

Technische Universität München
TUM School of Engineering and Design

Drehgeberlose Regelung der Synchron Reluktanz Maschine durch modellwinkelunabhängige Erweiterung des Flussmodells

Daniel Tritschler

Vollständiger Abdruck der von der TUM School of Engineering and Design der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Rigoll

Prüfer der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Ralph Kennel
2. Prof. Dr.-Ing. Ingo Hahn

Die Dissertation wurde am 30.09.2021 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die TUM School of Engineering and Design am 13.09.2022
angenommen.

für Cindy, Lea und Eva

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer Projektkooperation zwischen der SEW-EURODRIVE GmbH & Co KG und dem Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Ralph Kennel, der auf Seiten der Technischen Universität München die Betreuung dieser Arbeit übernahm, für die mir entgegengebrachte Unterstützung. Ferner möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Ingo Hahn für die Ausfertigung des Zweitgutachtens bedanken.

Auf Seiten von SEW-EURODRIVE danke ich den Kollegen der Innovationsprojektgruppen 1 und 2, insbesondere Herrn Wolfgang Hammel für die vielen motivierenden Diskussionen während der Erstellung der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Vorwort | i |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Motivation und Zielsetzung | 1 |
| 1.2 Die Synchron Reluktanz Maschine | 2 |
| 1.2.1 Funktionsprinzip | 2 |
| 1.2.2 Mechanischer Aufbau | 7 |
| 2 Modellierung | 9 |
| 2.1 Raumzeigerdarstellung | 9 |
| 2.2 Koordinatensysteme | 12 |
| 2.3 Spannungsgleichung in Stator- und Rotorkoordinaten | 14 |
| 2.4 Ideale und reale Maschine | 16 |
| 2.5 Drehmomentbildung | 20 |
| 2.6 HF-Modellierung | 23 |
| 3 Stand der Technik | 29 |
| 3.1 Regelung des Drehmoments | 29 |
| 3.1.1 Statorflussorientierte Regelung | 31 |
| 3.1.2 rotororientierte Stromregelung | 37 |
| 3.1.3 Strategien zur optimalen Motorführung | 40 |
| 3.2 Regelung der Drehzahl | 42 |
| 3.3 Bestimmung der Rotorposition ohne Drehgeber | 42 |
| 3.3.1 Grundwellenmodelle | 43 |
| 3.3.2 Injektionsverfahren | 50 |
| 3.3.3 Kombination aus Injektions- und Grundwellenmodell | 58 |
| 3.4 Messverfahren zur Bestimmung der Modellparameter | 58 |
| 3.4.1 Messung der Flusskennfelder | 58 |
| 3.4.2 Messung der differentiellen Admittanzen | 60 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Eigenschaften der Testmaschinen | 63 |
| 4.1 | Messung der Flusskennfelder | 63 |
| 4.1.1 | Approximation der Flusskennfelder | 65 |
| 4.1.2 | Berücksichtigung von Modellvorgaben | 70 |
| 4.1.3 | Flusskennfelder der Testmaschinen | 75 |
| 4.2 | Betriebsverhalten | 76 |
| 4.2.1 | MTPA und MTPF Kennlinie | 79 |
| 4.2.2 | Parameter für drehgeberlose Grundwellenverfahren | 81 |
| 4.2.3 | Parameter für drehgeberlose Injektionsverfahren | 81 |
| 5 | Erweitertes Active Flux Verfahren für die RSM | 91 |
| 5.1 | Spezielle Eigenschaften der RSM | 91 |
| 5.1.1 | Sollwerttrajektorie für die Drehmomentregelung | 91 |
| 5.1.2 | Rotororientierte Stromregelung bei Winkelfehler | 92 |
| 5.1.3 | Phasenregelschleifen für die Rotorstellung | 99 |
| 5.1.4 | Startwert für die Rotorposition | 101 |
| 5.1.5 | Arbeitspunktabhängigkeit der Maschinenparameter | 101 |
| 5.1.6 | Stabilität der Hauptachsenrichtungskompensation | 102 |
| 5.2 | Verfahren nach dem Stand der Technik | 104 |
| 5.3 | Einfluss von Winkelfehlern bei Active Flux | 106 |
| 5.4 | Erweiterung des Active Flux Verfahrens | 110 |
| 5.5 | Funktionsnachweis | 110 |
| 6 | Zusammenfassung | 117 |
| | Literaturverzeichnis | 119 |
| | Abkürzungsverzeichnis | 125 |
| | Symbolverzeichnis | 127 |
| A | Anhang | 131 |
| A.1 | Transformation der Spannungsgleichung ins Rotorkoordinatensystem | 131 |
| A.2 | Ellipsenparameter in unterschiedlichen Koordinatensystemen | 135 |
| A.3 | Herleitung der Gleichungen zur Spline Approximation | 139 |
| A.4 | Verschalten von Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung | 144 |

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Elektrische Antriebe wandeln elektrische Energie in Bewegung um. Mit den aus diesem Prinzip entstehenden Anwendungsmöglichkeiten wird eine Vielzahl von Aufgaben erfüllt, die sich drehzahlvariable und drehzahlkonstante Anwendungen aufteilen. Im industriellen Umfeld werden für Aufgaben mit konstanter Drehzahl meist Asynchronmaschinen (ASMs) eingesetzt, da diese direkt am Netz anlaufen können und somit keine weiteren Komponenten notwendig sind. Mit steigenden Anforderungen an die Effizienz elektrischer Maschinen ([15, 32]) wird es jedoch notwendig einen Frequenzumrichter zu verwenden um die Maschinen auch bei Teillast im optimalen Betriebspunkt führen zu können. Damit entfällt gleichzeitig die Anforderung direkt am Netz anzulaufen und es können auch Motoren verwendet werden, die diese Eigenschaft nicht aufweisen. Neben den Anwendungen die ohnehin als drehzahlveränderlich projektiert wurden, sind genau diejenigen Anwendungen, deren Effizienz durch den Einsatz von Synchronmaschinen gesteigert werden soll, das Ziel der Synchron Reluktanz Maschine (RSM). Sie ist im Vergleich zur ASM kostengünstiger herzustellen und erreicht dabei höhere Wirkungsgrade [11]. Die Permanentmagneterregte Synchronmaschine (PMSM) erreicht noch höhere Wirkungsgrade und zeichnet sich vor allem durch eine hohe Drehmomentdichte aus. Mit geeigneten Regelverfahren ist mit dieser Maschine außerdem eine hohe Regeldynamik erreichbar. Dazu werden jedoch Permanentmagnete benötigt, die eine hohe Energiedichte aufweisen, was durch die Herstellung aus seltenen Erden erreicht wird. Dies erhöht die Herstellungskosten der PMSM. Deshalb ist die RSM einzuordnen als eine Maschine zur Effizienzsteigerung von Anwendungen, die bisher durch ASMs ausgerüstet waren. Somit ist es notwendig, dass auch die RSM ohne Drehgeber betrieben werden kann um keinen Nachteil gegenüber der ASM zu generieren.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines drehgeberlosen Verfahrens zum Betrieb der RSM. Entsprechend der zuvor beschriebenen normativen Anforderungen an

die Effizienz des Antriebssystems ist ein möglichst verlustarmer Betrieb anzustreben. Die Umsetzung soll mit Hilfe eines Standard-Frequenzumrichters, ohne zusätzliche Hilfs- oder Messmittel, erfolgen. Dazu ist zunächst zu untersuchen, welche Verfahren zur Motorführung am besten mit der drehgeberlosen Ermittlung der Rotorstellung kombinierbar sind. Zusammen mit den durch Messung identifizierten Eigenschaften zweier Testmaschinen sollen die gewonnenen Erkenntnisse in den Entwurf des Verfahrens eingehen.

1.2 Die Synchron Reluktanz Maschine

1.2.1 Funktionsprinzip

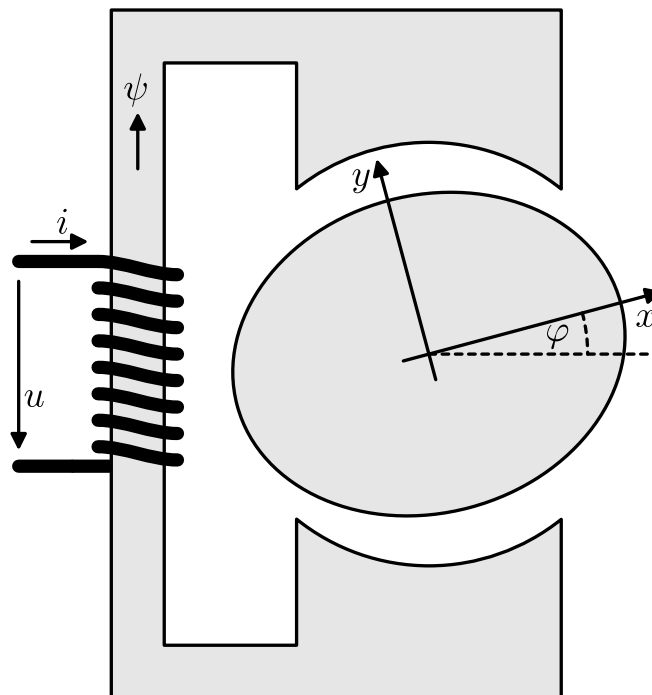


Abb. 1.1: Magnetischer Kreis

Die RSM arbeitet mit einem Rotor, der nur aus Eisenblechen besteht. Obwohl er keinen Kurzschlusskäfig wie die ASM und auch keine andere Form der Erregung (Permanentmagnete oder eine Erregerwicklung) enthält, ist es der RSM möglich ein Drehmoment zu erzeugen und den Rotor zu beschleunigen. Dies geschieht nach dem gleichen Prinzip wie bei der geschalteten Reluktanzmaschine (siehe dazu [48]). Um aufzuzeigen wie die RSM Drehmoment erzeugt und welche Anforderungen dafür an den Rotor zu stellen sind, wird

in diesem Abschnitt eine Gleichung zur Berechnung des Drehmoments einer einphasigen Anordnung erarbeitet. Dies geschieht in Anlehnung an das Vorgehen in [50] anhand eines magnetischen Kreises, wie er in Abb. 1.1 dargestellt ist. Er besteht aus einem Eisenkern, auf dem eine Spule aufgebracht ist. Auf der rechten Seite wird der Kern von einem Luftspalt unterbrochen, in dem sich ein drehbar gelagerter Rotor befindet, der die gezeigte elliptische Form aufweist. Es sei angenommen, dass die Flussverkettung im magnetischen Kreis in Abhängigkeit des Stroms in der Spule und des Winkels φ durch die in Abb. 1.2 gezeigten Flusskennlinien beschrieben ist. Das Einspeisen elektrischer Leistung mit Hilfe der Spule führt zur Änderung des Energieinhalts oder zur Abgabe mechanischer Energie über den Rotor. Nach dem Energieerhaltungssatz ergibt sich, bei Vernachlässigung des Wicklungswiderstands, die Leistungsbilanz der Anordnung zu

$$p_{\text{el}} = p_{\text{mech}} + \frac{dW_{\text{mag}}}{dt}. \quad (1.1)$$

Die darin enthaltene elektrische Leistung p_{el} berechnet sich aus dem Produkt der an der

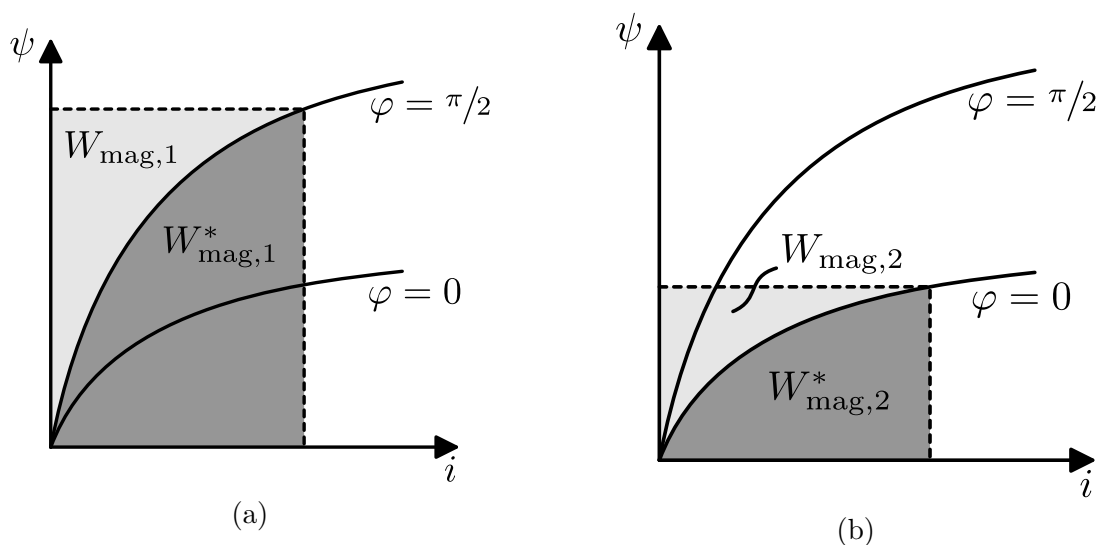


Abb. 1.2: Magnetische Energie und Koenergie für $\varphi = \pi/2$ (a) und $\varphi = 0$ (b) unter der Voraussetzung eines konstanten Stroms

Spule angelegten Spannung mit dem darin fließenden Strom.

$$p_{\text{el}} = i \cdot u \quad (1.2)$$

Mit Hilfe des Induktionsgesetzes

$$u = \frac{d\psi}{dt} \quad (1.3)$$

kann die Spannung in Gleichung (1.2) durch die Ableitung der Flussverkettung ψ nach der Zeit ersetzt werden.

$$p_{\text{el}} = i \cdot \frac{d\psi}{dt} \quad (1.4)$$

Die mechanische Leistung p_{mech} in Gleichung (1.1) berechnet sich aus dem Drehmoment und der Winkelgeschwindigkeit des Rotors.

$$p_{\text{mech}} = M \cdot \Omega \quad (1.5)$$

Hierin ist Ω die mechanische Winkelgeschwindigkeit, die gleich der Ableitung der Rotorstellung φ nach der Zeit ist.

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.6)$$

Einsetzen der Gleichungen (1.4) bis (1.6) in die Leistungsbilanz (1.1) ergibt

$$i \cdot \frac{d\psi}{dt} = M \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dW_{\text{mag}}}{dt}, \quad (1.7)$$

was nach der differentiellen magnetischen Energie aufgelöst werden kann

$$dW_{\text{mag}} = i \cdot d\psi - M \cdot d\varphi. \quad (1.8)$$

Das Anlegen einer Spannung führt zum Ansteigen des Stroms in der Spule und damit zur Einspeisung elektromagnetischer Energie in den magnetischen Kreis. Bei festgehaltenem Rotor wird diese ausschließlich in magnetische Energie umgewandelt. Mit Gleichung (1.7) führt das zur Magnetisierungsleistung

$$\left. \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} \right|_{\varphi=\text{const}} = i \cdot \frac{d\psi}{dt}, \quad (1.9)$$

woraus wiederum die differentielle magnetische Energie abgeleitet werden kann.

$$dW_{\text{mag}} \Big|_{\varphi=\text{const}} = i \cdot d\psi \quad (1.10)$$

Demnach berechnet sich der magnetische Energieinhalt der Anordnung mit dem Integral

des Stroms über der Flussverkettung.

$$W_{\text{mag}} \Big|_{\varphi=\text{const}} = \int i \cdot d\psi \quad (1.11)$$

Bei Betrachtung der Abb. 1.2 wird klar, dass Gleichung (1.11) nur ausgehend vom stromlosen Zustand der Spule die richtige magnetische Energie liefert. Beginnt die Integration bei einem Strom ungleich Null, ergibt die Gleichung lediglich die Änderung des magnetischen Energieinhalts gegenüber dem Startpunkt. Gemäß der Kennlinien bewirken sowohl Änderungen des Stroms in der Spule, als auch des Winkels φ eine Veränderung des magnetischen Energieinhalts. Folglich ist die magnetische Energie als Funktion dieser beiden Zustandsgrößen darzustellen.

$$W_{\text{mag}} = W_{\text{mag}}(\psi, \varphi) \quad (1.12)$$

Alternativ zur Berechnung der magnetischen Energie, die in Abb. 1.2 jeweils der Fläche links neben der Kennlinie entspricht, wird in der Literatur die Fläche unter der Kennlinie verwendet (so auch in [50]). Sie erhält die Bezeichnung magnetische Koenergie W_{mag}^* , berechnet sich aus dem Integral der Flussverkettung über dem Strom

$$W_{\text{mag}}^* \Big|_{\varphi=\text{const}} = \int \psi \cdot di \quad (1.13)$$

und ist damit eine Funktion von Strom und Rotorstellung.

$$W_{\text{mag}}^* = W_{\text{mag}}^*(i, \varphi) \quad (1.14)$$

Magnetische Energie und Koenergie können in einem festgelegten Arbeitspunkt durch Flussverkettung und Strom miteinander verknüpft werden.

$$W_{\text{mag}} + W_{\text{mag}}^* = i \cdot \psi \quad (1.15)$$

Daraus lässt sich die differentielle magnetische Energie berechnen

$$dW_{\text{mag}} = d(i \cdot \psi) - dW_{\text{mag}}^* \quad (1.16)$$

und mit Gleichung (1.8) gleichsetzen. Unter Berücksichtigung der Produktregel der Dif-

ferentiation

$$i \cdot d\psi = d(i \cdot \psi) - di \cdot \psi \quad (1.17)$$

kann nach der differentiellen magnetischen Koenergie

$$dW_{\text{mag}}^* = M \cdot d\varphi + di \cdot \psi \quad (1.18)$$

oder dem Drehmoment

$$M = \frac{dW_{\text{mag}}^*}{d\varphi} - \frac{di}{d\varphi} \cdot \psi \quad (1.19)$$

aufgelöst werden. Darin ist die Ableitung der magnetischen Koenergie nach der Rotorstellung, unter Berücksichtigung der Gleichung (1.14),

$$\frac{dW_{\text{mag}}^*}{d\varphi} = \frac{\partial W_{\text{mag}}^*}{\partial i} \cdot \frac{di}{d\varphi} + \frac{\partial W_{\text{mag}}^*}{\partial \varphi}. \quad (1.20)$$

Bei den partiellen Differentialen ist besonders darauf zu achten, dass die Variable nach der nicht abgeleitet wird konstant zu halten ist. Das heißt das partielle Differential der magnetischen Koenergie nach dem Strom ist unter der Voraussetzung $\varphi = \text{const}$, d.h. bei festgehaltenem Rotor, zu bilden. Durch Ableitung der Gleichung (1.13) kann eben dieses partielle Differential durch die Flussverkettung ersetzt werden.

$$\frac{\partial W_{\text{mag}}^*}{\partial i} = \psi \quad (1.21)$$

Mit den Gleichungen (1.20) und (1.21) vereinfacht sich Gleichung (1.19) zu

$$M = \left. \frac{\partial W_{\text{mag}}^*}{\partial \varphi} \right|_{i=\text{const}} \quad (1.22)$$

Damit zeigt sich, dass der Rotor in der beschriebenen Anordnung unter der Voraussetzung eines konstant eingepprägten Stroms ein positives Drehmoment erfährt, solange sich die magnetische Koenergie der Anordnung bei Änderung der Rotorstellung erhöht. Folglich wird sich der Rotor des magnetischen Kreises in Abb. 1.1 so lange drehen bis gerade die Stellung erreicht ist, deren Flusskennlinie die größte Fläche unter sich einschließt. Das ist gemäß Abb. 1.2 bei der Rotorstellung $\varphi = \pi/2$ der Fall. Bewegt sich der Rotor weiter, kehrt sich das Vorzeichen des Drehmoments um und der Rotor wird in die Gegenrichtung beschleunigt. Demnach führt das Einprägen eines konstanten Stroms, ausgehend vom

abgebildeten Zustand zu einer Bewegung des Rotors in Richtung $\varphi = \pi/2$. Aufgrund seines Trägheitsmoments bewegt er sich weiter und oszilliert anschließend um diesen Punkt herum. Vorhandene Reibung dämpft die Schwingung des Rotors, so dass er sich bei $\varphi = \pi/2$ ausrichtet.

Zusammenfassend kann notiert werden, dass ein magnetischer Kreis mit einem beweglichen Rotor ähnlich der Abb. 1.1 immer dann ein Drehmoment des Rotors erzeugen kann, wenn dessen Stellungsänderung bei konstant eingepprägtem Strom die Flusskennlinie in einer Weise beeinflusst, dass sich die magnetische Koenergie verändert. Demzufolge wird bei der Entwicklung einer RSM versucht eine möglichst ausgeprägte Stellungsabhängigkeit der Flusskennlinie zu erreichen. Diese Richtungsabhängigkeit wird als magnetische Anisotropie bezeichnet [6].

1.2.2 Mechanischer Aufbau

Die Herstellung von RSMs mit einer hohen Drehmomentdichte erfordert gemäß des in Abschnitt 1.2.1 erläuterten Funktionsprinzips Rotorgeometrien mit einer möglichst stark ausgeprägten magnetischen Anisotropie. In der Literatur sind verschiedene Ansätze zu finden, die diese Anforderung unterschiedlich gut erfüllen. Vier mögliche Rotorbauformen sind in Abb. 1.3 dargestellt. Sowohl der Rotor mit ausgeprägten Polen (Salient Pole Rotor) in Teilbild 1.3c als auch die Flusssperr-Rotoren (Teilbilder 1.3a und 1.3d) werden durch Aufstapeln ausgestanzter Bleche entlang der Welle der Maschine hergestellt. Der Vergleich dieser beiden Bauformen (jeweils ohne zusätzliche Magnete) in [29] zeigt, dass der Rotor mit ausgeprägten Polen einen besseren Teillastwirkungsgrad erreicht, jedoch stärkere Oberwellen in der Spannung verursacht als der Flusssperr-Rotor. Im Gegensatz dazu wird der axial laminierte Anisotropie (ALA)-Rotor durch Aufstapeln von Blechen gemäß Teilbild 1.3b aufgebaut, deren Befestigung mittels nicht magnetisierbarer Schrauben erfolgt. Während diese Rotorbauform die aufwändigste Herstellung erfordert, erreicht sie eine höhere magnetische Anisotropie als der Flusssperr-Rotor [11]. Ferner notiert [11], dass auf Seiten des Stators bei hohen magnetischen Anisotropien die Verwendung verteilter Wicklungen zu bevorzugen ist. Zur Reduktion der Produktionskosten ist es jedoch auch möglich Statoren mit konzentrierten Wicklungen zu verwenden. In diesem Fall muss jedoch eine Reduktion des Leistungsfaktors der RSM, sogar bei spezieller Auslegung der Rotors, akzeptiert werden [18], was dann wiederum den Einsatz eines Frequenzumrichters mit höherem Ausgangsstrom erfordert.

Bereits ohne die Unterstützung von Magneten erreichen RSMs Drehmomentdichten, die mit ASMs vergleichbar sind [20]. Da sie aufgrund des fehlenden Kurzschlusskäfigs keine Verluste im Rotor produzieren, werden höhere Wirkungsgrade als bei der ASM erreicht. Jedoch ist zum Betrieb der RSM ein höherer Blindstrom erforderlich, so dass trotz des besseren Wirkungsgrades kein kleinerer Frequenzumrichter gewählt werden kann [11].

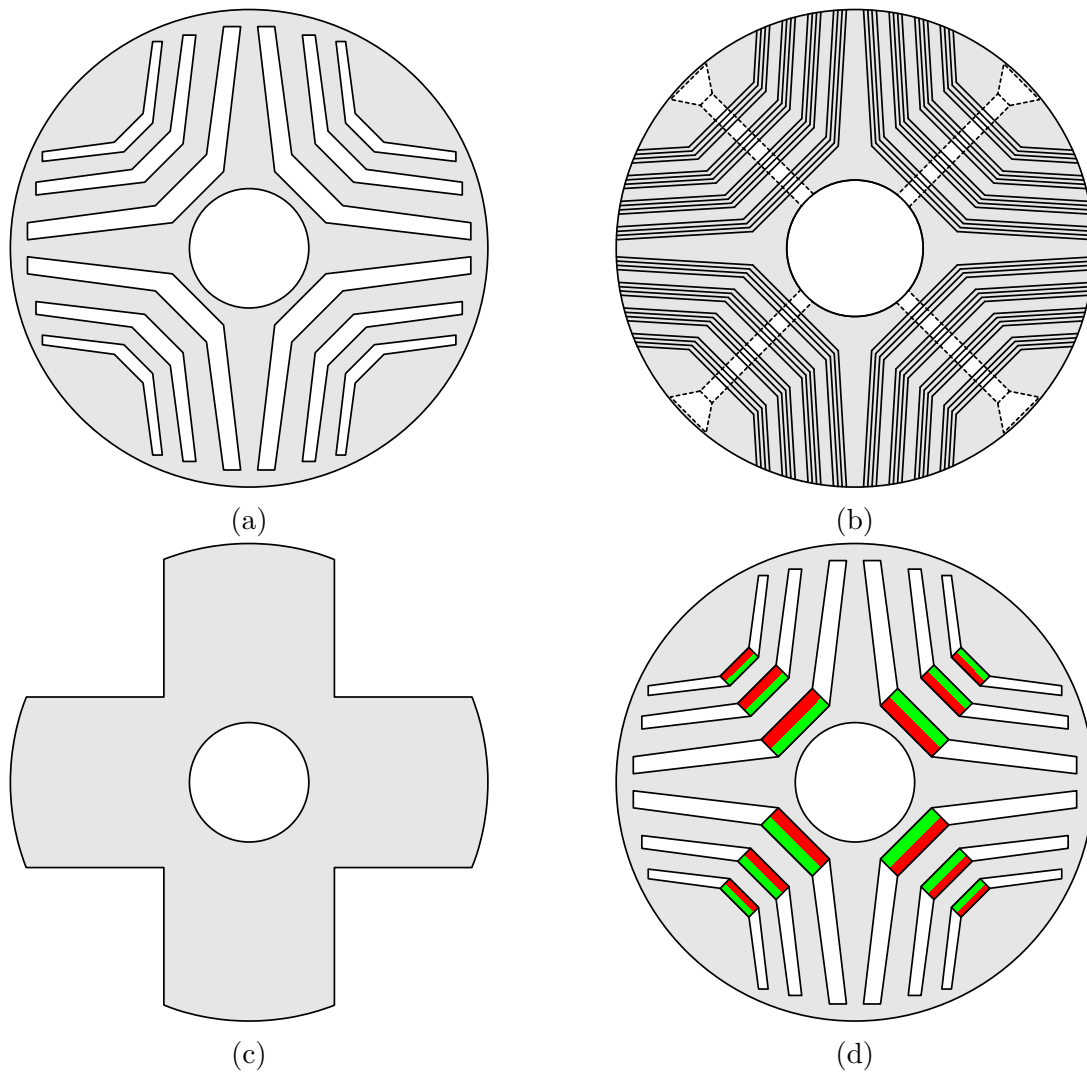


Abb. 1.3: Flusssperr-Rotor (a), ALA-Rotor (b), Salient Pole Rotor (c) und Flusssperr-Rotor mit Permanentmagneten (d), schematische Darstellung

2 Modellierung

Um das Verhalten der Maschine zu beschreiben und damit die physikalischen Zusammenhänge zu verdeutlichen, bedient man sich der mathematischen Modellierung. In der Literatur ist dafür die Verwendung von Raumzeigern üblich. Mit diesem Ansatz ist es möglich alle statischen und dynamischen Eigenschaften der Maschine zu erfassen [52]. Raumzeiger sind vektorielle Größen, die die physikalischen Phasengrößen in der Maschine durch eine kartesische Darstellung abstrahieren. Für die Beschreibung der RSM, gerade im Bezug auf die drehgeberlose Regelung, ist es zudem zweckmäßig verschiedene Koordinatensysteme für die Berechnung der Raumzeiger zu definieren. In den folgenden Abschnitten wird zunächst die Raumzeigertheorie erläutert. In Verbindung mit der darauf folgenden Definition verschiedener Koordinatensysteme stehen die notwendigen Werkzeuge zur Verfügung um ein Modell der RSM zu erarbeiten. Dies findet in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels statt.

2.1 Raumzeigerdarstellung

RSMs werden meist mit einer dreiphasigen Ständerwicklung aufgebaut, wobei die drei Phasenwicklungen jeweils um 120° el. versetzt angeordnet sind. Für die Beschreibung der Raumzeigerdarstellung wird angenommen, dass jede der drei Phasenwicklungen bei Bestromung eine über dem Umfang des Luftspalts sinusförmig verlaufende Durchflutung verursacht. Somit ist die gesamte Durchflutung durch die Überlagerung der Einzeldurchflutungen zu berechnen.

$$\Theta = \Theta_u + \Theta_v + \Theta_w. \quad (2.1)$$

Damit folgt aus Gleichung (2.1) auch für die gesamte Durchflutung ein sinusförmiger Verlauf über dem Umfang des Luftspalts. Da es sich bei der RSM um eine Synchronmaschine handelt, wird ferner angenommen, dass die Phasenwicklungen im Stern verschaltet

sind. Die Summe der einzelnen Phasenströme ist damit gleich Null.

$$i_u + i_v + i_w = 0 \quad (2.2)$$

Die Multiplikation der Momentanwerte der Phasenströme mit dem Einheitsvektor der

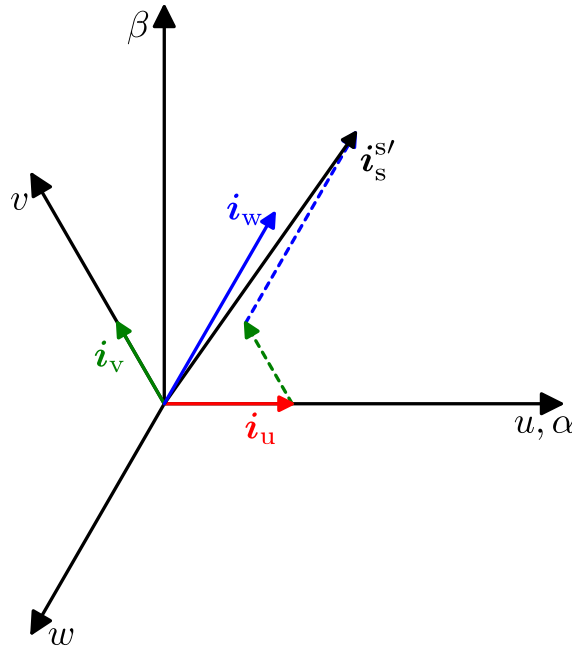


Abb. 2.1: Überlagerung der Phasenströme zu einem kartesischen Statorstromvektor

entsprechenden Achsenrichtung ermöglicht deren Überlagerung zu einem kartesischen Stromvektor gemäß Abb. 2.1. In komplexer Schreibweise entspricht das der Formulierung

$$\mathbf{i}_s^{s'} = \mathbf{i}_u + \mathbf{i}_v + \mathbf{i}_w \quad (2.3)$$

$$= i_u \cdot e^{j0} + i_v \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_w \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}, \quad (2.4)$$

die in vektorielle Darstellung umgeschrieben werden kann.

$$\mathbf{i}_s^{s'} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem Faktor $2/3$ erhält man die bekannte Gleichung der Clarke Transformation

$$\mathbf{i}_s^s = \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Die darin enthaltene Transformationsmatrix wird im Folgenden mit \mathbf{T}_{3ss} bezeichnet.

$$\mathbf{T}_{3ss} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Mit dieser Definition des Stromraumzeigers ist es möglich die einzelnen Momentanwerte der Phasenströme durch Projektion von \mathbf{i}_s^s auf die jeweilige Wicklungsachse zu bestimmen [37]¹. Man spricht daher von einer amplitudeninvarianten Transformation. Der Stromraumzeiger an sich ist ein zweikomponentiger Vektor, der durch seine Komponenten oder das Produkt aus der Zeigerlänge und dem Einheitsvektor seiner Richtung darstellbar ist.

$$\mathbf{i}_s^s = \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = |\mathbf{i}_s^s| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i^s) \\ \sin(\varphi_i^s) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Darin ist φ_i^s der Winkel des Stromraumzeigers in Statorkoordinaten. Analog zum Stromraumzeiger können auch die Raumzeiger für Flussverkettung

$$\boldsymbol{\psi}_s^s = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \\ \psi_w \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

und Spannung

$$\mathbf{u}_s^s = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

¹In [37] wird gezeigt, dass der resultierende Stromraumzeiger bei einem nicht isolierten Sternpunkt, also unter Berücksichtigung einer Stromnullkomponente, ebenfalls mit Gleichung (2.7) darstellbar ist. Die einzelnen Phasengrößen können dann jedoch nicht mehr durch die Projektion des Stromraumzeigers auf die Wicklungsachsen ermittelt werden. RSMs mit nicht isoliertem Sternpunkt werden in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

definiert werden [37]. Die Transformation in umgekehrter Richtung, vom kartesischen in das 3-phasige Koordinatensystem, erfolgt durch

$$\mathbf{i}_s^{3s} = \mathbf{T}_{s3s} \cdot \mathbf{i}_s^s \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbf{T}_{s3s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden Raumzeiger im Verlauf der vorliegenden Arbeit fortan als Zeiger bezeichnet.

2.2 Koordinatensysteme

Mit Hilfe der Gleichungen (2.7), (2.10) und (2.11) können die Momentanwerte von Strom, Spannung und Flussverkettung von der 3-phasigen in die statorfeste kartesische Darstellung transformiert werden. Das heißt die Komponenten der Raumzeiger beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen Abszisse mit der Achse der Wicklung u zusammenfällt. Für die Beschreibung der physikalischen Vorgänge in der RSM ist es von Vorteil neben dem statorfesten noch weitere Koordinatensysteme einzuführen, was es wiederum notwendig macht, die Raumzeiger entsprechend zu beschriften. Dies erfolgt durch hochgestellte Kleinbuchstaben. Es handelt sich hierbei ausschließlich um kartesische Koordinatensysteme, die sich alle den selben Ursprungspunkt teilen. Somit können sie sich nur in der Orientierung ihrer Achsen unterscheiden. Eine Übersicht über die verwendeten Koordinatensysteme, deren Orientierung, sowie Achsenbeschriftungen und Bezugsbezeichnungen liefert Tabelle 2.1.

Um die Transformation von Raumzeigern zwischen den Koordinatensystemen zu ermöglichen, müssen auch hier Bezüge hergestellt werden. Da sich wie bereits erwähnt alle Koordinatensysteme den selben Ursprung teilen, müssen dazu lediglich die Winkel zwischen den Systemen angegeben werden (Abb. 2.2). Folglich entspricht die Transformation eines Raumzeigers in ein anderes Koordinatensystem der Drehung des Zeigers. Seine Länge bleibt konstant. Am Beispiel der Transformation des Stromzeigers von Stator- in

| Orientierung | Achsenbezeichnung | Bezugsbezeichnung |
|------------------------|--------------------|-------------------|
| statorfest (3-phasig) | u, v, w | $3s$ |
| statorfest | α, β | s |
| rotorfest | d, q | r |
| rotorfest (geschätzt) | \hat{d}, \hat{q} | \hat{r} |
| statorflussorientiert | ds, qs | rs |
| HF-Injektion | x, y | c |
| Anisotropie-Hauptachse | f, g | h |

Tabelle 2.1: Übersicht der verwendeten Koordinatensysteme

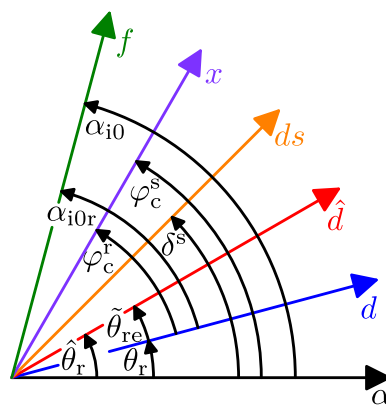


Abb. 2.2: Bezeichnungen der Winkel zwischen den kartesischen Koordinatensystemen. Zur besseren Übersichtlichkeit werden ausschließlich die Abszissen dargestellt.

Rotorkoordinaten bedeutet das

$$\varphi_i^r = \varphi_i^s - \theta_r \quad \text{und} \quad (2.14)$$

$$|\mathbf{i}_s^r| = |\mathbf{i}_s^s| = |\mathbf{i}_s|. \quad (2.15)$$

Nach Gleichung (2.9) kann der Statorstromzeiger unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.14) und (2.15) in den beiden Koordinatensystemen folgendermaßen dargestellt werden.

$$\mathbf{i}_s^s = |\mathbf{i}_s| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i^s) \\ \sin(\varphi_i^s) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{i}_s^r = |\mathbf{i}_s| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i^s - \theta_r) \\ \sin(\varphi_i^s - \theta_r) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Die Drehung ist die Abbildung des Stromzeigers in Statorkoordinaten auf den Stromzeiger in Rotorkoordinaten über die Drehmatrix \mathbf{D} , mit [40]

$$\mathbf{D}(\theta_r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Damit ist die Transformation folgendermaßen durchzuführen.

$$\mathbf{i}_s^r = \mathbf{D}(-\theta_r) \cdot \mathbf{i}_s^s \quad (2.19)$$

Da die Transformationen zwischen Stator- und Rotorkoordinatensystem häufig verwendet werden, erhalten sie eigene Bezeichnungen.

$$\mathbf{T}_{rs} = \mathbf{D}(\theta_r) \quad \text{Rotorkoordinaten} \rightarrow \text{Statorkoordinaten} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T}_{sr} = \mathbf{D}(-\theta_r) \quad \text{Statorkoordinaten} \rightarrow \text{Rotorkoordinaten} \quad (2.21)$$

2.3 Spannungsgleichung in Stator- und Rotorkoordinaten

Die Modellierung des Verhaltens der RSM basiert auf der Spannungsgleichung in 3-phasiger Darstellung, die so auch in [55] zu Grunde gelegt wurde.

$$\mathbf{u}_s^{3s} = \mathbf{R}_s^{3s} \cdot \mathbf{i}_s^{3s} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{3s}}{dt} \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_u & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \\ \psi_w \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Dabei ist die Flussverkettung ψ_s^{3s} eine nichtlineare Funktion, die vom Statorstromzeiger und der Rotorstellung abhängt.

$$\psi_s^{3s} = f(i_s^{3s}, \theta_r) \quad (2.24)$$

Zum Bilden des Differentials der Flussverkettung nach der Zeit ist daher die Kettenregel anzuwenden. So folgt aus Gleichung (2.22)

$$\mathbf{u}_s^{3s} = \mathbf{R}_s^{3s} \cdot \mathbf{i}_s^{3s} + \frac{\partial \psi_s^{3s}}{\partial \mathbf{i}_s^{3s}} \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^{3s}}{dt} + \frac{\partial \psi_s^{3s}}{\partial \theta_r} \cdot \frac{d\theta_r}{dt}. \quad (2.25)$$

Darin ist

$$\frac{\partial \psi_s^{3s}}{\partial \mathbf{i}_s^{3s}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_u}{\partial i_u} & \frac{\partial \psi_u}{\partial i_v} & \frac{\partial \psi_u}{\partial i_w} \\ \frac{\partial \psi_v}{\partial i_u} & \frac{\partial \psi_v}{\partial i_v} & \frac{\partial \psi_v}{\partial i_w} \\ \frac{\partial \psi_w}{\partial i_u} & \frac{\partial \psi_w}{\partial i_v} & \frac{\partial \psi_w}{\partial i_w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{uu} & l_{uv} & l_{uw} \\ l_{vu} & l_{vv} & l_{vw} \\ l_{wu} & l_{wv} & l_{ww} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

die Matrix der differentiellen Induktivitäten in der 3-phasigen Darstellung. Alle drei Summanden in Gleichung (2.25) können mit der Transformationsvorschrift (2.11) in das statorfeste kartesische Koordinatensystem transformiert werden.

$$\mathbf{u}_s^s = \mathbf{T}_{3ss} \cdot \mathbf{u}_s^{3s} \quad (2.27)$$

$$= \mathbf{R}_s^s \cdot \mathbf{i}_s^s + \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \mathbf{i}_s^s} \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \theta_r} \cdot \frac{d\theta_r}{dt} \quad (2.28)$$

Die partielle Ableitung der Flussverkettung nach dem Statorstromzeiger ergibt die differentielle Induktivitätsmatrix \mathbf{l}_s^s mit

$$\frac{\partial \psi_s^s}{\partial \mathbf{i}_s^s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial i_\alpha} & \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial i_\beta} \\ \frac{\partial \psi_\beta}{\partial i_\alpha} & \frac{\partial \psi_\beta}{\partial i_\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{l}_s^s = \begin{pmatrix} l_\alpha & l_{\alpha\beta} \\ l_{\beta\alpha} & l_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Ferner ist die Ableitung der Rotorstellung nach der Zeit die (elektrische) Winkelgeschwindigkeit der Maschine

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r. \quad (2.30)$$

Damit ist die allgemeine Spannungsgleichung der RSM in kartesischen Statorkoordinaten durch (2.31) gegeben.

$$\mathbf{u}_s^s = \mathbf{R}_s^s \cdot \mathbf{i}_s^s + \mathbf{l}_s^s \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + \omega_r \cdot \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \theta_r} \quad (2.31)$$

Das Überführen der Spannungsgleichung in das Rotorkoordinatensystem erfolgt mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{sr} .

$$\mathbf{u}_s^r = \mathbf{T}_{sr} \cdot \mathbf{u}_s^s \quad (2.32)$$

Nach einigen Umformungen, die im Anhang A.1 detailliert beschrieben sind, folgt die Spannungsgleichung im rotorfesten d,q-Koordinatensystem zu

$$\mathbf{u}_s^r = R_s \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{dt}. \quad (2.33)$$

Hierin ist

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

2.4 Ideale und reale Maschine

Mit der Beschreibung des Funktionsprinzips im Abschnitt 1.2.1 wurde anhand eines magnetischen Kreises gezeigt, dass die Flussverkettung (bei konstant eingepprägtem Strom) von der Stellung des Rotors abhängt. Das liegt daran, dass die Anordnung einen von der Rotorstellung abhängigen variablen Luftspalt aufweist. In Überlagerung mit dem Effekt der magnetischen Sättigung des Eisenmaterials wird aus der Flussverkettung eine nichtlineare Funktion von Strom und Rotorstellung (wie in Abb. 1.1 und 1.2 dargestellt). Nach einer Winkeländerung von 180° herrschen wieder die ursprünglichen Verhältnisse, so dass bei konstant eingepprägtem Strom in der Spule aus der Drehung des Rotors eine Flussverkettung resultiert, die sich aus einem konstanten Mittelwert und einer periodischen Variation zusammensetzt. Die RSM besteht im Gegensatz zu diesem stark vereinfachten Beispiel aus einem genuteten Stator, in den die Phasenwicklungen eingebracht sind. Diese statorfeste Variation des Luftspalts über dessen Umfang überlagert sich mit der magnetischen Anisotropie des Rotors. Abb. 2.3 verdeutlicht diesen Zusammenhang anhand der schematischen Darstellung der Maschine. Für die allgemein gültige Beschreibung ist es

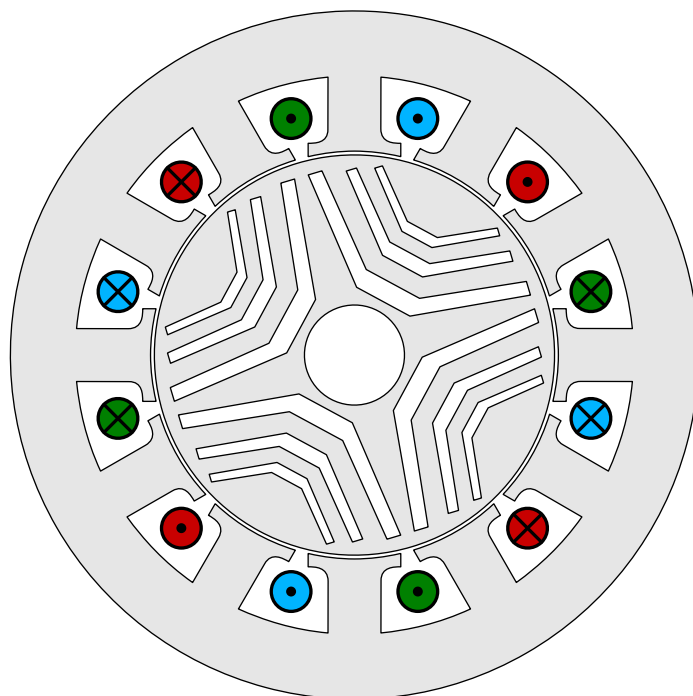


Abb. 2.3: RSM mit Flusssperrenrotor. Polpaarzahl: 2
 — Phase u; — Phase v; — Phase w

daher notwendig die Flussverkettung als Funktion von Stromzeiger und Rotorstellung zu modellieren.

$$\psi_s^s = \psi_s^s(\mathbf{i}_s^s, \theta_r) \quad (2.35)$$

Wie beim einfachen magnetischen Kreis ist auch hier zu erkennen, dass sich die geometrischen Verhältnisse bei drehendem Rotor periodisch wiederholen. Mit der im Beispiel verwendeten Polpaarzahl $Z_p = 2$ ist das alle 90° der Fall. Daher ist es auch hier möglich den Verlauf der Flussverkettung über der Rotorstellung als periodisches Signal darzustellen. Die Transformation in das Rotorkoordinatensystem verschiebt das Frequenzspektrum der Flussverkettung, führt jedoch nicht zu einer Vereinfachung der Darstellung. Das heißt die Flussverkettung ist auch in Rotorkoordinaten als Funktion von Stromzeiger und Rotorstellung darzustellen.

$$\psi_s^r = \psi_s^r(\mathbf{i}_s^r, \theta_r) \quad (2.36)$$

Der Blick auf die Spannungsgleichung in Rotorkoordinaten (2.33) zeigt, dass dies selbst bei einem konstant eingepprägten Stromzeiger und konstanter Drehzahl zu einer zeitlich

veränderlichen Spannung führt. Eine erste Vereinfachung kann durch die Bildung des Mittelwerts über der Rotorstellung erreicht werden. Voraussetzung dafür ist ein während der Mittelwertbildung konstanter Stromzeiger. Dadurch entfällt die Abhängigkeit der Flussverkettung von der Rotorstellung. Ferner ist der Mittelwert ihrer Ableitung nach der Rotorstellung gleich Null und die Spannungsgleichung vereinfacht sich zu

$$\overline{\mathbf{u}}_s^r = R \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}}_s^r \Big|_{\mathbf{i}_s^r = \text{const}} \quad (2.37)$$

mit

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}_s^r = \overline{\boldsymbol{\psi}}_s^r(\mathbf{i}_s^r) \Big|_{\mathbf{i}_s^r = \text{const}} \quad (2.38)$$

Dieses Vorgehen stellt die Vernachlässigung der magnetischen Anisotropie des Stators dar. Die magnetische Anisotropie des Rotors und die Sättigung des Eisenmaterials werden nach wie vor berücksichtigt. Auf Basis dieser Annahmen kann jedem in Rotorkoordinaten konstant eingepprägten Stromzeiger ein über der Rotorstellung gemittelter Flusszeiger zugeordnet werden. Die Messung dieser Zuordnung bei der hier untersuchten RSM1 ist in Abb. 2.4 dargestellt². Der komponentenweise Quotient der Flussverkettung durch den

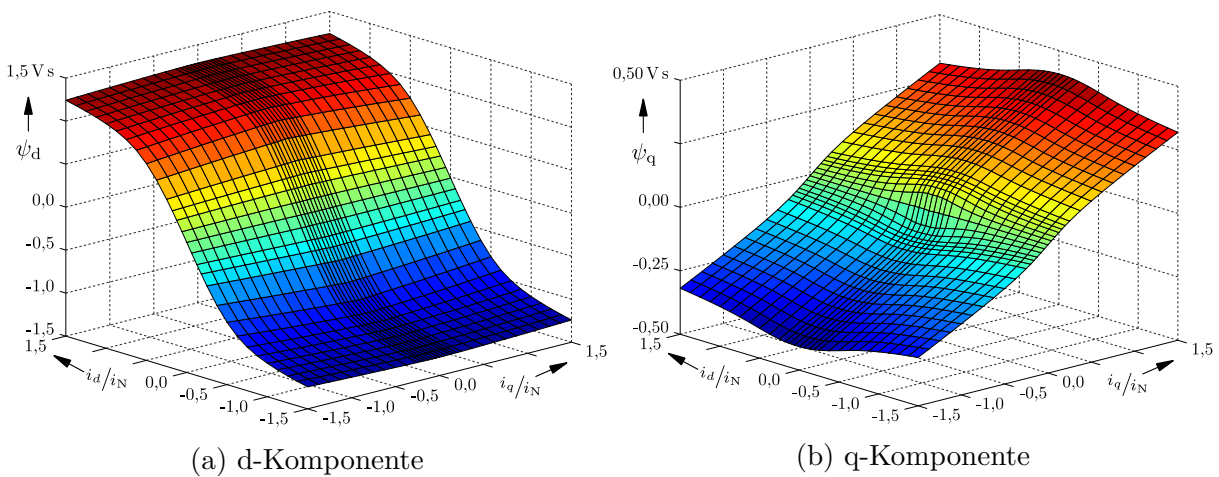


Abb. 2.4: Komponenten der über der Rotorstellung gemittelten Flussverkettung in Abhängigkeit der Komponenten des Stromzeigers

Stromzeiger, berechnet an jedem Arbeitspunkt, liefert die Sekanteninduktivitäten der

²Eine Übersicht über die Eigenschaften der verwendeten Maschinen findet sich in Tabelle 4.1

Maschine,

$$L_d = \frac{\psi_d}{i_d} \quad \text{und} \quad L_q = \frac{\psi_q}{i_q} \quad (2.39)$$

die demnach ebenfalls vom Stromzeiger abhängen. Obwohl sie die Einheit $[\text{Vs A}^{-1}]$ haben, dürfen sie nicht mit den differentiellen Induktivitäten verwechselt werden, die als Differential der Flussverkettung nach dem Strom definiert sind [23]. Abb. 2.5 verdeutlicht den Unterschied am Beispiel einer skalaren Flusskennlinie. Damit lässt sich der

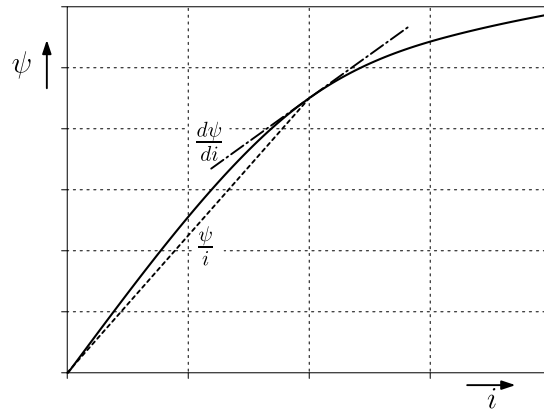


Abb. 2.5: Unterschied zwischen differentieller und Sekanteninduktivität [48]

Statorflusszeiger als Produkt aus der Matrix der Sekanteninduktivitäten und dem Statorstromzeiger darstellen.

$$\boldsymbol{\psi}_s^r = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \mathbf{L}_s^r \cdot \mathbf{i}_s^r \quad (2.40)$$

Transformiert man Gleichung (2.40) in Statorkoordinaten, erhält man die Gleichung des Flusszeigers in Abhängigkeit der Sekanteninduktivitäten in Rotorkoordinaten nach [39]

$$\boldsymbol{\psi}_s^s = L_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^s + L_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \theta_r) & \sin(2 \cdot \theta_r) \\ \sin(2 \cdot \theta_r) & -\cos(2 \cdot \theta_r) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^s \quad (2.41)$$

mit

$$L_\Sigma = \frac{L_d + L_q}{2} \quad \text{und} \quad L_\Delta = \frac{L_d - L_q}{2}. \quad (2.42)$$

Um die Modellierung noch weiter zu vereinfachen wird der Verlauf der Flussverkettung über dem Stromzeiger als linear angenommen. Dies entspricht der Vernachlässigung

der magnetischen Sättigung des Eisenmaterials. Im Vergleich zur Beispielkennlinie in Abb. 2.5 wird deutlich, dass differentielle und Sekanteninduktivität in diesem Fall gleich sind und der Steigung der Kennlinie entsprechen. Eine rotorfeste Anisotropie zeigt sich dann in unterschiedlichen Induktivitäten L_d und L_q , die skalare Werte sind und weder von Stromzeiger noch Rotorstellung abhängen. Solche Maschinen werden fortan als ideale RSMs bezeichnet. Dieses Vorgehen erleichtert die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge der Maschine erheblich. Obwohl die Messergebnisse der Flusskennfelder in Abb. 2.4 darauf hindeuten, dass sich die ideale Maschine gerade im Bezug auf die magnetische Sättigung stark von der realen Maschine unterscheidet, wird sich die ideale Maschine gerade zur Beschreibung der verschiedenen Verfahren zur Maschinenregelung und der Ermittlung der Rotorposition ohne Drehgeber in Kapitel 3 als nützlich erweisen.

2.5 Drehmomentbildung

Neben dem elektrischen ist auch das mechanische Verhalten der Maschine zu betrachten. Das elektromechanisch erzeugte Drehmoment kann nach [37, 55] aus einer Leistungsbilanz berechnet werden. Die der Maschine zugeführte elektrische Leistung ist die Summe der Leistungen in den drei Strangwicklungen.

$$p_{\text{el}} = (\mathbf{i}_s^{3s})^T \cdot \mathbf{u}_s^{3s} = i_u \cdot u_u + i_v \cdot u_v + i_w \cdot u_w \quad (2.43)$$

Die 3-phasige Darstellung kann mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{s3s} (Gleichung (2.8)) auch durch die entsprechenden Größen in kartesischen Statorkoordinaten ausgedrückt werden.

$$p_{\text{el}} = (\mathbf{T}_{s3s} \cdot \mathbf{i}_s^s)^T \cdot \mathbf{T}_{s3s} \cdot \mathbf{u}_s^s \quad (2.44)$$

Dabei gilt

$$(\mathbf{T}_{s3s} \cdot \mathbf{i}_s^s)^T \cdot \mathbf{T}_{s3s} = \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{i}_s^s)^T. \quad (2.45)$$

Folglich ist

$$p_{\text{el}} = \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{i}_s^s)^T \cdot \mathbf{u}_s^s \quad (2.46)$$

die der Maschine zugeführte elektrische Leistung in Abhängigkeit von Strom- und Spannungszeiger in kartesischen Statorkoordinaten. Diese Darstellung lässt sich schließlich in das Rotorkoordinatensystem überführen. Dazu ist die Transformationsmatrix \mathbf{T}_{rs} zu verwenden.

$$p_{\text{el}} = \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r)^T \cdot \mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{u}_s^r \quad (2.47)$$

Mit

$$(\mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r)^T \cdot \mathbf{T}_{rs} = (\mathbf{i}_s^r)^T \cdot \mathbf{I}_2 \quad (2.48)$$

gilt

$$p_{\text{el}} = \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{i}_s^r)^T \cdot \mathbf{u}_s^r. \quad (2.49)$$

Setzt man in Gleichung (2.49) die Spannungsgleichung der Maschine in Rotorkoordinaten (2.33) ein, erhält man

$$p_{\text{el}} = \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{i}_s^r)^T \cdot \left(R \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{dt} \right) \quad (2.50)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left((\mathbf{i}_s^r)^T \cdot R \cdot \mathbf{i}_s^r + (\mathbf{i}_s^r)^T \cdot \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + (\mathbf{i}_s^r)^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{dt} \right). \quad (2.51)$$

Die von der Maschine aufgenommene elektrische Leistung setzt sich zusammen aus Verlust-, Magnetisierungs-, und mechanischer Leistung. Während die Verlustleistung in Gleichung (2.51) anhand des Wicklungswiderstands identifiziert werden kann, ist die Aufteilung in Magnetisierungs- und mechanische Leistung nicht direkt ersichtlich. Daher werden zunächst die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen. Liegt ein statischer Betriebspunkt der Maschine vor, bei dem ein in Rotorkoordinaten konstanter Stromzeiger eingepreßt und die Drehzahl ungleich Null ist und gilt außerdem, dass die Flussverkettung in Rotorkoordinaten nicht von der Rotorstellung sondern ausschließlich vom Stromzeiger in Rotorkoordinaten abhängt, dann ist auch die Flussverkettung in Rotorkoordinaten konstant. Damit entfällt der rechte Summand in Gleichung (2.51). Neben der Verlustleistung verbleibt dann noch der mittlere Term, der mit der mechanischen Leistung an der Welle gleichgesetzt werden kann.

$$p_{\text{mech}} = M \cdot \Omega = \frac{3}{2} \cdot \mathbf{i}_s^{rT} \cdot \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r \quad (2.52)$$

Darin ist Ω die mechanische Winkelgeschwindigkeit der Maschine. Sie ist mit der Polpaarzahl Z_p proportional zur elektrischen Winkelgeschwindigkeit.

$$\omega_r = Z_p \cdot \Omega \quad (2.53)$$

Gleichung (2.52) lässt sich schließlich nach dem Drehmoment auflösen und es folgt die bekannte Gleichung für das Drehmoment der Maschine.

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \mathbf{i}_s^{rT} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r \quad (2.54)$$

Aufgrund der getroffenen Annahmen gilt Gleichung (2.54) nur für den Fall, dass die Flussverkettung ausschließlich vom Stromzeiger abhängt. Diese Vereinfachung wurde im Abschnitt 2.4 durch die Mittelwertbildung der Flussverkettung über der Rotorstellung erreicht. Dabei galt die Voraussetzung eines konstanten Stromzeigers. Folglich stellt die hier notierte Drehmomentgleichung das über eine Rotorumdrehung gemittelte Drehmoment (bei konstant eingepprägtem Stromzeiger) dar. Eine rotorfeste Anisotropie, sowie die magnetische Sättigung des Eisens sind darin berücksichtigt. Zum Überführen der Drehmomentgleichung (2.54) in das Statorkoordinatensystem werden Fluss- und Stromzeiger durch die entsprechenden transformierten Größen ersetzt.

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (\mathbf{T}_{sr} \cdot \mathbf{i}_s^s)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}_{sr} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^s \quad (2.55)$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \mathbf{i}_s^{sT} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^s. \quad (2.56)$$

Damit wird klar, dass die Berechnung des Drehmoments aus dem Kreuzprodukt von Fluss- und Stromzeiger unabhängig davon ist, in welchem Koordinatensystem die beiden Zeiger dargestellt sind. Mit der getroffenen Vereinfachung lässt sich die Flussverkettung ersetzen durch das Produkt von Sekanteninduktivität und Strom (Gleichung (2.39)). Damit kann die Drehmomentgleichung umgeformt werden zu

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q. \quad (2.57)$$

Sobald die Welle der RSM ein Drehmoment erfährt, wird sie beschleunigt. Die entsprechende Bewegungsgleichung ist [48]

$$M - M_L = J \cdot \alpha_r. \quad (2.58)$$

Darin sind J und α_r das Trägheitsmoment und die Winkelbeschleunigung des Rotors. Das tatsächlich die Welle beschleunigende Drehmoment ist die Differenz aus dem in der Maschine elektromechanisch erzeugten und dem von außen angelegten Drehmoment.

2.6 HF-Modellierung

Die Spannungsgleichung in Statorkoordinaten (2.31) kann nach der differentiellen Änderung des Stromzeigers aufgelöst werden.

$$\frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} = \mathbf{l}_s^{s-1} \cdot \left(\mathbf{u}_s^s - R_s \cdot \mathbf{i}_s^s - \omega_r \cdot \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \theta_r} \right) \quad (2.59)$$

Es zeigt sich, dass die Änderung des Stromzeigers die Abbildung eines Spannungszeigers (Ausdruck in der Klammer) über die Inverse der differentiellen Induktivitätsmatrix ist, die sich nach [40] mit

$$\mathbf{l}_s^{s-1} = \frac{1}{\det \mathbf{l}_s^s} \cdot \begin{pmatrix} l_\beta & -l_{\alpha\beta} \\ -l_{\alpha\beta} & l_\alpha \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

berechnen lässt. Es sei an dieser Stelle bereits vorweggenommen, dass es bei der Beschreibung des differentiellen Verhaltens der Maschine häufig notwendig sein wird, diese inverse Matrix zu berechnen. Zur einfacheren Darstellung wird sie daher durch die Admittanzmatrix \mathbf{Y} mit

$$\mathbf{l}_s^{s-1} = \mathbf{Y}_s^s = \begin{pmatrix} Y_\alpha & Y_{\alpha\beta} \\ Y_{\alpha\beta} & Y_\beta \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

ersetzt [26]. Ein Vergleich der Gleichungen (2.60) und (2.61) liefert die Zusammenhänge zwischen den Elementen von Induktivitäts- und Admittanzmatrix.

$$Y_\alpha = \frac{1}{\det \mathbf{l}_s^s} \cdot l_\beta \quad (2.62)$$

$$Y_\beta = \frac{1}{\det \mathbf{l}_s^s} \cdot l_\alpha \quad (2.63)$$

$$Y_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\det \mathbf{l}_s^s} \cdot l_{\alpha\beta} \quad (2.64)$$

Wird nun eine konstante Spannung an die Klemmen der stromlosen, stillstehenden Maschine angelegt, entsteht der Stromanstieg

$$\frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} = \mathbf{Y}_s^s \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_u^s) \\ \sin(\varphi_u^s) \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

da unter diesen Voraussetzungen die beiden rechten Terme in Gleichung (2.59) entfallen. Hierin ist φ_u^s der Winkel des Spannungszeigers in Statorkoordinaten. Einsetzen der Gleichung (2.61) und Ausmultiplizieren führt zu

$$\frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} = |\mathbf{u}_s^s| \cdot \begin{pmatrix} Y_\alpha \cdot \cos(\varphi_u^s) + Y_{\alpha\beta} \cdot \sin(\varphi_u^s) \\ Y_{\alpha\beta} \cdot \cos(\varphi_u^s) + Y_\beta \cdot \sin(\varphi_u^s) \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Dies entspricht der Gleichung (A.34)³. Damit ist der Verlauf der differentiellen Änderung des Stroms in Abhängigkeit der Richtung des angelegten Spannungszeigers eine Ellipse, deren Eigenschaften (Länge der Halbachsen und Hauptachsenrichtung) mit Hilfe der Gleichungen (A.29) bis (A.31) berechnet werden können. Unter Verwendung der hier genutzten Formelzeichen sind das

$$Y_\alpha = \frac{Y_f + Y_g}{2} + \frac{Y_f - Y_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \quad (2.67)$$

$$Y_\beta = \frac{Y_f + Y_g}{2} - \frac{Y_f - Y_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \quad (2.68)$$

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{Y_f - Y_g}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_{i0}). \quad (2.69)$$

Schließlich liefert das Einsetzen der Gleichungen (2.67) bis (2.69) in Gleichung (2.66) die differentielle Stromänderung in Abhängigkeit der angelegten Spannung in Statorkoordinaten und den Ellipsenparametern in Hauptachsenkoordinaten.

$$\frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} = |\mathbf{u}_s^s| \cdot \left(\frac{Y_f + Y_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_u^s) \\ \sin(\varphi_u^s) \end{pmatrix} + \frac{Y_f - Y_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \right) \quad (2.70)$$

³Die detaillierte Beschreibung der Darstellung einer Ellipse in Hauptachsen- und α, β -Koordinaten findet sich im Anhang A.2.

Gleichung (2.70) kann wiederum in eine zeitdiskrete Darstellung überführt werden, indem die anregende Spannung für eine vorgegebene Zeit Δt konstant gehalten wird. Der so entstehende Stromanstieg genügt der Gleichung

$$\Delta \mathbf{i}_s^s = |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \cdot \frac{Y_f + Y_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_u^s) \\ \sin(\varphi_u^s) \end{pmatrix} + |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \cdot \frac{Y_f - Y_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Sowohl in der differentiellen (Gleichung (2.70)) als auch der linearisierten Betrachtung (Gleichung (2.71)) ist zu erkennen, dass der sich einstellende Stromanstieg mit der Summe aus zwei Zeigern darstellbar ist, wobei der rechte Summand bei verschwindender Anisotropie ($Y_f = Y_g$) zu Null wird. Daher wird er als anisotroper Stromanstieg (\mathbf{i}_Δ) bezeichnet, während der linke Summand die Bezeichnung isotroper Stromanstieg (\mathbf{i}_Σ) erhält [26]. Analog dazu erhalten die entsprechenden Admittanzterme die Bezeichnungen

$$Y_\Sigma = \frac{Y_f + Y_g}{2} \quad (2.72)$$

$$Y_\Delta = \frac{Y_f - Y_g}{2}. \quad (2.73)$$

Zusammenfassend wird demnach notiert, dass das Anlegen einer Spannungszeitfläche an die anisotrope Maschine in einem Stromanstieg resultiert, der sich aus einem isotropen und einem anisotropen Anteil zusammensetzt. Dabei zeigt der isotrope Anteil in Richtung der anregenden Spannungszeitfläche, während die Richtung des anisotropen Anteils durch die Spiegelung der Anregung an der Hauptachse der Anisotropieellipse entsteht.

$$\Delta \mathbf{i}_s^s = Y_\Sigma \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_u^s) \\ \sin(\varphi_u^s) \end{pmatrix} + Y_\Delta \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-\varphi_u^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2.6 dargestellt.

Wie genau sich die magnetische Anisotropie bei einer realen Maschine verhält kann durch Messung ermittelt werden. Da die Induktivitäten bzw. Admittanzen aus der Flussverkettung ermittelt werden, sind sie ebenfalls in Abhängigkeit von Stromzeiger und Rotorstellung darzustellen. Die Messung erfolgt zunächst in Statorkoordinaten, woraus dann die Anisotropieeigenschaften in weiteren Koordinatensystemen berechnet werden. Dazu wird das Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen (2.67) bis (2.69), nach Y_Σ , Y_Δ und α_{i0} aufgelöst. Nach einigen Umformungen folgt

$$Y_\Sigma = \frac{Y_\alpha + Y_\beta}{2} \quad (2.75)$$

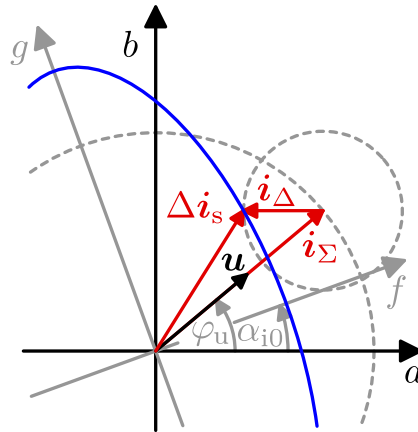


Abb. 2.6: Resultierender Stromanstieg in einer anisotropen Maschine beim Anlegen einer konstanten Spannung: — angelegte Spannung, — resultierende Stromänderung, — Trajektorie der Stromänderung in Abhängigkeit des Winkels des Spannungszeigers

$$Y_{\Delta} = \sqrt{Y_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{4} (Y_{\alpha} - Y_{\beta})^2} \quad (2.76)$$

$$\alpha_{i0} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot Y_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha} - Y_{\beta}}\right) \quad (2.77)$$

Bei der idealen RSM wird davon ausgegangen, dass sich die magnetische Anisotropie ausschließlich in der geometrischen Variation des Luftspalts durch den mechanischen Aufbau des Rotors begründet. Daher fällt das Hauptachsen- mit dem Rotorkoordinatensystem zusammen. Das heißt die Hauptachse der Anisotropieellipse ist fest an der d-Achse orientiert und kann ohne Weiteres zur Bestimmung der Rotorstellung verwendet werden. Tatsächlich können magnetische Sättigung und Oberwellen jedoch nicht vernachlässigt werden. Sie überlagern sich mit dem Effekt der Luftspaltgeometrie, so dass Form und Ausrichtung der Anisotropieellipse mit dem Arbeitspunkt (Stromzeiger) und der Rotorstellung variieren. Deshalb gilt in Rotorkoordinaten, analog zu den Gleichungen (2.75) bis (2.77) [26],

$$Y_{\Sigma} = \frac{Y_d + Y_q}{2}, \quad (2.78)$$

$$Y_{\Delta} = \sqrt{Y_{dq}^2 + \frac{1}{4} (Y_d - Y_q)^2} \quad \text{und} \quad (2.79)$$

$$\alpha_{i0r} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot Y_{dq}}{Y_d - Y_q}\right). \quad (2.80)$$

Unabhängig davon in welchem Koordinatensystem die Berechnung der Anisotropiepa-

parameter erfolgt, ist an dieser Stelle der Zusammenhang zur Rotorstellung herzustellen. Die zur Bestimmung der Anisotropieparameter geeigneten Messverfahren werden in Abschnitt 3.4.2 beschrieben.

3 Stand der Technik

Da die RSM ohne zusätzlichen konstruktiven Aufwand (Einbau eines Kurzschlusskäfigs) nicht am Netz anlaufen kann, erfordert ihre Verwendung als Arbeitsmaschine den Einsatz eines Frequenzumrichters. Damit entsteht ein drehzahlvariables Antriebssystem, das durch den Einsatz geeigneter Verfahren auch den geregelten Betrieb der Maschine erlaubt. Vom geregelten Betrieb spricht man, wenn dessen Ausgang (die Antriebswelle) dem Verhalten eines vorgegebenen Sollwerts (Drehmoment, Drehzahl, Position) folgt und das System in der Lage ist auf von außen eingebrachte Störgrößen adäquat zu reagieren. Abhängig von der gewünschten Regelgröße und dem gewählten Regelverfahren ist es bei Verwendung einer RSM unter Umständen notwendig dem Regler im Betrieb die aktuelle Rotorstellung zuzuführen. Daraus entsteht für den Frequenzumrichter die Notwendigkeit über die Rotorstellung Kenntnis zu erlangen, was entweder durch den Einsatz eines Drehgebers oder mit Hilfe eines drehgeberlosen Verfahrens erreicht wird. Dieses Kapitel enthält eine Zusammenstellung gängiger Verfahren zur Regelung der RSM, sowie zur Bestimmung der Rotorposition ohne Drehgeber. Aufgrund der Vielzahl der in der Literatur dokumentierten Verfahren beschränkt sich die Übersicht auf eine Auswahl. Abschließend wird aufgezeigt, wie die für die drehgeberlosen Verfahren notwendigen Maschinenparameter bestimmt werden.

3.1 Regelung des Drehmoments

Bereits mit der Auswahl eines Frequenzumrichters wird bestimmt welche Verfahren zur Maschinenregelung Anwendung finden können. Verfügbare Ausprägungen sind zum Beispiel Direktumrichter oder Umrichter mit Strom- bzw. Spannungszwischenkreis (die wiederum auch als Multilevel-Umrichter ausgeführt sein können). In der vorliegenden Arbeit wurde ausschließlich der Frequenzumrichter mit Spannungszwischenkreis, gemäß Abb. 3.1, betrachtet. Mit diesem Umrichtertyp können sechs von Null verschiedene Span-

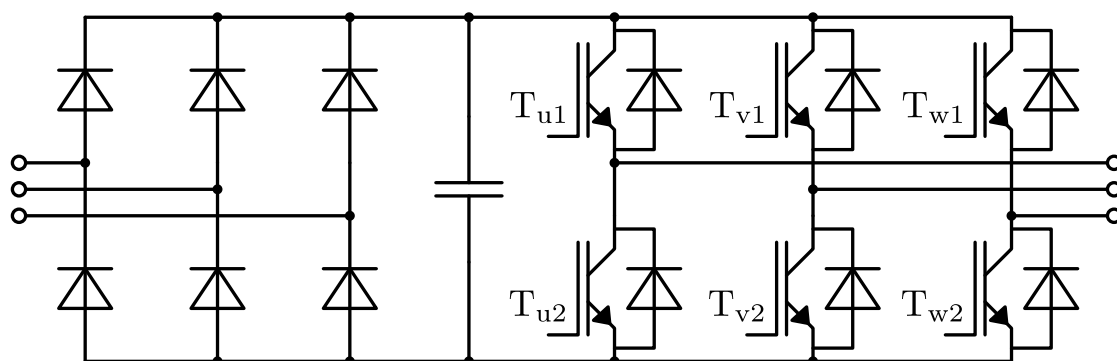


Abb. 3.1: Frequenzumrichter mit Spannungszwischenkreis (schematisch)

nungszeiger an die Klemmen der Maschine angelegt werden, die jeweils um 60° el. gegeneinander verdreht sind [47]. Damit ist die Klemmenspannung, die durch den Frequenzumrichter an die Maschine angelegt wird, als Stellgröße der Regelung festgelegt. Nach [47] können die Verfahren zur Regelung des Statorstroms in die Gruppen direkte und indirekte Statorstromregelung unterteilt werden. Die indirekte Stromregelung stellt auf Basis der Regelabweichung (Differenz aus Soll- und Iststrom) die zum Erreichen des Sollwerts benötigte Klemmenspannung zur Verfügung. Diese wird dann durch ein Modulationsverfahren in Schaltmuster umgerechnet und mit Hilfe der Leistungshalbleiter des Frequenzumrichters an die Maschine angelegt. Da der Stromregler das zur berechneten Spannung passende Schaltmuster nicht selbst bereitstellt, sondern auf ein Modulationsverfahren angewiesen ist, wird dieses Verfahren indirekte Stromregelung genannt. Die in den drei Phasen der Maschine fließenden Ströme werden vom Frequenzumrichter gemessen und mit der im Abschnitt 2.1 beschriebenen Transformationsvorschrift in einen aus zwei Komponenten bestehenden kartesischen Stromzeiger umgerechnet. Die Verarbeitung der Regelgrößen erfolgt dann in kartesischen Statorkoordinaten, die in statischen Betriebspunkten aus sinusförmigen Komponenten bestehen. Für jede Komponente ist ein eigener Stromregler vorhanden. Aufgrund des nicht idealen Verhaltens der Stromregelung eilt der Istwert dem Sollwert des Stromes hinterher und es kommt zu einer bleibenden Regelabweichung. Um dieses Problem zu lösen nennt [47] zwei Maßnahmen. Zum einen kann die Spannung, die zum Aufrechterhalten des aktuellen statischen Betriebszustands notwendig ist, durch ein Modell rekonstruiert und vorgesteuert werden. Die Stromregelung muss dann nur noch transiente Änderungen des Betriebszustands und Abweichungen des Modells ausgleichen. Alternativ wird die Verarbeitung der Regelgrößen in ein rotierendes (beispielsweise am Statorflusszeiger orientiertes) Koordinatensystem verlagert. Dadurch werden die Regelgrößen in statischen Betriebszuständen zu Gleichgrößen und die I-Anteile der Komponentenstromregler verhindern eine bleibende Regelabweichung.

Dieser Ansatz wird Feldorientierte Regelung genannt [47].

Im Gegensatz zu den indirekten berechnen die direkten Verfahren das Schaltmuster der Leistungshalbleiter direkt aus der Regelabweichung, es ist also kein nachgelagertes Modulationsverfahren notwendig. Die grundsätzliche Funktionsweise besteht darin, aus der Regelabweichung eine Kombination der Grundspannungszeiger zu ermitteln, die den Istwert des Stromzeigers in Richtung des Sollwerts verändert.

Im Verlauf dieses Kapitels werden verschiedene Verfahren zur drehgeberlosen Regelung der RSM erläutert, die alle in Verbindung mit einer der angedeuteten Ausprägungen der direkten bzw. indirekten Statorstromregelung arbeiten. Die nun folgenden Abschnitte sollen daher als Vorbereitung einen Einblick in die Funktionsweise der für die drehgeberlose Regelung relevanten Stromregelverfahren geben.

3.1.1 Statorflussorientierte Regelung

Bei der statorflussorientierten Regelung erfolgt die Verarbeitung der Prozessgrößen in einem Koordinatensystem, dessen Abszisse in die Richtung des aktuellen Statorflusszeigers zeigt. Hier hat der Statorflusszeiger nur noch eine Komponente. Sie entspricht seinem Betrag und wird fortan mit ψ_s bezeichnet. Die Ausrichtung des statorflussorientierten Koordinatensystems gibt der Winkel δ an. In Rotorkoordinaten folgt daraus die Polardarstellung des Statorflusszeigers zu

$$\boldsymbol{\psi}_s^r = \psi_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta^r) \\ \sin(\delta^r) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ersetzt man nun die Komponenten der Flussverkettung in der Drehmomentgleichung (2.54) durch das Produkt der Sekanteninduktivität¹ mit der entsprechenden Stromkomponente, lässt sie sich in eine Darstellung umformen, die von Betrag und Winkel des Statorflusszeigers abhängt. So wird aus der Drehmomentgleichung

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \quad (3.2)$$

¹Wie bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben, hängt die Darstellung der Sekanteninduktivitäten von der zugrunde liegenden Flussverkettung ab. Wurde diese über der Rotorstellung gemittelt und setzt somit einen konstant eingepprägten Stromzeiger voraus, sind die Sekanteninduktivitäten ebenfalls nur abhängig vom Stromzeiger (Oberwellen werden vernachlässigt). Zur Modellierung der realen Maschine sind die Sekanteninduktivitäten als Funktion von Stromzeiger und Rotorstellung darzustellen.

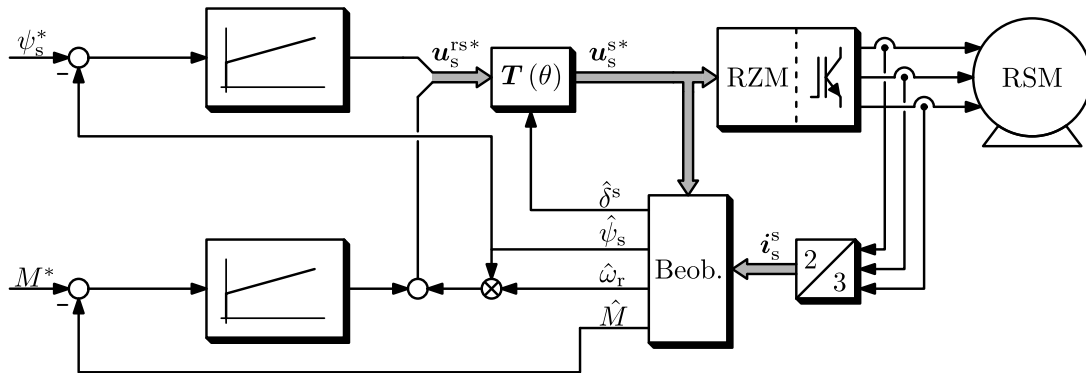


Abb. 3.2: Struktur der statorflussorientierten Drehmomentregelung nach [3, 8, 41]

mit

$$\psi_d = L_d \cdot i_d \quad \text{und} \quad \psi_q = L_q \cdot i_q \quad (3.3)$$

zunächst

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L_d} \right) \cdot \psi_d \cdot \psi_q \quad (3.4)$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (3.1) schließlich

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L_d} \right) \cdot \psi_s^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta^r)}{2}. \quad (3.5)$$

Neben der Drehmoment- wird auch die Spannungsgleichung in das statorflussorientierte Koordinatensystem transformiert. Dies erfolgt durch Multiplikation der Drehmatrix mit Gleichung (2.33).

$$\mathbf{u}_s^{rs} = \mathbf{D}(-\delta^r) \cdot \mathbf{u}_s^r \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}_s^{rs} = \begin{pmatrix} u_{ds} \\ u_{qs} \end{pmatrix} = R_s \cdot \mathbf{i}_s^{rs} + \begin{pmatrix} \frac{d\psi_s}{dt} \\ \psi_s \cdot \left(\omega_r + \frac{d\delta^r}{dt} \right) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Während aus der Drehmomentgleichung hervorgeht, dass das Drehmoment durch Einprägen von Betrag und Winkel des Flusszeigers einzustellen ist, zeigt die Spannungsgleichung, dass diese beiden Parameter durch die Spannungskomponenten u_{ds} und u_{qs} verändert werden können. [3, 8, 41] leiten daraus die Regelstruktur in Abb. 3.2 ab. Darin wird ein Beobachter (Block „Beob.“) verwendet um aus der gestellten Spannung und dem Stromwert die Größen Statorflusszeiger (in Betrag und Richtung), Winkelgeschwin-

digkeit und Drehmoment zu schätzen. Die Regelung teilt sich auf in die Komponenten Statorflusszeigerbetrag ψ_s und Drehmoment, die jeweils skalare Größen sind. Die Entkopplung der beiden Regelkreise erfolgt durch die Aufschaltung des Terms $\omega_r \cdot \psi_s$ im Drehmomentregelkreis. Sie ist jedoch nur unter der Annahme eines konstanten Flusssollwerts gültig [41].

Der Komponentenregler zur Nachführung der Länge des Statorflusszeigers, im Folgenden Flussregler genannt, arbeitet gemäß Gleichung (3.7) auf eine integrierende Strecke, sofern man die korrekte Kompensation des ohmschen Spannungsabfalls voraussetzt.

$$\frac{d\psi_s}{dt} = u_{qs} - R_s \cdot i_{qs} \quad (3.8)$$

Dieser Zusammenhang wird von keinem weiteren Parameter beeinflusst. Dadurch hat die magnetische Sättigung keine Auswirkung auf das Zeitverhalten, so dass dieser Regelkreis eine betriebspunktunabhängige Bandbreite aufweist [45], die nur durch das Zeitverhalten des Flussbeobachters eingeschränkt wird [43].

Demgegenüber stellt sich der Zusammenhang zwischen der Stellgröße u_{qs} und dem Istwert des Drehmoments ungleich komplizierter dar. Bei Annahme einer konstanten Flusszeigerlänge und korrekter Kompensation der Terme $R_s \cdot i_{qs}$ und $\omega_r \cdot \psi_s$ ist die Stellgröße zwar proportional zur Änderung des Winkels δ^r

$$\frac{d\delta^r}{dt} = \frac{u_{qs} - R_s \cdot i_{qs} - \omega_r \cdot \psi_s}{\psi_s}, \quad (3.9)$$

da δ^r in der Drehmomentgleichung (3.5) im Argument des Sinus steht, besteht jedoch ein nichtlinearer Zusammenhang zum Drehmoment. Damit arbeitet der Drehmomentregler auf eine nichtlineare Strecke, so dass das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises vom aktuellen Belastungszustand der Maschine abhängt. Dieser Zusammenhang gilt bereits für die ideale RSM. Tatsächlich kommt bei der realen Maschine der Effekt der magnetischen Sättigung hinzu, der das Zeitverhalten des Drehmomentregelkreises zusätzlich beeinflusst.

Eine andere Ausprägung der statorflussorientierten Regelung zeigen [31, 43]². Hierzu werden die Komponenten der Flussverkettung in der Drehmomentgleichung (2.54) durch

²Zwar dokumentiert [43] das vorgestellte Verfahren für die Synchronmaschine mit vergrabenen Magneten (IPM), jedoch wird der Ansatz in [45] aufgegriffen um die Gültigkeit für alle AC-Maschinen (ASM, PMSM, IPM, RSM) zu zeigen.

Länge und Winkel des Zeigers ersetzt. Dazu wird der Stromzeiger in statorflussorientierten Koordinaten benötigt, der durch Transformation aus der Darstellung in Rotorkoordinaten berechnet wird.

$$\mathbf{i}_s^{\text{rs}} = \mathbf{D}(-\delta^r) \cdot \mathbf{i}_s^r \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} i_{\text{ds}} \\ i_{\text{qs}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta^r) & \sin(\delta^r) \\ -\sin(\delta^r) & \cos(\delta^r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{\text{d}} \\ i_{\text{q}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

So folgt aus

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (\psi_{\text{d}} \cdot i_{\text{q}} - \psi_{\text{q}} \cdot i_{\text{d}}) \quad (3.12)$$

unter Berücksichtigung der Gleichung (3.1) und der Definition des Stromzeigers in statorflussorientierten Koordinaten (3.11), die Drehmomentgleichung

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \psi_s \cdot i_{\text{qs}}. \quad (3.13)$$

Damit legen [31, 43] die Länge des Flusszeigers ψ_s und die dazu orthogonale Komponente des Stromzeigers i_{qs} als Regelgrößen fest. Der Flussregelkreis ist gleich aufgebaut wie im zuerst erläuterten Verfahren nach [3, 8, 41] und hat daher auch die gleichen Eigenschaften. Anders der qs-Stromregelkreis. Zur Herleitung seines Steckenmodells wird der Zusammenhang zwischen Flussverkettung und Strom in Rotorkoordinaten (2.40) herangezogen und in statorflussorientierte Koordinaten transformiert.

$$\psi_s^{\text{rs}} = \underbrace{\mathbf{D}(-\delta^r) \cdot \mathbf{L}_s^r \cdot \mathbf{D}(\delta^r)}_{\mathbf{L}_s^{\text{rs}}} \cdot \mathbf{i}_s^{\text{rs}} \quad (3.14)$$

Dabei entsteht die Induktivitätsmatrix \mathbf{L}_s^{rs} mit

$$\mathbf{L}_s^{\text{rs}} = \frac{L_{\text{d}} + L_{\text{q}}}{2} \cdot \mathbf{I}_2 + \frac{L_{\text{d}} - L_{\text{q}}}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \delta^r) & -\sin(2 \cdot \delta^r) \\ -\sin(2 \cdot \delta^r) & -\cos(2 \cdot \delta^r) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

die zur Auflösung der Gleichung nach dem Stromzeiger zu invertieren ist. Es folgt

$$\mathbf{i}_s^{\text{rs}} = (\mathbf{L}_s^{\text{rs}})^{-1} \cdot \psi_s^{\text{rs}}, \quad (3.16)$$

mit

$$(\mathbf{L}_s^{\text{rs}})^{-1} = \frac{L_d + L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \mathbf{I}_2 + \frac{L_d - L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(2 \cdot \delta^r) & \sin(2 \cdot \delta^r) \\ \sin(2 \cdot \delta^r) & \cos(2 \cdot \delta^r) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Definitionsgemäß ist die qs-Komponente der Flussverkettung in statorflussorientierten Koordinaten immer gleich Null. So führt das Ausmultiplizieren der Gleichung (3.16) zu

$$\mathbf{i}_s^{\text{rs}} = \begin{pmatrix} \frac{L_d + L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} - \frac{L_d - L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \cos(2 \cdot \delta^r) \\ \frac{L_d - L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \sin(2 \cdot \delta^r) \end{pmatrix} \cdot \psi_s. \quad (3.18)$$

Im nächsten Schritt wird die Ableitung der qs-Komponente des Stroms nach der Zeit gebildet.

$$\frac{di_{qs}}{dt} = \frac{L_d - L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \left(2 \cdot \cos(2 \cdot \delta^r) \cdot \psi_s \cdot \frac{d\delta^r}{dt} + \sin(2 \cdot \delta^r) \cdot \frac{d\psi_s}{dt} \right) \quad (3.19)$$

Darin können die umgestellten Komponentengleichungen von (3.7)

$$\frac{d\psi_s}{dt} = u_{ds} - R_s \cdot i_{ds} \quad \text{und} \quad \psi_s \cdot \frac{d\delta^r}{dt} = u_{qs} - R_s \cdot i_{qs} - \omega_r \cdot \psi_s \quad (3.20)$$

eingesetzt werden und es folgt die Gleichung der qs-Komponente des Stromzeigers.

$$\frac{di_{qs}}{dt} = b \cdot (u_{qs} - R_s \cdot i_{qs} - \omega_r \cdot \psi_s) + k \cdot (u_{ds} - R_s \cdot i_{ds}) \quad (3.21)$$

mit

$$b = \frac{L_d - L_q}{L_d \cdot L_q} \cdot \cos(2 \cdot \delta^r) \quad \text{und} \quad k = \frac{L_d - L_q}{2 \cdot L_d \cdot L_q} \cdot \sin(2 \cdot \delta^r) \quad (3.22)$$

Die Gleichungen (3.21) und (3.22) sind in einer ähnlichen Darstellung und unter Vernachlässigung des Wicklungswiderstands in [43] notiert. Sie zeigen die Abhängigkeit der Regelgröße i_{qs} von den Stellgrößen beider Komponentenregler. Ferner sind die Faktoren b und k abhängig vom Winkel des Statorflusszeigers. Dies stellt eine nichtlineare Abhängigkeit der Regelgröße vom aktuellen Arbeitspunkt der Maschine dar. Im zuerst beschriebenen Verfahren dieses Abschnitts wurde der Drehmomentregelkreis unter Annahme einer konstanten Länge des Flusszeigers untersucht. Angewandt auf die Gleichungen (3.21) und (3.22) resultiert diese Annahme in einer Stellgröße u_{ds} , die gerade den ohmschen Spannungsabfall deckt. Somit entfällt der rechte Summand in Gleichung (3.21)

und es folgt

$$\frac{di_{qs}}{dt} = \frac{L_d - L_q}{L_d \cdot L_q} \cdot \cos(2 \cdot \delta^r) \cdot (u_{qs} - R_s \cdot i_{qs} - \omega_r \cdot \psi_s). \quad (3.23)$$

Zusammenfassend kann notiert werden, dass beide hier erläuterten Verfahren jeweils einen Regelkreis zur Nachführung des Drehmoments enthalten, der auf eine nichtlineare Regelstrecke arbeitet und dadurch ein vom Arbeitspunkt der Maschine abhängiges Zeitverhalten aufweist. Dies gilt bereits bei der Modellierung der RSM als ideale Maschine, d.h. bei Vernachlässigung von Oberwellen und magnetischer Sättigung. Ferner können beide Verfahren nur funktionieren, wenn ein messbarer Statorflusszeiger vorhanden ist. Dies ist bei der RSM jedoch nur dann der Fall wenn auch ein Strom in den Wicklungen fließt. Demzufolge ist auch im lastfreien Betrieb (Drehmoment Null) ein Mindeststrom vorzuhalten.

Betrachtet man die reale Maschine so stellt man fest, dass die Induktivitäten mit steigender Belastung kleiner werden. Bei einer gegebenen Einstellung des Drehmoment- bzw. i_{qs} -Reglers steigt die Kreisverstärkung mit sinkenden Induktivitäten an. Zur Wahrung der Stabilität sind die Regelkreise auf den Arbeitspunkt mit den kleinsten Induktivitäten auszulegen, was im Umkehrschluss zu einem langsameren Zeitverhalten bei Teillast führt [43].

Ferner gilt es zu erwähnen, dass das maximal erreichbare Drehmoment bei gegebener Flusszeigerlänge gerade dann erreicht wird, wenn sein Winkel in Rotorkoordinaten $\delta^r = 45^\circ$ el. beträgt (vgl. Gleichung (3.5)). Bei größeren Winkeln sinkt das Drehmoment wieder ab, was für den Regelkreis eine Mitkopplung darstellt. Dieser Arbeitspunkt ist demnach die Stabilitätsgrenze für den Drehmomentregler³. Das gleiche Verhalten lässt sich auch für den im zuletzt vorgestellten Verfahren verwendeten qs-Stromregler zeigen [31, 45].

Die statorflussorientierte Regelung ist nach [47] Teil der indirekten Verfahren zur Statorstromregelung, da die Stellgrößen u_{ds} und u_{qs} von einem nachgeschalteten Modulationsverfahren in Aussteuergrade für die Halbleiter des Frequenzumrichters umgerechnet werden müssen. Der Fokus liegt bei den beschriebenen Verfahren jedoch auf dem Statorflusszeiger, was sich in der Namensgebung der hier vorgestellten Verfahren zeigt (Direct Flux Vector Control [45], Direct Torque and Flux Control [8]). Da die Rotorstellung für

³Diese Aussage basiert auf der Drehmomentgleichung (3.5) unter der Annahme der idealen RSM. Die Stabilitätsgrenze der realen Maschine ist anhand der gemessenen Flusskennfelder (Abb. 2.4) zu ermitteln.

die Berechnungen der Komponentenregler bei diesen Verfahren nicht relevant ist, gelten sie gerade im Bezug auf die drehgeberlose Regelung als besonders robust [8].

3.1.2 rotororientierte Stromregelung

Bei diesem Regelverfahren findet die Verarbeitung der Prozessgrößen in Rotorkoordinaten statt. Die dafür notwendigen Gleichungen wurden bereits im Kapitel 2 hergeleitet und lauten

$$\mathbf{u}_s^r = R \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{dt} \quad (3.24)$$

und

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \mathbf{i}_s^{rT} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r. \quad (3.25)$$

Bei Vernachlässigung von Oberwellen ist die Flussverkettung ausschließlich abhängig vom Stromzeiger, was dann ebenso für die Drehmomentgleichung gilt. Ein vorgegebener Drehmomentsollwert kann folglich durch das Einprägen des passenden Stromzeigers in Rotorkoordinaten erreicht werden. Zur Auslegung der Regelung ist das Verhalten der Regelstrecke zu untersuchen, das in diesem Fall aus der Spannungsgleichung abgeleitet werden kann. Sie wird in einer Darstellung verwendet, die sich in einem Zwischenschritt bei der Transformation von Stator- in Rotorkoordinaten ergibt (siehe Gleichung (A.17)). Hier ist das Differential der Flussverkettung nach der Zeit in partielle Differentiale aufgeteilt. Aufgelöst nach dem Differential des Stromzeigers nach der Zeit folgt

$$\frac{d\mathbf{i}_s^r}{dt} = (\mathbf{L}_s^r)^{-1} \cdot \left(\mathbf{u}_s^r - R_s \cdot \mathbf{i}_s^r - \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r - \omega_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \theta_r} \right). \quad (3.26)$$

Darin ist das partielle Differential der Flussverkettung nach der Rotorstellung bei konstant gehaltenem Stromzeiger (in Rotorkoordinaten) zu bilden. Mit der angesprochenen Vernachlässigung der Oberwellen wird es zu Null. Aufgeteilt in die Komponentengleichungen ist das Differential des Stromzeigers nach der Zeit [23]

$$\frac{di_d}{dt} = Y_d \cdot (u_d - R_s \cdot i_d + \omega_r \cdot \psi_q) + Y_{dq} \cdot (u_q - R_s \cdot i_q - \omega_r \cdot \psi_d) \quad (3.27)$$

und

$$\frac{di_q}{dt} = Y_{dq} \cdot (u_d - R_s \cdot i_d + \omega_r \cdot \psi_q) + Y_q \cdot (u_q - R_s \cdot i_q - \omega_r \cdot \psi_d). \quad (3.28)$$

Dabei wurden die Elemente der invertierten differentiellen Induktivitätsmatrix durch Admittanzen ersetzt. Analog zu den differentiellen Induktivitäten, die durch Differenzieren der Flussverkettung ermittelt wurden, sind auch die Admittanzen abhängig vom Stromzeiger. Die Gleichungen zeigen, dass die beiden Stromkomponenten von Spannung und Flussverkettung der jeweils anderen Komponente abhängen. Damit die beiden Regelkreise dennoch möglichst unabhängig voneinander arbeiten können, sind Entkopplungsnetzwerke zu verwenden [19, 23, 47]. Um sie zu modellieren können in den Gleichungen (3.27) und (3.28) Störterme isoliert werden [23]. Die Differentiale der Stromkomponenten nach der Zeit folgen damit zu

$$\frac{di_d}{dt} = Y_d \cdot (u_d - R_s \cdot i_d + u_{\text{dist } d}) \quad (3.29)$$

$$\frac{di_q}{dt} = Y_q \cdot (u_q - R_s \cdot i_q + u_{\text{dist } q}), \quad (3.30)$$

wobei die Störterme durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden.

$$u_{\text{dist } d} = \omega_r \cdot \psi_q - \frac{Y_{dq}}{Y_d} \cdot (u_q - R_s \cdot i_q - \omega_r \cdot \psi_d) \quad (3.31)$$

$$u_{\text{dist } q} = -\omega_r \cdot \psi_d - \frac{Y_{dq}}{Y_q} \cdot (u_d - R_s \cdot i_d + \omega_r \cdot \psi_q) \quad (3.32)$$

Sie enthalten sowohl die Kreuzkopplung durch die Koppeladmittanz Y_{dq} als auch die drehzahlabhängige induzierte Spannung⁴. Setzt man die ideale Kompensation der Störterme voraus, vereinfachen sich die Regelungsgleichungen zu

$$\frac{di_d}{dt} = Y_d \cdot (u_d - R_s \cdot i_d) \quad (3.33)$$

und

$$\frac{di_q}{dt} = Y_q \cdot (u_q - R_s \cdot i_q), \quad (3.34)$$

⁴Wie zum Beginn der Herleitung beschrieben, werden die Oberwellen der Maschine vernachlässigt. Diese Vereinfachung wurde auch in den drei genannten Quellen [19, 23, 47] getroffen. Mit den Gleichungen (3.31) und (3.32) wurde hier die Darstellung nach [23] gewählt, da hierfür keine weiteren Annahmen zu treffen sind. Im Unterschied dazu vernachlässigt [19] neben den Oberwellen auch die Koppeladmittanzen während [47] gar von einer idealen Maschine mit skalaren Induktivitäten bzw. Admittanzen ausgeht.

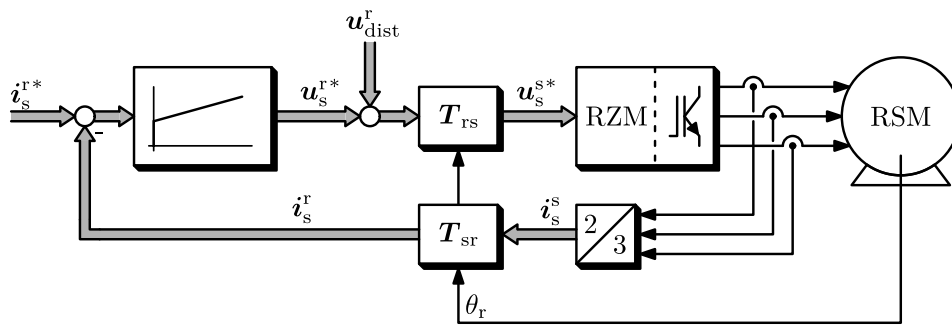


Abb. 3.3: Blockschaltbild der rotororientierten Stromregelung, abgeleitet aus den Beschreibungen in [23].

was jeweils der Differentialgleichung eines PT1-Gliedes entspricht [47]. Damit können die verwendeten PI-Regler mit einem Standard-Optimierungsverfahren wie zum Beispiel dem Betragsoptimum eingestellt werden [23]. Es gilt jedoch zu berücksichtigen, dass die Abhängigkeit der Flussverkettung vom Stromzeiger aufgrund der magnetischen Sättigung der Maschine beliebig nichtlinear sein kann. Dementsprechend ist auch die Abhängigkeit des Drehmoments vom Stromzeiger in Gleichung (3.25) ein nichtlinearer Zusammenhang. In den Regelungsgleichungen zeigt sich das an der Abhängigkeit der Admittanzen vom Stromzeiger.

$$Y_d = f(i_s^r) \quad Y_q = f(i_s^r) \quad (3.35)$$

Daraus folgt bei steigendem Drehmoment und damit zunehmender magnetischer Sättigung ein Ansteigen der Admittanzen Y_d und Y_q , was sich bei gegebener Klemmenspannung in einem höheren Stromanstieg auswirkt. Damit weisen die beiden Stromregelkreise ein vom Stromzeiger abhängiges Zeitverhalten auf. Dem kann durch die Adaption der Reglerverstärkung - abhängig vom aktuellen Betriebszustand der Maschine - entgegen gewirkt werden. [19] und [23] stellen dazu Parametertabellen zur Verfügung, die während des Betriebs verwendet werden um die Verstärkung der P-Anteile der Komponentenregler nachzuführen. Das heißt, die Verstärkungen werden in jedem Abtastschritt neu ermittelt.

Eine Alternative zur Adaption der Reglerverstärkung stellt die Abbildung von Soll- und Iststrom auf die entsprechende Flussverkettung dar. Bei Maschinen mit schwach ausgeprägter magnetischer Anisotropie wie z.B. PMSMs kann dies mit einer Magnetisierungskennlinie der Form

$$\psi = f(i) \quad (3.36)$$

erfolgen, die für d- und q-Komponente gleichermaßen verwendet wird [27]. Dagegen erfordern Maschinen mit stärker ausgeprägter magnetischer Anisotropie (IPM, RSM) die Abbildung über Flusskennfelder wie sie in Abb. 2.4 zu sehen sind [55]. Da die Flusskennfelder die magnetische Sättigung der Maschine bereits beinhalten entfällt (wie auch beim parameteradaptiven Ansatz) das arbeitspunktabhängige Zeitverhalten der Regelkreise. [27] hebt hervor, dass dies auch für Änderungen des magnetischen Arbeitspunkts gilt, die bei einer zeitdiskreten Implementierung innerhalb eines Abtastrasters entstehen. Dies ist ein Vorteil gegenüber der Parameteradaption.

Beide hier beschriebenen Verfahren berücksichtigen die stark ausgeprägte magnetische Anisotropie und die arbeitspunktabhängige magnetische Sättigung der RSM und resultieren in einem vergleichbaren Zeitverhalten der Komponentenregelkreise. Bei zeitdiskreter Implementierung ist es mit beiden Verfahren möglich Dead Beat Verhalten und damit eine sehr hohe Dynamik zu erreichen [55].

3.1.3 Strategien zur optimalen Motorführung

In Abschnitt 2.5 wurde die Drehmomentgleichung der idealen RSM (Gleichung (2.57)) notiert. Daran ist zu erkennen, dass ein vorgegebenes Drehmoment durch das Einprägen verschiedener Kombinationen der Stromkomponenten erreicht werden kann. Dies ist ein Freiheitsgrad für die Regelung der Maschine. So können Vorgaben, die sich aus der Anwendung des elektrischen Antriebssystems ergeben, in die Festlegung der Regelstrategie einfließen. Im Grunddrehzahlbereich (Stillstand bis Nenndrehzahl) empfiehlt sich die Maximum Torque Per Ampere (MTPA) Strategie. Damit wird ein vorgegebenes Drehmoment mit dem kleinstmöglichen Stromzeiger realisiert, was die ohmschen Verluste minimiert. Diese sind gerade bei kleinen Drehzahlen dominant [31]. Steigt die Drehzahl, ausgehend von einem konstanten Drehmomentsollwert an, erreicht sie einen Punkt, an dem der Frequenzumrichter nicht mehr genug Spannung zur Verfügung hat um das geforderte Drehmoment zu stellen. Ab diesem Moment muss von der MTPA Kennlinie abgewichen werden. Steigt die Drehzahl weiter an, ist es ab einem gewissen Drehzahlgrenzwert auch durch Anpassung der Regelstrategie nicht mehr möglich das gewünschte Drehmoment zu erreichen. Dieser Grenzwert ist abhängig von den Parametern der Maschine und dem angeforderten Drehmoment. Wird er erreicht und die Drehzahl steigt noch weiter an, muss das Drehmoment entsprechend reduziert werden. Die Reduktion erfolgt dann anhand einer Kennlinie, die das maximale Drehmoment bei gegebener

Spannung darstellt. Daraus kann wiederum eine Kennlinie abgeleitet werden, die jedem Drehmoment gerade den Arbeitspunkt zuordnet an dem die Klemmenspannung minimal wird. Diese wird als Maximum Torque Per Voltage (MTPV) Kennlinie bezeichnet [22]. Während die MTPA Kennlinie bis zum Grenzwert unabhängig von der Drehzahl ist, verschiebt sich die MTPV Kennlinie mit der Drehzahl. Daher wird sie häufig durch die Maximum Torque Per Flux (MTPF) Kennlinie ersetzt, die das maximale Drehmoment bei gegebener Flusszeigerlänge repräsentiert. Es gilt jedoch zu beachten, dass MTPV und MTPF nur bei Vernachlässigung des Statorwiderstands die selben Sollwerte liefern. Bei Annahme einer idealen RSM können MTPF- und MTPA-Kennlinie aus der Drehmomentgleichung abgeleitet werden. Diese kann in Abhängigkeit von Länge und Betrag des Statorflusszeigers dargestellt werden (siehe auch Gleichung (3.5)).

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L_d} \right) \cdot |\boldsymbol{\psi}_s^r|^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta^r)}{2}. \quad (3.37)$$

Daran kann abgelesen werden, dass das Drehmoment bei gegebenem Betrag des Statorflusszeigers gerade dann maximal wird, wenn sein Winkel $\delta^r = 45^\circ$ beträgt. Der aus dieser Vorgabe resultierende Winkel des Stromzeigers in Rotorkoordinaten φ_i^r kann mit Hilfe der Gleichung (2.40), unter Berücksichtigung der Polardarstellung des Stromzeigers, berechnet werden.

$$\boldsymbol{\psi}_s^r = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \cdot |\mathbf{i}_s^r| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i^r) \\ \sin(\varphi_i^r) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Das Verhältnis von q- zu d-Komponente ist gleich dem Tangens des Winkels des Flusszeigers und entlang der MTPF-Kennlinie gleich Eins.

$$\tan(\delta^r) = \frac{L_q \cdot |\mathbf{i}_s^r| \cdot \sin(\varphi_i^r)}{L_d \cdot |\mathbf{i}_s^r| \cdot \cos(\varphi_i^r)} \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.39)$$

Daraus folgt der Winkel des Stromzeigers zu

$$\varphi_i^r \Big|_{MTPF} = \arctan\left(\frac{L_d}{L_q}\right). \quad (3.40)$$

Analog zu oben kann die Drehmomentgleichung auch in Abhängigkeit von Betrag und Winkel des Stromzeigers dargestellt werden.

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (L_d - L_q) \cdot |\mathbf{i}_s^r|^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \varphi_i^r)}{2} \quad (3.41)$$

Daraus geht hervor, dass das maximale Drehmoment durch Einprägen eines Stromzeigers mit dem Winkel $\varphi_i^r \Big|_{MTPA} = 45^\circ$ erreicht wird. [31] zeigt mit Hilfe von Messungen, dass die Arbeitspunkte mit maximalem Wirkungsgrad in dem Bereich liegen, der von MTPF- und MTPA-Kennlinie eingeschlossen wird. Mit Blick auf die zu Anfang der vorliegenden Arbeit erwähnten strengen Vorgaben zur Energieeinsparung [15, 32] empfiehlt es sich eine Regelstrategie zu verwenden, die sich daran orientiert.

3.2 Regelung der Drehzahl

Zur Regelung der Drehzahl wird dem Drehmoment- bzw. Stromregelkreis ein Drehzahlregler überlagert. Diese Struktur wird Kaskadenregelung genannt [47]. Zwar wäre an dieser Stelle auch eine Zustandsregelung denkbar, die im Folgenden genannten Vorteile der Kaskadenregelung überwiegen jedoch derart, dass sie bis heute die dominierende Regelkreisstruktur darstellt [55]. Die Verwendung der Kaskadenregelung ermöglicht die schrittweise Inbetriebnahme von innen nach außen. Das heißt der Drehzahlregelkreis wird erst geschlossen, wenn der Drehmomentregelkreis abschließend getestet wurde. Ferner ist es möglich die Stellgrößen der einzelnen Regler so zu begrenzen, dass der jeweils unterlagerte Regelkreis ausschließlich in einem sicheren Arbeitsbereich betrieben wird. Demgegenüber steht der Nachteil, dass die Dynamik der einzelnen Regelkreise abhängig vom verwendeten Optimierungsverfahren nach außen immer weiter abnimmt. Des Weiteren erfordert jedes Teilelement der kaskadierten Regelstrecke einen eigenen Regler und eine eigene Messwerterfassung [47].

3.3 Bestimmung der Rotorposition ohne Drehgeber

Bei den zuvor beschriebenen Verfahren hat sich gezeigt, dass der Frequenzumrichter die aktuelle Rotorstellung im Betrieb kennen muss um sie der Drehmomentregelung zur Verfügung zu stellen und die aktuelle Drehzahl zu bestimmen. Soll das Antriebssystem ohne Drehgeber auskommen muss folglich ein Verfahren angewandt werden, das die Rotorstellung (möglichst ohne bauliche Veränderung des Frequenzumrichters) aus den messbaren elektrischen Größen ermittelt. Die in der Literatur dokumentierten Verfahren zur Bestimmung der Rotorstellung aus dem Klemmenverhalten der RSM können im Wesentlichen in zwei Kategorien eingeteilt werden. Zum einen kann die Rotorstellung

aus den Größen ermittelt werden, die ohnehin zur Motorführung verwendet werden. Das sind die Klemmenspannung, die der Frequenzumrichter an die Maschine anlegt und der daraus resultierende, in den Statorwicklungen fließende Strom. Da diese in statischen Betriebszuständen, gemessen an den Klemmen, sinusförmig und einperiodisch über der Rotorstellung sind, spricht man hierbei von Grundwellenverfahren [5]. Zum Anderen sind Verfahren bekannt, die durch Überlagerung hochfrequenter Spannungszeiger Messsignale anregen, deren Auswertung einen Rückschluss auf die aktuelle Rotorstellung erlaubt. [5] liefert einen Überblick über die bekannten Verfahren zum drehgeberlosen Betrieb von PMSM und IPM. Im Folgenden werden die Informationen zusammengefasst, die für den Betrieb der RSM relevant sind. Sie werden ergänzt durch Verfahren, die speziell für diesen Maschinentyp entwickelt wurden.

3.3.1 Grundwellenmodelle

Soll die aktuelle Rotorstellung aus elektrischen Größen ermittelt werden, stehen Klemmenspannung und Statorstrom als Informationsquellen zur Verfügung. Bei den im Folgenden vorgestellten Grundwellenverfahren, die keine zusätzlichen Testsignale nutzen, werden die Messsignale verwendet um Beobachter zu speisen, die daraus einen Schätzwert für die Rotorstellung gewinnen.

Erweiterte Elektromotorische Kraft

Eine Möglichkeit zur Schätzung der Rotorstellung ist die Detektion der Elektromotorischen Kraft (EMK). [13] stellt das Verfahren für den Betrieb einer IPM vor, dessen Funktionsprinzip anhand der Spannungsgleichung in Rotorkoordinaten herzuleiten ist. Im Gegensatz zur Spannungsgleichung der RSM ist hier auch die Flussverkettung der Permanentmagnete zu berücksichtigen. Bei Vernachlässigung von Oberwellen und magnetischer Sättigung sind die differentielle und die Sekanteninduktivitätsmatrix, aufgrund der linearen Verläufe der Flussverkettung über dem Strom, gleich.

$$\mathbf{L}_s^r = \mathbf{L}_s^r = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Damit folgt durch Koordinatentransformation die Spannungsgleichung in Statorkoordinaten zu

$$\mathbf{u}_s^s = R_s \cdot \mathbf{i}_s^s + \mathbf{L}_s^s \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{\text{pm}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Hier ist ψ_{pm} die Länge des Zeigers der Flussverkettung, verursacht durch die Permanentmagnete. Sowohl die Induktivitätsmatrix als auch die induzierte Spannung sind rotorstellungsabhängig. Ein Rückschluss auf die Rotorstellung ist hier nicht möglich. Zur Lösung dieses Problems definiert [13] die Erweiterte Elektromotorische Kraft (EEMK)

$$e_{\text{EMK}}^r = \left[(L_d - L_q) \cdot \left(\omega_r \cdot i_d - \frac{di_q}{dt} \right) + \omega_r \cdot \psi_{\text{pm}} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta_r) \\ \cos(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

die die folgende Darstellung der Spannungsgleichung in Statorkoordinaten erlaubt.

$$\mathbf{u}_s^s = R_s \cdot \mathbf{i}_s^s + L_d \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} - (L_d - L_q) \cdot \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_s^s + e_{\text{EMK}}^s \quad (3.45)$$

Hier ist ausschließlich die EEMK abhängig von der Rotorstellung. Sie eilt der d-Achse, abhängig von der Drehrichtung, 90°el. vor oder nach. [13] notiert, dass Gleichung (3.44) für alle Synchronmaschinen gilt. Sie wird mit $L_d = L_q$ zur Gleichung für die PMSM und mit $\psi_{\text{pm}} = 0$ für die RSM. Unabhängig von der zu Grunde gelegten Maschine fällt auf, dass die EEMK in Gleichung (3.44) bei Winkelgeschwindigkeit Null nur noch von der Änderung der q-Komponente des Statorstromzeigers abhängt und falls dieser konstant ist, zu Null wird. Dieses Verfahren eignet sich daher nur oberhalb einer Mindestdrehzahl zur Bestimmung der Rotorstellung. Aufgrund der fehlenden Erregung muss speziell bei der RSM außerdem dafür gesorgt werden, dass immer ein Mindeststrom in den Wicklungen fließt, da sonst auch bei signifikanter Drehzahl keine Spannung an den Klemmen messbar ist. Zur Detektion der EEMK während des Betriebs der Maschine schlägt [13] vor, sie als Strörgröße im Motormodell zu betrachten. Um sie zu schätzen wird ein Störgrößenbeobachter verwendet, der so ausgelegt ist, dass er zum einen robust gegen transiente Fehler in der Schätzung der Drehzahl ist und zum anderen die bei der verwendeten Maschine stark ausgeprägte zwölfte Harmonische in der EEMK unterdrückt.

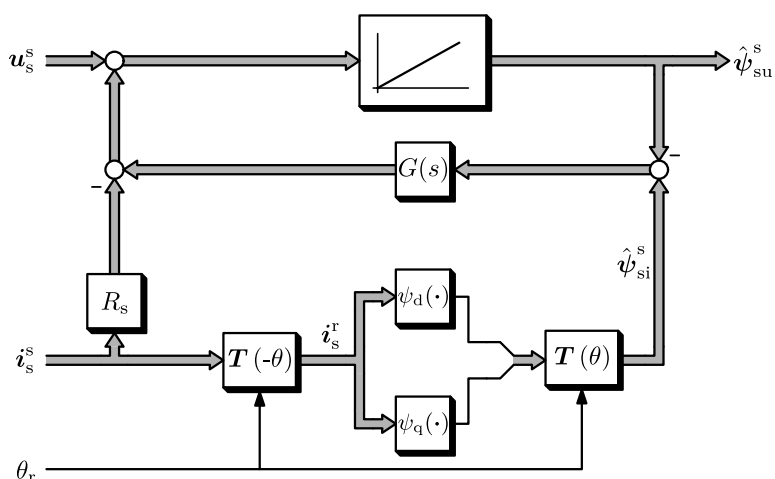


Abb. 3.4: Flussbeobachter nach [45]. Der Autor verweist speziell bei der Verwendung der RSM auf [21], wo die Flussverkettung in Abhängigkeit des Stromzeigers in geschätzten Rotorkoordinaten ermittelt wird. Dies wurde hier berücksichtigt.

Flussbeobachter

Flussmodelle nutzen Beobachter, die den aktuellen Statorflusszeiger mit Hilfe der an die Maschine angelegten Spannung ermitteln. Gemäß der Spannungsgleichung der RSM in Statorkoordinaten gilt

$$\psi_s^s = \int (\mathbf{u}_s^s - R_s \cdot \mathbf{i}_s^s) dt. \quad (3.46)$$

Der Statorflusszeiger kann folglich durch Integration des Spannungszeigers, abzüglich des ohmschen Spannungsabfalls, berechnet werden. Ist eine der verwendeten Größen fehlerhaft, kommt es aufgrund der offenen Integration zu einer Verfälschung (Drift) des beobachteten Statorflusszeigers. Ursache hierfür können beispielsweise Fehler in der Spannungs- oder Strommessung sein. Daher muss der Flussbeobachter gestützt werden. Abb. 3.4 zeigt den Flussbeobachter nach [45], der für die statorflussorientierte Regelung mit Drehgeber verwendet wird. Die Stützung der offenen Integration erfolgt hier mittels eines Strommodells, das zur Berechnung des Referenzflusszeigers ψ_{si}^s die Rotorstellung benötigt. Mit dem Statorflusszeiger sind nun alle Größen der elektromagnetischen Modellierung im Betrieb der Maschine bekannt. Da zur vollständigen Beschreibung des Systems außerdem die mechanische Modellierung notwendig ist, wird der hier vorgestellte Beobachter als Beobachter reduzierter Ordnung⁵ bezeichnet [5]. Mit einem drehgeberlosen Verfahren kann, aufbauend auf dem beobachteten Statorflusszeiger, die aktuelle

⁵Frei übersetzt aus dem Englischen „Reduced Order Observer“ [5].

Rotorstellung ermittelt werden, die dann neben der Stützung des Flussbeobachters zur Drehzahlberechnung und Drehmomentregelung (bei rotororientierten Verfahren) verwendet wird. Da die RSM weder Permanentmagnete noch eine Erregerwicklung enthält, ist die Flussverkettung bei stromloser Maschine gleich Null. Deshalb können Flussmodelle (wie z.B. nach [25]), die die Richtung des Permanentmagnetflusses schätzen um die Rotorstellung zu bestimmen, hier nicht verwendet werden. Damit ein Flusszeiger beobachtet und zur Bestimmung der Rotorstellung verwendet werden kann, muss sichergestellt werden, dass zu jedem Zeitpunkt ein Strom in den Wicklungen der Maschine fließt. Aus der Drehmomentgleichung (2.57) geht hervor, dass dies auch bei Drehmoment Null möglich ist. In diesem Fall muss der Mindeststrom entweder auf der d- oder auf der q-Achse liegen.

Saliency Based Flux

In [39] wird ein grundwellenbasiertes Verfahren vorgeschlagen, das die stark ausgeprägte Anisotropie der RSM nutzt (im Original „Saliency based Flux Model“ genannt). Dazu wird die Frage gestellt, wie die Maschine einen Stromzeiger auf den entsprechenden Statorflusszeiger abbildet. Ausgehend vom Rotorkoordinatensystem wird die dort gültige Matrix der Sekanteninduktivitäten

$$\mathbf{L}_s^r = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

in das Statorkoordinatensystem transformiert. Die Definition der isotropen $L_\Sigma = \frac{L_d+L_q}{2}$ und der anisotropen Induktivität $L_\Delta = \frac{L_d-L_q}{2}$ führt mit einigen weiteren Vereinfachungen zu der in [39] genannten Gleichung

$$\mathbf{L}_s^s = L_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + L_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \theta_r) & \sin(2 \cdot \theta_r) \\ \sin(2 \cdot \theta_r) & -\cos(2 \cdot \theta_r) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Die Multiplikation der Gleichung (3.48) mit dem Statorstromzeiger ergibt den Statorflusszeiger

$$\boldsymbol{\psi}_s^s = L_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^s + L_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \theta_r) & \sin(2 \cdot \theta_r) \\ \sin(2 \cdot \theta_r) & -\cos(2 \cdot \theta_r) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^s. \quad (3.49)$$

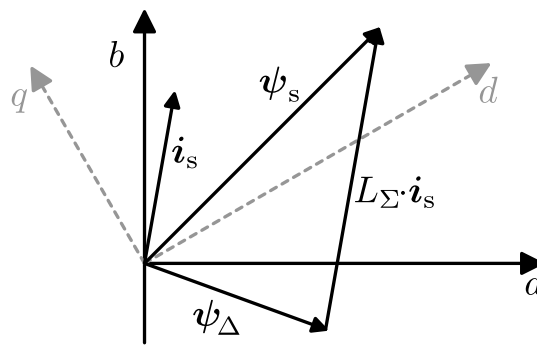


Abb. 3.5: Bestimmen des anisotropen Flusszeigers nach [39]

Es zeigt sich, dass die Abhängigkeit des Flusszeigers von der Rotorstellung im anisotropen Anteil zusammengefasst werden kann. Daher wird in [39] das folgende Vorgehen zur Beobachtung der Rotorlage vorgeschlagen. Während des Betriebs wird mit Hilfe der Sekanteninduktivität L_{Σ} ein abzuziehender Flusszeiger durch Multiplikation mit dem aktuell gemessenen Statorstromzeiger generiert, der dann vom gemessenen Statorflusszeiger subtrahiert wird. Übrig bleibt der rechte Summand aus Gleichung (3.49), der die Abbildung des Stromzeigers auf den anisotropen Anteil des Flusszeigers über eine Spiegelungsmatrix beschreibt [40]. Daraus geht hervor, dass der von Stromzeiger und anisotropem Flusszeiger aufgespannte Winkel immer symmetrisch um die d-Achse liegt, bzw. dass die d-Achse dessen Winkelhalbierende ist. Obwohl [39] ein anderes Vorgehen zur Stützung des Flussbeobachters verwendet, ist dieses Verfahren ebenso mit dem hier vorgestellten Beobachter (Abb. 3.4) realisierbar. Das Zeigerdiagramm in Abb. 3.5 verdeutlicht die Bestimmung der Rotorstellung. Zur Regelung des Drehmoments findet ein rotororientiertes Verfahren (siehe Abschnitt 3.1.2) Anwendung. Im lastfreien Betrieb (Drehmoment Null) wird ein Stromzeiger in q-Richtung eingepreßt. [39] notiert, dass dies notwendig ist damit die magnetische Anisotropie messbar wird, da sie bei sehr kleinen Strömen verschwindet.

Active Flux

Um die Schätzung der Rotorstellung bei Maschinen mit ausgeprägter magnetischer Anisotropie zu verbessern, schlägt [36] ein Verfahren vor, das einen „fiktiven“ Permanentmagnetfluss schätzt. [10] gibt dem fiktiven Permanentmagnetfluss den Namen Active Flux (AF) und zeigt, dass dieses Modell für alle Drehstrommaschinen gültig ist. Die Länge des AF Zeigers ψ_{AF} wird so definiert, dass sie, multipliziert mit der q-Komponente des

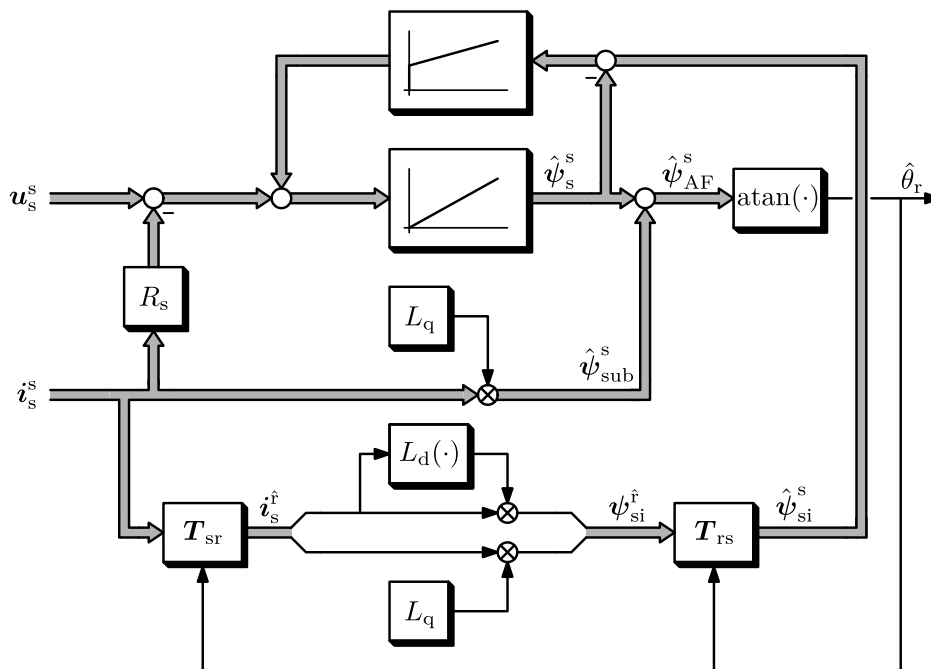


Abb. 3.6: Flussbeobachter für das AF Verfahren nach [1, 7]

Stromzeigers, zur Berechnung des Drehmoments verwendet werden kann.

$$M = \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \psi_{AF} \cdot i_q \quad (3.50)$$

Speziell für die RSM folgt daraus

$$\psi_{AF} = (L_d - L_q) \cdot i_d. \quad (3.51)$$

Im Betrieb wird der AF Zeiger durch Subtraktion eines zum Stromzeiger parallelen Flusszeigers berechnet.

$$\psi_{AF}^s = \psi_s^s - L_q \cdot i_s^s \quad (3.52)$$

Abb. 3.6 zeigt einen Flussbeobachter, mit dem das AF Verfahren realisiert werden kann [1, 7]. Die Richtung des AF Zeigers fällt mit der d-Richtung zusammen. Das heißt die Rotorstellung kann durch Bestimmen des Winkels des AF Zeigers in Statorkoordinaten ermittelt werden. Abb. 3.7 zeigt das zugehörige Zeigerdiagramm. Im Gegensatz zum zuvor vorgestellten Verfahren, das auf der magnetischen Anisotropie der Maschine aufbaut, wird hier der Arbeitspunkt mit Drehmoment Null mit einem Stromzeiger in d-Richtung realisiert.

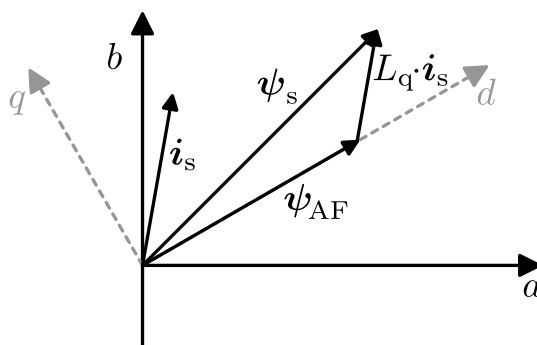


Abb. 3.7: Zeigerdiagramm der RSM zur Bestimmung des AF Zeigers

Eine alternative Ausprägung des AF Modells entsteht bei Verwendung einer Permanentmagneterregten Synchron Reluktanz Maschine (PMRSM). Hier sind die Permanentmagnete in die Flusssperrn eingebracht, so dass der Permanentmagnetfluss in negative q-Richtung zeigt. [42] notiert die notwendigen Anpassungen des Modells, das hier fortan mit Active Flux in q-Richtung (AFq) bezeichnet wird: Die Berechnung des AFq Zeigers erfolgt durch

$$\psi_{AFq}^s = \psi_s^s - L_d \cdot i_s^s. \quad (3.53)$$

Da er immer in negative q-Richtung zeigt, erfolgt das Bestimmen der Rotorstellung durch Addieren von 90° el. zum Winkel des AFq Zeigers in Statorkoordinaten. Ohne Permanentmagnete folgt sein Betrag zu

$$|\psi_{AFq}^s| = (L_d - L_q) \cdot i_q. \quad (3.54)$$

Damit lässt sich dieses Vorgehen auch bei der RSM anwenden, solange eine beobachtbare Flussverkettung in der Maschine vorhanden ist. Der Arbeitspunkt mit Drehmoment Null wird hier im Gegensatz zum originalen AF Modell mit einem Stromzeiger in q-Richtung realisiert, was die magnetische Anisotropie in diesem Arbeitspunkt aufgrund der magnetischen Sättigung der Flusssperrn stärker ausprägt [39]. Wie bei den zuvor vorgestellten Flussmodellen wird auch hier zur Bestimmung der Rotorstellung ein Flusszeiger vom Statorflusszeiger subtrahiert, der parallel zum Stromzeiger ist. Die Länge des abzuziehenden Flusszeigers bestimmt welches der drei Verfahren angewandt wird. Das Zeigerdiagramm in Abb. 3.8 verdeutlicht diesen Zusammenhang anhand der Darstellung der „verbleibenden“ Flusszeiger, aus denen letztendlich die Rotorstellung der Maschine bestimmt wird.

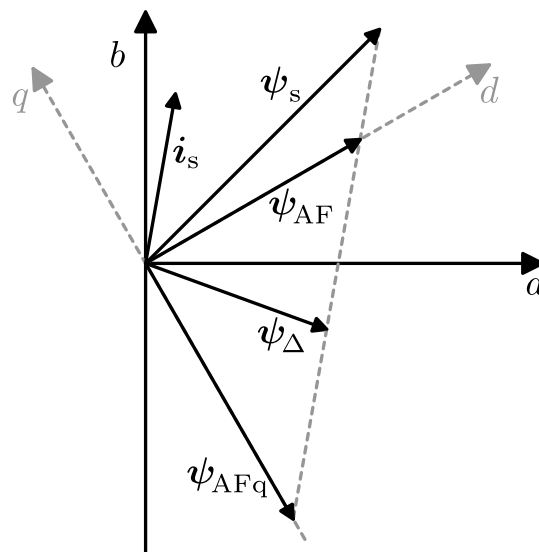


Abb. 3.8: Zeigerdiagramm zu den Verfahren Saliency Based Flux, Active Flux, und Active Flux in q-Richtung

3.3.2 Injektionsverfahren

Die bisher beschriebenen Verfahren zum drehgeberlosen Betrieb der RSM nutzen die EMK als Informationsquelle (entweder direkt oder zur Speisung eines Beobachters). Da die EMK mit sinkender Drehzahl abnimmt und im Stillstand ganz verschwindet, ist eine Mindestdrehzahl notwendig um diese Verfahren anzuwenden. Damit auch Arbeitspunkte bei kleiner Drehzahl oder im Stillstand beherrscht werden können, werden der vom Stromregler an die Maschine angelegten Spannung hochfrequente Testsignale überlagert, die eine alternative Detektion der Rotorstellung erlauben. Diese Überlagerung wird gemeinhin als Injektion bezeichnet [5]. Bei Verwendung eines Frequenzumrichters mit Spannungszwischenkreis liegt es nahe eine Spannung als Testsignal zu injizieren, da dies durch Addition zur Grundwellenspannung einfach umsetzbar ist⁶. Das Ziel aller hier vorgestellten Injektionsverfahren ist die Messung der rotorstellungsabhängigen magnetischen Anisotropie der Maschine um daraus auf die Rotorstellung zu schließen.

⁶Alternativ ist es auch möglich einen Teststrom zu injizieren. Da bei einem Frequenzumrichter mit Spannungszwischenkreis jedoch die Spannung als Stellgröße festgelegt ist, wird in diesem Fall ein dedizierter Signalgenerator zum Einprägen des Teststroms benötigt. Der Vergleich der beiden Verfahren zeigt ähnliche Ergebnisse [12], so dass in der vorliegenden Arbeit ausschließlich die Spannungsinjektion verfolgt wird.

INFORM

Das erste Verfahren zur Bestimmung der Rotorstellung einer elektrischen Maschine im Stillstand heißt Indirect Flux Detection by Online Reactance Measurement (INFORM) [49]. Es basiert auf dem Anlegen einer festgelegten Abfolge von Spannungsimpulsen an die Klemmen der Maschine, wobei die Strom- bzw. Drehmomentregelung während der Messung unterbrochen wird. [30] greift diesen Ansatz auf und entwickelt ein Modulationsverfahren, mit dem die Maschine ausschließlich mit den Messpulsen betrieben wird. Hier werden nur drei der sechs möglichen aktiven Spannungszeiger verwendet. Nullzeiger sind zu vermeiden. Die daraus resultierenden Stromanstiege können aus Gleichung (2.71) abgeleitet werden:

$$\Delta \mathbf{i}_1 = \mathbf{Y}_s^s \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\Delta \mathbf{i}_2 = \mathbf{Y}_s^s \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\Delta \mathbf{i}_3 = \mathbf{Y}_s^s \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Zur Auswertung ist die Summe aus den drei Stromanstiegen zu bilden, wobei $\Delta \mathbf{i}_2$ und $\Delta \mathbf{i}_3$ zunächst zur jeweils anderen Achse zu drehen sind:

$$\Delta \mathbf{i} = \Delta \mathbf{i}_1 + \mathbf{D}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot \Delta \mathbf{i}_2 + \mathbf{D}\left(\frac{-2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot \Delta \mathbf{i}_3 \quad (3.58)$$

So heben sich die isotropen Anteile auf und übrig bleibt die Summe aller anisotropen Stromanstiege

$$\Delta \mathbf{i} = 3 \cdot |\mathbf{u}_s^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

woraus die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse α_{i0} berechnet werden kann. Beide erwähnten Ausprägungen des INFORM Verfahrens bringen einen wesentlichen Nachteil mit sich. Der zuerst genannte Ansatz bedingt die Unterbrechung der Stromregelung [49], während beim letztgenannten, aufgrund der ausschließlichen Verwendung der Grundspannungszeiger, die maximal zu stellende Spannung auf ein Drittel der Zwischenkreisspannung reduziert ist [30].

rotierende Injektion

Bei der rotierenden Injektion wird das Testsignal der vom Stromregler ausgegebenen Spannung durch Addition überlagert. Eine Unterbrechung der Regelung oder eine Anpassung des Modulationsverfahrens ist nicht erforderlich. [54] beschreibt die rotierende Injektion, sowie die Auswertung der resultierenden Stromantwort folgendermaßen. Das Testsignal ist ein rotierender Spannungszeiger, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_c umläuft. Die Maschine reagiert darauf mit einer Stromantwort, die mit Gleichung (2.70) berechnet werden kann. Darin ist der Winkel des Spannungszeigers durch das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Zeit zu ersetzen.

$$\frac{d\mathbf{i}_c^s}{dt} = |\mathbf{u}_s^s| \cdot \left(Y_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_c \cdot t) \\ \sin(\omega_c \cdot t) \end{pmatrix} + Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\omega_c \cdot t + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-\omega_c \cdot t + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \right) \quad (3.60)$$

Der Index c weist darauf hin, dass es sich um den Stromzeiger handelt, der von der Injektion angeregt wurde. Durch Integration folgt die Injektionsantwort zu

$$\mathbf{i}_c^s = \frac{|\mathbf{u}_s^s|}{\omega_c} \cdot \left(Y_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega_c \cdot t) \\ -\cos(\omega_c \cdot t) \end{pmatrix} + Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega_c \cdot t - 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \cos(\omega_c \cdot t - 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \right). \quad (3.61)$$

Sie besteht aus zwei Zeigern, wovon sich einer synchron zur Anregung und der andere in entgegengesetzter Richtung dreht. [54] bezeichnet sie als Mit- und Gegenkomponente des Trägerstroms. Zur Auswertung wird \mathbf{i}_c^s in das Injektionskoordinatensystem transformiert, das synchron zum injizierten Spannungszeiger mitrotiert.

$$\mathbf{i}_c^c = -\frac{|\mathbf{u}_s^s|}{\omega_c} \cdot \left(Y_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \sin(2 \cdot \alpha_{i0} - 2 \cdot \omega_c \cdot t) \\ -\cos(2 \cdot \alpha_{i0} - 2 \cdot \omega_c \cdot t) \end{pmatrix} \right) \quad (3.62)$$

Hochpass- bzw. Bandpassfilterung entfernt die Mitkomponente, die durch die Transformation zu einer Gleichgröße wurde. Mit der Rücktransformation erhält man die Gegenkomponente des Trägerstroms in Statorkoordinaten.

$$\mathbf{i}_{cn}^s = \frac{|\mathbf{u}_s^s|}{\omega_c} \cdot Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} -\sin(2 \cdot \alpha_{i0} - \omega_c \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \alpha_{i0} - \omega_c \cdot t) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Zur eindeutigen Kennzeichnung wird der Index um ein kleines n ergänzt (nach der Originalbezeichnung: „negative phase sequence high-frequency stator current“ [54]). Die Demodulation erfolgt durch Bilden des Vektorprodukts der Gegenkomponente des Träger-

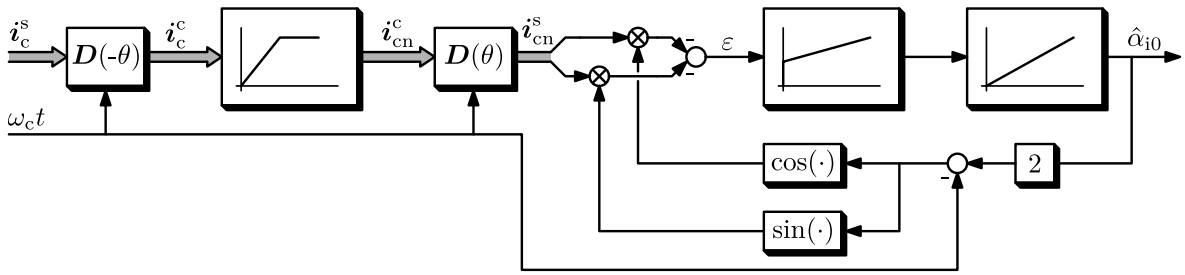


Abb. 3.9: Bestimmung der Hauptachsenrichtung mit rotierender Injektion ([54])

stroms mit dem Referenzsignal

$$\mathbf{s}_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} -\sin(2 \cdot \hat{\alpha}_{i0} - \omega_c \cdot t) \\ \cos(2 \cdot \hat{\alpha}_{i0} - \omega_c \cdot t) \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

welches dem erwarteten Verlauf der Gegenkomponente entspricht. Es resultiert ein Fehlersignal, das von der Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Hauptachsenrichtung abhängt.

$$\varepsilon = \mathbf{i}_{\text{cn}}^{\text{s}T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{s}_{\text{ref}} \quad (3.65)$$

$$= \frac{|\mathbf{u}_{\text{s}}^{\text{s}}|}{\omega_c} \cdot Y_{\Delta} \cdot \sin(2 \cdot (\alpha_{i0} - \hat{\alpha}_{i0})) \quad (3.66)$$

Es wird in eine Phasenregelschleife (PLL) eingespeist, die die geschätzte Hauptachsenrichtung nachführt bis das Fehlersignal ε zu Null wird (Abb. 3.9). Da mit diesem Verfahren lediglich die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse erfasst werden kann, besteht noch keine Aussage über die Rotorstellung. Aufgrund der magnetischen Sättigung des Eisenmaterials kommt es zu einem Verdrehen der Hauptachsenrichtung gegenüber der d-Achse des Rotorkoordinatensystems, sobald ein drehmomentbildender Strom in die Wicklungen eingeprägt wird [24, 46]. Dies muss bei der Schätzung der Rotorstellung auf Basis der Hauptachsenrichtung berücksichtigt werden.

Bei der bisherigen Beschreibung wurde noch kein Grundwellenstrom berücksichtigt. Wird die rotierende Injektion zusammen mit einem Verfahren zur Regelung des Grundwellenstroms verwendet, muss dieser vor der Auswertung zunächst vom Trägerstrom separiert werden. Dies lässt sich durch geeignete Koordinatentransformation und Filterung erreichen [46] und führt zur selben Darstellung wie in Gleichung (3.66). Da die Injektion des Testsignals mit einer höheren Frequenz als die Grundwellen-Stromregelung arbeitet, kann der Trägerstrom mit einem Bandpassfilter extrahiert werden. Dies birgt jedoch den

Nachteil, dass die Dynamik der Stromregelung so weit reduziert werden muss, dass selbst hochfrequente Sollwertänderungen (z.B. Sollwertsprung) nicht zu einer Störung der Trägerauswertung führen. Deshalb schlägt [34] ein Verfahren vor, bei dem die Frequenz der Injektion auf die halbe PWM-Frequenz erhöht wird. Dadurch ist trotz der Verwendung von Filtern zur Separation von Grundwellen- und Trägerstrom eine dynamische Einstellung des Stromreglers möglich.

alternierende Injektion

Bei diesem Verfahren wird ein alternierender Spannungszeiger

$$\mathbf{u}_c^s = \pm |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_c^s) \\ \sin(\varphi_c^s) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

an die Klemmen der Maschine angelegt. Die Umkehr des Vorzeichens erfolgt gemäß der gewählten Injektionsfrequenz. Da der Frequenzrichter maximal zu jeder PWM-Hälfte einen neuen Stellwert verarbeiten kann, kann die ausgegebene mittlere Spannung für diesen Zeitraum als konstant angenommen werden. Die Reaktion der RSM auf diese Anregung wurde mit Gleichung (2.71) bereits in zeitdiskreter Darstellung notiert.

$$\Delta \mathbf{i}_c^s = \pm |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_c^s) \\ \sin(\varphi_c^s) \end{pmatrix} \pm |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_c^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-\varphi_c^s + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Sie besteht aus der Summe zweier Zeiger, wobei die Information über die Hauptachsenrichtung ausschließlich im anisotropen Anteil enthalten ist. Bei der Herleitung war von der Anregung durch eine positive Spannungszeitfläche ausgegangen worden, weshalb an dieser Stelle das alternierende Vorzeichen zu ergänzen ist. Außerdem wurde der Winkel des Spannungszeigers durch die Injektionsrichtung φ_c^s ersetzt. Zur Auswertung wird die Stromantwort in das Injektionskoordinatensystem transformiert, das am Injektionswinkel ausgerichtet ist [46].

$$\Delta \mathbf{i}_c^c = \pm |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot (\varphi_c^s - \alpha_{i0})) \\ -\sin(2 \cdot (\varphi_c^s - \alpha_{i0})) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Es zeigt sich, dass die Querkomponente des Trägerstroms ausschließlich die Richtungsinformation enthält und zu Null wird, sobald Injektions- und Hauptachsenrichtung zu-

sammenfallen.

$$i_y = \mp |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Delta \cdot \sin(2 \cdot (\varphi_c^s - \alpha_{i0})) \quad (3.70)$$

Sie wird einer PLL zugeführt, die die Injektionsrichtung so lange verändert, bis die Trägerstrom-Querkomponente zu Null wird. Dann entspricht die Injektions- der Hauptachsenrichtung [46]. Für kleine Winkelfehler ist die Ableitung der Sinusfunktion ungefähr gleich Eins. Mit dieser Näherung kann Gleichung (3.70) nach der Differenz von Injektionswinkel und Hauptachsenrichtung aufgelöst werden⁷.

$$\varphi_c^s - \alpha_{i0} = \frac{\mp i_y}{2 \cdot Y_\Delta \cdot |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t} \quad (3.71)$$

Wie auch bei der rotierenden Injektion ist bei diesem Verfahren eine Trennung der Injektionsantwort vom Grundwellenstrom erforderlich. Um die beschriebenen Nachteile der Verwendung von Filtern zu umgehen, wird in [25] ein Verfahren zur analytischen Demodulation vorgeschlagen, das gänzlich ohne Filter auskommt. Dadurch entfallen die Einschränkungen bei der Bandbreite der Grundwellenstromregelung.

Beliebige Injektion

[38] beschreibt das Verfahren der beliebigen Injektion. Es entstand aus der Motivation ein drehgeberloses Verfahren zu entwickeln, das ohne Maschinenparameter auskommt. Prinzipiell basiert es auf dem Ansatz, die Änderung des Stromzeigers innerhalb eines Abtastrasters des Frequenzumrichters aufzuteilen in Grundwellen- und HF-Verhalten. In zeitdiskreter Form kann die Änderung des Stromzeigers, abgeleitet aus Gleichung (2.59), folgendermaßen dargestellt werden.

$$\Delta \mathbf{i}_s^s = \mathbf{Y}_s^s \cdot \Delta t \cdot \mathbf{u}_s^s - \mathbf{Y}_s^s \cdot \Delta t \cdot (R_s \cdot \mathbf{i}_s^s + \mathbf{J} \cdot \omega_r \cdot \psi_s^s - \mathbf{L}_s^s \cdot \mathbf{J} \cdot \omega_r \cdot \mathbf{i}_s^s) \quad (3.72)$$

Darin enthält der linke Term den schnell veränderlichen und der rechte Term den langsamer veränderlichen Anteil der Stromänderung⁸. Unter der Annahme, dass der langsam veränderliche Anteil über die zwei vergangenen Abtastraster nahezu konstant war, kann

⁷Diese Form der Linearisierung ist - basierend auf den differentiellen Induktivitäten der Maschine - bereits aus [25] bekannt.

⁸Im Gegensatz zu [38] wird der Begriff der Admittanz in der vorliegenden Arbeit als inverse Induktivität verwendet (vgl. Gleichung (2.61)). Um Verwechslungen zu vermeiden wurde Gleichung (3.72) an die hier verwendete Darstellung angepasst.

er durch das bilden der Differenz zweier Stromänderungen eliminiert werden. Übrig bleibt die Differenz der schnell veränderlichen Stromänderungen, die nach [38] $\Delta^2 \mathbf{i}_s^s$ genannt wird.

$$\begin{aligned}\Delta^2 \mathbf{i}_s^s &= \Delta \mathbf{i}_s^s - \Delta \mathbf{i}_s^s(z^{-1}) \\ &= \mathbf{Y}_s^s \cdot \Delta \mathbf{u}_s^s \cdot \Delta t\end{aligned}\quad (3.73)$$

Darin kann die Admittanzmatrix in einen isotropen und anisotropen Anteil zerlegt werden.

$$\mathbf{Y}_s^s = Y_\Sigma \cdot \mathbf{I}_2 + Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) & \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) & -\cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix}\quad (3.74)$$

Ist der isotrope Anteil der Admittanz bekannt, kann das Fehlersignal

$$\begin{aligned}e_{prd}^s &= \Delta^2 \mathbf{i}_s^s - Y_\Sigma \cdot \Delta \mathbf{u}_s^s \cdot \Delta t \\ &= Y_\Delta \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) & \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) & -\cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \cdot \Delta \mathbf{u}_s^s \cdot \Delta t\end{aligned}\quad (3.75)$$

berechnet werden. Gleichung (3.75) zeigt die Abhängigkeit des Fehlersignals vom Hauptachsenwinkel der Anisotropieellipse. Er kann mit Hilfe der atan2 Funktion berechnet werden.

Zusammenfassend gilt es zu notieren: Das Verfahren der beliebigen Injektion ermittelt die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse, wozu ausschließlich der Parameter Y_Σ benötigt wird. [38] beschreibt einen Ansatz zur Schätzung dieses Parameters, so dass das Verfahren sogar ohne die Kenntnis von Maschinenparametern arbeiten kann.

Anforderungen an Hauptachsen-Injektionsverfahren

Die bisher beschriebenen Injektionsverfahren versuchen die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse zu ermitteln um daraus auf die Rotorstellung zu schließen. Daraus resultieren die folgenden drei Anforderungen, die an die Maschine zu stellen sind, damit die Rotorstellung in allen Betriebspunkten beobachtbar ist [26].

1. Ausprägung der Anisotropie

Sowohl die Fehlersignale ε und e_{prd}^s bei der rotierenden und der beliebigen, als auch die Querkomponente i_y bei der alternierenden Injektion hängen neben der

Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Hauptachsenrichtung, von der Admittanz Y_{Δ} ab. Sie ist maßgeblich dafür verantwortlich wie viel Feedback das Verfahren erhält, wenn es nicht korrekt ausgerichtet ist. Da in der Praxis bei der Auswertung der Trägerstromantworten immer Messrauschen vorhanden ist, muss die Anisotropie groß genug sein, damit sich das Fehlersignal deutlich vom Messrauschen abhebt. Daher ist ein Mindestwert von Y_{Δ} notwendig, der von der Qualität der Messgrößen abhängt.

2. Umkehrbarkeit der Zuordnung: Hauptachsenrichtung - Rotorstellung

Die bisher beschriebenen Injektionsverfahren schätzen die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse. Diese ist jedoch nicht zwangsläufig am Rotor ausgerichtet, so dass eine arbeitspunktabhängige Berechnung der Rotorstellung aus der ermittelten Hauptachsenrichtung notwendig ist. Die Abweichung zwischen der Hauptachsenrichtung und der tatsächlichen Rotorstellung kann durch Messung (mit einem Drehgeber als Referenz) ermittelt werden. Im drehgeberlosen Betrieb wird die Umkehrfunktion dieser Zuordnung dann verwendet um aus den Informationen über Arbeitspunkt und Hauptachsenrichtung die Rotorstellung zu berechnen. Daher muss diese Zuordnung in jedem Arbeitspunkt und bei jeder Rotorstellung umkehrbar sein.

3. Erfüllung des Stabilitätskriteriums

Die Parameter der Maschine, die die magnetische Anisotropie beschreiben, hängen vom Stromzeiger und der Rotorstellung ab. Ist ein Injektionsverfahren nicht korrekt ausgerichtet, führt das zu einem fehlerhaft eingprägten Stromzeiger der wiederum die magnetischen Parameter und damit die Hauptachsenrichtung beeinflusst. Es gilt folglich zu prüfen, ob das Verfahren aus einem solchen Arbeitspunkt wieder zurück zur korrekten Rotorstellung finden kann.

Vollständige Schätzung der Admittanzellipse

Werden die zuvor beschriebenen Anforderungen von einer Maschine nicht erfüllt, ist sie für den Betrieb mit den bisher beschriebenen Injektionsverfahren nicht geeignet. Zur vollständigen Beschreibung der Admittanz der Maschine sind jedoch drei Parameter notwendig. [28] beschreibt ein Verfahren, bei dem alle drei Admittanzparameter gemessen werden. Diese werden dann mit einem Modell verglichen, woraus die Abweichung von

gedachter zu tatsächlicher Rotorstellung berechnet werden kann. Alle drei Admittanzparameter gehen dabei gleichermaßen in das Modell ein. Das genutzte Injektionsverfahren ist eine am Statorkoordinatensystem ausgerichtete Abfolge von Spannungszeigern, die eine Fläche über dem Statorkoordinatensystem aufspannen. Aufgrund der stark ausgeprägten rotorfesten magnetischen Anisotropie wird hier angenommen, dass die RSM die Anforderungen erfüllt, so dass dieser Ansatz hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt und nicht genauer beschrieben wird.

3.3.3 Kombination aus Injektions- und Grundwellenmodell

Um den vollständigen Drehzahlbereich der RSM mit einem drehgeberlosen Verfahren beherrschen zu können, müssen Injektions- und Grundwellenverfahren kombiniert werden. [53] schlägt das Umschalten zwischen alternierender Injektion und Saliency Based Flux Modell vor, das abhängig von der geschätzten Drehzahl mit Hilfe einer Hysterese erfolgt. Dieser Ansatz ist auch mit der Kombination aus beliebiger Injektion und AF Modell möglich [4]. Bei kleinen Drehzahlen und im Stillstand arbeitet das jeweilige Injektionsverfahren mit einer nachgeschalteten PLL zur Bestimmung der Rotorstellung. Anstelle der Umschaltung wird in [25] und [38] die HF-Information zur Stützung des Flussmodells verwendet. Dadurch kann das Flussmodell auch im Stillstand der Maschine arbeiten, wodurch die hohe Dynamik dieses Verfahrens im gesamten Arbeitsbereich zur Verfügung steht [38].

3.4 Messverfahren zur Bestimmung der Modellparameter

3.4.1 Messung der Flusskennfelder

Für den drehgeberlosen Betrieb der RSM mit den beschriebenen Verfahren werden die Flusskennfelder der Maschine benötigt. Zunächst wird ein Messverfahren beleuchtet, das aus [57] bekannt ist und dort als „Constant Speed Method“ (Messung bei konstanter Drehzahl) bezeichnet wird. Bei dieser Methode arbeitet die Testmaschine im stromgeregelten Betrieb und wird mit konstanter Drehzahl von einer Lastmaschine angetrieben.

Zur Messung eines Arbeitspunkts prägt die Testmaschine einen aus Sicht des Rotorkoordinatensystems konstanten Stromzeiger ein. In Statorkoordinaten ergibt das einen Flusszeiger konstanter Länge, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (entsprechend der gewählten Drehzahl der Lastmaschine) umläuft. Um diesen statischen Betriebszustand einzustellen, muss der Umrichter eine Spannung an die Klemmen der Testmaschine anlegen, die der Spannungsgleichung (2.31) genügt. Da der Strom während der Messung konstant gehalten wird, entfällt der mittlere Term aus (2.31) und die Spannungsgleichung vereinfacht sich zu

$$\mathbf{u}_s^s = R_s \cdot \mathbf{i}_s^s + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^s \quad (3.76)$$

$$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = R_s \cdot \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + \omega_r \cdot \begin{pmatrix} -\psi_\beta \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Während der Messung wird ein Drehgeber als Referenz an die Testmaschine montiert. Damit kann Gleichung (3.77) in das Rotorkoordinatensystem transformiert werden.

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = R_s \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \omega_r \cdot \begin{pmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Das beschriebene Messverfahren liefert aus Gleichung (3.78) die Spannungs- und die Stromkomponenten. Mit den unbekanntem Flusskomponenten und Statorwiderstand ist Gleichung (3.78) ein lineares Gleichungssystem, das mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten unterbestimmt ist. In [57] wird jeder Arbeitspunkt bei positiver und negativer Drehzahl vermessen, wodurch der Statorwiderstand eliminiert und die Flusskomponenten berechnet werden können. Ferner ist dort beschrieben welche Annahmen für die Vereinfachung zu treffen sind. So müssen Statorwiderstand und Eisenverluste bei beiden Messungen eines Arbeitspunktes gleich sein, damit die notwendigen Umformungen des Gleichungssystems möglich sind. Der Stromregler der Testmaschine muss in der Lage sein einen konstanten Stromzeiger einzuprägen. Die dafür notwendige Spannung die der Stromregler als Stellwert ausgibt wird gleichzeitig als Messwert der Klemmenspannung verwendet, wobei sich diese aufgrund verschiedener Effekte von der tatsächlichen Klemmenspannung unterscheidet. Diese Abweichung ist eine nichtlineare Funktion, die von der Zwischenkreisspannung, der Totzeit zwischen den Schaltflanken der Leistungsschalter, der Schaltfrequenz und der Bestromung der Maschine abhängt. Eine weitere Einschränkung der Qualität des Verfahrens ist Messrauschen. Die Mittelwertbildung der Spannung über einen nicht näher beschriebenen Zeitintervall soll das Messrauschen und

die Welligkeit des eingepprägten Stromzeigers kompensieren.

3.4.2 Messung der differentiellen Admittanzen

Zur Beschreibung des differentiellen Verhaltens der Maschine können entweder die Flusskennfelder differenziert [23]

$$\mathbf{l}_s^r = \begin{pmatrix} \frac{d\psi_d}{di_d} & \frac{d\psi_d}{di_q} \\ \frac{d\psi_q}{di_d} & \frac{d\psi_q}{di_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_d & l_{dq} \\ l_{qd} & l_q \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{Y}_s^r = (\mathbf{l}_s^r)^{-1} \quad (3.80)$$

oder die differentiellen Admittanzen (bzw. Induktivitäten) gemessen werden. Zur Messung schlägt [26] folgendes Verfahren vor. Die Testmaschine wird mit konstanter Drehzahl von einer Lastmaschine angetrieben. In die Testmaschine wird entsprechend des zu vermessenden Arbeitspunkts ein in Rotorkoordinaten konstanter Stromzeiger eingepragt. Zusätzlich erfolgt die Überlagerung einer alternierenden Injektion, deren Stromantwort mittels analytischer Demodulation nach [24] erfasst wird. Sind die Admittanzparameter bekannt, resultiert aus diesem Vorgehen der Trägerstrom

$$\mathbf{i}_c^r = \frac{1}{|\mathbf{u}_c^r| \cdot T} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_c^r) & 0 & \sin(\varphi_c^r) \\ 0 & \sin(\varphi_c^r) & \cos(\varphi_c^r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_d \\ Y_q \\ Y_{dq} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Hierin ist φ_c^r der Winkel des Injektionsspannungszeigers in Rotorkoordinaten. Wie auch beim zuvor vorgestellten Verfahren zur Messung der Flussverkettung ist dies ein unterdefiniertes Gleichungssystem. Deshalb führt [26] die Messung eines Arbeitspunkts mehrfach - mit unterschiedlichen Injektionsrichtungen - durch. Dadurch erweitert sich Gleichung (3.81) zu

$$\begin{pmatrix} i_{cd0} \\ i_{cq0} \\ i_{cd1} \\ i_{cq1} \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{u}_c^r| \cdot T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi_{c0}^r) & 0 & \sin(\varphi_{c0}^r) \\ 0 & \sin(\varphi_{c0}^r) & \cos(\varphi_{c0}^r) \\ \cos(\varphi_{c1}^r) & 0 & \sin(\varphi_{c1}^r) \\ 0 & \sin(\varphi_{c1}^r) & \cos(\varphi_{c1}^r) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} Y_d \\ Y_q \\ Y_{dq} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Die so entstandene Matrix \mathbf{A} hängt nur von den ausgewählten Parametern der Injektion ab. Bei Gleichung (3.82) handelt es sich um ein überdefiniertes Gleichungssystem, das mit der Moore-Penrose Pseudoinversen

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \quad (3.83)$$

quadratisch optimal gelöst werden kann [26]. Der Verlauf des Trägerstroms als Antwort auf die Spannungsinjektion wurde im Abschnitt 2.6 mit Gleichung (2.74) ebenfalls hergeleitet. Dies erfolgte unter Vernachlässigung des Wicklungswiderstands und der induzierten Spannung. Daraus folgt für die Messung, dass diese bei kleiner Drehzahl durchgeführt werden muss. Ferner wird auch hier der Wicklungswiderstand vernachlässigt.

4 Eigenschaften der Testmaschinen

Mit der Beschreibung der RSM aus dem Kapitel 2 und dem Stand der Technik aus Kapitel 3 werden in diesem Kapitel die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Maschinen auf ihre Eigenschaften untersucht. Dabei gilt es die Frage zu klären inwiefern sie sich für den drehgeberlosen Betrieb eignen. Untersucht wurden zwei RSMs von verschiedenen Herstellern, deren Typenschilddaten in Tabelle 4.1 zusammengefasst sind.

4.1 Messung der Flusskennfelder

Das hier vorgeschlagene Verfahren zur Messung der Flusskennfelder basiert auf der Methodik in [57], die in Abschnitt 3.4.1 beschrieben wurde. Auch hier werden konstante Stromzeiger in die Testmaschine eingepreßt, während sie von einer Lastmaschine mit konstanter Drehzahl angetrieben wird. Ein wesentlicher Unterschied zu [57] ist die Herangehensweise zur Auswertung der gemessenen Daten. Zu Grunde liegt die Spannungsgleichung der RSM in Rotorkoordinaten (2.33), die sich bei konstantem Stromzeiger und Mittelwertbildung über der Rotorstellung vereinfacht zu (2.37), mit

$$\overline{\mathbf{u}}_s^r = R \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}}_s^r \Big|_{i_s^r = \text{const}} . \quad (4.1)$$

| Bezeichnung | | RSM1 | RSM2 |
|-----------------|-----------------------|------|---------------|
| Hersteller | | KSB | SEW-EURODRIVE |
| Polpaarzahl | | 2 | 2 |
| Nennzahl | [min ⁻¹] | 1500 | 1500 |
| Nennleistung | [kW] | 2,2 | 1,1 |
| Nennmoment | [N m] | 14 | 7 |
| Nennstrom (RMS) | [A] | 5,7 | 4,2 |
| Trägheitsmoment | [kg cm ²] | 40,0 | 36,6 |

Tabelle 4.1: Übersicht der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Maschinen

Durch Separieren der Unbekannten von den gemessenen Größen entsteht die Systemgleichung

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_r & i_d \\ \omega_r & 0 & i_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ R_s \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Hierin sind alle verwendeten Größen als Mittelwerte über der Rotorstellung zu verstehen. Dies gilt für alle in diesem Abschnitt notierten Gleichungen. Wie bereits in Abschnitt 3.4.1 angemerkt, hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da es für drei Unbekannte nur zwei Gleichungen gibt. Werden für jeden Arbeitspunkt mehrere Messungen bei unterschiedlichen Drehzahlen durchgeführt, ist das Gleichungssystem überbestimmt. Die Systemgleichung lautet bei n Messungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ \vdots \\ u_{dn} \\ u_{q1} \\ u_{q2} \\ \vdots \\ u_{qn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{r1} & i_d \\ 0 & -\omega_{r2} & i_d \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\omega_{rn} & i_d \\ \omega_{r1} & 0 & i_q \\ \omega_{r2} & 0 & i_q \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{rn} & 0 & i_q \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{\text{Sys}}} \cdot \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ R_s \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt nach dem gleichen Ansatz wie die Berechnung der differentiellen Admittanzen im Abschnitt 3.4.2, mit der pseudoinversen Matrix [26].

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ R_s \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\text{Sys}}^+ \cdot \mathbf{u}_M \quad (4.4)$$

Die Auswertung der Messdaten mit Gleichung (4.4) muss für jeden vermessenen Arbeitspunkt durchgeführt werden. Durch die Verwendung der pseudoinversen Matrix resultiert die quadratisch optimale Lösung des Gleichungssystems. Alle gemessenen Spannungs- und Stromkomponenten gehen in die Lösung ein. Dies minimiert stochastisches Rauschen der Messungen, vorausgesetzt die Messdaten liefern ein zum Gleichungssystem konsistentes Ergebnis. Ob das Gleichungssystem alle relevanten Effekte beinhaltet, die

bei dem beschriebenen Messverfahren zu berücksichtigen sind, kann kontrolliert werden indem die berechneten Parameter in Gleichung (4.3) eingesetzt werden. Weichen die Komponenten des daraus resultierenden Spannungsvektors deutlich vom Vektor der gemessenen Spannungen ab, muss das angesetzte Gleichungssystem überarbeitet werden. Werden die Eigenschaften des Systems korrekt abgebildet, kann die Genauigkeit weiter erhöht werden indem für jeden Arbeitspunkt weitere Drehzahlen vermessen werden.

Aus den Überlegungen zur Auswertung der Messdaten ergeben sich Vorgaben an die Durchführung der Messungen. Das Messverfahren ist so zu entwerfen, dass die bereits in Abschnitt 3.4.1 erwähnten Schwierigkeiten und systembedingten Ungenauigkeiten umgangen werden. So wird zur Vermeidung der Einflüsse von Schalttotzeiten, Zwischenkreisspannung und Fehlspannung der Halbleiter die Klemmenspannung nicht aus den Aussteuergraden der Halbleiter berechnet sondern gemessen. Dies erfolgt mit einer zur Pulsweitenmodulation (PWM) synchronen Spannungsmessung, die jeweils den Mittelwert der Spannung über eine PWM Periode liefert. Um eine Änderung der Temperatur der Testmaschine und damit des Wicklungswiderstands möglichst zu vermeiden werden die Messungen eines Arbeitspunktes hintereinander durchgeführt, bevor der nächste Arbeitspunkt vermessen wird. Dabei wird die Messdauer durch Verwendung einer Speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) zur Durchführung des Messvorgangs sehr kurz gehalten (die Dauer einer einzelnen Messung beträgt ca. 1,5 s).

Mit dem hier beschriebenen Verfahren ergeben sich für die RSM1 die Flusskennfelder in Abb. 4.1. Das Gitter der Arbeitspunkte setzt sich zusammen aus 29 d- und 33 q-Strömen. Es erfolgten Messungen bei vier Drehzahlen, woraus sich eine Gesamtanzahl von 3828 Messungen ergibt. Eine nachträgliche Bearbeitung der Funktionswerte wurde nicht vorgenommen.

4.1.1 Approximation der Flusskennfelder

Mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Flusskennfelder erhält man zu jedem Arbeitspunkt (Stromzeiger in Rotorkoordinaten) den entsprechenden Flusszeiger. Zur Berechnung von Funktionswerten zwischen den vermessenen Arbeitspunkten können Interpolations- oder Approximationsverfahren verwendet werden [2]. Während bei der Interpolation der Funktionsverlauf durch alle gegebenen Funktionswerte (Messwerte) läuft, nähert die Approximation die Messwerte nach vorbestimmten

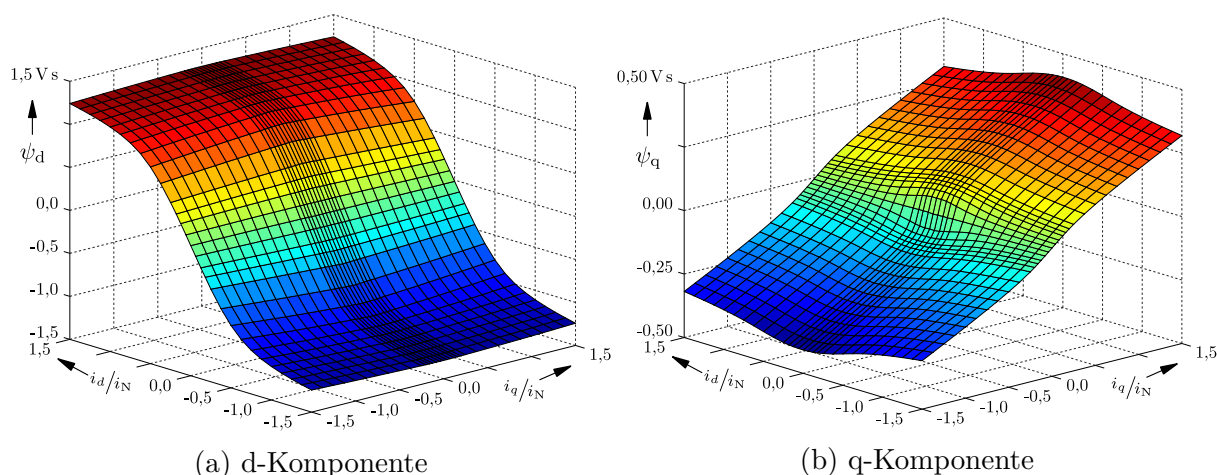


Abb. 4.1: Gemessene Flusskennfelder der RSM1

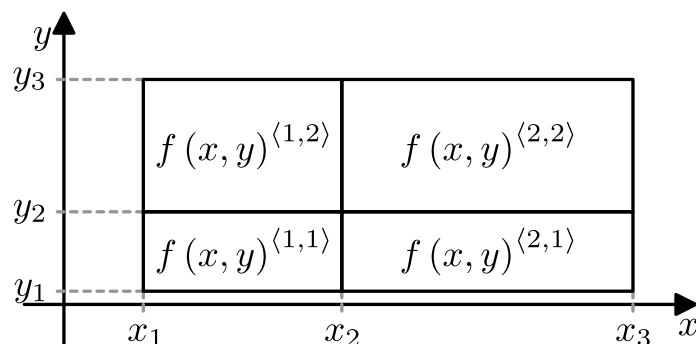


Abb. 4.2: Beispielhafte Aufteilung des Definitionsbereichs in vier Spline-Segmente

Kriterien an, so dass Rauschen in der Messung minimiert wird [2]. Deshalb wird hier vorgeschlagen, die Flusskennfelder mit stückweise definierten Polynomen, sogenannten Splines, anzunähern, die bestimmte Anforderungen an die Stetigkeit des Funktionsverlaufs erfüllen. Jedes einzelne Polynom besteht aus einer Anzahl unbekannter Koeffizienten, die es so zu berechnen gilt, dass die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind und sich der Funktionsverlauf möglichst gut an die vorgegebenen Messwerte anschmiegt. Aus Bedingungen, Arbeitspunkten und Messwerten lässt sich ein lineares Gleichungssystem erstellen, das nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden kann. Die nun folgende Herleitung unterscheidet sich lediglich in der Argumentation zur Formulierung der Stetigkeitsbedingungen von [2], führt jedoch zum gleichen Ergebnis¹.

Zur Verdeutlichung der Herleitung wird ein Beispiel aus vier Segmenten gewählt, das in Abb. 4.2 dargestellt ist. Die Laufvariablen i und j zählen die Segmente in x - und

¹In [2] werden zwei Szenarien zur Approximation beschrieben, die unterschiedliche Stetigkeitsbedingungen an die Splinefunktion stellen. Das hier gewählte Vorgehen entspricht dem Szenario 2.

y-Richtung, wobei deren Anzahl mit n und m angegeben wird. Es gilt

$$i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots m \quad (4.5)$$

Für das vorliegende Beispiel gilt

$$n = m = 2 \quad (4.6)$$

Jedes Segment $\langle i, j \rangle$ enthält ein bikubisches Polynom der Form

$$f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{C}^{\langle i, j \rangle} \cdot \mathbf{y}_j \quad (4.7)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{x}_i^T = \left((x - x_i)^0 \quad (x - x_i)^1 \quad (x - x_i)^2 \quad (x - x_i)^3 \right) \quad (4.8)$$

und

$$\mathbf{y}_j^T = \left((y - y_j)^0 \quad (y - y_j)^1 \quad (y - y_j)^2 \quad (y - y_j)^3 \right) \quad (4.9)$$

sowie der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{C}^{\langle i, j \rangle} = \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & \dots & c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & \dots & \dots & c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Es enthält die 16 Koeffizienten $c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} \dots c_{3,3}^{\langle i, j \rangle}$, die als Unbekannte in das Gleichungssystem eingehen. Die Segmentgrenzen werden in Knotenvektoren zusammengefasst.

$$\mathbf{k}_x^T = \left(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n+1} \right) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{k}_y^T = \left(y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{m+1} \right) \quad (4.12)$$

Im ersten Schritt wird ein lineares Gleichungssystem definiert. Es stellt die Abbildung der Polynomkoeffizienten auf die Messwerte dar.

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (4.13)$$

Hierin ist \mathbf{z} der Vektor der gemessenen Funktionswerte, \mathbf{c} der Vektor der Polynomkoeffizienten aller Segmente

$$\mathbf{c} = \left(c_{0,0}^{\langle 1,1 \rangle} \quad c_{0,1}^{\langle 1,1 \rangle} \quad \cdots \quad c_{3,3}^{\langle 1,1 \rangle} \quad c_{0,0}^{\langle 2,1 \rangle} \quad \cdots \quad c_{3,3}^{\langle n,m \rangle} \right)^T \quad (4.14)$$

und \mathbf{A} die Systemmatrix. Sie ist so zu entwerfen, dass sie die Koeffizienten des passenden Segments auf den entsprechenden Funktionswert abbildet. Somit enthält sie für jeden Messwert eine Zeile, wobei die Anzahl der Spalten gleich der Anzahl der vorhandenen Koeffizienten ist. Jede einzelne Zeile entsteht durch Einsetzen des entsprechenden Stützpunkts in die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} , die im Anschluss miteinander multipliziert werden. Das Ergebnis ist eine quadratische Matrix mit 4×4 Elementen, die zeilenweise zu vektorisieren ist. Am Beispiel der Stützstelle (x_0, y_0) , die im Segment $\langle i, j \rangle$ zu finden ist, bedeutet das

$$\mathbf{A}^{\langle i,j \rangle} = \text{vect} \left(\mathbf{x} \Big|_{x=x_0} \cdot \mathbf{y}^T \Big|_{y=y_0} \right)^T \quad (4.15)$$

$$= \left((x_0 - x_i)^0 \cdot (y_0 - y_j)^0 \quad (x_0 - x_i)^0 \cdot (y_0 - y_j)^1 \quad \cdots \quad (x_0 - x_i)^3 \cdot (y_0 - y_j)^3 \right) \quad (4.16)$$

Die Funktion $\text{vect}(\cdot)$ stellt hier die zeilenweise Vektorisierung einer Matrix dar. Sie muss in dieser Form angewandt werden, da oben auch eine zeilenweise Vektorisierung der Koeffizientenmatrix \mathbf{C} verwendet wurde um den Koeffizientenvektor \mathbf{c} zu erhalten (Gleichungen (4.10) und (4.14)). Sind alle Stützstellen auf diese Art verarbeitet worden, müssen die einzelnen Zeilenvektoren ab der passenden Spalte in die Systemmatrix eingefügt werden, damit ihre Elemente mit den Polynomkoeffizienten aus dem richtigen Segment gewichtet werden.

Im zweiten Schritt werden die Bedingungen an die Stetigkeit der Splinefunktion formuliert und in dem homogenen Gleichungssystem

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

zusammengefasst². Gefordert wird die Stetigkeit im Verlauf der Funktionswerte, sowie der ersten und zweiten Ableitungen. Um eine gültige Splinefunktion zu erzeugen muss der zugehörige Koeffizientenvektor die Gleichung (4.17) erfüllen. Die Berechnung der

²Die Herleitung der Gleichungen aus denen sich die Bedingungsmatrix \mathbf{B} zusammensetzt, wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Anhang A.3 verschoben.

Splinekoeffizienten erfolgt nun wie in [2]. Die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems (4.17) ist

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{t}. \quad (4.18)$$

Darin ist \mathbf{B}_N die Basis des Nullraums der Matrix \mathbf{B} und \mathbf{t} ist ein beliebiger Parametervektor. Das vorliegende Beispiel aus vier Segmenten enthält 64 unbekannte Splinekoeffizienten, die Matrix \mathbf{B} liefert 39 linear unabhängige Gleichungen. Daraus folgt die Größe der Elemente in Gleichung (4.18) zu

$$\underset{64 \times 1}{\mathbf{c}} = \underset{64 \times 25}{\mathbf{B}_N} \cdot \underset{25 \times 1}{\mathbf{t}}. \quad (4.19)$$

Da jedes Element im Parametervektor frei gewählt werden kann und daraus immer ein gültiger Spline resultiert, entspricht seine Länge der Anzahl der Freiheitsgrade des Gleichungssystems. Durch Erstellen der Matrix \mathbf{B} und das Berechnen ihres Nullraums für verschiedene Kombinationen der Segmentanzahlen n und m kann die folgende Gleichung für die Anzahl der Freiheitsgrade ermittelt werden.

$$n_{FG} = (n \cdot m) + 3 \cdot (n + m + 3) \quad (4.20)$$

Gesucht wird nun gerade der Parametervektor, der eine Splinefunktion erzeugt, die möglichst gut zu den erfassten Messwerten passt. Dazu wird Gleichung (4.18) in (4.13) eingesetzt.

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{t} \quad (4.21)$$

Mit Hilfe der Pseudoinversen Matrix (wie beim Verfahren zur Berechnung der differentiellen Admittanzen [26]) kann nach dem Parametervektor \mathbf{t} aufgelöst werden.

$$\mathbf{t} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_N)^+ \cdot \mathbf{z} \quad (4.22)$$

Abschließend wird der Parametervektor in Gleichung (4.18) eingesetzt um die Splinekoeffizienten zu berechnen.

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}_N \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_N)^+ \cdot \mathbf{z} \quad (4.23)$$

Die beschriebene Methode nähert die Flusskennfelder der RSM durch einen stückwei-

se definierten analytischen Funktionsverlauf an. Damit können Funktionswerte auch an Stellen berechnet werden, die nicht durch die Messung erfasst wurden. Ferner eröffnet sich die Möglichkeit, die Polynomkoeffizienten zur Berechnung der Richtungsableitungen zu verwenden. Da die Stützstellen als jeweils eigene Zeilen in die Systemmatrix eingehen, ist es nicht notwendig, dass sie äquidistant verteilt sind. Zur Lösung des Gleichungssystems ist lediglich sicherzustellen, dass genügend linear unabhängige Stützpunkte vorliegen, so dass die zu invertierende Matrix (Klammerausdruck in Gleichung (4.23)) maximalen Spaltenrang hat.

4.1.2 Berücksichtigung von Modellvorgaben

Bisher wurden bei der Berechnung der approximierten Funktionsverläufe nur Vorgaben berücksichtigt, die sich aus der Verwendung der Splines ergaben. Gefordert wurde hier die Stetigkeit der Funktionswerte, sowie der ersten und zweiten Ableitung des Funktionsverlaufs. Die Berechnung der Approximation erfolgte dann für beide Komponenten der Flussverkettung getrennt. Gerade für den Zusammenhang zwischen Flussverkettung und Stromzeiger sind im Fall der RSM zwei weitere Eigenschaften bekannt, die bei der Approximation der Flusskennfelder berücksichtigt werden können. Sie lauten:

1. Die beiden (differentiellen) Kreuzkoppelinduktivitäten müssen gleich sein [21].

$$l_{dq} = l_{qd} \quad (4.24)$$

2. Stromzeiger entlang der Achsen des Rotorkoordinatensystems resultieren in parallelen Flusszeigern.

$$\psi_d(i_d, i_q) \Big|_{i_d=0} = 0 \quad \psi_q(i_d, i_q) \Big|_{i_q=0} = 0 \quad (4.25)$$

Diese Vorgabe folgt aus Gleichung (2.40) und gilt ausschließlich bei Betrachtung der Mittelwerte von Stromzeiger und Flussverkettung über der Rotorstellung.

Die erste der beiden Eigenschaften führt, wenn sie bei der Berechnung der Approximation berücksichtigt wird, zu einer Kopplung der beiden Flusskomponenten, so dass diese nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden können. Damit verdoppelt sich die Anzahl der Unbekannten des Gleichungssystems. Die folgenden Schritte zeigen jedoch,

dass eben diese Kopplung im Gegenzug zu einer Verringerung der Anzahl der Unbekannten führt. Es sei an dieser Stelle bereits vorweggenommen, dass die Kopplung der beiden Komponenten in Verbindung mit der Approximation durch bikubische Splines zu einer Reduktion der Freiheitsgrade führt, so dass deren Anzahl bei steigender Segmentanzahl nicht proportional mitwächst. Dieses Verhalten ist nicht gewünscht, da die Freiheitsgrade notwendig sind um die Funktionsverläufe möglichst gut an die Messwerte anzuschmiegen. Um diesem Problem entgegen zu wirken wird die Ordnung der Spline Polynome auf vier erhöht. Der Funktionsverlauf innerhalb eines Segments berechnet sich dann mit

$$f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,4}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,4}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,4}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,4}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{4,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{4,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{4,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{4,3}^{\langle i, j \rangle} & c_{4,4}^{\langle i, j \rangle} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (4.26)$$

Um Verwechslungen zu vermeiden wird die Splinefunktion f zu Beschreibung der d-Komponente verwendet, während die q-Komponente die Funktion g erhält.

$$g(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{0,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{0,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{0,4}^{\langle i, j \rangle} \\ \gamma_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,4}^{\langle i, j \rangle} \\ \gamma_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{2,4}^{\langle i, j \rangle} \\ \gamma_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{3,4}^{\langle i, j \rangle} \\ \gamma_{4,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{4,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{4,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{4,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{4,4}^{\langle i, j \rangle} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (4.27)$$

Dementsprechend sind die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} um die vierte Potenz zu ergänzen.

$$\mathbf{x}_i = \left((x - x_i)^0 \quad (x - x_i)^1 \quad (x - x_i)^2 \quad (x - x_i)^3 \quad (x - x_i)^4 \right)^T \quad (4.28)$$

$$\mathbf{y}_j = \left((y - y_j)^0 \quad (y - y_j)^1 \quad (y - y_j)^2 \quad (y - y_j)^3 \quad (y - y_j)^4 \right)^T \quad (4.29)$$

Die nun folgende Herleitung der Gleichungen zur Berücksichtigung der Kopplungsbedingung erfolgt auf Basis der Approximation mit Splines vierter Ordnung.

Kreuzkoppelinduktivitäten

Die Kreuzkoppelinduktivitäten werden durch Differenzieren der Flusskomponenten nach der jeweils orthogonalen Stromkomponente berechnet

$$l_{dq} = \frac{\partial \psi_d}{\partial i_q} \quad (4.30)$$

$$l_{qd} = \frac{\partial \psi_q}{\partial i_d} \quad (4.31)$$

und daher gilt

$$\frac{\partial \psi_d}{\partial i_q} = \frac{\partial \psi_q}{\partial i_d}. \quad (4.32)$$

Da nun beide Komponenten miteinander approximiert werden ergeben sich mit den Funktionsgleichungen (4.26) und (4.27) 50 unbekannte Koeffizienten je Splinesegment. Die nach Gleichung (4.32) benötigten partiellen Differentiale von f und g sind

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot c_{0,4}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot c_{1,4}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot c_{2,4}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot c_{3,4}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{4,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{4,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{4,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot c_{4,4}^{\langle i, j \rangle} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (4.33)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & \gamma_{1,4}^{\langle i, j \rangle} \\ 2 \cdot \gamma_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot \gamma_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot \gamma_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot \gamma_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot \gamma_{2,4}^{\langle i, j \rangle} \\ 3 \cdot \gamma_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot \gamma_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot \gamma_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot \gamma_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot \gamma_{3,4}^{\langle i, j \rangle} \\ 4 \cdot \gamma_{4,0}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot \gamma_{4,1}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot \gamma_{4,2}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot \gamma_{4,3}^{\langle i, j \rangle} & 4 \cdot \gamma_{4,4}^{\langle i, j \rangle} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (4.34)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der Gleichungen (4.33) und (4.34) erhält man die

folgenden Gleichungen.

$$\begin{array}{cccccc}
c_{0,1}^{\langle i,j \rangle} = \gamma_{1,0}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i,j \rangle} = \gamma_{1,1}^{\langle i,j \rangle} & 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i,j \rangle} = \gamma_{1,2}^{\langle i,j \rangle} & 4 \cdot c_{0,4}^{\langle i,j \rangle} = \gamma_{1,3}^{\langle i,j \rangle} & 0 = \gamma_{1,4}^{\langle i,j \rangle} \\
c_{1,1}^{\langle i,j \rangle} = 2 \cdot \gamma_{2,0}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} = 2 \cdot \gamma_{2,1}^{\langle i,j \rangle} & 3 \cdot c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} = 2 \cdot \gamma_{2,2}^{\langle i,j \rangle} & 4 \cdot c_{1,4}^{\langle i,j \rangle} = 2 \cdot \gamma_{2,3}^{\langle i,j \rangle} & 0 = 2 \cdot \gamma_{2,4}^{\langle i,j \rangle} \\
c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} = 3 \cdot \gamma_{3,0}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} = 3 \cdot \gamma_{3,1}^{\langle i,j \rangle} & 3 \cdot c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} = 3 \cdot \gamma_{3,2}^{\langle i,j \rangle} & 4 \cdot c_{2,4}^{\langle i,j \rangle} = 3 \cdot \gamma_{3,3}^{\langle i,j \rangle} & 0 = 3 \cdot \gamma_{3,4}^{\langle i,j \rangle} \\
c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} = 4 \cdot \gamma_{4,0}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} = 4 \cdot \gamma_{4,1}^{\langle i,j \rangle} & 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} = 4 \cdot \gamma_{4,2}^{\langle i,j \rangle} & 4 \cdot c_{3,4}^{\langle i,j \rangle} = 4 \cdot \gamma_{4,3}^{\langle i,j \rangle} & 0 = 4 \cdot \gamma_{4,4}^{\langle i,j \rangle} \\
c_{4,1}^{\langle i,j \rangle} = 0 & 2 \cdot c_{4,2}^{\langle i,j \rangle} = 0 & 3 \cdot c_{4,3}^{\langle i,j \rangle} = 0 & 4 \cdot c_{4,4}^{\langle i,j \rangle} = 0 &
\end{array} \tag{4.35}$$

Die Koeffizientengleichungen werden in (4.26) und (4.27) eingesetzt und es entstehen die verkoppelten Funktionsgleichungen

$$f_k(x, y)^{\langle i,j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i,j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i,j \rangle} & c_{0,2}^{\langle i,j \rangle} & c_{0,3}^{\langle i,j \rangle} & c_{0,4}^{\langle i,j \rangle} \\ c_{1,0}^{\langle i,j \rangle} & c_{1,1}^{\langle i,j \rangle} & c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} & c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} & c_{1,4}^{\langle i,j \rangle} \\ c_{2,0}^{\langle i,j \rangle} & c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} & c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} & c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} & c_{2,4}^{\langle i,j \rangle} \\ c_{3,0}^{\langle i,j \rangle} & c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} & c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} & c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} & c_{3,4}^{\langle i,j \rangle} \\ c_{4,0}^{\langle i,j \rangle} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \tag{4.36}$$

und

$$g_k(x, y)^{\langle i,j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{0,0}^{\langle i,j \rangle} & \gamma_{0,1}^{\langle i,j \rangle} & \gamma_{0,2}^{\langle i,j \rangle} & \gamma_{0,3}^{\langle i,j \rangle} & \gamma_{0,4}^{\langle i,j \rangle} \\ c_{0,1}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i,j \rangle} & 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i,j \rangle} & 4 \cdot c_{0,4}^{\langle i,j \rangle} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot c_{1,1}^{\langle i,j \rangle} & c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} & \frac{3}{2} \cdot c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} & 2 \cdot c_{1,4}^{\langle i,j \rangle} & 0 \\ \frac{1}{3} \cdot c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} & \frac{2}{3} \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} & c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} & \frac{4}{3} \cdot c_{2,4}^{\langle i,j \rangle} & 0 \\ \frac{1}{4} \cdot c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} & \frac{1}{2} \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} & \frac{3}{4} \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} & c_{3,4}^{\langle i,j \rangle} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j. \tag{4.37}$$

Zusammen enthalten die beiden Gleichungen 26 Unbekannte. Das ist nur eine Unbekannte mehr, als bei der unabhängigen Approximation einer einzelnen Komponente. Aus den Gleichungen (4.36) und (4.37) folgt der neue Vektor der Unbekannten \mathbf{c}_k zu

$$\mathbf{c}_k = \left(c_{0,0}^{\langle 1,1 \rangle} \quad c_{0,1}^{\langle 1,1 \rangle} \quad \dots \quad c_{4,0}^{\langle 1,1 \rangle} \quad \gamma_{0,0}^{\langle 1,1 \rangle} \quad \dots \quad \gamma_{0,4}^{\langle 1,1 \rangle} \quad c_{0,0}^{\langle 2,1 \rangle} \quad \dots \quad \gamma_{0,4}^{\langle n,m \rangle} \right)^T. \tag{4.38}$$

Auf Basis der angepassten Funktionsgleichungen und des Vektors der Unbekannten müssen die Übergangsbedingungen an den Segmentgrenzen neu hergeleitet werden. Da dies jedoch nach dem gleichen Vorgehen erfolgt wie bei der Spline Approximation dritter Ord-

nung (siehe Anhang A.3), wird das hier nicht erneut notiert. Um in dem daraus resultierenden homogenen Gleichungssystem zu kennzeichnen, dass es sich um die verkoppelte Approximation handelt, werden die Elemente mit einem tiefgestellten k versehen.

$$\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{c}_k = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

Nun fehlt zur Berechnung der Approximation noch die Systemgleichung, die die Unbekannten auf die Messwerte abbildet.

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{c}_k \quad (4.40)$$

Hierin ist \mathbf{z}_k der Vektor der Funktionswerte von f und g . Um die Systemmatrix \mathbf{A}_k zu berechnen, soll die Vorschrift (4.15) Anwendung finden, die die Koeffizienten eines Spline Polynoms auf die entsprechenden Funktionswerte abbildet. Dazu muss jedoch zunächst je eine Abbildung definiert werden, die den Vektor der Unbekannten auf den Koeffizientenvektor von f bzw. g abbildet, so dass sich die Systemmatrix folgendermaßen zusammensetzt.

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_f \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_g \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

\mathbf{M}_f und \mathbf{M}_g ergeben sich aus den Funktionsgleichungen (4.26) und (4.27) und dem Vektor \mathbf{c}_k . Abschließend wird das Gleichungssystem analog zu Gleichung (4.23) gelöst.

Parallele Flusszeiger entlang der Koordinatenachsen

Gemäß Gleichung (2.40) führt ein Arbeitspunkt (Stromzeiger) der auf einer der Achsen des Rotorkoordinatensystems liegt, zu einem parallelen Flusszeiger. Dies ist eine grundlegende Eigenschaft der RSM. Aus Abschnitt 3.3.1 ist bekannt, dass diese Arbeitspunkte beim drehgeberlosen Betrieb der RSM mit einem Grundwellenmodell benötigt werden, damit die Rotorstellung auch bei Drehmoment Null beobachtbar ist. Die Betrachtung der Kennfelder in Abb. 4.1 zeigt geringe Abweichungen der Flusszeiger von den Koordinatenachsen bei diesen Arbeitspunkten. Es wird davon ausgegangen, dass deren Ursache in Messungenauigkeiten liegt und somit die Annahme gerechtfertigt ist, dass die genannte Eigenschaft auch bei der realen RSM gültig ist. Damit die approximierten Flusskennfelder diese Vorgabe exakt einhalten, kann sie dem homogenen Gleichungssystem der

Spline-Vorgaben (4.17) hinzugefügt und damit bei der Berechnung der Splinekoeffizienten berücksichtigt werden.

Angewandt auf die Funktionsgleichungen der verkoppelten Approximation der Flussverkeftung gilt

$$f_k(0, y)^{\langle i, j \rangle} = 0 \quad \text{und} \quad g_k(x, 0)^{\langle i, j \rangle} = 0. \quad (4.42)$$

Einsetzen ergibt aus der Vorgabe für f (mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt) die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i) + c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^2 + c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^3 + c_{4,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^4 &= 0 \\ c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i) + c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^2 + c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^3 &= 0 \\ c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i) + c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^2 + c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^3 &= 0 \\ c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i) + c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^2 + c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^3 &= 0 \\ c_{0,4}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i) + c_{2,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^2 + c_{3,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-x_i)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

während aus der Vorgabe für g folgt

$$\begin{aligned} \gamma_{0,0}^{\langle i, j \rangle} + \gamma_{0,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j) + \gamma_{0,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^2 + \gamma_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^3 + \gamma_{0,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^4 &= 0 \\ c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} + 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j) + 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^2 + 4 \cdot c_{0,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^3 &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j) + \frac{3}{2} \cdot c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^2 + 2 \cdot c_{1,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^3 &= 0 \\ \frac{1}{3} \cdot c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} + \frac{2}{3} \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j) + c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^2 + \frac{4}{3} \cdot c_{2,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^3 &= 0 \\ \frac{1}{4} \cdot c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} + \frac{1}{2} \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j) + \frac{3}{4} \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^2 + c_{3,4}^{\langle i, j \rangle} \cdot (-y_j)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Werden die hier aufgelisteten Gleichungen an die Matrix \mathbf{B}_k als weitere Zeilen angefügt, schränken sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems (4.17) ein, was sich in einem kürzeren Parametervektor \mathbf{t} (vgl. (4.18)) auswirkt.

4.1.3 Flusskennfelder der Testmaschinen

Die Ergebnisse der Messung der Maschinen RSM1 und RSM2 sind in den Abb. 4.3 und 4.4 dargestellt. Um das beste Ergebnis der Approximation zu erreichen wurde das in Abschnitt 4.1.2 beschriebene Verfahren angewandt, wobei auf das Erzwingen von parallelen Flusszeigern entlang der Koordinatenachsen verzichtet wurde. Die Auswahl

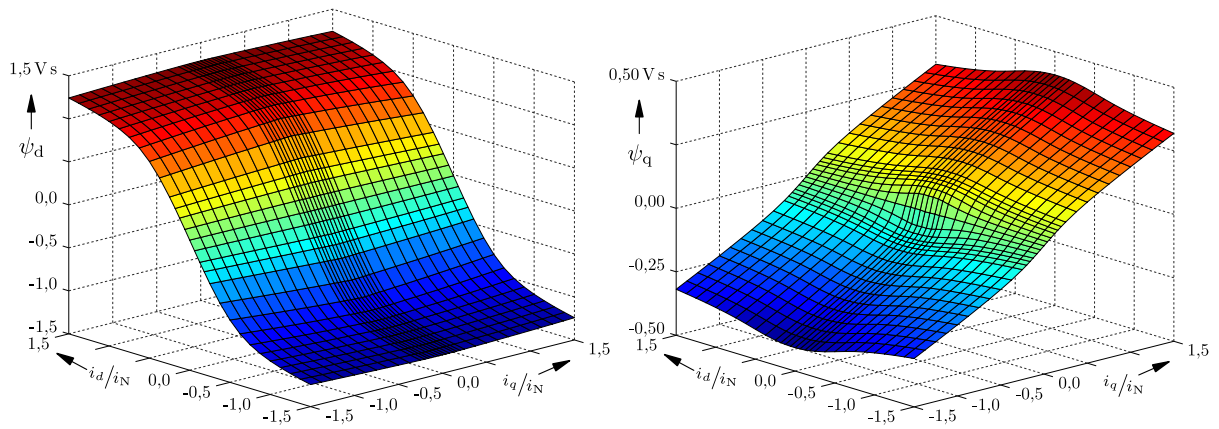
der besten Knoten erfolgte durch numerische Optimierung. Aus den Abbildungen können die folgenden Erkenntnisse abgeleitet werden:

- Die aus den Messdaten direkt berechneten Flusskennfelder zeigen kein auffälliges Messrauschen. Das heißt die Messung bei vier Drehzahlen und anschließende Mittelwertbildung über der Rotorstellung führt bereits zu einem sehr guten Ergebnis was Messrauschen betrifft.
- Die Approximation unter Berücksichtigung der Kreuzkoppelbedingung $l_{dq} = l_{qd}$ führt nur zu sehr kleinen Abweichungen von den Messdaten. Daraus folgt, dass die Auswertung der einzelnen Arbeitspunkte hinsichtlich dieser Vorgabe konsistente Kennfelder ergibt.

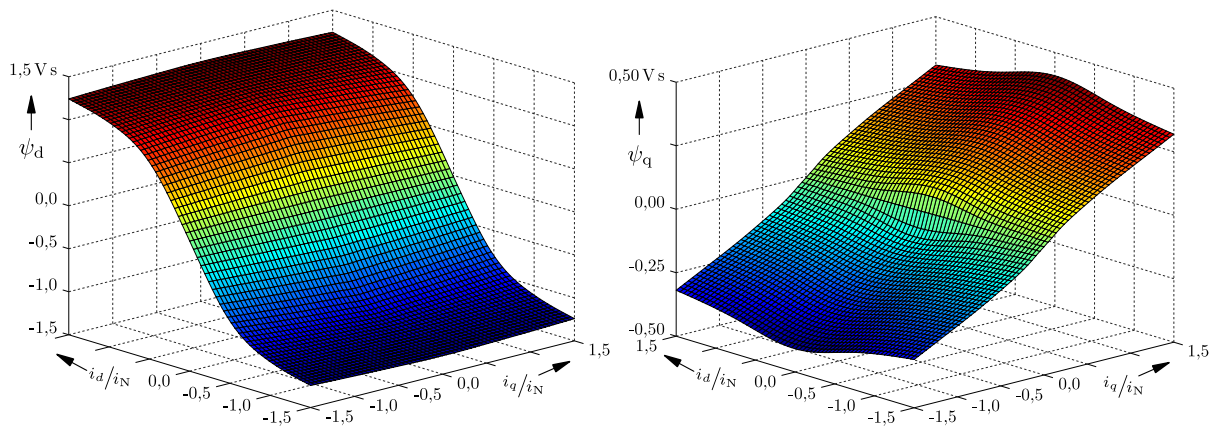
Aufbauend auf den so gewonnenen Informationen wird in den folgenden Abschnitten das Betriebsverhalten der Maschinen untersucht.

4.2 Betriebsverhalten

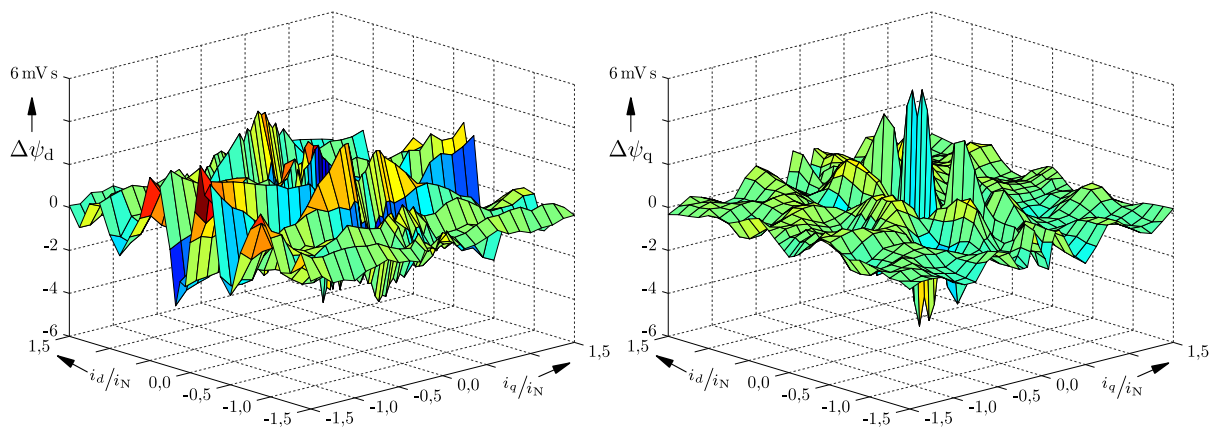
Mit der Messung und der Approximation der Flusskennfelder ist der Zusammenhang zwischen Flussverkettung und Stromzeiger bei der realen RSM bekannt. Jedem Stromzeiger kann so die entsprechende Flussverkettung zugeordnet werden, woraus mit Hilfe der Gleichung (2.54) das resultierende Drehmoment berechnet werden kann. Daraus folgt, dass das Drehmoment als Funktion des Stromzeigers beschrieben werden kann, sobald die Flusskennfelder bekannt sind. Mit dieser Information ist es möglich die Arbeitspunkte mit maximalem Drehmoment unter gegebenen Voraussetzungen (minimaler Strom, minimale Flussverkettung) zu identifizieren. Ferner können aus den Flusskennfeldern die relevanten Parameter für den drehgeberlosen Betrieb mit einem Flussmodell (siehe Abschnitt 3.3.1) berechnet werden. Differentiation führt schließlich zu den differentiellen Induktivitäten, die die zum Betrieb mit einem Injektionsverfahren relevanten Parameter liefern (Abschnitt 3.3.2). Die folgenden Abschnitte zeigen das Vorgehen zur Identifikation der Parameter, sowie die Ergebnisse der Untersuchungen.



(a) Messung

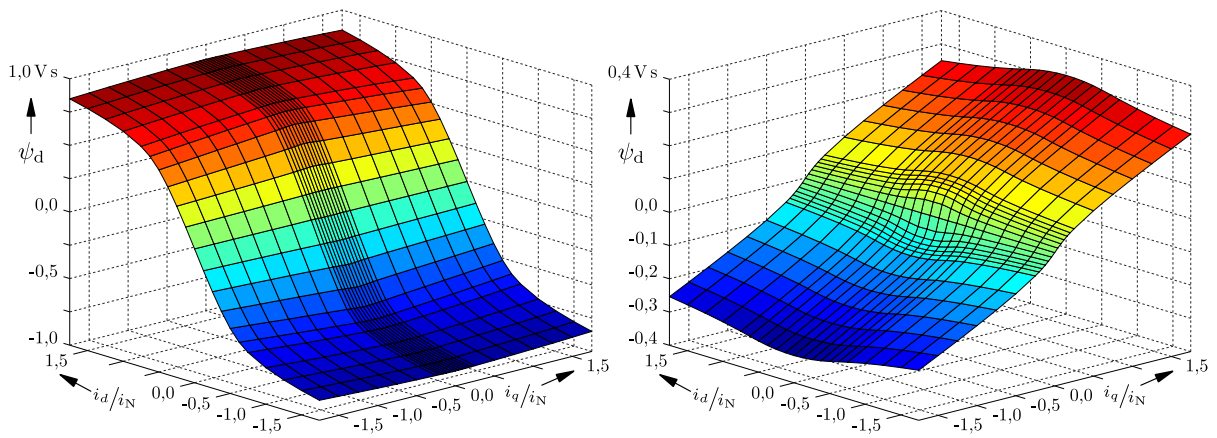


(b) Approximation

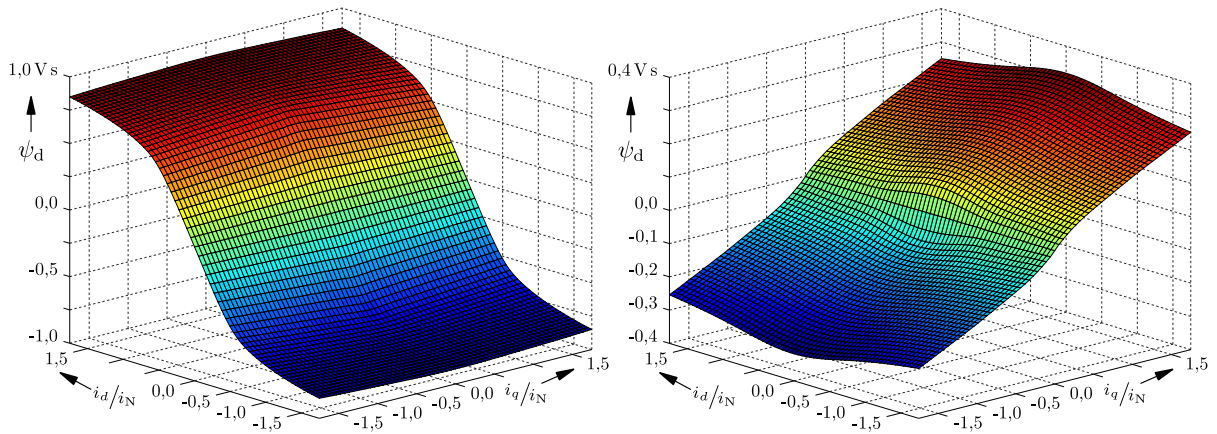


(c) Abweichung zwischen Approximation und Messung an den Messpunkten

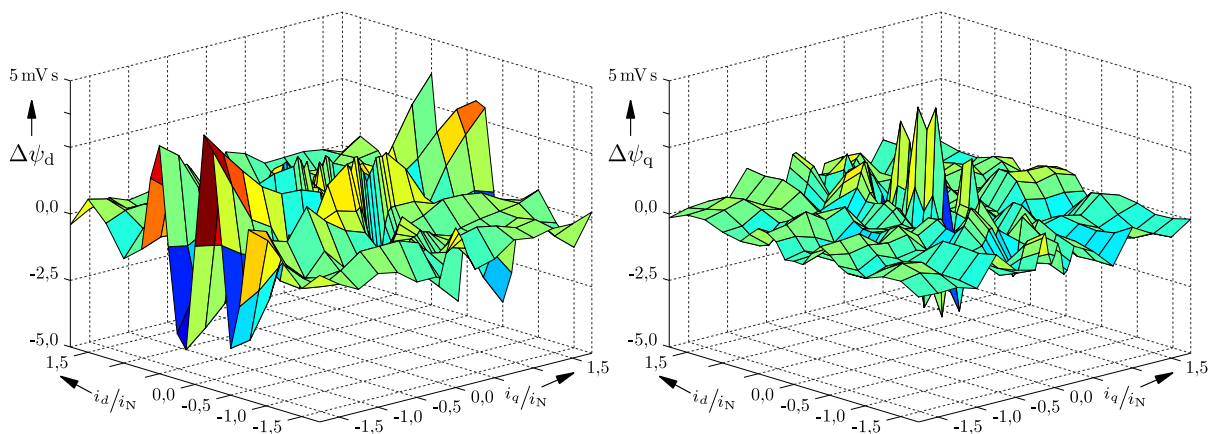
Abb. 4.3: Ergebnisse der Messung der Flussverkettung der RSM1



(a) Messung



(b) Approximation



(c) Abweichung zwischen Approximation und Messung an den Messpunkten

Abb. 4.4: Ergebnisse der Messung der Flussverkettung der RSM2

4.2.1 MTPA und MTPF Kennlinie

Zur Untersuchung des Betriebsverhaltens der realen RSM werden die zuvor approximierten Flusskennfelder verwendet, um jedem Arbeitspunkt ein Drehmoment zuzuordnen. Da die Approximation die über der Rotorstellung gemittelte Flussverkettung darstellt, ist die Gleichung (2.54) zu verwenden. Das Ziel ist es, die MTPA und MTPF Kennlinien zu ermitteln. Dazu wird die Flusszuordnung zu Stromzeigern konstanter Länge berechnet. D.h. die Flusszuordnung wird in eine polare Darstellung umgeformt. Daraus folgen die Drehmomentverläufe in Abb. 4.5, deren jeweiliges Maximum den Arbeitspunkt mit maximalem Drehmoment bei der gegebenen Länge des Stromzeigers zeigt. Die Berechnung dieser Verläufe in einer feineren Auflösung der Stromzeigerlänge (1% des Motornennstroms) und die Bestimmung der Maxima ergibt dann den Verlauf des Winkels des Stromzeigers entlang der MTPA Kennlinie in Teilbild 4.6a. Zur Bestimmung der MTPF Kennlinie soll das gleiche Vorgehen Anwendung finden. Dazu wird die Abhängigkeit des Stromzeigers von der Flussverkettung benötigt, was der Umkehrfunktion der oben beschriebenen Approximation entspricht. Sie kann nach dem Vorgehen aus Abschnitt 4.1.1 analog zur Approximation der Flusskennfelder berechnet werden³. Daraus folgt dann für jede Länge des Flusszeigers gerade der Winkel, der das maximale Drehmoment zur Folge hat (Teilbild 4.6b). Beide Kennlinien können in Komponentendarstellung umgerechnet werden (Abb. 4.7). Die Anforderung eines Mindeststroms bei Drehmoment Null für den drehgeberlosen Betrieb der Maschine mit einem Flussmodell (siehe Abschnitt 3.3.1) ist hier noch nicht berücksichtigt. Um die Kennlinien auf negative Drehmomente zu übertragen, sind sie an einer der beiden Rotorkoordinatenachsen zu spiegeln. Daraus resultiert im Betrieb das folgende Verhalten: Erfolgt eine Sollwertänderung des Drehmoments mit Vorzeichenwechsel, wird die gewählte Trajektorie verlassen, da der Drehmoment- bzw. Stromregler versucht, die vorgegebene Änderung schnellstmöglich auszuregeln. Der Arbeitsbereich, in dem die Maschine betrieben wird, spannt folglich eine Fläche über dem Rotorkoordinatensystem auf. Deshalb werden die in den folgenden Abschnitten berechneten Parameter für die drehgeberlosen Verfahren über dem gesamten Rotorkoordinatensystem betrachtet und nicht an einer Sollwertkennlinie orientiert.

³Es sei hier besonders darauf hingewiesen, dass das beschriebene Approximationsverfahren nicht auf äquidistant verteilte Stützstellen angewiesen ist. Allein aufgrund dieser Tatsache ist es möglich, die Stromkomponenten über der Flussverkettung zu approximieren. Es muss lediglich sichergestellt werden, dass die zur Lösung des Gleichungssystems zu invertierende Matrix von maximalem Spaltenrang ist.

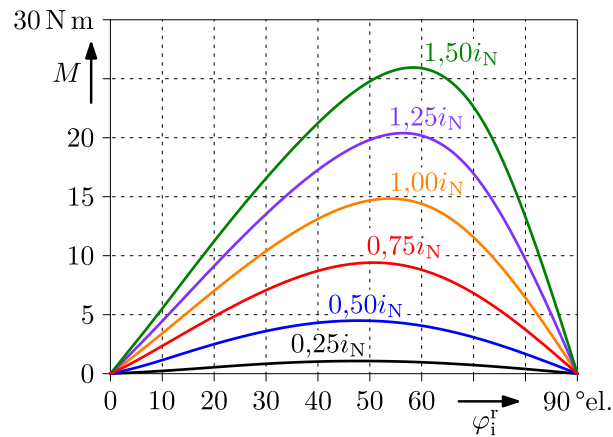
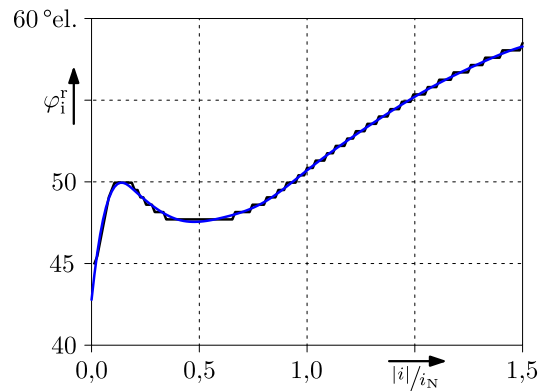
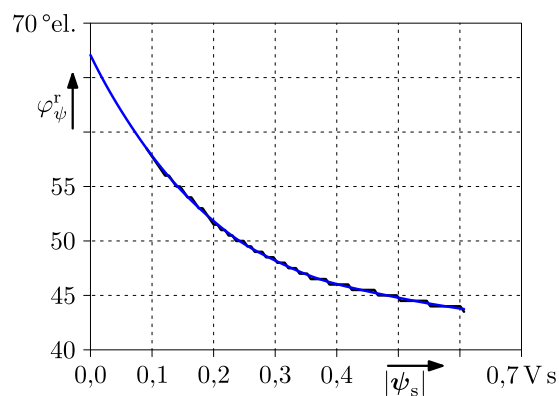


Abb. 4.5: Drehmoment über dem Winkel des Stromzeigers in Rotorkoordinaten für verschiedene Längen des Stromzeigers, jeweils bezogen auf den Nennstrom (Amplitudenwert) der RSM1.



(a) Stromzeiger entlang der MTPA Trajektorie (Polardarstellung)



(b) Flusszeiger entlang der MTPF Trajektorie (Polardarstellung)

Abb. 4.6: Polardarstellung der Trajektorien (RSM1):
 — Aus den Messungen ermittelte Verläufe
 — Durch Splinefits geglättete Verläufe

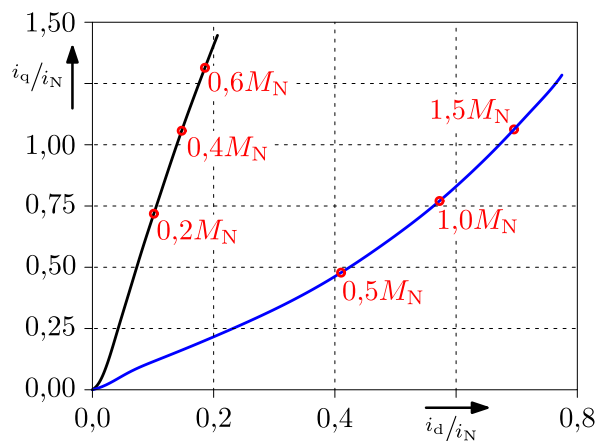


Abb. 4.7: Trajektorien in Rotorkoordinaten (RSM1): — MTPA, — MTPF, \bullet Drehmoment im jeweiligen Arbeitspunkt, bezogen auf das Nennmoment der Maschine

4.2.2 Parameter für drehgeberlose Grundwellenverfahren

Im Abschnitt 3.3.1 wurden Grundwellenverfahren vorgestellt, die den drehgeberlosen Betrieb der RSM bei hohen Drehzahlen ermöglichen. Zur Bestimmung der Rotorstellung sind sie darauf angewiesen, die Sekanteninduktivitäten L_d und L_q zu kennen. Diese berechnen sich nach Gleichung (2.39) mit

$$L_d = \frac{\psi_d}{i_d} \quad \text{und} \quad L_q = \frac{\psi_q}{i_q}. \quad (4.45)$$

Angewandt auf die gemessenen und approximierten Flusskennfelder ergeben sich die in Abb. 4.8 gezeigten Kennfelder. Hier zeigt sich der Vorteil der Approximation. Sie führt zu einer Glättung der gemessenen Verläufe.

4.2.3 Parameter für drehgeberlose Injektionsverfahren

Obwohl die Flusskennfelder mit dem vorgeschlagenen Verfahren gut approximiert werden können, zeigen die daraus berechneten differentiellen Induktivitäten (Abb. 4.9) Abweichungen zu jenen, die direkt aus den Messdaten berechnet wurden (Abb. 4.10). Daher werden die folgenden Berechnungen der differentiellen Parameter auf Basis der Messdaten und der Approximation durchgeführt.

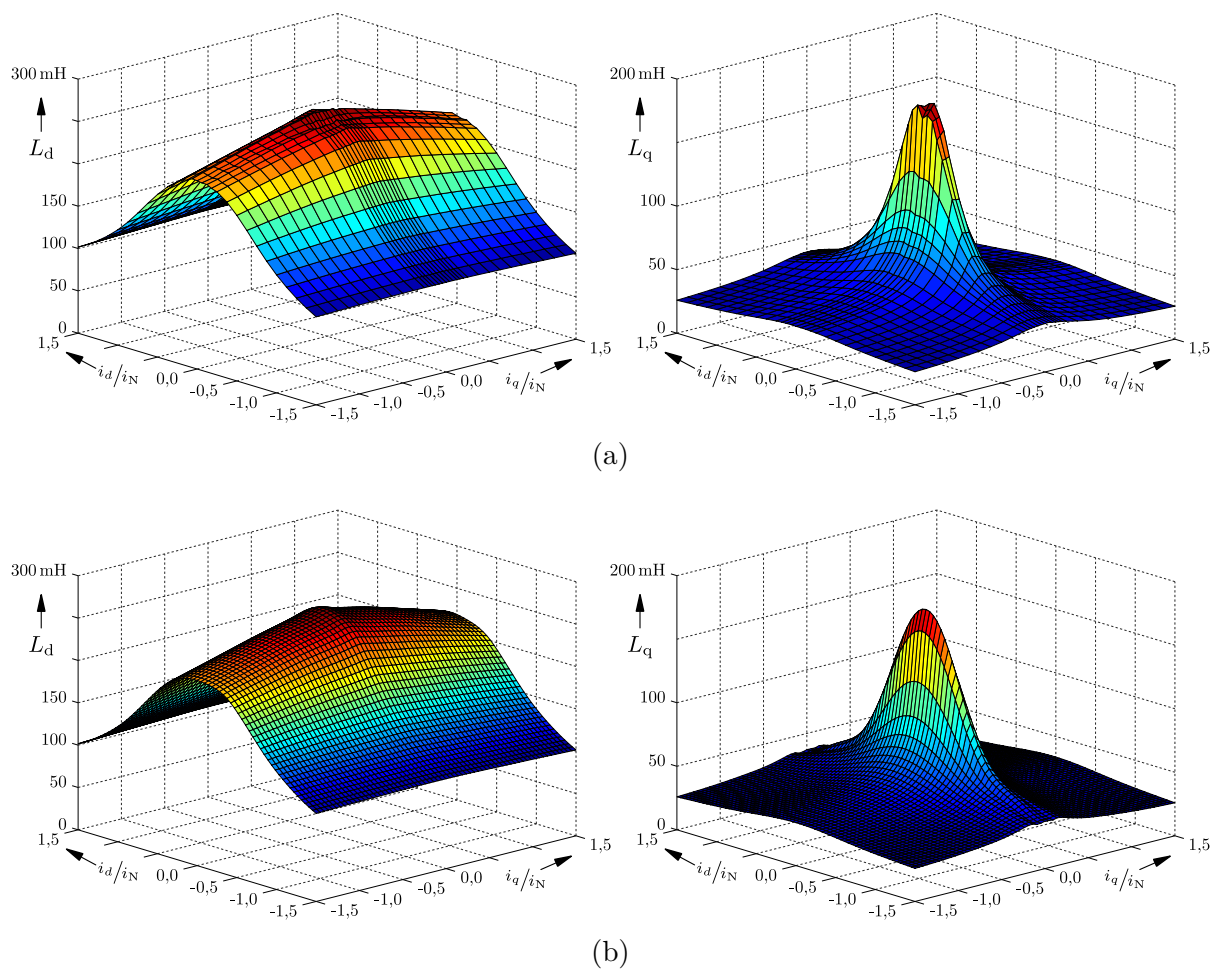


Abb. 4.8: Sekanteninduktivitäten (RSM1): Berechnet aus den Messdaten (a) und der Approximation (b)

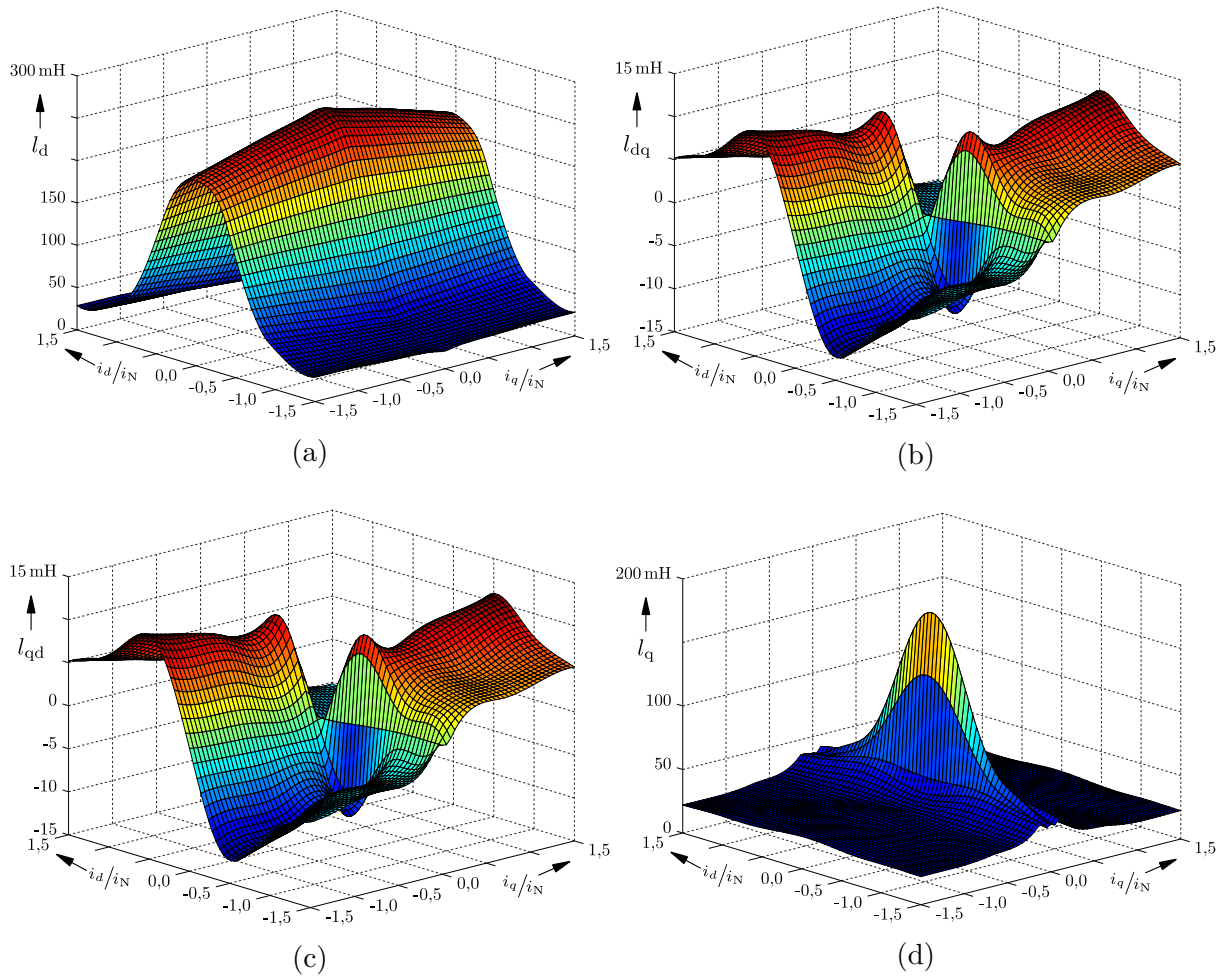


Abb. 4.9: Differentielle Induktivitäten (RSM1), berechnet aus den approximierten Flusskennfeldern

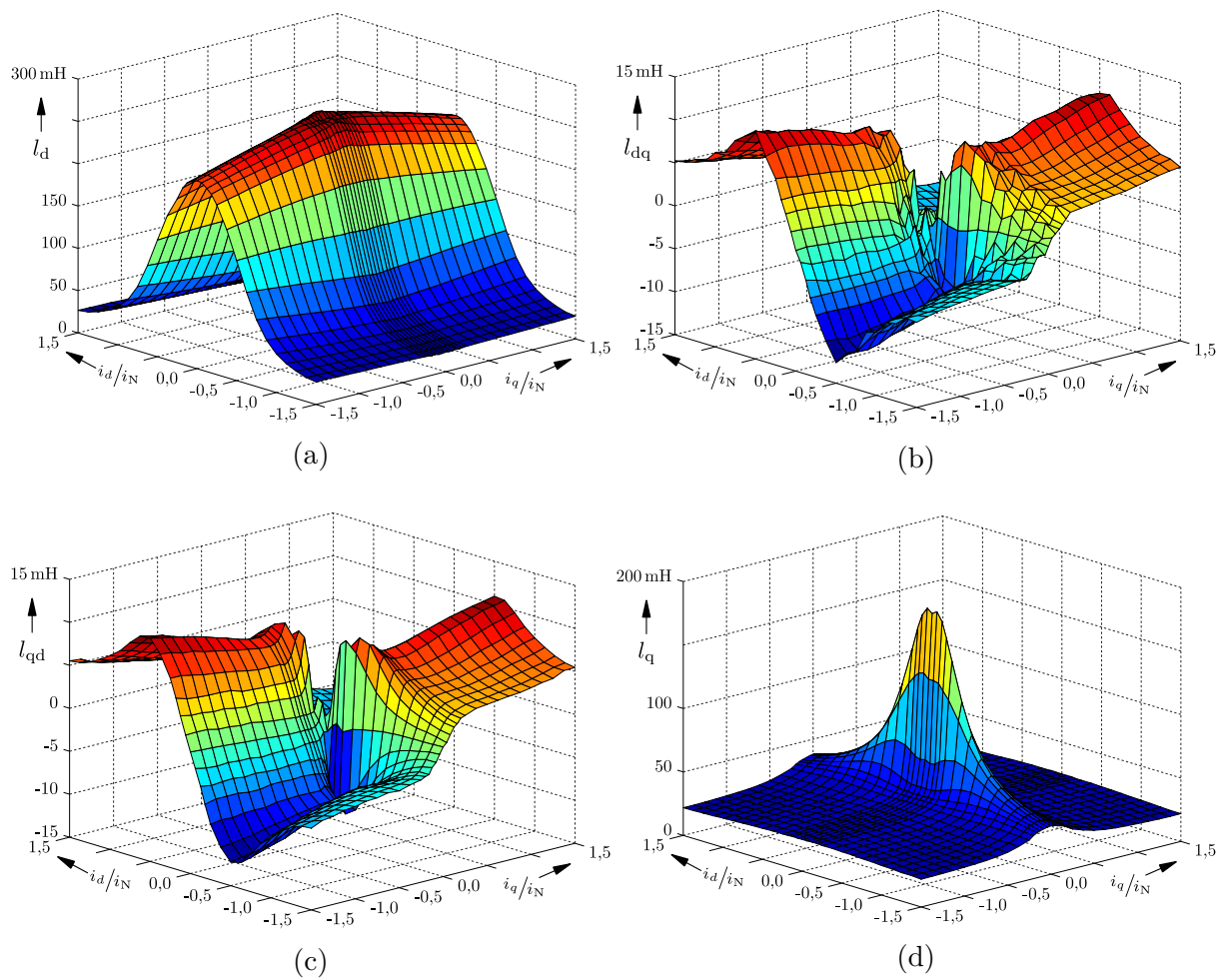


Abb. 4.10: Differentielle Induktivitäten (RSM1), berechnet aus den Messdaten

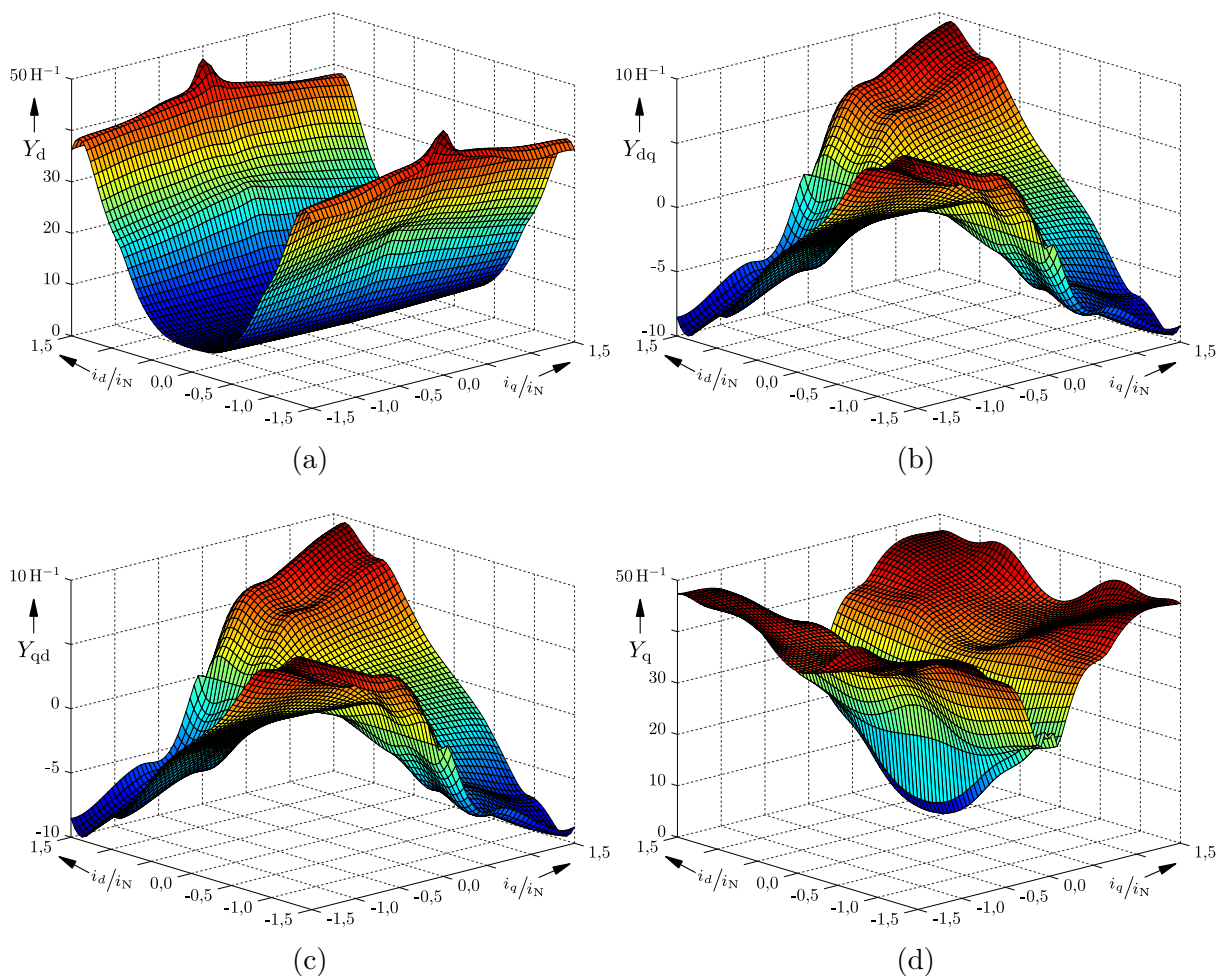


Abb. 4.11: Admittanzen (RSM1), berechnet aus den approximierten Flusskennfeldern

Differentielle Admittanzen

Die differentiellen Admittanzen werden gemäß Gleichung (2.61) durch Invertieren der Matrix der differentiellen Induktivitäten berechnet (Abb. 4.11 und 4.12). Sie dienen als Grundlage für die weiteren Berechnungen.

Hauptachsenrichtung der magnetischen Anisotropie

Der für die vorgestellten Injektionsverfahren wichtigste Parameter ist die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse. Sie stellt den arbeitspunktabhängigen Zusammenhang zur Rotorstellung her. Die Berechnung erfolgt auf Basis der zuvor ermittelten Admittanzmatrizen für alle Arbeitspunkte. Gemäß Abschnitt 2.6 werden die Gleichungen (2.61)

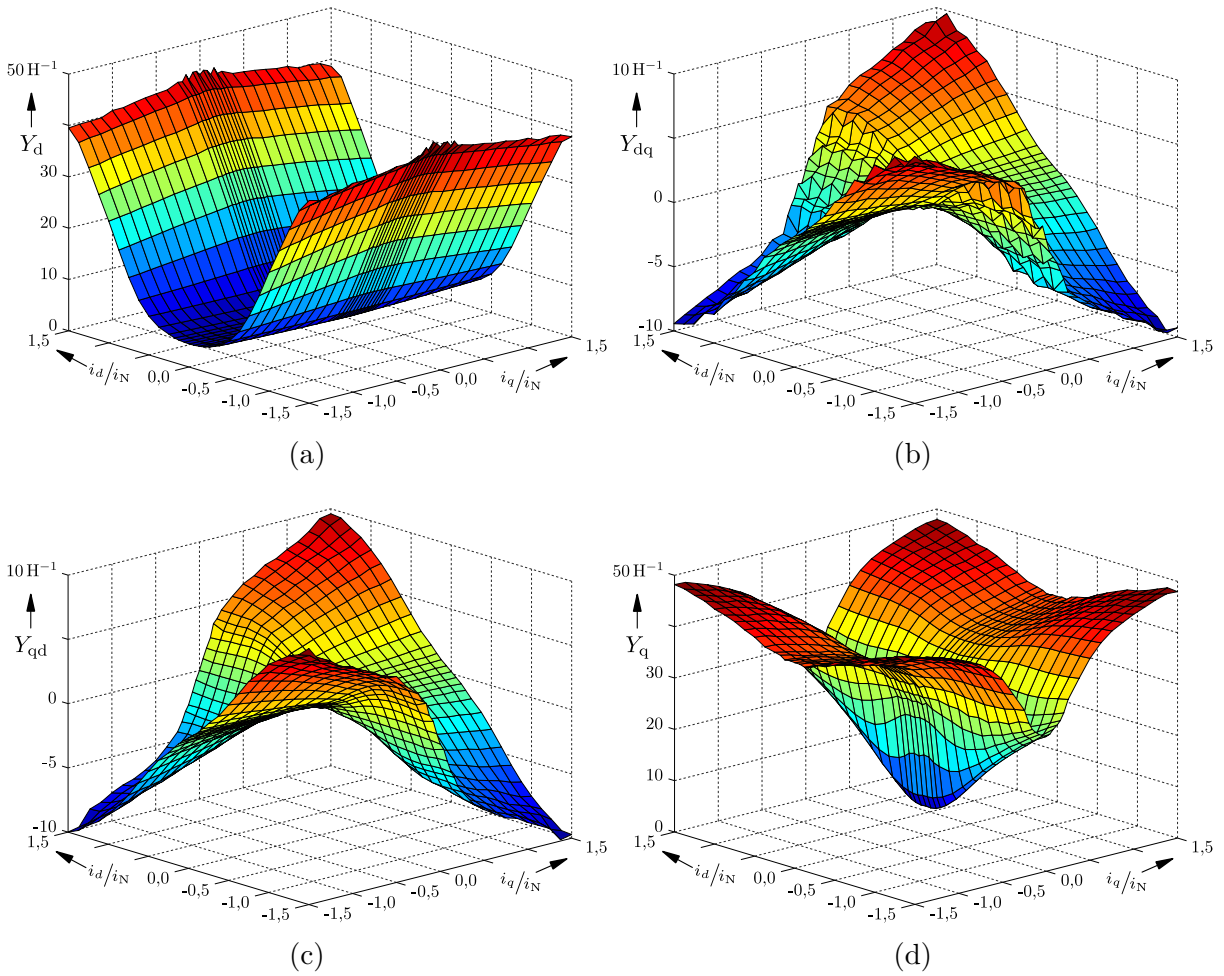


Abb. 4.12: Admittanzen (RSM1), berechnet aus den Messdaten

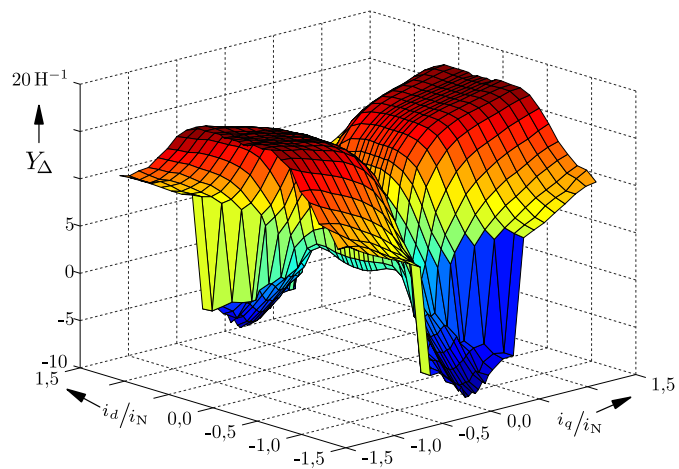


Abb. 4.13: Anisotroper Anteil der differentiellen Admittanz (RSM1)

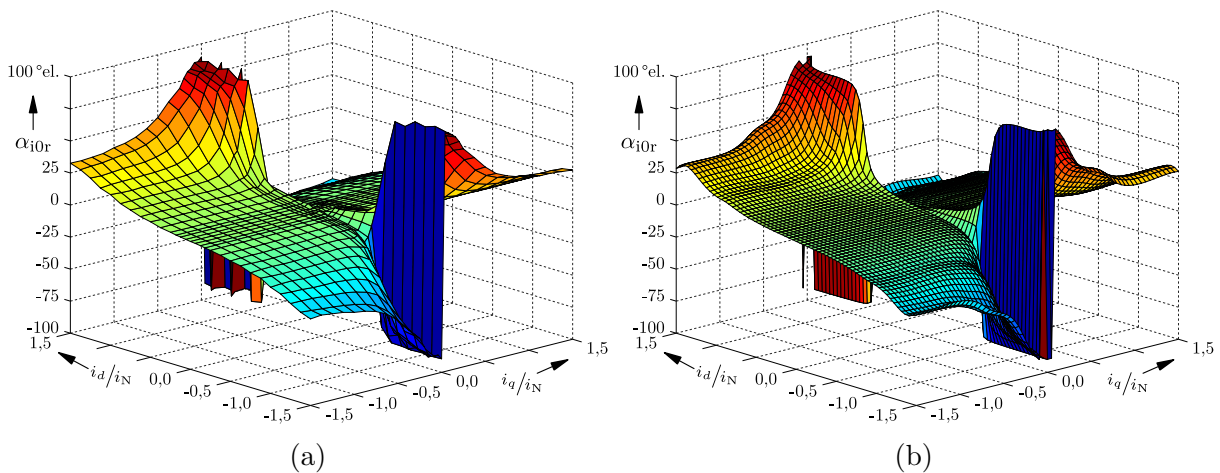


Abb. 4.14: Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse in Rotorkoordinaten (RSM1): Berechnet aus den Messdaten (a) und den approximierten Flusskennfeldern (b)

und (2.80) verwendet. Auf Basis der Messdaten erfolgt die Berechnung für jeden Arbeitspunkt einzeln, auf Basis der approximierten Flusskennfelder analytisch. Das Ergebnis für RSM1 zeigt Abb. 4.14. Hier fällt besonders auf, dass Stromzeiger in der Nähe der d-Achse mit steigender Länge zu einer Hauptachsenrichtung von beinahe $\pm 90^\circ$ el. führen. Das heißt die Hauptachse der Anisotropieellipse kippt von der d- zur q-Achse. Dabei durchläuft die Maschine einen Punkt in dem sie magnetisch isotrop und die Rotorstellung nicht beobachtbar ist. Folglich muss dieser Arbeitsbereich im drehgeberlosen Betrieb mit einem Injektionsverfahren vermieden werden.

Alternativ zur Berechnung der Hauptachsenrichtung aus den Flusskennfeldern kann sie auch gemessen werden. Dies wurde am Beispiel der RSM2 folgendermaßen durchgeführt. Die RSM arbeitet drehmomentgeregelt⁴, während der Grundwellenspannung eine alternierende Injektion überlagert wird. Die Demodulation der Injektionsantwort erfolgt gemäß [25] analytisch. Aus der so ermittelten Querkomponente des Trägerstroms wird der aktuelle Winkelfehler berechnet (Gleichung (3.71)), der dann einer PLL zugeführt wird, die versucht die Abweichung zu Null auszuregeln. Um eine Beschleunigung der Testmaschine zu verhindern, wird sie mit konstanter Drehzahl von einer Lastmaschine angetrieben. Mit diesem Vorgehen resultiert am Ausgang der PLL immer die Hauptachsenrichtung als geschätzte Rotorstellung. Da diese jedoch nicht zwangsläufig mit der tatsächlichen Rotorstellung übereinstimmt, kommt es bei Abweichungen zu einem falsch

⁴Die verwendete Drehmomentregelung basiert auf einer rotororientierten Stromregelung. Das nichtlineare Streckenverhalten wird durch die Abbildung von Soll- und Istwert über die Flusskennfelder kompensiert (vgl. Abschnitt 3.1.2).

| Parameter | Einheit | Wert |
|---------------------|---------------------|------|
| Drehzahl | $[\text{min}^{-1}]$ | 30 |
| Injektionsamplitude | $[\text{V}]$ | 75 |
| PLL K_p | $[\text{s}^{-1}]$ | 100 |
| PLL K_i | $[\text{s}^{-1}]$ | 25 |

Tabelle 4.2: Parameter der Messung der Hauptachsenrichtung

ausgerichteten Stromzeiger. Um den tatsächlichen Arbeitspunkt zu erreichen, wird die Injektionsrichtung iterativ angepasst, bis die gedachte Rotorstellung mit der tatsächlichen (im Mittel über einer elektrischen Umdrehung) übereinstimmt. Als Referenz dient ein an der Testmaschine montierter Drehgeber. Ist der korrekte Injektionswinkel ermittelt, so dass die Maschine im gewünschten Arbeitspunkt betrieben wird, ist er gleich der Hauptachsenrichtung. Die verwendete Stromtrajektorie zeigt Teilbild 4.15a. Sie orientiert sich an der MTPA-Trajektorie. Der Arbeitspunkt mit Drehmoment Null wird hier durch einen Stromzeiger in d-Richtung realisiert. Dies wäre für den Betrieb mit einem Injektionsverfahren nicht notwendig, zielt aber bereits auf die Kombination mit einem Flussmodell. Für negative Drehmomente wird die Trajektorie an der d-Achse gespiegelt. Abb. 4.15 fasst die verwendete Stromtrajektorie, das Ergebnis der Messung im Vergleich zur Verwendung der Flusskennfelder und die Hauptachsenrichtung über der d,q-Ebene zusammen. Die Abbildungen zeigen, dass die aus den Flusskennfeldern ermittelte Hauptachsenrichtung über der d,q-Ebene bei den Testmaschinen RSM1 und RSM2 sehr ähnliche Verläufe annimmt. Speziell die Tatsache, dass die Hauptachse der Anisotropieellipse bei großen Stromzeigern nahe der d-Achse einen isotropen Punkt durchläuft gilt für beide getesteten Maschinen. Ferner zeigt sich am Vergleich der Arbeitspunkte entlang der Stromtrajektorie in Teilbild 4.15b, dass die beiden Verfahren zur Bestimmung der Hauptachsenrichtung nicht das exakt gleiche Ergebnis liefern. Von dieser Abweichung der Messergebnisse wurde in der Literatur, speziell für diesen Maschinentyp, bereits berichtet [14]. Gerade um den Arbeitspunkt um Drehmoment Null stimmen die Verläufe jedoch gut überein, so dass hier ein besonderes Augenmerk auf die hohe Steigung der Kennlinie zu legen ist. Sie führt dazu, dass bei kleinen Fehlern in der Schätzung des Arbeitspunkts (beispielsweise durch Rauschen der Strommessung) ein starkes Rauschen der angenommenen Hauptachsenrichtung entsteht.

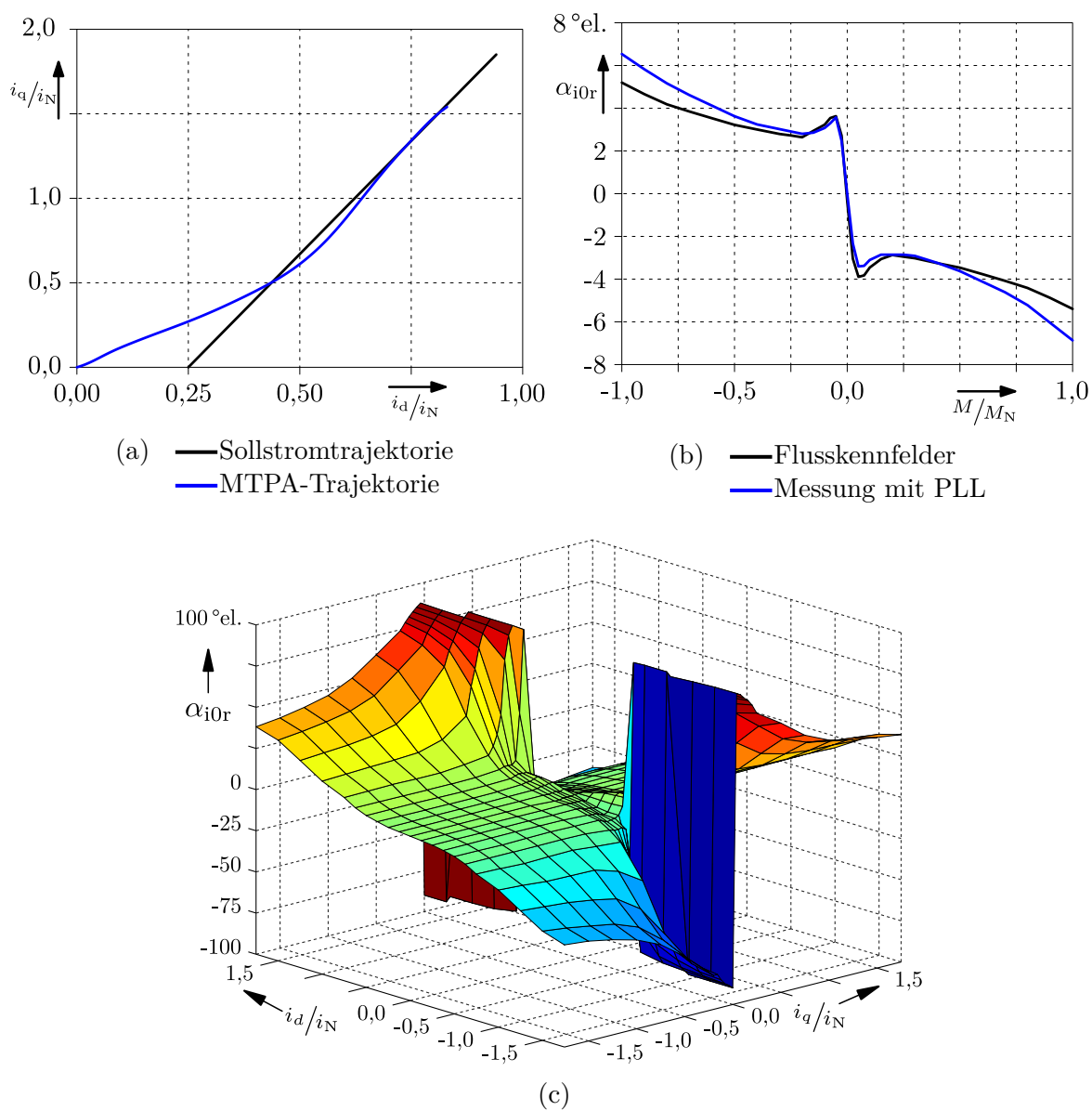


Abb. 4.15: Messung der Hauptachsenrichtung (RSM2)

Verwendete Sollstromtrajektorie (a), Vergleich der Messung mit der Auswertung der Flusskennfelder (b), Auswertung der Flusskennfelder über der gesamten d,q-Ebene (c)

Feedback bei Winkelfehler

Bei der Beschreibung der hauptachsenbasierten Injektionsverfahren in Abschnitt 3.3.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass sie lediglich im Stande sind die Richtung der Hauptachse der Anisotropieellipse zu ermitteln. Liegt im Betrieb eine Abweichung zwischen der geschätzten und der tatsächlichen Hauptachsenrichtung vor, ist es Aufgabe dieser Verfahren, dies zu erkennen. Rotierende und alternierende Injektion liefern entsprechend der Winkelabweichung Fehlersingale, die in den Gleichungen (3.66) und (3.70) beschrieben sind. Sie werden hier nochmals wiederholt.

$$\varepsilon = \frac{|\mathbf{u}_s^s|}{\omega_c} \cdot Y_\Delta \cdot \sin(2 \cdot (\alpha_{i0} - \hat{\alpha}_{i0})) \quad (4.46)$$

$$i_y = \mp |\mathbf{u}_c^s| \cdot \Delta t \cdot Y_\Delta \cdot \sin(2 \cdot (\varphi_c^s - \alpha_{i0})) \quad (4.47)$$

Wird bei beiden Verfahren die gleiche Frequenz angenommen, liefern beide das gleiche Fehlersignal. Bei gegebener Winkeldifferenz hängt es ab von der Länge des angelegten Spannungszeigers, seiner Frequenz und dem anisotropen Anteil der Admittanz der Maschine, der in Abb. 4.13 dargestellt ist. Die Berechnung erfolgte mit Gleichung (2.79). Hierbei ist aufgefallen, dass Y_Δ bei Arbeitspunkten entlang der d-Achse zunächst abfällt um nach einem Knick im Verlauf wieder anzusteigen. Der Vergleich der Admittanzen zeigt, dass in diesem Arbeitsbereich Y_d größer ist als Y_q , wobei in den übrigen Arbeitspunkten das Gegenteil der Fall ist. Zur besseren Darstellung wurde das Vorzeichen von Y_Δ hier nachträglich angepasst. Wie auch bei der Berechnung der Hauptachsenrichtung im vorangegangenen Abschnitt zeigen sich hier gerade die Arbeitspunkte an denen die Maschine magnetisch isotrop und die Rotorstellung nicht beobachtbar ist.

Der Verlauf von Y_Δ verdeutlicht ihre Abhängigkeit vom Arbeitspunkt. Die Höhe der angelegten Spannung ist mindestens so groß zu wählen, dass ein messbares Feedbacksignal entsteht und die Richtung der Hauptachse beobachtbar ist. Dabei gilt es zu beachten, dass die hier genannten Fehlersignale lediglich einen richtungsabhängigen Anteil der Injektionsantwort darstellen. Wird die Injektionsspannung zu groß gewählt, führt die resultierende Antwort unter Umständen bereits zu einer Veränderung der magnetischen Sättigung und damit der Hauptachsenrichtung. Ferner schränkt die Injektionsspannung die Spannungsreserve ein, die der Frequenzrichter zur Regelung des Grundwellenstroms zur Verfügung hat.

5 Erweitertes Active Flux Verfahren für die RSM

In diesem Kapitel wird das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Verfahren zur drehgeberlosen Regelung der RSM erläutert. Zu Beginn werden die speziellen Eigenschaften dieser Maschine herausgearbeitet um eine Grundlage für die weitere Auswahl der unterschiedlichen Elemente zu schaffen, die ein drehgeberloses Verfahren nach dem Stand der Technik bilden. Auf dessen Basis wird dann erläutert, welche Vorteile sich durch die modellwinkelunabhängige Erweiterung des verwendeten Flussmodells ergeben. Den Abschluss bildet der Funktionsnachweis des erweiterten Verfahrens.

5.1 Spezielle Eigenschaften der RSM

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Eigenschaften der Testmaschinen durch Messung identifiziert und vorgestellt. Dies erfolgte durch die Auswertung der für diesen Maschinentyp spezifischen Zuordnung von Statorstrom zu Flussverkettung, die sich aufgrund der ausgeprägten rotorfesten magnetischen Anisotropie in Rotorkoordinaten vorteilhaft darstellen lässt (vgl. Abb. 4.3 und 4.4). Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse ergeben sich weitere Fragestellungen, die den Entwurf eines Verfahrens zum drehgeberlosen Betrieb wesentlich beeinflussen. Diese werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

5.1.1 Sollwerttrajektorie für die Drehmomentregelung

Im Abschnitt 2.5 wurde die Drehmomentgleichung für die RSM hergeleitet. Es zeigt sich, dass die Maschine ein positives Drehmoment erzeugt, wenn Stromzeiger in den ersten oder dritten Quadranten des Rotorkoordinatensystems eingepreßt werden. Umgekehrt resultiert negatives Drehmoment aus Stromzeigern in den Quadranten zwei und

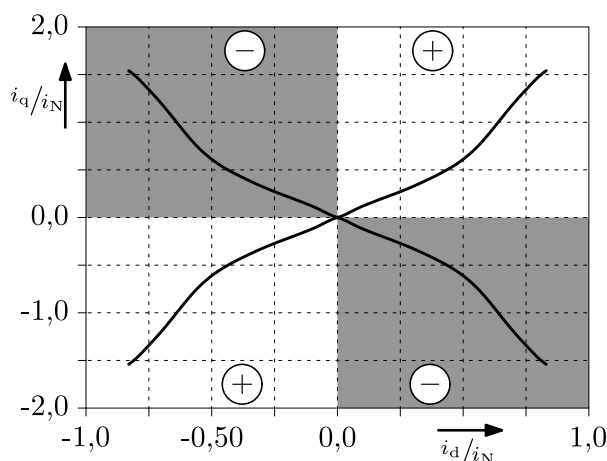


Abb. 5.1: Vorzeichen des resultierenden Drehmoments in den vier Quadranten des Rotorkoordinatensystems

—MTPA Kennlinie, jeweils gespiegelt an den Koordinatenachsen (RSM2)

vier (Abb. 5.1). Arbeitspunkte entlang der Koordinatenachsen erzeugen kein Drehmoment. Um im Betrieb die maximale Dynamik gewährleisten zu können muss bei einem Vorzeichenwechsel des Drehmomentsollwerts die Sollstromtrajektorie verlassen werden. Ein drehgeberloses Verfahren für die RSM muss folglich in der Lage sein, die Modellrotorstellung im gesamten, von der Sollstromtrajektorie eingeschlossenen Arbeitsbereich zu ermitteln.

5.1.2 Rotororientierte Stromregelung bei Winkelfehler

Im Abschnitt 3.1.2 wurden zwei Verfahren zur optimalen Parametrierung der Komponentenregler der rotororientierten Stromregelung beschrieben. Beide versuchen das arbeitspunktabhängige Verhalten der Regelstrecke zu kompensieren, so dass das Verhalten des geschlossenen Regelkreises nicht mehr vom Arbeitspunkt abhängt. Sowohl das Nachführen der Proportionalverstärkung der Komponentenregler, als auch die Regelung der Flussverkettung auf Basis der Flusskennfelder führt dazu, dass die Regelung auf eine Abweichung des Stromzeigers vom Sollwert passend zur Admittanz der Regelstrecke reagiert. Die entsprechenden Regelgleichungen wurden aus der Spannungsgleichung in Rotorkoordinaten abgeleitet. Damit wurde festgelegt, dass die Komponentenregler in diesem Koordinatensystem arbeiten. Bei einem drehgeberlosen Regelverfahren wird die Rotorstellung lediglich geschätzt, so dass es im Betrieb zu Abweichungen zwischen dem tatsächlichen und dem geschätzten Rotorkoordinatensystem kommen kann. Soll- und Istgrößen wer-

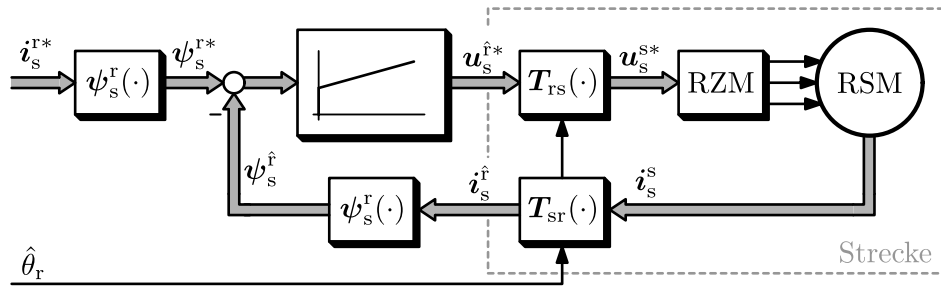


Abb. 5.2: Blockschaltbild der rotororientierten Stromregelung in geschätzten Rotorkoordinaten mit Abbildung von Soll- und Iststrom auf die entsprechende Flussverkettung, gemäß Abschnitt 3.1.2.

den mit der geschätzten Rotorstellung transformiert. Das Blockschaltbild in Abb. 5.2 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Aus Sicht der Komponentenregler verändert sich bei einem Winkelfehler die Regelstrecke, was zu einer Veränderung des Zeitverhaltens führt. Um dies zu Modellieren wird die Spannungsgleichung in geschätzten Rotorkoordinaten herangezogen und analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.1.2 untersucht. Auflösen nach dem Differential des Stromzeigers ergibt

$$\frac{d\mathbf{i}_s^{\hat{r}}}{dt} = \mathbf{Y}_s^{\hat{r}} \cdot \left(\mathbf{u}_s^{\hat{r}} - R_s \cdot \mathbf{i}_s^{\hat{r}} - \hat{\omega}_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^{\hat{r}} - \hat{\omega}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^{\hat{r}}}{\partial \hat{\theta}_r} \right). \quad (5.1)$$

Darin ist $\mathbf{Y}_s^{\hat{r}}$ die Admittanzmatrix in geschätzten Rotorkoordinaten, die sich in Abhängigkeit der Parameter in tatsächlichen Rotorkoordinaten wie folgt darstellen lässt.

$$\mathbf{Y}_s^{\hat{r}} = \frac{Y_d - Y_q}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{Y_d - Y_q}{2} + Y_{dq} \cdot \mathbf{J} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \tilde{\theta}_{re}) & \sin(2 \cdot \tilde{\theta}_{re}) \\ \sin(2 \cdot \tilde{\theta}_{re}) & -\cos(2 \cdot \tilde{\theta}_{re}) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Hier ist $\tilde{\theta}_{re}$ der Modellwinkelfehler, d.h. die Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Rotorstellung.

$$\tilde{\theta}_{re} = \hat{\theta}_r - \theta_r \quad (5.3)$$

In Abschnitt 3.1.2 wurde argumentiert, dass das partielle Differential der Flussverkettung nach der (tatsächlichen) Rotorstellung zu Null wird wenn die Oberwellen des Stators vernachlässigt werden, da in diesem Fall ein konstanter Stromzeiger in einer konstanten Flussverkettung resultiert. Übertragen auf das geschätzte Rotorkoordinatensystem gilt diese Aussage nur dann, wenn der Winkelfehler konstant ist. Je höher die Dynamik des Winkelfehlers, desto größer wird der Beitrag dieses Terms in Gleichung (5.1). Bei der nun

folgenden Modellierung der Regelung wird angenommen, dass sich der Winkelfehler nur langsam verändert, so dass das angesprochene Differential vernachlässigt werden kann. Ferner werden die induzierte Spannung und der ohmsche Spannungsabfall als Störgrößen aufgefasst, die der Regler ausregeln muss. Es erfolgt keine Störgrößenaufschaltung. Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung der Regelstrecke¹ zu

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}_s^r}{dt} = \mathbf{Y}_s^r \cdot \mathbf{u}_s^r, \quad (5.4)$$

woraus sich das folgende zeitdiskrete Modell ableiten lässt.

$$\hat{\mathbf{i}}_s^r(z) = \frac{T_a}{z-1} \cdot \mathbf{Y}_s^r \cdot \mathbf{u}_s^r(z) \quad (5.5)$$

Zur Regelung findet ein PI-Regler gemäß Abschnitt 3.1.2 Anwendung, der die Flussverkettung regelt. In zeitdiskreter Darstellung genügt er der Übertragungsfunktion.

$$\mathbf{u}_s^r(z) = \mathbf{K}_P \cdot \left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{K}_I \cdot \frac{z}{z-1} \right) \cdot (\boldsymbol{\psi}_s^{r*} - \boldsymbol{\psi}_s^r) \quad (5.6)$$

Hierin sind \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_I Matrizen mit den Verstärkungen von P- und I-Anteil des Reglers. Der Sollwert der Flussverkettung ist die Abbildung des Sollstromzeigers auf die Flussverkettung in Rotorkoordinaten

$$\boldsymbol{\psi}_s^{r*} = \boldsymbol{\psi}_s^r(\mathbf{i}_s^{r*}), \quad (5.7)$$

während der Istwert aus dem gleichen Kennfeld und dem Stromzeiger in geschätzten Rotorkoordinaten ermittelt wird.

$$\boldsymbol{\psi}_s^r = \boldsymbol{\psi}_s^r(\hat{\mathbf{i}}_s^r) \quad (5.8)$$

Wird die Regelabweichung mit der Differenz der Stromzeiger erweitert, entsteht das Produkt einer Induktivitätsmatrix multipliziert mit der Stromabweichung.

$$\boldsymbol{\psi}_s^{r*} - \boldsymbol{\psi}_s^r = \frac{\boldsymbol{\psi}_s^{r*} - \boldsymbol{\psi}_s^r}{\mathbf{i}_s^{r*} - \hat{\mathbf{i}}_s^r} \cdot (\mathbf{i}_s^{r*} - \hat{\mathbf{i}}_s^r) = \bar{\mathbf{l}}_s^r \cdot (\mathbf{i}_s^{r*} - \hat{\mathbf{i}}_s^r) \quad (5.9)$$

Die hier resultierende Induktivitätsmatrix enthält die mittleren differentiellen Induktivitäten zwischen den beiden Arbeitspunkten. Für sehr kleine Stromdifferenzen geht sie in die Matrix der differentiellen Induktivitäten in Rotorkoordinaten über. Da die Zuordnung

¹Die Regelstrecke ist in Abb. 5.2 durch den gestrichelten Kasten markiert.

der Flussverkettung auf Basis beider Komponenten der Stromzeiger erfolgt, berücksichtigt der Regler implizit die Kreuzkopplung der Regelstrecke. Die Kennfelder sind beliebig nichtlinear, sodass die magnetische Sättigung der Maschine ebenfalls berücksichtigt wird. Um das gleiche Zeitverhalten für die beiden Komponentenregelstrecken zu erhalten, sind die Regler gleich einzustellen. Dadurch werden die Verstärkungsmatrizen zu skalaren Größen und das zeitdiskrete Modell des Reglers folgt zu

$$\mathbf{u}_s^{\hat{r}}(z) = \frac{K_P \cdot (z + K_I \cdot z - 1)}{z - 1} \cdot \bar{\mathbf{l}}_s^{\hat{r}} \cdot (\mathbf{i}_s^{r*}(z) - \mathbf{i}_s^{\hat{r}}(z)). \quad (5.10)$$

Ein Winkelfehler während des Betriebs verhindert die korrekte Kompensation der Kreuzkopplung, so dass es nicht möglich ist unabhängige Übertragungsfunktionen für die geschlossenen Komponentenregelkreise zu ermitteln. Aus diesem Grund erfolgt die weitere Modellierung des Systems in Zustandsraumdarstellung, was die weiteren Untersuchungen auch mit Berücksichtigung der Kreuzkopplung erlaubt.

Gesucht wird die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung [33] des geschlossenen Regelkreises in der Form²

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(k) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}(k), \quad (5.12)$$

wovon an dieser Stelle die Ein- und Ausgangsvektoren bereits durch Soll- und Iststromzeiger festgelegt sind.

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_d^* \\ \mathbf{i}_q^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{\hat{d}} \\ \mathbf{i}_{\hat{q}} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} sind die Vektoren der Zustands- bzw. Ausgangssignale. Das Modell des Gesamtsystems wird durch Zusammensetzen der einzelnen Zustandsraumdarstellungen von Regler und Regelstrecke, sowie der Berücksichtigung von Sollwertvorgabe und Rückkopplung ermittelt. Für Regler und -strecke gilt entsprechend der Gleichungen (5.5) und (5.10)

$$\mathbf{x}_S(k+1) = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{x}_S(k) + T_a \cdot \mathbf{Y}_s^{\hat{r}} \cdot \mathbf{e}_S(k) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{y}_S(k+1) = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{x}_S(k) + \mathbf{0}_2 \cdot \mathbf{e}_S(k) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_R(k+1) = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{x}_R(k) + K_P \cdot K_I \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (5.16)$$

²Entgegen der üblichen Formulierung der Zustandsraumdarstellung wird hier der Vektor der Eingangssignale mit \mathbf{e} anstelle von \mathbf{u} bezeichnet um eine Verwechslung mit Spannungszeigern zu vermeiden.

$$\mathbf{y}_R(k+1) = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{x}_R(k) + K_P \cdot (1 + K_I) \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (5.17)$$

Hierin bezeichnen die Indizes S und R die Regelstrecke bzw. den Regler. Gemäß Abb. 5.2 ist der Eingangsvektor des Reglers die Regelabweichung der Flussverkettung. Der Spannungszeiger in geschätzten Rotorkoordinaten ist gleichzeitig Ausgang des Reglers und Eingang der Regelstrecke und schließlich ist der Iststromzeiger in geschätzten Rotorkoordinaten der Ausgang der Regelstrecke. Das Zusammenführen der Teilelemente erfolgt gemäß der Gleichungen (A.68) und (A.69), die in Anhang A.4 hergeleitet werden. Sie lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \left[\mathbf{A}' - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \right] \cdot \mathbf{x}(k) \\ &\quad + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \left[\mathbf{I}_2 - (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \right] \cdot \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{C}' \cdot \mathbf{x}(k) + (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}(k) \quad (5.19)$$

mit

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{C}_R & \mathbf{A}_S \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{D}_R \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{C}_R & \mathbf{C}_S \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{D}_R \quad (5.21)$$

Die Matrizen der hier modellierten Teilsysteme sind den Gleichungen (5.14) bis (5.17) zu entnehmen.

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{B}_S = T_a \cdot \mathbf{Y}_s^\dagger \quad (5.22)$$

$$\mathbf{C}_S = \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{D}_S = \mathbf{0}_2 \quad (5.23)$$

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{B}_R = K_P \cdot K_I \cdot \mathbf{I}_2 \quad (5.24)$$

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{D}_R = K_P \cdot (1 + K_I) \cdot \mathbf{I}_2 \quad (5.25)$$

Da die Durchgangsmatrix der Regelstrecke \mathbf{D}_S eine Nullmatrix ist, folgt für das Gesamtsystem

$$(\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_2 \quad (5.26)$$

womit sich die Zustandsraumdarstellung vereinfacht. Einsetzen in die Gleichungen (5.18) und (5.19) ergibt die gesuchte Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Regelkreises.

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}' - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}'] \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (5.27)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{x}(k) \quad (5.28)$$

Die darin enthaltenen Matrizen \mathbf{A}' , \mathbf{B}' , \mathbf{C}' ergeben sich aus den Gleichungen (5.14) bis (5.17), (5.20) und (5.21), die Matrix \mathbf{E} aus Gleichung (5.9).

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ T_a \cdot \mathbf{Y}_s^{\hat{r}} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} K_P \cdot K_I \cdot \mathbf{I}_2 \\ T_a \cdot K_P \cdot (1 + K_I) \cdot \mathbf{Y}_s^{\hat{r}} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{I}}_s \quad (5.30)$$

Die Auslegung des Reglers erfolgt unter der Annahme eines korrekt ausgerichteten Rotorkoordinatensystems, d.h. ohne die Berücksichtigung eines Winkelfehlers. In diesem Fall ist die Admittanzmatrix in geschätzten Rotorkoordinaten gleich der inversen differentiellen Induktivitätsmatrix und die Komponentenregelkreise können unabhängig betrachtet werden. Eingesetzt in die Zustandsraumdarstellung folgen die Pole der geschlossenen Regelkreise durch Bestimmen der Eigenwerte der Zustandsmatrix.

$$\begin{aligned} \text{Eig}(\mathbf{A}' - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}') = & 1 - \frac{1}{2} \cdot K_P \cdot T_a \cdot (K_I + 1) \\ & \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{K_P \cdot T_a \cdot (K_P \cdot T_a \cdot (K_I + 1)^2 - 4 \cdot K_I)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aufgrund der gleichen Einstellung der beiden Komponentenregler ergeben sich zwei gleiche Polpaare, die die folgenden Schlüsse erlauben.

- Ist das Argument der Wurzel kleiner Null, ergibt die Gleichung (5.31) zwei konjugiert komplexe Polpaare.
- Ist das Argument der Wurzel gleich Null, folgen rein reelle Doppelpole.
- Ist das Argument der Wurzel größer Null, resultieren rein reelle Pole.

Die Wahl der Einstellparameter der Komponentenregler, so dass sich zwei reelle Doppelpole ergeben, resultiert in kritisch gedämpftem Einschwingverhalten der geschlossenen

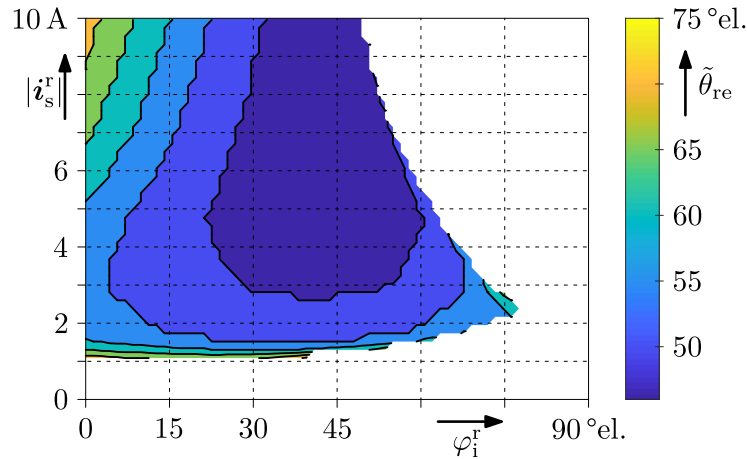


Abb. 5.3: Maximal zulässiger Modellwinkelfehler (Stabilitätsgrenze), in Abhängigkeit des Sollstromzeigers in Polardarstellung (RSM2).

Regelkreise³. Dies ist gerade dann der Fall wenn

$$K_P = \frac{4 \cdot K_I}{T_a \cdot (1 + K_I)^2}. \quad (5.32)$$

Liegt im Betrieb mit einem drehgeberlosen Regelverfahren ein Winkelfehler vor, ist die Admittanzmatrix nicht gleich der inversen Induktivitätsmatrix, was sich bei gegebener Reglereinstellung auf die Pole des geschlossenen Regelkreises auswirkt. Um den maximal zulässigen Modellwinkelfehler zu ermitteln wurden anhand der differentiellen Induktivitäten und Admittanzen aus Abschnitt 4.2.3 für jeden Arbeitspunkt die Eigenwerte der Zustandsmatrix (Gleichung (5.29)) bei verschiedenen Modellwinkelfehlern berechnet. Abb. 5.3 zeigt für jeden Arbeitspunkt den Wert des Modellwinkelfehlers bei dem mindestens ein Pol der Übertragungsfunktion den Einheitskreis in der z-Ebene verlässt. Dies ist die Stabilitätsgrenze der Regelung. Bei den Arbeitspunkten ohne Funktionswert führen auch sehr große Modellwinkelfehler nicht zur Instabilität der Regelung. Die Auswertung erfolgte auf Basis der Reglerparameter $K_I = 0.108$ und gemäß Gleichung (5.32): $K_P = 706 \text{ s}^{-1}$.

³Weist ein System zweiter Ordnung einen rein reellen Doppelpol in der s-Ebene auf, resultiert kritisch gedämpftes Einschwingverhalten [33]. Zur Beurteilung der Pole einer z-Übertragungsfunktion, können diese mittels bilinearer Transformation in die s-Ebene überführt werden [16]. Unter Berücksichtigung der Einstellvorschrift (5.32) folgt für beide Komponentenregelkreise: $s_{1,2} = -K_I$. Damit ist das kritisch gedämpfte Verhalten auch für das hier vorliegende System in zeitdiskreter Darstellung bestätigt.

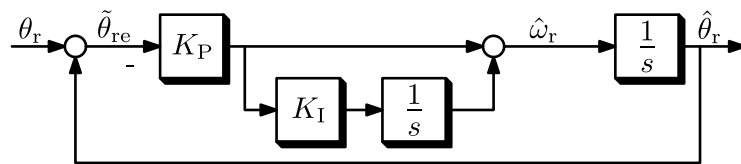


Abb. 5.4: Blockschaltbild einer PLL zur Nachführung der Rotorstellung

5.1.3 Phasenregelschleifen für die Rotorstellung

Eine fehlerhafte Modellrotorstellung, die zu der im vorigen Abschnitt beschriebenen Problemstellung führt, kann verschiedene Ursachen haben. Neben Messrauschen oder unzureichend bekannten Maschinenparametern sei hier die Verwendung von Phasenregelschleifen zur Nachführung der Modellrotorstellung genannt. Diese finden bei Injektionsverfahren Anwendung, die lediglich die Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Rotorstellung ermitteln (vgl. Abschnitt 3.3.2). Aber auch Flussmodellen werden PLLs nachgeschaltet [10, 39], da sie aufgrund ihres Filterverhaltens Messrauschen minimieren. Speziell bei hohen Beschleunigungen treten hier jedoch Winkelfehler auf. Dieser Abschnitt dient der Herleitung einer Gleichung zur Beschreibung dieses Verhaltens.

Abb. 5.4 zeigt die zu untersuchende Anordnung. Die PLL wird von der tatsächlichen Rotorstellung gespeist. So ist eine fehlerhafte Schätzung der Rotorstellung zunächst ausgeschlossen. Eine sprungförmige Änderung des Drehmoments führt bei der frei drehenden Maschine zu einer konstanten Beschleunigung der Motorwelle, die mit Hilfe des Trägheitsmoments berechnet werden kann (vgl. Gleichung (2.58)).

$$M = J \cdot \alpha_r \quad (5.33)$$

Zweifache Integration der Winkelbeschleunigung führt zur Rotorstellung. Es gilt

$$\theta_r = \frac{M}{J \cdot s^2} \quad (5.34)$$

Dies ist das Eingangssignal für die PLL. Aus dem Blockschaltbild 5.4 folgt die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises, die nach dem Verhältnis Winkelfehler zu Drehmoment aufgelöst werden kann.

$$\frac{\tilde{\theta}_{re}}{M} = \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{s^2 + K_P \cdot s + K_I \cdot K_P} \quad (5.35)$$

Regt man das beschriebene System mit einem Drehmomentsprung der Höhe ΔM an, folgt die Funktion des Winkelfehlers im Bildbereich zu

$$\tilde{\theta}_{\text{re}} = \frac{\Delta M}{J \cdot s \cdot (s^2 + K_P \cdot s + K_I \cdot K_P)}. \quad (5.36)$$

Nach dem Grenzwertsatz der Laplace Transformation kann der stationäre Endwert eines Signals im Zeitbereich ermittelt werden, indem seine Laplace Transformierte zunächst mit s multipliziert und anschließend ihr Grenzwert für $s \rightarrow 0$ berechnet wird [17].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (5.37)$$

Angewandt auf die Gleichung des Winkelfehlers folgt sein stationärer Endwert nach dem Drehmomentsprung zu

$$\tilde{\theta}_{\text{re}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\Delta M}{J \cdot K_I \cdot K_P}. \quad (5.38)$$

Folglich steht fest, dass sich nach einer sprungförmigen Drehmomentänderung ein konstanter Winkelfehler einstellt, der von den Einstellparametern des Reglers und der Winkelbeschleunigung der Motorwelle abhängt. Dies muss bei der Wahl der Einstellparameter für den PLL Regler berücksichtigt werden. Eine hohe Bandbreite führt zu kleineren Winkel Fehlern beim Beschleunigen der Maschine, resultiert jedoch in einer schlechten Dämpfung von Messrauschen. Eine zu niedrige Bandbreite führt unter Umständen zu unzulässig hohen Winkel Fehlern, was gemäß Abschnitt 5.1.2 zur Instabilität der rotororientierten Drehmomentregelung führen kann. Ist kein zufriedenstellender Kompromiss zwischen den genannten Gegensätzen zu finden, muss das maximale Drehmoment durch Begrenzung des Sollwerts eingeschränkt werden. Damit geht ein vermindertes Beschleunigungsvermögen der Maschine einher, womit die RSM nicht optimal ausgenutzt wäre. Die Simulation der Antwort des Systems gemäß Abb. 5.4 auf einen sprungförmigen Verlauf des Drehmoments, zur Verifikation von Gleichung (5.38), zeigt Abb. 5.5.

Eine Einschränkung der Änderungsrate für die Drehmomentsollwertverläufe, beispielsweise durch Rampenfunktionen schafft nur bedingt Abhilfe. Die rampenförmige Anregung der Übertragungsfunktion in Gleichung (5.35) führt zu einem rampenförmigen Anstieg des Winkelfehlers, bis eine stationäre Winkelbeschleunigung erreicht wird. Ist diese dann gleich der zuvor angenommenen Sprunghöhe, folgt auch der gleiche Winkelfehler.

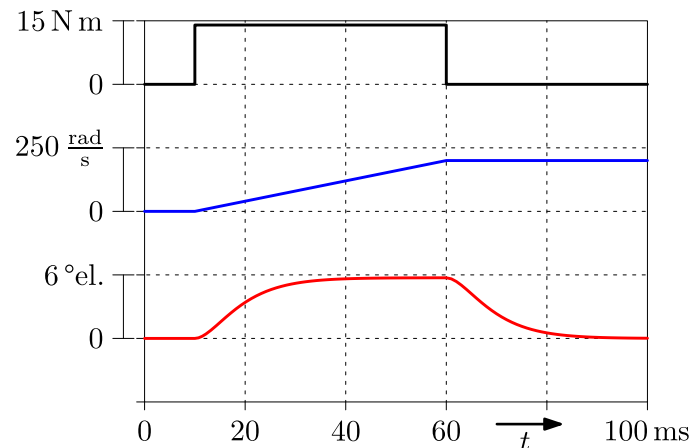


Abb. 5.5: Simulation eines Drehmomentsprungs (Nennmoment) und die daraus folgende Reaktion der PLL für die Modellrotorstellung (RSM1). Einstellparameter der PLL: $K_P = 400 \text{ s}^{-1}$, $K_I = 100 \text{ s}^{-1}$
 — Drehmoment; — elektr. Winkelgeschwindigkeit; — Modellwinkelfehler

5.1.4 Startwert für die Rotorposition

Damit ein drehgeberloses Verfahren zum Betrieb der RSM den Arbeitsbereich von Stillstand bis zu hohen Drehzahlen beherrschen kann, ist es notwendig Injektionsverfahren mit Flussmodellen zu kombinieren. Im Abschnitt 3.3.3 wurde beschrieben, dass es von Vorteil ist, die Rotorstellung in jedem Arbeitspunkt aus dem Flussmodell zu ermitteln und die Injektion lediglich zur Stützung dieses Verfahrens bei kleinen Drehzahlen und im Stillstand zu verwenden. Im stromlosen Zustand ist in der RSM jedoch keine Flussverkettung vorhanden, da sie weder Permanentmagnete noch eine Erregerwicklung enthält. Zum Starten des Flussmodells ist es unbedingt notwendig einen Stromzeiger einzuprägen. Dieser muss in Richtung einer der Koordinatenachsen zeigen, da die Maschine sonst ein Drehmoment entwickelt, was zu einer ungewollten Beschleunigung des Rotors führt. Ferner ist aus dem Abschnitt 5.1.2 bekannt, dass die Stromregelung (sofern eine rotororientierte Stromregelung verwendet wird) bei einem zu großen Modellwinkelfehler instabil werden kann. Deshalb ist ein Startwert für die Modellrotorstellung notwendig mit dem der korrekte Stromzeiger eingepreßt und das Flussmodell gestartet werden kann.

5.1.5 Arbeitspunktabhängigkeit der Maschinenparameter

Der drehgeberlose Betrieb der RSM mit den Verfahren die im Abschnitt 3.3 vorgestellt wurden, erfordert bestimmte Modellparameter, die sich aus den Messungen der Test-

maschinen ergeben (Abschnitte 4.2.2 und 4.2.3). Für die Grundwellenmodelle sind das die Sekanteninduktivitäten L_d und L_q . Ihre Darstellungen in Abb. 4.8 weisen eine wesentlich geringere Variation bei Arbeitspunkten nahe der q-Achse auf, als das in der Nähe der d-Achse der Fall ist. Dies wird der magnetischen Sättigung des Eisenmaterials zugeschrieben. Zwar kann die Aussage aus [39], dass die stromlose Maschine keine messbare magnetische Anisotropie aufweist anhand der hier untersuchten Testmaschinen nicht bestätigt werden, dennoch zeigen sie auf, dass es sinnvoll ist den lastfreien Betrieb (Drehmoment Null) mit einem Stromzeiger in q-Richtung zu realisieren. Auch die Hauptachsenrichtung α_{i0r} , die in den Abb. 4.14 und 4.15 dargestellt und der wichtigste Parameter für die Injektionsverfahren ist, zeigt eine geringere Variation bei Arbeitspunkten nahe der q-Achse. Damit steht fest, dass der lastfreie Betrieb der RSM in Verbindung mit einem drehgeberlosen Verfahren auf der q-Achse zu realisieren ist.

5.1.6 Stabilität der Hauptachsenrichtungskompensation

Bei der Auswertung der Eigenschaften der Testmaschinen zeigte sich, dass die Hauptachsenrichtung der Anisotropieellipse nicht in jedem Arbeitspunkt mit der Rotorstellung übereinstimmt. Das Einprägen eines Stromzeigers führt durch die magnetische Sättigung des Eisenmaterials zu einer Veränderung der differentiellen Admittanzen und damit auch der Hauptachsenrichtung. Um die Rotorstellung im Betrieb zu berechnen muss die ermittelte Hauptachsenrichtung mit dem aus den Messdaten bekannten Wert für diesen Arbeitspunkt korrigiert werden [24]. Um den gesamten relevanten Arbeitsbereich abdecken zu können, ist es notwendig die Hauptachsenrichtung entsprechend Abb. 4.14 in Abhängigkeit des Stromzeigers in Rotorkoordinaten zu modellieren. Zur Transformation des Stromzeigers wird die Modellrotorstellung verwendet, wodurch eine Abhängigkeit vom Modellwinkelfehler entsteht. Zur Gewährleistung der Stabilität ist sicherzustellen, dass diese Modellierung in keinem der relevanten Arbeitspunkte dazu führt, dass sich die geschätzte Rotorstellung noch weiter von der tatsächlichen entfernt. Bei Anwendung einer rotororientierten Stromregelung, arbeitet diese in geschätzten Rotorkoordinaten. Daher wird der Sollwert des Stromzeigers in diesem Koordinatensystem eingepreßt. Entsteht ein Modellwinkelfehler (bei konstantem Sollwert), bleibt der Korrekturwert für die Hauptachsenrichtung in geschätzten Rotorkoordinaten konstant. In tatsächlichen Rotorkoordinaten verändert sich der Stromzeiger aufgrund des Modellwinkelfehlers und damit auch die Hauptachsenrichtung. Die Differenz aus der gemessenen Hauptachsenrichtung

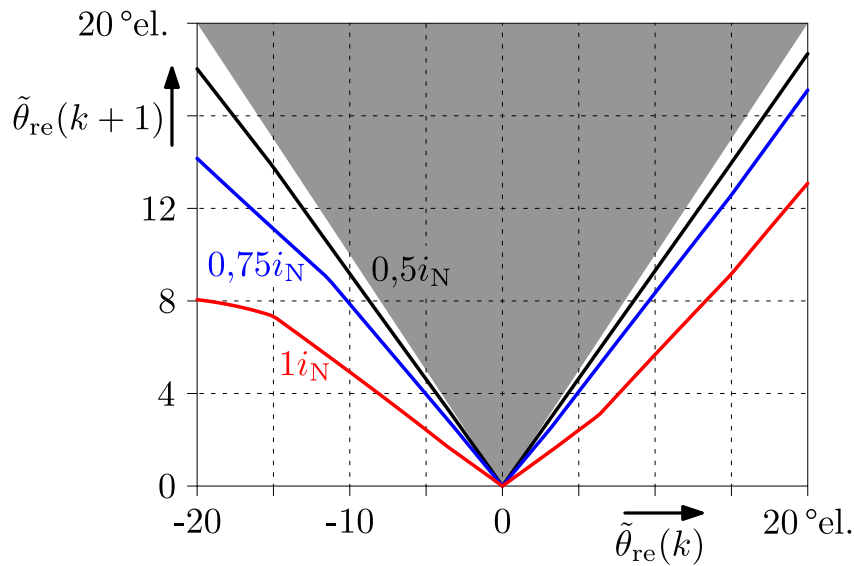


Abb. 5.6: Veränderung des Modellwinkelfehlers bei modellwinkelabhängiger Kompensation der Hauptachsenrichtung (RSM2), exemplarisch für drei Längen des Stromzeigers, jeweils eingepreßt mit 45° el. in geschätzten Rotorkoordinaten.

in Statorkoordinaten und dem Korrekturwert ergibt den neuen Modellwinkel.

$$\hat{\theta}_r = \alpha_{i0\text{Mess}} - \alpha_{i0r\text{Tab}} \quad (5.39)$$

Hierin bezeichnen die Indizes Mess und Tab den aus der Injektion berechneten und aus der Korrekturtabelle ermittelten Winkel der Hauptachse. Die Abweichung des neuen Modellwinkels von der tatsächlichen Rotorstellung ist der Modellwinkelfehler im folgenden Abtastschritt. Es ist nun zu prüfen, ob sein Betrag kleiner ist als im Abtastschritt zuvor.

$$|\tilde{\theta}_{re}(k+1)| = |(\alpha_{i0\text{Mess}} - \alpha_{i0r\text{Tab}}) - \theta_r| \stackrel{!}{<} |\tilde{\theta}_{re}(k)| \quad (5.40)$$

Dieser Zusammenhang ist in jedem Arbeitspunkt für verschiedene Modellwinkelfehler zu prüfen. Exemplarisch zeigt Abb. 5.6 die Prüfung von drei Arbeitspunkten. Die Verläufe dürfen nicht innerhalb des grau markierten Bereichs liegen, was von allen geprüften Arbeitspunkten erfüllt wird.

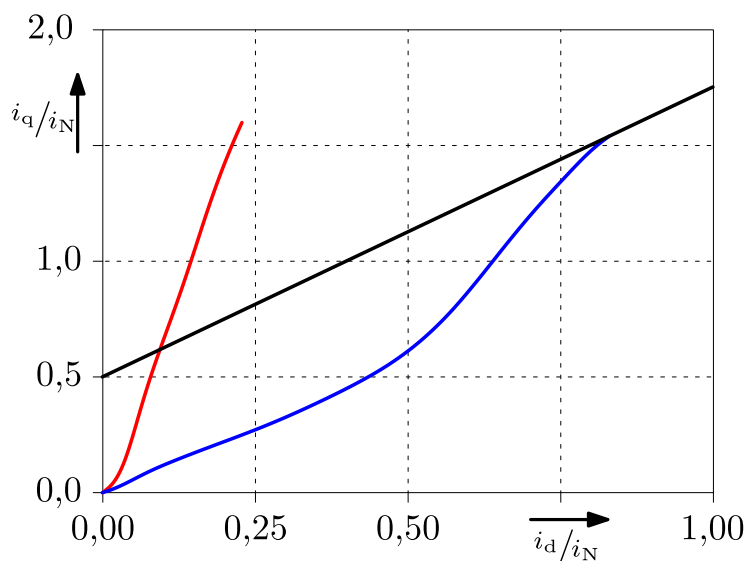


Abb. 5.7: Für die Untersuchungen verwendete Sollstromtrajektorie (RSM2).
 — Sollstromtrajektorie; — MTPA und — MTPF Kennlinie

5.2 Verfahren nach dem Stand der Technik

Unter Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften aus dem vorigen Abschnitt und den Informationen aus Kapitel 3 wird nun ein Verfahren zur drehgeberlosen Regelung der RSM nach dem Stand der Technik zusammengestellt. Um den gesamten Drehzahlbereich von Stillstand bis Nenndrehzahl abdecken zu können wird die Kombination eines Flussmodells mit HF-Injektion derart ausgewählt, dass das Flussmodell im gesamten Drehzahlbereich zur Bestimmung der Rotorstellung verwendet und nur bei kleinen Drehzahlen durch die HF-Injektion gestützt wird (vgl. Abschnitt 3.3.3). Die Auswahl des Flussmodells fällt auf das AFq Verfahren, bei dem der Mindeststrom für den Betrieb mit Drehmoment Null auf der q-Achse eingepreßt wird (vgl. Abschnitt 3.3.1). Negative Drehmomente werden im zweiten Quadranten des Rotorkoordinatensystems realisiert, so dass sich der Arbeitsbereich auf die Quadranten Eins und Zwei erstreckt. Als Strategie zur Motorführung gemäß Abschnitt 3.1.3 empfiehlt sich die Regelung entlang der MTPA Kennlinie. Sie muss aufgrund der Forderung eines Mindeststroms jedoch angepasst werden. Abb. 5.7 zeigt die für die folgenden Untersuchungen verwendete Sollstromtrajektorie. Sie stellt die Begrenzung des Arbeitsbereichs im ersten Quadranten dar. Aus Abschnitt 3.1.1 ist bekannt, dass die MTPF Kennlinie die Stabilitätsgrenze der statorflusorientierten Drehmomentregelung darstellt und im Betrieb mit diesem Regelverfahren nicht überschritten werden darf. Deshalb scheidet dieses Verfahren in Verbindung mit der hier vorgeschlagenen Sollstromtrajektorie aus und das rotororientierte Verfahren

(Abschnitt 3.1.2) wird zur Regelung des Statorstroms ausgewählt.

Mit diesen Festlegungen ergeben sich bezüglich der drehgeberlosen Regelung die folgenden Vorteile:

- Im lastfreien Betrieb (Drehmoment Null), der hier mit einem Stromzeiger auf der q-Achse realisiert wird, ist die magnetische Anisotropie stärker ausgeprägt als im vergleichbaren Arbeitspunkt auf der d-Achse [39]. Damit entsteht bei Winkelfehler ein stärker ausgeprägtes Feedback Signal für die HF-Injektion (vgl. Abschnitt 4.2.3).
- Da sich der Arbeitsbereich über die Quadranten Eins und Zwei des Rotorkoordinatensystems erstreckt, wird der in Abschnitt 4.2.3 beschriebene Arbeitsbereich in der Nähe der d-Achse vermieden, in dem die Hauptachsenrichtung zur q-Achse kippt und die HF-Information unbrauchbar wird.
- Die Hauptachsenrichtung zeigt innerhalb des Arbeitsbereichs einen stetigen, monotonen Verlauf. Dies verhält sich bei Arbeitspunkten Nahe der d-Achse wesentlich ungünstiger (vgl. Abb. 4.15).
- Das Gleiche gilt für die Sekanteninduktivitäten. Deren Variation im Bereich der q-Achse ist wesentlich geringer als bei vergleichbaren Arbeitspunkten auf der d-Achse. Dies wirkt sich positiv auf die Bestimmung der Rotorstellung im lastfreien Betrieb aus (vgl. Abschnitt 5.1.5).

Das Blockschaltbild in Abb. 5.8 veranschaulicht die Funktionsweise des beschriebenen Verfahrens. Die Modellierung der Sekanteninduktivitäten L_d und L_q erfolgt auf Basis der Kennfelder aus Abschnitt 4.2.2 in Abhängigkeit des Stromzeigers in Rotorkoordinaten. Dessen Transformation in Rotorkoordinaten erfolgt mit der Modellrotorstellung [58]. In Anlehnung an das Vorgehen zur Integration der HF-Injektion in [25] erfolgt die Stützung der Integration der inneren Spannung zur Flussverkettung mit dem AFq Zeiger als Referenz, dessen Länge nach Gleichung (3.54) berechnet wird. Bei kleinen Drehzahlen wird die HF-Injektion zur Schätzung des Modellwinkelfehlers verwendet um damit die Modellrotorstellung bei der Transformation des Stromzeigers in geschätzte Rotorkoordinaten zu korrigieren. Um Messrauschen zu minimieren wird der Winkel des AFq Zeigers durch eine PLL gefiltert.

Untersuchungen mit den Testmaschinen RSM1 und RSM2 zeigten die im folgenden Abschnitt beschriebene Problemstellung auf, die durch das im Rahmen der vorliegenden

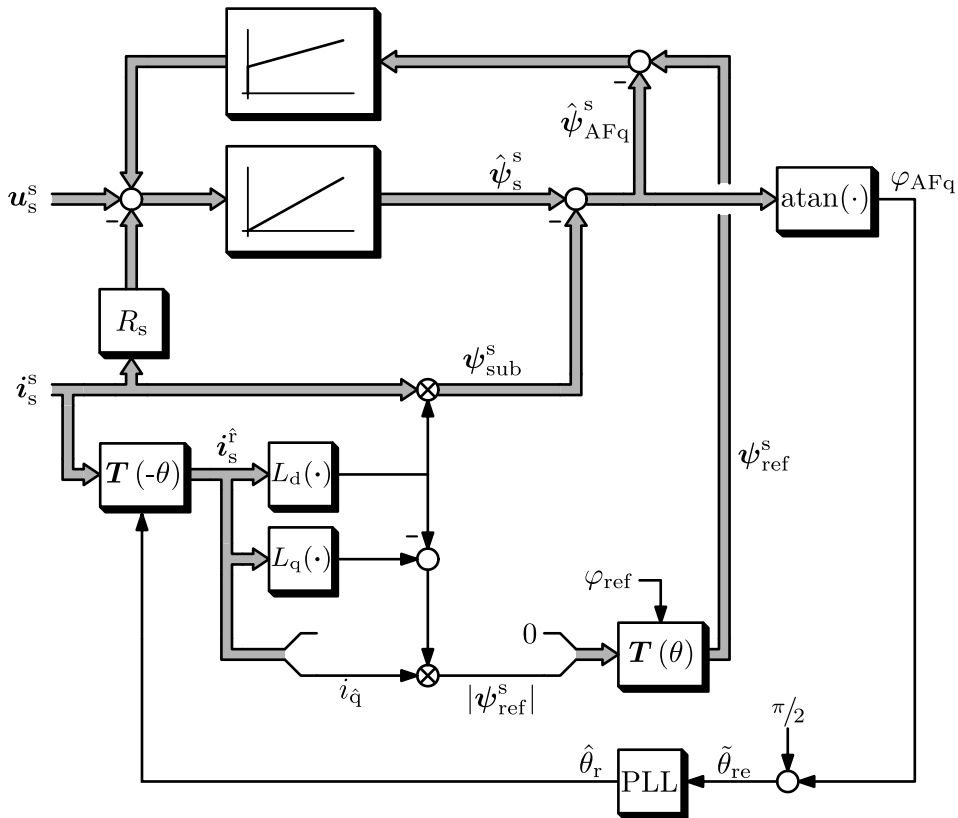


Abb. 5.8: Blockschaltbild des Regelverfahrens nach dem Stand der Technik.

Arbeit entwickelte erweiterte AFq Verfahren gelöst und somit das Verhalten der Maschine im drehgeberlosen Betrieb verbessert wird.

5.3 Einfluss von Winkelfehlern bei Active Flux

Im drehgeberlosen Betrieb wird die Rotorstellung aus dem Winkel des AFq Zeigers und Addition von 90 °el. berechnet. Der AFq Zeiger selbst folgt aus der Subtraktion eines zum Stromzeiger parallelen Flusszeigers von der Statorflussverkettung (Gleichung (3.53)).

$$\psi_{AFq}^s = \psi_s^s - L_d \cdot i_s^s \tag{5.41}$$

Legte man die ideale RSM zu Grunde so wäre die Sekanteninduktivität L_d über dem gesamten Arbeitsbereich konstant. Hier resultiert ein in Rotorkoordinaten drehender Stromzeiger konstanter Länge in einem elliptischen Verlauf der Flussverkettung. Ferner ist die Größe der Ellipse proportional zur Länge des Stromzeigers. Aufgrund der magneti-

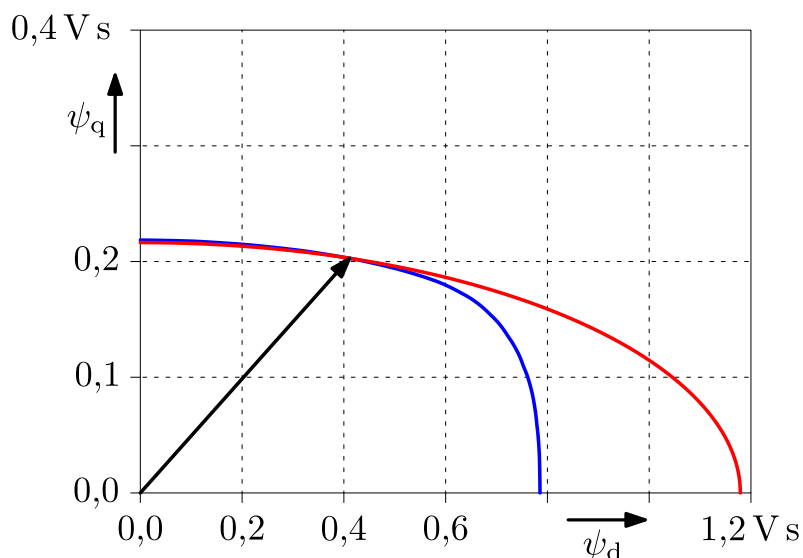


Abb. 5.9: Verlauf der Flussverkettung in Rotorkoordinaten, bei einem durchdrehenden Stromzeiger konstanter Länge (Nennstrom, RSM2).

- Zeiger der Flussverkettung im Arbeitspunkt auf der Sollstromkennlinie
- Verlauf bei der realen Maschine; — Elliptischer Verlauf unter Annahme der Sekanteninduktivität im Arbeitspunkt auf der Sollstromkennlinie

schen Sättigung des Eisenmaterials ist eine derart einfache Modellierung für den Betrieb einer realen RSM jedoch nicht ausreichend. [10, 42] modellieren die Sekanteninduktivität L_q als Kennlinie in Abhängigkeit der Länge des Stromzeigers

$$L_q = L_q(|\mathbf{i}_s^s|) \quad (5.42)$$

und nutzen sie in Verbindung mit dem AF Verfahren. Dieses Vorgehen lässt sich analog auf die Sekanteninduktivität L_d anwenden und mit dem AFq Verfahren verwenden. In diesem Fall ergeben drehende Stromzeiger in Rotorkoordinaten ebenfalls elliptische Verläufe der Flussverkettung, jedoch ist die Größe der Ellipsen nicht mehr proportional zur Länge der Stromzeiger. Sowohl die Verwendung eines konstanten Werts, als auch die Modellierung der Kennlinie in Abhängigkeit der Länge des Stromzeigers haben den Vorteil, dass die Bestimmung der Rotorstellung ausschließlich von den Prozessgrößen Stromzeiger und Statorflussverkettung abhängt.

Die in Kapitel 4 gemessenen Maschinenparameter zeigen im Fall der Testmaschinen RSM1 und RSM2 keine exakt elliptischen Verläufe der Flussverkettung, wenn ein drehender Stromzeiger konstanter Länge in Rotorkoordinaten eingepreßt wird (Abb. 5.9). Trägt man den entsprechenden Verlauf der Sekanteninduktivität über dem Winkel des Strom-

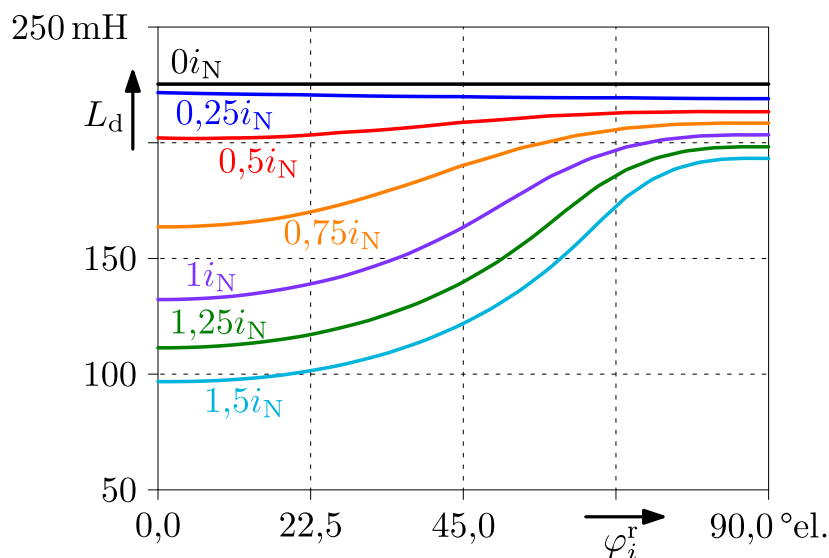


Abb. 5.10: Verläufe der Sekanteninduktivität für verschiedene Längen des Stromzeigers über seinem Winkel in Rotorkoordinaten (RSM2).

zeigers bei der realen Maschine ab, so folgt aus den Messdaten der RSM2 die Abb. 5.10. Um eine genaue Bestimmung der Rotorstellung zu erreichen, wäre die Sekanteninduktivität in Abhängigkeit der Länge und des Winkels des Stromzeigers in Rotorkoordinaten zu modellieren. Während seine Länge in allen Koordinatensystemen gleich ist, wird zur Bestimmung seines Winkels die Modellrotorstellung benötigt [58]. Dieses Vorgehen ermöglicht den Betrieb des Flussmodells über beinahe der gesamten d,q-Ebene⁴. Ein Vorzeichenwechsel des Soll Drehmoments kann so mit maximaler Dynamik ausgeregelt werden, da es diese Modellierung erlaubt die Sollstromtrajektorie zu verlassen. Durch die Verwendung der Modellrotorstellung entsteht jedoch eine Abhängigkeit der Berechnung vom Modellwinkelfehler, die nun genauer untersucht wird.

Die rotororientierte Stromregelung arbeitet in geschätzten Rotorkoordinaten, sodass der Sollstromzeiger in diesem Koordinatensystem eingepreßt wird. Bleibt der Sollwert konstant und es entsteht ein Modellwinkelfehler (beispielsweise durch die Oberwellen des Stators, die hier nicht berücksichtigt werden), bleibt der Stromzeiger in geschätzten Rotorkoordinaten konstant, während er in tatsächlichen Rotorkoordinaten gedreht wird. Darauf reagiert die Maschine mit einer Veränderung der Flussverkettung und damit auch der tatsächlichen Sekanteninduktivität. Die aus dem Modell ermittelte Sekanteninduktivität bleibt aber konstant, da sie ausschließlich vom Stromzeiger in geschätz-

⁴Die einzige Einschränkung sind hier Stromzeiger mit sehr kleiner q-Komponente da hier die Länge des AFq Zeigers nicht mehr für eine aussagekräftige Bestimmung der Rotorstellung ausreicht.

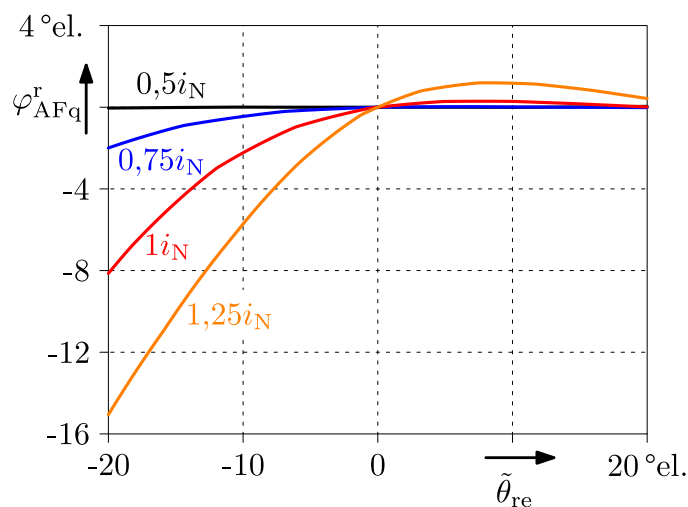


Abb. 5.11: Winkel des AFq Zeigers in Rotorkoordinaten, wenn bei der Berechnung des Flussmodells ein Winkelfehler vorlag, für verschiedene Arbeitspunkte entlang der Sollstromtrajektorie (RSM2)

ten Rotorkoordinaten abhängt. Dadurch wird bei der Berechnung des Flussmodells die falsche Sekanteninduktivität verwendet, was in Konsequenz einen AFq Zeiger ergibt, dessen Richtung ebenfalls verfälscht ist. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 5.11 dargestellt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Abbildung für Sollwerte entlang der Sollstromtrajektorie für beide beschriebenen Modellierungsansätze gleich ist. Lediglich bei einer absichtlichen Abweichung des Sollstroms bei einem Vorzeichenwechsel des Drehmomentsollwerts liefern sie unterschiedliche Ergebnisse. Damit das Flussmodell wieder zur korrekten Rotorstellung zurückfindet ist unbedingt sicherzustellen, dass der Betrag des Winkelfehlers durch die erneute Berechnung des Flussmodells kleiner wird. Ergibt die Prüfung der Maschineneigenschaften, dass es Arbeitspunkte gibt, die diese Anforderung nicht erfüllen, sind diese im Betrieb zu vermeiden. Die Darstellung in Abb. 5.11, die anhand der RSM2 zeigt, wie sich der Winkelfehler bei Berechnung des Flussmodells verändert, wurde auf Basis von Arbeitspunkten entlang der Sollstromtrajektorie in Abb. 5.7 erstellt.

Zusammenfassend wird notiert, dass beide beschriebenen Ansätze zur Modellierung der Sekanteninduktivität

$$L_d = L_d(|\mathbf{i}_s^s|) \quad L_d = L_d(\mathbf{i}_s^r) \quad (5.43)$$

darauf angewiesen sind, dass die geschätzte mit der tatsächlichen Rotorstellung übereinstimmt. Nur dann wird im Betrieb die korrekte Sekanteninduktivität zur Berechnung

des AFq Zeigers verwendet. Sobald ein Modellwinkelfehler vorliegt, liefern beide Ansätze ein verfälschtes Ergebnis. Abb. 5.11 zeigt, dass bei kleinen Modellwinkelfehlern noch ein gutes Ergebnis der Schätzung zu erwarten ist. Dies gilt im Fall der Modellierung in Abhängigkeit des Betrags des Stromzeigers ausschließlich für Arbeitspunkte entlang der zuvor definierten Sollstromtrajektorie und bei Modellierung in Abhängigkeit des Stromzeigers in Rotorkoordinaten für die gesamte dq-Ebene.

5.4 Erweiterung des Active Flux Verfahrens

Um die Bestimmung der Rotorstellung im gesamten Arbeitsbereich zu ermöglichen und dennoch die Abhängigkeit des Verfahrens von der Modellrotorstellung zu vermeiden, wird hier vorgeschlagen, die Modellierung der Sekanteninduktivität über dem Betrag des Stromzeigers um die Abhängigkeit des Betrags des Statorflusszeigers zu erweitern.

$$L_d = L_d(|\mathbf{i}_s^s|, |\boldsymbol{\psi}_s^s|) \quad (5.44)$$

Dies ist die Kernidee des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Verfahrens. Abb. 5.12 zeigt die Zuordnung der Sekanteninduktivität zur Länge des Statorflusszeigers, für unterschiedliche Längen des Stromzeigers. Sie wird in Form einer Tabelle auf dem Frequenzumrichter vorgehalten. Die Rotorstellung wird wie gewohnt aus dem AFq Zeiger bestimmt, der zuvor durch Subtraktion eines Flusszeigers parallel zum gemessenen Stromzeiger von der Statorflussverkettung ermittelt wurde. Der zu subtrahierende Flusszeiger ist das Produkt aus der Sekanteninduktivität L_d und dem gemessenen Stromzeiger in Statorkoordinaten (Gleichung (5.41)). Eine Tabelle stellt die Sekanteninduktivität zur Verfügung, die im Betrieb mittels bilinearer Interpolation aus den Zeigerlängen von Strom und Flussverkettung ermittelt wird. Das angepasste Blockschaltbild (Abb. 5.13) veranschaulicht das Funktionsprinzip.

5.5 Funktionsnachweis

Um die Funktionsfähigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens nachzuweisen wurden verschiedene Messungen durchgeführt, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Untersucht wurden der drehmoment- und drehzahlgeregelte Betrieb der Maschine mit dem erweiterten AFq Verfahren.

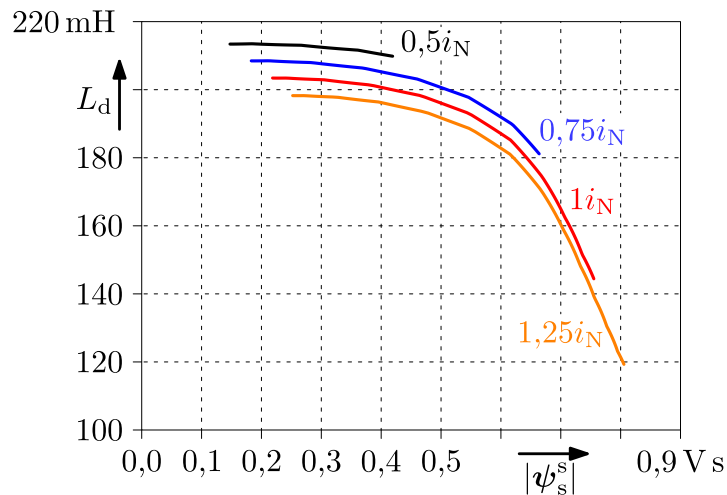


Abb. 5.12: Verlauf der Sekanteninduktivität über dem Betrag des Statorflusszeigers, bei verschiedenen Beträgen des Stromzeigers. Die Kennlinien decken den relevanten Arbeitsbereich (vgl. Abb. 5.7) zuzüglich eines eventuellen Modellwinkel-fehlers von 20° el. ab. Die Abbildung wurde aus den Messdaten der RSM2 erstellt.

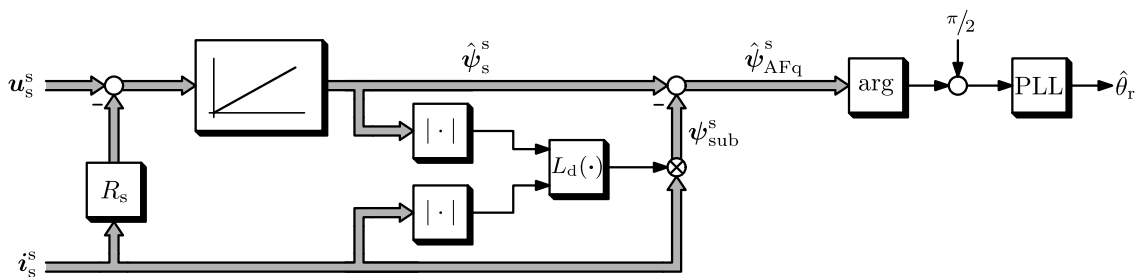


Abb. 5.13: Flussbeobachter mit Rotorstellungsermittlung zum erweiterten AFq Verfahren

Drehmoment geregelter Betrieb

Die Motivation zur modellwinkelunabhängigen Erweiterung des AF Verfahrens ergab sich aus der Anforderung, dass die Rotorstellung im gesamten relevanten Arbeitsbereich beobachtbar ist, ohne dafür die Modellrotorstellung zu benötigen. Dies soll insbesondere auch dann gelten, wenn die Sollstromtrajektorie verlassen wird. Um diese Anforderung abzu prüfen, wurde die RSM2 drehmomentgeregelt bei Nenndrehmoment betrieben und mit einem Vorzeichenwechsel des Drehmomentsollwerts beaufschlagt. Dieser Versuch wurde bei mittlerer (Teilbilder 5.14a und 5.14b) und kleiner Drehzahl (Teilbilder 5.15a und 5.15b) durchgeführt. Ferner wurde der Vorzeichenwechsel auch bei einem kleineren Betrag des Drehmomentsollwerts ($10\%M_N$) untersucht (Teilbilder 5.14c und 5.14d, Teilbilder 5.15c und 5.15d). Die Abbildungen zeigen, dass der resultierende Winkelfehler in allen Fällen kleiner als 10° el. bleibt. Folglich erlaubt das vorgeschlagene Verfahren das Verlassen der Sollstromtrajektorie und ermöglicht auch in diesem Fall die drehgeberlose Bestimmung der Rotorstellung.

Drehzahl geregelter Betrieb

Die Parametrierung des Drehzahlreglers erfolgte analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.1.2 für kritisch gedämpftes Einschwingverhalten. Es zeigt sich, dass eine zu hohe Verstärkung des Drehzahlregelkreises zu Oszillationen der Modellrotorstellung führt. Dieses Verhalten wurde bereits in [38] berichtet⁵. Im vorliegenden Fall wurde eine Verstärkung von 50 s^{-1} erreicht. Mit dieser Einstellung wurde der drehzahlgeregelter Betrieb mit Sollwertrampen (belastet und lastfrei, Abb. 5.16) und Lastsprüngen (Abb. 5.17) untersucht. Es zeigt sich, dass der Modellwinkelfehler bei allen Versuchen kleiner als 8° el. bleibt. Daher kommt es in keinem der gezeigten Fälle zu einer Instabilität der rotororientierten Stromregelung. Die Modellrotorstellung findet nach dem Abschluss des transienten Übergangs, bis auf einen kleinen statischen Fehler, wieder zurück zur tatsächlichen Rotorstellung. Damit ist die Funktionsfähigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens nachgewiesen.

⁵In [38] wurde mit dem dort vorgeschlagenen drehgeberlosen Verfahren ein drehzahlgeregelter Betrieb mit einer Verstärkung von 14 s^{-1} erreicht.

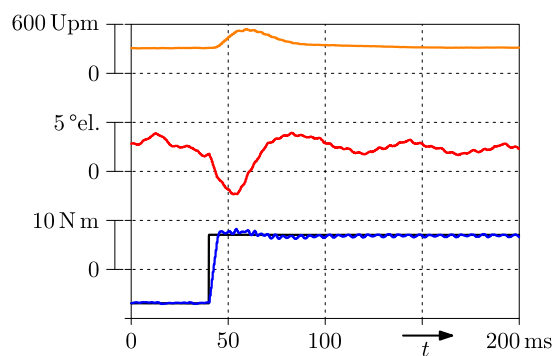
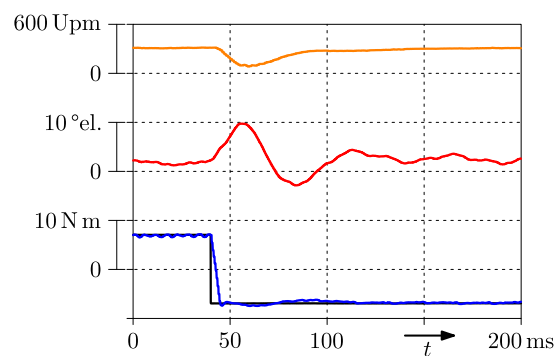
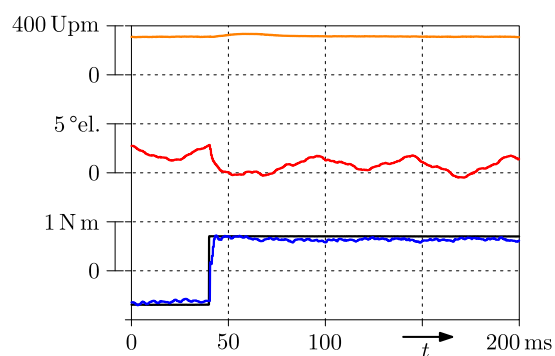
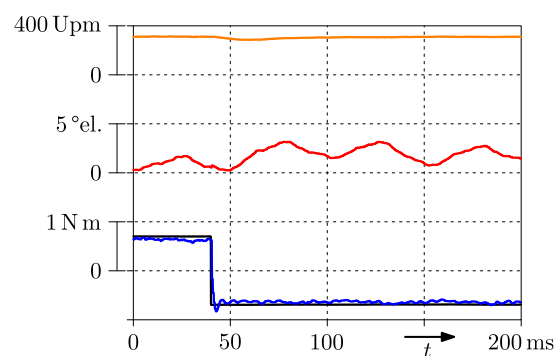
(a) Sollwertsprung: $-M_N \rightarrow M_N$ (b) Sollwertsprung: $M_N \rightarrow -M_N$ (c) Sollwertsprung: $-0,1M_N \rightarrow 0,1M_N$ (d) Sollwertsprung: $0,1M_N \rightarrow -0,1M_N$

Abb. 5.14: Antworten auf Drehmomentsollwertsprünge (RSM2). Drehmoment geregelter Betrieb der Testmaschine ohne HF-Injektion, angetrieben von einer drehzahlgeregelten Lastmaschine (300 Upm).

— Drehmoment Sollwert; — Drehmoment-Istwert;
 — Modellwinkelfehler; — Istdrehzahl mechanisch

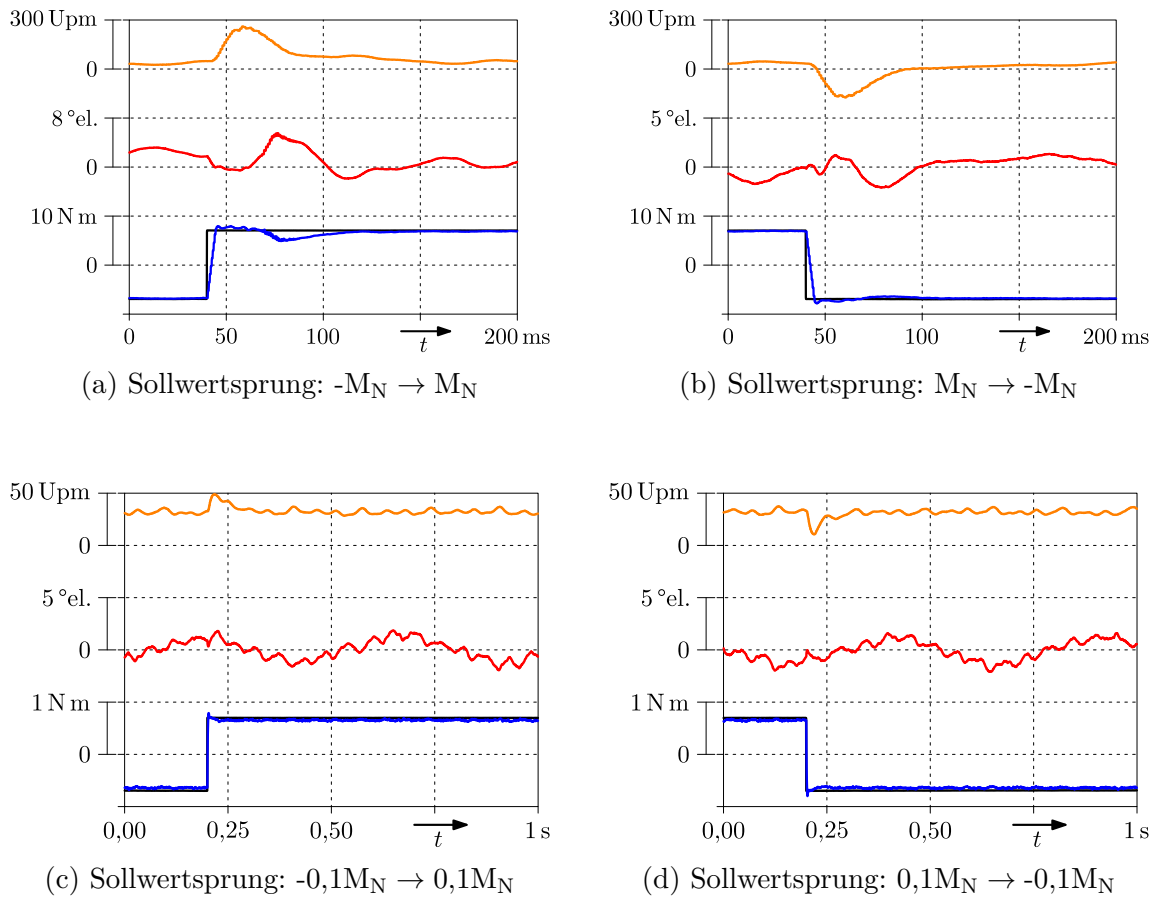
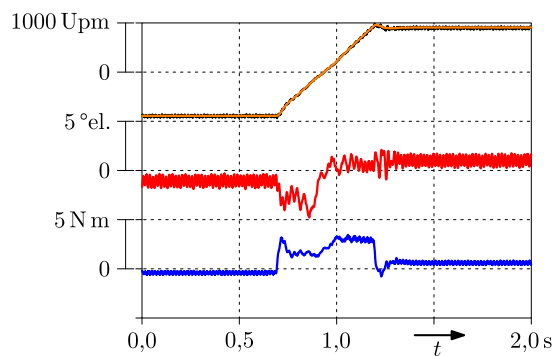
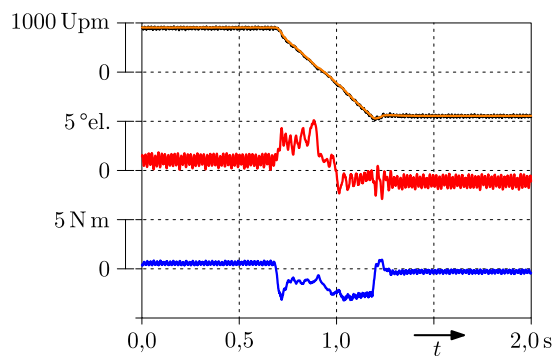


Abb. 5.15: Antworten auf Drehmomentsollwertsprünge (RSM2). Drehmomentgeregelter Betrieb der Testmaschine mit HF-Injektion, angetrieben von einer drehzahlgeregelten Lastmaschine (30 Upm).

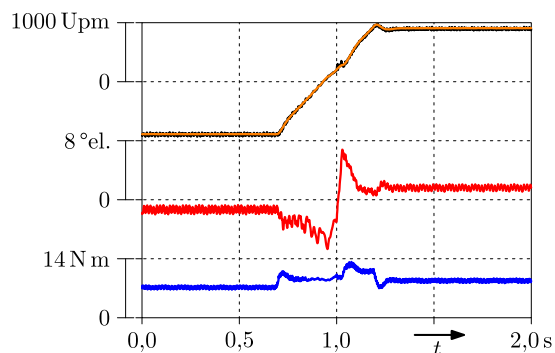
— Drehmoment Sollwert; — Drehmoment-Istwert;
 — Modellwinkelfehler; — Istdrehzahl mechanisch



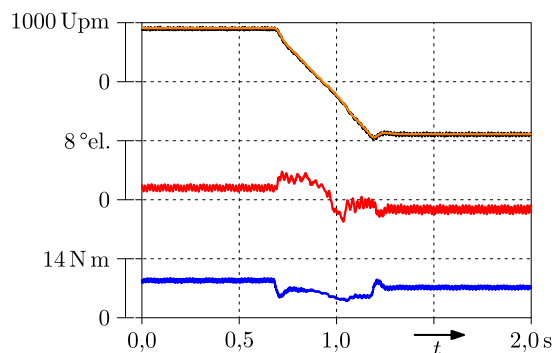
(a) Drehzahlrampe, lastfrei:
-900 Upm \rightarrow 900 Upm



(b) Drehzahlrampe, lastfrei:
900 Upm \rightarrow -900 Upm



(c) Drehzahlrampe bei Nennmoment:
-900 Upm \rightarrow 900 Upm



(d) Drehzahlrampe bei Nennmoment:
900 Upm \rightarrow -900 Upm

Abb. 5.16: Drehzahlrampen lastfrei und unter Last (RSM2). Drehzahl geregelter Betrieb der Testmaschine, Belastung durch eine drehmoment geregelte Lastmaschine.

— Istdrehzahl (geschätzt); — Istdrehzahl (Geber);
— Modellwinkelfehler; — Drehmoment-Istwert

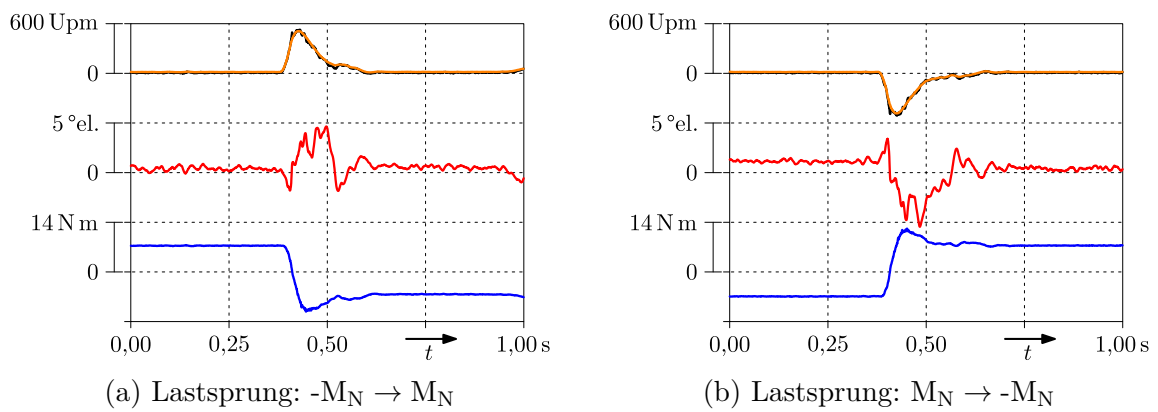


Abb. 5.17: Lastsprünge bei Stillstand (RSM2). Drehzahl geregelter Betrieb der Testmaschine, Belastung durch eine drehmoment geregelte Lastmaschine.

— Istdrehzahl (geschätzt); — Istdrehzahl (Geber);
 — Modellwinkelfehler; — Drehmoment-Istwert

6 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Synchron Reluktanz Maschine (RSM) vor dem Hintergrund des drehgeberlosen Betriebs untersucht. Nach der Erläuterung des Funktionsprinzips (Kapitel 1) wird in Kapitel 2 die Grundlage zur mathematischen Beschreibung des Maschinenverhaltens durch Modellierung geschaffen. Anschließend wird in Kapitel 3 der Stand der Technik beleuchtet. Dies umfasst sowohl die Verfahren und Strategien zur Motorführung mit Drehgeber, als auch drehgeberlose Verfahren zur Bestimmung der Rotorstellung. Ferner werden die Möglichkeiten zur Kombination der beschriebenen Ansätze aufgezeigt. Um die dafür notwendigen Parameter anhand realer Maschinen zu ermitteln, wird in Kapitel 4 ein automatisiertes Messverfahren erläutert. Dessen Ergebnisse werden mit einem quadratisch optimalen Lösungsverfahren ausgewertet um die für diese Maschine charakteristische Zuordnung von Statorstrom zu Statorflussverkettung zu erhalten. Verbleibendes Messrauschen wird durch die Approximation der Kennfelder mit bikubischen Splines verringert, was es außerdem ermöglicht, Funktionswerte zwischen den vermessenen Arbeitspunkten analytisch zu berechnen. Zum Nachweis der Übertragbarkeit werden die Messergebnisse zweier Testmaschinen unterschiedlicher Hersteller, mit abweichenden Leistungsdaten gezeigt. Zur Erarbeitung eines drehgeberlosen Regelverfahrens gemäß den Anforderungen aus Kapitel 1 werden in Kapitel 5 die Erkenntnisse aus der Beleuchtung des Standes der Technik mit den ermittelten Maschineneigenschaften gemeinsam betrachtet. Dies ermöglicht die Ableitung der für diese Maschine im Bezug auf die drehgeberlose Regelung speziellen Eigenschaften. Es zeigt sich, dass der lastfreie Betrieb (Drehmoment Null) bei einem drehgeberlosen Grundwellenverfahren für die RSM optimalerweise mit einem Stromzeiger in q-Richtung zu realisieren ist. Ferner wird klar, dass zur Erreichung der maximalen Dynamik der Drehmomentregelung sicherzustellen ist, dass die Rotorstellung über einen weiten Arbeitsbereich beobachtbar bleibt. Auf Basis dieser Erkenntnisse wird ein drehgeberloses Verfahren aus verschiedenen Ansätzen nach dem Stand der Technik zusammengestellt, das diese Anforderung durch die Verwendung der vergangenen Modellrotorstellung als Schätzwert für die Bestimmung der aktuellen Rotorstellung erfüllt. Dies führt jedoch zu einer Abhängigkeit der Positi-

onsbestimmung von der Genauigkeit des Schätzwerts. Daher wird in Abschnitt 5.4 die Erweiterung eines bekannten, von der Modellrotorstellung unabhängigen Verfahrens vorgeschlagen, was die Bestimmung der Rotorstellung wesentlich verbessert. Damit ist es möglich die Rotorstellung im gesamten, relevanten Arbeitsbereich ohne einen Schätzwert der Modellrotorstellung zu bestimmen. Der besondere Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass die Qualität auch bei transienten Übergängen zwischen Arbeitspunkten nicht durch eventuell auftretende Modellwinkelfehler beeinflusst wird. Den Abschluss bildet der Funktionsnachweis des vorgeschlagenen Verfahrens. Dafür werden die beschriebenen Arbeitspunktänderungen durch Sollwertsprünge im drehmomentgegelten bzw. Sollwerttrampen im drehzahlgeregelten Betrieb herbeigeführt und untersucht. Es zeigt sich, dass das vorgeschlagene Verfahren nach einer kurzzeitigen Auslenkung bei allen beschriebenen Messungen wieder zur tatsächlichen Rotorstellung zurückfindet.

Literaturverzeichnis

- [1] Agarliță, S.-C.; Boldea, I.; Blaabjerg, F.: “High Frequency Injection Assisted “Active Flux” Based Sensorless Vector Control of Reluctance Synchronous Motors, with Experiments from zero speed,” in: *Proc. 2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Phoenix, 2011, pp. 2725–2732
- [2] Amiri-Simkooei, A.; et al.: “Least squares 2D bi-cubic spline approximation: Theory and applications,” in: *Measurement*, vol. 127, June 2018, pp. 366–378, DOI: 10.1016/j.measurement.2018.06.005
- [3] Andreescu, G.-D.; et al.: “Combined Flux Observer With Signal Injection Enhancement for Wide Speed Range Sensorless Direct Torque Control of IPMSM Drives,” in: *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 23, iss. 2, 2008, pp. 393–402
- [4] Barnard, F. J. W.; Villet, W. T.; Kamper, M. J.: “Hybrid Active-Flux and Arbitrary Injection Position Sensorless Control of Reluctance Synchronous Machines,” in: *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 51, no. 5, 2015, pp. 3899–3906
- [5] Bojoi, R. I.; et al.: “Sensorless Control of PM Motor Drives - a Technology Status Review,” in: *2013 IEEE Workshop on Electrical Machines Design, Control and Diagnosis*, Paris, 2013
- [6] Boldea, I.: *Reluctance Synchronous Machines and Drives*, Oxford: Clarendon Press, 1996
- [7] Boldea, I.; Agarliță, S.-C.: “The Active Flux Concept for Motion-Sensorless Unified AC Drives: a Review,” in: *International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics and Electromotion, Joint Conference*, Istanbul, Sept. 2011
- [8] Boldea, I.; Andreescu, G.-D.; Blaabjerg, F.: “Active Flux DTFC-SVM Sensorless Control of IPMSM,” in: *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 24, iss. 2, 2009, pp. 314–322
- [9] Boldea, I.; Nasar, S. A.: *Vector Control of AC Drives*, 1. Aufl., Boca Raton: CRC Press, 1992

- [10] Boldea, I.; Paicu, M. C.; Andreescu, G.-D.: “Active Flux Concept for Motion-Sensorless Unified AC Drives,” in: *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 23, no. 5, 2008, pp. 2612–2618
- [11] Boldea, I.; Tutelea, L.: *Reluctance Electric Machines: Design and Control*, Boca Raton: CRC Press, 2018
- [12] Bugsch, M.; Held, A.; Piepenbreier, B.: “Sensorless control of SynRMs using an adaptive 2DoF current control including a comparison of two alternating HF signal injection-based methods,” in: *Proc. 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, Florence, 2016, pp. 2910–2916
- [13] Chen, Z.; et al.: “An Extended Electromotive Force Model for Sensorless Control of Interior Permanent-Magnet Synchronous Motors,” in: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 50, no. 2, 2003, pp. 288–295
- [14] Cordier, J.; Landsmann, P.; Kennel, R.: “The influence of magnetic hysteresis on HF injection based inductance calculation,” in: *Proc. 2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Phoenix, 2011
- [15] DIN EN 60034-30-1:2014-12: *Drehende elektrische Maschinen - Teil 30-1: Wirkungsgrad-Klassifizierung von netzgespeisten Drehstrommotoren (IE-Code) (IEC 60034-30-1:2014)*—*Deutsche Fassung EN 60034-30-1:2014*, Berlin: Beuth Verlag, 2014
- [16] Föllinger, O.: *Lineare Abtastsysteme*, 5. Aufl., München: R. Oldenbourg Verlag GmbH, 1993, ISBN: 3-486-22725-4
- [17] Föllinger, O.; Dörrscheidt, F.; Klittich, M.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*, 8. Aufl., Heidelberg: Hüthig, 1994, ISBN: 3-7785-2336-8
- [18] Gamba, M.; et al.: “Synchronous reluctance motor with concentrated windings for IE4 efficiency,” in: *2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Cincinnati, Oct. 2017
- [19] Gemaßmer, T.: „Effiziente und dynamische Drehmomenteinprägung in hoch ausgenutzten Synchronmaschinen mit eingebetteten Magneten“, Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie, 2015
- [20] Germishuizen, J.; et al.: “Performance comparison of reluctance synchronous and induction traction drives for electrical multiple units,” in: *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference*, vol. 1, Rome, Oct. 2000, pp. 316–323

-
- [21] Guglielmi, P.; Pastorelli, M.; Vagati, A.: “Impact of Cross-Saturation in Sensorless Control of Transverse-Laminated Synchronous Reluctance Motors,” in: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, 2006, pp. 429–439
- [22] Hackl, C.; et al.: “Analytical computation of the optimal reference currents for MTPC/MTPA, MTPV and MTPF operation of anisotropic synchronous machines considering stator resistance and mutual inductance,” in: *Proc. European Conference on Power Electronics and Applications*, Warschau, 2017
- [23] Hackl, C.; et al.: “Current control of reluctance synchronous machines with online adjustment of the controller parameters,” in: *Proc. IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Santa Clara, 2016, pp. 153–160
- [24] Hammel, W.; Kennel, R.: “High-Resolution Sensorless Position Estimation using Delta-Sigma-Modulated Current Measurement,” in: *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Phoenix, 2011, pp. 2717–2724
- [25] Hammel, W.; Kennel, R.: “Integration of Alternating Carrier Injection in Position Sensorless Control Without any Filtering,” in: *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, San Jose, 2009, pp. 3830–3836
- [26] Hammel, W.; Landsmann, P.; Kennel, R.: „Operating Point Dependent Anisotropies and Assessment for Position-Sensorless Control“, in: *Proc. European Conference on Power Electronics and Applications*, Karlsruhe, 2016
- [27] Hammel, W.; Schuster, T.: „Antrieb, umfassend einen Elektromotor, der von einem Umrichter gespeist ist, und Verfahren zur Regelung des Motorstromes bei einem von einem Umrichter gespeisten Elektromotor“, Patent DE 102006035891, 31. Juli 2006
- [28] Hammel, W.; Wolf, H.: „Verfahren zur drehgeberlosen Rotorlagebestimmung einer Drehfeldmaschine und Vorrichtung zur drehgeberlosen Regelung eines Drehstrommotors“, Patent DE 102015217986 A1, 22. Dez. 2017
- [29] Hofer, M.; Nikowitz, M.; Schrödl, M.: “Comparative analysis of salient pole and flux barrier rotor for synchronous reluctance machines including flux weakening range,” in: *The Journal of Engineering*, vol. 2019, iss. 17, 2019, pp. 4055–4059
- [30] Hofer, M.; Nikowitz, M.; Schrödl, M.: “Sensorless Control of a Reluctance Synchronous Machine in the Whole Speed Range Without Voltage Pulse Injections,” in: *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Kaohsiung, 2017, pp. 1194–1198

- [31] Hofmann, H. F.; Sanders, S. R.; EL-Antably, A.: “Stator-Flux-Oriented Vector Control of Synchronous Reluctance Machines With Maximized Efficiency,” in: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, iss. 5, 2004, pp. 1066–1072
- [32] IEC TS 60034-30-2:2016: *Rotating electrical machines - Part 30-2: Efficiency classes of variable speed AC motors (IE-code)*, Geneva: International Electrotechnical Commission (IEC), 2016
- [33] Isermann, R.; Münchhof, M.: *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*, 1. Aufl., Berlin: Springer-Verlag, 2011, ISBN: 978-3-540-78878-2
- [34] Kim, S.; Sul, S.-K.: “High performance position sensorless control using rotating voltage signal injection in IPMSM,” in: *Proc. of the 2011 14th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, Birmingham, 2011, pp. 1–10
- [35] Kock, H. W. de: “Position Sensorless and Optimal Torque Control of Reluctance and Permanent Magnet Synchronous Machines,” PhD dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University, 2009
- [36] Koonlaboon, S.; Sangwongwanich, S.: “Sensorless Control of Interior Permanent-Magnet Synchronous Motors Based on A Fictitious Permanent-Magnet Flux Model,” in: *Proc. IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, Hong Kong, 2005, pp. 311–318
- [37] Kovács, K. P.; Rácz, I.: *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen Band 1*, 1. Aufl., Budapest: Verlag der ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1959
- [38] Landsmann, P.: “Sensorless Control of Synchronous Machines by Linear Approximation of Oversampled Current,” PhD dissertation, München: Technische Universität, 2014
- [39] Landsmann, P.; et al.: “Fundamental Saliency based Encoderless Control for Reluctance Synchronous Machines,” in: *Proc. International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Rome, Sept. 2010, pp. 1–7
- [40] Merziger, G.; u. a.: *Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik*, 4. Aufl., Springe: Binomi Verlag, 2004, ISBN: 3-923923-35-X
- [41] Paicu, M. C.; et al.: “Very low speed performance of active flux based sensorless control: interior permanent magnet synchronous motor vector control versus direct torque and flux control,” in: *IET Electric Power Applications*, vol. 3, iss. 6, 2009, pp. 551–561

- [42] Paicu, M. C.; et al.: “Wide Speed Range Sensorless Control of PM-RSM Via “Active Flux Model”,” in: *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, San Jose, 2009, pp. 3822–3829
- [43] Pellegrino, G.; Armando, E.; Guglielmi, P.: “Direct Flux Field-Oriented Control of IPM Drives With Variable DC Link in the Field-Weakening Region,” in: *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 45, iss. 5, 2009, pp. 1619–1627
- [44] Pellegrino, G.; Armando, E.; Guglielmi, P.: “Direct-flux field-oriented control of IPM motor drives with robust exploitation of the Maximum Torque per Voltage speed range,” in: *Proc. 2010 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Bari, 2010
- [45] Pellegrino, G.; Bojoi, R. I.; Guglielmi, P.: “Unified Direct-Flux Vector Control for AC Motor Drives,” in: *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 47, iss. 5, 2011, pp. 2093–2102
- [46] Raca, D.; et al.: “A Comparative Analysis of Pulsating vs. Rotating Vector Carrier Signal Injection-Based Sensorless Control,” in: *Proc. Applied Power Electronics Conference (APEC)*, Austin, 2008
- [47] Schröder, D.: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*, 3. Aufl., Berlin: Springer-Verlag, 2009
- [48] Schröder, D.; Kennel, R.: *Elektrische Antriebe - Grundlagen*, 7. Aufl., Berlin: Springer-Verlag, 2021
- [49] Schrödl, M.: *Sensorless Control of AC Machines*, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 21 Nr. 117, Düsseldorf: VDI Verlag, 1992
- [50] Strahan, R. J.: “Energy Conversion by Permanent Magnet Machines and Novel Development of the Single Phase Synchronous Permanent Magnet Motor,” PhD dissertation, Christchurch: University of Canterbury, 1998
- [51] Vas, P.: *Electrical Machines and Drives - A Space-Vector Theory Approach*, Oxford: Clarendon Press, 1992
- [52] Vas, P.: *Vector Control of AC Machines*, Oxford: Clarendon Press, 1990
- [53] Villet, W. T.; et al.: “Hybrid Position Sensorless Vector Control of a Reluctance Synchronous Machine through the Entire Speed Range,” in: *Proc. 2012 15th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC)*, 2012

-
- [54] Wang, G.; et al.: “Initial Rotor Position Estimation for Sensorless Interior PMSM with Signal Injection,” in: *Proc. International Power Electronics Conference (IPEC)*, Sapporo, 2010, pp. 2748–2752
- [55] Weigel, J.: „Modellbildung und parameteradaptive hochdynamische Regelung eines permanenterregten Synchronlinearmotors“, Dissertation, Universität Darmstadt, 2004
- [56] Wiedemann, S.; Dziechciarz, A.: “Comparative evaluation of DTC strategies for the Synchronous Reluctance Machine,” in: *Tenth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*, Monte Carlo, Apr. 2015
- [57] Wiedemann, S.; et al.: “Dynamic Testing Characterization of a Synchronous Reluctance Machine,” in: *Eleventh International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*, Monte Carlo, Apr. 2016, pp. 1–7
- [58] Yousefi-Talouki, A.; et al.: “Combined Active Flux and High-Frequency Injection Methods for Sensorless Direct-Flux Vector Control of Synchronous Reluctance Machines,” in: *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 33, no. 3, 2018, pp. 2447–2457

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|--------|---|
| AF | Active Flux. Verfahren zur Bestimmung des Active Flux Zeigers, der immer in d-Richtung zeigt. |
| AFq | Active Flux in q-Richtung. Abwandlung des Active Flux Modells, bei dem der Active Flux Zeiger immer in negative q-Richtung zeigt. |
| ALA | Axial laminierte Anisotropie. Eine Rotorbauform der Synchron Reluktanz Maschine |
| ASM | Asynchronmaschine |
| EEMK | Erweiterte Elektromotorische Kraft. Erweiterung der EMK zur Bestimmung der Rotorstellung bei Maschinen mit magnetischer Anisotropie. Freie Übersetzung des englischen Begriffs Extended Electromotive Force |
| EMK | Elektromotorische Kraft. Durch die Rotation des Flusszeigers bei Drehung der Maschine induzierte Spannung. |
| INFORM | Indirect Flux Detection by Online Reactance Measurement. Verfahren zur Bestimmung der Rotorstellung bei Stillstand der Maschine, basierend auf Spannungspulsen [49]. |
| IPM | Interior Permanent Magnet. Synchronmaschine mit vergrabenen Permanentmagneten. |
| MTPA | Maximum Torque Per Ampere. Regelstrategie, die ein vorgegebenes Drehmoment mit dem kleinstmöglichen Stromzeiger realisiert. |
| MTPF | Maximum Torque Per Flux. Regelstrategie, die ein vorgegebenes Drehmoment mit dem kleinstmöglichen Flusszeiger realisiert. |
| MTPV | Maximum Torque Per Voltage. Regelstrategie, die ein vorgegebenes Drehmoment mit der kleinstmöglichen Spannung realisiert. |
| PLL | Phasenregelschleife (aus dem Englischen: Phase Locked Loop) |
| PMRSM | Permanentmagneterregte Synchron Reluktanz Maschine (aus dem Englischen: Permanent Magnet Reluctance Synchronous Machine) |
| PMSM | Permanentmagneterregte Synchronmaschine |
| PWM | Pulsweitenmodulation |
| RMS | Effektivwert |
| RSM | Synchron Reluktanz Maschine (aus dem Englischen: Reluctance Synchronous Machine) |

RZM Raumzeigermodulation

SPS Speicherprogrammierbare Steuerung

Symbolverzeichnis

| | |
|------------------|--|
| $\mathbf{0}_2$ | 2x2 Nullmatrix |
| α_{i0} | Anisotropie Hauptachsenrichtung in Statorkoordinaten |
| α_{i0r} | Anisotropie Hauptachsenrichtung in Rotorkoordinaten |
| α_r | Winkelbeschleunigung |
| \mathbf{A} | Systemmatrix |
| \mathbf{B} | Matrix der Übergangsbedingungen zur Approximation von bikubischen Spline Polynomen, Eingangsmatrix (Zustandsraumdarstellung) |
| c | Koeffizient eines Spline-Polynoms |
| \mathbf{C} | Koeffizientenmatrix eines Spline-Polynoms, Ausgangsmatrix (Zustandsraumdarstellung) |
| \mathbf{c} | Koeffizientenvektor eines Spline-Polynoms, ergibt sich aus der eindimensionalen Anordnung der Koeffizientenmatrix \mathbf{C} |
| δ | Winkel des Statorflusszeigers (statorflussorientierte Regelung) |
| \mathbf{D} | Drehmatrix zum Drehen in mathematisch positiver Richtung $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, Durchgangsmatrix (Zustandsraumdarstellung) |
| e | eulersche Zahl |
| \mathbf{E} | Rückkopplungsmatrix (Zustandsraumdarstellung) |
| \mathbf{e} | Vektor der Eingangssignale in Zustandsraumdarstellung |
| e_{EMK} | Erweiterte Elektromotorische Kraft (aus dem Englischen: Extended Electromotive Force (EEMF)) |
| \mathbf{I}_2 | 2x2 Einheitsmatrix |
| ε | Fehlersignal bei der rotierenden Injektion (abhängig von der Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Hauptachsenrichtung) |
| i | Strom |
| \mathbf{i} | Stromzeiger |
| J | Trägheitsmoment |

| | |
|-----------------------------|---|
| J | Drehmatrix um 90° in mathematisch positiver Richtung $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| k | Nummer des verwendeten Abtastschritts in Differenzgleichungen |
| K_I | Verstärkung des I-Anteils eines Reglers |
| K_I | Matrix der Verstärkungen der I-Anteile eines Reglers mit mehreren Komponenten |
| k | Vektor mit Spline Knoten |
| K_P | Proportionalverstärkung eines Reglers |
| K_P | Matrix der Proportionalverstärkungen eines Reglers mit mehreren Komponenten |
| L | Sekanteninduktivität |
| l | differentielle Induktivität |
| L | Matrix der Sekanteninduktivitäten |
| l | Matrix der differentiellen Induktivitäten |
| M | Drehmoment |
| ω | Winkelgeschwindigkeit |
| Ω | mechanische Winkelgeschwindigkeit des Rotors |
| ω_r | elektrische Winkelgeschwindigkeit des Rotors |
| p_{el} | elektrische Leistung |
| φ_c | Winkel des Injektionsspannungszeigers |
| φ_i | Winkel des Stromzeigers |
| φ_u | Winkel des Spannungszeigers |
| p_{mech} | mechanische Leistung |
| Z_p | Polpaarzahl |
| ψ | Flussverkettung (Skalar) |
| ψ | Flussverkettung (Zeiger) |
| R | elektrischer Widerstand |
| R | elektrische Widerstandsmatrix |
| s_{ref} | Referenzsignal (Zeiger) für die Demodulation des rotierenden Trägerstroms |
| M_{Sys} | Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems |
| T | Periodendauer |
| t | Zeit |
| T_{3ss} | Matrix zur Transformation vom 3-phasigen in das kartesische statorfeste Koordinatensystem |
| T_a | Abtastzeit |
| Θ | magnetische Durchflutung |
| θ_r | Rotorstellung |

| | |
|-----------------------|--|
| $\hat{\theta}_r$ | Modellwinkel (Schätzwert der Rotorstellung) |
| $\tilde{\theta}_{re}$ | Modellwinkelfehler (Abweichung zwischen geschätzter und tatsächlicher Rotorstellung) |
| \mathbf{T}_{hs} | Matrix zur Transformation vom Hauptachsenkoordinatensystem der Anisotropieellipse in das kartesische statorfeste Koordinatensystem |
| \mathbf{t} | Parametervektor eines Spline-Polynoms |
| \mathbf{T}_{rs} | Matrix zur Transformation vom rotorfesten in das kartesische statorfeste Koordinatensystem |
| \mathbf{T}_{s3s} | Matrix zur Transformation vom kartesischen in das 3-phasige statorfeste Koordinatensystem |
| \mathbf{T}_{sh} | Matrix zur Transformation vom kartesischen statorfesten in das Hauptachsenkoordinatensystem der Anisotropieellipse |
| \mathbf{T}_{sr} | Matrix zur Transformation vom kartesischen statorfesten in das rotorfeste Koordinatensystem |
| u | Spannung |
| \mathbf{u} | Spannungszeiger |
| W | physikalische Arbeit, Energie |
| x | Stelle auf der x-Achse (Approximation der Flusskennfelder), Zustandsgröße (Zustandsraumdarstellung) |
| \mathbf{x} | Vektor mit Stellen auf der x-Achse (Approximation der Flusskennfelder), Vektor mit Zustandsgrößen (Zustandsraumdarstellung) |
| Y | Admittanz |
| y | Stelle auf der y-Achse |
| \mathbf{y} | Vektor mit Stellen auf der y-Achse |
| \mathbf{Y} | Admittanzmatrix |
| \mathbf{z} | Vektor mit Funktionswerten |

A Anhang

A.1 Transformation der Spannungsgleichung ins Rotorkoordinatensystem

Die Transformation der Spannungsgleichung in Statorkoordinaten (2.31)

$$\mathbf{u}_s^s = \mathbf{R}_s^s \cdot \mathbf{i}_s^s + \mathbf{l}_s^s \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + \omega_r \cdot \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \theta_r} \quad (\text{A.1})$$

in das Rotorkoordinatensystem erfolgt mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{rs} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Zur Transformation werden Spannung, Strom und Flussverkettung jeweils durch ihr transformiertes Äquivalent in Rotorkoordinaten ersetzt.

$$\mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{u}_s^r = \mathbf{R}_s^s \cdot \mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r + \mathbf{l}_s^s \cdot \frac{d(\mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r)}{dt} + \omega_r \cdot \frac{\partial (\mathbf{T}_{rs} \cdot \psi_s^r)}{\partial \theta_r}. \quad (\text{A.3})$$

Auflösen nach \mathbf{u}_s^r ergibt

$$\mathbf{u}_s^r = \underbrace{\mathbf{T}_{sr} \cdot \mathbf{R}_s^s \cdot \mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r}_{\mathbf{u}_1} + \underbrace{\mathbf{T}_{sr} \cdot \mathbf{l}_s^s \cdot \frac{d(\mathbf{T}_{rs} \cdot \mathbf{i}_s^r)}{dt}}_{\mathbf{u}_2} + \underbrace{\mathbf{T}_{sr} \cdot \omega_r \cdot \frac{\partial (\mathbf{T}_{rs} \cdot \psi_s^r)}{\partial \theta_r}}_{\mathbf{u}_3}. \quad (\text{A.4})$$

Zur übersichtlichen Vereinfachung der Gleichung werden die nächsten Schritte auf die einzelnen Summanden \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 und \mathbf{u}_3 aufgeteilt. Es wird angenommen, dass alle drei Wicklungen der Maschine den selben ohmschen Widerstand haben, daher gilt

$$\mathbf{R}_s^s = R_s \cdot \mathbf{I}_2 \quad (\text{A.5})$$

und damit

$$\mathbf{u}_1 = R_s \cdot \mathbf{i}_s^r. \quad (\text{A.6})$$

Die Berechnung des Differentials in \mathbf{u}_2 erfordert die Anwendung der Produktregel.

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{T}_{sr} \cdot \mathbf{l}_s^s \cdot \left(\frac{d\mathbf{T}_{rs}}{dt} \cdot \mathbf{i}_s^r + \mathbf{T}_{rs} \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^r}{dt} \right) \quad (\text{A.7})$$

Darin ist das Differential der Transformationsmatrix nach der Zeit

$$\frac{d\mathbf{T}_{rs}}{dt} = \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}_{rs} = \mathbf{T}_{rs} \cdot \omega_r \cdot \mathbf{J} \quad (\text{A.8})$$

und somit folgt \mathbf{u}_2 zu

$$\mathbf{u}_2 = \omega_r \cdot \mathbf{l}_s^r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_s^r + \mathbf{l}_s^r \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^r}{dt}. \quad (\text{A.9})$$

Für die Berechnung des Differentials in \mathbf{u}_3 , gilt es zunächst ein besonderes Augenmerk auf die in Gleichung (2.28) entstandenen partiellen Differentiale der Flussverkettung zu legen. Diese wurden unter der Voraussetzung gebildet, dass alle Parameter nach denen gerade nicht differenziert wird, konstant gehalten werden. Zusammen sind sie Teil des totalen Differentials der Flussverkettung in Statorkoordinaten nach der Zeit

$$\frac{d\psi_s^s}{dt} = \left. \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \mathbf{i}_s^s} \right|_{\theta_r = \text{const}} \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + \omega_r \cdot \left. \frac{\partial \psi_s^s}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}_s^s = \text{const}}. \quad (\text{A.10})$$

Demgemäß ist das partielle Differential der Flussverkettung in Statorkoordinaten nach der Rotorstellung, das in \mathbf{u}_3 bereits durch sein transformiertes Äquivalent in Rotorkoordinaten ersetzt wurde, unter der Voraussetzung eines in Statorkoordinaten konstanten Stromzeigers zu berechnen. Bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Produktregel bedeutet das für \mathbf{u}_3

$$\mathbf{u}_3 = \omega_r \cdot \mathbf{T}_{sr} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{rs}}{\partial \theta_r} \cdot \psi_s^r + \mathbf{T}_{rs} \cdot \left. \frac{\partial \psi_s^r}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}_s^s = \text{const}} \right). \quad (\text{A.11})$$

Da die Transformationsmatrix ausschließlich von der Rotorstellung abhängt, hat die Voraussetzung eines konstanten Stromzeigers in Statorkoordinaten auf die Berechnung ihres Differentials keine Auswirkung. Somit gilt

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{rs}}{\partial \theta_r} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}_{rs}. \quad (\text{A.12})$$

Die Berechnung des Differentials der Flussverkettung nach der Rotorstellung, unter Berücksichtigung der beschriebenen Vorgabe, gestaltet sich ungleich komplizierter. Als Vorarbeit dazu wird zunächst das Differential der Flussverkettung in Rotorkoordinaten nach der Rotorstellung betrachtet. Die Flussverkettung ist, unabhängig vom zu Grunde gelegten Koordinatensystem, eine Funktion von Stromzeiger und Rotorstellung. Daher ist die Ableitung der Flussverkettung in Rotorkoordinaten ganz allgemein wie folgt zu berechnen.

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{d\theta_r} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \mathbf{i}_s^r} \right|_{\theta_r = \text{const}} \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^r}{d\theta_r} + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}_s^r = \text{const}} \quad (\text{A.13})$$

Darin ist die Änderung des Stromzeigers in Rotorkoordinaten bei Änderung der Rotorstellung, jedoch unter Berücksichtigung des konstant gehaltenen Stromzeigers in Statorkoordinaten

$$\left. \frac{d\mathbf{i}_s^r}{d\theta_r} \right|_{\mathbf{i}_s^s = \text{const}} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_s^r \quad (\text{A.14})$$

Wird Gleichung (A.14) in (A.13) berücksichtigt kann sie in \mathbf{u}_3 eingesetzt werden. Setzt man im gleichen Schritt die Gleichung (A.12) ein, folgt

$$\mathbf{u}_3 = \omega_r \cdot \mathbf{T}_{sr} \cdot \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{T}_{rs} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \mathbf{T}_{rs} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \mathbf{i}_s^r} \cdot (-\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_s^r) + \mathbf{T}_{rs} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \theta_r} \right). \quad (\text{A.15})$$

Abschließend wird die Gleichung noch Ausmultipliziert.

$$\mathbf{u}_3 = \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r - \omega_r \cdot \mathbf{l}_s^r \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \theta_r} \quad (\text{A.16})$$

Führt man nun die drei Summanden wieder zusammen, folgt der Spannungszeiger in Rotorkoordinaten zunächst zu

$$\mathbf{u}_s^r = R_s \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \mathbf{l}_s^r \cdot \frac{d\mathbf{i}_s^r}{dt} + \omega_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_s^r}{\partial \theta_r}, \quad (\text{A.17})$$

was mit Hilfe des totalen Differentials der Flussverkettung in Rotorkoordinaten (A.13) zur Spannungsgleichung zusammengefasst werden kann.

$$\mathbf{u}_s^r = R_s \cdot \mathbf{i}_s^r + \omega_r \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi}_s^r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^r}{dt} \quad (\text{A.18})$$

A.2 Ellipsenparameter in unterschiedlichen Koordinatensystemen

Eine Ellipse kann nach [40] durch die Parametergleichung

$$\mathbf{x}_1^h(t) = \begin{pmatrix} l_f \cdot \cos(t) \\ l_g \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

beschrieben werden. In dieser Darstellung zeigen ihre Hauptachsen in Richtung der Basisachsen des verwendeten Koordinatensystems. Es wird daher als Hauptachsenkoordinatensystem bezeichnet. Um dies zu Kennzeichnen wird ein hochgestelltes kleines h (entsprechend Tabelle 2.1) verwendet. Gleichung (A.19) kann aufgeteilt werden in das Produkt

$$\mathbf{x}_1^h(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} l_f & 0 \\ 0 & l_g \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^h} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1^h}. \quad (\text{A.20})$$

Darin sind l_f und l_g die Längen der entsprechenden Halbachsen gemäß Abb. A.1. Folglich

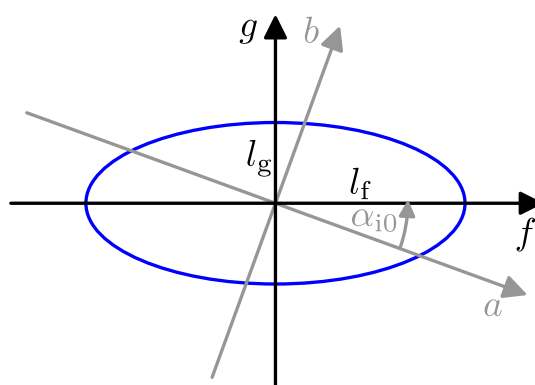


Abb. A.1: Ellipse in Hauptachsenkoordinaten

ist die Ellipse die Abbildung des umlaufenden Vektors \mathbf{b}_1 in Hauptachsenkoordinaten über die Matrix \mathbf{A}^h , wobei der Parameter t den Winkel zwischen der f-Achse und dem Vektor \mathbf{b}_1^h beschreibt. Ferner hat der Vektor \mathbf{b}_1^h in dieser Darstellung die Länge eins. Eine von eins verschiedene Länge von \mathbf{b}_1^h führt zu einer Skalierung der Halbachsen und damit

auch zu einer Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) der Abbildung.

$$\mathbf{x}_2^h(t) = \begin{pmatrix} l_f & 0 \\ 0 & l_g \end{pmatrix} \cdot \underbrace{|\mathbf{b}^h|}_{\mathbf{b}^h} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{b}^h| \cdot l_f & 0 \\ 0 & |\mathbf{b}^h| \cdot l_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Diese Abbildung kann ebenso aus der Sicht eines anderen Koordinatensystems beschrieben werden. Dazu ersetzt man die Vektoren $\mathbf{x}_2^h(t)$ und \mathbf{b}^h jeweils durch die entsprechenden transformierten Größen des zweiten Koordinatensystems. In diesem Beispiel wird dafür das a,b-Koordinatensystem verwendet. Mit

$$\mathbf{x}_2^h(t) = \mathbf{T}_{\text{sh}} \cdot \mathbf{x}_2^s(r) \quad \text{und} \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{b}^h = \mathbf{T}_{\text{sh}} \cdot \mathbf{b}^s = |\mathbf{b}^s| \cdot \mathbf{T}_{\text{sh}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(r) \\ \sin(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

folgt

$$\mathbf{x}_2^s(r) = \mathbf{T}_{\text{hs}} \cdot \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{T}_{\text{sh}} \cdot \mathbf{b}^s. \quad (\text{A.24})$$

Darin sind \mathbf{T}_{hs} und \mathbf{T}_{sh} die Transformationsmatrizen zwischen Hauptachsen- und a,b-Koordinaten, mit

$$\mathbf{T}_{\text{hs}} = \mathbf{D}(-\alpha_{i0}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{i0}) & \sin(\alpha_{i0}) \\ -\sin(\alpha_{i0}) & \cos(\alpha_{i0}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

und

$$\mathbf{T}_{\text{sh}} = \mathbf{T}_{\text{hs}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{i0}) & -\sin(\alpha_{i0}) \\ \sin(\alpha_{i0}) & \cos(\alpha_{i0}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Ferner ist α_{i0} der Winkel zwischen den Basisachsen a und f und r ist der Winkel des Vektors \mathbf{b}^s zur Basisachse a . Demnach erfolgt die Abbildung im a,b-Koordinatensystem über die Matrix

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{T}_{\text{hs}} \cdot \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{T}_{\text{sh}}, \quad (\text{A.27})$$

die durch Einsetzen der Gleichungen (A.25) und (A.26) in Abhängigkeit der Parameter l_f, l_g und α_{i0} folgendermaßen dargestellt werden kann.

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} \frac{l_f+l_g}{2} + \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) & \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) & \frac{l_f+l_g}{2} - \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_a & l_{ab} \\ l_{ab} & l_b \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Für die Elemente der Abbildungsmatrix in a,b-Koordinaten werden die Bezeichner l_a, l_b und l_{ab} eingeführt¹, wobei die Zusammenhänge zwischen den beiden Koordinatensystemen wie folgt zu notieren sind.

$$l_a = \frac{l_f + l_g}{2} + \frac{l_f - l_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \quad (\text{A.29})$$

$$l_b = \frac{l_f + l_g}{2} - \frac{l_f - l_g}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{i0}) \quad (\text{A.30})$$

$$l_{ab} = \frac{l_f - l_g}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_{i0}) \quad (\text{A.31})$$

Schließlich erfolgt die Abbildung eines Vektors \mathbf{b}^s über die Matrix \mathbf{A}^s durch

$$\mathbf{x}_2^s(r) = \mathbf{A}^s \cdot \mathbf{b}^s \quad (\text{A.32})$$

$$= \begin{pmatrix} l_a & l_{ab} \\ l_{ab} & l_b \end{pmatrix} \cdot |\mathbf{b}^s| \cdot \begin{pmatrix} \cos(r) \\ \sin(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$= |\mathbf{b}^s| \cdot \begin{pmatrix} l_a \cdot \cos(r) + l_{ab} \cdot \sin(r) \\ l_{ab} \cdot \cos(r) + l_b \cdot \sin(r) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (A.29) bis (A.31) kann nun auch in diesem Koordinatensystem ein Zusammenhang zu den Halbachsen der Ellipse und dem Winkel zwischen den beiden Koordinatensystemen hergestellt werden.

$$\mathbf{x}_2^s(r) = |\mathbf{b}^s| \cdot \begin{pmatrix} \frac{l_f+l_g}{2} \cdot \cos(r) + \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \cos(r - 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \frac{l_f+l_g}{2} \cdot \sin(r) - \frac{l_f-l_g}{2} \cdot \sin(r - 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$= |\mathbf{b}^s| \cdot \left(\frac{l_f + l_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(r) \\ \sin(r) \end{pmatrix} + \frac{l_f - l_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(r - 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ -\sin(r - 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$= |\mathbf{b}^s| \cdot \left(\frac{l_f + l_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(r) \\ \sin(r) \end{pmatrix} + \frac{l_f - l_g}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-r + 2 \cdot \alpha_{i0}) \\ \sin(-r + 2 \cdot \alpha_{i0}) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.37})$$

¹Da es sich bei Gleichung (A.28) um eine symmetrische Matrix handelt, sind nur drei Bezeichner notwendig.

Es zeigt sich, dass der elliptische Verlauf \mathbf{x}_2^s als Summe von zwei Vektoren darstellbar ist, wobei der linke Summand in Gleichung (A.37) zu \mathbf{b}^s parallel ist und sich somit bei ansteigen des Winkels r mit diesem mitdreht. Der rechte Summand ist ein zweiter Vektor, der mit dem ersten einen Winkel aufspannt, der doppelt so groß ist wie der Winkel zwischen \mathbf{b}^s und der Hauptachse der Ellipse. Demnach entsteht der zweite Vektor durch die Spiegelung von \mathbf{b}^s an der Hauptachse der Ellipse und die anschließende Skalierung mit $\frac{l_f - l_g}{2}$.

A.3 Herleitung der Gleichungen zur Spline Approximation

Splines sind stückweise definierte Polynome, die bestimmte Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Bei den hier verwendeten bikubischen Splines sind das stetige Verläufe der Funktionswerte, Steigung und Krümmung [2]. Um diese Vorgaben zu berücksichtigen, werden Gleichungen daraus abgeleitet, die bei der Approximation gegebener Datenpunkte (Messwerte) berücksichtigt werden. In diesem Abschnitt erfolgt die Herleitung dieser Gleichungen, die abschließend in der Matrix \mathbf{B} zusammengefasst werden.

Jedes Segment der stückweise definierten Funktion besteht aus einem Polynom der Form

$$f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{C}^{\langle i, j \rangle} \cdot \mathbf{y}_j \quad (\text{A.38})$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{x}_i^T = \left((x - x_i)^0 \quad (x - x_i)^1 \quad (x - x_i)^2 \quad (x - x_i)^3 \right) \quad (\text{A.39})$$

und

$$\mathbf{y}_j^T = \left((y - y_j)^0 \quad (y - y_j)^1 \quad (y - y_j)^2 \quad (y - y_j)^3 \right) \quad (\text{A.40})$$

sowie der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{C}^{\langle i, j \rangle} = \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & \cdots & c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & \cdots & \cdots & c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Die Verwendung von Polynomen nach Gleichung (A.38) erfüllt die Stetigkeitsbedingungen innerhalb eines jeden Segments implizit. Sie können nur an den Segmentgrenzen verletzt werden und müssen daher auch nur dort spezifiziert werden. Abhängig davon, ob eine Segmentgrenze parallel zur x- (waagrecht) oder der y-Achse (senkrecht) verläuft, sind die Bedingungen folgendermaßen zu formulieren.

Stetiger Verlauf der Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, y)^{\langle i, j \rangle} &= f(x_{i+1}, y)^{\langle i+1, j \rangle} \\ f(x, y_{j+1})^{\langle i, j \rangle} &= f(x, y_{j+1})^{\langle i, j+1 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Stetiger Verlauf der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x_{i+1}, y)^{\langle i, j \rangle} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_{i+1}, y)^{\langle i+1, j \rangle} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_{j+1})^{\langle i, j \rangle} &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_{j+1})^{\langle i, j+1 \rangle}\end{aligned}\tag{A.43}$$

Stetiger Verlauf der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_{i+1}, y)^{\langle i, j \rangle} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_{i+1}, y)^{\langle i+1, j \rangle} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y_{j+1})^{\langle i, j \rangle} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y_{j+1})^{\langle i, j+1 \rangle}\end{aligned}\tag{A.44}$$

Hier wurde bereits berücksichtigt:

- Die Bedingung eines stetigen Funktionsverlaufs an einer Segmentgrenze führt dazu, dass die Funktionsverläufe der beiden angrenzenden Polynome entlang eben dieser Segmentgrenze gleich sind (Gleichung (A.42)). Daher sind in dieser Richtung auch die ersten und zweiten Ableitungen ebenfalls gleich. Deshalb sind die Gleichungen (A.43) und (A.44) ausschließlich für die Richtungen spezifiziert, die orthogonal zu der Segmentgrenze sind, auf die sie sich beziehen.
- Die Bedingung der Stetigkeit der gemischten Ableitungen resultiert in Gleichungen, die zu denen der Bedingungen (A.43) linear abhängig sind. Sie ergeben keine zusätzlichen Einschränkungen und werden deshalb hier nicht notiert.

Zum Einsetzen in die Gleichungen (A.43) und (A.44) werden die folgenden Differentiale der Polynomfunktionen benötigt.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \\ 2 \cdot c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \\ 3 \cdot c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j\tag{A.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 \\ c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j\tag{A.46}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 2 \cdot c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \\ 6 \cdot c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)^{\langle i, j \rangle} = \mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 & 0 \\ 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 & 0 \\ 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 & 0 \\ 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & 6 \cdot c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j \quad (\text{A.48})$$

Die Bestimmung der Gleichungen, die bei der Berechnung der Splinefunktion berücksichtigt werden um eine der Bedingungen zu erfüllen, erfolgt immer nach dem gleichen Vorgehen, das am Beispiel der ersten Bedingung (A.42) erläutert wird. Die Umsetzung der anderen Bedingungen erfolgt dann analog. Das Einsetzen der Polynomfunktion in (A.42), ergibt für eine senkrechte Segmentgrenze

$$\mathbf{x}_i^T \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \\ c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} & c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} c_{0,0}^{\langle i+1, j \rangle} & c_{0,1}^{\langle i+1, j \rangle} & c_{0,2}^{\langle i+1, j \rangle} & c_{0,3}^{\langle i+1, j \rangle} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_j, \quad (\text{A.49})$$

woraus die folgenden vier Gleichungen durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden.

$$\begin{aligned} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 + c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^3 - c_{0,0}^{\langle i+1, j \rangle} &= 0 \\ c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 + c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^3 - c_{0,1}^{\langle i+1, j \rangle} &= 0 \\ c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 + c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^3 - c_{0,2}^{\langle i+1, j \rangle} &= 0 \\ c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 + c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (x - x_i)^3 - c_{0,3}^{\langle i+1, j \rangle} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Mit dem selben Vorgehen können weitere Gleichungen aus den anderen Bedingungen hergeleitet werden. Aus der Bedingung der stetigen Verläufe der Funktionswerte an den waagerechten Segmentgrenzen folgt

$$\begin{aligned} c_{0,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{0,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + c_{0,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 + c_{0,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^3 - c_{0,0}^{\langle i, j+1 \rangle} &= 0 \\ c_{1,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{1,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + c_{1,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 + c_{1,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^3 - c_{1,0}^{\langle i, j+1 \rangle} &= 0 \\ c_{2,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{2,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + c_{2,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 + c_{2,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^3 - c_{2,0}^{\langle i, j+1 \rangle} &= 0 \\ c_{3,0}^{\langle i, j \rangle} + c_{3,1}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + c_{3,2}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 + c_{3,3}^{\langle i, j \rangle} \cdot (y - y_j)^3 - c_{3,0}^{\langle i, j+1 \rangle} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Die Forderung nach stetigen ersten Ableitungen ergibt an den senkrechten Segmentgrenzen

$$\begin{aligned}
c_{1,0}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{2,0}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + 3 \cdot c_{3,0}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 - c_{1,0}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
c_{1,1}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + 3 \cdot c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 - c_{1,1}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + 3 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 - c_{1,2}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 + 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^2 - c_{1,3}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0
\end{aligned} \tag{A.52}$$

und an den waagerechten Segmentgrenzen

$$\begin{aligned}
c_{0,1}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + 3 \cdot c_{0,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 - c_{0,1}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
c_{1,1}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + 3 \cdot c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 - c_{1,1}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + 3 \cdot c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 - c_{2,1}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} + 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 + 3 \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^2 - c_{3,1}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0
\end{aligned} \tag{A.53}$$

Abschließend ergibt die Bedingung stetiger zweiter Ableitungen an den senkrechten Segmentgrenzen

$$\begin{aligned}
2 \cdot c_{2,0}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{3,0}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 - 2 \cdot c_{2,0}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{2,1}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{3,1}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 - 2 \cdot c_{2,1}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 - 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (x - x_i)^1 - 2 \cdot c_{2,3}^{\langle i+1,j \rangle} &= 0
\end{aligned} \tag{A.54}$$

und an den waagerechten Segmentgrenzen

$$\begin{aligned}
2 \cdot c_{0,2}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{0,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 - 2 \cdot c_{0,2}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{1,2}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{1,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 - 2 \cdot c_{1,2}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{2,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 - 2 \cdot c_{2,2}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0 \\
2 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j \rangle} + 6 \cdot c_{3,3}^{\langle i,j \rangle} \cdot (y - y_j)^1 - 2 \cdot c_{3,2}^{\langle i,j+1 \rangle} &= 0
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Sowohl für senkrechte als auch für waagerechte Segmentgrenzen stehen damit je zwölf Gleichungen fest. Sie sind jedoch nur auf die Segmentgrenzen anwendbar, die zwei Segmente miteinander verbinden. Für die äußere Begrenzung der Splinefunktion gibt es keine Einschränkungen. Mit der Definition des Vektors der Koeffizienten aller Segmente (4.14)

können sie als homogenes, lineares Gleichungssystem formuliert werden.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{A.56}$$

Dies wird bei der Berechnung der Splinekoeffizienten berücksichtigt.

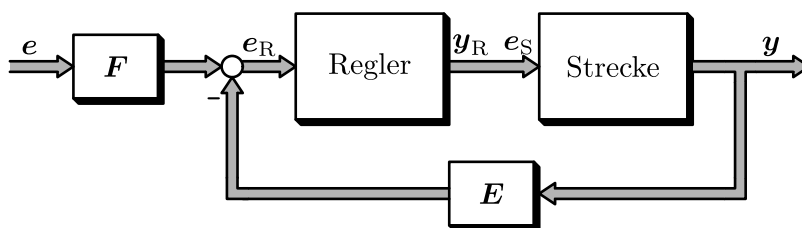


Abb. A.2: Regelkreis bestehend aus Regler, Regelstrecke, Rückkopplung und Sollwertvorgabe

A.4 Verschalten von Teilsystemen in Zustandsraumdarstellung

Die Modellierung eines Systems in Zustandsraumdarstellung kann durch die Verschaltung von Teilsystemen erfolgen. Dieses Vorgehen birgt den Vorteil, dass komplexe und umfangreiche Systeme in kleinere Teile zerlegt werden können, die für sich einfacher zu modellieren sind. Ferner kann die Modellierung der Teilsysteme vor der Verschaltung durch Simulation verifiziert werden, was eine eventuelle Fehlersuche erleichtert. In diesem Abschnitt wird eine allgemeine Darstellung erarbeitet, die es ermöglicht ein komplexes Regelsystem aus den Teilen Regler, Strecke, Rückkopplung und Sollwertvorgabe zusammenzusetzen. Die Struktur des Gesamtsystems ist in Abb. A.2 dargestellt. Das Ziel ist die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems in der Form [33]

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(k) \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}(k). \quad (\text{A.58})$$

Wie bereits in Abschnitt 5.1.2 angemerkt, wird der Vektor der Eingangsgrößen hier mit \mathbf{e} anstelle von \mathbf{u} bezeichnet um Verwechslungen mit Spannungszeigern zu vermeiden. Die Zustandsraumdarstellungen von Regler und Regelstrecke werden durch R bzw. S im Index gekennzeichnet.

$$\mathbf{x}_R(k+1) = \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{x}_R(k) + \mathbf{B}_R \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (\text{A.59})$$

$$\mathbf{y}_R(k) = \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{x}_R(k) + \mathbf{D}_R \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{x}_S(k+1) = \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{x}_S(k) + \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{e}_S(k) \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{y}_S(k) = \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{x}_S(k) + \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{e}_S(k) \quad (\text{A.62})$$

Die Verschaltung basiert auf den folgenden Festlegungen:

- Der Ausgang der Regelstrecke ist auch der Ausgang des Gesamtsystems.
- Der Ausgang des Reglers ist die Stellgröße und damit gleich dem Eingang der Regelstrecke.
- Rückkopplung und Sollwertvorgabe (Matrizen \mathbf{E} , \mathbf{F} in Abb. A.2) sind lineare Abbildungen und liefern daher keine neuen Zustandsgrößen².
- Die Abbildung von Soll- und Istwert erfolgt über die selbe Matrix. D.h. $\mathbf{E} = \mathbf{F}$

Zur Verschaltung der Teilsysteme Regler und Regelstrecke wird die Ausgangsgleichung des Reglers in die Zustands- und Ausgangsgleichung der Regelstrecke eingesetzt. Dabei werden die Zustandsvektoren aneinandergelängt.

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{C}_R & \mathbf{A}_S \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}'} \cdot \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{D}_R \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}'} \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{C}_R & \mathbf{C}_S \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}'} \cdot \mathbf{x}(k) + \underbrace{\mathbf{D}_S \cdot \mathbf{D}_R}_{\mathbf{D}'} \cdot \mathbf{e}_R(k) \quad (\text{A.64})$$

mit

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_R(k+1) \\ \mathbf{x}_S(k+1) \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_S(k) \quad (\text{A.66})$$

Der Eingangsvektor des Reglers beschreibt die Regelabweichung, die sich aus der Abbildung von Soll- und Istwert zusammensetzt. Mit der oben beschriebenen Vorgabe $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ gilt für die Regelabweichung gemäß Abb. A.2

$$\mathbf{e}_R(k) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}(k) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{y}(k) \quad (\text{A.67})$$

Einsetzen von Gleichung (A.67) in (A.63) und (A.64) und auflösen der Ausgangsgleichung (A.64) nach dem Ausgangsvektor ergibt

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{C}' \cdot \mathbf{x}(k) + (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}(k), \quad (\text{A.68})$$

²Mit dieser Vorgabe ist es nicht möglich ein Soll- oder Istwertfilter zu berücksichtigen. Während diese Tatsache im Fall eines Istwertfilters dadurch umgangen werden kann, dass es im Modell der Strecke berücksichtigt wird, muss die hier notierte Herleitung im Fall eines Sollwertfilters in angepasster Form erneut durchgeführt werden.

was wiederum in die Zustandsgleichung eingesetzt werden kann. Nach wenigen Umformungen folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \left[\mathbf{A}' - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \right] \cdot \mathbf{x}(k) \\ & + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \left[\mathbf{I}_2 - (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \right] \cdot \mathbf{e}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Damit ist die Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems in Abb. A.2 (unter der Voraussetzung $\mathbf{E} = \mathbf{F}$) gegeben durch die Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E} \cdot \left[\mathbf{I}_2 - (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \right] \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{C}' \quad (\text{A.72})$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E} \quad (\text{A.73})$$