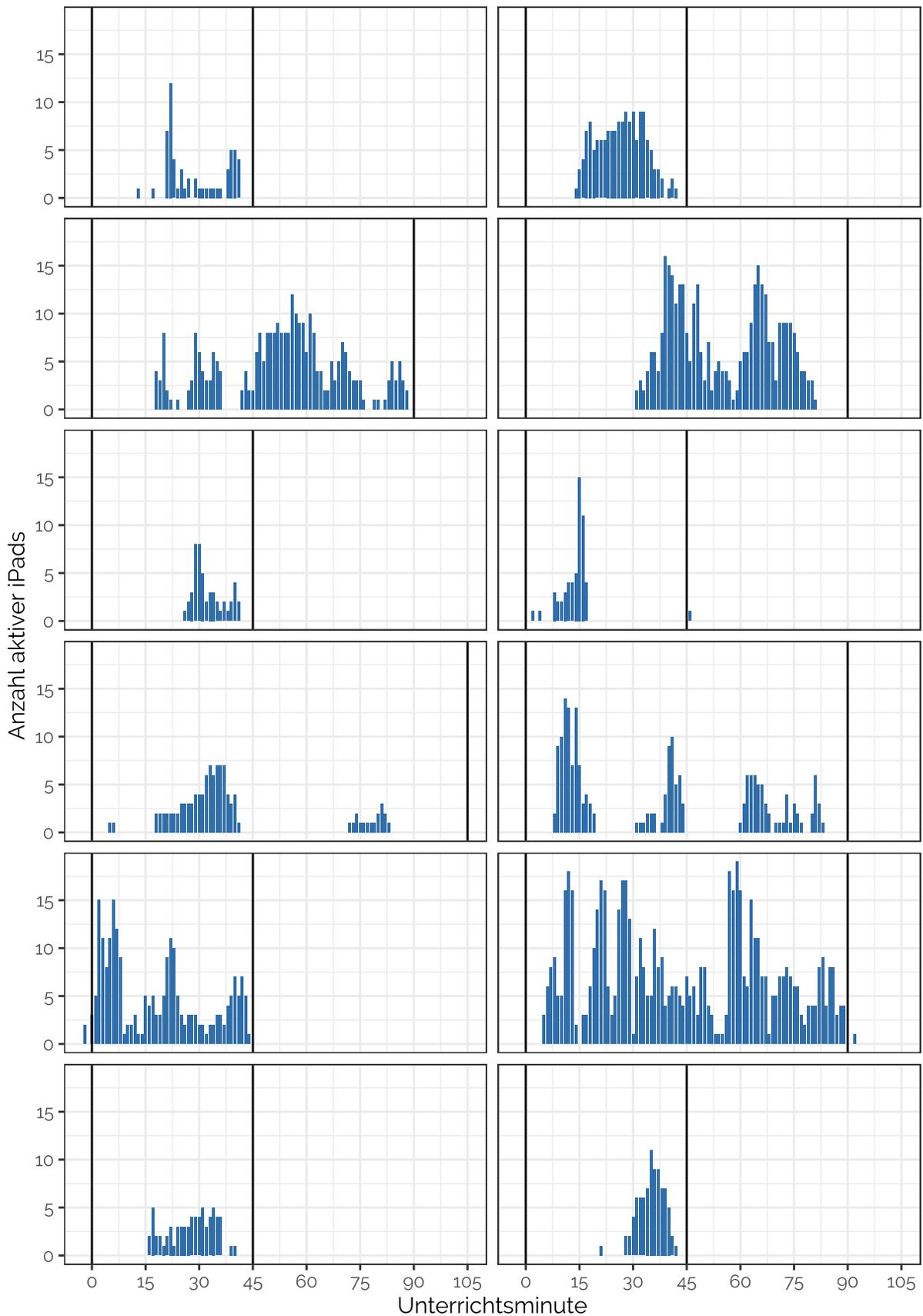


Abbildung E.7. Aktivitätsgraphen der Klasse M11; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

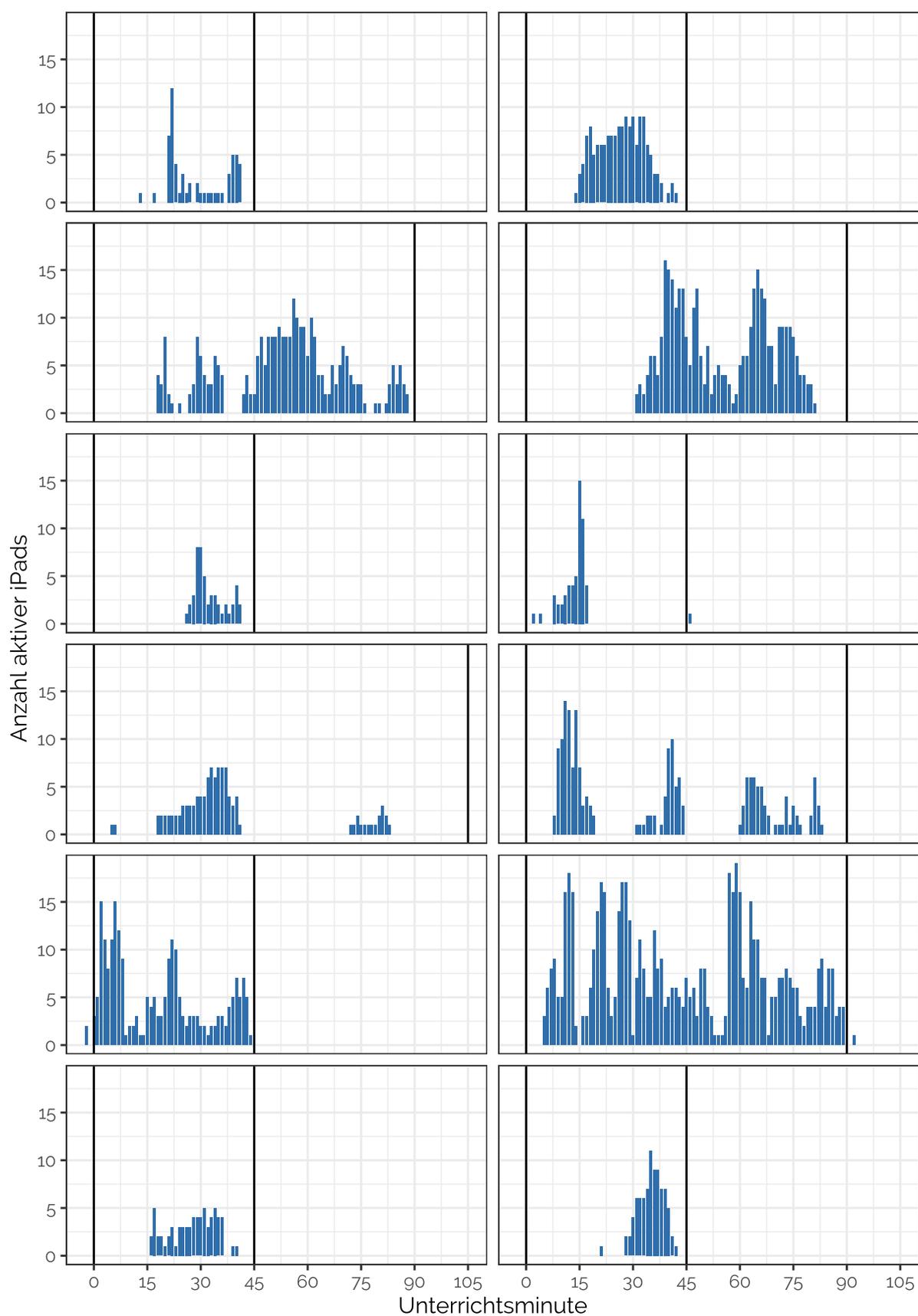


Abbildung E.8. Aktivitätsgraphen der Klasse M12; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

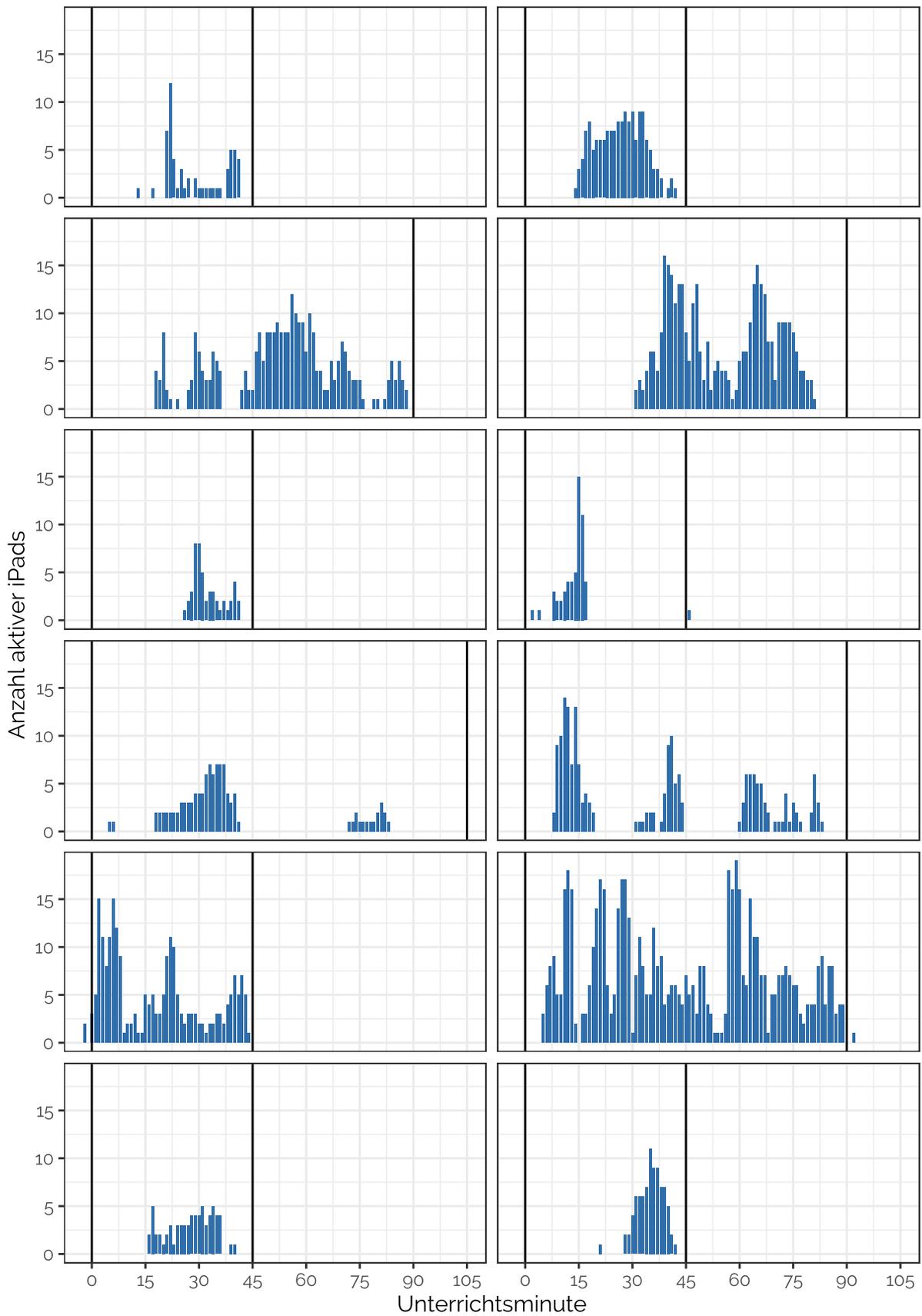


Abbildung E.9. Aktivitätsgraphen der Klasse M13; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

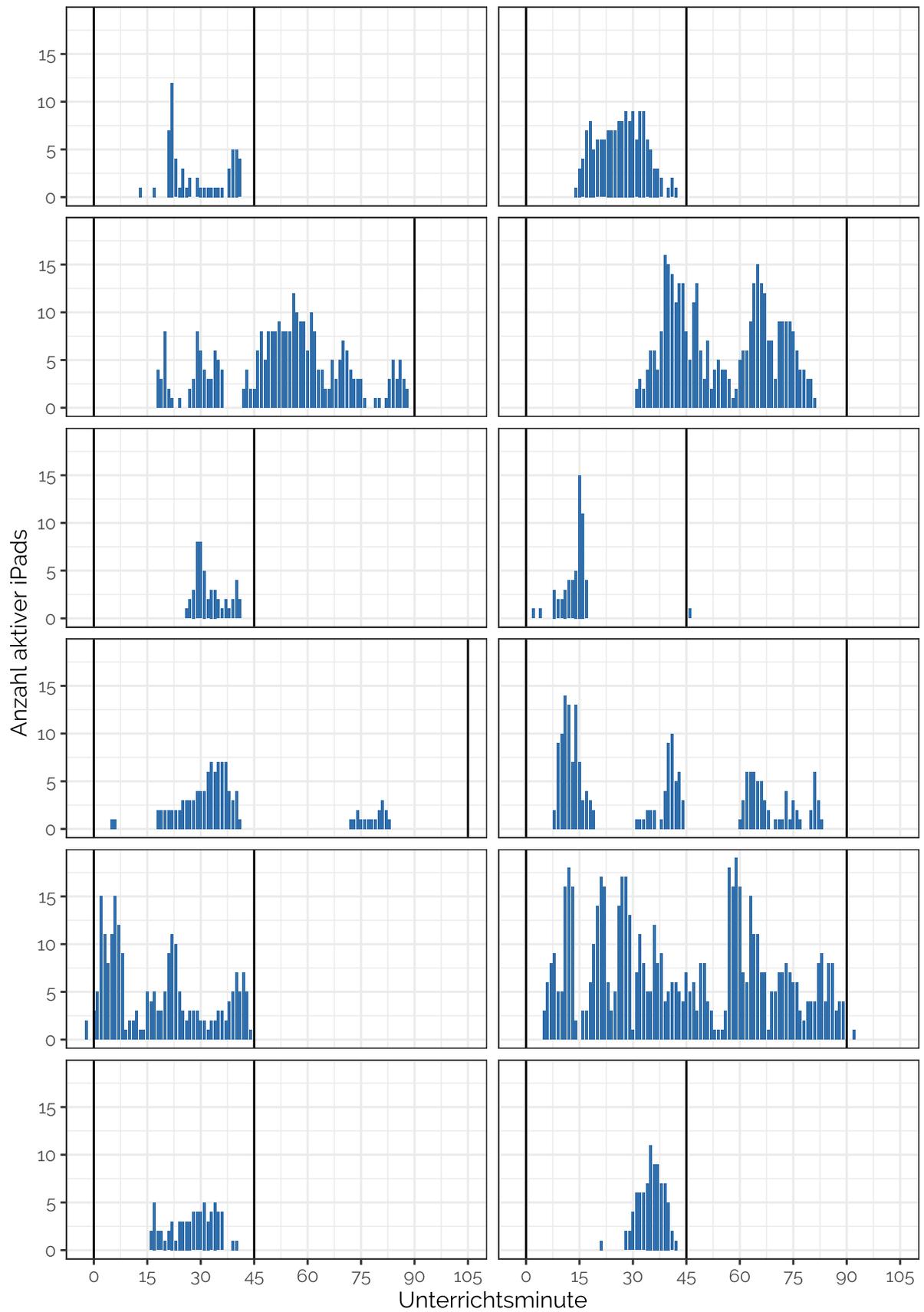


Abbildung E.10. Aktivitätsgraphen der Klasse M21; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

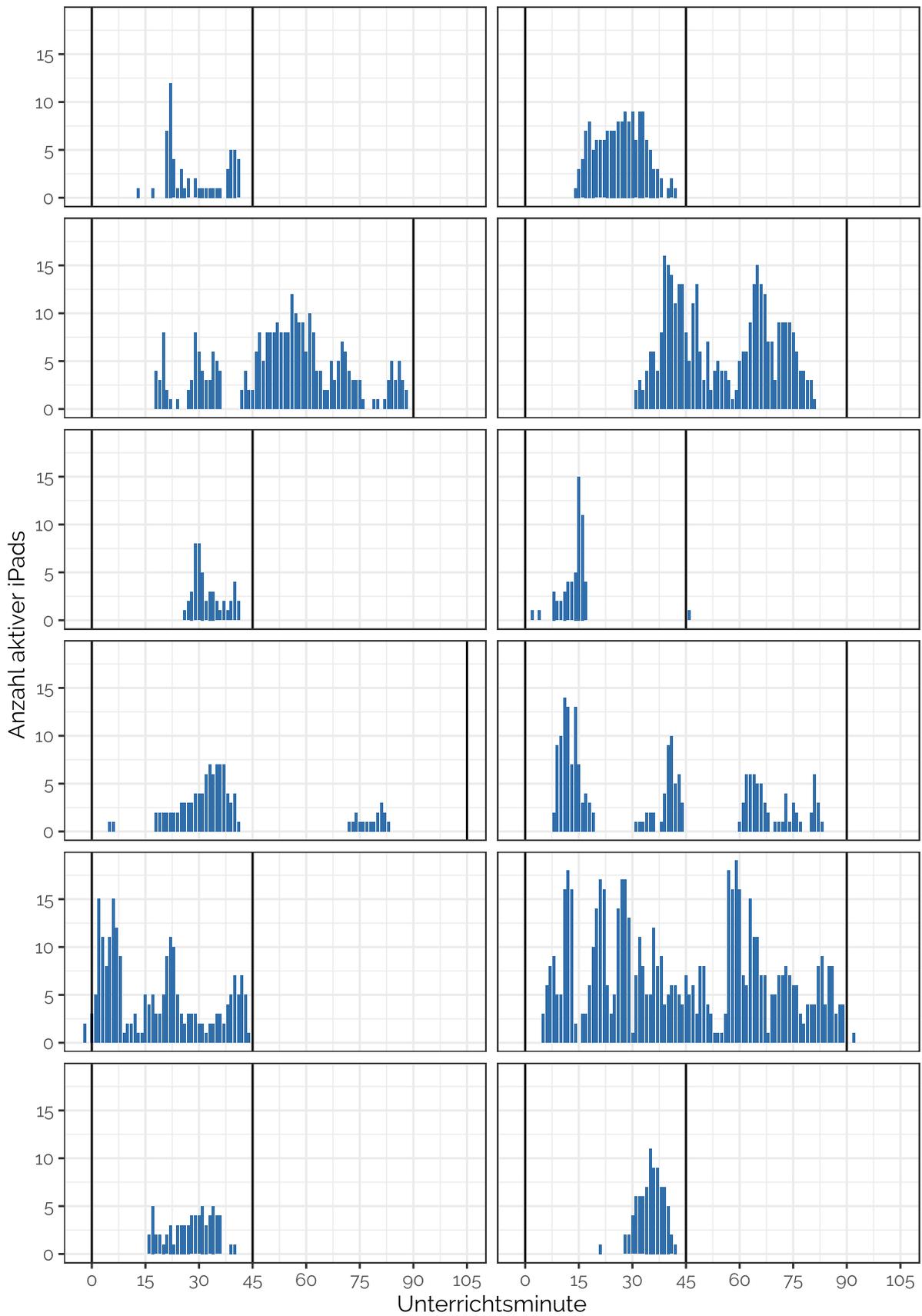


Abbildung E.11. Aktivitätsgraphen der Klasse M22; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.

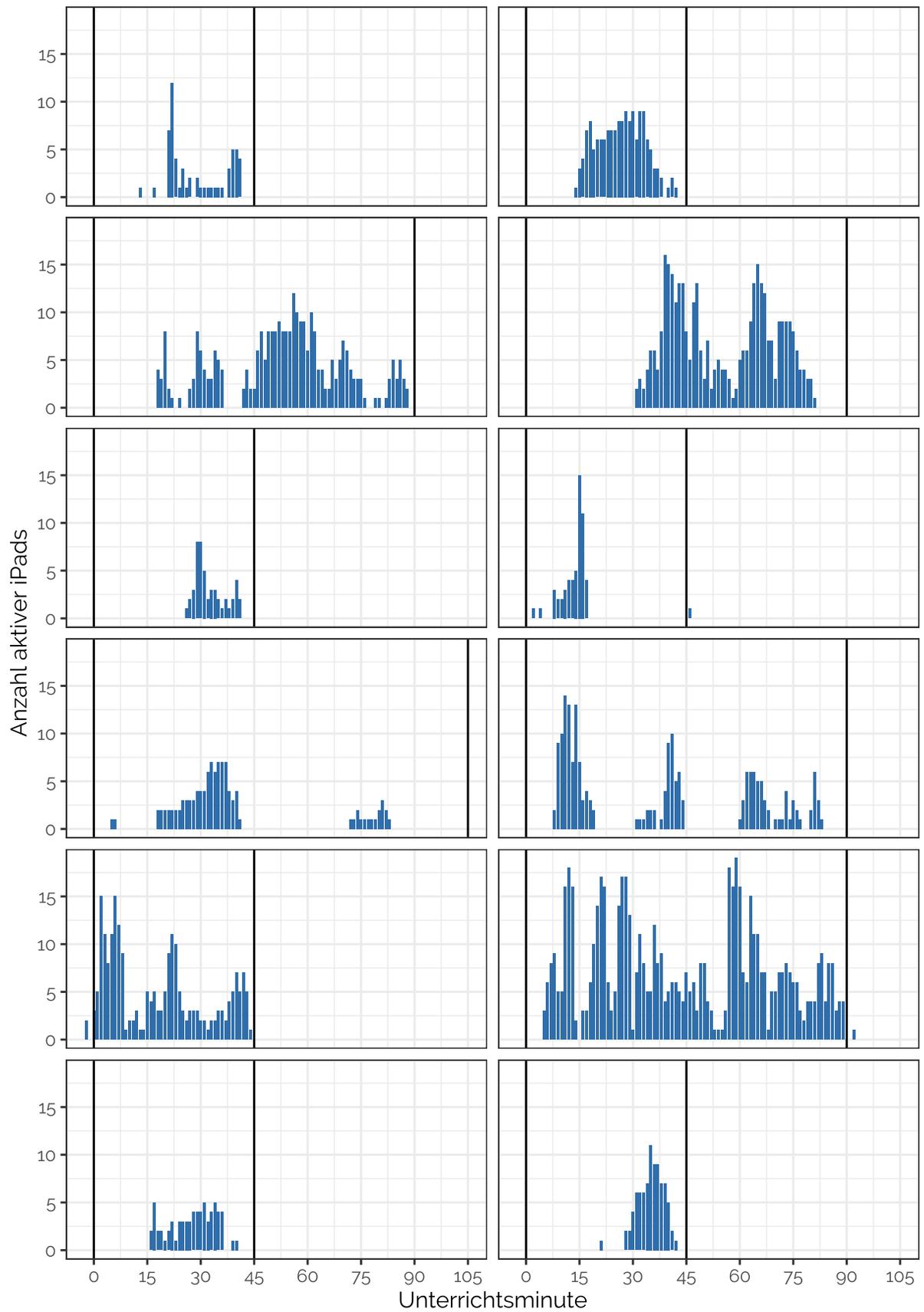


Abbildung E.12. Aktivitätsgraphen der Klasse M23; chronologisch angeordnet von links oben nach rechts unten.