

Lehrstuhl für Baumechanik
der Technischen Universität München

**Ein semi-analytisches Modell zur dynamischen
Berechnung des gekoppelten Systems
Fahrzeug-Fahrweg-Untergrund für das
Oberbausystem Feste Fahrbahn**

Jens Dinkel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
2. Prof. L. Frýba, DrSc.
Akademie der Wissenschaften, Prag / Tschechien

Die Dissertation wurde am 14.04.2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 19.07.2000 angenommen.

Zusammenfassung

Zur dynamischen Berechnung des Oberbausystems Feste Fahrbahn wird ein semi-analytisches Modell entwickelt, das die wesentlichen Elemente des Schienenverkehrs enthält. Das Fahrzeug, der Oberbau und der Untergrund sind durch geeignete mechanische Modelle abgebildet und über dynamische Interaktionsbeziehungen verknüpft. Als Lösungsverfahren kommt die Fouriertransformation zum Einsatz, die eine Betrachtung und Bewertung der dynamischen Effekte im Frequenz- und Wellenzahlraum ermöglicht. Die Tragplatte der Festen Fahrbahn wird vergleichend als Balken und als Platte modelliert. Verschiedene Simulationsrechnungen zeigen die Einsatzmöglichkeiten des Modells.

Abstract

A semi-analytical model is developed for the dynamic analysis of slab track (rigid track) systems. The model incorporates the necessary components in railway traffic. The vehicle, the track and the subsoil are modelled in a sufficiently detailed manner. Particular attention is paid to the correct description of the dynamic interactions between wheel and rail and between slab and subsoil. Fourier transform is used as solution technique, which enables the evaluation of the dynamic effects in frequency and wave number domain. The slab is modelled as beam and alternatively as plate. Displacement curves of rail and slab are calculated in the moving coordinate system and frequency spectra of displacements and velocities are determined at fixed points along the track as well as in the subsoil. The model is used to calculate the receptance of rail and slab in frequency domain. The contact force between wheel and rail due to vertical irregularities is determined. A numerical investigation is carried out for the analysis of the relation between maximum rail displacements and vehicle speed.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Laufe meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für die Gewährung des erforderlichen Freiraumes zur Anfertigung der Dissertation und für seine vielen wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Seine stete Diskussionsbereitschaft hat die Erstellung dieser Arbeit sehr unterstützt.

Dank gebührt Prof. Ing. L. Frýba, DrSc. für die Übernahme des Koreferates und Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger für den Vorsitz des Verfahrens.

Meinen derzeitigen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl möchte ich für die kollegiale und angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Sie haben mit ihrer Diskussionsbereitschaft zum Gelingen beigetragen.

Meinen Freunden will ich darüberhinaus für die Unterstützung während der Erstellung der Arbeit danken. Special thanks to Larry, Frankie, Kid, Derrick, Ralf, Deep Dish, Timmy and René for the music.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern für die Ermöglichung des Studiums und ihre ständige Unterstützung.

Die vorliegende Arbeit ist Christina gewidmet.

München, im August 2000

Jens Dinkel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Motivation	6
1.2	Literatur	8
1.3	Zielsetzung und Aufgabenstellung	17
2	Grundgleichungen der kontinuumsdynamischen Untergrundmodellierung	18
2.1	Bewegungsgleichung	18
2.2	Lösung der Laméschen Differentialgleichung	20
2.3	Verschiebungen und Spannungen im transformierten Raum	22
2.3.1	Besonderheiten beim homogenen Halbraum	23
2.3.2	Besonderheiten bei Schichten	23
2.4	Belastung	24
2.5	Lösung für den homogenen Halbraum	26
2.6	Lösung für das System Schicht auf Halbraum	29
3	Oberbau, Fahrzeug und dynamische Interaktion	32
3.1	Allgemeiner Überblick	32
3.2	Diskrete Modellierungen	33
3.3	Kontinuierliche Modellierungen	33
3.3.1	Der elastisch gebettete Balken	34
3.3.2	Zwei elastisch gebettete gekoppelte Balken	35
3.3.3	Drei elastisch gebettete gekoppelte Balken	37
3.4	Fahrzeugmodelle	38
3.4.1	Schwingerkette	39

3.4.2	Drehgestellmodell	40
3.5	Dynamische Interaktion zwischen Fahrzeug und Oberbau	40
3.5.1	Lösung für bewegtes Eigengewicht	41
3.5.2	Anregung durch Imperfektionen	42
4	Ankoppelung der Balkenmodelle an den Halbraum	46
4.1	Anbindung über Halbraumsteifigkeiten	48
4.2	Berechnungsgrundlagen des gekoppelten Systems	49
4.3	Spannungsverteilung in Querrichtung	51
4.3.1	Streifenverfahren	52
4.3.2	Legendre-Polynome	55
4.3.3	Fehlerkriterium	58
4.3.4	Vergleich der Verfahren	59
4.3.5	Zusammenfassung	65
4.4	Berechnung der Erschütterungsausbreitung im Halbraum	66
4.5	Berücksichtigung der Interaktion mit dem Fahrzeug	68
5	Wechselwirkung zwischen Normalspannungen und Schubspannungen	70
5.1	Theoretische Betrachtung	70
5.2	Numerische Simulation	71
6	Ankoppelung eines Plattenmodelles an den Halbraum	75
6.1	Vertikalverschiebung der Platte	76
6.1.1	Differentialgleichung der Platte	76
6.1.2	Kinematik und Schnittgrößen	77
6.1.3	Transformierte Differentialgleichung	78
6.1.4	Lösung der transformierten Differentialgleichung	80
6.1.5	Gesamte Plattenverschiebung	84
6.2	Vertikalverschiebung des Halbraumes	84
6.3	Kompatibilitätsbedingungen	85
6.4	Ankoppelung eines Oberbaumodells an die Platte	86

7	Anwendungsbeispiele	87
7.1	Vertikalverschiebungen des Oberbaues	89
7.2	Rezeptanz der Schiene	94
7.3	Rezeptanz der Platte	96
7.4	Kontaktkraft zwischen Schiene und Radsatz	97
7.5	Erschütterungsausbreitung	98
7.6	Zweigleisiger Oberbau - Plattenmodell	102
8	Zusammenfassung und Ausblick	104
	Literaturverzeichnis	106
A	Fouriertransformation	116
A.1	Definition	116
A.2	Rechenregeln	116
A.3	Ausgewählte Funktionen	117
B	Legendre - Polynome	119
C	Erweiterte Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens	122
D	Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung nach Rubin	124
	Abbildungsverzeichnis	126

Bezeichnungen

Mechanische Größen

a_i	Lösungsfunktionen nach Rubin
b_i	Lösungsfunktionen nach Rubin
c	Dämpfungskonstante
c_p, c_s, c_R	Wellengeschwindigkeiten der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
d	Dicke (der Platte)
f	Frequenz
h	Schichtdicke einer Bodenschicht
i	imaginäre Einheit
k	Federsteifigkeit
k_x, k_y	Wellenzahlen
k_p, k_s, k_R	Wellenzahlen der Primär-, Sekundär- und Rayleighwelle
k_r	radiale Wellenzahl ($k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$)
m_x, m_y, m_{xy}	Biegemomente und Drillmoment der Platte
p	Lastfunktion, Lastamplitude
q_x, q_y	Querkräfte der Platte
q_{rx}, q_{ry}	Kirchhoffsche Randscherkräfte der Platte
r	Wert zur Fallunterscheidung nach Rubin
t	Zeitkoordinate
v	Fahrgeschwindigkeit
u, v, w	Verschiebungen
x, y, z	Ortskoordinaten
A	Fläche, Querschnittsfläche
B	Plattenbiegesteifigkeit
C	Koeffizienten
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
H	Heaviside-Distribution
P	Legendre-Polynome, alternativ: Lastfunktion
W	Verschiebungsfunktion

α	Oberbaunachgiebigkeit
γ	Scherwinkel der Platte
δ	Dirac-Distribution
ϵ, ε	Dehnung
κ	Faktor zur Erfassung von Schub, Rotationsträgheit oder deren Kopplung
μ	Massebelegung
ν	Querdehnzahl
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
ω	Kreisfrequenz

Δ	Laplaceoperator
Π	Rechteckfunktion
Φ	Skalarfunktion zur Beschreibung des wirbelfreien Anteils
Ψ	Vektorfeld zur Beschreibung des quellenfreien Anteils
Ω	Kreisfrequenz der Anregung

ε	Dehnungsvektor
σ	Spannungsvektor

Symbole

$\circ \text{---} \bullet$	Fourierhintransformation
$\bullet \text{---} \circ$	Fourierrücktransformation
*	Faltung
$(\hat{\cdot})$	transformierte Größe

Indizes

L	Legendre
P	Platte
s	Streifen

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Betriebsgesellschaften der Eisenbahnen sehen sich in den letzten Jahren verschiedensten neuen Herausforderungen gegenübergestellt. Die tiefgreifendste Veränderung stellt die Privatisierung der historisch bedingt meist staatlich geführten Eisenbahngesellschaften dar. Die privaten Gesellschaften sehen sich durch den teilweisen Wegfall der staatlichen Unterstützung deutlich stärker im privatwirtschaftlichen Wettbewerb gegenüber anderen Verkehrsmitteln zum Transport von Personen und Gütern. In dieser Konkurrenzsituation muß sich die Eisenbahn als sicheres und für den Kunden wirtschaftliches und schnelles Transportmittel beweisen. Diese Gründe haben mit dazu geführt, daß die Fahrgeschwindigkeiten deutlich erhöht wurden, besondere Schnellfahrstrecken eingerichtet und die Achslasten erhöht wurden.

Die erhöhten Fahrgeschwindigkeiten und die gesteigerten Achslasten führen zu erhöhten dynamischen Beanspruchungen des Fahrweges und der Fahrzeuge. Dies hat auf Schotterstrecken im Bereich der Deutschen Bahn AG, insbesondere auf Brücken, zu einem starken und beschleunigten Verschleiß des Schotters geführt. Ebenso haben sich die Unrundheiten der Radsätze schneller entwickelt. Aus diesem höheren Verschleiß ergibt sich ein erhöhter Unterhaltsaufwand für Fahrweg und Fahrzeug.

Weitere Probleme ergaben sich in Ländern, in denen weiche Böden vorliegen, wie zum Beispiel Schweden, Norwegen oder den Niederlanden. Dort werden mit den Hochgeschwindigkeitszügen Fahrgeschwindigkeiten erreicht, die im Bereich der Wellengeschwindigkeit der Oberflächenwellen, der Rayleighwellen, liegen. Bei Erreichen dieser Geschwindigkeit kann es im Gleis zu sehr starken dynamischen Verschiebungen kommen. Dadurch wirken besonders starke Belastungen auf das Fahrzeug und das Gleis und unter Umständen ist auch die Fahrsicherheit nicht mehr beeinträchtigt.

Besondere zusätzliche Aufmerksamkeit muß der Trassenführung und der Gleiskonstruktion in dicht besiedelten Gebieten geschenkt werden. Insbesondere, wenn bestehende Strecken um zusätzliche Schnellfahrgleise erweitert oder auf Hochgeschwindigkeitsverkehr umgerüstet werden, sind besondere Maßnahmen im Hinblick auf Schall- und Erschütterungsschutz zu treffen. Eine möglichst geringe Beeinträchtigung der Lebensqualität durch die Infrastruktur ist erstrebenswert.

Im Sinne einer optimalen wirtschaftlichen Ausnützung des Fahrweges ist es für die Eisenbahngesellschaften wünschenswert, Oberbau- und Unterbaukonstruktionen derart auszulegen, daß sie eine lange Lebensdauer aufweisen, während des Betriebs nur minimale Ausfallzeiten für Wartung und Instandsetzung entstehen und die dafür aufzuwendenden Kosten möglichst gering sind. Die Gewährleistung der Fahrsicherheit ist selbstverständlich oberstes Gebot. Gute fahrdynamische Eigenschaften werden dabei ebenfalls vorausgesetzt. Beim herkömmlichen Schotteroberbau entsteht der Großteil der Instandhaltungskosten durch das sogenannte Schotterstopfen. Der verdichtete grobkörnige Schotter lagert sich durch die wiederkehrenden dynamischen Belastungen um. Dies führt dazu, daß sich vertikale Lagefehler im Gleis durch verschiedene Höhenlagen der Schwellen ausbilden, die für die Fahrdynamik des Zuges ab einem gewissen Maß nicht mehr tolerabel sind. Als Gegenmaßnahme wird der Schotter wieder in seine planmäßige Lage gebracht, er wird gestopft, gegebenenfalls wird neues Schottermaterial nachgefüllt.

Als alternative Oberbaukonstruktion wurde in Deutschland 1972 erstmals die Feste Fahrbahn im Bahnhof Rheda eingebaut. Bei der Festen Fahrbahn wird der Schotter vollständig durch eine meist durchgehende Ort betonplatte ersetzt; die Schwellen sind mit dieser Platte fest verbunden oder über elastische Elemente gekoppelt. Vom Einsatz der Festen Fahrbahn erhofft man sich bei höheren Anschaffungskosten deutlich geringere Wartungs- und Instandhaltungskosten und damit insgesamt eine wirtschaftlichere Bauweise. Zudem sind auf Festen Fahrbahnen höhere Fahrgeschwindigkeiten möglich. Im Herbst 1999 waren 16 verschiedene Bauweisen der Festen Fahrbahn vom Eisenbahnbundesamt (EBA) zugelassen [Dar99]. Die Baukosten des Schotteroberbaues belaufen sich auf 700 DM pro laufenden Meter, die billigste Feste Fahrbahn-Variante kostet ca. 1000 DM pro laufenden Meter, wobei die meisten Varianten sogar mit 1200-1500 DM pro laufendem Meter anzusetzen sind. Nach bisherigen Rentabilitätsrechnungen dürften die Investitionskosten für die Feste Fahrbahn allerdings nur um 30-40 % höher liegen als die des Schotteroberbaues, damit das System eine rentable Investition darstellt [Dar99, Sie99b]. Allerdings lassen sich hier die längere Lebensdauer, die höhere Verfügbarkeit und die Möglichkeit höherer Fahrgeschwindigkeiten schwierig einrechnen. Diese Überlegungen zeigen, daß in der Konstruktion der Festen Fahrbahn Forschungs- und Entwicklungsbedarf besteht, um dieses Oberbausystem noch konkurrenzfähiger zu machen.

Rechnerische Simulationsmodelle können bei der Beurteilung verschiedener Bauformen der Festen Fahrbahn ein leistungsfähiges Hilfsmittel darstellen. Varianten können kostengünstig am Computer simuliert werden, und die einzelnen Wirkungsweisen, Effekte und Auswirkungen können anhand der Ergebnisse beurteilt werden. Dieses Vorgehen ermöglicht eine Kostenreduzierung im Hinblick auf erforderliche Teststrecken und ermöglicht es ebenso, neue Ideen und Entwicklungen schnell und mit geringem Aufwand zu testen. Der heutige Stand der Technik im Bereich der Informationstechnologie erlaubt es, mit handelsüblichen Personalcomputern verhältnismäßig schnell Simulationsrechnungen durchzuführen. Großrechenanlagen sind hierzu üblicherweise nur noch für besondere Spezialfälle notwendig.

Um langfristig einfache, für den praktischen Ingenieur handhabbare Rechenmodelle zu entwickeln, ist es erforderlich, detaillierte Modelle zu entwickeln, in denen die verschiedenen Effekte und Einflußgrößen untersucht werden können. Mit Hilfe eines detaillierten Modells können vereinfachte Modelle auf ihre Aussagekraft und ihre Grenzbereiche hin beurteilt werden.

Für eine genaue Beurteilung eines Systems sind sowohl Rechnungen als auch Messungen erforderlich. Erst der gegenseitige Abgleich von Messungen und Rechnungen ermöglicht die Kalibrierung

der Modelle und zeigt auf, welche Effekte in den Modellen nicht enthalten sind. Mit Simulationsrechnungen können die gemessenen Effekte erklärt und Einflüsse durch Änderungen des Systems können prognostiziert werden. Zu beachten sind allerdings bei Messungen (insbesondere bei der Erschütterungsausbreitung) die durch natürliche Einflüsse (z.B. Bodeninhomogenitäten) hervorgerufenen Schwankungen der Meßergebnisse. Diesem Einfluß kann durch Simulationsrechnungen nur bedingt Rechnung getragen werden.

Detaillierte, durch Messungen verifizierte Modelle für die Kurzzeitdynamik können im weiteren als Grundlage zur Entwicklung von Modellen zur Erfassung von Langzeiteffekten in Oberbau, Unterbau und Untergrund dienen.

Mit derartigen gekoppelten Modellen von Kurzzeitdynamik und Langzeitverhalten könnte es möglich werden, z.B. die zeitliche Entwicklung der Lagequalität des Gleises und plastische Deformationen im Untergrund realitätsnah zu simulieren. Einschränkend soll aber darauf hingewiesen werden, daß auf Grund der vielen streuenden Einwirkungen und Materialgrößen eine Aussage wahrscheinlich nur mit entsprechend großer Streubreite möglich sein wird.

1.2 Literatur

Dynamisch belasteter Halbraum

Die dynamische Erregung eines Kontinuums führt zu Wellenausbreitungsvorgängen. Dabei treten im unbegrenzten Kontinuum (Vollraum) zwei Wellenarten auf: Die Welle mit der höheren Ausbreitungsgeschwindigkeit ist eine Kompressionswelle (auch Longitudinal- oder Primärwelle genannt), dabei bewegen sich die Teilchen des Kontinuums in Richtung der Wellenausbreitung. Die andere Welle ist die Scherwelle (auch Transversal- oder Sekundärwelle), bei deren Ausbreitung sich die Teilchen in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bewegen. Beim Halbraum treten zusätzlich noch, bedingt durch die horizontale Oberfläche als Grenze des Kontinuums, weitere Wellenarten auf. Der wichtigste Wellentyp ist hierbei die Rayleighwelle, nach ihrem Entdecker Lord Rayleigh benannt [Ray85]; die Teilchen bewegen sich ellipsenförmig vertikal zur Oberfläche und in Ausbreitungsrichtung. Die Rayleighwelle ist eine Oberflächenwelle. Größere Amplituden treten in Tiefenrichtung beim Halbraum besonders im Bereich einer Wellenlänge auf. Die Love-Welle [Lov44] ist ebenfalls eine Oberflächenwelle, bei der sich die Teilchen parallel zur Oberfläche und in Ausbreitungsrichtung verschieben.

Die erste Lösung der Problemstellung des dynamisch belasteten Halbraumes liefert Lamb [Lam04] für eine vertikal bzw. horizontal wirkende harmonische Einzellast. Reissner [Rei36] erweitert diese Lösung auf eine kreisförmig angreifende konstante Belastung und befaßt sich in seiner folgenden Arbeit [Rei37] mit freien und erzwungenen Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes.

Aufbauend auf Lamb und Reissner ermittelt Holzlöhner das Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche unter harmonischer Belastung auf einer Rechteckfläche [Hol69] und unter einer Einzellast [Hol80]. Die Lösung für die Einzellast wird durch Grenzübergang aus der Lösung für die Rechtecklast gewonnen, die Länge der Seitenflächen geht hierbei gegen Null. Eine Verbesserung der numerischen Stabilität des Reihenansatzes von Holzlöhner gelingt Sarfeld [Sar94].

Liegen komplexere Probleme vor, wie sie typischerweise bei praktischen Aufgaben vorliegen, so ist es nicht möglich, noch geschlossene Lösungen zu finden. Als Beispiele wären hier z.B. kom-

plexe Lastgeometrien, Schichtungen im Halbraum oder eine nicht ebene Oberfläche zu nennen. Durch die Fortschritte im Bereich der numerischen Methoden im Laufe der letzten 30-40 Jahre stehen mittlerweile leistungsfähige Verfahren zur Lösung solcher Problematiken zur Verfügung. Eine aktuelle Übersicht wird von Grundmann [Gru99] gegeben.

Die Fragestellung des dynamisch belasteten Halbraumes kann prinzipiell mit Gebietsdiskretisierungsmethoden wie der Finite-Element-Methode (Finite Element Method, FEM) und der Randelementmethode (Boundary Element Method, BEM) behandelt werden. In beiden Fällen führt die Diskretisierung auf einen gewissen Fehler, da das Verhalten zwischen den Elementknoten näherungsweise durch Ansatzfunktionen abgebildet wird. Es ist also bei einem Einsatz dieser Verfahren auf eine problemangepasste Aufteilung des Gebietes zu achten, damit der Fehler im Bereich vertretbarer Größenordnungen liegt.

Bei der FEM wird das gesamte zu untersuchende Gebiet mit Elementen diskretisiert, im Falle der BEM nur der Rand, was die Dimension des Problems um Eins reduziert.

Mit der FEM können sehr gut und einfach nahezu beliebige Systemgeometrien nachgebildet werden. Nichtlineare Materialeigenschaften können ebenfalls einfach berücksichtigt werden. Zudem führt das Verfahren auf numerisch günstig zu behandelnde Systemmatrizen, die positiv-definit, symmetrisch und schwachbesetzt sind und im Normalfall eine Bandstruktur aufweisen. Für den Fall unendlicher Gebiete, wie im Bereich der Halbraumdynamik, ist das Verfahren allerdings nur mit Einschränkungen bzw. Erweiterungen einsetzbar. Die Notwendigkeit, das zu untersuchende Gebiet zu beschränken, führt zwangsläufig auf Grenzen im Inneren des eigentlich unendlich ausgedehnten Gebietes. Diese stören allerdings die Wellenabstrahlung ins Unendliche, es kommt bei dynamischen Anregungen zu Wellenreflexionen an diesen künstlich eingeführten Grenzen. Zur Behebung dieser Problematik wurden verschiedene Lösungsansätze entwickelt. Als Beispiele sind z.B. infinite Elemente [Bet92] zu nennen oder auch Methoden, bei denen spezielle dynamische Randbedingungen eingeführt wurden [Sch96].

Die Grundlage für die Anwendung der BEM ist die Existenz der Fundamentallösung der Differentialgleichung des Problems in einem homogenen Bereich. Unter Fundamentallösung wird die Lösung infolge einer örtlichen und zeitlichen Impulslast verstanden. Stokes [Sto49] wird für den dreidimensionalen elastodynamischen Fall die Fundamentallösung laut Araújo [Ara94] zugeschrieben. Die Ableitung der BEM führt auf eine Integralformulierung der zu lösenden Gleichung. Im Vergleich zur FEM sind die Systemmatrizen (auf Grund der Randdiskretisierung) deutlich kleiner, allerdings weisen sie ungünstigere Eigenschaften auf: sie sind unsymmetrisch belegt, vollbesetzt und nicht unbedingt positiv-definit. Die Elemente selbst sind ebenfalls schwieriger zu ermitteln, da sie durch Integrationen zu berechnen sind. Eine zusätzliche Schwierigkeit folgt aus den singulären Oberflächenintegralen, wenn z.B. der Angriffspunkt der Last (zeitlich und örtlich) mit dem Auswertepunkt der Verschiebung zusammenfällt. Hier sind spezielle Integrationsstechniken einzusetzen, um den Fehler gering zu halten.

Cruse und Rizzo [CR68] waren die ersten, die numerisch Wellenausbreitungsvorgänge mit der BEM untersucht haben. Die BE-Formulierung im Frequenzbereich wurde, aufbauend auf der Arbeit von Cruse und Rizzo, durch Anwendung des Bettischen Satzes von Dominguez [Dom78] angegeben. Die Ausbreitung ebener Wellen im Zeitbereich war Thema der Dissertation von Mansur [Man83]. Eine Übersicht über die verschiedenen Anwendungen der BEM für dynamische Problemstellungen wurde z.B. von Dominguez [Dom93], Manolis und Beskos [MB88] und von Gaul und Fiedler [GF97] gegeben.

Die Kopplung der beiden beschriebenen Methoden FEM und BEM wurde aus dem Wunsch entwickelt, die Vorteile der beiden Verfahren zu verbinden. Eines der klassischen Beispiele für die Anwendung des gekoppelten Verfahrens ist die Wechselwirkung zwischen Struktur und Baugrund. Die Struktur (und u.U. auch ein Nahbereich des angrenzenden Untergrundes) wird mit FEM modelliert, der Untergrund selbst mit BEM. Triantafyllidis [Tri89] koppelt im Zeitbereich mehrere starre Fundamente mit Hilfe der BEM. Araújo [Ara94] entwickelt einen gekoppelten FE/BE-Zeitbereichsalgorithmus zur Analyse dreidimensionaler Wellenausbreitungsvorgänge in elastischen Medien. Ein Zeitbereichsverfahren zur dynamischen Berechnung nichtlinearer Systeme mit einer FE/BE-Kopplung wurde kürzlich von von Estorff und Firuziaan [EF99] vorgestellt.

Eine neue Formulierung, die die Vorteile der FEM und der BEM implizit zusammenfaßt, ist die von Wolf und Song [WS96] entwickelte Methode der skalierten Rand-Finite-Element Methode, die ohne eine Fundamentallösung auskommt.

Die Methoden der dünnen Schichten (thin layer method) wurde von Waas [Waa72] und Kausel [Kau81, Kau94] entwickelt. Die Lösungsmethodik beruht darauf, den Untergrund in dünne Schichten mit oberflächenparallelen Schichtgrenzen zu unterteilen. Über die Dicke der Schichten wird der Verlauf der Verschiebungen mit Ansatzfunktionen angenähert. Durch einen Übergang in den Wellenzahl- und Frequenzraum (vgl. unten) läßt sich das Problem auf die Lösung eines Gleichungssystem für die Koeffizienten der Ansatzfunktionen reduzieren. Das Gleichungssystem wird nun durch eine Modalanalyse der Impedanzmatrix gelöst. In der Impedanzmatrix sind sowohl wellenzahlabhängige als auch frequenzabhängige Anteile enthalten. Die Modalanalyse der Impedanzmatrix kann nach der Wellenzahl oder nach der Frequenz erfolgen. Wird der Lösungsweg bezüglich der Wellenzahl gewählt [Kau81], so ist eine analytische Rücktransformation der Lösung in den Ortsbereich möglich, andernfalls gelingt die Rücktransformation in den Zeitbereich analytisch [Kau94]. Die jeweils verbleibende Rücktransformation muß numerisch ausgeführt werden.

Als weitere Alternative zu den genannten Verfahren bieten sich Integraltransformationmethoden (ITM) an. Lamb löst wie Reissner das Problem des dynamisch belasteten Halbraumes unter Zuhilfenahme von Integraltransformationmethoden.

Der hier verwendete Ansatz, die entkoppelten Wellengleichungen analytisch mit der Fouriertransformation in den Wellenzahl- und Frequenzraum überzuführen, geht auf Wolf [Wol85] und Grundmann und Müller [GM88, Mül89, Mül90] zurück. Konrad [Kon85] beschreibt die Lösung mit Hilfe der Fouriertransformation für zylindrische Koordinaten. Der formale Ansatz wurde von Lieb [Lie97] verwendet und ist auch bei Jones et. al. [JLLHP97] und in leicht veränderter Form bei Auersch [Aue94a] zu finden.

Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich im Frequenz- und Wellenzahlraum die Fundamentallösung infolge der zeitlichen und örtlichen Impulslast. Die Multiplikation mit der transformierten Last führt auf die analytische Lösung des allgemeinen Problems im transformierten Raum, eine Berücksichtigung bewegter Lasten ist ebenfalls einfach möglich. Die Fourierrücktransformation in den Originalraum muß auf Grund des sehr komplizierten Funktionsverlaufes der Lösung numerisch erfolgen. Jones et. al. [JLLHP97] verwenden eine Inverse Fast Fourier Transformation. Eine ausführliche Diskussion verschiedener Rücktransformationsverfahren ist bei Lieb [Lie97] zu finden; er entwickelt ein adaptives Verfahren in Kombination mit der Wavelettransformation, das die Rücktransformation sehr effektiv und effizient ausführt. Dieses Verfahren ist ein Grundstein für die vorliegende Arbeit.

Dynamische Wechselwirkung zwischen Struktur und Baugrund

In diesem Abschnitt sollen nur die wesentlichen Arbeiten genannt werden, die für die Beschreibung des Untergrundes analytische Lösungen heranziehen, für numerische Verfahren wird auf den vorangegangenen Abschnitt verwiesen.

Gaul [Gau76] unterteilt eine rechteckige Fundamentfläche in quadratische Teilflächen und bestimmt deren Spannungsamplituden im Frequenzbereich unter der Bedingung, daß das Fundament als starr angesetzt wird, d.h. die Verschiebung aller Teilflächen gleich groß ist. Analog gehen Savidis et. al. [SBHH99] bei der Zeitbereichsberechnung der Interaktion einer starren Schwelle mit dem geschichteten Untergrund vor, dabei wird zusätzlich ein teilweises Abheben der Schwelle berücksichtigt. In der Arbeit von Rücker [Rüc81] wird mit dieser Methode ebenfalls die Wechselwirkung zwischen mehreren starren Schwellen über den Untergrund berechnet. Anstelle von Quadratflächen mit konstanter Sohlspannungsverteilung verwendet Zirwas [Zir96] räumliche Glockenkurven als Ansatzfunktionen. Triantafyllidis [Tri84] löst das Problem der dynamischen Untergrundkopplung starrer Fundamente semi-analytisch. Als Ansatzfunktionen für die Spannungsverteilung zwischen Fundament und Untergrund verwendet er Tschebyscheff-Polynome, die eine enge Verwandtschaft zu den in dieser Arbeit verwendeten Legendre-Polynomen aufweisen. Bei allen genannten Verfahren werden die Teilsysteme im Ortsbereich und meist im Frequenzbereich gekoppelt.

Im Frequenz- und Wellenzahlraum koppeln Lieb und Sudret [LS98] einen Biegebalken unter bewegter oszillierender Last mit dem Halbraum. Hierbei wird eine konstante Interaktionsspannung über die Breite des Balkens angesetzt. Eine ähnliche Vorgehensweise wird von Dieterman und Metrikine [DM96] bei der Ermittlung der kritischen Geschwindigkeit einer bewegten Last auf dem System Balken auf Halbraum angewandt.

Gleis- und Fahrzeugdynamik

Der Bereich der Gleisdynamik und der Fahrzeugdynamik wird in der Literatur sehr ausführlich behandelt. Für die vorliegende Arbeit sind diejenigen Arbeiten besonders relevant, die sich mit der Vertikaldynamik der Systeme Fahrzeug und Gleis¹ und der Interaktion der beiden Systeme im Hinblick auf die Anregung durch vertikale Irregularitäten befassen. An dieser Stelle soll ein Überblick über die wesentlichsten Arbeiten gegeben werden. Ein aktueller ausführlicher Übersichtsartikel zur Thematik ist von Popp et. al. [PKK99] mit einer Literaturliste von 170 Referenzen verfaßt. Eine weitere umfassende Betrachtung ist ebenfalls kürzlich von Knothe [Kno98] erschienen. Der Konferenzband des Herbertov Workshops 1994 [KGE95] bietet einen sehr guten Überblick über verwendete Modelle, angewandte Meßtechnik und offene Fragen. Ein etwas älterer Artikel zur Fahrzeug-Fahrweg-Dynamik ist von Knothe und Grassie 1993 [KG93] veröffentlicht worden.

Im Bereich der Gleisdynamik wurde in der Vergangenheit, wie häufig auch heute noch, von stehenden oder bewegten Einzellasten auf dem unendlichen Gleis ausgegangen. Der elastisch gebettete Träger unter statischer Einzellast, formuliert von Zimmermann [Zim53], stellt die Grundlage für die einfachsten Gleismodelle dar. Eine Erweiterung auf bewegte, oszillierende Lasten wurde von Mathews [Mat58, Mat59] vorgenommen. Frýba [Frý72] erweitert die Lösung für

¹Die Begriffe Gleis und Oberbau werden im folgenden synonym verwendet.

bewegte Lasten unter Berücksichtigung von Dämpfung und zeigt auf, daß sich für verschiedene Geschwindigkeiten und verschiedene Dämpfungen unterschiedliche Lösungen ergeben. Dabei führt er die Begriffe kritische Geschwindigkeit und kritische Dämpfung ein, um die verschiedenen Lösungsbereiche voneinander abzugrenzen. In seiner Arbeit zeigt Liedl [Lie98] die Gültigkeit der Anwendung der Fouriertransformation für alle möglichen Fälle, ohne daß wie bei Frýba Fallunterscheidungen zu treffen wären. Die Erweiterung auf ein Mehrschichtenmodell zur genaueren Erfassung der einzelnen Komponenten des Oberbaues ist mit dieser Lösungsmethodik ebenfalls möglich.

Diese kontinuierlichen Modelle stellen eine Vereinfachung der Realität dar, da weder die diskrete Stützung der Schiene auf den Schwellen noch lokale Effekte, wie z.B. Schwellenhohllagen oder nichtlineares Kraft-Weg-Verhalten von Zwischenlagen, erfaßt werden können. Allerdings können diese Modelle analytisch oder zumindest semi-analytisch gelöst werden, was eine einfachere und nachprüfbarere Berechnung erlaubt und eine Analyse des Systemverhaltens erleichtert.

Die Arbeiten aus der Arbeitsgruppe Knothe der TU Berlin haben über das letzte Jahrzehnt und darüber hinaus entscheidende Erkenntnisse geliefert. Hier wurden die Gleismodelle schrittweise verfeinert und die Interaktion mit dem Fahrzeug berücksichtigt. Ripke befaßt sich in [RK91] mit dem dynamischen Verhalten des Gleises unter dynamischer Erregung und löst dies mit dem Übertragungsverfahren. In seiner umfassenden Dissertation [Rip95] entwickelt er ein Finite Element Modell, das mit Hilfe eines Zeitschrittverfahrens die Überfahrt von Schwingerketten über ein Gleis mit Irregularitäten berechnet. Parallel dazu löst Ilias [IK92] unter Berücksichtigung der Ansätze von Kisilowski und Sowinski [KS91] das Problem der diskret gestützten Schiene mit einem diskret-kontinuierlichen Gleismodell. Sibaei [Sib92] erweitert das Modell auf die Interaktion mit einem vereinfachten Fahrzeugmodell, wobei Müller [Mül96] vollständige Fahrzeugmodelle mit einbezieht. Als Grundlage dient hier der Artikel von Jezequel [Jez81], der die Antwort periodischer Systeme auf bewegte Lasten untersucht.

Dynamische Ersatzmodelle aus Feder- und Dämpferelementen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Oberbaues sind zentrales Thema der Dissertation von Wu [Wu97]. Diese Modelle werden durch Anpassungsrechnungen kalibriert und können für Frequenz- oder Zeitbereichsrechnungen eingesetzt werden. Mit demselben Verfahren approximieren Knothe und Wu [KW99] die dynamische Antwort des Halbraumes auf eine Rechtecklast, die z.B. einer Schotterfläche entsprechen kann.

Die Berücksichtigung der Kopplung von Schwellen über den Untergrund in einem Gleismodell wurde von denselben Autoren in [KW98] beschrieben.

An der Chalmers University in Göteborg ist ebenfalls eine auf Schienenverkehr spezialisierte Arbeitsgruppe tätig (Charmec). Nielsen und Igeland [NI95] arbeiten mit Finite Element Modellen für Fahrzeug und Gleis und untersuchen dabei verschiedene Anregungsarten wie Rauigkeiten, Flachstellen von Rädern und Schwellenhohllagen. Dahlberg [Dah95] verwendet das Modell zur Vergleichsrechnungen mit Meßergebnissen und kommt zu guter Übereinstimmung bei den Eigenfrequenzen der Schiene, den Kontaktkräften zwischen Rad und Schiene und der Schienenrezeptanz.

Die korrekte Lösung für das Problem der Interaktion von Fahrzeug und Fahrweg wurde bereits 1982 von Grassie et. al. [GGHJ82b, GGHJ82a] im bewegten Koordinatensystem beschrieben, wobei der Lösungsweg eher umständlich ist.

Den Schwerpunkt auf die Fahrzeugdynamik legen Garg, Dukkipati und Amyot [GD84, DA88] und Popp und Schiehlen [PS93] in ihren Büchern. Dabei wird die Gleiselastizität üblicherweise vernachlässigt.

Feste Fahrbahn

Das Oberbausystem Feste Fahrbahn ist selbst Thema mehrerer Arbeiten unterschiedlichster Fragestellungen.

Den aktuellen Forschungsstand in Deutschland zur dynamischen Modellierung der Festen Fahrbahn stellen die im November 1999 vorgestellten Modelle dar [Sie99a]. Dabei ist das von Knothe und Yu [KY99] entwickelte Modell das einzige, das die Interaktion mit dem Fahrzeug erfaßt und die Zwischenlage getrennt modelliert. Die Platte wird wie im Modell von Savidis et. al. [SBBH99] durch Finite Elemente modelliert; die Interaktion der einzelnen Plattenelemente mit dem und über den Untergrund ist berücksichtigt. Rücker [Rüc99] erörtert neben Kurzzeiteffekten auch das Setzungsverhalten, wobei sowohl theoretische Ergebnisse als auch Meßergebnisse zur Beurteilung herangezogen werden.

Den Stand der Technik in Hinblick auf das anzuwendende Bemessungsverfahren stellt der Aufsatz von Eisenmann und Leykauf [EL00] im Beton-Kalender 2000 dar. Die Bemessung basiert auf den Systemen Balken auf Federn und Platte auf Federn. Auf diese Weise sind sie für den praktisch tätigen Ingenieur einfach handhabbar. Die Radlastverlagerung wird durch einen Zuschlag von 20 % erfaßt, und dynamischen Effekten wird durch einen Zuschlag von 50 % vereinfacht Rechnung getragen. Ebenfalls finden sich in dem Aufsatz eine Zusammenstellung der Entwicklung der Bauarten der Festen Fahrbahn, Konstruktionshinweise zur Ausführung auf Brücken und der Gestaltung der Übergangsbereiche sowie eine Übersicht der wesentlichen Prüfungen des Systems und seiner Komponenten.

Die Deutsche Bahn stellt in einem Informationsblatt [Deu96] diejenigen Varianten der Festen Fahrbahn vor, die auf der Versuchsstrecke in Waghäusel zum Einsatz kamen.

Eine Übersicht der Entwicklungen im Ausland stammt von Leykauf und Maleki [LM97a]. Im selben Band findet sich eine Zusammenstellung der oberbautechnischen Prüfungen zur Bewertung von verschiedenen Konstruktionsformen der Festen Fahrbahn [LM97b]. Ein vergleichender Bericht von zwei Konstruktionsarten der Festen Fahrbahn mit Schwerpunkt auf das dynamische Verhalten wurde von der DB AG erstellt [Deu98]. Eine vergleichende Übersicht verschiedener Oberbausysteme im Hinblick auf Unterhaltskosten im Laufe der Lebensdauer wurde von Esveld [Esv99] veröffentlicht.

Eisenmann [Eis97] stellt die bauliche Entwicklung der Festen Fahrbahn in Deutschland dar und erörtert Kriterien zum Entwurf und zum Bau. Rehfeld [Reh95] und Neidhart [Nei96] beschäftigen sich mit Anforderungen an die Untergrundbeschaffenheit und den Erfahrungen hinsichtlich des Setzungsverhaltens. Hilliges und Zachlehner [HZ95] konzentrieren sich auf besondere Fragen der optimierten baulichen Ausführung der Bauart Rheda, die den weitaus größten Anteil der in Betrieb befindlichen Strecken mit Fester Fahrbahn in Deutschland aufweist.

Erschütterungsausbreitung

Es existieren verschiedene Gesamtmodelle zur Gleisdynamik und zur Berechnung der Erschütterungsausbreitung. In einem idealen deterministischen Modell sollten drei Teilmodelle enthalten sein: das Fahrzeug, der Oberbau und der Untergrund. Die gegenseitige dynamische Interaktion der Modelle ist zu berücksichtigen. Soll die Erschütterungseinwirkung auf ein Gebäude berechnet werden, so ist das Gebäude als viertes Modell in das Gesamtmodell zu integrieren.

Der Bericht von Auersch [Aue88b] und die Arbeit von Rosen [Ros94], die sich auf Auersch und Prange et. al. [PHT90] stützt, geben einen Überblick der Anregungsmechanismen:

- Schienenverschiebungen infolge des bewegten Eigengewichts
- Radunrundheiten und Flachstellen der Räder
- Schwankungen der Schienenideallage durch Unebenheiten des Gleises (Rauigkeiten und Gleislagefehler)
- Schwingungen und Unwuchten des Antriebssystems
- Schwingungen der einzelnen Komponenten des Fahrzeuges
- Beschleunigungen und Verzögerungen des Zuges
- Parametererregung durch die diskrete Lagerung der Schienen auf den Schwellen
- Schwankungen der Untergrundsteifigkeit

In der besonders erwähnenswerten Arbeit von Auersch [Aue88b], die als eine der wenigen Arbeiten alle Komponenten des Systems Eisenbahn mit einbezieht, wird die Erschütterungsausbreitung mit einem kombinierten Finite Element- und Randelementprogramm [Aue88a] berechnet. Dabei werden die dynamischen Radlasten aus einer Interaktionsberechnung zwischen Fahrzeug und Gleis bei einer Fahrgeschwindigkeit gleich Null unter Berücksichtigung angesetzter Gleisirregularitäten ermittelt. Die dafür erforderliche Gleisnachgiebigkeit wurde unter Berücksichtigung mehrerer Schwellen und deren Wechselwirkung über den Baugrund (vgl. Rücker [Rüc81]) bestimmt. Nach Berechnung der Radlasten können diese wiederum auf das System Gleis auf Schwellen aufgebracht werden, so daß die Ausbreitung der Erschütterungen berechnet werden kann. Zur Berücksichtigung des Einflusses der Fahrgeschwindigkeit zieht er als Vergleichsmodell den elastisch gebetteten Balken heran.

Zwei Dissertationen am Institut für Boden- und Felsmechanik in Karlsruhe befassen sich ausführlich mit der Thematik. Huber [Hub88] betrachtet zum einen die dynamischen Schwellenlasten infolge eines bewegten statischen Lastbildes auf einem unendlichen elastisch gelagerten Balken. Ein Vergleich der gemessenen und berechneten Schwinggeschwindigkeiten der Schiene zeigt eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung. Die Differenzen lassen sich laut Huber durch die vereinfachte Oberbaumodellierung und die Nichtberücksichtigung harmonischer Anregungen erklären. Die Ausbreitung der Erschütterungen wird mit verschiedenen theoretischen Ansätzen für die ortsfeste Einzellast untersucht. Die Meßergebnisse lassen sich mit den deterministischen Anregungen nicht nachbilden. In einer Variante wurde das Erregersignal auf der Halbraumoberfläche stochastisch verändert, um die Effekte dynamischer Erregung durch Radunrundheiten und

dynamischem Zusammenwirken von Fahrzeug und Fahrweg zu berücksichtigen. Huber kommt durch Vergleich mit Messungen zu dem Schluß, daß ein stochastisches Erregersignal nicht die Ursache für die Unterschiede zwischen Messung und Rechnung darstellen kann, da die gemessenen Schwingschnellen bei zwei Vorbeifahrten desselben Zuges an derselben Stelle in geringer Entfernung vom Gleis nahezu identisch sind. Er führt die Differenzen auf die stochastischen Schwankungen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten im Untergrund zurück.

Tamborek [Tam92] untersucht mit einem dreidimensionalen Randelementmodell im Zeitbereich die Erschütterungsausbreitung. Als Lastbild auf dem Oberbaummodell des elastisch gebetteten Balkens wird eine bewegte statische Einzellast angesetzt. Der daraus resultierende Schwellenkraftverlauf wird (nach einer Umrechnung) über eine Fundamentfläche von $2.6 \times 2.6 \text{ m}^2$ als schlaife Last aufgebracht. Seine Modellierung enthält auch die Einbeziehung von Damm- und Einschnittlagen. Dabei wird beim Damm eine durchschnittliche Reduzierung der Fernfeldamplituden um ca. 10 % und beim Einschnitt um ca. 40 % errechnet. Jede Diskontinuität der Oberfläche führt im Prinzip zu einer Reduktion der Erschütterungsamplitude, da die freie Wellenausbreitung gestört wird.

Triantafyllidis und Prange [TP94a, TP94b] beschreiben in ihren zusammengehörigen Artikeln ein Gleismodell und vergleichen die Ergebnisse der Berechnungen mit Messungen.

Krylov [Kry95, Kry98] setzt bewegte nicht oszillierende Einzellasten als Belastung des Oberbaues an und ermittelt die Anregung für jede Schwelle mit dem Ersatzmodell des Balkens auf Winklerbettung. Diese Belastung wird nun über Lastflächen, die den Schotterauflageflächen auf dem Untergrund entsprechen, auf den Untergrund als Last aufgebracht. Für feste Punkte im Freifeld wird nun die Schwingungsantwort unter Berücksichtigung aller relevanten Schwellenlasten durch Summenbildung bestimmt. Degrande [Deg99] verwendet das Modell von Krylov zur Verifikation von Messungen und erzielt durchschnittliche Übereinstimmungen. Er führt dies auf die ungenügende Kenntnis der dynamischen Bodenparameter zurück und auf die Vernachlässigung der dynamischen Anteile in der Anregung.

Von Madshus et. al. [MBH96] stammt ein semi-empirisches Modell zur Bestimmung der Erschütterungsausbreitung und der Berechnung der Schwingungsanregung von Gebäuden. Das Modell ist statistisch formuliert und liefert sowohl Erwartungswerte als auch Grenzwerte der zu erwartenden Erschütterungen. Die verschiedenen Gegebenheiten wie z.B. Untergrund, Gleisqualität oder Verstärkungseffekt des Gebäudes werden über Einflußfaktoren berücksichtigt. Diese Einflußfaktoren wurden aus Messungen bestimmt.

Eine stochastische Vorgehensweise zur Bestimmung der Schwingungsanregung von Gebäuden durch Eisenbahnverkehr ist von Hunt [Hun96] entwickelt worden. Das Modell erlaubt die Verwendung von bestehenden Fahrzeug-, Gleis- und Untergrundmodellen und basiert auf der Annahme, daß die Erschütterungsausbreitung als Zufallsprozeß beschrieben werden kann.

Das Modell von Sheng, Jones und Petyt [SJP99a, SJP99b] wurde zeitlich parallel zur vorliegenden Arbeit entwickelt und weist ein ähnliches Vorgehen in der Modellbildung auf. Balkensysteme zur Abbildung der Gleiskonstruktion werden mit dem Untergrund über eine konstante Interaktionsspannung im Frequenz- und Wellenzahlraum gekoppelt. Die Interaktionsspannung wird nicht genauer untersucht, und insbesondere ist die dynamische Interaktion mit einem Fahrzeug nicht enthalten. Als Anregung werden lediglich bewegte statische und oszillierende Lasten angesetzt. Mit diesem Modell sind daher lediglich qualitative, aber keine quantitativen Aussagen möglich.

Die Methode der Randelemente eignet sich gut zur Beschreibung des semi-infiniten Untergrundes. Daher kommt sie auch für die Problematik der Erschütterungsausbreitung sowohl im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich zum Einsatz.

Die Arbeitsgruppe von Schmid in Bochum arbeitet seit längerer Zeit mit Randelementen in Kombination mit Finiten Elementen im Bereich der Ausbreitung und der Reduzierung von Erschütterungen. Die Dissertation von Le [Le96] untersucht die Erschütterungsausbreitung mit zwei- und dreidimensionalen Modellen. Dabei wird der Oberbau durch Finite Elemente modelliert, die mit den den Untergrund repräsentierenden Randelementen verbunden werden. Als Anregung werden harmonische ortsfeste Lasten auf den Oberbau aufgebracht. Maßnahmen zur Reduzierung der Erschütterungsausbreitung, wie Bodenaustausch oder Einbaukörper, wurden besonders auf ihre Wirkung hin untersucht. In der Diplomarbeit von Rosen [Ros94] wurden in Zusammenarbeit mit Le verschiedene Parameterstudien zur Erschütterungsausbreitung mit einem zweidimensionalen Modell durchgeführt. In der Arbeit ist auch eine gute Übersicht und Beschreibung über weitere erschütterungsmindernde Maßnahmen, wie den offenen Schlitz im Boden, Schlitzwände, Gasmatten und PUR-Unterschottermatten, gegeben. Der Einbaukörper wurde von Chou, Le und Schmid in [CLS91] vorgestellt und z.B. von Le [Le96] auf seine Wirksamkeit untersucht. Die erschütterungsmindernde Wirkung beruht auf der Eigenschaft einer Bodenschicht (hier zwischen Gleiskörper und dem im Untergrund eingebauten Betonblock), keine Erschütterungen zu übertragen, falls die Anregungsfrequenz kleiner als die erste Eigenfrequenz der Bodenschicht ist. Als aktuelle Arbeiten aus dieser Arbeitsgruppe sind Aufsätze von Friedrich et. al. [FPS99] und Pflanz [Pfl99] zu nennen.

Van den Broeck und de Roeck [BR96, BR99] haben ein vollständiges FEM-BEM Modell zur Simulation einer Zugüberfahrt entwickelt. Es berücksichtigt die vollständige Kopplung des Schwellenrostes über den Untergrund. Als Ergebnisse wurden in den angegebenen Artikeln Rezeptanzkurven der Schiene infolge harmonischer Erregung präsentiert.

Das von Takemiya und Yuasa [TY99] vorgestellte Modell beruht ebenfalls auf einer Kopplung von FEM und BEM. Durch Simulationsrechnungen wird hierbei der erschütterungsmindernde Einfluß der sogenannten "wave impeding barrier" (WIB) untersucht. Es handelt sich um X-förmig unter dem Oberbau eingelassene Pfeiler, die die Ausbreitung der Wellen behindern.

Eine der aktuellsten Arbeiten ist die Dissertation von Hall [Hal00]. Er entwickelt zwei- und dreidimensionale FE-Modelle zur Beschreibung des Oberbaues und des Untergrundes. Dabei wird besonderer Wert auf die Festlegung der Elementgröße und der Definition der Ränder gelegt, so daß die Wellenausbreitungsvorgänge im Untergrund korrekt erfaßt werden können. Die Vergleiche der Berechnungsergebnisse mit Messungen zeigen im Bereich des Oberbaues eine gute und im Bereich des Freifeldes eine annähernd zufriedenstellende Übereinstimmung. Für die Belastung werden zeitlich versetzte Impulslasten verwendet, die dem bewegten Eigengewicht entsprechen. Das Fahrzeug wurde in der Modellierung nicht berücksichtigt.

1.3 Zielsetzung und Aufgabenstellung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines leistungsfähigen Simulationsmodells zur dynamischen Berechnung des Oberbausystems Feste Fahrbahn. In einem Gesamtmodell müssen daher das Fahrzeug, der Oberbau und der Untergrund enthalten sein. Zielsetzung ist, alle drei Elemente mit ungefähr gleichem Näherungsgrad zu modellieren. Alle wesentlichen dynamischen Effekte müssen mit jedem der drei Teilmodelle abbildbar sein. Besondere Aufmerksamkeit ist der korrekten Formulierung der Interaktionsbeziehungen zwischen Fahrzeug und Oberbau einerseits und Oberbau und Untergrund andererseits zu widmen. Weiterhin soll ein Lösungsweg verwendet werden, der es erlaubt, soweit wie möglich analytische Lösungen zu finden, um damit ohne numerische Näherungsmethoden Einflüsse und Effekte zu studieren. Als Lösungstechnik wird daher die Fouriertransformation bezüglich Ortskoordinaten und Zeitkoordinate verwendet. Im Wellenzahl- und Frequenzraum lassen sich dynamische Effekte wie Resonanzstellen und Wellenausbreitungsvorgänge sehr gut erkennen. Mit numerischen Rücktransformationmethoden werden aus den transformierten Lösungen Ergebnisse im Originalraum gewonnen.

Der Einleitung folgend, befaßt sich Kapitel 2 mit der kontinuumsdynamischen Beschreibung des Untergrundes, modelliert als geschichteter Halbraum.

Kapitel 3 beschreibt die Modellierung des Fahrzeuges und des Oberbaues und die Formulierung der dynamischen Interaktion zwischen Radsatz und Schiene.

Die Ankopplung der vorgestellten Oberbaumodelle an den Halbraum unter Berücksichtigung der dynamischen Interaktionsbeziehungen ist Thema des 4. Kapitels, wobei die Tragplatte der Festen Fahrbahn als Balken modelliert wird.

In Kapitel 5 wird die Notwendigkeit der gekoppelten Berücksichtigung von Schubspannungen und Normalspannungen im Hinblick auf die Untergrundsteifigkeiten und die Erschütterungsausbreitung untersucht.

Eine Erweiterung der Modellierung der Tragplatte auf eine Platte im mechanischen Sinne wird in Kapitel 6 vorgenommen.

Anwendungsbeispiele und vergleichende Rechnungen zwischen der Balkenmodellierung und der Plattenmodellierung zeigen in Kapitel 7 die verschiedenen Anwendungsbereiche des vollständigen Simulationsmodells.

Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 2

Grundgleichungen der kontinuumsdynamischen Untergrundmodellierung

Der Untergrund wird durch das kontinuumsmechanische Modell des Halbraumes beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wird linear elastisches, isotropes und homogenes Materialverhalten angesetzt.

Das reale Bodenverhalten kann durch dieses Modell nur unter der Näherung betrachtet werden, daß auf Grund der Annahme linear elastischen Materialverhaltens nur dynamische Vorgänge kurzer Dauer und kleiner Amplituden abgebildet werden können. Das Modell eignet sich daher zur Erfassung von Vorgängen der Kurzzeitdynamik. Als Beispiele für den Einsatz des Modells können die Berechnung von Verformungen und Spannungen des Untergrundes bei bewegten Lasten oder die Berechnung der Erschütterungsausbreitung angeführt werden. In diesen Fällen können nichtlineare Effekte des Bodens vernachlässigt werden.

Durch die lineare Formulierung des Modells ist es dagegen nicht möglich, Langzeiteffekte, wie z.B. bleibende Deformationen, zu erfassen. Diese können nur durch ein nichtlineares Stoffgesetz abgebildet werden.

Die Modellierung läßt sich einfach auch auf einen horizontal geschichteten Untergrund erweitern. Die Beschränkung dieser Erweiterung, horizontale Schichtgrenzen bzw. eine horizontale Oberfläche einzuführen, ergibt sich aus der Verwendung der Fouriertransformation bei der schrittweisen Lösung der Differentialgleichung.

2.1 Bewegungsgleichung

Die Differentialgleichung der Elastodynamik für die Verschiebungen u^i lautet in tensorieller Indeschreibweise nach Flügge [Flü72]:

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-2\nu)u^i|_j^j + u^j|_j^i] = -X^i + \rho\ddot{u}^i \quad .$$

Werden die zur Beschreibung des Materialverhaltens ausreichenden Laméschen Konstanten eingeführt, ergibt sich die maßgebende Differentialgleichung, die auch als Lamésche Differentialgleichung bezeichnet wird. Die Volumenkräfte werden mit X^i bezeichnet.

$$\mu u^i|_j^j + (\lambda + \mu) u^j|_j^i + X^i - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (2.1)$$

Die wesentlichen mechanischen Kenngrößen eines Bodens, die aus Laborversuchen ermittelt werden können, sind der Schubmodul G , die Querdehnzahl ν und die Dichte ρ . Aus Schubmodul G bzw. Elastizitätsmodul E und Querdehnzahl ν lassen sich die Laméschen Konstanten λ und μ ableiten:

$$\begin{aligned} \mu &= G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{2 G \nu}{1 - 2\nu} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned}$$

Die Dichte geht direkt in die Differentialgleichung ein.

Zur Berücksichtigung der Materialdämpfung kann durch Anwendung des Korrespondenzprinzips auf einen komplexen Schub- bzw. Elastizitätsmodul übergegangen werden. Das Korrespondenzprinzip besagt, daß die Lösung eines dynamischen Problems für ein viskoelastisches Material aus der Lösung für ein elastisches Material gewonnen werden kann, wenn man die realen Elastizitätskonstanten durch komplexe Elastizitätskonstanten ersetzt [Rüc81]. Hierbei sind zwei mögliche Beschreibungen der Materialdämpfung möglich. Wird eine hysteretische Dämpfung durch die hysteretische Dämpfungskonstante D (auch als logarithmisches Dämpfungsdekrement bezeichnet) angesetzt, so kann für die Berechnung des komplexen Elastizitätsmoduls folgende Formel verwendet werden.¹

$$\bar{E} = E (1 + 2 i D)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Materialdämpfung auf diesem Wege erfaßt.

Die alternative Formulierung geht von einer viskosen Dämpfung aus; daher ist die Materialdämpfung frequenzabhängig. In der zugehörigen Formel bezeichnet η die viskose Dämpfungskonstante und ω die Frequenz.

$$\bar{E} = E (1 + i\omega\eta)$$

Die Verwendung eines komplexen Elastizitätsmoduls führt in der Differentialgleichung auf komplexe Lamésche Konstanten.

Allerdings ist bei einer Lösung durch Fouriertransformation (im Frequenzbereich) zu beachten, daß bei nichtperiodischer Anregung die Kausalität verloren geht. Bei einer Impulsbelastung ergeben sich aus der Berechnung (bedingt durch das Lösungsverfahren) bereits vor der Einwirkung der Last Reaktionen des Systems [Nat89].

¹In dieser Formel wird der komplexe Elastizitätsmodul mit einem Balken gekennzeichnet, dies soll aber im folgenden entfallen.

2.2 Lösung der Laméschen Differentialgleichung

Die Lamésche Differentialgleichung kann mit Hilfe des Potentialansatzes von Helmholtz und einer anschließenden mehrdimensionalen Fouriertransformation im transformierten Raum analytisch gelöst werden.

Der Satz von Helmholtz besagt, daß ein hinreichend stetiges Vektorfeld u^i in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil zerlegt werden kann. Es existieren ein skalares Feld Φ und ein Vektorfeld Ψ_k .

$$u^i = \Phi^i + \Psi_k|_j \varepsilon^{ijk} \quad (2.2)$$

Werden die einzelnen Anteile dieser Summe in die Differentialgleichung (2.1) eingesetzt, so ergeben sich zwei entkoppelte partielle Differentialgleichungen:

$$\Phi|_j^j - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.3)$$

$$\Psi_i|_j^j - \frac{\rho}{\mu} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Werden die Koeffizienten der Beschleunigungsterme zusammengefaßt, so zeigt sich, daß die inversen Terme quadrierten Geschwindigkeiten entsprechen. Beide Gleichungen stellen Wellengleichungen dar.

Folgende Zusammenhänge gelten:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5)$$

Infolge des komplexen Elastizitätsmoduls (bzw. der daraus folgenden komplexen Laméschen Konstanten) sind beide Geschwindigkeiten komplexe Größen. Der Realteil von c_p ist die Primärwellengeschwindigkeit (Kompressionswellengeschwindigkeit) und der Realteil von c_s die Sekundärwellengeschwindigkeit des elastischen Mediums. Die Imaginärteile führen zu einem Abklingen der Wellenamplituden mit zunehmender Tiefe (siehe auch Abschnitt 2.3.1).

Unter Verwendung der Wellengeschwindigkeiten ergibt sich die verkürzte Schreibweise der entkoppelten Differentialgleichungen:

$$\Phi|_j^j - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Die hier verwendete Herleitung ist an Wolf [Wol85], Müller [Mül89] und Lieb [Lie97] angelehnt, ein alternativer Lösungsweg ist bei Flügge [Flü72] zu finden. Dort werden allerdings die Wellengeschwindigkeiten wie häufig in der anglo-amerikanischen Literatur als "wave-slownesses" (Kehrwert der Geschwindigkeiten) definiert, obgleich sie als Geschwindigkeiten (velocities) bezeichnet werden.

Das System partieller Differentialgleichungen wird durch die Anwendung der Fouriertransformation in einem weiteren Schritt in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen umgewandelt.

Die Fouriertransformation wird bezüglich der oberflächenparallelen Ortskoordinaten $x \circ \bullet k_x$ und $y \circ \bullet k_y$ und der Zeit $t \circ \bullet \omega$ durchgeführt. Die Tiefencoordinate z wird nicht transformiert, sondern bleibt im Originalraum erhalten. Das Differentialgleichungssystem nimmt folgende Form an, die fouriertransformierten Größen werden mit einem Dach ($\hat{\cdot}$) bezeichnet:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c_p^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \hat{\Phi} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} &= 0 \\ \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) \hat{\Psi}_i + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_i}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Im fouriertransformierten Raum kann für die vorliegenden Differentialgleichungen ein analytischer Lösungsansatz für $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}_i$ gefunden werden:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} \\ \hat{\Psi}_i &= B_{1i} e^{\lambda_2 z} + B_{2i} e^{-\lambda_2 z} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hierbei werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_p^2, & \lambda_2^2 &= k_x^2 + k_y^2 - k_s^2 \\ k_p &= \frac{\omega}{c_p}, & k_s &= \frac{\omega}{c_s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die bisherigen Beziehungen vereinfachen sich durch Übergang auf ein kartesisches Ortskoordinatensystem, bei dem die Koordinaten x und y oberflächenparallel verlaufen und die z -Koordinate von der Oberfläche aus positiv in die Tiefe des Halbraumes definiert ist.

Gleichung (2.2) lautet in ausführlicher Schreibweise in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \Phi + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Der Differentialoperator des Vektorpotentials Ψ ist singular, die Determinante der Matrix ist gleich null. Dies bedeutet, daß die Komponenten des Vektorpotentials linear abhängig sind und daher eine Komponente frei gewählt werden kann, z.B. $\psi_z = 0$, siehe Duddeck [Dud97].

Die Verschiebungen im Originalraum lauten somit:

$$\begin{aligned} u_x &= \Phi_{,x} - \Psi_{y,z} \\ u_y &= \Phi_{,y} + \Psi_{x,z} \\ u_z &= \Phi_{,z} - \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Im fouriertransformierten Raum können die Verschiebungen unter Beachtung der Rechenvorschriften der Fouriertransformation (Anhang A) wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x &= i k_x \hat{\Phi} - \hat{\Psi}_{y,z} \\ \hat{u}_y &= i k_y \hat{\Phi} + \hat{\Psi}_{x,z} \\ \hat{u}_z &= \hat{\Phi}_{,z} - i k_y \hat{\Psi}_x + i k_x \hat{\Psi}_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 Verschiebungen und Spannungen im transformierten Raum

Werden die Lösungsansätze aus Gleichung (2.9) in die Formeln (2.13) eingesetzt, so ergibt sich die folgende Matrixgleichung für die transformierten Verschiebungen:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ ik_y & ik_y & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & -ik_y & -ik_y & ik_x & ik_x \end{bmatrix} \mathbf{C} \quad (2.14)$$

Aus den Verschiebungen kann mit den Beziehungen der Kontinuumsmechanik der Green-Lagrange Verzerrungstensor abgeleitet werden. Daraus ergibt sich über die tensorielle Multiplikation mit dem Elastizitätstensor der Spannungstensor. Unter Verwendung der Abkürzung

$$k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$$

kann in Matrizenform für die sechs den Spannungstensor charakterisierenden Spannungen im transformierten Raum geschrieben werden:

$$\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) & -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) & 0 & 0 & -2ik_x\lambda_2 & 2ik_x\lambda_2 \\ -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) & -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_y\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y\lambda_2 & 2ik_y\lambda_2 & 2ik_x\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \\ -2k_xk_y & -2k_xk_y & ik_x\lambda_2 & -ik_x\lambda_2 & -ik_y\lambda_2 & ik_y\lambda_2 \\ 2ik_y\lambda_1 & -2ik_y\lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_xk_y & -k_xk_y \\ 2ik_x\lambda_1 & -2ik_x\lambda_1 & k_xk_y & k_xk_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \end{bmatrix} \mathbf{C} \quad (2.15)$$

Zur Abkürzung der Schreibweise wurde in den obenstehenden Gleichungen der Vektor definiert, der die (noch unbekannt) Koeffizienten der Lösungsansätze und Exponentialausdrücke beinhaltet:

$$\mathbf{C}^T = \left(A_1 e^{\lambda_1 z} \quad A_2 e^{-\lambda_1 z} \quad B_{x1} e^{\lambda_2 z} \quad B_{x2} e^{-\lambda_2 z} \quad B_{y1} e^{\lambda_2 z} \quad B_{y2} e^{-\lambda_2 z} \right)$$

Ziel der Untersuchungen ist, auf Grund eines vorgegebenen Spannungsverlaufes in einer gewissen Tiefe z_σ , die zugehörigen Verschiebungen des Halbraumes in einer beliebigen Tiefe z_u zu ermitteln. Denkbar ist auch, einen Ortsverlauf der Verschiebung vorzugeben, um daraus den resultierenden Spannungszustand zu ermitteln. Dies läßt sich in der Realität schwieriger gestalten. Spannungen wirken als Belastungen im Normalfall örtlich begrenzt und können daher mathematisch genau beschrieben werden. Der Fall von vorgegebenen Verschiebungen ist in der Realität eher unwahrscheinlich. Verschiebungen eines kontinuierlichen elastischen Mediums weisen einen kontinuierlichen Verlauf auf, daher wäre es notwendig, zur Beschreibung des Belastungsbildes einen Verschiebungsverlauf im gesamten unendlich ausgedehnten x - y -Bereich zu definieren, was nicht realistisch erscheint.

In der Realität bzw. in der mechanischen Modellierung treten allerdings Fragestellungen auf, die gemischte Randwertaufgaben darstellen. Ein klassisches Beispiel stellt das starre Fundament auf dem Halbraum dar. Im Bereich des Fundaments sind die Verschiebungen konstant und könnten mit dieser Bedingung beschrieben werden. Der Verlauf der Spannungen ist in diesem

Bereich unbekannt. Im Bereich außerhalb des Fundamentes ist der Verlauf der Verschiebungen unbekannt, die Spannungen sind jedoch bekannt, sie sind gleich Null.

Der vorgeschlagene Lösungsweg erlaubt es nicht, gemischte Randwertprobleme direkt zu berücksichtigen. Als Belastung muß entweder der Spannungsverlauf vollständig im x - y -Bereich gegeben sein oder der Verschiebungsverlauf.

In dieser Arbeit wird aus den genannten Gründen nur der Fall von Belastungen in Form einwirkender Spannungen berücksichtigt und dargestellt.

2.3.1 Besonderheiten beim homogenen Halbraum

Beim Sonderfall des homogenen Halbraumes muß die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung eingehalten sein. Dies bedeutet, daß, abgesehen von der Oberfläche aus, keine Wellen einfallen dürfen. Alle Wellen müssen damit in den Halbraum hinein ins Unendliche abstrahlen. Dies gilt für Belastungen, die an der Oberfläche wirken. Im Falle eines Erdbebens trifft dieser Fall nicht zu.

Müller zeigt in [Mül89], daß es rechentechnisch am geschicktesten ist, nur negative Frequenzen ω zu berücksichtigen. Bei dieser Wahl können die Koeffizienten A_1 , B_{x1} , B_{y1} ohne weitere Bedingung zu Null gesetzt werden. Diese Koeffizienten wären andernfalls einfallenden Wellen zugeordnet, die nicht auftreten dürfen. Durch diese Bedingung reduzieren sich die Matrizengleichungen auf drei Unbekannte. Die Lösung für positive Frequenzen läßt sich durch Symmetrieüberlegungen ermitteln.

Zum Abklingverhalten der Wellen mit der Tiefe stellt Zirwas die Filterkennlinie für den Halbraum auf [Zir96]. Die Berücksichtigung der Materialdämpfung führt auf eine zusätzliche Filterwirkung im gesamten Wellenzahlbereich. Dies läßt sich aus den Gleichungen (2.9, 2.10) ableiten. Die komplexen Wellengeschwindigkeiten führen durch den Imaginärteil auf vergrößerte Abklingkoeffizienten λ_1 und λ_2 .²

2.3.2 Besonderheiten bei Schichten

Bei der Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten aus Rand- und Übergangsbedingungen ist es zweckmäßig, eine Koeffiziententransformation durchzuführen, um etwaige numerische Probleme zu umgehen. Diese könnten bei großen Tiefen oder Schichthöhen, die großen z -Werten entsprechen, durch große Werte der Exponentialfunktion entstehen. Folgende Umformung wird verwendet [GM88]:

$$\begin{aligned} A_1 e^{\lambda_1 z} &= A_1 e^{\lambda_1 h} e^{-\lambda_1 h} e^{\lambda_1 z} = \bar{A}_1 e^{\lambda_1(z-h)} \\ B_{i1} e^{\lambda_2 z} &= B_{i1} e^{\lambda_2 h} e^{-\lambda_2 h} e^{\lambda_2 z} = \bar{B}_{i1} e^{\lambda_2(z-h)} \\ z &\leq h \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für h ist in den Ausdrücken die Schichtdicke anzusetzen.

²Bei einer Wurzel aus einer komplexen Zahl ergibt sich, unabhängig von den Vorzeichen des Real- und des Imaginärteils, ein positiver Realteil.

Die transformierten Verschiebungen können mit den modifizierten Ansatzkoeffizienten ausgedrückt werden als

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_1(z-h)} & ik_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ ik_y e^{\lambda_1(z-h)} & ik_y e^{-\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h)} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h)} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -ik_y e^{\lambda_2(z-h)} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} & ik_x e^{\lambda_2(z-h)} & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ A_2 \\ \bar{B}_{x1} \\ B_{x2} \\ \bar{B}_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Die Matrizenform zur Berechnung der transformierten Spannungen läßt sich analog aufstellen.

2.4 Belastung

Ausgehend von einer beliebigen zeitlich und örtlich veränderlichen Last, die allgemein in alle Richtungen wirken kann, werden Lösungswege für wesentliche Fälle diskutiert.

Zeitlich veränderliche ortsfeste Last

Betrachtet wird eine ortsfeste Belastung, die zeitlich beliebig veränderlich ist. Mit Hilfe der Fouriertransformation kann der Zeitverlauf in ein Frequenzspektrum umgewandelt werden. Aufgrund der Tatsache, daß die Lösung der Laméschen Differentialgleichung im fouriertransformierten Raum vorliegt, kann in diesem Fall für jede Frequenz des Spektrums die Lösung ermittelt werden und durch Fourierrücktransformation in den Zeitbereich überführt werden. Im Hinblick auf eine programmiertechnische Umsetzung erscheint eine Erweiterung der von Lieb [Lie97] verwendeten zweidimensionalen Wavelet-Transformation im Ortsbereich auf die dritte Dimension der Zeit als aussichtsreiche Möglichkeit, um den numerischen Aufwand zu reduzieren.

Bewegte Last - Örtliche Veränderlichkeit

Die örtliche Veränderlichkeit der Last soll hier auf den folgenden Fall beschränkt werden: Die Last bewegt sich entlang einer Koordinatenachse mit konstanter Geschwindigkeit; dies kann z.B. einem auf einem geraden Streckenabschnitt fahrenden Zug entsprechen. Beschleunigte Lasten werden hier nicht behandelt. Die Last wirkt dabei an der Oberfläche des Kontinuums, sozusagen auf der Planumsoberkante. Das dynamische Problem des Kontinuums kann allerdings auch gelöst werden, wenn die Last in einer festen Tiefe angreift, z.B. bei einer Pfahlgründung. In diesem Fall muß zur Lösung eine u.U. gedachte Schichtgrenze in dieser Tiefe eingeführt werden (siehe Abschnitt 2.6).

Harmonische mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegte Belastung

Unter den genannten Vorüberlegungen kann nun die Belastung auf den Halbraum wie folgt formuliert werden. Die Last p ist in x - und y -Richtung von der Form her beliebig veränderlich,

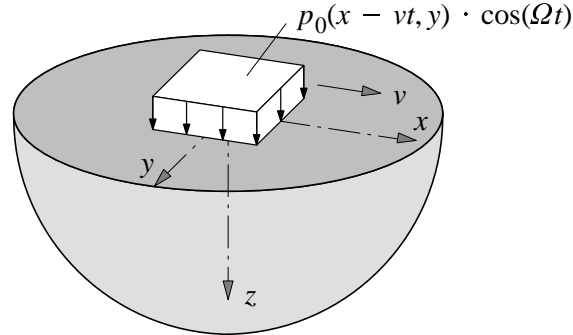


Abbildung 2.1: Systemskizze zur bewegten harmonischen Belastung auf dem Halbraum

sie ist harmonisch mit der Anregungskreisfrequenz Ω veränderlich und sie bewegt sich entlang der Koordinatenachse x mit konstanter Geschwindigkeit v fort, vgl. Abbildung 2.1.

$$p(x, y, t) = p_0(x - vt, y) \cdot \cos(\Omega t) \quad (2.18)$$

Für diesen Fall ergibt sich eine vorteilhafte Beschreibung im fouriertransformierten Raum. Dabei wird in den Transformationen der Ortskoordinaten in den Wellenzahlraum $x \circ \bullet k_x$ und $y \circ \bullet k_y$ der Verschiebungssatz der Fouriertransformation angewendet. Im zweiten Schritt wird die Transformation der Zeit in den Frequenzraum $t \circ \bullet \omega$ vollzogen.

$$\begin{aligned} \hat{p}(k_x, k_y, t) &= \hat{p}_0(k_x, k_y) e^{-ivtk_x} \cdot \cos(\Omega t) \\ \hat{p}(k_x, k_y, \omega) &= \hat{p}_0(k_x, k_y) \pi (\delta(\omega - \Omega + v k_x) + \delta(\omega + \Omega + v k_x)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sei $\hat{G}(k_x, k_y, z, \omega)$ die Grundlösung der gesuchten Verschiebung infolge der transformierten Einheitsbelastung $\hat{p}(k_x, k_y, \omega) = 1$, so gilt für die gesuchte Verschiebung im transformierten Raum infolge der beschriebenen Last folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \hat{u}(k_x, k_y, z, \omega) &= \hat{G}(k_x, k_y, z, \omega) \hat{p}(k_x, k_y, \omega) = \\ &= \hat{G}(k_x, k_y, z, \omega) \hat{p}_0(k_x, k_y) \pi (\delta(\omega - \Omega + v k_x) + \delta(\omega + \Omega + v k_x)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Infolge der Dirac-Distributionen vereinfacht sich die Fourierrücktransformation der Antwort in den Zeitbereich ($\omega \bullet \circ t$). Wird die Fourierrücktransformation vom Wellenzahlraum in den Ortsbereich ($k_x \bullet \circ x$, $k_y \bullet \circ y$) formal angeschrieben, so setzt sich die gesuchte Verschiebung aus zwei Termen zusammen. Zweckmäßigerweise wird dabei die Verschiebung \bar{u} am Ort der Last ausgewertet. Die Substitution $\bar{x} = x - vt$ beschreibt die mitbewegte Koordinate.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, y, z, t) &= e^{i\Omega t} \frac{1}{8\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{G}(k_x, k_y, z, \Omega - vk_x) e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y + \\ &+ e^{-i\Omega t} \frac{1}{8\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{G}(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x) e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y \end{aligned}$$

Die beiden Terme stellen bei Weglassen der vorangestellten Zeitfunktionen $e^{\pm i\Omega t}$ konjugiert komplexe Ausdrücke dar, die anschaulich unter Berücksichtigung der Zeitfunktionen als gleichgroße Zeiger unterschiedlicher Drehrichtung im Zeigerdiagramm aufgefaßt werden können.

Diese Tatsache muß erfüllt sein, da sonst die Verschiebung \bar{u} komplexe Anteile aufweisen würde, was nicht möglich ist, da es sich um eine physikalische Größe handelt. Liedl hat in [Lie98] eine genauere Untersuchung der Integrationsterme bei einem verwandten Problem durchgeführt.

Die einzelnen Integrale können auf Grund ihrer Komplexität nicht analytisch gelöst werden, sondern erfordern eine numerische zweifache Rücktransformation. Die Symmetrieüberlegungen zeigen, daß es ausreichend ist, eines der beiden Integrale auszuwerten, was der Bestimmung eines Zeigers entspricht, der die gesamte Information (Amplitude und Phasenlage) der Schwingung beinhaltet. Betrachtet wird aus den in Abschnitt 2.3.1 genannten Gründen derjenige Anteil, der der negativen Frequenz zugeordnet wird.

Die komplexe Verschiebung im mitbewegten Koordinatensystem \bar{u}_C ergibt sich somit aus

$$\bar{u}_C(\bar{x}, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{G}(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x) e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad (2.21)$$

Unter Berücksichtigung der Zeitfunktion läßt sich die tatsächliche reelle Verschiebung angeben als

$$\bar{u}(\bar{x}, y, z, t) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x, k_y) \hat{G}(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x) e^{i(\bar{x}k_x + yk_y)} dk_x dk_y \right) \quad (2.22)$$

Die Beziehungen zeigen, daß auch für bewegte harmonische Lasten eine Rücktransformation vom Frequenzbereich in den Zeitbereich analytisch erfolgen kann. Die Lösung für eine bewegte Last kann aus der Lösung für die harmonische Last durch Verwendung der modifizierten Anregungsfrequenz $\omega = -\Omega - vk_x$ gewonnen werden. Dadurch wird die Zahl der numerisch auszuführenden Fourierrücktransformationen auf zwei reduziert. Eine ausführlichere Beschreibung der Umformungen ist in [Mül89, Lie97] und in modifizierter Form in Kapitel 4 zu finden.

2.5 Lösung für den homogenen Halbraum

Die Verschiebungsantwort des Halbraumes läßt sich analytisch im transformierten Raum ermitteln. Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, ist das Ziel der Berechnung die Ermittlung der komplexen Antwort \bar{u}_C infolge einer harmonischen bewegten Belastung, vgl. Gleichung (2.21). Die Anregungsfrequenz Ω und die Geschwindigkeit v gehen in die Berechnung nur als Parameter ein, sie sind unabhängig von den Integrationsvariablen. Für den Lösungsweg werden diese Größen daher nicht aufgeführt.

Der Lösungsweg soll exemplarisch für den Fall einer vertikal auf der Oberfläche wirkenden Normalspannung aufgezeigt werden. Die Spannungsrandbedingungen an der Oberfläche können zusammengefaßt werden als:

$$\begin{aligned}\sigma_{zx}(x, y) &= 0 \\ \sigma_{zy}(x, y) &= 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = -p_z(x, y)\tag{2.24}$$

Die Spannung $p_z(x, y)$ ist definiert als positiv von außen auf die Oberfläche wirkend.

Das komplexe Gleichungssystem (2.15) läßt sich bei Beschränkung auf die Schichtoberfläche auf drei Zeilen reduzieren und weitergehend auf drei Spalten, da bei einer Berechnung mit negativen Frequenzen, siehe Abschnitt 2.3.1, drei Unbekannte Ansatzkoeffizienten zu Null gesetzt werden können. Das reduzierte Gleichungssystem nimmt für den homogenen Halbraum damit folgende Form an:

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_z(k_x, k_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_1 & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \\ -2ik_y\lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix}\tag{2.25}$$

Die analytische Lösung für die drei Ansatzkoeffizienten lautet:

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} (\lambda_2^2 + k_r^2) = \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} (2k_r^2 - k_s^2) \\ B_{x2} &= \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_y\lambda_1 \\ B_{y2} &= -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_x\lambda_1\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= -(2k_r^2 - k_s^2) + 4k_r^2 \sqrt{k_r^2 - k_p^2} \sqrt{k_r^2 - k_s^2} = \\ &= -(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1 \lambda_2\end{aligned}$$

Das Nullsetzen der Determinante Δ führt auf die Rayleighwellengleichung. Der Realteil der Lösung dieser Gleichung nach der Wellenzahl k_r ist die Rayleighwellenzahl k_R . Die Rayleighwellengeschwindigkeit ergibt sich mit $c_R = \omega/k_R$, sie liegt in Abhängigkeit der Querdehnzahl im Bereich von $c_R = 0,8740 c_s$ ($\nu = 0$) und $c_R = 0,9553 c_s$ ($\nu = 0,5$). Sudret [Sud96] hat die verschiedenen Werte tabellarisch zusammengestellt. Die Rayleighwellenzahl wird mit zunehmender Anregungsfrequenz größer.

Werden die Lösungen für die Ansatzkoeffizienten in die transformierten Potentiale (2.9) eingesetzt, so ergibt sich für diese:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &= \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_x &= \frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_y\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_y &= -\frac{\hat{p}_z}{\mu\Delta} 2ik_x\lambda_1 e^{-\lambda_2 z}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Die transformierten Verschiebungen ergeben sich durch Einsetzen der Potentiale in die Gleichungen (2.13). Zu bemerken ist, daß in den Potentialausdrücken nur die Exponentialterme von der Tiefenkoordinate z abhängen. Dies erleichtert die Bildung der entsprechenden Ableitung. Die folgenden Gleichungen ergeben sich bei einer Auswertung der Verschiebungen an der Oberfläche, in diesem Falle ist $z = 0$ zu setzen.

$$\begin{aligned}\hat{u}_x &= i k_x \hat{\Phi} + \lambda_2 \hat{\Psi}_y = \frac{\hat{p}_z i k_x}{\mu \Delta} (\lambda_2^2 + k_r^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\ \hat{u}_y &= i k_y \hat{\Phi} - \lambda_2 \hat{\Psi}_x = \frac{\hat{p}_z i k_y}{\mu \Delta} (\lambda_2^2 + k_r^2 - 2\lambda_1 \lambda_2) \\ \hat{u}_z &= -\lambda_1 \hat{\Phi}_{,z} - i k_y \hat{\Psi}_x + i k_x \hat{\Psi}_y = \frac{\hat{p}_z \lambda_1}{\mu \Delta} k_s^2\end{aligned}\quad (2.28)$$

Mit diesem Vorgehen liegen nun Lösungsausdrücke für die transformierten Verschiebungen im Wellenzahlbereich vor, die numerisch in den Ortsbereich rücktransformiert werden müssen. Eine Bewertung möglicher numerischer Verfahren und ein rechenzeiteffizienter Algorithmus sind zentrales Thema der Arbeit von Lieb [Lie97].

In Gleichung (2.20) ergibt sich die transformierte Verschiebung aus dem Produkt der Grundlösung der Verschiebung und der transformierten Lastfunktion. Eine Grundlösung ist die Antwort des Systems auf eine Einheitslast. Eine Einheitslast ist in diesem Fall eine Einzellast, die im Originalraum durch örtliche Dirac- δ -Distributionen beschrieben werden kann und damit im transformierten Raum gleich Eins ist.

$$p_z(x, y) = \delta(x) \delta(y) \circ \bullet \hat{p}_z(k_x, k_y) = 1$$

Die Grundlösung für Vertikalverschiebungen an der Oberfläche infolge einer vertikal wirkenden Belastung ist im transformierten Raum

$$\hat{G}(k_x, k_y, z = 0, \omega) = \frac{\lambda_1}{\mu \Delta} k_s^2 \quad .$$

Auf analoge Weise kann auch für Lasten, die als Schubspannungen wirken, bzw. für Kombinationen von Belastungen aus Normal- und Schubspannungen die Lösung ermittelt werden.

Infolge Lasten, die als Schubspannungen in x -Richtung an der Oberfläche wirken ($\sigma_{zx}(x, y) = -p_{zx}(x, y)$) ergeben sich die transformierten Potentiale unter Verwendung des Gleichungssystems (2.25) mit einem modifizierten Lastvektor zu

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &= -\frac{\hat{p}_{zx}}{\mu \Delta} 2i k_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_x &= -\frac{\hat{p}_{zx}}{\mu \Delta} \frac{k_x k_y}{\lambda_2^2} (2k_r^2 - k_s^2 - 4\lambda_1 \lambda_2) e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_y &= \frac{\hat{p}_{zx}}{\mu \Delta} \frac{-2k_r^2 \lambda_2^2 - 2k_r^2 k_y^2 + k_s^2 \lambda_2^2 + k_s^2 k_y^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 k_y^2}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \quad .\end{aligned}\quad (2.29)$$

Für an der Oberfläche angreifende Schubspannungen in y -Richtung ($\sigma_{zy}(x, y) = -p_{zy}(x, y)$) lauten die Potentiale:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &= -\frac{\hat{p}_{zy}}{\mu\Delta} 2i\lambda_2 k_y e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_x &= \frac{\hat{p}_{zy}}{\mu\Delta} \frac{-4\lambda_1\lambda_2 k_x^2 + 2k_r^2\lambda_2^2 - k_s^2\lambda_2^2 + 2k_r^2 k_x^2 - k_s^2 k_x^2}{\lambda_2^2} e^{-\lambda_2 z} \\ \hat{\Psi}_y &= -\frac{\hat{p}_{zy}}{\mu\Delta} \frac{k_x k_y}{\lambda_2^2} (-2k_r^2 + k_s^2 + 4\lambda_1\lambda_2) e^{-\lambda_2 z}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Die transformierten Verschiebungen sind nur von den Potentialen abhängig, nicht von der Last-richtung. Die Beziehungen (2.13) gelten allgemein.

2.6 Lösung für das System Schicht auf Halbraum

In der Realität sind Bodenverhältnisse, die durch das mechanische System des Halbraumes beschrieben werden können, relativ selten. Üblicherweise liegen geschichtete Böden vor.

In diesem Abschnitt wird beispielhaft für das System "Schicht auf Halbraum" das Vorgehen zur Ermittlung der dynamischen Antwort des geschichteten Untergrundes beschrieben. In der Literatur findet sich auch der Begriff des geschichteten Halbraumes, der hier keine Verwendung finden soll. Der Untergrund ist geschichtet, der Halbraum allerdings ist unendlich ausgedehnt. Schichten werden hier einzeln als solche beschrieben und genannt, der Halbraum ist üblicherweise das in die Tiefe abschließende mechanische System.

Die Schicht besitze die Mächtigkeit h_1 und die Bodenkennwerte in Form der Lamékonstanten μ_1 und λ_1 . Die Bodenkennwerte des Halbraumes werden mit μ_2 und λ_2 bezeichnet.

Zwischen der Schicht und dem Halbraum wird ein fester Verbund angenommen. Die Rand- und Übergangsbedingungen bei einer an der Oberfläche angreifenden Belastung lassen sich wie folgt formulieren:

- Spannungsgleichheit an der Schichtoberfläche zwischen den Spannungen der Schicht und der äußeren Belastung,
- Spannungsgleichheit an der Grenze zwischen Schicht und Halbraum zwischen den Spannungen der Schicht und den Spannungen des Halbraumes und
- Verschiebungsgleichheit von Schicht und Halbraum an der Grenze.

Für den Fall einer auf die Oberfläche einwirkenden Normalspannung lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1 z_1}(z_1 = 0) &= 0 \\
\sigma_{y_1 z_1}(z_1 = 0) &= 0 \\
\sigma_{z_1 z_1}(z_1 = 0) &= -p_z(k_x, k_y) \\
\sigma_{x_1 z_1}(z_1 = h_1) &= \sigma_{x_2 z_2}(z_2 = 0) \\
\sigma_{y_1 z_1}(z_1 = h_1) &= \sigma_{y_2 z_2}(z_2 = 0) \\
\sigma_{z_1 z_1}(z_1 = h_1) &= \sigma_{z_2 z_2}(z_2 = 0) \\
u_{x_1}(z_1 = h_1) &= u_{x_2}(z_2 = 0) \\
u_{y_1}(z_1 = h_1) &= u_{y_2}(z_2 = 0) \\
u_{z_1}(z_1 = h_1) &= u_{z_2}(z_2 = 0)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Für die Schicht gilt folgende Beziehung für die Verschiebung:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x_1} \\ \hat{u}_{y_1} \\ \hat{u}_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_{11}(z_1 - h_1)} & ik_x e^{-\lambda_{11} z_1} & 0 & 0 & -\lambda_{12} e^{\lambda_{12}(z_1 - h_1)} & \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} z_1} \\ ik_y e^{\lambda_{11}(z_1 - h_1)} & ik_y e^{-\lambda_{11} z_1} & \lambda_{12} e^{\lambda_{12}(z_1 - h_1)} & -\lambda_{12} e^{-\lambda_{12} z_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{11} e^{\lambda_{11}(z_1 - h_1)} & -\lambda_{11} e^{-\lambda_{11} z_1} & -ik_y e^{\lambda_{12}(z_1 - h_1)} & -ik_y e^{-\lambda_{12} z_1} & ik_x e^{\lambda_{12}(z_1 - h_1)} & ik_x e^{-\lambda_{12} z_1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \tag{2.32}$$

Für die Schicht wird der Vektor der Unbekannten definiert als:

$$(\bar{\mathbf{C}}_1)^T = (\bar{A}_{11} \quad A_{12} \quad \bar{B}_{1x1} \quad B_{1x2} \quad \bar{B}_{1y1} \quad B_{1y2}) \tag{2.33}$$

An der Schichtunterseite ($z_1 = h_1$) gilt für die Verschiebungen:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x_1}(z_1 = h_1) \\ \hat{u}_{y_1}(z_1 = h_1) \\ \hat{u}_{z_1}(z_1 = h_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x e^{-\lambda_{11} h_1} & 0 & 0 & -\lambda_{12} & \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} \\ ik_y & ik_y e^{-\lambda_{11} h_1} & \lambda_{12} & -\lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & -\lambda_{11} e^{-\lambda_{11} h_1} & -ik_y & -ik_y e^{-\lambda_{12} h_1} & ik_x & ik_x e^{-\lambda_{12} h_1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \tag{2.34}$$

Die Spannungen an der Schichtoberfläche, die in das Gleichungssystem zur Bestimmung der Ansatzkoeffizienten eingehen, ergeben sich mit $z_1 = 0$ zu:

$$\frac{1}{\mu_1} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{x_1 z_1}(z_1 = 0) \\ \hat{\sigma}_{y_1 z_1}(z_1 = 0) \\ \hat{\sigma}_{z_1 z_1}(z_1 = 0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_{11} e^{-\lambda_{11} h_1} & -2ik_x \lambda_{11} & k_x k_y e^{-\lambda_{12} h_1} & k_x k_y & -(\lambda_{12}^2 + k_x^2) e^{-\lambda_{12} h_1} & -(\lambda_{12}^2 + k_x^2) \\ 2ik_y \lambda_{11} e^{-\lambda_{11} h_1} & -2ik_y \lambda_{11} & \lambda_{12}^2 + k_y^2 e^{-\lambda_{12} h_1} & \lambda_{12}^2 + k_y^2 & -k_x k_y e^{-\lambda_{12} h_1} & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 e^{-\lambda_{11} h_1} & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} & 2ik_y \lambda_{12} & 2ik_x \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} & -2ik_x \lambda_{12} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \tag{2.35}$$

An der Schichtunterseite gilt für die Spannungen mit $z_1 = h_1$:

$$\frac{1}{\mu_1} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{x_1 z_1}(z_1 = h_1) \\ \hat{\sigma}_{y_1 z_1}(z_1 = h_1) \\ \hat{\sigma}_{z_1 z_1}(z_1 = h_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_{11} & -2ik_x \lambda_{11} e^{-\lambda_{11} h_1} & k_x k_y & k_x k_y e^{-\lambda_{12} h_1} & -(\lambda_{12}^2 + k_x^2) & -(\lambda_{12}^2 + k_x^2) e^{-\lambda_{12} h_1} \\ 2ik_y \lambda_{11} & -2ik_y \lambda_{11} e^{-\lambda_{11} h_1} & \lambda_{12}^2 + k_y^2 & \lambda_{12}^2 + k_y^2 e^{-\lambda_{12} h_1} & -k_x k_y & -k_x k_y e^{-\lambda_{12} h_1} \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2k_r^2 - k_s^2 e^{-\lambda_{11} h_1} & -2ik_y \lambda_{12} & 2ik_y \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} & 2ik_x \lambda_{12} & -2ik_x \lambda_{12} e^{-\lambda_{12} h_1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 \tag{2.36}$$

Die Verschiebungen an der Halbraumboberfläche ($z_2 = 0$) können geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x_2}(z_2 = 0) \\ \hat{u}_{y_2}(z_2 = 0) \\ \hat{u}_{z_2}(z_2 = 0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & \lambda_{22} \\ ik_y & -\lambda_{22} & 0 \\ -\lambda_{21} & -ik_y & ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} \\ B_{2x2} \\ B_{2y2} \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

Die transformierten Spannungen an der Halbraumoberfläche lauten

$$\frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{x_2 z_2}(z_2 = 0) \\ \hat{\sigma}_{y_2 z_2}(z_2 = 0) \\ \hat{\sigma}_{z_2 z_2}(z_2 = 0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2ik_x \lambda_{21} & k_x k_y & -(\lambda_{22}^2 + k_x^2) \\ -2ik_y \lambda_{21} & \lambda_{22}^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y \lambda_{22} & -2ik_x \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} \\ B_{2x2} \\ B_{2y2} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Werden die vorgenannten Beziehungen für Spannungen und Verformungen in die Rand- und Übergangsbeziehungen (2.31) eingesetzt, ergibt sich ein komplexes 9×9 Gleichungssystem zur Bestimmung der insgesamt 9 Koeffizienten. Dabei gibt es 6 Ansatzkoeffizienten, die der Schicht zugeordnet sind und 3 Ansatzkoeffizienten, die dem Halbraum zugeordnet sind.

Dieses Gleichungssystem läßt sich theoretisch zwar analytisch lösen, die Ausdrücke lassen sich aber praktisch rechnertechnisch nicht mehr verwalten. Aus diesem Grund werden die Ansatzkoeffizienten durch numerische Lösung bestimmt und in die Potentialfunktionen eingesetzt, wobei die Umrechnung der Ansatzkoeffizienten nach (2.16) berücksichtigt werden muß.

Aus den Potentialen ergeben sich nach Einsetzen in die Gleichungen (2.13) die transformierten Verschiebungen. Eine numerische Rücktransformation schließt sich im Rechengang an, um die Verschiebungen im Originalraum zu erhalten.

Mehrere Schichten können analog behandelt werden, je Schicht ergeben sich 6 neue Unbekannte für das Gleichungssystem.

Ein Verfahren, wie als Erweiterung des hier vorgestellten Modells ein variabler Schubmodul in Tiefenrichtung berücksichtigt werden kann, wurde von Grundmann et. al. [GLT99] beschrieben.

Kapitel 3

Oberbau, Fahrzeug und dynamische Interaktion

3.1 Allgemeiner Überblick

Die meisten Oberbaumodelle beschränken sich auf die Erfassung der wesentlichen dynamischen Anregung, dies sind Anregungen in vertikaler Richtung. Auch im Rahmen dieser Arbeit werden die Oberbaumodelle auf die Vertikaldynamik beschränkt und als eindimensionale Modelle ausgelegt. Die Einflüsse der Longitudinaldynamik sind am ehesten zu vernachlässigen, da Längskräfte hauptsächlich bei Brems- oder Beschleunigungsvorgängen auftreten. Die Lateralodynamik ist sicherlich eine Problemstellung, die zukünftig mit in die Oberbaumodelle aufgenommen werden sollte, um auch die quer zur Fahrtrichtung auftretenden Kraftwirkungen infolge der lateralen Verschiebungen des Radsatzes zwischen den Schienen zu erfassen.

In Abbildung 3.1 sind zwei wesentliche Modellierungen des Oberbaues aufgezeigt.

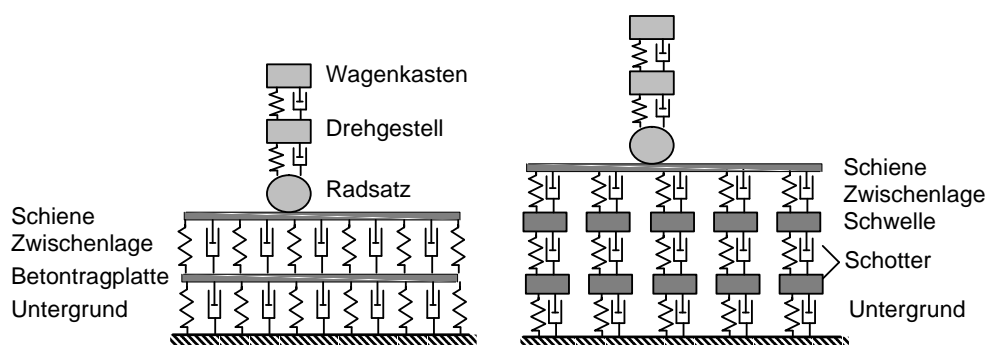


Abbildung 3.1: Eindimensionale Oberbaumodelle für Vertikaldynamik. Links: Feste Fahrbahn, rechts: Schotteroberbau.

3.2 Diskrete Modellierungen

Zielsetzung diskreter Modelle ist die möglichst detaillierte Abbildung der geometrischen und mechanischen Verhältnisse des Eisenbahnoberbaues. In den verfeinerten Modellen ist meist die dynamische Interaktion mit dem Fahrzeug enthalten.

Diskrete Modelle werden in den meisten Fällen mit rein numerischen Methoden berechnet. Dies erfordert im Normalfall einen verhältnismäßig hohen Einsatz an Rechenkapazität und Rechenzeit. Meist wird hier die Finite Element Methode in Kombination mit einem Zeitschrittverfahren gewählt. Die nach Kenntnis des Autors am weitest entwickelten Modelle liegen am Institut für Luft- und Raumfahrttechnik der TU Berlin (Knothe, Wu, Ripke [Rip95, KW98]), an der Chalmers University of Technology in Göteborg [NI95] und an der KU Leuven [BR99] vor. Ripke hat sein Modell in seiner Tätigkeit bei der Deutschen Bahn AG deutlich erweitert [Deu98].

In Zusammenarbeit mit Lutzenberger und Baumgärtner wurde vom Autor in einer Vorstudie ein diskretes Oberbaummodell in einer Überfahrtssimulation untersucht. Zur Berücksichtigung der Interaktion und zur Berechnung des Modells wurde der am Lehrstuhl für Baumechanik entwickelte Präprozessor PRISIM in Kombination mit dem kommerziellen Finite-Element-Programm NASTRAN eingesetzt [LDB98].

Mit den diskreten Modellierungen und den zur Lösung erforderlichen numerischen Verfahren wird es auch möglich, Nichtlinearitäten, z.B. in den Zwischenlagen oder im Untergrund, im Modell mit abzubilden. Weiterhin können lokale Inhomogenitäten berücksichtigt werden.

Im Rahmen der Arbeit werden diskrete Modelle nicht weiter behandelt; ein semi-analytisches Lösungsverfahren soll zum Einsatz kommen. Für Vergleichsrechnungen ist es außergewöhnlich hilfreich, verschiedene Modellierungsansätze zu untersuchen. Aus diesen Vergleichen zeigen sich die Vor- und Nachteile der einzelnen Modellierungen, und nicht berücksichtigte Effekte werden deutlich. Eine Einschätzung der Relevanz der Wirkungen der einzelnen Elemente wird ebenso verbessert.

3.3 Kontinuierliche Modellierungen

Kontinuierliche Modellierungen vereinfachen die geometrischen und mechanischen Verhältnisse mit dem Ziel, analytische Lösungen ermitteln zu können und charakteristische Effekte zu studieren. Berechnungen mit analytischen oder semi-analytischen Lösungen erfordern wesentlich geringeren Rechenaufwand.

Wie im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, eignen sich die kontinuierlichen Modelle sehr gut für eine Ankoppelung an den Untergrund. Dieser Vorteil liegt darin begründet, daß für den Halbraum, für die kontinuierlichen Oberbaummodellierungen und die Beschreibung der Interaktionsbeziehungen eine analytische Lösung im transformierten Raum (Wellenzahl- und Frequenzbereich) gefunden werden kann.

In den folgenden Abschnitten sollen verschiedene kontinuierliche Modelle und die zugehörigen Lösungen für die Vertikaldynamik vorgestellt werden.

3.3.1 Der elastisch gebettete Balken

Der elastisch gebettete Balken stellt das einfachste denkbare kontinuierliche Modell des Eisenbahnoberbaues dar. Die Schiene wird als unendlicher Balken modelliert, der kontinuierlich (visko-)elastisch gebettet ist [Sat97]. Die Bettung vereint hierbei die Eigenschaften der Zwischenlage, der Schwellen, des Schotters bzw. der Tragplatte bei der Festen Fahrbahn, eventueller Tragschichten und des Untergrundes.

Eine Herleitung der Differentialgleichung des Balkens unter zusätzlicher Berücksichtigung von Schub und Rotationsträgheit ist im Anhang C zu finden.

Die Differentialgleichung für den elastisch gebetteten Balken lautet unter Annahme konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Massebelegung μ :

$$EI w''''(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) + c_W \dot{w}(x, t) + k_W w(x, t) = p(x, t) \quad . \quad (3.1)$$

Die Konstanten c_W und k_W stehen für die viskose Dämpfung bzw. für die Steifigkeit der elastischen Bettung (Winkler-Bettung). Die Ableitungen werden definiert als: $(\cdot)' = \partial/\partial x$, $(\cdot) = \partial/\partial t$.

Ausgehend von der Lösung der statischen Einzellast nach Zimmermann [Zim53], hat Frýba in [Frý72] den Fall der bewegten nicht oszillierenden Einzellast untersucht. Bei diesem einfachen Modell sind bereits drei wesentliche charakteristische Effekte sichtbar:

- Es existiert eine charakteristische Länge der Biegelinie, die über das Steifigkeitsverhältnis von Balken und Bettung eine Aussage über die Ausdehnung der Biegelinie unter Einzellasten erlaubt.
- Bei einer bewegten Last kann eine kritische Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Steifigkeiten von Balken und Bettung definiert werden, bei der die Verformungen im ungedämpften Fall ins Unendliche wachsen.
- Weiterhin existiert eine kritische Dämpfung, die von der kritischen Geschwindigkeit abhängig ist.

Frýba löst das Problem für die verschiedenen Fälle¹ analytisch. Dabei sind für verschiedene Fälle unterschiedliche Lösungswege erforderlich [Frý72]. Oszillierende Lasten werden nicht erfaßt. Liedl [Lie98] hat gezeigt, daß die Verwendung der Fouriertransformation hier Vorteile bietet. Im zweifach fouriertransformierten Raum ergibt sich eine Lösung, die numerisch in den Originalraum rücktransformiert werden muß. Es sind keine Fallunterscheidungen notwendig, die Gleichung ist für alle Fälle gültig. Die numerischen Ergebnisse stimmen mit den analytischen Lösungsausdrücken überein. Die allgemeine Lösung für die vertikale Verschiebung des Balkens im Wellenzahl- und Frequenzbereich kann geschrieben werden als:

$$\hat{w}(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{EI k_x^4 - \mu \omega^2 + k_W + i \omega c_W} \quad (3.2)$$

¹Unterkritische, kritische und überkritische Geschwindigkeit bei nicht vorhandener, unterkritischer, kritischer und überkritischer Dämpfung

Bei Beschränkung auf eine harmonische mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Last $p(x - vt) \cos(\Omega t)$ ergibt sich:

$$\hat{w}(k_x) = \frac{\hat{p}(k_x)}{EI k_x^4 - \mu(-\Omega - vk_x)^2 + k_W + i(-\Omega - vk_x) c_W} \quad . \quad (3.3)$$

Hierbei ist nur der Anteil angeschrieben, der der negativen Frequenz zugeordnet ist.

Wird diese Formulierung betrachtet, so läßt sich neben der kritischen Geschwindigkeit auch eine kritische Anregungsfrequenz ableiten. Dies geschieht unter der Bedingung, daß die Geschwindigkeit gleich Null ist. In diesem Falle werden die sich einstellenden Biegewellen des Balkens nach außen hin, weg von der Last, nicht gedämpft und klingen daher nicht ab.

Weiterhin zeigt sich, daß es für jede Geschwindigkeit eine zugeordnete Anregungsfrequenz gibt, bei der die Verformungen extrem anwachsen. Man könnte hier von einer "kritischen Kombination aus Geschwindigkeit und Anregungsfrequenz" sprechen.

Das Modell des elastisch gebetteten Balkens kommt nach wie vor in der Bemessung des Oberbaues zur Anwendung [EL00] und dient als Grundlage zur Entwicklung detaillierter kontinuierlicher Modelle.

3.3.2 Zwei elastisch gebettete gekoppelte Balken

In diesem System, siehe Abbildung 3.1, wird die Schiene durch den oberen Balken repräsentiert, die obere viskoelastische Bettung steht für die Zwischenlage. Der untere Balken stellt für den Fall des Schotteroberbaues die Schwellen, u.U. unter Berücksichtigung der Schottermasse, dar und für den Fall der Festen Fahrbahn die Tragplatte inklusive der Schwellen. Falls die Schwellen nicht fest mit der Tragplatte verbunden sind, weisen sie einen eigenen Freiheitsgrad auf und müssen daher extra berücksichtigt werden, siehe Abschnitt 3.3.3. Die Tragschichten und der Untergrund werden durch die untere viskoelastische Bettung in das Modell eingebracht.

Das System ist in Längsrichtung unendlich ausgedehnt. Die Last wirkt auf die Schiene, d.h. auf den oberen Balken.

Es liegen zwei gekoppelte Differentialgleichungen (für die Schiene S und die Platte P) vor, die wiederum im zweifach fouriertransformierten Raum gelöst werden können. Der Index Zw steht für die Zwischenlage und der Index U bezeichnet den Untergrund.

Oberer Balken

$$EI_S w_S''''(x, t) + \mu_S \ddot{w}_S(x, t) + k_{Zw}^R (w_S(x, t) - w_P(x, t)) + c_{Zw} (\dot{w}_S(x, t) - \dot{w}_P(x, t)) = p(x, t) \quad (3.4)$$

Unterer Balken

$$EI_P w_P''''(x, t) + \mu_P \ddot{w}_P(x, t) + k_U^R w_P(x, t) + c_U \dot{w}_P(x, t) = k_{Zw}^R (w_S(x, t) - w_P(x, t)) + c_{Zw} (\dot{w}_S(x, t) - \dot{w}_P(x, t)) \quad (3.5)$$

Durch zwei Fouriertransformationen $t \circ \bullet \omega$ und $x \circ \bullet k_x$ werden die Differentialgleichungen in den transformierten Raum überführt.

Oberer Balken

$$(EI_S k_x^4 - \mu_S \omega^2 + k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw}) \hat{w}_S(k_x, \omega) - (k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw}) \hat{w}_P(k_x, \omega) = \hat{p}(k_x, \omega) \quad (3.6)$$

Unterer Balken

$$(EI_P k_x^4 - \mu_P \omega^2 + k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw} + k_U^R + i \omega c_U) \hat{w}_P(k_x, \omega) = (k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw}) \hat{w}_S(k_x, \omega) \quad (3.7)$$

Zur Übersichtlichkeit werden hier Ausdrücke zur Beschreibung der Wirkung der Relativfedern und zur Beschreibung der Gesamtwirkung der einzelnen Balken definiert:

$$\begin{aligned} K_1 &= k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw} \\ K_2 &= k_U^R + i \omega c_U \\ D_1 &= EI_S k_x^4 - \mu_S \omega^2 + K_1 \\ D_2 &= EI_P k_x^4 - \mu_P \omega^2 + K_1 + K_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Das Gleichungssystem lautet in diesem Fall unter Verwendung der definierten Abkürzungen:

$$\begin{bmatrix} D_1 & -K_1 \\ -K_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_S(k_x, \omega) \\ \hat{w}_P(k_x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}(k_x, \omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Die analytische Lösung für die Verschiebung des oberen Balkens im transformierten Raum ist

$$\hat{w}_S(k_x, \omega) = \frac{\hat{p}(k_x, \omega)}{\left(D_1 - \frac{K_1^2}{D_2}\right)} \quad (3.10)$$

und die des unteren Balkens kann formuliert werden als

$$\hat{w}_P(k_x, \omega) = \frac{K_1 \hat{p}(k_x, \omega)}{(D_1 D_2 - K_1^2)} \quad (3.11)$$

Von einer Grundleistung $\hat{w}_0(k_x, \omega)$ wird gesprochen, wenn der Lastterm zu Eins gesetzt wird, $\hat{p}(k_x, \omega) = 1$. Diese Grundleistung wird im folgenden Kapitel Verwendung finden.

Die Lösung für das Problem der bewegten harmonischen Last

$$p(x, t) = p_0(x - vt) \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.12)$$

ergibt sich analytisch durch Substitution der Frequenz ω durch die modifizierte Frequenz $\omega = -\Omega - vk_x$.

Eine numerische Rücktransformation dieser Ausdrücke führt auf die Vertikalverschiebungen der beiden Balken im Originalraum im mit der Last mitbewegten Koordinatensystem (siehe auch Abschnitt 2.4).

3.3.3 Drei elastisch gebettete gekoppelte Balken

Diese Formulierung ist eine Erweiterung des Systems. Beim Schotteroberbau kann auf diese Weise dem Schotter ein eigener Freiheitsgrad zugewiesen werden, und bei der Festen Fahrbahn können die Vertikalverschiebungen der Schwellen getrennt von denjenigen der Platte bestimmt werden. Ob das Modell zweier Balken ausreichend ist oder der dritte Freiheitsgrad eingeführt werden muß, ergibt sich aus der jeweilig zu untersuchenden Bauform.

In Tabelle 3.1 sind die Elemente der beiden Oberbauformen den Balken und Bettungen zugeordnet.

	Feste Fahrbahn	Schotteroberbau
Verschiebung w_S	Schiene	Schiene
Bettung k_{Zw}, c_{Zw}	Zwischenlage	Zwischenlage
Verschiebung w_{Sw}	Schwelle	Schwelle
Bettung k_{Sw}, c_{Sw}	Bettungsmatte	Schotter
Verschiebung w_U	Betontragplatte	Schotter
Bettung k_U, c_U	Untergrund	Untergrund

Tabelle 3.1: Zuordnung der Freiheitsgrade und Bettungen zu Bauelementen

Das Gleichungssystem kann analog zu (3.9) aufgestellt werden, wobei im Falle der Festen Fahrbahn der Freiheitsgrad Nummer zwei den Schwellen zugeordnet ist. Die mittlere Kopplungskraft ergibt sich aus der elastischen Lagerung der Schwellen auf der Tragplatte. Die Schwellen und deren Lagerung werden hier vereinfacht als kontinuierlich angesetzt. Die Schwellen weisen aber keine Biegesteifigkeit in Längsrichtung auf, so daß nur der Masseterm in die Formulierung Eingang findet.

Für diesen Fall werden drei den einzelnen Balken zugeordnete Ausdrücke definiert.

$$\begin{aligned} K_1 &= k_{Zw}^R + i \omega c_{Zw} \\ K_2 &= k_{Sw}^R + i \omega c_{Sw} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$K_3 = k_U^R + i \omega c_U \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= EI_S k_x^A - \mu_S \omega^2 + K_1 \\ D_2 &= -\mu_{Sw} \omega^2 + K_1 + K_2 \\ D_3 &= EI_P k_x^A - \mu_P \omega^2 + K_2 + K_3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das Gleichungssystem lautet unter Verwendung dieser Ausdrücke

$$\begin{bmatrix} D_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & D_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_S(k_x, \omega) \\ \hat{w}_{Sw}(k_x, \omega) \\ \hat{w}_P(k_x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}(k_x, \omega) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.16)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems führt auf die transformierten Verschiebungen:

$$\begin{aligned}\hat{w}_S(k_x, \omega) &= \frac{\hat{p}(k_x, \omega) (D_3 D_2 - K_2^2)}{D_1 D_2 D_3 - D_1 K_2^2 - D_3 K_1^2} \\ \hat{w}_{S_w}(k_x, \omega) &= \frac{\hat{p}(k_x, \omega) D_3 K_1}{D_1 D_2 D_3 - D_1 K_2^2 - D_3 K_1^2} \\ \hat{w}_P(k_x, \omega) &= \frac{\hat{p}(k_x, \omega) K_1 K_2}{D_1 D_2 D_3 - D_1 K_2^2 - D_3 K_1^2}\end{aligned}\quad (3.17)$$

3.4 Fahrzeugmodelle

Für die dynamische Berechnung des Oberbaues und der Erschütterungsausbreitung kommen vereinfachte Modelle für die Schienenfahrzeuge zum Einsatz.

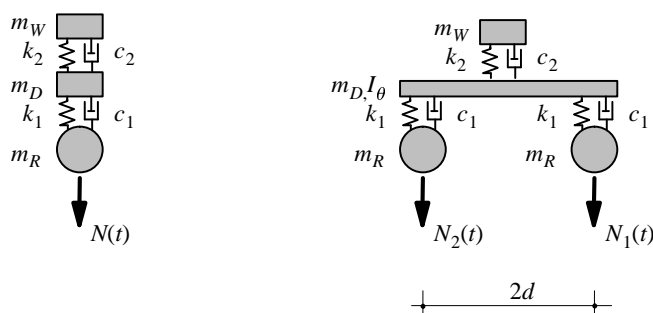


Abbildung 3.2: Schwingerkette und Drehgestellmodell als Fahrzeugmodelle

Die einfachste Methode, die dynamischen Wirkungen des Fahrzeuges zu beschreiben, sind harmonische Lasten, die auf den Oberbau wirken. Hierbei wird das Fahrzeug überhaupt nicht modelliert, sondern nur durch bewegte Einzellasten abgebildet. Dabei ist problematisch, daß die Größe der jeweiligen harmonischen Anteile nur geschätzt werden kann. Häufig werden in Oberbauberechnungen die dynamischen Lasten sogar gänzlich vernachlässigt und nur das (bewegte) Eigengewicht angesetzt. Für eine detaillierte dynamische Analyse ist dieser Ansatz nur bedingt geeignet.

Meist wird das Fahrzeug durch eine oder mehrere entkoppelte Schwingerketten modelliert, die jeweils einer Achse zugeordnet sind. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 3.2 gegeben, wobei das System nur vertikale Freiheitsgrade aufweist. Die starren Massen sind durch Feder- und Dämpferelemente mit linearer Charakteristik verbunden.

Eine etwas aufwendigere Modellierung stellt das Drehgestellmodell dar, das bei Ripke [Rip95] verwendet wird, siehe auch Abbildung 3.2. Hier werden wie in der Realität zwei Radsätze über das Drehgestell verbunden. Dieses Modell weist vier vertikale Freiheitsgrade und den Verdrehfreiheitsgrad des Drehgestells auf. Alle Massenelemente sind hier ebenfalls wieder starr.

3.4.1 Schwingerkette

Die Bewegungsgleichung für das Schwingerkette lautet im Frequenzbereich in Matrixschreibweise

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{w}(\omega) = \mathbf{p}(\omega) \quad (3.18)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_W + i\omega c_2 + k_2 & -i\omega c_2 - k_2 & 0 \\ & -\omega^2 m_D + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 & -i\omega c_1 - k_1 \\ \text{sym} & & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{w}^T(\omega) = [w_W(\omega) \quad w_D(\omega) \quad w_R(\omega)] \quad ,$$

sowie

$$\mathbf{p}^T(\omega) = [0 \quad 0 \quad N(\omega)]$$

Alternativ gilt für die Schwingerkette im Frequenzbereich folgender Zusammenhang zwischen der Vertikalverschiebung $w_R(\omega)$ des Radsatzes und der angreifenden Kontaktkraft $N(\omega)$:

$$N(\omega) = k_R(\omega)w_R(\omega), \quad (3.19)$$

wobei die Steifigkeit des Radsatzes $k_R(\omega)$ auch aus den Impedanzbeziehungen ermittelt werden kann:

$$k_W(\omega) = -\omega^2 m_W \quad (3.20)$$

$$k_D(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{k_W(\omega)} + \frac{1}{i\omega c_2 + k_2}} - \omega^2 m_D \quad (3.21)$$

$$k_R(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{k_D(\omega)} + \frac{1}{i\omega c_1 + k_1}} - \omega^2 m_R \quad (3.22)$$

In diesen Gleichungen stehen m_W , m_D und m_R für die Masse des Wagenkastens, des Drehgestell(anteil)s und des Radsatzes. Die Feder- bzw. Dämpferelemente zwischen Radsatz und Drehgestell werden als primäre Elemente und mit k_1 bzw. c_1 bezeichnet; die Elemente zwischen Drehgestell und Wagenkasten heißen sekundäre Elemente und sind mit k_2 und c_2 bezeichnet.

3.4.2 Drehgestellmodell

Für das Drehgestellmodell gilt formal dieselbe Bewegungsgleichung; die Matrix und die Vektoren sind nun andere.

$$\mathbf{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_W + i\omega c_2 + k_2 & -i\omega c_2 - k_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -\omega^2 m_D + i\omega(2c_1 + c_2) + 2k_1 + k_2 & 0 & -i\omega c_1 - k_1 & -i\omega c_1 - k_1 \\ & & -\omega^2 I_\theta + 2d^2(i\omega c_1 + k_1) + & i\omega d c_1 + dk_1 & -i\omega d c_1 - dk_1 \\ & \text{sym} & & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 & 0 \\ & & & & -\omega^2 m_R + i\omega c_1 + k_1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{w}^T(\omega) = [w_W(\omega) \quad w_D(\omega) \quad \phi_D(\omega) \quad w_{R1}(\omega) \quad w_{R2}(\omega)] \quad , \quad (3.24)$$

$$\mathbf{p}^T(\omega) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1(\omega) \quad N_2(\omega)] \quad (3.25)$$

Die Normalkraft N_1 wirkt am in Fahrtrichtung vorderen Radsatz, N_2 am hinteren. Die Verdrehung des Drehgestells $\phi_D(\omega)$ und das Rotationsträgheitsmoment I_θ sind die in diesem Modell zusätzlichen Größen gegenüber dem Modell der Schwingerkette.

3.5 Dynamische Interaktion zwischen Fahrzeug und Oberbau

Der grundlegende Lösungsansatz für die Interaktion einer oder mehrerer Schwingerketten mit dem Oberbau und die Erweiterungen auf Modelle mit mehreren Kontaktpunkten sowie die Berücksichtigung einer Kopplung des Oberbaues mit dem Halbraum (siehe Kapitel 4) wurden vom Autor in Zusammenarbeit mit Bitzenbauer [Bit99] entwickelt.

Zwei wesentliche Einflüsse sind bei der Überfahrt eines Fahrzeuges über den Oberbau zu unterscheiden. Der erste Einfluß ist die Wirkung des bewegten Eigengewichtes und der zweite die dynamische Anregung durch Gleislagefehler, Rauigkeiten und Radunrundheiten. Gleislagefehler und Rauigkeiten sind ortsfeste Irregularitäten, die Radunrundheiten sind bewegt, können aber bei konstanter Fahrgeschwindigkeit auch auf ortsfeste Irregularitäten umgerechnet werden.

Die Lösung für die Überfahrt des Eigengewichtes läßt sich, wie unten gezeigt wird, einfach bestimmen.

Für die Anregung durch Irregularitäten erfordert die Lösung allerdings mehr Aufwand. Häufig wird die dynamische Anregung durch Irregularitäten derart erfaßt, daß das Fahrzeug mit einem Kontaktpunkt und der Oberbau jeweils durch eine komplexe Feder modelliert und die gesamten Irregularitäten in einem "Rauhigkeitsband" zusammengefaßt werden. Dieses wird nun zwischen den beiden Federn mit der Fahrgeschwindigkeit entgegen der Fahrtrichtung "durchgezogen". Diese Modellierung erfaßt zwei Effekte nicht korrekt: Zum einen wird die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Achsen über den Oberbau nicht berücksichtigt und zum zweiten entfällt die Wirkung der bewegten Last in der Reaktion des Oberbaues, da die Federsteifigkeit für eine unbewegte Last bestimmt wird.

Der vorliegende Ansatz umgeht diese Vereinfachung, da das Fahrzeug und die Radunrundheiten als bewegt angesetzt werden und die Gleislagefehler und Rauhigkeiten als ortsfest. Die Lösung erfolgt im mitbewegten Koordinatensystem, so daß im Modell sowohl die Interaktion über den Oberbau als auch der Einfluß der bewegten Last auf den Oberbau enthalten sind. Somit stellt diese Modellierung die Wirklichkeit in einer korrekten Weise dar.

Das Berechnungsverfahren wird hier am einfachen elastisch gebetteten Balken vorgestellt. Werden mehrere gekoppelte Balken verwendet, so muß der Differentialoperator für den obersten Balken (die Schiene) entsprechend modifiziert werden. Die Lösungen für die weiteren Balken ergeben sich durch entsprechende Umrechnungen.

3.5.1 Lösung für bewegtes Eigengewicht

Im Falle des bewegten Eigengewichtes werden im Fahrzeug keine dynamischen Antworten hervorgerufen, da nur eine konstante Last wirkt und somit keine Trägheitskräfte im Fahrzeug aktiviert werden können. Im Oberbau ergibt sich eine sogenannte "mitfahrende Einsenkungsmulde", die bedeutet, daß sich diese Biegelinie mit der Fahrgeschwindigkeit im Oberbau bewegt. Damit bleiben auch die Kontaktpunkte zwischen Oberbau und Radsatz immer auf derselben Höhenlage. Die Biegelinie der mitfahrenden Einsenkungsmulde ergibt sich im transformierten Raum aus dem Produkt der Last $\hat{p}(k_x, \omega)$ und der Grundlösung. Die Last setzt sich (unter Annahme gleicher Achslasten) aus n Einzellasten P zusammen, die derart positioniert sind, daß die erste Last am Koordinatenursprung $x = 0$ steht und die weiteren im Abstand² $x_i = -l_i$.

$$p(x, t) = P \sum_{i=1}^n \delta(x - vt + l_i) \quad \circ \bullet \quad p(k_x, \omega) = 2\pi P \sum_{i=1}^n e^{il_i k_x} \delta(\omega + vk_x) \quad . \quad (3.26)$$

Bei Verwendung des Differentialoperators

$$D_S(k_x, \omega) = EI_S k_x^4 - \mu \omega^2 + k - ic\omega \quad (3.27)$$

und der daraus folgenden Grundlösung

$$\hat{w}_{S0}(k_x, \omega) = \frac{1}{D_S(k_x, \omega)} \quad (3.28)$$

²Im mitbewegten Koordinatensystem sind nur die Abstände für die Lösung maßgebend.

ergibt sich die Verschiebung im bewegten Koordinatensystem im Originalraum nach Fourier-rücktransformation zu

$$w_S(\bar{x}) = \frac{P}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-vt+l_i)k_x}}{D_S(k_x, \omega = -vk_x)} dk_x \quad . \quad (3.29)$$

3.5.2 Anregung durch Imperfektionen

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur vertikale Imperfektionen betrachtet. Die wesentliche Annahme, die den Berechnungen zugrundeliegt, ist die Annahme eines dauerhaften Punktkontaktes zwischen Radsatz und Schiene. Dies bedeutet zum einen, daß eine Einzelkraft als Interaktionskraft angesetzt werden kann, die Kontaktbedingung punktweise erfüllt werden muß und daß auch, zumindest für die rein dynamischen Lasten, Zugkräfte zulässig sind. In der Überlagerung mit dem Eigengewicht sollte sich eine Druckkraft ergeben, so daß das Modell noch gültig bleibt. Andernfalls sonst würde das Rad kurzzeitig abheben.

Die Kontaktbedingung, die für jeden Kontaktpunkt zu erfüllen ist, lautet

$$w_R(t) = \Delta w(t) + w_S(x = vt, t) \quad (3.30)$$

Bei mehreren Kontaktpunkten ist der örtliche bzw. zeitliche Versatz mit einzubeziehen. Die Vertikalverschiebung des Rades und der Schiene am mitbewegten Kontaktpunkt sind mit w_R und w_S bezeichnet. $\Delta w(t)$ beschreibt den vorgegebenen Zeitverlauf der Irregularitäten, der aus den ortsfesten Schienenirregularitäten durch Umrechnung $\Delta w(t) = \Delta w(x/v)$ über die Fahrgeschwindigkeit bestimmt werden kann. In Δw müssen ebenfalls die Radunrundheiten eingerechnet werden, die harmonisch über den Umfang des Rades angesetzt sind. In Abhängigkeit des Grades n ergibt sich die Anregungsfrequenz zu $f_n = vn/(2\pi r)$ mit r als Radius des Rades und v als Fahrgeschwindigkeit.

Ein Kontaktpunkt

Hier wird ein Fahrzeug mit einem einzigen Kontaktpunkt angesetzt, da sich dabei die Lösung vollständig analytisch herleiten läßt. Die Interaktion zwischen Schiene und Radsatz ist schematisch in Abbildung 3.3 dargestellt.

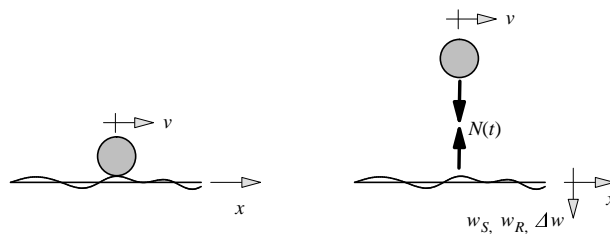


Abbildung 3.3: Dynamische Interaktion zwischen Fahrzeug und Oberbau bei Anregung durch Imperfektionen

Die Gleichung

$$p(x, t) = -\delta(x - vt)N(t) \quad (3.31)$$

und die Fourier Transformierte

$$\begin{aligned} p(k_x, \omega) &= -\delta(\omega + vk_x) * N(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} N(\tau)\delta(\omega + vk_x - \tau)d\tau = \\ &= -N(\omega + vk_x) = -k_R(\omega + vk_x)w_R(\omega + vk_x) \end{aligned} \quad (3.32)$$

beschreiben die bewegte und zeitlich veränderliche Normalkraft auf der Schiene. Die Definitionsrichtung der Normalkraft nach Abbildung 3.3 führt auf das negative Vorzeichen. Die komplexe Steifigkeit des Radsatzes ist z.B. aus (3.22) bekannt. Die transformierte Verschiebung der Schiene (Index S) lautet unter Verwendung der Gleichungen (3.32) und (3.28)

$$w_S(k_x, \omega) = \frac{p(k_x, \omega)}{D_S(k_x, \omega)} = -\frac{k_R(\omega + vk_x)w_R(\omega + vk_x)}{D_S(k_x, \omega)} \quad (3.33)$$

Wird diese Beziehung in die Kontaktbedingung (3.30) eingesetzt, so ergibt sich diese nach einer doppelten Fourierrücktransformation der Schienendurchbiegung ins bewegte Koordinatensystem und in den Zeitbereich zu

$$w_S(x = vt, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) e^{ik_x vt} e^{i\omega t} dk_x d\omega = w_R(t) - \Delta w(t) \quad (3.34)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $e^{-i\Omega t}$ und Integration beider Seiten von $-\infty$ bis $+\infty$ (dies entspricht einer Fouriertransformation in den Frequenzraum Ω), ergibt sich

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) e^{ik_x vt} e^{i\omega t} e^{-i\Omega t} dk_x d\omega dt = w_R(\Omega) - \Delta w(\Omega) \quad (3.35)$$

und nach Umstellen

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i(\Omega - \omega - vk_x)t} dt \right] dk_x d\omega = w_R(\Omega) - \Delta w(\Omega) \quad (3.36)$$

Das innere Integral entspricht einer Fouriertransformation der Funktion "1" in einen Raum mit dem Transformationskern $\Omega - \omega - vk_x$. Somit kann geschrieben werden:

$$\frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) \delta(\Omega - \omega - vk_x) dk_x d\omega = w_R(\Omega) - \Delta w(\Omega) \quad (3.37)$$

Werden die Eigenschaften der Dirac-Distribution ausgenutzt und die Beziehung (3.33) für die Schienendurchbiegung mit dem Argument $\omega = \Omega - vk_x$ verwendet, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_R(\Omega)w_R(\Omega)}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} dk_x = w_R(\Omega) - \Delta w(\Omega) \quad (3.38)$$

Die Ausdrücke $k_R(\Omega)$ und $w_R(\Omega)$ hängen nur von Ω ab, nicht aber von k_x und können deshalb vor das Integral gezogen werden.

$$-\frac{k_R(\Omega)w_R(\Omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} = w_R(\Omega) - \Delta w(\Omega) \quad (3.39)$$

Diese Gleichung kann nach der unbekannt transformierten Verschiebung des Radsatzes gelöst werden

$$w_R(\Omega) = \frac{2\pi \Delta w(\Omega)}{2\pi + k_R(\Omega) \alpha(\Omega, v)} \quad , \quad (3.40)$$

wobei

$$\alpha(\Omega, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} \quad , \quad (3.41)$$

als mitbewegte Schienensteifigkeit gedeutet werden kann. Durch Rückeinsetzen der Verschiebung des Radsatzes in Gleichung (3.33) folgt die transformierte Verschiebung der Schiene. Eine bzw. zwei (numerisch ausgeführte) Fourierrücktransformationen führen auf die Verschiebung des Radsatzes im Zeitbereich und auf den zeitlichen Verlauf der Schienenverschiebung am Kontaktpunkt. Eine Auswertung der Schienenverschiebung an einem beliebigen Fixpunkt ist ebenso möglich, die Rücktransformation bezüglich des Ortes ist entsprechend anzupassen.

Mehrere Kontaktpunkte

Die oben hergeleiteten Beziehungen werden auf Fahrzeuge mit mehreren Kontaktpunkten erweitert, hierbei ist die Lösung für mehrere Fahrzeuge (mit jeweils einem oder mehreren Kontaktpunkten) implizit enthalten. Mit diesem Ansatz besteht nun die Möglichkeit, die Interaktion zwischen den Radsätzen sowohl über die Schiene als auch über das Fahrzeug zu berücksichtigen. Im allgemeinen Fall besitzt das Fahrzeug n Freiheitsgrade, von denen sich m in Kontakt mit der Schiene befinden. An diesen m Kontaktpunkten wirken die Kontaktkräfte $N_i(\Omega)$ mit $i=1 \dots m$. Somit sind $r = n - m$ Freiheitsgrade nicht in Kontakt mit der Schiene. Das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{n \times n}(\Omega) \mathbf{w}_n(\Omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{N}_m(\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

beschreibt das Verhalten des Fahrzeuges in Abhängigkeit der Kontaktkräfte. Hier ist $\mathbf{K}_{n \times n}(\Omega)$ die dynamische Steifigkeitsmatrix des Fahrzeuges. Der Vektor $\mathbf{w}_n(\Omega)$ enthält die Freiheitsgrade des Fahrzeuges, $\mathbf{N}_m(\Omega)$ steht für die m Kontaktkräfte und $\mathbf{0}_r$ ist ein Nullvektor der Dimension r , der anzeigt, daß außer den Kontaktkräften keine weiteren äußeren Kräfte auf das Fahrzeug einwirken.

Die Kontaktkräfte sind hierbei unbekannt. Das lineare Gleichungssystem (3.42) kann auf die Verschiebungsfreiheitsgrade der Kontaktpunkte zwischen Radsatz und Schiene reduziert werden. Dafür ist eine reduzierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)$ des Drehgestells zu bestimmen:

$$\mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega) \mathbf{w}_m(\Omega) = \mathbf{N}_m(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)^{-1} \mathbf{N}_m(\Omega) = \mathbf{w}_m(\Omega) \quad . \quad (3.43)$$

Neben dieser Gleichung müssen die m Kontaktbedingungen für alle Kontaktpunkte erfüllt werden.

$$w_S(x = vt - l_i, t) = w_{R,i}(t) - \Delta w(t - l_i/v) \quad \forall \quad i = 1, \dots, m \quad (3.44)$$

Mit der Beziehung

$$w_S(k_x, \Omega) = -\frac{\sum_{j=1}^m e^{ik_x l_j} N_j(\Omega)}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} \quad (3.45)$$

können die Kontaktbedingungen zu

$$w_{R,i}(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m N_j(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_x(l_j-l_i)}}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} dk_x = e^{-i\Omega l_i/v} \Delta w(\Omega) \quad (3.46)$$

transformiert werden. Schließlich führen (3.43) und (3.46) auf

$$[\mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)^{-1} + \mathbf{A}_{m \times m}(\Omega)] \mathbf{N}_m(\Omega) = \mathbf{b}_m(\Omega) \Delta w(\Omega) \quad , \quad (3.47)$$

wobei folgende Ausdrücke verwendet werden:

$$A_{ij}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(l_j-l_i)k_x}}{D_S(k_x, \omega = \Omega - vk_x)} dk_x \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad (3.48)$$

$$b_i(\Omega) = e^{-i\Omega l_i/v} \quad \forall \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.49)$$

Hierbei steht die Matrix $\mathbf{A}_{m \times m}(\Omega)$ für die Steifigkeit des Oberbaues, der Vektor $\mathbf{b}_m(\Omega)$ für den Versatz der einzelnen Kontaktpunkte im Frequenzraum und $\mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)^{-1}$ beschreibt das Fahrzeug. Das Lösen des Gleichungssystems (3.48) für verschiedene Frequenzen führt auf die transformierten Normalkräfte. Mit Gleichung (3.45) kann die Vertikalverschiebung der Schiene bestimmt werden und mit (3.42) die Verschiebungen aller Komponenten des Fahrzeuges.

Alternativ können die transformierten Verschiebungen $\mathbf{w}_m(\Omega)$ ohne Inversion von $\mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)$ auch aus der Gleichung

$$[\mathbf{I}_{m \times m} + \mathbf{A}_{m \times m}(\Omega) \mathbf{K}_{m \times m}^*(\Omega)] \mathbf{w}_m(\Omega) = \mathbf{b}_m(\Omega) \Delta w(\Omega) \quad (3.50)$$

bestimmt werden, wobei $\mathbf{I}_{m \times m}$ die Einheitsmatrix der Dimension m bezeichnet.

Kapitel 4

Ankoppelung der Balkenmodelle an den Halbraum

In diesem Kapitel werden Anbindungsmöglichkeiten der Balkenmodelle des Oberbaues an das Untergrundmodell des Halbraumes beschrieben und miteinander verglichen. Die Untersuchungen beschränken sich auf kontinuierliche Modelle, da die Formulierung dieser Modelle im fouriertransformierten Raum eine Anbindung des ebenfalls im fouriertransformierten Raum beschriebenen Halbraumes auf mechanisch korrekte Weise erlaubt. Im weiteren werden die Ausführungen auf das Oberbausystem der Festen Fahrbahn konzentriert, da auf Grund der Bauweise der Festen Fahrbahn von einem kontinuierlichen Kontakt und damit von einer kontinuierlichen Spannung zwischen Tragplatte und Untergrund ausgegangen werden kann. Die Tragplatte der Festen Fahrbahn ist im allgemeinen eine kontinuierliche Platte, die im Fall der meist verwendeten Ortbetonbauweisen (Systeme Rheda, SATO, Heitkamp, Hochtief/Schreck-Mieves, Leonhard Weiss FFC, Heilit + Wörner System BES, Züblin BTE) [Deu96] mit Scheinfugen versehen wird. In dieser Weise wird auch das System Grötz BSO/MK, das aus einem Schotteroberbau in einem Betonplattentrog besteht, hergestellt [Fra98]. Bei einer Tragplatte aus Fertigteilen (System Bögl) werden die Fugen mit Dübeln überbrückt, um den sowohl für die Platte als auch für den Untergrund ungünstigen Lastfall "freier Plattenrand" zu verhindern. Bei beiden Konstruktionsweisen wird trotz der bautechnisch bedingten Fugen vereinfachend von einer kontinuierlichen Biegetragwirkung der Tragplatte ausgegangen.

Rechnerisch treten bei dynamischer Belastung zwischen Platte und Untergrund Zugspannungen auf, die allerdings praktisch in der Fuge nicht übertragen werden können. Aufgrund des Eigengewichtes werden diese Zugspannungen jedoch überdrückt, so daß die Zugspannungen tatsächlich nur zu einer Reduzierung der Druckspannungen führen.

Für den Fall des Schotteroberbaues stellt die Modellierung des Oberbaues eine Näherung dar, im Vergleich mit detaillierteren Modellen wäre zu klären, wie groß diese Näherung ist. Entscheidend für die Qualität der Näherung ist das jeweilige Untersuchungsziel.

Im folgenden werden ausschließlich die Begriffe Untergrund und Halbraum verwendet, die Überlegungen gelten für den geschichteten Untergrund bzw. Schichten auf Halbraum ebenso. Teilweise werden die Begriffe Untergrund und Halbraum auch synonym verwendet.

Die in Kapitel 3 beschriebenen kontinuierlichen Modellierungen sind Balkenmodelle, in denen nur die Längsrichtung erfaßt wird. Die Querrichtung bleibt unberücksichtigt, im mechanischen Sinne heißt dies, daß die Vertikalverschiebung der Balken als in Querrichtung konstant angesehen wird.

Für die Kopplung dieser Oberbausysteme mit dem Halbraum bedeutet dies, daß der die Tragplatte repräsentierende unterste Balken als starr in Querrichtung angesehen wird und eine über die Breite konstante Verschiebung der Halbraumoberfläche bewirkt. Für die korrekte Anbindung der Oberbaumodelle an den Halbraum ist somit ein Verfahren zu entwickeln, das diese konstante Verformung der Halbraumoberfläche berücksichtigt.

Die Anbindung des Halbraumes an die Oberbaumodelle verfolgt zwei Ziele:

- Einbindung der mechanischen Eigenschaften des Halbraumes in die Oberbaumodelle:
Die mechanische Wirkungsweise des Untergrundes, Kräfte und Verformungen in alle Richtungen zu koppeln, wird durch den Halbraum widergespiegelt. Dies steht im Gegensatz zu einer viskoelastischen Bettung, die nur rein lokal einen Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung bzw. Verschiebungsgeschwindigkeit darstellen kann.
- Wirklichkeitsnahe Beschreibung der Auswirkungen aus Zugverkehr im Untergrund:
Mit Hilfe der Oberbaumodelle ist es möglich, die tatsächlich auf den Untergrund wirkenden Spannungen zu ermitteln und unter Verwendung des Halbraummodells deren Weiterleitung im Untergrund zu bestimmen.

Das Gesamtmodell aus Fahrzeug, Oberbau und Untergrund wird in Teilmodelle aufgeteilt. Fahrzeug und Oberbau bilden zusammen das Oberbaumodell. Der Untergrund wird als zweites Teilmodell behandelt.

Der Untergrund wird in das Oberbaumodell über "Halbraumsteifigkeiten" eingebunden. Der Begriff der Halbraumsteifigkeiten wird im nächsten Abschnitt definiert und erläutert. Mit dem Oberbaumodell können nun Parameterstudien durchgeführt werden. Sollen dann für ausgewählte Fälle die Erschütterungen beurteilt werden, können die Ergebnisse der Oberbauberechnung auf das Halbraummodell als Lasten eingetragen und die Erschütterungsausbreitung berechnet werden.

In der praktischen Umsetzung bedeutet dies, daß das Oberbaumodell und das Untergrundmodell getrennt modelliert und über Steifigkeitsbeziehungen und Spannungen miteinander verbunden werden. Eine Berechnung des Gesamtmodells gliedert sich daher in drei wesentliche Punkte:

- Bestimmung der Halbraumsteifigkeiten
- Berechnung des Oberbaues unter Verwendung der Halbraumsteifigkeiten
- Berechnung der Erschütterungsausbreitung im Untergrund infolge der auftretenden Spannungen aus der Oberbauberechnung

4.1 Anbindung über Halbraumsteifigkeiten

In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß für eine bestimmte Tiefe z , für eine bestimmte Anregungsfrequenz Ω und für eine bestimmte Lastgeschwindigkeit v eine (für den Halbraum analytische) Lösung der transformierten Verschiebungen $\hat{u}(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x)$ bei Verwendung der modifizierten Frequenz existiert. Diese Lösung charakterisiert das Verhalten des Halbraumes in Abhängigkeit der Wellenzahlen k_x und k_y .

Diese Lösung dient als Grundlage zur Ermittlung von Halbraumsteifigkeiten, mit denen die Anbindung der Oberbaumodelle an den Halbraum auf mechanisch korrekte Weise durchgeführt werden kann. Die Anbindung des Halbraumes an eindimensionale Oberbaumodelle muß linienförmig erfolgen, daher muß die zweidimensional veränderliche Größe der Verschiebungen $\hat{u}(k_x, k_y, z, -\Omega - vk_x)$ auf eine eindimensional veränderliche Größe der Steifigkeiten $\hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x)$ umgerechnet werden. Der Begriff der Halbraumsteifigkeiten wurde 1996 von Dieterman und Metrikine [DM96] eingeführt. Die hier verwendete Definition und Anwendung ist allerdings weitreichender als die dort beschriebene.

Die Definition der Halbraumsteifigkeiten läßt sich aus einer Vergleichsbetrachtung der Systeme “Balken auf Halbraum” und “Balken auf elastischer Bettung” ableiten. Es ist ausreichend, nur den einzelnen Balken zu betrachten, der die Tragplatte darstellt, da die Kopplung des Oberbaues an den Halbraum nur über diesen Balken geschieht.

Für den “Balken auf elastischer Bettung” kann die Vertikalverschiebung im transformierten Raum geschrieben werden als, siehe Gleichung (3.3):

$$\hat{w}(k_x) = \frac{\hat{p}(k_x)}{EI k_x^4 - \mu(-\Omega - vk_x)^2 + k_W + i(-\Omega - vk_x) c_W} \quad . \quad (4.1)$$

Untersuchungen des Halbraumes in transformierten Raum zeigen, daß die komplexe Steifigkeit der elastischen Bettung $k_W + i(-\Omega - vk_x) c_W$ kann durch eine *wellenzahl-, frequenz- und geschwindigkeitsabhängige Steifigkeit* ersetzt werden kann. Für eine feste Anregungsfrequenz Ω und eine feste Fahrgeschwindigkeit v ergeben sich die Halbraumsteifigkeiten als Funktion der Wellenzahl k_x . Somit lautet die Verschiebung des “Balkens auf Halbraum” (Index H) im transformierten Raum:

$$\hat{w}_H(k_x)^{\Omega, v} = \frac{\hat{p}(k_x)}{EI k_x^4 - \mu(-\Omega - vk_x)^2 + \hat{k}_H^R(k_x)^{\Omega, v} + i \hat{k}_H^I(k_x)^{\Omega, v}} \quad . \quad (4.2)$$

$$\hat{k}_H(k_x)^{\Omega, v} = \hat{k}_H^R(k_x)^{\Omega, v} + i \hat{k}_H^I(k_x)^{\Omega, v} \quad (4.3)$$

Die Halbraumsteifigkeiten hängen nicht von der Koordinate y der Querrichtung ab, da nur die unter dem Balken konstante Verschiebung relevant ist. Wird die Breite der Tragplatte mit b bezeichnet und liegt die Balkenachse in der x -Achse des Halbraumes, so muß sich im Bereich von $y \in [-b/2, b/2]$ eine konstante Verschiebung ergeben. Diese Forderung muß aus diesem Grund in die Halbraumberechnung zur Ermittlung der Steifigkeiten eingebracht werden. Dies soll im nächsten Abschnitt näher betrachtet werden.

In der praktischen Umsetzung sind die Anregungsfrequenz Ω und die Geschwindigkeit der Last v Eingabeparameter für die Halbraumberechnung zur Ermittlung der Steifigkeiten. Weiterhin liegt für die Anbindung des Oberbaues die Tiefenlage der zu untersuchenden Verschiebungen mit $z = 0$ fest, da die Anbindung an der Oberfläche des Halbraumes erfolgt.

Unter Berücksichtigung dieser Vorüberlegungen werden die Halbraumsteifigkeiten (unter Annahme fester Parameter Ω und v) wie folgt definiert:

$$\hat{k}_H(k_x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(k_x, y) dy}{\hat{u}_z(k_x, y = 0, z = 0)} \quad (4.4)$$

Die Verschiebungen $\hat{u}_z(k_x, y = 0, z = 0)$ stellen die sich unter der Last $\hat{p}(k_x, y)$ ergebenden Verschiebungen der Halbraumoberfläche in der Achse $y = 0$ dar. Der Wert $y = 0$ ist stellvertretend gewählt worden, da auf Grund der konstanten Verschiebung unter dem Balken jeder Wert aus dem Intervall $y \in [-b/2, b/2]$ herangezogen werden kann.

Die Last $\hat{p}(k_x, y)$ ist die charakteristische Lastfunktion, die für jede Wellenzahl k_x eine über die Breite des Balkens konstante Verschiebung des Halbraumes hervorruft.

$$\hat{p}(k_x, y) = 1 \cdot \hat{f}_q(k_x, y) \quad (4.5)$$

Der Faktor "1" spiegelt wider, daß die Steifigkeit für alle Wellenzahlen k_x bestimmt werden soll. Die Funktion $\hat{f}_q(k_x, y)$ ist die Lastverteilung in Querrichtung, die aber für jede Wellenzahl k_x eine unterschiedliche Form annehmen kann.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Lastverteilung in Querrichtung $\hat{f}_q(k_x, y)$, die eine konstante Verschiebung der Halbraumoberfläche im Bereich $y \in [-b/2, b/2]$ bewirkt, wird im übernächsten Abschnitt besprochen.

Allgemein wird im folgenden der Ausdruck $\hat{k}_H(k_x, \omega)$ verwendet, dies bedeutet, daß die Anregungsfrequenz und die Geschwindigkeit nicht festliegen. Auf Grund der Zusammenhänge im transformierten Raum gilt für eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Last: $\hat{k}_H(k_x, \omega) = \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x)$.

4.2 Berechnungsgrundlagen des gekoppelten Systems

Die einzelnen Abschnitte des Berechnungsverfahrens lassen sich durch die Betrachtung der mechanischen Formeln, die die transformierte Verschiebung des Halbraumes beschreiben, am besten darstellen.

Im dreifach transformierten Raum lautet die Lösung für die transformierte Vertikalverschiebung \hat{u}_z (siehe Gl. 2.20)

$$\hat{u}_z(k_x, k_y, z, \omega) = \hat{G}_z(k_x, k_y, z, \omega) \hat{p}_z(k_x, k_y, \omega) \quad ,$$

wobei \hat{G}_z die Grundlösung der \hat{u}_z -Verschiebungen infolge einer vertikalen Einzellast darstellt.

Für das Oberbaumodell (vgl. Kapitel 3) kann die transformierte Verschiebung analog als Produkt der Grundlösung $\hat{w}_0(k_x, \omega)$ der Vertikalverschiebung des untersten Balkens und der auf den

Oberbau einwirkenden Belastung $\hat{p}_{oben}(k_x, \omega)$ gebildet werden. Hierbei gehen die Halbraumsteifigkeiten $\hat{k}_H(k_x)$ in das Oberbaummodell analog zu (4.2) ein. Durch Multiplikation der Verschiebung mit den Halbraumsteifigkeiten $\hat{k}_H(k_x, \omega)$ ergeben sich Kräfte, die über die transformierte Spannungsverteilung in Querrichtung $\hat{f}_q(k_x, k_y)$ auf die auf den Halbraum wirkende Spannungsverteilung $\hat{p}_z(k_x, k_y, \omega)$ umgerechnet werden kann.

$$\hat{p}_z(k_x, k_y, \omega) = \hat{p}_{oben}(k_x, \omega) \hat{w}_0(k_x, \omega) \hat{k}_H(k_x, \omega) \hat{f}_q(k_x, k_y) \quad (4.6)$$

Unter Berücksichtigung, daß sich die Last auf dem Oberbau mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt und mit der Frequenz Ω harmonisch oszilliert, gilt für die Last

$$\hat{p}_{oben}(k_x, \omega) = \hat{p}_0(k_x) \pi (\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad .$$

Mit diesen Beziehungen kann die transformierte Verschiebung des Halbraumes geschrieben werden als

$$\hat{u}_z(k_x, k_y, \omega) = \hat{G}_z(k_x, k_y, \omega) \hat{p}_0(k_x) \hat{w}_0(k_x, \omega) \hat{k}_H(k_x, \omega) \hat{f}_q(k_x, k_y) \cdot \pi (\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad . \quad (4.7)$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich ist analytisch möglich. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{u}_z(k_x, k_y, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, \Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, \Omega - vk_x) \cdot \right. \\ \cdot \hat{k}_H(k_x, \Omega - vk_x) e^{-i(-\Omega + vk_x)t} + \\ \left. + \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, -\Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, -\Omega - vk_x) \cdot \right. \\ \left. \cdot \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x) e^{-i(\Omega + vk_x)t} \right) \quad . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Die zweifache Fourierrücktransformation in den Ortsbereich führt auf

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, \Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, \Omega - vk_x) \cdot \right. \\ \cdot \hat{k}_H(k_x, \Omega - vk_x) e^{-i(-\Omega + vk_x)t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} dk_x dk_y + \\ \left. + \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, -\Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, -\Omega - vk_x) \cdot \right. \\ \left. \cdot \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x) e^{-i(\Omega + vk_x)t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right) \quad . \quad (4.9) \end{aligned}$$

Die beiden Rücktransformationen lassen sich nur für einen bestimmten Zeitpunkt t numerisch ausführen, da in den Integralen die Variablen t und k_x in einem Term vermischt sind.

Wird allerdings die Verschiebung im mitbewegten Koordinatensystem $\bar{x} = x - vt$ ausgewertet, kann in den Exponentialtermen eine Zusammenfassung der Terme erfolgen. Gleichzeitig können die Zeitfunktionen vor die Integrale gezogen werden. Damit sind die Integrationskerne (abgesehen von den als fest anzunehmenden Eingangsgrößen Ω und v) nur noch von den beiden

Integrationsvariablen abhängig und die Integrationen können numerisch ausgeführt werden.

$$\begin{aligned}
u_z(\bar{x}, y, t) = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi^2} e^{i\Omega t} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, \Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, \Omega - vk_x) \cdot \right. \\
& \cdot \hat{k}_H(k_x, \Omega - vk_x) e^{ik_x \bar{x}} e^{ik_y y} dk_x dk_y + \\
& + \frac{1}{4\pi^2} e^{-i\Omega t} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, -\Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, -\Omega - vk_x) \cdot \\
& \left. \cdot \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x) e^{ik_x \bar{x}} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Doppelintegrale stellen konjugiert komplexe Zeiger in der komplexen Ebene dar. Zur Auswertung der Verschiebung ist es ausreichend, einen der beiden Zeiger zu berechnen.

Die tatsächliche Verschiebung ist eine physikalische Größe, daher ist sie reell und kann aufgrund der Symmetrieüberlegungen wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
u_z(\bar{x}, y, t) = & \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left(e^{-i\Omega t} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{G}_z(k_x, k_y, -\Omega - vk_x) \hat{w}_0(k_x, -\Omega - vk_x) \right. \\
& \left. \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x) e^{ik_x \bar{x}} e^{ik_y y} dk_x dk_y \right) .
\end{aligned}$$

Kurz gefaßt kann die Funktion (4.10) geschrieben werden als:

$$u_z(\bar{x}, y, t) = \frac{1}{2} \left(e^{i\Omega t} u_z(\bar{x}, y)_{\Omega - vk_x} + e^{-i\Omega t} u_z(\bar{x}, y)_{-\Omega - vk_x} \right) . \quad (4.11)$$

Aufgrund der Überlegungen in Abschnitt 2.3.1 erfolgt die Berechnung des Zeigers mit negativer Anregungsfrequenz.

Das Programm von Lieb [Lie97] zur Berechnung der dynamischen Verschiebungen des Halbraumes liefert als Ergebnis der Berechnung $u_z(\bar{x}, y)_{-\Omega - vk_x}$, siehe Gl. (2.21). Hier müßte der Lastterm (zugehörig zu diesem Zeiger) wie folgt formuliert werden:

$$\hat{p}(k_x, k_y) = \hat{p}_0(k_x) \hat{f}_q(k_x, k_y) \hat{w}_0(k_x, -\Omega - vk_x) \hat{k}_H(k_x, -\Omega - vk_x) . \quad (4.12)$$

Hier zeigt sich, daß auch in den Lastterm die modifizierte Frequenz einfließt. Der Lastterm ist nur noch von den Wellenzahlen k_x und k_y als Variablen abhängig.

4.3 Spannungsverteilung in Querrichtung

Um eine mechanisch korrekte Anbindung der eindimensionalen Oberbaumodelle an den Untergrund zu gewährleisten, ist es erforderlich, die Spannungsverteilung zwischen dem in Querrichtung starr angesetzten Balken und dem Halbraum zu bestimmen. Zum einen ist dies notwendig, um korrekte Steifigkeitswerte zu ermitteln, und zum anderen ist die Lastverteilung eine wesentliche Eingangsgröße für die Berechnung der Erschütterungsausbreitung.

Zur Berechnung der Spannungsverteilung in Querrichtung werden zwei verschiedene Ansätze auf ihre Anwendbarkeit, ihre Ergebnisqualität und ihre Effizienz untersucht:

- Streifenverfahren und
- Legendre-Polynome.

Bei statischer Beanspruchung ist das wesentliche Charakteristikum der Spannungsverteilung unter einem starren Fundament, daß diese am Rande der starren Fläche gegen unendlich große Werte strebt. Mit welchen Ansätzen das jeweilige Verhalten im dynamischen Fall am besten abgebildet bzw. angenähert werden kann, soll im folgenden untersucht werden.

Eine wichtige Eigenschaft der Spannungsverteilung läßt sich aus dem System bereits ohne Berechnung ableiten: Die Spannungsverteilung ist bezüglich der Mittelachse des Balkens achsensymmetrisch. Das System Balken auf Halbraum ist bezüglich der Mittelachse des Balkens achsensymmetrisch und ebenso die Bedingung der konstanten Verformung über die Breite des Balkens. Die auf den Balken wirkende Last kann auf Grund der Eindimensionalität der Oberbaumodelierungen als mittig wirkende Einzellast zusammengefaßt werden.

Das Ziel der Betrachtung liegt darin, daß zu allen Zeitpunkten im gesamten x -Bereich eine von der Form her vorgegebene Einsenkungsmulde (konstante Verformung über die Breite) auftritt. Diese Forderung wird im Wellenzahlraum k_x aufgestellt und für alle Wellenzahlen gelöst. Ist die Forderung für eine Wellenzahl erfüllt, so gilt für eine Verformung dieser Wellenzahl im Originalraum x , daß die Forderung im gesamten Bereich erfüllt ist. Ist also die Forderung für alle Wellenzahlen k_x erfüllt, so ist die Forderung auch für alle Orte x bei einer beliebigen Verschiebung $w(x)$ erfüllt. Dieses Vorgehen wurde von Grundmann [Gru99] entwickelt.

4.3.1 Streifenverfahren

Einer der naheliegendsten Ansätze zur Ermittlung einer unbekanntem Spannungsverteilung ist die Last in einzelne Streifen unbekannter Amplituden aufzuteilen und über Kompatibilitätsbedingungen die Amplituden zu bestimmen (Abb. 4.1).

Die Berechnungen werden für alle Wellenzahlen k_x für eine feste Frequenz Ω und eine feste Fahrgeschwindigkeit v ausgeführt. Die Forderung, die aufgestellt wird, ist diejenige, daß die Verformung des Halbraumes unter der Summe aller Streifenlasten, also der gesamten Spannungsverteilung, über die Breite des in Querrichtung starr angesetzten Balkens konstant ist. Als Formel lautet diese Bedingung für eine beliebige vorgegebene Verschiebung $\hat{u}_{z,soll}$, die für alle Wellenzahlen k_x gleich angesetzt wird:

$$\hat{w}_H(k_x, y) = \hat{u}_{z,soll} = \hat{u}_{z,soll}^R + i \hat{u}_{z,soll}^I \quad \forall y \in [-b/2, b/2] \quad (4.13)$$

Diese Forderung muß für eine numerische Aufbereitung in eine diskrete Formulierung überführt werden. Eine Möglichkeit liegt darin, die Forderung punktweise zu erfüllen (Kollokation), eine andere Möglichkeit läge in einer integralen Gewichtung über die gesamte Breite.

Für das Streifenverfahren wird aufgrund der eher hohen Anzahl an Unbekannten die Kollokation untersucht, da sich angesichts der Streifenlasten keine passenden unterschiedlichen Wichtungsfunktionen zur Verwendung anbieten.

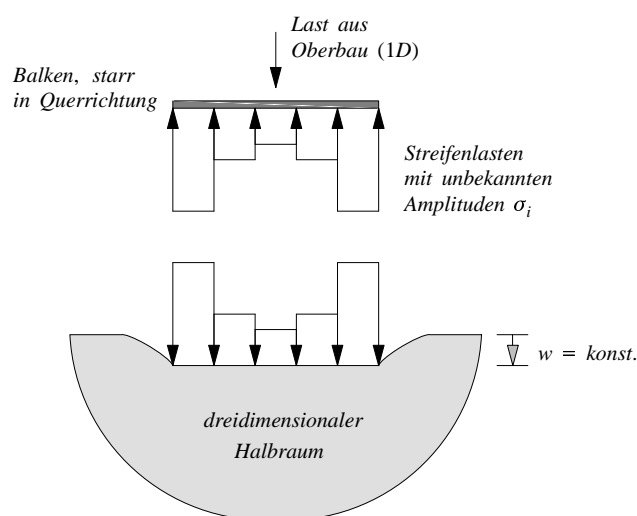


Abbildung 4.1: Systemskizze zum Streifenverfahren bei in Querrichtung starrem Balken

Es sind ebenfalls verschiedene Möglichkeiten denkbar, an welchen Punkten die Forderung zu erfüllen ist. Bei der einfachsten Variante wird die Forderung an allen Mittelpunkten der Streifenlasten aufgestellt. Eine problemorientiertere Variante wäre gegeben, wenn die Forderung zum Rand hin mit einem dichteren Punktraster aufgestellt würde.

Das Vorgehen beim Streifenverfahren ist wie folgt strukturiert:

- Aufteilen des Lastbildes in n Streifen gleicher Breite ($b_s = b/n$).
- Ermittlung der Vertikalverschiebung des Halbraumes $\hat{u}_z(k_x, y)$ infolge einer Streifenbelastung mit komplexer Einheitsamplitude $p_z(k_x, y) = (1 + 0i) \Pi_{b_s}(y)$, (siehe Gl. 4.5). Diese Verformungslinie ist ebenfalls die Einflußlinie für alle anderen Streifenlasten. Der Ausdruck $\Pi_{b_s}(y)$ steht für eine Rechteckfunktion der Breite b_s .
- Aufstellen und Lösen des komplexen Gleichungssystems für die unbekanntem Amplituden σ_i der einzelnen Streifen.
- Das vollständige Lastbild ergibt sich aus der Superposition der einzelnen Streifenlasten für jede Wellenzahl k_x .

Die Berechnung der Vertikalverformungen kann nach den in Kapitel 2 beschriebenen Rechenwegen durchgeführt werden. Zur Ermittlung der Vertikalverformung $\hat{u}_z(k_x, y)$ ist eine einfache Fourierrücktransformation $k_y \bullet \rightarrow y$ der transformierten Lösung $\hat{u}_z(k_x, k_y)$ erforderlich.

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems kann das Superpositionsprinzip angewendet werden, vgl. Abb. 4.2. Somit muß nur eine Halbraumberechnung durchgeführt werden.

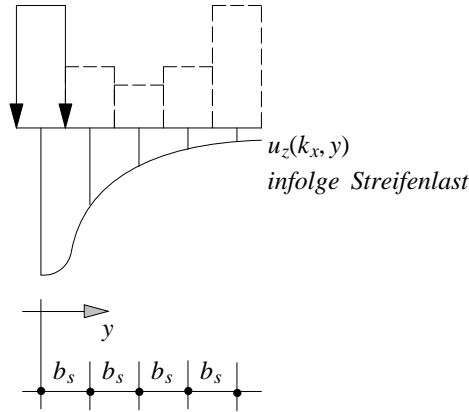


Abbildung 4.2: Vertikalverformung infolge einer Streifenlast ist gleichzeitig Einflußlinie für alle anderen Streifenlasten.

Für den Fall, daß die Forderung gleicher Vertikalverschiebung $\hat{u}_{z,soll} = \hat{u}_{z,soll}^R + i \hat{u}_{z,soll}^I$ an den Mittelpunkten der einzelnen Streifen aufgestellt wird, läßt sich das Gleichungssystem für ein bestimmtes k_x wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_z(y=0) & \hat{u}_z(y=b_s) & \dots & \hat{u}_z(y=(n-1)b_s) \\ \hat{u}_z(y=b_s) & \hat{u}_z(y=0) & \dots & \hat{u}_z(y=(n-2)b_s) \\ \hat{u}_z(y=2b_s) & \hat{u}_z(y=b_s) & \dots & \hat{u}_z(y=(n-3)b_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_z(y=(n-1)b_s) & \hat{u}_z(y=(n-2)b_s) & \dots & \hat{u}_z(y=0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{z,soll} \\ \hat{u}_{z,soll} \\ \hat{u}_{z,soll} \\ \vdots \\ \hat{u}_{z,soll} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Die gesamte Spannungsverteilung ergibt sich aus der Superposition aller Streifenlasten. Infolge dieser Last soll sich für jede berechnete Wellenzahl k_x eine konstante Verformung über die Breite des Balkens in Querrichtung ergeben. Im Originalraum, dem Ortsbereich x , stellt sich eine Biegelinie ein, die im gesamten Bereich ($x \in [-\infty, \infty]$) eine konstante Einsenkung in Querrichtung aufweist.

Ein besonderer Vorteil des Streifenverfahrens liegt in der Tatsache begründet, daß nur eine einzige Halbraumberechnung notwendig ist, um alle Verformungswerte zu erhalten, die zur Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen erforderlich sind.

Der komplexe Lastterm für die Berechnung der Halbraumsteifigkeiten, vgl. Gleichung 4.4, ergibt sich aus folgender Formel; es sind alle n Streifen mit ihren jeweiligen Amplituden zu berücksichtigen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(k_x, y) dy = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i(k_x) \cdot b_s \quad (4.15)$$

4.3.2 Legendre-Polynome

Als Alternative zu Streifenlasten werden Legendre-Polynome als Ansatzfunktionen verwendet. Die Legendre-Polynome werden über die gesamte Breite des Balkens angesetzt und weisen an den Rändern die Einheitsamplitude "1" auf. Die Anzahl der berücksichtigten Legendre-Polynome liegt deutlich unter der Anzahl der Streifenlasten, allerdings sind die einzelnen Halbraumberechnungen rechenzeitaufwendiger.

Die Funktionen der Legendre-Polynome und ihre besonderen Eigenschaften (Orthogonalität, Integrationswert gleich Null, etc.) sind im Anhang B dargestellt. Die besonderen Eigenschaften der Legendre-Polynome kommen im Definitionsbereich $[-1, 1]$ zum Tragen. Daher wird eine Substitution des Argumentes vorgenommen, so daß die Breite, also der Bereich $[-b/2, b/2]$, auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet wird.

$$\bar{y} = y/(b/2)$$

Bei der Verwendung von Legendre-Polynomen ist es infolge der Symmetrieeigenschaften des Lastbildes ausreichend, nur die geraden Legendre-Polynome (Grad 0, 2, 4, etc.) als Ansatzfunktionen zu berücksichtigen. Die ersten drei symmetrischen Legendre-Polynome sind mit einer Systemskizze in Abbildung 4.3 dargestellt.

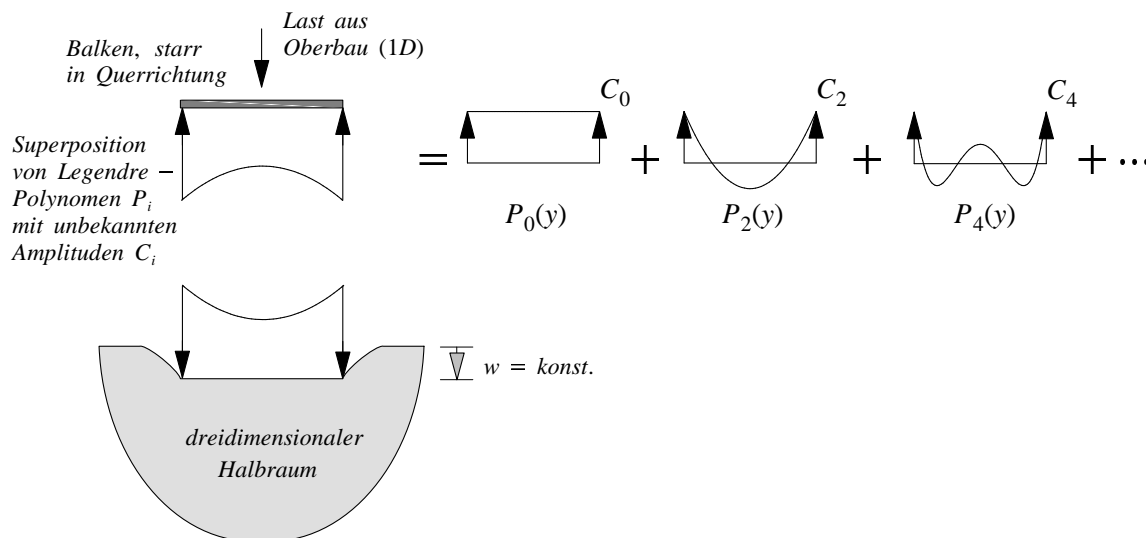


Abbildung 4.3: Systemskizze zum Ansatz von Legendre-Polynomen bei in Querrichtung starrem Balken

Die Berechnung erfolgt erneut für alle Wellenzahlen k_x , eine feste Frequenz Ω und eine feste Geschwindigkeit v . Das Verfahren läßt sich wie folgt in einzelne Schritte aufteilen:

- Bestimmung der Anzahl n der zu berücksichtigenden Legendre-Polynome.
- Ermittlung der Vertikalverformungen des Halbraumes $\hat{u}_{z,i}(k_x, y)$ infolge charakteristischer, den einzelnen Legendre-Polynomen (Index i) zugeordneter Lastbilder mit Einheitsamplitude $\hat{p}_{z,i}(k_x, y) = (1 + 0 \ i) P_i(\bar{y})$, (vgl. Gl. 4.5).
Es ergeben sich somit für jede Wellenzahl k_x n verschiedene Vertikalverschiebungen.

- Aufstellen und Lösen des komplexen Gleichungssystems für die unbekanntenen Amplituden C_i der einzelnen Polynome.
- Das vollständige Lastbild ergibt sich aus der Superposition der einzelnen Lastbilder für jede Wellenzahl k_x .

Die Berechnung der Vertikalverformungen infolge der einzelnen Legendre-Polynome kann nach den in Kapitel 2 beschriebenen Rechenwegen durchgeführt werden. Zur Ermittlung der Vertikalverformungen $\hat{u}_{z,i}(k_x, y)$ ist für jedes angesetzte Polynom eine eigene Berechnung unter Zuhilfenahme einer einfachen Fourierrücktransformation $k_y \bullet \rightarrow y$ der transformierten Lösung $\hat{u}_{z,i}(k_x, k_y)$ erforderlich.

Im Gegensatz zum Streifenverfahren ist die Anzahl der Ansatzfunktionen und damit der unbekanntenen Koeffizienten geringer. Daraus folgt eine entsprechend niedrigere Anzahl von Bedingungen, die aufgestellt werden müssen. Es existieren mehrere Möglichkeiten, das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Amplituden C_i zu erhalten:

- Kollokation
- Integrale Gewichtung, Fehlerminimierung über einen Bereich

Infolge der Symmetrie des Systems ist die Betrachtung einer Hälfte des Systems ausreichend und sinnvoll.

Die Kollokation, d.h. die Forderung, die gewünschte Gesamtverschiebung $\hat{u}_z(k_x, y) = \hat{u}_{z,soll} \quad \forall y \in [-b/2, b/2]$ an einzelnen Punkten zu erhalten, erscheint auf Grund der geringen Anzahl von Bedingungen als keine besonders gute Forderung und wird deshalb nicht weiter untersucht. In diesem Fall würden n Punkte in einer Hälfte des Systems bestimmt, an denen die Summe aller Vertikalverschiebungen gleich der geforderten Vertikalverschiebung sein muß.

Als besserer Lösungsweg erscheint die integrale Gewichtung, bei der hier die n angesetzten Legendre-Polynome selbst als n Wichtungsfunktionen eingesetzt werden. Durch dieses Vorgehen entstehen n linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der n unbekanntenen Amplituden.

Zur Auswertung wird die Summe der Integrale aus Vertikalverschiebung und Wichtungsfunktion dem Integral über die Forderung gegenübergestellt. Die erste Zeile ergibt sich unter Verwendung des gestreckten Legendre-Polynoms $P_0(\bar{y})$ als Wichtungsfunktion für ein bestimmtes $k_x = k_{x0}$ zu:

$$\begin{aligned} & \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,0}(k_{x0}, y) C_0(k_{x0}) \cdot P_0(\bar{y}) dy + \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,2}(k_{x0}, y) C_2(k_{x0}) \cdot P_0(\bar{y}) dy + \dots + \\ & + \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,2(n-1)}(k_{x0}, y) C_{2(n-1)}(k_{x0}) \cdot P_0(\bar{y}) dy - \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,soll} \cdot P_0(\bar{y}) dy = 0 + 0 \quad i \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Forderung, die im letzten Term eingebracht wird, wird für alle n angesetzten Legendre-Polynome aufgestellt und auf die andere Seite als "Lastvektor" gebracht. Der Verlauf der Forderung selbst $\hat{u}_{z,soll} = konst. \quad \forall y \in [-b/2, b/2]$ entspricht dem Verlauf des ersten Legendre-Polynoms $P_0(\bar{y})$. Auf Grund der Orthogonalitätsbedingungen der Legendre-Polynome, siehe

Gleichung (B.3), vereinfacht sich die rechte Seite wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,soll} \cdot P_0(\bar{y}) dy \\ \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,soll} \cdot P_2(\bar{y}) dy \\ \vdots \\ \int_0^{b/2} \hat{u}_{z,soll} \cdot P_{2(n-1)}(\bar{y}) dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{z,soll} b/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem kann somit (unter Weglassung der Integralgrenzen und der betrachteten Wellenzahl, genaue Form siehe Gl. 4.16) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \int \hat{u}_{z,0}(y) \cdot P_0(\bar{y}) dy & \dots & \int \hat{u}_{z,2(n-1)}(y) \cdot P_0(\bar{y}) dy \\ \int \hat{u}_{z,0}(y) \cdot P_2(\bar{y}) dy & \dots & \int \hat{u}_{z,2(n-1)}(y) \cdot P_2(\bar{y}) dy \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \int \hat{u}_{z,0}(y) \cdot P_{2(n-1)}(\bar{y}) dy & \dots & \int \hat{u}_{z,2(n-1)}(y) \cdot P_{2(n-1)}(\bar{y}) dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{z,soll} b/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Die vollständige Spannungsverteilung der Interaktionskraft zwischen Balken und Halbraum ergibt sich aus der Superposition aller mit den Amplituden skalierten Legendre-Polynome. Infolge dieser Last wird sich für jede berechnete Wellenzahl k_x eine konstante Verformung über die Breite des Balkens in Querrichtung ergeben. Im Originalraum, dem Ortsbereich x , stellt sich eine Biegelinie ein, die im gesamten Bereich ($x \in [-\infty, \infty]$) eine konstante Einsenkung in Querrichtung aufweist.

Zur Ermittlung der Halbraumsteifigkeiten reduziert sich infolge der Eigenschaften der Legendre-Polynome, vgl. Gleichung (B.4), die Ermittlung der Spannungsresultierenden auf das Polynom nullten Grades.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(k_x, y) dy = \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{i=0}^{i=n} C_{2(i-1)}(k_x) P_{2(i-1)}(\bar{y}) dy = C_0(k_x) \cdot \int_{-b/2}^{b/2} P_0(\bar{y}) dy = C_0(k_x) \cdot b \quad (4.18)$$

Legendre-Polynome als Superposition aus Streifenlasten

Zur Vereinfachung und Beschleunigung der Berechnungen werden die zur Beschreibung der Spannungsverteilung gut geeigneten Legendre-Polynome aus Rechteckstreifen als Teillasten zusammengesetzt. Die Halbraumberechnung muß nur einmal infolge einer Streifenlast durchgeführt werden. Die weiteren Grundlösungen infolge der verschiedenen Legendre-Polynome erfordern ausschließlich einfach durchzuführende Superpositionsberechnungen. Die Halbraumberechnung für eine Rechtecklast ist zudem noch schneller und numerisch stabiler als Berechnungen für Legendre-Polynome, insbesondere für Polynome höheren Grades. Für die weitere Berechnung der Erschütterungsausbreitung kann dann ebenfalls auf die Grundlösungen infolge Streifenlasten zurückgegriffen werden und die Gesamtlösung aus Superposition gebildet werden.

Zu beachten ist allerdings, daß die Streifenbreite so gewählt wird, daß die Legendre-Polynome ausreichend genau in ihrem Verlauf nachgebildet werden können. Der Autor empfiehlt für eine Berechnung mit Legendre-Polynomen bis zu Grad 10 eine Streifenanzahl (Verhältnis aus Gesamtbreite zu Streifenbreite) von $n_s = b/b_s = 40 - 80$.

Die Abbildung 4.4 zeigt beispielhaft die Aufteilung eines Legendre-Polynoms in Laststreifen. Formal werden die Amplituden der einzelnen Streifen nach der Vorschrift

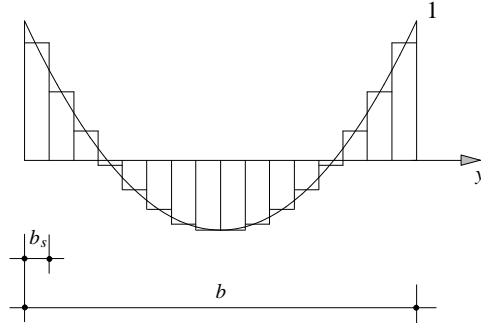


Abbildung 4.4: Aufteilung des Legendre-Polynoms 2. Grades in Laststreifen

$$A_i = \frac{1}{b_s} \int_{y=-b/2+(i-1)b_s}^{y=-b/2+ib_s} P_j(y) dy \quad (4.19)$$

gebildet, wobei i der Index des i -ten Streifens, j der Grad des Legendre-Polynoms und b_s die Streifenbreite ist. Die Amplituden sind rein reell, da alle Lasten als (komplexe) Einheitslasten angesetzt werden.

4.3.3 Fehlerkriterium

Zur Beurteilung der Anpassungsqualität an die geforderte Verschiebung wurde das folgende Fehlerkriterium entwickelt. Der Fehler ist definiert als das Quadrat des Betrages der Differenz der sich ergebenden Biegelinie und der geforderten Biegelinie. Bei komplexen Größen entspricht die Bildung des Betrages der Multiplikation mit der konjugiert komplexen Größe.

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=b/2} |u_{z,ist} - u_{z,soll}|^2 dy &= \int_{y=0}^{y=b/2} |(u_{z,ist}^R + iu_{z,ist}^I) - (u_{z,soll}^R + iu_{z,soll}^I)|^2 dy = \\ \int_{y=0}^{y=b/2} |(u_{z,ist}^R - u_{z,soll}^R) + i(u_{z,ist}^I - u_{z,soll}^I)|^2 dy &= \int_{y=0}^{y=b/2} ((u_{z,ist}^R - u_{z,soll}^R)^2 + (u_{z,ist}^I - u_{z,soll}^I)^2) dy \end{aligned}$$

Der so bestimmte Fehler wird noch durch die halbe Breite des Balkens und den Betrag der geforderten Verschiebung dividiert und auf diese Weise normiert.

$$f = \frac{1}{b/2 |u_{z,soll}|^2} \int_{y=0}^{y=b/2} ((u_{z,ist}^R - u_{z,soll}^R)^2 + (u_{z,ist}^I - u_{z,soll}^I)^2) dy \quad (4.20)$$

4.3.4 Vergleich der Verfahren

Betrachtet wurde die Anpassung für verschiedene k_x -Werte, Anregungsfrequenzen, Fahrgeschwindigkeiten, Streifenbreiten und Anzahl von Legendre-Polynomen. Für die Abbildungen 4.5 bis 4.14 wurden die Parameter der Tabelle 4.1 verwendet.

Scherwellengeschwindigkeit	c_s	200	m/s
Querdehnzahl	ν	0,3	$[-]$
Dichte	ρ	2000	kg/m^3
log. Dämpfungsdekrement	D	0,025	$[-]$
Elastizitätsmodul	E	$208 \cdot 10^6$	N/m^2
Balkenbreite	b	3,60	m
Fahrgeschwindigkeit	v	0	m/s

Tabelle 4.1: Parametersatz 1 für Beispielrechnungen

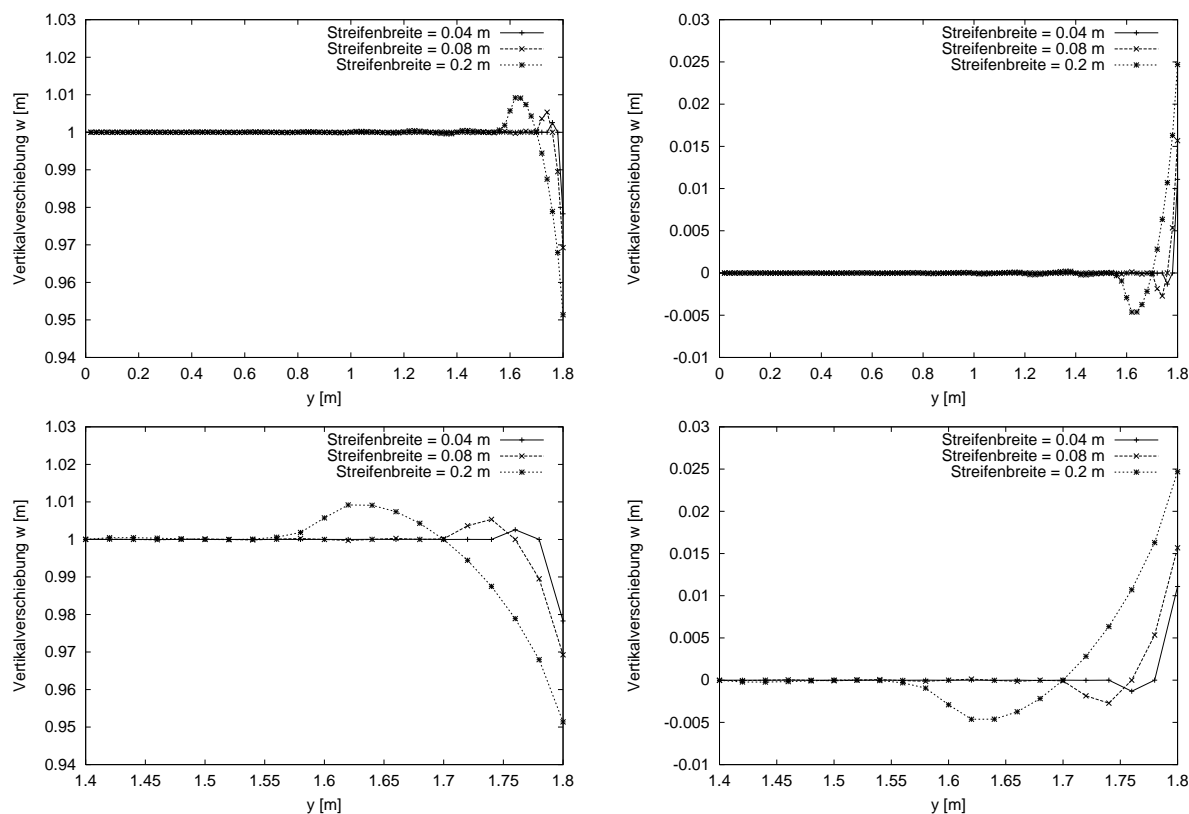


Abbildung 4.5: Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil. Ansicht der halben Balkenbreite (oben) und Detailausschnitt am Rand $y = [1.4, 1.8]$ (unten)

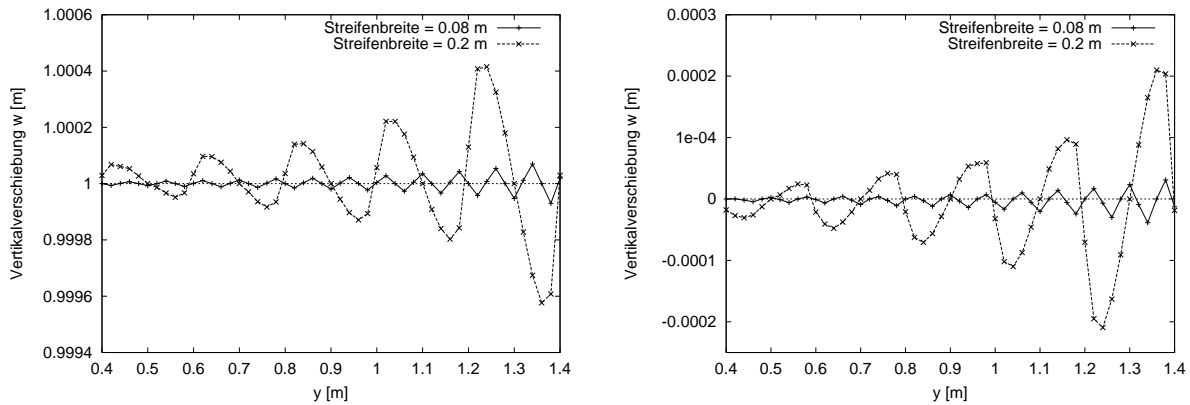


Abbildung 4.6: Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil. Detailausschnitt $y = [0.4, 1.4]$

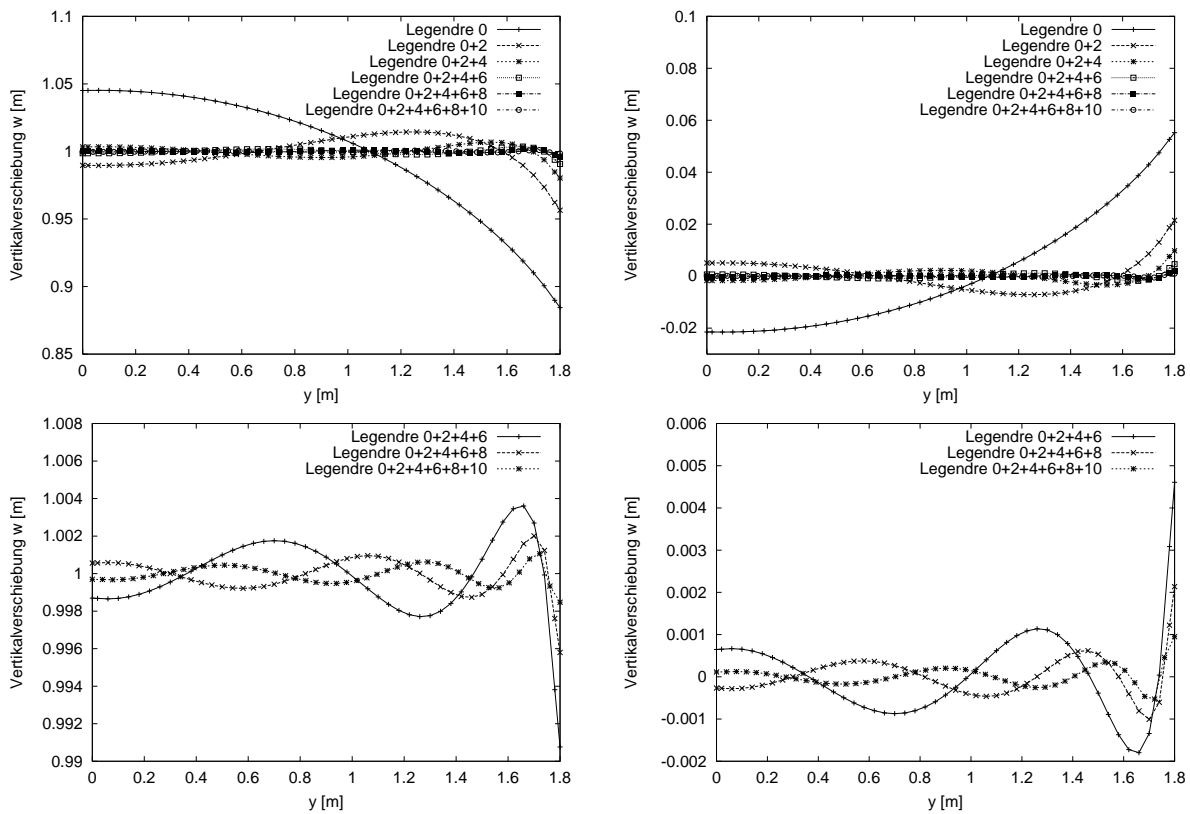


Abbildung 4.7: Legendre-Polynome: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (oben: 1-6, unten: 4-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.

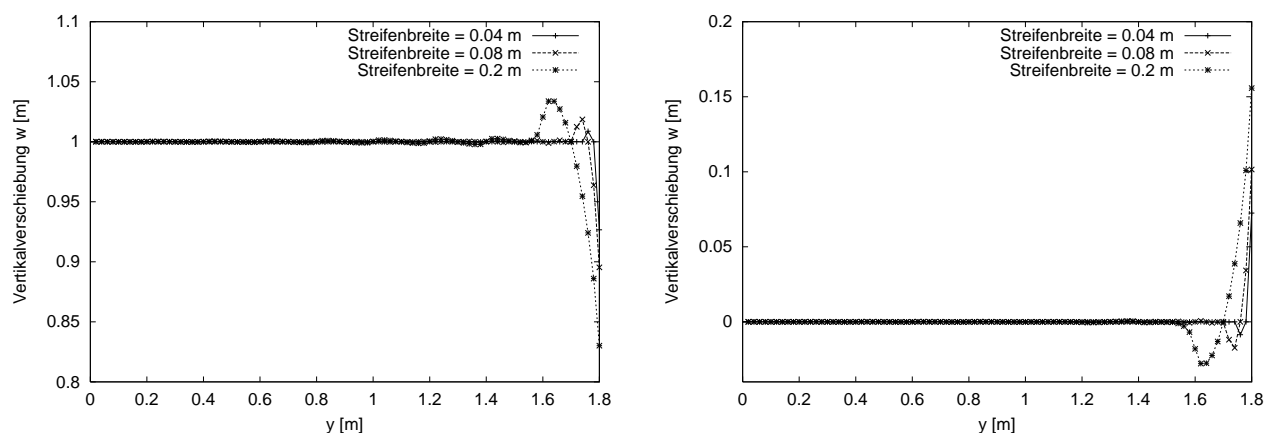


Abbildung 4.8: Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 2 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.

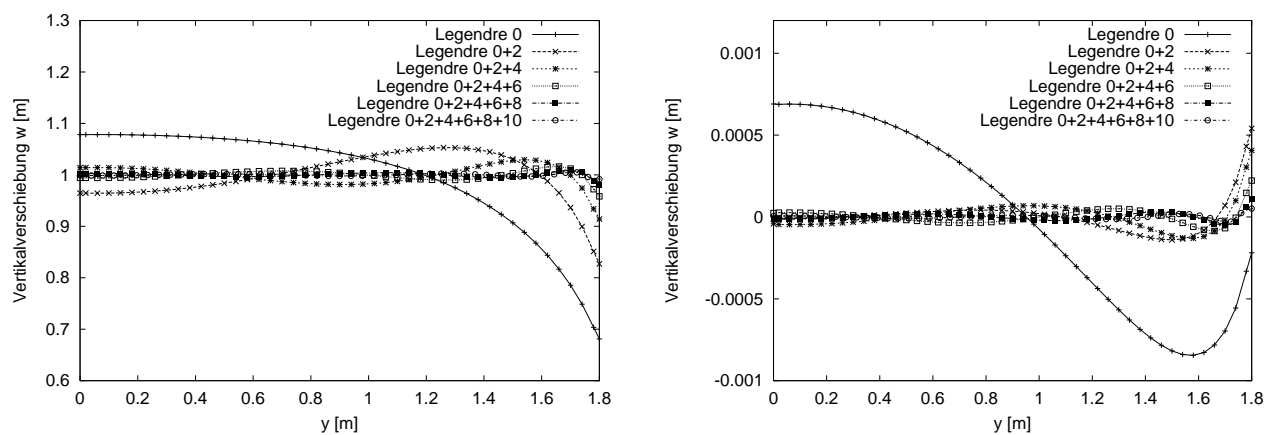


Abbildung 4.9: Legendre-Polynome: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (1-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 2 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.

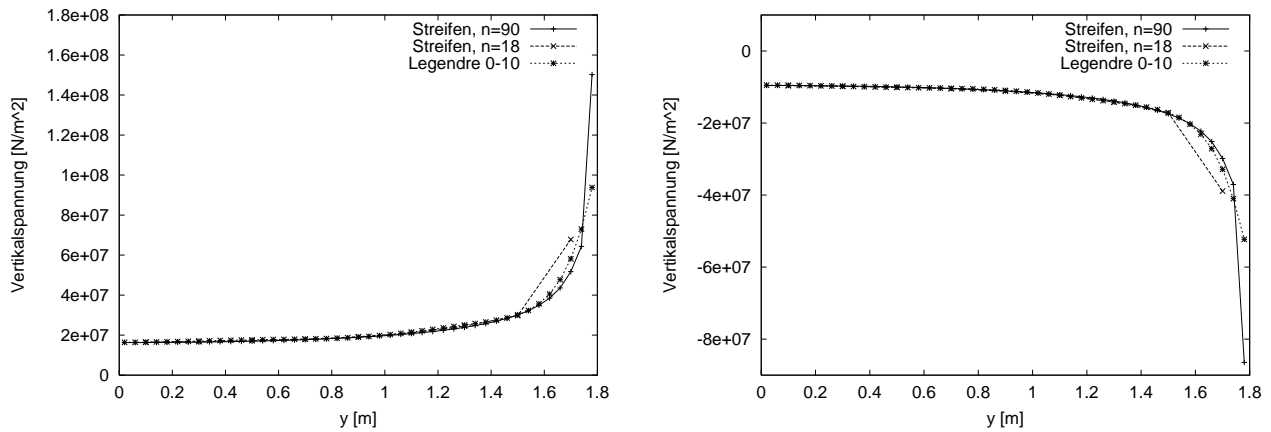


Abbildung 4.10: Sohlspannungsverteilung unter dem Balken bei Streifenbreiten von 0.04 m ($n_s = 90$) und 0.20 m ($n_s = 18$) und bei Legendre-Polynomen (6 Ansatzfunktionen) bei $\Omega = 10\text{ rad/s}$ und $k_x = 0\text{ m}^{-1}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil

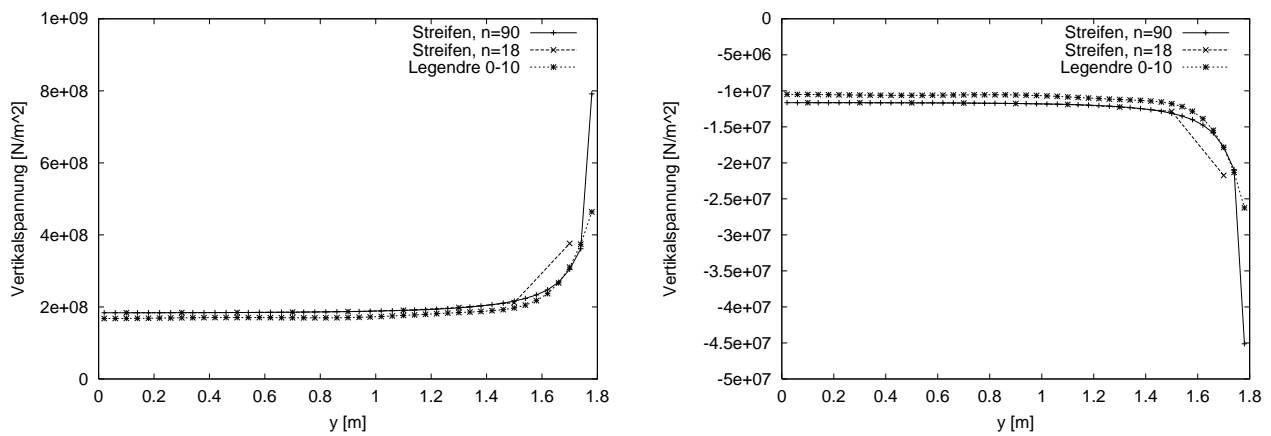


Abbildung 4.11: Sohlspannungsverteilung unter dem Balken bei Streifenbreiten von 0.04 m ($n_s = 90$) und 0.20 m ($n_s = 18$) und bei Legendre-Polynomen (6 Ansatzfunktionen) bei $\Omega = 200\text{ rad/s}$ und $k_x = 2\text{ m}^{-1}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil

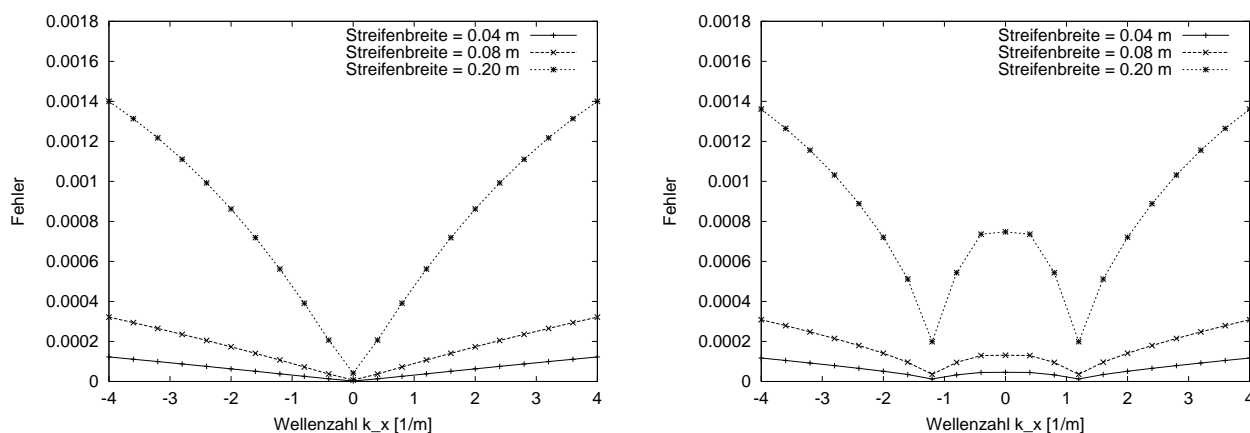


Abbildung 4.12: Streifenverfahren: Vergleich der Fehler für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: $\Omega = 10 \text{ rad/s}$, rechts: $\Omega = 200 \text{ rad/s}$.

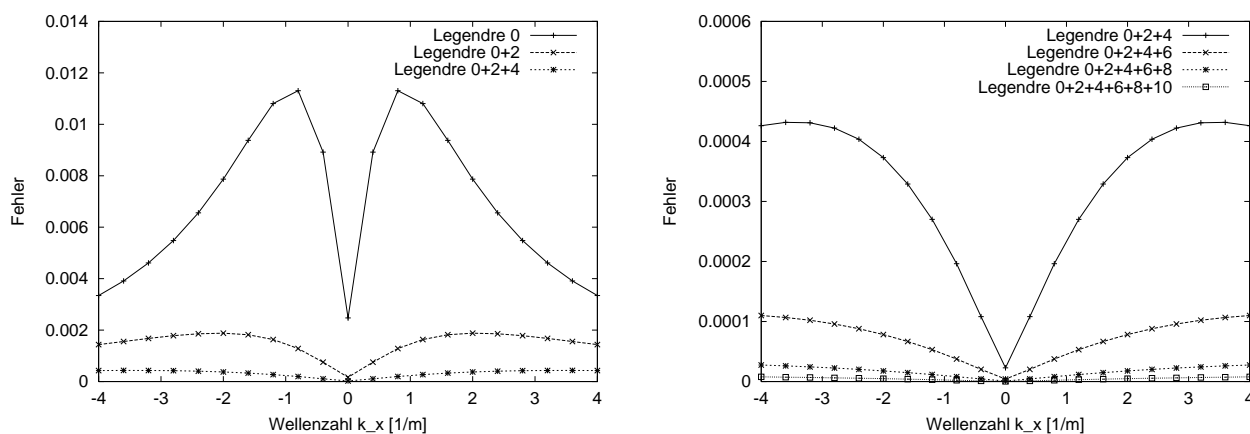


Abbildung 4.13: Legendre-Polynome: Vergleich der Fehler für eine verschiedene Anzahl von Ansatzfunktionen bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: 1 bis 3 Ansatzfunktionen, rechts: 3 bis 6 Ansatzfunktionen.

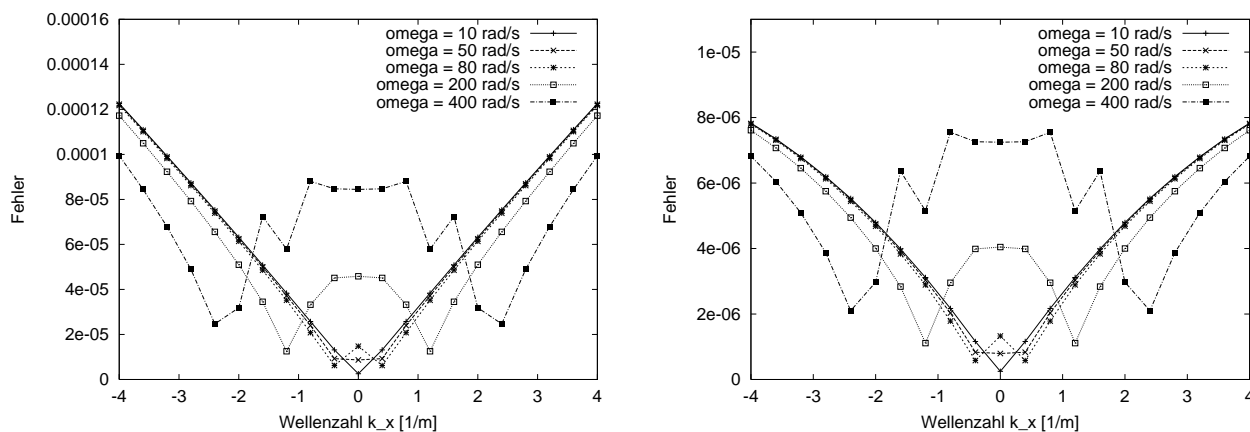


Abbildung 4.14: Vergleich der Fehler für verschiedene Frequenzen für Streifenverfahren (links) und Legendre-Polynome (rechts) in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$.

Die Abbildungen zeigen, daß sowohl das Streifenverfahren als auch die Anwendung der Legendre-Polynome gut geeignet ist, die Spannungsverteilung derart anzunähern, daß sich eine konstante Verformung der Halbraumboberfläche ergibt. Am Rand ist die Anpassung bei beiden Verfahren am schlechtesten. Die Fehler liegen jedoch in beiden Fällen in sehr geringer Größenordnung (kleiner 1 %).

Die Sohlspannungsverteilungen stimmen gut überein, siehe Abbildungen 4.10 und 4.11. Die charakteristische starke Zunahme der Spannungen am Rand ist auch bei dynamischer Anregung gegeben. Die hier numerisch ermittelten Werte sind nur eine Abschätzung.

Für das Streifenverfahren ist anzumerken, daß sich das für Kollokationsverfahren typische Bild eines oszillierenden Verschiebungsverlaufes ergibt, siehe Abbildung 4.6, der nur an denjenigen Punkten, an denen die Forderung aufgestellt wird, auch die Forderung erfüllt. In Hinblick auf die Fehlerentwicklung (Abbildung 4.12) ergibt sich die zu erwartende Tendenz, daß der Fehler mit zunehmender Streifenzahl abnimmt.

Bei den Legendre-Polynomen zeigen die Abbildungen 4.7, 4.9 und 4.13, daß eine konstante Lastverteilung unter dem Balken (nur Ansatz von Legendre-Polynom nullten Grades) nicht zu einer konstanten Verschiebung führt. Die Abweichung von der geforderten Vertikalverschiebung ist relativ groß und wird, wie der Vergleich zwischen Abbildung 4.7 und Abbildung 4.9 bei unterschiedlichen Abszissen zeigt, mit zunehmender Frequenz noch größer. Mit steigender Anzahl von Ansatzfunktionen wird die Anpassung an die im Beispiel gewählte geforderte Vertikalverschiebung w_{soll} immer besser. Die superponierte Verformung wird allerdings naturgemäß mit zunehmender Anzahl an Ansatzfunktionen welliger, da die Ansatzfunktionen mit höherem Grad einen welligeren Verlauf aufweisen. Die absolute und relative Fehlerabnahme bei Verwendung einer höheren Anzahl von Legendre-Polynomen nimmt mit der Anzahl der Ansatzfunktionen ab.

Über die Fehlerentwicklung in Abhängigkeit der Frequenz kann für beide Verfahren keine allgemeingültige Aussage getroffen werden, da sich Fehlerverhältnisse je nach Wellenzahl k_x verändern, wie die Diagramme in Abbildung 4.14 erkennen lassen.

Für einen weiteren Vergleich werden nun andere Bodenparameter und eine bewegte oszillierende Last angesetzt. Die Fehlerentwicklung, siehe Abbildung 4.15 wird durch die Fahrgeschwindigkeit unsymmetrisch bezüglich der Wellenzahl. Auch bei bewegter Last ergibt sich eine sehr gute Anpassung an die geforderte Verformung; dies zeigt Abbildung 4.16.

Diese Beispielrechnungen wurden mit folgenden Parametern durchgeführt:

Scherwellengeschwindigkeit	c_s	138,68	m/s
Querdehnzahl	ν	0,3	$[-]$
Dichte	ρ	2000	kg/m^3
log. Dämpfungsdekrement	D	0,025	$[-]$
Elastizitätsmodul	E	$100 \cdot 10^6$	N/m^2
Balkenbreite	b	3,60	m
Fahrgeschwindigkeit	v	50	m/s

Tabelle 4.2: Parametersatz 2 für Beispielrechnungen

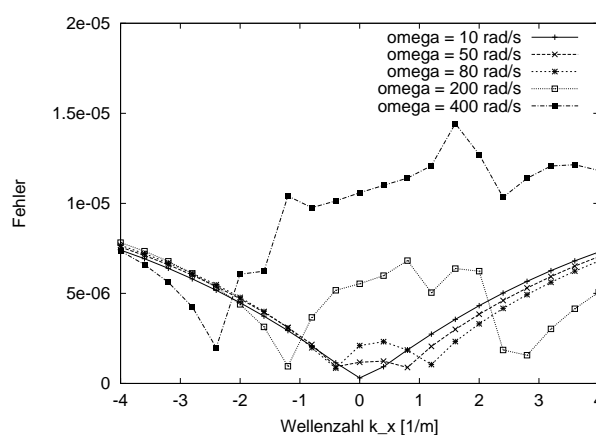


Abbildung 4.15: Vergleich der Fehler für verschiedene Frequenzen für Legendre-Polynome in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$.

4.3.5 Zusammenfassung

Besonders im Hinblick auf die Halbraumberechnung, siehe folgender Abschnitt, erfordern die Legendre-Polynome weniger Aufwand. Die Anzahl der verschiedenen Halbraumberechnungen ist gleich der Anzahl der Ansatzfunktionen. Diese liegt bei den Legendre-Polynomen deutlich niedriger als beim Streifenverfahren. Der Verlauf der Halbraumverformung ist bei Legendre-Polynomen glatter als bei Streifenlasten. Die Lastverteilung ist in der Realität kontinuierlich, dies kann nicht durch das Streifenverfahren, aber durch die Legendre-Polynome abgebildet werden.

Aus den genannten Gründen wird im weiteren das Verfahren mit Legendre-Polynomen als Ansatzfunktionen für die Spannungsverteilung in Querrichtung angewendet.

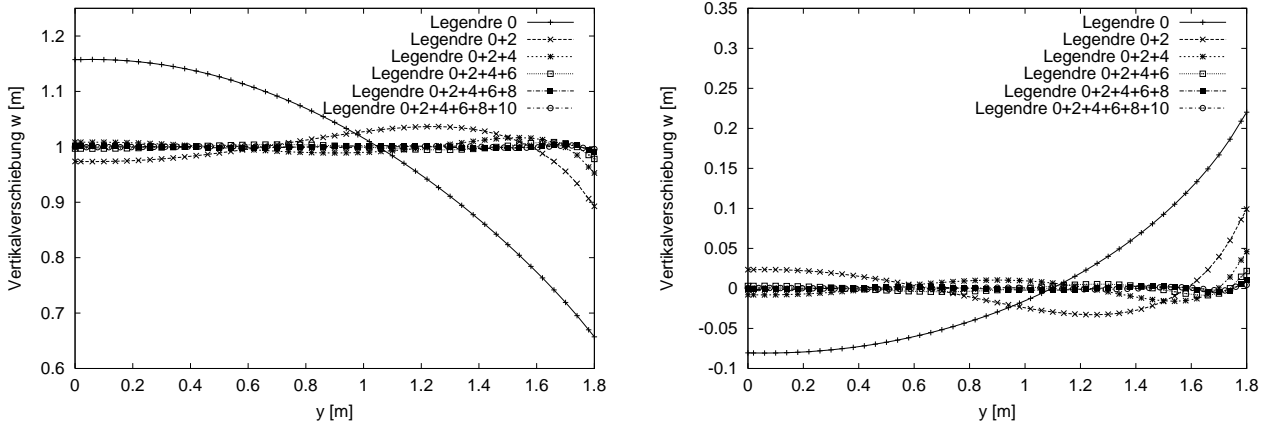


Abbildung 4.16: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (1-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 80 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.

4.4 Berechnung der Erschütterungsausbreitung im Halbraum

Aus der Oberbauberechnung lassen sich mit Gleichung 4.6 die Spannungen berechnen, die auf den Untergrund wirken. Werden diese Spannungen in einer dynamischen Berechnung aufgebracht, so kann die Erschütterungsausbreitung im Halbraum berechnet werden. Mit dem hier verwendeten Modell erfolgt die Auswertung zweckmäßig im mitbewegten Koordinatensystem, siehe Gl. 4.10. Eine Umrechnung auf den Zeitverlauf der Erschütterung an festen Punkten ist einfach.

Die Halbraumsteifigkeiten sind nach 4.4 definiert als

$$\hat{k}_H(k_x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(k_x, y) dy}{\hat{u}_{z,soll}(k_x)} \quad . \quad (4.21)$$

Für die Legendre-Polynome gilt allgemein für den Lastterm

$$\hat{p}(k_x, y) = \sum_{i=0}^{i=n-1} C_{2i}(k_x) P_{2i}(\bar{y}) \quad . \quad (4.22)$$

Aus diesen beiden Beziehungen können die tatsächlich auftretenden Spannungsamplituden $\bar{C}_i(k_x)$ infolge der tatsächlich auftretenden Vertikalverschiebung des untersten Balkens $\hat{u}_{z,tat}(k_x)$ bestimmt werden. In der praktischen Berechnung folgt $\hat{u}_{z,tat}(k_x)$ aus der dynamischen Oberbauberechnung.

$$\hat{k}_H(k_x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} C_{2i}(k_x) P_{2i}(\bar{y}) dy}{\hat{u}_{z,soll}(k_x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \bar{C}_{2i}(k_x) P_{2i}(\bar{y}) dy}{\hat{u}_{z,tat}(k_x)}$$

$$\bar{C}_i(k_x) = \frac{\hat{u}_{z,tat}(k_x)}{\hat{u}_{z,soll}(k_x)} C_i(k_x) \quad (4.23)$$

Die Spannungsverteilung, die auf den Halbraum wirkt, wird durch $\hat{p}(k_x, y) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \bar{C}_{2i}(k_x) P_{2i}(\bar{y})$ beschrieben.

Die Halbraumberechnung erfolgt für jedes Legendre-Polynom einzeln, und die Gesamtantwort wird durch Superposition bestimmt, da eine Berechnung der Halbraumantwort infolge der Gesamtlast numerische Ungenauigkeiten birgt. Die Abtastung der transformierten Verschiebung muß für die Waveletzerlegung aufgrund der Komplexität der Lastfunktion äußerst fein erfolgen. Dies ist trotz des adaptiven Algorithmus von Lieb [Lie97] bei komplizierteren Lastfunktionen schwierig.

In der praktischen Umsetzung werden die Legendre-Polynome in einzelne Laststreifen $\Pi_{b_s}(y)$ aufgeteilt, die in Längsrichtung je nach Legendre-Polynom eine unterschiedliche Spannungsverteilung $\bar{C}_i(k_x)$ aufweisen. Die Ergebnisse werden nun jeweils zur Verschiebungsantwort des Halbraumes infolge der einzelnen Legendre-Polynome zusammengesetzt, und aus diesen Ergebnissen wird die Gesamtantwort superponiert.

Da nur wenige Legendre-Polynome (bis zu sechs) als Ansatzfunktionen verwendet werden müssen, ist die Anzahl der Halbraumberechnungen ebenfalls gering. Würde das oben beschriebene Streifenverfahren angewendet, so wiese jeder Streifen eine verschiedene Verteilung der Last in Längsrichtung auf. Daher wäre es notwendig, für jeden Streifen eine Halbraumberechnung durchzuführen, was angesichts einer ungefähren Mindestanzahl der Streifen von ca. 40 zu aufwendig erscheint.

Die Abbildungen 4.17 und 4.18 zeigen die sehr gute Übereinstimmung der Vertikalverschiebung des Balkens auf Halbraumfedern und der Vertikalverschiebung der Halbraumoberfläche in der Balkenachse. Die Halbraumverschiebung wurde infolge der Last berechnet, die sich für die Summe der einzelnen Legendre-Polynome aus der dynamischen Oberbauberechnung ergibt. Die Verschiebungen sind jeweils im mit der Last mitbewegten Koordinatensystem berechnet. Die geringen Abweichungen lassen sich durch die diskrete Abtastung bei der Berücksichtigung des Wellenzahlrasters bei der Berechnung der Steifigkeiten und Lasten und insbesondere durch Rechenungenauigkeiten bei der Halbraumberechnung erklären.

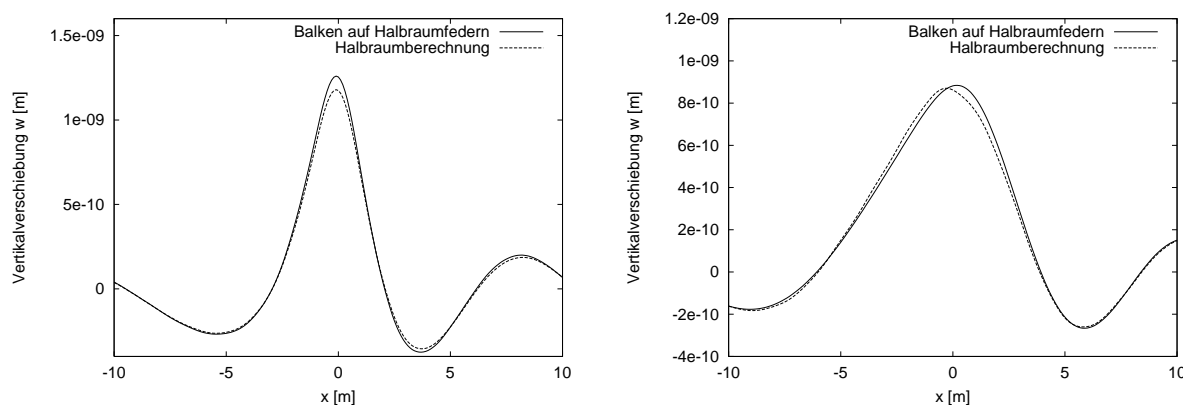


Abbildung 4.17: Vergleich der Vertikalverschiebungen eines Balkens auf Halbraumfedern und der Halbraumberechnung infolge zugehöriger Spannungsverteilung, Links: Realteil, Rechts: Imaginärteil, Beispiel mit Einzellast auf Balken auf Halbraum ($v = 40 \text{ m/s}$, $\Omega = 100 \text{ rad/s}$).

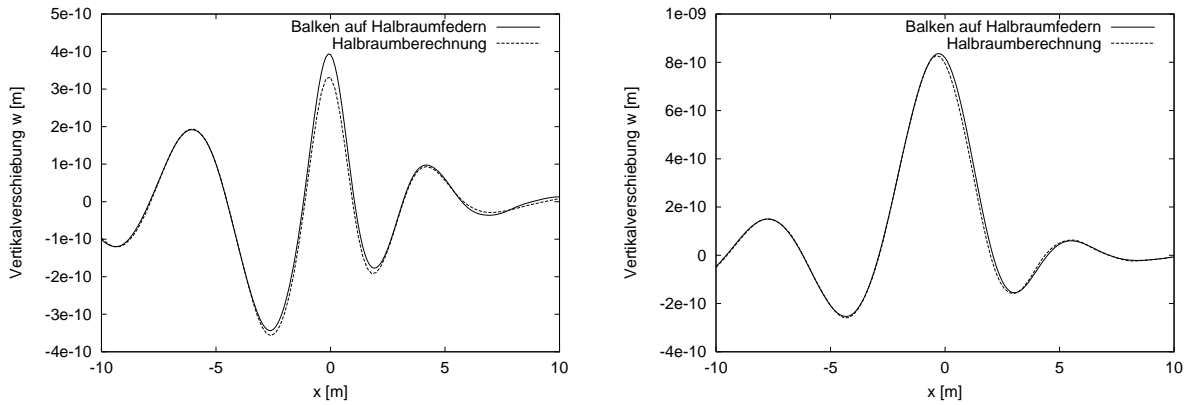


Abbildung 4.18: Vergleich der Vertikalverschiebungen eines Balkens auf Halbraumfedern und der Halbraumberechnung infolge zugehöriger Spannungsverteilung, Links: Realteil, Rechts: Imaginärteil, Beispiel mit Einzellast auf Balken auf Halbraum ($v = 70 \text{ m/s}$, $\Omega = 250 \text{ rad/s}$).

4.5 Berücksichtigung der Interaktion mit dem Fahrzeug

In diesem Abschnitt sollen die wesentlichen Änderungen für die Interaktionsberechnung zwischen Fahrzeug und Oberbau dargestellt werden, wenn der Oberbau an den Halbraum angekoppelt ist. In diesem Falle ist der Halbraum im Oberbaumodell durch Halbraumsteifigkeiten repräsentiert, die für die Frequenz $\omega = -\Omega - vk_x$ berechnet wurden, siehe (4.2). Eine Herleitung wie unter (4.7) ist hier nicht möglich, da sich die ergebende Integralgleichung aufgrund nicht auftretender Dirac-Terme nicht vereinfachen läßt. Die Belastung auf den Halbraum muß also im Nachlauf der Interaktionsberechnung ermittelt werden.

Die Überlegungen werden wieder für einen Kontaktpunkt und einen einfachen auf dem Halbraum gebetteten Balken aufgestellt. Die weiteren Überlegungen für Systeme mit mehreren Balken oder für Fahrzeuge mit mehreren Kontaktpunkten gelten analog.

Die Belastung (3.32) und die dynamische Steifigkeit des Radsatzes (3.22) bleiben unverändert erhalten. Die Herleitung ist analog der Gleichungen 3.32 bis 3.41.

Durch Einbau der Halbraumsteifigkeiten $\hat{k}_H(k_x, \omega)$ ändert sich der Differentialoperator des gebetteten Balkens (vgl. (3.27) und (4.2)).

$$D_S(k_x, \omega) = EISk_x^4 - \mu\omega^2 + k_H^R(k_x, \omega) + i k_H^I(k_x, \omega) \quad (4.24)$$

Die Grundleistung

$$w_S(k_x, \omega) = \frac{p(k_x, \omega)}{D_S(k_x, \omega)} = -\frac{k_R(\omega + vk_x)w_R(\omega + vk_x)}{D_S(k_x, \omega)} \quad (4.25)$$

und die Kontaktbedingung ändern sich formal nicht:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) e^{ik_x vt} e^{i\omega t} dk_x d\omega = w_w(t) - \Delta w(t) \quad (4.26)$$

Die Multiplikation erfolgt jetzt allerdings auf beiden Seiten mit $e^{i\Omega t}$ anstelle von $e^{-i\Omega t}$, damit die Kompatibilität mit den berechneten Halbraumsteifigkeiten zu gewährleistet wird. Die folgende, einer Fouriertransformation nach $-\Omega$ entsprechende Integration führt somit auch auf der rechten Seite zu veränderten Argumenten.

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) e^{ik_x vt} e^{i\omega t} e^{i\Omega t} dk_x d\omega dt = w_R(-\Omega) - \Delta w(-\Omega) \quad (4.27)$$

Folglich gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} w_S(k_x, \omega) \delta(-\Omega - \omega - vk_x) dk_x d\omega = w_R(-\Omega) - \Delta w(-\Omega) \quad . \quad (4.28)$$

Auswerten der Dirac-Distribution und anschließendes Ausklammern der von k_x unabhängigen Terme führt auf

$$-\frac{k_R(-\Omega)}{2\pi} w_R(-\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega = -\Omega - vk_x)} = w_R(-\Omega) - \Delta w(-\Omega) \quad . \quad (4.29)$$

Diese Gleichung kann wieder nach der unbekannt transformierten Verschiebung des Radsatzes aufgelöst werden

$$w_R(-\Omega) = \frac{2\pi \Delta w(-\Omega)}{2\pi + k_R(-\Omega) \alpha(-\Omega, v)} \quad , \quad (4.30)$$

wobei gilt

$$\alpha(-\Omega, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{D_S(k_x, \omega = -\Omega - vk_x)} \quad . \quad (4.31)$$

Dies bedeutet, daß der Operator für $(k_x, \omega = -\Omega - vk_x)$ ausgewertet werden muß, für dasjenige Argument, für das auch die Halbraumsteifigkeiten berechnet wurden. Die Last auf den Halbraum ergibt sich nun (dem Frequenzanteil $-\Omega$ zugeordnet) zu

$$\hat{p}(k_x, -\Omega - vk_x) = w_S(k_x, -\Omega - vk_x) k_H(k_x, -\Omega - vk_x) \quad . \quad (4.32)$$

Soll eine Berechnung der Verschiebungen des Oberbaues am Fixpunkt durchgeführt werden, so ist es erforderlich, daß die zweifache Fourierrücktransformation mit Halbraumsteifigkeiten ausgeführt wird, die für eine Fahrgeschwindigkeit $v = 0$ ermittelt wurden, da sich der Beobachtungspunkt nicht bewegt. Die Berechnung der Verschiebungen des Radsatzes ist allerdings mit den Halbraumsteifigkeiten im bewegten Koordinatensystem durchzuführen.

Kapitel 5

Wechselwirkung zwischen Normalspannungen und Schubspannungen

Im vorangegangenen Kapitel wurden lediglich Normalspannungen zwischen Tragplatte und Halbraum angesetzt. In den folgenden Betrachtungen soll in einer Abschätzung untersucht werden, inwieweit eine Beschränkung auf Normalspannungen als Näherung zulässig ist.

Zentral ist in diesem Zusammenhang die Überlegung, daß zu erwarten ist, daß sich der Untergrund unter der Tragplatte fast ausschließlich vertikal verformen wird. Die Größenordnung der horizontalen Verformungen wird um ein Vielfaches niedriger liegen als die der vertikalen Verformungen. Dies ist dadurch begründet, daß die aufliegende Tragplatte horizontale Verformungen behindert.

Für eine rechnerische Abschätzung ist daher als Vereinfachung anzunehmen, daß im Bereich der Tragplatte keine Verformungen in longitudinaler und in lateraler Richtung an der Halbraumoberfläche auftreten.

5.1 Theoretische Betrachtung

In einer vereinfachten theoretischen Vorüberlegung wird der räumliche Fall betrachtet, daß nur Vertikalverschiebungen, aber keine Horizontalverschiebungen an der Halbraumoberfläche auftreten. Dies bedeutet formal, daß das Gleichungssystem zur Bestimmung der drei unbekannt Koeffizienten der Ansatzfunktionen über die drei Bedingungen $\hat{u}_x = 0$, $\hat{u}_y = 0$ und $\hat{\sigma}_{zz} = -\hat{p}_z$ bzw. $\hat{\sigma}_{zz}^* = -\hat{p}_z/\mu$ aufgestellt wird. Diese drei Bedingungen können durch Rückgriff auf die Gleichungen für die transformierten Verschiebungen (2.14) und die transformierten Spannungen (2.25) des Halbraumes zu einer Matrixgleichung zusammengefaßt werden. Die Gleichung gilt für die Oberfläche des Halbraumes mit $z = 0$, so daß die Exponentialterme gleich Eins werden.

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{\sigma}_{zz}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{p}_z/\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & \lambda_2 \\ ik_y & -\lambda_2 & 0 \\ 2k_r^2 - k_s^2 & 2ik_y\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Lösen des Gleichungssystems und Einsetzen in die transformierte Vertikalverschiebung liefert

$$\begin{aligned} \hat{u}_z = -\lambda_1 A_2 + -ik_y B_{x2} + ik_x B_{y2} = -\lambda_1 \frac{\hat{p}_z}{\mu k_s^2} + k_y^2 \frac{\hat{p}_z}{\lambda_2 \mu k_s^2} + k_x^2 \frac{\hat{p}_z}{\lambda_2 \mu k_s^2} = \\ \frac{\left(-\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_p^2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_s^2} + k_x^2 + k_y^2 \right) \hat{p}_z}{\mu k_s^2 \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_s^2}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für den ebenen Fall ohne Behinderung der Horizontalverschiebungen kann Gleichung (2.28) verwendet werden:

$$\hat{u}_z = \frac{\hat{p}_z \lambda_1}{\mu \left(-(2k_r^2 - k_s^2)^2 + 4k_r^2 \lambda_1 \lambda_2 \right)} k_s^2 \quad (5.3)$$

Die Betrachtung der Nenner der zwei Ausdrücke zeigt, daß sich die Unendlichkeitsstelle verschiebt.

Ohne Behinderung der Horizontalverschiebung liegt die Nullstelle des Nenners bei $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_R$, also der Rayleighwellenzahl. Bei Behinderung der Horizontalverschiebung ergibt sich als Nullstelle $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_s$, die Scherwellenzahl. Dies bedeutet, daß durch die Forderung, keine Horizontalverschiebungen zuzulassen, zwar die Rayleighwelle blockiert wird, aber dafür die Scherwelle verstärkt wird. Eine Reduzierung der Vertikalverschiebungen läßt sich durch eine Behinderung der Horizontalverschiebungen (im gesamten Bereich oder auch nur bereichsweise) nicht erwarten, da die Unendlichkeitsstelle die Antwort in beiden Fällen dominiert.

5.2 Numerische Simulation

In der numerischen Simulation soll die theoretische Abschätzung überprüft werden. Weiterhin wird untersucht, inwieweit ein wesentlicher Unterschied für die Erschütterungsausbreitung und die Verschiebung im Oberbau besteht, wenn im einen Fall ausschließlich Normalspannungen und daraus resultierende vertikale Verschiebungen betrachtet und im anderen Fall auch horizontale Verschiebungen und Schubspannungen berücksichtigt werden. Für den Fall der Berücksichtigung von Schubspannungen ist für die Horizontalverschiebungen von einer Verschiebungsbehinderung im Bereich der Tragplatte auszugehen.

Als exemplarischer Ansatz wird über die Breite der Tragplatte für die Normalspannungen (z -Richtung) und die Schubspannungen in Längsrichtung (x -Richtung) eine konstante Lastverteilung angenommen. Die Schubspannungen in Querrichtung (y -Richtung) werden mit einem verschränkten Dreieck angenähert, siehe Abbildung 5.1.

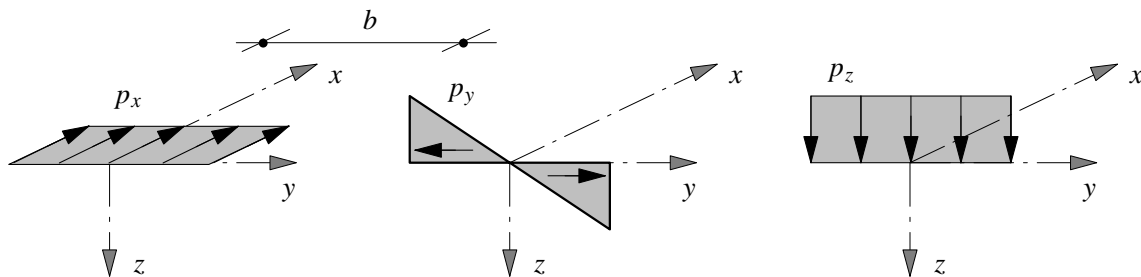


Abbildung 5.1: Verschiedene Ansatzfunktionen für die Lastverteilung in Querrichtung je nach Lastrichtung

Im Fall der ausschließlichen Berücksichtigung von Normalspannungen werden die Halbraumsteifigkeiten mit dem Mittelwert der Vertikalverschiebungen in Querrichtung $\hat{u}_{z,D}(k_x, y) = 1/b \int_{-b/2}^{b/2} \hat{u}_z(k_x, y) dy$ anstelle von $\hat{u}_z(k_x, y = 0)$ gebildet, siehe Gl. (4.4). Anschließend führt die Oberbauberechnung auf die auf den Halbraum wirkenden Normalspannungen, die wiederum zur Berechnung der Erschütterungsausbreitung verwendet werden.

Bei der gleichzeitigen Berücksichtigung von Normalspannungen und Schubspannungen ist für jede Wellenzahl in einer zusätzlichen Berechnung das gegenseitige Verhältnis der drei Lastansatzfunktionen zu bestimmen. Zur Bestimmung der Verhältniswerte wird gefordert, daß die Horizontalverschiebungen im Bereich der aufliegenden Tragplatte näherungsweise gleich Null ($\hat{u}_x(k_x, y) = 0$, $\hat{u}_y(k_x, y) = 0$) werden. Die folgenden Schritte zeigen das Verfahren zur Bestimmung des Verhältnisses der Spannungen untereinander. Die Bedingungen werden im Wellenzahlraum k_x aufgestellt.

Der untere Index x, y, z gibt die Richtung der Verschiebung an, der obere Index die Wirkungsrichtung der Last p_x, p_y, p_z , die diese Verschiebung hervorgerufen hat.

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^{p_x}(k_x, y) C_x(k_x) + u_x^{p_y}(k_x, y) C_y(k_x) + u_x^{p_z}(k_x, y) C_z(k_x) &= 0 + 0i \quad \forall y \in [-b/2, b/2] \\ \hat{u}_y^{p_x}(k_x, y) C_x(k_x) + u_y^{p_y}(k_x, y) C_y(k_x) + u_y^{p_z}(k_x, y) C_z(k_x) &= 0 + 0i \quad \forall y \in [-b/2, b/2] \end{aligned}$$

Da nur zwei Bedingungen vorliegen, kann in diesen Schritten nur das Verhältnis zwischen den Koeffizienten ermittelt werden. Daher wird der zur in z -Richtung wirkenden Last gehörende Koeffizient $C_z(k_x) = 1 + 0i$ gesetzt.

$$C_x : C_y : C_z \rightarrow \tilde{C}_x : \tilde{C}_y : 1 + 0i$$

Die obigen Gleichungen können somit in ein Gleichungssystem zur Bestimmung der modifizierten Koeffizienten $\tilde{C}_x(k_x)$ und $\tilde{C}_y(k_x)$ überführt werden. Für das Aufstellen des Gleichungssystems wird bei Verwendung jeweils einer Ansatzfunktion der Spannungsverteilung für jede Verschiebungsrichtung eine integrale Gewichtung mit vorgenommen. Für die Verschiebung in Längsrichtung wird mit dem modifizierten Legendre-Polynom nullten Grades $P_0(\bar{y})$ und für die Querrichtung eine Wichtung mit dem modifizierten Legendre-Polynom ersten Grades $P_1(\bar{y})$ vorgenommen.

$$\begin{bmatrix} \int_{-b/2}^{b/2} P_0(\bar{y}) \hat{u}_x^{px}(k_x, y) dy & \int_{-b/2}^{b/2} P_0(\bar{y}) \hat{u}_x^{py}(k_x, y) dy \\ \int_{-b/2}^{b/2} P_1(\bar{y}) \hat{u}_y^{px}(k_x, y) dy & \int_{-b/2}^{b/2} P_1(\bar{y}) \hat{u}_y^{py}(k_x, y) dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_x(k_x) \\ \tilde{C}_y(k_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int_{-b/2}^{b/2} P_0(\bar{y}) \hat{u}_x^{pz}(k_x, y) dy \\ - \int_{-b/2}^{b/2} P_1(\bar{y}) \hat{u}_y^{pz}(k_x, y) dy \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Die Lasten in Quer- und Längsrichtung führen naturgemäß auch zu Verschiebungen in vertikaler Richtung, daher müssen diese bei der Ermittlung der Halbraumsteifigkeiten mit einbezogen werden. Als maßgebende Verschiebung wird der Durchschnittswert der vertikalen Verschiebung über die Breite angesetzt.

$$\hat{k}_H(k_x) = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} p_z(k_x, y) dy}{\frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\hat{u}_z^{px}(k_x, y) \tilde{C}_x(k_x) + \hat{u}_z^{py}(k_x, y) \tilde{C}_y(k_x) + \hat{u}_z^{pz}(k_x, y) (1 + 0i) \right) dy} \quad (5.5)$$

Aus der Oberbauberechnung unter Berücksichtigung der Halbraumsteifigkeiten ergeben sich die Vertikalverschiebungen und daraus folgend die Vertikalspannungen. Dies bedeutet, daß die Koeffizienten $C_z(k_x)$ aus der Oberbauberechnung festliegen. Unter Verwendung des durch (5.4) bestimmten Verhältnisses der Lastkoeffizienten $\tilde{C}_x(k_x)$ und $\tilde{C}_y(k_x)$ sind alle Lasteinwirkungen bestimmt, und das gesamte Verschiebungsfeld kann infolge der in alle drei Raumrichtungen wirkenden Lasten bestimmt werden. Als Oberbau kommt hier der Balken auf Halbraum zum Einsatz, der durch eine bewegte oszillierende Einzellast belastet wird.

Für die Beispielrechnung wurden die Parameter der Tabelle 5.1 verwendet.

Elastizitätsmodul Halbraum	E	$200 \cdot 10^6$	N/m^2
Querdehnzahl Halbraum	ν	0.3	[-]
Dichte Halbraum	ρ	2000	kg/m^3
log. Dämpfungsdekrement Halbraum	D	0,04	[-]
Biegesteifigkeit Balken	EI	$2.025 \cdot 10^8$	Nm^2
Massebelegung Balken	μ	2160	kg/m
Balkenbreite	b	3.00	m
Fahrgeschwindigkeit	v	50	m/s

Tabelle 5.1: Parameter für Beispielrechnungen

Die Amplituden der Vertikalverschiebung (mit und ohne Behinderung der Querverschiebung) sind für verschiedene Frequenzen für zwei verschiedene Entfernungen von der Balkenachse in Abbildung 5.2 dargestellt. Der Unterschied zwischen den zwei Kurven ist im gesamten untersuchten Frequenzbereich gering. Dies ändert sich bei einem Vergleich der Gesamtamplituden $u_A = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ nur unwesentlich.

Die Abbildung 5.3 zeigt, daß sich die Amplituden der Vertikalverschiebung des Oberbaues ebenfalls bei einer Berücksichtigung der Horizontalverschiebung nur geringfügig ändern.

Unter Berücksichtigung der gezeigten Ergebnisse erscheint es nach Auffassung des Autors als gerechtfertigt, die Berechnungen auf vertikale Verschiebungen und Normalspannungen zu beschränken. Nähere Untersuchungen erscheinen trotz der obengezeigten ersten Untersuchung erforderlich, um hier wirklich allgemeingültige Erkenntnisse abzuleiten.

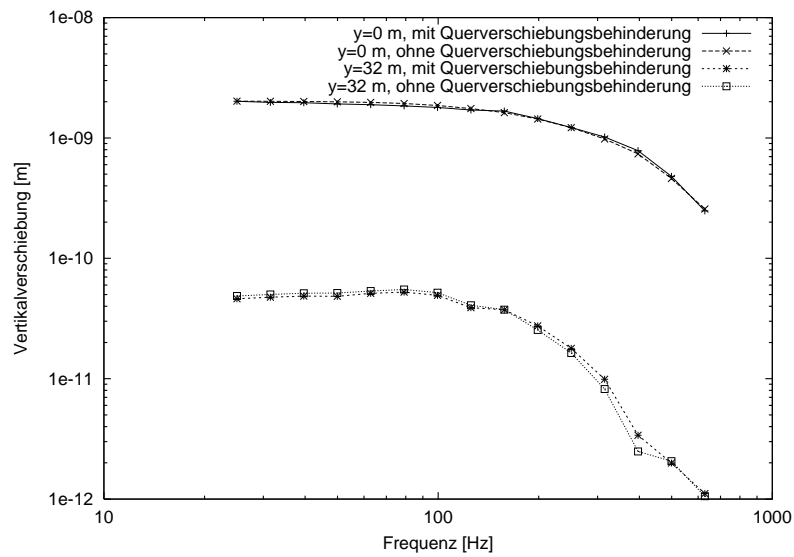


Abbildung 5.2: Vergleich der Maximalamplituden der Vertikalverschiebung der Halbraumoberfläche mit und ohne Berücksichtigung der Querverschiebungsbehinderung in $y = 0$ m und $y = 32$ m im mitbewegten Koordinatensystem.

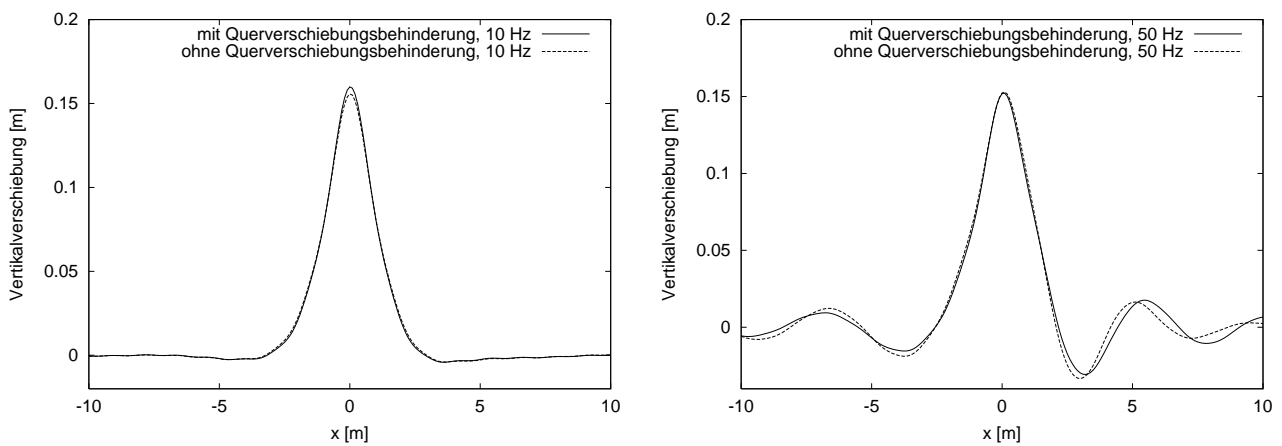


Abbildung 5.3: Vergleich der Realteile der Vertikalverschiebungen der Tragplatte mit und ohne Berücksichtigung der Querverschiebungsbehinderung für 10 Hz (links) und 50 Hz (rechts).

Kapitel 6

Ankoppelung eines Plattenmodelles an den Halbraum

In diesem Kapitel wird die Tragplatte der Festen Fahrbahn durch eine Platte modelliert. Auf diese Weise kann der Effekt der Biegung in Querrichtung erfaßt werden. Durch diese Betrachtungen ändert sich die Vorgehensweise gegenüber der im vorangegangenen Kapitel geschilderten dahingehend, daß sowohl die Verschiebung als auch die Spannungsverteilung in Querrichtung unbekannt sind und bestimmt werden müssen. Zur Erfüllung der Kompatibilität muß der Verschiebungsverlauf der Platte in Querrichtung gleich dem Verschiebungsverlauf des Halbraumes infolge der Interaktionsspannungen sein. Diese Kompatibilitätsbedingung läßt sich erneut im Wellenzahlraum der Längsrichtung und im Frequenzraum aufstellen.

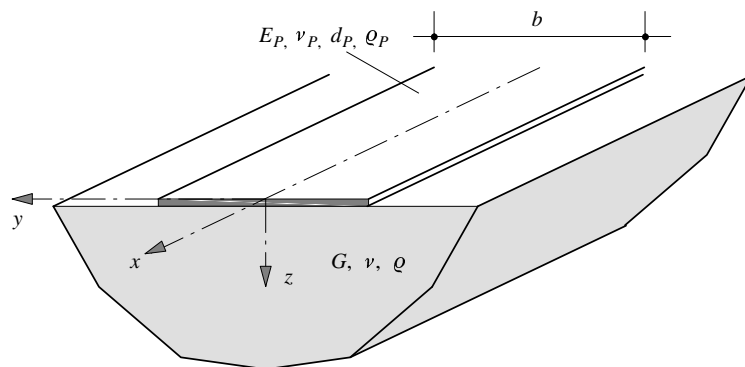


Abbildung 6.1: Systemskizze der in Längsrichtung unendlichen Platte auf dem Halbraum

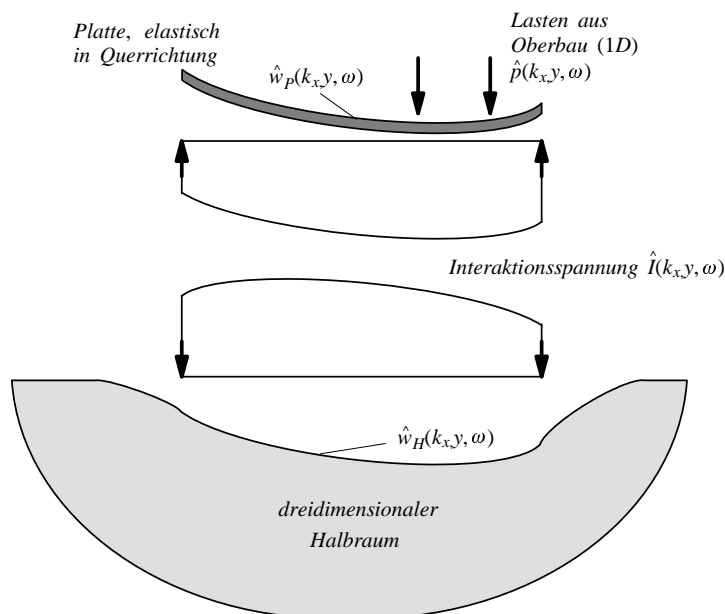


Abbildung 6.2: Kopplung eines Plattenmodells mit dem Halbraum in Querrichtung

6.1 Vertikalverschiebung der Platte

6.1.1 Differentialgleichung der Platte

Im ersten Abschnitt wird der Lösungsweg zur Bestimmung der dynamischen Verschiebungen der Platte in Querrichtung aufgezeigt.

Die Tragplatte der Festen Fahrbahn wird durch eine Platte modelliert. Die Definitionen der Koordinatenrichtungen und der Schnittgrößen ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

Für eine dynamisch belastete Platte unter Berücksichtigung der Trägheitswirkung und der Interaktionsspannung mit dem Halbraum lautet die Differentialgleichung

$$B \Delta \Delta w(x, y, t) + \mu \ddot{w}(x, y, t) = p(x, y, t) - I(x, y, t) . \quad (6.1)$$

In dieser Gleichung ist w die Vertikalverformung der Platte, Δ steht für den Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, μ für die Masse pro Flächeneinheit und p für die äußere Last aus den über der Tragplatte liegenden Oberbaukomponenten. Die Plattenbiegesteifigkeit B ist abhängig vom Elastizitätsmodul E , der Plattendicke d_P und der Querdehnzahl des Materials ν . Es gilt die folgende Definition:

$$B = \frac{E d_P^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

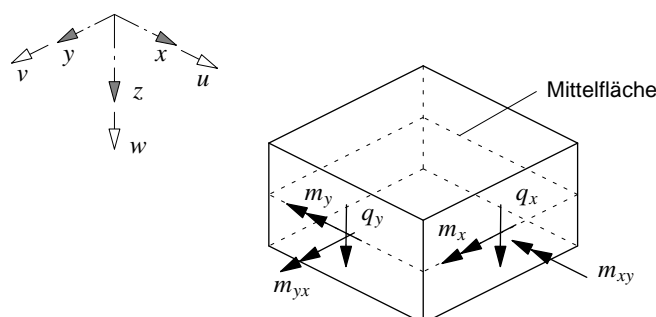


Abbildung 6.3: Definition der Koordinatenrichtungen, Verschiebungen und Schnittgrößen der Platte

6.1.2 Kinematik und Schnittgrößen

Das allgemeine Verschiebungsfeld wird durch drei Verschiebungen u, v, w beschrieben, die den Richtungen x, y, z zugeordnet sind. Dabei beschreiben x und y die Koordinaten in der Plattenebene und z die Koordinate senkrecht zur Plattenebene.

Im weiteren wird ausschließlich Plattenbiegung behandelt; der Fall der Schubdeformation wird vernachlässigt. Die Annahmen nach der technischen Biegetheorie können in diesem Fall wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} &= 0 \\ \gamma_{zy} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \rightarrow u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \rightarrow v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xy} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0\end{aligned}$$

Für die Dehnungen gilt nach [Nad25] in Vektorschreibweise (nach Streichung der Mittelflächen-
dehnungen und Mittelflächengeleitungen):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Die Spannungen können durch die Dehnungen ausgedrückt werden als

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ G \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Die Biegemomente in der Platte ergeben sich aus der Integration der Spannungen über die Dicke der Platte.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz = -B \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Die Querkräfte im Inneren der Platte sind

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Am Rand sind die Querkräfte durch die Kirchhoffschen Randscherkräfte zu ersetzen. Diese beinhalten die Wirkung der aus Schubspannungen entstehenden Drillmomente [Nad25]¹.

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} q_{rx} \\ q_{ry} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

6.1.3 Transformierte Differentialgleichung

Die Ankoppelung zwischen Platte und Halbraum soll im zweifach transformierten Raum (k_x, ω) diskret für einzelne Wellenzahlen k_x und einzelne Frequenzen ω erfolgen. Die Verschiebung setzt sich bei beliebiger Belastung aus zeitlichen und örtlichen Wellen zusammen, die bei linearer Berechnung superponiert werden können.

In ausführlicher Schreibweise lautet die Differentialgleichung der Platte:

$$B \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) - I(x, y, t). \quad (6.7)$$

Die äußere Belastung bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v und oszilliert harmonisch mit der Anregungskreisfrequenz Ω . Die Belastung wird durch einen Produktansatz in einen die Längsrichtung bezeichnenden Anteil und einen Anteil für die Querrichtung aufgespalten. Für die Interaktionsspannung gilt die analoge Beziehung.

$$p(x, y, t) = p_x(x - vt) p_y(y) \cos(\Omega t) \quad (6.8)$$

$$I(x, y, t) = I_x(x - vt) I_y(y) \cos(\Omega t) \quad (6.9)$$

Im zweifach transformierten Raum $(x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega)$ gehen diese Beziehungen über in

$$\hat{p}(k_x, y, \omega) = \hat{p}_x(k_x) p_y(y) \pi(\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad (6.10)$$

$$\hat{I}(k_x, y, \omega) = \hat{I}_x(k_x) I_y(y) \pi(\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) \quad (6.11)$$

Durch zweifache Fouriertransformation $(x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega)$ ergibt sich die folgende Form der Differentialgleichung :

$$B \left(k_x^4 \hat{w}(k_x, y, \omega) - 2 k_x^2 \frac{\partial^2 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^4} \right) - \mu \omega^2 \hat{w}(k_x, y, \omega) = \hat{p}(k_x, y, \omega) - \hat{I}(k_x, y, \omega) \quad (6.12)$$

¹In der zweiten Gleichung ist bei Nadai ein Tippfehler im Exponent der Ableitung.

Ziel ist nun, die Lösung $\hat{w}(k_x, y, \omega)$ dieser gewöhnlichen Differentialgleichung in y zu finden. Der Lösungsweg wird anhand des äußeren Lastterms hergeleitet. Da die Form des Lastterms für die Interaktionsspannung (siehe (6.10)) analog ist, gilt der Lösungsweg somit ebenfalls für diese.

$$\begin{aligned} B \left(k_x^4 \hat{w}(k_x, y, \omega) - 2 k_x^2 \frac{\partial^2 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^4} \right) - \mu \omega^2 \hat{w}(k_x, y, \omega) &= \\ &= \hat{p}_x(k_x) \pi(\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) p_y(y) \end{aligned}$$

Der von k_x und ω (und den Parametern v und Ω) abhängige Teil des Lastterms wird als für die Querrichtung konstanter Term $F(k_x, \omega)$ zusammengefaßt.

$$F(k_x, \omega) = \hat{p}_x(k_x) \pi(\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x))$$

$$B \left(k_x^4 \hat{w}(k_x, y, \omega) - 2 k_x^2 \frac{\partial^2 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^4} \right) - \mu \omega^2 \hat{w}(k_x, y, \omega) = F(k_x, \omega) p_y(y) \quad (6.13)$$

Wird dieser Term zu Eins gesetzt, $F(k_x, \omega) = 1$, so kann aus der Differentialgleichung eine Grundlösung $\hat{w}_0(k_x, y, \omega)$ bestimmt werden. Dies soll im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

Die Betrachtung der Fourierrücktransformation in den Originalraum führt infolge der Dirac-Terme im Lastterm auf wesentliche Vereinfachungen.

Unter Verwendung der Grundlösung läßt sich die Verschiebung im Originalraum anschreiben zu:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_0(k_x, y, \omega) F(k_x, \omega) e^{ik_x x} e^{i\omega t} dk_x d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_0(k_x, y, \omega) \hat{p}_x(k_x) \pi(\delta(\omega - \Omega + vk_x) + \delta(\omega + \Omega + vk_x)) e^{ik_x x} e^{i\omega t} dk_x d\omega \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Auswertung der Dirac-Distributionen führt auf (vgl. Abschnitt (4.2))

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{w}_0(k_x, y, \Omega - vk_x) \hat{p}_x(k_x) e^{i(\Omega - vk_x)t} \right) e^{ik_x x} dk_x + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x) \hat{p}_x(k_x) e^{i(-\Omega - vk_x)t} \right) e^{ik_x x} dk_x. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Exponentialterme können wie folgt umgeformt werden zu

$$e^{i(\pm\Omega - vk_x)t} e^{ik_x x} = e^{\pm i\Omega t} e^{ik_x(x - vt)}.$$

Wird nun die Verschiebung im mitbewegten Koordinatensystem ausgewertet, d.h. $\bar{x} = x - vt$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} w(\bar{x}, y, t) &= \frac{1}{4\pi} e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_0(k_x, y, \Omega - vk_x) \hat{p}_x(k_x) e^{ik_x \bar{x}} dk_x + \\ &+ \frac{1}{4\pi} e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x) \hat{p}_x(k_x) e^{ik_x \bar{x}} dk_x. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Verschiebung $w(\bar{x}, y, t)$ ist eine rein reelle Größe, daher müssen die beiden Integralterme konjugiert komplexe Größen sein. Die Überlegungen, die bei Gl. (4.10) getroffen wurden, gelten hier analog.

Daraus folgt, daß die Grundlösung nur für den Fall $\omega = -\Omega - vk_x$ ermittelt werden muß. Hier muß zur Erhaltung der Kompatibilität mit den Halbraumberechnungen der Anteil berechnet werden, der der negativen Frequenz zugeordnet ist.

6.1.4 Lösung der transformierten Differentialgleichung

Die Differentialgleichung für $\hat{w}(k_x, y, \omega)$ soll nun gelöst und die Grundlösung $\hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x)$ bestimmt werden. Unter diesen Voraussetzungen kann für (6.13) geschrieben werden

$$B \left(k_x^4 \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x) - 2 k_x^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x)}{\partial y^4} \right) - \mu (-\Omega - vk_x)^2 \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x) = p_y(y) \quad (6.17)$$

Diese Differentialgleichung stellt für feste Werte $k_x = k_{x0}$ eine Differentialgleichung 4. Ordnung in y dar. Dies führt dazu, daß die Differentialgleichung für diskrete Werte von k_x analytisch gelöst werden kann.

Werden folgende Abkürzungen $w = W(y) = \hat{w}_0(k_x, y, -\Omega - vk_x)$ und $p_y = p_y(y)$ eingeführt, die Ableitung $d/dy = (')$ mit einem Strich bezeichnet, für $k_x = k_{x0}$ und für $\omega = -\Omega - vk_{x0}$ gesetzt, so führt dies auf die Form

$$B (k_{x0}^4 w - 2k_{x0}^2 w'' + w'''') - \mu (-\Omega - vk_{x0})^2 w = p_y \quad . \quad (6.18)$$

Umsortieren nach der höchsten Ableitung, Division durch B und Zusammenfassen der Koeffizienten ergibt

$$w'''' - 2k_{x0}^2 w'' + \left(k_{x0}^4 - \frac{\mu (-\Omega - vk_{x0})^2}{B} \right) w = \frac{p_y}{B} \quad . \quad (6.19)$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

Für diese Differentialgleichung liegt eine analytische Lösung nach Rubin [Rub88] vor, bei der Fallunterscheidungen zu treffen sind. Die bei Rubin angegebene Form, an die hier verwendeten Bezeichnungen angepaßt, lautet:

$$w'''' - K_1 w'' - K_2 w = \sum_{j=f}^n p_j a_{j-f} \quad . \quad (6.20)$$

Die Lastfunktion ist die f -fache Ableitung eines Polynomes n -ten Grades und setzt sich aus den Koeffizienten p_j und den Funktionen $a_i(y)$ zusammen, wobei gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_i &= \frac{y^i}{i!} \quad \forall i > 1 \\ a_i &= 0 \quad \forall i < 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die Lösung setzt sich aus der homogenen Lösung w_H und der partikulären Lösung w_P zusammen und lautet

$$w = w_H + w_P = \sum_{i=0}^3 C_i b_i + \sum_{j=f}^n p_j b_{j-f+4} \quad . \quad (6.22)$$

Die b_i stellen eindeutige Lösungsfunktionen dar und die C_i stehen für die unbekanntenen Konstanten, die wiederum durch die unbekanntenen Anfangsbedingungen (Stelle A , $y = 0$) ausgedrückt werden können.

$$\begin{aligned} C_0 &= w_A \\ C_1 &= w'_A \\ C_2 &= w''_A - K_1 w_A \\ C_3 &= w'''_A - K_1 w'_A \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Koeffizienten C_0 bis C_3 bzw. die Anfangsbedingungen w_A bis w'''_A müssen über die Einhaltung der Rand- bzw. Übergangsbedingungen bestimmt werden.

Anwendung auf die vorliegende Differentialgleichung

Im vorliegenden Fall ergeben sich die bei Rubin verwendeten Koeffizienten K_1 und K_2 zu

$$K_1 = 2k_{x0}^2 \quad (6.24)$$

$$K_2 = \frac{\mu (-\Omega - vk_{x0})^2}{B} - k_{x0}^4 \quad (6.25)$$

Rubin gibt zwar eine Reihenformel an, bei der keine Fallunterscheidung auf Grund der Koeffizienten zu treffen ist, allerdings führte eine Probeimplementierung zu problematischen Ergebnissen. Daher werden im weiteren die analytischen Lösungen verwendet, wobei je nach Koeffizienten eine Fallunterscheidung zu treffen ist.

Die Entscheidung, welcher der Fälle zutrifft, ist von K_1 und K_2 sowie dem mit

$$r = \frac{1}{4}K_1^2 + K_2$$

definierten Parameter r abhängig.

Zur Einschränkung der möglichen Fälle können folgende Vorüberlegungen getroffen werden:

$$K_1 = 2k_{x0}^2 \geq 0$$

Der statische Sonderfall $\Omega = 0$ wird auf Grund der Halbraumberechnungen über die Annäherung $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ erfaßt. Daher ist es nicht möglich, daß gleichzeitig $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ werden. Für r gilt für das vorliegende Problem:

$$r = \frac{1}{4}K_1^2 + K_2 = k_{x0}^4 + \frac{\mu (-\Omega - vk_{x0})^2}{B} - k_{x0}^4 = \frac{\mu (-\Omega - vk_{x0})^2}{B} \geq 0 \quad .$$

Mit diesen Überlegungen scheiden bereits sechs der elf bei Rubin aufgeführten Fälle aus. Es verbleiben fünf mögliche Fälle für die Funktionen b_i , die aus Sinus-, Cosinus-, Sinushyperbolicus- und Cosinushyperbolicustermen aufgebaut sind. Die Lösungsfunktionen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit im Anhang D dargestellt.

Transformierte Randbedingungen

Zur Bestimmung der Lösung sind die unbekanntenen Konstanten der homogenen Lösung über die Randbedingungen zu bestimmen. Wie Abbildung 6.2 zeigt, ist bei der Ankoppelung eines Plattenmodells an den Halbraum die Platte "freischwebend" zu berechnen. Dies bedeutet, daß an beiden Enden ($y = -b/2$ bzw. $y = b/2$) das Moment und die Randscherkraft in Querrichtung zu Null werden müssen. Im Originalraum formuliert, gilt somit:

$$m_y(x, y = -b/2, t) = m_y(x, y = b/2, t) = 0 \quad (6.26)$$

$$q_{ry}(x, y = -b/2, t) = q_{ry}(x, y = b/2, t) = 0 \quad (6.27)$$

In transformierten Koordinaten und unter Beachtung der Tatsache, daß die Lösung im Frequenzraum nur für $\omega = -\Omega - vk_x$ erfolgen muß, gilt:

$$\hat{m}_y(k_x, y = -b/2, \omega = -\Omega - vk_x) = \hat{m}_y(k_x, y = b/2, \omega = -\Omega - vk_x) = 0 \quad (6.28)$$

$$\hat{q}_{ry}(k_x, y = -b/2, \omega = -\Omega - vk_x) = \hat{q}_{ry}(k_x, y = b/2, \omega = -\Omega - vk_x) = 0$$

Die zweifache Fouriertransformation der allgemeinen Formeln für die Schnittgrößen (6.4,6.5,6.6) führt auf Ausdrücke, die von der Verschiebung w abhängig sind.

$$\begin{aligned} \hat{m}_y(k_x, y, \omega) &= -B \left(\frac{\partial^2 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^2} - \nu k_x^2 \hat{w}(k_x, y, \omega) \right) \\ \hat{q}_y(k_x, y, \omega) &= -B \left(\frac{\partial^3 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^3} - k_x^2 \frac{\partial \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y} \right) \\ \hat{q}_{ry}(k_x, y, \omega) &= -B \left(\frac{\partial^3 \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y^3} - (2 - \nu) k_x^2 \frac{\partial \hat{w}(k_x, y, \omega)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Die Gleichungen (6.28) sind nun mit den Beziehungen für die transformierten Schnittgrößen in Abhängigkeit der transformierten Verschiebung \hat{w} zu erfüllen. Als transformierte Verschiebung wird die allgemeine Lösung aus (6.22) verwendet.

Diese transformierte Verschiebung beinhaltet bei dynamischen Lasten bereits die Wirkung der Trägheitskräfte. Dies bedeutet, daß der freischwebende Balken unter harmonischer Last im dynamischen Gleichgewicht steht.

Lösung für Legendre-Polynome

Als Ansätze für die zu bestimmende Interaktionsspannung werden wie bei der Ankopplung des Balkenmodells an den Halbraum Legendre-Polynome verwendet. Da Rubin die Lösung für eine Last angibt, die durch ein beliebiges Polynom beschrieben wird, liegt damit die Lösung bereits vor. Infolge der Eigenschaften der Legendre-Polynome werden diese wieder derart definiert, daß das Intervall $[-1, 1]$ auf die Plattenbreite abgebildet wird. Somit sind die oben beschriebenen Randbedingungen an den Stellen $y = -b/2$ und $y = b/2$ zu erfüllen. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt hier in der Mitte der Platte. Die Starrkörperverschiebung und die Starrkörperverdrehung sind in den jeweiligen Lösungen bereits erfaßt. Die Verschiebung der Platte infolge eines Legendre-Polynoms des Grades i wird mit \hat{w}_P^{Li} bezeichnet.

Lösung für Einzellasten

Als äußere Belastung aus den über der Platte liegenden Oberbaukomponenten werden zwei Einzellasten im Abstand der Schienen angesetzt. In dieser beispielhaften Ableitung wird von einem zweigleisigen System ausgegangen, bei dem nur auf einer Seite ein Zug fährt. Die Bestimmung der Verschiebung der Platte infolge dieser Einzellasten erfordert eine Aufteilung der Platte in Querrichtung in drei Abschnitte mit zugeordnetem lokalem Koordinatensystem. Eine Umrechnung dieser lokalen Koordinaten auf das Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte der Platte ist im Nachlauf der Berechnung erforderlich.

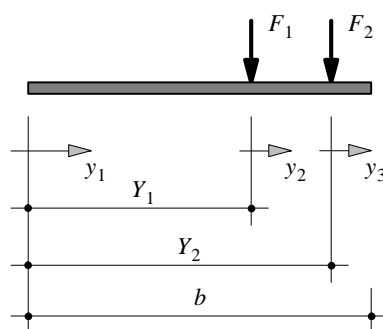


Abbildung 6.4: Einzellasten als äußere Einwirkung auf der Platte

Für die Berechnung wird die Platte im Koordinatenbereich $[0, b]$ untersucht. Nach Bestimmung der Lösung wird der Koordinatenbereich auf das Intervall $[-b/2, b/2]$ umgerechnet. Der Wert Y_1 bezeichnet den Abstand der ersten Einzellast vom linken Plattenrand, der Wert Y_2 den Abstand der zweiten Einzellast vom Plattenrand. Für diesen Fall wird die allgemeine Lösung (6.22) abschnittsweise angesetzt. Ein partikulärer Lastterm liegt in den einzelnen Abschnitten nicht vor. Zur Bestimmung der $3 \times 4 = 12$ unbekanntenen Koeffizienten stehen jetzt vier Randbedingungen und 8 Übergangsbedingungen zur Verfügung. Der untere Index bezeichnet den jeweiligen Abschnitt. Die Variablen k_x und ω entfallen in dieser Darstellung. Die Einzellasten F_1 und F_2 stehen für Streckenlasten, da jede einzelne Lösung nur die Lösung für eine bestimmte Wellenzahl ist.

$$\begin{aligned}
m_{y1}(y_1 = 0) &= 0 \\
q_{ry1}(y_1 = 0) &= 0 \\
w_1(y_1 = Y_1) &= w_2(y_2 = 0) \\
w'_1(y_1 = Y_1) &= w'_2(y_2 = 0) \\
m_{y1}(y_1 = Y_1) &= m_{y2}(y_2 = 0) \\
q_{y1}(y_1 = Y_1) &= q_{y2}(y_2 = 0) + F_1 \\
w_2(y_2 = Y_2 - Y_1) &= w_3(y_3 = 0) \\
w'_2(y_2 = Y_2 - Y_1) &= w'_3(y_3 = 0) \\
m_{y2}(y_2 = Y_2 - Y_1) &= m_{y3}(y_3 = 0) \\
q_{y2}(y_2 = Y_2 - Y_1) &= q_{y3}(y_3 = 0) + F_2 \\
m_{y3}(y_3 = b - Y_2) &= 0 \\
q_{ry3}(y_3 = b - Y_2) &= 0
\end{aligned}$$

Mit den Konstanten liegt nun die Lösung für die Verschiebung der Platte infolge der Einzellasten fest, die im weiteren mit \hat{w}_P^P bezeichnet werden soll.

6.1.5 Gesamte Plattenverschiebung

Die gesamte Plattenverschiebung ist die Summe aus der Verschiebung infolge äußerer Belastung und den Verschiebungen, die sich infolge der Legendre-Polynome ergeben. Dabei ist zu beachten, daß die Lastkoeffizienten der Legendre-Polynome erst über die Kompatibilitätsbedingung bestimmt werden.

$$\hat{w}_P = \hat{w}_P^P + \sum_{i=0}^n C^i w_P^{Li} \quad (6.30)$$

6.2 Vertikalverschiebung des Halbraumes

Die Vertikalverschiebung der Halbraumoberfläche wird für alle Legendre-Polynome separat bestimmt.

Die Berechnung erfolgt für alle Wellenzahlen k_x , eine feste Frequenz Ω und eine feste Geschwindigkeit v . Als charakteristische Lastfunktion wird wie in Kapitel 4

$$\hat{p}_z^{Li}(k_x, y) = (1 + 0i) P_i(y/(b/2))$$

verwendet, d.h. für alle Wellenzahlen wird in Querrichtung das i -te Legendre-Polynom als Lastfunktion angesetzt. Die transformierte Vertikalverschiebung wird nach den in Kapitel 2 beschriebenen Rechenwegen bestimmt. Es ergeben sich bei n Legendre-Polynomen als Ansatzfunktionen somit n transformierte Vertikalverschiebungen der Halbraumoberfläche, die als $\hat{u}_z^{Li}(k_x, y, \omega = -\Omega - vk_x)$ bezeichnet werden.

6.3 Kompatibilitätsbedingungen

Im Falle der in Querrichtung biegesteifen Platte sind zwei Kompatibilitätsbedingungen zu erfüllen. Alle diese Kompatibilitätsbedingungen werden im transformierten Raum, in (k_x, y, ω) , aufgestellt und müssen dort erfüllt werden.

- Die Vertikalverformung der Platte soll gleich der Vertikalverformung des Halbraumes sein.
 $\hat{w}_P(k_x, y, \omega) = \hat{u}_z(k_x, y, \omega)$
- Die Verformung des Halbraumes wird durch dieselbe Interaktionsspannung $\hat{I}(k_x, y, \omega)$ hervorgerufen, die, abgesehen von den äußeren Lasten, auch auf die Platte wirkt.

Das Gleichgewicht zwischen äußerer Last, Interaktionsspannungen und Trägheitskräften ist dadurch gegeben, daß jede Belastung der Platte, seien es äußere Lasten oder Interaktionsspannungen, bereits mit den Trägheitskräften im dynamischen Gleichgewicht steht. Somit ist bei Erfüllung der beiden anderen Bedingungen auch das dynamische Gleichgewicht erfüllt.

Die Gleichung der Verformungskompatibilität kann unter Berücksichtigung der bereits bestimmten Amplituden und den verbleibenden Ansatzfunktionen wie folgt formuliert werden. Die Berechnung wird für feste k_x -Werte sowie für eine feste Frequenz $\omega = -\Omega - vk_x$ durchgeführt. Alle Größen sind damit nur noch von der Koordinate in Querrichtung y abhängig, die aber hier aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wird.

$$\hat{w}_P = \hat{u}_z \quad (6.31)$$

$$\rightarrow \hat{w}_P^P + \sum_{i=0}^{n-1} C^i w_P^{Li} = \sum_{i=0}^{n-1} C^i \hat{u}_z^{Li} \quad (6.32)$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} C^i (w_P^{Li} - \hat{u}_z^{Li}) = -\hat{w}_P^P \quad (6.33)$$

Diese Beziehung zeigt, daß zur Bestimmung der unbekanntenen Spannungsverteilung n Gleichungen vorliegen und damit n Koeffizienten zu bestimmen sind. Wie im vorherigen Kapitel wird das dazu erforderliche Gleichungssystem durch Wichtung der Gleichung (6.31) mit n linear unabhängigen Funktionen und Integration über die Querrichtung aufgestellt. Als Wichtungsfunktionen finden wiederum die Legendre-Polynome nullten bis $(n-1)$ -ten Grades Verwendung. Beispielsweise ergibt sich die erste Zeile der Matrix aus der Gleichung

$$C^0 \int_{-b/2}^{b/2} (w_P^{L0} - \hat{u}_z^{L0}) P_0(y/(b/2)) dy + \dots + C^{n-1} \int_{-b/2}^{b/2} (w_P^{L(n-1)} - \hat{u}_z^{L(n-1)}) P_0(y/(b/2)) dy = - \int_{-b/2}^{b/2} \hat{w}_P^P P_0(y/(b/2)) dy \quad .$$

Mit diesem Vorgehen wird ein lineares Gleichungssystem der Dimension n aufgestellt und für alle k_x diskret gelöst. Dieses Vorgehen ist identisch dem in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten und wird deshalb nicht erneut beschrieben. Mit diesem Vorgehen sind die Koeffizienten der Legendre-Polynome in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x bestimmt. Die Vertikalverformung und die Interaktionsspannung liegen damit ebenfalls fest.

6.4 Ankoppelung eines Oberbaumodells an die Platte

Zur Ankoppelung des verbleibenden Oberbaumodells an die Platte auf Halbraum ist ein geeignetes Vorgehen zu definieren. Das gekoppelte System Platte auf Halbraum kann, wie auch der Halbraum selbst, durch eine Steifigkeitsbeziehung beschrieben werden. Diese Steifigkeitsbeziehung wird wiederum im zweifach transformierten Raum (k_x, ω) aufgestellt.

Als äußere Lasten werden die in Abschnitt 6.1.4 beschriebenen zwei Einzellasten im Abstand der zwei befahrenen Schienen angesetzt, dabei kann es sich um ein eingleisiges System oder um ein zweigleisiges System handeln. Die Einzellasten werden als Einheitslasten im transformierten Raum ($\hat{p}(k_x, \omega) = F_1 = F_2 = 1$) angesetzt. Als maßgebende Verschiebung wird der Mittelwert aus den Verschiebungen unter den beiden Einzellasten definiert. Die Steifigkeitsbeziehung des Systems Platte auf Halbraum lautet somit:

$$\hat{k}_P(k_x, \omega) = \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{2} (\hat{w}(k_x, y = Y_1, \omega) + \hat{w}(k_x, y = Y_2, \omega))} \quad (6.34)$$

Somit ergibt sich eine Steifigkeitsbeziehung, die analog der Halbraumsteifigkeiten in das Oberbaummodell eingeht. Bei einem Zwischichtensystem beispielsweise steht der untere Balken im Balkenmodell für die Schwellen und die Tragplatte. Der Halbraum wird über die Feder-Dämpfer-Elemente abgebildet. Beim Plattenmodell repräsentiert der untere Balken nur noch die Schwellen, die Biegesteifigkeit wird gleich Null gesetzt und die Feder-Dämpfer-Elemente stellen das gekoppelte System Platte auf Halbraum dar, vgl. Abbildung 6.5.

Anwendungsbeispiele zu dieser Beschreibung und Vergleichsrechnungen zwischen Balkenmodell und Plattenmodell finden sich im folgenden Kapitel. Bei einem zweigleisigen System wird in den Beispielrechnungen vereinfachend davon ausgegangen, daß das unbelastete Gleis dynamisch nicht mitwirkt. Eine genauere Modellierung wäre gegeben, wenn die Last in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastanteil aufgespalten würde und diese beide Lastfälle getrennt berechnet würden. Die einzelnen Ergebnisse müßten dann zum Gesamtergebnis superponiert werden.

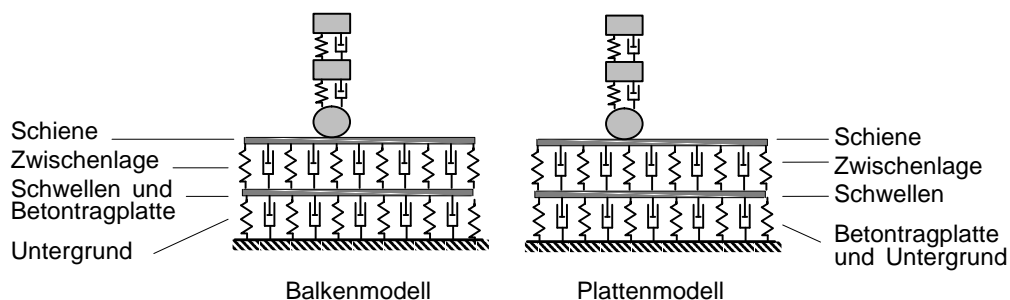


Abbildung 6.5: Zuordnung der Bauelemente zur mechanischen Modellierung. Links: Balkenmodell, rechts: Plattenmodell

Kapitel 7

Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel werden mit den vorgestellten Modellen Berechnungen für Anwendungsbeispiele durchgeführt. Als Anhaltspunkt für Vergleichsrechnungen und zugrundezulegende Parameter dient insbesondere der aktuelle Vortrag von Knothe und Yu [KY99], weiterhin die Arbeit von Ripke [Rip95] sowie das Informationsblatt der Deutschen Bahn AG zur Teststrecke in Waghäusel [Deu96].

Für die Modellierung wird ein eingleisiges Zweischichtensystem betrachtet, eine fiktive, aber dennoch realitätsnahe Feste Fahrbahn mit einem festen Verbund zwischen Schwellen und Betontragplatte. Bei der Modellbildung ist zu unterscheiden, ob die Betontragplatte als Balken oder als Platte modelliert wird. Im Oberbaumodell stellt in beiden Fällen der obere Balken beide Schienen dar und die elastische Bettung die Zwischenlagen. Wird die Tragplatte als Balken modelliert, so wird dies im folgenden als Balkenmodell bezeichnet; bei einer Modellierung als Platte wird von einem Plattenmodell gesprochen. Die Einwirkungen auf die Betontragplatte sind in diesem eingleisigen System symmetrisch. Für das Plattenmodell wird in Querrichtung die Achse der Lasteinwirkung ($y = \pm 0.70 \text{ m}$) als Referenzachse der Graphiken verwendet.

Im Falle der Balkenmodellierung geht die Biegesteifigkeit und die Massebelegung der Tragplatte und die Massebelegung der Schwellen in die Parameter des unteren Balkens ein. Die frequenz- und wellenzahlabhängigen Steifigkeiten stehen in diesem Fall nur für den Untergrund. Bei einer Plattenmodellierung repräsentieren diese Steifigkeiten das gekoppelte System Platte und Untergrund. Der untere Balken im Oberbaumodell bildet nur die Schwellen ab. Durch die modifizierten Steifigkeiten ist im Oberbaumodell in beiden Fällen das gesamte System abgebildet.

Die Parameter des Fahrzeuges beziehen sich ebenfalls auf das gesamte Fahrzeug, da es infolge der Untergrundkopplung notwendig ist, die gesamte Breite des Systems zu berücksichtigen. Eine Betrachtung einer Hälfte des Systems in Längsrichtung, wie häufig in der Literatur zu finden, ist bei diesem Vorgehen unzweckmäßig.

In der folgenden Tabelle sind die Parameter für die einzelnen Elemente der Festen Fahrbahn für den Standardfall zusammengestellt. Werden abweichende Parameter verwendet, so ist dies bei den einzelnen Beispielen angegeben.

Elastizitätsmodul Schiene	E_S	$2.10 \cdot 10^{11}$	N/m^2
Querschnittsfläche Schiene	A_S	$7.69 \cdot 10^{-3}$	m^2
Flächenträgheitsmoment Schiene	I_S	$3.05e - 5$	m^4
Schubkorrekturfaktor Schiene	k_S	2.37	[-]
Querdehnzahl Schiene	ν_S	0.3	[-]
Dichte Schiene	ρ_S	7800	kg/m^3
Biegesteifigkeit (2 Schienen)	EI_S	$12.81 \cdot 10^6$	Nm^2
Schubsteifigkeit (2 Schienen)	$GA_{Q,S}$	$524.15 \cdot 10^6$	N
Massebelegung (2 Schienen)	μ_S	120	kg/m
Steifigkeit Zwischenlage (Einzelement)	k_{Zw1}	$40 \cdot 10^6$	N/m
Steifigkeit elastische Bettung Zwischenlage k_{Zw}		$1.33 \cdot 10^8$	N/m^2
Dämpfung Zwischenlage (Einzelement) c_{Zw1}		$14.8 \cdot 10^3$	Ns/m
Dämpfung elastische Bettung Zwischenlage c_{Zw}		$4.93 \cdot 10^4$	Ns/m^2
Masse Einzelschwelle	m_{Schw}	305	kg
Massebelegung	μ_{Schw}	508.33	kg/m
Elastizitätsmodul Platte	E_P	$3.00 \cdot 10^{10}$	N/m^2
Breite Platte	b_P	3.60	m
Dicke Platte	d_P	0.30	m
Querdehnzahl Platte	ν_P	0.20	-
Dichte Platte	ρ_P	2400	kg/m^3
Biegesteifigkeit	EI_P	$243 \cdot 10^6$	Nm^2
Massebelegung	μ_P	2592	kg/m

Tabelle 7.1: Parameter der Festen Fahrbahn (eingleisiges System)

Masse Wagenkasten (1/4 der Gesamtmasse)	m_W	10150	kg
Masse Drehgestell (1/2 der Gesamtmasse)	m_D	1490	kg
Masse Radsatz (1/1 der Gesamtmasse)	m_R	1760	kg
Steifigkeit der Primärfederung (Gesamtsystem)	k_1	$7.04 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfung der Primärfederung (Gesamtsystem)	c_1	$2.00 \cdot 10^4$	Ns/m
Steifigkeit der Sekundärfederung (Gesamtsystem)	k_2	$19.44 \cdot 10^5$	N/m
Dämpfung der Sekundärfederung (Gesamtsystem)	c_2	$2.40 \cdot 10^4$	Ns/m

Tabelle 7.2: Parameter des Fahrzeuges (Modell Schwingerkette)

Scherwellengeschwindigkeit des Halbraumes	c_s	150	m/s
logarithmisches Dämpfungsdekrement	D	0.025	[-]
Querdehnzahl	ν	0.2	[-]
Dichte	ρ	2000	kg/m^3

Tabelle 7.3: Parameter des Untergrundes

7.1 Vertikalverschiebungen des Oberbaues

Die Anregung des Systems setzt sich aus unendlich vielen Frequenzanteilen bzw. Wellenzahlanteilen, die über die Fahrgeschwindigkeit auf Anregungsfrequenzen umgerechnet werden können, zusammen. Besonders dominant sind die Wirkung des bewegten Eigengewichtes und der ersten Radunrundheiten. Für die Beispiele wurden daher als Anregungen das Eigengewicht und die ersten drei Radunrundheiten gewählt. Ziel der Beispielrechnungen ist eine Untersuchung charakteristischer mechanischer Zusammenhänge und eine Charakterisierung des Systems durch kennzeichnende Größen, wie z.B. die Rezeptanz der Schiene.

Die Fahrgeschwindigkeit beträgt im Standardfall $v = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$. Aus der Formel für die Frequenzen der Radunrundheiten $f_n = nv/(d\pi)$ folgen die Anregungsfrequenzen $f_1 = 17.68 \text{ Hz}$, $f_2 = 35.37 \text{ Hz}$, $f_3 = 53.05 \text{ Hz}$. Die Amplitude der Radunrundheit wurde mit $\Delta z = 0.025 \text{ mm}$ für alle Fälle mit Ausnahme der Berechnung der Kontaktkraft angesetzt. Ein Phasenversatz der einzelnen Radunrundheiten wurde berücksichtigt. Als Fahrzeugmodell werden vier Schwingerketten verwendet, deren gegenseitige Abstände ($x = 0, 2.5, 7.4$ und 9.9 m) zwei benachbarten Drehgestellen zweier benachbarter Wagen zuzuordnen sind.

Die Abbildungen 7.1 und 7.2 zeigen die Amplituden der Vertikalverschiebung der Schiene und der Tragplatte im mitbewegten Koordinatensystem. Ein Vergleich zwischen den Berechnungen des Balkenmodells und des Plattenmodells zeigt nur geringfügige Unterschiede.

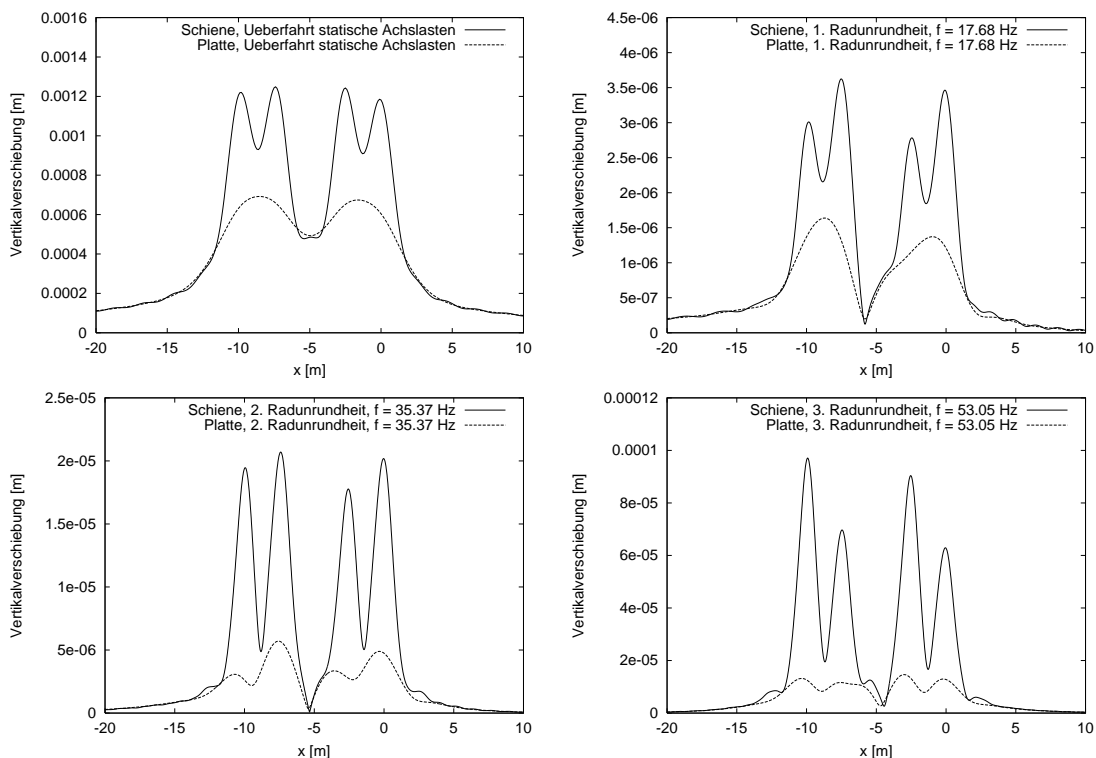


Abbildung 7.1: Amplituden der Vertikalverschiebungen der Schiene und der Tragplatte (Balkenmodell), Anregung durch statische Überfahrt und die ersten drei Radunrundheiten

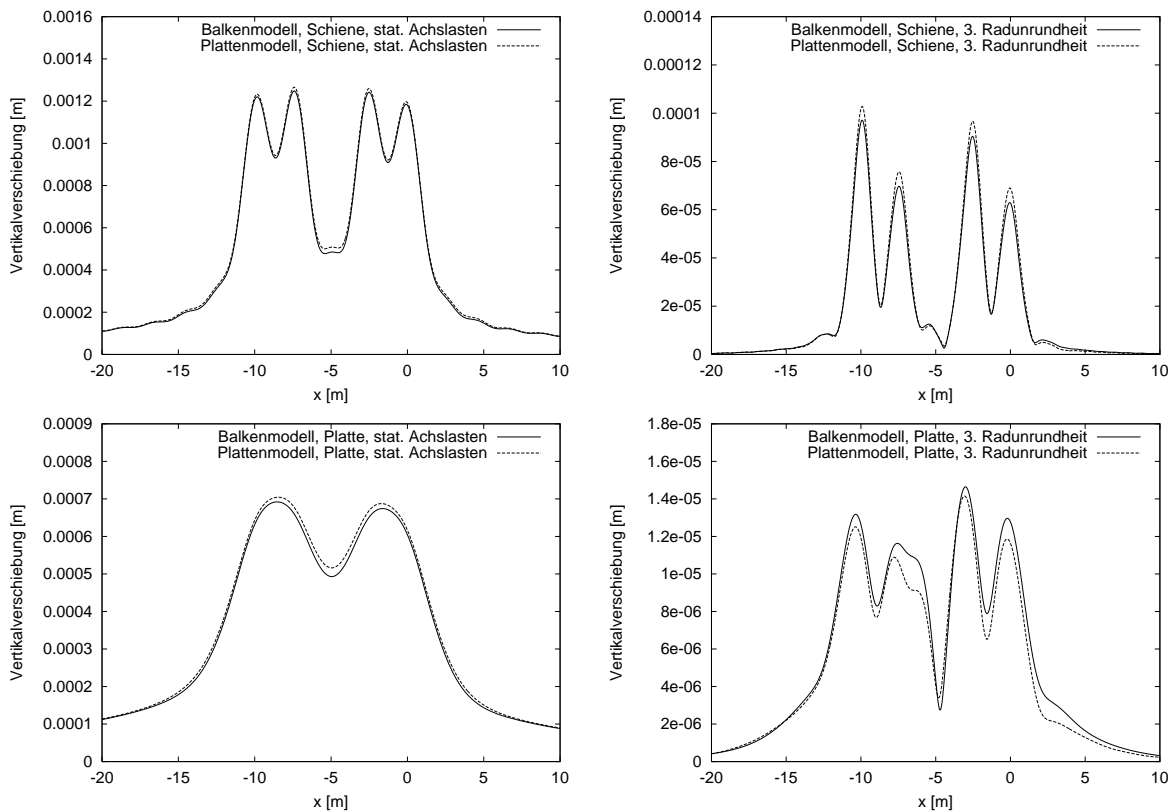


Abbildung 7.2: Vergleich der Amplituden der Vertikalverschiebungen der Schiene und der Tragplatte bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells; oben: Schienenverschiebungen, unten: Verschiebungen der Tragplatte; links: jeweils statische Überfahrt, rechts: jeweils Anregung durch 3. Radunrundheit

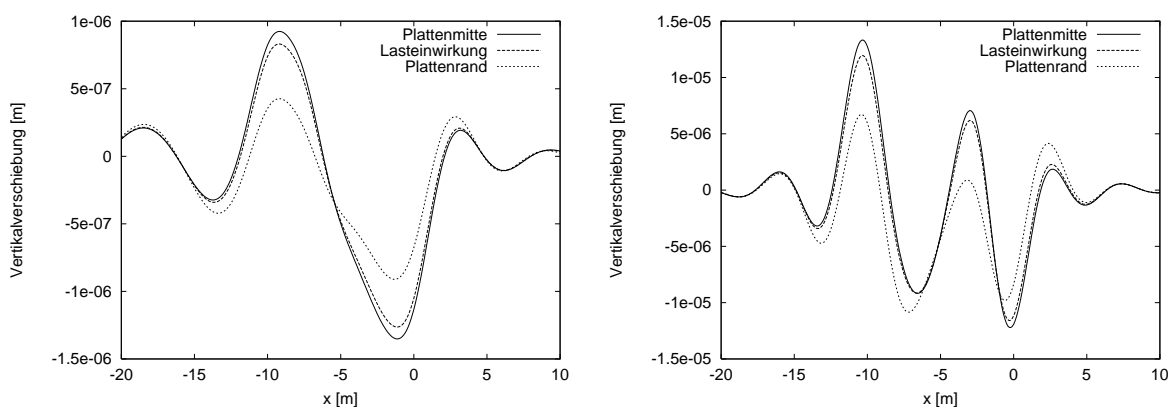


Abbildung 7.3: Vergleich des Realteils der Biegelinie der Tragplatte in Längsrichtung für Plattenmitte, Angriffspunkt der Last und Plattenrand; links: Anregung durch 1. Radunrundheit, rechts: 3. Radunrundheit

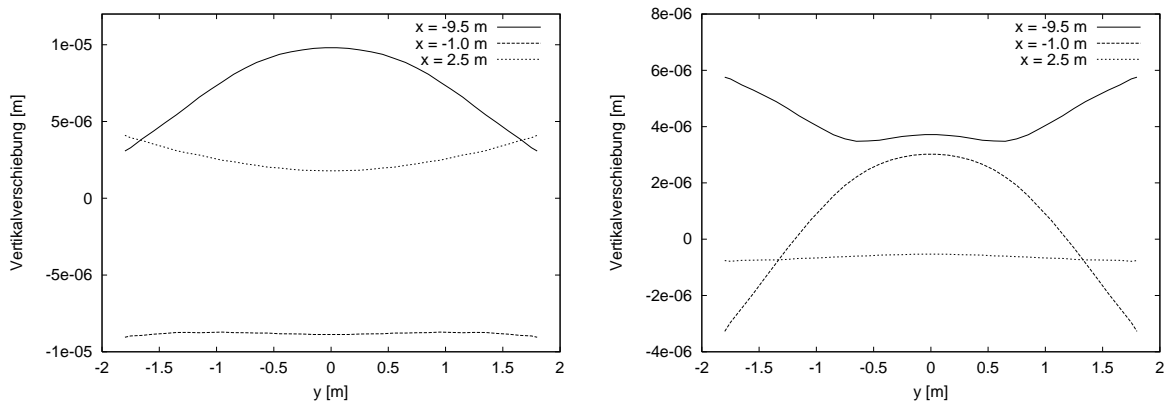


Abbildung 7.4: Vertikalverschiebung der Platte für verschiedene Stellen in Längsrichtung ($x = -9.5, -1.0, 2.5 \text{ m}$); links: Realteil, rechts: Imaginärteil

Der Vergleich der Biegelinien, dargestellt in Abbildung 7.3, und die Betrachtung einiger ausgewählter Querschnitte, siehe Abbildung 7.4, zeigen die deutliche Querbiegung der Platte. Die Verschiebungen des Plattenrandes weisen einen nicht zu vernachlässigenden Unterschied zu den Verschiebungen in Plattenmitte und am Lastangriffspunkt auf. Diese Relativverschiebungen ergeben sich hier im Modell natürlich auch bedingt aus dem Ansatz von zwei Einzellasten in Querrichtung. Würde hier eine verteilte Last angesetzt, so führt dies sicherlich zu geringeren Querbiegeeffekten.

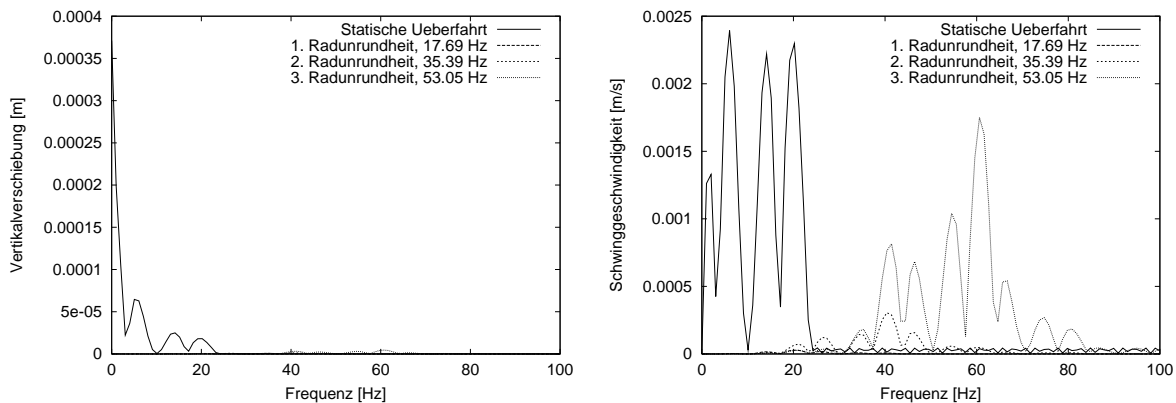


Abbildung 7.5: Frequenzspektrum der Amplituden der Vertikalverschiebung der Schiene (links) und der Schwinggeschwindigkeiten (rechts) am Fixpunkt $x = 0$ infolge der statischen Überfahrt und der ersten drei Radunrundheiten (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 \text{ Hz}$).

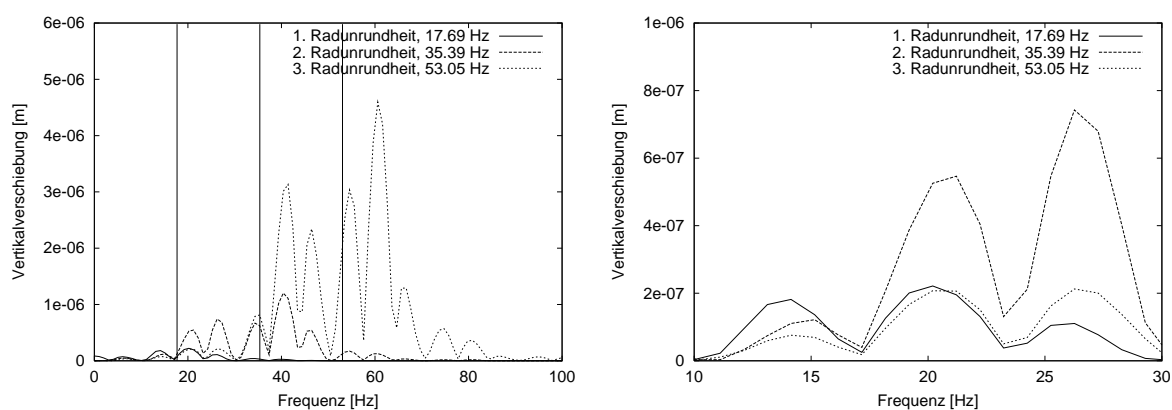


Abbildung 7.6: Frequenzspektrum der Amplituden der Vertikalverschiebung der Schiene am Fixpunkt $x = 0$ infolge der ersten drei Radunrundheiten (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 \text{ Hz}$).

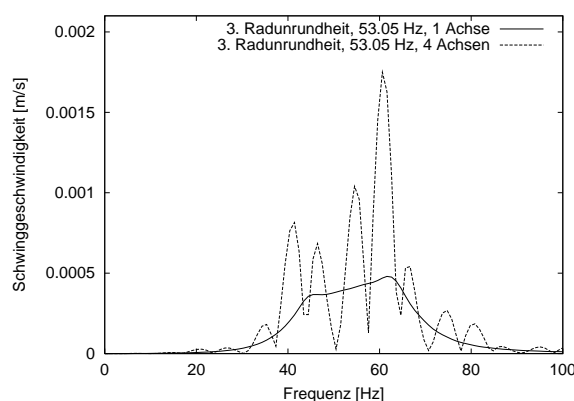


Abbildung 7.7: Vergleich des Frequenzspektrums der Schwinggeschwindigkeiten der Schiene infolge der Überfahrt einer Schwingerkette und vier Schwingerketten mit der 3. Radunrundheit (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 \text{ Hz}$).

Besonders relevant ist die Betrachtung der Frequenzspektren am Fixpunkt. Für Vergleiche mit Messungen am Oberbau oder im Untergrund ist die ortsfeste Betrachtung die einzig mögliche. Die Biegelinien der Schiene im mitbewegten Koordinatensystem werden auf den Zeitverlauf der Vertikalverschiebungen am Fixpunkt umgerechnet, und durch Fouriertransformation wird das zugehörige Frequenzspektrum gebildet. Das Spektrum der Verschiebungen, siehe Abbildung 7.5, wird durch das bewegte Eigengewicht dominiert, das bei der gegebenen Fahrgeschwindigkeit von 180 km/h einen Einfluß bis ca. 20 Hz aufweist. Das Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten wird hingegen, zumindest in den höherfrequenten Bereichen, von den Radunrundheiten bestimmt.

Der bemerkenswerteste Effekt ist die Frequenzauflösung der einzelnen Anregungen infolge bewegter oszillierender Lasten. Dieser Effekt wurde von Trommer [Tro00] ausführlich untersucht und ebenfalls von Auersch [Aue88b] erwähnt. Diese Frequenzauflösung führt dazu, daß keine klare Zuordnung zwischen Auswertungsfrequenzen und Anregungsfrequenzen möglich ist, da sich jede Anregungsfrequenz auf ein Band von Auswertefrequenzen auswirkt. Beispielsweise

wirkt sich die dritte Radunrundheit mit einer Anregungsfrequenz von $f_3 = 53.05 \text{ Hz}$ auf den Frequenzbereich von ca. $10 - 100 \text{ Hz}$ aus, vgl. Abbildung 7.6. Eine deutliche Spitze bei der jeweiligen Anregungsfrequenz ist ebenfalls nicht mehr festzustellen.

Verstärkend führt die dynamische Interaktion zwischen Radsatz und Schiene zu einer weiteren Problematik. Bei einer Auswertefrequenz von z.B. 20 Hz ist bei gleicher Amplitude der Störung der Einfluß der 1. Radunrundheit genauso groß wie der der dritten Radunrundheit, obwohl deren Anregungsfrequenz deutlich weiter entfernt liegt (siehe Abbildung 7.6). Dieser Effekt ist in der deutlich höheren Kontaktkraft (vgl. Abbildung 7.12) begründet, die sich für die dritte Radunrundheit ergibt. Aus einem gemessenen Frequenzspektrum lassen sich infolge der Frequenzaufspaltung die einzelnen Anregungen nur sehr schwierig den einzelnen Anregungen zuordnen.

Abbildung 7.7 zeigt den Einfluß der Anzahl der berücksichtigten Achsen. Werden vier Achsen angesetzt, so ergibt sich ein deutlich welligeres Spektrum als bei einer Achse. Bei vier Achsen ist die Anregung durch den Achsabstand und den Drehgestellabstand enthalten, die Wagenwiederholung ist vernachlässigt. Wird diese ebenfalls im Fahrzeugmodell berücksichtigt, wird sich noch eine leichte Steigerung der Welligkeit des Spektrums ergeben.

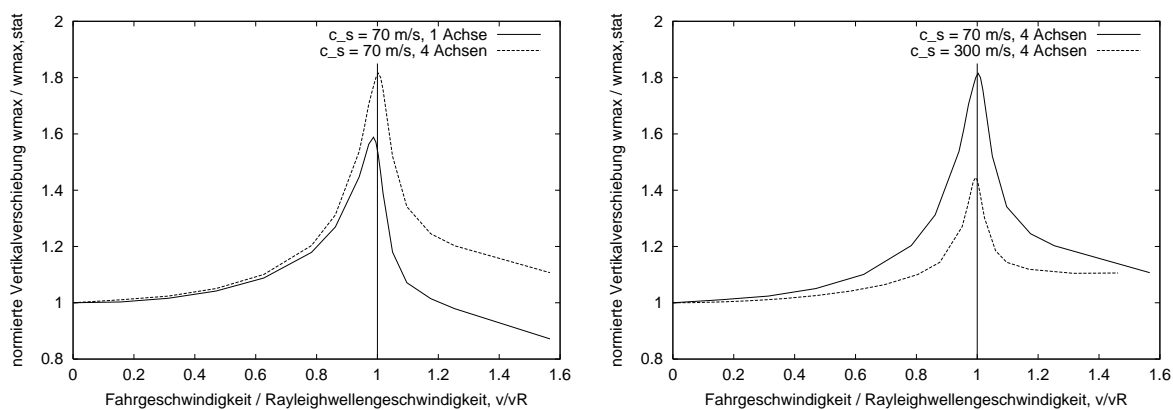


Abbildung 7.8: Normierte Vertikalverschiebungen in Abhängigkeit der bezogenen Fahrgeschwindigkeit infolge statischer Überfahrt; Vergleich für verschiedene Achszahl (links) und verschiedene Scherwellengeschwindigkeiten (rechts)

Die Fahrgeschwindigkeit besitzt einen signifikanten Einfluß auf die maximal auftretenden Verschiebungen im Oberbau. Die größten Amplituden ergeben sich bei einer Fahrgeschwindigkeit, die im Bereich der Rayleighwellengeschwindigkeit liegt, vgl. Abbildung 7.8. Für diese Betrachtung wird ausschließlich das bewegte Eigengewicht angesetzt. Wird als Lastbild nur eine Achse betrachtet, so ergeben sich deutlich geringere Vergrößerungsfaktoren als bei vier Achsen, die zwei aufeinanderfolgenden Drehgestellen zugeordnet sind. Außerdem liegt im Fall einer Achse der Maximalwert etwas unter der Rayleighwellengeschwindigkeit, bei vier Achsen genau bei der Rayleighwellengeschwindigkeit.

Bei deutlicher Erhöhung der Scherwellengeschwindigkeit sind zwei Effekte zu beobachten. Zum einen wird der maximale Vergrößerungsfaktor kleiner, zum anderen ist die Abnahme des Vergrößerungsfaktors bei Geschwindigkeiten, die über der Rayleighwellengeschwindigkeit liegen, ge-

ringer als bei einer niedrigeren Scherwellengeschwindigkeit des Untergrundes. Der erste Effekt läßt sich durch die größere Versteifung des Oberbaues bei den absolut höheren Geschwindigkeiten erklären. In die Dämpfungsterme der Zwischenlage und die Masseterme der Schiene und der Tragplatte geht die Absolutgeschwindigkeit ein. Wird diese erhöht, so ergibt sich eine Versteifung des Oberbaues. Der zweite Effekt kann vom Autor derzeit nicht erklärt werden.

Die insgesamt recht niedrigen Vergrößerungsfaktoren lassen sich durch die große Biegesteifigkeit der Tragplatte erklären, in diesem Fall können keine außergewöhnlich großen Vertikalverschiebungen auftreten.

7.2 Rezeptanz der Schiene

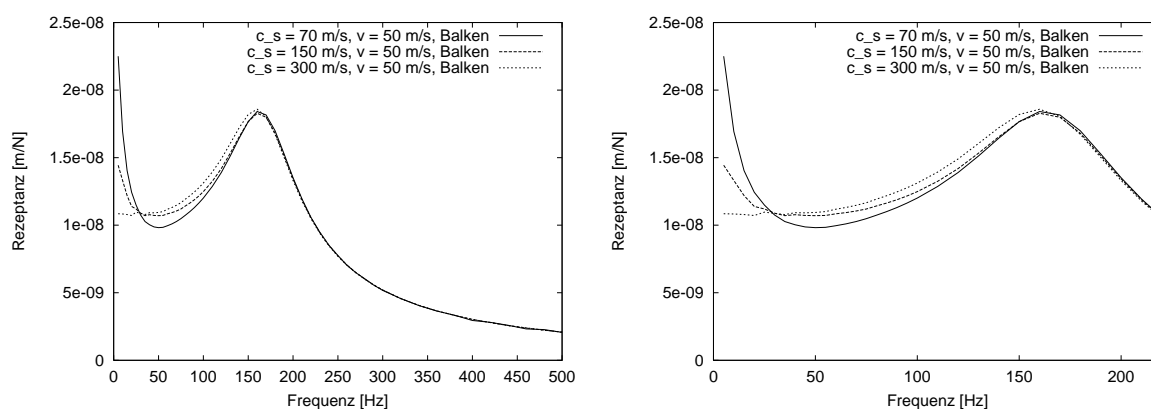


Abbildung 7.9: Rezeptanz der Schiene für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300 \text{ m/s}$ (Balkenmodell). Links: Bereich von $0 - 500 \text{ Hz}$, rechts: Detailausschnitt

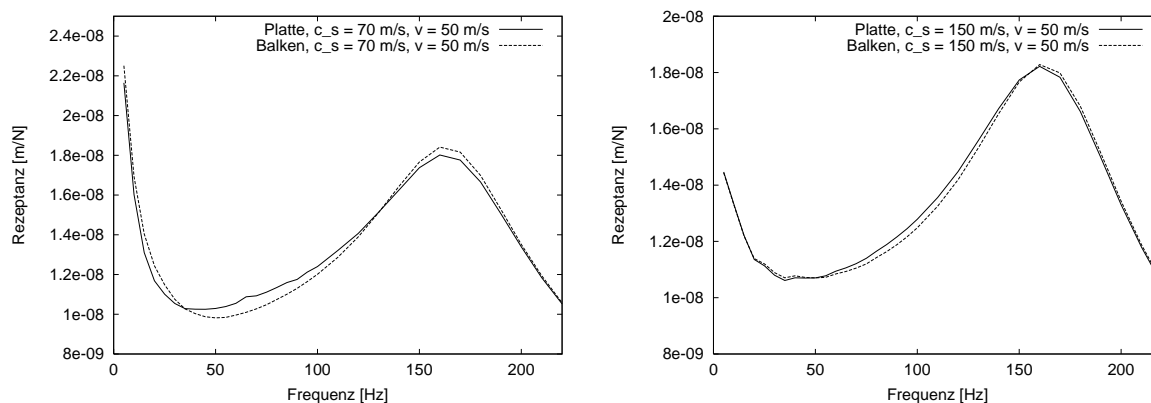


Abbildung 7.10: Vergleich der Rezeptanz der Schiene bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells für die Scherwellengeschwindigkeiten von $c_s = 70 \text{ m/s}$ (links) und $c_s = 150 \text{ m/s}$ (rechts)

Die Rezeptanz der Schiene wurde mit einem Balkenmodell und einem Plattenmodell für verschiedene Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes berechnet. Die Rezeptanz der Schiene ist definiert als diejenige Vertikalverschiebung der Schiene, die sich unter einer harmonischen (bewegten) Einzellast von 1 N auf einer Einzelschiene ergibt.

Die Ergebnisse der Rezeptanzberechnungen zeigen eine Überhöhungsstelle des Oberbaues bei ca. 160 Hz , unabhängig von der Scherwellengeschwindigkeit des Untergrundes. Diese Überhöhung ist einer gegenläufigen Bewegung von Schiene und Tragplatte zuzuordnen. Ein Einfluß des Untergrundes ist nur im niederfrequenten Bereich unter 100 Hz festzustellen, ein signifikanter Einfluß ist sogar erst unter 20 Hz zu bemerken.

Maßgebend für die Rezeptanz der Schiene ist fast ausschließlich die Zwischenlage. Zu dieser Feststellung kommen auch Knothe und Yu [KY99], deren Ergebnisse hier bestätigt werden konnten. Dort wird auch der Einfluß einer steiferen und einer stärker gedämpften Zwischenplatte untersucht. Es treten in beiden Fällen die vom Einmassenschwinger her bekannten Effekte auf. Eine Versteifung führt zu einer Erhöhung der Resonanzfrequenz, und eine Erhöhung der Dämpfung führt zu einer Reduzierung der Maximalamplitude der Resonanzstelle, ohne deren Lage im Frequenzbereich nennenswert zu verschieben.

Infolge der im vorliegenden Modell kontinuierlichen Lagerung der Schiene auf der Zwischenplatte ist es nicht möglich, den hochfrequenten Effekt der Pinned-Pinned-Mode bei ca. 900 Hz abzubilden.

Abbildung 7.10 zeigt den sehr geringen Unterschied zwischen einem Balkenmodell und einem Plattenmodell; für die Berechnung der Rezeptanz ist ein Balkenmodell ausreichend.

Der Kehrwert der Rezeptanz stellt die Steifigkeit des Oberbaues für die dynamische Interaktionsberechnung zwischen Radsatz und Schiene dar. In Abbildung 7.8 ist abzulesen, ab welchem Verhältnis zwischen Fahrgeschwindigkeit und Rayleighwellengeschwindigkeit diese Steifigkeit im bewegten Koordinatensystem berechnet werden sollte. Falls die Fahrgeschwindigkeit mehr als 60% der Rayleighwellengeschwindigkeit beträgt, würde der Fehler größer als 15%. Diese Anmerkung bezieht sich auf Modelle, bei denen die Kontaktkraft bei einer Fahrgeschwindigkeit gleich Null ermittelt wird. Bei der vorliegenden Modellierung wird die Kontaktkraft immer im bewegten Koordinatensystem berechnet, eine Berechnung im unbewegten ist ebenfalls möglich.

7.3 Rezeptanz der Platte

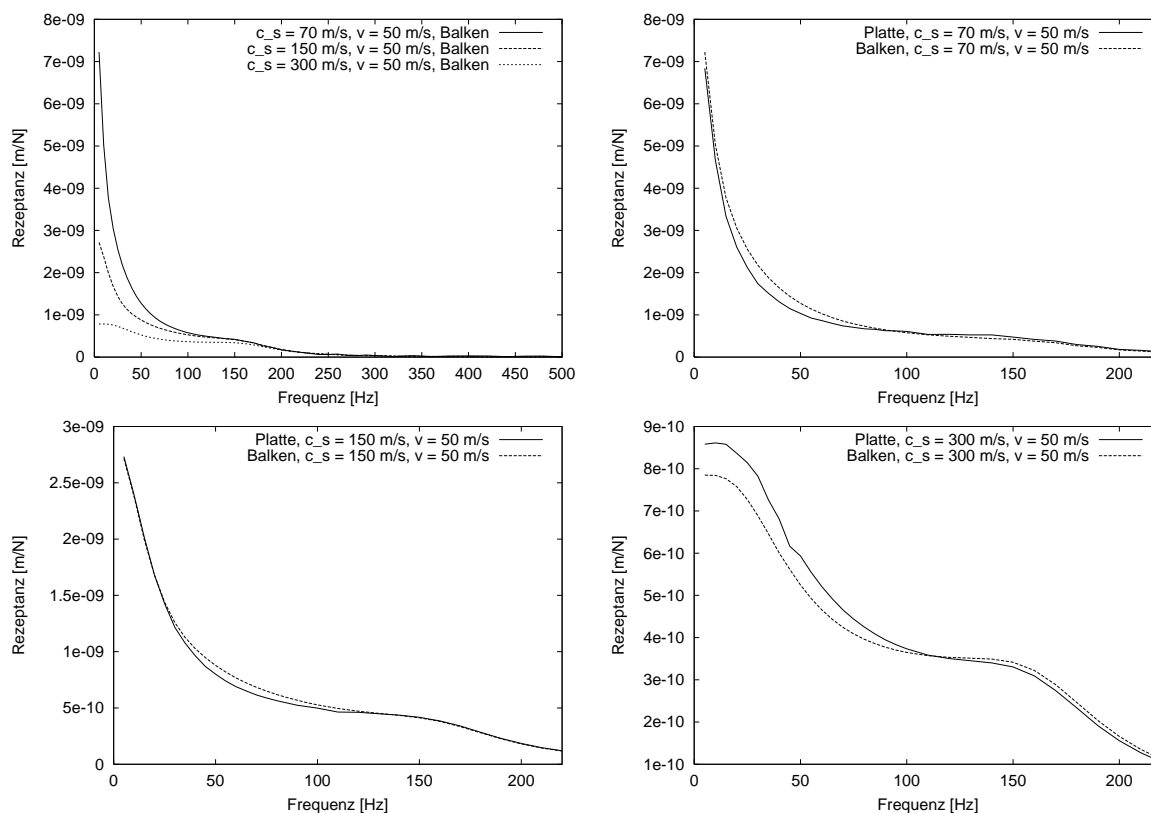


Abbildung 7.11: Rezeptanz der Platte für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300$ m/s (oben links, Balkenmodell) und Vergleich der Rezeptanz der Platte bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells für die einzelnen Scherwellengeschwindigkeiten (Reduzierter Frequenzbereich bei den Vergleichen)

Die Rezeptanz der Platte liegt von der Größenordnung deutlich unter der Rezeptanz der Schiene, ungefähr um den Faktor 10. Definiert ist die Rezeptanz der Platte als diejenige Vertikalverschiebung der Platte in der Achse der Lasteinwirkung, die sich unter einer harmonischen (bewegten) Einzellast von 1 N auf dem gesamten Oberbau ergibt. Die Rezeptanz der Platte ist im Bereich unter 200 Hz stark von den Eigenschaften des Untergrundes abhängig. Die Unterschiede zwischen der Anwendung des Balkenmodells und der Anwendung des Plattenmodells ist, wie Abbildung 7.11 darstellt, gering.

7.4 Kontaktkraft zwischen Schiene und Radsatz

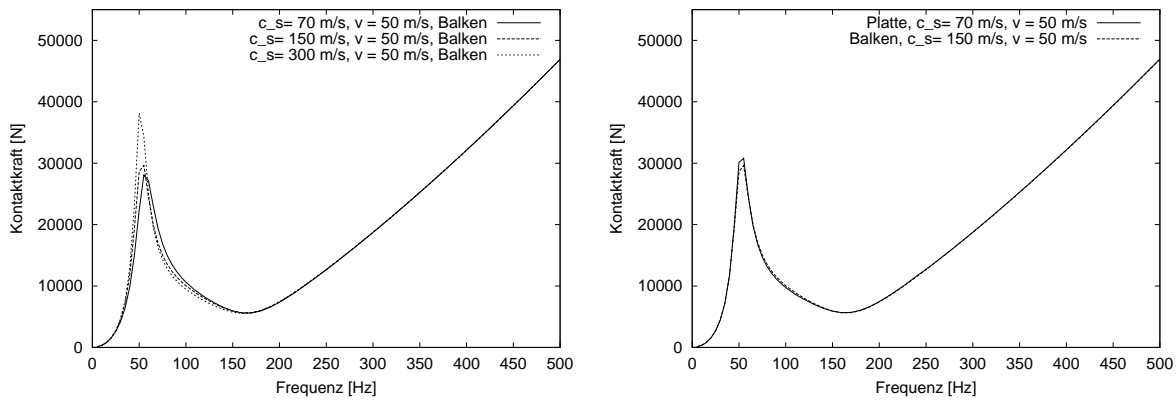


Abbildung 7.12: Links: Kontaktkraft zwischen Schiene und Radsatz für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300 \text{ m/s}$ bei einer Vertikalstörung von $\Delta z = 0.1 \text{ mm} = \textit{konst.}$ Rechts: Vergleich der Kontaktkraft bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells bei $c_s = 150 \text{ m/s}$

Abbildung 7.12 zeigt den Verlauf der Kontaktkraft zwischen Radsatz und Schiene in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz, wobei die Kontaktkraft auf eine Schiene bezogen ist. Über den gesamten Frequenzbereich wurde eine konstante Irregularität von $\Delta z = 0.1 \text{ mm}$ angesetzt.

Die starke Abhängigkeit der Kontaktkraft von der Frequenz ist in der dynamischen Interaktion mit dem Fahrzeug begründet. Die Rezeptanz der Schiene weist bei ca. 50 Hz ein Minimum auf (vgl. Abb. 7.9), d.h. die Steifigkeit des Oberbaues ist hier eher hoch, daher ergibt sich bei gleichem Differenzweg zwischen Radsatz und Schiene eine höhere Kontaktkraft.

Aus diesem Grund wird auch die dritte Radunrundheit in den Frequenzspektren in Abbildung 7.6 besonders dominant, da die hohe Normalkraft zu hohen Vertikalverschiebungen im Oberbau führt.

Für eine weitergehende Untersuchung der Normalkraft bietet sich als Perspektive an, eine Kontaktfeder zwischen Radsatz und Schiene einzuführen und eventuell auch die Radsatzelastizität zu berücksichtigen.

Auch für die Normalkraft ist, bedingt durch den geringen Unterschied in der Schienenrezeptanz, die Differenz zwischen Balkenmodell und Plattenmodell klein.

7.5 Erschütterungsausbreitung

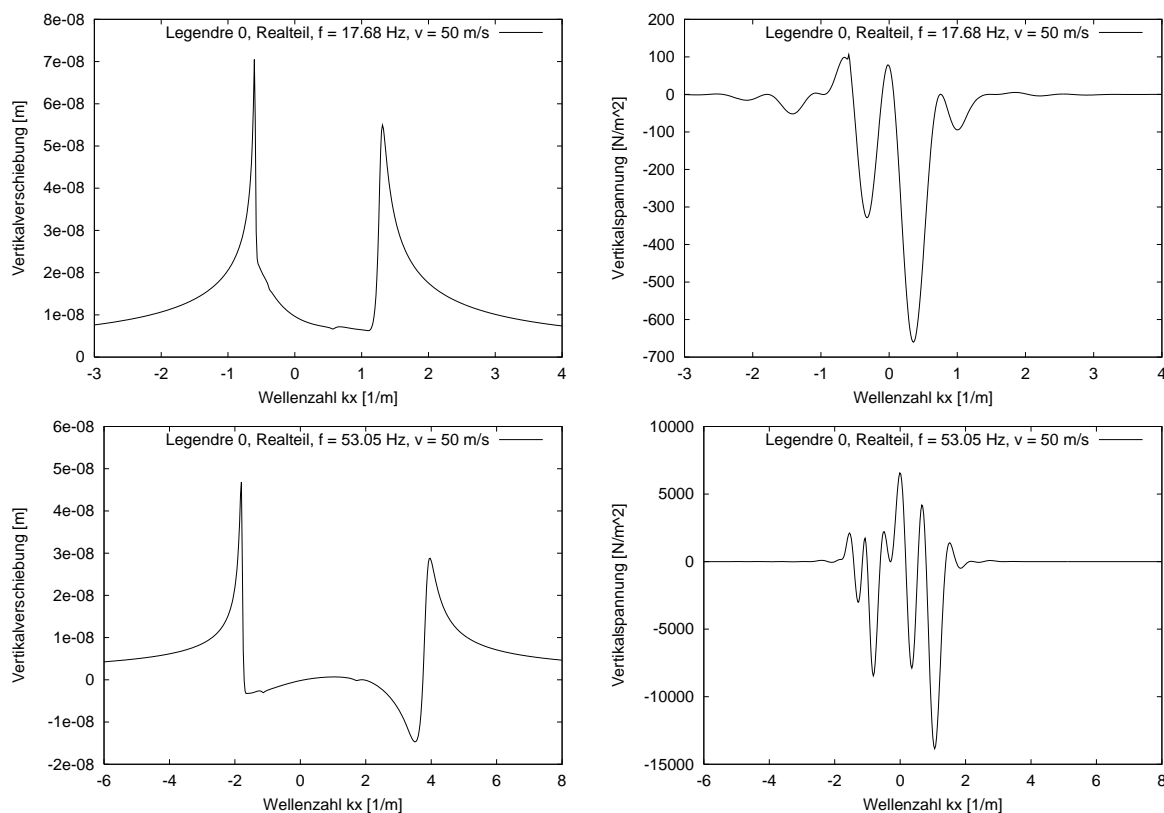


Abbildung 7.13: Transformiertes Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche ($y = 0 \text{ m}$) infolge des Legendre-Polynoms nullten Grades (jeweils links) und transformierte Vertikalspannungen des Legendre-Polynoms nullten Grades (jeweils rechts) im Wellenzahlbereich für verschiedene Anregungsfrequenzen ($f_1 = 17.68 \text{ Hz}$, oben; $f_3 = 53.05 \text{ Hz}$, unten)

Die Oberbauberechnung liefert die transformierten Spannungsverteilungen der einzelnen Legendre-Polynome. Werden diese als Belastung auf den Halbraum aufgebracht, so kann die Erschütterungsausbreitung infolge der einzelnen Anregungsfrequenzen getrennt bestimmt werden. Die Abbildung 7.13 zeigt auf der rechten Seite die Spannungsverteilung im transformierten Raum des ersten Legendre-Polynoms für zwei verschiedene Anregungsfrequenzen. Aus den beiden Verteilungen läßt sich deutlich die “Filterwirkung” der Festen Fahrbahn erkennen, die hauptsächlich durch die Tragplatte bedingt ist. Es werden, unabhängig von der Anregungsfrequenz, fast nur Wellenzahlen im Bereich von $k_x \in [-2, 2]$ angeregt. Durch die hohe Biegesteifigkeit der Platte in Verbindung mit der versteifenden Wirkung der hohen Masse können sich in der Tragplatte kurzwellige Anteile nur in sehr geringem Maße ausbilden. Dies führt in der Konsequenz dazu, daß bei Frequenzen, deren Rayleighwellenzahl außerhalb des angeregten Bereiches liegt, eine deutliche Reduzierung der Erschütterungsausbreitung auftritt, vgl. Abbildung 7.13 (links). Die unsymmetrische Verteilung der Rayleighwellenzahl, die durch die scharfen Spitzen gekennzeichnet ist, ist durch die Fahrgeschwindigkeit bedingt.

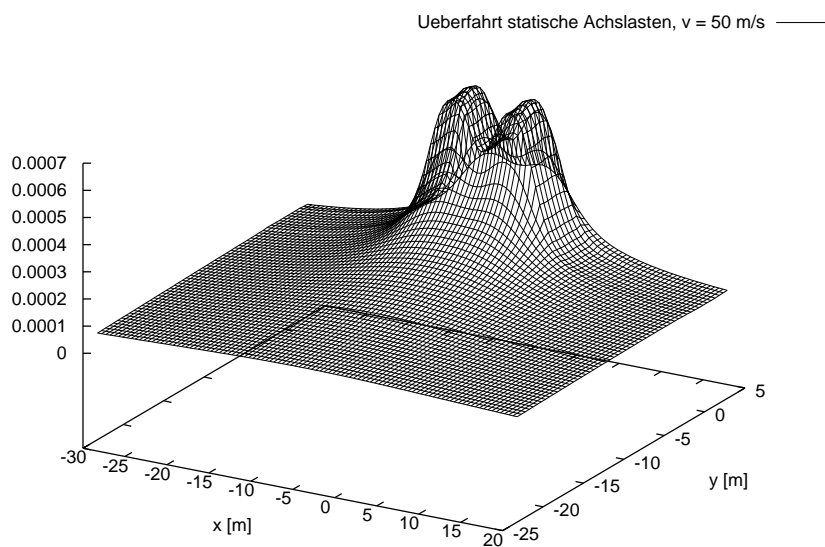


Abbildung 7.14: Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der statischen Überfahrt zweier Drehgestelle, Realteil

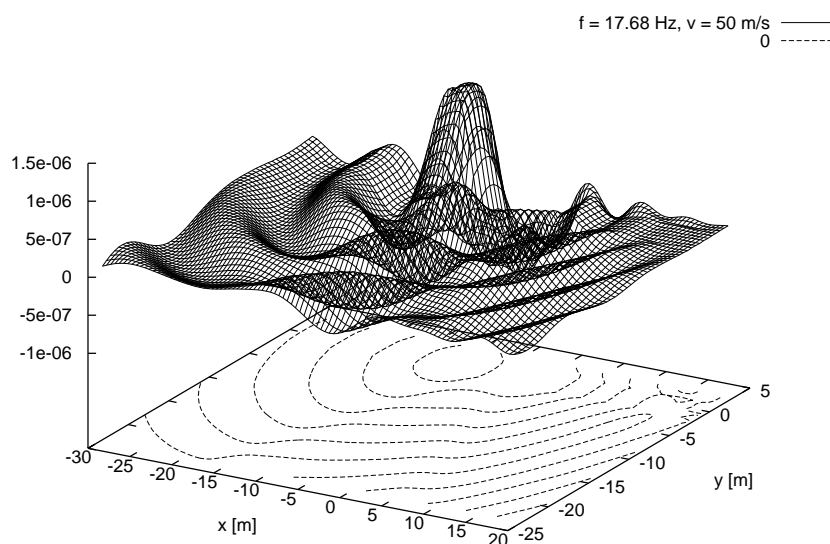


Abbildung 7.15: Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der 1. Radunrundheit bei vier Achsen, Imaginärteil

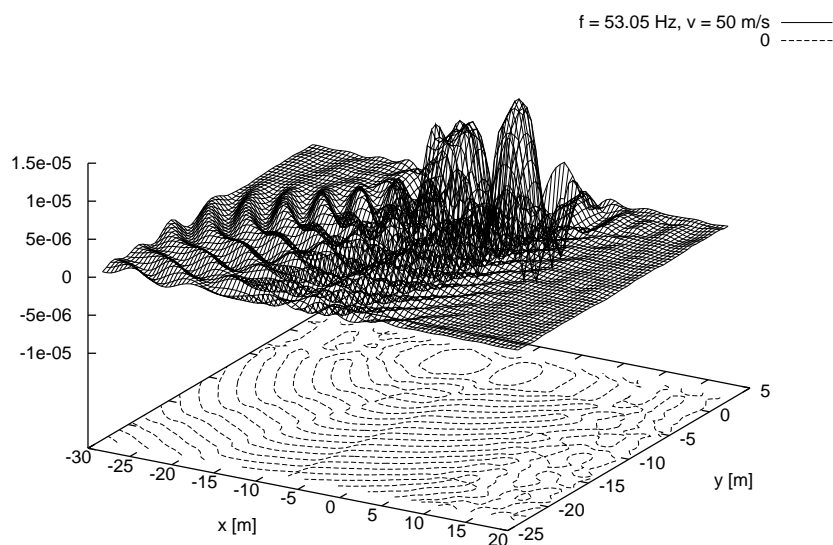


Abbildung 7.16: Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der 3. Radunrundheit bei vier Achsen, Imaginärteil

Die drei Abbildungen 7.14 bis 7.16 zeigen Momentaufnahmen des Verschiebungsfeldes der Halbraumoberfläche für die statische Überfahrt und die Anregung durch die 1. bzw. 3. Radunrundheit. Die statische Überfahrt ruft keine ausgezeichneten Wellenausbreitungsvorgänge hervor, da die Anregungsfrequenz gleich Null ist. Der dynamische Effekt besteht hier ausschließlich in der Bewegung der Last. Die harmonischen Anregungen durch die Radunrundheiten führen zu ausgeprägter Wellenfortpflanzung im Untergrund. Die Nulldurchgänge des Verschiebungsfeldes zeigen sehr gut den Doppler-Effekt. Zwischen der Last und einem Punkt, auf den die Last sich zubewegt, sind die Wellenlängen kürzer als zwischen der Last und einem Punkt, von dem sich die Last wegbewegt.

Das Amplitudenspektrum des Untergrundes, siehe Abbildung 7.17, zeigt eine Aufspaltung der Frequenzen auf einen (jeweils) kleineren Frequenzbereich als das Amplitudenspektrum der Schiene, vgl. Abbildungen 7.5 und 7.6.

Für verschiedene Entfernungen ändert sich der qualitative Verlauf des Spektrums kaum, dies belegen die zwei Vergleiche in Abbildung 7.18.

Der Vergleich zwischen dem Balkenmodell und dem Schienenmodell zeigt, daß nur für höhere Anregungsfrequenzen signifikante Unterschiede auftreten. Während sich für die Anregung mit der ersten Radunrundheit nahezu identische Spektren ergeben, sind bei der Anregung mit der dritten Radunrundheit doch Unterschiede in den Spitzenwerten von ca. 20 % festzustellen. Für höhere Frequenzen ergibt sich offenbar in der Platte eine Dynamik in Querrichtung, die zu stärkeren Anregungen des Untergrundes führt.

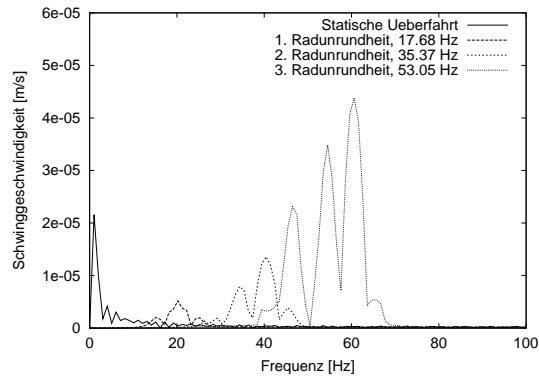


Abbildung 7.17: Amplitudenspektrum der Schwinggeschwindigkeiten am Punkt $x = 0 \text{ m}$, $y = 20 \text{ m}$ infolge der statischen Überfahrt und der ersten drei Radunrundheiten (Balkenmodell)

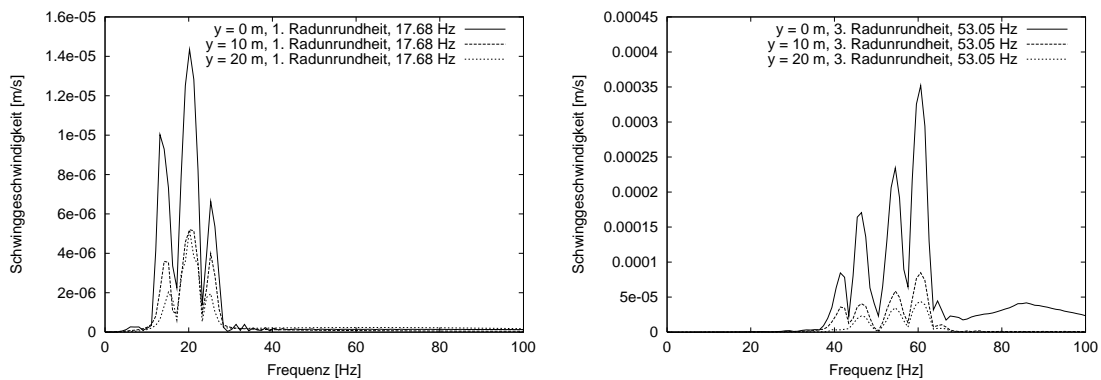


Abbildung 7.18: Vergleich des Amplitudenspektrums der Schwinggeschwindigkeiten infolge der 1. Radunrundheit (links) und der 3. Radunrundheit (rechts) in den Entfernungen $y = 0, 10, 20 \text{ m}$ (Balkenmodell)

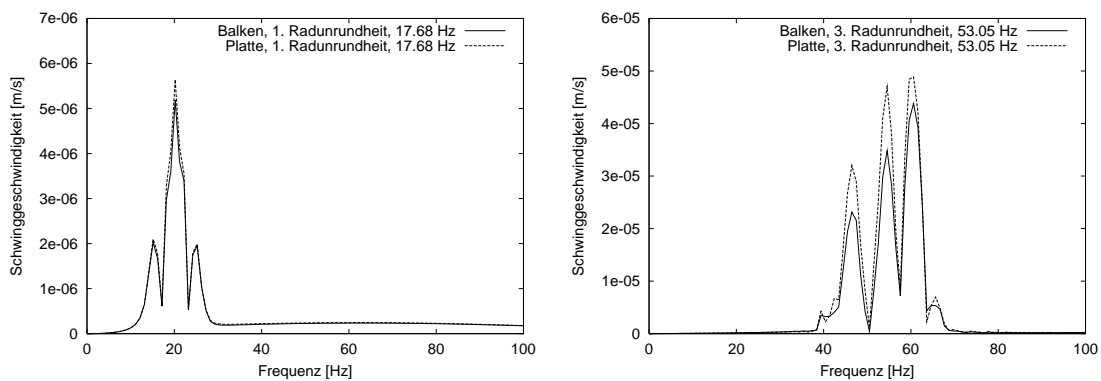


Abbildung 7.19: Vergleich des Amplitudenspektrums der Schwinggeschwindigkeiten infolge der 1. Radunrundheit (links) und der 3. Radunrundheit (rechts) für Balkenmodell und Plattenmodell

7.6 Zweigleisiger Oberbau - Plattenmodell

Exemplarisch sollen hier die Vertikalverschiebungen der Tragplatte bei einem zweigleisigen Oberbau berechnet werden. Hierbei wird von einer über beide Gleise durchgehenden Tragplatte ausgegangen. Die gegenüber Tabelle 7.1 veränderten Parameter sind in Tabelle 7.4 zusammengestellt. Für die dynamische Berechnung des Oberbaues wird die ganze Tragplatte angesetzt. Vereinfachend wird angenommen, daß nur das Gleis dynamisch wirkt, auf dem das Fahrzeug fährt. Aus diesem Grund werden im Oberbaumodell nur die Parameter eines einzelnen Gleises angesetzt. Die Fahrgeschwindigkeit beträgt $v = 50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$.

Breite Platte	b_P	9.00	m
Dicke Platte	d_P	0.40	m
Biegesteifigkeit	EI_P	$1440 \cdot 10^6$	Nm^2
Massebelegung	μ_P	8640	kg/m

Tabelle 7.4: Parameter der Festen Fahrbahn (zweigleisiges System)

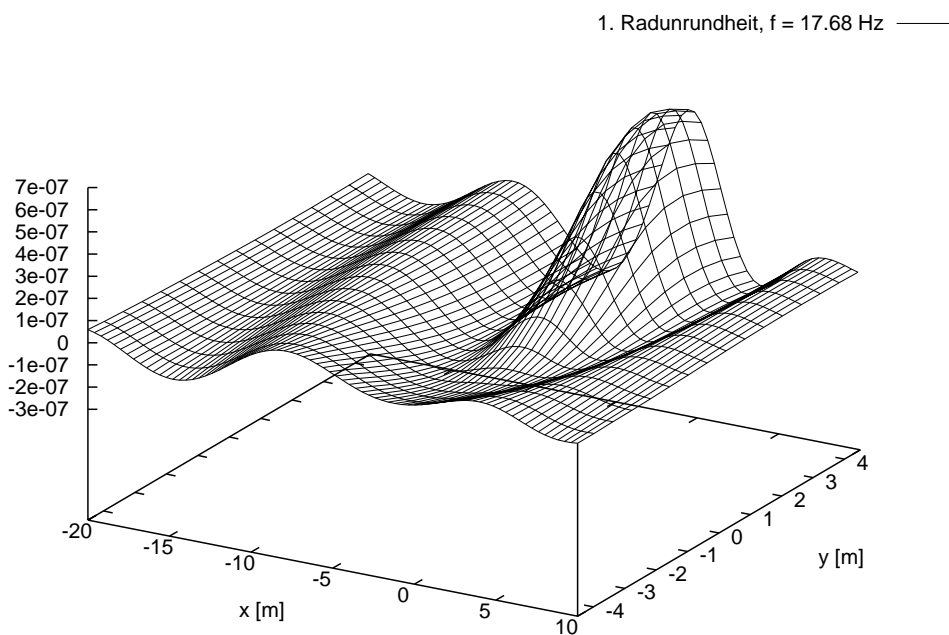


Abbildung 7.20: Verschiebungsfeld der Tragplatte beim zweigleisigen Oberbau infolge der 1. Radunrundheit, 1 Schwingerkette, Imaginärteil

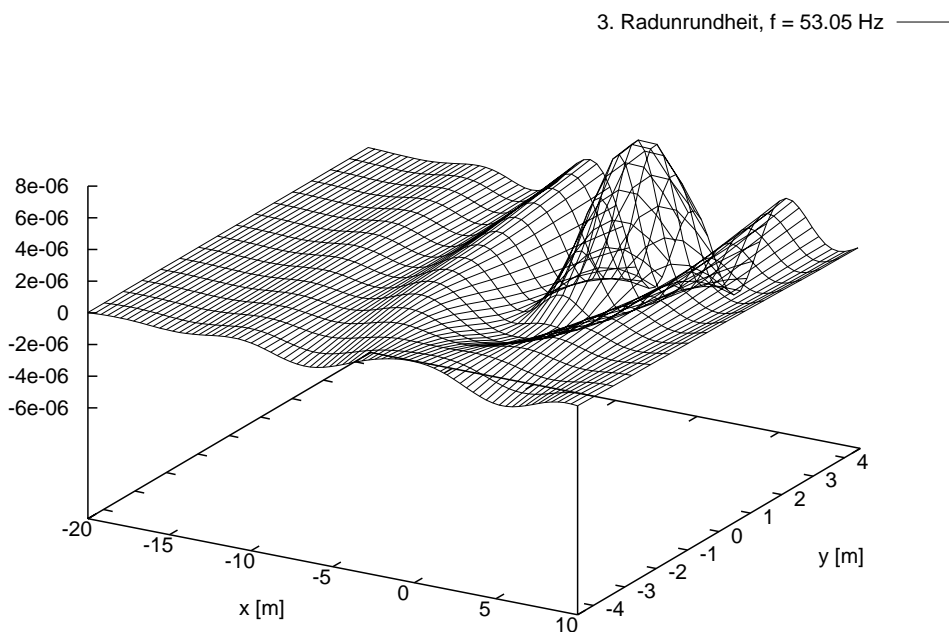


Abbildung 7.21: Verschiebungsfeld der Tragplatte beim zweigleisigen Oberbau infolge der 3. Radunrundheit, 1 Schwingerkette, Imaginärteil

Aus den Abbildungen 7.20 und 7.21 ist ersichtlich, daß die Welligkeit der Vertikalverschiebung bei der höheren Anregungsfrequenz größer ist. Dies läßt sich durch die verstärkte Anregung vom Betrag her größerer Wellenzahlen (kürzerer Wellenlängen) erklären. Der Verschiebungsverlauf nimmt allerdings in Längsrichtung stärker ab. Dies ist in der stärkeren “Dämpfung” der größeren Wellenzahlen und der höheren Frequenzen begründet und läßt sich sowohl auf den Biegesteifigkeitsanteil und die Massenträgheit der Platte als auch auf die stärkere Dämpfung des Halbraumes zurückführen.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Das entwickelte Simulationsmodell ermöglicht eine umfassende dynamische Berechnung des Oberbausystems Feste Fahrbahn. Das Fahrzeug, die gesamte Oberbaustruktur und der Untergrund sind im Modell enthalten. Für alle diese Komponenten können Verschiebungen, Schwinggeschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kraftwirkungen bestimmt werden.

Besonderer Schwerpunkt wurde auf die korrekte Erfassung der dynamischen Interaktionsbeziehungen gelegt. Die Kontaktkraft zwischen Radsatz und Schiene wird durch Übergang auf das mitbewegte Koordinatensystem derart berechnet, daß die Gleislagefehler bzw. die Rauigkeiten und der Oberbau selbst ortsfest sind, wohingegen das Fahrzeug und die Radunrundheiten bewegt sind. Die Kopplung der Achsen über die Schiene und über die Drehgestelle ist erfaßt sowie die dynamischen Effekte im Oberbau, die sich durch die Bewegung der Last ergeben. Die Interaktionsspannung zwischen Tragplatte des Oberbaues und dem Untergrund wurde durch den Ansatz von Legendre-Polynomen angenähert. Dieses Vorgehen hat sich als sehr zweckmäßig für das gesamte Vorgehen erwiesen. Die Tragplatte wurde in einer Modellierung als Balken modelliert, so daß in Querrichtung eine konstante Verschiebung der Halbraumoberfläche unter der Tragplatte auftritt. Als Alternative wurde die Tragplatte als elastische Platte modelliert. Diese Abbildung ist mechanisch korrekter, die Rechenzeit steigt dabei nur unwesentlich an.

Der Aufwand an Rechenzeit ist für die Berechnung des Oberbaues inklusive der Berechnung der Halbraumsteifigkeiten gering. Die Berechnung einer Frequenz dauert auf einem Pentium III Rechner ca. 5 Minuten. Die Berechnung der Erschütterungsausbreitung ist allerdings deutlich aufwendiger. Infolge der hohen Anzahl an zu ermittelnden Auswertepunkten müssen hier Rechenzeiten von ca. 3 Stunden angesetzt werden. Dies ist besonders von dem gewünschten Wertebereich und der Anzahl der verwendeten Legendre-Polynome abhängig.

Mit dem Modell ist es möglich, unterschiedlichste charakteristische Effekte qualitativ und quantitativ nachzubilden. Schienen- und Plattenrezeptanzen können bestimmt werden, Parameterstudien für Zwischenlagen und andere Oberbauelemente sind möglich. Als kritische Geschwindigkeit des Oberbaues konnte erwartungsgemäß die Rayleighwellengeschwindigkeit des Untergrundes festgestellt werden.

Das Lösungsverfahren im Frequenz- und Wellenzahlraum ermöglicht eine gute dynamische Einsicht in die einzelnen Anregungsmechanismen und Effekte. Durch die Betrachtung im Frequenzbereich kann z.B. die Dominanz der dritten Radunrundheit gegenüber den anderen Radunrund-

heiten erklärt werden. Die Analyse im Wellenzahlraum liefert Erkenntnisse darüber, bei welchen Frequenzen welche Wellen angeregt werden, dies ist besonders hilfreich bei der Beurteilung der Erschütterungsausbreitung.

Insbesondere bei der Modellierung der Tragplatte liegt hier ein entscheidender Vorteil gegenüber einer Finite Element Modellierung. Durch die Formulierung im Wellenzahlraum werden alle Wellenzahlen erfaßt, bei den FE Ansätzen nur diejenigen Wellenzahlen, die in den Ansätzen enthalten sind bzw. von diesen abgebildet werden können. Um kurzwellige Anteile mit einem Finite Element Modell abbilden zu können, ist eine besonders feine Rasterung erforderlich. Außerdem wird die unendliche Ausdehnung der Platte bei der vorliegenden Modellierung korrekt erfaßt, dies ist durch die räumliche Begrenztheit des FE Rasters nicht möglich. Weiterhin ist beim vorliegenden Ansatz die Stetigkeit des Biegespannungsverlaufes in der Platte gewährleistet, was für die Bestimmung der Beanspruchungen vorteilhaft ist.

Das vorliegende Modell stellt somit ein leistungsfähiges Hilfsmittel zur Analyse und Prognose des dynamischen Verhaltens der Festen Fahrbahn dar. Die Modellbildung kann an einigen Stellen noch verfeinert werden, z.B. durch Berücksichtigung eines elastischen Radsatzes. Im vorliegenden Modell sind bereits alle wesentlichen Grundlagen beschrieben und enthalten. Mit dem Simulationsmodell können auf einfache Weise und kostengünstig Konstruktionsalternativen auf ihr dynamisches Verhalten untersucht werden. Zu beachten ist selbstverständlich, daß das Gesamtsystem Fahrzeug-Fahrweg neben optimiertem dynamischem Verhalten noch eine Reihe verschiedener Ziele erfüllen soll, wie z.B. optimierte und kostengünstige Bauausführung. Die verschiedenen Ziele können durchaus konkurrierend sein, daher ist es Aufgabe der konstruierenden Ingenieure, eine insgesamt optimierte Konstruktion zu entwickeln.

Die Berechnungsergebnisse sind Berechnungsergebnisse der Kurzzeitdynamik. Diese könnten als Grundlage für eine dynamische oder quasistatische Langzeitberechnung des Gesamtsystems oder einzelner Teilsysteme, wie z.B. dem Untergrund, dienen.

Detaillierte Kurzzeitmodelle wie das vorliegende stellen momentan den Stand der Forschung im Hinblick auf Simulationsmodelle für die Eisenbahnüberfahrt dar. Die Herausforderung für zukünftige Forschung besteht darin, Modelle zu entwickeln, die in der Lage sind, die Entwicklung des Langzeitverhaltens zutreffend zu simulieren. Dies könnten entweder nichtlineare Gesamtmodelle sein oder getrennte Modelle in Verbindung mit Modellen der Kurzzeitdynamik.

Diese weitreichenderen Simulationsmodelle können dann den Eisenbahngesellschaften helfen, den Fahrweg in Kombination mit dem Fahrzeug derart auszulegen, daß sie den Eisenbahnverkehr mit weniger Unterhaltsaufwand und damit wirtschaftlicher abwickeln können.

Literaturverzeichnis

- [Ara94] ARAÚJO, F.C. DE: *Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode*. Doktorarbeit, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig, Nr. 14-1994, 1994.
- [Aue83] AUERSCH, L.: *Ausbreitung von Erschütterungen durch den Boden*. Technischer Bericht 92, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1983.
- [Aue88a] AUERSCH, L.: *Wechselwirkung starrer und flexibler Strukturen mit dem Baugrund insbesondere bei Anregung durch Bodenerschütterungen*. Technischer Bericht 151, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1988.
- [Aue88b] AUERSCH, L.: *Zur Entstehung und Ausbreitung von Schienenverkehrserschütterungen: Theoretische Untersuchungen und Messungen am Hochgeschwindigkeitszug Intercity Experimental*. Technischer Bericht 155, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1988.
- [Aue94a] AUERSCH, L.: *Wave Propagation in Layered Soils: Theoretical Solution in Wave-number Domain and Experimental Results of Hammer and Railway Traffic Excitation*. Journal of Sound and Vibration, 173(2):233–264, 1994.
- [Aue94b] AUERSCH, L.: *Zur Dynamik einer unendlichen Platte auf dem Halbraum - Fundamentnachgiebigkeit und Wellenfeld bei harmonischer Punktlast*. Archive of Applied Mechanics, 64:346–356, 1994.
- [Bet92] BETTESS, P.: *Infinite Elements*. Penshaw Press, 1992.
- [Bit99] BITZENBAUER, J.: *Vertikale dynamische Interaktion zwischen Fahrzeug und Oberbau*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, 1999.
- [BR96] BROECK, P. VAN DEN und G. DE ROECK: *Dynamic behaviour of railway track on layered media*. In: AUGUSTI, G., C. BORRI und P. SPINELLI (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '96*, Seiten 1083–1089, Rotterdam, 1996. A.A. Balkema.
- [BR99] BROECK, P. VAN DEN und G. DE ROECK: *The vertical receptance of track including soil-structure interaction*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 837–842, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [BS89] BRONSTEIN, I.N. und K.A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Harry Deutsch Thun und Frankfurt am Main, 24. Auflage, 1989.

- [CLS91] CHOUW, N., R. LE und G. SCHMID: *Verfahren zur Reduzierung von Fundamentalschwingungen und Bodenerschütterungen mit dynamischem Übertragungsverhalten einer Bodenschicht*. Bauingenieur, 66:215–221, 1991.
- [CR68] CRUSE, T.A. und F.J. RIZZO: *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem*. J. Math. Anal. Appl., 22:244–259, 1968.
- [DA88] DUKKIPATI, R.V. und J.R. AMYOT: *Computer-aided simulation in railway dynamics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.
- [Dah95] DAHLBERG, T.: *Vertical Dynamic Train/Track Interaction - Verifying a Theoretical Model by Full-Scale Experiments*. In: KNOTHE, K., S.L. GRASSIE und J.A. ELKINS (Herausgeber): *Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure. Proceedings of the 3rd Herbertov Workshop, September 19-23, 1994, Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 24*, Seiten 45–57, 1995.
- [Dar99] DARR, E.: *Konstruktion, Bauarten, Gleislagestabilität, Instandhaltung und Systemvergleich der Festen Fahrbahn*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [Deg99] DEGRANDE, G.: *Free field vibrations during the passage of a high speed train: validation of a numerical model by means of experimental results*. In: *13th ASCE Engineering Mechanics Division Specialty Conference*, Baltimore, MD, June 1999.
- [Deu96] DEUTSCHE BAHN AG: *Betriebserprobung Feste Fahrbahn*. Technischer Bericht, Deutsche Bahn AG, 1996.
- [Deu98] DEUTSCHE BAHN AG: *Vergleich zweier Bauarten der Feste Fahrbahn in dynamischer Hinsicht*. Technischer Bericht, Deutsche Bahn AG, 1998.
- [DG99] DINKEL, J. und H. GRUNDMANN: *Winkler parameters for railway dynamics derived from 3-D half space analysis*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 831–836, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [DM96] DIETERMAN, H.A. und A. METRIKINE: *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical Velocities of a moving load along the beam*. European Journal of Mechanics, 15(1):67–90, January 1996.
- [Dom78] DOMINGUEZ, J.: *Dynamic stiffness of rectangular foundations*. Doktorarbeit, MIT Research Report R78-20, Dept. of Civil Engineering, Cambridge, MA, 1978.
- [Dom93] DOMINGUEZ, J.: *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1993.
- [Dud97] DUDDECK, F.E.M.: *Funktional-Analyse der Kontinuumsmechanik - Fouriertransformation bezüglich Raum und Zeit der Energiemethoden*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 5/97, Technische Universität München, 1997.

- [EF99] ESTORFF, O. VON und M. FIRUZIAAN: *Nonlinear Dynamic Response by Coupling BEM and FEM*. In: WUNDERLICH, W. (Herausgeber): *ECCM '99, European Conference on Computational Mechanics, Munich, Abstract Book, Full Length Papers on CD-Rom only*, Seiten 814–815, München, 1999.
- [Eis97] EISENMANN, J.: *Feste Fahrbahn auf Erdkörpern*. Eisenbahningenieur, 48(1):33–37, Januar 1997.
- [EL00] EISENMANN, J. und G. LEYKAUF: *Beton-Kalender 2000*, Kapitel Feste Fahrbahn für Schienenbahnen. Ernst & Sohn, 2000.
- [EM91] EISENMANN, J. und L. MATTNER: *Dimensionierung einer Festen Fahrbahn*. Eisenbahningenieur, 42:116–124, März 1991.
- [ES75] ERINGEN, A.C. und E.S. SUHUBI: *Elastodynamics*, Band 2. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [Esv99] EVELD, C.: *Recent Developments in Slab Track Application*. Rail Tech Europe, February 1999.
- [Flü72] FLÜGGE, W.: *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1972.
- [FPS99] FRIEDRICH, K., G. PFLANZ und G. SCHMID: *Modellierung des dynamischen Verhaltens der Festen Fahrbahn bei Zugüberfahrt*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [Fra98] FRANZ GRÖTZ GMBH & CO. KG: *Bauform Systeme Grötz BSO/MK*. Technischer Bericht, Franz Grötz GmbH & Co. KG, 1998.
- [Frý72] FRÝBA, L.: *Vibration of solids and structures under moving loads*. Nordhoff International Publishing, 1972.
- [Gau76] GAUL, L.: *Zur Berechnung der Vertikal- und Kippschwingungen eines starren Fundamentes auf viskoelastischem Halbraum*. Doktorarbeit, Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Hannover, 1976.
- [GD84] GARG, V.K. und R.V. DUKKIPATI: *Dynamics of railway vehicle systems*. Academic Press, Don Mills, Ontario, 1984.
- [GF97] GAUL, L. und C. FIEDLER: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [GGHJ82a] GRASSIE, S.L., R.W. GREGORY, D. HARRISON und K.L. JOHNSON: *The behaviour of railway wheelsets and track at high frequencies of excitation*. Journal of Mechanical Engineering Science, 24(2):103–111, 1982.
- [GGHJ82b] GRASSIE, S.L., R.W. GREGORY, D. HARRISON und K.L. JOHNSON: *The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation*. Journal of Mechanical Engineering Science, 24(2):77–90, 1982.

- [GLT99] GRUNDMANN, H., M. LIEB und E. TROMMER: *The response of a layered half-space to traffic loads moving along its surface*. Archive of Applied Mechanics, 69(1):55–67, 1999.
- [GM88] GRUNDMANN, H. und G. MÜLLER: *Schwingungen infolge zeitlich veränderlicher, bewegter Lasten im Untergrund. (FE-Berechnungen unter Verwendung analytischer Lösungen*. In: WUNDERLICH, W. und E. STEIN (Herausgeber): *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis. FEM'88, Bochum*, Seiten 177–187, Berlin, 1988. Ernst & Sohn.
- [Gru99] GRUNDMANN, H.: *Dynamic interaction of structures with the subsoil*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 31–40, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [Hal00] HALL, L.: *Simulations and Analyses of Train-Induced Ground Vibrations. A comparative Study of Two- and Three-Dimensional Calculations with Actual Measurements*. Doktorarbeit, Division of Soil and Rock Mechanics, Department of Civil and Environmental Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2000.
- [Hol69] HOLZLÖHNER, U.: *Schwingungen des elastischen Halbraumes bei Erregung auf einer Rechteckfläche*. Ingenieur-Archiv, 38:370–379, 1969.
- [Hol80] HOLZLÖHNER, U.: *Vibrations of the elastic halfspace due to vertical surface loads*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8:405–414, 1980.
- [Hub88] HUBER, G.: *Erschütterungsausbreitung beim Rad/Schiene-System*. Doktorarbeit, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Universität Fridericiana Karlsruhe, 1988.
- [Hun96] HUNT, H.E.M.: *Modelling of rail vehicles and track for calculation of ground-vibration transmission into buildings*. Journal of Sound and Vibration, 193(1):185–194, 1996.
- [HZ95] HILLIGES, D. und A. ZACHLEHNER: *Feste Fahrbahn Bauart Rheda auf Erdkörper*. Eisenbahningenieur, 46:298–306, Mai 1995.
- [IK92] ILIAS, H. und K. KNOTHE: *Ein diskret-kontinuierliches Gleismodell unter Einfluß schnell bewegter, harmonisch schwankender Wanderlasten*. Technischer Bericht Reihe 12 Nr. 171, Fortschritt-Berichte VDI, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [Jez81] JEZEQUEL, L.: *Response of Periodic Systems to a Moving Load*. Journal of Applied Mechanics, 48:613–618, September 1981.
- [JLLHP97] JONES, D.V., O. LAGHROUCHE, D. LE HOUEDÉC und M. PETYT: *Ground Vibration in the Vicinity of a Rectangular Load Acting on a Viscoelastic Layer over a Rigid Foundation*. Journal of Sound and Vibration, 203(2):307–319, 1997.
- [Kau81] KAUSEL, E.: *An explicit solution for the dynamic loads in layered media*. Technischer Bericht R81-13, MIT, 1981.
- [Kau94] KAUSEL, E.: *Thin-layer method: formulation in the time domain*. International Journal of Numerical Engineering Mechanics, 37:927–941, 1994.

- [KG93] KNOTHE, K. und S.L. GRASSIE: *Modelling of Railway Track and Vehicle/Track Interaction at High Frequencies*. Vehicle System Dynamics, 22:209–262, 1993.
- [KGE95] KNOTHE, K., S.L. GRASSIE und J.A. ELKINS (Herausgeber): *Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure. Proceedings of the 3rd Herbertov Workshop on Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure held in Herbertov/Czech Republic, September 19-23, 1994*. Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 24, 1995.
- [Kno98] KNOTHE, K.: *Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrweg*. Glasers Annalen, 122(5):173–180, 1998.
- [Kon85] KONRAD, A.: *Der Zylinder, der zylindrische Hohlraum und die dickwandige Kreis-zylinderschale unter beliebigen, ruhenden oder bewegten Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 17, Technische Universität München, 1985.
- [Kry95] KRYLOV, V.V.: *Generation of Ground Vibrations by Superfast Trains*. Applied Acoustics, 44:149–164, 1995.
- [Kry98] KRYLOV, V.V.: *Effects of Track Properties on Ground Vibrations Generated by High-Speed Trains*. ACUSTICA - acta acustica, 84:78–90, 1998.
- [KS91] KISIŁOWSKI, J. und B. SOWINSKI: *Advanced Railway Vehicle System Dynamics*, Kapitel Problems of Simulating Vehicle Motion by Mathematical Models. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1991.
- [KW98] KNOTHE, K. und Y. WU: *Receptance behaviour of railway track and subgrade*. Archive of Applied Mechanics, 68(7/8):457–470, 1998.
- [KW99] KNOTHE, K. und W. WU: *Rechteckfundament af elastischem Halbraum*. Bauingenieur, 74(12):535–541, 1999.
- [KY99] KNOTHE, K. und M. YU: *Ansätze zur Modellbildung der Festen Fahrbahn und Unterschiede zur Modellbildung des Schotteroberbaues*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [Lam04] LAMB, H.: *Philosophical Transactions: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Phil. Trans. Royal Soc., (A203):1–42, October 1904.
- [LDB98] LUTZENBERGER, S., J. DINKEL und W. BAUMGÄRTNER: *PRISIM - Ein Softwariemodul zur Simulation der dynamischen Interaktion zweier relativ zueinander bewegter Finite Element Strukturen*. Deutschsprachige MSC - NASTRAN Anwenderkonferenz, Kloster Andechs, 1998.
- [Le96] LE, R.: *Numerische Modellierung der Erschütterungen durch Schienenverkehr und deren Reduzierung*. Doktorarbeit, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 96/5, Ruhr-Universität Bochum, 1996.

- [Lie97] LIEB, M.: *Adaptive numerische Fouriertransformation in der Bodendynamik unter Verwendung einer Waveletzerlegung*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 2/97, Technische Universität München, 1997.
- [Lie98] LIEDL, U.: *Gekoppelte elastisch gebettete Balken unter bewegter harmonischer Belastung*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, 1998.
- [LM97a] LEYKAUF, G. und N. MALEKI: *Feste Fahrbahn-Entwicklungen im Ausland*. In: *Beiträge zum Bau von Landverkehrswegen, Josef Eisenmann anlässlich seiner Emeritierung, Heft 70*, 1997.
- [LM97b] LEYKAUF, G. und L. MATTNER: *Oberbautechnische Prüfungen von Feste Fahrbahn-Konstruktionen aus der Sicht des Eisenbahnoberbaues*. In: *Beiträge zum Bau von Landverkehrswegen, Josef Eisenmann anlässlich seiner Emeritierung, Heft 70*, 1997.
- [Lov44] LOVE, A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York, 4. Auflage, 1944.
- [LS98] LIEB, M. und B. SUDRET: *A fast algorithm for soil dynamics calculations by wavelet decomposition*. *Archive of Applied Mechanics*, 68(3/4):147–157, 1998.
- [Man83] MANSUR, W.J.: *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. Doktorarbeit, University of Southampton, 1983.
- [Mat58] MATHEWS, P.M.: *Vibrations of a beam on elastic foundation*. *ZAMM*, 38(3/4):105–115, 1958.
- [Mat59] MATHEWS, P.M.: *Vibrations of a beam on elastic foundation II*. *ZAMM*, 39(1/2):13–19, 1959.
- [MB88] MANOLIS, G.D. und D.E. BESKOS: *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. Unwin Hyman, London, 1988.
- [MBH96] MADSHUS, C., B. BESSASON und L. HARIV: *Prediction model for low frequency vibration from high speed railways on soft ground*. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):195–203, 1996.
- [Mül89] MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 25, Technische Universität München, 1989.
- [Mül90] MÜLLER, G.: *Soil-vibration and radiation of energy under a harmonic load on the soil-surface*. In: KRÄTZIG, W.B. ET. AL. (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '90*, Seiten 723–729, Rotterdam, 1990. A.A. Balkema.
- [Mül96] MÜLLER, S.: *Response of Periodically Supported Tracks to Moving Railway Vehicles - A Generalization of Jezequel's Solution*. *ZAMM*, 76(S4):157–160, 1996.
- [Nad25] NADAI, A.: *Die elastischen Platten*. Springer Verlag, Berlin, 1925.

- [Nat89] NATKE, H.G.: *Baudynamik*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1989.
- [Nei96] NEIDHART, T.: *Untergrundverformungen und Feste Fahrbahn*. Eisenbahningenieur, 47:16–22, April 1996.
- [NI95] NIELSEN, J.C.O. und A. IGELAND: *Vertical dynamic interaction between train and track - influence of wheel and track imperfections*. Journal of Sound and Vibration, 187(5):825–839, 1995.
- [Pfl99] PFLANZ, G.: *Wellenausbreitung in elastischen Kontinua infolge sich bewegender Lasten*. In: SCHMID, G. (Herausgeber): *Computational Structural Dynamics. Graduiertenkolleg an der Ruhr-Universität Bochum 1991-1999.*, Seiten 244–253. Fortschritt-Berichte, Reihe 18, Nr. 244, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1999.
- [PHT90] PRANGE, B., G. HUBER und TH. TRIANTAFYLLIDIS: *Baugrunddynamische Probleme beim Rad-Schiene-System*. In: JESSBERGER (Herausgeber): *Vorträge der Dt. Baugrundtagung DGEG Mainz*, Seiten 9–45, 1990.
- [PKK99] POPP, K., H. KRUSE und I. KAISER: *Vehicle-Track Dynamics in the Mid-Frequency Range*. Vehicle System Dynamics, 31:423–464, 1999.
- [PS93] POPP, K. und W. SCHIEHLEN: *Fahrzeugdynamik*. B.G. Teubner, 1993.
- [Ray85] RAYLEIGH, L.: *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*. London math. soc. proc., 17, 1885.
- [Reh95] REHFELD, E.: *Untergrundbeschaffenheit - Anforderungen für den Einsatz Fester Fahrbahnen*. Eisenbahningenieur, 46:258–264, April 1995.
- [Rei36] REISSNER, E.: *Stationäre, azialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes*. Ingenieur-Archiv, VII:381–396, 1936.
- [Rei37] REISSNER, E.: *Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes*. Ingenieur-Archiv, VIII(4):229–245, 1937.
- [Rip95] RIPKE, B.: *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleisdynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Düsseldorf, 1995.
- [RK91] RIPKE, B. und K. KNOTHE: *Die unendlich lange Schiene auf diskreten Schwellen bei harmonischer Einzellasterregung*. Technischer Bericht Reihe 11 Nr. 155, Fortschritt-Berichte VDI, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [Ros94] ROSEN, B.: *Bodenerschütterungen aus Schienenverkehr*. Diplomarbeit, Theorie der Tragwerke und Simulationstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [Rub88] RUBIN, H.: *Eine einheitliche Formulierung des ebenen Stabproblems bei Berücksichtigung von M- und Q-Verformungen, Theorie I. und II. Ordnung, elastischer Bettung einschließlich Drehbettung sowie harmonischen Schwingungen*. Bauingenieur, 63:pp. 195–204, 1988.

- [Rüc81] RÜCKER, W.: *Dynamische Wechselwirkung eines Schienen-Schwellensystems mit dem Untergrund*. Technischer Bericht 78, Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin, 1981.
- [Rüc99] RÜCKER, W.: *Kurzzeitdynamik und Setzungsverhalten der Festen Fahrbahn*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [Sar94] SARFELD, W.: *Numerische Verfahren zur dynamischen Boden-Bauwerk Interaktion*. Doktorarbeit, TU Berlin, 1994.
- [Sat97] SATO, Y.: *Japanese studies on track vibration*. Workshop "Track Mechanics and Track Deterioration", November 27, 1997, TU Berlin, 1997.
- [SBBH99] SAVIDIS, S.A., S. BERGMANN, C. BODE und R. HIRSCHAUER: *Dynamische Wechselwirkung zwischen der Festen Fahrbahn und dem geschichteten Untergrund*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [SBHH99] SAVIDIS, S., C. BODE, R. HIRSCHAUER und J. HORNIG: *Dynamic soil-structure-interaction with partial uplift*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 957–962, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [Sch96] SCHÄPERTÖNS, B.: *Über die Wellenausbreitung im Baugrund und deren Einfluß auf das Tragverhalten von flüssigkeitsgefüllten Behältern*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 9/96, Technische Universität München, 1996.
- [Sib92] SIBAEI, Z.: *Vertikale Gleisdynamik beim Abrollen eines Radsatzes - Behandlung im Frequenzbereich*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Düsseldorf, 1992.
- [Sie99a] SIEGMANN, J. (Herausgeber): *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, Berlin, 1999.
- [Sie99b] SIEGMANN, J.: *Feste Fahrbahn als Teil der Unternehmensstrategie der DB Netz AG*. In: *Feste Fahrbahn - Mechanische Modellierung. Betriebserfahrung und Akustik - Symposium 04./05. November 1999, TU Berlin*, 1999.
- [SJP99a] SHENG, X., C.J.C. JONES und M. PETYT: *Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track*. Journal of Sound and Vibration, 225(1):3–28, 1999.
- [SJP99b] SHENG, X., C.J.C. JONES und M. PETYT: *Ground vibration generated by a load moving along a railway track*. Journal of Sound and Vibration, 228(1):129–156, 1999.
- [Sto49] STOKES, G.G.: *On the dynamical theory of diffraction*. Trans. Cambridge Philos. Soc., 9:1–62, 1849.

- [Sud96] SUDRET, B.: *Die Wechselwirkung eines unendlichen Balkens mit dem Halbraum unter bewegter Belastung*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, 1996.
- [Szo98] SZOLC, T.: *Medium frequency dynamic investigation of the railway wheelset-track system using a discrete-continuous model*. *Archive of Applied Mechanics*, 68:30–45, 1998.
- [Tam92] TAMBOREK, A.: *Erschütterungsausbreitung vom Rad/Schiene-System bei Damm, Einschnitt und Ebene*. Doktorarbeit, Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericana in Karlsruhe, Heft 127, 1992.
- [TP94a] TRIANTAFYLIDIS, T. und B. PRANGE: *Mitgeführte Biegelinie beim Hochgeschwindigkeitszug ICE - Teil I: Theoretische Grundlagen*. *Ingenieur-Archiv*, 64(3):154–168, März 1994.
- [TP94b] TRIANTAFYLIDIS, T. und B. PRANGE: *Mitgeführte Biegelinie beim Hochgeschwindigkeitszug ICE - Teil II: Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen*. *Ingenieur-Archiv*, 64(3):169–179, 1994.
- [Tri84] TRIANTAFYLIDIS, T.: *Analytische Lösung des Problems der dynamischen Untergroundkopplung starrer Fundamente*. Doktorarbeit, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Universität Fridericana Karlsruhe, Heft 97, 1984.
- [Tri89] TRIANTAFYLIDIS, T.: *Halbraumlösungen zur Behandlung bodendynamischer Probleme mit der Randelementmethode*. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Universität Fridericana Karlsruhe, Heft 116, 1989. Habilitationsschrift.
- [Tro00] TROMMER, E.: *Wave propagation in the subgrade due to moving loads - applications to the dynamic analysis of railway tracks*. In: *Proceedings of the XXVIII Summer School APM 2000, Actual Problems in Mechanics, St. Petersburg, Russia, June 1-10, 2000*.
- [TY99] TAKEMIYA, H. und S. YUASA: *Lineside ground vibrations induced by high-speed train and mitigation measure WIB*. In: FRÝBA, L. und J. NÁPRSTEK (Herausgeber): *Structural Dynamics, Eurodyn '99*, Seiten 821–826, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.
- [TZ96] THAMBIRATNAM, D. und Y. ZHUGE: *Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads*. *Journal of Sound and Vibration*, 198(2):149–169, 1996.
- [Waa72] WAAS, G.: *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinite Layered Media*. Doktorarbeit, University of California, Berkeley, 1972.
- [Wol85] WOLF, J. P.: *Dynamic soil-structure interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [WS96] WOLF, J. P. und C. SONG: *Finite-Element Modelling of unbounded media*. John Wiley and Sons, Chichester, 1996.

- [Wu97] WU, Y.: *Semianalytische Gleismodelle zur Simulation der mittel- und hochfrequenten Fahrzeug/Fahrweg-Dynamik*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Düsseldorf, 1997.
- [Zim53] ZIMMERMANN, H.: *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1953. Nachdruck der 3. Auflage von 1941.
- [Zir96] ZIRWAS, G.: *Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Bodenwechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Institut f. Bauingenieurwesen I, Heft 10/96, Technische Universität München, 1996.

Anhang A

Fouriertransformation

A.1 Definition

Fourierhinttransformation

Die einfache Fourier-Hin-Transformation (kurz auch Fouriertransformation oder FT, engl.: direct Fourier transform) wird mit dem Symbol $\circ\!\!\!\rightarrow\bullet$ bezeichnet und ist definiert als:

$$\hat{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad . \quad (\text{A.1})$$

Fourierrücktransformation

Die einfache Fourier-Rück-Transformation (auch inverse Fouriertransformation oder FRT, engl.: inverse Fourier transform) wird mit dem Symbol $\bullet\!\!\!\rightarrow\circ$ bezeichnet und ist definiert zu:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad . \quad (\text{A.2})$$

Transformierte Größen werden mit einem Dach ($\hat{}$) gekennzeichnet.

A.2 Rechenregeln

Multiplikation - Faltung

Eine Faltung wird mit dem Symbol $*$ bezeichnet und ist definiert durch die Rechenvorschrift

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \quad . \quad (\text{A.3})$$

Eine Multiplikation in einem der beiden Räume führt auf eine Faltung im anderen Raum.

$$f(x) \cdot g(x) \quad \circ\!\!\!\rightarrow\bullet \quad \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_x) * \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.4})$$

$$f(x) * g(x) \quad \circ\!\!\!\rightarrow\bullet \quad \hat{f}(k_x) \cdot \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.5})$$

Differentiation

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (i k_x)^n \hat{f}(k_x) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^n}{dk_x^n} \hat{f}(k_x) \quad \bullet \text{---} \circ \quad (-i x)^n f(x) \quad (\text{A.7})$$

Maßstabsänderung/Dilatation

$$f(ax) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{f}(ak_x) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{|a|} \left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.9})$$

Verschiebung/Translation

$$f(x - b) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \hat{f}(k_x) e^{-ibk_x} \quad (\text{A.10})$$

$$f(k_x - b) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(x) e^{ibx} \quad (\text{A.11})$$

$$(\text{A.12})$$

Kombinierte Dilatation - Translation

$$f(ax - b) = f(a(x - b/a)) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) e^{-ibk_x/a} \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{f}(ak_x - b) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{|a|} \left(\frac{x}{a}\right) e^{ibx/a} \quad (\text{A.14})$$

A.3 Ausgewählte Funktionen**Dirac-Distribution**

Die Dirac- δ -Distribution wird üblicherweise (siehe [Dud97]) definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (\text{A.15})$$

und geht durch Fouriertransformation über in den Wert Eins.

$$\delta(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1 \quad (\text{A.16})$$

Rechteckdistribution

Die Rechteckdistribution kann durch zwei entgegengesetzte Heaviside-Distributionen (Einheitsprungfunktion, bezeichnet mit H) beschrieben werden.

$$H(x+a) - H(x-a) \circ\!\!\!\bullet \ 2 \frac{\sin(ak_x)}{k_x} \quad (\text{A.17})$$

Sinusfunktion

$$\sin(\Omega t) \circ\!\!\!\bullet \ i \pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.18})$$

Cosinusfunktion

$$\cos(\Omega t) \circ\!\!\!\bullet \ \pi (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.19})$$

Anhang B

Legendre - Polynome

Die Definition der Legendre-Polynome ist Bronstein [BS89] entnommen:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{B.1})$$

$$P_0(x) = 1 \quad (\text{B.2})$$

Die Legendre-Polynome sind zueinander orthogonale Funktionen im Intervall $[-1, 1]$.

$$\int_{x=-1}^{x=1} P_i(x) P_j(x) dx \begin{cases} \neq 0 & , \forall i = j \\ = 0 & , \forall i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Im Hinblick auf die Verwendung der Legendre-Polynome als Ansatzfunktionen der Lastverteilung unter der Tragplatte der Breite b werden die Legendre-Polynome in skaliert Form verwendet, so daß am Rand der Platte ($\pm b/2$) als Absolutwert Eins auftritt. Die Substitution $x = y/(b/2)$ führt auf die folgenden Ausdrücke:

$$P_0(y) = 1$$

$$P_1(y) = 2 \frac{y}{b}$$

$$P_2(y) = 6 \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{2}$$

$$P_3(y) = 20 \frac{y^3}{b^3} - 3 \frac{y}{b}$$

$$P_4(y) = 70 \frac{y^4}{b^4} - 15 \frac{y^2}{b^2} + \frac{3}{8}$$

$$P_5(y) = 252 \frac{y^5}{b^5} - 70 \frac{y^3}{b^3} + \frac{15}{4} \frac{y}{b}$$

$$P_6(y) = 924 \frac{y^6}{b^6} - 315 \frac{y^4}{b^4} + \frac{105}{4} \frac{y^2}{b^2} - \frac{5}{16}$$

$$P_7(y) = 3432 \frac{y^7}{b^7} - 1386 \frac{y^5}{b^5} + \frac{315}{2} \frac{y^3}{b^3} - \frac{35}{8} \frac{y}{b}$$

$$\begin{aligned}
P_8(y) &= 12870 \frac{y^8}{b^8} - 6006 \frac{y^6}{b^6} + \frac{3465}{4} \frac{y^4}{b^4} - \frac{315}{8} \frac{y^2}{b^2} + \frac{35}{128} \\
P_9(y) &= 48620 \frac{y^9}{b^9} - 25740 \frac{y^7}{b^7} + \frac{9009}{2} \frac{y^5}{b^5} - \frac{1155}{4} \frac{y^3}{b^3} + \frac{315}{64} \frac{y}{b} \\
P_{10}(y) &= 184756 \frac{y^{10}}{b^{10}} - 109395 \frac{y^8}{b^8} + \frac{45045}{2} \frac{y^6}{b^6} - \frac{15015}{8} \frac{y^4}{b^4} + \frac{3465}{64} \frac{y^2}{b^2} - \frac{63}{256} \\
P_{11}(y) &= 705432 \frac{y^{11}}{b^{11}} - 461890 \frac{y^9}{b^9} + 109395 \frac{y^7}{b^7} - \frac{45045}{4} \frac{y^5}{b^5} + \frac{15015}{32} \frac{y^3}{b^3} - \frac{693}{128} \frac{y}{b}
\end{aligned}$$

Die Legendre-Polynome weisen zwei weitere charakteristische Merkmale auf. Die Resultierende aller Polynome mit einem Grad größer gleich Eins ist gleich Null. Das einzige Polynom, das ein resultierendes Moment aufweist, ist das erste Polynom.

$$\int_{-b/2}^{b/2} P_n(y) dy = \begin{cases} b & , \text{ falls } n = 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} P_n(y) y dy = \begin{cases} \frac{1}{6} b^2 & , \text{ falls } n = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

In die Lösung der transformierten Verschiebungen infolge harmonischer Lasten geht direkt die nach den Ortskoordinaten transformierte Belastungsfunktion ein. Werden die Legendre-Polynome als über die Breite der Platte beschränkt angesetzt¹, so können die fouriertransformierten Funktionen ($y \circ \bullet k_y$) wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{P}_0(k_y) = 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right)}{k_y}$$

$$\hat{P}_1(k_y) = \frac{I \left(-4 \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) + 2 k_y b \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right)}{b k_y^2}$$

$$\hat{P}_2(k_y) = \frac{(2 b^2 k_y^2 - 24) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) + 12 k_y b \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right)}{b^2 k_y^3}$$

$$\hat{P}_3(k_y) = I \left((-24 b^2 k_y^2 + 240) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) + (2 b^3 k_y^3 - 120 k_y b) \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right) / (b^3 k_y^4)$$

$$\begin{aligned}
\hat{P}_4(k_y) &= \left((2 b^4 k_y^4 - 360 b^2 k_y^2 + 3360) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right. \\
&\quad \left. + (40 b^3 k_y^3 - 1680 k_y b) \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right) / (b^4 k_y^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{P}_5(k_y) &= I \left((-60 b^4 k_y^4 + 6720 b^2 k_y^2 - 60480) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right. \\
&\quad \left. + (2 b^5 k_y^5 - 840 b^3 k_y^3 + 30240 k_y b) \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right) / (b^5 k_y^6)
\end{aligned}$$

¹Dies entspricht einer Multiplikation mit $H(y + b/2) - H(y - b/2)$.

$$\hat{P}_6(k_y) = \left((2b^6 k_y^6 - 1680b^4 k_y^4 + 151200b^2 k_y^2 - 1330560) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) + (84b^5 k_y^5 - 20160b^3 k_y^3 + 665280k_y b) \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right) / (b^6 k_y^7)$$

$$\hat{P}_7(k_y) = I \left((-112b^6 k_y^6 + 50400b^4 k_y^4 - 3991680b^2 k_y^2 + 34594560) \sin\left(\frac{1}{2} k_y b\right) + (2b^7 k_y^7 - 3024b^5 k_y^5 + 554400b^3 k_y^3 - 17297280k_y b) \cos\left(\frac{1}{2} k_y b\right) \right) / (b^7 k_y^8)$$

$$\hat{P}_8(k_y) = \left((2b^8 k_y^8 - 5040b^6 k_y^6 + 1663200b^4 k_y^4 - 121080960b^2 k_y^2 + 1037836800) \sin\left(\frac{1}{2} b k y\right) + (144b^7 k_y^7 - 110880b^5 k_y^5 + 17297280b^3 k_y^3 - 518918400b k y) \cos\left(\frac{1}{2} b k y\right) \right) / (b^8 k_y^9)$$

$$\hat{P}_9(k_y) = I \left((-180b^8 k_y^8 + 221760b^6 k_y^6 - 60540480b^4 k_y^4 + 4151347200b^2 k_y^2 - 35286451200) \sin\left(\frac{1}{2} b k y\right) + (2b^9 k_y^9 - 7920b^7 k_y^7 + 4324320b^5 k_y^5 - 605404800b^3 k_y^3 + 17643225600b k y) \cos\left(\frac{1}{2} b k y\right) \right) / (b^9 k_y^{10})$$

$$\hat{P}_{10}(k_y) = \left((2b^{10} k_y^{10} - 11880b^8 k_y^8 + 10090080b^6 k_y^6 - 2421619200b^4 k_y^4 + 158789030400b^2 k_y^2 - 1340885145600) \sin\left(\frac{1}{2} b k y\right) + (220b^9 k_y^9 - 411840b^7 k_y^7 + 181621440b^5 k_y^5 - 23524300800b^3 k_y^3 + 670442572800b k y) \cos\left(\frac{1}{2} b k y\right) \right) / (b^{10} k_y^{11})$$

$$\hat{P}_{11}(k_y) = I \left((-264b^{10} k_y^{10} + 720720b^8 k_y^8 - 484323840b^6 k_y^6 + 105859353600b^4 k_y^4 - 6704425728000b^2 k_y^2 + 56317176115200) \sin\left(\frac{1}{2} b k y\right) + (2b^{11} k_y^{11} - 17160b^9 k_y^9 + 21621600b^7 k_y^7 - 8233505280b^5 k_y^5 + 1005663859200b^3 k_y^3 - 28158588057600b k y) \cos\left(\frac{1}{2} b k y\right) \right) / (b^{11} k_y^{12})$$

Anhang C

Erweiterte Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens

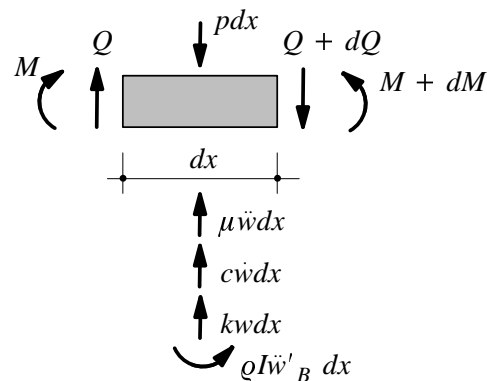


Abbildung C.1: Differentielles Balkenelement auf elastischer Bettung

Zunächst wird ein differentielles Balkenelement gemäss Abbildung C.1 freigeschnitten und die Beziehungen für Gleichgewicht (C.1, C.2), Kinematik (C.3) und Stoffgesetz (C.4, C.5) in den Variablen w_B (Durchbiegung infolge Biegemoment) und w_Q (Durchbiegung infolge Querkraft) angeschrieben:

$$-Q(x, t)' + \rho A \ddot{w}(x, t) + c \dot{w}(x, t) + kw(x, t) = p(x, t) \quad , \quad (\text{C.1})$$

$$Q(x, t) = M'(x, t) + \rho I \ddot{w}'_B(x, t) \quad (\text{C.2})$$

$$w(x, t) = w_B(x, t) + w_Q(x, t) \quad (\text{C.3})$$

$$M(x, t) = -EI w''_B(x, t) \quad (\text{C.4})$$

$$Q(x, t) = GA_Q w'_Q(x, t) \quad (\text{C.5})$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
& EIw''''(x, t) - \rho I\ddot{w}''(x, t) + \rho A[\dot{w}(x, t) - \frac{EI}{GA_Q}\dot{w}''(x, t) + \frac{\rho I}{GA_Q}\dot{w}'(x, t)] + \\
& + c[\dot{w}(x, t) - \frac{EI}{GA_Q}\dot{w}''(x, t) + \frac{\rho I}{GA_Q}\dot{w}'(x, t)] + \\
& + k[w(x, t) - \frac{EI}{GA_Q}w''(x, t) + \frac{\rho I}{GA_Q}\dot{w}'(x, t)] = \\
& = p(x, t) - \frac{EI}{GA_Q}p''(x, t) + \frac{\rho I}{GA_Q}\dot{p}'(x, t) \quad . \quad (C.6)
\end{aligned}$$

Die zweifach fouriertransformierte Form ($x \circ \bullet k_x, t \circ \bullet \omega$) lautet:

$$\begin{aligned}
& [k_x^4 EI_1 - \kappa_{R1} + (-\omega^2 \rho A_1 + i\omega c_p + k_p)(1 + \kappa_{Q1} + \kappa_{QR1})]w_1(k_x, \omega) - \\
& - [(i\omega c_p + k_p)(1 + \kappa_{Q1} + \kappa_{QR1})]w_2(k_x, \omega) = [1 + \kappa_{Q1} + \kappa_{QR1}]p(k_x, \omega) \quad , \quad (C.7)
\end{aligned}$$

In dieser Form sind die Einflüsse der Schubverformung (Q), der Rotationsträgheit (R) und die gegenseitige Beeinflussung zwischen Schubverformung und Rotationsträgheit (QR) durch folgende Faktoren beschrieben:

$$\begin{aligned}
\kappa_{Q1} &= k_x^2 \frac{EI_1}{GA_{Q1}} \\
\kappa_{R1} &= k_x^2 \omega^2 \rho I_1 \\
\kappa_{QR1} &= -\omega^2 \frac{\rho I_1}{GA_{Q1}} \quad .
\end{aligned}$$

Werden diese Faktoren zu Null gesetzt, so folgt wieder die Form, in der nur die Biegesteifigkeit und die Massenträgheit berücksichtigt ist.

Eine Kopplung der so beschriebenen Balken zu einem Oberbaummodell ist wieder ohne weitere Probleme entsprechend der in Kapitel 3 gezeigten Vorgehensweise möglich.

Anhang D

Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung nach Rubin

In dieser Darstellung wird die leicht modifizierte Schreibweise dieser Arbeit verwendet. Die Lösungen sind Rubin [Rub88] entnommen.

Hier sollen die möglichen Lösungen der Differentialgleichung

$$w'''' - K_1 w'' - K_2 w = \sum_{j=f}^n p_j a_{j-f} \quad (\text{D.1})$$

zusammengestellt werden. Die Lastfunktion setzt sich aus den Koeffizienten p_j und den Funktionen $a_i(y)$ zusammen, wobei gilt:

$$a_0 = 1, \quad a_i = \frac{y^i}{i!} \quad \forall i > 1, \quad a_i = 0 \quad \forall i < 1. \quad (\text{D.2})$$

Die Lösung ist die Summe aus der homogenen Lösung w_H und der partikulären Lösung w_P .

$$w = w_H + w_P = \sum_{i=0}^3 C_i b_i + \sum_{j=f}^n p_j b_{j-f+4} \quad (\text{D.3})$$

Die b_i stellen eindeutige Lösungsfunktionen dar und die C_i stehen für die unbekanntenen Konstanten, die wiederum durch die unbekanntenen Anfangsbedingungen (Stelle A , $y = 0$) ausgedrückt werden können.

$$C_0 = w_A, \quad C_1 = w'_A, \quad C_2 = w''_A - K_1 w_A, \quad C_3 = w'''_A - K_1 w'_A \quad (\text{D.4})$$

Durch Betrachtung der beim vorliegenden Problem speziellen Konstanten K_1 und K_2 und des von Rubin definierten Zusatzparameters

$$r = \frac{1}{4} K_1^2 + K_2$$

können die bei Rubin mit C, E, F, F1, H, I bezeichneten Fälle entfallen.

Es verbleiben noch fünf Lösungen, die im folgenden zusammengestellt sind.

Fall A: $K_1 = \text{beliebig}$, $K_2 > 0$, $r = \text{beliebig}$

$$f = \sqrt{\sqrt{r} + \frac{K_1}{2}} \quad g = \sqrt{\sqrt{r} - \frac{K_1}{2}}$$

$$b_0 = \frac{f^2 \cosh fy + g^2 \cos gy}{2\sqrt{r}} \quad b_1 = \frac{f \sinh fy + g \sin gy}{2\sqrt{r}} \quad b_2 = \frac{\cosh fy - \cos gy}{2\sqrt{r}} \quad b_3 = \frac{\frac{1}{f} \sinh fy - \frac{1}{g} \sin gy}{2\sqrt{r}}$$

$$b_{j+4} = \frac{1}{K_2}(b_j - a_j - K_1 b_{j+2}) \quad \forall j \geq 0$$

Fall A1: $K_1 = 0$, $K_2 > 0$, $r = \text{beliebig}$

$$f = \sqrt[4]{K_2}$$

$$b_0 = \frac{\cosh fy + \cos fy}{2} \quad b_1 = \frac{\sinh fy + \sin fy}{2f} \quad b_2 = \frac{\cosh fy - \cos fy}{2f^2} \quad b_3 = \frac{\sinh fy - \sin fy}{2f^3}$$

$$b_{j+4} = \frac{1}{K_2}(b_j - a_j - K_1 b_{j+2}) \quad \forall j \geq 0$$

Fall B: $K_1 > 0$, $K_2 < 0$, $r > 0$

$$f = \sqrt{\frac{K_1}{2} + \sqrt{r}} \quad g = \sqrt{\frac{K_1}{2} - \sqrt{r}}$$

$$b_0 = \frac{f^2 \cosh fy - g^2 \cosh gy}{2\sqrt{r}} \quad b_1 = \frac{f \sinh fy - g \sinh gy}{2\sqrt{r}} \quad b_2 = \frac{\cosh fy - \cosh gy}{2\sqrt{r}} \quad b_3 = \frac{\frac{1}{f} \sinh fy - \frac{1}{g} \sinh gy}{2\sqrt{r}}$$

$$b_{j+4} = \frac{1}{K_2}(b_j - a_j - K_1 b_{j+2}) \quad \forall j \geq 0$$

Fall D: $K_1 > 0$, $K_2 < 0$, $r = 0$

$$f = \sqrt{\frac{K_1}{2}}$$

$$b_0 = \cosh fy + \frac{fy}{2} \sinh fy \quad b_1 = \frac{y \cosh fy + \frac{1}{f} \sinh fy}{2} \quad b_2 = \frac{y \sinh fy}{2f} \quad b_3 = \frac{y \cosh fy - \frac{1}{f} \sinh fy}{2f^2}$$

$$b_{j+4} = \frac{1}{K_2}(b_j - a_j - K_1 b_{j+2}) \quad \forall j \geq 0$$

Fall G: $K_1 > 0$, $K_2 = 0$, $r = \text{beliebig}$

$$f = \sqrt{K_1}$$

$$b_0 = \cosh fy \quad b_1 = \frac{\sinh fy}{f}$$

$$b_{j+2} = \frac{1}{K_1}(b_j - a_j) \quad \forall j \geq 0$$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Systemskizze zur bewegten harmonischen Belastung auf dem Halbraum	25
3.1	Eindimensionale Oberbaumodelle für Vertikaldynamik. Links: Feste Fahrbahn, rechts: Schotteroberbau.	32
3.2	Schwingerkette und Drehgestellmodell als Fahrzeugmodelle	38
3.3	Dynamische Interaktion zwischen Fahrzeug und Oberbau bei Anregung durch Imperfektionen	42
4.1	Systemskizze zum Streifenverfahren bei in Querrichtung starrem Balken	53
4.2	Vertikalverformung infolge einer Streifenlast ist gleichzeitig Einflußlinie für alle anderen Streifenlasten.	54
4.3	Systemskizze zum Ansatz von Legendre-Polynomen bei in Querrichtung starrem Balken	55
4.4	Aufteilung des Legendre-Polynoms 2. Grades in Laststreifen	58
4.5	Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil. Ansicht der halben Balkenbreite (oben) und Detailausschnitt am Rand $y = [1.4, 1.8]$ (unten) .	59
4.6	Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil. Detailausschnitt $y = [0.4, 1.4]$	60
4.7	Legendre-Polynome: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (oben: 1-6, unten: 4-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.	60
4.8	Streifenverfahren: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Streifenbreiten (0.04, 0.08, 0.2 m) bei einer Frequenz von $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 2 \text{ m}^{-1}$. $u_{z,soll} = 1 + 0 i$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.	61

4.9	Legendre-Polynome: Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (1-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 2 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.	61
4.10	Sohlspannungsverteilung unter dem Balken bei Streifenbreiten von 0.04 m ($n_s = 90$) und 0.20 m ($n_s = 18$) und bei Legendre-Polynomen (6 Ansatzfunktionen) bei $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ und $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil	62
4.11	Sohlspannungsverteilung unter dem Balken bei Streifenbreiten von 0.04 m ($n_s = 90$) und 0.20 m ($n_s = 18$) und bei Legendre-Polynomen (6 Ansatzfunktionen) bei $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ und $k_x = 2 \text{ m}^{-1}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil	62
4.12	Streifenverfahren: Vergleich der Fehler für verschiedene Streifenbreiten ($0.04, 0.08, 0.2 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$. Links: $\Omega = 10 \text{ rad/s}$, rechts: $\Omega = 200 \text{ rad/s}$	63
4.13	Legendre-Polynome: Vergleich der Fehler für eine verschiedene Anzahl von Ansatzfunktionen bei einer Frequenz von $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$. Links: 1 bis 3 Ansatzfunktionen, rechts: 3 bis 6 Ansatzfunktionen.	63
4.14	Vergleich der Fehler für verschiedene Frequenzen für Streifenverfahren (links) und Legendre-Polynome (rechts) in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$	64
4.15	Vergleich der Fehler für verschiedene Frequenzen für Legendre-Polynome in Abhängigkeit der Wellenzahl k_x . Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$	65
4.16	Vergleich der Vertikalverschiebungen für verschiedene Anzahlen von Ansatzfunktionen (1-6) bei einer Frequenz von $\Omega = 80 \text{ rad/s}$ für die Wellenzahl $k_x = 0 \text{ m}^{-1}$. Streifenbreite 0.04 m . $u_{z,soll} = 1 + 0 \text{ i}$. Links: Realteil, rechts: Imaginärteil.	66
4.17	Vergleich der Vertikalverschiebungen eines Balken auf Halbraumfedern und der Halbraumberechnung infolge zugehöriger Spannungsverteilung, Links: Realteil, Rechts: Imaginärteil, Beispiel mit Einzellast auf Balken auf Halbraum ($v = 40 \text{ m/s}, \Omega = 100 \text{ rad/s}$).	67
4.18	Vergleich der Vertikalverschiebungen eines Balken auf Halbraumfedern und der Halbraumberechnung infolge zugehöriger Spannungsverteilung, Links: Realteil, Rechts: Imaginärteil, Beispiel mit Einzellast auf Balken auf Halbraum ($v = 70 \text{ m/s}, \Omega = 250 \text{ rad/s}$).	68
5.1	Verschiedene Ansatzfunktionen für die Lastverteilung in Querrichtung je nach Lastrichtung	72
5.2	Vergleich der Maximalamplituden der Vertikalverschiebung der Halbraumoberfläche mit und ohne Berücksichtigung der Querverschiebungsbehinderung in $y = 0 \text{ m}$ und $y = 32 \text{ m}$ im mitbewegten Koordinatensystem.	74

5.3	Vergleich der Realteile der Vertikalverschiebungen der Tragplatte mit und ohne Berücksichtigung der Querverschiebungsbehinderung für 10 Hz (links) und 50 Hz (rechts).	74
6.1	Systemskizze der in Längsrichtung unendlichen Platte auf dem Halbraum	75
6.2	Kopplung eines Plattenmodells mit dem Halbraum in Querrichtung	76
6.3	Definition der Koordinatenrichtungen, Verschiebungen und Schnittgrößen der Platte	77
6.4	Einzellasten als äußere Einwirkung auf der Platte	83
6.5	Zuordnung der Bauelemente zur mechanischen Modellierung. Links: Balkenmodell, rechts: Plattenmodell	86
7.1	Amplituden der Vertikalverschiebungen der Schiene und der Tragplatte (Balkenmodell), Anregung durch statische Überfahrt und die ersten drei Radunrundheiten	89
7.2	Vergleich der Amplituden der Vertikalverschiebungen der Schiene und der Tragplatte bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells; oben: Schienenverschiebungen, unten: Verschiebungen der Tragplatte; links: jeweils statische Überfahrt, rechts: jeweils Anregung durch 3. Radunrundheit	90
7.3	Vergleich des Realteils der Biegelinie der Tragplatte in Längsrichtung für Plattenmitte, Angriffspunkt der Last und Plattenrand; links: Anregung durch 1. Radunrundheit, rechts: 3. Radunrundheit	90
7.4	Vertikalverschiebung der Platte für verschiedene Stellen in Längsrichtung ($x = -9.5, -1.0, 2.5 m$); links: Realteil, rechts: Imaginärteil	91
7.5	Frequenzspektrum der Amplituden der Vertikalverschiebung der Schiene (links) und der Schwinggeschwindigkeiten (rechts) am Fixpunkt $x = 0$ infolge der statischen Überfahrt und der ersten drei Radunrundheiten (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 Hz$).	91
7.6	Frequenzspektrum der Amplituden der Vertikalverschiebung der Schiene am Fixpunkt $x = 0$ infolge der ersten drei Radunrundheiten (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 Hz$).	92
7.7	Vergleich des Frequenzspektrums der Schwinggeschwindigkeiten der Schiene infolge der Überfahrt einer Schwingerkette und vier Schwingerketten mit der 3. Radunrundheit (diskrete Auswertung, $\Delta f = 1 Hz$).	92
7.8	Normierte Vertikalverschiebungen in Abhängigkeit der bezogenen Fahrgeschwindigkeit infolge statischer Überfahrt; Vergleich für verschiedene Achszahl (links) und verschiedene Scherwellengeschwindigkeiten (rechts)	93
7.9	Rezeptanz der Schiene für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300 m/s$ (Balkenmodell). Links: Bereich von 0 – 500 Hz, rechts: Detailausschnitt	94

7.10	Vergleich der Rezeptanz der Schiene bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells für die Scherwellengeschwindigkeiten von $c_s = 70 \text{ m/s}$ (links) und $c_s = 150 \text{ m/s}$ (rechts)	94
7.11	Rezeptanz der Platte für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300 \text{ m/s}$ (oben links, Balkenmodell) und Vergleich der Rezeptanz der Platte bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells für die einzelnen Scherwellengeschwindigkeiten (Reduzierter Frequenzbereich bei den Vergleichen)	96
7.12	Links: Kontaktkraft zwischen Schiene und Radsatz für Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes von $c_s = 70, 150, 300 \text{ m/s}$ bei einer Vertikalstörung von $\Delta z = 0.1 \text{ mm} = \textit{konst.}$ Rechts: Vergleich der Kontaktkraft bei Verwendung eines Balkenmodells und eines Plattenmodells bei $c_s = 150 \text{ m/s}$	97
7.13	Transformiertes Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche ($y = 0 \text{ m}$) infolge des Legendre-Polynoms nullten Grades (jeweils links) und transformierte Vertikalspannungen des Legendre-Polynoms nullten Grades (jeweils rechts) im Wellenzahlbereich für verschiedene Anregungsfrequenzen ($f_1 = 17.68 \text{ Hz}$, oben; $f_3 = 53.05 \text{ Hz}$, unten)	98
7.14	Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der statischen Überfahrt zweier Drehgestelle, Realteil	99
7.15	Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der 1. Radunrundheit bei vier Achsen, Imaginärteil	99
7.16	Verschiebungsfeld der Halbraumoberfläche infolge der 3. Radunrundheit bei vier Achsen, Imaginärteil	100
7.17	Amplitudenspektrum der Schwinggeschwindigkeiten am Punkt $x = 0 \text{ m}, y = 20 \text{ m}$ infolge der statischen Überfahrt und der ersten drei Radunrundheiten (Balkenmodell)	101
7.18	Vergleich des Amplitudenspektrums der Schwinggeschwindigkeiten infolge der 1. Radunrundheit (links) und der 3. Radunrundheit (rechts) in den Entfernungen $y = 0, 10, 20 \text{ m}$ (Balkenmodell)	101
7.19	Vergleich des Amplitudenspektrums der Schwinggeschwindigkeiten infolge der 1. Radunrundheit (links) und der 3. Radunrundheit (rechts) für Balkenmodell und Plattenmodell	101
7.20	Verschiebungsfeld der Tragplatte beim zweigleisigen Oberbau infolge der 1. Radunrundheit, 1 Schwingerkette, Imaginärteil	102
7.21	Verschiebungsfeld der Tragplatte beim zweigleisigen Oberbau infolge der 3. Radunrundheit, 1 Schwingerkette, Imaginärteil	103
C.1	Differentielles Balkenelement auf elastischer Bettung	122