TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Department of Educational Sciences
School of Social Sciences and Technology

und

Department of Mathematics
School of Computation, Information and Technology

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Bachelor of Education (B.Ed.)

Darstellung linearer Operatoren mittels unendlicher Matrizen

Jonas Sandner

2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Department of Educational Sciences
School of Social Sciences and Technology

und

Department of Mathematics
School of Computation, Information and Technology

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Bachelor of Education (B.Ed.)

Darstellung linearer Operatoren mittels unendlicher Matrizen

Representation of Linear Operators by Infinite Matrices

Verfasser: Jonas Sandner

Themensteller und Betreuer: Dr. rer. nat. Frank Hofmaier
Bearbeitungszeitraum: 01. Mai 2023 bis 01. August 2023

Erklärung zur Bachelorarbeit

Die vorliegende Bachelorarbeit ersetzt die schriftliche Hausarbeit nach § 29 Abs. 1 S. 1 Nr. 1 LPO I, die für die Zulassung zur ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien in Bayern gefordert ist, gemäß § 29 Abs. 12 S. 1 Nr. 3 LPO I.

Entsprechend § 29 Abs. 6 LPO I erkläre ich hiermit, dass die vorliegende Bachelorarbeit von mir selbstständig verfasst worden ist und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt worden sind. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, sind in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Diese Erklärung erstreckt sich auch auf etwa in der Arbeit enthaltene Grafiken, Zeichnungen, Kartenskizzen und bildliche Darstellungen.

München, 21. Juli 2023

Ort, Datum	Unterschrift

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher
so tief das Gemüt der Menschen bewegt;
das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee
auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt;
das Unendliche ist aber auch wie kein anderer
Begriff so der Aufklärung bedürftig.“

David Hilbert, 1925*

*Hilbert, David: *Über das Unendliche.* Math. Ann., 95:161-190, 1926.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Ich danke Herrn **Dr. Frank Hofmaier**, der mir dieses interessante Thema für meine Bachelorarbeit vorgeschlagen und mich bei der Erstellung der Arbeit betreut hat.

Insbesondere für die geduldige und nachhaltige Betreuung, die konstruktive Kritik, die faszinierenden Anregungen und die stets offene Türe zu deinem Büro bin ich *unendlich* dankbar.

Kurzfassung

Darstellung linearer Operatoren mittels unendlicher Matrizen

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir *unendliche Matrizen*, die lineare Operatoren in unendlichdimensionalen Räumen charakterisieren. Dabei betrachten wir insbesondere den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ der quadratsummierbaren Folgen (reeller oder) komplexer Zahlen.

Das Kernziel ist herauszufinden, unter welchen Bedingungen an die Einträge einer unendlichen Matrix M der durch diese repräsentierte lineare Operator wohldefiniert ist. Anders formuliert fragen wir uns, wann das Matrix-Vektor-Produkt Mx einer unendlichen Matrix M und einer Folge $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, die wir als Vektor mit unendlich vielen Zeilen auffassen, wieder eine quadratsummierbare Folge ist. Darüber hinaus wollen wir die Stetigkeit solcher Operatoren untersuchen.

Eine allgemeine Aussage kann man darüber nicht treffen, man kann allerdings eine Reihe von Beispielen finden. Dafür erinnern wir zunächst an einige mathematische Grundlagen, etwa aus der Hilbertraumtheorie.

Abschließend übertragen wir ausgewählte Ergebnisse auf den *Hardy-Raum auf der offenen Einheitskreisscheibe* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, der isometrisch isomorph zum Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist.

Abstract

Representation of Linear Operators by Infinite Matrices

In this paper we study *infinite matrices* which characterise linear operators in infinite-dimensional spaces. In particular, we focus on the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{N})$ of square-summable sequences of (real or) complex numbers.

The main goal is to figure out under which conditions on the entries of an infinite matrix M the linear operator represented by the latter is well-defined. In other words, we wonder at which point the matrix-vector product Mx of an infinite matrix M and a sequence $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, which we take to be a vector with infinitely many rows, is again a square-summable sequence. Furthermore, we want to investigate the continuity of such operators.

We cannot make a general statement about this, but we can find a number of examples. In order to do this, we first recall some mathematical basics, for example from Hilbert space theory.

Afterwards we transfer selected results to the *Hardy space on the open unit circle* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, which is isometrically isomorphic to the sequence space $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Kapitel 1

Einleitung

Aus der linearen Algebra sind endlichdimensionale Hilberträume, das bedeutet vollständige Vektorräume, die mit einem Skalarprodukt versehen sind, wohlbekannt. In dieser Arbeit sollen unendlichdimensionale Hilberträume betrachtet werden. Dazu zählt insbesondere der Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ mit $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, der alle quadratsummierbaren Folgen (reeller oder) komplexer Zahlen enthält. Folglich ist er durch

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

erklärt [Kö04, Seite 22]. Dieser sogenannte *Hilbertsche Folgenraum* ist ein Spezialfall der ℓ^p-Räume, die allgemein gegeben sind als

$$\ell^p(I) := \left\{ (x_k)_{k\in I} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k\in I} |x_k|^p < \infty \right\},$$

wobei I eine unendliche, abzählbare Indexmenge ist. In dieser Arbeit werden wir als Indexmenge überwiegend die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten und schreiben dann abkürzend nur $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$. Falls wir eine andere Indexmenge verwenden, etwa $\mathbb{N}_0$, schreiben wir $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Dass ℓ^2 ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, kann man sich leicht erschließen: Für $x, y \in \ell^2$ findet man

$$|x_k + y_k|^2 \leq |x_k|^2 + 2\,|x_k|\,|y_k| + |y_k|^2 \leq 2\,|x_k|^2 + 2\,|y_k|^2,$$

weshalb auch $x+y \in \ell^2$ ist. Daher ist die Vektoraddition abgeschlossen. Dass die restlichen Vektorraumaxiome vom Raum ℓ^2 erfüllt werden, ist klar ersichtlich: Es liegt der Körper $\mathbb{K}$ zugrunde, die Vektoraddition ist kommutativ, es existiert als additiv Neutrales der Nullvektor $(0, 0, \dots)^\top \in \ell^2$ und für jedes $x \in \ell^2$ gilt wegen der Quadratsummierbarkeit stets

$-x \in \ell^2$. Mit der Skalarmultiplikation gelten die Distributivgesetze sowie das gemischte Assoziativgesetz, ebenso ist auch das unitäre Gesetz erfüllt.

In Kapitel 2* sehen wir, dass ℓ^2 – versehen mit einem geeigneten Skalarprodukt – ein Hilbertraum ist. Dies trifft auf keinen der anderen ℓ^p-Räume zu und macht ihn zu einem interessanten Untersuchungsobjekt. Vornehmlich mit dem Satz von Fischer-Riesz lassen sich die hier gefundenen Resultate auch auf andere Räume übertragen.

Für Folgen reeller oder komplexer Zahlen führen wir in dieser Arbeit die verkürzende Schreibweise $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein. Soll explizit betont werden, dass es sich bei einem Ausdruck um eine Folge handelt, verwenden wir diese Abkürzung nicht, sondern schreiben wie gewohnt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Wir werden oft das Matrix-Vektor-Produkt benötigen und erinnern an dieser Stelle noch einmal daran, was damit gemeint ist. Für eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{i\times j}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{C}^j$ setzt man als Matrix-Vektor-Produkt

$$Mx = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{j} m_{1k}x_k \\ \sum\limits_{k=1}^{j} m_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{j} m_{ik}x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^i.$$

Wir wollen dieses auf Matrizen mit unendlich vielen Spalten und Zeilen und Vektoren mit unendlich vielen Zeilen verallgemeinern und setzen

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{12} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_{1k}x_k \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_{2k}x_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Man betrachtet statt endlicher Summen hier also Reihen, deren Konvergenz sichergestellt werden muss.

Um das Ziel dieser Arbeit zu illustrieren, bedienen wir uns eines endlichdimensionalen Beispiels: Wir betrachten einen Vektor $x \in \mathbb{C}^3$ und eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Wie definiert

*Hyperlinks zu Sätzen etc. innerhalb des PDF-Dokuments sind braun, damit sie erkennbar sind.

können wir hier das Matrix-Vektor-Produkt bilden. Zur Veranschaulichung wählen wir nun explizit eine Matrix M und einen Vektor x aus, etwa

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 7 & \mathrm{i} \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 8\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

Berechnet man Mx, erhält man $Mx = (16, 7+9\mathrm{i}, 28\mathrm{i})^\top \in \mathbb{C}^3$. Tatsächlich können wir uns sicher sein, dass für jede Matrix $M \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{C}^k$ das Produkt $Mx \in \mathbb{C}^k$ ist. Woran liegt das?

Jede lineare Abbildung im Endlichdimensionalen kann als Multiplikation mit einer eindeutigen Matrix dargestellt werden. Durch die Multiplikation mit der (3×3)-Matrix M ist daher eine lineare Abbildung $f_M : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ gegeben und wegen der Definition des Matrix-Vektor-Produkts ist Mx ein Element aus $\mathbb{C}^3$. Dasselbe gilt für eine $(k \times k)$-Matrix: Nach Definition des Matrix-Vektor-Produkts ist es ein Vektor mit k Einträgen.

Im Unendlichdimensionalen ist dies nicht ganz so einfach. Überlegen wir, was passiert, wenn M eine komplexwertige Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten ist und $x \in \ell^2$. Wir stellen uns x an dieser Stelle als Vektor mit unendlich vielen Zeilen vor. Es ist unklar, ob auch $Mx := ((Mx)_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stets wieder quadratsummierbar ist bzw. überhaupt existiert.
Ein einfaches Gegenbeispiel ist etwa das Produkt aus

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und } x \in \ell^2 \text{ mit } x_k := \tfrac{1}{k}.$$

Bei diesem Matrix-Vektor-Produkt divergiert bereits jede einzelne Komponente $(Mx)_k$ bestimmt gegen ∞, weshalb Mx sicherlich keine ℓ^2-Folge ist. Wählt man statttdessen $y \in \ell^2$ mit $y_k := \frac{1}{k^3}$, so können wir zumindest jeden Eintrag von My berechnen. Es gilt dabei jeweils $(My)_k = \frac{\pi^2}{6}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Trotzdem ist $My \notin \ell^2$.
Ein noch simpleres Gegenbeispiel findet man etwa, indem man

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und wieder } x \in \ell^2 \text{ mit } x_k := \tfrac{1}{k} \text{ wählt.}$$

Für Mx erhält man für alle $k \in \mathbb{N}$ die Einträge $(Mx)_k = 1$. Damit ist auch hier $Mx \notin \ell^2$, obwohl jeder Eintrag von Mx konvergent ist.

Mit der Theorie der Hilberträume und unter anderem den Überlegungen von Otto Toeplitz wollen wir in Kapitel 3 dieser Arbeit untersuchen, wie die Matrixelemente einer unendlichen Matrix beschaffen sein können, damit für jedes $x \in \ell^2$ auch $Mx \in \ell^2$ gilt.

In Kapitel 4 wird ein kurzer Ausblick gegeben. Wir überlegen uns insbesondere, welche Konsequenzen die Resulate aus Kapitel 3 in Verbindung mit dem Satz von Fischer-Riesz haben. Dazu betrachten wir den sogenannten Hardy-Raum auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, der ebenfalls ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und deshalb isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist. Seine Elemente sind diejenigen komplexwertigen Potenzreihen, deren Koeffizientenfolgen quadratsummierbar sind.

In Kapitel 5 ziehen wir ein kurzes Fazit und geben einen Ausblick auf weitere Aspekte unendlicher Matrizen und linearer Operatoren, die untersucht werden könnten.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die mathematischen Definitionen und Sätze gegeben, die zum Verständnis der Arbeit notwendig sind. Für Aussagen, die sowohl über dem reellen als auch dem über dem komplexen Zahlenkörper gültig sind, schreiben wir $\mathbb{K}$. Damit meinen wir, dass diese Aussage sowohl im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

2.1 Der Hilbertraum ℓ^2

In mehreren Schritten wollen wir uns zunächst klarmachen, was man unter einem Hilbertraum versteht.

Dafür erklären wir in Anlehnung an [Wer18, Kapitel V.1] zuerst, was unter einem Skalarprodukt verstanden wird, da wir diesen Begriff für die folgenden Definitionen benötigen.

Definition 2.1 Skalarprodukt: Es sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$$

nennt man Skalarprodukt, falls für alle $x, y, z \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt, dass

(i) $\langle x, x \rangle_{\mathcal{V}} \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle_{\mathcal{V}} = 0 \iff x = 0$,

(ii) $\langle x, y \rangle_{\mathcal{V}} = \overline{\langle y, x \rangle}_{\mathcal{V}}$,

(iii) $\langle x+y, z\rangle_{\mathcal{V}} = \langle x, z\rangle_{\mathcal{V}} + \langle y, z\rangle_{\mathcal{V}}$ und

(iv) $\langle \lambda x, y\rangle_{\mathcal{V}} = \lambda\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}}$ ist.

Weiter nennen wir zwei Elemente $x, y \in \mathcal{V}$ orthogonal genau dann, wenn $\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}} = 0$ ist. Kurz: Für $x, y \in \mathcal{V}$ gilt $x \perp y :\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle_{\mathcal{V}} = 0$.

Hinweis: Aus den Eigenschaften (i) und (iv) folgt sofort $\langle x, \lambda y\rangle_{\mathcal{V}} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}}$. Manche Autoren geben auch diese Eigenschaft statt (iv) in der Definition an. Skalarprodukte sollen in dieser Arbeit definitionsgemäß linear im ersten und semilinear im zweiten Argument sein, in der Literatur wird dies gelegentlich genau umgekehrt definiert.

Nun wollen wir einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt versehen. Bevor wir zum Begriff des Hilbertraums gelangen, betrachten wir noch andere Raumbegriffe, die sich als Zwischenschritte zur Definition des Hilbertraums nach [Las12, Kapitel 4.3] als nützlich erweisen werden.

Definition 2.2 Prähilbertraum: Es seien $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und auf diesem ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ definiert. Das Paar $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ nennt man einen Prähilbertraum. Oft schreibt man auch nur $\mathcal{V}$.

Man kann leicht zeigen, dass ein solcher Prähilbertraum $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ auch stets ein normierter bzw. ein metrischer Raum ist: Dabei setzen wir die Begriffe *Norm* und *Metrik* als bekannt voraus. Was genau sie bezeichnen kann beispielsweise in [For17, §1] nachgelesen werden.

Für $x \in \mathcal{V}$ ist durch $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to [0, \infty)$, $\|x\|_{\mathcal{V}} := \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathcal{V}}}$ immer eine Norm auf dem Raum $\mathcal{V}$ gegeben. Ein Beweis dafür, dass es sich dabei tatsächlich um eine Norm handelt, findet sich etwa in [Wei00, Satz 1.8]. Diese nennt man die vom Skalarprodukt induzierte Norm oder auch Skalarproduktnorm.
Analog induziert eine Norm stets eine Metrik $d_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, \infty)$ auf dem Raum $\mathcal{V}$ durch $d_{\mathcal{V}}(x, y) := \|x - y\|_{\mathcal{V}}$ für $x, y \in \mathcal{V}$, sodass jeder normierte Raum auch metrisch ist [Wei00, Satz 1.5].

Damit folgt, dass jeder Prähilbertraum durch die Skalarproduktnorm unmittelbar einen Längenbegriff hat und auch ein Abstandsbegriff durch die von der Skalarproduktnorm induzierte Metrik existiert. Deswegen ist es möglich und sinnvoll, in Prähilberträumen

Konvergenzbegriffe einzuführen und über den Begriff der Vollständigkeit eines Raumes zu sprechen.

Definition 2.3 Konvergenz: Es sei $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern in $\mathcal{V}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $x_* \in \mathcal{V}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$d_{\mathcal{V}}(x_*, x_k) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N \text{ gilt.}$$

Definition 2.4 Cauchyfolge: Es sei $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern in $\mathcal{V}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$d_{\mathcal{V}}(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l \geq N \text{ gilt.}$$

Dass in metrischen Räumen $\mathcal{V}$ jede konvergente Folge x stets Cauchyfolge ist, wird etwa in [For17, Seite 24] nachgewiesen. Die umgekehrte Eigenschaft ist hingegen *nicht* selbstverständlich und gilt *nicht* in jedem beliebigen metrischen Raum. Sie ist vielmehr so besonders, dass sie einen eigenen Namen bekommen hat, nämlich Vollständigkeit.

Definition 2.5 Banachraum und Vollständigkeit: Es sei $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ ein metrischer Raum. Wenn jede Cauchyfolge in $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ konvergent ist, heißt $\mathcal{V}$ vollständig. Ist die Metrik $d_{\mathcal{V}}$ durch eine Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ induziert, so heißt ein solcher Raum Banachraum.

Wir haben nunmehr alle Begriffe eingeführt, die nötig sind, um zu definieren, was unter einem Hilbertraum verstanden wird.

Definition 2.6 Hilbertraum: Es sei $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ ein Prähilbertraum. Falls der normierte Raum $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ mit der Skalarproduktnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ ein Banachraum ist, nennt man den Raum $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ einen Hilbertraum. Auch hier schreibt man oft nur $\mathcal{V}$.

Offensichtlich ist also jeder Hilbertraum auch ein Banachraum. Die Umkehrung dieser Feststellung stimmt jedoch nicht, denn nicht jede Norm ist durch ein Skalarprodukt erzeugt: Also ist *nicht* jeder Banchraum ein Hilbertraum [Wer18, Satz V.1.7]. Sehr viele der endlichdimensionalen Vektorräume, die intuitiv verwendet werden, sind Hilberträume, falls man sie mit einem geeigneten Skalarprodukt versieht. Zwei Standardbeispiele dafür wollen wir nun betrachten.

Satz 2.7 $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ Hilberträume.*

Beweis: Wir wissen, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ jeweils einen Körper bilden. Durch Vererbung der nach den Körperaxiomen gültigen Rechenregeln ist leicht erkennbar, dass beide insbesondere $\mathbb{R}$-Vektorräume sind. Ferner ist die Menge der reellen Zahlen per Konstruktion vollständig bezüglich der von der Standardmultiplikation induzierten Betragsnorm $\quad |\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty) \quad$ mit $\quad |x| = \sqrt{x \cdot x} \quad$ für $x \in \mathbb{R}$.

Für Cauchy-Folgen im $\mathbb{R}^n$ kann man zeigen, dass jede der n Komponentenfolgen eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergiert. Da die Konvergenz einer Folge im $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur Konvergenz aller Komponentenfolgen ist, folgt damit die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ bezüglich der vom Standardskalarprodukt induzierten, euklidischen Norm $\quad \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty) \quad$ mit $\quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n}} \quad$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Fasst man eine komplexe Zahl $\quad z := a + ib \in \mathbb{C} \quad$ mit reellen $a, b \in \mathbb{R}$ als Summe ihres Real- und Imaginärteils auf, folgt, dass auch $\mathbb{C}$ vollständig ist. Komponentenweise Betrachtung liefert dann die Vollständigkeit von $\mathbb{C}^n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Wir wollen uns jetzt einem unendlichdimensionalen Vektorraum widmen. Bereits in der Einleitung hatten wir uns überlegt, dass ℓ^2 ein Vektorraum ist. Aufbauend darauf zeigen wir jetzt, dass ℓ^2 mit

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad \text{für } x := (x_k)_{k \in \mathbb{N}}\,,\ y := (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \tag{1}$$

sogar ein Hilbertraum ist. In diesem Fall ist die zugehörige Skalarproduktnorm dann durch $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\langle x, x \rangle_{\ell^2}} \quad$ gegeben.

Um nachzuweisen, dass wir in Gleichung (1) tatsächlich ein Skalarprodukt erklärt haben und die Reihe immer konvergent ist, bedarf es der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für ℓ^2. Zum Beweis dieser verwenden wir die endlichdimensionale Version für $\mathbb{C}^n$.

Satz 2.8 Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\mathbb{C}^n$: *Es gilt für gegebene komplexwertige $x := (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $y := (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{C}^n$, dass*

$$|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n}| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} = \|x\|_{\mathbb{C}^n} \|y\|_{\mathbb{C}^n}$$

ist, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ das euklidische Standardskalarprodukt bezeichnet.

Ein Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\mathbb{C}^n$ findet sich beispielsweise in [Dei22, Seite 153].

Satz 2.9 Cauchy-Schwarz-Ungleichung für ℓ^2: *Es seien $x, y \in \ell^2$ gegeben. Dann gilt*

$$|\langle x, y\rangle_{\ell^2}| \leq \|x\|_{\ell^2} \|y\|_{\ell^2}.$$

Insbesondere existiert der Ausdruck links.

Beweis: Wir gehen ähnlich wie [Las12, Satz 5.23] vor und betrachten zunächst nur die ersten m Partialsummen von $\langle x, y\rangle_{\ell^2}$. Mit Satz 2.8 ergibt sich, dass

$$\left|\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k}\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |y_k|^2} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}}_{=\|x\|_{\ell^2} < \infty} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}}_{=\|y\|_{\ell^2} < \infty} < \infty$$

ist, da $x, y \in \ell^2$ per definitionem jeweils quadratsummierbar sind.
Daraus folgt im Grenzwert $m \to \infty$, dass $(x_k y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ ist und wir haben das Gewünschte gezeigt. □

In nächsten Satz weisen wir nach, dass wir in Gleichung (1) in der Tat ein Skalarprodukt erklärt haben.

Satz 2.10 *Für $x, y \in \ell^2$ ist durch den Ausdruck $\langle x, y\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ ist ein Skalarprodukt auf ℓ^2 erklärt.*

Beweis: Für alle $x, y \in \ell^2$ existiert $\langle x, y\rangle_{\ell^2}$, denn die Reihe ist nach Satz 2.9 konvergent. Außerdem genügt die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2}$ allen Eigenschaften, die wir in Definition 2.1 für Skalarprodukte gefordert haben. Wir können sie unter Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte und weil die komplexe Konjugation stetig ist, leicht nachrechnen. Es ist

(i) $\langle x, x\rangle_{\ell^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \geq 0, \quad$ da $|x_k| \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Weiter gilt, dass

$$\langle x, x\rangle_{\ell^2} = 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 0 \iff |x_1|^2 = |x_2|^2 = \cdots = 0 \iff x = 0 \quad \text{ist.}$$

(ii) $\overline{\langle y, x\rangle}_{\ell^2} = \overline{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \overline{x_k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{y_k \overline{x_k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{y_k} x_k = \langle x, y\rangle_{\ell^2}.$

(iii) $\langle x+y, z\rangle_{\ell^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k+y_k)\overline{z_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k\overline{z_k}+y_k\overline{z_k}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{z_k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\overline{z_k} = \langle x, z\rangle_{\ell^2} + \langle y, z\rangle_{\ell^2}.$

(iv) $\langle \lambda x, y\rangle_{\ell^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda x_k \overline{y_k} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} = \lambda \langle x, y\rangle_{\ell^2}.$

Folglich ist durch die Reihe tatsächlich ein Skalarprodukt gegeben. □

Dieses Skalarprodukt induziert, wie bereits bei Gleichung (1) beschrieben, eine Norm. Es bleibt daher nichts weiter als die Vollständigkeit von ℓ^2 zu zeigen, um nachzuweisen, dass es sich bei ℓ^2 um einen Hilbertraum handelt.

Satz 2.11 *Der Raum ℓ^2 ist vollständig mit der Norm, die durch das in Satz 2.10 definierte Skalarprodukt induziert wird.*

Einen Beweis findet man etwa in [Las12, Satz 5.24].

Insgesamt haben wir jetzt verifiziert, dass ℓ^2 tatsächlich ein Hilbertraum ist. An dieser Stelle muss betont werden, dass wir uns hier mit dem Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ beschäftigt haben, da die Indexmenge der Folgen $\mathbb{N}$ ist. Selbstverständlich sind auch etwa $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ oder $\ell^2(\mathbb{Z})$ Hilberträume.

Wir werden nun die sogenannte Separabilität von ℓ^2 nachweisen. Was man unter diesem Begriff im Allgemeinen versteht, definieren wir nach [Kab18, Kapitel 2]:

Definition 2.12 Separabler Raum: Einen metrischen Raum $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ nennt man separabel, falls $A \subset \mathcal{V}$ existiert mit den Eigenschaften, dass A

(i) abzählbar ist und

(ii) dicht in $\mathcal{V}$ liegt.

Beispiel 2.13 Ein einfaches Beispiel für einen separablen Hilbertraum ist der $\mathbb{R}^n$. Die Separabilität folgt sofort aus der Abzählbarkeit der bekanntermaßen dicht liegenden Teilmenge $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$.
Dasselbe gilt für den Hilbertraum $\mathbb{C}^n$, denn in diesem liegt $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{C}^n$ dicht und ist abzählbar.

Für den Hilbertraum ℓ^2 wollen wir uns nach [Alt12, Beispiel 2.18(2)] etwas ausführlicher überlegen, warum er separabel ist. Dazu betrachten wir den Untervektorraum $c_{00}(\mathbb{N}) \subset \ell^2$. Dieser ist durch

$$c_{00}(\mathbb{N}) := \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{es existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass für alle } n \geq N \text{ gilt: } x_n = 0 \right\}$$

gegeben. Falls die Indexmenge der Folgen $\mathbb{N}$ ist, schreiben wir künftig auch hier nur noch c_{00}. Es handelt sich bei der Menge c_{00} um eine Teilmenge von ℓ^2, da die Summe der Betragsquadrate endlich vieler von 0 verschiedener Folgenglieder endlich ist. Anders formuliert gilt $c_{00} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, wobei die e_k für $k \in \mathbb{N}$ die *unendlichen Einheitsvektoren* $e_1 := (1, 0, 0, \ldots)^\top, e_2 := (0, 1, 0, \ldots)^\top$ und so weiter sind. Dieser Raum ist dicht in ℓ^2, denn jedes $x \in \ell^2$ lässt sich durch eine Folge von Elementen aus c_{00} beliebig genau approximieren. Subtrahieren wir von der Folge $x = (x_1, x_2, \ldots)^\top \in \ell^2$ ihre ersten m Folgenglieder $x^m := (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)^\top \in c_{00}$, um ihren *Abstand* zu bestimmen, erhalten wir für diesen

$$\begin{aligned} \|x - x^m\|_{\ell^2} &= \|(x_1, x_2, x_3, \ldots)^\top - (x_1, ..., x_m, 0, ...)^\top\|_{\ell^2} = \|(0, ..., 0, x_{m+1}, x_{m+2}, ...)^\top\|_{\ell^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } m \to \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Folglich ist c_{00} dicht in ℓ^2. Allerdings ist c_{00} nicht abzählbar, was in Definition 2.12 gefordert ist. Deswegen können wir mit diesem Unterraum nicht unmittelbar zeigen, dass ℓ^2

separabel ist, sondern müssen einen kleinen Umweg gehen. Wir weisen daher zunächst die Separabilität von c_{00} nach und betrachten dazu die Menge $D \subset c_{00}$ mit

$$D := \{x \in c_{00} \mid x_i \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re}(x_i), \operatorname{Im}(x_i) \in \mathbb{Q}\}.$$

Die Menge D ist abzählbar und liegt dicht in c_{00}, denn wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ bzw. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$ in $\mathbb{C}^n$ lässt sich jede Komponente eines Elementes $y \in c_{00}$ beliebig genau durch eine Folge von Elementen aus D approximieren. Wir wissen jetzt, dass der Raum c_{00} separabel ist. Daraus folgt die Separabilität von ℓ^2.

Konkret sieht die oben genannte Approximation für jedes $x \in \ell^2$ folgendermaßen aus und wird uns auch später noch in Satz 2.18 begegnen,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_{\ell^2} e_k \ . \tag{3}$$

Diese Darstellung der Elemente von ℓ^2 durch Elemente von c_{00} führt zum Begriff der Schauderbasis, der sich grundlegend vom aus der (linearen) Algebra bekannten Basisbegriff unterscheidet und den wir an dieser Stelle nach [Kab18, Aufgabe 8.14] einführen. Nachfolgende Aussagen gelten für jede abzählbare Indexmenge und nicht nur für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Diese verwenden wir aus Anschaulichkeitsgründen.

Definition 2.14 Schauderbasis: Es sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ ein Banachraum. Man nennt eine Folge $\mathcal{B} := (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{V}$ Schauderbasis von $\mathcal{V}$, falls es für jedes $x \in \mathcal{V}$ eindeutige $\lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt derart, dass

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k \quad \text{ist.}$$

An dieser Stelle soll noch einmal klar gemacht werden, dass der Begriff der Basis mit Vorsicht zu genießen ist: Spricht man in der Algebra von einer Basis $\mathcal{B}$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$, so hat diese unter anderem die Eigenschaft, dass sich jedes Element $x \in \mathcal{V}$ als eindeutige Linearkombination endlich vieler Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt. Diese Art der Basis nennt man **Hamelbasis**. Mit dem Zornschen Lemma kann gezeigt werden, dass jeder Vektorraum eine solche besitzt. Eine konkrete Strategie, mit der die Hamelbasis eines unendlichdimensionalen Raumes konstruiert werden kann, wird aus dem Beweis der Existenz allerdings nicht geliefert. In der Tat ist es in unendlichdimensionalen Vektorräumen

oftmals nicht einmal möglich, eine Hamelbasis explizit anzugeben, weswegen bei der Betrachtung unendlichdimensionaler Vektorräume meist Schauderbasen verwendet werden. [Lie21, Satz 9.26 mit Bemerkung]
Bei Schauderbasen werden anders als bei Hamelbasen zusätzlich Reihen und nicht nur Linearkombinationen zugelassen. Es kann gezeigt werden, dass in einem unendlichdimensionalen Banachraum eine Hamelbasis nie abzählbar sein kann. Daraus folgert man, dass in diesem Fall eine Schauderbasis nie Hamelbasis und umgekehrt sein kann [Alt12, Übung U7.1].

Für n-dimensionale Prähilberträume $\mathcal{V}$ wissen wir, was man unter einer Orthonormalbasis versteht, nämlich eine Vektorraumbasis $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$, mit $\langle b_i, b_j \rangle_{\mathcal{V}} = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Genaueres kann etwa in [Dei22, Kapitel 6.6] nachgelesen werden. Nach [Kab18, Kapitel 6.1] definieren wir nun für *Hilberträume*:

Definition 2.15 Orthonormalsystem, Orthonormalbasis: Es sei $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Eine Folge $\mathcal{B} := (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{V}$ heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\langle b_i, b_j \rangle_{\mathcal{V}} = \delta_{ij}$ für alle $b_i, b_j \in \mathcal{B}$ gilt.
Ein Orthonormalsystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ heißt Orthonormalbasis (ONB) oder vollständiges Orthonormalsystem (VONS), falls für den Orthogonalraum

$$\mathcal{B}^{\perp} := \{x \in \mathcal{V} \mid \text{für alle } b_i \in \mathcal{B} \text{ gilt: } \langle x, b_i \rangle_{\mathcal{V}} = 0\}$$

von $\mathcal{B}$ gilt, dass $\mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$ ist.

Der nächste Satz nach [Wer18, Korollar V.4.10] zeigt, dass die separablen Hilberträume genau diejenigen sind, die eine abzählbare Orthonormalbasis besitzen.

Satz 2.16 *Es sei $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Dann gilt*

$$\mathcal{V} \text{ ist separabel} \iff \mathcal{V} \text{ hat eine abzählbare ONB} \iff \text{Jede ONB von } \mathcal{V} \text{ ist abzählbar.}$$

Einen Beweis findet man in Teilen in [Cla19, Satz 15.15] und ganz in [Wer18, Korollar V.4.10].

Wegen der Separabilität von ℓ^2 wissen wir, dass dieser Raum eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt und möchten eine solche jetzt angeben.

Satz 2.17 ONB von ℓ^2: *Eine abzählbare Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von ℓ^2 ist gegeben durch die Folge der unendlichen Einheitsvektoren $\mathcal{B} := (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Hinweis: Analog kann gezeigt werden, dass für $\ell^2(\mathbb{Z})$ eine abzählbare ONB $\mathcal{B}$ durch die beidseitig unendlichen Einheitsvektoren gegeben ist, $\mathcal{B} := (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ [Bö98, Seite 1].

Beweis: Dass durch $\mathcal{B}$ ein Orthonormalsystem gegeben ist, folgt direkt aus der Definition, es ist $\langle e_i, e_j\rangle_{\ell^2} = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Um zu zeigen, dass auch $\mathcal{B}^\perp = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ gilt, nehmen wir das Gegenteil an. Es sei $x \in \ell^2, x \neq 0$ orthogonal zu allen e_k. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\text{einerseits} \quad \langle x, e_k\rangle_{\ell^2} = 0 \quad \text{und andererseits auch} \quad \langle x, e_k\rangle_{\ell^2} = x_k.$$

Daraus ergibt sich schließlich, dass $x_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, also $x = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also existiert ein solches $x \in \ell^2$ mit $x \neq 0$ nicht. Das Orthogonalkomplement enthält somit tatsächlich nur die $0 = (0, 0, \ldots)^\top$. $\square$

In Gleichung (3) haben wir gesehen, dass wir jedes Element $x \in \ell^2$ mit Einträgen $x_k \in \mathbb{C}$ als Reihe der unendlichen Einheitsvektoren e_k schreiben können und

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle_{\ell^2}}_{=x_k} e_k \quad \text{gilt.}$$

Dabei sind die Einträge x_k von x die Koeffizienten λ_k im Sinne von Definition 2.14. Diese Eigenschaft lässt sich als sogenannte *Parsevalsche Gleichung* auf beliebige Orthonormalbasen beliebiger Hilberträume verallgemeinern [Alt12, Wer18, Definition 7.7, Satz V.4.9]. Wir beschränken uns hier allerdings auf separable Räume:

Satz 2.18 Parsevalsche Gleichung: *Es sei $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) Es ist $\mathcal{B} := (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.

(ii) Für alle $x \in \mathcal{V}$ gilt $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}\, b_i$.

(iii) Für alle $x, y \in \mathcal{V}$ gilt $\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}\, \overline{\langle y, b_i\rangle}_{\mathcal{V}}$.

(iv) Für alle $x \in \mathcal{V}$ gilt $\|x\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}|^2$.

Beweis: Wir führen diesen Beweis nach [Alt12, Definition 7.7] und [Wer18, Satz V.4.9]. Weil $\mathcal{V}$ separabel ist, wissen wir aus den Sätzen 2.16 und 2.17, dass $\mathcal{B}$ eine Schauderbasis von $\mathcal{V}$ ist und daher $\operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$ definitionsgemäß dicht in $\mathcal{V}$ liegt. Folglich lässt sich jedes $x \in \mathcal{V}$ als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \quad \text{schreiben mit } \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Wir betrachten nun das Skalarprodukt $\langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}} = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k, b_i \right\rangle_{\mathcal{V}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{\langle b_k, b_i\rangle_{\mathcal{V}}}_{=\delta_{ki}} = \lambda_i$.

Aus diesem Ergebnis resultiert $x = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}}_{=\lambda_i} b_i$ für jedes $x \in \mathcal{V}$ und damit haben wir (i) $\implies$ (ii) bewiesen.

Weiter gilt für $x, y \in \mathcal{V}$ mit der Stetigkeit und der Linearität des Skalarproduktes, dass

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}} &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}\, b_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, b_j\rangle_{\mathcal{V}}\, b_j \right\rangle_{\mathcal{V}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}} \overline{\langle y, b_j\rangle}_{\mathcal{V}} \langle b_i, b_j\rangle_{\mathcal{V}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}} \overline{\langle y, b_i\rangle}_{\mathcal{V}}
\end{aligned}$$

ist, wobei wir $\langle b_i, b_j\rangle_{\mathcal{V}} = \delta_{ij}$ verwendet haben. Mithin gilt (ii) $\implies$ (iii).

Setzt man in (iii) $x = y$, so folgt sofort (iii) $\implies$ (iv).

Nehmen wir nun an, dass (iv) gilt, aber $\mathcal{B}$ keine ONB, sondern lediglich ein ONS ist. Dann existiert ein $x \in \mathcal{V}$ mit $\|x\|_{\mathcal{V}} = 1$ derart, dass auch $\mathcal{B} \cup \{x\}$ ein ONS ist. Insbesondere folgt, weil dann $\langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, b_i\rangle_{\mathcal{V}}|^2 = 0 \neq 1 = \|x\|_{\mathcal{V}}$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (iv). Hiermit haben wir (iv) $\implies$ (i) und die Äquivalenz der vier Aussagen gezeigt. □

Abschließend betrachten wir noch kurz andere ℓ^p-Räume mit $1 \leq p < \infty$ und $p \neq 2$. Diese sind mit $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ zwar keine Hilbert-, aber Banachräume [Wer18, Kapitel I.1 Beispiel (g)].
Im Fall $p = \infty$ bezeichnet ℓ^∞ den Raum der beschränkten Folgen, der mit der Supremumsnorm $\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ ebenfalls ein Banachraum ist [Wer18, Kapitel I.1 Beispiel (f)].
Es gilt der folgende nützliche Satz:

Satz 2.19 *Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q$.*

Beweis: Im Fall $p = \infty$ ist nichts zu zeigen und im Fall $q = \infty$ ist die Behauptung rasch nachweisbar, da jede p-summierbare Folge eine Nullfolge und jede Nullfolge bekanntermaßen beschränkt ist.

In den anderen Fällen zeigen wir, dass für alle $x \in \ell^p$ stets die Ungleichung $\|x\|_{\ell^q} \leq \|x\|_{\ell^p}$ erfüllt ist. Für $x = 0$ ist die Aussage offensichtlich wahr. Wir behandeln nun zunächst den Fall $\|x\|_{\ell^p} = 1$. Es gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $|x_k| \leq 1$ und weiter $|x_k|^q \leq |x_k|^p$ ist. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 \Longrightarrow \|x\|_{\ell^q} \leq \|x\|_{\ell^p} = 1.$$

Daraus folgt $x \in \ell^q$.

Für $x \in \ell^p$ mit $\|x\|_{\ell^p} \neq 1$ und $\|x\|_{\ell^p} \neq 0$ setzen wir $y := \frac{1}{\|x\|_{\ell^p}} x \in \ell^p$, woraus mit unserer Überlegung sofort $\|y\|_{\ell^q} \leq \|y\|_{\ell^p} = 1$ resultiert. Weiter finden wir

$$\|y\|_{\ell^q} = \|\tfrac{1}{\|x\|_{\ell^p}} x\|_{\ell^q} = \frac{\|x\|_{\ell^q}}{\|x\|_{\ell^p}} \overset{!}{\leq} \underbrace{1}_{=\|y\|_{\ell^p}},$$

wobei der Bruch $\frac{\|x\|_{\ell^q}}{\|x\|_{\ell^p}}$ genau dann wie gefordert kleiner oder gleich 1 ist, wenn der Zähler $\|x\|_{\ell^p}$ kleiner oder gleich dem Nenner $\|x\|_{\ell^p}$ ist. Daher liegt jedes beliebige $x \in \ell^p$ auch in ℓ^q. Dies bedeutet nichts anderes als $\ell^p \subset \ell^q$. □

Hinweis: Insbesondere gilt daher $\ell^1 \subset \ell^2$. Künftig wird lediglich dieser Spezialfall für uns von Interesse sein.

2.2 Lineare Operatoren

In diesem Abschnitt führen wir (stetige) linearen Operatoren und ihre grundlegenden Eigenschaften ein. Den Definitionsbereich eines linearen Operators T, der ein Untervektorraum eines normierten Raumes $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ist, bezeichnen wir mit $D(T)$. Wir fordern an dieser Stelle, dass der Definitionsbereich $D(T)$ dicht in $\mathcal{X}$ liegt. Anderenfalls könnte man statt $\mathcal{X}$ einen „kleineren“ Raum wählen, in dem $D(T)$ dann ein dichter Unterraum ist. Diese Forderung hat technische Gründe, die uns die weiteren Ausführungen erleichtern. Nach [Cla19, Kapitel 4] definieren wir:

Definition 2.20 Linearer Operator: Es seien $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ und $\big(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}\big)$ zwei normierte Räume. Eine Abbildung $T : D(T) \to \mathcal{Y}$ heißt linearer Operator, wenn für alle $x_1, x_2 \in D(T)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2) \quad \text{gilt.}$$

Um zu betonen, dass T linear ist, schreibt man oft auch $Tx := T(x)$.

Die Menge, die alle linearen Operatoren $T : \mathcal{X} \supset D(T) \to \mathcal{Y}$ enthält, bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und für $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ schreiben wir verkürzend $\mathscr{L}(\mathcal{X})$.

Hinweis: Man beachte, dass für die Definitionsbereiche von $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ auch $D(T_1) \neq D(T_2)$ gelten kann.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass im $\mathbb{K}^n$ jede lineare Abbildung durch Multiplikation mit einer eindeutig festgelegten Matrix dargestellt werden kann [Fis19, S. 249]. Im Unendlichdimensionalen ist das komplizierter. Zwei für unsere weiteren Überlegungen unabdingbare Begriffe, nämlich *Beschränktheit* und *Kompaktheit* eines linearen Operators, wollen wir nach [Wei00, Kapitel 2.1] und [Wer18, Kapitel II.3] erklären.

Definition 2.21 Beschränktheit eines Operators: Es sei $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein linearer Operator. Er heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq C \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \text{für alle } x \in D(T) \text{ gilt.}$$

Mit anderen Worten: Der lineare Operator T heißt beschränkt, wenn $\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq C_*$ für alle $x \in D(T)$ mit $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1$ gilt, wobei $C_* \geq 0$ ist. Beschränkte Mengen werden unter T also auf beschränkte Mengen abgebildet.

Beschränkte lineare Operatoren besitzen gutartige Eigenschaften, von denen einige, die für uns nützlich sind, in folgendem Satz aufgeführt sind.

Satz 2.22 *Es sei $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein linearer Operator. Dann sind die drei Aussagen*

(i) T ist stetig auf $D(T)$,

(ii) T ist stetig im Nullpunkt und

(iii) T ist ein beschränkter linearer Operator

gleichwertig.

Einen Beweis findet man in [Wei00, Satz 2.1] bzw. in [Wer18, Satz II.1.2].

Hinweis: Nach [Wer18, Satz II.1.5] gilt für beschränkte lineare Operatoren T, deren Definitionsbereich $D(T)$ dicht in $\mathcal{X}$ liegt, dass es eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widehat{T}$ von T auf ganz $\mathcal{X}$ gibt.
Für die Einschränkung der Fortsetzung $\widehat{T}$ auf $D(T)$ gilt $\widehat{T}|_{D(T)} = T$. Da wir zu Beginn dieses Abschnitts die Dichtheit von $D(T)$ in $\mathcal{X}$ vorausgesetzt haben, gilt obiges für alle von uns betrachteten Operatoren und wir können statt T sofort dessen stetige Fortsetzung $\widehat{T}$ betrachten und dann problemlos $D(T) = \mathcal{X}$ setzen.

Die Menge, die alle beschränkten linearen Operatoren $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ enthält, bezeichnen wir mit $\mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, für $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ schreiben wir verkürzend $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ und es gilt für $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ stets $D(T_1) = \mathcal{X} = D(T_2)$.

Später wird es von zentraler Bedeutung sein, die *Länge* oder *Größe* linearer Operatoren zu bestimmen. Daher führen wir nach [Kab18, Satz 3.1 mit Bemerkung] den Begriff der Operatornorm ein.

Definition 2.23 **Operatornorm:** Es sei $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein beschränkter linearer Operator. Dann setzen wir als Operatornorm auf $\mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

$$\|T\|_{\mathscr{L}} := \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \in [0, \infty).$$

Der Wert $\|T\|_{\mathscr{L}}$ ist die kleinstmögliche Konstante $C_* \geq 0$ in Definition 2.21.

Hinweis:

(i) Wegen der Linearität gilt auch $\|T\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$.

(ii) Wir beschränken uns in der Definition auf $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, da für $T \notin \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ obiges Supremum nicht existiert.

Dass die Operatornorm eine Norm ist, wollen wir als Satz formulieren.

Satz 2.24 Operatornorm ist Norm: *Der in Definition 2.23 erklärte Ausdruck $\|T\|_{\mathscr{L}}$ ist eine Norm auf dem Raum der beschränkten linearen Operatoren.*

Beweis: Es sei $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Falls $\|T\|_{\mathscr{L}} = 0$, so gilt für alle $x \in \mathcal{X}$, dass $\|Tx\|_{\mathcal{Y}} = 0$ ist, da das Supremum dieser Werte 0 ist. Weil $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ eine Norm ist, folgt sofort $Tx = 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$ und offenbar ist T der Nulloperator.
Ist andersherum T der Nulloperator, so folgt unmittelbar $\|T\|_{\mathscr{L}} = 0$. Daher ist die Definitheit erfüllt.

Weiterhin ist die Operatornorm homogen, denn für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\|\lambda T\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|\lambda Tx\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\lambda| \, \|Tx\|_{\mathcal{Y}} = |\lambda| \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} = |\lambda| \, \|T\|_{\mathscr{L}}.$$

Auch die Dreiecksungleichung wird erfüllt, weil für $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und $x \in \mathcal{X}$ mit $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$ gilt, dass

$$\|(T_1 + T_2)x\|_{\mathcal{Y}} = \|T_1 x + T_2 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} + \|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{X}}=1} \|T_1 \xi\|_{\mathcal{Y}} + \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{X}}=1} \|T_2 \xi\|_{\mathcal{Y}}$$

ist. Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen nun genau die Operatornormen von T_1 und T_2. Betrachtet man auf der linken Seite der Ungleichung nun das Supremum aller Werte, so folgt

$$\sup_{\|\xi\|_{\mathcal{X}}=1} \|(T_1 + T_2)\xi\|_{\mathcal{Y}} = \|T_1 + T_2\|_{\mathscr{L}} \leq \|T_1\|_{\mathscr{L}} + \|T_2\|_{\mathscr{L}}$$

und es ist klar, dass die Operatornorm eine Norm ist, wie behauptet. □

Hinweis: Ist $\mathcal{Y}$ vollständig, so ist nach [Wer18, Satz II.1.4] der Raum der beschränkten Operatoren selbst ebenso vollständig und damit ein Banachraum.

Neben den Eigenschaften einer Norm erfüllen Operatornormen noch weitere nützliche Eigenschaften.

Satz 2.25 Submultiplikativität: *Es seien $T_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $T_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ zwei beschränkte lineare Operatoren. Dann gilt*

(i) für alle $x \in \mathcal{X}$, dass $\|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T_1\|_{\mathscr{L}} \|x\|_{\mathcal{X}}$ ist.

(ii) die Ungleichung $\|T_2 T_1\|_{\mathscr{L}} \leq \|T_1\|_{\mathscr{L}} \|T_2\|_{\mathscr{L}}$.

Beweis: Wir beweisen zunächst (i). Im Fall $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $x \neq 0$ normieren wir und definieren $\lambda := \frac{1}{\|x\|_{\mathcal{X}}} > 0$. Damit ergibt sich

$$\lambda \|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{X}}=1} \|T_1 \xi\|_{\mathcal{Y}} = \|T_1\|_{\mathscr{L}}$$

und Division durch λ liefert $\|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{X}}=1} \|T_1 \xi\|_{\mathcal{Y}} = \frac{1}{\lambda} \|T_1\|_{\mathscr{L}} = \|T_1\|_{\mathscr{L}} \|x\|_{\mathcal{X}}$. Dies ist genau die erste Behauptung.

Um (ii) zu beweisen, verwenden wir zweimal (i). Für $x \in \mathcal{X}$ mit $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$ ist

$$\|T_2 T_1 x\|_{\mathcal{Z}} = \|T_2(T_1 x)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|T_2\|_{\mathscr{L}} \|T_1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T_2\|_{\mathscr{L}} \|T_1\|_{\mathscr{L}} \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|T_2\|_{\mathscr{L}} \|T_1\|_{\mathscr{L}}.$$

Betrachten wir auf der linken Seite der Ungleichung das Supremum, so erhalten wir dort $\|T_2 T_1\|_{\mathscr{L}}$, was genau Behauptung (ii) entspricht. □

Nach [Alt12, Kapitel 8] erklären wir den Begriff des kompakten Operators.

Definition 2.26 Kompakter Operator: Ein seien $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein Operator, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ zwei Banachräume und $A \subset D(T)$ beschränkt. Der Operator T heißt kompakt, wenn $\overline{T(A)}$ kompakt ist.

Hinweis: Für die Kompaktheit genügt es wegen der Linearität von T zu zeigen, dass der Abschluss des Bildes der offenen Einheitskugel von $\mathcal{X}$ kompakt ist, weil jede beschränkte Menge $A \subset D(T)$ in einer offenen Kugel enthalten ist.

Wir wollen zeigen, dass jeder kompakte Operator T stetig ist: Wenn $\overline{T(A)} \subset \mathcal{Y}$ kompakt ist, ist diese Menge insbesondere auch beschränkt. Also ist auch die Menge $T(A)$ beschränkt. Folglich bildet T jede beschränkte Menge $A \subset D(T)$ auf eine beschränkte Menge $T(A) \subset \mathcal{Y}$ ab. Das ist genau die Definition eines beschränkten linearen Operators, also ist $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und wir können auch hier $D(T) = \mathcal{X}$ annehmen. Nach Satz 2.22 sind Beschränktheit und Stetigkeit für lineare Operatoren äquivalent. Damit ist auch T stetig. Die Menge aller kompakten linearen Operatoren $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und für $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ schreiben wir verkürzend $\mathscr{K}(\mathcal{X})$. Folglich gilt die Inklusion

$$\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Zum Schluss führen wir nach [Wei00, Kapitel 3.3] noch eine wichtige Klasse beschränkter linearer Operatoren ein.

Definition 2.27 Hilbert-Schmidt-Operator: Es seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ zwei Hilberträume, I eine abzählbare Indexmenge und $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein beschränkter linearer Operator. Wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} := (b_i)_{i \in I}$ gibt, sodass

$$\sum_{i \in I} \|Tb_i\|_{\mathcal{Y}}^2 < \infty \quad \text{ist,}$$

nennt man T einen Hilbert-Schmidt-Operator.

Für einen Hilbert-Schmidt-Operator $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kann man nachweisen, dass die Zahl

$$\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i \in I} \|Tb_i\|_{\mathcal{Y}}^2}$$

nicht von der Wahl der Orthonormalbasis abhängt. Man bezeichnet $\|T\|_{HS}$ als Hilbert-Schmidt-Norm von T [Kab18, Kapitel 12.3]. In unserem Fall wird die Indexmenge $I = \mathbb{N}$ sein. Weiter gilt, dass jeder Hilbert-Schmidt-Operator sogar kompakt ist [Wei00, Satz 3.18b)].

2.3 Grundlagen unendlicher Matrizen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ab nun zwei unendlichdimensionale, separable Hilberträume und wollen untersuchen, wann ein linearer Operator $T : \mathcal{X} \supset D(T) \to \mathcal{Y}$ durch eine unendliche Matrix repräsentiert werden kann und wann eine unendliche Matrix einen linearen Operator T darstellt. Ersteres funktioniert immer, wenn der Definitionsbereich von T eine Orthonormalbasis enthält. Dies ist hier stets der Fall, denn wir haben gefordert, dass $D(T)$ ein dichter Untervektorraum von $\mathcal{X}$ ist.

Wir werden uns später genauer überlegen, wie wir für einen gegebenen beschränkten linearen Operator die Matrixelemente derjenigen unendlichen Matrix berechnen können, die ihn repräsentiert. Dazu definieren wir zunächst nach [Hel10, §6], was eine unendliche Matrix ist.

Definition 2.28 Unendliche Matrix: Unter einer unendlichen Doppelfolge (reeller oder) komplexer Zahlen

$$M := (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m_{ij} \in \mathbb{C}$$

wollen wir eine unendliche Matrix verstehen.

Hinweis: Später werden wir auch unendliche Matrizen sehen, die beidseitig unendlich sind oder $\mathbb{N}_0$ als Indexmenge besitzen. Durch eine andere Wahl der Indexmenge können diese auf die hier definierten zurückgeführt werden.

Nach [Wei00, Kapitel 6.2] gilt der folgende Satz, der klärt, wann eine unendliche Matrix einen linearen Operator repräsentiert:

Satz 2.29 *Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen der Räume $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ und $M := (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Dann ist für alle $x \in D(T_M) \subset \mathcal{X}$ mit*

$$D(T_M) := \left\{ x \in \mathcal{X} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}\langle a_j, x\rangle_{\mathcal{X}} \text{ existiert für jedes } j,\ \sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}\langle a_j, x\rangle_{\mathcal{X}}\right|^2 < \infty \right\}$$

ein linearer Operator $T_M : D(T_M) \to \mathcal{Y}$ erklärt durch

$$T_M x := Mx = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} \langle a_j, x \rangle_{\mathcal{X}} \right) b_i.$$

Der Beweis basiert im Wesentlichen auf den Eigenschaften des Skalarprodukts und auf den Regeln für das Rechnen mit Reihen. Dieser kann etwa in [Wei00, Kapitel 6.2] nachgelesen werden.

Hinweis: Dieser Satz gibt lediglich an, für welchen Definitionsbereich durch eine unendliche Matrix ein linearer Operator erzeugt wird. Tatsächlich kann, je nach Beschaffenheit von M, dieser Definitionsbereich $D(T_M)$ sehr klein werden oder sogar nur noch die 0 umfassen.

Obiger Satz sagt weder etwas über die Stetigkeit von T_M aus noch kann umgekehrt gefolgert werden, wann sich ein linearer Operator durch eine Matrix repräsentieren lässt (dies haben wir zu Beginn des Abschnitts bereits kurz angeschnitten). Wir wollen diese Fragestellung nun noch einmal ausführlicher beleuchten und beschränken uns dabei von Beginn an auf den Raum ℓ^2. Es sei dazu $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2)$ ein stetiger linearer Operator. Wir wissen aus den Sätzen 2.17 und 2.18, dass die Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis bilden und jedes $x \in \ell^2$ darstellbar ist als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_{\ell^2} \, e_k.$$

Betrachten wir andererseits die unendliche Matrix M mit $m_{ij} := \langle T_M e_j, e_i \rangle_{\ell^2} \in \mathbb{C}$ und berechnen $T_M x$, so erhalten wir wegen Stetigkeit und Linearität von T_M

$$T_M x = T_M \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot T_M e_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle T_M e_j, e_i \rangle_{\ell^2} \, e_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} x_j \right) e_i.$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Reihen nach [Wer18, Satz V.4.8] *unbedingt konvergent* sind und daher die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt. Also gibt es eine unendliche Matrix M mit $m_{ij} := \langle T_M e_j, e_i \rangle_{\ell^2}$, die den Operator T_M repräsentiert, weil wir nachgewiesen haben, dass $T_M x = Mx$ für $x \in \ell^2$ gilt. Folglich lässt sich jeder beschränkte (und damit stetige) lineare Operator auf ℓ^2 als unendliche Matrix darstellen.

Wir wollen uns nun nach [Wei00, Satz 6.6] und [Hal82, Problem 45] noch einige Kriterien überlegen, mit deren Hilfe wir feststellen können, ob ein durch eine unendliche Matrix erzeugter linearer Operator beschränkt ist.

Satz 2.30 *Es sei M eine unendliche Matrix derart, dass*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|m_{ij}|^2 = C^2 < \infty \quad \textit{ist.}$$

Dann gilt: Der durch M repräsentierte Operator $T_M : \ell^2 \to \ell^2$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator mit Hilbert-Schmidt-Norm $\|T_M\|_{HS} = C$.

Einen Beweis dieses nützlichen Satzes findet man in [Wei00, Satz 6.6a)].

Satz 2.31 Schur-Test, Variante 1: *Es seien M eine unendliche Matrix mit nicht-negativen Einträgen $m_{ij} \in [0,\infty)$ und $\beta,\gamma \in (0,\infty)$ zwei positive Zahlen sowie p, q zwei Folgen positive reeller Zahlen mit*

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{ij}p_i \le \beta q_j \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}q_j \le \gamma p_i \quad \textit{für alle } i,j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt: Es existiert ein beschränkter linearer Operator $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2)$, der durch M repräsentiert wird, mit Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} \le \sqrt{\beta\gamma}$.

Beweis: Wir gehen ähnlich wie [Hal82, Problem 45] vor und betrachten dafür eine Folge $\alpha \in c_{00} \subset \ell^2$. Folglich gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha_j = 0$ ist für alle $j \ge l$.

Es ergibt sich damit für jedes $n \in \mathbb{N}$ unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Bedingungen an die Folgen p und q

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{l} m_{ij}\alpha_j\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{l}\sqrt{m_{ij}}\sqrt{q_j}\cdot\frac{\sqrt{m_{ij}}\alpha_j}{\sqrt{q_j}}\right|^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{l} m_{ij}q_j\right)\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{m_{ij}|\alpha_j|^2}{q_j}\right) && \text{(Satz 2.8)} \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\gamma p_i\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{m_{ij}|\alpha_j|^2}{q_j}\right) = \gamma\sum_{j=1}^{l}\frac{|\alpha_j|^2}{q_j}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}p_i && \text{(Voraussetzung)} \\
&\le \gamma\sum_{j=1}^{l}\frac{|\alpha_j|^2}{q_j}\cdot\beta q_j = \beta\gamma\underbrace{\sum_{j=1}^{l}|\alpha_j|^2}_{\xrightarrow{l\to\infty}\|\alpha\|_{\ell^2}} && \text{(Voraussetzung)}
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Grenzwert für $l \to \infty$, so ergibt sich $Mx \in \ell^2$ und $\|T_M\|_{\mathscr{L}} \leq \beta\gamma$. □

Satz 2.32 Schur-Test, Variante 2: *Es sei M eine unendliche Matrix mit Einträgen $m_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ derart, dass*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}|^2 \leq C_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{für alle } i, j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt: Es existiert ein beschränkter linearer Operator $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2)$, der durch M repräsentiert wird, mit Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} \leq \sqrt{C_1C_2}$.

Beweis: Der Beweis ähnelt dem von Satz 2.31, wir wollen ihn aber trotzdem nach [Wei00, Satz 6.6b] explizit führen. Dazu betrachten wir für $x \in \ell^2$

$$\begin{aligned} Mx &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} \langle e_j, x\rangle_{\ell^2} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}b_{ij} \langle e_j, x\rangle_{\ell^2} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij} \langle e_j, x\rangle_{\ell^2}|^2 \right) \leq C_2 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^2 \left|\langle e_j, x\rangle_{\ell^2}\right|^2 \\ &\leq C_1C_2 \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = C_1C_2 \|x\|_{\ell^2}^2 . \end{aligned}$$

Somit ist der durch M repräsentierte lineare Operator T_M beschränkt mit Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} \leq \sqrt{C_1C_2}$. □

Hinweis: Daraus folgert [Wei00, Korollar 6.7] sofort, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} |m_{ij}| \leq C_1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |m_{ij}| \leq C_2 \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N}$$

hinreichend ist dafür, dass M einen beschränkten linearen Operator erzeugt.

Kapitel 3

Unendliche Matrizen

Ziel dieses Kapitels ist es, zu untersuchen, wie die Matrixelemente $m_{ij} \in \mathbb{C}$ einer *unendlichen Matrix* M beschaffen sein können, damit für $x \in \ell^2$ stets auch das Matrix-Vektor-Produkt Mx quadratsummierbar ist. In diesem Fall ist durch die Matrix M dann ein beschränkter linearer Operator $T_M : \ell^2 \to \ell^2$ definiert. Für einige spezielle Teilmengen von ℓ^2 bzw. einige Matrizen kann diese Frage leicht beantwortet werden.

Während die analoge Frage für den Banachraum

$$c_0 := c_0(\mathbb{N}) := \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{C}, \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_{c_0} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

aller Nullfolgen bereits ausreichend beleuchtet ist und es hinreichende und notwendige Kriterien gibt, sind derzeit keine notwendigen Kriterien für den Raum ℓ^2 bekannt [Mad70, Seite 161-165].

Um ein besseres Verständnis davon zu bekommen, wie ein hinreichendes bzw. notwendiges Kriterium aussehen könnte, formulieren wir beide an dieser Stelle in Anlehnung an [Mad70, Kapitel 7, Thm. 1 und 2] für c_0.

Satz 3.1 Hinreichendes Kriterium für Operatoren in $\mathscr{B}(c_0)$: *Es sei M eine unendliche Matrix, bei der alle Spalten $(m_{ij})_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ Nullfolgen sind und*

$$\widetilde{M} := \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |m_{ij}| < \infty \quad \textit{ist.}$$

Dann gilt: Durch M wird ein beschränkter linearer Operator $T_M \in \mathscr{B}(c_0)$ dargestellt mit Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} = \widetilde{M}$.

Wir wissen nun, dass ein gewisser Typ von unendlichen Matrizen einen stetigen linearen Operator auf c_0 erklärt. Es folgt das notwendige Kriterium.

Satz 3.2 Notwendiges Kriterium für Operatoren in $\mathscr{B}(c_0)$: *Es sei $T_M \in \mathscr{B}(c_0)$ ein beschränkter linearer Operator mit Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} =: \widetilde{M}$. Dann gibt es eine eindeutige unendliche Matrix M derart, dass $T_M x = Mx$ für $x \in c_0$ gilt und alle Spalten $(m_{ij})_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ sind und insbesondere*

(i) $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |m_{ij}| = \widetilde{M}$ *gilt und*

(ii) für jedes $x \in c_0$ für die Einträge $(Mx)_k$ von $Mx \in c_0$ gilt $(Mx)_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} m_{kj} x_j$.

Einen sehr ausführlichen Beweis für jeden der beiden Sätze findet man in [Mad70, Seiten 163f.].

3.1 Shift- und Permutationsmatrizen

Zu Beginn möchten wir einige unendliche Matrizen angeben, für die es (beinahe) offensichtlich ist, dass sie einen beschränkten linearen Operator $T_M : \ell^2 \to \ell^2$ repräsentieren. Selbstverständlich kann man auch noch eine 0-te Zeile und Spalte hinzufügen und erhält dann beschränkte lineare Operatoren auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Satz 3.3 Nullmatrix: *Es seien $x \in \ell^2$ beliebig und M die unendliche Nullmatrix mit Einträgen $m_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $Mx \in \ell^2$.*

Beweis: Für alle $x \in \ell^2$ ist offensichtlich $Mx = (0, 0, \ldots)^\top \in \ell^2$. □

Hinweis: Das Produkt aus jeder beliebigen Folge x und der unendlichen Nullmatrix ist quadratsummierbar. Der maximale Definitionsbereich für den zugehörigen beschränkten linearen Operator nach ℓ^2 ist also der Raum aller Folgen.

Lemma 3.4 Identitätsmatrix: *Es seien $x \in \ell^2$ beliebig und M die unendliche Identitätsmatrix mit Einträgen* $m_{ij} = \delta_{ij}$. *Dann ist $Mx \in \ell^2$.*

Beweis: Für alle $x \in \ell^2$ ist offensichtlich $Mx = x \in \ell^2$. □

Satz 3.5 Skalarmatrizen: *Es seien $x \in \ell^2$ beliebig, $\lambda \in \mathbb{C}$ und M eine unendliche Skalarmatrix mit* $m_{ij} = \lambda\delta_{ij}$. *Dann ist $Mx \in \ell^2$.*

Beweis: Für alle $x \in \ell^2$ gilt $Mx = \lambda x \in \ell^2$. □

Wir wollen nun nicht mehr nur Skalarmatrizen betrachten, sondern uns für $\lambda \in \mathbb{C}$ unendliche Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ansehen. Wir nennen sie skalierende Shift-Matrizen.

Satz 3.6 Skalierende Shift-Matrizen: *Es seien $x \in \ell^2$ beliebig, $\lambda \in \mathbb{C}$ und M eine skalierende Shift-Matrix, das heißt, dass die Einträge von M durch*

$$m_{ij} = \lambda\delta_{(i-n)j} \quad \textit{für festes } n \in \mathbb{Z} \textit{ gegeben sind.}$$

Dann ist $Mx \in \ell^2$.

Hinweis: Die drei obigen Matrizen sind skalierende Shift-Matrizen mit $n \in \{-2, 0, 1\}$. Im Fall $n = 0$ ist das nichts weiter als eine gewöhnliche Skalarmatrix. Falls zusätzlich $\lambda = 1$ gilt, verschieben solche Matrizen die Folgenglieder lediglich. Multiplikation mit der ersten Beispielmatrix ergibt dann etwa $\ell^2 \ni x := (x_1, x_2, \dots)^\top \mapsto Mx = (x_3, x_4, \dots)^\top \in \ell^2$.

Beweis: Es seien $x \in \ell^2$ und M eine skalierende Shift-Matrix mit $m_{ij} = \lambda\delta_{(i-n)j}$. Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung durch Satz 3.3 abgedeckt. Es ist für $\lambda \neq 0$

$$(Mx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} x_j = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(i-n)j} x_j = \lambda x_{i-n}$$

und weiterhin gilt

$$\|Mx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(Mx)_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_{i-n}|^2 \leq |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = |\lambda|^2 \|x\|_{\ell^2}^2 < \infty,$$

wobei $\quad x_{i-n} = 0 \quad$ für $i - n < 1$ gilt. Insgesamt folgt $Mx \in \ell^2$. $\square$

Hinweis: Auch unendliche Matrizen, bei denen endlich viele Diagonalen mit Skalaren gefüllt sind, definieren beschränkte lineare Operatoren. Das liegt daran, dass $\mathscr{B}(\ell^2)$ selbst ein Vektorraum (sogar ein Banachraum, siehe *Hinweis* zu Satz 2.24) ist und daher abgeschlossen: Für $T_{M_1}, T_{M_2} \in \mathscr{B}(\ell^2)$ gilt, dass auch $T_{M_1} + T_{M_2} \in \mathscr{B}(\ell^2)$ ist.

Für den nächsten Satz lohnt es sich, die Indizierung der Matrixelemente und die der Folgenglieder anzupassen. Wir betrachten nun die unendliche Matrix M mit $M := (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ und $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Da man durch geeignete Indexverschiebung wieder zu den natürlichen Zahlen als Indexmenge gelangen kann, macht dies keinen Unterschied, allerdings vereinfacht es die Notation.

Wir untersuchen nun beidseitig unendliche Matrizen, die nur auf ihrer Gegendiagonalen nicht zwingend die Zahl 0 stehen haben und nennen sie Antiskalarmatrizen. Sie haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Satz 3.7 Antiskalarmatrizen: *Es seien $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig und M eine unendliche Matrix, für deren Einträge m_{ij} mit $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt, dass*

$$m_{ij} = \lambda \delta_{i(-j)} \quad \textit{ist.}$$

Dann ist $Mx \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Beweis: Der Fall $\lambda = 0$ ist bereits von Satz 3.3 abgedeckt.

Das Matrix-Vektor-Produkt Mx liefert im Fall $\lambda \neq 0$ für die Komponenten

$$(Mx)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_{kj} x_j = \lambda \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{k(-j)} x_j = \lambda x_{-k},$$

also gilt $\ell^2(\mathbb{Z}) \ni x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^\top \mapsto Mx = (\ldots, \lambda x_1, \lambda x_0, \lambda x_{-1}, \ldots)^\top$. Diese Folge ist offensichtlich selbst wieder quadratsummierbar und hat Norm $|\lambda| \, \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. Das ist genau die Behauptung. □

Die Idee von Satz 3.6 kann noch auf eine andere Art verallgemeinert werden.

Satz 3.8 Permutationsmatrix: *Es seien $x \in \ell^2$ beliebig, $\lambda \in \mathbb{C}$ und M eine unendliche Matrix, bei der in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag nicht 0, sondern λ ist. Für die Einträge gilt also*

$$m_{ij} = \lambda \delta_{\pi(i)j}, \quad \text{wobei} \quad \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

eine beliebige Permutation der natürlichen Zahlen ist. Dann ist $Mx \in \ell^2$.

Beweis: Der Fall $\lambda = 0$ ist bereits von Satz 3.3 abgedeckt.

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda = 1$. Dann permutiert die Multiplikation von M mit x lediglich die Einträge von x und es gilt sogar $\|Mx\|_{\ell^2} = \|x\|_{\ell^2}$.

Im Fall $\lambda \notin \{0, 1\}$ permutiert die Multiplikation mit M nicht nur die Einträge von x, sondern skaliert sie zusätzlich noch mit λ. Demnach gilt $\|Mx\|_{\ell^2} = |\lambda| \, \|x\|_{\ell^2}$. □

3.2 Weitere Beispiele

Zunächst wollen wir nicht versuchen, ein Kriterium für die Einträge der unendlichen Matrizen zu finden, sodass diese auf ℓ^2 einen beschränkten linearen Operator repräsentieren. Stattdessen schränken wir den Definitionsbereich auf diejenigen $x \in \ell^2$ ein, für die es einfach ist, eine unendliche Matrix derart zu finden, dass $Mx \in \ell^2$ ist. Insbesondere werden wir den dicht liegenden Untervektorraum $c_{00} \subset \ell^2$ betrachten, den wir bereits in Kapitel 2 kennengelernt haben.

Satz 3.9 Einfaches Beispiel: *Es seien $a \in \mathbb{C}$, $x := ae_k \in c_{00}$ ein Vielfaches eines der Einheitsvektoren e_k und M eine unendliche Matrix mit Matrixelementen $m_{ij} \in \mathbb{C}$. Für das Matrix-Vektor-Produkt Mx gilt dann*

$$Mx \in \ell^2 \iff (m_{ik})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Mit anderem Worten: Genau dann, wenn die k-te Spalte von M quadratsummierbar ist, ist es Mx ebenfalls.

Beweis: Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Fall $k = 1$. Die quadratsummierbare Folge $x \in c_{00}$ ist dann gegeben als $x := (a, 0, 0, 0, \dots)^\top$. Berechnen wir das Matrix-Vektor-Produkt, erhalten wir wegen der Nulleinträge

$$Mx = a \cdot (m_{11}, m_{21}, m_{31}, \dots)^\top \in \ell^2,$$

also genau das a-fache der ersten Spalte von M und das Gewünschte ist gezeigt, weil $\|Mx\|_{\ell^2} = |a| \, \|(m_{i1})_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}$ ist. Für alle anderen $k \in \mathbb{N}$ geht man analog vor. $\square$

Wir betrachten nun unendliche Matrizen, bei denen nur endlich viele Spalten selbst quadratsummierbar sind.

Satz 3.10 *Es seien S eine endliche Indexmenge, $s \in S$, $x \in c_{00}$ mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Einträgen $x_s \in \mathbb{C}$ und M eine unendliche Matrix mit Matrixelementen $m_{ij} \in \mathbb{C}$. Für das Matrix-Vektor-Produkt Mx gilt dann*

$$Mx \in \ell^2, \quad \text{falls } (m_{is})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \text{ ist für alle } s \in S.$$

Weiter sind die Einträge $(Mx)_k$ von Mx gegeben durch

$$(Mx)_k = \sum_{s=1}^{\infty} m_{ks} x_s \quad \textit{und diese Reihe ist für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ konvergent.}$$

Beweis: Es seien M und x wie in Satz 3.10 beschrieben definiert, also etwa

$$M := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := (x_1, x_2, x_3, \dots)^\top .$$

Bildet man nun das Matrix-Vektor-Produkt Mx, so erhält man für den k-ten Eintrag

$$(Mx)_k = m_{k1}x_1 + m_{k2}x_2 + m_{k3}x_3 + \ldots = \sum_{s=1}^{\infty} m_{ks}x_s = \sum_{s \in S} m_{ks}x_s .$$

Diese Reihe konvergiert, da nur endlich viele Summanden – nämlich genau diejenigen mit Index $s \in S$ – ungleich 0 sind.

Weiter ist offenbar $Mx \in \ell^2$, da die Spalten $(m_{is})_{i\in\mathbb{N}}$ per definitionem für alle $s \in S$ ℓ^2-Folgen sind. □

Folgerung 3.11 Wir haben also herausgefunden, dass $c_{00} \subset D(T_M)$ ist, wenn alle Spalten der Matrix M, die den linearen Operator T_M repräsentiert, ℓ^2-Folgen sind.

Satz 3.12 Diagonalmatrizen: *Es seien $x, y \in \ell^2$ beliebig und M eine unendliche Matrix mit $m_{ij} = \delta_{ij} y_i \in \mathbb{C}$, also eine Diagonalmatrix mit Folgengliedern von y auf der Diagonalen. Dann ist $Mx \in \ell^2$.*

Beweis: Es seien M und x wie gefordert definiert. Die Einträge von Mx sind dann gegeben durch $(Mx)_k = m_{kk}x_k = y_k x_k \in \mathbb{C}$. Folglich ist Mx das komponentenweise Produkt zweier ℓ^2-Folgen und als solches nach Satz 2.9 selbst eine ℓ^1-Folge. Nach Satz 2.19 gilt insbesondere $\ell^1 \subset \ell^2$ und somit ist das Gewünschte, die Quadratsummierbarkeit von Mx, gezeigt. □

Hinweis: Damit $Mx \in \ell^2$ ist, genügt es an dieser Stelle *nicht*, dass lediglich $x \in \ell^2$ ist, während die Diagonalelemente der Matrix beliebige komplexe Zahlen $m_{kk} \in \mathbb{C}$ sind. Ein mögliches Gegenbeispiel kann man leicht finden, indem man

$$x \in \ell^2 \text{ mit } x_k := \tfrac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad m_{kk} := k^2 \in \mathbb{N} \quad \text{als Matrixelemente wählt.}$$

Multiplikation ergibt Mx mit $(Mx)_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und diese sind nicht quadratsummierbar.

Beispiel 3.13 Wir betrachten den linearen Operator

$$T_M : \ell^2 \to \ell^2 \quad \text{mit} \quad \ell^2 \ni x := (x_1, x_2, x_3, \dots)^\top \mapsto T_M x := \left(x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \dots\right)^\top \in \ell^2.$$

Dieser ist auf ℓ^2 offensichtlich beschränkt, weil $\|x\|_{\ell^2} \geq \|T_M x\|_{\ell^2}$ ist. Trotzdem wollen wir die Beschränktheit von T_M mithilfe der zugehörigen Matrix M, die die Elemente $m_{ij} := \frac{1}{j}\delta_{ij}$ hat, untersuchen. Man kann leicht sehen, dass die Multiplikation von M mit $x \in \ell^2$ genau der Wirkung von T_M auf $x \in \ell^2$ entspricht, $T_M x = Mx$.

Da auf der Diagonalen eine ℓ^2-Folge steht, gilt nach Satz 3.12 in der Tat $T_M x \in \ell^2$ für alle $x \in \ell^2$. Mit Satz 2.30 können wir sehen, dass T_M ein Hilbert-Schmidt-Operator und damit insbesondere beschränkt ist. Zusätzlich können wir auch noch seine Hilbert-Schmidt-Norm ausrechnen. Für diese gilt

$$\|T_M\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{ij}\frac{1}{j^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{also ist} \quad \|T_M\|_{HS} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Für unsere nächsten Überlegungen bietet es sich an, eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu verwenden, um die Matrixelemtente zu beschreiben. Wir setzen dazu $m_{ij} := y_j$ und betrachten in einem ersten Schritt symmetrische Matrizen der Form

$$M := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ y_2 & 0 & 0 & \dots \\ y_3 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.14 *Es seien $x, y \in \ell^2$ beliebig, M eine unendliche symmetrische Matrix mit Matrixelementen m_{ij}, die gegeben sind als* *(i)* $m_{1j} = m_{j1} = y_j \in \mathbb{C}$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $m_{ij} = 0$ *für alle* $i \neq 1$.

Dann gilt $Mx \in \ell^2$.

Beweis: Betrachtet man das Matrix-Vektor-Produkt Mx, so erhält man wegen der Symmetrie

$$(Mx)_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_{1k}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k \in \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad (Mx)_j = m_{j1}x_1 = y_j x_1 \in \mathbb{C} \quad \text{für } j \neq 1.$$

Die Reihe $(Mx)_1$ ist stets konvergent, weil die Summanden als Produkte der Einträge zweier ℓ^2-Folgen selbst ℓ^1-Folgenglieder sind. Die restlichen Einträge $(Mx)_{j,j\neq 1}$ sind als Produkte der Einträge zweier ℓ^2-Folgen ebenfalls summierbar. Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|(Mx)_j\right| < \infty, \quad \text{also } Mx \in \ell^1,$$

woraus mit Satz 2.19 folgt, dass $Mx \in \ell^2$ ist. □

Eine Verallgemeinerung der Matrizen aus Lemma 3.14 sind etwa diejenigen mit Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ 0 & y_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_2 & 0 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ 0 & 0 & y_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_5 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Satz 3.15 *Es seien* $x, y \in \ell^2$ *beliebig,* $a \in \mathbb{N}$ *und* M *eine unendliche symmetrische Matrix mit Matrixelementen* m_{ij}, *die gegeben sind als*

(i) $m_{aj} = m_{ja} = y_j \in \mathbb{C}$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $m_{ij} = 0$ *sonst.*

Dann gilt $Mx \in \ell^2$.

Beweis: Der Beweis funktioniert analog wie der von Lemma 3.14. Dort wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Spezialfall $a = 1$ bewiesen. □

Hinweis: Einige Beispiele für derartige Matrizen sind vor Satz 3.15 angegeben, nämlich die Fälle $a \in \{2, 3, 4\}$.

Eine weitere Verallgemeinerung der bisher betrachteten Matrizen ist die zu solchen der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ 0 & 0 & y_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1 & 0 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei sind wieder bis auf eine Spalte und Zeile nur Nulleinträge in der Matrix vorhanden. Die Verallgemeinerung ist, dass diejenige Zeile und diejenige Spalte, die nicht *fast überall* nur 0 enthalten, sich nicht mehr auf der Diagonalen *treffen* müssen. Auch der folgende Satz lässt sich geschickt auf Lemma 3.14 zurückführen und daher leicht beweisen.

Satz 3.16 *Es seien $x, y \in \ell^2$ beliebig, $a, b \in \mathbb{N}$ und M eine unendliche Matrix deren b-te Spalte und a-te Zeile durch $y \in \ell^2$ gegeben sind und die sonst nur Nulleinträge enthält. Für die Matrixelemente gilt also*

(i) $m_{aj} = y_j \in \mathbb{C}$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $m_{ib} = y_i \in \mathbb{C}$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *und* $m_{ab} = y_a \in \mathbb{C}$ *sowie*

(iii) $m_{ij} = 0$ *für alle* $(i, j) \neq (a, b)$.

Dann gilt: Es ist $Mx \in \ell^2$.

Beweis: Für den Fall $a = b$ müssen wir nichts zeigen, denn dies ist nichts anderes als die Aussage von Satz 3.15.

Im Fall $a \neq b$ liefert die Multiplikation von M mit $x \in \ell^2$ für die Folge Mx

(i) für den a-ten Eintrag $(Mx)_a = \sum_{k=1}^{\infty} m_{ak} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k \in \mathbb{C}$.

(ii) für die anderen Einträge $(Mx)_{i,i\neq a} = m_{ib}x_b = y_i x_b \in \mathbb{C}$.

Die Reihe in (i) ist stets konvergent, denn die Summanden sind Produkte der Folgenglieder zweier ℓ^2-Folgen und damit selbst Folgenglieder einer ℓ^1-Folge. Die restlichen Einträge $(Mx)_{i,i\neq a}$ von Mx sind ebenfalls Einträge einer ℓ^1-Folge.

Also ist auch

$$|(Mx)_a| + \sum_{i=1,i\neq a}^{\infty} |(Mx)_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |(Mx)_i| < \infty, \quad \text{das heißt } Mx \in \ell^1$$

und mit Satz 2.19 ergibt sich sofort, dass $Mx \in \ell^2$ ist. □

Hinweis: Um sich die Schritte innerhalb des Beweises besser vorstellen zu können, schadet es nicht, den Beweis etwa für den Fall $a = 2$ und $b = 3$ (dritte der Beispielmatrizen) nachzuvollziehen.

Eine völlig andere Gestalt als die bisher untersuchten Matrizen haben diejenigen, die wir im Folgenden betrachten möchten. Dazu beziehen wir uns auf [Wei00, Beispiel 6.8] und bauen dieses Beispiel noch etwas aus. Wir betrachten eine Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2^\alpha} & \frac{1}{2^\alpha} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3^\alpha} & \frac{1}{3^\alpha} & \frac{1}{3^\alpha} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4^\alpha} & \frac{1}{4^\alpha} & \frac{1}{4^\alpha} & \frac{1}{4^\alpha} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Eine solche Matrix ist insbesondere eine untere linke Dreiecksmatrix. Für diese kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.17 Eine untere linke Dreiecksmatrix: *Es seien $x \in \ell^2$, $\alpha \in \mathbb{N}$ und M eine unendliche Matrix mit*

$$m_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{i^\alpha} & j \leq i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: Es ist $Mx \in \ell^2$ und M repräsentiert einen beschränkten linearen Operator.

Beweis: Offenbar können die Einträge m_{ij} für $j \leq i$ als Produkt geschrieben werden, nämlich

$$m_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad \text{mit} \quad a_{ij} := \sqrt[4]{\tfrac{1}{i^\alpha \cdot j}} \quad \text{und} \quad b_{ij} := \sqrt[4]{\tfrac{j}{i^{3\alpha}}}\,.$$

Für die a_{ij}, b_{ij} gilt außerdem – unter Anwendung des Integralkriteriums für Reihen und Summen – für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \frac{1}{\sqrt{i^\alpha}} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}} \leq \frac{1}{\sqrt{i^\alpha}} \int\limits_0^i \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{i^\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{i^{\alpha-1}}} \leq 2$$

und weiter

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}|^2 = \sqrt{j} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^{3\alpha}}} \leq \sqrt{j} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^3}} = \sqrt{j} \left(\frac{1}{\sqrt{j^3}} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^3}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{j} + \sqrt{j} \int\limits_j^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{j} + \frac{2\sqrt{j}}{\sqrt{j}} \leq 1 + 2 = 3 \quad \text{ist,}$$

wobei wir hier auch schon abgeschätzt haben, dass diese Summen bzw. Reihen im Fall $\alpha = 1$ jeweils den größten Wert haben. Die ersten beiden Gleichheitszeichen ergeben sich jeweils aus der Struktur von M bzw. der Definition der Matrixelemente m_{ij}.

Nach Satz 2.32 repräsentiert M einen beschränkten linearen Operator T_M auf ℓ^2, für dessen Operatornorm $\|T_M\|_{\mathscr{L}} \leq \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ wir eine obere Schranke angeben können. □

Hinweis: Analoges gilt auch für eine entsprechende obere rechte Dreiecksmatrix.

Beispiel 3.18 Ein unbeschränkter Operator auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$: Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir die unendliche Matrix D mit

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sie repräsentiert keinen beschränkten linearen Operator auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Betrachtet man allerdings den Raum $c_{00}(\mathbb{N}_0) \subset \ell^2(\mathbb{N}_0)$, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass eine Multiplikation mit D Folgen aus $c_{00}(\mathbb{N}_0)$ nach $c_{00}(\mathbb{N}_0)$ abbildet.

Zusätzlich ist für einige $\ell^2(\mathbb{N}_0)$-Folgen das Produkt mit D auch quadratsummierbar, beispielsweise für $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ mit $\quad x_0 := 0,\ x_k := \frac{1}{k^2} \quad$ für $k \geq 1$, denn es ist

$$Dx = \left(0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\right)^\top \in \ell^2(\mathbb{N}_0).$$

Der Definitionsbereich umfasst also mehr Elemente als nur $c_{00}(\mathbb{N}_0)$-Folgen, aber nicht alle $\ell^2(\mathbb{N}_0)$-Folgen. Kurz gesagt gilt

$$c_{00} \subset D(T_D) \subset \ell^2(\mathbb{N}_0),$$

wobei hier $D(T_D)$ den Definitionsbereich von T_D bezeichnet.

Wir werden die Matrix D und den von ihr repräsentierten Operator T_D in Kapitel 4 noch ausführlich untersuchen.

3.3 Hilbert-Matrizen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der sogenannten Hilbert-Matrix und wollen zeigen, dass durch diese ein beschränkter linearer Operator auf ℓ^2 erklärt wird. Zunächst definieren wir nach [Ber02, Seite 274], was man unter einer Hilbert-Matrix versteht.

Definition 3.19 Hilbert-Matrix: Eine reellwertige unendliche Matrix H_k mit Matrixelementen $h_{ij} := \frac{1}{i+j-1}$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ nennt man Hilbert-Matrix. Dabei ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erlaubt und wir schreiben für $H_\infty =: H$.

Die Hilbert-Matrizen haben also die Gestalt

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Für diese Arbeit ist nur die unendliche Matrix H interessant. Betrachtet man deren Zeilen und Spalten, so fällt auf, dass diese jeweils quadratsummierbar sind. Auch die Diagonale ist quadratsummierbar. Tatsächlich sind aber weder Zeilen noch Spalten noch die Diagonale summierbar. Bei ihnen handelt es sich um Teilfolgen der harmonischen Folge.

Satz 3.20 *Die Hilbert-Matrix H erklärt einen linearen Operator $T_H \in \mathscr{B}(\ell^2)$.*

Beweis: Wir orientieren uns am Vorgehen von [Hal82, Problem 46], wollen uns den Beweis aber etwas ausführlicher überlegen und dazu Satz 2.31 verwenden. Aus Komfortgründen bietet es sich an, eine Indexverschiebung durchzuführen und $i, j \in \mathbb{N}_0$ zu wählen, dann sind die Einträge von H gegeben als $h_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$.

Für die Folgen $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(q_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ setzen wir

$$p_j := q_j := \frac{1}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}} \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Da H symmetrisch ist, genügt es, lediglich eine der beiden Voraussetzungen aus Satz 2.31 nachzuprüfen und es ist $\beta = \gamma$. Wir betrachten nun für $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{l} h_{ij} p_j = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{(i+j+1)\sqrt{j+\frac{1}{2}}} = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{\left(i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{j+\frac{1}{2}}}$$

und möchten mithilfe des Integralkriteriums zeigen, dass die Partialsummen für $l \to \infty$ konvergieren. Dazu definieren wir die Hilfsfunktion

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto g(x) := \frac{1}{(x+i+\frac{1}{2})\sqrt{x}}.$$

Man sieht leicht, dass $g(j+\frac{1}{2}) = h_{ij} p_j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Weiter ist g monoton fallend und nicht-negativ, weshalb das Integralkriterium [Wal04, Kapitel 12.5] anwendbar ist. Außerdem ist g linksgekrümmt, weshalb für $j \in \mathbb{N}_0$ (das Integral existiert für $j = 0$, wir werden das später sehen)

$$g\left(j+\tfrac{1}{2}\right) \leq \int_{j}^{j+1} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{gilt.}$$

Wir erhalten damit für jedes $i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=0}^{l} h_{ij} p_j = \sum_{j=0}^{l} g\left(j+\frac{1}{2}\right) \leq \int_{0}^{l+1} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+i+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}} = 2 \int_{0}^{\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{1}{2}}}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{i+\frac{1}{2}} \cdot u^2 + \sqrt{i+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} \int_{0}^{\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{1}{2}}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} = \pi p_i,$$

wobei wir die Substitution $u := \sqrt{\frac{x}{i+\frac{1}{2}}}$ verwendet haben. Somit sind die Bedingungen für Satz 2.31 erfüllt ($\beta = \gamma = \pi > 0$) und die Behauptung gezeigt. □

Nach [Sil21, Gleichung 1.2] definieren wir verallgemeinerte unendliche Hilbert-Matrizen $\widetilde{H_\sigma}$ mit Einträgen $\widetilde{h}_{ij} := \frac{1}{i+j+\sigma}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in \mathbb{N}$. Durch diese werden jeweils auch beschränkte lineare Operatoren auf ℓ^2 erklärt. Dies wollen wir nun zeigen.

Satz 3.21 Verallgemeinerte Hilbert-Matrizen: *Die verallgemeinerten Hilbert-Matrizen $\widetilde{H_\sigma}$ mit Einträgen*

$$\widetilde{h}_{ij} := \tfrac{1}{i+j+\sigma} \quad \text{für } \sigma \in \mathbb{N} \text{ mit } i, j \in \mathbb{N}_0$$

erklären stetige lineare Operatoren $T_{\widetilde{H_\sigma}}$ auf ℓ^2.

Beweis: Den Spezialfall $\sigma = 1$ haben wir bereits in Satz 3.20 bewiesen. Der Beweis für die restlichen Fälle funktioniert sehr ähnlich.

Auch die verallgemeinerten Hilbert-Matrizen $\widetilde{H_\sigma}$ sind symmetrisch und es muss nur eine der beiden Voraussetzungen aus Satz 2.31 explizit gezeigt werden. Dazu setzt man für die Folgen p und q $\quad p_j := q_j := \frac{1}{\sqrt{j+\frac{\sigma}{2}}}$ und erhält dann mit ähnlichen, jedoch angepassten Abschätzungen die Behauptung.

Wir betrachten nun also für $l \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{l} \widetilde{h}_{ij} p_j = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{(i+j+\sigma)\sqrt{j+\frac{\sigma}{2}}} = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{\left(i+\frac{\sigma}{2}+j+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{j+\frac{\sigma}{2}}}.$$

Wir möchten wieder mithilfe des Integralkriteriums zeigen, dass die Partialsummen für $l \to \infty$ konvergieren. Dazu definieren wir die Hilfsfunktion

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto g(x) := \frac{1}{(x+i+\frac{\sigma}{2})\sqrt{x}}.$$

Man sieht leicht, dass $\quad g(j+\frac{\sigma}{2}) = \widetilde{h}_{ij} p_j \quad$ für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Weiter ist g monoton fallend und nicht-negativ, weshalb das Integralkriterium [Wal04, Kapitel 12.5] anwendbar ist. Außerdem ist g linksgekrümmt, weshalb für $j \in \mathbb{N}_0$ (das Integral existiert für $j = 0$, wir werden das später sehen)

$$g\left(j+\tfrac{\sigma}{2}\right) \leq \int_{j}^{j+1} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{gilt.}$$

Wir erhalten damit für jedes $i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=0}^{l} \widetilde{h}_{ij} p_j = \sum_{j=0}^{l} g\Big(j + \frac{\sigma}{2}\Big) \leq \int_{0}^{l+1} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+i+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{x}} = 2 \int_{0}^{\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{\sigma}{2}}}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{i+\frac{\sigma}{2}}\cdot u^2 + \sqrt{i+\frac{\sigma}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{i+\frac{\sigma}{2}}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{\sigma}{2}}}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{i+\frac{\sigma}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{l+1}{i+\frac{\sigma}{2}}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{i+\frac{\sigma}{2}}} = \pi p_i,$$

wobei wir die Substitution $u := \sqrt{\frac{x}{i+\frac{\sigma}{2}}}$ verwendet haben. Somit sind die Bedingungen für Satz 2.31 erfüllt ($\beta = \gamma = \pi > 0$) und die Behauptung gezeigt. □

Beispiel 3.22 Durch folgende verallgemeinerte Hilbertmatrizen $\widetilde{H_\sigma}$ mit $\sigma \in \{2, 3, 10\}$ werden etwa beschränkte lineare Operatoren auf ℓ^2 erklärt:

$$\widetilde{H_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \widetilde{H_{10}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \cdots \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \cdots \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hinweis: An dieser Stelle wollen wir uns noch einmal klarmachen, dass die beschränkten linearen Operatoren über ℓ^2 selbst einen Banachraum, siehe *Hinweis* zu Satz 2.24, bilden. Daher sind auch Linearkombinationen der verallgemeinerten Hilbertmatrizen beschränkte lineare Operatoren, beispielsweise etwa auch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{=H} + 2\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \cdots \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \cdots \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \cdots \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{=\widetilde{H_{10}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{15}{22} & \frac{1}{2} & \frac{21}{52} & \cdots \\ \frac{15}{22} & \frac{1}{2} & \frac{21}{52} & \frac{12}{35} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{21}{52} & \frac{12}{35} & \frac{3}{10} & \cdots \\ \frac{21}{52} & \frac{12}{35} & \frac{3}{10} & \frac{15}{56} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{repräsentiert } T_A \in \mathscr{B}(\ell^2)} =: A.$$

Der Matrix A sieht man zwar nicht sofort an, dass sie einen beschränkten linearen Operator repräsentiert, obwohl sie dies als Linearkombination solcher in der Tat tut.

Die Idee, die der Hilbert-Matrix zugrunde liegt, kann noch weiter ausgebaut werden. Die (verallgemeinerten) Hilbert-Matrizen sind Spezialfälle von Hankel-Matrizen, die im nächsten Abschnitt thematisiert werden.

3.4 Hankel-, Toeplitz- und Laurent-Matrizen

Zunächst wollen wir nach [Bö98, Kapitel 1.4] definieren, was man unter einer Hankel-Matrix versteht.

Definition 3.23 Hankel-Matrix: Unendliche Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots \\ y_3 & y_4 & y_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei die Folgenglieder $y_k \in \mathbb{C}$ sind, nennt man Hankel-Matrizen. Man erkennt sie schnell daran, dass ihre Gegendiagonalen konstant sind.

Wir werden in dieser Arbeit keine allgemeinen Sätze formulieren, mit denen man prüfen kann, ob eine Hankel-Matrix einen beschränkten linearen Operatoren auf ℓ^2 definiert, sondern wollen lediglich einige Spezialfälle betrachten. Hierbei kann es hilfreich sein, die Indexmenge im Vergleich zur Definitionen leicht zu variieren. Das ändert nichts an der Argumentation.

Satz 3.24 *Es sei $y \in \ell^1$. Dann gilt: Es wird durch die unendliche Matrix M mit Einträgen*

$$m_{ij} := y_{i+j-1} \quad \textit{für } i, j \in \mathbb{N}$$

ein beschränkter linearer Operator $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2)$ erklärt.

Hinweis: Diese unendlichen Matrizen erinnern sehr stark an die Hilbert-Matrix H. Diese ist aber *kein* Spezialfall der hier beschriebenen Matrizen, da die Folge y mit $y_n := \frac{1}{n}$ nicht (betrags-)summierbar ist. Die in diesem Satz gegebene Charakterisierung der Matrixelemente ist äquivalent zu der in Definition 3.23, lässt sich aber leichter handhaben, falls wir nur die natürlichen Zahlen als Indexmenge verwenden.

Beweis: Wir verwenden hier die Folgerung aus Satz 2.32 und summieren betragsmäßig spalten- und zeilenweise. Die erste betragsmäßige Zeilen- und Spaltensumme diejenige mit dem größten Wert, da wir bei allen anderen mindestens einen nicht-negativen Summanden weglassen. Daher genügt es, die erste Zeilen- und Spaltensumme zu untersuchen. Wir stellen fest, dass für diese jeweils

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|y\|_{\ell^1} < \infty \quad \text{gilt.}$$

Es folgt mit Satz 2.32, dass durch eine derartige Matrix ein beschränkter linearer Operator erklärt wird. □

Beispiel 3.25

(i) Betrachten wir die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $y_k := \exp(-2k)$, so kann man sich überlegen, dass diese summierbar ist: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\exp(-2k) \leq \tfrac{1}{(k+1)^2}, \quad \text{woraus} \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} = \tfrac{\pi^2}{6} < \infty$$

mithilfe des Marjorantenkriteriums folgt [For15, Kapitel §7]. Also ist tatsächlich $y \in \ell^1$ und wir können eine unendliche Matrix M angeben, die einen beschränkten linearen Operator $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2)$ repräsentiert, nämlich

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^{-4} & \mathrm{e}^{-6} & \dots \\ \mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^{-4} & \mathrm{e}^{-6} & \mathrm{e}^{-8} & \dots \\ \mathrm{e}^{-4} & \mathrm{e}^{-6} & \mathrm{e}^{-8} & \mathrm{e}^{-10} & \dots \\ \mathrm{e}^{-6} & \mathrm{e}^{-8} & \mathrm{e}^{-10} & \mathrm{e}^{-12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir betrachten [Hal82, Problem 47]: Gegeben sei die Hankel-Matrix M mit Einträgen $m_{ij} := 2^{-(i+j-1)}$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Diese ist symmetrisch und ihre erste Zeile bzw. Spalte lautet

$$\left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \dots\right)^{\top}.$$

Mit $y_k := 2^{-2k}$ erhalten wir eine Struktur wie in Satz 3.24 gefordert. Es gilt dann für die erste Zeile bzw. Spalte von M

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = -1 + \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{3} < \infty,$$

wobei wir die Formel für die Konvergenz der geometrischen Reihe verwendet haben [For15, Kapitel §4]. Also ist $y \in \ell^1$. Nach Satz 3.24 erzeugt M daher einen beschränkten linearen Operator auf ℓ^2.

(iii) Es seien $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $y_k := q^k$. Es ist dann die (geometrische) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \tfrac{1}{1-q}$$

und damit insbesondere konvergent, das heißt $y \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$. Also repräsentiert eine unendliche Matrix G der Form

$$G := \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & q^3 & \dots \\ q & q^2 & q^3 & q^4 & \dots \\ q^2 & q^3 & q^4 & q^5 & \dots \\ q^3 & q^4 & q^5 & q^6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } |q| < 1$$

einen beschränkten linearen Operator auf ℓ^2. Offenbar ist $\quad g_{ij} = q^{i+j} \quad$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$.

(iv) Offensichtlich ändert es nichts an der Summierbarkeit einer wie in (iii) erklärten Folge y, wenn man eine Teilfolge betrachtet.

Weitere Klassen unendlicher Matrizen, die unter gewissen Umständen beschränkte lineare Operatoren auf ℓ^2 repräsentieren, sind zum einen **Toeplitz-Matrizen**, bei denen Haupt- und Nebendiagonalen jeweils konstant sind, und zum anderen **Laurent-Matrizen**, die man als beidseitig unendliche Toeplitz-Matrizen erklären kann. Letztere stellen lineare Operatoren auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ dar. Eine sehr einfache Toeplitz-Matrix ist die Identitätsmatrix oder jede andere Skalarmatrix.

Für diese beiden Matrizen-Klassen und für Hankel-Matrizen gibt es Kriterien, die allgemein aussagen, wann genau durch sie beschränkte lineare Operatoren auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ bzw. $\ell^2(\mathbb{Z})$ repräsentiert werden. Darunter ist auch der bekannte Satz von Nehari. Es würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen, auf diese Aussagen detailliert einzugehen. Daher verweisen wir an dieser Stelle lediglich auf [Sil21, Theoreme 1.1, 1.9, 1.11] bzw. [Pel98, Theorem 2.1]. Dort kann man sie nachlesen.

Kapitel 4

Ausblick

Eine der wichtigsten Aussagen der Funktionalanalysis ist zweifelsfrei der Satz von Fischer-Riesz, der in mehreren Varianten formuliert wird. Nach [Cla19, Folgerung 15.16] und [Wer18, Korollar V.4.13] gilt:

Satz 4.1 Satz von Fischer-Riesz: *Jeder unendlichdimensionale, separable Hilbertraum $\mathcal{V}$ ist isometrisch isomorph zu ℓ^2. Man schreibt* $\mathcal{V} \cong \ell^2$.

Beweis: Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle, man findet ihn unter anderem in den oben genannten Lehrbüchern. □

Hinweis: Die Aussage des Satzes von Fischer-Riesz ist eine reine Existenzaussage: Es gibt einen isometrischen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$, falls $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ unendlichdimensionale separable Hilberträume sind. Meist kann man diesen Isomorphismus aber *nicht* explizit angeben, etwa wenn man gar keine Orthonormalbasis eines der Räume kennt, denn auch von dieser wissen wir aus Satz 2.16 lediglich, dass sie existiert.

In der Funktionalanalysis werden neben dem Folgenraum ℓ^2 viele andere unendlichdimensionale Hilberträume untersucht. Meist sind dies Funktionenräume. Wir wollen im Folgenden einen solchen Funktionenraum, der aus gewissen komplexwertigen Potenzreihen besteht, betrachten und genauer untersuchen, den sogenannten Hardy-Raum auf der offenen Einheitskreisscheibe.

4.1 Der Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

Wir schreiben ab jetzt für die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Zahlenebene das Symbol $\mathbb{D}$, also ist $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Nach [Wer18, Aufgabe V.6.30] definieren wir, was wir unter dem Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ verstehen wollen.

Definition 4.2 Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$: Der Raum

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } a \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}$$

heißt Hardy-Raum über der offenen Einheitskreisscheibe.

An dieser Stelle muss die Frage geklärt werden, ob die Elemente von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ überhaupt wohldefiniert sind. Das ist tatsächlich der Fall, denn die Potenzreihen konvergieren gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ gegen (mindestens) stetige Funktionen. Dies gilt, da $a \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ insbesondere Nullfolge und damit beschränkt ist. Daher existiert ein $C \in [0, \infty)$ derart, dass $|a_k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für alle $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N} C z^k \right| \leq C \sum_{k=0}^{N} |z|^k$$

und für $N \to \infty$ ist dies nichts weiter als die geometrische Reihe, die konvergent ist für alle $z \in \mathbb{D}$. Der Konvergenzradius der Reihe rechts ist also 1 und der der Reihe links damit mindestens 1. Die gleichmäßige Konvergenz folgt sofort mit [Las12, Satz 9.8]. Die Stetigkeit der Funktionen ergibt sich, da alle Partialsummen stetig sind.

Man kann sich dies auch auf eine andere Weise herleiten: Da a insbesondere Nullfolge ist, können wir im Sinne der Definition 2.3 der Konvergenz einer Folge ein $N \in \mathbb{N}$ derart finden, dass für alle $k \geq N$ gilt, dass $d_{\mathbb{C}}(a_k, 0) = |a_k - 0| = |a_k| \leq 1$ ist. Bestimmen wir nun mit der Formel von Cauchy-Hadamard den Konvergenzradius R der Potenzreihe, finden wir

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \geq 1.$$

Dies folgt, denn $\sqrt[k]{|a_k|}$ hat für $k \geq N$ die obere Schranke 1. Daher ist auch der größte Häufungspunkt dieses Ausdrucks durch 1 beschränkt, weshalb der Bruch R stets mindestens den Wert 1 annimmt. Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit folgen dann analog.

Offenbar ist $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ein Vektorraum. Wir betrachten nun nach [Gar16, Proposition 3.2] die Abbildung

$$\varphi : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \quad \text{mit} \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \mapsto \varphi\big((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big) := \left(z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right). \tag{4}$$

Diese ist wohldefiniert und laut Identitätssatz bijektiv. Zudem ist φ linear. Also ist φ ein Isomorphismus und wir schreiben $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \overset{\varphi}{\cong} \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Nachfolgend lassen wir das φ über dem Isomorphiezeichen weg. Wir meinen trotzdem immer den Isomorphismus φ aus Gleichung (4). Wir wollen $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ nun mit einem Skalarprodukt versehen.

Satz 4.3 Skalarprodukt in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$: *Es seien $f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ und durch*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad \textit{mit } a, b \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

gegeben. Dann ist durch $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} := \langle a, b\rangle_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} \overset{\text{Gl. (1)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ *ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ erklärt.*

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Satz 2.10. □

Folglich ist $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ein Prähilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$ und Metrik $d_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}$. Der Isomorphismus φ ist isometrisch. Dies folgt sofort aus der Definition des Skalarprodukts in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Daher und wegen der entsprechenden Eigenschaften von $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist der betrachtete Hardy-Raum sogar vollständig und separabel. Die im Folgenraum dichte Teilmenge $c_{00}(\mathbb{N}_0)$ entspricht im Hardy-Raum offenbar wegen des Isomorphismus φ der in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ dichten Teilmenge der Polynome $\mathbb{C}[z]$.

Die Separabilität kann natürlich auch explizit gezeigt werden. Der Beweis funktioniert prinzipiell genauso wie im Folgenraum, diesen haben wir bereits in Gleichung (2) geführt.

Da es sich bei $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ um einen Hilbertraum handelt, ist es sinnvoll und möglich, eine Orthonormalbasis anzugeben.

Satz 4.4 Orthonormalbasis von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$: *Eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist gegeben durch die Monome* $z \mapsto z^k$ *für $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, also* $\mathcal{B} = \left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Es ist $\varphi(e_0) = 1$, $\varphi(e_1) = z$, $\varphi(e_2) = z^2$ und so weiter. Allgemein gilt demnach für das n-te Element $e_n := ((e_n)_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der ONB des Folgenraumes, dass

$$\varphi(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = z^n$$

ist. Da φ ein isometrischer Isomorphismus ist, haben wir damit die Behauptung schon verifiziert. Explizites Nachrechnen für $m, n \in \mathbb{N}_0$ liefert dasselbe:

$$\langle z^m, z^n\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} (e_m)_k\, z^k, \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k\, z^k \right\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \langle e_m, e_n\rangle_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} = \delta_{mn}.$$

In der Tat sind verschiedene Monome daher orthogonal und Einsetzen gleicher Elemente aus $\mathcal{B}$ liefert 1. Wie in Satz 2.17 kann man auch hier zeigen, dass der Orthogonalraum von $\mathcal{B}$ nur die Null (hier die konstante Nullfunktion) enthält. $\square$

Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass jede auf der offenen Menge $\mathbb{D}$ analytische Funktion holomorph ist und umgekehrt [Bor16, Seite 32]. Insbesondere sind analytische Funktionen integrierbar und wir können für $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ und $r \in (0,1)$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t$$

betrachten, das in [Wer18, Aufgabe V.6.30] gegeben ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ und der 2π-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ergibt sich für jedes beliebige feste $r \in (0,1)$ für das obige Integral

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\overline{\sum_{m=0}^{N} a_m r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\sum_{m=0}^{N} \overline{a_m} r^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{k,m=0}^{N} a_k\overline{a_m} r^{k+m}\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-m)t}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{km}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|^2_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} = \|f\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} \quad \text{für } r \to 1.$$

Somit erhalten wir eine alternative Darstellung für die Norm im Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Mit der sogenannten Polarisationsformel von Jordan und von von Neumann [Dei22, Seite 157] kann man weiter nachrechnen, dass wir auch das Skalarprodukt in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ als Integral schreiben können. Es gilt für $f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 \,\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \overline{g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \,\mathrm{d}t$$

und wir haben einen anderen Weg als jenen über die Koeffizientenfolgen gefunden, um in diesem Raum Skalarprodukte und Normen zu berechnen.

Einige (uns bekannte) Funktion, die Elemente von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ sind, sind zum Beispiel

(i) die Einschränkungen aller komplexwertigen Polynome auf $\mathbb{D}$. Wir haben uns bereits überlegt, dass die Menge $\mathbb{C}[z]$ dicht in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist. Andererseits kann man auch argumentieren, dass die Koeffizientenfolge a eines Polynoms $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{vom Grad } n$$

immer eine $c_{00}(\mathbb{N}_0)$-Folge ist, die nach dem n-ten Folgenglied nur noch 0-Einträge hat.

(ii) die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf $\mathbb{D}$, also die Funktion

$$\exp : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} z^k,$$

denn wegen $\quad n! \geq n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\tfrac{1}{k!}\right|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{k!}\right|^2 \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{k}\right|^2 = 1 + \tfrac{\pi^2}{6} = \tfrac{6+\pi^2}{6}.$$

Also ist die Koeffizientenfolge der Exponentialfunktion quadratsummierbar und somit gilt $\exp \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

(iii) diejenigen Funktionen, die für $n \in \mathbb{N}$ die Koeffizientenfolgen

$$a \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \quad \text{mit} \quad a_k := \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{k^n} & \text{für } k \geq 1 \end{cases} \quad \text{besitzen.}$$

Diese Funktionen heißen *Polylogarithmen* und man setzt

$$\mathrm{Li}_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{Li}_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z + \tfrac{z^2}{2^n} + \tfrac{z^3}{3^n} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{D}.$$

Insbesondere rechnet man über die geometrische Reihe nach, dass zum Hauptzweig des Logarithmus die Beziehung $\quad \mathrm{Li}_1(z) = -\ln(1-z) \quad$ besteht.

Durch diese Überlegungen haben wir ein Gefühl dafür bekommen, welche Funktionen im Hardy-Raum liegen und wie wir dies für eine gegebene Funktion prüfen können. Wir werden im Folgenden gelegentlich diese Funktionen als Beispiele heranziehen, wenn wir uns überlegen, was passiert, wenn wir beschränkte lineare Operatoren $T_M \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ als solche auf dem Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ auffassen und auf dessen Elemente anwenden.

4.2 Lineare Operatoren in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

Wegen der isometrischen Isomorphie können wir die Operatoren auf dem Folgenraum als Operatoren im Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ auffassen. Wir stellen uns die Funktionen in $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ also als unendliche Spaltenvektoren bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \left(z^k\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ vor. Deren Einträge sind dann nichts weiter als die Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung von f. Die Darstellung der Operatoren durch unendliche Matrizen bleibt daher weiterhin tragfähig.

Wir definieren für den beschränkten linearen Operator $T_M : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, wobei $M = (m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ diejenige unendliche Matrix ist, die den Operator T_M repräsentiert, und für $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, dass

$$T_M f(z) := T_M(f(z)) = T_M\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) := \sum_{k=0}^{\infty} (Ma)_k\, z^k \quad \text{ist.}$$

Hierbei ist $(Ma)_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} m_{kj} a_j$ der k-te Eintrag von $Ma \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Anders formuliert haben wir also

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \ni f \cong a \in \ell^2(N_0) \quad \text{und daher} \quad \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \ni T_M f \cong Ma \in \ell^2(\mathbb{N}_0).$$

Das bedeutet, dass wir weiterhin im Folgenraum operieren und dort ablesen können, welche Wirkung T_M auf f hat.

Zunächst betrachten wir einfache beschränkte Operatoren aus Kapitel 3.1:

Satz 4.5 Null-, Identitäts- und Skalieroperator: *Gegeben seien $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt: Durch die unendlichen Matrizen aus 3.3 bis 3.5 werden beschränkte lineare Operatoren auf $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ repräsentiert. Diese sind für*

(i) Satz 3.3: Der Nulloperator $\mathbb{0} : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $\mathbb{0} f := 0$,

(ii) Lemma 3.4: Der Identitätsoperator $\mathbb{1} : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $\mathbb{1} f := f$ und

(iii) Satz 3.5: Der Skalieroperator $\mathbb{\lambda} : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $\mathbb{\lambda} f := \lambda f$.

Beweis: Die Behauptungen folgen direkt aus der Definition der unendlichen Matrizen und den Beweisen von 3.3 bis 3.5. Trotzdem wollen wir das zumindest für (iii) explizit nachrechnen: Nach Definition ist

$$\mathbb{\lambda} f(z) = \mathbb{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) \cong \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Matrix, die } \mathbb{\lambda} \text{ repräsentiert}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda a}_{\in \ell^2(\mathbb{N}_0)} \cong \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k = \lambda f(z).$$

Diese Funktion ist offensichtlich ein Element von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Analog geht man bei der Berechnung für (i) und (ii) vor. □

Auch skalierende Shift-Matrizen aus Satz 3.6 sind in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ von Interesse.

Satz 4.6 *Gegeben seien $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: Durch die unendlichen Matrizen M aus Satz 3.6 werden beschränkte lineare Operatoren $T_M \in \mathscr{B}(\mathcal{H}^2(\mathbb{D}))$ repräsentiert, für die $T_M f(z) := \lambda z^n f(z)$ gilt.*
Dabei müssen wir die Nummerierung der Matrixelemente an die Indexmenge $\mathbb{N}_0$ anpassen und setzen daher $m_{ij} = \lambda \delta_{(i-n-1)j}$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit Koeffizientenfolge $a \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Nach Satz 3.5 gilt $Ma \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, wobei $Ma = \lambda \cdot (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-mal}}, a_0, a_1, a_2, \dots)^\top$ ist und sich die 0-Einträge durch die n Nullspalten in der unendlichen Matrix ergeben. Für f erhalten wir damit nichts weiter als

$$T_M f(z) = T_M\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (Ma)_k\, z^k = \lambda \cdot (\underbrace{0 + \ldots + 0}_{n-\text{mal}} + a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + \ldots)$$

$$= \lambda \cdot (a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + \ldots) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+n} = \lambda z^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \lambda z^n f(z),$$

was genau die Behauptung ist. □

Hinweis: In Satz 3.5 haben wir neben dem Shift in diese Richtung (Fall $n \in \mathbb{N}_0$) auch einen Shift in Gegenrichtung erklärt. Diesen können wir in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ allerdings *nicht* durch

Multiplikation mit λz^{-n} darstellen, sondern müssen die Koeffizientenfolge mit der entsprechenden Matrix multiplizieren. Die Multiplikation mit λz^{-n} ergibt nämlich, dass die ersten $(n-1)$ Summanden in der Reihe die Variable z in negativer Potenz besitzen, anstatt dass die ersten $(n-1)$ Summanden – wie im Folgenraum bei Matrixmultiplikation – einfach wegfallen (siehe dazu den *Hinweis* unter 3.5). Die gebrochen-rationalen Anteile, die hierbei entstehen, nennt man Laurent-Polynom. Sie sind der abbrechende Hauptteil der Laurent-Reihe von $z \mapsto \lambda z^{-n} f(z)$. Insgesamt erklärt der vorangegangene Ausdruck eine holomorphe Funktion auf der punktierten offenen Kreisscheibe $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, nicht aber auf ganz $\mathbb{D}$.

Beispiel 4.7 Wir wollen diese schwer verdauliche Aussage nun noch einmal an einem konkreten Beispiel durchdenken und betrachten dazu die komplexe Exponentialfunktion. Wir multiplizieren die komplexwertige Exponentialfunktion mit dem Monom $3z^5$ und erhalten

$$3z^5 \exp(z) = 3z^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+5}}{k!} = 3\left(z^5 + z^6 + \frac{z^7}{2!} + \frac{z^8}{3!} + \dots\right).$$

Gleichzeitig multiplizieren wir die zugehörige unendliche Matrix M, die die Elemente $m_{ij} = 3\delta_{(i-6)j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ besitzt, mit der Koeffizientenfolge $a := \left(\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Exponentialfunktion. Wir finden für die den k-ten Eintrag von Ma

$$(Ma)_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 5, \\ \frac{3}{(k-6)!} & \text{für } k \geq 6. \end{cases}$$

Damit ist offenbar

$$\sum_{k=0}^{\infty} (Ma)_k \, z^k = 3\left(z^5 + z^6 + \frac{z^7}{2!} + \frac{z^8}{3!} + \dots\right) = 3z^5\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = 3z^5 \exp(z).$$

Beides stimmt überein und dies ist genau die Aussage von Satz 4.6.

Wenn wir aber mit $3z^{-5}$ multiplizieren, also $n < 0$ ist, erhalten wir

$$3z^{-5} \exp(z) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-5}}{k!} = 3\Big(\underbrace{\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!z^3} + \dots +}_{\text{endlicher Hauptteil und}} \underbrace{\frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \frac{z^2}{7!} + \dots}_{\text{Nebenteil der Laurent-Reihe}}\Big) \notin \mathcal{H}^2(\mathbb{D}).$$

Offenbar ist das nicht dasselbe wie die Potenzreihe, die wir erhalten, wenn wir die Koeffizientenfolge $a := \left(\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Exponentialfunktion im Folgenraum mit der entsprechenden unendlichen Matrix M multiplizieren und dann wie gewohnt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (Ma)_k \, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+5} z^k = 3 \left(\frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \frac{z^2}{7!} + \dots \right) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$$

betrachten. Oben bleiben einige gebrochen-rationale Summanden aus dem abbrechenden Hauptteil der Laurent-Reihe von $z \mapsto 3z^{-5} \exp(z)$ übrig. Es ist keine Potenzreihendarstellung mehr möglich und der Ausdruck ist auf $\mathbb{D}$ nicht einmal holomorph: Im Ursprung liegt ein Pol fünfter Ordnung vor. Satz 4.6 gilt also nicht für negative n.

Wendet man M auf die Koeffizientenfolge von f an, erhält man im Fall $n < 0$ in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ lediglich den Nebenteil der Laurent-Reihe von $z \mapsto \lambda z^n f(z)$. Der entstandene Hauptteil wird verworfen. Bestimmt man dagegen $T_M f(z)$, erhält man Haupt- und Nebenteil.

In Satz 3.8 hatten wir Permutationsmatrizen erklärt. Auch deren Wirkung in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist interessant und wird in folgendem Beispiel betrachtet.

Beispiel 4.8 Es sei M eine Permutationsmatrix wie in Satz 3.8 mit

(i) der Permutation $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die durch $\pi(0) := 2, \pi(1) := 0, \pi(2) := 3, \pi(3) := 1$ festgelegt ist. Für $k \geq 4$ seien die $\pi(k)$ beliebig derart, dass π weiterhin bijektiv ist und $\lambda = 2\mathrm{i}$. Die zugehörige Permutationsmatrix hat dann die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & \dots \\ 2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Weiter sei nun das komplexwertige Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = 7\mathrm{i} + 5z - 2z^2 + 3\mathrm{i}z^3$ gegeben. Es gilt

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \supset \mathbb{C}[z] \ni p \cong (7\mathrm{i}, 5, -2, 3\mathrm{i}, 0, 0, \dots)^\top =: a_p \in c_{00}(\mathbb{N}_0) \subset \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

und daher ist

$$T_M p(z) \cong M a_p \cong 2\mathrm{i} \, (5 + 3\mathrm{i}z + 7\mathrm{i}z^2 - 2z^3) = 10\mathrm{i} - 6z - 14z^2 - 4\mathrm{i}z^3.$$

Die Wahl der restlichen $\pi(k)$ für $k \geq 4$ ist beliebig, da die Folgenglieder $(a_p)_k = 0$ sind für $k \geq 4$.

In der Tat gilt – wie im Beweis von Satz 3.8 gezeigt – für die Norm von $T_M p$

$$\|T_M p\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \sqrt{348} = 2\sqrt{87} = |2\mathrm{i}| \, \|p\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}.$$

(ii) der Permutation $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die durch $\sigma(0) := 3, \sigma(1) := 0, \sigma(2) := 1, \sigma(3) := 2$ und $\sigma(k) := k$ für $k \geq 4$ festgelegt ist. Weiter sei $\lambda = 1$. Die zugehörige Permutationsmatrix hat dann die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun überlegen, wie der Operator T_M auf die komplexe Exponentialfunktion wirkt. Es ist

$$\begin{aligned} T_M \exp(z) &\cong M \left(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!} \dots \right)^\top = \left(1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, 1, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!} \dots \right)^\top \\ &\cong 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + z^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} + \frac{5z^3}{6} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \end{aligned}$$

offenbar eine holomorphe Funktion, deren Hardy-Norm gleich der der komplexen Exponentialfunktion ist, da nur Koeffizienten permutiert worden sind.

Es sei nun $q \in \mathbb{D}$ und $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit Koeffizientenfolge a. Wir überlegen uns, welche Wirkung die beschränkten linearen Operatoren T_G, die im Folgenraum durch die unendlichen Matrizen G aus Beispiel 3.25 (iii) repräsentiert werden, auf f haben.

Satz 4.9 Geometrische Reihe: *Es seien $q \in \mathbb{D}$, $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit Koeffizientenfolge a, G eine unendliche Matrix mit Einträgen $g_{ij} := q^{i+j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ und $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $g(z) := \frac{1}{1-\overline{q}z}$. Dann ist auf $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ durch G ein beschränkter linearer Operator T_G mit*

$$T_G f(z) = \frac{\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}}{1 - qz}$$

erklärt.

Beweis: Die Funktion g ist für $z \in \mathbb{D}$ wegen der geometrischen Reihe gegeben als

$$g(z) = \frac{1}{1-\overline{q}z} = \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{q}z)^k.$$

Berechnen wir einerseits das Skalarprodukt von f mit g und andererseits die Einträge von Ga, erhalten wir

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} = \left\langle a, \left(\overline{q}^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n \quad \text{bzw.} \quad (Ga)_k = q^k \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n = q^k \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}.$$

Schließlich ergibt sich damit und wegen $|z| < 1$

$$T_G f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (Ga)_k \, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})} z^k = \frac{\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}}{1-qz},$$

wie behauptet. $\square$

Hinweis: Es ist nicht verwunderlich, dass T_G jedes $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ auf ein Vielfaches von $z \mapsto \frac{1}{1-qz}$ abbildet: Alle Spalten der Matrix G sind linear abhängig.

Wir wollen in einem Beispiel nun konkret ausprobieren, wie dieser Operator Elemente von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ transformiert.

Beispiel 4.10

(i) Es sei $r \in \mathbb{D}$ und wir setzen $a_k := r^k$ für $k \in \mathbb{N}$ die Koeffizientenfolgenglieder von $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Mit Satz 4.9 ergibt sich

$$T_G f(z) = \frac{\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}}{1-qz} = \frac{1}{1-qr} \cdot \frac{1}{1-qz} = \frac{1}{1-qr} f\left(\tfrac{q}{r}z\right).$$

(ii) Im Sinne von (i) wählen wir $r = q = \frac{\mathrm{i}}{5} \in \mathbb{D}$. Damit haben wir als Funktion $f(z) = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{5}} = \frac{5}{5-\mathrm{i}z} = \frac{25+5\mathrm{i}z}{25+z^2}$. Durch Multiplikation von T_G mit f erhalten wir die Funktion

$$T_G f(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{i}}{5}\right)^2} f(z) = \frac{25}{26} \cdot \frac{25+5\mathrm{i}z}{25+z^2} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}).$$

(iii) Im Sinne von (i) wählen wir $q = \frac{\mathrm{i}}{4} \in \mathbb{D}$ und $r = \frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Damit erhalten wir $f(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} = \frac{3}{3-z} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Die Funktion, die wir erhalten, wenn wir T_G auf f anwenden, ist dann durch

$$T_G f(z) = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{12}} f\left(\tfrac{3\mathrm{i}}{4}z\right) = \frac{144+12\mathrm{i}}{145} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{4}z} = \frac{144+12\mathrm{i}}{145} \cdot \frac{4\mathrm{i}}{u+4\mathrm{i}} = \frac{144+12\mathrm{i}}{145} \cdot \frac{16+4\mathrm{i}z}{16+z^2} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$$

gegeben.

Für viele der unendlichen Matrizen können wir nicht konkret angeben, wie die zugehörigen Operatoren im Hardy-Raum wirken. Die folgenden Beispiele veranschaulichen das.

Beispiel 4.11 Offenbar ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ nach Satz 3.24 auch durch die unendichen Matrizen

$$M_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{4^n} & \dots \\ 0 & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{4^n} & \frac{1}{5^n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

jeweils ein beschränkter linearer Operator T_{M_n} repräsentiert. Wir untersuchen die Wirkung in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ am Beispiel der Polylogarithmen. Es ist etwa im Fall $n = 2$ für den Dilogarithmus

$$\begin{aligned} T_{M_2}\mathrm{Li}_2(z) &\cong M_2 \left(0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right)^\top = \left(0, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 k^2}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2 k^2}, \dots\right)^\top \\ &\cong \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \cdot z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 k^2} \cdot z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2 k^2} \cdot z^3 + \dots \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^l}{(k+l-1)^2 k^2} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l, \end{aligned}$$

wenn wir

$$b_l := \begin{cases} 0 & \text{für } l = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^l}{(k+l-1)^2 k^2} & \text{für } l \geq 1 \end{cases} \quad \text{als Folgenglieder von } b \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \text{ definieren.}$$

Wir wissen, dass durch diesen Ausdruck eine holomorphe Funktion in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ erklärt ist, können allerdings keine explizite Funktionsgleichung ohne Reihe angeben.

Ähnliches stellen wir beispielsweise fest, wenn wir die Hilbert-Matrizen betrachten.

Beispiel 4.12 Wir erinnern uns an die Hilbert-Matrizen und überlegen, wie diese in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ wirken. Dazu betrachten wir die komplexe Exponentialfunktion und denjenigen beschränkten linearen Operator $T_H : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, der durch die Hilbert-Matrix H repräsentiert wird. Es gilt dann, dass

$$T_H \exp(z) \cong \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2!} \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3)k!} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\in \ell^2(\mathbb{N}_0)} \cong \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+1)k!} z^n}_{=:g(z)} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$$

ist, wobei wir keine explizite Darstellung der Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ kennen. Aus unseren vorherigen Überlegungen wissen wir allerdings, dass g holomorph auf $\mathbb{D}$ ist.

Im nächsten Abschnitt wollen wir einen unbeschränkten linearen Operator betrachten.

4.3 Ein Differentialoperator

In Beispiel 3.18 haben wir die Matrixdarstellung eines unbeschränkten linearen Operators auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ gesehen. Für alle $c_{00}(\mathbb{N}_0)$-Folgen gilt trotzdem, dass diese wiederum auf $c_{00}(\mathbb{N}_0)$-Folgen abgebildet werden. Insbesondere sind diese auch quadratsummierbar. Wir überlegen uns die Wirkung des linearen Operators T_D, der durch die in Beispiel 3.18 erklärte Matrix repräsentiert wird, im Hardy-Raum $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. Dabei beschränken wir uns zunächst auf Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$, um sicherzugehen, dass $T_D p \in \mathbb{C}[z] \subset \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist.

Satz 4.13 Differentialoperator für Polynome: *Es seien T_D der durch die Matrix D aus Beispiel 3.18 repräsentierte lineare Operator und $p \in \mathbb{C}[z]$ ein komplexwertiges Polynom n-ten Grades. Dann gilt: Es ist*

$$T_D p(z) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z) = p'(z) \in \mathbb{C}[z]$$

die erste Ableitung von p.

Beweis: Das Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ ist gegeben als $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, wobei die Koeffizientenfolge $a \in c_{00}(\mathbb{N}_0)$ ist und nach dem n-ten Folgenglied nur noch 0-Einträge besitzt. Es gilt dann für $T_D p(z)$

$$T_D\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \cong \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k.$$

Dies ist nichts weiter als die erste Ableitung p' von p, deren Koeffizientenfolge offensichtlich wieder eine $c_{00}(\mathbb{N}_0)$-Folge ist. Sie ist ebenfalls ein Polynom. □

Hinweis: Da holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar sind, kann T_D selbstverständlich auch beliebig oft auf p angewendet werden. Leitet man $(n+1)$-mal ab, erhält man die konstante Nullfunktion. Weiter kann man T_D auf beliebige Funktionen in $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ anwenden und erhält dann ebenfalls die erste Ableitung: Potenzreihen sind bekanntermaßen gliedweise differenzierbar [Bor16, Satz 1.5.2] und daher ist es nicht verwunderlich, dass T_D auch auf solche als Differentialoperator wirkt. Dabei muss allerdings sichergestellt werden, dass die Koeffizientenfolge der Ableitung wieder eine $\ell^2(\mathbb{N}_0)$-Folge ist.

Betrachten wir die Funktion $\mathrm{Li}_1 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ und wenden T_D auf diese an, erhalten wir mit $\mathrm{Li}_1 \cong \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)^\top$ sofort für alle $z \in \mathbb{D}$

$$T_D \mathrm{Li}_1(z) \cong D\left(0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\right)^\top \cong 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \notin \mathcal{H}^2(\mathbb{D}).$$

Die Koeffizienten letzterer Potenzreihe sind keine $\ell^2(\mathbb{N}_0)$-Folge, weshalb $T_D \mathrm{Li}_1(z)$ kein Element von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist. Folglich muss man sich für jedes $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit Koeffizientenfolge $a \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \setminus c_{00}(\mathbb{N}_0)$ stets überlegen, unter welchen Bedingungen die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ein Element von $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist. Dies allgemein zu formulieren ist nicht schwer und folgt als Folgerung:

Folgerung 4.14 Es sei $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit Koeffizientenfolge $a \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Dann gilt

$$f' \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \iff \text{Die Koeffizientenfolge } b \text{ mit } \quad b_k := (k+1)a_{k+1} \quad \text{von } f' \text{ ist in } \ell^2(\mathbb{N}_0).$$

Beispiel 4.15 Wir wollen zwei weitere Funktionen untersuchen.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt für die Koeffizientenfolgenglieder der Exponentialfunktion

$$a_k = \frac{1}{k!} = \frac{k+1}{k!(k+1)} = \frac{k+1}{(k+1)!} = (k+1)a_{k+1},$$

woraus die bekannte Tatsache $\exp'(z) = \exp(z)$ folgt. Die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung der Ableitungsfunktion sind daher offenbar quadratsummierbar.

(ii) Wir betrachten den Dilogarithmus Li_2 mit $\mathrm{Li}_2(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \dots,$ für welchen

$$\mathrm{Li}_2'(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots = \frac{\mathrm{Li}_1(z)}{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \text{ gilt.}$$

Einerseits sehen wir, dass $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \ni \mathrm{Li}_2'(z) \cong \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)^\top \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist und andererseits, dass die analytische Fortsetzung von $z \mapsto \frac{\mathrm{Li}_1(z)}{z}$ in den Ursprung existiert, denn dort befindet sich eine hebbare isolierte Singularität.

Folglich ist $T_D : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ mit $f \mapsto f'$ kein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ ist.

Kapitel 5

Fazit

In dieser Arbeit haben wir insbesondere beschränkte lineare Operatoren auf dem Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 untersucht. Ihre Darstellung als unendliche Matrix macht den Umgang mit ihnen intuitiv und leicht verständlich. Trotzdem dürfen die Herausforderungen, vor die man in unendlichdimensionalen Räumen gestellt wird, nicht unterschätzt oder gar vergessen werden. In Satz 2.29 haben wir gesehen, dass *nicht* jede beliebige unendliche Matrix einen linearen Operator auf dem gesamten Raum darstellt; gegebenenfalls tut sie dies lediglich auf einem sehr kleinen Definitionsbereich. Dies unterscheidet lineare Operatoren in unendlichdimensionalen Räumen wesentlich von solchen in endlichdimensionalen Räumen, die stets eine Matrixdarstellung auf dem gesamten Raum besitzen [Fis19, S. 249].

Weitere interessante, aber durchaus anspruchsvolle Fragestellungen zu unendlichen Matrizen, die lineare Operatoren repräsentieren, oder aus der Hilbertraumtheorie sind etwa:

(i) Welche Aussagen kann man über ihre Eigenwerte bzw. ihr (stetiges) Spektrum machen?

(ii) Auf welche Weise hängt $\ell^2(\mathbb{Z})$ mit Fourierreihen zusammen?

(iii) Was genau bedeuten die Aussagen der in Kapitel 3 angesprochenen allgemeinen Sätze über Hankel-, Toeplitz- und Laurent-Matrizen?

Diese Fragen in der vorliegenden Arbeit hinreichend zu beleuchten, würde ihren Rahmen bei weitem sprengen.

Literaturverzeichnis

[Alt12] ALT, HANS WILHELM: *Lineare Funktionalanalysis, Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer Berlin, Heidelberg, Bonn, 6 , 2012.

[Ber02] BERMAN, ABRAHAM; GUERON, SHAY: *On the Inverse of the Hilbert Matrix.* The Mathematical Gazette, 86(506):274–277, 2002.

[Bor16] BORNEMANN, FOLKMAR: *Funktionentheorie.* Mathematik Kompakt, München, 2016. Birkhäuser Basel.

[Bö98] BÖTTCHER, ALBRECHT; SILBERMANN, BERND: *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices.* Universitext, Chemnitz, 1998. Springer New York, NY.

[Cla19] CLASON, CHRISTIAN: *Einführung in die Funktionalanalysis.* Mathematik Kompakt, Essen, 2019. Birkhäuser Cham.

[Dei22] DEISER, OLIVER: *Erste Hilfe in linearer Algebra.* Abrufbar unter https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=ela1, 2022.

[Fis19] FISCHER, GERD: *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium.* Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Garching bei München, 4 , 2019.

[For15] FORSTER, OTTO: *Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Grundkurs Mathematik, München, 2015. Springer Spektrum Wiesbaden.

[For17] FORSTER, OTTO: *Analysis 2, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen.* Grundkurs Mathematik, München, 2017. Springer Spektrum Wiesbaden.

[Gar16] GARCIA, STEPHAN; MASHREGHI, JAVAD; ROSS WILLIAM: *Introduction to Model Spaces and their Operators.* Cambridge University Press, Claremont, Québec, Richmond, 1 , 2016.

[Hal82] HALMOS, PAUL: *A Hilbert Space Problem Book.* Graduate Texts in Mathematics, Santa Clara, 1982. Springer New York, NY.

[Hel10] HELLINGER, ERNST; TOEPLITZ, OTTO: *Grundlage für eine Theorie der unendlichen Matrizen.* Math. Ann., 69:289–330, 1910.

[Kab18] KABALLO, WINFRIED: *Grundkurs Funktionalanalysis.* Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, Dortmund, 2 , 2018.

[Kö04] KÖNIGSBERGER, KONRAD: *Analysis 2.* Springer Berlin, Heidelberg, Garching bei München, 5 , 2004.

[Las12] LASSER, RUPERT; HOFMAIER, FRANK: *Analysis 1 + 2, Ein Wegweiser zum Studienbeginn.* Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, Garching bei München, 2012.

[Lie21] LIESEN, JÖRG; MEHRMANN, VOLKER: *Lineare Algebra, Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis.* Springer Studium Mathematik (Bachelor), Berlin, 2021. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg.

[Mad70] MADDOX, IVOR: *Elements of Functional Analysis.* Cambridge University Press, Lancaster, 1 , 1970.

[Pel98] PELLER, VLADIMIR: *An Excursion into the Theory of Hankel Operators,* in: AXLER, SHELDON; MCCARTHY, JOHN; SARASON, DONALD (Hrsg.): *Holomorphic Spaces*, MSRI Book Series Volume 33, 65–120. Cambridge University Press, Manhattan, 1998.

[Sil21] SILBERMANN, BERND: *On the Spectrum of Hilbert Matrix Operator.* Integr. Equ. Oper. Theory, 93(3):Article 21, 2021.

[Wal04] WALTER, WOLFGANG: *Analysis 1.* Springer Berlin, Heidelberg, Karlsruhe, 7 , 2004.

[Wei00] WEIDMANN, JOACHIM: *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil 1 Grundlagen.* Mathematische Leitfäden, Frankfurt am Main, 2000. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden.

[Wer18] WERNER, DIRK: *Funktionalanalysis.* Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, Berlin, 8 , 2018.