

Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München

**Stochastische Dynamik von Rahmentragwerken
mit hysteretischem Materialverhalten
Untersuchungen in reduzierter orthogonaler Basis**

Johann Michael Guggenberger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann
2. apl. Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Rackwitz

Die Dissertation wurde am 27. November 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 29. April 2004 angenommen.

Stochastische Dynamik von Rahmentragwerken mit hysteretischem Materialverhalten

Untersuchungen in reduzierter orthogonaler Basis

Zusammenfassung

Untersucht werden große Rahmensysteme unter stochastischer dynamischer Anregung. Treten bei Balkenbiegung lokale Plastizierungen auf, äußern sich diese durch örtlich hohe Krümmungen mit der Ausbildung hysteretischen Materialverhaltens. Um wie im linearen Fall eine Reduktion im Modalraum herbeiführen zu können, wird die modale Basis durch plastische Formfunktionen erweitert, die speziell den lokal auftretenden Krümmungen angepasst sind. Die Antwort wird nach dem Galerkin-Verfahren berechnet. Das hohe Reduktionspotential ermöglicht z.B. eine Monte Carlo Simulation an einem Rahmensystem mit ca. 100.000 Freiheitsgraden. Auch bei statistischer Linearisierung bewährt sich die Vorgehensweise.

Schlüsselwörter

Stochastische Anregung, Rahmensysteme, 3D-Balken, hysteretische Momenten-Krümmungsbeziehung, modale Erweiterung, Plastische Formfunktionen, Statistische Linearisierung, Monte Carlo Simulation

Stochastic dynamic response of frame structures with hysteretic material behaviour

Investigation in a reduced orthogonal base

Summary

Large frame structures excited by stochastic dynamic loads are investigated. Local plastification in flexural beams leads to high curvature involving hysteretic material behaviour. In order to establish a reduced system of equations the reduced modal base is augmented by plastic shape functions, which are fitted to the high local curvature. The response is computed with the Galerkin method by assigning additional generalized coordinates to the plastic shape functions. Due to the high reduction capability Monte Carlo Simulation can be performed for instance on a frame structure with about 100,000 DOF. The method also proves its efficiency with Equivalent Statistical Linearization.

Keywords

Stochastic Excitation, frame structure, hysteretic moment-curvature relation, modal expansion, plastic form functions, Equivalent Statistical Linearisation, Monte Carlo Simulation

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des DFG-Projektes GR 712 / 7 in den Jahren 2001 – 2003.

Herrn Professor Grundmann danke ich für die Aufbereitung des Projektes und die richtungsweisenden Impulse während der Bearbeitung. Herrn Professor Rackwitz und Herrn Professor Bletzinger danke ich für die Übernahme des Korreferats bzw. des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Allen meinen Kollegen am Lehrstuhl danke ich für die Diskussionsbereitschaft und die freundliche Zusammenarbeit. Für die wertvollen Hinweise zum Entstehen dieser Arbeit danke ich insbesondere Herrn Dr. Stefan Lenz, Herrn Dr. Stefan Lutzenberger, Herrn Dr. Markus Schneider, Herrn Dr. Holger Waubke sowie Herrn Professor Gerhard Müller.

Meiner Familie danke ich für die Geduld und die Unterstützung, die sie mir in diesen Jahren entgegenbrachte.

Siegertsbrunn, im Juni 2004

Johann Michael Guggenberger

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	1
1 Einleitung	3
1.1 Aufgabenstellung	3
1.2 Beschreibung des Verfahrens und Zielsetzung	4
1.2.1 Systemreduktion	4
1.2.2 Angewandte Stochastische Verfahren	5
1.2.3 Identifikation von plastizierten Elementen	6
1.2.4 Bewertung des Verfahrens	6
1.2.5 Grundlegende Annahmen	6
1.2.6 Anbindung an etablierte numerische Verfahren	7
1.3 Einordnung der gewählten Vorgehensweise	7
1.3.1 Existierende Vorarbeiten	7
1.3.2 Reduktionsstrategien von dynamischen Gleichungssystemen	8
1.4 Aufbau der Arbeit	9
2 Aufstellung des Gleichungssystems	11
2.1 Lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung am 3D-Balkenelement	11
2.2 Hystereseemodelle	14
2.2.1 Physikalische Nichtlinearität in der Stabstatik	14
2.2.2 Endochrone Hystereseemodelle	16
2.3 Momenten-Krümmungs-Beziehungen mit Hysterese	18
2.3.1 Variationelle Formulierung der hysteretischen Momenten-Krümmungs-Beziehung	18
2.3.2 Hysterese bei schiefer Biegung mit Fasermmodell	22
2.4 Aufbau des Gesamtgleichungssystems	25
3 Reduktion des Gleichungssystems	27
3.1 Modale Transformation	27
3.1.1 Modale Entwicklung der linearen Bewegungsgleichung	27
3.1.2 Modale Überlagerung der nichtlinearen Antwort	28
3.1.3 Voraussetzungen zur modalen Reduktion	29
3.2 Erweiterung der reduzierten Basis durch plastische Formfunktionen	33
3.2.1 Näherungsverfahren mit Ansatzfunktionen	33
3.2.2 Entwicklung der plastischen Formfunktionen	35
3.3 Verwendung statischer Verschiebungsfiguren in dynamischen Berechnungen	44
3.4 Erweiterungsmöglichkeiten	49

4	Stochastische Verfahren	51
4.1	<i>Stochastische Mechanik</i>	51
4.1.1.1	Probabilistische Modelle in der Mechanik	51
4.1.1.2	Beschreibung stochastischer Prozesse	51
4.1.1.3	Probabilistische Berechnungsverfahren mit nichtlinearen Systemen	53
4.2	<i>Monte Carlo Simulation (MCS)</i>	54
4.2.1	Eigenschaften der MCS	54
4.2.2	Generierung der Lastfunktionen	55
4.2.3	Zeitintegrationsverfahren	58
4.2.3.1	Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren	58
4.2.3.2	Explizite Zeitintegration nach Adams-Moulton	59
4.2.3.3	Newmark Integration mit Newton-Raphson Iteration	60
4.2.3.4	Vergleich der Integrationsalgorithmen am Beispiel Kragarm	68
4.2.3.5	Ablauf der Simulationsberechnung	69
4.2.4	Schätzung der stochastischen Parameter	70
4.3	<i>Statistische Linearisierung ESL</i>	72
4.3.1	Grundlagen der ESL	72
4.3.1.1	Grundlagen der ESL in der Literatur	72
4.3.1.2	Formulierung der ESL	72
4.3.1.3	Eindeutigkeit der Lösung	74
4.3.1.4	Weitere Linearisierungskriterien	75
4.3.2	ESL am Ein-Freiheitsgrad-System mit Hysterese	75
4.3.2.1	Aufstellung des Gleichungssystems	75
4.3.2.2	Untersuchung der Genauigkeit und Konvergenz am Ein-Freiheitsgrad-System	76
4.3.2.3	Vergleich mit der Simulationsberechnung	77
4.3.2.4	Konvergenz	80
4.3.3	Weitere Literatur zur ESL	80
4.3.3.1	Erweiterungen des Standardverfahrens	80
4.3.3.2	Erweiterung durch Statistische Nichtlinearisierung	81
4.3.3.3	Untersuchungen zur Genauigkeit der ESL	81
4.3.3.4	Beispiele für Anwendungen	82
4.3.4	Anwendung der ESL auf Rahmentragwerke	82
4.3.4.1	Berechnung der Linearisierungskoeffizienten	82
4.3.4.2	ESL bei ebener Biegung	84
4.3.4.3	ESL bei schiefer Biegung in diskreter Formulierung	85
4.3.5	Lösungsschritte der ESL	86
4.3.5.1	Spektralverfahren	86
4.3.5.2	Lösung mit der Liapunov Matrix-Differentialgleichung	87
4.3.5.3	Weitere Lösungsstrategien	88
4.3.6	Genauigkeit der ESL bei ebener Biegung am Kragarmmodell	90

5	Anwendungsbeispiele	97
5.1	<i>Vorbemerkungen und Annahmen</i>	97
5.2	<i>Beschreibung der Konstruktion</i>	98
5.3	<i>Windbelastung am 2D-Modell</i>	99
5.3.1	Modellbildung in 2D, Diskretisierung	99
5.3.2	Formulierung der Windlast	100
5.3.3	Monte Carlo Simulation	102
5.3.4	Statistische Linearisierung	103
5.3.5	Darstellung der Ergebnisse	104
5.4	<i>Erdbebenbelastung am 3D-Modell</i>	108
5.4.1	Modellbildung in 3D, Diskretisierung	108
5.4.2	Formulierung der Erdbebenlast	109
5.4.3	Biaxiales Hysteresemodell	112
5.4.4	Lösungsschritte	117
5.4.5	Darstellung der Ergebnisse	119
5.5	<i>Diskussion der Ergebnisse</i>	125
6	Zusammenfassung	127
Anhang A	Kontinuierliche Formulierung des hysteretischen Rückstellmomentes bei ebener Biegung	129
A.1	<i>Kontinuierliche Formulierung des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai</i>	129
A.2	<i>Kontinuierliche Formulierung des Hysterese Modells nach Bouc-Wen</i>	130
A.3	<i>Vergleich kontinuierliche Formulierung – diskrete Formulierung</i>	132
Anhang B	ESL bei ebener Biegung in kontinuierlicher Formulierung	135
B.1	<i>ESL der Hysterese Modelle in kontinuierlicher Formulierung</i>	135
B.2	<i>ESL der Hysterese Modells nach Bouc-Wen in kontinuierlicher Formulierung</i>	135
B.3	<i>ESL des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai in kontinuierlicher Formulierung</i>	137
B.4	<i>Numerische Integration</i>	138
B.5	<i>Vergleich zwischen kontinuierlicher und diskreter Formulierung bei ESL</i>	144
Literatur		147

Bezeichnungen

Abkürzungen

MCS	Monte Carlo Simulation
ESL	Statistische Linearisierung (Equivalent Statistical Linearization)
PSD	Spektrale Dichtefunktion (Power Spectral Density)
PPF	Plastische Formfunktion

Lateinische Buchstaben

A	Fläche, Parameter des Bouc-Wen Hysterese Modells
\mathbf{a}, a	Vektor der Beschleunigungen, Parameter des Newmark Verfahrens
\mathbf{A}	Systemmatrix der Zustandsform
\mathbf{B}	Kovarianzmatrix der Last (Liapunov-Differentialgleichung)
c	Dämpferkonstante
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
E	Elastizitätsmodul
$E\{\}$	Erwartungswertoperator
f	Fließfunktion
f	Frequenz, Lastgröße
$\mathbf{f}(t)$	Vektor der Zeitfunktionen der Lastmatrix
$\mathbf{F}(t)$	Matrix der externen Lastvektoren
$\mathbf{F}_{\text{int}}(t)$	Vektor der inneren Rückstellkräfte
$\mathbf{F}_{\text{H}}(t)$	Vektor der hysteretischen Rückstellkräfte
\mathbf{F}_0	Matrix der Ortsvektoren der Last
$G(\cdot), g(\cdot)$	nichtlineare Funktion
$H(\cdot)$	Heaviside Distribution (Einheits-Sprung)
$\mathbf{H}(\omega)$	Matrix der Übertragungsfunktionen
\mathbf{H}_{Y}	Matrix nichtlinearer Funktionen
I_y, I_z	Flächenträgheitsmomente
\mathbf{I}_{yz}	Matrix der Flächenträgheitsmomente
\mathbf{I}	Einheitsmatrix (Identitätsmatrix)
I_1, I_2, I_3	Spannungsinvariante
k	Federsteifigkeit des Ein-Massen-Schwingers
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix der linearen Rückstellkräfte
\mathbf{K}_{Y}	Steifigkeitsmatrix der nichtlinearen Rückstellkräfte
\mathbf{K}_j	Steifigkeitsmatrix der j plastizierten Elemente
l	Elementlänge des Balkenelementes
m	Masse des Ein-Massen-Schwingers
M	Moment
M_{H}	hysteretisches Rückstellmoment
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{Q}	Vektor der Unbekannten, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen
Q	Querkraft
R	Residuum
$S(f)$	Spektrale Dichte
t	Zeit

T	Transformationsmatrizen ($\mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z, \mathbf{T}_\kappa, \mathbf{T}_\varphi, \mathbf{T}_N, \mathbf{T}_A, \mathbf{T}_e$)
v	Vektor der Geschwindigkeiten
w, w	Verbschiebungen, Vektor der Verschiebungen
$W(t)$	Windlast
W_f	Korrelationsfunktion des weißen Rauschens
x, y, z	Ortskoordinaten, Achsenbezeichnungen
Y_H	Hilfsvariable, bezogenes hysteretisches Rückstellmoment, Rückstellkraft, Rückstellspannung
Z	Kovarianzmatrix der Zustandsvariablen

Griechische Buchstaben

α	Faktor der Reststeifigkeit bei kinematischer Verfestigung
β	Parameter des Newmark Verfahrens
δ	infinitesimales Inkrement, Parameter des Newmark Verfahrens
$\delta(\cdot)$	Dirac-Distribution
δ_{ij}	Kronecker-Delta
Δ	diskretes Inkrement
ε	Faserdehnung, Fehler
ε_Y	Bezugswert (Dehnung an der Fließgrenze / Plastizitätsgrenze)
Φ	Matrix der Eigenvektoren $\phi^{(i)}$ (vollständige modale Basis)
Φ_{red}	reduzierte Matrix der Eigenvektoren (reduzierte modale Basis)
Φ_h	Matrix der höheren Eigenvektoren (in reduzierter modale Basis nicht enthalten)
$\tilde{\Phi}_{\text{red}}$	reduzierte Matrix der Eigenvektoren + orthogonale Formfunktionen
φ	Verdrehung
$\bar{\varphi}$	Relativverdrehung
γ	Parameter des Bouc-Wen Modells
Γ	Lösungsraum
η	Vektor der Krümmungsgeschwindigkeiten und der bez. hyst. Rückstellmomente
κ	Krümmung
κ_Y	Bezugswert (Krümmung an der Fließgrenze / Plastizitätsgrenze)
Λ	Matrix der Eigenwerte λ
μ	Relaxationsfaktor
ν	Parameter des Bouc-Wen Modells
ω	Eigenkreisfrequenz
Ω	Kreisfrequenz der Anregung
π	Kreiszahl
Π	Potential
Ψ	Matrix der statischen (plastischen) Formfunktionen $\psi^{(i)}$
$\tilde{\Psi}$	Matrix der orthogonalisierten statischen (plastischen) Formfunktionen $\tilde{\psi}^{(i)}$
ξ	bezogene Ortskoordinate
ζ	Dämpfungsgrad der modalen Dämpfung (Lehrsches Dämpfungsmaß)

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Tragwerksplanerische Untersuchungen gegenüber dynamischen Lasten gewinnen zunehmend an Bedeutung. Die durch Naturkatastrophen verursachten volkswirtschaftlichen Schäden haben innerhalb der letzten Dekaden weltweit drastisch zugenommen, wie die Schadensstatistiken der Versicherungsgesellschaften verdeutlichen [102]. Die erhöhten Schadenssummen sind zum einen mit der zunehmenden Konzentration von Vermögenswerten zu erklären, die sich mit der allgemeinen Steigerung des Wohlstands eingestellt hat. Zum anderen werden gefährdete Gebiete zunehmend bebaut. Hinzu kommt, dass die Anzahl der großen Naturkatastrophen seit 1950 weltweit deutlich angestiegen ist. Katastrophen, die durch Stürme ausgelöst wurden, machen dabei etwa ein Drittel aus [9].

Im Zuge der Neubearbeitung der nationalen Erdbebennorm E DIN 4149 (2002-10) [47] auf Basis des Eurocode 8 (2003-01) [51] sind für Hochbauten in deutschen Erdbebengebieten im Vergleich zur momentan gültigen Vorschrift [43] etwa 2 – 5-fach höhere Erdbebeneinwirkungen anzusetzen. Sowohl Sturm- als auch Erdbebenereignisse wirken als dynamische Lasten auf Tragwerke ein.

Nicht nur die Lastsituation ist einem Wandel unterworfen. Auf der anderen Seite ist zu beobachten, dass neue konstruktive Möglichkeiten zu erheblichen Änderungen der Steifigkeits-, Festigkeits-, Massen- und Dämpfungseigenschaften führen, die zu einer bedeutenden Steigerung der Tragwerkshöhen sowie Spannweiten von Brücken, Geschossdecken und Dächern geführt haben.

Insgesamt machen diese veränderten Grundlagen eine realistische Belastungs- und Tragwerksanalyse im Rahmen einer Zuverlässigkeitsanalyse mit probabilistischen Methoden notwendig. Wegen der sich verändernden Lastsituation erstreckt sich diese Notwendigkeit nicht nur auf neu zu errichtende Tragwerke, sondern zum Teil auch auf die Neubewertung des Bestands. Vor allem bei dynamischen Untersuchungen fallen die natürlichen Unsicherheiten der Eingangsgrößen besonders ins Gewicht.

Probabilistische Untersuchungen erfordern wiederum einen erhöhten theoretischen und numerischen Berechnungsaufwand. Zu den als streuend angesetzten Lasten und Systemeigenschaften sind Informationen über deren statistische Verteilung erforderlich. Diese Informationen müssen aus Beobachtungsdaten wiederum mit statistischen Methoden mit möglichst hoher Genauigkeit geschätzt werden, da sich statistische Unsicherheiten in den zu beurteilenden Antwortgrößen widerspiegeln. In einer Zuverlässigkeitsanalyse ist deren Verteilung in den Bereichen mit extrem niedriger Wahrscheinlichkeitsdichte zu ermitteln. Neben den natürlichen Unsicherheiten der Parameter sind also auch statistische Unsicherheiten bei der Ermittlung der Eingangsgrößen zu berücksichtigen. Darüber hinaus beeinflussen Modellunsicherheiten die Antwortstatistik. Daher müssen an die Rechenmodelle ebenfalls erhöhte Genauigkeitsanforderungen gestellt werden.

Die Zufallsgrößen der Lasten werden als unkorreliert zu den zufälligen Systemparametern angenommen. In der Sicherheitstheorie kann daher das gesamt-probabilistische Problem in zwei Teilprobleme zerlegt werden, wobei einmal nur die Lasten und zum anderen nur die Systemparameter als streuende Variable angesetzt werden. Handelt es sich wie bei Erdbeben- und Windlasten um stochastische Lasten mit breitem Anregespektrum, so ist die Antwort weniger empfindlich gegenüber streuenden Systemkenngrößen. Vereinfachend genügt daher ein probabilistischer Ansatz ausschließlich auf der Lastseite.

Während für Untersuchungen zur Gebrauchstauglichkeit lineare Analysen ausreichen, sind zur Berechnung von Kollapsbedingungen nichtlineare Betrachtungen erforderlich. Probabilistische Verfahren zur Berechnung der nichtlinearen Antwort auf stochastische Lastprozesse wurden in den letzten zwei bis drei Jahrzehnten sehr weit entwickelt und stehen für den Einsatz in der Praxis bereit. Das überaus reichhaltige Schrifttum bestätigt die großen Fortschritte, die auf diesem Gebiet bereits erzielt wurden. Aufgrund des nach wie vor deutlich höheren Berechnungsaufwands gegenüber deterministischen Betrachtungen beschränken sich bisher die meisten Verfahren auf kleine Systeme mit wenigen Freiheitsgraden. Die Anwendbarkeit in praktischen Aufgaben ist daher stark eingeschränkt, da bei komplexeren Strukturen wie z.B. bei Rahmentragwerken eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden verarbeitet werden muss.

Es besteht also ein dringender Bedarf nach der Entwicklung von einfach zu handhabenden, relativ wenig Aufwand verursachenden Berechnungsverfahren für Systeme mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden in der nichtlinearen stochastischen Dynamik. An erster Stelle steht dabei die Entwicklung von Reduktionsmethoden, wie sie z.B. im linearen Fall durch die Reduktion der modalen Basis ermöglicht wird.

1.2 Beschreibung des Verfahrens und Zielsetzung

1.2.1 Systemreduktion

Geht man von einem linearen System aus, so kann man nach dem in der linearen Dynamik üblichen Vorgehen die Anzahl der für die modale Entwicklung benötigten Eigenvektoren relativ einfach bestimmen. Solange das Verhalten linear ist, genügen bei ausreichend gleichmäßiger Lastverteilung wenige Ansatzfunktionen für eine zuverlässige Bestimmung der Schwingungsantwort.

Treten nun stärkere Nichtlinearitäten, speziell Fließdeformationen, in entsprechend hoch belasteten Tragwerksbereichen auf, so entwickeln sich zusätzliche Verschiebungen des gesamten Systems, die z.B. im Falle von Biegeträgern örtlich große Krümmungen, im übrigen aber einen glatten Verlauf aufweisen. Wollte man diese Verschiebungen linear mittels Eigenvektoren erfassen, wäre es zur Beschreibung des ausgeprägten lokalen Deformationsgeschehens nötig, deren Anzahl stark zu erhöhen, soweit, bis diejenigen Formen mit eingeschlossen sind, die im betroffenen Bereich die hinzugekommenen Deformationen abbilden können. Dabei kann der Vorteil der modalen Entwicklung verloren gehen.

Aufgrund des hohen Reduktionspotentials soll die modale Transformation im Wesentlichen so beibehalten werden, als würde von einem linear-elastischen System ausgegangen. Die in einer

modalen Entwicklung beizubehaltende Anzahl an Eigenvektoren wird problemspezifisch nach den Genauigkeitsanforderungen einer zunächst linearen Untersuchung festgelegt.

Löst man sich an dieser Stelle vom üblichen Konzept der modalen Entwicklung und sieht man die für das ursprünglich lineare System gefundenen Formen als problemangepasste Ansatzfunktionen des Galerkin-Verfahrens an, so ist lediglich dafür Sorge zu tragen, dass auch die hinzukommenden lokalen Deformationsanteile, die durch Nichtlinearitäten, speziell Plastizierungen, hinzukommen, durch entsprechende Ansätze abgebildet werden können. Als Ansatzfunktionen sollen plastische Formfunktionen entwickelt werden, die speziell an die durch das Fließen hervorgerufenen Zusatzdeformationen angepasst werden.

Der Verschiebungszustand des gesamten Systems wird so durch die Superposition von relativ wenigen Schwingungsmoden und von zusätzlichen wenigen plastischen Formfunktionen beschrieben. Diese Ansatzfunktionen, die jeweils eine Ortsveränderlichkeit abbilden, sind mit zeitlich veränderlichen Amplituden, den Freiheitsgraden der Aufgabe, zu multiplizieren. Als plastische Formfunktionen werden dabei die Verschiebungsfiguren definiert, die entstehen, wenn in den entstandenen plastischen Gelenken entsprechend dem Zustand des Systems relative Einheitsdeformationen aufgezwungen werden.

Die plastischen Formfunktionen sind ausgehend von den Eigenschaften, die diese Ansatzfunktionen erfüllen müssen, geeignet zu formulieren. Anhand theoretischer Überlegungen soll eine allgemeine Entwicklungsvorschrift für die plastischen Formfunktionen angegeben werden. Die Näherung soll anhand einer Fehlerabschätzung abgesichert werden.

1.2.2 Angewandte Stochastische Verfahren

Das Verfahren soll sich rein auf eine mechanische Beschreibung des Systems beschränken, so dass es unabhängig vom probabilistischen Lösungsverfahren ist und damit universell eingesetzt werden kann. Der Einsatz soll exemplarisch an zwei Methoden der stochastischen Dynamik erprobt werden.

- Es ist zu erwarten, dass sich die Systemreduktion mit plastischen Formfunktionen in erster Linie bei Monte Carlo Simulationen bewähren wird, da die Berechnungsschritte bei dieser Methode sehr oft wiederholt werden. Die Genauigkeit wird in unterschiedlichen Auswertungen der Systemantwort, im Zeitbereich, im Frequenzbereich wie auch in den statistischen Parametern der Antwortgrößen überprüft. Als Referenz dient dabei die Lösung am vollständigen Gleichungssystem. Weiterhin soll gezeigt werden, dass sich große Systeme mit einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden behandeln lassen, die sich sonst aufgrund der Größe und des numerischen Aufwands einer Simulation entziehen würden. Die Ergebnisse der Monte Carlo Simulation dienen darüber hinaus wiederum als Referenz für stochastische Näherungsverfahren.
- Auch für die Näherungsverfahren wie z.B. der Statistischen Linearisierung, die für eine erste Beurteilung dienen, kann die Methode eine erhebliche Aufwandsreduzierung erwirken. Nachdem die Gauß-Annahme in der Statistischen Linearisierung für den Antwortprozess als wesentliche Grundlage dieser Näherungsstrategie eine genaue Beschreibung der Extrembereiche der Verteilungsdichten nicht erlaubt, kann die Methode hinsichtlich der Versagenswahrscheinlichkeiten allerdings nur relative Aussagen liefern. Die Statistische Linearisierung war bislang auf Systeme mit relativ wenigen Freiheitsgraden beschränkt. Die Vorgehensweise in dieser Arbeit unterscheidet sich von der üblichen

insbesondere dadurch, dass nicht zuerst linearisiert und dann eine modale Entwicklung vorgenommen wird, sondern dass im Sinne eines Galerkin-Verfahrens mit Ansatzfunktionen (Schwingungseigenformen und plastischen Formfunktionen) zunächst die Anzahl der unbekannt, über Differentialgleichungen miteinander verknüpften Freiwerte reduziert wird.

1.2.3 Identifikation von plastizierten Elementen

Viele bekannte Reduktionsstrategien sind auf Systeme mit lokal bekannten nichtlinearen Elementen abgestimmt. Vorausgesetzt wird, dass Konstruktionselemente zur Energiedissipation geplant werden, also auf der Grundlage einer Kapazitätsbemessung vorab plastizierende Elemente bekannt sind. In großen, hochgradig statisch unbestimmten, räumlichen Rahmentragwerken ist jedoch meist nicht erkennbar, an welchen Stellen Plastizierungen auftreten. Günstig wäre also eine Formulierung, durch die Stellen mit lokalen Plastizierungen in einzelnen Elementen identifiziert werden können. Ist ein Element identifiziert, soll das Gleichungssystem ohne große Modifikationen bzw. ohne großen zusätzlichen Aufwand beibehalten werden können.

Bezogen auf die Simulationsmethode ist ein zusätzlicher Aufwand unvermeidbar, um in jedem Zeitschritt bzw. in bestimmten Intervallen den Zustand der Materialgleichung abzufragen. Bezüglich der statistischen Linearisierung ist die Frage zu klären, welche Elemente als plastizierend auszuwählen sind.

1.2.4 Bewertung des Verfahrens

Letztendlich soll das Verfahren in seiner Genauigkeit und Effizienz bewertet werden. Da die Beurteilung vor dem Hintergrund der angewandten stochastischen Verfahren erfolgt, wird ebenfalls der Vergleich dieser Verfahren nach den Kriterien Effizienz, Genauigkeit und Einsatzmöglichkeit gezogen.

1.2.5 Grundlegende Annahmen

Folgende grundlegende Annahmen werden für die Untersuchungen getroffen:

- Die Plastizierungen beschränken sich auf wenige Elemente des Gesamtsystems.
- Die stochastische Anregung sei Gauß-verteilt und lässt sich aus einem weißen Rauschen durch lineare Filter generieren.
- Das Material zeigt bei Plastizierung hysteretisches Verhalten, eine Schädigung ist nicht zu berücksichtigen.
- Die untersuchten Rahmentragwerke sind schlank. Die Form der inneren Belastung lässt die Schubverzerrungen aus Querkraft klein gegenüber der Biegeverformung werden.
- Die elasto-plastischen Materialbeziehungen lassen sich auf Formulierungen in Querschnittsebene projizieren, wobei nur die Interaktion der Momente bei schiefer Biegung berücksichtigt wird, während eine Interaktion von Torsion und Querkraft an der plasti-

schen Verformung vernachlässigt wird. Unter diesen Voraussetzungen genügt eine Beschreibung der Balkendifferentialgleichungen gemäß der Bernoulli-Hypothese: die Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Balkenachse.

Wie noch gezeigt wird, stellen diese Annahmen jedoch keine Einschränkung der grundsätzlichen, hier eingeführten Vorgehensweise dar.

1.2.6 Anbindung an etablierte numerische Verfahren

Im Hinblick auf die Akzeptanz für praktische Anwendungen ist eine Vorgehensweise von Vorteil, bei der möglichst etablierte numerische Verfahren der Dynamik verwendet werden, um die Einbindung in bestehende Softwarecodes zu erleichtern. Vorhandene Ressourcen wie die Bereitstellung von Systemdaten, Lösung von Eigenwertproblemen, statische und dynamische Lösungsverfahren sowie Zeitbereichsintegrationen erlauben die Behandlung großer Systeme.

Als Systemplattform dient die FE-Software „FEMtools“ [58]. Die darin enthaltene Programmierumgebung bietet den Zugriff auf die Systemdaten eines FE-Modells. Da die Software im Grunde für Systemidentifikation konzipiert ist, fehlen einige Algorithmen, die in anderen Softwarepaketen vorhanden sind. Die Programmierumgebung erlaubt es aber, nicht vorhandene Bausteine, z.B. einen Newmark Algorithmus bzw. eine Newton-Raphson Iteration selbst zu erstellen und einzubinden.

1.3 Einordnung der gewählten Vorgehensweise

1.3.1 Existierende Vorarbeiten

Das Konzept der plastischen Formfunktionen wurde von Grundmann und Geisenhofer [69] sowie Geisenhofer und Grundmann [63] bereits für Scherbalkensysteme in Form von Schwingerketten vorgestellt. Ansätze zur Aufbereitung von Momenten-Krümmungs-Beziehungen zum Einsatz in der Statistischen Linearisierung sind ebenfalls vorhanden [69]. Erste Untersuchungen an Beispielen mit Schwingerketten [64] und an ebenen Rahmen wurden ebenfalls durchgeführt [72].

In einer Vielzahl von Systemen z.B. Kragssystemen und bei üblicherweise auftretenden Lasten sind die Plastizierungsbereiche biegebeanspruchter Tragwerke wesentlich weniger ausgedehnt als im Falle der „Querkraft-beherrschten“ Scherbalkensysteme. Umgekehrt ist die Anzahl der Freiheitsgrade in Rahmentragwerken wesentlich höher. Die Reduktionsmöglichkeit unter Einsatz von plastischen Formfunktionen wirkt sich daher in Rahmensystemen wesentlich stärker aus.

1.3.2 Reduktionsstrategien von dynamischen Gleichungssystemen

Synthese aus Moden von Komponenten (Component Mode Synthesis CMS)

Die Methode der Synthese aus Moden von Komponenten wird bei großen Systemen verwendet, um die Moden des Gesamtsystems aus den Moden der Komponenten zu bestimmen [142]. Ein Eigenwertproblem mit vielen Freiheitsgraden kann damit auf mehrere Eigenwertprobleme geringerer Größe reduziert werden.

Ein Vorschlag von Clough und Wilson [36] zur Behandlung lokaler Plastizierungen in großen Systemen zielt auf die Verwendung der Synthese aus Komponentenmoden CMS ab. Das Tragsystem wird dazu an den Stellen unterteilt, an denen eine Plastizierung auftritt. Jede Seite wird als Komponente aufgefasst, in der die Eigenformen nach Einführen von starren Randbedingungen an den Schnittstellen berechnet werden. Unter Berücksichtigung der nichtlinearen Gleichung wird im Anschluss das Gesamtsystem über die CMS-Matrix zusammengesetzt und gelöst.

Galerkin-Verfahren mit statischen Formfunktionen

Die Reduktion eines Gleichungssystems auf eine reduzierte modale Basis führt zu einem Abschneidefehler. Stellt man die dynamische Last als Produkt von Ortsvektoren mit Zeitfunktionen dar, können die statischen Verschiebungsfiguren aus den Ortsvektoren ermittelt werden. Um den Abschneidefehler zu reduzieren, schlägt die *Methode der modalen Erweiterung (modal augmentation)* diese statischen Formfunktionen als Zusatzvektoren entsprechend dem Galerkin-Verfahren der modalen Basis zu [37]. Damit können lokale Deformationen, die nicht durch die reduzierte Basis aus elastischen Moden abgedeckt werden können, beschrieben werden.

Ableitung von Formfunktionen aus dem „Slaving Principle“

In der *Methode der Modenbeschleunigung* [37] werden die statischen Formfunktionen unmittelbar mit den Zeitfunktionen der Last multipliziert und zu den Verschiebungen der dynamischen Lösung hinzuaddiert. Diese Methode wird von Schuëller, Pradlwarter und Schenk [116],[141],[131] auf nichtlineare Probleme angewendet, indem die inneren hysteretischen Rückstellkräfte als äußerer Lastprozess angesetzt werden.

Poiron [108] kombiniert die *Methode der statischen Korrektur*, die mechanisch gleichwertig ist mit der *Methode der Modenbeschleunigung*, mit der Synthese aus Komponentenmoden zur Berechnung der nichtlinearen Antwort großer Modelle. Das Modell wird an den nichtlinearen Elementen unterteilt, und die Teilmodelle werden einzeln modal entwickelt. Die modale Basis wird reduziert. Zur Kompensation des Abschneidefehlers wird die quasistatische Antwort der abgeschnittenen Moden entkoppelt zur modalen Lösung hinzuaddiert. Die Berechnung der Antwort der linearen Komponenten erfolgt im Frequenzbereich und wird nach Rücktransformation mit der nichtlinearen lokalen Antwort verarbeitet.

Die letztgenannten Verfahren stehen in engem Zusammenhang zur gewählten Vorgehensweise und werden daher zur besseren Abgrenzung noch detailliert behandelt.

Eine Verallgemeinerung dieser Verfahren, das die generalisierten Beiträge der höheren Moden auf die Antwort der unteren Moden bezieht, kann aus dem „slaving principle“ nach [74] abgeleitet werden. Die höheren Moden werden durch Formfunktionen ersetzt, deren Beiträge durch eine Funktion der Antworten aus den unteren Moden beschrieben wird. Ist diese Funktion linear, so resultiert daraus wieder die Methode der statischen Korrektur. Die allgemeine Beschreibung

wird als nichtlineares Galerkin-Verfahren bezeichnet. Zur Bestimmung der zunächst unbekannt Parameter der nichtlinearen Funktion setzen Matthies und Meyer [98] diese in ein Zeitschrittverfahren ein (z.B. implizites Eulerverfahren, Newmark -Verfahren) und lösen nach den unbekannt Parametern auf. Mit weniger numerischem Aufwand wird in einer Variante [60], dem „postprocessed“ Galerkin-Verfahren, die modale Basis nach dem jeweiligen Berechnungsschritt der nichtlinearen Antwort des Systems angepasst.

Cai [20] berechnet die Versagenswahrscheinlichkeit eines einfachen Rahmens mit drei Freiheitsgraden unter stochastischer Last. Zwei der Freiheitsgrade werden ebenfalls nach dem „slaving principle“ als abhängige Größen mit nichtlinearem Bezug zum Hauptfreiheitsgrad eingeführt.

Übergang auf eine Basis aus Ritz-Lanczos-Vektoren

Als Alternative zu lastunabhängigen Eigenformen kann auch eine Basis von lastabhängigen orthogonalen Ansatzfunktionen verwendet werden, die in [37] als abgeleitete Ritz-Vektoren („Derived Ritz Vectors“) DRV und in [155] als Ritz-Lanczos Vektoren bezeichnet werden. Ähnlich wie in der Methode der Modenbeschleunigung wird die gesamte quasi-statische Antwort durch einen Ansatzvektor der statischen Lösung der Bewegungsgleichung beschrieben. Die weiteren Vektoren haben nur noch die Aufgabe, die Beiträge der Massen- und Dämpferkräfte zur dynamischen Antwort zu liefern. Sie werden aus einer rekursiven Berechnungsvorschrift entwickelt, wobei der aktuelle Vektor zu den jeweils bereits gebildeten Vektoren orthogonalisiert wird. Dies hat den Effekt, dass die Beiträge der „höheren“ Vektoren zunehmend kleiner werden. Im Unterschied zur modalen Reduktion ist das Verfahren keinen Einschränkungen bezüglich der zeitlichen und örtlichen Entwicklung der Last unterworfen. Die plastizierten Elemente müssen vorab bekannt sein, damit die DRV's formuliert werden können.

Spanos Lavelle [155] verwenden in der Synthese aus den Moden der Komponenten (CMS) nicht Eigenformen sondern Ritz-Lanczos Vektoren. Im einem speziellen „Lanczos-Component-Mode Synthesis“-Algorithmus wird die tridiagonale Form der generalisierten Systemmatrix ausgenutzt, wodurch der Aufwand stark reduziert werden kann.

1.4 Aufbau der Arbeit

Aufstellung des Gleichungssystems

Im ersten Schritt ist das Gleichungssystem zu formulieren. Darin einzubeziehen sind die hysteretischen Momenten-Krümmungs-Beziehungen, die in einer kontinuierlichen und einer diskreten Formulierung entwickelt werden. Die beiden Formulierungen sind auf den ersten Blick nicht sehr unterschiedlich, die Ansätze führen jedoch zu deutlich verschiedenen Ausdrücken, die für die weitere Behandlung vor allem in der Statistischen Linearisierung bedeutsam sind. Die Unterschiede in den Formulierungen werden daher ausführlich erläutert. Neben der einfachen Beschreibung bei ebener Biegung wird auch der Fall der schiefen Biegung behandelt. In diesem Zusammenhang wird auch das Fasermmodell des Biegebalkens eingeführt.

Reduktion des Gleichungssystems

Die Reduktion des Gleichungssystems mit nichtlinearen Zusatzgleichungen wird im darauf folgenden Abschnitt vor dem Hintergrund der modalen Transformation diskutiert. Zusätzlich zu

den elastischen Moden werden die plastischen Formfunktionen anhand der Eigenschaften, die sie erfüllen sollen, beschrieben. Eine allgemeine Formulierung der plastischen Formfunktionen als statische Lösung wird abgeleitet und damit auch eine Möglichkeit zur theoretischen Einordnung der Vorgehensweise geschaffen.

Die einzelnen Entwicklungsschritte werden parallel zu den theoretischen Ausführungen an einem einfachen Kragarmsystem nachvollzogen und geprüft.

Stochastische Verfahren

Zur Monte Carlo Methode wird auf die Generierung von Realisationen und auf die Einbindung der nichtlinearen Zusatzgleichungen mit den verwendeten Hysteresemodellen in die Zeitschrittintegrationen im Detail eingegangen.

Die statistische Linearisierung wird kurz in allgemeiner Form eingeführt, wobei die grundsätzlichen Annahmen, Einschränkungen und Erweiterungsmöglichkeiten der Methode anhand eines Ein-Freiheitsgrad-Systems diskutiert werden. Der Übergang auf Mehr-Freiheitsgradsysteme wird direkt an den aufgestellten Systemgleichungen des Rahmens mit hysteretischer Momenten-Krümmungs-Beziehung vollzogen. Dabei wird wiederum die kontinuierliche und die diskrete Formulierung detailliert betrachtet, da mit der kontinuierlichen Formulierung ein erheblicher Mehraufwand verbunden ist.

Anwendungsbeispiele

Schließlich wird der Einsatz der plastischen Formfunktionen an zwei Beispielen demonstriert. Das Beispiel eines ebenen Rahmens unter stationärer Windlast dient dazu, die Genauigkeit der Methode gegenüber Referenzlösungen darzustellen.

In einem zweiten Beispiel wird ein räumliches Rahmentragwerk einer instationären Erdbebenbelastung ausgesetzt. Es soll dazu dienen, die Effizienz des Verfahrens vor dem Hintergrund aufzuzeigen, dass für das gewählte Modell eine Lösung am Gesamtsystem wegen der hohen Anzahl an Freiheitsgraden mit gängiger Rechnerkapazität nicht mehr möglich ist.

2 Aufstellung des Gleichungssystems

2.1 Lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung am 3D-Balkenelement

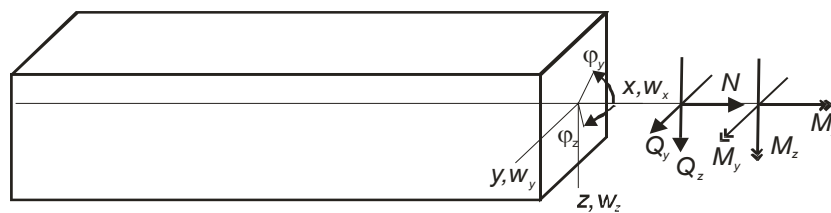


Abb. 2.1 : Querschnittsgrößen und Vorzeichendefinition am 3D-Bernoulli-Balkenelement.

Die verwendeten Freiwerte und Schnittkräfte für den 3D-Balken nach Euler-Bernoulli sind in Abbildung 2.1 definiert. Die zugehörigen Differentialbeziehungen für Momente und Normalkräfte enthalten die Gleichungen (2.1)-(2.4) [99].

$$\varepsilon_x(x) = \frac{dw_x(x)}{dx} \quad \varphi_z(x) = \frac{dw_y(x)}{dx} \quad \varphi_y(x) = -\frac{dw_z(x)}{dx} \quad (2.1)$$

$$\kappa_z(x) = \frac{d\varphi_z(x)}{dx} = \frac{d^2w_y(x)}{dx^2} \quad \kappa_y(x) = \frac{d\varphi_y(x)}{dx} = -\frac{d^2w_z(x)}{dx^2} \quad (2.2)$$

Nach Einsetzen der linear-elastischen Materialgleichungen des einaxialen Spannungszustandes

$$\sigma_x(x, y, z) = E \cdot (-\kappa_z(x) \cdot y + \kappa_y(x) \cdot z + \varepsilon_x(x)) \quad (2.3)$$

ergeben sich die Momenten-Krümmungs-Beziehungen und Normalkraft-Längsdehnungs-Beziehung aus dem jeweiligen Integral über die Querschnittsfläche:

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) dA = \int_A E \cdot (-\kappa_z(x) \cdot y + \kappa_y(x) \cdot z + \varepsilon_x(x)) dA \\ M_z(x) &= -\int_A \sigma_x(x, y, z) \cdot y dA = \int_A E \cdot (\kappa_z(x) \cdot y - \kappa_y(x) \cdot z - \varepsilon_x(x)) \cdot y dA \\ M_y(x) &= \int_A \sigma_x(x, y, z) \cdot z dA = \int_A E \cdot (-\kappa_z(x) \cdot y + \kappa_y(x) \cdot z + \varepsilon_x(x)) \cdot z dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Normalkraft und die Momente sind entkoppelt, wenn das Bezugssystem im Schwerpunkt der Flächen liegt und nach den Hauptachsen der Flächenträgheitsmomente ausgerichtet ist.

Die Ansatzfunktionen für die reine Biegung (ohne Normalkräfte) eines Balkenelementes mit zwei Knoten i und $i+1$ nach Bernoulli (für $\xi = x/l$) werden aus Hermitschen Polynomen aufgebaut [99]:

$$w_y(\xi) = \begin{bmatrix} 1 + 2\xi^3 - 3\xi^2 \\ (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ (-\xi^2 + \xi^3)l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_{y,i} \\ \varphi_{z,i} \\ w_{y,i+1} \\ \varphi_{z,i+1} \end{bmatrix} \quad w_z(\xi) = \begin{bmatrix} 1 + 2\xi^3 - 3\xi^2 \\ (-\xi + 2\xi^2 - \xi^3)l \\ -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ (\xi^2 - \xi^3)l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_{z,i} \\ \varphi_{y,i} \\ w_{z,i+1} \\ \varphi_{y,i+1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Durch zweifache Ableitung der Ansatzfunktionen 3. Ordnung nach Gl. (2.2) ergibt sich der lineare Verlauf für die Krümmung $\kappa(\xi)$:

$$\kappa(\xi) = \kappa_i(1 - \xi) + \kappa_{i+1}\xi. \quad (2.6)$$

Den Vektor der Krümmung $\mathbf{\kappa}$ an den Knoten erhält man aus einer linearen Transformation aus dem Vektor der Knotenfreiheitsgrade:

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{z,i} \\ \kappa_{z,i+1} \\ \kappa_{y,i} \\ \kappa_{y,i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\mathbf{\kappa}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.7)$$

mit
$$\mathbf{w} = [w_{y,i} \quad \varphi_{z,i} \quad w_{y,i+1} \quad \varphi_{z,i+1} \quad w_{z,i} \quad \varphi_{y,i} \quad w_{z,i+1} \quad \varphi_{y,i+1}]^T. \quad (2.8)$$

Mit dem gewählten Verschiebungsansatz Gl. (2.5) für ein Element mit zwei Knoten ist

$$\mathbf{T}_{\mathbf{\kappa}} = \begin{bmatrix} -6 & -4l & 6 & -2l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2l & -6 & 4l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4l & -6 & -2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2l & 6 & 4l \end{bmatrix} \frac{1}{l^2}. \quad (2.9)$$

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten

$$\delta W = \int_e M(x) \delta \kappa(x) dx + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{int}} = 0 \quad (2.10)$$

liefert den Vektor \mathbf{F}_{int} der inneren Knotenkräfte

$$\delta \mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{int}} = \delta \mathbf{w}^T \mathbf{K}_{\mathbf{\kappa}} \mathbf{\kappa}. \quad (2.11)$$

Die Matrix $\mathbf{K}_{\mathbf{\kappa}}$ ergibt sich aus dem Arbeitsintegral zu

$$\mathbf{K}_{\mathbf{\kappa}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_z I_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_y I_y \end{bmatrix} \frac{E}{l} \quad (2.12)$$

mit
$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -l & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & l \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -l & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & l \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Setzt man \mathbf{k} aus (2.7) in Gl. (2.11) ein, so erhält man die bekannte Steifigkeitsmatrix des Balkenelementes:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\kappa \mathbf{T}_\kappa. \quad (2.14)$$

Das Integral der virtuellen Arbeit kann alternativ auch gebildet werden, wenn vorher die Starrkörperanteile abgespalten werden, die keinen Beitrag zur inneren virtuellen Arbeit liefern. Hilfsweise wird dazu ein Vektor relativer Rotationsfreiheitsgrade $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ gemäß Abb. 2.2 eingeführt [99] [69].

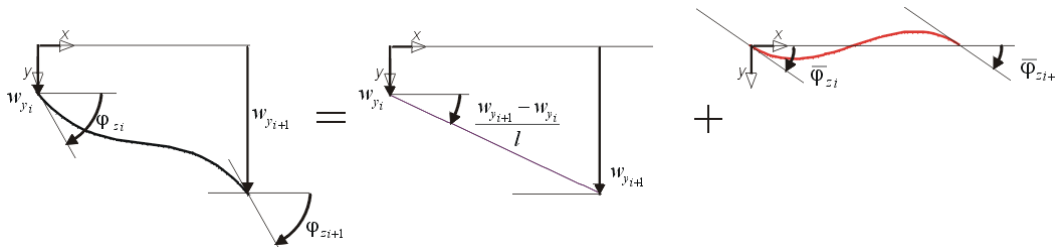


Abb. 2.2 : Reduktion der Freiheitsgrade durch Abspalten der Starrkörperbewegung.

In Matrixschreibweise ermittelt sich $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ aus dem Vektor der Freiheitsgrade \mathbf{w} ,

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{T}_\varphi^T \mathbf{w} \quad (2.15)$$

über die Transformationsmatrix \mathbf{T}_φ :

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\varphi_z} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{\varphi_y} \end{bmatrix}$$

mit
$$\mathbf{T}_{\varphi_z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & l \end{bmatrix} \frac{1}{l} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{\varphi_y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ l & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & l \end{bmatrix} \frac{1}{l}. \quad (2.16)$$

Das Integral der virtuellen Arbeiten

$$\delta W = \int_e M(x) \delta \kappa(x) dx + \delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{M} = 0 \quad (2.17)$$

liefert die auf die relativen Knotenverdrehungen bezogenen Momente \mathbf{M} aus

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{M} = \delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T E \mathbf{I}_{yz} \mathbf{H}_\varphi \bar{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.18)$$

mit

$$\mathbf{H}_{\bar{\varphi}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{l}. \quad (2.19)$$

\mathbf{I}_{yz} ist die Matrix der Trägheitsmomente, die bezogen auf die Hauptachsen diagonal wird:

$$\mathbf{I}_{yz} = \begin{bmatrix} I_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Der Vektor der inneren Knotenkräfte entsteht wiederum aus der geometrischen Beziehung:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{T}_{\bar{\varphi}} \cdot \mathbf{H}_{\bar{\varphi}} \bar{\varphi}. \quad (2.21)$$

Somit kann die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} ebenfalls aus der Kombination

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_{\bar{\varphi}}^T E \mathbf{I}_{yz} \mathbf{H}_{\bar{\varphi}} \mathbf{T}_{\bar{\varphi}} \quad (2.22)$$

berechnet werden.

2.2 Hystereseemodelle

2.2.1 Physikalische Nichtlinearität in der Stabstatik

Die klassischen Annahmen, die der Normung zugrunde liegen, sind zum einen ein bilineares Verhalten beim Stahl, zum anderen ein parabel-rechteck-förmiges Verhalten der Spannungs-Dehnungskurve beim Beton unter einer Druckbelastung. Da der nichtlineare Anteil der Verformung zugleich als großteils nicht reversibel angesehen wird, wird auch der Begriff des elastoplastischen Verhaltens verwendet. Im Falle des Stahls werden dabei noch spezifischer die Begriffe des linear-elastisch ideal-plastischen Verhaltens verwendet.

Die Beschreibung erfolgt über drei Gleichungen: Die Fließfunktion gibt an, unter welchen räumlichen Spannungszuständen ein Fließen des Materials eintritt, während die Fließregel angibt, in welche Richtung die plastische Dehnung weiter verläuft. Handelt es sich um ein Material, bei dem sich die Spannungen nach Überschreiten der Fließgrenze weiter erhöhen, so wird zusätzlich ein Verfestigungsgesetz aufgestellt.

Üblicherweise wird eine Fließfunktion f definiert, die vom Spannungstensor \mathbf{S}^1 und einer weiteren Größe ξ abhängig ist, welche die Verfestigung beziehungsweise Entfestigung des Materials im plastischen Zustand beschreibt. Diese Funktion f wird beim Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand Null. Im elastischen Bereich liefert sie Werte, die kleiner als Null sind. Die

Funktion f wird graphisch als dreidimensionaler Körper über den drei Hauptspannungsrichtungen aufgetragen.

Die klassische Plastizitätstheorie lässt Spannungen nicht zu, die außerhalb der Fließfläche liegen. Die Fließfläche kann im Rahmen der Verfestigungsmodelle verschoben (kinematische Verfestigung) oder vergrößert werden (isotrope Verfestigung). Werden isotrope Materialeigenschaften betrachtet, so ist die Fließfläche unabhängig vom gewählten Koordinatensystem. Geht man davon aus, dass eine Volumenänderung keinen Beitrag zur Fließfunktion liefert, kann der Deviator unter Abspaltung des hydrostatischen Spannungszustands aufgestellt werden. Die erste Invariante wird zu Null, die zweite und dritte Invariante des Spannungsdeviators sind für die Fließfunktion relevant [96]:

$$f(I_2, I_3) = \begin{cases} < 0 & \text{elastischer Bereich} \\ = 0 & \text{elasto-plastischer Grenzzustand} \\ > 0 & \text{äußerer Bereich} \end{cases} \quad (2.23)$$

In vielen Modellen wird die dritte Invariante nicht betrachtet. In Stäben reduziert sich der Spannungstensor auf die Längsspannung σ_x sowie die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} . Die 2. Invariante des Deviators ergibt sich für $\sigma = \sigma_x$ und der Schubspannungsergebnissen $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ zu:

$$I_2 = \frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2 \quad (2.24)$$

Die Vergleichsspannungen sind [96]

$$\text{nach Tresca} \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.25)$$

$$\text{bzw. nach von Mises} \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (2.26)$$

Um in Stäben die rechenintensive Untersuchung auf Spannungsebene zu vermeiden, werden in der Fließgelenktheorie elasto-plastische Makromodelle verwendet. Die Fließfunktion in Querschnittsebene ist abhängig von der Form des Querschnitts. Eine allgemeine Interaktionsbeziehung kann zwischen den Schnittkräften nicht hergestellt werden. Klassischerweise werden die Kurven für das elasto-plastische Verhalten im Stahlbau und Betonbau in Form von Diagrammen für gebräuchliche Querschnitte dargestellt.

Daneben existieren einige überschlägige Fließfunktionen, z.B. als [61]

$$\text{untere Schranke:} \quad f = \left| \frac{M_y}{M_{Yy}} \right| + \left| \frac{M_z}{M_{Yz}} \right| + \left| \frac{N}{N_Y} \right| - 1 = 0 \quad (2.27)$$

$$\text{und als obere Schranke:} \quad f = \left(\frac{M_y}{M_{Yy}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{Yz}} \right)^2 + \left(\frac{N}{N_Y} \right)^2 - 1 = 0. \quad (2.28)$$

(M_Y : elastisches Grenzmoment, N_Y : Normalkraft an der Fließgrenze).

Zur Beschreibung der Interaktion auf Schnittkraftebene verschiebt Gebbeken [61] die Rotationsgelenke in Querschnittsebene gegenüber der Balkenachse in Abhängigkeit der Verhältnisse der Momente zueinander und der Momente zur Normalkraft. Durch die Verschiebung des Rotationsgelenkes entlang der Balkenlängsachse um einen Betrag e , der von der Höhe der Querkraft abhängt, wird die Interaktion mit der Querkraft berücksichtigt.

In der Praxis ist die Methode verbreitet, bei Profilstählen die Stegdicke s verjüngt anzusetzen, um den Querkrafteinfluss Q bei Interaktion Biegemoment-Normalkraft-Querkraft zu berücksichtigen:

$$s_{red} = s \sqrt{1 - \frac{Q_z}{Q_{Pz}}}. \quad (2.29)$$

Bei dünnwandigen Querschnitten kann die Annahme der Formtreue des Querschnitts unberechtigt sein. Bei Stäben kann es zu lokalem Stabilitätsversagen z.B. durch Beulen oder Kippen des Steges oder Flansches kommen. Um letzteres auszuschließen, darf entsprechend den Stahlbau-normen [40] elasto-plastisches Materialverhalten nur dann berücksichtigt werden, wenn Stäbe bzw. Stabteile über die vorgeschriebenen Mindestdicken verfügen.

2.2.2 Endochrome Hysterese Modelle

Zur physikalischen Beschreibung von Materialmodellen wurde die endochrome Theorie entwickelt, durch die insbesondere bei dynamischer Beanspruchung die Ausbildung einer Hysterese erfasst wird [25]. Die Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens mit Distributionen ermöglicht eine geschlossene mathematische Behandlung des Problems, während die klassische Beschreibung mit Hilfe von Fallunterscheidungen eine Diskretisierung der Lastgeschichte und somit die Anwendung eines Zeitschrittverfahrens erfordert.

Wird nur von elastisch-plastischen Termen in der nichtlinearen Differentialgleichung ausgegangen, genügt die Einführung einer Hilfsvariablen Y_H zur Beschreibung der hysteretischen Rückstellkräfte. Das einfachste Modell ist das symmetrische, bilineare Modell mit linear-elastischer ideal-plastischer Hysterese, das von Suzuki und Minai [157] in einer endochronen Form mit Heaviside-Funktionen $H(\cdot)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Verschiebungen \dot{w} angegeben wurde:

$$\dot{Y}_H = [1 - H(\dot{w})H(Y_H - 1) + H(-\dot{w})H(-Y_H - 1)]\dot{w}. \quad (2.30)$$

Ein verbreitetes Hysterese Modell, das über die Parameter A , γ , ν und N definiert ist, wurde von Bouc [18] vorgestellt und von Wen [166] weiterentwickelt:

$$\dot{Y}_H = \left[A - \left(\gamma \operatorname{sgn}(\dot{w}) \operatorname{sgn}(Y_H)^{N-1} - \nu \operatorname{sgn}(Y_H)^N \right) Y_H^N \right] \dot{w}. \quad (2.31)$$

Durch die Parameter γ und ν lässt sich das Volumen der Hysterese (vgl. Abb. 2.3 oben) und die Progressivität einer nichtlinearen Kennlinie anpassen (Abb. 2.3 unten). Ein kleiner Exponent N beschreibt eine kontinuierliche Kurve, während die Hysterese mit größerem N „eckiger“ wird und sich für große N der bilinearen Hysterese nähert (vgl. Abb. 2.3 Mitte).

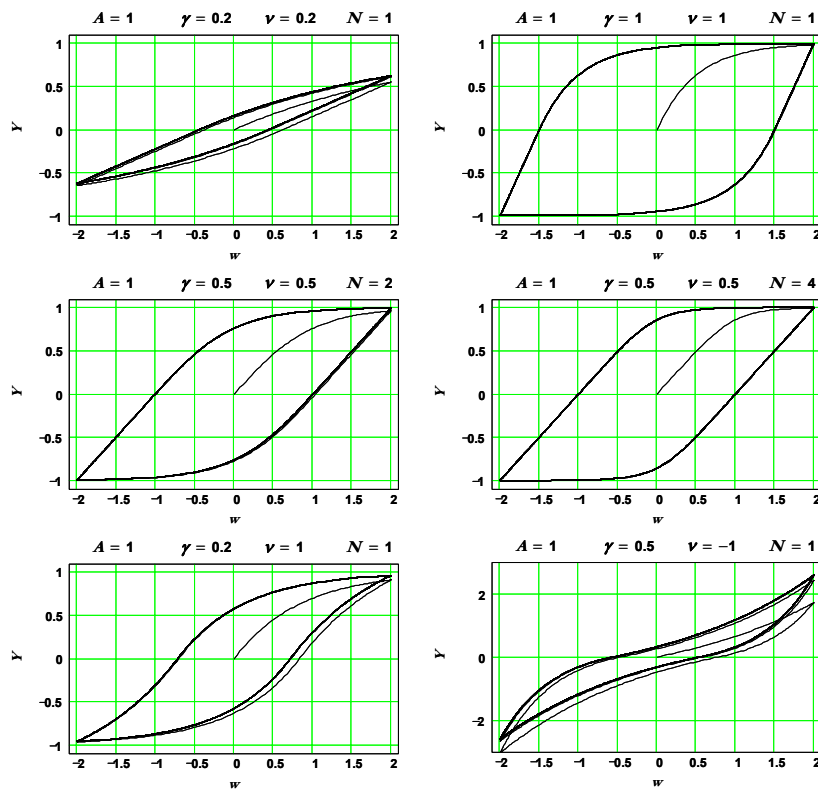


Abb. 2.3 : Hysteresemodell nach Bouc-Wen: Parameterstudie.

Bezogen auf die klassische Plastizitätstheorie hat das Hysteresemodell folgende Merkmale [24]:

- Mit $\gamma + \nu > 0$ und $\gamma - \nu > 0$ ist mit $\gamma > 0$ die dissipierte Energie positiv.
- Bei Erstbelastung bzw. Wiederbelastung gilt immer die Verfestigungsbedingung

$$dY_H \cdot dw_p \geq 0, \tag{2.32}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Moment des Beginns der Belastung bzw. Wiederbelastung gilt.

- Das Produkt $dY_H \cdot dw_p$ strebt gegen Null wenn sich Y_H der Plastizitätsgrenze Y_{HP} nähert:

$$|Y_{HP}| = \left(\frac{A}{\gamma + \nu} \right)^{\frac{1}{N}} \quad \text{mit} \quad \frac{A}{\gamma + \nu} > 0. \tag{2.33}$$

- Die Fließfunktion (2.23) ist für die Erstbelastung und Wiederbelastung immer Null. Damit existiert keine definierte Fließgrenze zwischen linear-elastischem und elasto-plastischem Zustand.
- Bei Entlastung ist $dY_H \cdot dw_p$ nur dann gleich Null, wenn $\gamma = \nu$ gewählt wird.
- Am Ende eines Hysteresezyklus erreicht das Modell nicht wieder den Zustand maximaler Deformation, den es im vorangehenden Belastungszyklus erreicht hat.

- Wenn die Kraft während des Entlastungsvorgangs ihr Vorzeichen nicht ändert, wird bei der anschließenden Belastung die inelastische Deformation verstärkt, die Hystereseschleife wird nicht geschlossen. Die am Material verrichtete Arbeit wird negativ, womit das Stabilitätsgesetz nach Drucker verletzt wird.

Von Casciati [24] wird daher das Modell erweitert, um Übereinstimmung mit der klassischen Plastizitätstheorie herzustellen. Gleichzeitig wird jedoch festgestellt, dass bei äußerer stationärer stochastischer Anregung keine signifikanten Unterschiede bezüglich der dissipierten Energie bestehen.

Trotz der offensichtlichen Defizite hat das Bouc-Wen Modell wegen seiner außerordentlichen Flexibilität zahlreiche Erweiterungen erfahren. Es wird auf Mehrfreiheitsgradsysteme in [5] und in einer tensoriellen Formulierung auch auf Kontinua angewendet [24] [147]. Eine Zusammenfassung der wesentlichen Entwicklungen liefert der Übersichtsartikel von Wen [170].

Eine Schädigungsakkumulation wird durch Baber-Wen [5] berücksichtigt. Dazu setzt Baber die Parameter der Modelle in Abhängigkeit von der dissipierten Energie und von den maximal auftretenden Amplituden [8].

Pradlwarter, Schueller und Schenk entwickeln in [116] ein weiteres Modell mit kontinuierlicher Hysterese als Mischung aus Suzuki-Minai und Bouc-Wen. Es weist einen ansteigenden elastischen Ast, eine definierte Elastizitätsgrenze sowie eine Plastizitätsgrenze auf. Es wird u.a. in [131][130][150] als Ersatzelement für dissipative Wanelemente in größeren FE-Modellen eingesetzt.

Die Ausdehnung auf eine biaxiale Hysterese nach Park Wen Ang in [106]

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_{H_x} \\ \dot{Y}_{H_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[A + (-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{w}_x) \operatorname{sgn}(Y_{H_x}) - \nu) Y_{H_x}^2 \right] & (-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{w}_y) \operatorname{sgn}(Y_{H_y}) - \nu) Y_{H_x} Y_{H_y} \\ (-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{w}_x) \operatorname{sgn}(Y_{H_x}) - \nu) Y_{H_x} Y_{H_y} & \left[A + (-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{w}_y) \operatorname{sgn}(Y_{H_y}) - \nu) Y_{H_y}^2 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

ermöglicht die Anwendung einer kontinuierlichen Hysterese von Stahlbetonbalken unter schiefer Biegung. In [168] wird zusätzlich noch die Interaktion mit Torsion berücksichtigt.

2.3 Momenten-Krümmungs-Beziehungen mit Hysterese

2.3.1 Variationelle Formulierung der hysteretischen Momenten-Krümmungs-Beziehung

Das gesamte Rückstellmoment M wird in einen elastischen Anteil M_{el} und einen hysteretischen Anteil M_H zerlegt, deren Verhältnis zueinander durch den Faktor α festgelegt wird [69]:

$$M = M_{el} + M_H = EI\kappa \cdot \alpha + EI\kappa_Y Y_H (1 - \alpha). \quad (2.35)$$

Mit dem Bezugsfaktor κ_Y wird die Krümmung an der Fließgrenze bzw. an der Plastizitätsgrenze des hysteretischen Momentes M_H bezeichnet. Die dimensionslose Hilfsvariable Y_H wird als bezogenes hysteretisches Rückstellmoment eingeführt und ist direkt proportional zum hysteretischen Rückstellmoment M_H . Die Steifigkeit des Balkens wird durch EI bezeichnet.

Die Werte des Faktors α liegen im Bereich $[0;1]$. Der Faktor beschreibt die elastische Reststeifigkeit der Biegung, nachdem Fließen eintritt. Eine Reststeifigkeit nach Fließen ist auch für die numerische Behandlung von Bedeutung, da ein vollständiges Wegfallen der Steifigkeit hohe Verformungen nach sich ziehen würde, die in einer numerischen Berechnung zu einer schlechten Konditionierung der Gleichgewichtsbedingungen führen. Die Überlagerung der Momentenanteile wird in Abb. 2.4 verdeutlicht.

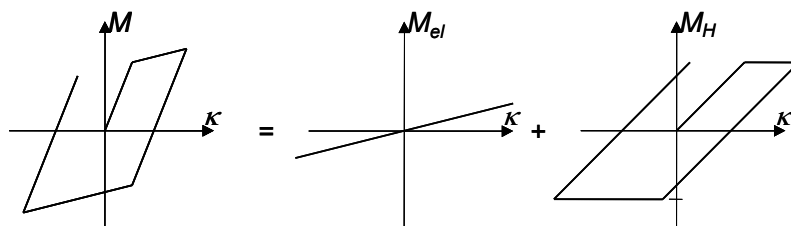


Abb. 2.4 : Zerlegung des inneren Rückstellmomentes in einen elastischen und elasto-plastischen Anteil durch den Faktor der Reststeifigkeit α .

Die endochronen Hysterese Modelle liegen als Momenten-Krümmungs-Beziehung in Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung vor, die eine nichtlineare Funktion $G(\dot{\kappa}, Y_H)$ enthält:

$$\dot{M}_H = EI G(\dot{\kappa}, Y_H) \dot{\kappa}. \quad (2.36)$$

Die diskrete Finite Elemente Formulierung erfordert energieäquivalente innere Knotenkräfte zur Aufstellung des Gleichungssystems. Zur Formulierung des Knotengleichgewichts ist die innere virtuelle Arbeit des hysteretischen Rückstellmomentes aus dem Variationsintegral zu ermitteln. Prinzipiell stehen dafür zwei Möglichkeiten zur Verfügung.

1. Kontinuierliche Formulierung:

Da mit Gl. (2.36) die zeitliche Ableitung des hysteretischen Rückstellmomentes vorliegt, bietet sich an, die zeitliche Ableitung der virtuellen Arbeiten zu bilden. Die virtuelle Arbeit wird an den Relativfreiheitsgraden $\bar{\varphi}$ und $\bar{\varphi}_{i+1}$ geleistet:

$$\delta \dot{W} = \int_e \dot{M}_H(x) \delta \kappa(x) dx + \dot{M}_{H,i} \delta \bar{\varphi}_i + \dot{M}_{H,i+1} \delta \bar{\varphi}_{i+1} = 0. \quad (2.37)$$

Die differentielle hysteretische Entwicklungsgleichung $\dot{M}_H(x)$ ist direkt proportional zur Hilfsvariablen $Y_H(x)$. Um das Arbeitsintegral auswerten zu können, muss daher eine Annahme über den Verlauf von $Y_H(x)$ getroffen werden. In Kompatibilität zu den gewählten Ansatzfunktionen wird der Verlauf $Y(\xi)$ mit $\xi = x/l$ linear gewählt:

$$Y_H(\xi) = Y_{H_i}(1 - \xi) + Y_{H_{i+1}} \xi. \quad (2.38)$$

Die ursprünglichen Hysterese Gleichungen gehen analog zu den Gln. (2.18)-(2.20) in Matrizenform über:

$$\dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}} \dot{\mathbf{w}}. \quad (2.39)$$

Die Matrix $\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}})$ enthält 2 x 2 (bei schiefer Biegung 4 x 4) gekoppelte nichtlineare verallgemeinerte Funktionen, in denen Signum- oder Einheits-Sprung-Distributionen vorkommen. Aus diesen Zusatzgleichungen wird der Vektor $\mathbf{Y}_{\mathbf{H}}$ ermittelt.

Der Anteil des hysteretischen Rückstellmomentes $\mathbf{M}_{\mathbf{H}}$ am Knotengleichgewicht $\mathbf{F}_{\mathbf{H}}$ entsteht aus:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{H}} = \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}. \quad (2.40)$$

Die Matrix $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}$ wird mit Gl. (2.21) definiert als:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{T}_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{Y}}. \quad (2.41)$$

Die Diagonalmatrix $\boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{Y}}$ enthält die Bezugswerte der Krümmungen an der Fließ- bzw. Plastizitätsgrenze.

2. Diskrete Formulierung

Durch das Einsetzen der nichtlinearen Beziehung in das Arbeitsintegral wird sichergestellt, dass die hysteretische Entwicklungsgleichung kontinuierlich an jeder Stelle x über die Länge l eines Balkenelementes abgefragt wird. Alternativ besteht die Möglichkeit, das Materialgesetz an diskreten Punkten innerhalb eines Elementes abzufragen. Das hysteretische Rückstellmoment wird zwischen diesen Punkten interpoliert, und die virtuelle Arbeit anhand der Interpolationsfunktion des hysteretischen Rückstellmomentes berechnet. Die hysteretischen Entwicklungsgleichungen gehen dabei nicht explizit in das Arbeitsintegral ein und bleiben daher unverändert. Sie beziehen sich auf diskrete Werte von $\dot{\kappa}(\xi_i)$ und $\mathbf{Y}_{\mathbf{H}}(\xi_i)$.

Voraussetzung für die Wahl der Punkte ist, dass an diesen ein repräsentativer Zustand wiedergeben wird, aus dem sich das hysteretische Rückstellmoment interpolieren lässt. Werden Elementknoten gewählt, sollten dort Maxima oder Minima der Krümmungen innerhalb des Elementes vorliegen. Mit dem linear gewählten Verlauf der Krümmung nach Gln. (2.5) ist gewährleistet, dass die Krümmung an einem Knoten maximal und am anderen minimal wird. In Abhängigkeit von der Diskretisierung genügt es in der Regel, das Materialgesetz an den Knoten abzufragen. Werden z.B. Legendre-Polynome (p-Formulierung) als Ansatzfunktionen verwendet, kann das Maximum der Krümmungen auch zwischen den Knoten liegen. In diesem Fall ist die kontinuierliche Formulierung vorzuziehen, wenn die nichtlineare Materialbeziehung nicht an mehreren Punkten innerhalb des Elementes abgegriffen werden soll.

Die diskrete Formulierung kann ebenfalls in Matrizenform angegeben werden:

$$\dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\kappa}} \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\boldsymbol{\kappa}} \dot{\mathbf{w}}. \quad (2.42)$$

Bei ebener Biegung entsteht eine Matrix mit zwei voneinander entkoppelten nichtlinearen Gleichungen an den beiden Knoten:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) = \begin{bmatrix} G(\dot{\kappa}_i, Y_{H_i}) & 0 \\ 0 & G(\dot{\kappa}_{i+1}, Y_{H_{i+1}}) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Die Formulierung ist vergleichbar mit der Aufstellung der Massenmatrix mit konzentrierten Massen an den Knoten („lumped mass approximation“), womit ebenfalls eine Entkoppelung des Masseneinflusses zwischen den Knoten eines Elementes erreicht wird.

Z.B. bei Verwendung des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai nach Gl. (2.30) ist

$$G(\dot{\kappa}, Y_H) \dot{\kappa} = \dot{Y}_H = \left[1 - H(\dot{\kappa})H(Y_H - 1) + H(-\dot{\kappa})H(-Y_H - 1) \right] \frac{\dot{\kappa}}{\kappa_Y} \quad (2.44)$$

und für Bouc-Wen nach Gl. (2.31):

$$G(\dot{\kappa}, Y_H) \dot{\kappa} = \dot{Y}_H = \left[A - \left(\gamma \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}) \operatorname{sgn}(Y_H)^{N-1} - \nu \operatorname{sgn}(Y_H)^N \right) Y_H^N \right] \frac{\dot{\kappa}}{\kappa_Y}. \quad (2.45)$$

Wichtig ist zu erkennen, dass die nichtlinearen Gleichungen im Gegensatz zur kontinuierlichen Formulierung für jeden Knoten entkoppelt sind und daher auch unabhängig voneinander behandelt werden können. Bei schiefer Biegung erweitern sich die Matrizen entsprechend, wobei die hysteretischen Rückstellmomente um die beiden Achsen über biaxiale Hysterese Modelle gekoppelt sind (vgl. Gl. (2.34)). $\mathbf{H}_Y(\dot{\kappa}, \mathbf{Y}_H)$ hat dann die Form:

$$\mathbf{H}_Y(\dot{\kappa}, \mathbf{Y}_H) = \begin{bmatrix} G(\dot{\kappa}_{y_i}, Y_{Hy_i})_{11} & 0 & G(\dot{\kappa}_{y_i}, Y_{Hy_i})_{12} & 0 \\ 0 & G(\dot{\kappa}_{y_{i+1}}, Y_{Hy_{i+1}})_{11} & 0 & G(\dot{\kappa}_{y_{i+1}}, Y_{Hy_{i+1}})_{12} \\ G(\dot{\kappa}_{z_i}, Y_{Hz_i})_{21} & 0 & G(\dot{\kappa}_{z_i}, Y_{Hz_i})_{22} & 0 \\ 0 & G(\dot{\kappa}_{z_{i+1}}, Y_{Hz_{i+1}})_{21} & 0 & G(\dot{\kappa}_{z_{i+1}}, Y_{Hz_{i+1}})_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Wird die hysteretische Entwicklungsgleichung an den Knoten diskret ausgewertet, so erhält man an jedem Knoten pro Biegeachse einen diskreten Wert $Y_{H,i}$ und $Y_{H,i+1}$. Wählt man nun wieder eine lineare Interpolationsfunktion (Gl. 2.38), so kann wieder die virtuelle Arbeit des hysteretischen Rückstellmomentes berechnet werden. Formal wird in Gl. (2.10) M durch M_H ersetzt. Die inneren hysteretischen Knotenkräfte gehen dann aus Gl. (2.11) hervor, indem κ durch $\kappa_Y Y_H$ ersetzt wird. Die Beziehung zwischen dem Vektor \mathbf{Y}_H und den inneren hysteretischen Knotenkräfte \mathbf{F}_H wird wiederum durch Gl. (2.40) hergestellt.

\mathbf{K}_Y wird dabei aus den in den Gln. (2.13) definierten Teilmatrizen \mathbf{T}_z und \mathbf{T}_y wie \mathbf{K}_κ aus Gl. (2.12) aufgebaut:

$$\mathbf{K}_Y = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_z I_z \kappa_{Yz} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_y I_y \kappa_{Yy} \end{bmatrix} \frac{E}{l}. \quad (2.47)$$

Der Unterschied zwischen der kontinuierlichen und der diskreten Formulierung wird in Abb. 2.5 anhand eines ideal elasto-plastischen Materialverhaltens verdeutlicht.

In den beiden Abbildungen sind der Verlauf von $Y_H(x)$, $\kappa(x)$ sowie die Plastizitätsgrenze κ_Y eingetragen. Die Bildung des Arbeitsintegrals ist durch die Überlagerung der beiden schraffierten Flächen angedeutet.

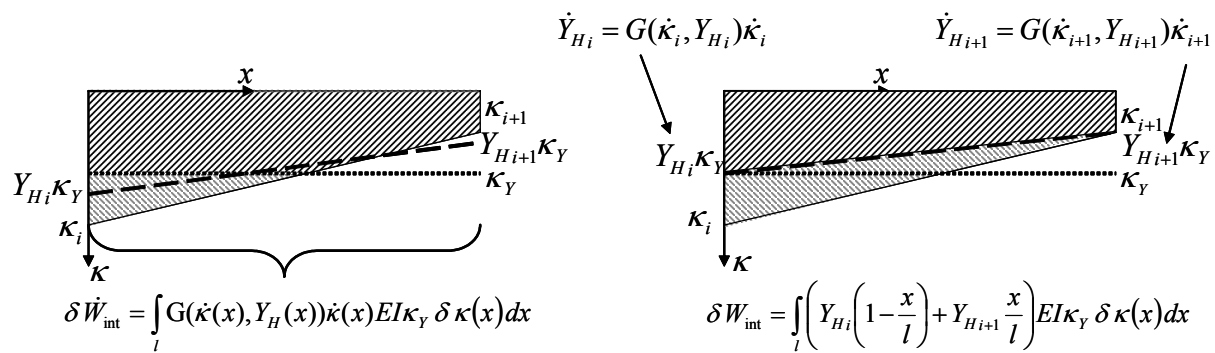


Abb. 2.5: Schematische Darstellung der kontinuierlichen (links) und diskreten Formulierung (rechts) für ebene Biegung mit ideal elasto-plastischem Materialgesetz.

Das linke Bild enthält die schematische Darstellung der kontinuierlichen Formulierung. Im Variationsintegral ist die Materialgleichung enthalten, die kontinuierlich über die Elementlänge ausgewertet wird. Der Wert von Y_{Hi} und Y_{Hi+1} ergibt sich aus der Auswertung der Ableitung des Arbeitsintegrals. Die hysteretischen Rückstellmomente an den Knoten sind energieäquivalente Werte und können daher die Plastizitätsgrenze überschreiten.

Im rechten Bild wird die nichtlineare Gleichung diskret an den Knoten ausgewertet. In der diskreten Formulierung werden Y_{Hi} und Y_{Hi+1} vorab an den Knoten ausgewertet und werden dann als „bekannte“ Werte mit linearer Interpolation in das Arbeitsintegral eingesetzt. Am Knoten i ist das bezogene hysteretische Rückstellmoment durch die Plastizitätsgrenze κ_Y begrenzt, der Verlauf des hysteretischen Rückstellmomentes kann die Plastizitätsgrenze nicht überschreiten. Im elastischen Bereich nimmt $Y_{Hi} \kappa_Y$ am Knoten $i+1$ den Wert von κ an.

Prinzipiell führen die beiden Vorgehensweisen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Da im zweiten Fall das Materialgesetz nur an den Elementknoten ausgewertet wird, hängt das Ergebnis in stärkerem Maße von der Diskretisierung ab. In praktischen Fällen sind die Unterschiede gering. Wegen der einfacheren Handhabung wird daher auf die diskrete Formulierung zurückgegriffen. Die Umsetzung der Hysterese Modelle in der kontinuierlichen Formulierung ist im Anhang A dokumentiert.

2.3.2 Hysterese bei schiefer Biegung mit Fasermmodell

Neuere Softwareentwicklungen [85] gehen von der Fließzonentheorie aus. Entgegen der Fließgelenktheorie wird der Querschnitt auf Spannungsebene untersucht, was durch eine Diskretisierung des Querschnitts in Fasern ermöglicht wird. Die Fasermmodelle erlauben auch die Verwendung verfeinerter Materialmodelle, die beispielsweise beim Baustoff Beton eine Vielzahl von Zustandsvariablen zur Beschreibung thermodynamischer und chemischer Vorgänge beinhalten können. Dadurch sind Phänomene wie Kriechen und Schwinden sowie der Verbund zwischen Beton und schlaffer Bewehrung bzw. Spannstahl erfassbar [160].

Der Spannungs-Dehnungs-Zustand wird an jeder Faser k untersucht. Zur Beschreibung des hysteretischen Anteils der Spannungen in jeder Faser k wird wieder die dimensionslose Hilfsvariable Y_H verwendet, die proportional zum hysteretischen Anteil der Normalspannung in einer Faser ist.

Die Beiträge der inneren virtuellen Arbeiten der einaxialen Spannungen an den Faserdehnungen der einzelnen Faserelemente werden aufsummiert:

$$\delta W = \sum_k \left(A_k \int_e \sigma_k(x) \delta \varepsilon_k(x) dx \right) + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{int}} = 0. \quad (2.48)$$

Wird ein nichtlineares Stoffgesetz auf jede Faser angewendet, kann die innere virtuelle Arbeit analog Abb. 2.5 aus der kontinuierlichen oder aus der diskreten Formulierung gewonnen werden.

1. Kontinuierliche Formulierung: Das Materialgesetz wird in die zeitliche Ableitung des Arbeitsintegrals eingesetzt.

$$\delta \dot{W}_{\text{int}} = \sum_k \left(EA_k l \varepsilon_Y \int_0^1 G(Y_{H_k}(\xi), \dot{\varepsilon}_k(\xi)) \dot{\varepsilon}_k(\xi) \delta \varepsilon_k(\xi) d\xi \right) \quad (2.49)$$

2. Diskrete Formulierung: Die Ansatzfunktionen für die bezogenen hysteretischen Spannungen gehen in das Arbeitintegral ein.

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_k \left(EA_k l \varepsilon_Y \int_0^1 Y_{H_k}(\xi) \delta \varepsilon_k(\xi) d\xi \right) \quad (2.50)$$

Um im zweiten Fall nicht das Integral in jeder Faser einzeln auswerten zu müssen, ist es sinnvoll die Gleichung umzustellen:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & E \varepsilon_Y \int_0^1 -\delta \kappa_z(\xi) \sum_k (Y_{H_k}(\xi) y_k A_k) d\xi + E \varepsilon_Y \int_0^1 \delta \kappa_y(\xi) \sum_k (Y_{H_k}(\xi) z_k A_k) dx + \\ & + E \varepsilon_Y \int_0^1 \delta \varepsilon_x(\xi) \sum_k (Y_{H_k}(\xi) A_k) d\xi \end{aligned} \quad (2.51)$$

Das Fasermmodell erlaubt eine einfache Berücksichtigung der Interaktion mit hysteretischen Normalkräften aus der über den Querschnitt konstanten Längsdehnung. Die einzelnen Anteile aus den Krümmungen und konstanten Längsdehnung werden ebenfalls als Einzelsummanden behandelt. In den Summen werden die Spannungsanteile in hysteretische Rückstellmomente und Normalkräfte bezogen auf die Elementknoten zusammengefasst. Damit können die bisher entwickelten matriziellen Formulierungen mit wenigen Modifizierungen beibehalten werden.

$$\dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\mathbf{F}} \mathbf{T}_{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{w}} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) = \frac{1}{\varepsilon_Y} \begin{bmatrix} \text{diag}(G_k(\dot{\varepsilon}_{f_{i,k}}, Y_{H_{i,k}})) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(G_k(\dot{\varepsilon}_{f_{i+1,k}}, Y_{H_{i+1,k}})) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{f_{i,k}}$ in der Faser k überlagert sich aus den Krümmungen zuzüglich der Längsdehnungen am Knoten i :

$$\dot{\varepsilon}_{f_{i,k}} = -\dot{\kappa}_{z_i} y_k + \dot{\kappa}_{y_i} y_k + \dot{\varepsilon}_{x_i} \quad (2.54)$$

Die Anwendung des Modells von Suzuki-Minai auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehung liefert:

$$\dot{Y}_H = G(\dot{\varepsilon}, Y_H) \dot{\varepsilon}_f = [1 - H(\dot{\varepsilon}_f)H(Y_H - 1) + H(-\dot{\varepsilon}_f)H(-Y_H - 1)] \dot{\varepsilon}_f. \quad (2.55)$$

Die Matrix \mathbf{K}_Y aus Gl. (2.41) wird zu

$$\mathbf{K}_Y = E \mathbf{K}_N \mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_A \varepsilon_Y. \quad (2.56)$$

Die Matrizen \mathbf{T}_N und \mathbf{K}_N entsprechen \mathbf{T}_k (Gl. 2.9) und \mathbf{K}_k (Gl. 2.12), erweitert um die Elemente zur Berücksichtigung der Normalkraftanteile.

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4l & -6 & -2l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2l & -6 & 4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4l & -6 & -2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -2l & 6 & 4l \end{bmatrix} \frac{1}{l} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_y \end{bmatrix} \frac{1}{l} \quad (2.58)$$

Die Teilmatrizen \mathbf{T}_z und \mathbf{T}_y entstammen den Gln. (2.13). Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_F wandelt Krümmung und Längsdehnung in eine Gesamtdehnung in jeder Faser k um, das Produkt $\mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_A$ summiert die Spannungen zu inneren Knotenkräften.

$$\mathbf{T}_F = \begin{bmatrix} 1 & -y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -y_k & z_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -y_k & z_k \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} \text{diag}(A_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(A_k) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Zur Kontrolle wird bei feiner Diskretisierung ($k \rightarrow \infty$) bezogen auf die Hauptachsen:

$$\text{diag}[A_{tot} \quad I_z \quad I_y \quad A_{tot} \quad I_z \quad I_y]_{k \rightarrow \infty} = \mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_A \mathbf{T}_F. \quad (2.61)$$

Katz beschreibt in [85] verschiedene Möglichkeiten zur Berücksichtigung der Interaktion mit Schubspannungen aus Querkraft und Torsion.

2.4 Aufbau des Gesamtgleichungssystems

Bisher wurde davon ausgegangen, dass sich die Matrizen auf ein Element in lokalen Koordinaten beziehen. Die weiteren Formulierungen beinhalten die Matrizen des Gesamtgleichungssystems in globalen Koordinaten. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_E stellt den Bezug zwischen lokalen und globalen Verschiebungen \mathbf{w} her:

$$\mathbf{w}_{global} = \mathbf{T}_E \mathbf{w}_{lokal} \quad (2.62)$$

Die nichtlinearen Zusatzgleichungen werden weiterhin im jeweiligen lokalen Elementkoordinatensystem zusammengestellt. Der Vektor der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente \mathbf{Y}_H bleibt in lokalen Koordinaten bestehen. Zur Verbindung mit den globalen Verschiebungsgrößen wird die Matrix \mathbf{K}_Y nur von links und die Matrix \mathbf{T}_κ nur von rechts mit \mathbf{T}_E multipliziert.

$$\mathbf{K}_{Y_{global}} = \mathbf{T}_E \mathbf{K}_{Y_{lokal}} \quad \mathbf{T}_{\kappa_{global}} = \mathbf{T}_{\kappa_{lokal}} \mathbf{T}_E^T \quad (2.63)$$

Das Gesamtgleichungssystem mit den nichtlinearen Zusatzgleichungen kann nun aus den globalen Teilmatrizen der Massen \mathbf{M} , Dämpfungen \mathbf{C} und Steifigkeiten \mathbf{K} aufgebaut werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_Y(\dot{\kappa}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_\kappa & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{K} & (1-\alpha) \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

\mathbf{F} stellt den Vektor der äußeren dynamischen Kräfte dar. Bei Verwendung der kontinuierlichen Formulierung bzw. des Fasermodells wird lediglich $\mathbf{H}_Y(\dot{\kappa}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_\kappa$ durch die entsprechenden Terme aus den Gln. (2.39) bzw. (2.52) ersetzt.

Geht man davon aus, dass nur wenige Elemente der Gesamtstruktur plastizieren, während sich der größte Anteil weiterhin elastisch verhält, kann der nichtlineare Anteil in Gleichung (2.64) ausgegliedert werden:

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_p) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{AA} & \mathbf{M}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AA} & \mathbf{C}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{BA} & \mathbf{C}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_Y(\dot{\kappa}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_\kappa & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_p = (1-\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_j & \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_A \\ \mathbf{w}_B \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Die Matrix \mathbf{K}_j beinhaltet dabei die Elementsteifigkeitsmatrizen der j plastizierten Elemente mit den globalen Freiheitsgraden \mathbf{w}_B . Abb. 2.6 zeigt schematisch die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix eines Kragarms mit 18 Freiheitsgraden bei ebener Biegung.

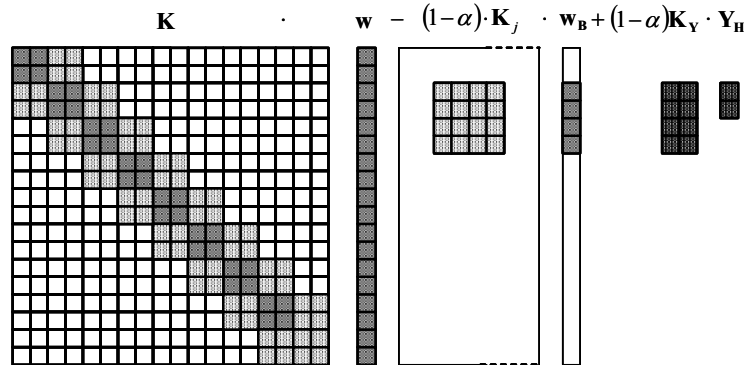


Abb. 2.6: Schematische Darstellung der Ausgliederung der Elementmatrizen der plastizierten Elemente aus der Steifigkeitsmatrix

Pro Biegeachse und Knoten jedes plastizierten Elementes entsteht eine Spalte in der Matrix \mathbf{K}_Y . In diskreter Formulierung kann die Matrix auch auf eine Spalte pro Element und Biegeachse reduziert werden, wenn nur an einem Knoten eine Plastizierung auftritt. Schließt an das plastizierte Element j ein (und nur ein!) weiteres Element mit gleichen Eigenschaften an, so ist das bezogene hysteretische Rückstellmoment $Y_{H,j,i+1}$ am Knoten von links gleich dem am Knoten von rechts $Y_{H,j+1,i}$. In diesem Fall kann der Vektor \mathbf{Y}_H um ein Element verringert werden und die beiden jeweiligen Spalten in \mathbf{K}_Y zusammenaddiert werden. Da bei dieser Vorgehensweise jedoch immer kontrolliert werden muss, ob ein benachbartes Element mit gleichen Eigenschaften vorliegt und nicht noch weitere Elemente an den Knoten anschließen, wird diese Möglichkeit im Weiteren nicht verwendet.

Bei expliziter Zeitintegration oder in Verbindung mit einigen stochastischen Verfahren ist eine Umformung in die Zustandsform als Differentialgleichung erster Ordnung erforderlich. Die doppelte Zeitableitung des Verschiebungsvektors im Gleichungssystem wird durch die einfache Zeitableitung des zusätzlich eingeführten Vektors der Geschwindigkeit \mathbf{v} ersetzt. Die Gleichgewichtsgleichung wird mit der Inversen der Massenmatrix multipliziert. Das Gleichungssystem mit n neuen Unbekannten muss durch n zusätzliche Gleichungen erweitert werden, die lediglich den differentiellen Zusammenhang zwischen Weg \mathbf{w} und Geschwindigkeit \mathbf{v} beinhalten.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{r} \tag{2.67}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_{AA} & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_{AB} & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})_{AA} & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})_{AB} & \mathbf{0} \\ (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_{BA} & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_{BB} - (1-\alpha)(-\mathbf{M}^{-1})_B \mathbf{K}_j & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})_{BA} & (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})_{BB} & (1-\alpha)(-\mathbf{M}^{-1})_B \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_Y (\mathbf{Y}_H, \dot{\mathbf{K}}) \mathbf{T}_K & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

mit $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_A \\ \mathbf{w}_B \\ \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_B \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}$ und $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F})_A \\ (-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F})_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$. (2.69)

3 Reduktion des Gleichungssystems

3.1 Modale Transformation

3.1.1 Modale Entwicklung der linearen Bewegungsgleichung

Die Systemmatrizen \mathbf{K} und \mathbf{M} mit n Zeilen und n Spalten seien symmetrisch und positiv definit. Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren wird das verallgemeinerte Eigenwertproblem gelöst [37]:

$$\mathbf{K}\phi^{(i)} = \lambda_i \mathbf{M}\phi^{(i)}. \quad (3.1)$$

Die n Eigenvektoren

$$\Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \dots \quad \phi^{(n)}] \quad (3.2)$$

sind orthogonal bezüglich der Massenmatrix \mathbf{M} . Sie werden bezüglich der Massenmatrix normiert, so dass gilt:

$$\phi^{(i)\top} \mathbf{M} \phi^{(j)} = \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots n, \quad (3.3)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist. Die Eigenvektoren spannen den Lösungsraum vollständig auf und sind wie die Eigenfrequenzen $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ reell. Durch die Transformation von \mathbf{w} in den von Φ aufgespannten modalen Raum werden die generalisierten Koordinaten \mathbf{w}^* definiert:

$$\mathbf{w} = \Phi \mathbf{w}^*. \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.4) in die Bewegungsgleichung und Multiplikation mit Φ von links entstehen die generalisierten (*) Matrizen:

$$\mathbf{M}^* = \Phi^\top \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad \mathbf{K}^* = \Phi^\top \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad \mathbf{C}^* = \Phi^\top \mathbf{C} \Phi. \quad (3.5)$$

Auf Grund der Normierung der Eigenvektoren wird die generalisierte Massenmatrix \mathbf{M}^* zur Einheitsmatrix \mathbf{I} und die generalisierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* zur Diagonalmatrix Λ der Eigenwerte $\lambda_i = \omega_i^2$. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die generalisierte Dämpfungsmatrix \mathbf{C}^* ebenfalls diagonal wird. Daran ist die Bedingung geknüpft, dass entweder eine modale Dämpfung mit dem Dämpfungsgrad ζ (= Lehrsches Dämpfungsmaß D) angenommen werden kann:

$$\phi^{(i)\top} \mathbf{C} \phi^{(j)} = 2\omega_i \zeta \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad (3.6)$$

oder dass die Dämpfungsmatrix proportional zu Massen- und Steifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{C} = a\mathbf{K} + b\mathbf{M}. \quad (3.7)$$

Die modale Dämpfung hängt dann für jedes entkoppelte System Gl. (3.10) von der jeweiligen Eigenkreisfrequenz ω_i ab:

$$\zeta_i = \frac{a\omega_i^2 + b}{2\omega_i} \quad (3.8)$$

Ist die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} steifigkeitsproportional ($b = 0$), so nimmt die modale Dämpfung mit den Eigenfrequenzen zu, höhere Resonanzen werden stark bedämpft. Umgekehrt nimmt die masseproportionale Dämpfung ($a = 0$) zu hohen Frequenzen hyperbolisch ab. Tiefe Resonanzen werden stark bedämpft. Um alle Resonanzen gleich zu gewichten, wird im weiteren von einer konstanten modalen Dämpfung ζ ausgegangen.

Weist die abgebildete Struktur eine inhomogen verteilte Dämpfungscharakteristik auf, kann die modale Transformation auch aus der Zustandsform der Bewegungsgleichung (2.68) entwickelt werden. Die Eigenformen und Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind im allgemeinen komplex.

Der generalisierte Kraftvektor geht aus der Transformationsvorschrift

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) \quad (3.9)$$

hervor. Die lineare Bewegungsgleichung verteilt sich im modalen Raum auf n entkoppelte skalare Gleichungen in der Form von n Ein-Freiheitsgrad-Systemen:

$$\ddot{w}_i(t) + 2\omega_i\zeta_i\dot{w}_i(t) + \omega_i^2 w_i(t) = f_i^*(t) \quad i = 1 \dots n \quad (3.10)$$

3.1.2 Modale Überlagerung der nichtlinearen Antwort

Da durch die Linearkombination der Eigenvektoren alle Verschiebungsfiguren abgebildet werden können, kann die Modenüberlagerung auch auf die in Gl. (2.65) formulierte nichtlineare Bewegungsgleichung angewendet werden. Als modale Basis können die Eigenformen aus dem allgemeinen Eigenwertproblem Gl. (3.1) gewählt werden, oder es werden alternativ die Eigenformen aus dem Eigenwertproblem mit der um die Teilmatrix $(1-\alpha)\mathbf{K}_j$ reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} verwendet (Gl. 2.65):

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_j \end{bmatrix} \right) \phi_\alpha^{(i)} = \lambda_i \mathbf{M} \phi_\alpha^{(i)}. \quad (3.11)$$

Der Unterschied besteht darin, dass die Moden $\mathbf{\Phi}$ im ersten Fall „glatt“ sind, während die Moden $\mathbf{\Phi}_\alpha$ im zweiten Fall an den Knoten Sprünge im Krümmungsverlauf bzw. im Verlauf der Krümmungsänderung aufweisen. Werden plastizierende Elemente sukzessive identifiziert, so muss das allgemeine Eigenwertproblem Gl. (3.11) jedes Mal erneut gelöst werden, um einen neuen Satz an Moden zu bestimmen, da sich die Teilmatrix \mathbf{K}_j ändert.

Verwendet man die glatten Moden, so bleibt das Gleichungssystem entkoppelt, solange sich die Elemente im elastischen Bereich befinden, da $\mathbf{K}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ in (Gl. 2.65) zu Null wird. Aus diesem Grund werden die Moden Φ aus dem unveränderten Eigenwertproblem Gl. (3.1) verwendet.

Die Auswertung der nichtlinearen Zusatzfunktionen erfolgt weiterhin in lokalen Koordinaten. Der Vektor der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente $\mathbf{Y}_{\mathbf{H}}$ bezieht sich auf Krümmungen, die sich aus dem lokalen Verschiebungsvektor ergeben. Die hierfür benötigten lokalen Knotenverschiebungen müssen aus den generalisierten Koordinaten innerhalb des Gleichungssystems rücktransformiert werden. Der Beitrag der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente $Y_{H,i}$ zum Gleichgewicht ist umgekehrt im modalen Raum zu berücksichtigen und daher in den Modalraum zu transformieren.

Aus Gl. (2.65) entsteht:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}^* \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\mathbf{K}} \Phi_{\mathbf{B}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}^* \\ \dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_j^* & \Phi_{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}^* \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die $n_{\mathbf{B}} \times n$ Modalmatrix $\Phi_{\mathbf{B}}$ ist auf die $n_{\mathbf{B}}$ Freiheitsgrade j des Teilvektors $\mathbf{w}_{\mathbf{B}}$ beschränkt, die den plastizierten Elementen zugeordnet sind. In Matrizennotation wird

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_{\mathbf{B}} \Phi, \quad (3.13)$$

definiert, wobei $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}$ eine $n_{\mathbf{B}} \times n$ Rechteckmatrix ist, die an den Stellen i,k für $i = j_k$ mit 1 besetzt ist:

$$T_{Bki} = \delta_{ij_k}, \quad k = 1 \dots n_{\mathbf{B}}, i = 1 \dots n. \quad (3.14)$$

Die in der $n_{\mathbf{B}} \times n_{\mathbf{B}}$ Matrix \mathbf{K}_j zusammengefassten Elementsteifigkeitsmatrizen der plastizierten Elemente werden mit der beschränkten Modalmatrix $\Phi_{\mathbf{B}}$ generalisiert, um die Dimension n der generalisierten Freiheitsgrade zu erhalten. Die generalisierte Matrix \mathbf{K}_j^* wird keine Diagonalmatrix, sondern ist voll besetzt. Selbst wenn der Vektor der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente $\mathbf{Y}_{\mathbf{H}}$ aus den Zusatzgleichungen bekannt wäre, ist damit der Vorteil der modalen Transformation, ein Gleichungssystem mit entkoppelten Gleichungen herzustellen, nicht mehr gegeben.

3.1.3 Voraussetzungen zur modalen Reduktion

Der bedeutendste Vorteil der modalen Transformation liegt in der Möglichkeit der modalen Reduktion. Bei der modalen Überlagerung der Antwort wird meist ein Großteil der modalen Beiträge klein und kann daher vernachlässigt werden. Das transformierte Gleichungssystem kann daher auf wenige generalisierte Freiheitsgrade reduziert werden. An diese Möglichkeit sind zwei wesentliche Bedingungen geknüpft:

- *Frequenzabstand der Eigenfrequenzen zum Frequenzbereich der maßgebenden Anregungen:* Da die spektralen Anteile vieler festigkeitsrelevanter, dynamischer Lasten zum höheren Frequenzbereich hin abnehmen, dominieren die resonanten Antworten im tieferen Frequenzbereich. Die Anregung von Resonanzen der höheren Moden wird mit zunehmendem Resonanzabstand geringer.
- *Beteiligungsfaktoren der einwirkenden Kräfte:* Die generalisierten äußeren und *inneren* Kräfte der höheren Moden werden klein. Diese Bedingung ist ebenfalls für die meisten zu berücksichtigenden dynamischen Lasten bei elastischer Antwort erfüllt. Sind die relevanten Lasten gleichmäßig verteilt, können sie durch die Superposition der langwelligen Grundmoden gut angenähert werden. Die höheren kurzwelligen Moden liefern nur geringe generalisierte Lasten. Solange das Antwortverhalten elastisch ist, werden dann auch die *inneren* generalisierten Kräfte der höheren Moden klein.

Die Reduktion der modalen Basis ist daher z.B. bei der Einwirkung impulshaltiger, konzentrierter Lasten ungeeignet.

Tritt nun lokal eine Plastizierung im Rahmentragwerk auf, so sind zusätzlich kurzwelligere höhere Moden zu superponieren, um die lokalen Verformungen rein geometrisch beschreiben zu können. Die generalisierten inneren Kräfte der höheren Moden sind nicht mehr vernachlässigbar. Durch die nichtlineare Antwort entstehen Sprünge im Krümmungsverlauf bzw. in der zeitlichen Ableitung des Krümmungsverlaufs. Diese Sprünge müssen durch die Superposition der *zweiten Ableitungen* der Eigenformen abgebildet werden. Dieser Umstand betont zusätzlich noch die Anteile der höheren Moden, wie an dem Beispiel eines Kragarms mit 10 Knoten und 18 Freiheitsgraden (ohne Längsverschiebungen) veranschaulicht werden soll (Abb. 3.1).

Tritt eine Plastizierung am 3. Element des Balkens (Knoten 3-4) aufgrund einer willkürlich gewählten dynamischen Last auf, so kann die Gesamtantwort des Systems in zwei Anteile zerlegt werden:

1. in die Antwort auf die äußere Last und
2. die Antwort auf nichtlineare innere Lasten, die bei Plastizierung entstehen. Die zusätzlichen inneren Lasten werden im Beispiel als bekannt vorausgesetzt.

Der Vektor der nichtlinearen inneren Lasten setzt sich aus zwei Vektoren einer Spaltenmatrix zusammen. Die beiden Vektoren sind in Abb. 3.1 am Kragarm als Kraftgruppe eingetragen. Die Lastvektoren entsprechen einer aufgeprägten Einheitskrümmung mit linearem Verlauf.

$$\mathbf{F}_p = \frac{(1-\alpha)EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \\ 1 & -1 \\ -l & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & l \\ \vdots & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_i(t) - \kappa_Y Y_{H_i}(t) \\ \kappa_{i+1}(t) - \kappa_Y Y_{H_{i+1}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

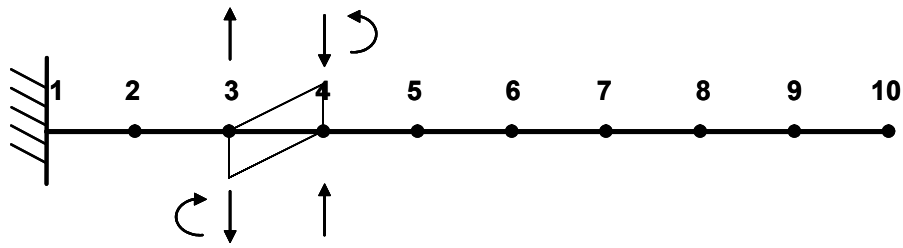


Abb. 3.1: Kragarm, Elementlänge $l_j = 1$ [m], Biegesteifigkeit $EI = 1$ [Nm]², verteilte Masse $m = 0,001$ [kg], plastisches Grenzmoment $M_Y = EI\kappa_Y = 1$ [Nm], Lastverteilung der inneren hysteretischen Rückstellkräfte am plastizierten Element 3.

Multipliziert man diese Lastvektoren mit den Eigenformen, um generalisierte Lasten zu erhalten, so erkennt man, dass auch höhere Eigenformen nicht zu vernachlässigende Anteile liefern.

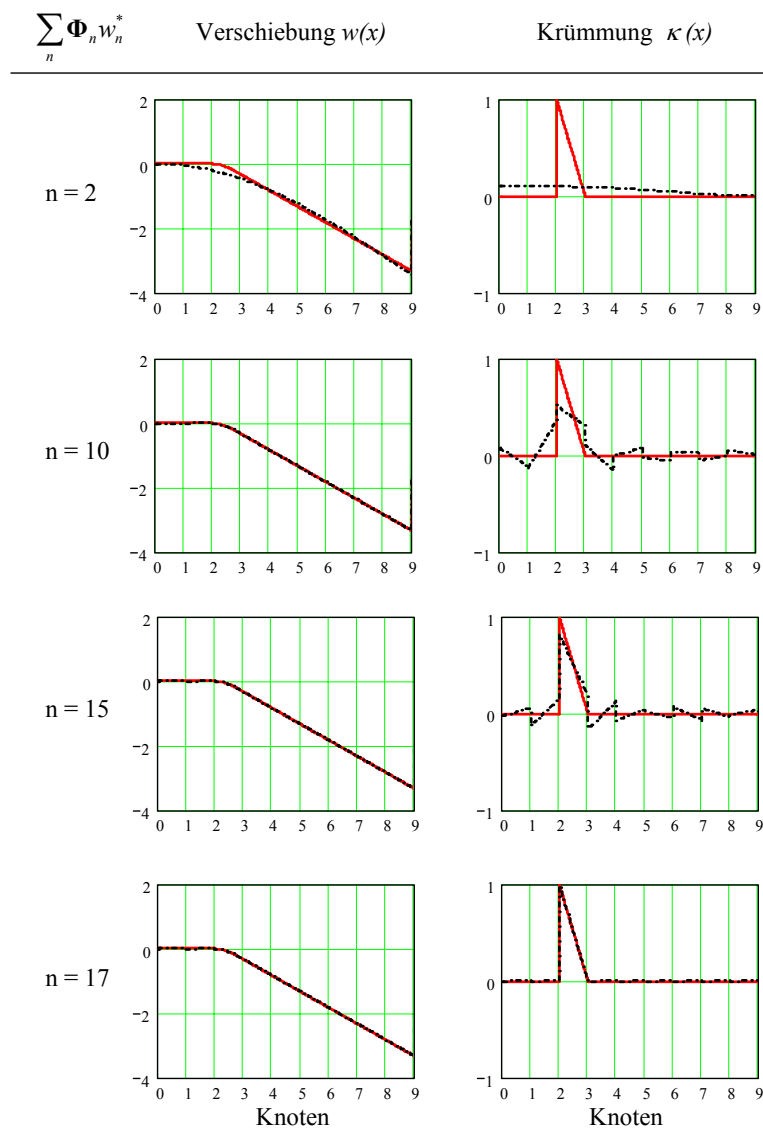


Abb. 3.2: Näherung der Biegelinie und des Krümmungsverlaufs erzeugt durch eine aufgezwungene Krümmung ($Y_{H3} = 1$) an Element 3 durch modale Superposition.

Abb. 3.2 zeigt die Annäherung der statischen Biegelinie und des Krümmungsverlaufes durch eine Linearkombination aus Eigenvektoren. Während die Biegelinie bereits mit 2 – 3 Moden schon näherungsweise abgebildet werden kann, ist die Annäherung des Krümmungsverlaufes auch mit

10 Moden noch unbrauchbar. Erst ab einer Überlagerung von 15 bis 17 Moden wird eine gute Näherung erzielt.

Wird in dem Beispiel eine gleichmäßig verteilte harmonisch anregende externe Last $\mathbf{F}_{\text{ext}}(f)$ bei $f = 2$ Hz angenommen, so wird man zur modalen Superposition der linear-elastischen partikulären Antwort nur Moden bis ca. $f = 4$ Hz heranziehen. Im Beispiel betrifft das die ersten beiden Moden. Die Beiträge der Moden 3 – 18 werden vernachlässigt.

Es soll nun wieder angenommen werden, dass Element 3 plastiziert und dass die angenommene externe Last ein bezogenes hysteretisches Rückstellmoment von $Y_{Ht}(f = 2 \text{ Hz}) = Y_{Ht+1}(f = 2 \text{ Hz}) = 1$ hervorruft. Die Beiträge zur Antwort der Krümmung an Knoten 3 auf den Anteil der Anregung durch die *inneren* hysteretischen Kräfte können aus den Beiträgen der einzelnen Moden superponiert werden. Die Spektren der Krümmung zerlegt in die entkoppelten Ein-Freiheitsgrad-Systeme sind in Abb. 3.3 dargestellt.

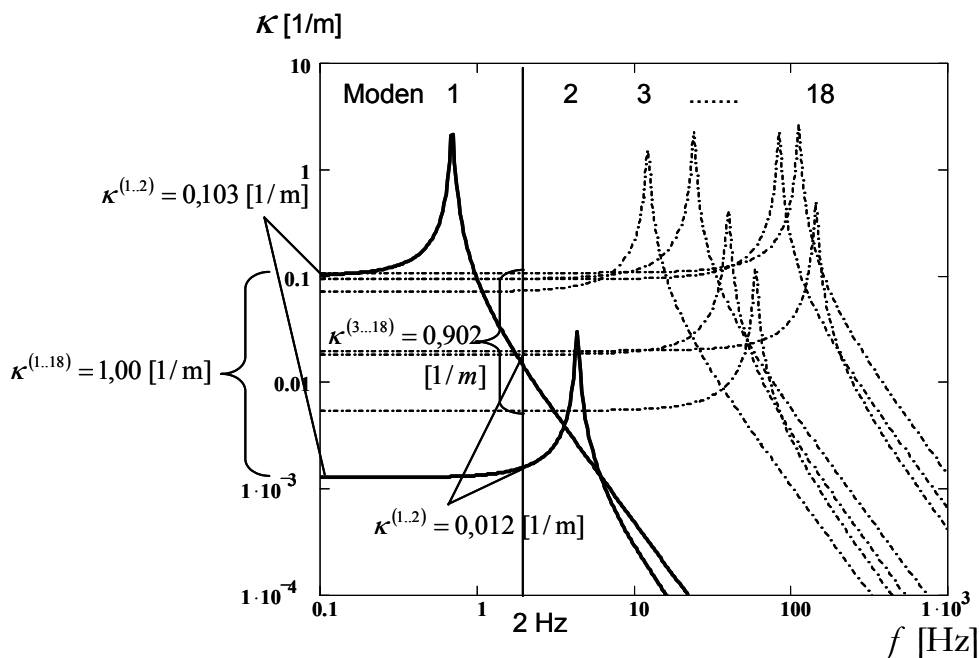


Abbildung 3.3: Berechnung der Krümmung κ_3 an Knoten 3 durch modale Überlagerung.

Die Gesamtamplitude bei $f = 2$ Hz beträgt in diesem Beispiel $|\kappa(f = 2 \text{ Hz})| = 0,89 [1/m]$. Der Anteil aus den ersten beiden Moden fällt mit lediglich $|\kappa^{(1..2)}(f = 2 \text{ Hz})| = 0,012 [1/m]$ relativ gering aus. Die Vernachlässigung der Beiträge der höheren Moden (3...18) würde zu einem erheblichen Fehler im Ergebnis der Krümmung führen, von deren Größe aber wiederum die Bestimmung der nichtlinearen Antwort unmittelbar abhängt.

Fazit ist, dass eine modale Transformation bei Berechnungen von Balken mit lokalen Plastizierungen zunächst nicht sinnvoll erscheint.

- Eine vollständige Entkoppelung der Gleichungen gleichzeitig für den elastischen und plastischen Zustand ist nicht möglich. In einer reduzierten Basis mit wenigen modalen Koordinaten ist dieser Nachteil bezogen auf den numerischen Aufwand jedoch nicht gravierend.

- Eine Reduzierung der Basis ist nicht möglich, da die erforderliche Abbildung des lokalen Krümmungsverlaufs mit wenigen Moden nicht ausreicht.
- Die inneren hysteretischen Kräfte erzeugen Anteile im höheren Frequenzbereich. Die Gesamtantwort ist daher nicht mehr nur auf den Frequenzbereich der externen Anregung beschränkt, sondern ist durch Rauschen gekennzeichnet. Der Rauschanteil ist von der Form der Hysterese abhängig. Ein abrupter Übergang von elastischem zu plastischem Zustand (z.B. Suzuki-Minai) erzeugt spektral höhere Rauschanteile im gesamten Frequenzbereich, während eine kontinuierliche Hysterese (Bouc-Wen) ein geringeres Rauschen erzeugt, das zum höheren Frequenzbereich hin abnimmt. Dieser Effekt ist gegenüber der Antwort auf die äußeren dynamischen Lasten meist von untergeordneter Bedeutung.

3.2 Erweiterung der reduzierten Basis durch plastische Formfunktionen

3.2.1 Näherungsverfahren mit Ansatzfunktionen

Die bisherige Diskussion hat gezeigt, dass eine modale Reduktion bei lokalen Plastizierungen hauptsächlich dadurch verhindert wird, dass die unteren Grundmoden die Unstetigkeiten in der Krümmung nicht adäquat abbilden. Ziel ist es nun, die reduzierte modale Basis beizubehalten und eine oder mehrere zusätzliche Formfunktionen zu entwickeln. Durch diese sollen die lokalen Effekte beschrieben werden können. Deren generalisierte Antworten sollen die Beiträge der höheren Moden ersetzen können. Diese Formfunktionen sollen anstatt der höheren Moden der reduzierten modalen Basis hinzugefügt werden, um die Anzahl der erforderlichen modalen Koordinaten zu verringern. Mit der „erweiterten“ reduzierten Basis soll nach dem Galerkin-Verfahren die elasto-plastische Antwort berechnet werden.

In differentieller Formulierung wird ein stationäres Problem als

$$L\{q\} = f \quad (3.16)$$

dargestellt, wobei L ein linearer Differentialoperator, q die unbekannte Zustandsgröße und f die anregende Funktion ist [11]. Die exakte Lösungsfunktion wird durch eine Summe von gewichteten Ansatzfunktionen angenähert:

$$q \approx \bar{q} = \sum_i q_i^* \psi_i \quad (3.17)$$

ψ_i sind unabhängige Näherungsfunktionen, die durch zu bestimmende Multiplikatoren q_i^* gewichtet werden. Der Ansatz (3.17) von q wird in Gl. (3.16) eingesetzt. Zur Auflösung nach den Unbekannten generalisierten Koordinaten q_i^* sind zwei Verfahren gebräuchlich.

Verfahren nach Ritz

Zur Bestimmung der Multiplikatoren q_i^* wird im Ritzschen Verfahren das Gesamtpotential (Funktional) Π der Differentialgleichung aufgestellt, das mit den optimalen Werten von q_i^* minimal wird. Das Minimum erhält man aus den partiellen Ableitungen des Funktionals

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i^*} = 0. \quad (3.18)$$

Aus dieser Bedingung entsteht ein Gleichungssystem, das nach den Unbekannten q_i^* aufgelöst werden kann.

Verfahren des gewichteten Rests

Setzt man voraus, dass die generalisierten Koordinaten bekannt sind, entsteht je nach Qualität der Ansatzfunktionen ein mehr oder weniger großes Kraft-Residuum:

$$R = f - L \left\{ \sum_i q_i^* \psi_i \right\}. \quad (3.19)$$

Um nun zu erfahren, in welchen Bereichen dieser Fehler besonders groß oder klein wird, kann R wiederum mit geeigneten Testfunktionen gewichtet werden. Den Fehlerkennwert der jeweiligen Testfunktion erhält man aus dem Integral über den Lösungsraum Γ . Z.B. können als Testfunktionen wiederum die einzelnen Ansatzfunktionen verwendet werden, um die Qualität der Wahl der Ansatzfunktionen zu testen.

Im **Galerkin**-Verfahren fordert man nun, dass alle Fehlerkennwerte des mit den Ansatzfunktionen gewichteten Residuums zu Null werden sollen. Daraus erhält man wiederum ein Gleichungssystem, aus dem die generalisierten Koordinaten q_i^* als Lösungsvektor hervorgehen:

$$\int_{\Gamma} \psi_j \left(f - L \left\{ \sum_i q_i^* \psi_i \right\} \right) d\Gamma = 0 \quad i, j = 1 \dots n. \quad (3.20)$$

Die Ansatzfunktionen ψ_i sind so zu wählen, dass sie die Randbedingungen erfüllen, da in Gl. (3.20) lediglich der Fehler im Differentialgleichungssystem minimiert wird. Beim Ritzschen Verfahren hingegen wird durch die Minimierung des Gesamtpotentials Π automatisch auch der Fehler in den natürlichen (Kraft-) Randbedingungen minimiert. Die Ansatzfunktionen müssen soweit nur die wesentlichen Randbedingungen (Zwangsbedingungen in den Verschiebungen) erfüllen. In der FE-Methode, die auf das Ritzsche Verfahren zurückgeführt werden kann, werden daher die Krastrandbedingungen nur im energetischen Mittel erfüllt, je nachdem wie die Ansatzfunktionen gewählt wurden.

Die Kollokationsmethode und das Verfahren der kleinsten Quadrate fallen ebenfalls in die Kategorie der Verfahren des gewichteten Rests.

3.2.2 Entwicklung der plastischen Formfunktionen

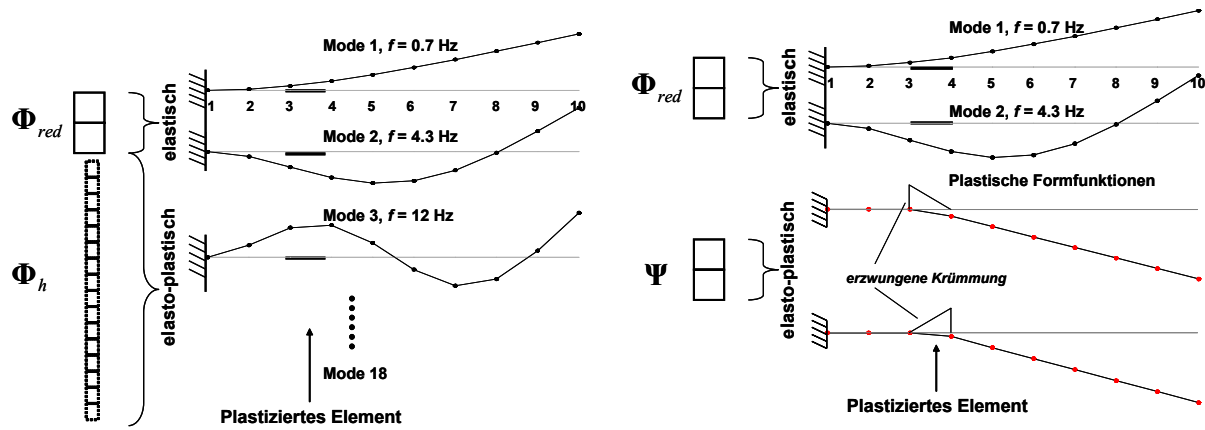
Die Frage stellt sich nun, wie die plastischen Formfunktionen für das Galerkin-Verfahren erzeugt werden können. Es lassen sich drei generelle Anforderungen formulieren:

1. *Forderung an die Randbedingungen:* Da die Formfunktionen als Galerkin-Vektoren verwendet werden, müssen sie die wesentlichen und die natürlichen Randbedingungen erfüllen.
2. *Krümmungsverlauf der Formfunktionen:* Die plastischen Formfunktionen sollen die lokalen Krümmungen am plastizierten Element beschreiben können.
3. *Orthogonalität der zusätzlichen Formfunktionen:* Die höheren Moden Φ_h , die ersetzt werden sollen, sind sowohl einzeln, als auch in linearer Kombination orthogonal zu den unteren Moden der reduzierten modalen Basis Φ_{red} . Formfunktionen, welche die Beiträge der höheren Moden ersetzen sollen, müssen dementsprechend ebenfalls das Orthogonalitätskriterium erfüllen.

Als Formfunktion, die auf ein Element beschränkte hohe Krümmungen aufweist, kann eine statische Verschiebungsfigur verwendet werden, die durch eine geeignet gewählte Gleichgewichtsgruppe oder durch Zwangsbedingungen erzeugt wird. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, z.B. eine Formfunktion mit konstantem Krümmungsverlauf zu generieren. Eine derartige Formfunktion erfüllt jedoch nicht die natürlichen Randbedingungen, die von der Wahl der Ansatzfunktionen der FE-Formulierung abhängt. Den gewählten linearen Ansatz für die Krümmungen im Balkenelement müssen die Formfunktionen ebenfalls abbilden können.

Um diesen linearen Verlauf nachbilden zu können, sind zwei Freiheitsgrade und dementsprechend zwei Formfunktionen pro plastiziertem Element erforderlich. Es bietet sich an, die statischen Verschiebungsfiguren aus $\Psi = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}_Y$ zu erzeugen, da die Spaltenvektoren von \mathbf{K}_Y eine Gleichgewichtsgruppe enthalten, die einen linearen Krümmungsverlauf erzeugen.

Abbildung 3.4 zeigt die Substitution der höheren Moden 3...18 durch die jeweils zwei statischen Biegelinien $\psi^{(i)}$ und $\psi^{(i+1)}$ am Beispiel des Kragarms schematisch. Der Kragarm stellt ein statisch bestimmtes System dar. Neben dem Element, dem eine Krümmung aufgeprägt wird, sind die Reaktionskräfte in der plastischen Formfunktion Null. Handelt es sich um ein statisch unbestimmtes System, werden auch innere Kräfte neben dem jeweiligen Element im gesamten System erzeugt, die bei ausreichendem FE-Diskretisierungsgrad im Verhältnis jedoch klein werden.


 Abb. 3.4 : Ersetzen der höheren Moden Φ_h durch statische Verschiebungslinien Ψ .

Die statischen Verschiebungsfiguren $\Psi = [\psi_y^{(i)} \quad \psi_y^{(i+1)} \quad \psi_z^{(i)} \quad \psi_z^{(i+1)}]$ sind zwar in der Regel linear unabhängig von den unteren Moden Φ_{red} , jedoch zunächst nicht notwendigerweise orthogonal. Um die Orthogonalität herzustellen, wird das Gram-Schmidt-Verfahren verwendet [37]. Der statische Verschiebungsvektor ψ wird als Linearkombination aller Eigenvektoren dargestellt, wobei die Summe in die Beiträge $\Phi_{red}\beta_{red}^{(i)}$ aus den Moden der reduzierten Basis und in die Beiträge $\Phi_h\beta_h^{(i)}$ der höheren Moden, die ersetzt werden sollen, zerlegt wird.

$$\psi^{(i)} = \Phi_{red}\beta_{red}^{(i)} + \Phi_h\beta_h^{(i)} \quad (3.21)$$

Da beide Anteile orthogonal zueinander sind, genügt es, nur die Beiträge der höheren Moden in den plastischen Formfunktionen zu berücksichtigen. Die Beiträge der unteren Moden sind bei einer Berechnung der elastischen oder elasto-plastischen, dynamischen Antwort auf eine beliebige externe Last nach dem Galerkin-Verfahren bereits enthalten.

$$\tilde{\psi}^{(i)} = \Phi_h\beta_h^{(i)} = \psi^{(i)} - \Phi_{red}\beta_{red}^{(i)} \quad (3.22)$$

Der verbleibende Anteil der plastischen Formfunktion ist nun orthogonal zur reduzierten modalen Basis.

Um den Anteil aus den Moden der reduzierten Basis abspalten zu können, muss der Vektor der Beteiligungsfaktoren $\beta^{(i)}$ bekannt sein. Aus Gl. (3.22) geht hervor, dass es genügt, den Teilvektor $\beta_{red}^{(i)}$ zu kennen. Wird Gleichung (3.21) nach $\beta_{red}^{(i)}$ aufgelöst, so erhält man:

$$\beta_{red}^{(i)} = \Phi_{red}^{-1}(\psi^{(i)} - \Phi_h\beta_h^{(i)}) \quad (3.23)$$

Da Φ_{red} keine quadratische Matrix ist, kann sie nicht unmittelbar invertiert werden. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften ist Φ_{red}^{-1} gleichwertig mit $\Phi_{red}^T \mathbf{M}$, wenn Φ_{red} bezüglich der Massenmatrix normiert ist (Gl. 3.3). Damit kann aufgelöst werden:

$$\beta_{red}^{(i)} = \Phi_{red}^T \mathbf{M} \psi^{(i)} - \Phi_{red}^T \mathbf{M} \Phi_h \beta_h^{(i)} \quad (3.24)$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften verschwindet der Subtrahend in Gl. (3.24). Die Berechnung der höheren Moden wird damit nicht erforderlich.

Schließlich ergibt sich die orthogonalisierte plastische Formfunktion zu:

$$\tilde{\psi}^{(i)} = \psi^{(i)} - \Phi_{\text{red}} \Phi_{\text{red}}^T \mathbf{M} \psi^{(i)}. \quad (3.25)$$

Werden weitere plastische Formfunktionen der modalen Basis hinzugefügt, so kann nach demselben Schema verfahren werden, wobei $\tilde{\Phi}_{\text{red}}$ dann bereits die bisher erzeugten plastischen Formfunktionen enthält. Somit wird sichergestellt, dass die orthogonalisierten plastischen Formfunktionen auch untereinander orthogonal bezüglich der Massenmatrix sind. Damit Gl. (3.25) verwendet werden kann, müssen die bisherigen plastischen Formfunktionen vorher noch nach Gl. (3.3) normiert werden.

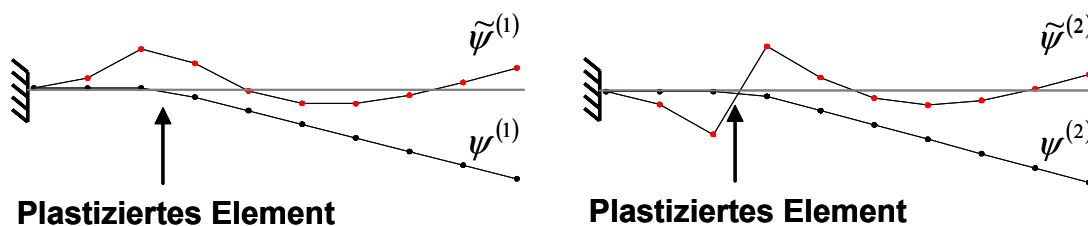


Abb. 3.5 : plastische Formfunktionen ψ an Knoten 3 und 4 und orthogonale plastische Formfunktionen $\tilde{\psi}$.

Abb. 3.5 zeigt die plastischen Formfunktionen wiederum am Beispiel des Kragarms. Zuerst wurde die Formfunktion links orthogonalisiert, danach die Formfunktion rechts. Die Gestalt der Formfunktionen ist also abhängig von der Reihenfolge der Orthogonalisierung. Die Orthogonalisierung dient außerdem dazu, um sicherzustellen, dass alle Basisvektoren linear unabhängig sind.

Durch Erweiterung der modalen Basis mit den Formfunktionen entstehen zusätzliche „künstliche“ Resonanzen in den Antwortspektren. Durch die Orthogonalisierung wird erreicht, dass diese Resonanzen höher liegen, als die höchste Resonanz der linearen Moden der reduzierten Basis. Damit wird der Fehler aus diesen künstlichen Resonanzen in Grenzen gehalten.

Außerdem können zur Validierung die Beiträge der orthogonalisierten, plastischen Formfunktionen einer Berechnung in erweiterter reduzierter Basis der Summe der Beiträge der höheren Moden aus einer Berechnung in vollständiger Basis unmittelbar gegenübergestellt werden.

Plastizierung mehrerer Elemente

Für jedes plastizierte Element werden sukzessive plastische Formfunktionen hinzugefügt. Der Vektor \mathbf{q}^* erweitert sich um jeweils zwei generalisierte Koordinaten pro Biegeachse (ebene Biegung: 2, schiefe Biegung: 4). Es werden neue generalisierte Systemmatrizen erzeugt. Die bei großen Systemen numerisch aufwändige Lösung des Eigenwertproblems muss nicht wiederholt werden.

Dem Gleichungssystem werden weitere nichtlineare Zusatzgleichungen hinzugefügt. Insgesamt bleibt jedoch die Form von Gl. (3.12) prinzipiell erhalten, was eine Behandlung durch etablierte Algorithmen erleichtert.

Das Gleichungssystem in der reduzierten modalen Basis wird zu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}^* \\ \dot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_k \tilde{\Phi}_{Bred} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}^* \\ \dot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_j^* & \tilde{\Phi}_{Bred}^T \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}^* \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Änderungen im Vergleich zu Gl. (3.12) in reduzierter modaler Basis mit insgesamt n_p plastischen Formfunktionen sind:

- die modale Basis wird reduziert auf $\tilde{\Phi}_{red} = [\phi^{(1)} \ \phi^{(2)} \ \dots \ \phi^{(n_{red})}, \ \tilde{\psi}^{(1)} \ \tilde{\psi}^{(2)} \ \dots \ \tilde{\psi}^{(n_p)}]$,
- die generalisierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* und die generalisierte Dämpfungsmatrix \mathbf{C}^* sind nicht mehr diagonal.

Abb. 3.6 zeigt schematisch die Reduktion des Gleichungssystems in modaler Basis am Beispiel des Kragarms mit 18 Freiheitsgraden mit einem plastizierten Element. Das System kann auf weniger als ein Viertel der Ausgangsgröße reduziert werden.

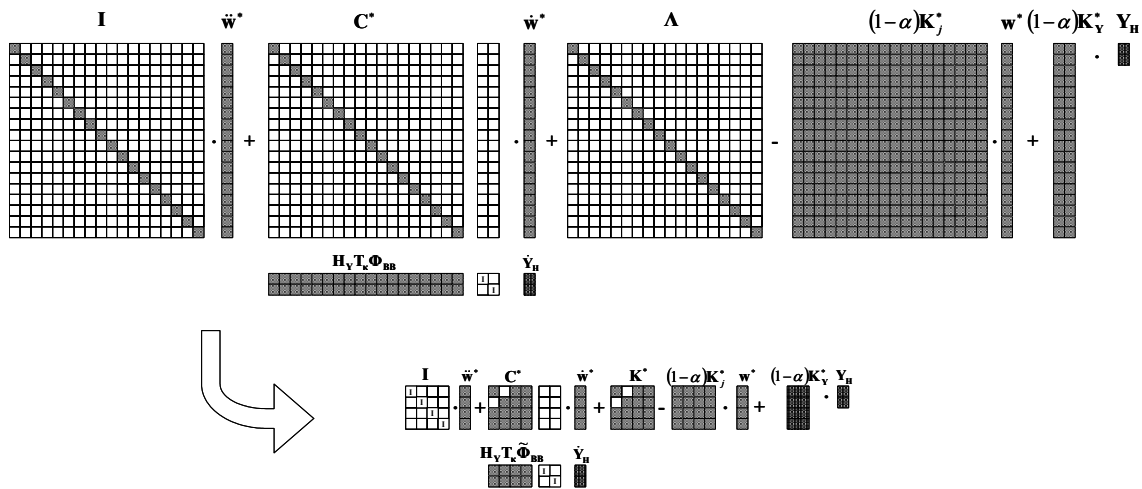


Abb. 3.6 : Schematische Darstellung der Reduktion des Gleichungssystems (3.12) (ohne Lasten) am Beispiel Kragarm mit 18 generalisierten Freiheitsgraden auf das Gleichungssystem (3.26) mit 4 generalisierten Freiheitsgraden, 2 elastische Moden + 2 plastische Formfunktionen (jeweils zuzüglich der Freiheitsgrade der Hilfsvariablen).

Einsatz der plastischen Formfunktionen am Beispiel Kragarm

Inwieweit die Lösungen in vollständiger und erweiterter reduzierter Basis (Abb. 3.6) übereinstimmen, soll anhand des Beispiels des Kragarms (Abb. 3.1) untersucht werden. Aufgebracht wird eine gleichmäßig verteilte und voll korrelierte stochastische Last. Die Antwort wird im Zeitbereich aus einer deterministischen Zeitintegration mit einer Realisation der stochastischen Last ermittelt. Verwendet wird das Hysterese-Modell nach Bouc-Wen mit den Parametern $\mathcal{A} = 1$, $\gamma = \nu = 0,5$ und $N = 1$. Als stochastische Last wird simuliertes weißes Rauschen mit $S_F = 10^5 \text{ N}^2\text{s}$, $\sigma_F = 10^{-1,5}$ verwendet, das bei einer oberen Eckfrequenz von $f = 8 \text{ Hz}$ (Tiefpass) gefenstert ist. Die linear-elastische Antwort kann damit durch die ersten beiden Moden ausreichend genau abgebildet werden.

Frequenzauflösung: $\Delta f = 1/64$ Hz
 Dämpfungsgrad: $\zeta = 0,02$
 Plastisches Grenzmoment: $M_p = 1$ [Nm] ($\kappa_Y = 1$ [1/m]), bez. auf M_H

Die Abbildungen 3.7a-3.7g zeigen die Zeitverläufe der Systemantwort auf eine Realisierung der stochastischen Anregung. Die zugehörigen Leistungsdichtespektren (PSD), gemittelt aus der Antwort von 1000 Realisationen, sind in den Abbildungen 3.8a - 3.8c enthalten. Als Referenz dient jeweils die Lösung nach Gl. (2.65) bzw. (3.12) in vollständiger modaler Basis.

Abb. 3.7a: *Vergleich der linear-elastischen Antwort mit der am Gesamtsystem berechneten nicht-linearen Antwort (Referenz):*

In Folge der Ausbildung der Hysterese in der nichtlinearen Berechnung nimmt die Amplitude sowohl in der Auslenkung w an Knoten 4 als auch in der Krümmung κ an Knoten 3 ab. Die zugehörigen Leistungsdichtespektren (PSD) der Krümmung sind in Abb. 3.8a wiedergegeben: Die Resonanzspitzen werden durch die Hysterese bedämpft. Gleichzeitig entsteht ein höherer „Rauschanteil“, der dadurch hervorgerufen wird, dass durch den elasto-plastischen Übergang eine rein harmonische Antwort behindert wird. Es ist anzumerken, dass für den Vergleich das Spektrum der linear-elastischen Antwort mit konstantem Anregespektrum bis 100 Hz berechnet wurde. Daher sind im linearen Spektrum auch Anteile oberhalb von $f = 8$ Hz enthalten. Für die Darstellung der linearen Antwort im Zeitbereich (Abb. 3.7a) sind nur spektrale Anteile bis $f = 8$ Hz berücksichtigt. Durch die Nichtlinearität entstehen oberhalb der Grenzfrequenz der Anregung bei $f = 8$ Hz ebenfalls Anteile der Antwort im Frequenzbereich.

Abb. 3.7b: *Vergleich der nichtlinearen Antwort berechnet am vollständigen Gleichungssystem (Referenz) mit der Berechnung im reduzierten System mit zwei elastischen Moden ohne zusätzliche Formfunktionen:*

Durch den Unterschied in den Kurven wird bestätigt, dass die Reduktion auf eine Basis, die auf die ersten beiden elastischen Moden beschränkt ist, für die nichtlineare Berechnung nicht ausreicht. Die durch die Plastizierung auftretende lokal erhöhte Krümmung kann durch die beiden Moden nicht abgebildet werden.

Abb. 3.7c - Abb. 3.7f: *Vergleich der elasto-plastischen Antwort berechnet am Gesamtsystem (Referenz) mit der Berechnung im reduzierten System mit zwei elastischen Moden erweitert um zwei plastische Formfunktionen:*

Erst durch Hinzufügen der plastischen Formfunktionen kann die Referenzlösung wieder angenähert werden. Im Zeitbereich ergibt sich sowohl für die Auslenkungen w an Knoten 4 (Abb. 3.7c links) als auch für die Krümmung (Abb. 3.7c rechts) und das bezogene hysteretische Rückstellmoment an Knoten 3 (Abb. 3.7d) eine nahezu exakte Übereinstimmung. Das bezogene hysteretische Rückstellmoment ist nach oben und unten durch die Plastizitätsgrenze $\kappa_Y = 1$ beschränkt.

In Abb. 3.7e werden die superponierten Beiträge der höheren Moden 3 – 18 der Referenzlösung den Beiträgen der plastischen Formfunktionen $\mathbf{\kappa}_{\tilde{\Psi}}(t) = \mathbf{T}_{\kappa} \tilde{\Psi} \mathbf{w}_{\tilde{\Psi}}^*(t)$ gegenübergestellt. Dieser Vergleich ist möglich, da die plastischen Formfunktionen ebenfalls orthogonal zu den beiden elastischen Grundmoden sind. Die wiederum nahezu exakte Übereinstimmung der beiden Kurven ist der numerische Beweis dafür, dass die höheren Moden durch die plastischen Formfunktionen ersetzt werden können.

Aus diesen Kurven kann der Zustand des Systems abgelesen werden. Bei Ausbildung eines Plateaus ist die Antwort rein elastisch, Zu- und Abnahme der Beiträge deuten auf nichtelastische Zunahme der Krümmung und damit auf die Plastizierung des Systems hin. Die plastischen Formfunktionen werden also tatsächlich vom System nur „gebraucht“, wenn das Element plastiziert.

Spektral ergibt sich ebenfalls eine Deckung der Leistungsdichten in den Abb. 3.8b – Abb. 3.8c bis $f = 8$ Hz. Oberhalb dieser Frequenz wird das Unvermögen der plastischen Formfunktionen deutlich, die Antwort der höheren Moden abzubilden. Daraus resultieren auch die geringfügigen Abweichungen im Zeitverlauf der Krümmungsgeschwindigkeit in Abb. 3.7f. Diesem Defizit kann jedoch leicht durch die Berücksichtigung von wenigen höheren elastischen Moden Rechnung getragen werden. Wenn zum Beispiel noch die dritte Mode in die reduzierte Basis aufgenommen wird, stimmt auch die Krümmungsgeschwindigkeit ebenfalls fast exakt mit der Referenzlösung überein. Da aus den plastischen Formfunktionen generalisierte Massen- und Steifigkeitsterme entstehen, werden auch künstliche Resonanzspitzen im Spektrum oberhalb von $f = 8$ Hz erzeugt, die im Spektrum der Antwort in reduzierter Basis erkennbar werden.

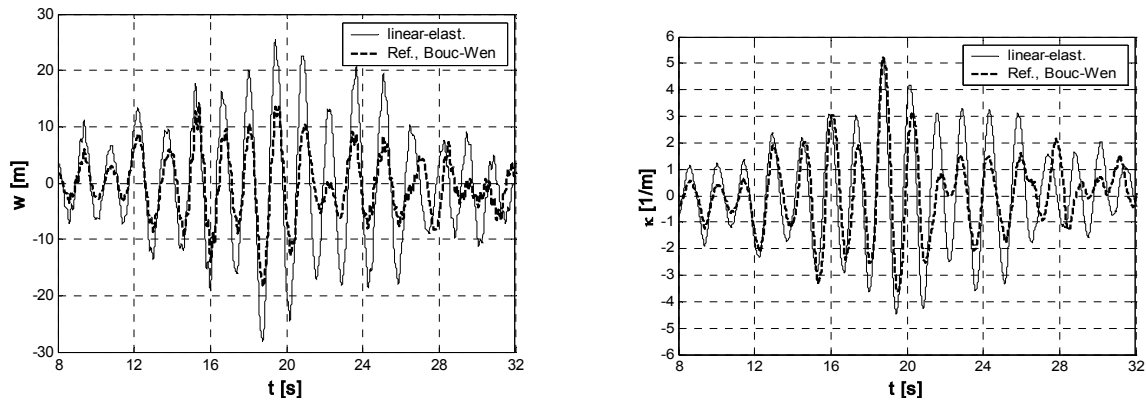


Abb. 3.7a: Zeitverlauf der Auslenkung $w(t)$ an Knoten 4 (links) und der Krümmung $\kappa(t)$ an Knoten 3 (rechts) linear-elastische – nichtlineare Antwort.

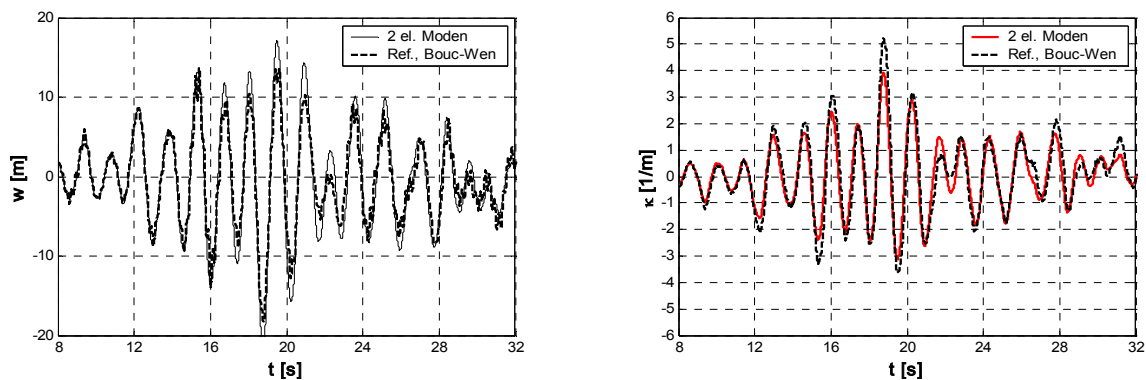


Abb. 3.7b: Zeitverlauf der Auslenkung $w(t)$ an Knoten 4 (links) und der Krümmung $\kappa(t)$ an Knoten 3 (rechts) Berechnung mit 2 elast. Moden, **ohne** plast. FF – Referenz (nichtlinear).

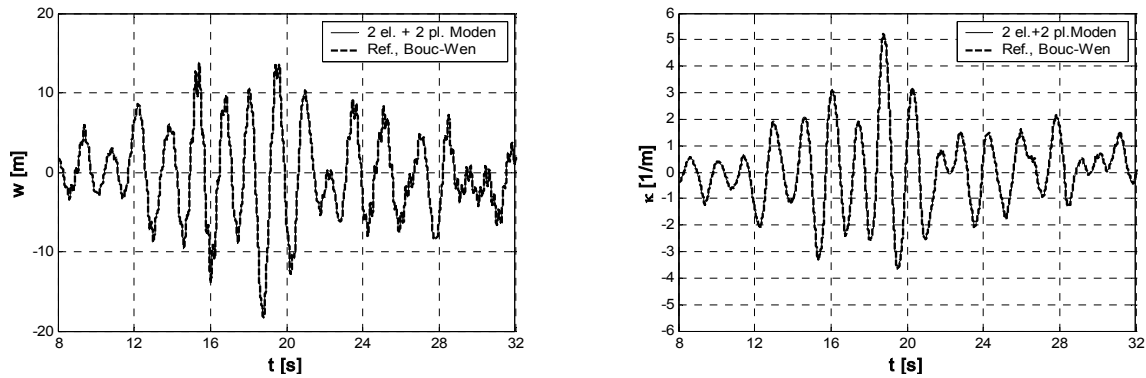


Abb. 3.7c: Zeitverlauf der Auslenkung $w(t)$ an Knoten 4 (links) und der Krümmung $\kappa(t)$ an Knoten 3 (rechts) Berechnung mit 2 elast. Moden, + 2 plast. Formfunktionen – Referenz (nichtlinear).

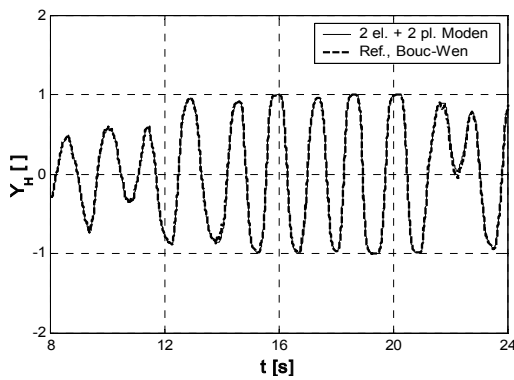


Abb. 3.7d: Zeitverlauf des bez. hyst. Rückstellmoment Y_H Berechnung mit 2 elast. Moden + 2 plast. FF - Referenz (nichtlineare Antwort an Knoten 3).

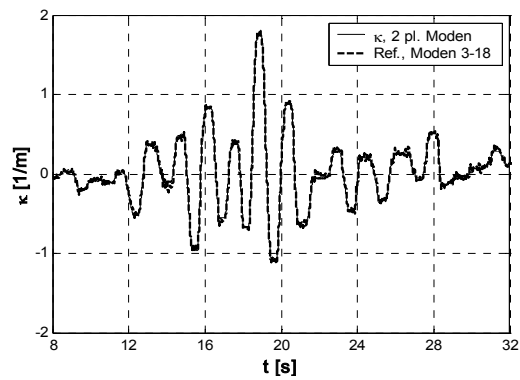


Abb. 3.7e: Zeitverlauf der Krümmung κ an Knoten 3 Berechnung mit 2 elast. Moden + 2 plast. FF, Beitrag der 2 plast. FF – Referenz, Beitrag der Moden 3 – 18.

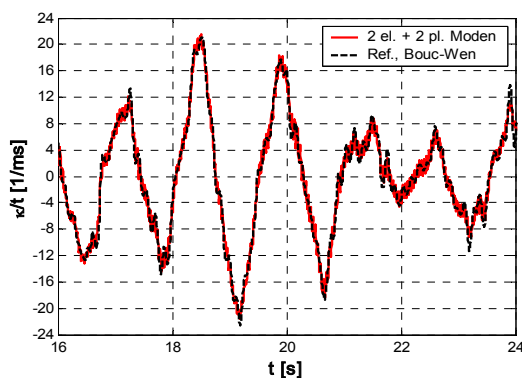


Abb. 3.7f: Zeitverl. der Krümmungsgeschwindigkeit. $d\kappa/dt$ Berechnung mit 2 elast. Moden + 2 plast. FF - Referenz (nichtlineare Antwort an Knoten 3).

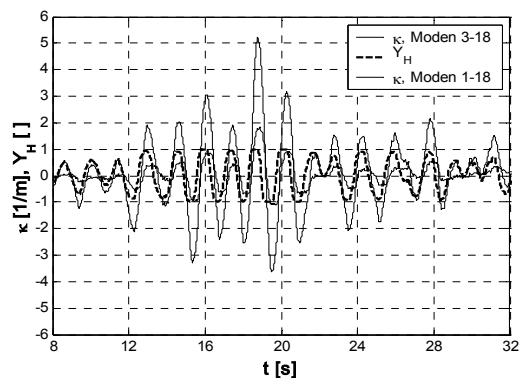


Abb. 3.7g: Zeitverläufe an Knoten 3, elasto-plastische Referenzantwort mit allen Moden (1-18) Krümmung κ , Beitrag aller Moden – Moden 3 – 18 bez. hyst. Rückstellmoment Y_H .

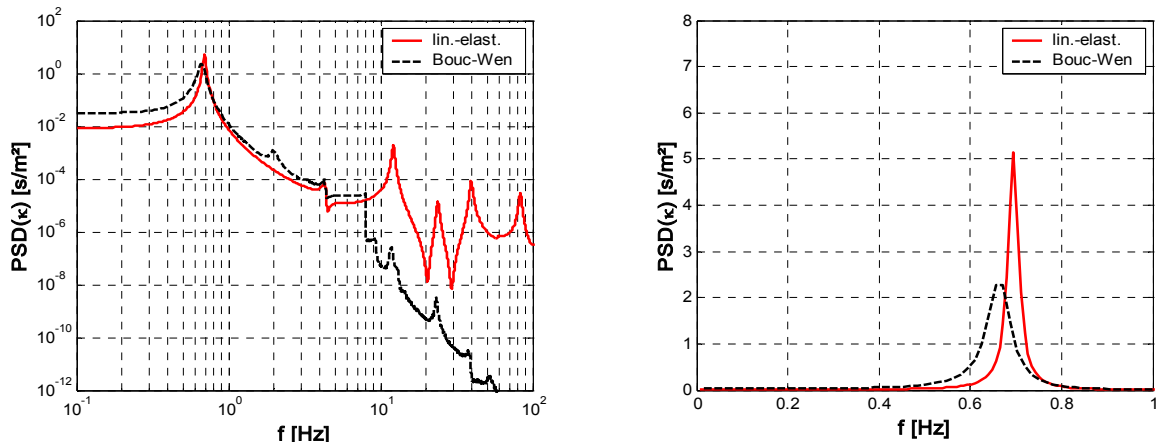


Abb. 3.8a: PSD der Krümmung κ an Knoten 3: linear-elastische – nichtlineare Antwort (Referenz) in doppelt-logarithmischem Maßstab (links) und in linearem Maßstab (rechts).

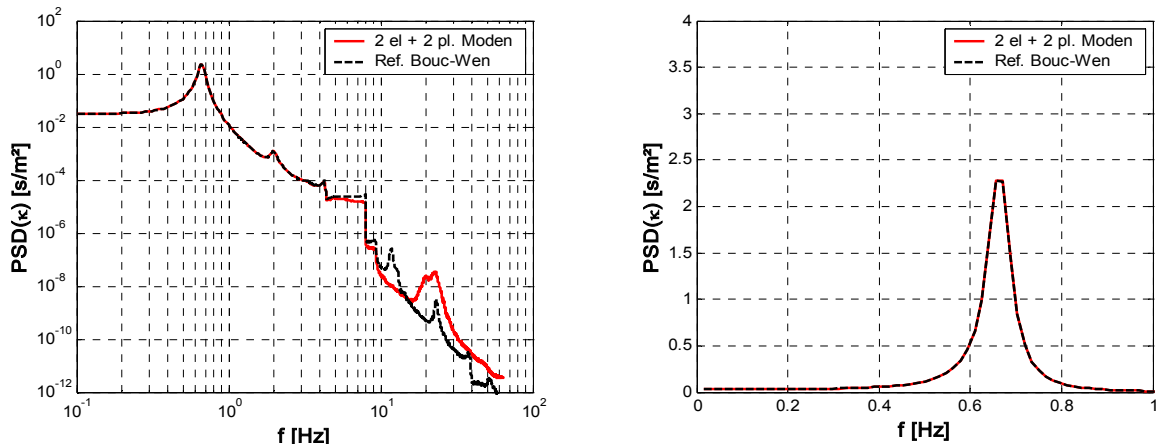


Abb. 3.8b: PSD der Krümmung κ an Knoten 3: nichtlineare Berechnung mit 2 elast. Moden + 2 plast. Formfunktionen – Referenzantwort in doppelt-logarithmischem Maßstab (links) und in linearem Maßstab (rechts).

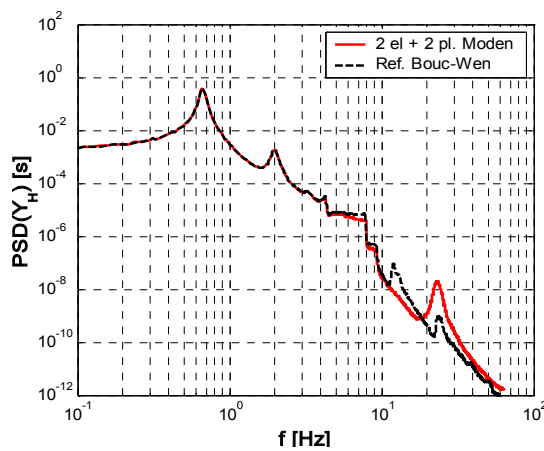


Abb. 3.8c: PSD des bez. hyst. Rückstellmoments Y_H an Knoten 3: nichtlineare Berechnung mit 2 elast. Moden+ 2 plast. Formfunktionen - Referenzantwort.

In den Zeitverläufen und Spektren ist nur die Antwort an einzelnen Knoten wiedergegeben. Um die räumliche Übereinstimmung zu überprüfen, können Verschiebungsfiguren und Krümmungsverläufe in einer Animation dargestellt werden. Exemplarisch ist in Abb. 3.9 und Abb. 3.10 der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 63,8$ [s] als Momentaufnahme herausgegriffen. Die vollständig superponierte Lösung (nach Gl. (2.65) bzw. (3.12) mit allen Moden) wird mit der Lösung in reduzierter Basis Gl. (3.26) verglichen. Im linken Bild wird die Gesamtverschiebung aus den Beiträgen der 2 elastischen Moden Φ_{red} zuzüglich den Beiträgen aus den plastischen Formfunktionen $\tilde{\Psi}$ bzw. den höheren Moden Φ_h zusammengesetzt (überhöht dargestellt). Das rechte Bild zeigt dieselben Beiträge für den Krümmungsverlauf. Die Momente in Abb. 3.10 überlagern sich gemäß Gl. (2.35). Die Übereinstimmung kann vor allem im Krümmungsverlauf als sehr gut bezeichnet werden.

Verfolgt man die zeitliche Entwicklung der Summe der Beiträge der höheren Moden $\mathbf{w}_h(t) = \Phi_h \mathbf{w}_h^*(t)$ bzw. deren Beitrag zum Krümmungsverlauf $\kappa_h(t) = \mathbf{T}_\kappa \Phi_h \mathbf{w}_h^*(t)$ so fällt auf, dass die Beiträge untereinander nahezu in einem festen Verhältnis stehen. Dies bedeutet, dass die höheren Moden in einer Formfunktion „eingefroren“ werden können. Diese eingefrorenen Formfunktionen entsprechen augenscheinlich den orthogonalisierten statischen Biegelinien $\tilde{\Psi}$.

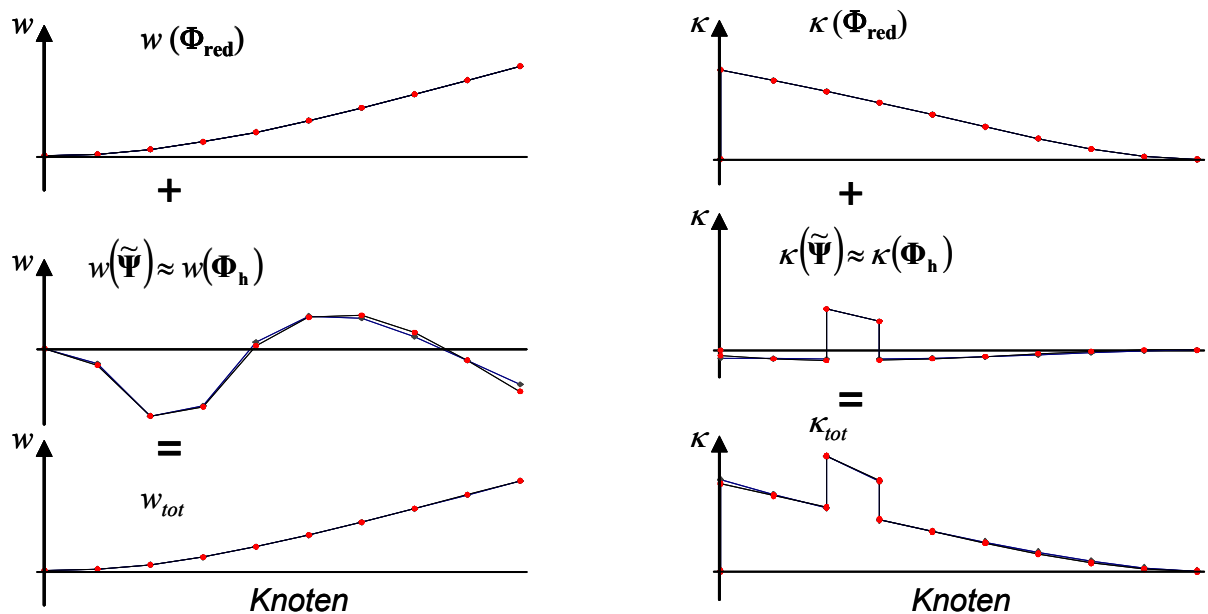


Abb. 3.9 : Vergleich der Ergebnisse in vollständiger (♦) und reduzierter modaler (●) Basis zum Zeitpunkt $t = 63,8$ s, Superposition der Biegelinie (Bild links) und des Krümmungsverlaufes (Bild rechts) aus den Beiträgen der elastischen Moden der reduzierten Basis und den Beiträgen der höheren Moden bzw. der orthogonalisierten plastischen Formfunktionen.

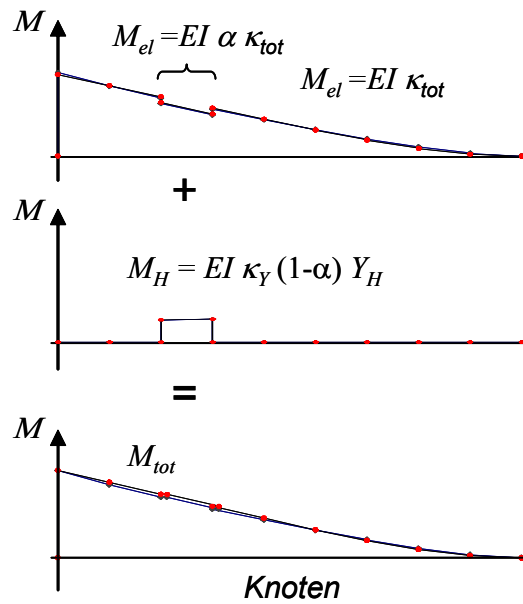


Abb. 3.10: Vergleich der Ergebnisse in vollständiger (\blacklozenge) und reduzierter modaler (\bullet) Basis zum Zeitpunkt $t = 63,8$ [s], Bildung des Gesamtmomentes aus elastischem und hysteretischem Rückstellmoment ($M = M_{el} + M_H$).

Die plastischen Formfunktionen wurden bisher aufgrund der Eigenschaften, die sie erfüllen sollen, generiert. Es entsteht die Frage, inwieweit durch die Wahl der Formfunktionen der gewichtete Rest im Galerkin-Verfahren minimiert wird. Bekannt ist, dass dieser Rest in einer vollständigen Basis zu Null wird. Wenn der Nachweis gelingt, dass durch die plastischen Formfunktionen die Beiträge der höheren Moden exakt wiedergegeben werden können, wird gleichzeitig nachgewiesen, dass die plastischen Formfunktionen ebenfalls eine optimale Wahl darstellen.

3.3 Verwendung statischer Verschiebungsfiguren in dynamischen Berechnungen

Aus der Literatur sind mehrere Verfahren bekannt, bei denen statische Verschiebungsfiguren neben elastischen Eigenformen zur Superposition der Gesamtlösung verwendet werden. In allen Methoden wird angenommen, dass sich eine einwirkende dynamische Last $\mathbf{F}(t)$ durch ein Produkt von i Ortsvektoren $\mathbf{F}_0^{(i)}$, welche die räumliche Verteilung der Last beschreiben, multipliziert mit einer skalaren Zeitfunktion $f_i(t)$ darstellen lässt:

$$\mathbf{F}^{(i)}(t) = \mathbf{F}_0^{(i)} f_i(t). \tag{3.27}$$

Die modale Basis sei so gewählt, dass der Frequenzabstand der Eigenfrequenz der untersten vernachlässigten Mode ausreichend groß zur höchsten Anregefrequenz ist. Weiterhin sei angenommen, dass die Lasten *nicht* gleichmäßig verteilt sind, und daher die generalisierten Kräfte aus den höheren Moden, die nach dem Kriterium des Frequenzabstandes vernachlässigt werden könnten, noch maßgebend sind.

Für diesen Fall kann festgestellt werden, dass die Beiträge der höheren Moden steifigkeitsbestimmt sind, also dass die Massen- und Dämpferkräfte aus diesen Beiträgen klein werden. Wie aus dem Beispiel in Abb. 3.3 hervorgeht, sind in der Frequenz der Anregung bei $f = 2$ Hz nur die steifigkeitsbestimmten Beiträge der höheren Moden zur Krümmung relevant.

Methode der modalen Erweiterung („Modal Augmentation Method“ [78]):

Die höheren Moden werden durch statische Verschiebungsfiguren im Sinne des Galerkin-Verfahrens in der modalen Basis ersetzt, in der Annahme,

1. dass die Phasen der Beiträge der höheren Moden in Bezug auf die Anregung Null sind,
2. dass die Beiträge der höheren Moden relativ zu einander konstant bleiben.

Die statischen Verschiebungsfiguren werden als statische Lösung definiert mit:

$$\boldsymbol{\Psi}^{(i)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_0^{(i)}. \quad (3.28)$$

Zur Bestimmung der Anteile der höheren Moden im Frequenzbereich wird die frequenzabhängige lineare Übertragungsfunktion $H(\Omega)$ aus n Moden überlagert:

$$H_{i,j}(\Omega) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\Phi_{i,m} \Phi_{j,m}}{\omega_m^2 - \Omega^2 + 2i\omega_m \Omega \zeta} \right). \quad (3.29)$$

Der quasi-statische Anteil der dynamischen Antwort

$$\boldsymbol{\Psi}^{(i)} f_i(t) = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}_0^{(i)} f_i(t) \quad (3.30)$$

entspricht dann der modalen Superposition für $\Omega \rightarrow 0$ mit:

$$\Psi_{j,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left(\frac{\Phi_{j,m} \Phi_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{n_{red}} \left(\frac{\Phi_{j,m} \Phi_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{m=n_{red}+1}^n \left(\frac{\Phi_{j,m} \Phi_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right). \quad (3.31)$$

Die Anteile werden den unteren ($1 \dots n_{red}$) und den höheren Moden ($n_{red}+1 \dots n$) zugeordnet. Unter der getroffenen Voraussetzung, dass die Beiträge aus den höheren Moden nur quasi-statische innere Kräfte hervorrufen, können die höheren Moden durch

$$\tilde{\Psi}_{j,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=n_{red}+1}^n \left(\frac{\Phi_{j,m} \Phi_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right) = \Psi_{j,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{n_{red}} \left(\frac{\Phi_{j,m} \Phi_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right) \quad (3.32)$$

in der modalen Basis ersetzt werden. Dieser Anteil der statischen Formfunktionen ist orthogonal zu den Moden der reduzierten Basis, da er sich aus der Überlagerung der höheren Moden ergibt.

Betrachtet man den Vektor der inneren Rückstellkräfte als äußere Last, so ist die *Methode der modalen Erweiterung* direkt übertragbar. Dazu wird die nichtlineare Bewegungsgleichung (2.65) umgestellt (ohne nichtlineare Zusatzgleichungen mit $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_A \quad \mathbf{w}_B]^T$):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}(t) - (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_j \mathbf{w}_B(t) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H(t) \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Verwendet man die Gln. (2.7), (2.12) und (2.47), so kann umgeformt werden zu:

$$-(1-\alpha) [\mathbf{K}_j \mathbf{w}(t) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H(t)] = -(1-\alpha) \mathbf{K}_\kappa (\boldsymbol{\kappa}(t) - \boldsymbol{\kappa}_Y \mathbf{Y}_H(t)). \quad (3.34)$$

Dieser Ausdruck der inneren Lasten hat wiederum die Form von Gl. (3.27). In Analogie zu den Gln. (3.27) und (3.28) erhält man die Matrix der plastischen Formfunktionen $\boldsymbol{\Psi}$ aus

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_\kappa \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

wenn \mathbf{K}_κ als Matrix mit i Spaltenvektoren aufgefasst wird, in denen eine räumliche Lastverteilung beschrieben ist. Die i Differenzen aus Krümmungen und bezogenen hysteretischen Rückstellmomenten $\kappa_i(t) - \kappa_Y Y_{H_i}(t)$ stellen die skalaren Zeitfunktionen der inneren Rückstellkräfte dar.

Die höheren Moden werden in der modalen Basis durch die plastischen Formfunktionen ersetzt:

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{j,i} = \boldsymbol{\Psi}_{j,i} - \sum_{k=1}^{n_B} \sum_{m=1}^{n_{red}} \left(\frac{-(1-\alpha) \boldsymbol{\Phi}_{j,m} \boldsymbol{\Phi}_{Bk,m} K_{\kappa k,i}}{\omega_m^2} \right). \quad (3.36)$$

Werden die hiermit hergeleiteten plastischen Formfunktionen wiederum bezüglich der Massmatrix normiert, sind sie mit den im vorhergehenden Abschnitt gewählten plastischen Formfunktionen identisch, die aufgrund der erforderlichen Eigenschaften generiert wurden. Sie stellen unter den getroffenen Annahmen der *Methode der modalen Erweiterung* die optimale Wahl als Ansatzfunktionen im Sinne des Galerkinverfahrens dar.

Methode der statischen Korrektur und **Methode der modalen Beschleunigungen** („Static Correction Procedure“, „Mode Acceleration Method“ [37]):

Wird wieder angenommen, dass der Beitrag der höheren Moden zur dynamischen Antwort steifigkeitsbestimmt ist, kann die lineare Gesamtlösung $\mathbf{w}(t)$ in einen dynamischen $\mathbf{w}_{dyn}(t)$ und einen statischen Anteil $\mathbf{w}_{stat}(t)$ unter Verwendung der Gln. (3.29) und (3.31) zerlegt werden:

$$\mathbf{w}_j(t) = \mathbf{w}_{dyn_j}(t) + \mathbf{w}_{stat_j}(t) = \sum_{m=1}^{n_{red}} \boldsymbol{\Phi}_{j,m} \mathbf{w}_m^*(t) + \sum_{m=n_{red}+1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\boldsymbol{\Phi}_{j,m} \boldsymbol{\Phi}_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} f_i(t) \right). \quad (3.37)$$

Der statische Anteil wird mit Gl. (3.28) dann zu

$$\mathbf{w}_{stat_j}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\boldsymbol{\Psi}_{j,i} - \sum_{m=1}^{n_{red}} \sum_{k=1}^n \frac{\boldsymbol{\Phi}_{j,m} \boldsymbol{\Phi}_{k,m} F_{0k,i}}{\omega_m^2} \right) f_i(t) = \sum_{i=1}^n (\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{j,i}) f_i(t). \quad (3.38)$$

wobei der Vektor $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ wiederum mit Gl. (3.32) definiert wird. Damit ist es möglich, den dynamischen und den statischen Anteil des Gesamtverschiebungsvektors entkoppelt voneinander zu berechnen.

Die *Methode der statischen Korrektur* findet nun wieder Anwendung zur Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung (3.12). Das nichtlineare Gleichungssystem wird in reduzierter modaler Basis mit den üblichen Lösungsalgorithmen dynamisch gelöst. Zur Kompensation des Abschneidefehlers der modalen Reduktion wird der Lösungsvektor $\mathbf{w}_{\text{dyn}}(t)$ um $\mathbf{w}_{\text{stat}}(t)$ korrigiert:

$$w_j(t) = w_{\text{dyn } j}(t) + w_{\text{stat } j}(t) = \sum_{m=1}^{n_{\text{red}}} \Phi_{j,m} w_{\text{dyn } m}^*(t) + \sum_{i=1}^n \tilde{\Psi}_{j,i} (\kappa_i(t) - \kappa_Y Y_{H_i}(t)). \quad (3.39)$$

Der dynamische Anteil bestimmt sich aus der reduzierten Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\mathbf{w}}_{\text{dyn}}^*(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{w}}_{\text{dyn}}^*(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{w}_{\text{dyn}}^*(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}^* - (1 - \alpha) \mathbf{\Phi}_B^* [\mathbf{K}_j (\mathbf{\Phi}_B \mathbf{w}_{\text{dyn}}^*(t) + \mathbf{w}_{\text{Bstat}}(t)) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H(t)]. \quad (3.40)$$

Unter Verwendung der Gln. (2.7), (3.34), (3.36) ist zusätzlich zu den nichtlinearen Zusatzgleichungen zu lösen:

$$\mathbf{w}_{\text{Bstat}}(t) = (1 - \alpha) \tilde{\Psi} [\mathbf{T}_\kappa (\mathbf{\Phi}_B \mathbf{w}_{\text{dyn}}^*(t) + \mathbf{w}_{\text{Bstat}}(t)) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H(t)]. \quad (3.41)$$

Im Gegensatz zum linearen Fall Gl. (3.37) können der statische Anteil und der dynamische Anteil nicht mehr entkoppelt voneinander berechnet werden.

Bezogen auf das Beispiel in Abb. 3.3 setzt sich die dynamische Antwort $\kappa(f = 2 \text{ Hz})$ aus

- den Anteilen der dynamischen Berechnung unter Berücksichtigung der ersten beiden Moden $\kappa_{\text{dyn}}(2 \text{ Hz})^{(1...2)}$ und
- den statischen Anteilen $\kappa_{\text{dyn}}(2 \text{ Hz})^{(3...18)} \approx \kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(3...18)}$ zusammen.

Der statische Anteil $\kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(3...18)}$ ergibt sich wiederum aus der Differenz

- der gesamten statischen Verformung $\kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(1...18)}$
- und dem Anteil der ersten beiden Grundmoden $\kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(1...2)}$:

$$\begin{aligned} \kappa(2 \text{ Hz}) &= 0,89 \approx \kappa_{\text{dyn}}(2 \text{ Hz})^{(1...2)} + \kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(1...18)} - \kappa_{\text{stat}}(0 \text{ Hz})^{(1...2)} = \\ &= (-0,012 + 1,00 - 0,088) [1/\text{m}] = 0,90 [1/\text{m}]. \end{aligned}$$

Die Formulierung in Gl. (3.37) wird als *Methode der statischen Korrektur* bezeichnet. Sie ist, wie in [37] gezeigt wird, mechanisch gleichbedeutend mit der *Methode der modalen Beschleunigungen*. Der Unterschied liegt darin, dass sich der statische Anteil $\mathbf{w}_{\text{stat}}(t)$ an der Gesamtantwort bei der *Methode der modalen Beschleunigungen* nicht nur über die Beiträge der höheren Moden, sondern über die Beiträge aller Moden, auch der unteren Moden, erstreckt. Im Gegenzug beschränkt sich der dynamische Anteil $\mathbf{w}_{\text{dyn}}(t)$ nur auf die Beiträge der generalisierten Dämpferkräfte und der Massenkräfte ohne die statischen Anteile.

Die entkoppelte lineare Bewegungsgleichung (3.10) wird in der *Methode der modalen Beschleunigungen* nach $w_i^*(t)$ aufgelöst:

$$w_i^*(t) = \frac{f_i^*(t)}{\omega_i^2} - \frac{\dot{w}_i^*(t)}{\omega_i^2} - \frac{2\zeta_i \dot{w}_i^*(t)}{\omega_i}. \quad (3.42)$$

Werden Beiträge der höheren Moden an den Trägheitskräften und den Dämpferkräften vernachlässigt, ergibt die Rücktransformation:

$$w_j(t) = \sum_i \Psi_{j,i} f_i(t) - \sum_{m=1}^{n_{red}} \Phi_{j,m} \left(\frac{\dot{w}_m^*(t)}{\omega_m^2} + \frac{2\zeta_m \dot{w}_m^*(t)}{\omega_m} \right). \quad (3.43)$$

Diskussion der Methode der *statischen Korrektur* gegenüber der Methode der *modalen Erweiterung*

Grundsätzlich handelt es sich bei der *Methode der modalen Erweiterung* um ein Galerkin-Verfahren. In den prinzipiellen Lösungsablauf wird nicht eingegriffen. Die generalisierten Freiheitsgrade der plastischen Formfunktionen ergeben sich automatisch aus dem Verfahren. Die generalisierte Steifigkeitsmatrix und Dämpfungsmatrix enthalten auch Einträge außerhalb der Diagonalen in den gemischten Termen (z.B.: $k_{ij}^* = \phi^{(i)} \mathbf{K} \tilde{\psi}^{(j)}$).

In der *Methode der statischen Korrektur* bleibt die reduzierte modale Basis Φ_{red} unverändert. Es werden keine neuen auf die plastischen Formfunktionen bezogenen modalen Koordinaten hinzugefügt. Dies ist dann von großem Vorteil, wenn die Lastmatrix \mathbf{F}_0 viele Spalten enthält bzw. viele plastizierende Elemente zu berücksichtigen sind. Die Gleichgewichtsgleichung ändert sich gegenüber Gl. (3.12) dahingehend, dass sich die generalisierten Größen auf eine reduzierte modale Basis aus n_{red} Eigenvektoren beziehen, die generalisierte Dämpfungsmatrix \mathbf{C}^* und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{\Lambda}$ bleiben diagonal.

Prinzipiell entstehen durch die überproportionale Zunahme der Krümmung bei Plastizierung auch entsprechende Massen- und Dämpferkräfte, die durch die plastischen Formfunktionen näherungsweise erfasst werden, während diese Kräfte bei der *Methode der statischen Korrektur* vernachlässigt werden.

Setzt man in der *Methode der modalen Erweiterung* voraus, dass die generalisierten Massen- und Dämpferkräfte der statischen Formfunktionen klein bleiben, so weichen die Ergebnisse der beiden Verfahren nur geringfügig voneinander ab. Bei geeigneter Normierung korrelieren die modalen Beiträge der orthogonalisierten plastischen Formfunktionen $\kappa_{\tilde{\psi}}(t) = \mathbf{T}_{\kappa} \tilde{\Psi} \mathbf{w}_{\tilde{\psi}}^*(t)$ mit der Differenz aus Krümmung und hysteretischem Rückstellmoment $(\kappa_i(t) - \kappa_Y Y_{H_i}(t))$ gemäß Gl. (3.34). Insofern herrscht eine gewisse Redundanz in der Lösung mit der *Methode der modalen Erweiterung*. Dies kann überprüft werden, indem man von der Kurve der Gesamtkrümmung in Abb. 3.7c (rechts) die hysteretischen Rückstellmomente in Abb. 3.7d abzieht und die Differenz mit dem Faktor $(1-\alpha)$ multipliziert. Es ergibt sich in der Tat eine gute Übereinstimmung mit der Kurve der Krümmungsbeiträge der plastischen Formfunktionen $\kappa_{\tilde{\psi}}(t)$ in Abb. 3.7e, wenn man einen entsprechenden Skalierungsfaktor berücksichtigt.

3.4 Erweiterungsmöglichkeiten

Ein Problem in den Beispielrechnungen stellt die Ausdehnung der Plastizierung in einem Bauteil dar, da lokal mehrere Freiheitsgrade hinzukommen. Dem kann sehr einfach durch die Konzentration der Hysterese auf ein plastisches Gelenk mit entsprechender plastischer Formfunktion begegnet werden (~Fließgelenktheorie). Sollte diese Vereinfachung zu ungewünschten Ungenauigkeiten führen oder sollte eine genauere Untersuchung an den plastizierten Stellen gewünscht sein, bietet sich eine andere Vorgehensweise an.

Um nicht für jedes plastizierte Element innerhalb einer Komponente (z.B. einer Stütze) plastische Formfunktionen vorsehen zu müssen, wird die gesamte Komponente freigeschnitten. Unter Beibehaltung der originalen reduzierten modalen Basis werden an den Schnittstellen zusätzlich zu den modalen Kraftgrößen noch lokale Kräfte eingeleitet, deren Deformationspotential wiederum über statische Formfunktionen beschrieben werden können. Soll ein gesamtes Bauteil genauer untersucht werden, das über Koppelmatrizen an die Gesamtkonstruktion angeschlossen ist, und in dem mehrere Elemente plastizieren, ist folgende weitere Zerlegung der Steifigkeitsmatrix des erweiterten Gleichungssystems (2.65) möglich:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB11} & \mathbf{K}_{BB12} \\ \mathbf{K}_{BB21} & \mathbf{K}_{BB22} \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_A \\ \mathbf{w}_{B1} \\ \mathbf{w}_{B2} \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Die Freiheitsgrade \mathbf{w}_{B1} sind die gemeinsamen Freiheitsgrade des Gesamtsystems und des Bauteils an der Schnittstelle, \mathbf{w}_{B2} die Freiheitsgrade, die im inneren des Bauteils liegen und dann nur noch über \mathbf{w}_{B2} und mit dem Gesamtsystem gekoppelt sind. Geht man wiederum von der Hypothese aus, dass die höheren vernachlässigten Moden nur einen statischen Beitrag liefern, lassen sich nach den dargestellten Verfahren statische Formfunktionen ermitteln:

$$\Psi = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{BB11} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Damit kann die Berechnung zum Teil im modalen Raum mit Erweiterung oder mit statischer Korrektur weitergeführt werden. Innerhalb des Bauteils kann, ohne dass das restliche Gleichungssystem in reduzierter Basis geändert werden muss, z.B. eine Netzverfeinerung durchgeführt werden (wie am Fasermmodell). Denkbar ist auch, die Balkenelemente durch Volumenelemente zu ersetzen, an denen die Fließfunktion im mehrachsigen Spannungszustand untersucht werden kann.

Dieses Verfahren kann als Abwandlung zur *Component Mode Synthesis* betrachtet werden, wenn man die abgetrennte Komponente wiederum modal entwickeln würde. Das Gesamtsystem wird ebenfalls aus den Moden der Komponenten synthetisiert, allerdings nicht mehr aus einer Addition sondern aus einer Subtraktion. Der Vorteil ist der, dass immer mit der reduzierten Basis des Gesamtsystems gerechnet werden kann, solange sich das System elastisch verhält. Die Zusatzterme heben sich dann gerade auf. Erst bei Plastizierung fallen Anteile aus den Zusatztermen an.

4 Stochastische Verfahren

4.1 Stochastische Mechanik

4.1.1.1 Probabilistische Modelle in der Mechanik

Die stochastische Mechanik als ein Teilgebiet der Mechanik untersucht mechanische Systeme unter Verwendung probabilistischer Modelle. Sie bedient sich dabei der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Statistik und der Theorie der stochastischen Prozesse. Eine wesentliche Aufgabe besteht in der Berechnung von statistischen Kenngrößen der Systemantwort [150].

Im Bereich des Bauingenieurwesens werden im Wesentlichen streuende Belastungen behandelt, da üblicherweise die Materialeigenschaften genauer bekannt sind. Größere Unsicherheiten auf der Materialseite treten in speziellen Fällen auf, zum Beispiel bei den Kennwerten des Untergrunds [162]. Streuungen auf der Systemseite können bei schmalbandiger dynamischer Anregung von Bedeutung sein, wenn eine resonante Anregung zu hohen Überschreitenswahrscheinlichkeiten führen kann [62].

Neben der Ermittlung der Überschreitenswahrscheinlichkeiten steht in vielen Fällen die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Bauwerken im Vordergrund. Grundlegend wird dieses Thema von z.B. von Schuëller, Rackwitz und Bachmann [100] und Schuëller behandelt [132]. Die stochastische Mechanik beschäftigt sich nun mit der Modellbildung der Lasten in Form von stochastischen Prozessen und mit deren Weiterverarbeitung in linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen zur Berechnung der Systemantwort.

Typische Belastungen, die im Bauwesen auf Grund des Schadenspotentials stochastisch modelliert werden, sind Erdbeben- und Windlasten. Um die zeitliche Veränderung der Belastung zu modellieren, werden die Lasten als stochastische Prozesse eingeführt. Die mathematischen Grundlagen zu stochastischen Prozessen liefert z.B. Sobczyk [149] bzw. Lin und Cai [94] in Hinblick auf die Anwendung in der stochastischen Dynamik.

Einen umfassenden Überblick über die Modellierung von Prozessen und probabilistischen Verfahren aus numerischer Sicht gibt [138].

4.1.1.2 Beschreibung stochastischer Prozesse

Die einfachste Form zur Beschreibung eines stochastischen Prozesses ist die Form eines weißen Rauschens mit kontinuierlicher Gaußverteilung als stationärer ergodischer Prozess. In vielen Fällen lassen sich die Lastprozesse in der Summe aus einer Vielzahl von Zufallsprozessen unter Annahme des zentralen Grenzwertsatzes Gaußverteilt annehmen. Farbigen Rauschens wird durch Gewichtung des konstanten Leistungsdichtespektrums des weißen Rauschens erzeugt. Bei Verwendung von Spektren linearer Filter bleibt das farbige Rauschen gaußisch. Physikalisch sinnvolle Filter müssen kausal sein, d.h. in der Filterfunktion dürfen nur „bekannte“ und keine „zukünfti-

gen“ Eingangswerte des Signals verwendet werden. Im Zeitbereich kommen zur Herstellung von Ausgangssignalen Auto Regressiv Moving Average (ARMA)-Modelle mit nachgeschalteten FIR bzw. IIR-Filtern [121] zum Einsatz.

Instationäre Prozesse können durch Modulation mit einer Zeitfunktion aus einem stationären Prozess erzeugt werden. Dabei ändert sich der Frequenzgehalt des Prozesses nur geringfügig. Sind die Zeitlängen für die Gewinnung von spektralen Schätzern kurz gegenüber der Modulation, so spricht man von einem quasi-stationären Prozess.

Die Zerlegung von instationären nicht ergodischen Gaußschen Prozessen, die auf einem beschränkten Gebiet definiert sind, ermöglicht die Karhunen-Loève Entwicklung [65]. Das Ergebnis sind diskrete Gaußsche Zufallsgrößen und zugehörige deterministische Funktionen, die auch als Eigenvektoren, Komponenten oder Faktoren bezeichnet werden. Die Bezeichnung als Eigenwerte und Eigenfunktionen ist zweckmäßig, da die Karhunen-Loève Zerlegung eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzfunktion ist. Auf der Basis der Größe des Eigenwertes und des spektralen Inhaltes der Eigenfunktionen ist eine Begrenzung der unendlichen Reihenentwicklung der kontinuierlichen Kovarianzfunktion möglich. Da nur wenige Fälle analytisch zu behandeln sind, wird in der Regel die Kovarianzfunktion diskret abgetastet und die Kovarianzmatrix des instationären Problems aufgestellt. Die Lösungsmethode beruht dann unmittelbar auf der Eigenwertzerlegung.

Eine weitergehende nichtlineare Behandlung diskreter Zufallsgrößen, wie sie sich aus der Karhunen-Loève Zerlegung ergibt, ermöglicht die Transformation des polynomen Chaos [65] [162]. Ausgehend von normierten unabhängigen Gaußschen Zufallsgrößen, die das „pure chaos“ bilden, wird über die Einführung abhängiger Zufallsgrößen, welche sich aus den Hermite Polynomen der Basisgrößen ergeben, das polynomial chaos entwickelt. Dabei wird die Orthogonalität der Entwicklung verwendet, um die Kovarianzmatrix der Zufallsgrößen zu diagonalisieren. Die Vollständigkeit der Entwicklung erlaubt es, jede Zufallsgröße, die vollständig von den Basisgrößen abhängig ist, darzustellen. Auch hier ist eine Reduktion der Entwicklung möglich, um eine Berechnung durchführen zu können.

Die Karhunen-Loève Entwicklung zerlegt stochastische Prozesse in deterministische Funktionen und diskrete Zufallsgrößen. Die deterministischen Funktionen können auf Elementebene mit Ansatzfunktionen gewichtet werden, wodurch stochastische Finite Elemente entstehen. Das Ergebnis sind Koeffizientenmatrizen die den Zufallsgrößen zugeordnet werden. Die Zufallsgrößen werden durch Anwendung der Transformation des polynomen Chaos in deterministische Erwartungswerte überführt.

Grigoriu beschreibt nicht-Gaußsche Modelle durch gedächtnislose, nichtlineare Transformation von stationären Gaußschen Zufallsprozessen [138]. Grigoriu, Ditlevsen und Arwade [68] erweitern diese Transformationsprozesse in Form einer Mischung von Transformationsprozessen um damit eine breitere Möglichkeit zu haben, Korrelationsfunktionen abzubilden.

Gurley, Kareem und Tognarelli [73] diskutieren verschiedene Methoden, um über die Simulation eines Gauß-Prozesses einen nicht-Gaußschen Prozess zu realisieren. Sie gehen dabei von Messdaten aus, die eine nicht-Gaußsche Verteilungsdichte aufweisen. Die nichtlinearen, gedächtnislosen Transformationen beruhen auf Hermitschen Polynomen, deren Koeffizienten aus den Momenten bis zum 4. Grad des gemessenen Prozesses bestimmt werden. Anschließend können Realisationen auf der Grundlage eines Gaußprozesses generiert und transformiert werden. Der Nachteil dieser Transformationsmethoden ist, dass wegen der Gedächtnislosigkeit die

Phasenbeziehung zwischen den Frequenzinhalten verloren geht. Kann die nichtlineare Transformation durch Polynome angenähert werden, so bietet sich alternativ die Verwendung einer Volterra-Reihe an, in der Impulsreaktionsfunktionen höherer Ordnung enthalten sind. Die einzelnen Koeffizienten können jedoch nicht unmittelbar allein aus Messdaten abgeleitet werden, sondern müssen über nichtlineare Systemidentifikation mit bekannten Ein- und Ausgangssignalen bestimmt werden. Hierzu wird der Einsatz nichtlinearer ARMA-Modelle und neuronaler Netze diskutiert.

Eine Darstellung von stochastischen Prozessen in Form von Wavelets ist ebenfalls möglich, indem die Streuung auf die Waveletkoeffizienten projiziert wird [138]. Diese Darstellung eignet sich gegenüber spektralen Filtern, wenn ein Zufallsfeld in mehreren Dimensionen stark inhomogen ist.

Ein stochastisches Feld kann auch a priori als konditionelles Feld beschrieben werden, das durch Beobachtungsstatistiken a posteriori sukzessive verbessert wird [138].

4.1.1.3 Probabilistische Berechnungsverfahren mit nichtlinearen Systemen

Sind die einwirkenden dynamischen Lasten stochastisch ausreichend beschrieben, so ist im nächsten Schritt die stochastische Verteilung der Systemantworten zu bestimmen. Während für lineare Systeme geschlossene Lösungen existieren, ist dies für nichtlineare Systemantworten meist nicht der Fall. Eine Kurzübersicht über die möglichen Verfahren mit Literaturangaben enthält z.B. [136] und [163], zu den neueren Entwicklungen auch [120]. Grundsätzlich wird unterschieden in Simulationsmethoden und Näherungsverfahren. Zu den ersteren zählt die Monte Carlo Simulation.

Als Näherungsverfahren sind in erster Linie die Statistische Linearisierung zu nennen sowie Methoden, die auf der Fokker-Planck-Kolmogorow Gleichung (FPK) beruhen, insbesondere Moment Closure.

Die Antwort mehrdimensionaler nichtlinearer Systeme unter additiver oder multiplikativer Anregung in der Form von Gaußschem weißem Rauschen kann als Markov-Prozess aufgefaßt werden. Markov-Vektorprozesse sind vollständig durch ihre Übergangswahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ von einem Zustand zum nächsten definiert. Die Übergangswahrscheinlichkeit erfüllt die FPK-Differentialgleichung der Verteilungsdichtefunktionen $p(\mathbf{x}, t)$ [138]:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = L_x p(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

L_x stellt einen Differentialoperator dar. Diese Differentialgleichung ist nur für wenige Ausnahmefälle geschlossen lösbar [79]. Durch Erwartungswertbildung über die Summanden der FPK-Gleichung mit entsprechender Gewichtung kann ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Momente bzw. der Kumulanten aufgestellt werden, aus denen die unbekanntenen Verteilungen der nichtlinearen Systemantwort beschrieben werden kann. Um nicht den Umweg über die FPK-Gleichung zu nehmen, kann die Zustandsform der Bewegungsgleichung in die Form einer Itô-Differentialgleichung überführt werden. Die Erwartungswertbildung über die Itô-Differentialgleichung führt ebenfalls zu einem System an Entwicklungsgleichungen für die Momente bzw. Kumulanten.

Problematisch ist, dass die unteren Momente bzw. Kumulanten aus Gleichungen mit höheren Momenten hervorgehen, und sich diese Reihe unendlich nach oben fortsetzt. Um die Momente bestimmen zu können, wird diese Reihe ab einer bestimmten Ordnung geschlossen („Closure“). Sind die Momente ermittelt, kann die Verteilungsdichtefunktion über eine Gram-Charlier-Reihe bzw. eine Edgeworth-Reihe rekonstruiert werden. Im Gegensatz zur direkten Anwendung der FPK-Gleichung handelt es sich also um ein Näherungsverfahren. Die einfachste Form ist die Gaussian Closure, bei der nur Momente bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt werden.

Pro Freiheitsgrad müssen je nach berücksichtigter Ordnung entsprechend viele Momente bestimmt werden, aus deren Anzahl sich wiederum die Anzahl der zu lösenden Gleichungen ergibt. Die Größe der Gleichungssysteme wächst also sehr schnell an. Für beliebige Nichtlinearitäten ist zudem eine Reihe von mehrdimensionalen Integralen aus den Erwartungswerten auszuwerten, was wiederum nur in Einzelfällen in geschlossener Form gelingt. Waubke [163] leitet zum Beispiel geschlossene Formen der Momente in einer Gaussian Closure, die in eine semi-invariant Neglect Closure erweitert wird, für das Hysteresemodell nach Bouc-Wen her, wodurch sich der numerische Aufwand wieder etwas reduziert.

Bergmann, Wojtkiewicz, Johnson und Spencer [12] vergleichen Ergebnisse der Cumulant Neglect Closure und Gaussian Closure mit exakten Ergebnissen bzw. Simulationsergebnissen. Sie kommen zu dem Schluss, dass die Cumulant Neglect Closure nur für Formen der Antwortverteilungsdichte konvergiert, die näherungsweise einer Normalverteilung entsprechen (die Genauigkeit des Ergebnisses nimmt mit der Ordnung der Kumulanten zu). Liegen stärker entartete Verteilungsdichtefunktionen vor, so wird die Konvergenz schlechter. Damit wird bestätigt, dass es keinen Beweis für die Konvergenz der Cumulant Neglect Closure gibt [154]. Ein Vergleich verschiedener nicht Gaußscher Closure Techniken wurde z.B. von Cacciola, Muscolino und Ricciardi [19] erstellt.

Weniger gebräuchlich ist die Störungsrechnung, die zwar vergleichsweise einfach zu handhaben ist, jedoch nur bei schwachen Nichtlinearitäten und geringen Streuungen eine brauchbare Näherung liefert.

Die Ergebnisse einer übergreifenden Studie der Anwendung verschiedener Verfahren für eine Reihe an vorgegebenen Problemstellungen enthält [139].

Als Verfahren speziell zur Bestimmung von Überschreitens- bzw. Versagenswahrscheinlichkeiten seien noch die FORM bzw. SORM (First/Second Order Reliability Method) nach Rackwitz und Fiessler [122],[123] sowie das Antwortflächenverfahren genannt.

4.2 Monte Carlo Simulation (MCS)

4.2.1 Eigenschaften der MCS

Das historisch älteste Verfahren stellt die Monte Carlo Simulation dar, die von Shinozuka [143] und Shinozuka und Jan [144] dokumentiert wurde. Die Ergebnisverteilung wird durch Simulation ermittelt. Dazu wird ein Kollektiv von Realisationen gebildet, welche die statistischen Eigenschaften des Lastprozesses approximieren. Die einzelnen Realisationen dienen als Eingabe für eine

deterministische Berechnung von Realisationen des Antwortprozesses. Die stochastischen Antwortgrößen werden aus den Stichproben gemäß der Schätztheorie ermittelt. Aus den entstehenden Histogrammen der Systemantworten können die Ergebnisverteilungen oder ihre Kennwerte geschätzt werden. Die Güte einer Schätzung wird durch Konfidenzintervalle angegeben, die von der Anzahl der Stichproben abhängig ist.

Der Aufwand zur Abbildung der extremalen Bereiche einer Verteilungsfunktion ist außerordentlich hoch, um Aussagen über eine Versagenswahrscheinlichkeit mit $10^{-4} < p_f < 10^{-7}$ treffen zu können. Um eine ausreichende Anzahl von „Treffern“ jenseits einer Grenzzustandsfunktion zu erzielen, benötigt man eine Anzahl von Simulationen, die bedeutend höher ist, als der Kehrwert des Schätzwertes, also $n > 10^5$ bis $n > 10^8$ Simulationen [135]. Stellt dieses Kriterium bei kleinen Systemen im stationären Fall noch weniger ein Problem dar, so kann es vor allem bei instationären Antworten und größeren Systemen zu einer unüberbrückbaren Hürde werden. Da die so genannte direkte Simulation für Probleme der Zuverlässigkeitsanalyse nicht sehr praktikabel erscheint, kommt hier meist die varianzmindernde Simulation zur Anwendung. Dieses Verfahren erhöht – bei gleich bleibender Genauigkeit – die Effizienz beträchtlich. Die Simulation wird durch Gewichtung auf Bereiche gelenkt, die signifikant zum Ergebnis beitragen. Dies führt zu Derivaten wie „selective“ Monte Carlo Simulation, „adaptive sampling“, „importance sampling“ [135], [114]. Bei dynamischen Analysen können zur Lenkung der Stichproben heuristische Kriterien – wie z.B. Energiekriterien – Anwendung finden. [137].

Die Statistik der Plastizierungsrate kann auch über ein sogenanntes „Slepian model“ simuliert werden, wobei eine Beziehung der Überschreitensrate der Fließgrenze zwischen einem elastoplastischem Schwingsystem und dem assoziierten linear-elastischen System hergestellt wird [91]. Auf der Grundlage dieser Beziehung kann die Statistik der Plastizierungen ohne explizite Simulation mit wesentlich geringerem Aufwand ermittelt werden.

4.2.2 Generierung der Lastfunktionen

Die Grundlage für die Anwendbarkeit der Monte Carlo Simulation ist die Generierung von Realisationen, welche die statistischen Eigenschaften des Lastprozesses approximieren. Die Annahme eines Gauss-Prozesses erlaubt es, die Realisationen mittels der Spektralmethode zu gewinnen. Unter Ausnutzung des Wiener-Khinchine Theorems, das die Beziehung zwischen Korrelationsfunktion und spektraler Leistungsdichte herstellt, werden Realisationen von Gauss-Prozessen aus der spektralen Leistungsdichte generiert. Das komplexe Periodogramm einer k -ten Realisierung $X^{(k)}(f)$ wird durch die Wahl zufälliger Phasenwinkel $\theta(f)$ mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit im Wertebereich $[0;2\pi]$ aus dem Leistungsdichtespektrum erstellt [143]:

$$X^{(k)}(f) = C(f)(\cos(\theta(f)) + i \sin(\theta(f))). \quad (4.2)$$

$C(f)$ leitet sich aus der spektralen Dichtefunktion $S(f)$ ab. Als Ausgangsspektrum wird das konstante Leistungsdichtespektrum eines weißen Rauschens verwendet. Daraus kann durch geeignete spektrale Gewichtung das Leistungsdichtespektrum eines farbigen Rauschens gewonnen werden.

Das Zeitsignal wird aus dem realisierten Periodogramm $X^{(k)}(f)$ durch inverse Fouriertransformation erzeugt. Für die digitale Behandlung muss das Spektrum äquidistant abgetastet werden, wodurch eine Periodisierung im Zeitbereich entsteht. Für die Simulation eines stationären Signals kann dann immer nur eine Periode des erzeugten Signals verwendet werden (periodisches Rau-

schen). Formal wird die Diskretisierung durch die Multiplikation des Spektrums mit einer δ -Kamm Distribution beschrieben [103]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^{(k)} \Delta f \delta(f - n\Delta f) = X^{(k)}(f) \Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\Delta f). \quad (4.3)$$

Der Zeitverlauf ergibt sich aus der inversen Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1} mit Hilfe des Faltungssatzes:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^{(k)} \Delta f \delta(f - n\Delta f) \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\Delta f) \right\} * \mathcal{F}^{-1} \{ X^{(k)}(f) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{(k)}(t - nT). \quad (4.4)$$

Der Zeitverlauf aus dem abgetasteten Spektrums entspricht also dem Zeitverlauf aus dem Originalspektrum, periodisch wiederholt in den Abständen $T = 1/\Delta f$. Die Amplitude $C(f)$ aus Gl. (4.2) wird in diskreter Form zu:

$$C_n = \sqrt{S(f_n) 2\pi\Delta f}. \quad (4.5)$$

Um das Zeitsignal einer numerischen Zeitintegration zuführen zu können, ist ebenfalls eine Diskretisierung der Zeitachse einhergehend mit einer Begrenzung in der maximalen und minimalen Frequenz des Spektrums erforderlich. Da beides - Spektrum wie Zeitsignal - in diskreten Linien dargestellt wird, kann die inverse diskrete Fourier-Transformation IDFT zur Erzeugung einer diskreten Realisierung aus dem Periodogramm $X^{(k)}(f)$ eingesetzt werden:

$$x_v^{(k)} = \sum_{n=1}^{N-1} X_n^{(k)} e^{\frac{2\pi i v n}{N}}. \quad (4.6)$$

In der Praxis wird hierfür eine Fast-Fourier-Transformation FFT verwendet. Für große N nähert sich der diskrete Prozess einem Gauß-Prozess an.

Um die Periodizität des Signals zu verhindern, schlägt Shinozuka [145] vor, jede diskrete Frequenz des Ausgangsspektrums mit einem Störglied Δ zu versehen, das als Zufallszahl einer Gleichverteilung im Intervall $[-\Delta f/20; \Delta f/20]$ erzeugt wird. Da die Abtastung dann nicht mehr äquidistant ist, kann das Zeitsignal nicht mehr aus der inversen diskreten Fourier-Transformation IDFT gewonnen werden, sondern muss über die Reihenentwicklung erzeugt werden:

$$x^k(t) = \sum_{n=1}^N C_n \cos((\omega_n + 2\pi\Delta_n)t + \theta_n). \quad (4.7)$$

Shinozuka [143] weist nach, dass derartige Prozesse im Mittel ($\langle \cdot \rangle$) und in der Korrelation ergodisch sind: die Stichprobenmittelwerte und die Stichprobenkorrelation $R_{xx}(\tau)$ sind unabhängig von der jeweiligen Realisation und entsprechen dem Erwartungswert und der Autokorrelationsfunktion $\Phi_{xx}(\tau)$ des eindimensionalen homogenen Gaußschen Zufallsfeldes:

$$R_{xx}(\tau) := \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \sum_{i=1}^N C_i^2 \cos(\omega_i \tau) =: \Phi_{xx}(\tau) \quad (4.8)$$

Der Nachweis wird auf mehrdimensionale Zufallsfelder $f(\mathbf{x})$ erweitert, wobei \mathbf{x} den Vektor des Zufallsfeldes darstellt. Der Stationaritätsbegriff muss für Zufallsfelder erweitert werden, da gegenüber dem Zufallsprozess nun Ort und Richtung betrachtet werden müssen. Ein Zufallsfeld ist demnach homogen, wenn die Kovarianzfunktion unabhängig von den Koordinaten ist. Es ist isotrop, wenn die Kovarianzfunktion zusätzlich unabhängig von der Richtung ist. Ein Beispiel für ein zweidimensionales Zufallsfeld wäre die Verteilung der Parameter einer Platte (Dicke, E-modul, Dichte, Oberflächenrauigkeit ...). Eine Realisation $f^{(k)}(x,y)$ eines homogenen orthotropen zweidimensionalen Zufallsfeldes in Abhängigkeit von den Koordinaten x und y der Platte kann aus Gl. (4.9) erzeugt werden.

$$f^{(k)}(x,y) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A(k_x, k_y) \left[\cos(k_{x_n} x + k_{y_m} y + \theta_{nm}) \right]$$

$$A(k_x, k_y) = \sqrt{2S_{ff}(k_x, k_y) \Delta k_x \Delta k_y} \quad (4.9)$$

k_x und k_y sind Wellenzahlen mit den Wellenlängen $\lambda = 2\pi/k$. θ_{nm} sind wiederum unabhängig in $[0; 2\pi]$ gleichverteilte Phasenwinkel.

Oft kann von einem exponentiellen Abklingen der Korrelation mit zunehmendem Abstand zweier Punkte x_i, x_j ausgegangen werden, wobei der Grad der Abnahme durch die Korrelationslänge L_R beschrieben wird:

$$R(x_i, x_j) = R(x_i, x_i) e^{-\overline{x_i x_j} / L_R} \quad (4.10)$$

Die Windgeschwindigkeit eines senkrecht auf eine Fläche auftreffenden Windes kann als mehrdimensionaler Prozess modelliert werden, (z.B. [145]).

$$\mathbf{S}(\omega, \xi) = S_w(\omega, 0) e^{(-\frac{1}{\bar{v}} |\omega| |\xi|)}. \quad (4.11)$$

Die Korrelation zwischen den Prozessen nimmt mit der Distanz $\xi = \overline{x_i x_j}$ und der (Kreis-) Frequenz ω (gleichbedeutend mit der Wellenlänge der Luftballen) exponentiell ab. $S_w(\omega, 0)$ ist die punktbezogene ($\xi = 0$) Spektralleistungsdichte der Windgeschwindigkeit. Der Faktor \bar{v} ist eine geeignete Bezugsgeschwindigkeit. Will man die Windgeschwindigkeiten an diskreten Punkten simulieren, so erhält man einen mehrvariablen eindimensionalen Prozess.

Mehrvariable Gaußsche Zufallsprozesse $\mathbf{f}(x_i) = [f_1(x_i) \ f_2(x_i) \ f_3(x_i) \ \dots \ f_m(x_i)]$ sind durch die spektrale Matrix der Kreuzleistungsdichten $\mathbf{S}(\omega)$ gekennzeichnet. Die Dreieckszerlegung der Matrix der Kreuzleistungsdichtespektren $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \overline{\mathbf{H}}(\omega)^T$ ermöglicht die Erzeugung von Realisationen für jeden einzelnen Zufallsprozess $f_m(x_i)$ unter Berücksichtigung der Kreuzkorrelation. Besteht der Vektor aus eindimensionalen Prozessen $\mathbf{f}(t)$, so kann die k -te Realisierung des j -ten Prozesses aus

$$f_j^{(k)}(t) = \sum_{m=1}^j \sum_{n=1}^N |H_{jm}(\omega_n)| \sqrt{2\Delta\omega} \cos(\omega_n t + \Theta_{jm}(\omega_n) + \theta_{mn}) \quad (4.12)$$

mit dem Phasenwinkel

$$\Theta_{jm}(\omega_n) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(H_{jm}(\omega_n))}{\operatorname{Re}(H_{jm}(\omega_n))}\right) \quad (4.13)$$

zusammengesetzt werden. Gruppirt man die Summanden um ω_n in Gl. (4.12), kann das Gesamtsignal aus der Überlagerung einzelner über die IFFT erzeugter Zeitverläufe gebildet werden.

Mehrvariable Prozesse müssen nicht unbedingt nur eine physikalische Größe beschreiben, die einzelnen Prozesse müssen sich nur auf die gleichen Koordinaten beziehen. So kann z.B. die Verteilung der Steifigkeit, der Masse und der Oberflächenrauigkeit einer Platte als mehrvariabler jeweils zweidimensionaler Prozess dargestellt werden. Die Koordinaten sind jeweils identisch (x,y) und es kann zwischen den Größen eine Korrelation hergestellt werden. Das gleiche gilt beispielsweise für die Prozesse der Wegauslenkung und der Schnelle an einem Punkt (eindimensional) oder im Raum (vierdimensional).

Die Windgeschwindigkeit eines senkrecht auf eine Fläche auftreffenden Windes kann als mehrvariabler eindimensionaler Prozess modelliert werden, wobei sich je ein Prozess auf einen Ort x_i der Fläche bezieht (z.B. [145]). Aus Gl. (4.11) wird die Matrix der spektralen Dichte:

$$\mathbf{S}_{ij}(\omega) = S_w(\omega) e^{(-\frac{1}{v}|\omega| \cdot x_i \overline{x_j})} \quad (4.14)$$

Aus diesem Beispiel kann geschlossen werden, dass mehrvariable Prozesse als diskrete Form von mehrdimensionalen Prozessen dargestellt werden können, wenn der mehrdimensionale Prozess an einer diskreten Koordinate einer oder mehrerer Dimensionen betrachtet wird.

4.2.3 Zeitintegrationsverfahren

4.2.3.1 Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren

Der zweite Baustein der Monte Carlo Simulation ist die deterministische Berechnung der Systemantwort. Die nichtlineare Bewegungsgleichung wird im Zeitbereich integriert, wobei als Eingangsdaten die Lastrealisationen zeitdiskret vorliegen.

Zeitintegrationsverfahren sind numerische Näherungsverfahren zur Lösung von linearen oder nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen im Zeitbereich. Die Verfahren sind gekennzeichnet durch ihre Stabilität, durch die erforderliche Zeitdiskretisierung und vor allem dadurch, in welcher Art und bis zu welchem Grad das Ergebnis verfälscht wird.

Die Genauigkeit eines Verfahrens ist durch die Ordnung O vorgegeben. Der Abschneidefehler $\tau(t)$ ist proportional zur k -ten Potenz des Zeitschritts Δt . Dabei ist der Abschneidefehler $\tau(t)$ der lokale Fehler eines Anfangswertproblems, den man zu einem beliebigen Zeitpunkt $t + \Delta t$ erhält, wenn alle Größen zum Zeitpunkt t exakt bekannt sind.

Bezogen auf ein lineares Ein-Freiheitsgrad-System kann jedes Verfahren in die folgende Form gebracht werden [11]:

$$\mathbf{Q}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}_t \mathbf{Q} + \mathbf{L}(f_{t+\Delta t}) \quad (4.15)$$

mit $\mathbf{Q} = [w \quad \Delta t \dot{w} \quad \Delta t^2 \ddot{w}]^T$, \mathbf{A} : Vergrößerungsmatrix und \mathbf{L} : Lastoperator der Last f .

Die weiteren Kriterien zur Beurteilung der jeweiligen Verfahren können aus den Eigenwerten der so genannten Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} abgeleitet werden. Die Matrix \mathbf{A} besitzt drei Eigenwerte, wobei sich davon zwei komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ergeben. Der von diesen Eigenwerten abhängige spektrale Radius ρ wird als Indikator für das Stabilitätskriterium des Algorithmus verwendet. Da sich der spektrale Radius über \mathbf{A} auf ein lineares Ein-Freiheitsgrad-System bezieht, ist damit noch keine Aussage über die Stabilität mit Nichtlinearitäten gegeben.

Die numerische Dämpfung führt zu einer zusätzlichen Amplitudenreduktion und verfälscht damit die tatsächliche Dämpfung ξ eines Systems. Eine künstliche Bedämpfung hoher Eigenfrequenzen kann sich jedoch günstig auswirken,

- weil höhere Eigenfrequenzen aus einer Finite-Element-Formulierung numerisch zunehmend ungenauer hervorgehen. Es entstehen numerische Eigenwerte, die von den gewählten Ansatzfunktionen abhängen und von den physikalischen Eigenformen abweichen.
- weil durch höhere Eigenwerte numerische Instabilitäten durch hochfrequente Oszillationen entstehen können, vor allem bei nichtlinearen unstetigen Übergängen oder bei geometrischen Nichtlinearitäten.

Verfahren können also danach gewählt werden, inwieweit im tieferen Frequenzbereich, in dem eine genaue Lösung gefordert wird, das Ergebnis möglichst unbeeinflusst bleibt, während die Antwort in höheren Eigenformen möglichst bedämpft wird.

Die Periodenverlängerung PV liegt für die gängigen impliziten Verfahren zwischen $PV = 3 - 4 \%$, wenn $\Delta t < T/10$ ist. Sie wird kleiner als $PV = 1\%$ für $\Delta t < T/100$ [95]. T ist die Periodendauer der höchsten Frequenz, die z.B. aufgrund der Anregung berücksichtigt werden soll.

4.2.3.2 Explizite Zeitintegration nach Adams-Moulton

Explizite Zeitintegrationsverfahren, die alle auf die Trapezregel 1. Ordnung nach Euler zurückgeführt werden können, gehen von einer Differentialgleichung 1. Ordnung aus und können daher unmittelbar auf die Zustandsform der Bewegungsgleichung angewendet werden. Die beschriebenen Hysterese Modelle liegen in der gleichen differentiellen Form vor und sind daher sehr leicht integrierbar

Im ersten Schritt wird ein explizites Prediktor-Korrektor Verfahren 4. Ordnung nach Adams-Moulton [88] verwendet. Ausgangsgleichung der expliziten Verfahren ist die Bewegungsgleichung in Zustandsform (2.68):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (4.16)$$

mit

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

In der einfachen Trapezregel nach Euler würde nun linear extrapoliert ($\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t \Delta t$). Der Adams-Moulton Algorithmus extrapoliert mit einem Polynom 4. Ordnung, das aus den Stützstellen der letzten drei Zeitschritte zusätzlich zum aktuellen Wert gebildet wird. Der „Prediktor“ wird nun:

$$\mathbf{q}_{\mathbf{p}_{t+\Delta t}} = \mathbf{q}_t + \frac{1}{24} \Delta t (55 \cdot \dot{\mathbf{q}}_t - 59 \cdot \dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + 37 \cdot \dot{\mathbf{q}}_{t-2\Delta t} - 9 \cdot \dot{\mathbf{q}}_{t-3\Delta t}) \quad (4.18)$$

Um die Extrapolation zu verfeinern, wird das Ergebnis aus

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{A} \mathbf{q}_{t+\Delta t} \quad (4.19)$$

für den „Korrektor“ verwendet:

$$\mathbf{q}_{\mathbf{k}_{t+\Delta t}} = \mathbf{q}_t + \frac{1}{24} \Delta t (9 \cdot \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + 19 \cdot \dot{\mathbf{q}}_t - 5 \cdot \dot{\mathbf{q}}_{t-\Delta t} + \dot{\mathbf{q}}_{t-2\Delta t}). \quad (4.20)$$

Gegenüber dem von der Ordnung her gleichwertigen Runge-Kutta Algorithmus besitzt dieser Algorithmus den Vorteil, dass keine Zwischenintervalle innerhalb eines Zeitschrittes erforderlich sind, an denen die Zeitfunktion der Last bekannt sein muss. Bei diskreten stochastischen Signalen wäre dann eine Interpolation erforderlich, was wegen der stochastischen Natur des Signals problematisch ist.

Explizite Verfahren sind nur bedingt numerisch stabil (spektraler Radius $\rho > 1$ für $\Delta t > \Delta t_{\text{krit}}$), d.h. für zu große Zeitschritte wächst die Lösung auch im linearen Fall exponentiell an und divergiert. Eine obere Schranke der Schrittweite Δt ist durch die höchste im System vorkommende Eigenfrequenz gegeben, die untere Schranke ergibt sich aus dem Rundungsfehler in Abhängigkeit der in einer Rechnerarchitektur darstellbaren Zahlengenauigkeit. Die Auflösung ist damit mit der Länge des untersuchten Zeitfensters verbunden, das wiederum in Relation zur untersten Eigenfrequenz des Systems gewählt wird.

Nach modaler Reduktion ist die Spreizung zwischen unterster und oberster Eigenfrequenz nicht sehr hoch. Ein explizites Verfahren mit einer moderat kleinen Schrittweite ist sehr gut anwendbar. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass der Algorithmus instabil wird, sobald plastische Formfunktionen hinzugefügt werden, die sich aus den oberen Eigenformen zusammensetzen.

Mehrschrittverfahren sind nicht selbststartend, d.h. sie können nicht zu einem beliebigen Zeitpunkt eingesetzt, selbst wenn die Anfangsbedingungen zu diesem Zeitpunkt bekannt wären. Dieser Nachteil entfällt, wenn von der statischen Ruhelage ausgegangen wird, und die für den ersten Schritt benötigten Anfangswerte zu Null gesetzt werden können.

4.2.3.3 Newmark Integration mit Newton-Raphson Iteration

Die wohl am weitesten verbreitete Zeitintegration für nichtlineare Gleichungssysteme 2. Ordnung ist das Newmark Verfahren. Im Gegensatz zu den expliziten Algorithmen wird im Newmark Verfahren das Gleichgewicht zu jedem Zeitpunkt $t+\Delta t$ gebildet.

Dem üblichen Schema liegt ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung zugrunde, wobei nichtlineare Dämpfungs- oder Steifigkeitsterme einbezogen werden können. Demgegenüber sollen

nun endochronische Modelle verwendet werden, die in differentieller Form als Zusatzgleichungen vorliegen und die Einführung einer Hilfsvariablen erfordern. Die Anwendung des Newmark Verfahrens ist daher nicht so unmittelbar möglich wie die Anwendung der expliziten Verfahren. Der Algorithmus muss erst für die verwendete Formulierung der Hysteresentwicklung mit Einführung des Vektors der Hilfsvariablen \mathbf{Y}_H modifiziert werden.

Innerhalb eines Zeitschritts des Newmark Verfahrens wird ein Newton-Raphson Algorithmus eingesetzt, der iterativ die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung löst. Die nichtlineare Differenzfunktion aus äußeren und inneren Kräften am Zeitpunkt $t+\Delta t$ wird in eine Taylorreihe entwickelt. Die Entwicklung wird nach dem Glied der ersten Ableitung abgebrochen wird, um eine linearisierte Gleichung zu erhalten:

$$(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{Q}_{n-1})) + \left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{Q}_{n-1}))}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} (\mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_{n-1}) + \dots = 0. \quad (4.21)$$

\mathbf{Q} beinhaltet den Gesamtvektor der Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Das entstehende linearisierte Gleichungssystem zum Iterationsschritt $n-1$

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{Q}_{n-1}))}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} \Delta \mathbf{Q} = -(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{Q}_{n-1})) \quad (4.23)$$

wird nach $\Delta \mathbf{Q}$ aufgelöst. Unter der Hypothese, dass die äußeren Kräfte nicht vom Verschiebungsvektor oder dessen Ableitungen abhängen, ergibt sich aus den partiellen Ableitungen der inneren Kräfte:

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{Q}))}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} \Delta \mathbf{Q} = - \left(\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} \Delta \mathbf{q} \right) \quad (4.24)$$

mit

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AA} & \mathbf{C}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{BA} & \mathbf{C}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\tan n-1} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

und

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} - (1-\alpha)\mathbf{K}_j & (1-\alpha)\mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\tan n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

In modaler Formulierung nach Gl. (3.26) wird:

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^*} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\tan n-1} \Phi_{\mathbf{B}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})}{\partial \mathbf{q}^*} \right|_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* - (1-\alpha)\mathbf{K}_j^* & (1-\alpha)\Phi_{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\tan n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Zusätzlich zu den linearen Termen entstehen zum Iterationsschritt n tangentielle Elemente der Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix aus der Ableitung der nichtlinearen Zusatzgleichungen:

$$\mathbf{K}_{\tan} = \frac{\partial(\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}))}{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}} \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{B}}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{C}_{\tan} = \frac{\partial(\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}})) \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{B}}}{\partial \dot{\mathbf{w}}} = \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\mathbf{k}} + \frac{\partial(\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}))}{\partial \dot{\mathbf{k}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{B}}. \quad (4.30)$$

In die Ableitungen werden die jeweiligen Werte des Verschiebungsvektors bzw. dessen zeitlicher Ableitung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ am Iterationsschritt $n - 1$ eingesetzt. Besteht die Anregung aus einem stochastischen Prozess, werden die Tangentialmatrizen ebenfalls zu Zufallsprozessen.

Die Form des Zeitverlaufs des Vektors $\mathbf{q}(t)$ innerhalb eines Zeitschritts wird über die Parameter δ und β festgelegt. Beispielsweise wird durch $\delta = 0,5$ und $\beta = 0,25$ ein konstanter Beschleunigungsverlauf (Trapezregel), durch $\delta = 0,5$ und $\beta = 1/6$ ein linearer Beschleunigungsverlauf vorgegeben.

Dadurch wird es möglich, bei festgelegtem Zeitschritt Δt die Vektoren ${}^t \mathbf{q}, {}^t \dot{\mathbf{q}}, {}^t \ddot{\mathbf{q}}$ zum Zeitpunkt t und ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}, {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{q}}, {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{q}}$ zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ untereinander über die kinematischen Differentialbeziehungen in Bezug zu setzen.

Mit diesen Beziehungen kann die Bewegungsgleichung durch eine quasi-statische Gleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ausgedrückt werden:

$${}^{t+\Delta t} \widehat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{q} = {}^{t+\Delta t} \widehat{\mathbf{F}} \quad (4.31)$$

In der Gl. (4.31) werden ein effektiver Lastvektor und eine effektive tangentielle Gesamtsteifigkeitsmatrix mit den bekannten Zustandsvariablen aufgestellt:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \widehat{\mathbf{F}} = & \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \left(a_0 \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{w} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} {}^t \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} {}^t \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \right) \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{T}_{\mathbf{k}} {}^t \dot{\mathbf{w}}, {}^t \mathbf{Y}_{\mathbf{H}}) \mathbf{T}_{\mathbf{k}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \left(a_1 \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{w} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} {}^t \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} {}^t \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} - (1-\alpha)\mathbf{K}_j & (1-\alpha)\mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\tan} \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{AA} & \mathbf{M}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AA} & \mathbf{C}_{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{BA} & \mathbf{C}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_{\tan} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (4.33)$$

bzw. Modal nach Gl. (3.26):

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \left(a_0 \begin{bmatrix} \mathbf{w}^* \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}^* \\ \dot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}^* \\ \ddot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} \right) \quad (4.34)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_Y(\mathbf{T}_k \mathbf{T}^t \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{T}^t \mathbf{Y}_H) \mathbf{T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \left(a_1 \begin{bmatrix} \mathbf{w}^* \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}^* \\ \dot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}^* \\ \ddot{\mathbf{Y}}_H \end{bmatrix} \right)$$

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* - (1-\alpha)\mathbf{K}_j & (1-\alpha)\mathbf{\Phi}_B^T \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\tan} \mathbf{\Phi}_B \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_{\tan} \mathbf{\Phi}_B & -\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

$\alpha_0 \dots \alpha_5$ sind die Integrationskonstanten, die aus den Parametern δ und β des Integrationschemas und der Schrittweite Δt unmittelbar hervorgehen:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\beta \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\beta} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\beta} - 2 \right) \quad (4.36)$$

Diese Integrationsparameter werden so festgelegt, dass man eine hinreichende Integrationsgenauigkeit und Stabilität erhält. Das Integrationsschema ist mit den Parameter $\delta \geq 0,5$ und $\beta \geq 0,25 (0,5 + \delta)^2$ für eine lineare Differentialgleichung unbedingst stabil.

Im nichtlinearen Fall werden in jedem Iterationsschritt die Inkremente $\Delta \mathbf{q}$ bestimmt aus:

$$\Delta \mathbf{q} = {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}_{n-1}^{-1} \Delta \widehat{\mathbf{F}} \quad (4.37)$$

Aus der Einbindung der Newton-Raphson Iteration in den Newmark Algorithmus entsteht das Ablaufschema nach Abb. 4.1.

Modifizierter Newton-Raphson Algorithmus

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix kann mit dem Hinzunehmen von Zusatzgleichungen vor allem mit dem Einsatz von Fasernmodellen schnell anwachsen. Die Invertierung in jedem Iterationsschritt ist dann sehr zeitaufwändig. Alternativ bietet sich daher an, auf den modifizierten Newton-Raphson Algorithmus überzugehen, bei dem die Initialsteifigkeitsmatrix vor der Zeitintegration gebildet wird, invertiert wird und dann während der gesamten Berechnung unverändert bleibt.

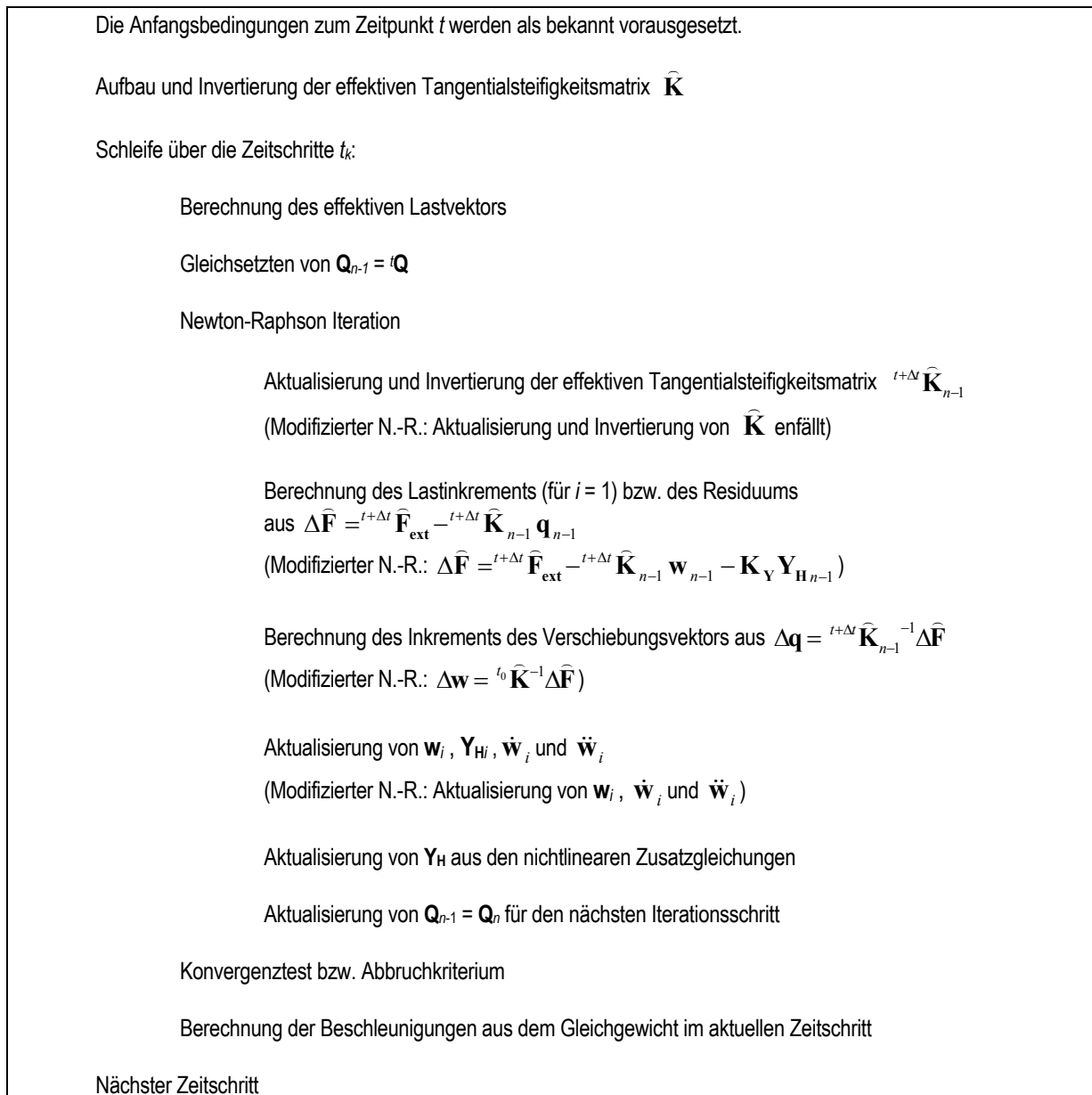


Abb. 4.1: Ablaufschema der Newmark Integration mit Newton-Raphson Iteration bzw. modifizierter Newton-Raphson Iteration mit nichtlinearen Zusatzgleichungen

Weiterhin genügt es auch, in der Gl. (4.37) nur die Zeilen ohne die nichtlinearen Zusatzgleichungen (nur die oberen Zeilen aus den Gln. (4.32)-(4.35)) zu verwenden. Dies ist daher möglich, da bei Verwendung der Initialsteifigkeiten $\Delta Y_H = \Delta \kappa / \kappa_Y$ gilt und daher der redundante Anteil aus Y_H auch weggelassen werden kann. Voraussetzung ist, dass in die invertierte äquivalente Steifigkeitsmatrix ${}^t\widehat{\mathbf{K}}^{-1}$ die originale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ohne die Abminderung der Elementsteifigkeitsmatrizen um $(1-\alpha)\mathbf{K}_Y$ eingeht. Die äquivalente Steifigkeitsmatrix ${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}_{n-1}$ zur Berechnung des Kraftresiduums in $\Delta\widehat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{F}}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_{Hn-1}$ (vgl. Schema in Abb. 4.1) ändert sich jedoch nicht.

Der Algorithmus läuft dann wie oben beschrieben mit den Angaben in Klammern zum modifizierten Newton-Raphson Algorithmus ab. Die äquivalente Steifigkeitsmatrix beschränkt sich nur

auf die Freiheitsgrade von \mathbf{w} , im Gegenzug erhält man aus dem Inkrement auch nur $\Delta\mathbf{w}$ und nicht $\Delta\mathbf{Y}_H$. Der aktuelle Wert des Vektors \mathbf{Y}_{Hn} wird getrennt aus den nichtlinearen Zusatzgleichungen ermittelt.

Die Anzahl der erforderlichen Iterationen nimmt geringfügig zu. Die Aktualisierung und Invertierung der effektiven tangentiellen Steifigkeitsmatrix bleibt jedoch erspart, was sich im Aufwand deutlich auswirkt, vor allem bei der Verwendung von Fasermodellen.

Stabilität des Verfahrens

Die verwendeten nichtlinearen Zusatzgleichungen liegen in Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung vor. Die Massenterme der Zusatzgleichungen sind Null. Dadurch entstehen Eigenwerte, die im Unendlichen liegen, wodurch wiederum die Stabilitätseigenschaften von Zeitintegrationen beeinträchtigt werden.

Für den Fall, dass die Integration nicht konvergiert, muss auf das „Generalized- α “ Verfahren“ übergegangen werden [95]. Dabei handelt es sich um eine modifizierte Newmark Integration. Das Gleichgewicht wird bei diesem Verfahren nicht an äquidistanten Zeitpunkten gebildet, sondern über einen Zeitschritt verschmiert. Für das Gleichgewicht gehen die Massenkräfte, die äußeren Kräfte und die Rückstellkräfte zu unterschiedlichen Zeitpunkten ein, die durch Zusatzparameter (α_f , α_m) festgelegt werden. Die Stabilitätskriterien hängen unmittelbar von den Zusatzparametern ab, die dann so eingestellt werden können, dass das Verfahren konvergiert.

Im Rahmen der Monte Carlo Simulationen wird für die vorgestellten Beispiele die Trapezregel (konstante Beschleunigung) verwendet. Weder mit der klassischen noch mit der modifizierten Iteration treten Stabilitätsprobleme auf, wenn die beschriebenen hysteretischen Entwicklungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen 1. Ordnung verwendet werden.

Im Rahmen einer Monte Carlo Simulation kommt es häufig vor, dass ein System mit Realisationen eines weißen Rauschens einer Fußpunktbeschleunigung beaufschlagt wird. Bernard [15] stellt fest, dass unter Annahme eines stochastischen Beschleunigungssignals als Last die Konvergenz eines Newmark Algorithmus nicht mehr nachgewiesen werden kann. Die Beschreibung des realisierten Lastvektors wird modifiziert, um die Konvergenz herzustellen und damit auch die Genauigkeit des Newmark Algorithmus zu verbessern.

Implementierung des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai

\mathbf{K}_{tan} aus Gl.(4.29) und der zweite Summand der Matrix \mathbf{C}_{tan} aus Gl. (4.30) verschwinden, wenn während eines Lastschritts innerhalb eines Zeitintervalls Δt kein Übergang zwischen elastischem und plastischem Verhalten auftritt.

Um das Problem der Auswertung eines Sprungs innerhalb eines Zeitschritts zu umgehen, bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Das Zeitintervall wird an der Stelle τ ($t < \tau < t + \Delta t$) zerlegt, an welcher der Sprung auftritt. Stehen jedoch mehrere nichtlineare Gleichungen zur Auswertung an, kann dies zu einer sehr starken Zerstückelung des Zeitintervalls an mehreren Zeitpunkten τ führen.

2. Numerisch günstiger und übersichtlicher ist die Auswertung der Distributionen nur am Anfang eines jeden Zeitschritts. Da das Stoffgesetz dann über die Dauer eines Zeitschritts linear ist, erübrigt sich auch die Iteration.

Man nimmt dabei in Kauf, dass das bezogene hysteretische Rückstellmoment Y_H in Abhängigkeit von der Größe des Zeitschritts geringfügig größere Werte als $|Y_{Hi}| = 1$ annehmen kann. Die Integrationsgenauigkeit wird von der zeitlichen Diskretisierung abhängig.

Implementierung von Bouc-Wen

Die partiellen Ableitungen ergeben in diskreter Formulierung einfache Ausdrücke für die Tangentialmatrizen, wenn während eines Zeitschritts angenommen wird, dass die Ableitungen der Signum-Funktionen zu Null werden. Bei ebener Biegung wird (für ein Element j mit den Knoten i und $i+1$):

$$\mathbf{K}_{\text{tan}} = \frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H))}{\partial \mathbf{Y}_H} \mathbf{T}_k \dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} B(\dot{\kappa}_i, Y_{Hi}) & 0 \\ 0 & B(\dot{\kappa}_{i+1}, Y_{Hi+1}) \end{bmatrix} \frac{1}{l} \mathbf{T}_k \dot{\mathbf{w}}. \quad (4.38)$$

mit der Funktion B_i an jedem Knoten i :

$$B_i(\dot{\kappa}_i, Y_{Hi}) = -N \beta_{Ni}(\dot{\kappa}_i, Y_{Hi}) Y_{Hi}^{N-1} \quad (4.39)$$

und mit der Konstante:

$$\beta_N(\dot{\kappa}_i, Y_{Hi}) = \gamma \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}) \operatorname{sgn}(Y_H)^{N-1} + \nu \operatorname{sgn}(Y_H)^N. \quad (4.40)$$

Der zweite Summand der Tangentialmatrix \mathbf{C}_{tan} wird zu Null, weil $\dot{\kappa}$ nur innerhalb der Signumfunktionen erscheint:

$$\mathbf{C}_{\text{tan}} = \mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_k + \frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H))}{\partial \dot{\mathbf{k}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \mathbf{T}_k \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H) \mathbf{T}_k. \quad (4.41)$$

Wie bereits diskutiert, ist die Erstellung der Tangentialmatrix eher von untergeordneter Bedeutung, da in der modifizierten Newton-Raphson Iteration nur die Anfangssteifigkeiten verwendet werden.

Entscheidend ist die Berechnung von \mathbf{Y}_H aus der differentiellen Formulierung des hysteretischen Stoffgesetzes zur anschließenden Berechnung des Residuums aus dem Gleichgewicht. Die Differentialgleichung des Hysterese Modells nach Bouc-Wen wird explizit nach Y_H aufgelöst. Dazu werden die Variablen in der Differentialgleichung getrennt und das Integral über einen Zeitschritt gebildet:

$$\int_{Y_H}^{Y_H + \Delta Y_H} \frac{dy_H}{[A - \beta_N y_H^N]} = \int_t^{t + \Delta t} \dot{\kappa}(t) dt. \quad (4.42)$$

Wenn wiederum angenommen wird, dass die Signum-Funktionen im Zeitschritt Δt keinen Sprung hervorrufen, kann nach $Y_H + \Delta Y_H$ aufgelöst werden:

$$N = 1: \quad {}^{t+\Delta t}Y_H = \frac{A}{\beta_1} - \frac{A - \beta_1 {}^tY_H}{\beta_1} e^{-\beta_1 \Delta \kappa} \quad (4.43)$$

$$N = 2: \quad {}^{t+\Delta t}Y_H = \frac{\sqrt{A\beta_2}}{\beta_2} \tanh \left[\Delta \kappa \sqrt{A\beta_2} + \operatorname{arctanh} \left(\frac{{}^tY_H \beta_2}{\sqrt{A\beta_2}} \right) \right]. \quad (4.44)$$

\mathbf{Y}_H kann nun in jedem Iterationsschritt explizit bestimmt werden und zur Berechnung des Kraftresiduums eingesetzt werden.

Bei komplexerer Darstellung des hysteretischen Stoffgesetzes (in kontinuierlicher Formulierung oder bei schiefer Biegung) ist zwar die Differentialgleichung prinzipiell noch lösbar, die Auflösung der Gleichung nach der gesuchten Größe Y_H wird jedoch so umfangreich, dass eine Verwendung innerhalb der Iteration zu träge wird.

Waubke [163] schlägt im Rahmen der Finiten-Differenzen-Methode vor, analog der Itô-Integration vorzugehen, wobei zur Bestimmung von ΔY_H der Wert von Y_H am Anfang eines Zeitschritts verwendet wird. Es entsteht dabei eine sehr einfache und universell einsetzbare Form:

$$\Delta Y_H = \Delta \kappa \left[A - \beta_N (\dot{\kappa}_{n-1}, Y_{Hn-1}) {}^N Y_{Hn-1} \right] \quad (4.45)$$

Der Algorithmus kann nur dann konvergieren, wenn als Ausgangswerte für Y_H jeweils die Werte des letzten aktuellen Iterationsschritts $n-1$ verwendet werden und nicht jedes Mal die gleichen Startwerte der Iteration zum Zeitpunkt t wie in den Gln. (4.43) und (4.44).

Implementierung der Methode der statischen Korrektur mit Bouc-Wen

Der statische Anteil \mathbf{w}_{stat} aus Gl. (3.37) erzeugt innere Kräfte, die in der Berechnung des Kraftresiduums berücksichtigt werden müssen. Im modifizierten Newton-Raphson Algorithmus wird

$$\Delta \hat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{F}}_{\text{ext}}^* - \hat{\mathbf{K}}^* \mathbf{w}_{\text{dyn } n-1}^* - (1-\alpha) \Phi_B \left[\mathbf{K}_j \left(\Phi_B \mathbf{w}_{\text{dyn } n-1}^* + \mathbf{w}_{\text{Bstat } n-1} \right) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_{Hn-1} \right]. \quad (4.46)$$

Der Vektor der quasi-statischen Verschiebungen $\mathbf{w}_{\text{Bstat}}$ ist definiert durch Gl. (3.41):

$$\mathbf{w}_{\text{Bstat}} = (1-\alpha) \tilde{\Psi} \left[\mathbf{T}_\kappa \left(\Phi_B \mathbf{w}_{\text{dyn}}^* + \mathbf{w}_{\text{Bstat}} \right) - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H \right]. \quad (4.47)$$

Die Gleichung wird nach dem Vektor $\mathbf{w}_{\text{Bstat}}$ aufgelöst:

$$\mathbf{w}_{\text{Bstat}} = \left(\mathbf{I} - (1-\alpha) \tilde{\Psi} \mathbf{T}_\kappa \right)^{-1} (1-\alpha) \tilde{\Psi} \left[\mathbf{T}_\kappa \Phi_B \mathbf{w}_{\text{dyn}}^* - \mathbf{K}_Y \mathbf{Y}_H \right] \quad (4.48)$$

und kann dann in Gl. (4.46) eingesetzt werden. Damit kann $\Delta \mathbf{w}_{\text{dyn}}$ bestimmt werden.

Eine ähnliche Vorgehensweise ist für die Auswertung der nichtlinearen Zusatzgleichungen erforderlich, da das Inkrement des bezogenen hysteretischen Rückstellmoment $\Delta \mathbf{Y}_H$ nicht mehr explizit vorliegt.

$$\Delta Y_H = A(\Delta \kappa_{dyn} + \Delta \kappa_{stat}) \left[A - \beta_N (\dot{\kappa}_{n-1}, Y_{Hn-1}) Y_{Hn-1}^N \right]. \quad (4.49)$$

$\Delta \kappa_{dyn}$ ist bekannt aus $\Delta \mathbf{\kappa}_{dyn} = \mathbf{T}_k \Phi_B \Delta \mathbf{w}_{dyn}^*$, $\Delta \kappa_{stat}$ ist einzusetzen aus

$$\Delta \mathbf{\kappa}_{stat} = (1 - \alpha) \mathbf{T}_k \tilde{\Psi} (\Delta \mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}_Y \Delta \mathbf{Y}_H), \quad (4.50)$$

wobei für $\Delta \mathbf{\kappa}$ wiederum analog (Gl. 4.48) verwendet werden kann:

$$\Delta \mathbf{\kappa} = \left(\mathbf{I} - (1 - \alpha) \mathbf{T}_k \tilde{\Psi} \right)^{-1} \left[\Delta \mathbf{\kappa}_{dyn} - (1 - \alpha) \mathbf{T}_k \tilde{\Psi} \mathbf{\kappa}_Y \Delta \mathbf{Y}_H \right]. \quad (4.51)$$

Nach sukzessivem Einsetzen der Gl. (4.51) in Gl (4.50) und dieser wiederum in Gl (4.49) kann letztendlich nach $\Delta \mathbf{Y}_H$ aufgelöst werden. Die nichtlinearen Zusatzgleichungen sind dann nicht mehr entkoppelt von der Gleichgewichtsgleichung. Die Abhängigkeit kann jedoch innerhalb der Newton-Raphson Iteration berücksichtigt werden.

4.2.3.4 Vergleich der Integrationsalgorithmen am Beispiel Kragarm

Zum Vergleich der Integrationsalgorithmen wird wiederum das Beispiel des Kragarms nach Abb. . 3.1 mit den in Abschnitt 3.1.3 angegebenen Modellparametern verwendet. Unter voll korrelierter stochastischer Last, die gleichmäßig über den Kragarm verteilt ist, soll wiederum Element 3 plastizieren. Die oberste Eigenfrequenz des Systems liegt bei $f = 953$ Hz. Das Stabilitätskriterium erfordert damit im expliziten Algorithmus eine Schrittweite von $\Delta t = 1/8192$ s, also schon eine sehr hohe Auflösung bei einem vergleichsweise kleinen System. Die oberste Anregefrequenz ist auf $f = 8$ Hz beschränkt, daher genügt eine Auflösung mit einer Schrittweite von $\Delta t = 1/256$ s im Newmark Algorithmus.

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse aus beiden Verfahren dient zur gegenseitigen Validierung der entwickelten Algorithmen. Die Abbildungen 4.2 dokumentieren die gute Übereinstimmung der Zeitverläufe (vor allem auch der Geschwindigkeit der Krümmung).

Abb. 4.2a der Auslenkung $w(t)$ an Knoten 4,

Abb. 4.2b der Krümmung $\kappa(t)$ an Knoten 3,

Abb. 4.2c des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes $Y_H(t)$ an Knoten 3, sowie

Abb. 4.2d der Krümmungsgeschwindigkeit $d\kappa(t)/dt$ an Knoten 3.

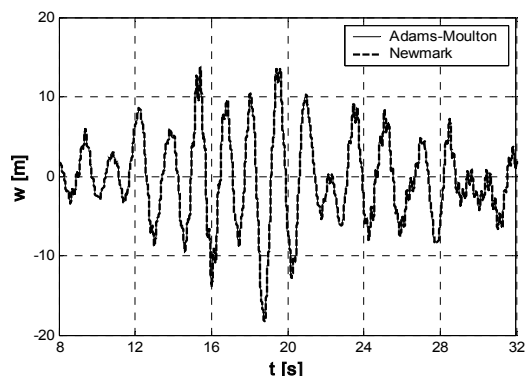


Abb. 4.2a: Zeitverlauf der Auslenkung w an Knoten 4

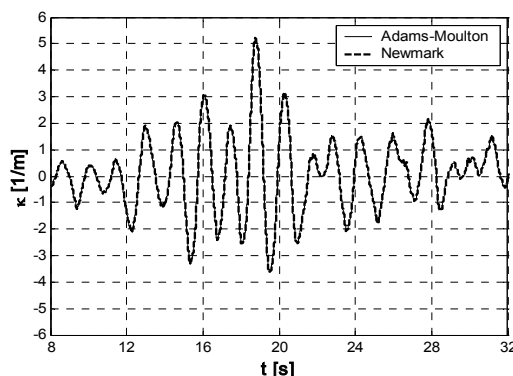


Abb. 4.2b: Zeitverlauf der Krümmung κ an Knoten 3

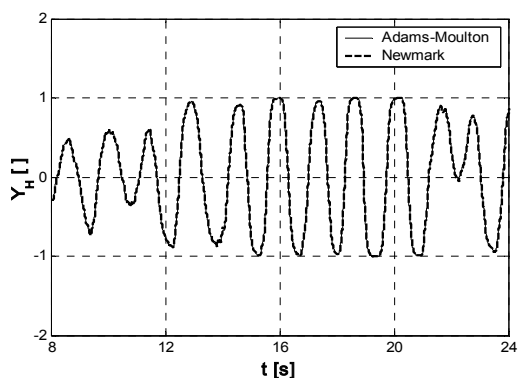


Abb. 4.2c: Zeitverlauf bez. hyst. Rückstellmoment Y_H

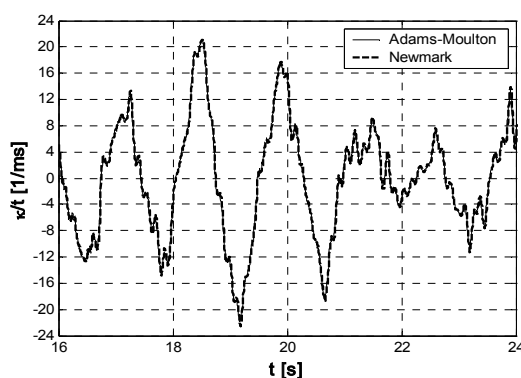


Abb. 4.2d: Zeitverlauf der Krümmungsgeschwindigkeit $d\kappa/dt$ an Knoten 3

4.2.3.5 Ablauf der Simulationsberechnung

Zur Simulation der stationären Antwort werden die Anfangsbedingungen des Zustandsvektors zu Null gesetzt, da die tatsächlichen Anfangsbedingungen einer bestimmten Realisation vorab unbekannt sind. Um das Überschwingen durch den „Einschaltimpuls“ abzumindern, wird die dynamische Last „langsam hochgefahren“, indem die Zeitfunktion durch ein halbes Hanning-Fenster überlagert wird. Dadurch ist ein stetiger Übergang am Anfang und Ende des Fensters sowohl im Weg als auch in der Geschwindigkeit gewährleistet. Bei starkem Überschwingen plastizieren mehr Elemente, als bei rein stationärer Antwort. Für die Effizienz des Verfahrens ist jedoch eine geringe Anzahl an plastizierten Elementen von Vorteil.

Zur Überprüfung, ob Plastizierung auftritt, müsste die Krümmung an jedem Element in jedem Zeitschritt ausgewertet werden. Bei hoher Auflösung und hoher Elementzahl führt dieser Aufwand zu einem Geschwindigkeitsverlust. Daher werden einzelne Bereiche vorausgewählt, an denen eine Plastizierung aufgrund einer empirischen Auswahl oder einer vorab durchgeführten Kapazitätsberechnung auftreten kann. Weiterhin werden Intervalle Δt_Y festgelegt, in denen die Fließfunktion abgefragt wird, die aber nicht den hoch auflösenden Zeitintervallen Δt der Zeitintegration entsprechen müssen.

Wird nun während einer Simulation ein plastiziertes Element identifiziert, so werden die entsprechenden plastischen Formfunktionen und die generalisierten Systemmatrizen neu berechnet. Der Zeitaufwand für die Matrizenmultiplikation ist auch für große Systeme noch relativ gering.

Es ist darauf zu achten, dass die neuen Freiheitsgrade w_b^* und Y_H die entsprechenden Anfangsbedingungen erhalten. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich das Element zum vorangegangenen Abfragezeitpunkt $t_Y - \Delta t_Y$ gerade noch im elastischen Zustand befand und bisher an dieser Stelle keine Plastizierung aufgetreten ist. Um eine Wiederholung ab dem vorangegangenen Abfragezeitpunkt zu ermöglichen, muss der jeweilige Zustandsvektor abgespeichert werden. Die neuen Variablen des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes Y_H sind dann proportional zu den Knotenkrümmungen. Die den neuen plastischen Formfunktionen zugeordneten Koordinaten w_b^* werden zu Null gesetzt.

$$Y_{H_i}(t_Y) := \kappa_i(t_Y) / \kappa_Y \quad \text{und} \quad w_b^*(t_Y) := 0 \quad (4.52)$$

Zur Simulation wird ein periodisches Rauschen verwendet. Um Stationarität zu gewährleisten, wird das Signal mit der Periode T einmal oder mehrmals wiederholt, solange bis der Einschwingvorgang abgeklungen ist. Zur Auswertung wird dann nur die Antwortfunktion aus der darauf folgenden Periode verwendet.

4.2.4 Schätzung der stochastischen Parameter

Das Ziel der Monte Carlo Simulation ist nun, aus den Ergebnissen der deterministischen Berechnungen die gewünschten stochastischen Parameter zu schätzen. Da es sich um simulierte Daten handelt, können die Parameter nach der Schätztheorie der Statistik ermittelt werden.

Werden die statistischen Auswertungen für eine Entwurfsstudie benötigt, genügt die Abschätzung der Standardabweichung. Als biasfreie, konsistente Schätzer stehen z.B. die Momentenmethode oder die Methode der maximalen Mutmaßlichkeit zur Verfügung. Letztere legt die Kenntnis des Verteilungstyps zugrunde und scheidet daher aus, da die Verteilung der nichtlinearen Antwort nicht bekannt ist.

Handelt es sich bei der Antwort um einen schwach stationären ergodischen Prozess, so kann die Standardabweichung über die zeitliche Mittelung ($\langle \cdot \rangle$) der Quadrate geschätzt werden [132].

$$Var(x) \approx \langle x(t_n)^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sum_{n=1}^N \frac{x(t_n)^2 - \langle x \rangle^2}{N-1} \quad (4.53)$$

Für einen mittelwertfreien Antwortprozess wird das geschätzte Mittel $\langle x(t_n) \rangle$ zu Null.

Bei instationärer Antwort wird die Kovarianzmatrix der Antwort zeitabhängig, d.h. die Varianzen müssen zu jedem Zeitpunkt t über N Realisationen gemittelt werden.

Da die geschätzte Varianz $\tilde{\sigma}(t)^2$ selbst wieder eine Zufallsvariable darstellt, kann die Wahrscheinlichkeit, mit der ein geschätzter Parameter innerhalb eines gegebenen Konfidenzintervalles zu liegen kommt, in Abhängigkeit von N berechnet werden. Für eine große Anzahl von Stichproben kann auf der Basis des zentralen Grenzwertsatzes angenommen werden, dass die Zufallsvariable

$\tilde{\sigma}(t)^2$ normalverteilt ist. Handelt es sich um einen erwartungstreuen Schätzer, ist der Erwartungswert der Standardabweichung die Standardabweichung selbst.

Die Intervalllänge für eine bestimmte vorgegebene Konfidenz, d.h. das Intervall, in das die Varianz mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $(1-\beta)$ hineinfällt, ist [132]:

$$P\left(-k_{\beta/2} < \frac{\tilde{\sigma}(t)^2 - \sigma_X(t)^2}{\sqrt{\text{Var}[\tilde{\sigma}(t)^2]}} \leq k_{\beta/2}\right) = 1 - \beta \quad (4.54)$$

Bei einer Konfidenz, die durch $(1-\beta)$ vorgegeben ist, erhält man das Konfidenzintervall in Abhängigkeit der (großen) Stichprobenanzahl N , wenn $X(t)$ eine normalverteilte Grundgesamtheit darstellt [132]:

$$\sigma_X(t)_{1-\beta}^2 = \left(\frac{\tilde{\sigma}(t)^2}{1 + k_{\beta/2} \sqrt{2/(N-1)}}; \frac{\tilde{\sigma}(t)^2}{1 - k_{\beta/2} \sqrt{2/(N-1)}} \right). \quad (4.55)$$

$k_{\beta/2}$ ist der Wert der Normalverteilung bei vorgegebener Konfidenz: $P(-k_{\beta/2} < x < k_{\beta/2}) = 1 - \beta$. Gibt man sich ein Konfidenzintervall entsprechend einer geforderten Genauigkeit vor, so kann umgekehrt auf die erforderliche Stichprobenanzahl N rückgeschlossen werden.

Soll z.B. der mittlere Fehler im Durchschnitt nicht größer werden als 10 %, so ist eine Stichprobenanzahl von $N = 32$ erforderlich ($\beta = 50\%$: $k_{\beta/2} = 0,675$ und $\sigma_X(t)_{1-\beta}^2 / \tilde{\sigma}(t)^2 < 1,1^2$ bzw. $\sigma_X(t)_{1-\beta}^2 / \tilde{\sigma}(t)^2 > 0,9^2$). Für eine Abweichung von 1% werden es $N = \text{ca. } 2400$ Stichproben. Wird eine höhere Konfidenz verlangt, z.B. soll der mittlere Fehler zu 95% nicht größer werden als 1%, so sind $N = \text{ca. } 20.000$ Stichproben erforderlich ($\beta = 95\%$: $k_{\beta/2} = 1,96$ und $\sigma_X(t)_{1-\beta}^2 / \tilde{\sigma}(t)^2 < 1,01^2$ bzw. $\sigma_X(t)_{1-\beta}^2 / \tilde{\sigma}(t)^2 > 0,99^2$).

Ist die Antwort stationär, so kann mit vergleichsweise geringem Aufwand eine hohe Güte in der Schätzung der Antwortvarianz erzielt werden, während im instationären Fall der Aufwand sehr stark ansteigt. Für die Beurteilung der Monte Carlo Simulation gegenüber anderen Verfahren ist daher die Kenntnis über die erforderliche Anzahl der Stichproben bedeutsam.

4.3 Statistische Linearisierung ESL

4.3.1 Grundlagen der ESL

4.3.1.1 Grundlagen der ESL in der Literatur

Neben den Simulationsmethoden stellt die statistische Linearisierung die am weitesten verbreitete Methode dar, um die Antwort nichtlinearer Systeme auf eine stochastische Anregung näherungsweise zu bestimmen. Allgemein ersetzt die statistische Linearisierung eine gegebene nichtlineare Differentialgleichung durch eine äquivalente lineare Differentialgleichung. Die Methode wird auch als äquivalente Statistische Linearisierung oder Stochastische Linearisierung bezeichnet. Die gebräuchlichen Kürzel „*ESL*“ oder „*EQL*“ entstammen dem englischen Sprachgebrauch „Equivalent Statistical Linearization“.

Von Kazakov [84] und Caughey [33] wurden u.a. die Grundlagen zum Standardverfahren der Statistischen Linearisierung erarbeitet. In [32] behandelt Caughey erstmals einen Einmassenschwinger mit Hysterese.

Eine ausführliche Einführung mit der Darstellung verschiedener Linearisierungsprobleme und unterschiedlichen Lösungsverfahren wurde durch Roberts und Spanos [126] erstellt. Ebenfalls ein Überblick über das Verfahren der Statistischen Linearisierung wird durch Socha und Soong in [151] gegeben. Eine aktuellere Übersicht über die Verfahren der Statistischen Linearisierung in einer Gegenüberstellung zur Monte Carlo Simulation geben Proppe, Pradlwarter und Schueller [120].

4.3.1.2 Formulierung der ESL

Allgemein wird ein nichtlineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{F}(t) \quad (4.56)$$

durch ein lineares System ersetzt [150]:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{b} + \mathbf{F}(t). \quad (4.57)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{X})$ bezeichnet eine beliebige nichtlineare Funktion, $\mathbf{X}(t)$ einen n -dimensionalen Zustandsvektor des nichtlinearen Systems und $\mathbf{Y}(t)$ den Zustandsvektor des linearisierten Systems. $\mathbf{F}(t)$ ist der n -dimensionale Vektor der stochastischen Anregung. \mathbf{A} und \mathbf{b} sind dabei eine $n \times n$ Matrix bzw. ein n -dimensionaler Vektor, wobei die Elemente mit zunächst unbekanntem Konstanten besetzt sind. Um die Konstanten zu bestimmen, wird das lineare Gleichungssystem mit dem nichtlinearen verglichen. Nahe liegend ist die Minimierung des Fehlerquadrates, das aus der Differenz des nichtlinearen und des linearen Terms der beiden Gln. (4.56) und (4.57) entsteht. Der Fehlervektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist die Differenz:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t)) - (\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}). \quad (4.58)$$

Da es sich bei $\mathbf{X}(t)$ um einen stochastischen Vektorprozess handelt, wird der Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}$ im quadratischen Mittel minimiert, d.h., es ist der Erwartungswert $E[\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}]$ zu minimieren, was aus stochastischer Sicht der Minimierung der Varianz von $\boldsymbol{\varepsilon}$ entspricht. Die notwendigen Bedingungen zur Bestimmung des Minimums lauten:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial A_{ij}} E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.59)$$

Werden nun für die Elemente des Vektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ die Ausdrücke entsprechend Gl. (4.58) eingesetzt, so ergeben sich aus den Gln. (4.59) nach Vertauschen von Erwartungswertbildung und partieller Differentiation und unter Einführung von $\mathbf{A}^{T(i)}$ für den i -ten Vektor der Matrix \mathbf{A}^T die Gleichungen

$$\mathbf{b} = E\{\mathbf{g}(\mathbf{X})\} - \mathbf{A} E\{\mathbf{X}\} \quad (4.60)$$

und

$$E\{g_i(\mathbf{X})\mathbf{X}\} - E\{g_i(\mathbf{X})\}E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{Z}\mathbf{A}^{T(i)} \quad (4.61)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{Z} = E\{(\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\})(\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\})^T\}. \quad (4.62)$$

Aus Gl. (4.60) ist ersichtlich, dass der Vektor \mathbf{b} zu Null wird,

- wenn der Vektorprozess der Zustandsvariablen \mathbf{X} mittelwertfrei ist und
- wenn die nichtlineare Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ symmetrisch ist, so dass der Erwartungswert daraus ebenfalls zu Null wird.

In diesem Fall entfällt Gl. (4.60), und Gl. (4.61) wird zu:

$$E\{g_i(\mathbf{X})\mathbf{X}\} = \mathbf{Z}\mathbf{A}^{T(i)}. \quad (4.63)$$

Das Gleichungssystem kann nach den Linearisierungskoeffizienten aufgelöst werden. Da sowohl die Erwartungswerte des Vektors der Zustandsvariablen als auch deren Kovarianzmatrix \mathbf{Z} zunächst unbekannt sind, wird gewöhnlich das nachfolgende Iterationsschema durchlaufen:

- Initialisierung: Vorbesetzen der Linearisierungskoeffizienten \mathbf{b} und \mathbf{A} z.B. mit den Koeffizienten des assoziierten linearen Systems;
- Berechnung der in den Gln. (4.60) und (4.61) benötigten Erwartungswerte mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des linearen Ersatzsystems;
- Berechnung der Linearisierungskoeffizienten aus den Gln. (4.60) und (4.61) bzw. (4.63);
- Überprüfung des Abbruchkriteriums.

Ist der Lastprozess Gauß-verteilt, so sind die Prozesse der Antwortvariablen aus dem linearisierten Gleichungssystem (4.57) in jedem Iterationsschritt ebenfalls Gauß-verteilt. Hierin liegt der konzeptionelle Widerspruch der statistischen Linearisierung. Wegen der Nichtlinearität der Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ wird die Verteilung der Antwort \mathbf{X} in der Regel nicht Gauß-verteilt. Um dem mathematisch gerecht zu werden, werden in Gl. (4.56) und (4.57) bewusst zwei verschiedene Prozesse $\mathbf{X}(t)$ und $\mathbf{Y}(t)$ verwendet [35]. Nun kann die Fehlerminimierung alternativ von den Gln. (4.56) und (4.57) ausgehen. Der wesentliche Unterschied ist, dass im ersten Fall $\mathbf{X}(t)$ unabhängig von den äquivalenten Koeffizienten in \mathbf{A} und \mathbf{b} ist, und damit die Koeffizienten nach der Standardmethode berechnet werden können.

Socha und Pawleta [152], Elishakow und Colanjanni [38], Wu und Bernard [13] postulieren, dass Gl. (4.57) mit $\mathbf{Y}(t)$ als Ausgangsgleichung zur Linearisierung zu verwenden ist. Da $\mathbf{Y}(t)$ dann jedoch abhängig von den Koeffizienten in \mathbf{A} und \mathbf{b} ist, muss in der Fehlerminimierung diese Abhängigkeit berücksichtigt werden. Daraus resultieren für die Berechnung der Koeffizienten in \mathbf{A} und \mathbf{b} wesentlich längere Ausdrücke als in der Standardversion mit Gl. (4.58). Die Diskussion um die mathematischen Grundlagen der Standardmethode der ESL ist noch nicht beendet, wie jüngste Veröffentlichungen zeigen [14].

4.3.1.3 Eindeutigkeit der Lösung

Für das Standardverfahren kann nun gezeigt werden, dass die Differentialgleichungen für die ersten und zweiten Momente des linearen und des nichtlinearen Systems formal übereinstimmen. Werden die in Gl. (4.60) und (4.61) auftretenden Erwartungswerte mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des nichtlinearen Systems gebildet, so erhält man bei gleichen Anfangsbedingungen für beide Systeme die gleichen ersten und zweiten Momente. Dieses Linearisierungsproblem wird daher als „echte“ Linearisierung (*True Linearization*) bezeichnet. Pradlwarter [109] weist nach, dass für jedes beliebige nichtlineare System bei Anregung durch weißes Rauschen ein lineares System existiert, für das die ersten beiden Momente identisch sind. Er kommt jedoch auch zu dem Schluss, dass dieses System nicht eindeutig ist, da beliebig viele Dichtefunktionen konstruiert werden können, mit denen die Gln. (4.60) und (4.61) erfüllt werden können.

Von Roberts und Spanos [126] wird wiederum der Nachweis erbracht, dass das aus den Gln. (4.60) und (4.61) ermittelte linearisierte System Gl. (4.57) unter der Gaußannahme eindeutig ist, und dass mit den ermittelten Koeffizienten in \mathbf{A} und \mathbf{b} das Fehlerkriterium in Gl. (4.58) minimiert wird.

Langley [90] beschäftigt sich mit Fällen, in denen die Eindeutigkeit der Lösung bei der statistischen Linearisierung nicht gegeben ist. Fan und Ahmadi [55] konstruieren Fälle, in denen die zweiten Momente im instationären Fall nicht eindeutig werden. Sie weisen jedoch nach, dass die zweiten Momente im stationären Fall in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen eindeutig sind. Weisen Systemen mehrere Minima der Potentiale der Rückstellkräfte auf, können die Ergebnisse der Statistischen Linearisierung sehr stark von der exakten Lösung abweichen.

Lacquaniti und Riccardi [89] führen u.a. die Gaußsche Linearisierung eines Ein-Freiheitsgrad-Systems auf die „Gaussian Closure“ Methode zurück. Bezogen auf das Verfahren der maximalen Entropie, in der eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Kriterien der maximalen Entropie definiert wird, wird die statistische Linearisierung reinterpretiert. Werden nur Kriterien bis zum zweiten Moment vorgegeben, so erfüllt die Gaußsche statistische Linearisierung unter allen möglichen Linearisierungen diese Kriterien gemäß der maximalen Entropie am besten. Die

statistische Linearisierung kann nun dahingehend erweitert werden, dass Kriterien höherer Ordnung vorgegeben werden, so dass die echte Verteilungsdichtefunktion des nichtlinearen Systems besser angepasst werden kann. Daraus resultiert letztendlich eine „stückweise“ Linearisierung.

4.3.1.4 Weitere Linearisierungskriterien

Kazakov [121] führt neben der Minimierung des quadratischen Fehlermittels auch die Gleichheit der ersten und zweiten Momente des nichtlinearen und des linearisierten Gleichungssystems als Linearisierungskriterien ein. Zhang und Elishakoff [171], Elishakoff und Zhang [48] sowie Falso-
ne und Elishakoff [52] minimieren die Energiedifferenz im Quadrat bzw. die Erwartungswerte der Quadrate der potentiellen Energien. Dies entspricht einer Minimierung des 4. Momentes also des Exzesses des klassischerweise minimierten Fehlers, wodurch die Minimierung der unteren Momente nur indirekt erfolgt. Durch das Hinzufügen einer Gewichtungsfunktion des Fehlers werden die Linearisierungskoeffizienten der echten Linearisierung bestimmt. Um wiederum die Parameter der Gewichtungsfunktion zu bestimmen, muss die Lösung der zweiten Momente bekannt sein.

Casciati, Faravelli und Hashofer [29] beziehen ein Versagenskriterium als zusätzliches Linearisierungskriterium ein. Dadurch wird die Statistik der Überschreitensrate eines Versagenskriteriums verbessert.

4.3.2 ESL am Ein-Freiheitsgrad-System mit Hysterese

4.3.2.1 Aufstellung des Gleichungssystems

Die linearisierte Bewegungsgleichung des Einmassenschwingers bei mittelwertfreier Anregung und symmetrischer Nichtlinearität wird:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\text{eq}})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{eq}})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (4.64)$$

Die Systemmatrizen sind:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{\text{eq}}/w_Y & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(t), \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha k & (1-\alpha)k w_Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{eq}} \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Der Vektor der Unbekannten \mathbf{q} besteht aus der Verschiebung w sowie aus der bezogenen hysteretischen Rückstellkraft Y_H .

$$\mathbf{q}(t) = [w(t) \quad Y_H(t)]^T \quad (4.67)$$

Das assoziierte lineare System ist durch die Federsteifigkeit k , die Masse m und die Dämpferkonstante c definiert. Die dynamische Last wird durch die Zeitfunktion $f(t)$ beschrieben. w_Y ist

wiederum ein geeigneter Bezugsfaktor, über den z.B. die Fließ- bzw. Plastizitätsgrenze definiert werden kann.

Die Linearisierungsparameter hängen vom jeweiligen nichtlinearen Modell ab. Legt man die bilineare Hysterese nach Suzuki-Minai (2.30) zugrunde, so wird im stationären Fall:

$$k_{eq} = \frac{\sigma_{\dot{w}} \sqrt{1-\rho^2}}{\pi \sigma_Y} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\right) + \frac{\sigma_{\dot{w}} \rho}{\sigma_Y^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_Y^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho}{\sigma_Y \sqrt{2(1-\rho^2)}}\right)\right] \quad (4.68)$$

$$c_{eq} = -1 + \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_Y^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(x \cdot \frac{\rho}{\sigma_Y \sqrt{2(1-\rho^2)}}\right)\right] dx, \quad (4.69)$$

wobei die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$ definiert ist als das Integral

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.70)$$

Die Standardabweichung $\sigma_{\dot{w}}$ bezieht sich auf die bezogene Schwinggeschwindigkeit $\dot{\bar{w}}(t) = \dot{w}(t)/w_Y$, der Korrelationskoeffizient ρ auf die Kreuzkorrelation zwischen $\dot{\bar{w}}(t)$ und $Y_H(t)$.

$$\rho = \frac{E\{\dot{\bar{w}} \cdot Y_H\}}{\sigma_{\dot{w}} \sigma_Y}, \quad (4.71)$$

Im Falle des Hysterese Modells von Bouc-Wen ergeben sich zumindest für $N = 1$ einfachere Ausdrücke:

$$k_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_Y (\gamma \rho + \nu), \quad (4.72)$$

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\dot{w}} (\gamma + \nu \rho) - A. \quad (4.73)$$

Für den instationären Fall gelten die gleichen Formeln, mit dem Unterschied, dass dann die Linearisierungskoeffizienten und die stochastischen Parameter zeitabhängig werden.

4.3.2.2 Untersuchung der Genauigkeit und Konvergenz am Ein-Freiheitsgrad-System

Um die Einsatzmöglichkeit des Verfahrens auf Rahmentragwerke zu testen, wird zunächst ein Ein-Freiheitsgrad-System untersucht (mit den dimensionslosen, bezogenen Parametern):

$$k = 1; m = 1 \text{ (daraus } \omega = 1); c = 0,01 \text{ und } c = 0,04 \text{ (} \zeta = 0,005 \text{ und } \zeta = 0,02); \alpha = 0,5; w_Y = 1.$$

Auf das System wirkt ein Lastprozess $f(t)$ in der Näherung eines Gaußschen weißen Rauschens mit konstantem Leistungsdichtespektrum S_F bis $f = 8$ ein. Die Ergebnisse werden bezogen auf die Last im Bereich von $S_F^{0,5} = 10^{-4} \dots 10^0$ dargestellt.

Abb. 4.3 und Abb. 4.4 zeigen die auf die Last bezogenen Standardabweichungen der Antwort in Gegenüberstellung zu einer Monte Carlo Simulation. Die Ergebnisse sind in ähnlicher Form in [126] bzw. [167] enthalten und stimmen - soweit erkennbar - überein.

Das Systemverhalten kann bei Steigerung der Last in vier Phasen eingeteilt werden:

- *Phase I*, Elastische Antwort bis zur Fließgrenze:
Mit Suzuki-Minai (Abb. 4.3 bis $S_F^{0.5} = 2E-2$) erscheint die Fließgrenze als Knick, während der Übergang zur elasto-plastischen Antwort im Bouc-Wen Modell (Abb. 4.4) nicht eindeutig ist.
- *Phase II*, Bedämpfung durch Ausbildung einer Hysterese:
Durch die zunehmende Ausbildung der Hysterese wird das System bedämpft, die resonante bezogene Antwort nimmt in beiden Modellen bis ca. $S_F^{0.5} = 2E-1$ ab.
- *Phase III*, Zunahme der Amplituden durch Rückgang des Hysteresevolumens:
Mit weiterer Laststeigerung steigt die Amplitude der Antwort an, während die hysteretische Rückstellkraft $|Y_H|$ innerhalb der plastischen Grenzwerte $w_Y = 1$ eingeschränkt bleibt. Als Folge wird die Hysterese schmaler. Damit nimmt die bedämpfende Wirkung wieder ab, die Amplituden steigen wieder an ($S_F^{0.5} > 2E-1$). Auch der Einfluss der Form des Hysterese Modells nimmt ab. Die Antworten in beiden Modellen nähern sich an.
- *Phase IV*, Annäherung an das System mit Reststeifigkeit (nicht mehr im Bild dargestellt):
Die Kurve der Standardabweichung der Auslenkung σ_w nähert sich für $S_F^{0.5} > 1$ asymptotisch der Antwort des linearen Systems mit der Steifigkeit ak an, da der Anteil der hysteretischen Rückstellkraft zum Gleichgewicht klein wird.

4.3.2.3 Vergleich mit der Simulationsberechnung

Die normierten Histogramme ($\sigma = 1$) in Abb. 4.5 nehmen näherungsweise bis zu einer Laststufe von etwa $S_F^{0.5} = 10^{-1}$ die Form einer Normalverteilung an. Dementsprechend ist die Näherung durch die ESL bis zu dieser Laststufe für beide Hysterese Modelle unabhängig vom Dämpfungsgrad in einem akzeptablen Rahmen.

Oberhalb dieser Laststufe driften die Lösungen im Falle des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai zunehmend auseinander. Die weitere gute Übereinstimmung im Bouc-Wen Modell kann aus dem Vergleich der Histogramme mit der Normalverteilung nicht nachvollzogen werden. Da es sich bei den äquivalenten Koeffizienten um Mittelungswerte handelt, kann sich durch Zufall ein ähnlicher Wert ergeben, obwohl die zugrunde liegenden Verteilungen völlig verschieden sein können. Bei der Anwendung der statistischen Linearisierung ist daher Vorsicht geboten. Die Genauigkeit der Methode sollte immer unter Berücksichtigung der Form der echten Verteilungsdichtefunktion beurteilt werden.

In den Abbildungen 4.6 sind die Wertebereiche der äquivalenten Koeffizienten in Abhängigkeit von der Last dargestellt. Die Werte der linearisierten Dämpferkonstante c_{eq} bewegen sich zwischen $c_{eq} = -1$ und $c_{eq} = 0$. Die Werte der linearisierten Steifigkeit k_{eq} verschwinden in der Approximation des linearen Falles.

Die beschränkte Oszillation der hysteretischen Rückstellkraft macht sich auch in der spektralen Dichtefunktion Abb. 4.7 in einer künstlichen Resonanz bemerkbar. Dieses Phänomen ist spektral

mit Statistischer Linearisierung nicht erfassbar. Ansonsten stimmen die spektralen Dichtefunktionen im doppelt-logarithmischen Maßstab gut überein.

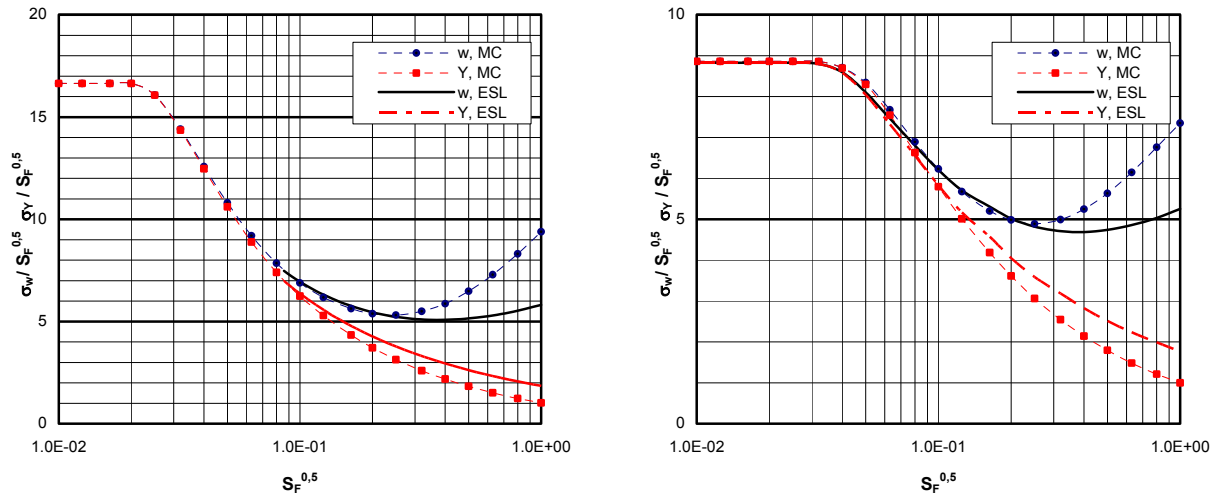


Abb. 4.3: Standardabweichungen der Auslenkung σ_w und der bezogenen hysteretischen Rückstellkraft σ_Y bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F , Vergleich ESL – MCS, Suzuki-Minai, $\alpha = 0,5$; links: Dämpfungsgrad $\zeta = 0,005$; rechts: Dämpfungsgrad $\zeta = 0,02$.

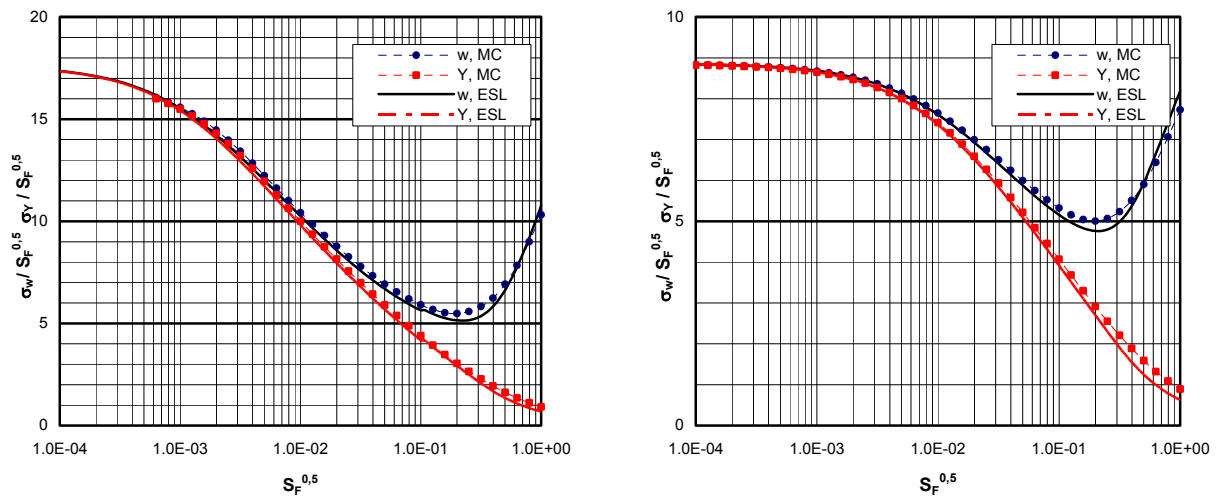


Abb. 4.4: Standardabweichungen der Auslenkung σ_w und der bezogenen hysteretischen Rückstellkraft σ_Y bezogen auf die spektrale Dichte der Last $S_F^{0.5}$, Vergleich ESL – MCS, Bouc-Wen Modell ($\lambda = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $N = 1$; $\alpha = 0,5$); links: Dämpfungsgrad $\zeta = 0,005$; rechts: Dämpfungsgrad $\zeta = 0,02$.

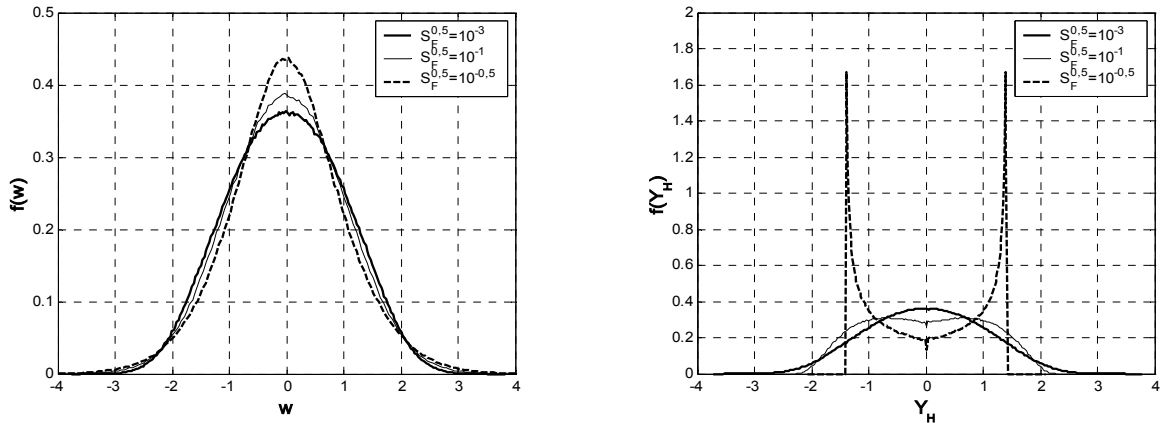


Abb. 4.5: Normierte Histogramme ($\sigma = 1$) der Auslenkung (links) und der hysteretischen Rückstellkraft (rechts), Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu=0,5$; $N = 1$; $\alpha = 0,5$); Dämpfungsgrad $\zeta = 0,005$; Abweichung von der Normalverteilung in den Laststufen $S_F^{0,5} = 10^{-3}$; $S_F^{0,5} = 10^{-1}$; $S_F^{0,5} = 10^{-0,5}$.

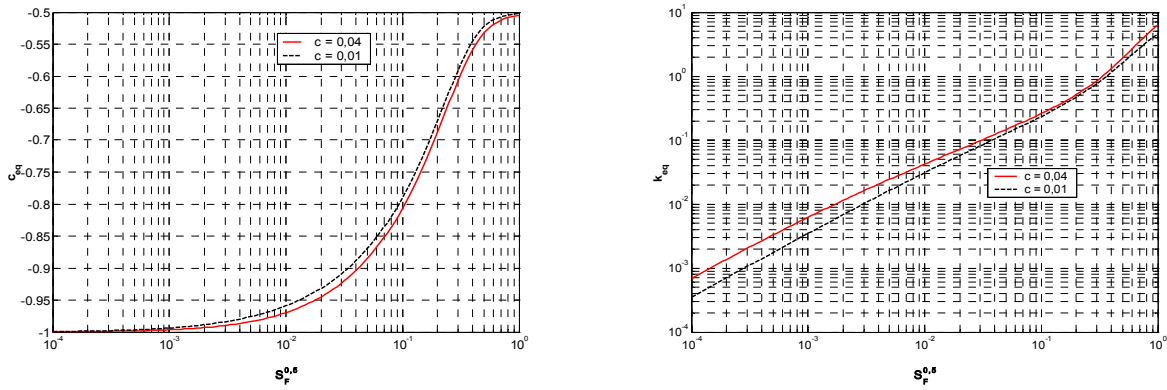


Abb. 4.6: äquivalente Koeffizienten c_{eq} (links) und k_{eq} (rechts) in Abhängigkeit von der spektralen Dichte der Last S_{I_3} , Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu=0,5$; $N = 1$; $\alpha = 0,5$); Suzuki-Minai $\alpha = 0,5$.

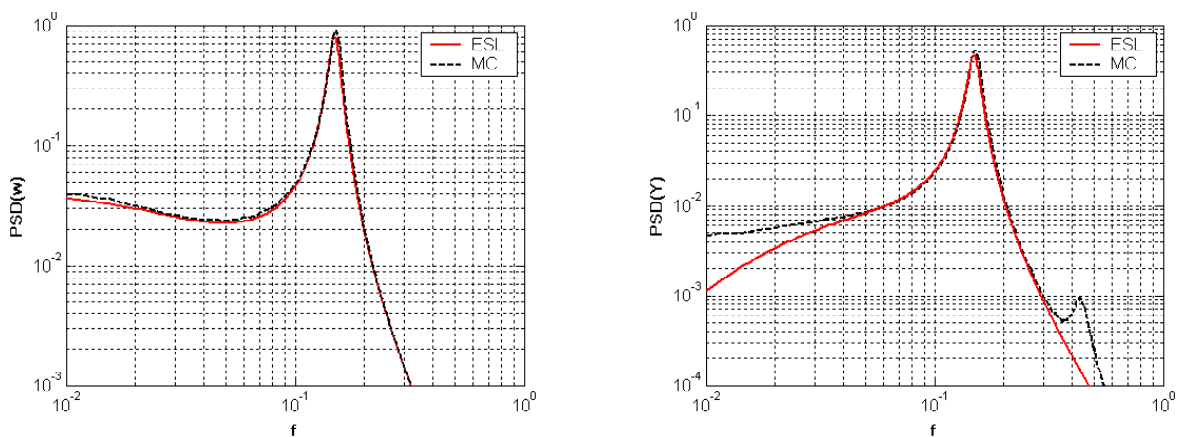


Abb. 4.7: Spektrale Leistungsdichte (PSD) der Wegauslenkung w (links) und der hysteretischen Rückstellkraft Y_H (rechts), Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu=0,5$; $N = 1$; $\alpha = 0,5$); Dämpfungsgrad $\zeta = 0,005$; $S_F^{0,5} = 10^{-1}$.

4.3.2.4 Konvergenz

Die Konvergenz des Verfahrens kann für alle getesteten Laststufen als gut bezeichnet werden, die Zahl der Iterationen nimmt mit zunehmender Last erwartungsgemäß zu. In [126] wurde festgestellt, dass für bestimmte Kombinationen des Reststeifigkeitsfaktors α und der Dämpfung ζ im bilinearen Modell keine Konvergenz erzielt werden kann. In den Ergebnissen mit Suzuki-Minai ist dies für $S_F^{0,5} < 10^{-1}$ mit $c = 0,01$ der Fall (Abb. 4.3 links).

Dieser Schwierigkeit kann, wie in [150] vorgeschlagen, durch eine einfache Relaxationsmethode begegnet werden. In der Iteration wird der neue Wert der Linearisierungskoeffizienten nicht durch das Ergebnis aus dem Erwartungswert (4.68) bzw. (4.69) unmittelbar ersetzt, sondern durch eine Interpolation zwischen aktuellem und vorangegangenen Wert.

$$k_{eq} = (1 - \mu)k_{eq\,alt} + \mu k_{eq\,neu} \qquad c_{eq} = (1 - \mu)c_{eq\,alt} + \mu c_{eq\,neu} \qquad (4.74)$$

Mit einem Relaxationswert von $\mu = 0,5$ kann eine gute Konvergenz mit max. 15 Iterationen erzielt werden. Die Werte weichen jedoch stark von der Lösung mit MCS ab.

Es wurde gezeigt, dass die Genauigkeit der Statistischen Linearisierung abhängig ist

- vom Plastizierungsgrad (Lastniveau),
- von der Art der Nichtlinearität,
- vom Faktor der Reststeifigkeit α in Kombination zum Dämpfungsgrad ζ . Bei kleinen Werten $\alpha < 0,1$ in Verbindung mit kleinem Dämpfungsgrad ζ wird die Methode zunehmend ungenauer [126]. Mit dem Standardverfahren treten Konvergenzschwierigkeiten auf.

Wird einer dieser Parameter während einer Untersuchung verändert, so muss die Genauigkeit der Ergebnisse erneut überprüft werden.

4.3.3 Weitere Literatur zur ESL

4.3.3.1 Erweiterungen des Standardverfahrens

Neben bereits genannten Beiträgen beschäftigen sich verschiedene Untersuchungen nun damit, die nachteiligen Eigenschaften des Standardverfahrens der ESL zu kompensieren.

Hurtado und Barbat [77] verbessern die Approximation, indem sie eine gestutzte Normalverteilung wählen, welche auf den beschränkten Wertebereich der Rückstellkräfte im Bouc-Wen Modell Rücksicht nimmt. Nicht-Gaußsche Verteilungsdichten werden der Statistischen Linearisierung von Kimura, Yasumuro und Sakata [86] zugrunde gelegt. Für die bessere Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens werden ebenfalls gestutzte Normalverteilungen angesetzt. Das überstehende Volumen wird als Dirac Distribution dem plastischen Grenzwert als Gewichtung

bei der Erwartungswertbildung zugeschlagen. Die Genauigkeit kann dadurch etwas verbessert werden.

Elishakoff und Cai [49] untersuchen Fälle, in denen die Nichtlinearität getrennt für die Dämpfung und die Steifigkeit behandelt werden kann, und in denen für die nichtlineare Elastizität eine geschlossene Lösung in Bezug auf die gesuchten statistischen Parameter der Antwort gefunden werden kann. Die äquivalente Dämpfung wird dann parallel durch partielle Linearisierung gewonnen.

Grigoriu [66] entwickelt die Statistische Linearisierung für Anregungen in Form von Poissonischem weißem Rauschen und weißem Rauschen nach Lévy. Sobiechowski [150] stellt für das Poissonsche weiße Rauschen die entsprechenden Formulierungen unter Verwendung des Hysterese-modells von Bouc-Wen auf. Gegenüber kontinuierlichem Rauschen eignet sich das Poissonsche weiße Rauschen für diskrete Prozesse, z.B. für die Belastung einer Brücke durch Strassenverkehr, für Windböen, unter gewissen Bedingungen auch für Erdbeben. Weißes Rauschen nach Lévy beschreibt Prozesse, deren Varianzen im Unendlichen liegen, z.B. die Entwicklung der Erdtemperatur oder die Erst-Überschreitenswahrscheinlichkeit bestimmter Prozesse.

4.3.3.2 Erweiterung durch Statistische Nichtlinearisierung

Die Nichtlinearisierung beruht auf der gleichen Grundlage wie die Linearisierung, jedoch tritt an die Stelle der linearen Gleichung eine nichtlineare. Sinnvollerweise wählt man eine Ersatzgleichung, die zum einen der Originalgleichung nahe kommt und zum anderen eine vereinfachte Lösungsmöglichkeit bietet. Donley und Spanos [45] verwenden eine Potenzreihe für die Approximation, da sich Potenzreihen als Volterra-Reihen auffassen lassen und der Volterra-Kern spektral behandelt werden kann.

Falsone und Sotera [54] setzen in Gl. (4.84) eine Gram-Charlier-Reihe zur Beschreibung der Verbundverteilungsdichtefunktion des nichtlinearen Systems ein. Unter Anwendung der Moment Closure Beziehungen fügen sie den Bestimmungsgleichungen der Linearisierungskoeffizienten Gl. (4.76) und (4.75) einen Summanden hinzu, der aus der Gram-Charlier Reihe abgeleitet wird. Damit wird ebenfalls eine bessere Annäherung der Verbundverteilungsdichte des nichtlinearen Systems erzielt. In die gleiche Richtung zielt die Arbeit von Lee [92], nur dass anstatt der Gram-Charlier Reihen Edgeworth Reihen verwendet werden.

Auf eine stückweise Linearisierung führt der Ansatz von Pradlwarter [115]. Die Verbundverteilungsdichte der Antwort im Phasenraum wird diskretisiert. Jedem Knoten der Diskretisierung werden normalverteilte Verteilungsdichtefunktionen zugeordnet, durch deren Überlagerung die echte Verbundverteilungsdichte angenähert wird.

4.3.3.3 Untersuchungen zur Genauigkeit der ESL

Die Genauigkeit der Statistischen Linearisierung wird in zahlreichen Arbeiten untersucht, so durch Noori, Saffar und Davoodi [104] an einem Ein-Freiheitsgrad-System mit einer Nichtlinearität in der Form eines Tangens-Hyperbolicus. Der Vergleich wird zur exakten Lösung (FPK) und zur non-Gaussian Closure gezogen. Iwan und Yang [80] untersuchen Mehr-Freiheitsgrad-Systeme mit kubischem Ansatz der Rückstellkräfte (hardening) bzw. in Form einer inversen Tangensfunktion (softening). Für beide Fälle lassen sich exakte Ausdrücke für die Linearisierungskoeffizienten angeben.

Die Schwankungsbreiten der Genauigkeit liegen je nach System und Nichtlinearität zwischen 4 % und 100 %.

4.3.3.4 Beispiele für Anwendungen

Marano und Greco [97] wenden die Statistische Linearisierung an, um die Energiedissipation in nichtlinearen Isolatoren zum Erdbebenschutz in Gebäuden zu ermitteln, wobei die Hysterese des nichtlinearen Elements durch das Bouc-Wen Gesetz beschrieben wird. Dazu wird ein so genannter Faktor der dissipierten Energie eingeführt, der das Verhältnis der dissipierten Energie mit und ohne Isolatoren angibt.

Zhang, Natke, Qui und Zhang [172] benutzen die Statistische Linearisierung zur Identifikation nichtlinearer Systeme auf der Grundlage von mehrdimensionalen Frequenzgängen. Smyth und Masri [148] berechnen die instationäre Antwortstatistik eines Duffing-Schwingers anhand der Liapunov-Differentialgleichung unter Erdbebenanregung mit Statistischer Linearisierung. Vorab wird die Kovarianzmatrix eines gemessenen Erdbebensignals durch Chebychev-Polynome in einer Karhunen-Loève Entwicklung durch die Methode der kleinsten Quadrate angenähert.

Grundmann und Waubke [70] wenden die Statistische Linearisierung auf Systeme mit streuenden Parametern unter stochastischer Last an.

4.3.4 Anwendung der ESL auf Rahmentragwerke

4.3.4.1 Berechnung der Linearisierungskoeffizienten

Schon Kazakov [84] dehnt die Methode auf Nichtlinearitäten mit mehreren Freiheitsgraden aus, die allgemein in Differentialgleichungen mit Gaußschem weißem Rauschen als Lastterm beschrieben werden. Den Einmassenschwinger mit Hysterese verallgemeinert Caughey ebenfalls auf Mehrfreiheitsgradsysteme [33], wobei die Nichtlinearität nur von der Verschiebung abhängen darf. Allgemeinere Nichtlinearitäten bezieht Foster [83] in sein Verfahren ein, das von Iwan/Yang [80] für kettenartige Systeme spezialisiert wird. Pradlwarter und Li [111] verwenden die statistische Linearisierung, um große Mehrfreiheitsgradsysteme zu untersuchen.

Im Rahmen der Newton-Raphson Iteration wurden bereits tangentielle Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen (Gln. 4.29, 4.30) aus den nichtlinearen Zusatzgleichungen abgeleitet, die sich in Abhängigkeit von der Beanspruchung ändern. Von Atalik und Utku [4] wurde erkannt, dass der Erwartungswert dieser Tangentialmatrizen für eine linearisierte Bewegungsgleichung benutzt werden kann:

$$\mathbf{K}_{\text{eq}} = E\{\mathbf{K}_{\text{tan}}\} = E\left\{\frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H))}{\partial \mathbf{Y}_H} \dot{\mathbf{k}}\right\} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{C}_{\text{eq}} = E\{\mathbf{C}_{\text{tan}}\} = E\left\{\frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H))\dot{\mathbf{k}}}{\partial \dot{\mathbf{k}}} \mathbf{T}_k\right\}, \quad (4.76)$$

mit Gl. (2.7):

$$\mathbf{T}_\kappa = \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}}{\partial \dot{\mathbf{w}}}. \quad (4.77)$$

Aus der Bewegungsgleichung (2.64) mit nichtlinearen Zusatzgleichungen wird ein linearisiertes System:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\text{peq}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{peq}})\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (4.78)$$

mit

$$\mathbf{C}_{\text{peq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{eq}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

und

$$\mathbf{K}_{\text{peq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(1-\alpha)\mathbf{K}_j & (1-\alpha)\mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{eq}} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Um zu überprüfen, inwieweit dieses linearisierte System die nichtlinearen Zusatzgleichungen ersetzen kann, wird wiederum der Erwartungswert des quadratischen Fehlers $E\{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\}$ berechnet, der sich aus der Differenz zwischen linearisiertem System und nichtlinearem System ergibt. Da der Unterschied nur in den Zusatzgleichungen auftritt, genügt es, diesen Teil der Gleichungssysteme zu erfassen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{C}_{\text{eq}} \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{K}_{\text{eq}} \mathbf{Y}_H) - (\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H) \dot{\mathbf{k}}). \quad (4.81)$$

Um den Erwartungswert des Fehlervektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ zu minimieren, werden die partiellen Ableitungen nach Gl. (4.59) gebildet und zu Null gesetzt:

$$\frac{\partial E\{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\}}{\partial K_{eq_{ij}}} = 0 \quad \frac{\partial E\{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\}}{\partial C_{eq_{ij}}} = 0. \quad (4.82)$$

Nach einigen Berechnungsschritten entsteht ein Gleichungssystem, das nach den unbekanntenen Elementen \mathbf{K}_{eq} und \mathbf{C}_{eq} aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_m (H_{Y_{im}}(\dot{\mathbf{k}}, Y_H) \dot{\mathbf{k}}_m) \dot{\mathbf{k}}_j\right\} &= \sum_n \left[E\{\dot{\mathbf{k}}_n \dot{\mathbf{k}}_j\} c_{eq_{in}} + E\{Y_{Hn} \dot{\mathbf{k}}_j\} k_{eq_{in}} \right] \\ E\left\{\sum_m (H_{Y_{im}}(\dot{\mathbf{k}}, Y_H) \dot{\mathbf{k}}_m) Y_{Hj}\right\} &= \sum_n \left[E\{\dot{\mathbf{k}}_n Y_{Hj}\} c_{eq_{in}} + E\{Y_{Hn} Y_{Hj}\} k_{eq_{in}} \right] \end{aligned} \quad (4.83)$$

Dieses Gleichungssystem entspricht Gl. (4.63) (unter der Annahme eines mittelwertfreien Lastprozesses mit symmetrischer Nichtlinearität).

Der unmittelbaren Auflösung des Gleichungssystems steht wiederum entgegen, dass die Erwartungswerte in Gl. (4.83) nicht bekannt sind. Die Erwartungswerte werden wie oben beschrieben iterativ bestimmt, indem als Startwerte für \mathbf{K}_{eq} und \mathbf{C}_{eq} z.B. die Steifigkeit und Dämpfung im elastischen Fall vorgegeben werden und die linearisierte Bewegungsgleichung damit gelöst wird.

Da aus dem linearisierten Gleichungssystem nur eine Gaußverteilung des Antwortprozesses resultieren kann, kann die von Kazakov [84] nachgewiesene Beziehung, die für Gauß-verteilte Vektorprozesse $\boldsymbol{\eta}$ gilt, eingesetzt werden:

$$E\{f(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}\} = E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T\}[\nabla f(\boldsymbol{\eta})]. \quad (4.84)$$

Der Nabla-Operator ∇ bezeichnet den Gradienten

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \eta_n} \right]^T. \quad (4.85)$$

Wird $\boldsymbol{\eta} = [\dot{\mathbf{k}} \quad \mathbf{Y}_H]^T$ gesetzt, so geht aus dem Vergleich von Gl (4.84) und Gl. (4.83) unmittelbar hervor:

$$E \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H)\dot{\mathbf{k}})}{\partial \dot{\mathbf{k}}} \mathbf{T}_k \\ \frac{\partial(\mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, \mathbf{Y}_H)\dot{\mathbf{k}})}{\partial \mathbf{Y}_H} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{eq} \\ \mathbf{K}_{eq} \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Damit ist die Übereinstimmung mit den mittleren Tangentenmatrizen in den Gln. (4.75) und (4.76) hergestellt.

In allgemeiner Form hängt der Aufwand zur Bildung des Erwartungswertes von Gl. (4.86) in einem Mehr-Freiheitsgradsystem stark von der Dimension der Verbundverteilungsdichte ab. Nur in Ausnahmefällen kann eine geschlossene Lösung gefunden werden. In der Regel sind Integrale über mehrere Dimensionen numerisch auszuwerten, was bei zwei Dimensionen noch mit vertretbarem Aufwand möglich ist. Wie in Anhang B gezeigt wird, ist der Aufwand bei vier Dimensionen bereits sehr hoch, darüber ist eine numerische Lösung praktisch nicht mehr sinnvoll.

Von großem Vorteil ist, dass die nichtlinearen Terme nur für die Freiheitsgrade des jeweiligen plastizierten Elementes gekoppelt sind. In diskreter Formulierung entkoppeln sich die Gleichungen auch für jeden Knoten eines Elementes. Die mehrdimensionale Verbundverteilung in den Erwartungswerten reduziert sich damit auf die Randverteilungen der Zufallsprozesse pro plastiziertem Element bzw. pro Knoten. Bei ebener Biegung enthalten die nichtlinearen Gleichungen in der kontinuierlichen Formulierung jeweils vier unabhängige Zufallsprozesse bzw. zwei in der diskreten Formulierung. Bei schiefer Biegung verdoppelt sich jeweils die Anzahl. Im Fasermodell reduziert sich die Zahl wieder auf zwei Variable pro nichtlinearer Gleichung.

Die Formulierung ist in reduzierter modaler Basis identisch, da die nichtlinearen Zusatzgleichungen nicht transformiert werden. Ein Unterschied ergibt sich lediglich darin, dass \mathbf{C}_{eq} noch von rechts mit $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{Bred}$ multipliziert werden muss.

4.3.4.2 ESL bei ebener Biegung

In der diskreten Formulierung können unmittelbar die für das Ein-Freiheitsgrad-System berechneten Gln. (4.68) - (4.72) verwendet werden. Die Standardabweichung der Schnelle $\sigma_{\dot{w}}$ wird

durch die Standardabweichung der Krümmungsgeschwindigkeit $\sigma_{\dot{\kappa}}$ ersetzt, aus der Standardabweichung der bezogenen hysteretischen Rückstellkraft wird die Standardabweichung des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes.

Pro plastiziertem Element werden die Linearisierungskoeffizienten für jeden Knoten getrennt ermittelt.

$$\mathbf{K}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} k_{eq11} & 0 \\ 0 & k_{eq22} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{C}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} c_{eq11} & 0 \\ 0 & c_{eq22} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Die äquivalenten Matrizen in kontinuierlicher Formulierung werden in Anhang B aufgestellt. Der Vergleich mit ESL in diskreter Formulierung erbringt keine nennenswerten Unterschiede.

4.3.4.3 ESL bei schiefer Biegung in diskreter Formulierung

Aufgrund der Kopplung der Rückstellmomente bei Plastizierung enthält die nichtlineare Entwicklungsgleichung bei diskreter Formulierung mindestens vier korrelierte Zustandsvariablen. Park und Wen [106] vereinfachen die Gleichung durch eine Transformation, wodurch eine Reduktion auf zwei Zustandsvariable und damit wieder eine Rückführung auf das Ein-Freiheitsgrad-System möglich ist. Dadurch gelingt eine statistische Linearisierung näherungsweise für homogene Rechteckquerschnitte.

Im allgemeinen Fall, z.B. an Stahlprofilquerschnitten, ist diese Transformation nicht durchführbar. Die Bildung des Erwartungswertes über die jeweiligen Ableitungen der Hysteresegleichung erfordert im allgemeinen Fall die Auswertung eines Integrals über vier Dimensionen. Da eine Möglichkeit der Vereinfachung des Integralausdrucks nicht gefunden wurde, bleibt für eine direkte Auswertung nur eine numerische Integration, die jedoch - wie in Anhang A gezeigt wird - sehr aufwändig und schwerfällig werden kann.

Am Mehrfasermodell kann das Problem zwar wieder auf ein zweidimensionales Integral reduziert werden, es müssen jedoch für jede Faser einzeln zwei äquivalente Steifigkeiten und zwei äquivalente Dämpfungen ermittelt werden. Das Gleichungssystem kann damit wieder sehr groß werden.

$$\mathbf{C}_{\text{eq}} = \text{diag} \left[c_{eq1,i} \quad \cdots \quad c_{eqk,i} \quad c_{eq1,i+1} \quad \cdots \quad c_{eqk,i+1} \right] \quad (4.89)$$

$$\mathbf{K}_{\text{eq}} = \text{diag} \left[k_{eq1,i} \quad \cdots \quad k_{eqk,i} \quad k_{eq1,i+1} \quad \cdots \quad k_{eqk,i+1} \right] \quad (4.90)$$

Die Linearisierungskoeffizienten der eindimensionalen Hysteresemodelle können z.B. aus den Gl. (4.68)-(4.73) berechnet werden. Statt $\sigma_{\dot{w}}$ wird die Standardabweichung der Dehnungsgeschwindigkeit $\sigma_{\dot{\epsilon}}$ an jedem Knoten pro Faser eingesetzt.

$$\mathbf{C}_{\text{Peq}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{eq}} \mathbf{T}_F \mathbf{T}_N & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

\mathbf{K}_{peq} aus Gl. (4.80) und \mathbf{K}_Y aus Gl. (2.56) bleiben unverändert. In reduzierter modaler Basis wird der Term $\mathbf{C}_{\text{eq}} \mathbf{T}_F \mathbf{T}_N$ zusätzlich noch von rechts mit $\tilde{\Phi}_{\text{Bred}}$ multipliziert.

4.3.5 Lösungsschritte der ESL

4.3.5.1 Spektralverfahren

Im Spektralverfahren wird von der Matrix der spektralen Dichtefunktion der Anregung $\mathbf{S}_F(\omega)$ ausgegangen und die Matrix der spektralen Dichtefunktion der Antwort $\mathbf{S}_q(\omega)$ aus der Übertragungsfunktion $\mathbf{H}^*(\omega)$ und deren konjugiert komplexer Form $\bar{\mathbf{H}}^*(\omega)$ im Frequenzbereich bestimmt:

$$\mathbf{S}_q^*(\omega) = \mathbf{H}^*(\omega) \mathbf{S}_{F_{\text{tot}}}^*(\omega) \bar{\mathbf{H}}^*(\omega)^T \quad (4.92)$$

Die spektrale Übertragungsmatrix ist in reduzierter Basis:

$$\mathbf{H}^*(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}_{\text{tot}}^* + i\omega \mathbf{C}_{\text{tot}}^* + \mathbf{K}_{\text{tot}}^* \right]^{-1} \quad (4.93)$$

mit

$$\mathbf{M}_{\text{tot}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.94)$$

$$\mathbf{C}_{\text{tot}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\text{eq}} \tilde{\Phi}_{\text{Bred}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

$$\mathbf{K}_{\text{tot}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_j & \tilde{\Phi}_{\text{Bred}}^T \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{eq}} \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

und mit

$$\mathbf{S}_{F_{\text{tot}}}^*(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{\text{red}}^T \mathbf{S}_F \tilde{\Phi}_{\text{red}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Die Invertierung in Gl. (4.93) erfolgt in jeder diskreten (Kreis-) Frequenz ω_i . Ohne modale Reduktion wäre die Invertierung eines Gesamtsystems mit einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden in jeder Frequenz sehr aufwändig.

Aus den Integralen über die Frequenz werden die Kovarianzmatrizen aus den spektralen Dichten der Antwort \mathbf{q} ermittelt:

$$E\{\mathbf{q}^* \mathbf{q}^{*\top}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_q^*(\omega) d\omega, \quad E\{\dot{\mathbf{q}}^* \mathbf{q}^{*\top}\} = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \mathbf{S}_q^*(\omega) d\omega, \quad E\{\dot{\mathbf{q}}^* \dot{\mathbf{q}}^{*\top}\} = \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \mathbf{S}_q^*(\omega) d\omega. \quad (4.98)$$

Für die Auswertung des Erwartungswertes in Gl. (4.86) muss zur Bestimmung der neuen Linearisierungskoeffizienten die Verbundverteilungsdichte der Prozesse in $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\kappa} \quad \mathbf{Y}_H]^\top$ bekannt sein, die im mittelwertfreien Fall wiederum vollständig mit der Kovarianzmatrix $E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^\top\}$ beschrieben ist. Um diese Matrix zu erhalten, werden die Kovarianzmatrizen in Gl. (4.98) durch die Vorschrift transformiert:

$$E\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} & \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}\right\} = \mathbf{T}_\eta E\{\mathbf{q}^* \mathbf{q}^{*\top}\} \mathbf{T}_\eta^\top, \quad (4.99)$$

mit

$$\mathbf{T}_\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\kappa \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Bred}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

Aus den Elementen der drei nach dem Schema Gl. (4.99) transformierten Matrizen in Gl. (4.98) kann wiederum $E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^\top\}$ für jedes plastizierte Balkenelement zusammengesetzt werden.

4.3.5.2 Lösung mit der Liapunov Matrix-Differentialgleichung

Kann die Anregung als weißes Rauschen beschrieben werden, wird alternativ die Kovarianzmatrix $\mathbf{Z}(t)$ des Zustandsvektors $\mathbf{q}(t)$ aus der Liapunov Matrix-Differentialgleichung (z.B. in [126]) berechnet:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t)^\top + \mathbf{Z}(t)\mathbf{A}(t)^\top + \mathbf{B}(t). \quad (4.101)$$

Der Zustandsvektor in reduzierter Basis ist:

$$\mathbf{q}^* = [\mathbf{w}^* \quad \mathbf{v}^* \quad \mathbf{Y}_H]^\top. \quad (4.102)$$

Damit ist die Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{Z} = E\{\mathbf{q}^* \mathbf{q}^{*\top}\}. \quad (4.103)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A} in Zustandsform ist mit normierten Basisvektoren ($\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^{*-1} = \mathbf{I}$):

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}^* + (1-\alpha)\mathbf{K}_j^* & -\mathbf{C}^* & (1-\alpha)\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Bred}}^\top \mathbf{K}_Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{eq}}(t)\mathbf{T}_\kappa \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Bred}} & \mathbf{K}_{\text{eq}}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.104)$$

Die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{\text{red}}^T \mathbf{I}^T(t) \mathbf{D} \mathbf{I}(t) \tilde{\Phi}_{\text{red}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

enthält die Matrix \mathbf{D} der Anregung, die im Falle weißen Rauschens mit Konstanten besetzt ist, wobei gilt:

$$\mathbf{D} \delta(t - \tau) = \mathbf{W}_f(t - \tau). \quad (4.106)$$

$\mathbf{W}_f(t - \tau)$ ist die Korrelationsfunktion des weißen Rauschens. Im quasi-stationären Fall wird \mathbf{D} mit einer Modulationsfunktion $\mathbf{I}(t)$ überlagert. Die Kovarianzmatrizen $\mathbf{Z}(t)$ sowie die Linearisierungskoeffizienten $\mathbf{K}_{\text{eq}}(t)$ und $\mathbf{C}_{\text{eq}}(t)$ sind zeitabhängig. Zur Lösung kann ein konventioneller Zeitschrittalgorithmus verwendet werden, wobei in jedem Zeitschritt die Linearisierungskoeffizienten iterativ bestimmt werden müssen.

Im stationären Fall werden \mathbf{Z} , \mathbf{A} und \mathbf{B} unabhängig von der Zeit. Da sich die Kovarianzmatrix \mathbf{Z} nicht ändert, wird deren zeitliche Ableitung $\dot{\mathbf{Z}}$ zu Null.

Sowohl für die stationäre als auch für die instationäre Lösung ist es bedeutsam, wenn nur eine geringe Anzahl an Gleichungen zu behandeln ist. Auch wenn im Zustandsvektor zusätzlich die Geschwindigkeiten als unbekannte Größen enthalten sind, ist die Lösung der Liapunov-Gleichung wesentlich weniger aufwändig als die Spektralmethode, da durch eine einmalige Lösung bereits der gesamte Frequenzbereich abgedeckt ist.

Anregespektren, die nicht einem weißen Rauschen entsprechen, können über zusätzliche lineare Filterterme in der Matrix \mathbf{A} auf das Eingangssignal eines weißen Rauschens bezogen werden.

Zur Gewinnung der Kovarianzmatrix $E\{\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T\}$ muss wiederum \mathbf{Z} analog Gl. (4.99) mit einer Matrix $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\eta}}$ transformiert werden. $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\eta}}$ ist in diesem Fall:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\kappa} \tilde{\Phi}_{\text{Bred}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

4.3.5.3 Weitere Lösungsstrategien

Eine weitere klassische Lösung basiert auf der Entwicklung mit komplexen Moden [126]. Aus dem System in Zustandsform Gl. (2.68) werden die komplexen Moden berechnet und das System transformiert. Die Kovarianzmatrix wird aus den entkoppelten Gleichungen bestimmt. Der Nachteil jedoch ist, dass die Eigenvektoren in jedem Iterationsschritt neu bestimmt werden müssen, da sich die Linearisierungskoeffizienten jedes Mal ändern. Die Methode kann auch auf den instationären Fall übertragen werden [110].

Um die numerische Integration bei der Erwartungswertbildung in Gl. (4.86) zu umgehen, schlagen Schuëller, Pandey und Pradlwarter [134] eine Monte Carlo Simulation von Gl. (4.61) bzw. Gl. (4.83) vor:

Es wird eine Serie von n_s Vektoren von $\boldsymbol{\eta} = [\dot{\mathbf{k}} \quad \mathbf{Y}_H]^T$ realisiert. Diese Werte werden in die nichtlineare Gleichung $\dot{\mathbf{Y}}_H = \mathbf{H}_Y(\dot{\mathbf{k}}, Y_H)\dot{\mathbf{k}}$ eingesetzt und $\dot{\mathbf{Y}}_H$ bestimmt. Gleichzeitig gilt $\dot{\mathbf{Y}}_H = \mathbf{C}_{eq}\dot{\mathbf{k}} + \mathbf{K}_{eq}\mathbf{Y}_H$, womit nach den unbekanntem Koeffizienten aufgelöst werden kann. Um die n unbekanntem Linearisierungskoeffizienten zu bestimmen, sollte $n_s > n$ gewählt werden. Für $n = n_s$ ergeben sich die Linearisierungskoeffizienten aus einem linearen Gleichungssystem, für $n_s > n$ wird die Methode der kleinsten Quadrate angewendet. Es kann nachgewiesen werden, dass Gl. (4.83) mit einer zunehmenden Anzahl n_s an Realisierungen approximiert wird [110]. Für die Realisationen der Prozesse von $\boldsymbol{\eta}$ ist die Grundlage deren Kovarianzmatrix, die in jedem Iterationsschritt bekannt ist. Die Realisationen können gemäß Abschnitt 4.2.2 generiert werden.

Der Algorithmus ist für jedes plastizierte Element anzuwenden. Er mag auf den ersten Blick etwas schwerfällig wirken. Er ist aber andererseits im Vergleich zu Alternativen universell einsetzbar und in jedem Fall einer numerischen Integration über mehr als 3 Dimensionen vorzuziehen.

Geisenhofer [64] fasst den Erwartungswert des Fehlerquadrates $E\{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\}$ als mehrdimensionales Paraboloid auf, dessen Minimum gesucht ist. Um das Paraboloid zu beschreiben, werden Stützstellen realisiert und daraus dessen Form bestimmt. Aus der Minimumsuche ergeben sich wiederum die Linearisierungskoeffizienten. Die Methode ist jedoch sehr stark von der Wahl der Stützstellen abhängig.

Grundmann, Hartmann und Waubke [71] verwenden zur Minimumsuche in den Gln. (4.75) und (4.76) einen Evolutionsalgorithmus, um sowohl Konvergenzschwierigkeiten als auch aufwändige numerische Integrationen zu umgehen.

Ein auf eine reduzierte Anzahl von Karhunen-Loève Vektoren basierendes Verfahren der Monte Carlo Simulation beschreiben Vasta und Schuëller [161]. Zunächst wird über MCS bzw. ESL die Kovarianzmatrix der Zustandsvariablen grob geschätzt, woraus die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix der Antwort bestimmt werden. Weitere Realisationen werden dann in reduzierter Basis berechnet. In Pradlwarter [118], Pradlwarter, Schuëller und Schenk [116],[117] wird diese Vorgehensweise auf die Statistische Linearisierung angewendet. Die zeitabhängige Kovarianzmatrix der instationären Antwort eines Mehr-Freiheitsgrad-Systems wird mit Karhunen-Loève Vektoren entwickelt, die in jedem Zeitschritt angepasst werden müssen. Durch Reduzierung der Basis aus Karhunen-Loève Vektoren kann die Lösung der Liapunov Differentialgleichung optimiert werden. In [118] wird ein Algorithmus zur Zeitintegration der Liapunov-Differentialgleichung (4.101) beschrieben.

Schuëller und Schenk [131][141] wenden die Karhunen-Loève Entwicklung an, um ein eindimensionales instationäres Erdbebensignal zu beschreiben. Die Kovarianzmatrix des zeitdiskreten Signals mit 2000 Zeitschritten kann von einer Dimension von 2000 x 2000 auf 200 x 200 reduziert werden.

Zur Aufbereitung der statistischen Linearisierung für kontinuierliche Systeme stellen Iwan Whitley [81] die Linearisierungskoeffizienten als orts- und zeitabhängige Variable dar, die in eine Summe aus Orts- und Zeitfunktionen entwickelt werden. Nach der Diskretisierung eines kontinuierlichen Systems in ein Mehr-Freiheitsgrad-System werden dann die generalisierten zeitabhängigen Koordinaten der Linearisierungskoeffizienten in einem Zeitschrittverfahren nach dem Standardverfahren der Statistischen Linearisierung berechnet.

Casciati und Faravelli [26] übertragen die Normalenhypothese der klassischen Plastizitätstheorie auf Momenten-Krümmungs-Beziehungen zur Untersuchung von 3-D Stahlbetonrahmen mit Statistischer Linearisierung.

4.3.6 Genauigkeit der ESL bei ebener Biegung am Kragarmmodell

Zur Überprüfung der Genauigkeit der ESL wird wiederum das Kragarmmodell nach Abb. 3.1 unter gleichverteilter stochastischer Last herangezogen.

Auf das System wirkt ein über den Kragarm gleichverteilter Lastprozess $\mathbf{F}(t)$ in der Näherung eines Gaußschen weißen Rauschens mit konstantem Leistungsdichtespektrum S_F bis $f=8$ Hz ein. Wie am Ein-Freiheitsgrad-System wird die Standardabweichung der Krümmung κ und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes Y_H an Knoten 1 mit MCS verglichen. Als Varianten werden wiederum die beiden Hysterese Modelle nach Suzuki-Minai (Abb. 4.9) und Bouc-Wen (Abb. 4.8) herangezogen, wenn einmal Plastizierung nur an Knoten 1 (jeweils Bild links) auftritt bzw. wenn alle Knoten plastizieren (jeweils Bild rechts). Die spektrale Dichte der Last wird schrittweise im Bereich von $S_F^{0,5} = 10^{-6} \dots 10^{-1}$ erhöht und jeweils die stationäre Antwort berechnet.

Wie schon am Ein-Freiheitsgrad-System beobachtet, schneidet im Vergleich zur Referenzlösung aus MCS die statistische Linearisierung mit Bouc-Wen Modell (Abb. 4.8) besser ab als mit dem Modell nach Suzuki-Minai (Abb. 4.9). Eine näherungsweise Übereinstimmung ist bei Suzuki-Minai nur im Bereich bis zur doppelten Last gegenüber der Fließgrenze festzustellen.

Außerdem ist die Genauigkeit offensichtlich von der Modellbildung abhängig. Die Näherung ist in beiden Modellen besser, wenn die Plastizierung nicht auf den Knoten an der Einspannung beschränkt bleibt, sondern sich über alle Elemente ausbreiten kann. Hängt die Antwort des Gesamtsystems nur in geringem Maße von der lokalen Ausbildung einer Hysterese aufgrund Plastizierung ab, liefert die Statistische Linearisierung zunehmend ungenauere Werte.

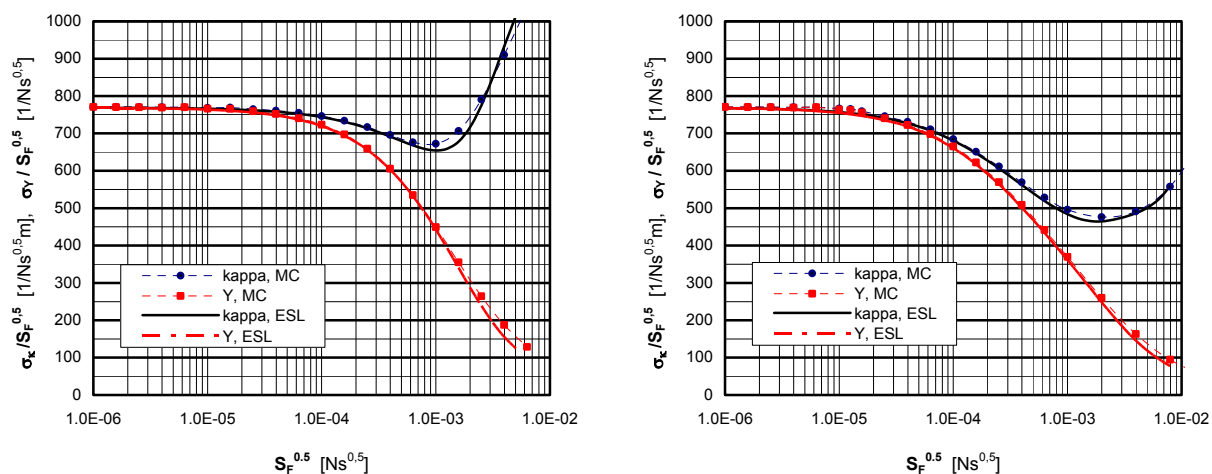


Abb. 4.8: Standardabweichung der Krümmung κ und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes Y_H bezogen auf die spektrale Dichte der Last $S_F^{0,5}$ an Knoten 1 (Einspannung); Vergleich ESL – MCS, Bouc-Wen Modell ($A=1$; $\gamma=\nu=0,5$; $\kappa_Y=1$; $\alpha=0,5$); links: Plastizierung von Knoten 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10.

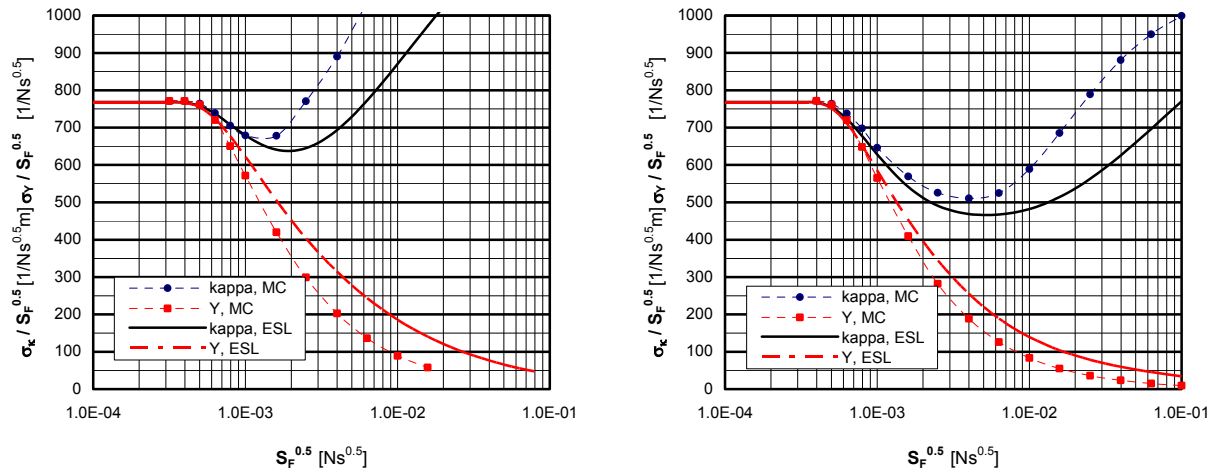


Abb. 4.9: Standardabweichung der Krümmung κ und des bezogenen hysteretischen Rückstellmoments Y_H bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F an Knoten 1 (Einspannung); Vergleich ESL – MCS, Suzuki-Minai Modell ($\alpha = 0,5$); links: Plastizierung von Knoten 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10.

Um auch den spektralen Vergleich in den Abbn. 4.10 zwischen ESL und MCS zu ziehen, wird wieder das Kragarmmodell mit Plastizierung von Element 3 unter stochastischer gleichverteilter Last in Form eines weißen Rauschens mit $S_F = 10^{-5} s^2$ betrachtet. Die spektrale Dichte (PSD) geschätzt aus MCS (100 Spektren) kann gut mit ESL angenähert werden. Ähnlich wie am Ein-Freiheitsgrad-System werden jedoch die typischen nichtlinearen Effekte im Spektrum durch das linearisierte System nicht abgebildet.

Wiederum steht die gute Übereinstimmung im zweiten Moment als auch in den spektralen Dichtefunktionen in Widerspruch zu den unterschiedlichen Verteilungen bzw. relativen Häufigkeit der Antwort in Abb. 4.12. Die Werte des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes gruppieren sich um die plastischen Grenzwerte $|Y_H| = 1$.

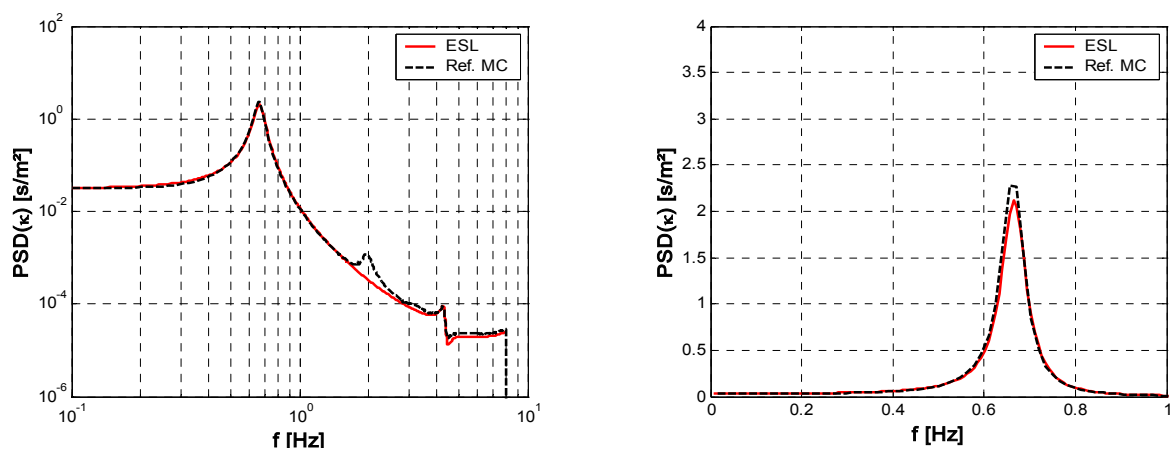


Abb. 4.10a: PSD der Krümmung κ ; elasto-plastische Antwort an Knoten 3, Plastizierung an Element 3, Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_y = 1$; $\alpha = 0,5$); Vergleich Statistische Linearisierung ESL – Monte Carlo Simulation (MCS) in doppelt-logarithmischem (links) und linearem Maßstab (rechts).

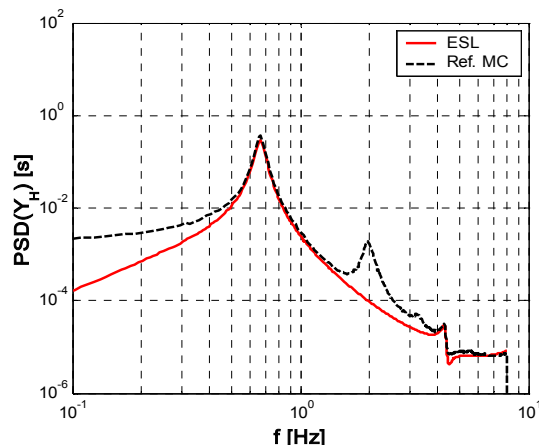


Abb. 4.11b: PSD des bezogenen hysteretischen Rückstellmoments Y_H , elasto-plastische Antwort an Knoten 3, Plastizierung an Element 3, Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_Y = 1$; $\alpha = 0,5$), Vergleich Statistische Linearisierung ESL – Monte Carlo Simulation (MCS).

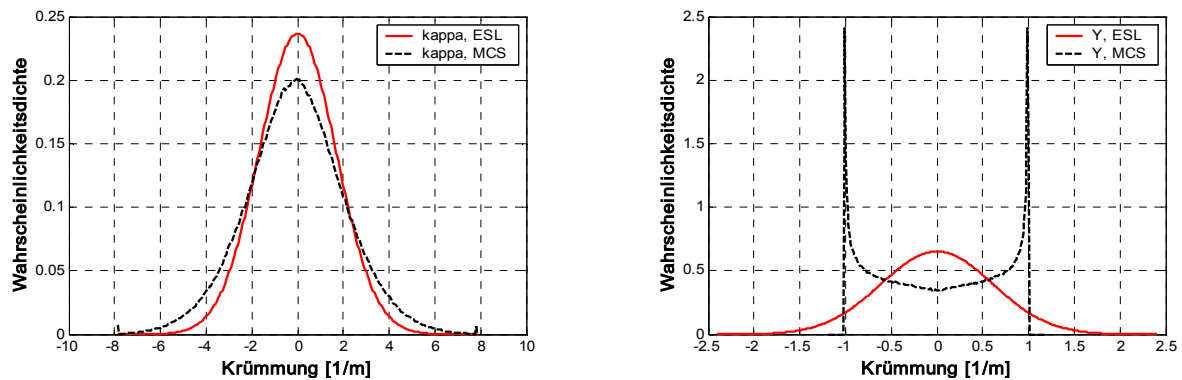


Abb. 4.12: Vergleich der Normalverteilung aus Statistischer Linearisierung ESL – normierte Histogramme aus Monte Carlo Simulation (MCS) der Krümmung κ (links) und des bezogenen hysteretischen Rückstellmoments Y_H (rechts); elasto-plastische Antwort an Knoten 3, Plastizierung an Element 3, Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_Y = 1$; $\alpha = 0,5$).

Vergleich der ESL am gesamten Gleichungssystem mit ESL in reduzierter Basis mit plastischen Formfunktionen

Die gezeigten Abbn. 4.8 - 4.9 sind mit der Lösung am vollständigen Modell und am reduzierten Modell unter Verwendung von plastischen Formfunktionen quasi identisch, auf eine explizite Darstellung wird daher verzichtet.

Neben dem Vergleich der Standardabweichungen soll wiederum auch der spektrale Vergleich zwischen den Lösungen in vollständiger und reduzierter Basis anhand des Kragarmmodells mit Plastizierung von Element 3 gezogen werden. In Abb. 4.13 sind die entsprechenden Leistungsdichtespektren gegenübergestellt. Zusätzlich sind die Spektren der linear-elastischen Antwort zur Orientierung eingetragen. Die Spektren decken sich wie bei Anwendung der Monte Carlo Simulation (Abb. 3.8). Dies gilt nur unter der Maßgabe, dass das Spektrum der Anregung bei $f = 8$ Hz begrenzt ist und damit die Moden 3 – 18 dynamisch kaum angeregt werden. Ein geringfügiger Einfluss der 3. Resonanz ist in der Differenz der Spektren bei $f = 8$ Hz erkennbar.

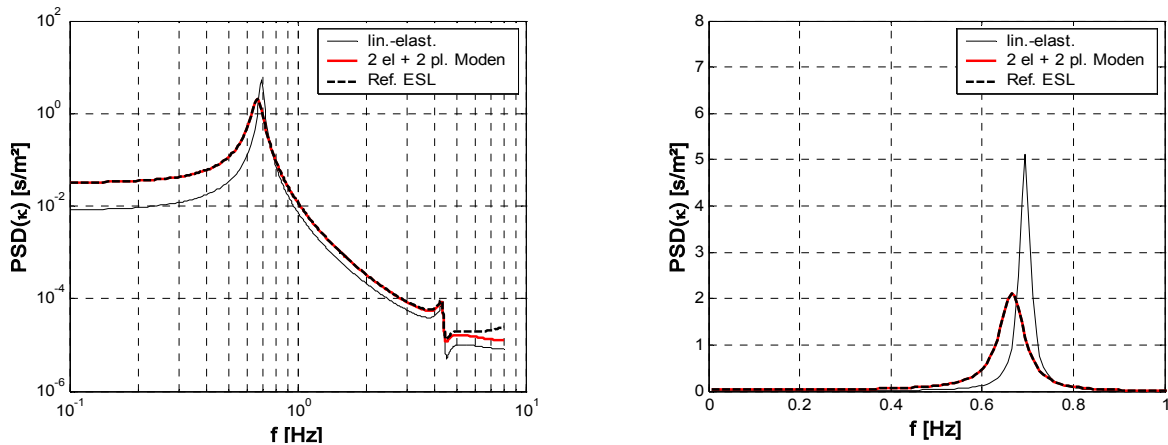


Abb. 4.13: PSD der Krümmung κ , elasto-plastische Antwort an Knoten 3, Plastizierung in Element 3, Bouc-Wen Modell ($\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_\gamma = 1$; $\alpha = 0,5$), Vergleich Ergebnis am vollständigen Gleichungssystem (Referenz ESL) – Ergebnis in reduzierter Basis mit 2 elastischen Moden + 2 plastische Formfunktionen in doppelt-logarithmischem (links) und in linearem Maßstab (rechts).

Instationäre Anregung am Kragarmmodell

Das in Abschnitt 4.2.3.2 beschriebene Prediktor-Korrektor Verfahren eignet sich zur Lösung der Liapunov-Differentialgleichung (4.101) im instationären Fall. Die Zustandsform Gl. (2.68) bzw. (4.16) wird durch Gl. (4.101), und der Vektor \mathbf{q} durch die Kovarianzmatrix \mathbf{Z} ersetzt. Die Matrix $\mathbf{A}(t)$ wird zeitabhängig, wobei in jedem Zeitschritt die darin enthaltenen Linearisierungskoeffizienten neu bestimmt werden müssen. Dazu kann in einer Iteration der Korrektor verwendet werden, indem in Gl. (4.19) die jeweils aktualisierte Matrix $\mathbf{A}_{t+\Delta t}$ eingesetzt wird. Für die Liapunov-Differentialgleichung gilt jedoch auch, dass der Zeitschritt sich nach der höchsten Eigenfrequenz des Systems richtet. Der Einsatz expliziter Algorithmen in größeren Systemen auch bei Verwendung von plastischen Formfunktionen ist daher ungeeignet.

Um trotzdem einen Vergleich zwischen Simulation und Statistischer Linearisierung im instationären Fall ziehen zu können, wurde wiederum das Beispiel Kragarm mit 18 Freiheitsgraden unter transienter Erdbebenlast herangezogen. Die Modellierung der Erdbebenlast wird in Abschnitt 5.4.2 noch detaillierter behandelt.

Es plastiziert Knoten 1 mit einer Reststeifigkeit definiert durch $\alpha = 0,1$. Die reduzierte modale Basis besteht aus 3 elastischen + 2 plastischen Formfunktionen.

Das Kanai-Tajimi Filter [82], [158] der Erdbebenanregung wird in die Zustandsgleichung Gl. (2.68) eingegliedert. Die Filtergleichung ist in Zustandsform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{v}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_g^2 & -2\zeta_g \Omega_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ x_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \tag{4.108}$$

Die gefilterte Fußpunktbeschleunigung ist dann:

$$a_g = -\Omega_g^2 x_g - 2\zeta_g \Omega_g v_g. \quad (4.109)$$

Dementsprechend wird aus der in Gl. (4.104) definierten Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}^* + (1-\alpha)\mathbf{K}_j & -\mathbf{C}^* & -(1-\alpha)\tilde{\Phi}_{\mathbf{B}_{red}}^T \mathbf{K}_Y & \tilde{\Phi}_{red}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{a,y}(\Omega_g^2) & \tilde{\Phi}_{red}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{a,y}(2\zeta_g \Omega_g) \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{eq}(t) \mathbf{T}_k \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}_{red}} & \mathbf{K}_{eq}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Omega_g^2 & -2\zeta_g \Omega_g \end{bmatrix} \quad \dots \quad (4.110)$$

mit dem Zustandsvektor:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{w}^* \quad \mathbf{v}^* \quad \mathbf{Y}_H \quad x_g \quad \dot{x}_g]^T \quad (4.111)$$

und der Kovarianzmatrix der Anregung mit moduliertem weißem Rauschen:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 2\pi S_a I(t)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.112)$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_a ordnet die Beschleunigungen den Massenanteilen aus \mathbf{M} in den entsprechenden Achsrichtungen zu. Zur Modulation wird die Intensitätsfunktion $I(t)$ mit folgender Aufteilung über die Erdbebendauer T_d verwendet:

$$t < 0,15T_d : I(t) = \left(\frac{t}{0,15T_d} \right)^2 ; \quad 0,15T_d < t < 0,45T_d : I(t) = 1 ; \quad 0,45T_d < t : I(t) = e^{-c(t-0,45T_d)}. \quad (4.113)$$

Die Parameter der Erdbebenanregung sind: $\beta_g = 0,7$, $\Omega_g = 1,0$ rad/s, $T_d = 9$ s; $c = 0,4$. Die spektrale Dichte des weißen Rauschens der Beschleunigung wird mit $S_a = 25$ angesetzt.

Die Ergebnisse der Monte Carlo Simulation wurden aus 10.000 Zeitschrieben gemittelt. Die Abb. 4.14a und 4.14b stellen die Zeitverläufe der Standardabweichungen der Krümmung und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes aus MCS und ESL gegenüber. Abb. 4.14c zeigt die entsprechende Entwicklung der Linearisierungskoeffizienten über der Zeit. Für die Berechnung der 10.000 Realisierungen werden ca. 84 h benötigt (800 MHz CPU), während im Falle der ESL wenige Minuten genügen.

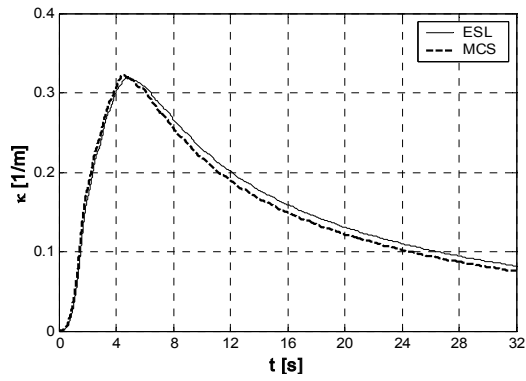


Abb. 4.14a Zeitverlauf der Standardabweichung der Krümmung κ (RMS), Vergleich MCS – ESL

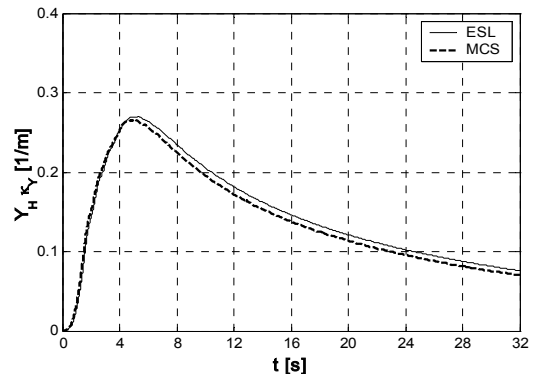


Abb. 4.14b Zeitverlauf der Standardabweichung des bez. hyst. Rückstellmoment Y_H (RMS), Vergleich MCS - ESL

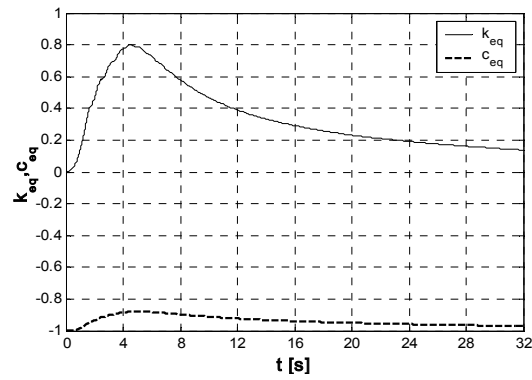


Abb. 4.14c Entwicklung der Linearisierungskoeffizienten k_{eq} und c_{eq} an Knoten 1 über der Zeit.

5 Anwendungsbeispiele

5.1 Vorbemerkungen und Annahmen

Als Beispiel wird eine Rahmenkonstruktion gewählt, die einmal unter Windlast anhand eines ebenen Modells und zum zweiten als 3D-Modell unter Erdbebenbelastung untersucht wird. Die Abb. 5.1a - 5.1d zeigen das 3D-Modell eines Gebäudeabschnitts.

Aufgrund der Schlankheit der Konstruktion wird davon ausgegangen, dass die plastische Deformationsarbeit im überwiegenden Anteil durch Biegung geleistet wird. Aus den Modenformen in Abb. 5.15 sowie den linearen statischen Verschiebungslinien aus dynamisch einwirkender Last in Abb. 5.11 und aus statischer Last Abb. 5.9 kann geschlossen werden, dass die Torsionsbeanspruchung klein gegenüber der Biegebeanspruchung ist. Eine Interaktionsbeziehung von Biegung, Querkraft und Torsion kann daher entfallen.

Die Merkmale der Untersuchung sind

- am 2D-Modell: ca. 1450 Freiheitsgrade, stationäre mittelwertbehaftete Anregung, ebene Biegung;
- am 3D-Modell: ca. 93.000 Freiheitsgrade, mittelwertfreie instationäre Anregung, schiefe Biegung, Interaktion mit Normalkraft.

Die Größe des ebenen Modells erlaubt noch eine Lösung im vollständigen Gleichungssystem im Zeitbereich. Damit kann der Vergleich zur Lösung in reduzierter Basis gezogen werden. Unter stationärer Anregung wird neben der Monte Carlo Methode auch die Statistische Linearisierung angewendet.

Im 3D-Modell ist aufgrund der Größe eine Monte Carlo Simulation ohne Reduzierung des Systems nicht mit vertretbarem Aufwand möglich. Das Beispiel dient zu zeigen, dass auch beliebig große nichtlineare Rahmensysteme mit stochastischen Methoden behandelt werden können, ohne dass der Aufwand gegenüber kleinen Systemen beträchtlich ansteigt.

Um die Verfahren plausibel darstellen zu können, werden sowohl die Lasten als auch die Modelle geeignet modifiziert. Das ebene Modell wird biegeweicher gemacht, damit eine maßgebende resonante Anregung durch Windlast zustande kommt. Zudem wird die Windlast auf etwa das doppelte der Bemessungslast erhöht. Ähnlich werden auch die Erdbebenbeschleunigungen in einer Achsrichtung stärker gewichtet, um die Interaktionseffekte bei schiefer Biegung zu erzeugen. Die Lasterhöhung zieht eine verstärkte Ausbreitung von Plastizierungen und damit ein starkes Anwachsen der reduzierten Basis nach sich. Um die Anzahl der plastizierten Elemente zu begrenzen, werden im Beispiel Erdbebenlast die Bereiche eingeschränkt, in denen Plastizierungen auftreten dürfen. In Analogie zur Fließgelenktheorie wird nur ein plastiziertes Element in Folge pro Stütze zugelassen.

5.2 Beschreibung der Konstruktion

Auf einer bestehenden Plattform mit den Abmessungen von $l = 700$ m und $b = 54,4$ m wird ein mehrstöckiges Gebäude mit einer Länge von 97,5 m geplant. Die Lasten der Plattform werden über Fischbauchträger im Abstand von 15 m auf Stützen abgetragen. Die Stützen gründen auf massiven Steifenfundamenten, die über die Plattformlänge durchgehen.

Die maximalen Lasten sind durch die Belastbarkeit der existierenden Plattform begrenzt. Um den Bauraum optimal zu nutzen, wird eine optimierte leichte Rahmenkonstruktion mit Verbunddecken geplant. Die Deckenstärke soll $d = 16$ cm betragen. Die Träger der Verbunddecke mit einem Abstand von $e = 2,20$ m überspannen das Achsmaß von $l = 15$ m zwischen den Hauptträgern. Die ersten Deckeneigenfrequenzen liegen bei etwa $f = 4$ Hz.

Die Stockwerkshöhe beträgt $h = 3,10$ m. Die Rahmenstützen bestehen aus Profilstahl. Die größte Spannweite in der Querachse beträgt $l = 8,40$ m. Die Materialdaten enthalten für

Stahl ST 52: $\rho = 7850$ kg/m³, $E = 210.000$ MN/m²

Beton: $\rho = 2350$ kg/m³, $E = 37.000$ MN/m².

Plastizierungen treten nur in den Gebäudestützen auf. Die Fließgrenze wird für Stahl ST 52 bei $\sigma_Y = 345$ MN/m² entsprechend einer Dehnung von $\varepsilon_Y = 0,00164$ angesetzt. Der Faktor der Reststeifigkeit wird zu $\alpha = 0,1$ angenommen.

Unter dynamischer Last soll eine homogen verteilte, viskose Materialdämpfung mit einem modalen Dämpfungsgrad von $\zeta = 0,5\%$ wirken.

Abbn. 5.1: FE-Modell

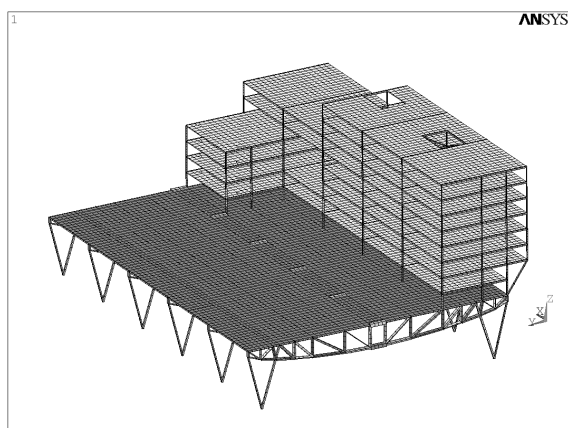


Abb. 5.1a Isometrie von oben

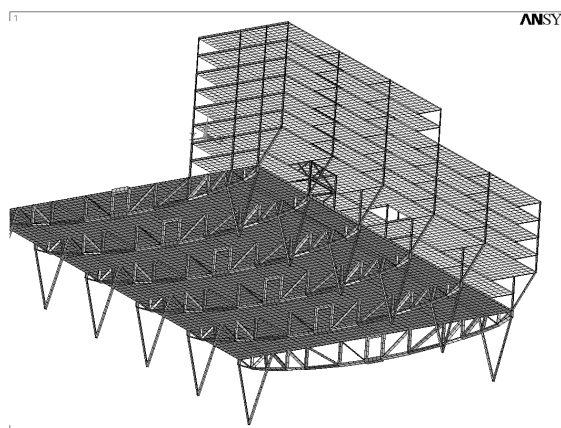


Abb. 5.1b Isometrie von unten

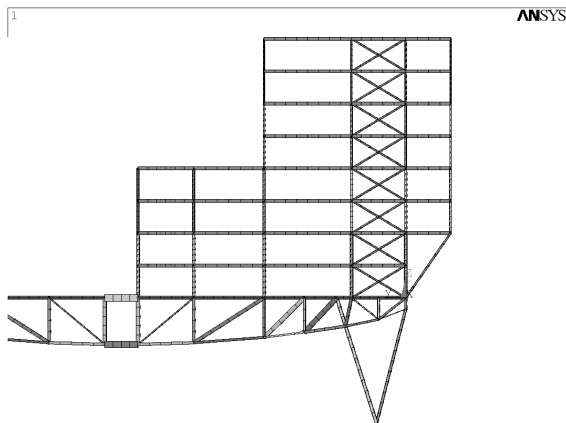


Abb. 5.1c Seitenansicht

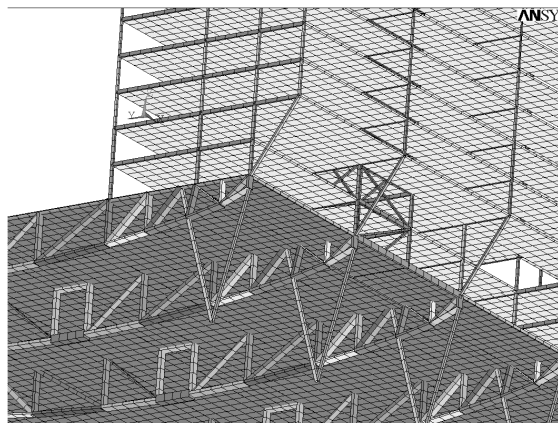


Abb. 5.1d Detail-Isometrie von unten

5.3 Windbelastung am 2D-Modell

5.3.1 Modellbildung in 2D, Diskretisierung

Abb. 5.2 zeigt das ebene Modell einer Variante des Tragwerksentwurfs. Die Anzahl der Stockwerke ist etwas höher als im 3D-Modell. Der Lastfall "seitlicher Wind" erlaubt eine zweidimensionale Modellbildung. Die Verbunddecken werden in 2D durch Träger modelliert, deren Steifigkeiten so angenommen werden, dass die Deckeneigenfrequenzen in etwa wie im 3D-Modell bei $f = 4$ Hz liegen. Die auf die Träger konzentrierte Masse entspricht der verteilten Deckenmasse über einen Achsabstand.

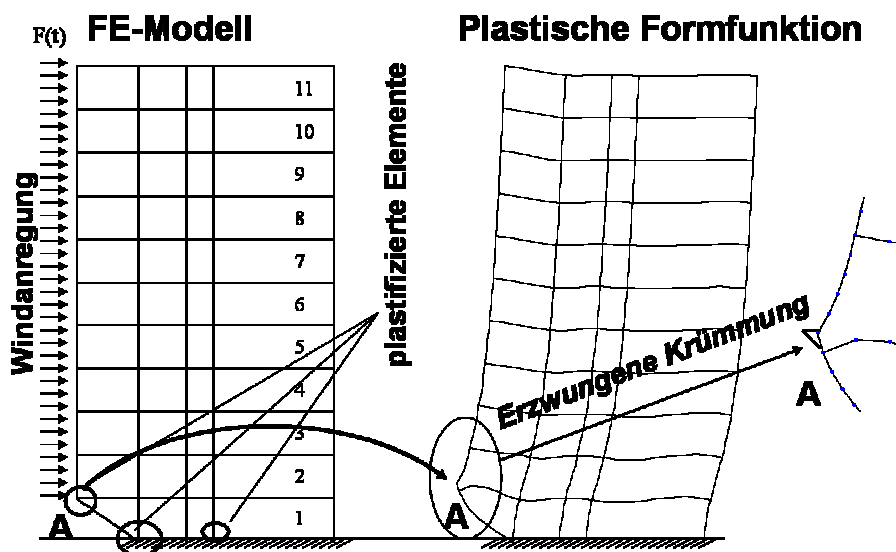


Abb. 5.2 FE-Modell, Windlast, plastifizierte Elemente und plastische Formfunktion

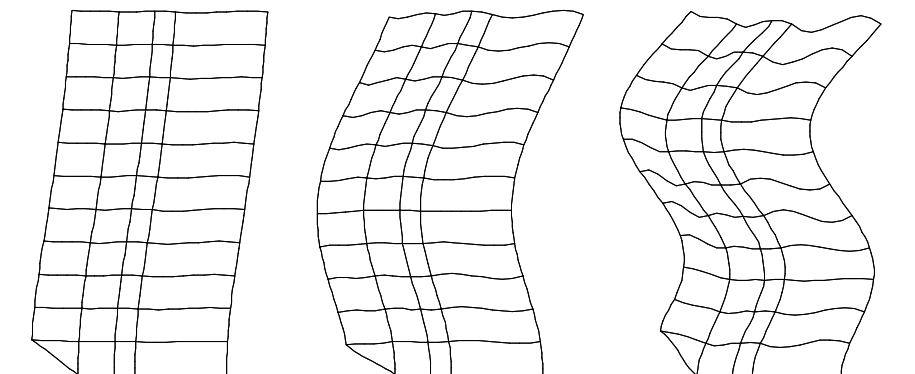


Abb. 5.3 FE-Moden 1 – 3 bei $f = 0.4$ Hz (links), $f = 1.6$ Hz (Mitte), $f = 3.2$ Hz (rechts)

Die Profile sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Ebene	Profil	A_x [m ²]	I_{yy} [m ⁴]	κ_y [1/m]
1 – 7 Profile außen	HE-B 500	2.4E-2	1.26E-4	6.6E-3
8 – 11 Profile außen	HE-B 400	2.0E-2	1.08E-4	8.2E-3
1 – 7 Profile innen	HE-B 600	2.7E-2	1.35E-4	5.4E-3
8 – 11 Profile innen	HE-B 500	2.4E-2	1.26E-4	6.6E-3
Deckenträger		4.7E-2	2.14E-5	

Tabelle 5.1: Querschnittswerte der verwendeten Profile und Krümmungen an der Fließgrenze

Die Unterkonstruktion mit den Fischbauchträgern wird gegenüber der Windlast als steif angenommen und wird im 2D-Modell nicht übernommen.

Für die Beschreibung der Hysterese bei Plastizierung der Stützen wird das Bouc-Wen Modell Gl. (2.45) mit den Parametern $A = 1$, $\gamma = \nu = 0,32$ und $N = 2$ verwendet.

5.3.2 Formulierung der Windlast

Die Windgeschwindigkeit $v(t)$ teilt sich auf in einen statischen $E\{v(t)\}$ und einen mittelwertfreien dynamischen Anteil $v_{dyn}(t)$ (z.B. nach Ruscheweyh [128]). Die Windkraft ergibt sich aus:

$$W(t) = c_w(f) \frac{\rho}{2} A \left[E\{v(t)\}^2 + 2E\{v(t)\}v_{dyn}(t) + v_{dyn}(t)^2 \right] \quad (5.1)$$

mit dem aerodynamischen Beiwert $c_w(f)$, der Dichte der Luft ρ und der angeströmten Fläche A .

Wird von einem Gauß-verteilten Prozess der Windgeschwindigkeit ausgegangen, so wird wegen der quadratischen Beziehung der Prozess der Windkraft nicht Gauß-verteilt. Für eine genauere Beschreibung schlagen Benfratello, Di Paola und Spanos [16] vor, die lineare Antwort eines Systems in der Form eines Volterra-Kerns zweiter Ordnung anzusetzen. Um die Entkoppelung im Volterra-Kern zu ermöglichen, wird die spektrale Dichte der Windanregung in ihre Eigenformen entwickelt (Windeigenvektoren). Dadurch lassen sich pro Eigenform entkorrelierte Gaußprozesse beschreiben. Die lineare Lösung wird dann für jeden Eigenvektor berechnet. Benfratello und Muscolino [17] wenden ein Filter 2. Ordnung auf die Windeigenvektoren an. Das

Ergebnis aus der Filterung wird in die quadratische Beziehung (5.1) eingesetzt. Die Verteilungsdichte der linearen nicht-Gaußschen Antwort wird über Momentengleichungen bestimmt.

Für kleine bis mittlere Turbulenzgrade kann der quadratische Anteil näherungsweise vernachlässigt werden [128]. Die Windkraft kann dann ebenfalls in einen statischen $E\{W(t)\}$ und einen mittelwertfreien dynamischen Anteil $W_{dyn}(t)$ zerlegt werden:

$$W(t) = E\{W(t)\} + W_{dyn}(t) \quad (5.2)$$

Im stationären Fall ist die nichtlineare dynamische Antwort unabhängig von der statischen Vorverformung [126]. Sind die plastizierten Elemente vorab bekannt, so kann die statische Verschiebungsfigur $E\{\mathbf{w}(t)\}$ getrennt aus der verminderten Steifigkeitsmatrix in Gl. (2.65) ermittelt werden:

$$E\{\mathbf{w}(t)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_j(1-\alpha) \end{bmatrix}^{-1} E\{\mathbf{W}(t)\}. \quad (5.3)$$

Im Falle, dass sich die Anzahl der plastizierten Elemente erst aus der Berechnung ergibt, müssen die statische und dynamische Last gemeinsam angesetzt werden. Da die Randverteilungen der Auslenkungen bzw. der Krümmungen nicht beschränkt sind, plastizieren theoretisch alle Elemente. Zur Berechnung der dynamischen Antwort können trotzdem die meisten Elemente linear-elastisch angesetzt werden, ohne die Genauigkeit wesentlich zu beeinflussen.

Im mittelwertbehafteten Fall jedoch ist der Unterschied in der statischen Verschiebungsfigur groß, je nachdem wie viele Steifigkeiten plastizierter Elemente in der Matrix \mathbf{K}_j von Gl. (5.3) enthalten sind. Je mehr Elemente einbezogen werden, desto langsamer ist die Konvergenz zum stationären Zustand, wenn die Anfangsbedingungen zu Null gesetzt werden.

Für das vorliegende Beispiel wird daher angenommen, dass für die Ermittlung der statischen Verschiebungsfigur die plastizierten Elemente angesetzt werden, die sich aus der *mittelwertfreien* Berechnung als plastizierend herausstellen. Dabei wird die Tatsache vernachlässigt, dass Elemente im *mittelwertbehafteten* Fall (z.B. während einer Simulation) plastizieren, die im stationären Zustand aufgrund der Verschiebung der Fließfunktion bei kinematischer Verfestigung rein linear-elastisch antworten.

Die Windlast wird als stationärer, eindimensionaler Prozess angenommen. Über die Gebäudehöhe wird der Prozess als voll korreliert angesetzt. Die stochastische Windgeschwindigkeit wird durch das Leistungsdichtespektrum nach Davenport S_D Gl. (5.4) beschrieben [100]. Um das Leistungsdichtespektrum des Winddrucks zu erhalten, wird die Windgeschwindigkeit mit der aeroelastischen Admittanzfunktion $X_{A'}$ (Gl. 5.5) überlagert [132]. Durch die abnehmende Kurve in der Admittanzfunktion bei höheren Frequenzen wird der abnehmenden Korrelation von kleineren Windballen beim Auftreffen auf die angeströmte Fläche Rechnung getragen. Lokale Lasteinflüsse auf die Fassade sind vernachlässigbar.

$$S_D(f) = \frac{4k_r v_{ref}^2}{f} \frac{L \frac{f}{v_{ref}}}{\left[1 + \left(L \frac{f}{v_{ref}}\right)^2\right]^{\frac{4}{3}}} \quad (5.4)$$

$$X_A(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2f\sqrt{A}}{v\left(\frac{2}{3}h\right)}\right)^{\frac{4}{3}}} \quad (5.5)$$

Die Parameter sind [39]: Charakteristische Länge $L = 1200$ m; Referenzwindgeschwindigkeit $v_{ref} = 48,6$ m/s; windbelastete (Gesamt-)Fläche: $A = 3217$ m²; Gelände- und Rauigkeitsparameter $k_r = 0,015$; Windgeschwindigkeit $v(2/3h) = 66$ m/s; (die für das Beispiel gewählte Windgeschwindigkeit liegt in etwa beim Doppelten der nach Norm [39] bzw. [41] anzusetzenden Geschwindigkeit), auf das 2-D Modell bezogene Breite $b = 15$ m.

Das in Abb. 5.4 dargestellte Leistungsdichtespektrum der über die Gebäudehöhe verteilten Anregung wird zu:

$$S_p(f) = S_D(f)X_A(f)^2 b^2. \quad (5.6)$$

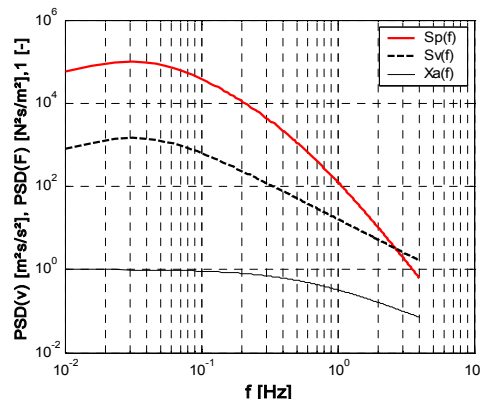


Fig. 5.4 Spektrale Dichtefunktion der verteilten Windlast S_p , der Windgeschwindigkeit S_v , und Spektrum der aeroelastischen Admittanz X_a .

5.3.3 Monte Carlo Simulation

Eine Reihe von Realisationen wird aus einem gefilterten weißen Rauschen nach der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Methode nach Shinozuka [144] als eindimensionaler stationärer Prozess generiert.

Die deterministische Antwort infolge vier periodischer Signalsequenzen mit $T = 128$ [s] und $\Delta t = 1/64$ [s] wird mit der Newmark Zeitintegration berechnet. Zur Schätzung der stochasti-

schen Größen wird lediglich die Antwort der vierten Periode herangezogen, in der das Signal der Antwort eine ausreichende Stationarität erlangt.

Gegenüber der Referenzberechnung am vollständigen Gleichungssystem werden für die Lösung im reduzierten System 17 elastische Moden ($f < 9,9$ Hz) herangezogen. Die Moden werden vorab nach Signifikanz und nach dem Frequenzbereich in Bezug auf die Anregung ausgewählt.

Während der Simulation tritt in drei Zonen an sieben Elementen Fließen ein (vgl. Abb. 5.2). Die modale Basis wird sukzessive um 14 plastische Formfunktionen erweitert. Das Gleichungssystem vergrößert sich entsprechend um 14 zusätzliche generalisierte Freiheitsgrade und 14 nichtlineare Zusatzgleichungen. Das zu lösende System reduziert sich damit von ca. 1450 Freiheitsgraden auf 45 Freiheitsgrade.

5.3.4 Statistische Linearisierung

In der Statistischen Linearisierung ist es nicht möglich, den Status der Fließfunktion in den einzelnen Elementen deterministisch abzufragen. Um nicht von vornherein alle Elemente als plastizierend einzubeziehen, muss daher ein iteratives Schema installiert werden.

Zunächst wird die Kovarianzmatrix der linear-elastischen Lösung aus den Auto- und Kreuzleistungsspektren im Frequenzbereich ermittelt. Sukzessive werden die Elemente mit den höchsten auftretenden Krümmungen identifiziert. Die plastischen Formfunktionen werden berechnet, die modale Basis erweitert und die entsprechenden generalisierten Matrizen und Vektoren gebildet. Das reduzierte Gleichungssystem vergrößert sich wiederum um die jeweiligen generalisierten Freiheitsgrade und um die linearisierten Zusatzgleichungen zur Bestimmung von Y_H .

Es folgt die iterative Bestimmung der Linearisierungskoeffizienten. Nach Erreichen der Konvergenz wird wiederum das nächste noch als elastisch angenommene Element mit der höchsten Krümmung gesucht. Dieses wird als plastizierend gekennzeichnet und das bisherige Schema wiederholt. Die Berechnung wird solange fortgeführt, bis sich keine Veränderung in der Antwort mehr ergibt bzw. bis die zuletzt ermittelten Linearisierungskoeffizienten näherungsweise gegen die Werte des linear-elastischen Falls konvergieren.

Zur Beschleunigung dieses Schemas schlagen Casciati, Faravelli und Venini [31] bei der Untersuchung von Scherbalkensystemen mit Fließgelenktheorie vor, eine Schranke der Deformationen zu definieren, bei deren Überschreitung das jeweilige Element als plastizierend gekennzeichnet wird. Die Schranke kann in weiteren Schritten je nach Bedarf modifiziert werden.

Das Iterationsschema konvergiert gegen die Lösung, als wenn von vornherein alle Balkenelemente als nichtlinear betrachtet worden wären. Für Mehrfreiheitsgradsysteme wurde nachgewiesen [126], dass ein äquivalentes System existiert und dass dieses System eindeutig ist. Nach Erreichen der Konvergenz können willkürlich weitere Elemente oder auch alle restlichen Elemente als plastizierend angesetzt werden, ohne dass sich die gesamte Antwort ändert. Aus diesem Grund ist auch das sukzessive ermittelte äquivalente System eindeutig.

5.3.5 Darstellung der Ergebnisse

Das Beispiel wird gewählt, um die Berechnung im reduzierten Gleichungssystem mit der Berechnung auf der Grundlage des vollständigen Gleichungssystems zu vergleichen. Die Antwort im Zeitbereich stimmt mit hoher Genauigkeit überein. Dies betrifft sowohl den Zeitverlauf (MCS) der Verschiebungen als auch der Krümmungen.

Exemplarisch sind in Abb. 5.5a die Krümmungsverläufe und in Abb. 5.5b die Verläufe des bezogenen hysteretischen Rückstellmoments an Knoten **A** gegenübergestellt. Aus dem Zeitfenster von 128 s ist ein Abschnitt von $t = 48$ [s] bis $t = 98$ [s] vergrößert. Es ergibt sich eine nahezu exakte Übereinstimmung zwischen der Lösung am gesamten Gleichungssystem und am reduzierten System. Geringfügige Unterschiede ergeben sich lediglich in der zeitlichen Ableitung der Krümmung (Abb. 5.5c).

Die stochastische nichtlineare Antwort in Knoten **A** ist in den Abbildungen 5.7 spektral aufbereitet. Für die Schätzung der spektralen Dichtefunktionen wurden jeweils 100 Spektren, die durch FFT aus den Zeitverläufen der MCS erzeugt wurden, gemittelt.

In Abb. 5.7a werden die Leistungsdichtespektren der Krümmung von MCS, ESL und linear-elastischer Antwort gegenübergestellt. Durch das äquivalente lineare System werden die Zunahme des Rauschens und die Entstehung weiterer untergeordneter Resonanzspitzen nicht abgebildet. Gut erfasst wird hingegen die Zunahme der Amplituden im tieferen Frequenzbereich unterhalb der ersten Resonanz. Mit ESL wird ebenfalls die Bedämpfung der ersten Resonanzspitze durch die Ausbildung der Hysterese gut angenähert. Der Unterschied ist im linearen Maßstab in Abbildung 5.7b besser zu erkennen.

Für eine Schätzung der Varianzen aus MCS sind zum Erreichen einer hohen Konfidenz weniger als ca. 10 Simulationsberechnungen erforderlich, wofür auf einem PC (500 MB ROM, 2 GHz CPU) ca. 20 Minuten benötigt werden. Abbildung 5.6 zeigt die Konvergenz der geschätzten Standardabweichungen der Krümmung und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes mit zunehmender Anzahl an Realisationen.

Die Berechnung einer Realisation mit dem Gesamtgleichungssystem (1450 DOF) im Zeitbereich erfordert hingegen mehr als sechs Stunden. Auch in der Statistischen Linearisierung verkürzen sich die Rechenzeiten in reduzierter Basis auf einen Bruchteil.

Abn. 5.5: Zeitverläufe der Krümmung κ (a) und des bez. hyst. Rückstellmomentes $Y_H \kappa_Y$ (b) und der Krümmungsgeschwindigkeit (c) in Knoten **A**.

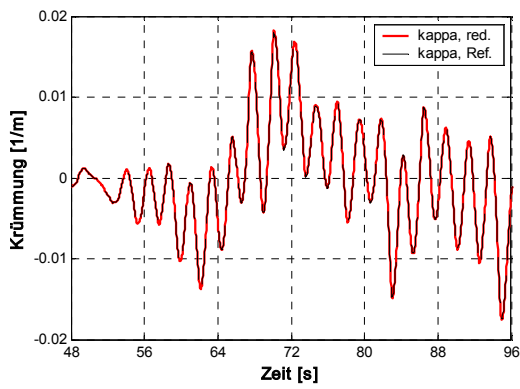


Abb. 5.5a Krümmung κ
vollst. GLS – red. modale Basis (17 + 14 Moden)

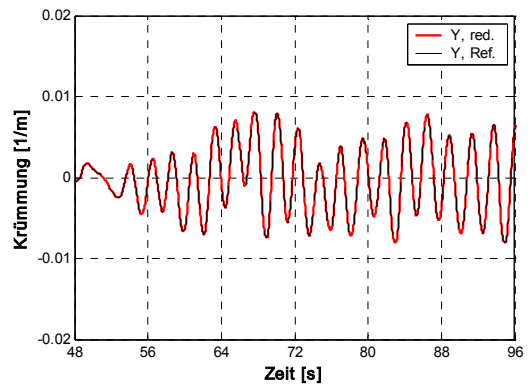


Abb. 5.5b bez. hyst. Rückstellmoment $Y_H \kappa_Y$
vollst. GLS – red. modale Basis (17 + 14 Moden)

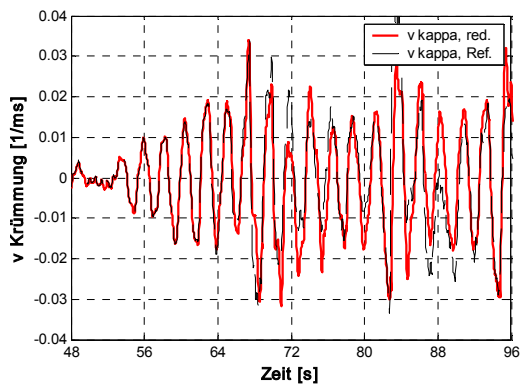


Abb. 5.5c Geschwindigkeit der Krümmung κ
vollst. GLS – red. modale Basis (17 + 14 Moden)

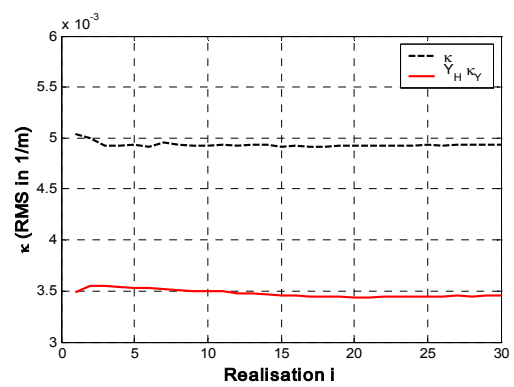


Abb. 5.6 Konvergenz der geschätzten Std.-abw. der Krümmung κ und des bez. hyst. Rückstellmom. $Y_H \kappa_Y$ mit zunehmender Anzahl an Realisierungen.

Abn. 5.7 Leistungsdichtespektren (PSD) der elasto-plastischen Antwort an Knoten **A**.

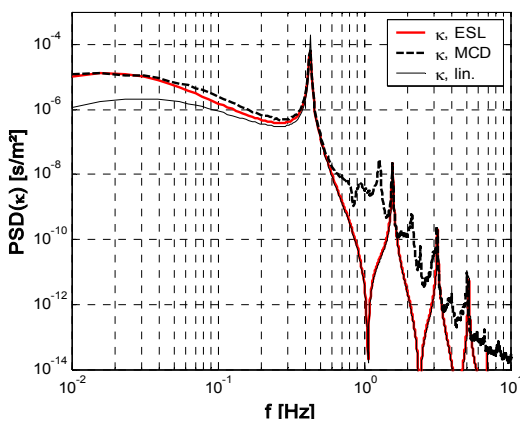


Abb. 5.7a Krümmung κ , MCS – ESL nichtlin. - linear

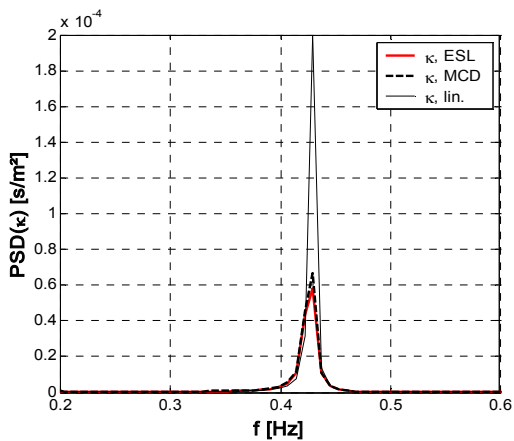


Abb. 5.7b Krümmung κ , MCS – ESL nichtlin. - linear

Tabelle 5.2 stellt die aus der Simulation (MCS) geschätzten zweiten Momente den Ergebnissen der Statistischen Linearisierung gegenüber. Die normierten Histogramme der Krümmung und des hysteretischen Rückstellmomentes entsprechen näherungsweise der Form einer Normalverteilung (Abb. 5.8). Aus diesem Grund bewegen sich die Abweichungen der zweiten Momente in einem akzeptablen Rahmen von maximal 7 – 8 %.

		Plastiziertes Element j Knoten i													
j,i	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	7.1	7.2	
		Standardabweichung von κ [1/m ‰]													
MCS	5.2	3.7	3.6	5.2	4.1	2.9	3.7	2.8	2.7	3.6	2.4	2.0	2.3	1.9	
ESL	4.9	3.6	3.5	4.9	3.8	2.8	3.6	2.8	2.6	3.5	2.1	1.9	2.1	1.8	
		Standardabweichung von $Y_H \kappa_Y$ [1/m ‰]													
MCS	3.8	3.2	3.1	3.7	3.2	2.6	3.2	2.6	2.5	3.1	1.9	1.8	1.9	1.9	
ESL	3.6	3.1	3.0	3.6	3.1	2.5	3.1	2.5	2.4	3.0	1.9	1.7	1.9	1.7	

Tabelle 5.2: Standardabweichung der Krümmung κ und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes $Y_H \kappa_Y$ an den Knoten $i, i+1$ des plastizierten Elements j .

Tabelle 5.3 enthält eine Gegenüberstellung der aus der Monte Carlo Simulation geschätzten mittleren Tangenten-Steifigkeiten und -Dämpfungen mit den äquivalenten Steifigkeiten und Dämpfungen der statistischen Linearisierung. Die äquivalenten Dämpfungswerte stimmen dabei besser überein, die Steifigkeiten weichen etwas stärker ab. Je geringer der Plastizierungsgrad ist, desto mehr nähern sich die Werte den im linearen Fall eingesetzten Initialwerten $k_{eq} = 0$ und $c_{eq} = 1$ an.

		Plastiziertes Element j Knoten i													
j,i	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	7.1	7.2	
		c_{eq}													
ESL	0.877	0.917	0.921	0.877	0.915	0.948	0.917	0.946	0.952	0.921	0.955	0.963	0.956	0.965	
MCS	0.843	0.904	0.911	0.843	0.886	0.940	0.904	0.958	0.979	0.911	0.938	0.948	0.938	0.950	
		k_{eq}													
ESL	0.478	0.299	0.283	0.476	0.304	0.176	0.299	0.183	0.163	0.283	0.143	0.118	0.141	0.111	
MCS	0.334	0.209	0.192	0.331	0.236	0.127	0.208	0.091	0.045	0.192	0.124	0.105	0.123	0.100	

Tabelle 5.3: Äquivalente Steifigkeit k_{eq} und Dämpferkonstante c_{eq} an Knoten i und $i+1$ des plastizierten Elements j .

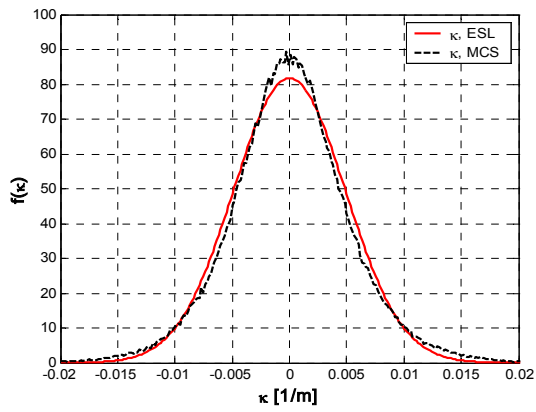


Abb. 5.8a Krümmung κ , an Knoten **A**
 norm. Histogramm aus MCS -
 Gaußverteilung aus Stat. Linearisierung

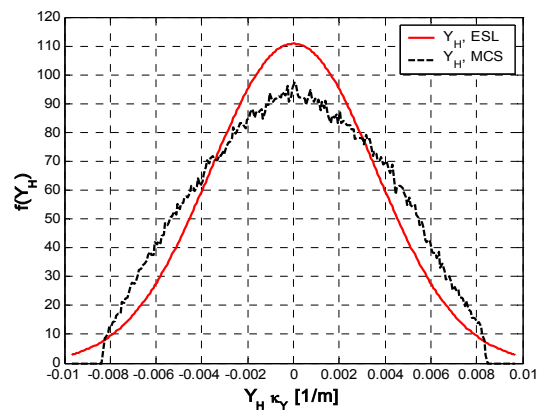


Abb. 5.8b bez. hyst. Moment $Y_H \cdot \kappa_Y$ an Knoten **A**
 norm. Histogramm aus MCS -
 Gaußverteilung aus Stat. Linearisierung

5.4 Erdbebenbelastung am 3D-Modell

5.4.1 Modellbildung in 3D, Diskretisierung

Das in den Abbildungen 5.1 dargestellte 3-dimensionale FE-Modell besteht aus 17044 Elementen. Davon sind 12196 Schalenelemente in den Deckenebenen und in der Plattform enthalten. Die Fischbauchträger und die Stützen sind mit 4848 Balkenelementen diskretisiert. Pro Stockwerkshöhe beinhalten die Stützen 6 Elemente. Insgesamt liegt ein Gleichungssystem mit 92964 Freiheitsgraden vor.

Die Parameter der Stützenquerschnitte enthält Tabelle 5.4. Neben Standardprofilen werden auch Schweißprofile verwendet.

	h [mm]	b [mm]	t_f [mm]	t_s [mm]	A [m ²]	I_y [m ⁴]	I_z [m ⁴]
HEB 400	400	300	24	13,5	0,02	5,57 E-4	1,05 E-4
Profil 500	500	400	28	20	0,031	13,9 E-4	2,90 E-4
Profil 600	600	600	30	25	0,05	32,4 E-4	10,5 E-4

Tabelle 5.4: Querschnittswerte und Krümmung an der Fließgrenze der verwendeten Profile.

Theorie 2. Ordnung

Werden starke Verformungen ausgeschlossen, lässt sich das linearisierte Gleichgewicht am schwach verformten System ableiten. Die Steifigkeitsmatrix eines Euler-Bernoulli-Balkenelementes erhält folgende Einträge, die von der elementweise konstanten Normalkraft N abhängen:

$$\mathbf{K}_{\Pi y} = \frac{N}{60l} \begin{bmatrix} 72 & -6l & -72 & -6l \\ -6l & 8l^2 & 6l & -8l^2 \\ -72 & 6l & 72 & 2l \\ -6l & -8l^2 & 2l & 8l^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\Pi z} = \frac{N}{60l} \begin{bmatrix} 72 & 6l & -72 & 6l \\ 6l & 8l^2 & -6l & 8l^2 \\ -72 & -6l & -72 & -2l \\ 6l & 8l^2 & -2l & 8l^2 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

\mathbf{K}_{Π} wird jeweils für beide Biegeachsen zur Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} hinzuaddiert. Wird ein Element durch Druck belastet, wird N negativ und das System wird „weicher“. Es wird angenommen, dass die wesentlichen Normalkräfte in den Stützen durch die statischen Eigenlasten erzeugt werden. Eine Anpassung der Matrix während eines Rechenlaufes erfolgt daher nicht. Vorab muss in einer statischen Berechnung die Normalkraft in den Stützelementen bestimmt werden. Die Abb. 5.9 zeigt die statische Verschiebungsfigur unter Eigenlast.

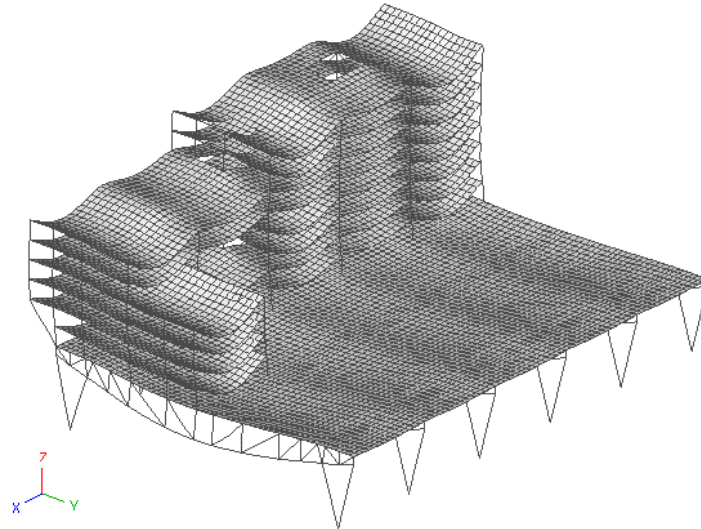


Abb. 5.9: Verschiebungsfigur unter statischer Eigenlast.

5.4.2 Formulierung der Erdbebenlast

DIN 4149 [43] und Eurocode 8 [51] enthalten Vorgaben für den Nachweis gegenüber Erdbebenlasten nach dem Antwortspektrenverfahren. Plastisches Verformungs- und damit Energieabsorptionsvermögen wird näherungsweise berücksichtigt, indem ein von der Duktilität des Tragwerks abhängiger Verhaltensfaktor im Bemessungsspektrum eingeführt wird.

Soll die Plastizierung einzelner Konstruktionsteile explizit erfasst werden, kommt die Zeitverlaufsmethode zur Anwendung. Für Zuverlässigkeitsaufgaben ist eine ausreichende Anzahl von Beschleunigungsschrieben zu generieren. Die verschiedenen Schriebe sollen die in Bezug auf die Magnitude, Herdentfernung und Abstrahlcharakteristik verschiedenen, dominanten Erdbeben wiedergeben, die an einem bestimmten Standort zu erwarten sind [100].

Die Beschleunigungszeitverläufe werden aus der Realisation eines gefilterten weißen Rauschens erzeugt. In der Filterfunktion werden näherungsweise die Eigenschaften eines geschichteten bzw. eines mit der Tiefe veränderlichen Halbraums wiedergegeben. Das einfachste Modell nach Kanai-Tajimi [82],[158] beinhaltet die Filterkurve eines fußpunkterregten Ein-Massen-Schwingers, das die oberste Bodenschicht als einfachen Schwinger auf starrem Grundgebirge modelliert (Abb. 5.10a):

$$\ddot{u}_1(t) + 2\beta_g \Omega_g \dot{u}_1(t) + \Omega_g^2 u_1(t) = -\ddot{u}_0(t). \quad (5.8)$$

Der Einmassenschwinger wird durch die Parameter β_g und Ω_g beschrieben.

Das weiße Rauschen der Beschleunigung $\ddot{u}_0(t)$ dient dabei als Eingangssignal, als Ausgangssignal erhält man gefiltert den Beschleunigungszeitverlauf $\ddot{u}_1(t)$, der nun wiederum als Fußpunkterregung für ein dynamisches System angesetzt werden kann. Wird der Einfluss der Bauwerks-Boden Wechselwirkung vernachlässigt, kann die Filtergleichung von den Systemgleichungen des Trag-

werks entkoppelt werden und die gefilterten Realisationen im Zeit- oder Frequenzbereich getrennt vorab berechnet werden.

Die Intensität der Erregungsenergie ist von der Dauer eines Bebens abhängig. Das gefilterte Beschleunigungssignal wird mit einer Intensitätsfunktion im Zeitbereich moduliert. Für praktische Anwendungen wird eine konstante äquivalente Intensität für etwa 1/3 der Dauer des Erdbebens T_d mit einer relativ kurzen Aufbau- und längeren Abklingphase verwendet. Die drei Abschnitte können z.B. durch die folgenden Funktionen beschrieben werden (Abb. 5.10b):

$$t < 0,15T_d : I(t) = \left(\frac{t}{0,15T_d}\right)^2 ; \quad 0,15T_d < t < 0,45T_d : I(t) = 1 ; \quad 0,45T_d < t : I(t) = e^{-c(t-0,45T_d)}. \quad (5.9)$$

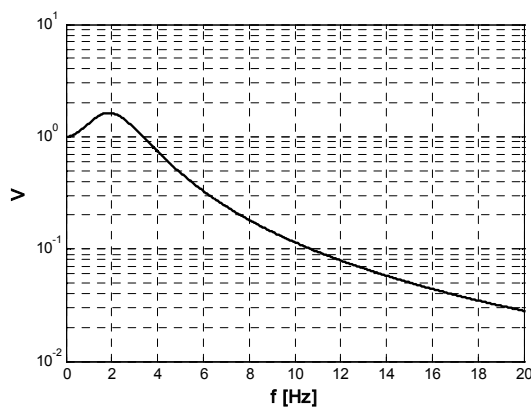
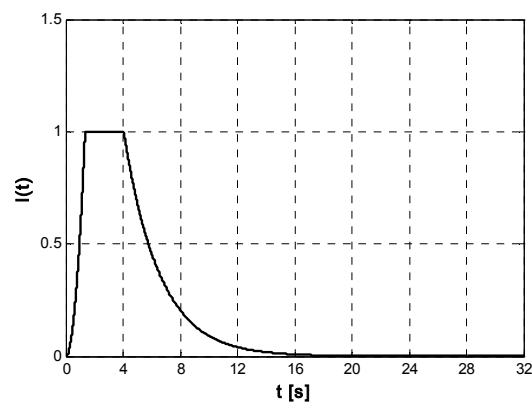


Abb. 5.10a Kanai-Tajimi Filterspektrum

Abb. 5.10b Intensitätskurve $I(t)$

Für mitteleuropäische Erdbeben wurden die Parameter des Kanai-Tajimi-Spektrums und die Erdbebendauer für verschiedene Untergrundklassen angepasst [100]. Im Beispiel wird die Untergrundklasse "M" angesetzt. Die Parameter sind dann nach [100]:

$$\beta_g = 0,7, \quad \Omega_g = 2,4 \text{ rad/s}, \quad T_d = 9 \text{ s}; \quad c = 0,4.$$

Erdbebenereignisse werden häufig als quasi-stationäre Ereignisse durch die Überlagerung der stationären Realisationen mit einer zeitabhängigen Intensitätsfunktion simuliert. Aus der Analyse von aufgezeichneten Erdbebenschrieben geht jedoch hervor, dass sich auch der spektrale Inhalt der Erdbebenenergie über die Zeit ändert. Für diesen Fall wird das Modell von Shinozuka [145] erweitert, indem in Gl. (4.2) $C(f)$ durch eine Funktion $C(f,t)$ ersetzt wird. Darin kann die zeitliche Änderung der spektralen Energieinhalte erfasst werden.

Spanos, Vargas und Loli [156] synthetisieren Prozesse aus mehreren Einzelprozessen mit jeweils unterschiedlichem Frequenzgehalt und unterschiedlicher Zeitmodulation. Dies entspricht in etwa der Vorgehensweise von Aghababaii, Mobarakeh, Rofooei, und Ahmadi [2], die zeitabhängige Filterkoeffizienten in einem ARMA-Modell formulieren. Angesichts der relativ kurzen Dauer eines Erdbebens muss in einer Zeitbereichssimulation beachtet werden, dass die Filter auch eingeschwungen sind.

Lässt man die Fußpunktbeschleunigung auf die Masse des Tragsystems wirken, so kann die folgende (lineare) Gleichgewichtsgleichung formuliert werden:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{T}_x a_x + \mathbf{T}_y a_y + \mathbf{T}_z a_z) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Die inneren Rückstellkräfte sind proportional zum Vektor der Relativauslenkungen \mathbf{q} , der Differenz zwischen Absolutverschiebung und Fußpunktanregung. Damit lässt sich die mit der Beschleunigung \mathbf{a} angeregte Massenmatrix als Lastprozess formulieren:

$$\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{T}_a \mathbf{a}(t). \quad (5.11)$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_a ordnet die Beschleunigungen den Massenanteilen in den entsprechenden Achsrichtungen zu.

Die statischen Verschiebungsfiguren aufgrund dieser Last (mit $a = 1$) sind in den Abbn. 5.11a und 5.11b abgebildet.

Oft wird eine weitere Filtergleichung als Hochpass hinzugefügt, um unrealistische tieffrequente Anteile, die im Kanai-Tajimi Spektrum noch vorhanden sind, zu reduzieren.

Im Beispiel wird die spektrale Dichte des weißen Rauschens mit $S_a = 0,025 \text{ m}^2/\text{s}^3$ angesetzt. Die Standardabweichung des ungefilterten Prozesses beträgt (bei einer Begrenzung des Frequenzbereiches bei $f_{max} = 64 \text{ Hz}$): $\sigma_a = 6,4 \text{ m/s}^2$, nach Filterung: $\sigma_a = 1,6 \text{ m/s}^2$. Das Signal wird in Querrichtung (global y) verdoppelt, um in den Rahmenstützen eine schiefe Biegung mit etwa gleichen Krümmungsanteilen in den beiden Achsrichtungen zu erzeugen. Exemplarisch sind Realisationen der Beschleunigungen in Abb. 5.11c und 5.11d dargestellt.

Abbn. 5.11: Belastung durch Beschleunigung am Fußpunkt

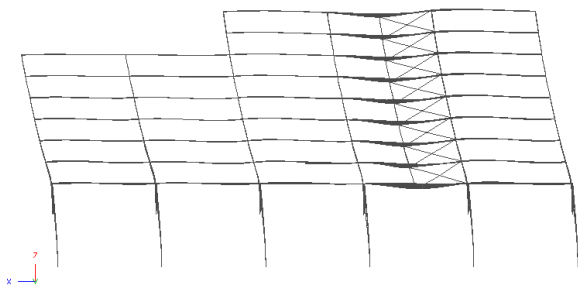


Abb. 5.11a Statische Verformung aus $\mathbf{M}\mathbf{T}_x a_x$

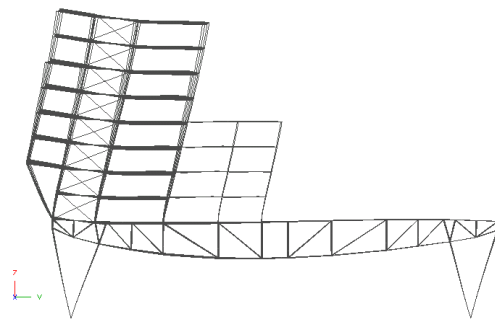
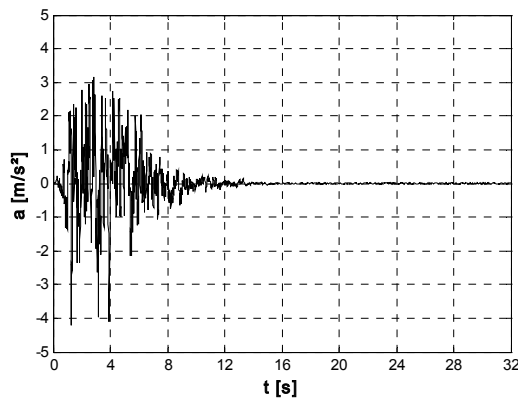
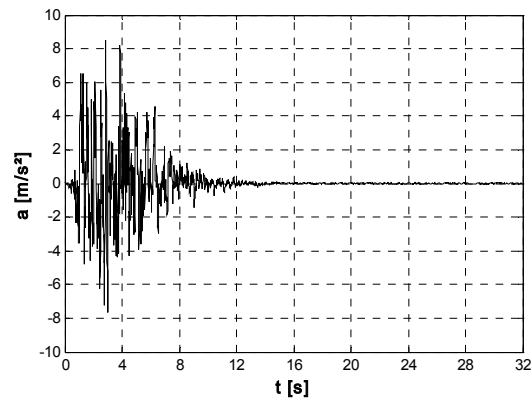


Abb. 5.11b Statische Verformung aus $\mathbf{M}\mathbf{T}_y a_y$

Abb. 5.11c Beschleunigung a_x Abb. 5.11d Beschleunigung a_y

Ebenso wie bei Windeinwirkung kann die Verteilung der Erdbebenbeschleunigung an der Oberfläche wieder als kontinuierlich verteiltes mehrdimensionales Zufallsfeld beschrieben werden. Verschiedene semiempirische Modelle aufgrund von Beobachtungsdaten stehen je nach Modellmaßstab zur Verfügung. Für Distanzen unter 140 [m] wird z.B. von Klöcker [87] eine Kohärenzfunktion zur Berechnung von Brücken nach [1] angesetzt:

$$\gamma(\omega, d_p) = \frac{\gamma_c(\omega, d_p)}{1 + \left(\frac{\omega[s]}{117,5}\right)^4} \left[e^{i\omega \cdot 5,89 \cdot 10^{-5} [s/m] d_p} + \left(\frac{\omega[s]}{117,5}\right)^4 e^{i\eta} \right].$$

$$\gamma_c(\omega, d_p) = \tanh \left[\left((2,54 - 0,012 \cdot d_p / [m]) e^{\frac{(-0,115 - 8,410^4 \cdot d_p / [m]) \omega [s]}{2\pi}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega[s]}{2\pi}\right)^{-0,878} \right) + 0,35 \right] \quad (5.12)$$

Die Variable d_p bezeichnet den Abstand zwischen zwei Orten projiziert auf die Senkrechte zur Wellenfront, η ist eine gleichverteilte Zufallszahl, durch die eine mit der Frequenz zunehmende Zufälligkeit der Phasenlage berücksichtigt wird.

Die Korrelation im Bereich der Abmessungen bezogen auf die maßgebenden Frequenzinhalte beträgt näherungsweise 100%. Daher genügt die Simulation von eindimensionalen Prozessen für jede Richtung der Anregung.

5.4.3 Biaxiales Hysteresemodell

Das Hysteresemodell bei schiefer Biegung kann durch das biaxiale Park-Wen Modell [106] in modifizierter Form (Gl. 2.34) angenähert werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_{Hy} \\ \dot{Y}_{Hz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_{Yy}} \left[A + (-\gamma_y \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}_y) \operatorname{sgn}(Y_{Hy}) - \nu_y) Y_{Hy}^{N_y} \right] & \frac{1}{\kappa_{Yz}} \left(-\gamma_{yz} \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}_z) \operatorname{sgn}(Y_{Hz}) - \nu_{yz} \right) Y_{Hy}^{N_{zy}} Y_{Hz}^{N_{yz}} \\ \frac{1}{\kappa_{Yy}} \left(-\gamma_{zy} \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}_y) \operatorname{sgn}(Y_{Hy}) - \nu_{zy} \right) Y_{Hy}^{N_{zy}} Y_{Hz}^{N_{yz}} & \frac{1}{\kappa_{Yz}} \left[A + (-\gamma_z \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}_z) \operatorname{sgn}(Y_{Hz}) - \nu_z) Y_{Hz}^{N_z} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\kappa}_y \\ \dot{\kappa}_z \end{bmatrix} \quad \dots (5.13)$$

Mit den Parametern

$$A = 1, \gamma_y = \nu_y = 0,32, \gamma_z = \nu_z = 0,24, \gamma_{zy} = \nu_{zy} = 0,8 I_z / I_y, \gamma_{yz} = \nu_{yz} = 2 I_y / I_z, \\ N_y = 4, N_z = 2, N_{zy} = 5, N_{yy} = N_{yz} = N_{zz} = 1$$

wird z.B. die Ausbildung einer Hysterese eines Stahlprofils HEB-500 bei schiefer Biegung beschrieben. Die Höhe der Exponenten charakterisiert den Übergang vom elastischen Zustand zum voll-plastischen Grenzmoment. Bei Biegung um die Hauptachse y plastizieren die Flansche an der Fließgrenze bei nur geringer Zunahme der Krümmung. Daher wird ein hoher Exponent gewählt ($N_y = 4$). Bei Biegung um die schwächere Achse z plastizieren die Flansche kontinuierlich mit Zunahme der Krümmung, daher wird ein kleinerer Exponent ($N_z = 2$) gewählt. Die Werte für die Parameter $\gamma_y, \gamma_z, \nu_y$ und ν_z bestimmen sich über Gl. (2.33) aus den Duktilitätsquotienten

$$M_{Py} / M_{Yy} = 1,122 \quad \text{und} \quad M_{Pz} / M_{Yz} = 1,5.$$

mit $M_{Py} = 1610$ kNm, $M_{Yy} = 1440$ kNm, $M_{Pz} = 435$ kNm, $M_{Yz} = 290$ kNm.

Interessanterweise kann festgestellt werden, dass die Plastizitätsgrenze des Bouc-Wen Modells Gl. (2.33) für die Parameter

$$A=1, \gamma_y = \nu_y = 0,32, N = 4$$

den Wert $Y_{HP} = 1,122$ ergibt. Mit den Parametern

$$A=1, \gamma_z = \nu_z = 0,32, N = 4$$

ergibt sich entsprechend $Y_{HP} = 1,5$. Daraus lässt sich schließen, dass die Parameter des Bouc-Wen Modells aus den Duktilitätsquotienten abgeleitet werden können.

Die Parameter der gemischten Terme $\gamma_{zy}, \nu_{zy}, \gamma_{yz}$ und ν_{yz} wurden durch manuelle Anpassung der Hysteresen ermittelt, möglicherweise kann auch hierfür eine Formel gefunden werden.

Der hohe Exponent $N_{zy} = 5$ wichtet den Einfluss der „stärkeren“ auf die „schwächere“ Querschnittsachse. Plastizieren die Flansche bei Biegung um die „stärkere“ Achse y, verschwindet auch die Kapazität, das Rückstellmoment bei Biegung um die „schwächere“ Achse nach Entlastung wieder aufzubauen. Umgekehrt ist der Einfluss weniger ausgeprägt ($N_{yz} = 1$).

Überprüfung des biaxialen Hysterese Modells

Um das Modell zu testen, wird zunächst ein Querschnitt isoliert betrachtet und eine Krümmung κ_y und κ_z um beide Hauptachsen phasengleich aufgebracht (Abb. 5.13). Die Krümmungen werden als sinusförmige Zeitverläufe in Gl. (5.13) eingesetzt. Die hysteretischen Rückstellmomente werden unmittelbar über eine explizite Zeitintegration berechnet. Als Referenz dient ein Fasermodell mit bilinearer Hysterese nach Suzuki-Minai. Der HEB-500 Querschnitt ist mit 36 Fasern diskretisiert.

Variiert wird die Belastungsrichtung, die durch das Verhältnis der Krümmungsamplituden definiert ist (vgl. linke Spalte Abb. 5.13). In jeder Belastungsrichtung wird die Fließkrümmung κ_V bestimmt und die Resultierende der Amplituden der Krümmung radial mit $\kappa_r = \alpha \kappa_V$ angesetzt. Die Krümmung an der Fließgrenze κ_V wird um den Faktor $\alpha = 1,5$ (linke Hysteresen in Abb. 5.13) und den Faktor $\alpha = 3$ (rechte Hysteresen in Abb. 5.13) überschritten. Gegenübergestellt werden die Hysteresen mit den bezogenen Rückstellmomenten aus beiden Modellen. Für die beiden Laststufen ist pro Belastungsrichtung die Hysterese der Rückstellmomente um jeweils eine Hauptachse dargestellt: jeweils links die Hysterese um die Achse y, jeweils rechts die Hysterese um die Achse z. Die oberen Diagramme in Abb. 5.13 beinhalten die Hysteresen für den ebenen Fall, wenn jeweils die Krümmung um die andere Hauptachse Null ist.

Die Hysteresen können angesichts der komplexen Fließregel des zusammengesetzten Profilquerschnitts überraschend gut nachgebildet werden. Für eine Detail-Querschnittsuntersuchung ist das Modell zwar weniger geeignet, um jedoch die gemittelte Antwort eines größeren Tragwerks zu bestimmen, erscheint es durchaus tauglich.

Da unter gleichphasiger Sinuslast immer nur in einer Richtung be- und entlastet wird, soll ein weiterer Test die Tauglichkeit unter stochastischer Last mit steigendem Lastniveau unter Beweis stellen. Dafür wird eine eingespannte Stütze HEB 500, $l = 3,80$ m aus dem Gesamtmodell herausgeschnitten (Abb. 5.12). Die Deckenimpedanz wird überschlägig durch eine einfache Masse-Feder-Impedanz in der horizontalen Abstimmfrequenz des Gebäudes ersetzt. Die Masse wird von zwei Seiten stochastisch unkorreliert angeregt.

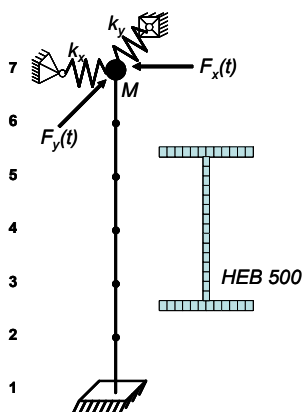


Abb. 5.12: Teilmodell zur Untersuchung des biaxialen Hysterese Modells, Diskretisierung des Querschnitts im Fasermodell.

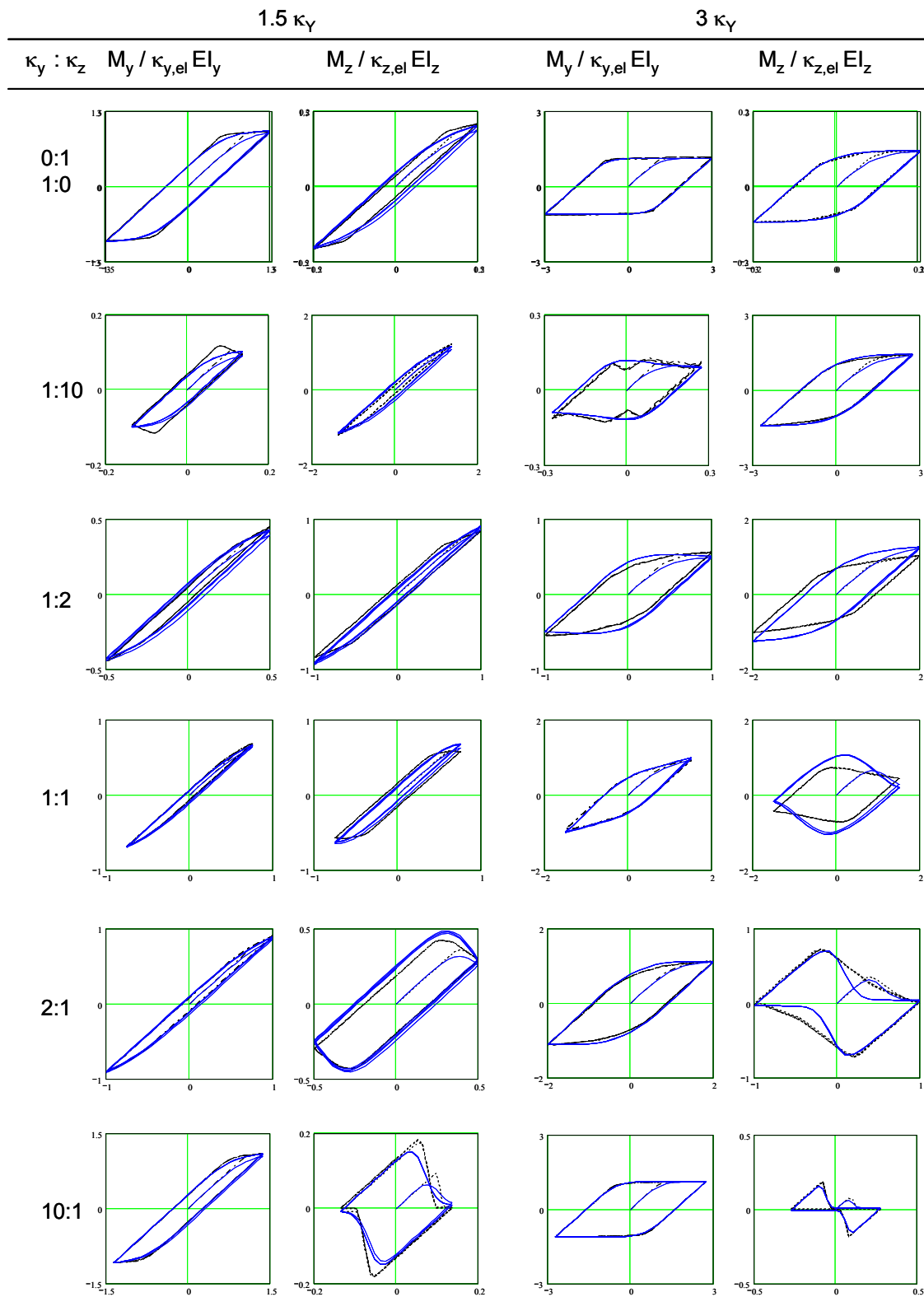


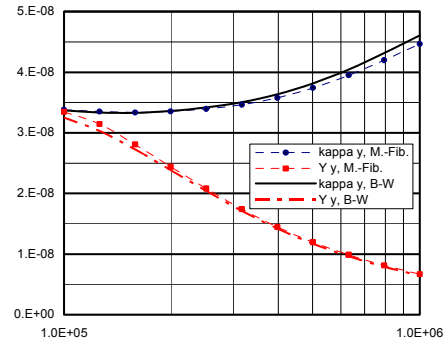
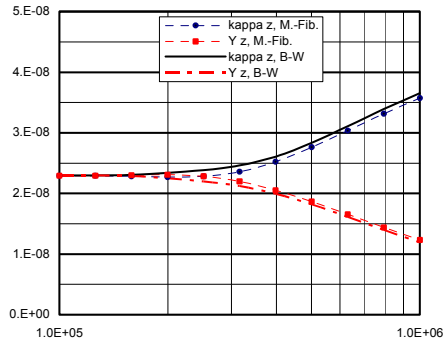
Abb. 5.13: Hysteresen der bezogenen Rückstellmomente Y_{Hy} und Y_{Hz} unter biaxialer sinusförmiger Krümmung κ_y und κ_z , biaxiales Park-Bouc-Wen Modell (—) – Fasernmodell (---)

$$S_{F_x} : S_{F_y}$$

$$\kappa_z, Y_{Hz}$$

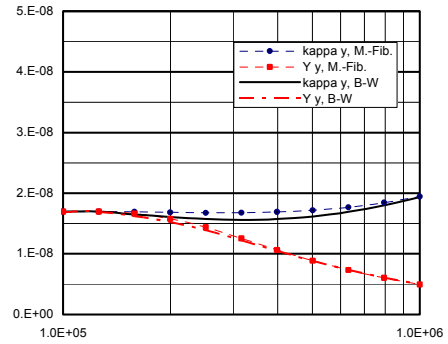
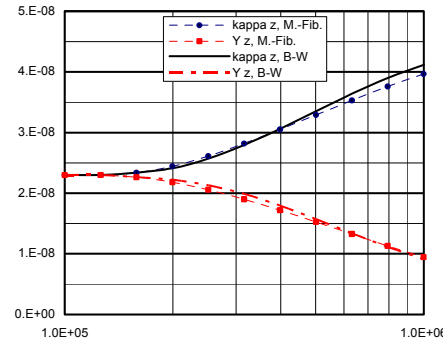
$$\kappa_y, Y_{Hy}$$

1 : 0
0 : 1

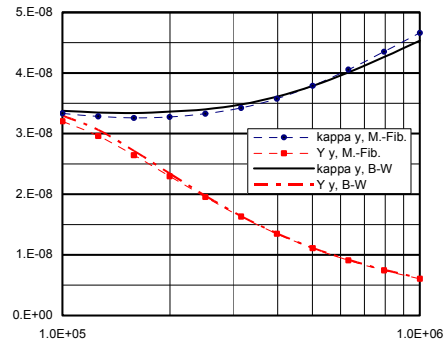
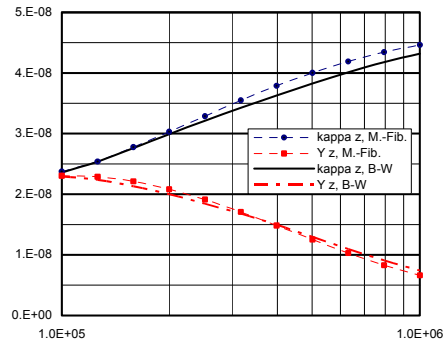


1 : 0.5

$$\sigma_{\kappa_y} / S_F^{0,5} \quad \sigma_{\kappa_z} / S_F^{0,5} \quad [1/mNs^{0,5}]$$



1 : 1



0.5 : 1

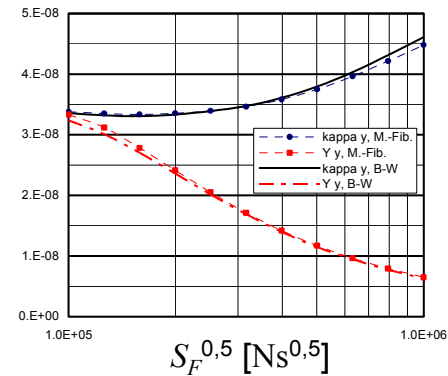
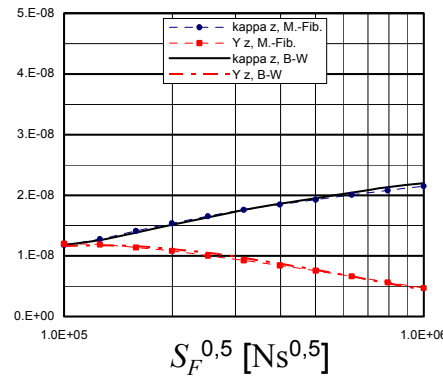


Abb. 5.14: Standardabweichung der Krümmungen κ_y und κ_z und des bezogenen hyst. Rückstellmomentes Y_{Hy} bezogen auf die spektrale Dichte S_F , biaxiales Park-Bouc-Wen Modell (B-W) – Fasernmodell (M-Fib)

Zugelassen wird das Plastizieren aller Elemente. Die Graphen in Abb. 5.14 zeigen den Vergleich der Standardabweichungen der Krümmungen und der hysteretischen Rückstellmomente am Knoten an der Einspannung wiederum bezogen auf die Höhe der Anregung. Variiert wird das Verhältnis der Standardabweichungen der stochastischen Lasten (vgl. linke Spalte in Abb. 5.14). Auch in diesem Test ergibt sich im relevanten Lastbereich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem biaxialen Hysteresemodell und dem Fasermodell.

Es hat sich auch herausgestellt, dass der zeitliche Aufwand für die Berechnung in beiden Modellen nicht sehr unterschiedlich ist. Durch die Verwendung der bilinearen Hysterese in den Fasern wird im Newmark Verfahren keine Iteration erforderlich. Die Iteration mit dem Hysteresemodell nach Bouc-Wen ist bei gleichen Konvergenzkriterien zwar immer noch sehr schnell, die Berechnung mit dem Fasermodell zeigt im Vergleich keinen entscheidenden Geschwindigkeitsverlust. Zudem kann im Fasermodell die Interaktion der Biegespannungen mit den Normalkraftspannungen berücksichtigt werden.

Wegen des fehlenden elastischen Astes bei Bouc-Wen in der Erst- und Wiederbelastung ist die Abweichung zum elastischen Materialverhalten nur bis ca. 70 % der Fließgrenze klein. Obwohl auf dem Niveau der Fließgrenze der Fehler in der Bouc-Wen Hysterese zwischen 10 - 20 % gegenüber dem Fasermodell beträgt, ist der Fehler in der dissipierten Energie und in den Mittelungswerten gering. Damit beim Umschalten eines Elementes von linear-elastisch auf elasto-plastisch in der Simulation kein plötzlicher Sprung in der Krümmung auftritt, ist es sinnvoll, den Grenzwert der Abfrage, ob ein Element plastiziert, auf ca. 70 % der Fließgrenze zu legen.

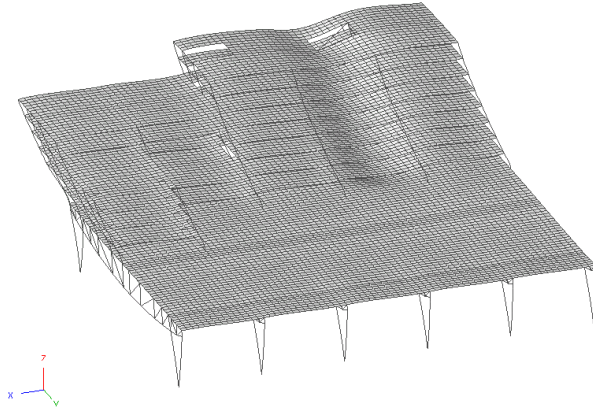
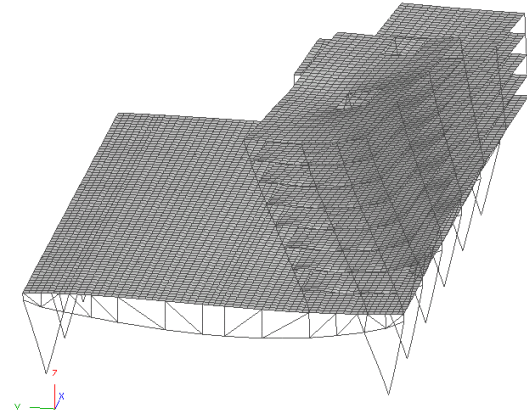
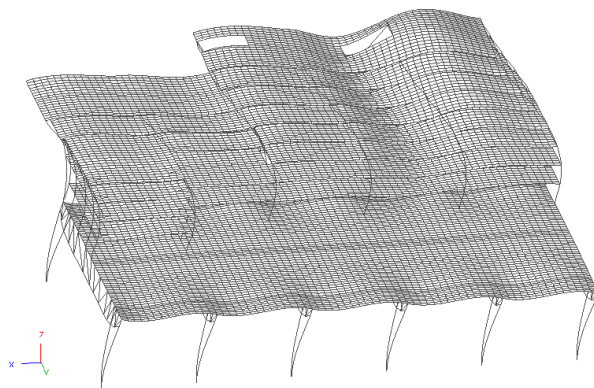
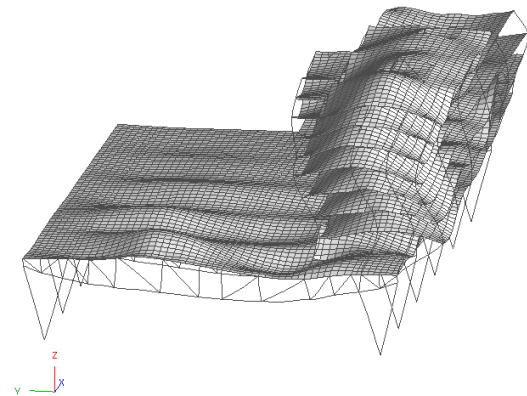
5.4.4 Lösungsschritte

Aufgrund der Rechnerkapazität konnten nur die ersten linearen 299 Moden ermittelt werden. 89 elastische Moden wurden vorausgewählt, um die linear-elastische Antwort bis zu $f = 8$ Hz mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Die Zahl kann weiter auf 29 signifikante Eigenformen reduziert werden, indem Moden vernachlässigt werden, deren generalisierte Anregung vernachlässigbar ist.

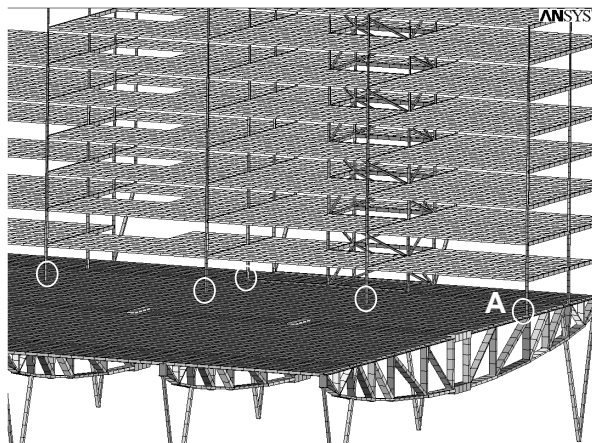
An fünf Elementen wird das Moment an der Fließgrenze während der Simulation überschritten. Infolge dessen werden 20 plastische Formfunktionen der modalen Basis hinzugefügt. Die entsprechenden Querschnitte werden in je 18 Fasern diskretisiert. Für jede Faser wird eine nichtlineare Zusatzgleichung formuliert. Insgesamt wird das System um 20 generalisierte Freiheitsgrade und um 360 bezogene hysteretische Spannungsvariable Y_H erweitert. Auf einem PC wird für die Berechnung der Antwort auf eine Erdbebenrealisierung ca. 2 Minuten benötigt. Die Berechnung einer Realisation am vollständigen Gleichungssystem ist hingegen mit vertretbarem Aufwand nicht sinnvoll.

Die Abbn. 5.15 zeigen die ersten drei Grundmoden sowie eine noch relevante Mode bei $f = 5,6$ Hz, die eine höhere Biegeform des Gebäudes in Querachse darstellt. In Abb. 5.16a sind die plastizierten Elemente eingetragen, in Abb. 5.16b ist eine orthogonalisierte plastische Formfunktion in Bezug auf das plastizierte Element **A** dargestellt.

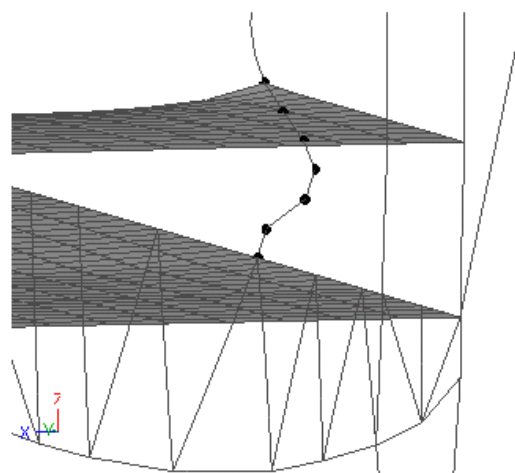
Abbn. 5.15: Eigenformen.

Abb. 5.15a Mode 1, $f = 0,8$ Hz.Abb. 5.15b Mode 2, $f = 0,9$ Hz.Abb. 5.15c Mode 3, $f = 1,5$ Hz.Abb. 5.15d Mode 138, $f = 5,6$ Hz.

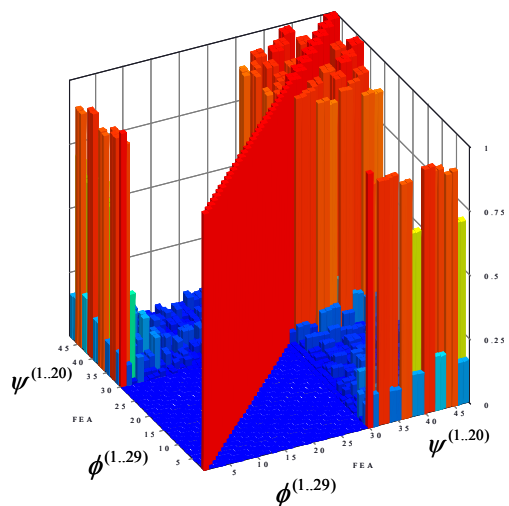
Die Orthogonalität in Bezug auf die Massenmatrix wurde vor und nach Orthogonalisierung überprüft. Die Abbn. 5.17 zeigen graphisch die Orthogonalität der plastischen Formfunktionen gegenüber den elastischen Moden $EVO = \tilde{\Phi}^T \mathbf{M} \tilde{\Phi}$. Links in den Abbn. 5.17 sind lediglich die ersten 29 elastischen Moden orthogonal in Bezug auf die Massenmatrix, rechts werden die Nebendiagonalwerte nach Orthogonalisierung der plastischen Formfunktionen zu Null.



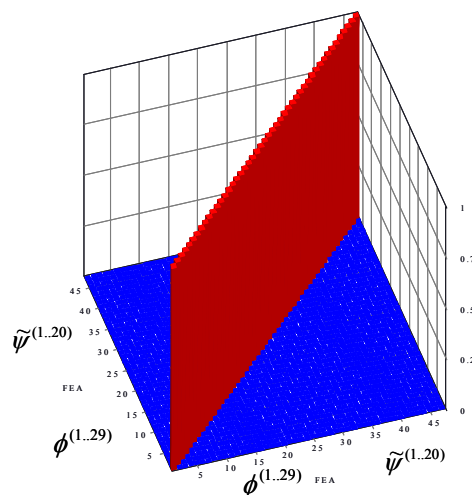
Abbn. 5.16a plastizierte Elemente.



Abbn. 5.16b Orthogonalisierte plastische Formfunktion an Element **A**.



Abbn. 5.17: Orthogonalität der reduzierten Basis vor Orthogonalisierung der plast. FF (links)



nach Orthogonalisierung (rechts).

5.4.5 Darstellung der Ergebnisse

Die Abbn. 5.18a – r zeigen ausgewählte Zeitverläufe einer Realisation. Für die Auswertung der Relativverschiebungen wurde exemplarisch ein Eckpunkt (Knoten 93) der obersten Ebene des Modells ausgewählt, zur Auswertung der Krümmungen und der hysteretischen Rückstellmomente das am stärksten plastizierte Element **A**. Dargestellt ist jeweils ein Zeitfenster von 0 – 32 [s] bzw. höher aufgelöst von 0 – 16 [s].

Die linear-elastische Antwort des Systems wird zur Orientierung in den Abbn. 5.18a-b gezeigt. Gegenübergestellt sind die Antworten in den globalen Achsrichtungen bzw. in den Biegeachsen.

Die Abbn. 5.18c-e dokumentieren die Zulässigkeit der Reduzierung von 299 Moden auf 29 elastische Moden in der linear-elastischen Antwort. Die Verläufe werden genau abgebildet, lediglich in der Krümmungsgeschwindigkeit sind geringfügige Präzisionsverluste hinzunehmen (Abb. 5.18e).

Die Abbn. 5.18f-h stellen die elasto-plastische Antwort der linear-elastischen gegenüber. Dabei ist festzustellen, dass sich die lokalen Plastizierungen auf die gesamte Bewegungsenergie des Bauwerks nur geringfügig auswirken (Abb. 5.18f). Dadurch, dass sich die Gesamtantwort nur wenig ändert, werden bei Plastizierung höhere Ausschläge im Krümmungszeitverlauf freigesetzt (Abbn. 5.18g-h),

Um die Interaktion der Rückstellmomente bei Plastizierung zu verdeutlichen, sind in den Abbn. 5.18i-j jeweils die Krümmungen und die bezogenen hysteretischen Rückstellmomente um beide Achsen gegenübergestellt. Im rechten Bild (Abb. 5.18j) ist die Interaktion der hysteretischen Rückstellmomente zu beobachten. Plastizieren die Flansche bei Biegung um die „stärkere“ Achse y , so geht das aufnehmbare hysteretische Moment um die „schwächere“ Achse z bei Umkehr der Belastung auf Null zurück. Da die Kapazität des Querschnitts durch das Rückstellmoment um die andere Richtung y bereits „verbraucht“ ist, entsteht kein Rückstellmoment um z nach Entlastung. Die Kurve verharrt in diesem Null-Zustand, bis eine Entlastung um die stärkere Achse erfolgt. Erst dann kann wieder ein Moment um z aufgenommen werden, und die Kurve steigt wieder an.

Die Abbn. 5.18 k-l stellen die bezogenen hysteretischen Rückstellmomente den Krümmungen für Biegung um beide Achsen gegenüber. Das plastische Grenzmoment wird bei $M_{P_y} = 2,16 \text{ E6 MN/m}^2$ bzw. $M_{P_z} = 7,73 \text{ E5 MN/m}^2$ erreicht. Dies entspricht einem bezogenen hysteretischen Rückstellmoment von $Y_{Hy} \kappa_y = 0,0074$ bzw. $Y_{Hz} \kappa_z = 0,012$ bei einer Fließgrenze mit $\kappa_{y_y} = 0,0066$ bzw. $\kappa_{y_z} = 0,0082$.

Die Abbn. 5.18m-n dokumentieren den Beitrag der orthogonalisierten plastischen Formfunktionen $\kappa_{\tilde{\Psi}}(t) = \mathbf{T}_{\kappa} \tilde{\Psi} \mathbf{w}_{\tilde{\Psi}}^*(t)$ an der Gesamtkrümmung. Verzichtet man auf die plastischen Formfunktionen in der nichtlinearen Berechnung in reduzierter Basis, so entsteht der Fehler, der aus der Differenz der Kurven in den Abbn. 5.18o-p hervorgeht. Diesen Kurven liegt eine Berechnung ohne zusätzliche plastische Formfunktionen zu Grunde.

In einer weiteren Berechnung werden anstatt der 20 plastischen Formfunktionen nur 10 Formfunktionen hinzugefügt. Jeweils ein Paar von Formfunktionen mit linearem Krümmungsverlauf am plastizierten Element wird durch eine Formfunktion mit konstantem Krümmungsverlauf ersetzt. Die Gegenüberstellung der Ergebnisse in Abbn. 5.18q-r weist nach, dass zwar der Fehler, der ohne zusätzliche Formfunktionen entsteht, deutlich abgemindert werden kann. Es sind jedoch noch Abweichungen zur Lösung mit „krümmungs-kompatiblen“ Formfunktionen zu verzeichnen.

Abn. 5.18: Zeitverläufe der Verschiebungsantwort an Knoten 93 und der Krümmungen an Knoten \mathcal{A} unter den Lastfunktionen in Abbildung 5.11a und 5.11b.

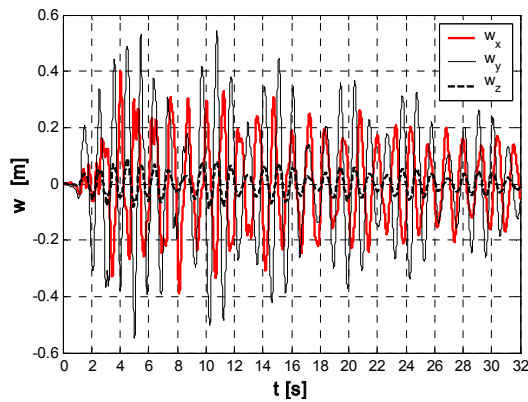


Abb. 5.18a linear-elastische Antwort w

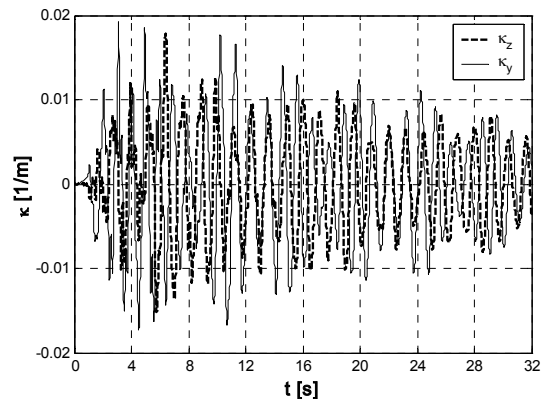


Abb. 5.18b linear-elastische Antwort κ

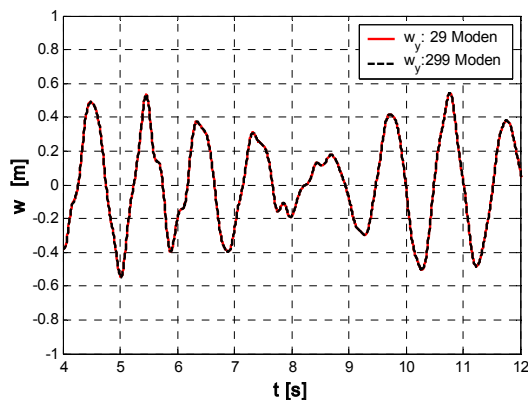


Abb. 5.18c Verschiebung w_y
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
linear-elastische Antwort mit 29 Moden

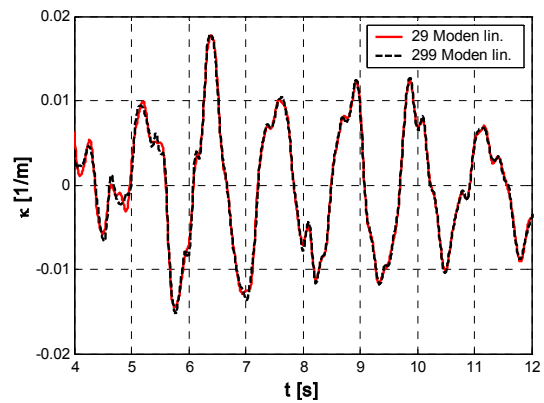


Abb. 5.18d Krümmung κ_z (z-Achse)
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
linear-elastische Antwort mit 29 Moden

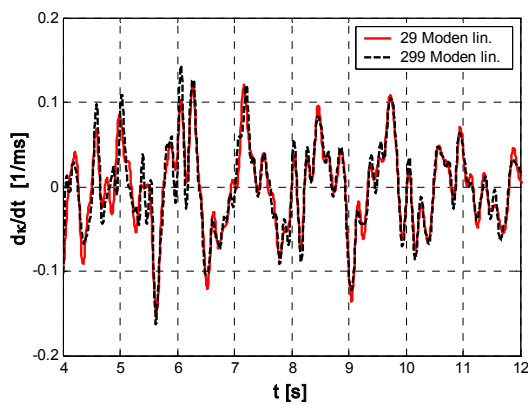


Abb. 5.18e Krümmungsgeschwindigkeit $\dot{\kappa}$
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
linear-elastische Antwort mit 29 Moden

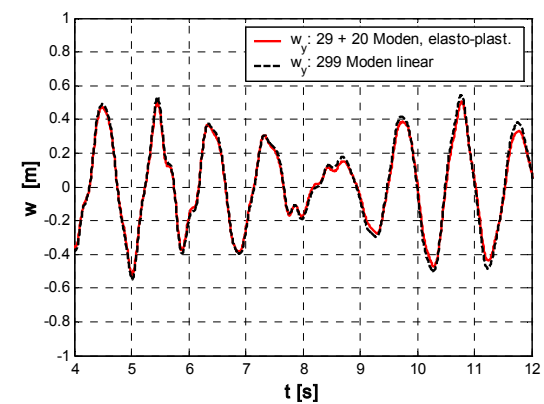


Abb. 5.18f Verschiebung w_y
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF

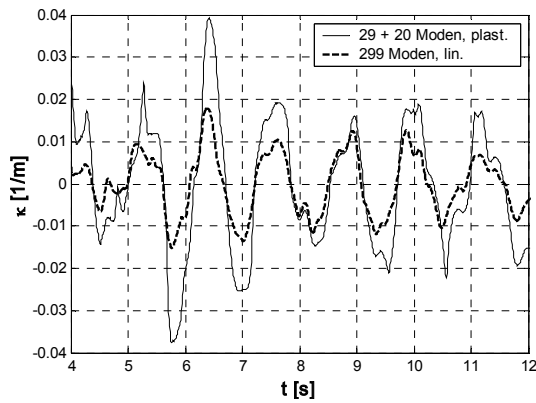


Abb. 5.18g Krümmung κ_z (z-Achse)
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF

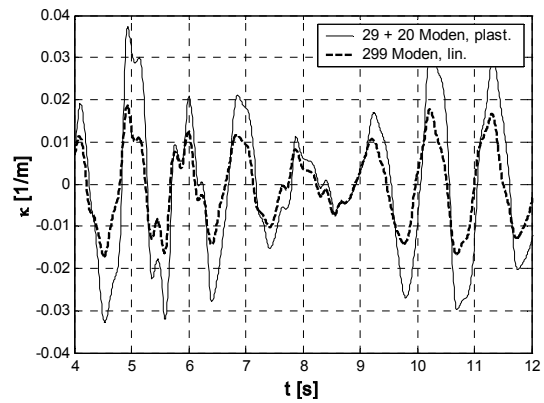


Abb. 5.18h Krümmung κ_y (y-Achse)
linear-elastische Antwort mit 299 Moden -
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF

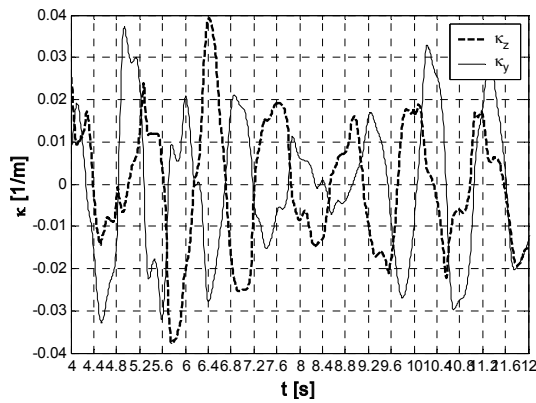


Abb. 5.18i Krümmung κ
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF
Krümmung κ_y (y-Achse) - κ_z (z-Achse)

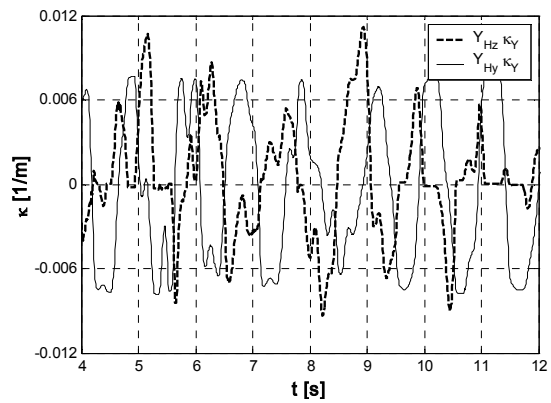


Abb. 5.18j bez. hyst. Rückstellmoment $Y_H \kappa_y$
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF
bez. hyst. Moment $Y_{Hy} \kappa_{y_y}$ (y-Achse) - $Y_{Hz} \kappa_{y_z}$ (z-Achse)

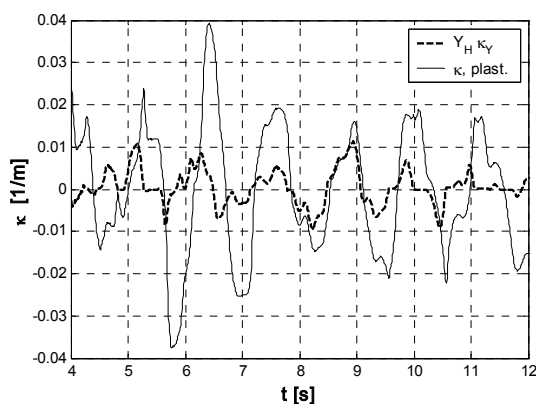


Abb. 5.18k Krümmung κ_z (z-Achse) -
bez. hyst. Rückstellmoment $Y_{Hz} \kappa_{y_z}$ (z-Achse)
elasto-plastische Antwort (29 Moden + 20 plast. FF)

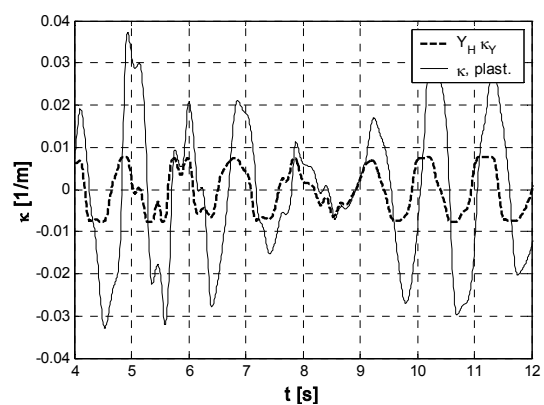


Abb. 5.18l Krümmung κ_y (y-Achse) -
bez. hyst. Rückstellmoment $Y_{Hy} \kappa_{y_y}$ (um Achse y)
elasto-plastische Antwort (29 Moden + 20 plast. FF)

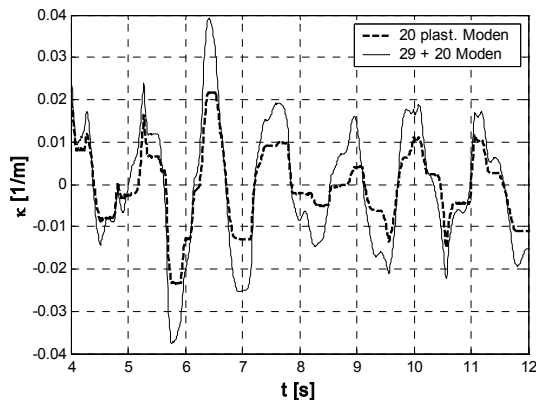


Abb. 5.18m Krümmung κ_z (z-Achse)
elasto-plastische Antwort, Anteil aller Moden
29 Moden + 20 plast. FF – Anteil der 20 plast. FF

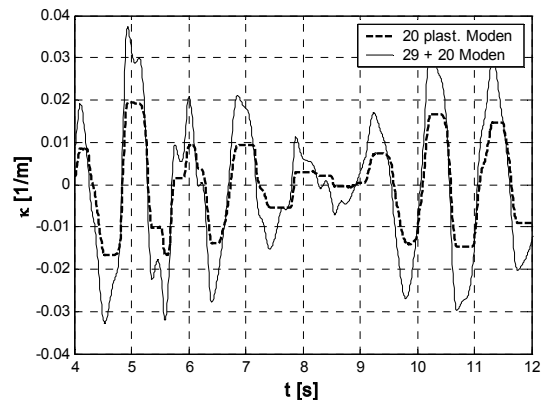


Abb. 5.18n Krümmung κ_y (y-Achse)
elasto-plastische Antwort, Anteil aller Moden
29 Moden + 20 plast. FF – Anteil der 20 plast. FF

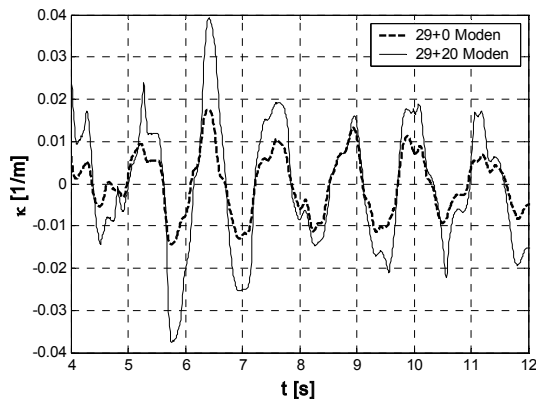


Abb. 5.18o Krümmung κ_z (z-Achse)
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 16 plast. FF -
29 Moden ohne zusätzl. Plast. FF

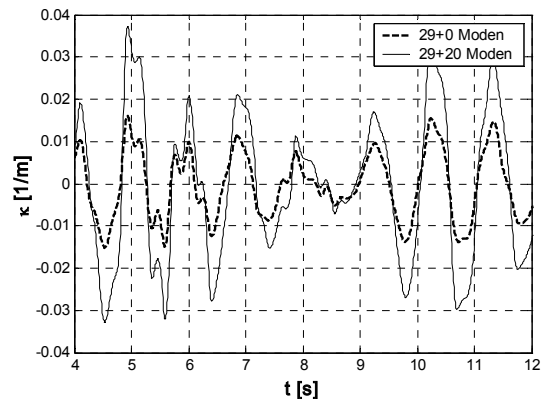


Abb. 5.18p Krümmung κ_y (y-Achse)
elasto-plast. Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF -
29 Moden ohne zusätzl. Plast. FF

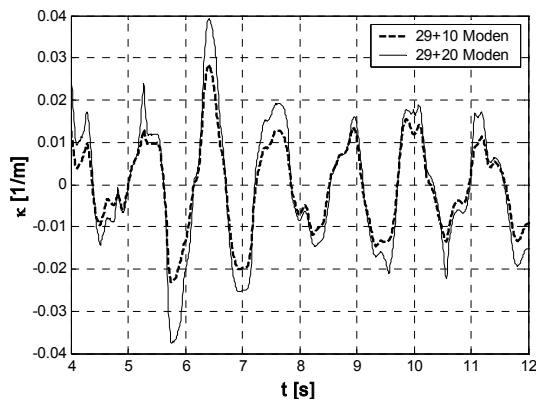


Abb. 5.18q Krümmung κ_z (z-Achse)
elasto-plastische Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF -
29 Moden + 10 plast. FF (konst. Krümmung)

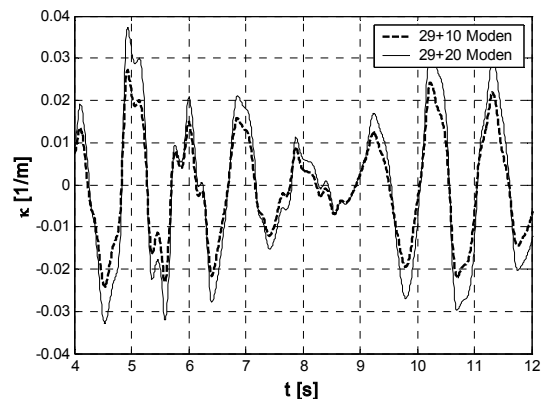


Abb. 5.18r Krümmung κ_y (y-Achse)
elasto-plast. Antwort mit 29 Moden + 20 plast. FF -
29 Moden + 10 plast. FF (konst. Krümmung)

Die Abb. 5.19 schließlich zeigt die Zeitverläufe der geschätzten Standardabweichungen (RMS) der Krümmungen κ , der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente $Y_H \kappa_Y$ und der Beiträge der plastischen Formfunktionen zur Krümmung $\kappa_{\bar{\psi}}$ gemittelt aus 10.000 Realisationen.

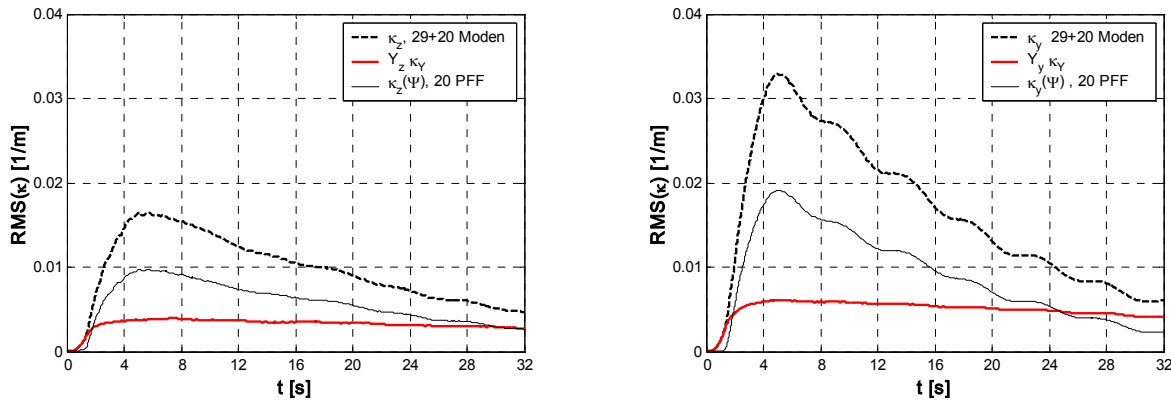


Abb. 5.19: Zeitverläufe der Varianz der Krümmungen (Beiträge aus erweiterter reduzierter Basis und Beiträge der plastischen Formfunktionen PFF) und der bezogenen hysteretischen Rückstellmomente um die z-Achse (links) und um die y-Achse (rechts), Schätzung aus 10.000 Erdbebenrealisationen.

Ermittelt man aus jeder Antwort z.B. die maximale Dehnung in einem Querschnitt, so kann aus den einzelnen Werten ein Histogramm erstellt werden und daraus eine Extremwertverteilung geschätzt werden. Liegt ein Versagenskriterium vor, kann damit eine Aussage darüber getroffen werden, bei wie viel Prozent aller Erdbeben die Konstruktion versagt. Abb. 5.20 enthält das Histogramm der maximalen Dehnung pro Erdbeben in Element **A** sowie die angepasste Verteilungsdichtefunktion nach Gumbel:

$$f(x) = \alpha_G \exp[-\alpha_G(x - u_G) - \exp(-\alpha_G(x - u_G))]. \tag{5.14}$$

Die Parameter der Gumbelverteilung wurden aus den geschätzten Momenten ermittelt, besser wäre natürlich eine Anpassung mit einem Schätzer, der die gesamte Verteilung anpasst, z.B. der χ^2 -Methode. Die geschätzten Momente sind der Mittelwert $\mu_\epsilon = 0,075$ und die Standardabweichung $\sigma_\epsilon = 0,0205$. Daraus ergeben sich die Parameter der Gumbel-Verteilung z.B. nach [131] zu $\alpha_G = 62,7$ und $u_G = 0.066$ mit

$$u_G = \mu - \frac{0,5772156}{\alpha_G} \quad \text{und} \quad \alpha_G = \frac{1,2825487}{\sigma}. \tag{5.15}$$

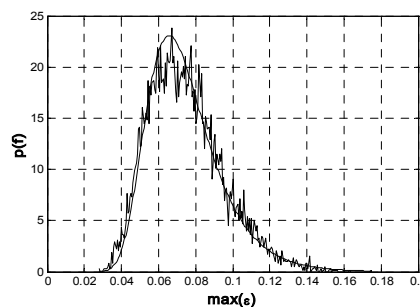


Abb. 5.20: Histogramm und geschätzte Gumbel-Verteilungsdichtefunktion der Extremwerte der Dehnung in Element **A** aus 10.000 realisierten Ereignissen.

5.5 Diskussion der Ergebnisse

Das Beispiel mit Windlast am ebenen Modell zeigt, dass durch den Einsatz von plastischen Formfunktionen in der reduzierten modalen Basis eine hohe Genauigkeit in der Antwort ohne Abweichungen gegenüber der Lösung am vollständigen Gleichungssystem erzielt wird. Die Rechenzeiten verkürzen sich dadurch drastisch. Dies gilt unabhängig von den jeweiligen Verfahren, Statistische Linearisierung oder Monte Carlo Simulation.

Bei stationärer Anregung ist die Monte Carlo Simulation vom Zeitaufwand nahezu gleichwertig mit der Statistischen Linearisierung. Vor allem vor dem Hintergrund der kontrollierbaren Genauigkeit ist daher der Monte Carlo Simulation der Vorzug zu geben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei der Statistischen Linearisierung die sukzessive Ermittlung plastizierter Stellen zu einem zusätzlichen Aufwand führt, wenn davon ausgegangen wird, dass die Stellen an denen es zur Plastizierung kommt, vorab nicht bekannt sind.

Im Lastfall Erdbeben am 3D-Modell wird durch den Einsatz von plastischen Formfunktionen nicht nur eine Simulationsberechnung mit vertretbarem Aufwand überhaupt ermöglicht, der zeitliche Aufwand bleibt in etwa in der gleichen Größenordnung wie für kleinere Modelle, obwohl mit dem Fasermodell ca. 400 zusätzliche Zustandsvariablen hinzukommen. Damit wird eine Berechnung nahezu unabhängig von der Systemgröße. Es können beliebig große Systeme behandelt werden. Voraussetzung ist, dass die Anzahl der generalisierten Freiheitsgrade gering bleibt, die plastizierten Elemente sollten im Verhältnis zum vollständigen System in der Anzahl beschränkt sein.

Wegen der instationären Anregung sind im Gegensatz zum stationären Fall überproportional viele Realisationen zu berechnen, um eine Aussage über die zweiten Momente mit hoher Konfidenz zu erhalten. In diesem Fall kann die Statistische Linearisierung gegenüber der Monte Carlo Simulation Vorteile bezüglich des zeitlichen Aufwands bieten. Für in etwa gleichwertige Ergebnisse werden in Abhängigkeit vom Plastizierungsgrad schätzungsweise 500 bis 1000 Realisationen benötigt, wofür im vorliegenden Beispiel von einem Zeitaufwand von etwa ein bis zwei Tagen auszugehen ist. Mit optimierten Algorithmen und verbesserter Rechentechnik lassen sich diese Zeiten noch deutlich reduzieren.

6 Zusammenfassung

Genauigkeit des Verfahrens

Die Beispiele zeigen, dass die Referenzlösungen aus Berechnungen im vollständigen Gleichungssystem mit den Ergebnissen in reduzierter modaler Basis erweitert mit plastischen Formfunktionen sehr gut angenähert werden können. Die Unterschiede sind numerisch klein und in den graphischen Darstellungen nicht erkennbar.

Neben dem Abschneidefehler, der bei modaler Reduktion auch in einer linearen Berechnung zu verzeichnen ist, tritt ein zusätzlicher Fehler bei Plastizierung auf. Je nach nichtlinearer Materialformulierung entstehen Anteile der inneren Rückstellkräfte im höheren Frequenzbereich, durch die Resonanzen der höheren Moden angeregt werden. Da die höheren Moden in den plastischen Formfunktionen „eingefroren“ sind, kann diese Resonanzanregung durch den Beitrag der plastischen Formfunktionen nicht adäquat abgebildet werden. Insofern besteht eine Abhängigkeit zur Wahl der nichtlinearen Materialmodelle.

Die höheren spektralen Anteile der inneren Rückstellkräfte sind gegenüber den äußeren Lasten im tieffrequenten Frequenzbereich klein. Sie können daher meist vernachlässigt werden, wenn die zu beurteilende Größe wegproportional ist (z.B. Spannungen, Auslenkungen). Sind schnelle- bzw. beschleunigungsproportionale Kennwerte zu ermitteln, muss diesem Effekt durch die Aufnahme weiterer (weniger) elastischer Moden in die reduzierte Basis Rechnung getragen werden, um auch den erweiterten Frequenzbereich der einwirkenden inneren Kräfte abzudecken.

Anwendbarkeit von plastischen Formfunktionen

Einschränkungen in der Anwendung ergeben sich lediglich aus den Annahmen, die auch im Falle der Reduktion der modalen Basis im linearen Fall gelten. Die dynamischen Lasten sollten räumlich möglichst gleichmäßig verteilt sein, und vom Frequenzgehalt her auf einen Bereich beschränkt sein.

Ansonsten ist der Einsatz von plastischen Formfunktionen universell mit verschiedensten, stochastischen Lastmodellen, korrelierten wie nicht-korrelierten Lasten und probabilistischen Verfahren möglich, mit denen im linearen Fall die modale Reduktion anwendbar ist.

Da die Generierung der plastischen Formfunktionen lediglich von den jeweiligen Ansatzfunktionen der FE-Formulierung abhängt, ist auch eine Kombination mit verschiedensten nichtlinearen Materialmodellen möglich.

Effizienz des Verfahrens

Die Effizienz des Verfahrens ist eng mit der Anzahl der plastizierten Elemente verknüpft. Da für jedes plastizierte Element eine von der Elementformulierung abhängige Anzahl an zusätzlichen Formfunktionen in der reduzierten Basis hinzukommt, wird auch der reduzierte modale Raum um die entsprechenden generalisierten Koordinaten erweitert. Davon abgesehen steigt natürlich die Anzahl der nichtlinearen Zusatzgleichungen an, die jedoch ohnehin zu berücksichtigen sind.

Plastizieren im Beispiel des ebenen Rahmens mit 1450 Freiheitsgraden ca. 10% der 524 Elemente, so entstehen in der reduzierten Basis zusätzlich zu den 17 angesetzten elastischen Moden noch ca. 100 generalisierte Freiheitsgrade, wodurch immer noch eine Reduktion der Anzahl der Gleichungen auf ca. 8 % erzielt wird. Steigt die Anzahl der plastizierten Elemente jedoch auf mehr als 50 % an, so nähert sich die Größe des reduzierten Gleichungssystems dem des Ausgangssystems an, womit eine Reduktion hinfällig wird.

Solange die Anzahl lokaler Plastizierungen innerhalb eines Rahmentragwerks mit vielen Freiheitsgraden gering bleibt, ist die Effizienz der Reduktion der Basis enorm. Die Untersuchung großer Systeme mit probabilistischen Verfahren wird dadurch überhaupt erst ermöglicht.

Anbindung an etablierte Algorithmen

Die Verwendung von plastischen Formfunktionen zur Beschreibung einer lokalen Nichtlinearität fügt sich nahtlos in bestehende FE-Softwaresysteme ein. In MSC-Nastran[®] beispielsweise ist die Methode die Erweiterung der modalen Basis mit statischen Formfunktionen bereits vorgesehen [78].

In der Monte Carlo Simulation werden Zeitschrittalgorithmen als Standardverfahren verwendet, die in den meisten Systemcodes enthalten sind. In der modifizierten Newton-Raphson Iteration kann die Standardformulierung beibehalten werden, wenn die inneren hysteretischen Rückstellkräfte dem äußeren Lastvektor zugeschlagen werden. Getrennt vom restlichen Gleichungssystem können die nichtlinearen Zusatzgleichungen mit wenig Mehraufwand gelöst werden.

Die lineare spektrale Lösung zur Ermittlung einer spektralen Dichtefunktion der Antwort ist ebenfalls Bestandteil von vielen FE-Systemen. Damit ist auch ein wesentlicher Arbeitsschritt in der Iteration der Statistischen Linearisierung abgedeckt. Die äquivalenten Koeffizienten müssen in einem gesonderten Algorithmus bestimmt werden. Die Einbindung der linearisierten Zusatzgleichungen in das Gesamtgleichungssystem muss ermöglicht werden.

Gegenüber zahlreichen anderen Verfahren ist der Einsatz von plastischen Formfunktionen in Verbindung mit Monte Carlo Simulation und auch mit Statistischer Linearisierung besonders für den Einsatz in praktischen Aufgabestellungen geeignet. Die Verwendung von Verfahren, die dem Ingenieur vertraut sind, lässt eine gute Akzeptanz erwarten.

Anhang A

Kontinuierliche Formulierung des hysteretischen Rückstellmomentes bei ebener Biegung

A.1 Kontinuierliche Formulierung des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai

In ebener Biegung ist das Integral der zeitlichen Ableitung der inneren virtuellen Arbeit auszuwerten:

$$\delta \dot{W}_{\text{int}} = \int_0^l EI \kappa_Y l \frac{\dot{\kappa}(\xi)}{\kappa_Y} G(\dot{\kappa}(\xi), Y_H(\xi)) \delta \kappa(\xi) d\xi. \quad (\text{A.1})$$

$$G(\dot{\kappa}(\xi), Y_H(\xi)) = 1 - H(\dot{\kappa}(\xi))H(Y_H(\xi) - 1) + H(-\dot{\kappa}(\xi))H(-Y_H(\xi) - 1). \quad (\text{A.2})$$

Die Einheits-Sprung (Heaviside-) Distribution $H(\xi)$ ist über ξ konstant (0 oder 1) in Abhängigkeit davon, ob das Argument ξ kleiner oder größer Null ist. Dementsprechend ist im Integranden entweder $G(\dot{\kappa}(\xi), Y_H(\xi)) = 0$ oder $G(\dot{\kappa}(\xi), Y_H(\xi)) = 1$. Der letzte Term existiert nur in Teilintervallen $(\xi_j \dots \xi_d)$, die durch die Nullstellen der Verläufe von $\dot{\kappa}(\xi)$ bzw. durch die Schnittpunkte von $Y_H(\xi)$ mit $Y_H = 1$ und $Y_H = -1$ begrenzt sind.

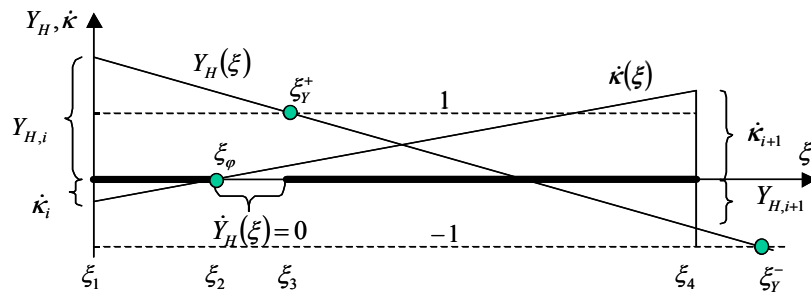


Abb. A.1: Abhängigkeit des Integrals der virtuellen Arbeiten von den Schnittpunkten $\xi_1 \dots \xi_4$.

Die einzelnen Schnittpunkte sind durch die Knotenwerte bestimmt und in Abb. A.1 dargestellt:

$$\xi_Y^+ = \frac{Y_i - 1}{Y_i - Y_{i+1}} \quad \xi_Y^- = \frac{Y_i + 1}{Y_i - Y_{i+1}} \quad \xi_\phi = \frac{4\dot{\varphi}_i + 2\dot{\varphi}_{i+1}}{6\dot{\varphi}_i + 6\dot{\varphi}_{i+1}} \quad (\text{A.3})$$

Das Integral über die Zunahme der virtuellen Arbeiten führt zu einer Matrix, deren Elemente von den Integralgrenzen ξ_1, \dots, ξ_4 abhängig sind, welche die Teilintervalle begrenzen. Die Gesamtmatrix ergibt sich als eine Summe von Teilmatrixen in Abhängigkeit von den Schnittpunkten ξ_1, \dots, ξ_4 .

$$\mathbf{H}_Y(\xi_j) = [\mathbf{H}(\xi_2) - \mathbf{H}(\xi_1) + \mathbf{H}(\xi_4) - \mathbf{H}(\xi_3)] \quad (\text{A.4})$$

Die einzelnen Summanden gehen aus dem Integral

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{H}(\xi) \dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{1}{l} \int \frac{\dot{\kappa}(\xi)}{\kappa_Y} \delta\kappa(\xi) d\xi \quad (\text{A.5})$$

hervor. Damit wird:

$$\mathbf{H}(\xi) = \frac{1}{\kappa_Y l} \begin{bmatrix} 16\xi - 24\xi^2 + 12\xi^3 & 8\xi - 18\xi^2 + 12\xi^3 \\ 8\xi - 18\xi^2 + 12\xi^3 & 4\xi - 12\xi^2 + 12\xi^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Die Integrationsgrenzen ξ_j sind von den Knotenfreiheitsgraden $\dot{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}$ and \mathbf{Y}_H abhängig. Je nachdem wie die Schnittpunkte ξ_Y^+ , ξ_Y^- und $\xi_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}$ zu liegen kommen, ist eine Fallunterscheidung für die Integralgrenzen $\xi_1 \dots \xi_4$ erforderlich. Die Fallunterscheidungen sind in Tabelle A.1 schematisch eingetragen.

	$Y_i > -Y_{i+1}$ $\dot{\bar{\varphi}}_i > -\dot{\bar{\varphi}}_{i+1}$	$Y_i < -Y_{i+1}$ $\dot{\bar{\varphi}}_i > -\dot{\bar{\varphi}}_{i+1}$	$Y_i > -Y_{i+1}$ $\dot{\bar{\varphi}}_i < -\dot{\bar{\varphi}}_{i+1}$	$Y_i < -Y_{i+1}$ $\dot{\bar{\varphi}}_i < -\dot{\bar{\varphi}}_{i+1}$
ξ_1	$\min(\xi_\varphi, \xi_Y^-)$	0	0	$\min(\xi_\varphi, \xi_Y^+)$
ξ_2	$\max(\xi_\varphi, \xi_Y^+)$	$\xi_\varphi \vee (\xi_Y^+ > \xi_\varphi)$ $\xi_Y^- \vee (\xi_\varphi > \xi_Y^-)$	$\xi_Y^+ \vee (\xi_\varphi > \xi_Y^+)$ $\xi_\varphi \vee (\xi_Y^- > \xi_\varphi)$	$\max(\xi_\varphi, \xi_Y^-)$
ξ_3	0	$\xi_Y^+ \vee (\xi_Y^+ > \xi_\varphi)$ $\xi_\varphi \vee (\xi_\varphi > \xi_Y^-)$	$\xi_\varphi \vee (\xi_\varphi > \xi_Y^+)$ $\xi_Y^- \vee (\xi_Y^- > \xi_\varphi)$	0
ξ_4	0	1	1	0

Tabelle A.1 Fallunterscheidung der Integralgrenzen ($0 < \xi_j < 1$).

Ist $-1 < |Y_H(x)| < 1$ dann wird das Integral „lückenlos“, aus der Matrix $\kappa_Y \mathbf{H}_Y$ wird die Matrix $\mathbf{H}_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}$ des linearen Gleichungssystems aus Gl. (2.19).

A.2 Kontinuierliche Formulierung des Hysterese Modells nach Bouc-Wen

Das Integral über die virtuelle Arbeit des hysteretischen Momentes nach Bouc-Wen enthält Signum-Funktionen, die wie bei Suzuki-Minai eine Unterteilung der Ableitung des Arbeitsintegrals Gl. (A.1) an den Nulldurchgängen von $Y_H(\xi)$ und $\dot{\kappa}(\xi)$ erforderlich machen.

$$G(\dot{\kappa}(\xi), Y_H(\xi)) = \left[A - \gamma \operatorname{sgn}(\dot{\kappa}(\xi)) \operatorname{sgn}(Y_H(\xi))^{N-1} - \nu \operatorname{sgn}(Y_H(\xi))^N \right] Y_H(\xi)^N \quad (\text{A.7})$$

Die Schnittpunkte der linearen Verläufe von $Y_H(x)$ und $\kappa(x)$ über die Elementlänge mit der Abszisse $Y_H(\xi) = 0$ und $\kappa(\xi) = 0$ sind:

$$\xi_{\dot{\phi}} = \frac{4\dot{\phi}_i + 2\dot{\phi}_{i+1}}{6\dot{\phi}_i + 6\dot{\phi}_{i+1}} \quad \xi_Y = \frac{Y_{H_i}}{Y_{H_i} - Y_{H_{i+1}}} \quad (\text{A.8})$$

Je nach Exponent N ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für \mathbf{H}_Y , für ungerade Exponenten N :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Y(Y_H, \dot{\phi}) &= \frac{1}{\kappa_Y l} \left[A \mathbf{H}_{\dot{\phi}} - \gamma \left(\mathbf{H}(1, Y_H) - 2 \mathbf{H}(\xi_{\dot{\phi}}, Y_H) \right) \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_{i+1} + \dot{\phi}_i) + \right. \\ &\quad \left. - \nu \left(\mathbf{H}(1, Y_H) - 2 \mathbf{H}(\xi_Y, Y_H) \right) \cdot \operatorname{sgn}(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

und für gerade Exponenten N :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Y(Y_H, \dot{\phi}) &= \frac{1}{\kappa_Y l} \left[A \mathbf{H}_{\dot{\phi}} - \nu \mathbf{H}(1, Y_H) + \right. \\ &\quad \left. - \gamma \left(\mathbf{H}(1, Y_H) + 2 \left(\mathbf{H}(\xi_{Y_H}, Y_H) - \mathbf{H}(\xi_{\dot{\phi}}, Y_H) \right) \operatorname{sgn}(\xi_{Y_H} + \xi_{\dot{\phi}}) \right) \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_{i+1} + \dot{\phi}_i) \cdot \operatorname{sgn}(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die Teilmatrizen $\mathbf{H}(\xi, Y_H)$ sind über das Arbeitsintegral definiert.

$$\delta \dot{\phi}^T \mathbf{H}(\xi, Y_H) \dot{\phi} = \int \frac{\dot{\kappa}(\xi)}{\kappa_Y} Y_H(\xi)^N \delta \kappa(\xi) d\xi \quad (\text{A.11})$$

Die Matrizen $\mathbf{H}(\xi, Y_H)$ sind nur dann von den Schnittpunkten ξ_Y und $\xi_{\dot{\phi}}$ abhängig, wenn diese zwischen den beiden Elementknoten mit den lokalen Koordinaten $\xi_i = 0$ und $\xi_{i+1} = 1$ liegen. Für den Exponenten $N = 1$ wird:

$$\mathbf{H}(\xi, Y_H) = \begin{cases} 0 & \forall \xi \leq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^T(\xi) \mathbf{Y}_H & \mathbf{P}_{12}^T(\xi) \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{P}_{21}^T(\xi) \mathbf{Y}_H & \mathbf{P}_{22}^T(\xi) \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} & \forall 0 < \xi \leq 1. \\ \mathbf{H}(1, \mathbf{Y}_H) & \forall 1 < \xi \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Die vier Vektoren $\mathbf{P}(\xi)$ setzen sich aus Polynomen von ξ zusammen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11}(\xi) &= \begin{bmatrix} -9\xi^4 + 28\xi^3 - 32\xi^2 + 16\xi \\ 9\xi^4 - 16\xi^3 + 8\xi^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{12}(\xi) = \mathbf{P}_{21}(\xi) &= \begin{bmatrix} -9\xi^4 + 24\xi^3 - 22\xi^2 + 8\xi \\ 9\xi^4 - 12\xi^3 + 4\xi^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{22}(\xi) = \begin{bmatrix} -9\xi^4 + 20\xi^3 - 14\xi^2 + 4\xi \\ 9\xi^4 - 8\xi^3 + 2\xi^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

A.3 Vergleich kontinuierliche Formulierung – diskrete Formulierung

In den Abb. A.2 bis A.4 werden Ergebnisse aus kontinuierlicher Formulierung mit diskreter Formulierung verglichen. Der Kragarm in Abb. 3.1 wird mit einer gleichverteilten, vollkorrelierten, stochastischen Last belastet. Die Abb. A.2 bis A.3 zeigen den Vergleich der Standardabweichungen der Krümmung und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes an Knoten 1 für Suzuki-Minai und Bouc-Wen. Mit der gewählten Diskretisierung ist die Übereinstimmung bei Monte Carlo Simulation zur diskreten Formulierung gut.

Abb. A.4 zeigt einen Ausschnitt aus dem Zeitverlauf der Krümmung und des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes einer Realisation bei Plastizierung an Knoten 3. Die Zeitverläufe der Krümmung stimmen im Wesentlichen überein. In den vergrößerten Zeitverläufen des bezogenen hysteretischen Rückstellmomentes ist zu beobachten, dass die Plastizitätsgrenze ($\kappa_Y = 1$) in kontinuierlicher Formulierung überschritten werden kann (vgl. Abb. 2.5), während in diskreter Formulierung die Plastizitätsgrenze an den Knoten nicht überschritten wird.

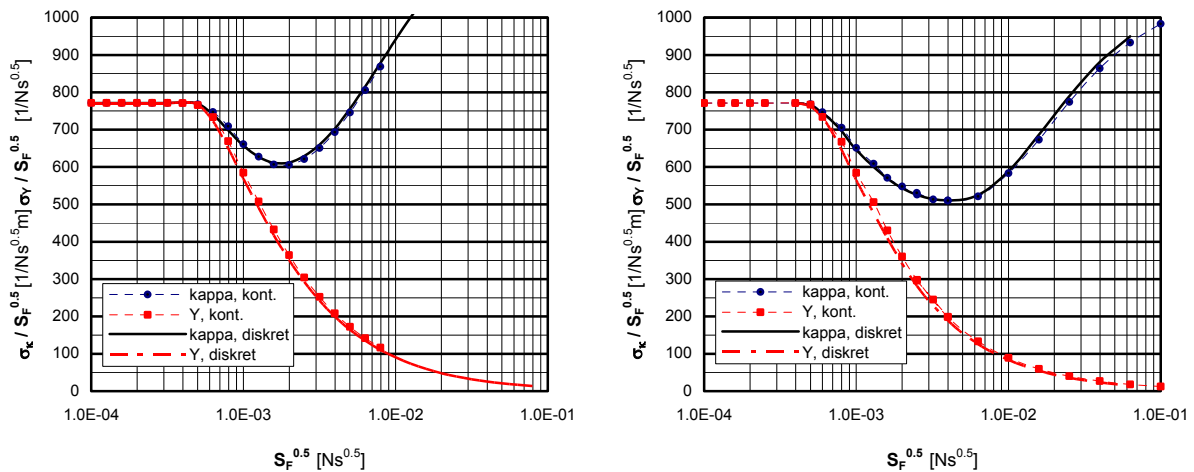


Abb. A.2: Standardabweichung der Krümmung und des hysteretischen Rückstellmoments bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F an Knoten 1 (Einspannung): Vergleich kontinuierliche – diskrete Formulierung, Suzuki-Minai, $\kappa_Y = 1$, $\alpha = 0,5$; links: Plastizierung von Element 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10, Monte Carlo Simulation

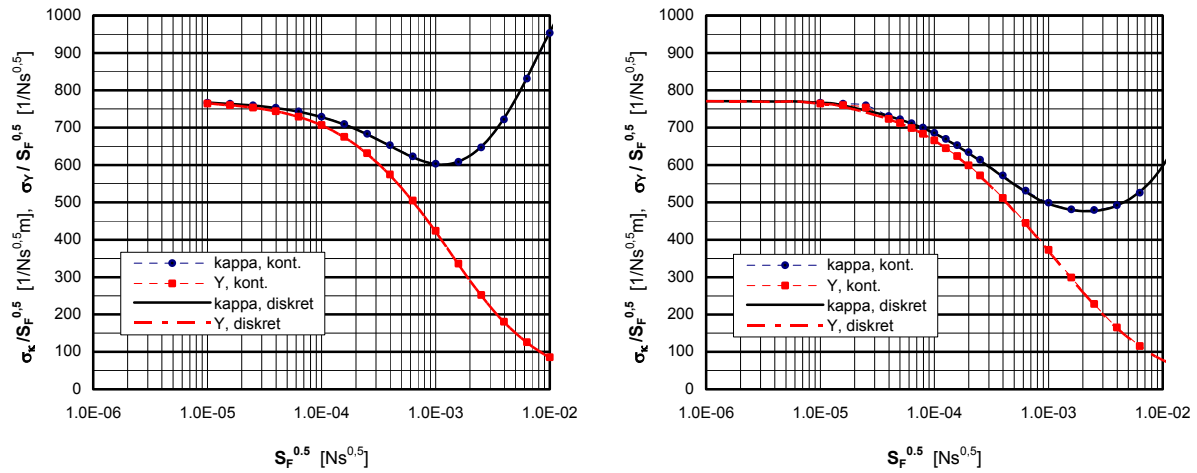


Abb. A.3: Standardabweichung der Krümmung und des hysteretischen Rückstellmomentes bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F an Knoten 1 (Einspannung): Vergleich kontinuierliche – diskrete Formulierung, Bouc-Wen, $\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_Y = 1$; $\alpha = 0,5$; links: Plastizierung von Element 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10.

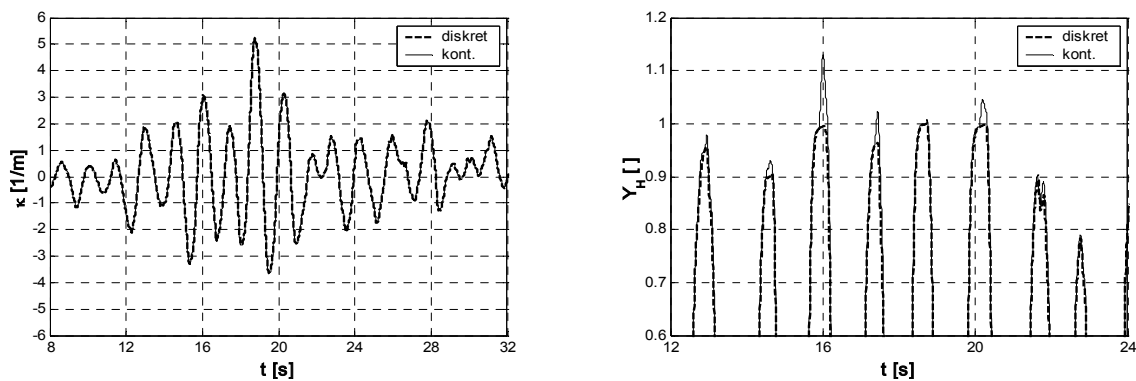


Abb. A.4: Knoten 3: Zeitverlauf der Krümmung (links) und des hysteretischen Rückstellmomentes (rechts), Vergleich kontinuierliche – diskrete Formulierung, Bouc-Wen, $\mathcal{A} = 1$; $\gamma = \nu = 0,5$; $\kappa_Y = 1$; $\alpha = 0,5$;

Anhang B

ESL bei ebener Biegung in kontinuierlicher Formulierung

B.1 ESL der Hysterese Modelle in kontinuierlicher Formulierung

Durch Einsetzen der kontinuierlichen Formulierung (2.39) bei ebener Biegung in Gl. (4.86) entsteht aus dem Erwartungswert ein Integral über vier Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 c_{eq\,jk} &= E \left\{ \frac{\partial \sum H_{Y\,jm}(\dot{\bar{\varphi}}, Y_H) \dot{\bar{\varphi}}_m}{\partial \dot{\bar{\varphi}}_k} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \sum H_{Y\,jm}(\dot{\bar{\varphi}}, Y_H) \dot{\bar{\varphi}}_m}{\partial \dot{\bar{\varphi}}_k} f(\dot{\bar{\varphi}}_i, \dot{\bar{\varphi}}_{i+1}, Y_{H_i}, Y_{H_{i+1}}) d\dot{\bar{\varphi}}_i d\dot{\bar{\varphi}}_{i+1} dY_{H_i} dY_{H_{i+1}} \\
 k_{eq\,jk} &= E \left\{ \frac{\partial \sum H_{Y\,jm}(\dot{\bar{\varphi}}, Y_H) \dot{\bar{\varphi}}_m}{\partial Y_{H_k}} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum H_{Y\,jm}(\dot{\bar{\varphi}}, Y_H) \dot{\bar{\varphi}}_m}{\partial Y_{H_k}} f(\dot{\bar{\varphi}}_i, \dot{\bar{\varphi}}_{i+1}, Y_{H_i}, Y_{H_{i+1}}) d\dot{\bar{\varphi}}_i d\dot{\bar{\varphi}}_{i+1} dY_{H_i} dY_{H_{i+1}}
 \end{aligned} \quad (B.1)$$

Das Gleichungssystem ändert sich gegenüber der diskreten Formulierung in Gl. (2.42) durch Ersetzen des Vektors der Krümmungsgeschwindigkeit $\mathbf{\kappa}$ durch den Vektor der Geschwindigkeit der Relativverdrehungen $\dot{\bar{\varphi}}$ sowie der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\mathbf{\kappa}}$ durch $\mathbf{T}_{\dot{\bar{\varphi}}}$. Da die äquivalenten Teilmatrizen \mathbf{K}_{eq} und \mathbf{C}_{eq} in den Knoten pro Element nicht entkoppelt sind, erhalten sie auch Nebendiagonalwerte. In den einzelnen Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{\eta}_j$ der j plastizierten Elemente werden zusätzlich die Kovarianzen zwischen den Knotenwerten pro Element benötigt.

$$\boldsymbol{\eta}_j = E \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varphi}}_i \\ \dot{\bar{\varphi}}_{i+1} \\ Y_{H_i} \\ Y_{H_{i+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varphi}}_i & \dot{\bar{\varphi}}_{i+1} & Y_{H_i} & Y_{H_{i+1}} \end{bmatrix} \right\}. \quad (B.2)$$

B.2 ESL der Hysterese Modells nach Bouc-Wen in kontinuierlicher Formulierung

Angewandt auf das Bouc-Wen Modells Gl. (A.9) (für N ungerade) führen die partiellen Ableitungen der nichtlinearen Zusatzgleichungen zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_{Y\,jn}(\dot{\bar{\varphi}}, Y_H) \dot{\bar{\varphi}}_n}{\partial \dot{\bar{\varphi}}_k} \kappa_Y l &= A H_{\dot{\bar{\varphi}}\,jk} - \gamma \left(H(1, Y_H)_{jk} - 2 \left(H(\xi_{\dot{\bar{\varphi}}}, Y_H)_{jk} + \frac{\partial H(\xi_{\dot{\bar{\varphi}}}, Y_H)_{jm}}{\partial \xi_{\dot{\bar{\varphi}}}} \frac{\partial \xi_{\dot{\bar{\varphi}}}}{\partial \dot{\bar{\varphi}}_k} \right) \right) \operatorname{sgn}(\dot{\bar{\varphi}}_{i+1} + \dot{\bar{\varphi}}_i) + \\
 &- \nu \left(H(1, Y_H)_{jk} - 2 H(\xi_Y, Y_H)_{jk} \right) \operatorname{sgn}(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i})
 \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial H_{Y_{jn}}(\dot{\varphi}, Y_H) \dot{\varphi}_n}{\partial Y_{Hk}} \kappa_{y,l} = \left[-\gamma \left(\frac{\partial H(1, Y_H)_{jn}}{\partial Y_{Hk}} - 2 \frac{H(\xi_{\dot{\varphi}}, Y_H)_{jn}}{\partial Y_{Hk}} \right) \cdot \text{sgn}(\dot{\varphi}_{i+1} + \dot{\varphi}_i) + \right. \\ \left. -\nu \left(\frac{\partial H(1, Y_H)_{jn}}{\partial Y_{Hk}} - 2 \left(\frac{\partial H(\xi_Y, Y_H)_{jn}}{\partial Y_{Hk}} + \frac{\partial H(\xi_Y, Y_H)_{jn}}{\partial \xi_Y} \frac{\partial \xi_Y}{\partial Y_{Hk}} \right) \right) \cdot \text{sgn}(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}) \right] \cdot \dot{\varphi}_n \quad (\text{B.4})$$

$$j, k, n = i, i+1$$

Die einzelnen Ableitungsterme spalten sich für $N = 1$ auf in:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\xi, Y_H)}{\partial \xi} = \begin{cases} 0 & \forall \xi < 0 \cup 1 < \xi \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^T(\xi)' \mathbf{Y}_H & \mathbf{P}_{12}^T(\xi)' \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{P}_{21}^T(\xi)' \mathbf{Y}_H & \mathbf{P}_{22}^T(\xi)' \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} & \forall 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

mit

$$\mathbf{P}_{11}(\xi)' = \begin{bmatrix} -36\xi^3 + 84\xi^2 - 64\xi + 16 \\ 36\xi^3 - 48\xi^2 + 16\xi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{12}(\xi)' = \mathbf{P}_{21}(\xi)' = \begin{bmatrix} -36\xi^3 + 72\xi^2 - 44\xi + 8 \\ 36\xi^3 - 36\xi^2 + 8\xi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{22}(\xi)' = \begin{bmatrix} -36\xi^3 + 60\xi^2 - 28\xi + 4 \\ 36\xi^3 - 24\xi^2 + 4\xi \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Die weiteren partiellen Ableitungen in den Gln. (B.3) und (B.4) sind:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\xi_Y, \mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_i}} = \begin{cases} 0 & \forall \xi < 0 \\ \begin{bmatrix} (-9\xi^4 + 28\xi^3 - 32\xi^2 + 16\xi) & (-9\xi^4 + 24\xi^3 - 22\xi^2 + 8\xi) \\ (-9\xi^4 + 24\xi^3 - 22\xi^2 + 8\xi) & (-9\xi^4 + 20\xi^3 - 14\xi^2 + 4\xi) \end{bmatrix} & \forall 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(1, \mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_i}} & \forall 1 < \xi \end{cases} \\ \frac{\partial \mathbf{H}(\xi_Y, \mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_{i+1}}} = \begin{cases} 0 & \forall \xi < 0 \\ \begin{bmatrix} (9\xi^4 - 16\xi^3 + 8\xi^2) & (9\xi^4 - 12\xi^3 + 4\xi^2) \\ (9\xi^4 - 12\xi^3 + 4\xi^2) & (9\xi^4 - 8\xi^3 + 2\xi^2) \end{bmatrix} & \forall 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\partial \mathbf{H}(1, \mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_{i+1}}} & \forall 1 < \xi \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \xi(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\dot{\varphi}_{i+1}}{3(\dot{\varphi}_{i+1} + \dot{\varphi}_i)^2}, \quad \frac{\partial \xi(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}_{i+1}} = \frac{-\dot{\varphi}_i}{3(\dot{\varphi}_{i+1} + \dot{\varphi}_i)^2}, \\ \frac{\partial \xi(\mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_i}} = \frac{-Y_{H_{i+1}}}{(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i})^2}, \quad \frac{\partial \xi(\mathbf{Y}_H)}{\partial Y_{H_{i+1}}} = \frac{Y_{H_i}}{(Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i})^2}. \quad (\text{B.8})$$

B.3 ESL des Hysterese Modells nach Suzuki-Minai in kontinuierlicher Formulierung

Die partiellen Ableitungen der hysteretischen Entwicklungsgleichung können in der folgenden Form angegeben werden:

$$\frac{\partial H_{Y_{jn}}(\dot{\varphi}, Y_H) \dot{\varphi}_n}{\partial Y_{Hk}} \kappa_Y l = \left(\frac{\partial H(\xi_2)_{jn}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial Y_{Hk}} - \frac{\partial H(\xi_1)_{jn}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial Y_{Hk}} + \frac{\partial H(\xi_4)_{jn}}{\partial \xi_4} \frac{\partial \xi_4}{\partial Y_{Hk}} - \frac{\partial H(\xi_3)_{jn}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial Y_{Hk}} \right) \dot{\varphi}_n \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{Y_{jn}}(\dot{\varphi}, Y_H) \dot{\varphi}_n}{\partial \dot{\varphi}_k} \kappa_Y l = & \left(\frac{\partial H(\xi_2)_{jn}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial H(\xi_1)_{jn}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{\varphi}_k} + \frac{\partial H(\xi_4)_{jn}}{\partial \xi_4} \frac{\partial \xi_4}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial H(\xi_3)_{jn}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) \dot{\varphi}_n + \\ & + H(\xi_2)_{jk} - H(\xi_1)_{jk} + H(\xi_4)_{jk} - H(\xi_3)_{jk} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\xi)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 36\xi^2 - 48\xi + 16 & -36\xi^2 + 36\xi - 8 \\ -36\xi^2 + 36\xi - 8 & 36\xi^2 - 24\xi + 4 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Die weitere numerische Behandlung vereinfacht sich, wenn in Abhängigkeit der Fallunterscheidung (Tabelle A.1 eine Verschiebung der Koordinaten von \mathbf{Y}_H vorgenommen wird, um die exzentrisch bei (1;1) bzw. (-1;-1) liegenden Pole in den Ursprung zu legen:

$$Z_{i+1} = Y_{H_{i+1}} - 1, Z_i = Y_{H_i} - 1 \quad \forall \xi = \xi_Y^+ \quad \text{und} \quad Z_{i+1} = Y_{H_{i+1}} + 1, Z_i = Y_{H_i} + 1 \quad \forall \xi = \xi_Y^- \quad (\text{B.12})$$

$\xi(Z)$ wird dann in beiden Fällen ($\xi = \xi_Y^+, \xi = \xi_Y^-$):

$$\xi(Z_i, Z_{i+1}) = \frac{Z_i}{Z_i - Z_{i+1}} \quad (\text{B.13})$$

Die partiellen Ableitungen sind mit den Gln. (B.8) identisch.

Wird auf Polarkoordinaten $(r_{\dot{\varphi}}, \beta_{\dot{\varphi}})$ übergegangen, so wird:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\xi_{\dot{\varphi}})}{\partial \xi} = \frac{4}{(\sin(\beta_{\dot{\varphi}}) + \cos(\beta_{\dot{\varphi}}))^2} \begin{bmatrix} \sin^2(\beta_{\dot{\varphi}}) & -\sin(\beta_{\dot{\varphi}})\cos(\beta_{\dot{\varphi}}) \\ -\sin(\beta_{\dot{\varphi}})\cos(\beta_{\dot{\varphi}}) & \cos^2(\beta_{\dot{\varphi}}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Wird nun diese Matrix mit dem Vektor $\dot{\varphi}(r_{\dot{\varphi}}, \beta_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} r_{\dot{\varphi}} \cos(\beta_{\dot{\varphi}}) & r_{\dot{\varphi}} \sin(\beta_{\dot{\varphi}}) \end{bmatrix}^T$ multipliziert, ist leicht zu erkennen, dass das Produkt zu einem Nullvektor führt. Insgesamt wird also der erste Term im Klammern von Gleichung (B.10) zu Null.

Von den Gln. (B.3), (B.4) ist der Erwartungswert zu bilden. Da die Entwicklungsgleichung von vier Variablen unabhängiger Zufallsprozesse abhängt (ohne die Abspaltung der Starrkörperanteile wären es acht!), entsteht ein Integral über vier Koordinaten.

B.4 Numerische Integration

Unter der Verwendung von vorhandenen Integrationsalgorithmen z.B. von Mathematiksoftware konvergiert die Auswertung der Integrale nicht, da

- die Integrale an den Unstetigkeitsstellen der Signumfunktionen unterteilt werden müssen,
- die Topologie der Verbundverteilungen eine Gewichtung der Stützstellen erfordert. Erstens ist eine Gewichtung im Ursprung vorteilhaft, da die Randbereiche der mehrdimensionalen Normalverteilungen kaum zum Volumen beitragen, zweitens sind die im FE-Modell „benachbarten“ Koordinaten Y_{H_i} mit $Y_{H_{i+1}}$ und $\dot{\phi}_i$ mit $\dot{\phi}_{i+1}$ sehr stark korreliert, was zu einer starken Verzerrung der Verbundverteilungsdichte führt.

Die uneigentlichen Integrale (B.1) werden numerisch ausgewertet. Aufgrund der vier Dimensionen des Integranden scheiden numerische Verfahren aus, die an äquidistanten Stützstellen auswerten (z.B. „Midpoint“-Verfahren). Der Polynomgrad n_p steigt lediglich mit der Verdopplung der Stützstellen n_s ($n_p \sim \log_2(n_s)$). Wird eine Gauß-Quadratur verwendet, sind für die gleiche Fehlerordnung wesentlich weniger Stützstellen erforderlich, da der Polynomgrad pro hinzukommende Stützstelle ansteigt.

Prädestiniert für die numerische Integration von Gl. (B.1) wäre eine Gauß-Hermite Quadratur, da die Wichtungsfunktion $W(x) = e^{-x^2}$ der mittelwertfreien normierten Dichtefunktion der Gauß-Verteilung entspricht [119]. Nach Koordinatentransformation könnte das uneigentliche Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über vier Dimensionen relativ problemlos ausgewertet werden. Der Nachteil der Gauß-Quadratur allgemein gegenüber den auf der Trapezoid-Regel beruhenden Verfahren ist jedoch, dass der Integrand eine glatte Funktion sein muss. Dies bedingt, dass das gesamte Integral in Teilintegrale aufgeteilt werden muss, wobei sich die Integrationsgrenzen aus den Fallunterscheidungen in Abhängigkeit der Signum-Funktionen (Bouc-Wen) bzw. nach Tab. A.1 (Suzuki-Minai) ergeben (für $\xi > 0$ oder $\xi < 1$).

Aus diesem Grund scheidet eine Gauß-Hermite Quadratur aus, da diese nur für die Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ vorgesehen ist. Verwendet werden kann die Gauss-Legendre Quadratur, für welche die Integrationsgrenzen beliebig wählbar sind. Die Wichtungsfunktion der Gauß-Legendre Quadratur ist $W = 1$.

Die Polynome in den Gln. (B.6), (B.7) und (B.11) bereiten weiter keine Schwierigkeiten. Um die Charakteristik des Integranden zu untersuchen, werden die Nullstellen (Gl. A.8) bzw. deren Ableitungen genauer untersucht. Da beide Nullstellen nicht voneinander abhängen, ist es möglich, die Funktionswerte der Nullstellen sowie die Integrationsgrenzen in der $Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}$ ($Z_{H_{i+1}} - Z_{H_i}$)-Ebene bzw. $\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i$ Ebene darzustellen (Abb. B.1).

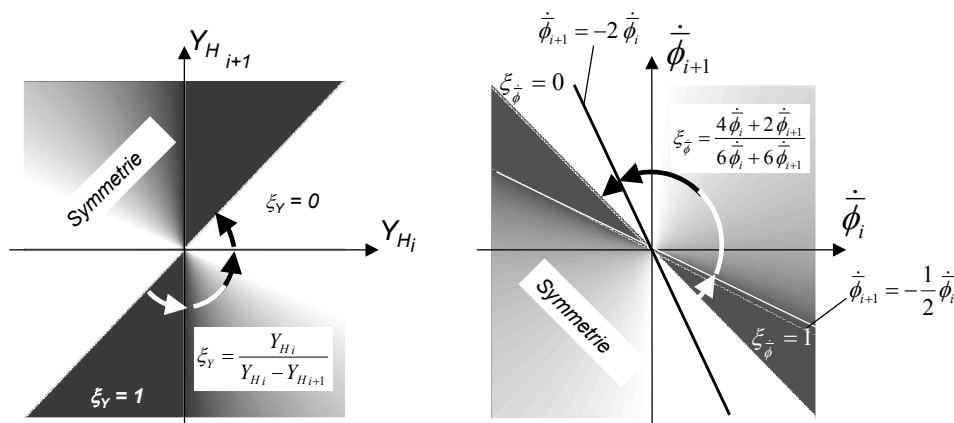


Abb. B.1: Werte der Nullstellen ξ_Y bzw. ξ_Z in der $Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}$ ($Z_{H_{i+1}} - Z_{H_i}$)-Ebene (links) und von $\xi_{\dot{\phi}}$ in der $\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i$ Ebene (rechts).

Die ebenen Darstellungen der Ableitungen der Nullstellen (Gl. B.8) sehen ähnlich aus, die Intervallgrenzen bleiben dieselben.

Aus den folgenden Gründen ist nun eine Koordinatentransformation in der jeweiligen Ebene auf Polarkoordinaten vorteilhaft:

- Aus den Darstellungen ist ersichtlich, dass die Integrationsgrenzen strahlenförmig vom Ursprung aus verlaufen. Eine Unterteilung der Integralgrenzen ist dann nur über die Winkelkoordinate erforderlich. Das Integral in radialer Richtung reicht von $r = 0$ bis $r \rightarrow \infty$.
- Sowohl der Wert der Nullstelle als auch der Wert deren Ableitung ist nur vom Winkel abhängig, nicht vom Radius. Die Matrizen in den Gln. (B.6), (B.7) und (B.11) brauchen dann nur noch in Abhängigkeit von zwei Koordinaten ausgewertet werden.
- Die Gradienten ändern sich um den Ursprung stärker als in weiterer Entfernung. Durch den Übergang auf Polarkoordinaten nimmt die Abtastung durch Stützstellen zum Ursprung hin zu.

Die Transformation in Polarkoordinaten nur in der Ebene entspräche in 3D dem Übergang auf Zylinderkoordinaten. Im Gegensatz dazu ist die 3. Dimension wieder in zwei Koordinaten aufgespalten, die ebenfalls in Polarkoordinaten transformiert werden. In der 4. Dimension kann die Transformation in den beiden Ebenen mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Polarkoordinatensysteme beschrieben werden.

Wurde bisher nur die Eigenschaft des ersten Faktors des Integranden betrachtet, so ist die numerische Integration auch auf die Form der vierdimensionalen Verteilungsdichtefunktion abzustimmen. Während die Prozesse der relativen Knotenverdrehungen und der hysteretischen Knotenmomente nur schwach korreliert sind, sind die beiden Zustandsvariablen untereinander jedoch sehr stark korreliert. Der Korrelationskoeffizient zwischen $Y_{H_{i+1}}$ und Y_{H_i} bzw. zwischen $\dot{\phi}_i$ und $\dot{\phi}_{i+1}$ ist meist $|\rho| > 0,9$. Dies bedeutet zum einen, dass die beiden Verbundverteilungen der $Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}$ Ebene und der $\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i$ Ebene näherungsweise aufeinander senkrecht stehen.

Zum anderen jedoch sind die Verteilungsdichten zu schmalen Ellipsen, die diagonal in den Ebenen liegen, verzerrt (Abb. B.2).

Um eine gleichmäßige Abtastung zu erzielen, ist eine Entzerrung der Ellipsen durch eine Transformation mit den Eigenvektoren der invertierten Kovarianzmatrix erforderlich. Würde man hier alle vier Dimensionen gleichzeitig transformieren, so würden aus den derzeit noch übersichtlichen Integrationsgrenzen in den Ebenen dreidimensionale Volumina. Um dies zu vermeiden, genügt es, jeweils nur die Eigenvektoren der invertierten 2×2 Teilmatrizen in den beiden Ebenen zu ermitteln und deren Koordinaten unabhängig voneinander zu transformieren. In dieser Form kann auch der Übergang auf Polarkoordinaten in den Ebenen problemlos beibehalten werden.

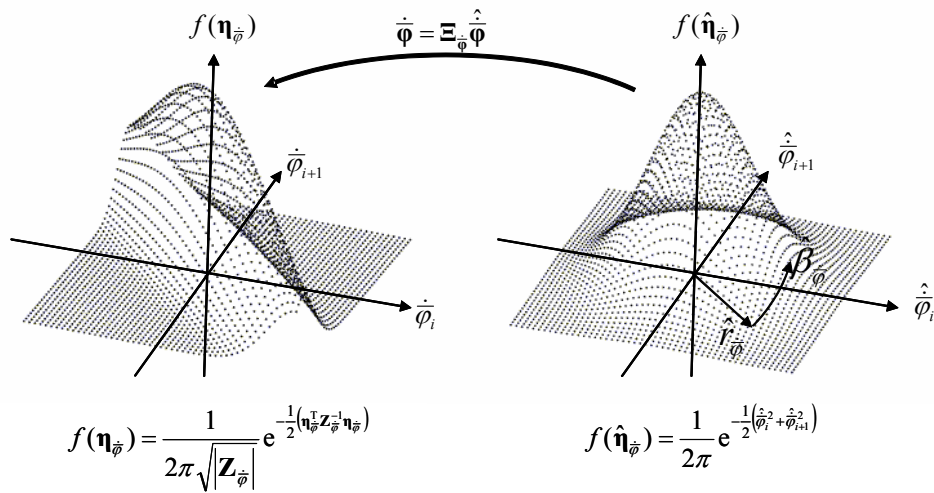


Abb. B.2: Transformation in die Hauptachsen der invertierten Kovarianzmatrix in 2D zur Entzerrung der Form der Verteilungsdichtefunktion.

In der Reihenfolge findet also zunächst die auf je zwei Koordinaten beschränkte Hauptachsentransformation mit normierten Eigenvektoren statt, um die neu aufgespannte Ebene in Polarkoordinaten abzutasten.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}} = \Xi_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \begin{bmatrix} r_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \cos(\beta_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}) \\ r_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \sin(\beta_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_H = \Xi_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} r_{\mathbf{Y}} \cos(\beta_{\mathbf{Y}}) \\ r_{\mathbf{Y}} \sin(\beta_{\mathbf{Y}}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$\Xi_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}$ und $\Xi_{\mathbf{Y}}$ sind die Matrizen mit den normierten Eigenvektoren der invertierten Teilmatrizen $\boldsymbol{\eta}_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}$ und $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{Y}}$ der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\eta}_j$ des plastizierten Elementes j . Die zur Normierung verwendeten Transformationsmatrizen sind:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Y}} = \left[\Xi_{\mathbf{Y}}^T \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{Y}}^{-1} \Xi_{\mathbf{Y}} \right]^{-1}; \quad \mathbf{T}_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \left[\Xi_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}^T \boldsymbol{\eta}_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}^{-1} \Xi_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \right]^{-1} \quad (\text{B.16})$$

Bei vollständiger Entkoppelung der Randverteilungen zwischen den beiden Ebenen wäre die Transformation gleichbedeutend mit einer Rückführung auf eine Gaußnormalverteilung mit der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\eta}_j$ gleich der Einheitsmatrix.

Es sei angemerkt, dass die teilweise Transformation nicht grundsätzlich von der Voraussetzung abhängt, dass die beiden Randverteilungen in den beiden Ebenen exakt aufeinander senkrecht stehen. Es ist also zu beachten, dass die Verteilungsdichtefunktion nicht in den transformierten Koordinaten, sondern in den Ausgangskordinaten berechnet werden muss. Die Transformation dient also lediglich für eine gleichmäßige Abtastung der gesamten Verteilungsdichtefunktion.

Die vollständig transformierte Integration lautet schließlich:

$$\begin{aligned}
c_{eq\ jk} &= \left| \Xi_{\dot{\phi}} \right| \cdot \left| \Xi_Y \right| \cdot \int_{\beta_Y=\beta_i}^{\beta_Y=\beta_{i+1}} \int_0^{\beta_Y=\beta_{j+1}} \int_0^{\beta_Y=\beta_j} \frac{\partial G_j(\dot{\phi}(r_{\dot{\phi}}, \beta_{\dot{\phi}}), \mathbf{Y}_H(r_Y, \beta_Y))}{\partial \dot{\phi}} f(\dot{\phi}(r_{\dot{\phi}}, \beta_{\dot{\phi}}), \mathbf{Y}_H(r_Y, \beta_Y)) r_{\dot{\phi}} dr_{\dot{\phi}} d\beta_{\dot{\phi}} r_Y dr_Y d\beta_Y \\
k_{eq\ jk} &= \left| \Xi_{\dot{\phi}} \right| \cdot \left| \Xi_Y \right| \cdot \int_{\beta_Y=\beta_i}^{\beta_Y=\beta_{i+1}} \int_0^{\beta_Y=\beta_{j+1}} \int_0^{\beta_Y=\beta_j} \frac{\partial G_j(\dot{\phi}(r_{\dot{\phi}}, \beta_{\dot{\phi}}), \mathbf{Y}_H(r_Y, \beta_Y))}{\partial Y_{Hk}} f(\dot{\phi}(r_{\dot{\phi}}, \beta_{\dot{\phi}}), \mathbf{Y}_H(r_Y, \beta_Y)) r_{\dot{\phi}} dr_{\dot{\phi}} d\beta_{\dot{\phi}} r_Y dr_Y d\beta_Y
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Im Unterschied zu den Integralen zur Entwicklungsgleichung nach Bouc-Wen sind für Suzuki-Minai die Integrationsabschnitte in den jeweiligen Ebenen über die Fallunterscheidung in der Tabelle in Abb. A.1 miteinander gekoppelt.

Beginnt man numerisch mit der Integration in der $Y_{H\ i-1} - Y_{H\ i}$ ($Z_{H\ i-1} - Z_{H\ i}$) Ebene, so kann das Integral über Gl. (B.10) für Suzuki-Minai z.B. nach dem Schema in Abb. B.3 numerisch ausgewertet werden. Die numerische Integration von Gl. (B.9) läuft nach demselben Schema ab, es müssen jedoch nur die Segmente ausgewertet werden in denen $\xi = \xi_Y^+$ bzw. $\xi = \xi_Y^-$ ist.

Die $Z_{H\ i-1} - Z_{H\ i}$ Ebene wird zunächst in drei Segmente aufgeteilt, in denen der Wert von ξ_Z aus ξ_Y^+ und ξ_Y^- ermittelt wird. In Abhängigkeit vom Segment 1, 2 oder 3 in der $Z_{H\ i-1} - Z_{H\ i}$ Ebene muss in der $\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i$ Ebene der Wert von ξ (für $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$) ermittelt werden (Abb. B.3). Dabei ist zu beachten, dass eine der Integrationsgrenzen in der $\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i$ Ebene von ξ_Z abhängig ist (gestrichelte Linie). Die Geradengleichung der abhängigen Integrationsgrenze ergibt sich aus der Gleichsetzung von ξ_Z mit $\xi_{\dot{\phi}}$:

$$\dot{\phi}_{i+1} = \frac{-(6 \cdot \xi_Z - 4)}{(6 \cdot \xi_Z - 2)} \cdot \dot{\phi}_i \tag{B.18}$$

Insgesamt erfolgt die numerische Integration in den folgenden Schritten (Suzuki-Minai Modell):

- Vorgabe der Anzahl der Stützstellen der Gaußquadratur (*Ca. 10 – 12 Stützstellen pro Integrationssegment genügen*).
- Berechnung der Stützstellen in Polarkoordinaten und Berechnung die Wichtungskoeffizienten der Gaußquadratur. *Die Berechnung der Stützstellen muss nur einmal durchgeführt werden.*
- Berechnung der Transformationsmatrizen Ξ_Y und $\Xi_{\dot{\phi}}$ aus den invertierten Teilmatrizen der Kovarianzmatrix \mathbf{Z} .
- Berechnung der konstanten Integrationsgrenzen β_Y und $\beta_{\dot{\phi}}$ in Polarkoordinaten.
- Transformation der konstanten Integrationsgrenzen β_Y und $\beta_{\dot{\phi}}$ mit Ξ_Y und $\Xi_{\dot{\phi}}$ zu $\hat{\beta}_{Y_i}$ und $\hat{\beta}_{\dot{\phi}_j}$.
- Segmentweise Integration über $\hat{\beta}_Z$ in der $Z_{H_{i-1}} - Z_{H_i}$ Ebene.
 - Integration über r_z , Berechnung von \mathbf{Z} durch Rücktransformation der Stützstellen aus Polarkoordinaten und mit Ξ_Y . Berechnung der variablen Integrationsgrenze $\beta_{\dot{\phi}}(\mathbf{Z})$ und Transformation zu $\hat{\beta}_{\dot{\phi}}(\mathbf{Z})$.
 - Segmentweise Integration über $\hat{\beta}_{\dot{\phi}}$ in der $\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i$ Ebene. Bestimmung von $\xi(\beta_Z, \beta_{\dot{\phi}})$, $\partial\xi(\beta_Z)/\partial Z$ und von \mathbf{Y}_H aus \mathbf{Z}_H gemäß Fallunterscheidung nach Schema Abb. B.3. Berechnung von $\mathbf{H}(\xi_i)$ und $\partial\mathbf{H}(\xi_i)/\partial\xi$.
 - Integration über $r_{\dot{\phi}}$ in der $\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i$ Ebene, Berechnung von $\dot{\Phi}$ durch Rücktransformation der Stützstellen aus Polarkoordinaten und mit $\Xi_{\dot{\phi}}$. Auswertung der Verteilungsdichtefunktion $f(\dot{\Phi}, \mathbf{Y}_H)$. Berechnung des gesamten Funktionswertes aus den Gln. (B.9) und (B.10). Multiplikation der Funktionswerte mit $r_{\dot{\phi}}$ und den Wichtungskoeffizienten der Gaussquadratur.
 - Multiplikation der Segmentintegrale mit den Wichtungskoeffizienten.
 - Multiplikation mit den Wichtungskoeffizienten und mit r_z .
- Multiplikation der Segmentintegrale mit den Wichtungskoeffizienten und mit den Determinanten $|\Xi_{\dot{\phi}}|$ und $|\Xi_Y|$.

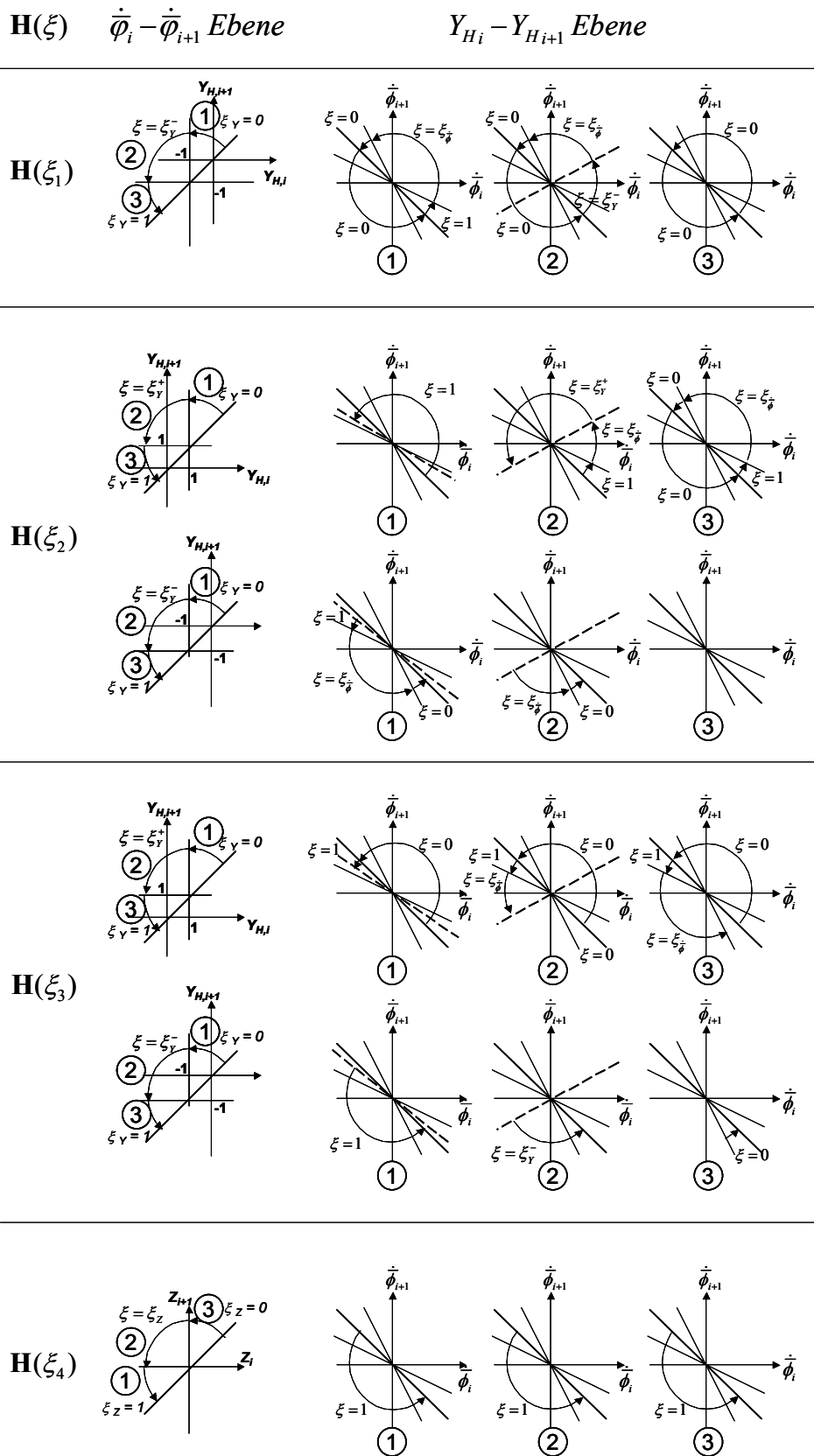


Abb. B.3: Schema der numerischen Auswertung von Gl. (B.1) für Suzuki-Minai mit Beginn in der $Y_{H_{i+1}} - Y_{H_i}$ Ebene.

B.5 Vergleich zwischen kontinuierlicher und diskreter Formulierung bei ESL

Ebenso wie in Anhang A wird die Lösung in kontinuierlicher Formulierung mit der diskreten Elementformulierung der Hysterese Modelle verglichen. Wie in Abschnitt A.3 wird einmal der Fall betrachtet, dass nur Element 1 an der Einspannung plastiziert (plastisches Gelenk), und zum zweiten der Fall, dass sich die Plastizierung bei Laststeigerung auf weitere Elemente ausdehnen kann. Aus den Abbn. B.4 und B.5 geht hervor, dass mit der gewählten Diskretisierung auch mit ESL so gut wie keine Unterschiede zwischen den beiden Formulierungen bestehen, was die Standardabweichungen betrifft.

War der Rechenaufwand in der Simulation noch in etwa für beide Formulierungen gleich, so ist der Aufwand bei ESL in der kontinuierlichen Formulierung wegen der numerischen Auswertung des Integrals über vier Dimensionen erheblich größer als für die diskrete Formulierung. Aus diesem Grund ist es von großem Vorteil, wenn auf die diskrete Formulierung ohne maßgebenden Genauigkeitsverlust übergegangen werden kann.

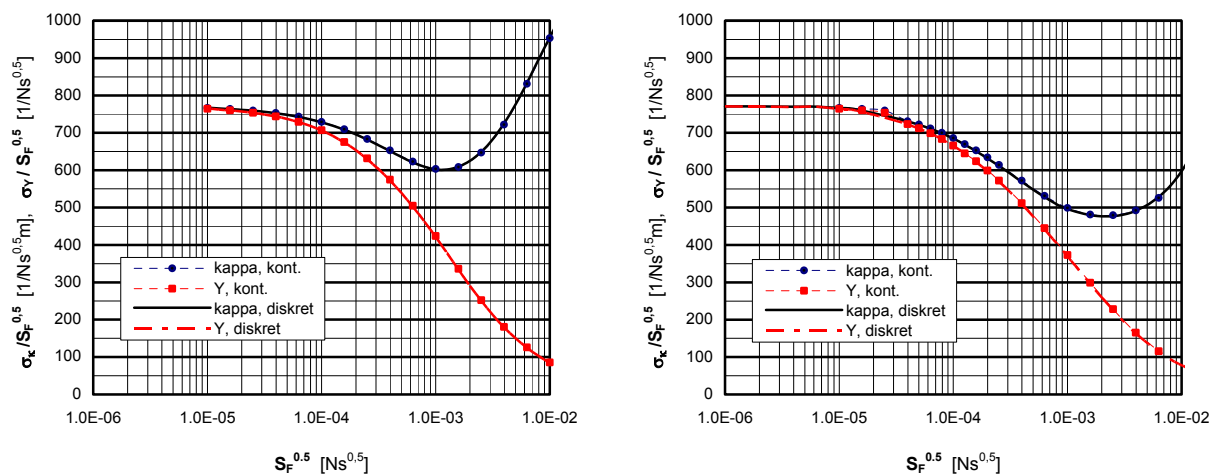


Abb. B.4: Standardabweichungen der Krümmung κ und des hysteretischen Rückstellmoments Y_H bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F an Knoten 1: Vergleich ESL kontinuierliche – ESL diskrete Formulierung, Bouc-Wen; links: Plastizierung von Element 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10.

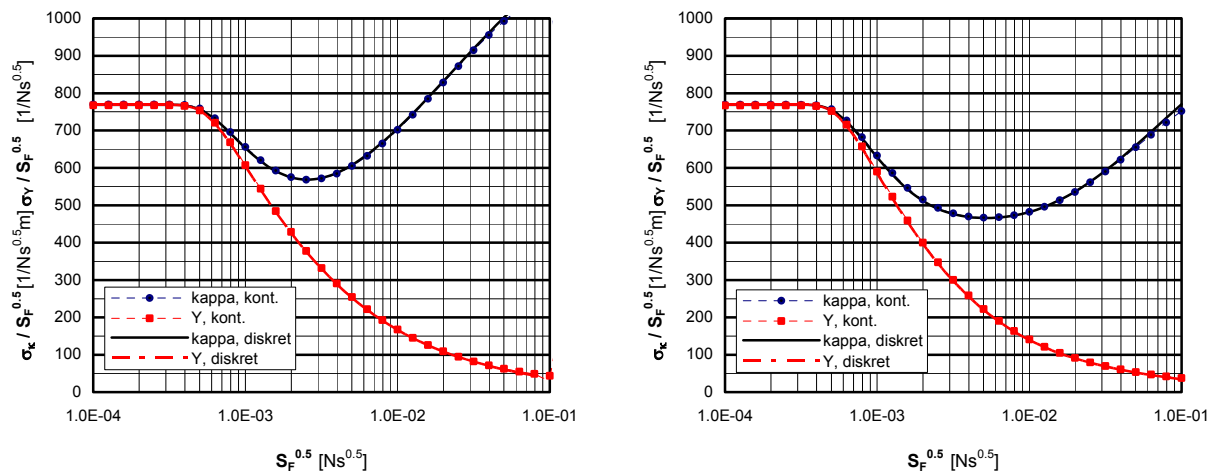


Abb. B.5: Standardabweichung der Krümmung und des hysteretischen Rückstellmoments Y_H bezogen auf die spektrale Dichte der Last S_F an Knoten 1 (Einspannung): Vergleich ESL kontinuierliche – ESL diskrete Formulierung, Suzuki-Minai, $\kappa_Y = 1$, $\alpha = 0,5$; links: Plastizierung von Element 1, rechts: Plastizierung von Element 1 – 10,

Literatur

- [1] Abrahamson, N.A., Schneider, J.F., Stepp, J.C.: *Empirical Spatial Coherency Functions for Application to Soil-Structure Interaction Analysis*. Earthquake Spectra, **7**(1), S. 1-27, 1991.
- [2] Aghababaii Mobarakeh, A., Rofooei, F.R., Ahamdi, G.: *Simulation of earthquake records using time-varying Arma(2,1) model*. Probabilistic Engineering Mechanics **17**, S. 15-34, 2002.
- [3] Ang, A.H.-S.: *Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Buildings*. Stochastic Methods in Structural Dynamics, Hg.: Schuëller, G.I. und Shinozuka, M., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster S. 154-171, 1987.
- [4] Atalik, T.S., Utku, S.: *Stochastic linearization of multi-degree-of-freedom non-linear systems*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics **4**, S. 411-420, 1976.
- [5] Baber, T., Wen, Y.K.: *Random vibration of hysteretic degrading systems*. Journal of engineering Mechanics (ASCE) **107**, S. 1069-1087, 1981.
- [6] Baber, T., Wen, Y.K.: *Stochastic response of multistory yielding frames*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics **10**, S. 403-416, 1982.
- [7] Baber, T., Noori, M.: *Random vibration of pinching hysteretic systems*. Probabilistic Engineering Mechanics and Structural Reliability, Proceedings of the 4th Specialty Conference 1984, ASCE, New York, S. 147-150, 1984.
- [8] Baber, T.: *Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Systems*. Journal of Engineering Mechanics **110**(7), S. 1036-1049, 1984.
- [9] Bachmann A., Haussmann G., Graubner C.-A.: *Extreme Windereignisse und deren Auswirkungen auf die Beanspruchung von Bauwerken*. Bauingenieur **78**, S. 337-348, Juli/August 2003.
- [10] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs/NJ, USA, 1982.
- [11] Bathe, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [12] Bergman, L.A., Wojkiewicz, S.F., Johnson, E.A., Spencer, B.F. Jr.: *Some reflections on the efficacy of moment closure methods*. Spanos, P.D. (Hg): *Computational Stochastic Mechanics*, Balkeema, Rotterdam, Niederlande, S. 87-95, 1995.
- [13] Bernard, P., Wu, L.: *Linéarisation d'un oscillateur excité par un bruit blanc: un point de vue entropique*. Bericht des Laboratoire de Mathématiques Appliquées. Université Blaise Pascal, Paris 1995.
- [14] Bernard, P.: *Stochastic linearization: True, Standard or Gaussian*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 59-65, 2003.
- [15] Bernard, P., Fleury, G.: *Stochastic Newmark scheme*. Probabilistic Engineering Mechanics **17**, S. 45-61, 2001.
- [16] Bonfratello, S., Di Paola, M., Spanos, P.D.: *Stochastic response of MDOF wind-excited structures by means of Volterra series approach*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics **74-76**, S. 1135-1145, 1998.

-
- [17] Bonfratello, S., Muscolino, G.: *Filter approach to the stochastic analysis of MDOF wind-excited structures*. Probabilistic Engineering Mechanics **14**, S. 311-321, 1999.
- [18] Bouc, R.: *Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis*. In: Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation, Prague, S. 315, 1967.
- [19] Cacciola, P., Muscolino, G., Ricciardi, G.: *On some closure methods in nonlinear stochastic dynamics*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 79-88, 2003.
- [20] Cai, G.Q.: *Nonlinear Structural Frame under Random Excitation*. Report of the Center for Applied Stochastic Research, Florida Atlantic University, USA 2002.
- [21] Casciati, F., Faravelli, L.: *Equivalent Linearization Technique and Seismic Reliability of Random Systems*. In: Proceedings of the Fourth Speciality Conference 1984, on Probabilistic Mechanics and Structural Safety, ASCE, New York, S. 143-146, 1984.
- [22] Casciati, F.: *Non-linear stochastic dynamics of large structural systems by equivalent linearization*. In: Proceedings of the International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, S. 1165-1172, University of Waterloo, Vancouver, 1987.
- [23] Casciati, F.: *Approximate Methods in Non-Linear Stochastic Dynamics*. Stochastic Methods in Structural Dynamics, Hg.: Schuëller, G.I. und Shinozuka, M., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster S. 154-171, 1987.
- [24] Casciati, F.: *Stochastic dynamics of hysteretic media*. Structural Safety **6**, S. 259-269, 1989.
- [25] Casciati, F., Faravelli, L.: *Endochronic Theory and Non-Linear Stochastic Dynamics of 3D-Frames*. In: Proceedings of the Fifth Speciality Conference 1988, ASCE, New York, on Probabilistic Mechanics and Structural Safety, S. 400-403, 1988.
- [26] Casciati, F., Faravelli, L.: *Stochastic equivalent linearization for 3-D frames*. Journal of Engineering Mechanics ASCE, New York, USA, **114**(10), S. 1760-1771, 1988.
- [27] Casciati, F., Faravelli, L.: *Hysteretic 3-dimensional frames under stochastic excitation*. Res Mechanica **26**, S. 193-213, 1989.
- [28] Casciati, F., Faravelli, L.: *Non-Linear Stochastic Finite-Element Analysis of Continua*. In: Proceedings of ICOSSASR '89, on Structural Safety and Reliability, ASCE, New York, USA, S. 1105-1112, 1989.
- [29] Casciati, F., Faravelli, L., Hashofer, A.M.: *A new Philosophy for Stochastic Equivalent Linearization*. Probabilistic Engineering Mechanics **8**, S. 179-185, 1993.
- [30] Casciati, F., Faravelli, L.: *Reliability Assessment for Non-Linear Random Frames*. Probabilistic methods in the Mechanics of Solids and Structures, IUTAM Symposium Stockholm 1994, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, S 469-478, 1994.
- [31] Casciati, F., Faravelli, L., Venini, L.: *Frequency Analysis in Stochastic Linearization*. Journal of Engineering Mechanics (ASCE) **120**(12), S. 2498-2518, 1994.
- [32] Caughey, T.K.: *Random excitation of a system with bilinear hysteresis*. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics **27**, S. 649-652, 1960.
- [33] Caughey, T.K.: *Equivalent linearization techniques*. Journal of the Acoustical Society of America **35**(11), S. 1706-1711, 1963.
- [34] Chen, C.C.T., Yang, H.T.Y.: *Flexible Beam and Frame Elements under Nonwhite and Nonzero Mean Loads*. Journal of Engineering Mechanics, **117**(6), S. 1346-1364, 1991.
- [35] Crandall, S.H.: *Is stochastic equivalent linearization a subtly flawed procedure?* Probabilistic Engineering Mechanics **16**, S. 169-176, 2001.

-
- [36] Clough, R.W., Wilson, E.L.: *Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **11**(18), S. 107-129, 1979.
- [37] Clough, R.W., Penzien, J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Book Co., Singapore, Second Edition 1993.
- [38] Colajanni, P., Elishakoff, I.: *A subtle error in the stochastic linearization technique*. Chaos, Solitons, Fractals **9**, S. 1957-1972, 1997.
- [39] DIN V ENV 1991-2-4: Eurocode 1: *Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke*. Teil 2-4: *Einwirkungen auf Tragwerke - Windlasten*. Beuth-Verlag Berlin, Dezember 1996.
- [40] DIN V ENV 1993-1: Eurocode 3: *Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten*. Beuth-Verlag Berlin, Mai 2002.
- [41] DIN 1055-4: *Lastannahmen für Bauten*. Teil 4: *Verkehrslasten, Windlasten bei nicht schwingungsanfälligen Bauwerken*. Beuth-Verlag Berlin, August 1986 mit Berichtigung A1 vom Juni 1997.
- [42] DIN 1055-100: *Lastannahmen für Bauten*. Teil 100: *Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln*. Beuth-Verlag Berlin, März, 2001.
- [43] DIN 4149-1: *Bauten in deutschen Erdbebengebieten: Lastannahmen, Bemessung und Ausführung üblicher Hochbauten*. Beuth-Verlag Berlin, April, 1981.
- [44] Dobson, S., Noori, M., Hou, Z., Dimentberg, M., Baber, T.: *Modeling and random vibration analysis of SDOF systems with asymmetric hysteresis*. International Journal of Non-Linear Mechanics **32**(4), S. 669-680, 1997.
- [45] Donley, M.G., Spanos, P.D.: *Dynamic Analysis of Non-Linear Structures by the Method of Statistical Quadraticization*. Lecture notes in Engineering 57, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1990.
- [46] E DIN 1055-4: *Einwirkungen auf Tragwerke Teil 4: Windlasten*. Beuth-Verlag Berlin, Normentwurf vom August 2002.
- [47] E DIN 4149: *Bauten in deutschen Erdbebengebieten: Auslegung von Hochbauten gegen Erdbeben*. Normentwurf vom Oktober 2002, Beuth-Verlag Berlin 2002.
- [48] Elishakoff, I., Zhang, X.: *An Appraisal of Different Stochastic Linearization Techniques*. Journal of Sound and Vibration, **153**(2), S. 370-375, 1992.
- [49] Elishakoff, I., Cai, G.Q.: *Approximate Solution for Nonlinear Random Vibration Problems by Partial Stochastic Linearization*. Probabilistic Engineering Mechanics **8**, S. 233-237, 1993.
- [50] Elishakoff, I., Colombi, P.: *Successful Combination of the Stochastic Linearization and Monte Carlo Methods*. Journal of Sound and Vibration **160**(3), S. 554-558, 1993.
- [51] Eurocode 8: *Design of structures for earthquake resistance*. Part 1: *General rules, seismic actions and rules for buildings*. Draft No 6 – Stage 49. Entwurf Januar 2003.
- [52] Falsone, G., Elishakoff, I.: *Modified Stochastic Linearization Technique for Colored Noise Excitation of Duffing Oscillator*. International Journal of Non-Linear Mechanics, **29**(1), S. 65-69, 1994.
- [53] Falsone, G., Pirotta, A.: *A new Stochastic Linearization Approach*. In: Proceedings of the Second International conference on Computational Stochastic Mechanics 1994, A.A. Balkema, Rotterdam Brookfield, S. 105-112, 1995.
- [54] Falsone, G., Sotera, M.: *About the evaluation of $E[\dot{f}(X)X]$ when X is a non-Gaussian random variable*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 189-198, 2003.
- [55] Fan, F.G., Ahmadi, G.: *On loss of accuracy and non-uniqueness of solutions generated by equivalent linearization and cumulant-neglect methods*. Journal of Sound and Vibration, **137**(3), 1990.

-
- [56] Fan, F.G., Ahmadi, G.: *Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquakes*. Probabilistic Engineering Mechanics **5**, S. 171-181, 1990.
- [57] Foschi, R.O., Li, H.: *Hysteretic response and Structural Reliability*. In: Proceedings of the Seventh Speciality Conference 1996, ASCE, New York, on Probabilistic Mechanics and Structural Safety, S. 882-885, 1996.
- [58] FEMtools software revision 2.2.1, DDS Belgium 2003.
- [59] Foliente, G.C., Singh, M.P., Noori, M.N.: *Equivalent linearization of generally pinching hysteretic degrading systems*. Earthquake engineering and Structural Dynamics **25**, S. 611-629, 1992.
- [60] Garcia-Archilla, B., Novo, J., Titi, E.S.: *Postprocessing the Galerkin method: A novel approach to approximate inertial manifolds*. Siam Journal of Numerical Analysis, **35**(3) S. 941-972, 1998.
- [61] Gebekken, N.: *A refined numerical approach for the ultimate-load analysis of 3-D steel rod structures*. Engineering Computations, **15**(3), S. 312-344, 1998.
- [62] Gehrman, J.: *Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Konstruktionen mit zufälligen Systemeigenschaften*. Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, **7/2001**, Hg.: Zilch, K. et al., München, 2001.
- [63] Geisenhofer, M., Grundmann, H.: *Equivalent Statistical Linearization of Hysteretic Systems using a Reduced Set of Shapefunctions*. In: Corotis, R.B., Schuëller, G.I., Shinozuka, M. (Hg.): Structural safety and reliability - Proceedings of the eighth international conference, ICOSSAR '01, Newport Beach, CA, USA, Swets & Zeitlinger Publishers / A.A. Balkema Publishers, Rotterdam, Niederlande, 2001.
- [64] Geisenhofer, M.: *Statistische Linearisierung für große Mehrfreiheitsgradsysteme in reduzierter Basis aus elastischen und plastischen Ansatzmoden*. Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, **1/2002**, Hg.: Zilch, K. et al., München, 2002.
- [65] Ghanem, R., Spanos, P.: *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer Verlag Berlin, 1991.
- [66] Grigoriu, M.: *Equivalent linearization for Poisson White Noise Input*. Probabilistic Engineering Mechanics **10**, S. 45-51, 1995.
- [67] Grigoriu, M.: *Linear and Nonlinear Systems with Non-Gaussian White Noise Input*. Probabilistic Engineering Mechanics **10**, S. 171-179, 1995.
- [68] Grigoriu, M., Ditlevsen O., Arwade S.R.: *A Monte Carlo simulation model for stationary non-Gaussian processes*. Probabilistic Engineering Mechanics **18**, S. 87-95, 2003.
- [69] Grundmann, H., Geisenhofer, M.: *Stochastic Dynamics of Hysteretic Frame Structures – Equivalent Statistical Linearization on a Reduced Base of Shape functions*. In: Corotis, R.B., Schuëller, G.I., Shinozuka, M. (Hg.): Structural safety and reliability - Proceedings of the eighth international conference, ICOSAR '01, Newport Beach, CA, USA, Swets & Zeitlinger Publishers / A.A. Balkema Publishers, Rotterdam, Niederlande, 2001.
- [70] Grundmann, H., Waubke, H.: *Non-linear stochastic dynamics of systems with random properties: a spectral approach combined with statistical linearization*. International Journal of Non-linear Mechanics **31**(5), S. 619-630, 1996.
- [71] Grundmann, H., Hartmann C., Waubke, H.: *Structures subjected to stationary stochastic loadings. Preliminary assessment by statistical linearization combined with an evolutionary algorithm*. Computes and Structures **67**, S. 53-64, 1998.
- [72] Guggenberger, J., Grundmann, H., Lin, Y.L.: *Monte Carlo simulation of the hysteretic response of frame structures using plastification adapted shape functions*. In: Proceedings of the 4th international conference of computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12 2002, Hg.: P.D.Spanos & G.Deodatis, Millpress Rotterdam Niederlande, S.249-258, 2003.
- [73] Gurley, R., Kareem, A., Tognarelli, M.: *Simulation of a class of non-normal random processes*. International Journal of Non-linear Mechanics **31**(5), S. 601-617, 1996.

-
- [74] Haken, H.: *Synergetics, An Introduction*. Springer Verlag Berlin, 1983.
- [75] Harichandran, R.S., Hawwari, A.: *In-Plane Non-Linear Random Vibration of Composite plates*. In: Proceedings of the Sixth Speciality Conference on Probabilistic mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, ASCE, New York, S. 188-191, 1992.
- [76] Huber, O.: *Behandlung elastoplastischer 3D-Rißprobleme mittels Randelementemethode*. Dissertation, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1994.
- [77] Hurtado, J.E., Barbat, A.H.: *Improved Stochastic Linearization Method using mixed Distributions*. Structural Safety **18**(1), S. 49-62, 1996.
- [78] Huttner, S.: *Using Residual Vectors (Modal Augmentation) in MSC Nastran to Improve Quality and Accuracy of Modal Analysis*. In: Proceedings of the Nafems Conference on Validation of FEM Analyses - Models and Results, Wiesbaden, Germany, 2002.
- [79] Ibrahim, R.A.: *Parametric Random Vibration*. Research Studies Press LTD., Letchworth, England, 1985.
- [80] Iwan, W.D., Yang, I.-M.: *Application of Statistical Linearization Techniques to nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems*. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, **39** Ser. E(2), S. 545-550, 1972.
- [81] Iwan, W.D., Whriley, R.G.: *Nonstationary Equivalent Linearization of Nonlinear Continuous Systems*. Probabilistic Engineering Mechanics **8** S. 273-280, 1993.
- [82] Kanai, K.: *Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground*. Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo **35**, S. 309-325, 1957.
- [83] Kareem, A., Zhao, J., Tognarelli, M.A.: *Surge Response Statistics of Tension leg Platforms under Wind and Wave Load: A Statistical Quadraticization Approach*. Probabilistic Engineering mechanics, **10**, S. 225-240, 1995.
- [84] Kazakov, I.E.: *Generalization of the method of statistical linearization to multidimensional systems*. Automation and Remote control **26**, S. 1201-1206, 1965.
- [85] Katz, C.: *Fließzonentheorie mit Interaktion aller Stabschnittgrößen bei Stahltragwerken*. Stahlbau **66**(4), S. 205-213, 1997.
- [86] Kimura, K., Yasumuro, H., Sakata, M.: *Non-Gaussian Equivalent Linearization for Non-Stationary Random Vibration of hysteretic Systems*. Probabilistic Engineering Mechanics **9** S. 15-22, 1994.
- [87] Klöcker, T.: *Beitrag zur nichtlinearen Berechnung von Brücken für den Lastfall Erdbeben*. Dissertation, Beiträge aus dem Konstruktiven Ingenieurbau **4/97**, TU München, Hg.: Zilch, K. et. al., München, 1997.
- [88] Kreyszig, E.: *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1988.
- [89] Lacquaniti, S., Ricciardi, G.: *Piecewise stochastic linearization method for random vibration of non-linear oscillators*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 343-352, 2003.
- [90] Langley, R.S.: *An investigation of Multiple Solutions yielded by the Equivalent Linearization Method*. Journal of sound And Vibration, **186**(5), S. 846-855, 1995.
- [91] Lazarov, B., Ditlevsen, O.: *Simulation of plastic displacement for multistory shear frames excited by Gaussian white noise*. in Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 361-370, 2003.
- [92] Lee, J.: *Improving the equivalent linearization technique for stochastic duffing oscillators*. Journal of Sound and Vibration, **186**(5), S. 846-855, 1995.

-
- [93] Li, X.-M., Quek, S.-T., Koh, C.-G.: *Stochastic Response of Offshore Platforms by Statistical Cubization*. Journal of Engineering Mechanics **121**(10) S. 1056-1068, 1995.
- [94] Lin, Y.K., Cai, G.Q.: *Probabilistic Structural Dynamics. Advanced Theory and Applications*. McGraw Hill, New York, 1995.
- [95] Lutzenberger, S.: *Ein differentiell-algebraisches Simulationsmodell zur Fahrzeug - Fahrweg Interaktion*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2002.
- [96] Mang, H., Hofstetter, G.: *Festigkeitslehre*. Springer-Verlag, Wien, 2000.
- [97] Marano, G.C. und Greco, R.: *Evaluation of dissipated energy in seismic protected structure by nonlinear base isolators: A stochastic analysis*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 395-404, 2003.
- [98] Matthies, Hermann, G., Mayer, M.: *Nonlinear Galerkin Methods for the Model Reduction of Nonlinear Dynamical Systems*. Mitteilungen aus dem Institut für wissenschaftliche Rechenmethoden, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, März, 2002.
- [99] Mehlhorn G.: *Der Ingenieurbau – Baustatik – Baudynamik*. Mit u.a. Beiträgen Dinkler, D. und Ramm, E.: *Stabtragwerke*, Krätzig W.B., Meskouris, K. und Link, M.: *Baudynamik und Systemidentifikation*. Ernst und Sohn, Berlin, 1995.
- [100] Mehlhorn G.: *Der Ingenieurbau - Tragwerkszuverlässigkeit – Einwirkungen*. Mit Beiträgen von Schuëller, G.I.: *Tragwerkszuverlässigkeit*, Rackwitz, R.: *Einwirkungen auf Bauwerke*; Bachmann, H.: *Erdbebensicherung der Bauwerke*. Ernst und Sohn, Berlin, 1996.
- [101] Melchers, R.E., Ahammed, M.: *Linearization and Offshore Fatigue Reliability*. In: Proceedings of the Sixth Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, ASCE, New York, S. 5-8, 1992.
- [102] Münchner Rück (Hg.): *Topics, Jahresrückblick der Naturkatastrophen 2002*. Münchner Rückversicherungsgesellschaft, München, 2003.
- [103] Natke, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. In der Reihe *Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, Hg.: Krätzig, W., Lehrmann, T. und Mahrenholtz, O., Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1983.
- [104] Noori, M.N., Saffar, A., Davoodi, H.: *A Comparison between non-Gaussian closure and statistical linearization techniques for random vibration of a nonlinear oscillator*. Computers & Structures **26**(6), S. 925-931, 1987.
- [105] Orabi, I.I.: *Stochastic Response of a Hysteretic System under Nonstationary Excitations*. Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Proceedings of the Seventh Speciality Conference 1996, ASCE, New York, S. 392-395, 1996.
- [106] Park, S.K., Wen, Y.K., Ang, A.H.-S.: *Random vibration of hysteretic systems under bi-directional ground motion*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics **14**, S. 543-567, 1986.
- [107] Petersen C.: *Stahlbau*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990.
- [108] Poiron, F.: *Computation of response moments of high dimensional MDOF structures excited by stationary non-Gaussian random fields*. Probabilistic Engineering Mechanics, **15**, S. 169-174, 2000.
- [109] Pradlwarter, H.J.: *On the existence of "true" equivalent linear systems for the evaluation of the nonlinear stochastic response due to nonstationary Gaussian excitation*. Bericht 28-90 des Instituts für Mechanik der Universität Innsbruck, Innsbruck, 1990.
- [110] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Accuracy and Limitations of the Method of Equivalent Linearization for Hysteretic Multi-Storey Structures*. Probabilistic Engineering Mechanics **8**, S. 115-126, 1992.

-
- [111] Pradlwarter, H.J., Li, W.: *On the computation of stochastic response of highly nonlinear large MDOF systems modelled by finite elements*. Probabilistic Engineering Mechanics **6**(2) S. 109-116, 1991.
- [112] Pradlwarter, H.J.: *A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability*. In: Proceedings of ASCE Speciality Conference, Denver, Colorado, July 8 – 10 1992, ASCE New York, S. 69-72, 1992.
- [113] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Equivalent Linearization – a suitable tool for analysing MDOF-Systems*. Probabilistic Engineering Mechanics **8**, S. 115-126, 1992.
- [114] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *On Advanced Monte Carlo simulation procedures in stochastic structural dynamics*. International Journal of Non-linear mechanics **32**(4), S. 735-744, 1997.
- [115] Pradlwarter, H.J.: *Non-linear stochastic response distributions by local statistical linearization*. International Journal of Non-linear mechanics **36**, S. 1135-1151, 2001.
- [116] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I., Schenk, C.A.: *A computational procedure to estimate the stochastic dynamic response of large non-linear FE-models*. Computer methods in applied mechanics and engineering, **192**(7-8), S. 777-801, 2003.
- [117] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I., Schenk, C.A.: *Nonstationary Response of Large FE-Models*. In: Proceedings of the Eurodyn 2002, Hg.: Grundmann, H. und Schuëller, G.I., Swets&Zeitlinger, Lisse S. 353-360, 2002.
- [118] Pradlwarter, H.J.: *Deterministic integration algorithms for stochastic response computations of FE-Systems*. Computers and Structures **80**, S. 1489-1502, 2002.
- [119] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P.: *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, NY, USA, 1992.
- [120] Proppe, C., Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *Equivalent linearization and Monte Carlo Simulation in stochastic dynamics*. Probabilistic Engineering Mechanics **18**, S. 1-15, 2003.
- [121] Protokoll des Blockpraktikums *Digitale Signalverarbeitung*, Drittes Physikalisches Institut Georg August-Universität Göttingen vom 26.09. bis 07.10.1994 unter der Leitung Prof. Ronneberger.
- [122] Rackwitz, R., Fießler, B.: *Zwei Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie erster Ordnung bei zeitlich veränderlichen Lasten*. Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau (LKI), Technische Universität München, SFB 96, Heft 17, 1977.
- [123] Rackwitz, R., Fießler, B.: *Structural Reliability Under Combined Random Loading Sequences*. Computers and Structures, **9**, Pergamon Press, 1978, S. 489-494, 1978.
- [124] Reckling, R.: *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Springer Verlag Berlin, 1965.
- [125] Roberts, J.B.: *Multiple Solutions generated by Statistical Linearization and their Physical Significance*. International Journal of Non-Linear mechanics, **26**(6), S. 945-959, 1991.
- [126] Roberts, J.B., Spanos, P.D.: *Random Vibration and Statistical Linearization*. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
- [127] Rothert, H., Gensichen, V.: *Nichtlineare Stabstatik. Baustatische Methoden, Grundlagen und Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [128] Ruscheweyh H.: *Dynamische Windwirkung an Bauwerken*. Band 2, Praktische Anwendungen, Bauverlag Wiesbaden, Berlin, 1982.
- [129] Sakomoto, S., Ghanem R.: *Simulation of multi-dimensional non-gaussian non-stationary random fields*. Probabilistic Engineering Mechanics **17**, S. 167-176, 2002.
- [130] Schenk, C.A., Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I.: *On the dynamic stochastic response of FE-models*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 533-540, 2003.

-
- [131] Schenk, C.A.: *Computational Procedures for Uncertainty Assessment of Large Non-Linear Finite Element Systems*. Dissertation, Leopold-Franzens Universität Innsbruck, Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur, Innsbruck, Juli 2003.
- [132] Schuëller, G.I.: *Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken*. Ernst & Sohn, Berlin-München, 1981.
- [133] Schuëller G.I., Shinozuka M. (Hg.): *Stochastic Methods in Structural Dynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster S. 81-92, 1987.
- [134] Schuëller, G.I., Pandey, M.D., Pradlwarter, H.J.: *Equivalent Linearization (EQL) in Engineering Practice for Aseismic Design*. Probabilistic Engineering Mechanics **9**, S. 95-102, 1994.
- [135] Schuëller, G.I.: *Engineering Applications of Stochastic Mechanics - Achievements and Perspectives*. Proceedings of the IUTAM-Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics, Trondheim, Juli 1995.
- [136] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J.: *The role of Stochastic Dynamics in Risk and Reliability Assessment of Structures and Mechanical Systems*. In: Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics, Hg.: Kliemann, W. und Sri Namachchivaya, N., CRC Press, Boca Raton London Tokyo, S. 383-410, 1995.
- [137] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J.: *Methods of Non-Linear Stochastic Dynamics in View of Practical Applications*. In: Augusti G., Borri, C. Spinelli, P. (Hg.): Proceedings of Eurodyn, Florenz 1996, Balkema, Rotterdam, Niederlande, S. 31-40, 1996.
- [138] Schuëller, G.I. (Hg.): *A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics*, Probabilistic Engineering Mechanics **4**, S. 197-321, 1997.
- [139] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J., Vasta, M., Harpornchai, N.: *Benchmark study on non-linear stochastic structural dynamics*. In: Proceedings of the seventh international Conference on Structural Safety and Reliability, Hg.: Shiraishi, N., Shinozuka, M., Wen, Y.K., Balkema, Rotterdam, S 355-362, 1998.
- [140] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J.: *Advances in stochastic structural dynamics under the perspective of reliability estimation*. In: EURO DYN 1999, Hg.: Fryba, L., Náprstek, J., Balkema, Rotterdam S. 267-272, 1999.
- [141] Schuëller, G.I. Pradlwarter, H.J., Schenk, C.A.: *Non-stationary response of large linear FE models under stochastic loading*. Computers and Structures **81**, S. 937-947, 2003.
- [142] Sellgren, U.: *Component Mode Synthesis – A method for efficient dynamic simulation of complex technical systems*. Technical Report, Department of Machine Design, The Royal Institute of Technology (KTH) Stockholm, Sweden, Stockholm, 2003.
- [143] Shinozuka, M.: *Stochastic fields and their digital simulation*. Stochastic Methods in Structural Dynamics, Hg.: Schuëller, G.I., Shinozuka, M., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster S. 93-133, 1987.
- [144] Shinozuka, M., Jan, C.M.: *Digital simulation of random processes and its applications*. Journal of Sound and Vibration **25**(1), S. 111-128, 1972.
- [145] Shinozuka, M.: *Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes*. Journal of the Acoustical Society of America **49**(III), S. 357-368, 1971.
- [146] Shrestha, K.M., Soong, T.T.: *Response Probabilities of nonlinear Random Systems: A Compartmental Approach*. Probabilistic Engineering Mechanics **3**(2), S. 92-97, 1988.
- [147] Simulescu, I., Mochio, T., Shinozuka, M.: *Equivalent Linearization Method in Nonlinear FEM*. Journal of Engineering mechanics (ASCE), **115**(3), S. 475-492, 1989.
- [148] Smyth, A., Masri, S.: *A computationally efficient approach for evaluating the response of nonlinear systems subjected to nonstationary stochastic loads*. In: Computational Stochastic Mechanics, Proceedings of the fourth international conference on computational stochastic mechanics, Corfu, Greece, June 9-12, 2002, Hg.: Spanos, P.D. und Deodatis G., Milpress Rotterdam, Niederlande, S. 559-562, 2003.

-
- [149] Sobczyk, K.: *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1991.
- [150] Sobiechowski, C.: *Zur stochastischen Linearisierung für mechanische Systeme unter Anregung durch Poissonsche weiße Rauschen*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Januar 1999.
- [151] Socha, L., Soong, T.T.: *Linearization in Analysis of Nonlinear Stochastic Systems*. Applied Mechanics Reviews, **44**(19), S. 399-422, 1991.
- [152] Socha, L., Pawleta M.: *Corrected equivalent linearization of stochastic dynamic systems*. Machine Dynamic Problems, **7**, S. 149-196, 1994.
- [153] Soize, C.: *Stochastic Linearization Method With Random Parameters for SDOF Nonlinear Dynamical Systems: Prediction and Identification Procedures*. Probabilistic Engineering mechanics **10**, S. 143-152, 1995.
- [154] Soong, T., Grigoriu, M.: *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1993.
- [155] Spanos, P.D., Lavelle, F.M.: *A Lanczos Component Mode Synthesis Algorithm for the Analysis of locally nonlinear Dynamic Systems*. k.A.
- [156] Spanos, P.D., Vargas Loli L.M.: *A statistical approach to generation of design spectrum compatible earthquake time histories*. Soil dynamics Earthquake Engineering, **4**, S. 2-8, 1985.
- [157] Suzuki Y., Minai, R.: *Seismic Reliability Analysis of Hysteretic Structures Based on Stochastic Differential Equations*. In: Proceedings of the 4th ICOSSAR, Kobe, Japan, S. 177-186 (II), 1985.
- [158] Tajimi, H.: *A statistical method of determining the maximum response of a building during earthquake*. In: Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan. 1960.
- [159] Tan, R.Y. Jiang, D.Y.: *Stochastic Response of Structures With Bilinear Hysteresis*. In: Proceedings of ICASP5, Reliability and Risk analysis in Civil Engineering,, University of Waterloo, Vancouver, S. 135-140, 1987.
- [160] Ulm, F.-J., Guggenberger, J.: *3D nonlinear time-dependent analysis of RC and PC beams*. In: Proceedings of ConCreep 5: Creep and Shrinkage of Concrete, 1993, Hg.: Bazant Z.P. and Carol I., E&FN Spon, London UK, S. 573-578, 1993.
- [161] Vasta, M., Schuëller, G.I.: *Phase Space Reduction in Stochastic Dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, **126**(6), S. 626-632, 2000.
- [162] Waubke, H.: *Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome*. Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, **2/96**, Hg.: Zilch, K. et al., München, 1996.
- [163] Waubke, H.: *Moment-Closure Technik zur Abschätzung der elasto-plastischen Reaktion von Stockwerksrahmen auf zufällige Belastungen aus Windereignissen*. Habilitation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, **1/99**, Hg.: Zilch, K. et al., München, 1999.
- [164] Wang, R., Kusumoto, S., Zhang, Z.: *A new Equivalent Non-Linearization Technique*. Probabilistic Engineering Mechanics **11**, S.129-137, 1996.
- [165] Wang, Y., Hou, Z., Dimentberg, M., Noori, M. und Zhou, Y.: *Random Response of Nonlinear Systems to PERPM Model*. In: Proceedings of the Seventh Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, ASCE, New York, S. 954-957, 1996.
- [166] Wen, Y.K.: *Method for random vibration of hysteretic systems*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE **102** (EM2), S. 150-154, 1976.
- [167] Wen, Y.K.: *Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation*. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics **47**, S. 150-154, 1980.

-
- [168] Wen, Y.K., Yeh, C.-H.: *Bi-axial and torsional response of inelastic structures under random excitation*. In: Proceedings of the Symposium on Stochastic Structural Dynamics, University of Illinois, Illinois, USA, 1988.
- [169] Wen, Y.K., Ang, A.H.-S.: *Inelastic Modelling and System Identification, Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, S 142-159, 1988.
- [170] Wen, Y.K.: *Methods of random vibration for inelastic structures*. Applied Mechanics Reviews **42**(2) S. 39-52, 1989.
- [171] Zhang, X., Elishakoff, I.: *Probabilistic Characteristics of a Sliding Structure Via New Stochastic Linearization Methods*. Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, Proceedings of the Sixth Speciality conference 1992, ASCE, New York, USA, S. 196-199, 1992.
- [172] Zhang, J.H., Natke H.G., Qiu, Y., Zhang, X.N.: *The Identification of Non-linear Systems with Statistically equivalent Polynomial Systems*. In: Natke, H.G., Tomlinson, G.R., Yao, J.T.P. (Hg.): Safety Evaluation Based on Identification Approaches Related to Time-Variant and Nonlinear Structures, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.