

Institut für Automatisierungstechnik und Autonome Systeme
Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik (LSR)

Invarianzregelung einer Klasse unteraktuierter Systeme

Dipl.-Ing. Jörg Mareczek

E-mail: joerg.mareczek@ieee.org

Homepage: <http://www.invariance-control.de>

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Friedrich Schneider

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Günther Schmidt
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing./Tokio Martin Buss,
Technische Universität Berlin

Die Dissertation wurde am 24. September 2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 13. Februar 2002 angenommen.

Für Petra.

Invarianzregelung einer Klasse unteraktuierter Systeme

In dieser Arbeit wird das Stabilisierungsproblem unteraktuierter Systeme betrachtet, die sich durch Ein-/Ausganglinearisierung in ein lineares Teilsystem und eine am Systemausgang nicht beobachtbare, interne Dynamik aufteilen. Die Besonderheit der Regelung dieser Systeme besteht darin, daß die Stabilität der internen Dynamik vom Einschwingverhalten der geregelten linearen Dynamik abhängt. Als Lösung wird das auf vollständiger Zustandsrückführung basierende Verfahren der Invarianzregelung vorgestellt, bei dem das lineare Teilsystem asymptotisch stabilisiert, und gleichzeitig ein gegebenes Zustandsraumgebiet invariant gehalten wird. Wählt man dabei ein beschränktes Gebiet im Gesamtzustandsraum, so erzielt man Gesamtsystemstabilität. Das vorgestellte Verfahren kann gegenüber Parameterschätzfehlern robustifiziert und zeitdiskret implementiert werden. Zunächst werden in einem allgemein gehaltenen, theoretischen Abschnitt notwendige und hinreichende Existenzbedingungen an Invarianzregler formuliert. Darauf aufbauend werden zwei Syntheseverfahren für Invarianzregler hergeleitet. Experimente eines unteraktuerten, zweiarmigen Roboters sowie eine Anti-Überschlagsregelung eines Kraftfahrzeugs in Simulation mit einem menschlichem Fahrer im geschlossenen Regelkreis demonstrieren die Wirksamkeit von Invarianzreglern.

Invariance Control of a Class of Underactuated Systems

This thesis considers the problem of stabilizing a class of underactuated systems using a full-state feedback linearizing control law which separates a controlled linear subsystem from internal dynamics. The attendant basic problem arises from the fact that stability of the internal dynamics strongly depends upon the transient behavior of the controlled linear dynamics. The approach to solve this problem presented in this work is a novel control method called Invariance Control, asymptotically stabilizing the linear subsystem to the origin while keeping the system state inside a prescribed bounded state space region. To this purpose, necessary and sufficient existence conditions for Invariance Control are established and a discussion of the easy to achieve robustness with respect to parameter perturbations as well as time discrete implementations is worked out. Based upon this general framework two realizations for Invariance Controllers are presented. An underactuated two-link robot experiment and simulations of a rollover avoidance controller for road vehicles with a real human driver in the loop validate the efficiency of Invariance Control.

Vorwort

In den vergangenen vier Jahren bot sich mir am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik am Institut für Automatisierungstechnik der Technischen Universität München die faszinierende Gelegenheit, mich in einigen Aspekten der geometrischen, nichtlinearen Regelungstheorie bis an den Rand der Forschung vorzuarbeiten. Dabei habe ich erkannt, daß in diesem Forschungsbereich eine breite Kluft zwischen verfügbarer Theorie und anwendbaren Regelungskonzepten besteht. Vor diesem Hintergrund entstand die vorliegende Arbeit zur Regelung unteraktuierter Systeme, in der robuste Regelungskonzepte bereitgestellt werden.

An erster Stelle möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir den Weg zu dieser Arbeit in jeder Hinsicht überhaupt erst ermöglichten. Mein besondere Dank für immerwährende Geduld und Unterstützung gilt meiner Ehefrau Petra.

Diese Arbeit hätte ohne die Unterstützung meines Doktorvaters Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Schmidt nicht in der vorliegenden Form abgeschlossen werden können. Ihm gebührt auch mein Dank für die Übernahme des Erstgutachtens. Außerdem möchte ich mich bei meinem Zweitprüfer Univ.-Prof. Dr.-Ing./Tokio M. Buss bedanken, der während seiner Tätigkeit am LSR mein Forschungsinteresse für den Bereich der nichtlinearen Regelungstheorie weckte und mir durch wissenschaftliche Anleitung und zahlreiche Auslandskontakte den Weg zur internationalen Forschungsgemeinschaft aufzeigte. Mein besonderer Dank gebührt dem Humboldt-Preisträger Prof. Mark W. Spong, der während seines halbjährigen LSR-Aufenthalts gegen Ende meiner Tätigkeit zahlreiche Anstöße zur Einordnung meiner Forschungsarbeit in bestehende Theorien gab.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Mitarbeitern und Angestellten für das sehr gute Arbeitsklima am LSR bedanken. Insbesondere danke ich Herrn Dr. -Ing. F. Freyberger für die vielen nützlichen, praktischen Ratschläge und sein Bemühen um den Fortgang meiner Arbeit. Nicht zuletzt gilt mein Dank zahlreichen Studenten, die durch kritische Diskussionen sowie Hard- und Software-Entwicklungsarbeiten sehr zum Gelingen beitrugen.

München, im Mai 2001

Jörg Mareczek

Inhaltsverzeichnis

1	Einführende Übersicht	1
2	Theorie der Invarianzregelung für eine ausgewählte Systemklasse	9
2.1	Phänomenologische Beispiele	9
2.2	Betrachtete Systemklasse	15
2.3	Invarianzbedingungen für Zustandsraumgebiete	23
2.3.1	Nominalfall	24
2.3.2	Perturbierter Fall	28
2.4	Existenzbedingungen für Invarianzregler	35
2.4.1	Existenzbedingungen im Nominalfall	35
2.4.2	Existenzbedingungen im perturbierten Fall	39
	Zusammenfassung und Bewertung	40
3	Zwei spezielle Entwurfsverfahren für Invarianzregler	43
3.1	Invarianzreglerentwurf für die betrachtete, allgemeine Systemklasse	44
3.1.1	Schaltende Struktur des Invarianzregelgesetzes	44
3.1.2	Dissipativitätsbasierte Regelung des linearen Teilsystems	45
3.1.3	Invarianzregelgesetz	51
3.1.4	Hinweise zur Synthese von Invarianzgebieten	54
3.1.5	Diskussion der erzielbaren Stabilität	55
3.1.6	Entwurfsschema und Grenzen des Verfahrens	57
3.1.7	Simulationsbeispiel	58
3.2	Invarianzreglerentwurf für Rang-2-Systeme	62
3.2.1	Schaltendes lineares Regelgesetz	65
3.2.2	Existenzbedingungen für Invarianzregler	68
3.2.3	Schaltstrategie für die Reglerparameter	69

3.2.4	Entwurfsschema	70
	Zusammenfassung und Bewertung	72
4	Invarianzregelung eines unteraktuierten Roboters	75
4.1	Modellierung	76
4.2	Regelziele und Normalenform	78
4.3	Invarianzregelung im Nominalfall	80
4.3.1	Entwurf eines Invarianzreglers	80
4.3.2	Experimentelle Ergebnisse	84
4.3.3	Videoaufnahme des Experiments	88
4.4	Robuste Invarianzregelung	88
4.4.1	Gezielte Perturbation durch eine Zusatzmasse	89
4.4.2	Robustes Invarianzregelgesetz	90
4.4.3	Experimentelle Ergebnisse	92
4.5	Vergleich mit anderen Regelungsverfahren	96
	Zusammenfassung und Bewertung	97
5	Kippvermeidung von Kraftfahrzeugen mittels Invarianzregelung	99
5.1	Technischer Hintergrund	99
5.2	Kfz-Modell	101
5.3	Quantifizierung der Kippgefahr	103
5.4	Anwendung von Invarianzregelung	104
5.4.1	Zeitdiskrete Invarianzregelung	105
5.5	Experimentelle Resultate	110
5.5.1	Experimentalaufbau	110
5.5.2	Regelung	112
5.5.3	Experimente	113
	Zusammenfassung und Bewertung	114
6	Zusammenfassung und Ausblick	115
A	Mathematische Definitionen	119
B	Zusammenstellung von Beweisen und Herleitungen	127
B.1	Beweis von Satz 2.2	127
B.2	Beweis von Korollar 2.1	127

B.3 Beweis von Satz 2.3	127
B.4 Beweis von Korollar 2.2	128
B.5 Beweis von Satz 3.1	129
B.6 Beweis von Korollar 3.1	132
B.7 Beweis von Satz 3.2	132
B.8 Beweis von Satz 3.3	133
B.9 Beweis von Satz 3.4	136
B.10 Beweis von Satz 5.1	138
C Weitere Komponenten zur Invarianzregelung	139
C.1 CLF-basiertes Invarianzregelgesetz	139
C.2 Passivitätsbasiertes Invarianzregelgesetz	145
C.3 Invarianzgebietssynthese für die dissipativitätsbasierte Methode	149
D Technische Details zum Experimentalsystem R2D1	155
E Technische Details zum Kfz-Fahrsimulator	163
Literaturverzeichnis	167
Stichwortverzeichnis	179

Abbildungsverzeichnis

1.1	Gliederung des Hauptteils der Arbeit.	8
2.1	Simulationsverläufe des linearen Beispielsystems	11
2.2	Signalflußpläne der linearen Beispielsysteme	12
2.3	Simulation des nichtlinearen Beispielsystems	13
2.4	Signalflußplan des nichtlinearen Beispielsystems	14
2.5	Signalflußplan der Normalenform	19
2.6	Graphische Interpretation der Invarianzbedingung	24
2.7	Pendel der Länge l mit Punktmasse m im Erdschwerefeld g_0	26
2.8	Simulationsverläufe und Driftfeld des Pendel-Systems	27
2.9	Robuste Invarianzbedingung	31
2.10	Phasenporträt und Invarianzgebiet des Pendelsystems	32
2.11	Simulationsergebnisse des perturbierten Beispielsystems	34
2.12	Geometrische Deutung der <i>sign-matching</i> Bedingung	37
3.1	Schaltstrategie des Invarianzreglers.	45
3.2	Dissipative Regelung	46
3.3	Geschaltetes, geregeltes lineares Doppelintegratorsystem	48
3.4	Stabilität des Beispielsystems bei konventioneller Regelung.	59
3.5	Schaltender, bilinearer Invarianzregler	61
3.6	Hochverstärkende Regelung	62
3.7	Lage der Region χ	64
3.8	Hybrider Reglerautomat	65
3.9	Signalflußplan des geregelten Rang-2-Systems	72
4.1	Schematischer Aufbau von R2D1.	75
4.2	Nullodynamik von R2D1	78

4.3	Darstellung von $\{(x_1, z) \mid \Phi_0(x_1, z) = 0\}$	81
4.4	Phasenporträt der internen Dynamik	84
4.5	Folgeverhalten der Ausgangsgröße und Momentenverlauf	85
4.6	Zeitlicher Ausschnitt des Verlaufs der Schaltparameter	86
4.7	Phasenporträt der internen Dynamik über θ_2 .	87
4.8	Bereich der letztendlichen Stabilität	91
4.9	Experimentalergebnisse des nominal geregelten, perturbierten Systems.	93
4.10	Interne Dynamik des perturbierten Systems	93
4.11	Schaltparameter des nominal geregelten, perturbierten Systems	94
4.12	Unabhängigkeit der Stabilität von Anfangswerten	95
5.1	Kfz-Chassis Modelle	102
5.2	Umschaltstrategie des RAC unter Vernachlässigung der Lenkdynamik.	104
5.3	Struktur des RAC.	105
5.4	Sicherheitsstreifen am Rand des Invarianzgebiets	107
5.5	3-D-Simulationsumgebung	110
5.6	Struktur des Fahrsimulators mit detailliertem Mensch-Maschine Interface.	111
5.7	Experimentalergebnisse des invariant geregelten Kfz.	113
A.1	Veranschaulichung des Subdifferentials.	123
A.2	Erweiterter Gradient der Signum-Funktion.	124
B.1	Eine obere Schranke für $ y $ ist durch $y^2 + 1/4$ gegeben.	131
B.2	Zulässiger Wertebereich für den Anfangspunkt $(x_1(0), x_2(0))$.	135
C.1	Stabilitätskarte im Parameterraum und als Wurzelortskurve	142
D.1	Erweiterter Luenberger-Beobachter.	157
D.2	Vergleich eines ersten Integrals mit Φ	161
E.1	Auf das Fahrwerk wirkende Kräfte und Momente.	165
E.2	Kommunikations-Schema der Rechner der Simulationsumgebung.	166

Tabellenverzeichnis

1.1	Stellung von Invarianzregelung im Vergleich zu bestehenden Verfahren. . .	7
2.1	Systemvoraussetzungen für Invarianzregelung	22
3.1	Entwurfsschema für ein dissipativitätsbasiertes Invarianzregelgesetz. . . .	57
3.2	Transitionsbedingungen $tran(i)$ und Aktionen $act(i)$ des hybriden Regler- automaten aus Abb. 3.8.	66
3.3	Entwurfsschema eines Invarianzreglers für Rang-2-Systeme.	71
4.1	Geschätzte physikalische Parameter von R2D1 in normierten Einheiten. .	77
4.2	Geschätzte, zusammengefaßte Systemparameter in normierten Einheiten.	77
4.3	Systemparameter mit und ohne Zusatzmasse (perturbierter Fall).	90
4.4	Für die Invarianzbedingung ungünstigste Schätzfehler-Konstellationen. .	96
C.1	Entwurfsverfahren für Invarianzgebiete	153
D.1	Inverse Motorkennlinie des NSK-Motors	156
E.1	Fahrzeugdaten	166

Notation

In der folgenden Tabelle werden in dieser Arbeit verwendete, spezielle mathematische Notationen aufgeführt. Im mathematischen Anhang [A](#) finden sich weitere Begriffsdefinitionen.

\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{R}^n	Vektorraum der Dimension n über \mathbb{R}
A	fettgedruckte Großbuchstaben bezeichnen Matrizen
f	fettgedruckte Kleinbuchstaben bezeichnen Vektoren
(\mathbf{x}, \mathbf{z})	Diese Notation wird für einen Vektor, bestehend aus den Komponenten \mathbf{x} und \mathbf{z} verwendet, wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, ob es sich dabei um einen liegenden oder stehenden Vektor handeln muß.
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	Matrix A mit m Zeilen und n Spalten
\mathcal{R}	Mengen werden mit kaligraphischen Buchstaben gekennzeichnet
\mathcal{C}^i	Menge der i -fach differenzierbaren Funktionen
$L_f^k \lambda$	k -fache Lie-Ableitung einer skalaren Funktion λ
\mathbf{M}^{-T}	Inverse einer transponierten Matrix \mathbf{M}^T
$\lambda(\mathbf{x}) _{\mathbf{x}^*}$	Funktion λ genommen an der Stelle \mathbf{x}^*
\mathcal{G}	Zustandsraumgebiet
$\partial \mathcal{G}$	Gebietsberandung von \mathcal{G}
$\frac{d\lambda(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$	Ableitung der skalaren Funktion λ nach \mathbf{x} , resultiert in ein stehendes Vektorfeld
$\nabla(\lambda(\mathbf{x}))$	Gradient von $\lambda(\mathbf{x})$, identisch mit $\frac{d\lambda(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$
$\partial V(\mathbf{x})$	Subdifferential einer nur als stetig vorausgesetzten Funktion $V(\mathbf{x})$
$\ \cdot\ $	Norm des Arguments
$ \lambda $	Betrag des Skalars λ

$ \mathbf{A} $	Determinante der quadratischen Matrix \mathbf{A}
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall zwischen den Grenzen a und b
$(a; b)$	offenes Intervall zwischen den Grenzen a und b
$\{y = 0\}$	abkürzende Schreibweise für $\{\mathbf{x} \mid y(\mathbf{x}) = 0\}$
$\lambda_{\min}[\mathbf{A}]$	minimaler Eigenwert der Matrix \mathbf{A}
$\lambda_{\max}[\mathbf{A}]$	maximaler Eigenwert der Matrix \mathbf{A}
$\text{atan2}(x, y)$	vier-Quadrant Arcustangens gemäß $\tan(y/x)$
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
D_k	k -te nordwestliche Unterdeterminante einer quadratischen Matrix
$\Im[\cdot], \Re[\cdot]$	Imaginärteil, Realteil eines komplexen Arguments
j	imaginäre Einheit
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Laplace-Operator
$Y(s)$	Großbuchstaben bezeichnen die Laplace-Transformierte: $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$
$x = f^{-1}(y)$	Umkehrfunktion einer Funktion $f(x) = y$, d. h. $f(f^{-1}(y)) = y$
$\dot{x}(t)$	Punkte bezeichnen Ableitungen nach der Zeit
$x'(z)$	Striche bezeichnen nicht zeitliche Ableitungen
$x^{(r)}(t)$	r -te Ableitung von x nach der Zeit
\forall	„für alle“
\ni	„so daß“
$\text{sign}[x]$	Vorzeichen-Funktion, $\text{sign}[x] = \pm 1$ für $x \gtrless 0$, $\text{sign}[0] = 0$

Symbolverzeichnis und Abkürzungen

In der folgenden Tabelle werden die wichtigsten Variablen kurz erläutert und nach Ihrem häufigsten Auftauchen den einzelnen Kapiteln zugeordnet. In einigen Fällen wurde eine Mehrfachbelegung von Variablen zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit in Kauf genommen. Dabei geht jedoch aus dem Kontext eindeutig die Bedeutung der Variablen hervor.

Kapitel 2

ξ	Zustandsvektor (kurz: Zustand) des ursprünglich zugrundeliegenden Systems
\bar{f}, \bar{g}	Drift- und Steuervektorfeld des ursprünglich zugrundeliegenden Systems
\bar{y}	Ausgangsvariable des ursprünglich zugrundeliegenden Systems
\bar{u}	Steuergröße des ursprünglich zugrundeliegenden Systems
$h(\cdot)$	Ausgangsfunktion
r	relativer Rang des Gesamtsystems
n	Ordnung des Gesamtsystems
\mathbf{x}	Zustand des E-/A-linearisierten Systems
\mathbf{z}	Zustand der internen Dynamik; interner Zustand
$\Psi(\xi)$	Vektorfeld zur Transformation von ξ - nach (\mathbf{x}, \mathbf{z}) -Koordinaten
$a(\cdot), b(\cdot)$	Hilfsgrößen der Rückführlinearisierung zur Normalenform
\mathbf{A}, \mathbf{b}	Systemmatrix und Einkoppelvektor des E-/A-linearisierten Teilsystems
\mathbf{f}, \mathbf{g}	Drift- und Steuervektorfeld der internen Dynamik
\mathbf{f}_0	Systemvektorfeld der Nulldynamik
u	Steuergröße des E-/A-linearisierten Systems; virtuelle Steuergröße
$\mathcal{G}, \partial\mathcal{G}$	Invarianzgebiet, Gebietsberandung von \mathcal{G}
Φ	Invarianzfunktion
V	Ljapunov-Funktion für ein aus dem Kontext hervorgehendes System
φ	Zwischenwinkel des Gradienten und des Geschwindigkeitsfelds

ϕ	Auslenkwinkel des Pendel-Systems
g_0	Betrag der Erdbeschleunigung
m, l	Masse und Länge des Pendel-Systems
R_G	Gebietsradius des Invarianzgebiets für das Pendel-System
\mathbf{w}	Vektor unsicherer physikalischer Parameter
$\tilde{\mathbf{w}}$	Vektor der geschätzten Werte der unsicheren physikalischen Parameter
p	Anzahl der unsicheren physikalischen Parameter
\mathbf{r}	Vektor der relativen Schätzfehler
\mathbf{r}^*	hinsichtlich Invarianz ungünstigster relativer Schätzfehlervektor
\mathcal{R}	Schätzfehlerraum
σ_r	perturbiertes System als Funktion der relativen Schätzfehler
$\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r$	Systemgrößen des perturbierten, E-/A-linearisierten Teil-Systems
$\mathbf{f}_r, \mathbf{g}_r$	Drift- und Steuervektorfeld der durch E-/A-Linearisierung entstehenden internen Dynamik im perturbierten Fall
κ	marginale Funktion; im Kontext passivitätsbasierter Regelung aus Anhang C.2: transformierter Zustand des linearen Teilsystems
Φ^{\max}	Sicherheitsabstand zum Gebietsrand
$\dot{\Phi}^{\max}$	konservative Abschätzung von $\dot{\Phi}$ zur robusten Invarianz
φ^*	über $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ maximierter Winkel φ
\bar{u}^{inv}	Steuergroße zum Invarianthalten eines Gebiets
ϵ	kleine positive Konstante
\mathbf{k}	Reglerparametervektor
\mathbf{k}_i	innerhalb eines Schaltintervalls konstanter Wert von \mathbf{k}
\mathcal{K}	zulässiger Raum der Reglerparametervektoren
\mathcal{U}, \mathcal{V}	offene Regionen des Zustandsraums, in denen bestimmte Abstiegsbedingungen gelten

Kapitel 3.1

v	virtuelle Steuergroße des bilinearen Reglers für das lineare Teilsystem
$\boldsymbol{\eta}$	Teil der Zustandsvariablen des bilinear geregelten, linearen Teilsystems
y	neue Ausgangsfunktion für das bilinear geregelte, lineare Teilsystem
$\boldsymbol{\nu}$	konstanter Koeffizientenvektor zur Definition von y
λ	Eigenwert
$H(s)$	Übertragungsfunktion
\mathbf{T}	Komponente der Transformationsmatrix von \mathbf{x} - zu $(\boldsymbol{\eta}, y)$ -Koordinaten

\mathbf{M}	Rücktransformationsmatrix, $(\boldsymbol{\eta}, y)$ - zu \boldsymbol{x} -Koordinaten
$\mathbf{M}_1, \mathbf{m}_2$	Komponenten der Rücktransformationsmatrix \mathbf{M}
\mathbf{Q}_{11}	Systemmatrix der $\boldsymbol{\eta}$ -Dynamik
\mathbf{q}_{12}	Einkoppelvektorfeld der $\boldsymbol{\eta}$ -Dynamik
\mathbf{q}_{21}	Systemvektor der y -Dynamik
q_{22}	Einkoppelfaktor der y -Dynamik
\mathbf{W}_{11}	positiv definite, quadratische Matrix
\mathbf{P}_{11}	positiv definite, quadratische Matrix; Lösung einer Ljapunov-Gleichung
α	geschalteter Reglerparameter der y -Dynamik; Neigungswinkel des Roboters R2D1 im Erdschwerefeld
$\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}$	Drift- und Steuervektorfeld der internen Dynamik des bilinear geregelten Systems
α_i	innerhalb eines Schaltintervalls konstanter Wert des Reglerparameters α
α^*	untere Schranke für α
S	Ljapunov- und Speicherfunktion des bilinear geregelten, linearen Teilsystems
C, γ	positive Konstanten zur Definition eines Invarianzgebiets
γ^*	untere Schranke für γ
ϑ	Konstante größer eins
\bar{V}	Ljapunov-Funktion für die Nulldynamik des bilinear geregelten Gesamtsystems

Kapitel 3.2

Φ_0	Komponente der Invarianzfunktion
t_i	Schaltzeitpunkte
\bar{C}	Obere Schranke für C im Fall nur lokal stabiler Nulldynamik
$\chi, \partial\chi$	Rückschaltgebiet und Berandung
x_1^*	geschalteter Sollwertparameter
$x_{1,i}^*$	innerhalb eines Schaltintervalls konstanter Wert des Sollwertparameters
k_p	proportionale Verstärkung
k_d	geschaltete Geschwindigkeitsverstärkung
$k_{d,i}$	innerhalb eines Schaltintervalls konstanter Wert von k_d
$\mathbf{p}(\cdot)$	Schaltfunktion, berechnet $k_{d,i}$ und $x_{1,i}^*$
\mathcal{N}	Fläche der Nulldynamik auf der bestimmte Abstiegseigenschaften gelten müssen

λ^{\min}	kleinerer Eigenwert des PD-geregelten linearen Teilsystems
σ	Gütefunktion zur Berechnung von γ^*
Γ	Funktion zur impliziten Definition einer stabilen Phasenbahn der Null-dynamik des geregelten Rang-2-Systems

Kapitel 4

\mathbf{g}_{grav}	Gravitationsvektor
θ_1, θ_2	Gelenkwinkel von R2D1
l_{c1}, l_{c2}	auf die Rotationsachsen bezogene Schwerpunkte der Glieder von R2D1
l_1	Länge des ersten Glieds von R2D1
m_1, m_2	Gliedmassen von R2D1
I_1, I_2	auf die Schwerpunkte bezogene Drehmomente von R2D1
$A, B, C,$ D, m_{22}	zusammengefaßte Systemparameter von R2D1
\mathbf{M}	Massenmatrix von R2D1
\mathbf{n}	Kreiselmomente von R2D1
\mathbf{g}^*	auf R2D1 wirkende Gravitationsmomente
\mathbf{r}^*	Reibmomente in den Gelenken von R2D1
$\boldsymbol{\tau}$	Antriebsmomente von R2D1
$a_i, b_i,$ c_1, d_1	Reibungsparameter von R2D1
θ_2^s	Sollwinkel des zweiten Gelenks von R2D1
p_1, p_2	Auf die Gelenke von R2D1 wirkende, verallgemeinerte Impulse
Δt	Abtastzeit
μ	Parameter des Invarianzgebiets für R2D1
m_z	perturbierende Zusatzmasse am zweiten Glied von R2D1
l_z	Schwerpunktlage der Zusatzmasse m_z , bezogen auf die Drehachse
$\tilde{\mathbf{A}}$	zusammengefaßte Systemmatrix des PD-geregelten, linearen Teilsystems
\mathcal{B}	Gebiet der letztendlichen Begrenztheit des PD-geregelten Roboters R2D1
H	Hüllellipsoid zur konservativen Eingrenzung von \mathcal{B}
q_3, q_4	Vektorfelder der internen Dynamik von R2D1

Kapitel 5

β	Schwimmwinkel des Fahrzeugschwerpunkts
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor

ψ	Gierwinkel
$\dot{\psi}$	Gierrate
${}_{\kappa}x-{}_{\kappa}y$	fahrzeugfestes Koordinatensystem
${}_ix-{}_iy$	ortsfestes Koordinatensystem
δ^w	Lenkwinkel der Vorderräder
δ^{inv}	Invarianzwinkel; vom RAC berechnet
δ	Lenkradwinkel
δ^{drv}	vom Fahrer eingestellter Lenkradwinkel
T	Spurbreite
h_R	Höhe des Chassis-Schwerpunkts ohne Aufbau
h	Höhe des Aufbaus
ϕ	Rollwinkel des Aufbaus
ζ	Zustandsvariablen des Chassis
T_t	Totzeit
ω^{max}	Stellratenbeschränkung der Lenkdynamik
\mathcal{T}	durch bauartbedingte technische Grenzwerte beschränktes Zustandsraumgebiet des Kfz
R	Überschlags-Koeffizient
$F_{z,R}, F_{z,L}$	vertikale Kraft auf die rechten, bzw. linken Räder
a_y	Querbeschleunigung bei stationärer Kreisfahrt
ϱ	Kurvenradius einer stationären Kreisfahrt
$T_{t,\text{ges}}$	gesamte Verzögerungszeit
Δt	Abtastzeit
t_k	Abtastzeitpunkte
$\bar{\epsilon}(\cdot)$	Gütefunktion zur Berechnung einer ϵ -Umgebung
$\hat{\mathcal{G}}$	um den Abstand ϵ gegenüber \mathcal{G} reduziertes Zustandsraumgebiet
M_L	Drehmoment des Lenkhebels
M_L^{max}	maximal zulässiges Drehmoment des Lenkhebels
ω_F	Winkelgeschwindigkeit der Front-Antriebsräder
K_k	zustandsvariabler Verstärkungsfaktor des Geschwindigkeitsreglers

Anhang C

\mathbf{S}	Transformationsmatrix von \mathbf{x} - zu κ -Koordinaten
\mathbf{S}^{-1}	Rücktransformationsmatrix
s_1, \dots, s_r	Konstanten zur Definition von \mathbf{S}

s_r^*	obere Schranke für s_r
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$	Hilfsmatrizen zur Herleitung des CLF-basierten Reglers
$\tilde{\mathbf{P}}$	entspricht \mathbf{P} für $\delta = 1$
σ	Hilfsvariable zur Aufspaltung von \dot{V}
$\mathbf{Q}_{r,r}$	folgt aus \mathbf{Q} ohne letzte Spalte und Zeile
$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}$	Systemmatrix und Einkoppelvektor des passivierten linearen Teilsystems
W_0	Komponente der Funktion Φ_0 beim Syntheseverfahren von Invarianzgebieten
\dot{W}_0^+, \dot{W}_0^-	positiver bzw. negativer Anteil von $\dot{\Phi}_0$
\mathbf{F}	konstante Hilfsmatrix zur dyadischen Darstellung von \dot{W}_0^+
$\mathbf{c}(\cdot)$	Vektorfeld zur dyadischen Darstellung von \dot{W}_0^+
W_1	Kompensationsfunktion, Komponente in Φ_0
δ	Konstante in einer Ljapunov-Gleichung
ϱ	Hilfsvariable zur Abschätzung von \dot{W}_1
$\underline{\varrho}$	untere Schranke für ϱ
\mathbf{a}	Hilfsvariablenvektor zur Abschätzung von $\dot{\Phi}_0$
$\hat{\Phi}$	Hilfsgebiet
C^*	Wert für C so, daß der initiale Zustandspunkt in \mathcal{G} liegt

Anhang D und E

$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$	Schätzung des Geschwindigkeitsvektors der Glieder von R2D1 durch Differenzenbildung
ΔT	Abtastzeit bei R2D1
$\mathbf{A}, \mathbf{B},$ \mathbf{C}, \mathbf{D}	Systemmatrizen zweier linearer, zeitdiskreter I_2 -Systeme
\mathbf{L}	Beobachter-Rückführmatrix
\mathbf{u}_F	Eingang des Filters
$\mathbf{A}_F, \mathbf{B}_F,$ $\mathbf{C}_F, \mathbf{D}_F$	Filtermatrizen
$\lambda_1, \dots, \lambda_4$	Eigenwerte des Filters
z_i^{*I}, z_i^{*II}	Lösungen der Phasenbahn-Dgl.
ζ	Zustand des Chassis
${}^i\mathbf{v}_S$	Geschwindigkeitsvektor des Fahrwerks (Chassis)
${}^i\mathbf{r}_T$	Ortsvektor der Zusatzmasse
${}^k\boldsymbol{\Omega}_S, {}^k\boldsymbol{\Omega}_T$	Rotationsvektoren im k -System

T_S, T_T	kinetische Energien bezogen auf die Massenschwerpunkte S und T
V_S, V_T	potentielle Energien bezogen auf die Massenschwerpunkte S und T
L	Lagrangefunktion
${}_i F_x, {}_i F_y, M_z$	externe, an das Kfz angreifende Kräfte
$F_{sf}, F_{sr},$	Reifenkräfte
F_{lf}, F_{lr}	
α	im Kontext der Kfz-Regelung: Schräglaufwinkel der Reifen
ω	Winkelgeschwindigkeit der Reifen
$\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}$	im Kontext der Kfz-Regelung: Drift- und Steuervektorfeld der Chassis-Dynamik

Die folgenden Abkürzungen werden im Verlauf dieser Arbeit verwendet:

engl.	englisch; bei Verwendung deutscher Fachbegriffe wird oft zur Verdeutlichung der englische Fachbegriff in Klammern erwähnt.
E-/A-	Ein-/Ausgangs-
MIMO	Multi-Input Multi-Output
SISO	Single-Input Single-Output
HSRI	Highway Safety Research Institute
CLF	Control-Lyapunov-Function
RCLF	Robust Control-Lyapunov-Function
MP	minimalphasig
NMP	nicht minimalphasig
u. d. N.	unter der Nebenbedingung
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit

1 Einführende Übersicht

Problemstellung und Einsatzgebiete

Im Zuge des Technologiefortschritts werden immer komplexere, dynamisch anspruchsvollere Systeme und Prozesse automatisiert, die immer höhere Anforderungen an die Regelung stellen. Typische Anwendungsfälle sind Anfahrvorgänge von Turbinen [7, 10], Stabilisierung von Überschallflugzeugen [8, 22, 72] und Flugzeugen mit Nasenflügeln, schnelle, hochdynamische Vorgänge bei humanoiden Laufmaschinen [14] oder Regelungen zum Transport von Flüssigkeiten (engl. *sloshing-control*) [12, 27]. Derzeitiger *Stand der Technik* zur Regelung solcher Systeme ist die Anwendung *linearer Regelgesetze* zur Stabilisierung eines Arbeitspunktes oder entlang eines vorabgerechneten Sollwertverlaufs der Ausgangsfunktionen. Da die meisten dynamischen Systeme global gesehen jedoch einen stark nichtlinearen Charakter aufweisen, ist der vom linearen Regelgesetz erzeugte Stabilitätsbereich so klein, daß nur unzureichend kleine Arbeitspunktwechsel bzw. langsame Sollwertverläufe zugelassen werden können. Daher geht der Trend der derzeitigen Forschung hin zur Entwicklung nichtlinearer Regelungsverfahren. Die Erforschung diskret-kontinuierlicher Systeme sowie ausgereifte lineare Regelungstheorien sind vielfach Ausgangspunkt und Grundlage für theoretische Betrachtungen solcher neuartiger nichtlinearer Verfahren. Daneben bildet die heutige Verfügbarkeit hoher und kostengünstiger, numerischer Rechenleistung die praktische Grundlage zur Implementierung nichtlinearer Regelgesetze, die in der Regel äußerst rechenintensiv sind.

Eine in der Literatur bereits intensiv studierte Unterklasse der nichtlinearen Systeme sind die *unteraktuierten* mechanischen Systeme [17, 5, 18, 19, 9, 54]. Deren charakteristische Eigenschaft besteht darin, daß weniger unabhängige Antriebe als mechanische Freiheitsgrade vorhanden sind. Da pro Antrieb nur ein mechanischer Freiheitsgrad durch Regelung stabilisiert werden kann, verbleiben im System unregelte mechanische Freiheitsgrade. Dabei verkoppeln inertielle Kräfte und Kreiselkräfte die geregelten mit den unregelten Freiheitsgraden. Aus diesem Grund werden durch die Stabilisierung der geregelten

Freiheitsgrade die unregelmäßige Dynamik zu einer bestimmten Dynamik angeregt. Diese stellt eine dynamische Zwangsbedingung für die geregelte Dynamik dar und wird daher in der Literatur als *nicht-holonome Nebenbedingung zweiter Ordnung* [51] bezeichnet. Beispiele unteraktuierter mechanischer Systeme sind Kraftfahrzeuge [29, 37, 110], eine bestimmte Klasse von Schiffen [19], Senkrechtstarter-Flugzeuge [72], unteraktuierte Roboter [4, 5, 13, 17, 18, 23, 24, 62] sowie durch flexible Freiheitsgrade kinematisch redundante Roboter [6].

Das Phänomen einer unregelmäßigen Dynamik ist jedoch nicht auf unteraktuierte mechanische Systeme beschränkt. So kann bei der Ein-/Ausgangslinearisierung (E-/A-Linearisierung) einer allgemeineren Klasse von Systemen – abhängig von der Wahl der Ausgangsfunktion – eine am Systemausgang nicht beobachtbare Dynamik entstehen. Diese wird im Folgenden als *interne* Dynamik bezeichnet und ist das Analogon zur unregelmäßigen Dynamik bei unteraktuierten mechanischen Systemen. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Definition unteraktuierter Systeme von mechanischen Systemen auf eine allgemeinere Systemklasse erweitert, bei der durch eine E-/A-Linearisierung eine interne Dynamik entsteht. Beispiele solcher Systeme sind Verbrennungsturbinen von Überschallflugzeugen [10], Synchron- und Asynchronmotoren [15] sowie eine bestimmte Klasse von Energie-Konvertern [3]. Ebenso sind viele verfahrenstechnische und biologische Systeme [20], sowie Volkswirtschafts-Kreisläufe in diesem Sinne unteraktuiert, da sie aus einer Vielzahl verkoppelter dynamischer Einzelsysteme bestehen und nur wenige Stellgrößen besitzen.

Man kann sich die Schwierigkeiten zur Stabilisierung unteraktuierter Systeme anschaulich anhand der Aufgabe der Führung eines Kraftfahrzeugs entlang einer Fahrbahnkurve verdeutlichen. Als einzige Steuergrößen stehen dem Fahrer/der FahrerIn die Lenkung und die Längsbeschleunigung bzw. -verzögerung zur Verfügung, während das Fahrzeug im wesentlichen die vier dynamischen Freiheitsgrade Gieren (Drehbewegung um die Hochachse, „Schleudern“), Rollen (Drehbewegung um die Längsachse, „Kippen“), sowie den Betrag und den Richtungswinkel des Vektors der Fahrzeug-Schwerpunktsgeschwindigkeit besitzt. Das Stabilisierungsproblem besteht hierbei darin, das Fahrzeug entlang der Fahrbahnkurve zu führen und dabei Kippen und Schleudern zu vermeiden. Je nachdem, mit welcher Dynamik das Spurhalteproblem entlang der gegebenen Fahrbahnkurve erfolgt, ergibt sich ein stabiler oder ein instabiler zeitlicher Verlauf der einzelnen Freiheitsgrade. Bei z. B. überhöhter Geschwindigkeit, starkem Bremsen oder großen Beschleunigungen während des Kurvenfahrmanövers tritt Schleudern oder Kippen auf. Die destabilisieren-

de interne Dynamik stellt in diesem Fall also die zeitliche Entwicklung der Winkel um die Fahrzeughoch- und -längsachse dar.

Stand der Forschung und Beitrag dieser Arbeit

- Grundlage vieler nichtlinearer Regelungsverfahren ist die Stabilitätstheorie von Ljapunov, im speziellen die sog. Zweite Methode von Ljapunov [87,89]. Damit können Stabilitätsaussagen über lineare und nichtlineare Systeme getroffen werden, ohne die Lösungen der Systemtrajektorien explizit als bekannt oder berechenbar vorauszusetzen. Das zentrale Problem liegt dabei in der geeigneten Wahl einer Ljapunov- oder Regelungs-Ljapunov-Funktion (engl. *control Lyapunov-function*, kurz: CLF). Es existiert jedoch nur für wenige Spezialfälle eine Methode zur Generierung solcher Funktionen [43,80,87,95,96], und es hängt i. allg. von der Erfahrung des einzelnen Entwicklers oder der einzelnen Entwicklerin ab, eine geeignete Ljapunov-Funktion zu finden.
- Einige Regelungsansätze zur Stabilisierung einer Unterklasse unteraktuierter Systeme (solche mit stabiler Nulldynamik¹) führt auf hochverstärkende Regler [45, 46, 60]. Die hohen Rückführverstärkungen destabilisieren im technischen Einsatz jedoch häufig das Gesamtsystem, da die Stellgrößen schnell in ihre Begrenzungen laufen, nicht modellierte Dynamik stark angeregt wird oder Verzögerungen im Regelkreis zu destabilisierenden Phasenverschiebungen der rückgeführten Zustandsgrößen führen.
- Eine ähnliche Methode stellt die passivitätsbasierte Regelung [52, 59] dar, bei der durch eine geeignete Zustandsrückführung das System zwischen Ein- und Ausgang passiviert wird. Dies bedeutet, daß eine verallgemeinerte, in das System eingehende Energie nie größer als die vom System abgegebene, verallgemeinerte Energie ist. Dadurch ist anschaulich klar, daß das System stabil bleibt.
- Neben diesen energiebasierten Methoden werden derzeit auch differentialgeometrische Regelungsverfahren entwickelt. Grundlage dafür ist die Tatsache, daß ein System aus Differentialgleichungen erster Ordnung das Geschwindigkeitsfeld der Systemtrajektorie festlegt. Somit spannen die Drift- und Steuervektorfelder des

¹Die interne Dynamik wird als Nulldynamik bezeichnet, wenn der Regelfehler abgeklungen ist, vgl. Abschnitt 2.2 für eine Definition.

Systems das Geschwindigkeitsfeld der Trajektorien auf, und es lassen sich die mathematischen Methoden der Differentialgeometrie anwenden. Der Vorteil der Betrachtung des Systems im Tangentialraum ist, daß dadurch *koordinatenunabhängige* Stabilitätsanalysen oder Äquivalenztransformationen möglich werden. Eine weit verbreitete Methode dabei ist die durch eine spezielle Koordinatentransformation gewonnene Rückführlinearisierung zur Normalenform, die zu einer E-/A-Linearisierung führt [46]. Damit ist es in einer Vielzahl von Fällen möglich, ein nichtlineares System in ein lineares Mehrfachintegratorsystem zu transformieren. Ist die Ordnung dieses Mehrfachintegratorsystems geringer als die des Originalsystems, so verbleibt eine interne Dynamik, die im allgemeinen durch Stellgrößen und Zustände mit dem linearen Teilsystem verkoppelt und am Systemausgang nicht beobachtbar ist. Eine übergeordnete, lineare Ausgangsrückführung kann nun zur Stabilisierung des linearen Teilsystems herangezogen werden, jedoch hängt die Stabilität der i. allg. nichtlinearen internen Dynamik vom Einschwingverhalten und damit den Anfangszuständen und Reglerparametern ab [62].

- Ein mit der Normalenform verwandter Ansatz ist die näherungsweise E-/A-Linearisierung [39], bei der ein Regelgesetz auf der Minimierung eines Nichtlinearitätsmaßes der nichtlinearen Regelstrecke basiert.
- Eine Erweiterung der E-/A-Linearisierung zu einer dynamischen Rückführlinearisierung stellt die flachheitsbasierte Regelung [42, 53] dar. Ist ein sog. *flacher* Systemausgang gefunden, kann eine *exakte* E-/A-Linearisierung erzielt werden. Damit liegt das gesamte nichtlineare System im transformierten Koordinatensystem (Entwurfskoordinatensystem) als linearer Mehrfachintegrator vor und es tritt keine interne Dynamik auf. Die Systemordnung des rückführlinearisierten Gesamtsystems erhöht sich dabei jedoch um die Zahl der zusätzlichen Zustände der dynamischen Rückführlinearisierung. Das zentrale Problem hierbei ist, einen Systemausgang mit Flachheitseigenschaften zu finden. Es kommt erschwerend hinzu, daß kein notwendig und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines solchen flachen Ausganges bekannt ist. Bei praktischen Anwendungen stellt sich zusätzlich das Problem, daß einzelne Zustandsvariablen mit hohen zeitlichen Ableitungen auftreten und daher nur mit großen Fehlern aus den meßbaren Zustandsvariablen geschätzt werden können. Des Weiteren tragen eventuell im System vorhandene Totzeiten aufgrund der hoch verstärkten Zustandsrückführungen zur Destabilisierung des geregelten Gesamtsystems bei.

-
- Weitere differentialgeometrische Methoden basieren auf der Regelungs-Lie-Algebra (engl. *control Lie algebra*) und nützen Invarianz- und Symmetrieeigenschaften abstrakter Liegruppen zum Reglerentwurf aus [2, 44, 54, 75, 77, 81, 83, 86, 90, 91, 92, 93, 94]. Diese Verfahren ermöglichen die Stabilisierung unteraktuierter Systeme, die nicht mit stetig differenzierbaren Regelgesetzen stabilisierbar sind [78]. Die somit entstehenden Regelgesetze benötigen keinen übergeordneten linearen Regler, wie dies bei der E-/A-Linearisierung üblich ist. Diesen differentialgeometrischen Methoden gemeinsam ist jedoch die Notwendigkeit der exakten Kenntnis der Systemzustände und -struktur. Da mit Parameterperturbationen bestimmte strukturelle Eigenschaften der zugrundeliegenden Systeme verloren gehen, sind einige dieser Methoden beweisbar nicht robust, d. h. kleinste Abweichungen der Systemparameter führen bereits zur Instabilität.
 - Eine weitere Methode zur Stabilisierung unteraktuierter Systeme ist die chaosbasierte Regelung [26, 49, 65, 112]. Dabei wird das System periodisch so angeregt, daß sich die ersten Bifurkationen einstellen. Dieses vorchaotische Verhalten gewährleistet, daß jede Ausgangsfunktion periodisch ihren Sollwert durchläuft. Sind alle Ausgänge in der Nähe des Sollwerts, wird zur lokalen Stabilisierung auf lineare Regelungsverfahren umgeschaltet oder es werden die Parameter der periodischen Anregung adaptiert. Die Klasse der damit regelbaren Systeme ist jedoch stark eingeschränkt, so daß beispielsweise mechanische Systeme unter Gravitationseinfluß nicht stabilisierbar sind. Auch über die Robustheit dieser Regelung kann wenig ausgesagt werden.
 - Ein zeitdiskretes Verfahren zur näherungsweisen Stabilisierung ist die Multirate-Regelung (engl. *multirate control*) [57, 58]. Dabei handelt es sich um ein Näherungsverfahren, bei dem ein zeitdiskretes Ersatzsystem im momentanen Zeitpunkt sowie einer vorgegebenen Anzahl darauffolgender Zeitpunkte tangentiallinearisiert wird. Basierend auf einem rekursiven Vorgehen wird so ein lineares Regelgesetz mit geschalteten Reglerparametern zur lokalen Stabilisierung ermittelt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß es derzeit noch kein praktikables Regelungsverfahren gibt, das in der Lage wäre, unteraktuierte Systeme mit einer instabilen internen Dynamik in einem *großen* Einzugsbereich des Zustandsraums *beweisbar* zu stabilisieren und dabei *robust* gegenüber Parameterperturbationen zu sein.

Eine Lösung bietet das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren der *Invarianzregelung* [98, 99, 105, 106, 108, 110]. Es beruht darauf, den Systemausgang asymptotisch zu

stabilisieren und gleichzeitig die geregelte Systemtrajektorie innerhalb eines gegebenen Zustandsraumgebiets invariant zu halten. Ein solches Gebiet wird als Invarianzgebiet bezeichnet. Wählt man ein geschlossenes Invarianzgebiet, so folgt definitionsgemäß Begrenztheit der Zustandsvariablen. Das neuartige Verfahren kombiniert Aspekte des Ljapunov-Verfahrens sowie geschalteter linearer Regler mit der E-/A-Linearisierung zur Normalenform und reiht sich so in die bestehenden Verfahren ein. Verglichen mit Ljapunovbasierten Verfahren stellt Invarianzregelung jedoch wesentlich weniger restriktive Forderungen an die Regelstrecke sowie an das invariant zu regelnde Zustandsraumgebiet und vereinfacht damit die Reglersynthese. So erfordert beispielsweise eine Ljapunov-Funktion negative Definitheit ihrer zeitlichen Ableitung im gesamten Zustandsraum, wohingegen Invarianzregelung nur auf dem Gebietsrand eine entsprechende Abstiegsbedingung benötigt.

Ein weiterer Vorteil von Invarianzregelung ist die relativ einfach zu erzielende Robustheit gegenüber Parameterschätzfehlern und zeitdiskreter Implementierung. Dies ist auf die geometrische Herleitung der Invarianzregelung zurückzuführen, die dem Entwickler oder der Entwicklerin auch ein intuitives Verständnis des Regelgesetzes ermöglicht. Des Weiteren bietet Invarianzregelung die Möglichkeit, Zustandsraumbeschränkungen bereits im Reglerentwurf mitzuberechnen.

In der folgenden Tabelle 1.1 werden bestehende Regelungsverfahren für unteraktuierte Systeme anhand einiger charakteristischer Merkmale gegenübergestellt. Dabei bedeutet der Punkt *Interpretierbarkeit des Regelgesetzes* die Anschaulichkeit des Regelgesetzes für den Entwickler oder die Entwicklerin, wie etwa energiebasierte Überlegungen. In der letzten Spalte werden die vorausgesetzten Stabilitätseigenschaften Minimal- oder Nichtminimalphasigkeit² (MP/ NMP) angegeben. Dabei bedeutet ein Strich, daß keine Nulldynamik existiert.

Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 wird zunächst an zwei einfachen Beispielsystemen das zentrale Stabilitätsproblem bei der Regelung unteraktuierter Systeme veranschaulicht. Es folgt eine kurze Einführung in die Methode der E-/A-Linearisierung sowie eine Eingrenzung der betrachteten Systemklasse. Anschließend erfolgt eine Herleitung der Invarianzbedingung für Zustandsraumgebiete, die die Grundlage der folgenden Existenzbedingungen für In-

²Ein nichtlineares System wird als nichtminimalphasig (minimalphasig) bezeichnet, wenn seine Nulldynamik im Sinne von Ljapunov instabil (stabil) ist, siehe Abschnitt 2.2.

Tabelle 1.1: Stellung von Invarianzregelung im Vergleich zu bestehenden Verfahren.

Eigenschaft Reglertyp	Existenz nicht heuristischer Reglerentwurfsverfahren/ Aufwand	Möglichkeit zur robusten Erweiterung	Interpretierbarkeit des Regelgesetzes	notwendige Stabilitätsvoraussetzungen
Ljapunov	ja / sehr aufwendig	ja	hoch	MP/NMP
Passivität	ja / mittel	bedingt	mittel	nur MP
Isidoris hochverstärkender Regler	ja / mittel	ja	mittel	nur MP
näherungsweise Linearisierung	ja / mittel	bedingt	gering	MP/NMP
Flachheit	nein	bedingt	gering	—
unstetig, Lie-Algebra-basiert	nein	nein	keine	MP/NMP
Chaos	nein	bedingt	gering	—
Multirate	ja / mittel	bedingt	mittel	MP/NMP
Invarianz	ja / mittel	ja	hoch	MP/NMP

varianzregelgesetze darstellt. Diese dienen als theoretisches Grundgerüst zum Entwurf von Invarianzregelgesetzen in den folgenden Kapiteln.

In Kapitel 3 wird eine Methode zum Entwurf von Invarianzreglern hergeleitet. Diese sind für die allgemein gehaltene, betrachtete Systemklasse anwendbar, können jedoch bei instabiler Nulldynamik zu *kleinen* Gültigkeitsbereichen führen. Daher wird im zweiten Teil von Kapitel 3 die betrachtete Systemklasse auf unteraktuierte Rang-2-Systeme eingeschränkt. Diese Systeme bieten den Vorteil, daß durch die E-/A-Linearisierung Integratorsysteme von nur *zweiter* Ordnung entstehen. Spezielle Systemeigenschaften dieser Doppelintegrator-Systeme werden dazu verwendet, mittels schaltender Regelgesetze *große* Gültigkeitsbereiche auch im Fall instabiler Nulldynamik zu erzielen. Das damit für Rang-2-Systeme zur Verfügung stehende Regler-Entwurfsverfahren wird im Kapitel 4 zur Stabilisierung eines unteraktuierten Roboters beispielhaft durchgeführt und experimentell getestet.

Nachdem in den Kapiteln 2-4 von der Theorie bis zur praktischen Evaluierung Invarianzregelung für die zu Beginn eingegrenzte Systemklasse behandelt wurde, erfolgt

in Kapitel 5 am Beispiel der Kippvermeidung von Kraftfahrzeugen ein Ausblick auf die Anwendbarkeit von Invarianzregelung auf eine größere Systemklasse sowie auf eine zeitdiskrete Reglerrealisierung. Abschließend erfolgt in Kapitel 6 eine Zusammenfassung und ein Ausblick. In Abb. 1.1 ist die Struktur des Hauptteils nochmals graphisch dargestellt.

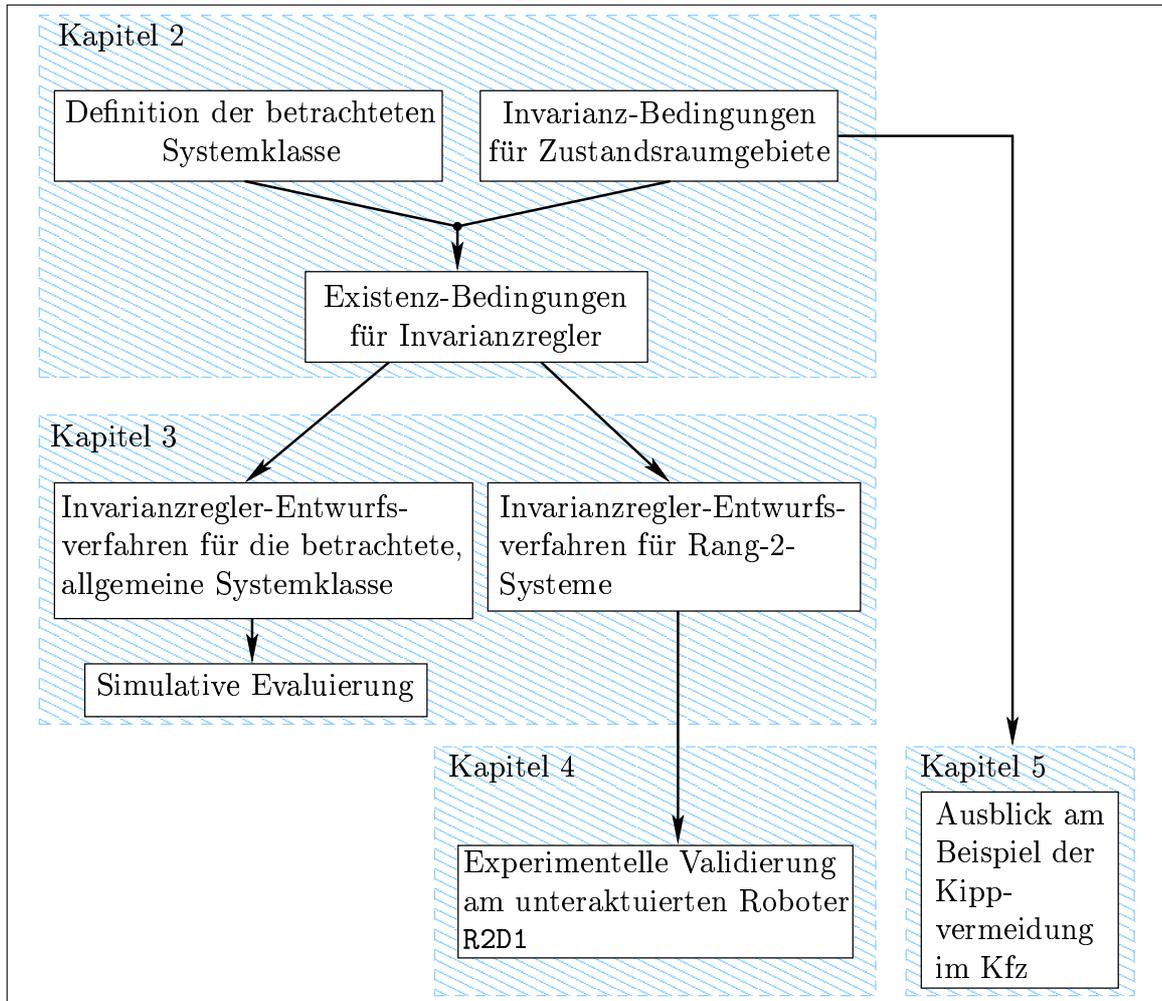


Abbildung 1.1: Gliederung des Hauptteils der Arbeit.

Um eine möglichst in sich abgeschlossene Darstellung dieser Arbeit zu erreichen, wurden einige, für das Verständnis dieser Arbeit benötigte, mathematische Grundlagen und Begriffsdefinitionen in Anhang A aufgenommen. Ergänzend zu Kapitel 3 werden in Anhang C zwei weitere Entwurfverfahren für Invarianzregelgesetze sowie eine Methode zur analytischen Berechnung geeigneter Invarianzgebiete vorgestellt. Anhang D und E beinhalten technische Details zu den vorgestellten Experimenten.

2 Theorie der Invarianzregelung für eine ausgewählte Systemklasse

In diesem Kapitel wird für eine Klasse nichtlinearer, dynamischer Systeme die *Theorie der Invarianzregelung* hergeleitet. Dafür wird zunächst die betrachtete Klasse der *unteraktuierten* Systeme definiert und darauf aufbauend das Regelziel der asymptotischen E-/A-Stabilisierung bei garantierter Gesamtsystemstabilität formuliert. Um dieses Regelziel zu erreichen, wird schrittweise ein axiomatisches System aufeinander aufbauender Gesetzmäßigkeiten entwickelt. Die sich daraus zusammensetzende Theorie ermöglicht die Entwicklung verschiedener Entwurfsverfahren für Invarianzregelgesetze in den Kapiteln 3 und 5 und stellt so die Grundlage dieser Arbeit dar.

Die für eine kompakte Darstellung verwendeten mathematischen Formalismen, Definitionen und Fachbegriffe der nichtlinearen Regelungstheorie werden im mathematischen Anhang A erklärt, um so ein eigenständiges Lesen dieser Arbeit zu erleichtern. Eine darüber hinausgehende, ausführliche Darstellung findet sich in den Standardlehrbüchern der nichtlinearen Regelungstheorie und angewandten Mathematik, wie zum Beispiel [46, 47, 86, 43, 73].

2.1 Phänomenologische Beispiele

Zunächst werden anhand eines linearen, sowie eines einfachen nichtlinearen Beispielsystems die in dieser Arbeit betrachteten Regelungsprobleme veranschaulicht. Dabei sollen die wesentlichen Eigenschaften der betrachteten Klasse der *unteraktuierten* Systeme, die eine konventionelle Regelung unmöglich machen, intuitiv verständlich aufgezeigt werden.

Stabilität eines linearen Systems mit unterschiedlichen Ausgangsfunktionen

Betrachtet wird das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -2\xi_1 - 3\xi_2 + \bar{u}\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit einer Ausgangsfunktion $\bar{y}_1 = 4\xi_1 + \xi_2$.¹ Um zu zeigen, daß das lineare Regelgesetz $\bar{u}_1 = -18\xi_1 - 6\xi_2 + 5\bar{y}^s$ den Systemausgang \bar{y}_1 auf einen konstanten Sollwert \bar{y}^s stabilisiert, wird das E-/A-Verhalten des geschlossenen Regelkreises berechnet. Mit

$$\dot{\bar{y}}_1 = 4\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 = \xi_2 - 2\xi_1 + \bar{u}_1 = 5(\bar{y}^s - \bar{y}_1)$$

folgt die asymptotisch stabile E-/A-Übertragungsfunktion mit der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}\{\bar{y}_1(t)\} = \bar{Y}_1(s)$ zu

$$\frac{\bar{Y}_1(s)}{\bar{y}^s} = \frac{5}{s + 5}.$$

Man erhält ein *identisches* E-/A-Übertragungsverhalten, wenn die, nur in einem Vorzeichen veränderte Ausgangsfunktion $\bar{y}_2 = -4\xi_1 + \xi_2$ vorliegt, und das neue Regelgesetz $\bar{u}_2 = 22\xi_1 + 2\xi_2 + 5\bar{y}^s$ angewendet wird. Simuliert man das Einschwingverhalten beider geregelter Systeme mit den Anfangswerten $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$ und dem Sollwert $\bar{y}^s = 1$, so ergeben sich die zeitlichen Verläufe aus Abb. 2.1. Wie erwartet, ist das E-/A-Verhalten in beiden Fällen asymptotisch stabil. Der Unterschied beider Systeme zeigt sich erst im Einschwingverhalten der Zustandsvariablen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$. So ergibt sich im ersten Fall ein stabiles Einschwingen auf die konstanten Endwerte $\xi_1^\infty = 0.25$, $\xi_2^\infty = 0$, wohingegen im zweiten Fall der Verlauf der Zustandsvariablen instabil ist.

Wie man mittels einer Zerlegung in Modalform leicht nachweisen kann, liegt der Grund für das unterschiedliche Systemverhalten der geregelten Systeme darin, daß im zweiten Fall eine *instabile* und *nicht beobachtbare* Mode auftritt, wohingegen im ersten Fall die nicht beobachtbare Mode stabil ist. Da jedoch eine Modalzerlegung für die in dieser Arbeit betrachtete Klasse *nichtlinearer* Systeme nicht durchführbar ist, wird die allgemeinere, für nichtlineare Systeme geeignete Methode der *Normalenform-*

¹Dieses Beispiel wurde im Rahmen des Vortrags „*Nonlinear Control of the Inertia Wheel Pendulum with Applications to Bipedal Locomotion*“ von Herrn Prof. Mark W. Spong am LSR am 5. April 2000 präsentiert und mit seiner Genehmigung teilweise übernommen.

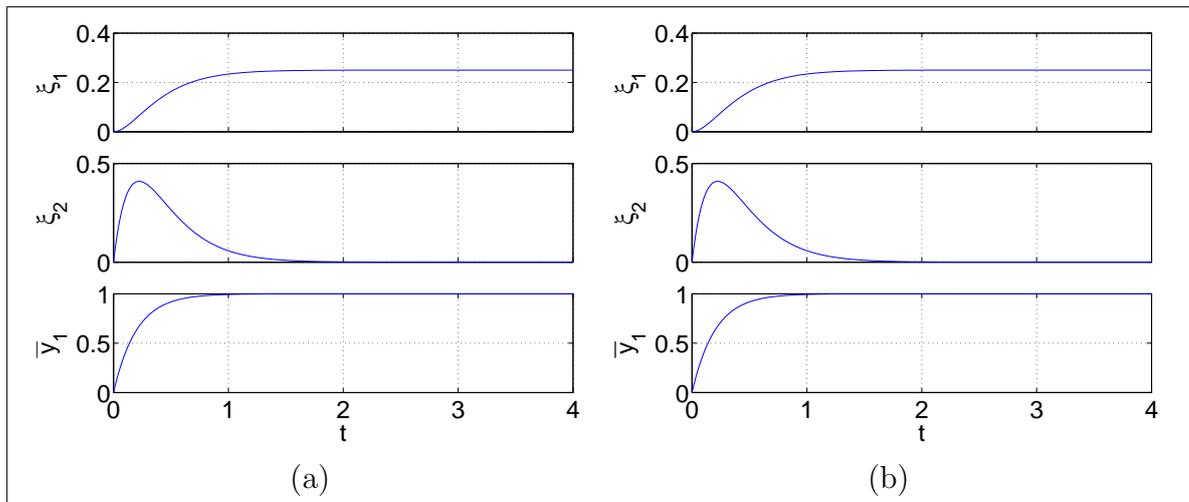


Abbildung 2.1: Für beide Ausgangsfunktionen ergibt sich ein stabiles E-/A-Verhalten bei Sprunganregung. (a) $\bar{y}_1 = 4\xi_1 + \xi_2$: stabil; (b) $\bar{y}_2 = -4\xi_1 + \xi_2$: instabil.

Koordinatentransformation angewendet. Dazu wird zunächst das erste System mit der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{y}_1 = 4\xi_1 + \xi_2 & \xi_1 &= z_2 \\ z_2 &= \xi_1 & \xi_2 &= z_1 - 4z_2 \end{aligned}$$

in die äquivalente Zustandsdarstellung

$$\dot{z}_1 = -5z_1 + 5\bar{y}^s \quad (2.2)$$

$$\dot{z}_2 = -4z_2 + z_1 \quad (2.3)$$

$$\bar{y}_1 = z_1 \quad (2.4)$$

überführt. Dabei wurde die Koordinatentransformation $z_1 = \bar{y}_1$ gewählt, da sich damit anhand der Dynamik von z_1 die interessierende E-/A-Dynamik direkt ablesen läßt. Die zweite Zeile der Koordinatentransformation $z_2 = \xi_1$ wurde so gewählt, daß die Umkehrtransformation global definiert ist. Damit folgen die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Y}_1(s)}{\bar{y}^s} &= \frac{5(s+4)}{(s+5)(s+4)} = \frac{5}{s+5} \\ \frac{Z_2(s)}{\bar{Y}_1(s)} &= \frac{1}{s+4} \end{aligned} \quad (2.5)$$

und es ergibt sich der in Abb. 2.2 (a) gezeigte Signalflußplan. Man erkennt, daß neben

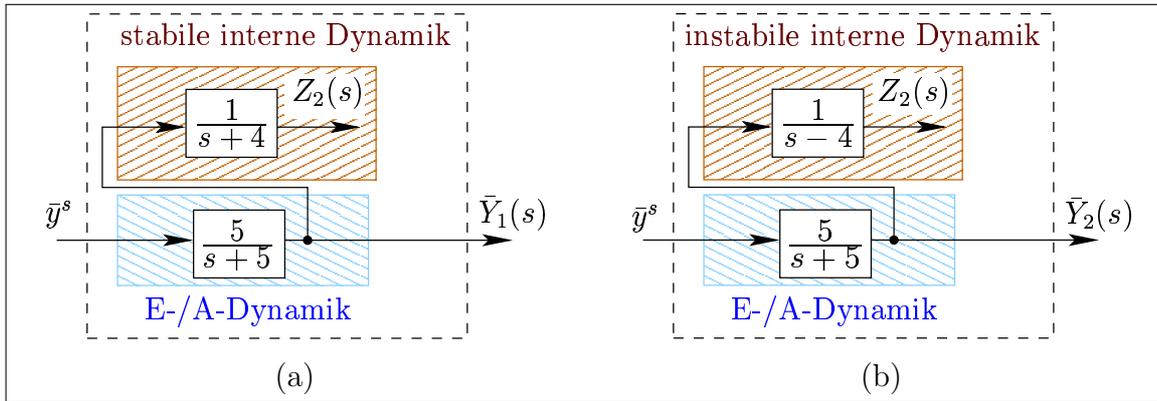


Abbildung 2.2: Signalflußpläne der Systeme in z -Koordinaten. Die am Ausgang nicht beobachtbare Dynamik $Z_2(s)$ ist im ersten Fall (a) stabil; im zweiten Fall (b) instabil.

dem stabilen E-/A-Block noch ein weiterer Block das stabile Übertragungsverhalten zwischen $\bar{Y}_1(s)$ und $Z_2(s)$ beschreibt. Wie aus der ungekürzten Form der Übertragungsfunktion in (2.5) ersichtlich ist, besitzt das geregelte System eine negative Nullstelle bei $s = -4$ und ist daher *minimalphasig*. Durch das verwendete Regelgesetz folgt also eine *stabile* Pol-Nullstellen Kompensation. Diese Kompensation bewirkt, daß $Z_2(s)$ am Systemausgang $\bar{Y}_1(s)$ *nicht beobachtbar* ist. Im Unterschied dazu handelt es sich im zweiten Fall um ein *nichtminimalphasiges* System, so daß eine *instabile* Pol-Nullstellen Kompensation vorliegt.

Die an den jeweiligen Systemausgängen nicht beobachtbare Dynamik wird als *interne Dynamik* bezeichnet. In den folgenden Kapiteln wird zur Stabilitätsanalyse *nichtlinearer*, geregelter Systeme häufig diese interne Dynamik für den Fall des *eingeschwungenen* Systemausgangs betrachtet und mit *Nulldynamik* bezeichnet. Bei den vorliegenden linearen Systemen ergibt sie sich mit $\bar{y}^s = \text{const} = 1$ zu $\dot{z}_2 = \pm 4 z_2 + 1$. Dabei resultiert die Bezeichnung *Nulldynamik* aus der Tatsache, daß die Nulldynamik einzig und allein durch die *Nullstellen* $s = \pm 4$ der ungekürzten Übertragungsfunktion $\bar{Y}_i(s)/\bar{y}^s$ bestimmt ist [46].

Aus der linearen Systemtheorie ist weiterhin bekannt, daß diese Nullstellen, und damit die Nulldynamik, *nur* von der Wahl der Ausgangsfunktion abhängen und damit invariant bezüglich Koordinatentransformationen und statischen² Zustandsrückführungen sind. Wie in [46] gezeigt, gilt dies auch für nichtlineare Systeme.

²Eine *statische* Zustandsrückführung besitzt im Gegensatz zu einer *dynamischen* Zustandsrückführung keine eigenen Reglerzustände.

Arten der Instabilität im nichtlinearen Fall

Die für den linearen Fall durchgeführten Betrachtungen können auf den nichtlinearen Fall erweitert werden und dazu dienen, das Systemverhalten zu klassifizieren und geeignete Regelgesetze zu finden. Dazu wird beispielhaft das System

$$\dot{\xi}_1 = \bar{u} \quad (2.6)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_2 (\xi_2 - 1) + \bar{u} \quad (2.7)$$

$$\bar{y} = \xi_1 \quad (2.8)$$

betrachtet. Die in diesem einfachen System enthaltene Nichtlinearität in Form eines quadratischen Terms stellt bei vielen technisch relevanten, dynamischen Systemen die zu einem instabilen Systemverhalten führenden *wesentlichen* Anteile der Gesamtdynamik dar. Beispiele solcher Systeme sind Wachstumsmodelle (die ξ_2 Dynamik gehört der Klasse der Verhulst-Wachstumsgesetze an), elektrische Transformatorschaltungen sowie Antriebe (Fremd- und Eigeninduktion) und mechanische Systeme (Kreiselkräfte).

Das betrachtete Regelziel für System (2.6)-(2.8) besteht darin, mittels des linearen Regelgesetzes $\bar{u} = k_p (\bar{y}^s - \xi_1)$ den Systemausgang \bar{y} auf den Sollwert $\bar{y}^s = 1$ zu regeln und gleichzeitig den Verlauf von $\xi_2(t)$ begrenzt zu halten. Wie aus den Simulationsläufen in Abb. 2.3 hervorgeht, ergibt sich für den Anfangszustand $\xi_1(0) = 5, \xi_2(0) = 2.4$ mit $k_p = 10$ ein stabiler Verlauf, wohingegen die Wahl $k_p = 1$ zu einem instabilen Verlauf der internen Dynamik $\xi_2(t)$ führt.

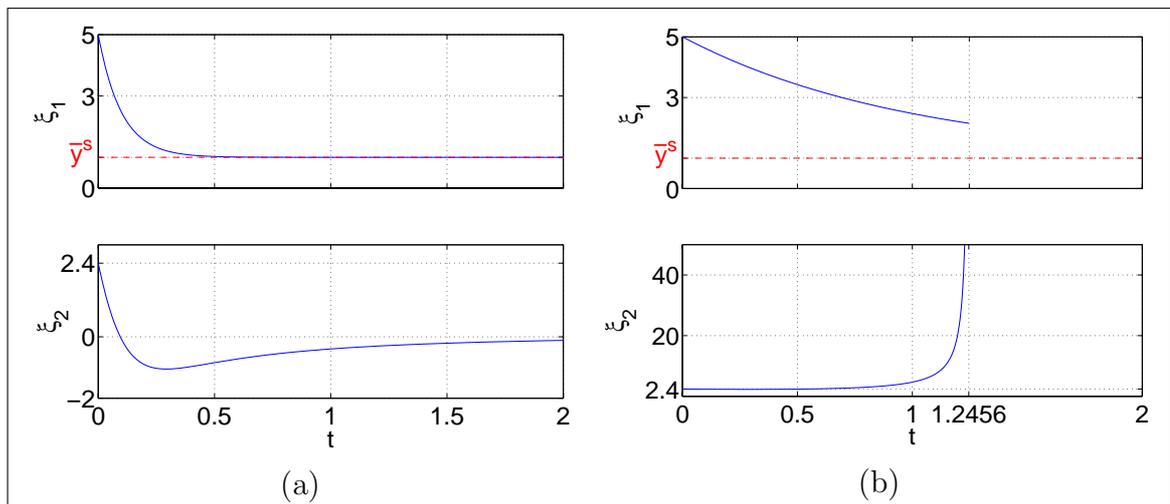


Abbildung 2.3: Interne Stabilität hängt vom Reglerparameter ab: (a) $k_p = 10$ stabil; (b) $k_p = 1$ instabil, Singularität bei $t \approx 1.24$.

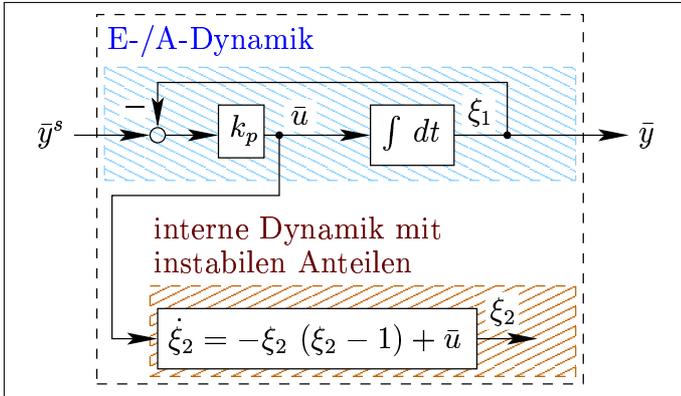


Abbildung 2.4: Aufteilung in eine E-/A-Dynamik und eine interne Dynamik.

Der Grund für die Instabilität liegt wie im vorangegangenen Fall darin, daß neben der geregelten E-/A-Dynamik noch die am Systemausgang nicht beobachtbare, interne Dynamik mit instabilen Anteilen existiert, siehe Abb. 2.4. Während das vorangegangene, *lineare* Beispielsystem nur aufgrund der Nulldynamik instabil werden kann, destabilisiert sich im nun vorliegenden *nichtlinearen* Fall das geregelte

System durch einen auf nichtlineare Systeme beschränkten Effekt bereits *während* des Einschwingvorgangs und damit nach *endlicher Zeit* (engl. *finite-escape* [93, 59]). So konvergiert die zeitliche Lösung der internen Dynamik gegen eine Singularität bei $t \approx 1.24$, siehe Abb. 2.3 (b). Berücksichtigt man für eine stark konservative Stabilitätsanalyse der internen Dynamik (2.7) nur den quadratischen Term ξ_2^2 und setzt $\bar{u} = 0 = \text{const}$, so folgt die Dgl. $\dot{\xi}_2 = \xi_2^2$, deren Lösung für $\xi_2(0) \neq 0$ mittels Trennung der Variablen zu

$$\xi_2(t) = \frac{1}{\frac{1}{\xi_2(0)} - t}$$

berechnet werden kann. Daraus läßt sich qualitativ erkennen, daß $\xi_2(t)$ aufgrund einer Singularität bei $t = \xi_2(0)^{-1}$ nur für $t < \xi_2(0)^{-1}$ definiert ist. Es ist zu beachten, daß der vernachlässigte Term $-\xi_2 + \bar{u}$ auf der rechten Seite von (2.7) im instabilen Verlauf ($k_p = 1$) strikt negative Werte annimmt und daher eine Kompensation des (für die Instabilität verantwortlichen) positiven Terms ξ_2^2 bewirkt. Daher tritt die Singularität in der zeitlichen Lösung erst bei $t \approx 1.24$ und nicht bereits bei $t = \xi_2(0)^{-1} \approx 0.42$ auf, siehe Abb. 2.3 (b). Man erkennt, daß zum Zeitpunkt der Singularität die geregelte Zustandsvariable ξ_1 vom Regelziel noch weit entfernt ist, so daß sich das System destabilisiert, noch bevor die Nulldynamik erreicht wurde. Praktisch bedeutet dies, daß die interne Dynamik eines nichtlinearen Systems – und damit das Gesamtsystem – trotz global asymptotisch stabiler Nulldynamik bereits nach *endlicher* Zeit instabil werden kann [93].

Begriff der Unteraktuiertheit

Systeme mit einer internen Dynamik werden in dieser Arbeit als *unteraktuierte* Systeme definiert. Der Begriff der *Unteraktuiertheit* stammt dabei aus der Mechanik, wo er für

Systeme mit mehr dynamischen Freiheitsgraden als unabhängigen Steuergrößen steht. Bei solchen Systemen ist anschaulich klar, daß höchstens so viele Freiheitsgrade gleichzeitig geregelt werden können, wie unabhängige Steuergrößen vorhanden sind. Betrachtet man beispielsweise einen zweiachsigen SCARA Roboter (siehe z. B. R2D1 aus Kapitel 4) mit einem angetriebenen und einem nicht angetriebenen Gelenk, so kann unter der Voraussetzung bestimmter Verkopplungseigenschaften, eines der beiden Gelenke geregelt werden, wobei das andere Gelenk einer internen Dynamik folgt.

Fazit

In beiden Beispielen entsteht durch eine asymptotisch stabile Regelung der E-/A-Dynamik eine am Systemausgang nicht beobachtbare, interne Dynamik, so daß es sich um unteraktuierte Systeme handelt. Die Stabilität dieser internen Dynamik hängt von der Wahl der Reglerparameter, des Sollwerts sowie der Anfangswerte ab. Im linearen Fall kann so nach Abklingen des Regelfehlers die interne Dynamik gegen eine instabile Bahn der Nulldynamik konvergieren. Im nichtlinearen Fall kann zusätzlich die interne Dynamik bereits vor Erreichen der Nulldynamik gegen eine Singularität in der zeitlichen Lösung streben und daher nach endlicher Zeit instabil werden.

Einen Ansatz zur Lösung dieses Stabilitätsproblems bietet das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte, neuartige Verfahren der *Invarianzregelung*, bei dem neben asymptotisch stabilem E-/A-Verhalten auch die internen Zustandsvariablen auf ein beschränktes Zustandsraumgebiet begrenzt werden. Damit werden Singularitäten in der zeitlichen Lösung der internen Zustandsvariablen sowie instabile Bahnen der Nulldynamik ausgeschlossen und es wird Begrenztheit aller Zustandsvariablen sichergestellt. Wie in den folgenden Abschnitten hergeleitet wird, kann dieses Regelungsverfahren auf unteraktuierte Systeme mit lokal begrenzten Bereichen der Nulldynamik angewendet werden.

2.2 Betrachtete Systemklasse

In der Folge werden nichtlineare *single-input single-output* (SISO) Systeme vom Typ

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{\xi}) \bar{u} \\ \bar{y} &= h(\boldsymbol{\xi})\end{aligned}\tag{2.9}$$

mit Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, einem glatten Drift- und Steuervektorfeld $\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi})$, $\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{\xi})$, einer Steuervariablen $\bar{u} \in \mathbb{R}$ und einer skalaren Ausgangsfunktion $h(\boldsymbol{\xi})$ betrachtet. Zur Stabilisierung dieses Systems wird die Methode der E-/A-Linearisierung (Rückführli-

nearisierung) zusammen mit einem überlagerten linearen Regelgesetz betrachtet. Dabei wird durch eine Vorregelung ein linearer Zusammenhang zwischen einer neuen (virtuellen) Eingangsgröße und einer möglichst hohen zeitlichen Ableitung des Systemausgangs eingepreßt. Das so erzwungene Systemverhalten eines mehrfach-Integratorsystems kann dann mit einem überlagerten linearen Regler auf den gewünschten Sollwert stabilisiert werden. Man bezeichnet die Ordnung des mehrfach-Integratorsystems nach [46] als den *relativen Rang* des nichtlinearen Systems bezüglich der gegebenen Ausgangsfunktion $h(\boldsymbol{\xi})$. Der relative Rang wird bestimmt, indem die Ausgangsfunktion so oft nach der Zeit entlang der Systemtrajektorie von (2.9) abgeleitet wird, bis zum ersten Mal die Steuergröße \bar{u} in die zeitliche Ableitung eingeht: Mit

$$\dot{h} = \frac{dh(\boldsymbol{\xi})^T}{d\boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \stackrel{(2.9)}{=} \frac{dh(\boldsymbol{\xi})^T}{d\boldsymbol{\xi}} (\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}) \bar{u}) = L_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi}) + L_{\bar{\mathbf{g}}}h(\boldsymbol{\xi}) \bar{u}$$

muß daher für Rang $r = 1$ die Bedingung $L_{\bar{\mathbf{g}}}h(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ erfüllt sein. Demgegenüber muß für Rang $r \geq 2$ die Bedingung $L_{\bar{\mathbf{g}}}h(\boldsymbol{\xi}) = 0$ gelten. In diesem Fall berechnet sich die zweite Ableitung von h nach der Zeit zu

$$\ddot{h} = \frac{dL_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi})^T}{d\boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \stackrel{(2.9)}{=} \frac{dL_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi})^T}{d\boldsymbol{\xi}} (\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}) \bar{u}) = L_{\bar{\mathbf{f}}}^2h(\boldsymbol{\xi}) + L_{\bar{\mathbf{g}}}L_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi}) \bar{u} ,$$

woraus sich für $r \geq 3$ die Bedingung $L_{\bar{\mathbf{g}}}L_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi}) = 0$ ablesen läßt. Führt man dieses Vorgehen sukzessive fort, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{h} &= L_{\bar{\mathbf{f}}}h(\boldsymbol{\xi}) \\ \ddot{h} &= L_{\bar{\mathbf{f}}}^2h(\boldsymbol{\xi}) \\ &\vdots \\ h^{(r)} &= L_{\bar{\mathbf{f}}}^r h(\boldsymbol{\xi}) + L_{\bar{\mathbf{g}}}L_{\bar{\mathbf{f}}}^{r-1}h(\boldsymbol{\xi}) \bar{u} \end{aligned}$$

und die formale relative Rangbedingung folgt zu

$$\begin{aligned} L_{\bar{\mathbf{g}}}L_{\bar{\mathbf{f}}}^k h(\boldsymbol{\xi}) &= 0 \quad \text{für } k < r - 1 \\ L_{\bar{\mathbf{g}}}L_{\bar{\mathbf{f}}}^{r-1} h(\boldsymbol{\xi}) &\neq 0 . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Mit dieser Definition des relativen Rangs r wird folgende Einschränkung der in dieser Arbeit betrachteten Systemklasse vorgenommen:

Systemannahme 1 Das System (2.9) soll bezüglich der gegebenen Ausgangsfunktion $h(\boldsymbol{\xi})$ einen konstanten, global³ definierten relativen Rang $0 < r < n$ besitzen.

Unter dieser Annahme definieren die r Funktion $\psi_i(\boldsymbol{\xi})$ gemäß

$$\begin{aligned}\psi_1(\boldsymbol{\xi}) &= h(\boldsymbol{\xi}) \\ \psi_2(\boldsymbol{\xi}) &= L_{\bar{f}} h(\boldsymbol{\xi}) \\ &\vdots \\ \psi_r(\boldsymbol{\xi}) &= L_{\bar{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{\xi})\end{aligned}\tag{2.11}$$

zusammen mit weiteren $n - r$ Funktionen $\psi_{r+1}(\boldsymbol{\xi}), \dots, \psi_n(\boldsymbol{\xi})$ eine global gültige Koordinatentransformation

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = [\psi_i(\boldsymbol{\xi})], \quad i \in \{1, \dots, n\} .\tag{2.12}$$

Dabei können die $n - r$ Funktionen $\psi_{r+1}(\boldsymbol{\xi}), \dots, \psi_n(\boldsymbol{\xi})$ so gewählt werden, daß die Transformationsmatrix $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi})$ regulär und damit die Rücktransformation

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\tag{2.13}$$

global definiert ist. Mit den Hilfsgrößen

$$a(\boldsymbol{\xi}) = L_{\bar{g}} L_{\bar{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{\xi}) , \quad b(\boldsymbol{\xi}) = L_{\bar{f}}^r h(\boldsymbol{\xi})\tag{2.14}$$

und einer neuen, *virtuellen* Steuergröße u läßt sich für $a(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ die Rückführlinearisierung

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{u - b(\boldsymbol{\xi})}{a(\boldsymbol{\xi})}\tag{2.15}$$

auf System (2.9) zusammen mit der Koordinatentransformation (2.13) anwenden. Damit erhält man in den neuen $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ -Koordinaten das als *globale Normalenform* [46] bezeichnete System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} u\tag{2.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) u .\tag{2.17}$$

³Bedingungen, bei deren Einhaltung ein System einen konstanten, global definierten relativen Rang besitzt, werden in [46], Proposition 9.1.1, formuliert und basieren im Wesentlichen auf Betrachtungen der Dimension des System-Tangentialraums.

Eine spezielle Form der Normalenform ist die *eingangsnormalisierte* Normalenform [39], die sich gegenüber (2.16)-(2.17) darin unterscheidet, daß die Steuergröße u nicht in (2.17) eingeht, d. h. es gilt $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Nach [46], Proposition 4.1.3 existiert für ein System mit konstantem, global definiertem relativem Rang r immer eine entsprechende Koordinatentransformation. In den folgenden Kapiteln wird gezeigt, daß sich bestimmte Schritte im Invarianzreglerentwurf erleichtern, wenn das System in diese spezielle Form überführt wird. Der Preis für diese Vereinfachung ist, daß i. A. ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen gelöst werden muß. In Abschnitt 4.2 und Anhang D wird dies beispielhaft für den unteraktuierten Roboter R2D1 durchgeführt. Eine verallgemeinerte Methode für unteraktuierte mechanische Systeme findet sich in [50].

Für die Normalenform (2.16)-(2.17) gelten die folgenden, zusätzlichen Eigenschaften:

- Da nach Systemannahme 1 der relative Rang r global konstant ist, folgt aus der Definition (2.10) des relativen Rangs sowie aus der Definition von $a(\boldsymbol{\xi})$ die Bedingung $a(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ für alle $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ und damit die globale Gültigkeit der Rückführlinearisierung (2.15) und der Normalenform (2.16)-(2.17).
- Für die Ausgangsfunktion der Normalenform folgt aus der ersten Zeile von (2.11) sowie der ersten Zeile der Koordinatentransformation (2.12) definitionsgemäß immer der Zusammenhang $\bar{y} = h(\boldsymbol{\xi}) = x_1$.
- Da die tatsächliche Steuergröße \bar{u} nach Voraussetzung keinen Stellgrößenbeschränkungen unterliegt, folgt das gleiche für die neue, *virtuelle* Steuergröße u , d. h. $u \in \mathbb{R}$.
- Das lineare Teilsystem (2.16) ist ein lineares r -fach Integratorsystem mit konstanter Systemmatrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$, $a_{i,j} = 0$ außer $a_{i,i+1} = 1$ und Einkoppelvektor $\mathbf{b} = [b_i]$, $b_i = 0$ außer $b_r = 1$ (spezielle Ausprägung der Regelungsnormalform, auch als Brunovski-Form bekannt).
- Die Dynamik von (2.17) berechnet sich zu

$$\dot{z}_i = L_{\bar{\mathbf{f}}}\psi_i(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})} + L_{\bar{\mathbf{g}}}\psi_i(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})} u, \quad r + 1 \leq i \leq n$$

und wird als *interne* Dynamik bezeichnet, da deren Zustände nicht in die Ausgangsfunktion $\bar{y} = x_1$ der Normalenform eingehen, sie also am Systemausgang *nicht beobachtbar* ist. Aus diesem Grund wird $\mathbf{z} = [z_i] \in \mathbb{R}^{n-r}$ als *interner* Zustand bezeichnet.

In Abb. 2.5 ist ein Signalfußplan des rückführlinearisierten Systems (2.9) in Original- und Normalenformkoordinaten dargestellt: Man erkennt, daß sich das Originalsystem durch die Rückführlinearisierung (2.15) in den neuen (\mathbf{x}, \mathbf{z}) -Koordinaten in ein r -fach Integratorsystem $x_1^{(r)} = h^{(r)} = u$ und eine interne Dynamik $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u$ aufteilt. Dabei besteht eine *einseitige* Verkopplungsstruktur im Sinne, daß die interne Dynamik von den geregelten Zustandsvariablen abhängt. Es wird später gezeigt, daß diese einseitige Verkopplungsstruktur nur bei exakt bekannten Systemparametern gültig ist; bei Auftreten von Parameterunsicherheiten (Perturbationen) entsteht eine schwache, wechselseitige Verkopplung.

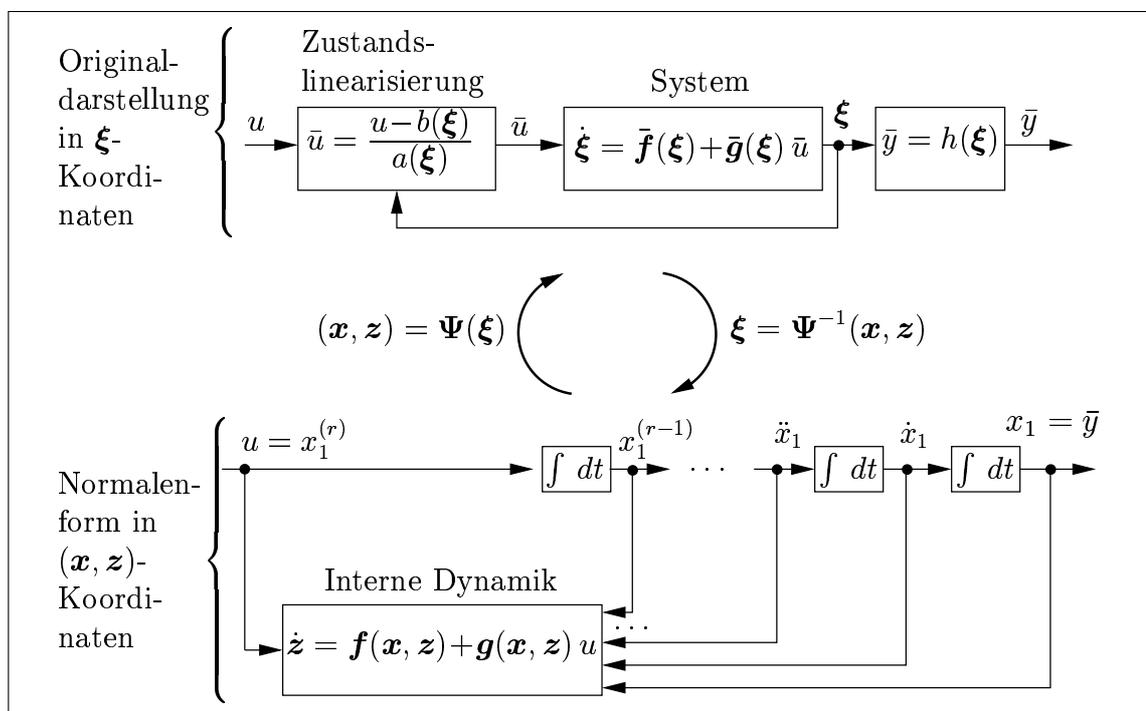


Abbildung 2.5: Darstellung des rückführlinearisierten Systems in Originalkoordinaten ξ und Normalenformkoordinaten (Entwurfskoordinaten) (\mathbf{x}, \mathbf{z}) .

Eine anschauliche Interpretation der internen Dynamik erhält man bei der Betrachtung mechanischer Systeme: Jeder *mechanische Freiheitsgrad* wird durch die zwei Systemzustände der Position und der Geschwindigkeit beschrieben. Werden von $k = n/2$ mechanischen Freiheitsgraden nur $r < k$ angetrieben, so verbleiben $k - r$ nicht angetriebene mechanische Freiheitsgrade, die die interne Dynamik bilden. Bei dieser speziellen Systemklasse ist also die Existenz einer internen Dynamik dadurch begründet, daß weniger Antriebe als mechanische Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. Daher sind solche

mechanischen Systeme in der Literatur als *unteraktuierte* Systeme bekannt [56, 17, 54, 41, 48, 61, 9, 50, 55, 63, 64]. Im Folgenden wird diese, für mechanische Systeme geprägte Definition der Unteraktuiertheit, auf die hier betrachtete, allgemeinere Systemklasse erweitert.

Definition 2.1 *Ein SISO-System der Form (2.9) der Ordnung n wird als unteraktuiert bezeichnet, wenn es bezüglich der gegebenen Ausgangsfunktion $h(\boldsymbol{\xi})$ einen global definierten und konstanten relativen Rang r besitzt, für den $0 < r < n$ gilt.*

Im Unterschied zur Klasse mechanischer Systeme impliziert die Eigenschaft der *Unteraktuiertheit* bei der hier betrachteten, allgemeineren Systemklasse also nicht zwangsläufig weniger unabhängige Steuergrößen als dynamische Freiheitsgrade. So gilt beispielsweise für den in Kapitel 4 behandelten unteraktuierten, zweiarmigen, SCARA-ähnlichen Roboter R2D1 $n = 4$. Es reichen jedoch zwei unabhängige Gelenkantriebe für eine exakte E-/A-Linearisierung aus. Ausschlaggebend für Unteraktuiertheit ist also nicht die Zahl der unabhängigen Antriebe, sondern vielmehr die Tatsache, daß nicht alle Zustandsvariablen am gegebenen Systemausgang beobachtbar sind.

Anmerkung 2.1 *Alternativ könnte man die hier betrachteten Systeme auch, wie in der Mechanik gebräuchlich, als nichtholonome Systeme bezeichnen. So kann die interne Dynamik (2.17) als eine nichtholonome Nebenbedingung der Ordnung r für das lineare Teilsystem (2.16) angesehen werden [51, 49, 100]: Mittels der E-/A-Linearisierung (2.15) wird dem Systemausgang die Dynamik eines r -fach Integratorsystems eingeprägt. Der Preis dafür ist die entstehende dynamische Zwangsbedingung in Form der internen Dynamik.*

Die *Nulldynamik* ist schließlich diejenige Teilmenge der internen Dynamik, die sich im Fall des Regulatorproblems (d. h. für $\bar{y} = 0$) nach Abklingen des Regelfehlers mit $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ und $u = 0$ ergibt. In (2.17) eingesetzt, folgt für die Dgl. der Nulldynamik

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{z}) . \quad (2.18)$$

Damit lassen sich in Anlehnung an [59], die im Laufe dieser Arbeit benötigten, wichtigen Systemklassen definieren.

Definition 2.2 *Ein unteraktuiertes System der Form (2.16)-(2.17) ist*

- *minimalphasig, wenn die Nulldynamik einen global asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ besitzt.*

- *schwach minimalphasig*, wenn die Nulldynamik global stabil im Sinne von Ljapunov ist, also eine glatte⁴, positiv definite, radial unbegrenzte Funktion $W(\mathbf{z})$ so existiert, daß $L_{\mathbf{f}_0} W \leq 0$ gilt.

- *nichtminimalphasig*, wenn die Nulldynamik instabil im Sinne von Ljapunov ist.

Gelten die genannten Eigenschaften nur lokal, dann wird von lokaler Minimalphasigkeit bzw. von lokaler, schwacher Minimalphasigkeit gesprochen. Ist ein System bezüglich eines gegebenen Ausgangs minimalphasig bzw. nichtminimalphasig, so spricht man abkürzend von einem minimalphasigen bzw. nichtminimalphasigen Systemausgang.

Anmerkung 2.2 Die Nulldynamik für lineare Systeme wird vollständig durch die Nullstellen der Übertragungsfunktion bestimmt, [46]. Damit liegt bei einem unteraktuierten linearen System stets eine Pol-Nullstellenkompensation vor. Dabei wurden instabile Polstellen gekürzt, falls die interne Dynamik instabil ist.

Es ist zu beachten, daß die Definition von Nichtminimalphasigkeit von nichtlinearen Systemen nicht immer auf lineare Systeme übertragen werden kann. So kann ein lineares System nichtminimalphasig sein, es muß jedoch keine Pol-Nullstellenkompensation vorliegen, d. h. es muß nicht zwangsläufig eine interne Dynamik existieren. Spricht man hingegen von einem nichtlinearen nichtminimalphasigen System, so wird stets die Existenz einer internen Dynamik vorausgesetzt.

Da die hier betrachteten, unteraktuierten Systeme aus einem r -fach Integratorsystem und einer einseitig verkoppelten nichtlinearen internen Dynamik bestehen, teilt sich das Regelziel in die folgenden zwei Teilziele auf: Finde ein Regelgesetz $u(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ so, daß für das damit geregelte System (2.16)-(2.17)

1. asymptotische E-/A-Stabilität gegeben ist:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} , \quad (2.19)$$

2. positive Invarianz⁵ eines gegebenen Zustandsraumgebiets $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) \in \mathcal{G} \quad \text{für } t \geq 0 . \quad (2.20)$$

Falls der Betrag der internen Zustandsvariablen $\|\mathbf{z}\|$ im Gebiet \mathcal{G} beschränkt ist, folgt aus dem Regelziel (2.20) der Invarianz von \mathcal{G} Beschränktheit der internen Zustandsvariablen \mathbf{z} . Im Folgenden wird diese Eigenschaft mit *interner Stabilität* bezeichnet. Ein

⁴Glatt ist eine Abkürzung für *stetig-differenzierbar*.

⁵In Definition 2.3 erfolgt eine genaue Begriffsdefinition von *positiver Invarianz*.

Regelgesetz für (2.16)-(2.17), das beide Regelziele (2.19)-(2.20) gleichzeitig erfüllt, wird nach [98] *Invarianzregelgesetz* oder *Invarianzregler* genannt.

Hinreichend und notwendig (siehe Korollar 2.2) für die Existenz eines Invarianzregelgesetzes, das interne Stabilität garantiert, ist die folgende Systemannahme 2. Sie definiert vollständig zusammen mit der relativen Rangbedingung aus Systemannahme 1 die im Hauptteil dieser Arbeit betrachtete Systemklasse.

Systemannahme 2 Die Nulldynamik (2.18) von System (2.9) bezüglich der gegebenen Ausgangsfunktion $h(\boldsymbol{\xi})$ ist lokal begrenzt.

Tabelle 2.1 faßt die zu prüfenden Systemeigenschaften nochmals zusammen.

Tabelle 2.1: Systemvoraussetzungen für Invarianzregelung

Schritt 1: Bedingungen an die Systemstruktur:

Überprüfe, ob sich das zugrundeliegende System in der Form (2.9) beschreiben läßt. Wenn ja, überprüfe mittels (2.10), ob der relative Rang $0 < r < n$ bezüglich der gegebenen Ausgangsfunktion global definiert und konstant ist. Ist dies der Fall, transformiere das System mittels der Rückführlinearisierung (2.15) in die Normalenform (2.16)-(2.17).

Schritt 2: Rangabfall-Bedingung:

Falls kein Rangabfall vorliegt (d. h. falls $r = n$ gilt), ist das System exakt E-/A-linearisierbar, so daß keine interne Dynamik auftritt und der Einsatz von Invarianzregelung zur Stabilisierung unnötig ist. Andernfalls kann Invarianzregelung zur Stabilisierung der dann existierenden, internen Dynamik angewendet werden.

Schritt 3: Test von Systemannahme 2:

Falls für mindestens einen Anfangszustand $(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0)) \neq \mathbf{0}$ ein Regelgesetz $u(\boldsymbol{x})$ gefunden werden kann, das die geforderte, asymptotische E-/A-Stabilität sowie interne Stabilität erzielt, ist Systemannahme 2 erfüllt; es existiert ein Invarianzregelgesetz.

Schritt 3 gilt nicht, falls die speziell getestete Trajektorie des geregelten Systems gegen einen instabilen Gleichgewichtspunkt oder eine Separatrix der Nulldynamik konvergiert. Dies ist jedoch ein in der Praxis nicht relevanter Sonderfall.

Beispiel 2.1 Das lineare Beispielsystem (2.1) besitzt bezüglich der Ausgangsfunktionen $y_{1,2}$ einen relativen Rang $r = 1$ und weist damit einen Rangabfall von $n - r = 1 > 0$ auf; für das nichtlineare Beispielsystem (2.6)-(2.8) gilt ebenso $n - r = 1 > 0$. Daher handelt es sich in beiden Fällen um unteraktuierte Systeme.

Das lineare Beispielsystem (2.1) erfüllt mit der ersten, minimalphasigen Ausgangsfunktion y_1 Systemannahme 2, da die Nulldynamik einen Pol bei $s = -4$ besitzt und damit stabil ist. Das Gegenteil ist der Fall für die Ausgangsfunktion y_2 , bezüglich derer System (2.1) nichtminimalphasig ist. In diesem Fall existiert kein Invarianzregelgesetz.

Für das nichtlineare Beispielsystem (2.6)-(2.8) ist Systemannahme 2 nach Schritt 3 aus Tabelle 2.1 erfüllt, da ein stabiles Systemverhalten mit der Wahl $k_p = 10$ existiert, vgl. Abb. 2.3 (a).

Der Rest dieses Kapitels gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2.3 wird zunächst das Invarianzproblem (2.20) unabhängig von der E-/A-Stabilisierungsfrage diskutiert. Bedingungen, die notwendig sind, damit zusätzlich zur Invarianz des Zustandsraumgebiets \mathcal{G} noch asymptotische E-/A-Stabilität gegeben ist, werden im darauffolgenden Abschnitt 2.4 behandelt.

2.3 Invarianzbedingungen für Zustandsraumgebiete

In diesem Abschnitt werden Bedingungen dafür angegeben, daß eine im Gebiet \mathcal{G} startende Systemtrajektorie \mathcal{G} nicht mehr verläßt. Diese Bedingungen werden Invarianzbedingungen genannt und sind vom relativen Rang r des betrachteten Systems unabhängig. Daher wird zur Herleitung der Invarianzbedingungen nicht die spezielle Systemdarstellung in Normalenform benötigt und es wird zur vereinfachten Darstellung System (2.9) sowie das invariant zu haltende Gebiet \mathcal{G} in Originalkoordinaten $\boldsymbol{\xi}$ betrachtet.

Zunächst wird ein konstantes Zustandsraumgebiet $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ implizit durch

$$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\xi} \mid \Phi(\boldsymbol{\xi}) \leq 0\} \quad (2.21)$$

definiert, wobei $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ als *Invarianzfunktion* bezeichnet wird. $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ muß glatt sein und 0 als regulären Wert besitzen. Dadurch wird gewährleistet, daß der Gradient $\nabla\Phi(\boldsymbol{\xi})$ an der Stelle $\Phi = 0$ definiert ist. Die Berandung von \mathcal{G} ergibt sich durch $\partial\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\xi} \mid \Phi(\boldsymbol{\xi}) = 0\}$.

Definition 2.3 Ein Gebiet \mathcal{G} ist positiv bzw. negativ invariant bezüglich eines dynamischen Systems, wenn mit fort- bzw. rückschreitender Zeit die Trajektorie des dynamischen Systems das Gebiet \mathcal{G} nicht verläßt.

Im Folgenden wird nur der Fall $t \geq 0$ betrachtet, so daß nicht zwischen *positiver* und *negativer* Invarianz unterschieden werden muß und abkürzend nur die Bezeichnung *invariant* verwendet wird.

Des Weiteren wird zunächst der bisher vorausgesetzte Fall *exakt bekannter Systemparameter* angenommen (*Nominalfall*). Da im sog. *perturbierten* Fall die Systemparameter mit Schätzfehlern behaftet sind, entsteht bei der Rückführlinearisierung zur Normalenform eine schwache wechselseitige Verkopplung des linearisierten Teilsystems mit der internen Dynamik, so daß dieser Fall eine getrennte Behandlung erfordert.

2.3.1 Nominalfall

Für ein durch (2.21) definiertes Gebiet \mathcal{G} in ξ -Koordinaten werden im folgenden Satz *notwendige und hinreichende* Invarianzbedingungen in Anlehnung an [73] formuliert.

Satz 2.1 *Das Zustandsraumgebiet \mathcal{G} ist für System (2.9) genau dann positiv invariant, wenn mit gegebener Funktion $\bar{u}(\xi)$ die folgende Invarianzbedingung erfüllt ist:*

$$\dot{\Phi}(\xi, \bar{u}) = \nabla\Phi^T(\xi) (\bar{\mathbf{f}}(\xi) + \bar{\mathbf{g}}(\xi) \bar{u}(\xi)) \leq 0 \quad \forall \xi \in \partial\mathcal{G} . \quad (2.22)$$

Ein formaler Beweis wird in [73] geführt, so daß hier nur eine anschauliche Interpretation erfolgt: Dazu wird die zeitliche Ableitung der Invarianzfunktion entlang der Systemtrajektorie von (2.9) als das Skalarprodukt $\dot{\Phi} = \|\nabla\Phi\| \|\bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{g}} \bar{u}\| \cos\varphi$ dargestellt.

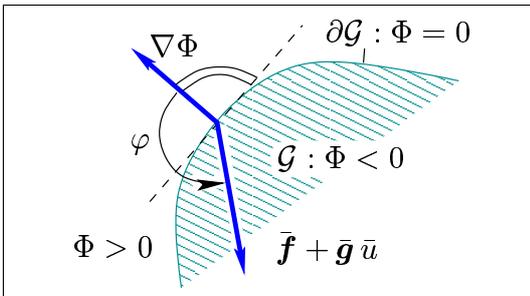


Abbildung 2.6: Graphische Interpretation der Invarianzbedingung: $\varphi \in [90^\circ; 270^\circ]$.

Für den Zwischenwinkel φ wird die Wertemenge $\varphi \in [0; 2\pi]$ angenommen. Unter dieser Annahme folgt $\cos\varphi \leq 0 \Leftrightarrow 90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$, so daß die Invarianzbedingung (2.22) nur dann erfüllt ist, wenn auf jedem Punkt des Gebietsrands $\partial\mathcal{G}$ der Zwischenwinkel φ des Richtungsfelds $\bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{g}} \bar{u}$ und des Gradienten $\nabla\Phi$ einen Wert aus dem Intervall $[90^\circ; 270^\circ]$ besitzt, siehe Abb. 2.6.

Daraus wird klar, daß für die Invarianzbedingung nur das Vorzeichen von $\dot{\Phi}$ entlang der Systemtrajektorie von System (2.9) auf $\partial\mathcal{G}$ betrachtet werden muß. Aus (2.22) folgt, daß im Fall $\xi \in \partial\mathcal{G}$, $\nabla\Phi^T(\xi) \bar{\mathbf{g}}(\xi) = 0$ (d. h. $\bar{\mathbf{g}}(\xi)$ liegt im Tangentialraum von $\partial\mathcal{G}$) und $\nabla\Phi^T(\xi) \bar{\mathbf{f}}(\xi) > 0$ (d. h. die Systemdrift $\bar{\mathbf{f}}(\xi)$ zeigt von \mathcal{G} weg) das Gebiet \mathcal{G} nicht invariant gehalten werden kann.

Definition 2.4 *Randpunkte $\xi \in \partial\mathcal{G}$, bei denen das Steuervektorfeld $\bar{g}(\xi)$ im Tangentialraum der Gebietsberandung $\partial\mathcal{G}$ liegt und die Systemdrift $\bar{f}(\xi)$ vom Gebiet \mathcal{G} wegzeigt werden als Fluchtpunkte bezeichnet [98, 99].*

Der Ausschluß von Fluchtpunkten ist jedoch noch kein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Regelgesetzen $\bar{u}(\xi)$, die \mathcal{G} invariant halten können. Wie aus dem folgenden Satz und dessen Beweis hervorgeht, sind dazu weitere Bedingungen notwendig:

Satz 2.2 *Für System (2.9) existiert ein Regelgesetz $u(\xi) \in \mathcal{C}^0$, das mit endlichen Stellamplituden \mathcal{G} invariant hält, wenn für alle Punkte aus $\{\xi \mid \nabla\Phi^T(\xi)\bar{g}(\xi) = 0\} \cap \partial\mathcal{G}$ auf einer offenen Umgebung $\mathcal{V} \subseteq \partial\mathcal{G}$ die Nichtanstiegsbedingung*

$$\nabla\Phi^T(\xi)\bar{f}(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{V} \quad (2.23)$$

erfüllt ist.

Der zugehörige Beweis wird in Anhang B.1 geführt.

Anmerkung 2.3 *Satz 2.2 für den Fall $\nabla\Phi^T\bar{g} = 0$ kann wie folgt auf eine hinreichende und notwendige Existenzbedingung verschärft werden:*

Alle Punkte auf dem Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ mit $\nabla\Phi^T\bar{g} = 0$ müssen die Bedingung

$$\nabla\Phi^T\bar{f} < 0$$

erfüllen, oder im Falle $\nabla\Phi^T\bar{f} = 0$, d. h. falls $\dot{\Phi} = 0$, muß die erste von Null verschiedene Ableitung der Folge $\{\ddot{\Phi}, \dots, \Phi^{(n)}\}$ negativ sein. Die in Satz 2.2 geforderte offene ϵ -Umgebung stellt sicher, daß $\dot{\Phi}$ auf $\partial\mathcal{G}$ nie verschwindet und damit eine Betrachtung höherer zeitlicher Ableitungen von Φ nicht notwendig ist.

Die Existenzbedingung aus Satz 2.2 wird im folgenden Korollar mit einem einfach zu überprüfenden Standardkriterium ergänzt. Um die Methoden der E-/A-Linearisierung von der Linearisierung mittels Taylor-Reihen Entwicklung und Abbruch nach dem linearen Glied zu unterscheiden, wird die zuletzt genannte Methode im Folgenden mit *Tangentenlinearisierung* bezeichnet.

Korollar 2.1 *Falls die Tangentenlinearisierung von System (2.9) im Ursprung vollständig steuerbar und beobachtbar ist, existiert ein glattes Regelgesetz $\bar{u}(\xi)$, das ein offenes, lokal um den Ursprung gelegenes Zustandsraumgebiet invariant hält.*

Der Beweis wird in Anhang B.2 geführt.

Anmerkung 2.4 Verwandtschaft zur Ljapunovschen Stabilitätsanalyse.

Die Invarianzbedingung (2.22) ist eng verwandt mit der Ljapunovschen Stabilitätsanalyse. Falls Φ radial unbegrenzt ist und mit gegebener Funktion $\bar{u}(\boldsymbol{\xi})$ die Bedingung (2.22) nicht nur auf dem Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$, sondern auch im gesamten Gebietsinneren gilt, also

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}(\boldsymbol{\xi})) \begin{cases} < 0 : & \forall \boldsymbol{\xi} \in \{\mathcal{G} \setminus \mathbf{0}\} \\ = 0 : & \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} , \end{cases}$$

dann ist Φ eine Ljapunov-Funktion für System (2.9) im Gebiet \mathcal{G} . Falls umgekehrt die Funktion Φ eine Ljapunov-Funktion ist, so kann daraus auf Invarianz von \mathcal{G} geschlossen werden.

Eine notwendige Bedingung für asymptotische Stabilität ist Stabilität im Sinne von Ljapunov. Nach Definition impliziert dies die Existenz eines Invarianzgebiets. Daraus folgt, daß die Existenz eines Regelgesetz, das \mathcal{G} invariant hält, eine notwendige Voraussetzung für die asymptotische Stabilisierbarkeit von System (2.9) mit glatten Regelgesetzen ist.

Das folgende Beispiel illustriert, wie ein gegebenes Zustandsraumgebiet \mathcal{G} durch Regelung invariant gehalten werden kann. Dabei wurde ein vollaktuiertes System gewählt, um eine einfache Darstellung zu erhalten. Die Betrachtungen können jedoch auch auf die Klasse der in dieser Arbeit fokussierten unteraktuierten Systeme angewendet werden.

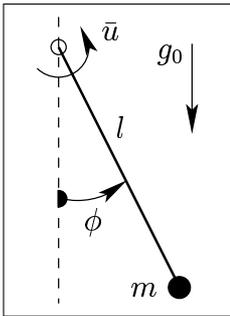


Abbildung 2.7: Pendel der Länge l mit Punktmasse m im Erdschwerefeld g_0 .

mit $\xi_1 = \phi$ und $\xi_2 = \dot{\phi}$ die Zustandsbeschreibung

Beispiel 2.1 Betrachtet wird das Pendel aus Abb. 2.7, das aus einer an einem starren, masselosen Stab der Länge l befestigten Punktmasse $m = 1$ besteht, und sich im Erdschwerefeld mit Gravitationskonstanten g_0 bewegt. Mit dem Auslenkwinkel ϕ des Pendels gegenüber der vertikalen Ruhelage folgt die System-Dgl. zu $\ddot{\phi} + g_0 l \sin \phi = \bar{u}$. Die Steuergröße \bar{u} sei unbegrenzt. Umgeformt folgt unter der Annahme $g_0 l = 10$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\mathbf{f}}(\xi_1, \xi_2) + \bar{\mathbf{g}} \bar{u} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -10 \sin \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} . \quad (2.24)$$

Das Regelziel besteht darin, die Systemtrajektorie $\boldsymbol{\xi}(t)$ in dem Kreis

$$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\xi} \mid \Phi(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - R_G^2 \leq 0\}$$

mit Radius $R_G = 5$ invariant zu halten. Daher beschränkt sich der betrachtete Anfangswertebereich auf \mathcal{G} , d. h. $\boldsymbol{\xi}(0) \in \mathcal{G}$. Abb. 2.8 (a) zeigt das Driftfeld $\bar{\mathbf{f}}$ auf dem Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$. Befindet sich der Zustand des unregulierten Systems auf $\partial\mathcal{G}$, so kann die System-

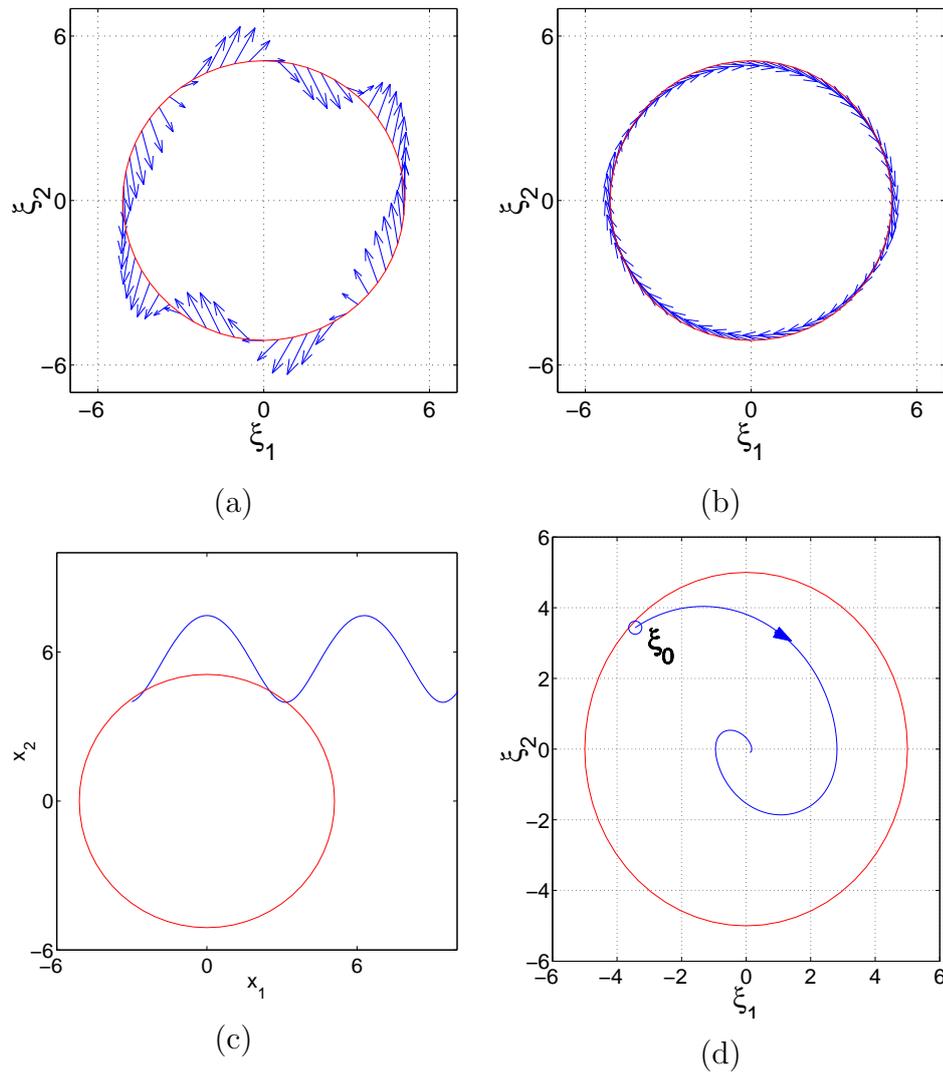


Abbildung 2.8: (a) Driftfeld $\bar{\mathbf{f}}$ von (2.24) auf $\partial\mathcal{G}$; (b) Geschwindigkeitsfeld des mit (2.25) invariant regulierten Systems; (c) Phasendiagramm von (2.24) mit $\bar{u} = 0$; (d) Phasendiagramm von (2.24) mit Regelung nach (2.25).

trajektorie das Gebiet \mathcal{G} an denjenigen Stellen das Gebiet \mathcal{G} verlassen, an denen $\bar{\mathbf{f}}$ nach außen zeigt, siehe Abb. 2.8 (c).

Die Invarianzbedingung (2.22) ergibt sich zu

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}) = 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_2 (\bar{u} - 10 \sin \xi_1) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \{\boldsymbol{\xi} \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 = R_{\mathcal{G}}^2\}$$

und folgt nach \bar{u} aufgelöst zu

$$\bar{u} \begin{cases} \leq 10 \sin \xi_1 - \xi_1 & \text{für } \xi_1^2 + \xi_2^2 = R_{\mathcal{G}}^2 \text{ und } \xi_2 \geq 0 \\ \text{beliebig} & \text{für } \xi_1^2 + \xi_2^2 < R_{\mathcal{G}}^2, \end{cases}$$

wobei das Gleichheitszeichen in der ersten Zeile für positive und negative Werte von ξ_2 gilt. Ein Regelgesetz, das diese Ungleichungsbedingungen erfüllt, ist durch

$$\bar{u} = 10 \sin \xi_1 - \xi_1 - \epsilon \arctan \xi_2 \quad (2.25)$$

mit $\epsilon > 0$ gegeben. Dabei stellt der arctan-Term sicher, daß für $\xi_2 > 0$ bzw. $\xi_2 < 0$ die für Invarianz geforderte Ungleichung $\bar{u} < 10 \sin \xi_1 - \xi_1$ bzw. $\bar{u} > 10 \sin \xi_1 - \xi_1$ erfüllt ist. Mit $\epsilon = 1$ modifiziert sich das Geschwindigkeitsfeld des geregelten Systems so, daß sich $\boldsymbol{\xi}(t)$ nicht aus \mathcal{G} herausbewegen kann, da auf dem Rand $\partial\mathcal{G}$ die Trajektorien nicht nach außen zeigen, siehe Abb. 2.8 (b) und (d).

2.3.2 Perturbierter Fall

Nun wird die betrachtete Systemklasse vom Nominalfall (2.9) auf den perturbierten Fall erweitert. Dazu werden p ungenau bekannte, konstante Systemparameter angenommen und im Vektor $\mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{R}^p$ zusammengefaßt. Die Perturbationen werden durch relative Schätzfehler

$$r_i = \frac{w_i - \tilde{w}_i}{\tilde{w}_i}, \quad i \in \{1, \dots, p\}$$

der einzelnen Systemparameter quantifiziert. Dabei bezeichnet \tilde{w}_i den jeweiligen geschätzten Wert des unbekanntes, tatsächlich vorliegenden Systemparameters w_i . Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, daß alle relativen Schätzfehler symmetrisch begrenzt sind, d. h.

$$|r_i| \leq \bar{r}_i \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (2.26)$$

mit $\bar{r}_i = \text{const}$ als obere relative Schätzfehlergrenzen. Damit wird ein begrenzter Fehlerraum \mathcal{R} durch

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{r} \mid |r_i| \leq \bar{r}_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$$

definiert und das Nominalsystem (2.9) zu einem perturbierten, neuen System $\sigma_{\mathbf{r}}$ gemäß

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{r}} : \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}) + \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}) \bar{u} \\ \bar{y} &= h(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

erweitert. Wendet man die Koordinatentransformation (2.13) zusammen mit der Rückführlinearisierung (2.15) auf das perturbierte System (2.27) an, so ergibt sich ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) + \mathbf{b}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) u \quad (2.28)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) + \mathbf{g}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) u, \quad (2.29)$$

wobei zur Unterscheidung des Nominalfalls vom perturbierten Fall ein tiefgestelltes \mathbf{r} verwendet wird. Die einzelnen Elemente von (2.28)-(2.29) ergeben sich durch Einsetzen des nominalen Rückführregelgesetzes (2.15) in das perturbierte System (2.27) zu

$$\mathbf{a}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) - \frac{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r})}{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0})} b(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r})}{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0})} \end{bmatrix}$$

$$f_{\mathbf{r},i}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) = L_{f_{\mathbf{r}}} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})} - \frac{b(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0})}{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0})} L_{g_{\mathbf{r}}} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})},$$

$$g_{\mathbf{r},i}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{0})} L_{g_{\mathbf{r}}} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}, \quad r+1 \leq i \leq n,$$

wobei $a(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r})$ und $b(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r})$ analog zu (2.14), jedoch bezogen auf das *perturbierte* System (2.27) berechnet werden. Durch einen von Null verschiedenen Fehlervektor \mathbf{r} entsteht also eine *wechselseitige* Verkopplung des linearen Teilsystems (2.28) mit der internen Dynamik (2.29). Mit der Berücksichtigung der Perturbationen in den Systemgleichungen (2.28)-(2.29) kann nun die vorangegangene Definition von Invarianz des Nominalfalls auf *robuste Invarianz* erweitert werden.

Definition 2.5 Ein Gebiet \mathcal{G} ist *robust positiv invariant*, wenn \mathcal{G} für die Menge aller Systeme $\sigma_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, positiv invariant ist, d. h. wenn

$$\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{r}) \in \mathcal{G} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R} \wedge t \geq 0. \quad (2.30)$$

Gemäß Definition 2.5 ist ein durch (2.21) definiertes Gebiet \mathcal{G} dann robust invariant, wenn die Invarianzbedingung $\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, \bar{u}) \leq 0$ für alle Randpunkte $\boldsymbol{\xi} \in \partial\mathcal{G}$ und alle zulässigen Fehlervektoren $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ erfüllt ist. Um dieses Problem formal zu beschreiben, wird eine vektorwertige marginale Funktion⁶

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{R}$$

definiert, die für jeden Randpunkt und jeden Wert der Steuergröße \bar{u} denjenigen (hinsichtlich Invarianz ungünstigsten) Fehlervektor \mathbf{r} angibt, der $\dot{\Phi}$ maximiert⁷, d. h.

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}) = \arg \max_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} \dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, \bar{u}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\mathcal{G} . \quad (2.31)$$

Setzt man $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u})$ in $\dot{\Phi}$ ein, so erhält man die *robuste Invarianzbedingung*

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\mathcal{G} . \quad (2.32)$$

Die linke Seite von (2.32) kann gemäß $\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u}) = \dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \bar{u}) + \Delta\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u})$ in einen *nominalen* Anteil $\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \bar{u})$ und einen *perturbierten* Anteil $\Delta\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u})$ aufgespalten werden. Substituiert man $\dot{\Phi}^{\max}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u}) = \Delta\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u})$, so läßt sich (2.32) bezogen auf den Nominalfall angeben in der Form

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \bar{u}) \leq -\dot{\Phi}^{\max}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u}), \bar{u}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\mathcal{G} . \quad (2.33)$$

Analog zum Nominalfall läßt sich im perturbierten Fall der Winkel φ^* zwischen dem Gradienten an $\partial\mathcal{G}$ und dem perturbierten Geschwindigkeitsvektorfeld mittels

$$\|\nabla\Phi(\boldsymbol{\xi})\| \|\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u})) + \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}, \bar{u})) \bar{u}\| \cos \varphi^* = 0$$

berechnen. Damit ergibt sich die in Abb. 2.9 gezeigte graphische Interpretation: Der Zwischenwinkel φ^* wird mit wachsendem $\dot{\Phi}^{\max}$ größer. Verglichen mit der Invarianzbedingung des Nominalfalls aus Abb. 2.6 steht nun nicht mehr der volle 180°-Sektor als zulässige Richtung des Geschwindigkeitsvektors zur Verfügung, sondern der in Abb. 2.9 doppelt schraffierte, durch φ^* eingeschränkte Sektor.

⁶Siehe Anhang A für die hier verwendete Definition marginaler Funktionen.

⁷Entgegen der in der Literatur üblichen Darstellung, kann in (2.31) ein max-Operator anstatt eines sup-Operators verwendet werden, da die zulässige Grundmenge \mathcal{R} der Optimierungsvariablen \mathbf{r} begrenzt ist, daher das Supremum von der Gütefunktion angenommen werden kann und immer ein Maximum existiert.

Das für die robuste Invarianzbedingung (2.32) vorgestellte Konzept einer vektorwertigen marginalen Funktion κ wird anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht.

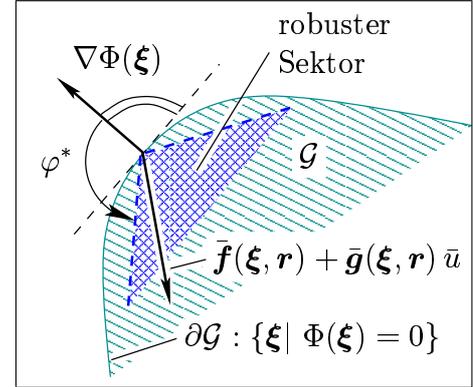


Abbildung 2.9: Robuste Invarianzbedingung

Beispiel 2.3 Betrachtet wird das perturbierte Beispiel-System

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} r_1 \xi_1 \\ \xi_3 \\ -10(1+r_2) \sin(\xi_1 + \xi_2) + (1+r_3) \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (2.34)$$

$$\bar{y} = h(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 .$$

Das System sei durch drei relative Schätzfehler r_1, r_2, r_3 perturbiert, die einen relativen Fehlervektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ definieren. Der Absolutwert der einzelnen relativen Fehler sei durch $\bar{r}_1 = 2$, $\bar{r}_2 = 2$ und $\bar{r}_3 = 6$ begrenzt. Der Sollwert der Ausgangsfunktion ist zu $\bar{y}^s = 0$ gewählt, für die Startwerte sei $\xi_1 > 0$ angenommen. Die Differentialgleichung der Null-Dynamik im Nominalfall folgt mit $\xi_1 = \bar{u} = 0$ aus (2.34) zu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= -10 \sin \xi_2 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dafür läßt sich die Lösung der Phasenbahnen in der geschlossenen Form

$$\xi_3^2 = \hat{\xi}_3^2 + 20 \left(\cos \xi_2 - \cos \hat{\xi}_2 \right) \quad (2.36)$$

angeben, wobei $\hat{\xi}_2$ und $\hat{\xi}_3$ die Startwerte⁸ der in Abb. 2.10 (a) skizzierten Phasenbahnen der Nullodynamik bezeichnen. Wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, läßt sich mittels der

⁸Hierbei dient das hochgestellte Dach zur Unterscheidung der Startwerte $\boldsymbol{\xi}(0)$ der Gesamtsystemtrajektorie von den Startwerten der Nullodynamik Phasenbahnen.

Lösung (2.36) der Phasenbahnen der Nulldynamik (2.35) ein geeignetes Invarianzgebiet gemäß der Definition aus (2.21) mit

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \xi_3^2 - 20 \left(\cos \xi_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \xi_1$$

definieren. Dies liegt daran, daß die Bedingung $\dot{\Phi} = 0$ für $\xi_1 = u = 0$ und $\Phi(\boldsymbol{\xi}) = 0$ gilt und damit im Nominalfall keine Fluchtpunkte auftreten können.

In Abb. 2.10 (b) ist die Berandung $\partial\mathcal{G}$ im Zustandsraum eingezeichnet. Die zeitliche

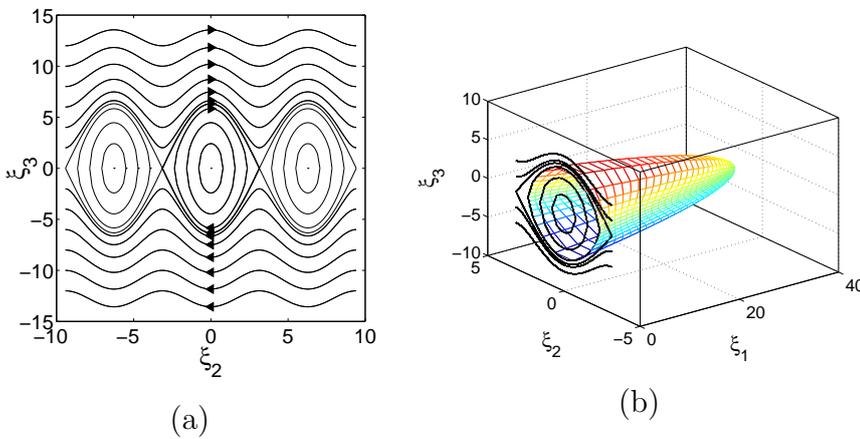


Abbildung 2.10: (a) Phasenbahnen der Null-Dynamik im Nominalfall, (b) Invarianzgebiet \mathcal{G} und einige Phasenbahnen der Null-Dynamik im Nominalfall.

Ableitung von Φ entlang der Trajektorie von System (2.34) berechnet sich zu

$$\dot{\Phi} = r_1 \xi_1 + 20 \xi_3 \cos \xi_2 + 2 \xi_3 (-10 (1 + r_2) \sin (\xi_1 + \xi_2) + (1 + r_3) \xi_1) + \bar{u} . \quad (2.37)$$

Um die robuste Invarianzbedingung (2.32) zu erfüllen, muß für jeden zulässigen relativen Schätzfehler r_i eine vom Systemzustand $\boldsymbol{\xi}$ und der Steuervariablen \bar{u} abhängige Funktion κ_i gefunden werden, die $\dot{\Phi}$ gemäß (2.31) maximiert. Für r_1 läßt sich auf diese Weise heuristisch die marginale Funktion $\kappa_1(\xi_1) = \text{sign}[\xi_1] \bar{r}_1$ finden. Ersetzt man in (2.37) den relativen Fehler r_1 mit der marginalen Funktion $\kappa_1(\xi_1)$, so folgt

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \kappa_1, r_2, r_3, \bar{u}) = |\xi_1| \bar{r}_1 + R(\boldsymbol{\xi}, r_2, r_3, \bar{u})$$

mit einem Restterm $R(\boldsymbol{\xi}, r_2, r_3, \bar{u})$, der nicht mehr von r_1 abhängt. Daraus erkennt man, daß mit der getroffenen Wahl von κ_1 für jeden Wert von ξ_1 der Wert von $\dot{\Phi}$ maximal

bezüglich r_1 ist. Mit analogen Überlegungen ergeben sich die beiden anderen marginalen Funktionen gemäß

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \text{sign}[\xi_1] \bar{r}_1 \\ -\text{sign}[\xi_3 \sin(\xi_1 + \xi_2)] \bar{r}_2 \\ \text{sign}[\xi_1 \xi_3] \bar{r}_3 \end{bmatrix} .$$

Setzt man die vektorwertige marginale Funktion $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi})$ in (2.37) ein, so folgt als robuste Invarianzbedingung

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi}) \begin{cases} \leq \bar{u}^{\text{inv}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi})) & : \boldsymbol{\xi} \in \partial\mathcal{G} \\ \text{beliebig} & : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G} \end{cases} \quad (2.38)$$

mit $\bar{u}^{\text{inv}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi})) = \kappa_1 \xi_1 + 20 \xi_3 \cos \xi_2 + 2 \xi_3 (-10(1 + \kappa_2) \sin(\xi_1 + \xi_2) + (1 + \kappa_3) \xi_1)$. Unter der eingangs angenommenen Voraussetzung $\xi_1(0) > 0$ ist somit ein robustes Invarianzregelgesetz mit

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1/20 - |\bar{u}^{\text{inv}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}))| \quad (2.39)$$

gegeben. Im Nominalfall stabilisiert dieses Regelgesetz den Systemausgang ξ_1 asymptotisch im Ursprung. Wie im Abschnitt 2.4 erläutert, kann im perturbierten Fall jedoch nur letztendliche Begrenztheit von ξ_1 erzielt werden, d. h. ξ_1 wird in einer kleinen ϵ -Umgebung Restbewegungen um den Ursprung herum vollziehen. In dieser ϵ -Umgebung kann – bei Ausschluß von Fluchtpunkten – mittels eines neuen Regelgesetzes nur noch Invarianz von \mathcal{G} sichergestellt werden, siehe auch Abschnitt 4.4.2. Verläßt ξ_1 die ϵ -Umgebung, wird wieder auf das ursprüngliche Invarianzregelgesetz zurückgeschaltet. Dies führt jedoch zu Schnatterbewegungen entlang des Rands der ϵ -Umgebung. Da diese Schnatterbewegungen eine aufwendige Simulation erfordern und die Wirkung auf Invarianz derzeit noch nicht erforscht ist, wird aus Gründen der Vereinfachung innerhalb der ϵ -Umgebung die Steuergröße gemäß

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} -\xi_1/20 - |\bar{u}^{\text{inv}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}))| & \text{falls } \xi_1 > 0.0001 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu Null gesetzt. Dieses Regelgesetz wurde in Simulationen mit $\boldsymbol{\xi}(0) = (2, 1, 4.7)$ getestet. Im Rahmen der anfangs angenommenen Beschränkung wurde dazu eine zulässige Perturbation von $r_1 = -1$, $r_2 = -0.1$ und $r_3 = 6$ gewählt. Für die erste Simulation wurde der Reglerentwurf für den Nominalfall, d. h. mit $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ durchgeführt. Wie in Abb. 2.11 (a) gezeigt, konvergiert die Ausgangsfunktion $\bar{y} = \xi_1$ asymptotisch gegen den Ursprung. Die internen Zustände ξ_2 und ξ_3 jedoch werden instabil und verlassen, wie in Abb. 2.11 (c)

zeigt, das Invarianzgebiet \mathcal{G} . Im Gegensatz dazu verbleibt die Trajektorie des robust geregelten Systems bis zum Erreichen der ϵ -Umgebung $|\xi_1| \leq 0.0001$ innerhalb des Invarianzgebiets, siehe Abb. 2.11 (b) und Abb. 2.11 (d). Innerhalb der ϵ -Umgebung ist mit obiger Wahl der Steuergröße $\bar{u} = 0$ keine Invarianz mehr gegeben, so daß die Trajektorie bei $t \approx 0.3$ das Gebiet \mathcal{G} verläßt und bei $t \approx 2$ wieder eintritt.

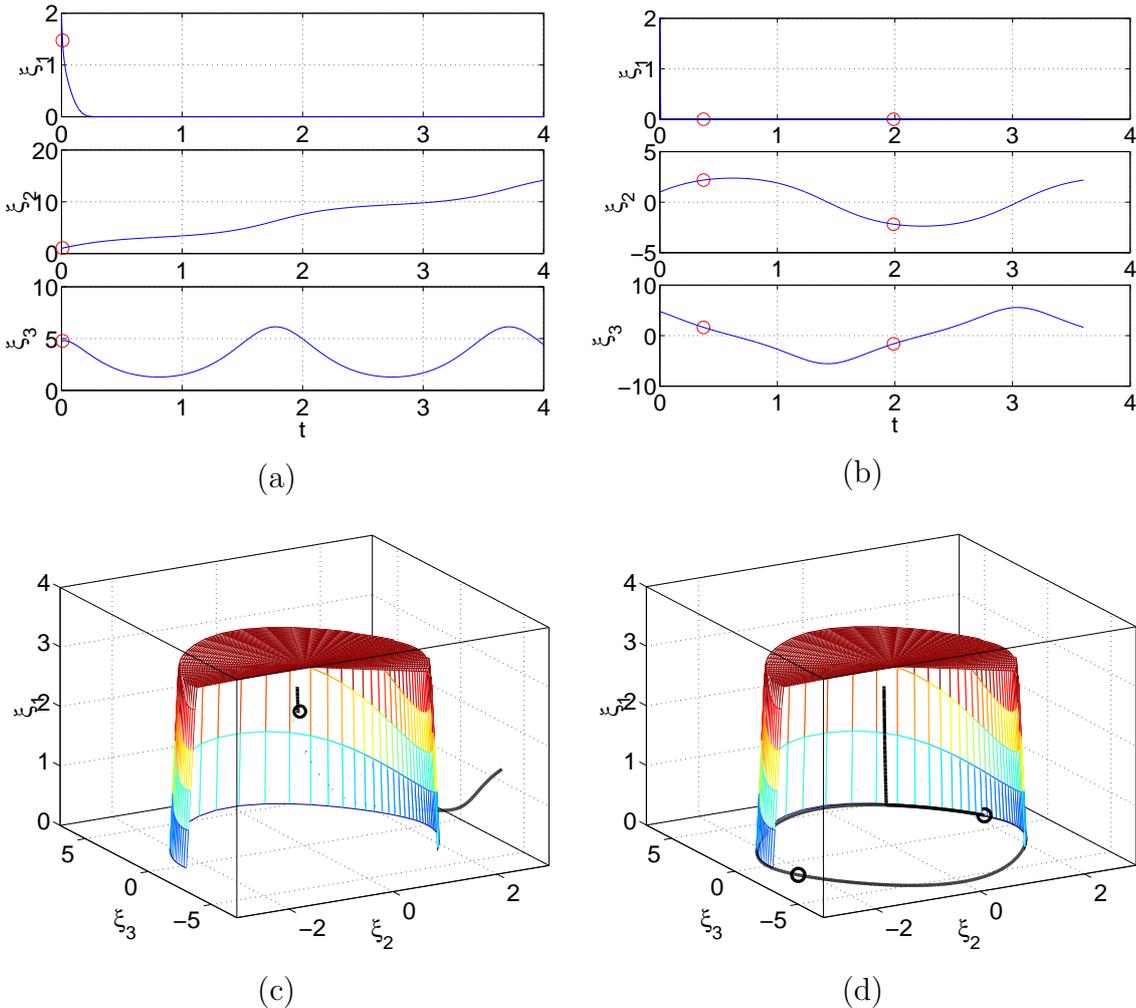


Abbildung 2.11: (a) und (c) Nominalregler: $\xi(t)$ verläßt \mathcal{G} ; Kreise markieren in (a) und (c) den Austritt aus \mathcal{G} ; (b) und (d) robuster Invarianzregler: Die Trajektorie verläßt \mathcal{G} erst bei abgeklungenem Regelfehler und bleibt stabil. Der erste Kreis markiert den Austritt, der zweite den Eintritt in \mathcal{G} .

Entscheidend ist anzumerken, daß eine analytische Berechnung einer marginalen Funktion κ nur für einfache Beispielsysteme möglich ist. Eine numerische Approximation mündet durch die i. allg. große Zahl an geschätzten Systemparametern und Systemzu-

ständen in ein Problem mit großer Komplexität ein, so daß für den jeweils vorliegenden Anwendungsfall heuristische Speziallösungen notwendig sind.

2.4 Existenzbedingungen für Invarianzregler

In diesem Abschnitt wird neben der Einhaltung der Invarianzbedingung eines Zustandsraumgebiets \mathcal{G} noch die für Invarianzregelung notwendige Forderung nach asymptotischer E-/A-Stabilität berücksichtigt. Dazu wird anstatt der Originalbeschreibung (2.9) jetzt die Normalenform (2.16)-(2.17) betrachtet. Aufgrund der nun zusätzlich geforderten asymptotischen Stabilität des linearen Teilsystems wird, anders als bei den vorangegangenen Ausführungen, die Steuergröße u nicht mehr als eine in jedem Randpunkt von $\partial\mathcal{G}$ frei wählbare Größe betrachtet. Vielmehr wird die Steuergröße durch ein nichtlineares Zustandsregelgesetz der Struktur

$$u = u(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \quad (2.40)$$

vorgegeben, wobei $\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{K}$ ein Vektor von variablen Reglerparametern $k_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ aus einer noch näher zu bestimmenden Menge \mathcal{K} zulässiger Reglerparametervektoren ist. Die Dimension von \mathbf{k} stimmt dabei mit dem relativen Rang r überein, da zur stabilen Regelung des linearen Teilsystems alle r Systemzustände \mathbf{x} rückgeführt werden müssen. Der zustandsabhängige Parametervektor \mathbf{k} muß im Invarianzgebiet \mathcal{G} einer Bedingung zur asymptotischen E-/A-Stabilität des geregelten linearen Teilsystems und auf $\partial\mathcal{G}$ zusätzlich einer Invarianzbedingung genügen. Es wird gezeigt, daß beide Bedingungen *einander widersprechen* können. Daher werden in diesem Abschnitt Bedingungen an die Form des Invarianzgebiets und die Struktur des Regelgesetzes (2.40) hergeleitet, bei deren Einhaltung ein solcher Widerspruch nicht auftritt und folglich ein Invarianzregler der Struktur (2.40) existiert.

2.4.1 Existenzbedingungen im Nominalfall

In dieser Arbeit wird durchgängig für die Vorzeichenfunktion die Definition $\text{sign}[x] = \pm 1$ für $x \gtrless 0$, $\text{sign}[0] = 0$ verwendet. Zunächst wird der Nominalfall betrachtet. Die Invarianzbedingung (2.22) ergibt sich für System (2.16)-(2.17) zu

$$\dot{\Phi} = \nabla\Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} + \nabla\Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} u \leq 0 \quad \forall(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial\mathcal{G} . \quad (2.41)$$

Eine ähnliche Bedingung läßt sich für die geforderte asymptotische E-/A-Stabilität mit Hilfe einer Regelungs-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ formulieren als

$$\dot{V} = \nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} \mathbf{x} + \nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} u \begin{cases} < 0 & \text{für } \mathbf{x} \neq 0 \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.42)$$

Ein Invarianzregelgesetz muß definitionsgemäß beide Bedingungen (2.41) und (2.42) erfüllen. Aus diesem Grund werden die Auswirkungen von (2.41) und (2.42) auf Regelgesetze der Struktur (2.40) sowie auf die Wahl der Invarianzfunktion im Folgenden näher untersucht:

Bedingung für Invarianz von \mathcal{G} :

Nach Satz 2.2 ist die Invarianzbedingung (2.41) mittels eines Regelgesetzes $u(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ erfüllbar, wenn in einer offenen Umgebung jedes Randpunktes, bei dem $\nabla \Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g}) = 0$ gilt, die Nichtanstiegsbedingung $\nabla \Phi^T(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{f}) \leq 0$ eingehalten wird. Da damit Fluchtpunkte ausgeschlossen werden, wird diese Bedingung als *Fluchtpunktbedingung* bezeichnet.

Ausschluß von Konflikten zwischen Invarianz und asymptotischer E-/A-Stabilität:

Aus (2.41) und (2.42) läßt sich erkennen, daß ein Konflikt zwischen der Invarianzbedingung und der Bedingung zur asymptotischen E-/A-Stabilität auftreten kann, da die Steuergröße u auf dem Gebietsrand $\partial \mathcal{G}$ zwei Ungleichungsbedingungen erfüllen muß.

- Wegen der geforderten asymptotischen E-/A-Stabilität gilt für die Steuergröße $u(t \rightarrow \infty) = 0$. Die Steuergröße kann aber auch während des asymptotischen Einschwingens zu singulären Zeitpunkten verschwinden. Daher ist in einer offenen Umgebung jedes Randpunktes, bei dem $u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ gilt, die Nichtanstiegsbedingung $\nabla \Phi^T(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{f}) \leq 0$ gefordert. Des weiteren folgt wegen $\mathbf{x}(t \rightarrow \infty) = \mathbf{0}$, daß die Nulldynamik begrenzt sein muß.
- Da u sowohl in $\dot{\Phi}$ als auch in \dot{V} eingeht, kann eine Erhöhung bzw. Verminderung von u in beiden zeitlichen Ableitungen zu gegenteiligen Effekten führen: Falls beispielweise $\nabla \Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g}) > 0$ und $\nabla V^T \mathbf{b} < 0$ gilt, ist ein negativer Wert für u notwendig, um $\dot{\Phi}$ bei $\nabla \Phi^T(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{f}) > 0$ negativ zu machen. Dies kann jedoch, bei genügend großem u , zu einem positiven Wert von \dot{V} und damit zu einem Verletzen der asymptotischen E-/A-Stabilität führen. Eine Bedingung, die einen solchen Konflikt verhindert, ist die *sign-matching* Bedingung, die gleiches Vorzeichen der Terme $\nabla \Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g})$ und $\nabla V^T \mathbf{b}$ fordert. Eine geometrische Interpretation der *sign-matching* Bedingung wird in Abb. 2.12 gegeben. Dabei wird beispielhaft

ein System zweiter Ordnung mit einer geregelten Zustandsvariable x und einer internen Zustandsvariable z angenommen. Das Invarianzgebiet \mathcal{G} sei das Innere des skizzierten Ursprungskreises. (x^*, z^*) bezeichnet einen Randpunkt, bei dem das Driftfeld $(ax, f(\cdot))$ von \mathcal{G} wegzeigt; für das geregelte lineare Teilsystem sei eine Ljapunov-Funktion mit $V = x^2$ gegeben. Wie in Abb. 2.12 gezeigt, muß das Einkoppelfeld $(b, g(\cdot))$ im doppelt schraffierten Sektor liegen, um durch die Wahl eines geeigneten Werts der Steuergröße u den Geschwindigkeitsvektor des Gesamtsystems ins Gebietsinnere von \mathcal{G} sowie in Richtung absteigender Konturlinien der Ljapunov-Funktion V zeigen zu lassen. Falls, wie in Abb. 2.12 angenommen, das Einkoppelfeld $(b, g(\cdot))$ ins Gebietsinnere von \mathcal{G} zeigt, ist dafür ein positiver Wert für u notwendig. Liegt $(b, g(\cdot))$ hingegen in dem doppelt schraffierten Bereich außerhalb von \mathcal{G} , so wird ein negativer Wert für die Steuergröße u benötigt. Läge $(b, g(\cdot))$ beispielsweise im unteren, einfach schraffierten Bereich, so würde sich die Systemtrajektorie vom Ursprung wegbewegen. Daher wäre asymptotische E-/A-Stabilität zu Gunsten von Invarianz aufgegeben.

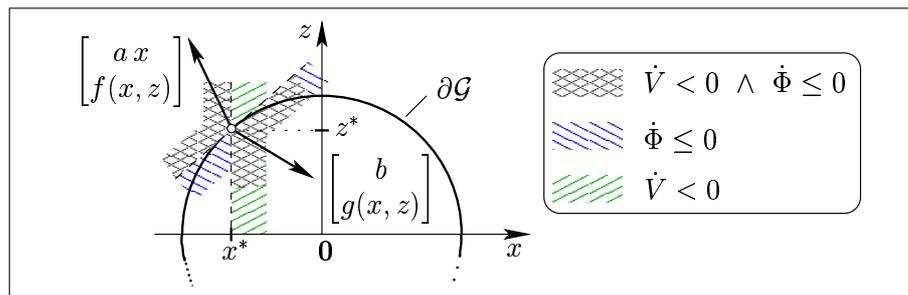


Abbildung 2.12: Geometrische Darstellung der *sign-matching* Bedingung

- Mit der *sign-matching* Bedingung ist gewährleistet, daß ein Vergrößern bzw. Reduzieren von u die qualitativ gleiche Wirkung auf $\dot{\Phi}$ und \dot{V} hat. Um mit einem E-/A-asymptotisch stabilisierenden Regelgesetz tatsächlich \mathcal{G} invariant halten zu können, muß zusätzlich sichergestellt sein, daß durch eine zulässige Wahl von \mathbf{k} , der für Invarianz benötigte Wert für u mit dem vorliegenden Regelgesetz erzeugt werden kann. Dies wird mit der folgenden, hinreichenden Bedingung an die Reglerparameter des Regelgesetzes (2.40) garantiert:

Bedingung 2.1 *Bedingungen an die Reglerparameter.*

- Die zulässige Menge \mathcal{K} der Reglerparametervektoren ist so gewählt, daß mit einer

stückweise konstanten Funktion $\mathbf{k}(t) \in \mathcal{K}$ asymptotische E-/A-Stabilität von (2.16) gegeben ist. Eine Ljapunov-Funktion des geregelten linearen Teilsystems sei $V(\mathbf{x})$.

ii) Für jede positiv definite Funktion $c(\|\mathbf{x}\|)$ soll ein zulässiger Reglerparametervektor $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ so existieren, daß für $\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} \neq 0$ die Bedingung gilt:

$$\text{sign} [\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \leq -c(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} . \quad (2.43)$$

Im Abschnitt 3.1.1 wird ein bilineares, schaltendes Regelgesetz hergeleitet, das Bedingung 2.1 erfüllt. Weitere schaltende Regelgesetze werden in den Abschnitten C.1 und C.2 aus Anhang C präsentiert und basieren auf Passivität sowie einem Backstepping-Verfahren zur Generierung von Regelungs-Ljapunov-Funktionen. Es handelt sich daher bei Bedingung 2.1 um eine *erfüllbare* Bedingung.

Faßt man diese vier Bedingungen (Ausschluß von Fluchtpunkten, lokal begrenzte Null-dynamik, *sign-matching*, Bedingung 2.1 an die Reglerparameter) zusammen, so läßt sich der folgende Existenzsatz für Invarianzregelgesetze formulieren:

Satz 2.3 *Es wird System (2.16)-(2.17) mit einem Regelgesetz der Struktur (2.40) betrachtet. Bedingung 2.1 an die Reglerparameter sei erfüllt und es existiere eine glatte und bezüglich \mathbf{z} radial unbegrenzte Funktion $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *Für jeden Punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G}$, der die Bedingung*

$$\nabla \Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad (2.44)$$

erfüllt, existiere eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \partial \mathcal{G}$ so, daß die Nichtanstiegsbedingung

$$\nabla \Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{U} \quad (2.45)$$

gilt.

b) *Sei u^{inv} die Steuergröße, bei der $\dot{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, u^{\text{inv}}) = 0$ gilt. Es existiere eine Regelungs-Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ für das lineare Teilsystem (2.16) so, daß für jeden Punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G}$, für den*

$$\nabla \Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} > 0 \quad \wedge \quad \nabla V^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq -\nabla V^T \mathbf{b} u^{\text{inv}}$$

gilt, die sign-matching Bedingung

$$\text{sign} \left[\nabla \Phi^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \right] = \text{sign} [\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] \quad (2.46)$$

erfüllt ist.

Dann existiert eine zustandsabhängige Reglerparameterfunktion $\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ so, daß

- i) \mathcal{G} positiv invariant ist,
- ii) das lineare Teilsystem (2.16) asymptotisch stabil ist,
- iii) die Reglerparameter beschränkt sind.

Bedingung b) ist dafür notwendig.

Satz 2.3 geht anschaulich aus den Erläuterungen am Anfang dieses Abschnitts hervor. Ein formaler Beweis wird in Anhang B.3 geführt.

Anmerkung 2.5 Bedingung a) für den Fall $u \rightarrow 0$ ist notwendig: Die Werte der Steuergröße, die zu den Auftreffzeitpunkten t_k der Trajektorie auf $\partial \mathcal{G}$ für Invarianz notwendig sind, seien mit u_k^{inv} bezeichnet. Asymptotische Stabilität erfordert $u(t \rightarrow \infty) = 0$. Daher muß die Folge der Werte u_k^{inv} ebenfalls mit $t \rightarrow \infty$ gegen null konvergieren. Da dies nicht notwendigerweise der Fall ist, darf ab einem bestimmten Zeitpunkt die Systemdrift $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{f})$ am Gebietsrand nicht mehr ins Gebietsäußere zeigen, so daß die behauptete Notwendigkeit folgt.

Modifiziert man den Fall $\nabla \Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g}) = 0$ aus Bedingung a) gemäß Anmerkung 2.3, so daß man anstelle der ϵ -Umgebung die höheren zeitlichen Ableitungen von Φ betrachtet, so stellt a) eine notwendige Bedingung für Satz 2.3 dar. Damit gilt die verschärfte Aussage von Satz 2.3, daß eine Funktion $\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ mit den Eigenschaften i)-iii) dann und nur dann existiert, wenn die Bedingungen a) und b) erfüllt sind.

Korollar 2.2 System (2.16)-(2.17) erfüllt dann und nur dann die Bedingungen von Satz 2.3, wenn Systemannahme 2 erfüllt ist.

Der Beweis wird in Anhang B.4 geführt.

2.4.2 Existenzbedingungen im perturbierten Fall

Aus der linearen, robusten, zustandsraumorientierten Regelungstheorie [68] ist bekannt, daß sich im nun betrachteten perturbierten Fall asymptotische E-/A-Stabilität nicht

mit endlichen Rückführverstärkungen erreichen läßt. Daher wird das Regelziel (2.19) abgeändert in *globale, letztendliche Begrenztheit* gemäß Definition 5.1 aus [47]:

Definition 2.6 *Das lineare, perturbierte System (2.28) ist global, letztendlich begrenzt, wenn es für jede positive Konstante $\delta > 0$ eine positive Konstante $\epsilon > 0$ sowie einen Zeitpunkt $T = T(\delta)$ gibt, so daß die Bedingung gilt:*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0 + T . \quad (2.47)$$

Dabei wird die Bezeichnung *letztendlich* gewählt, da nach einem anfänglichen asymptotischen Einschwingvorgang endlicher Zeit T der Systemzustand $\mathbf{x}(t)$ innerhalb der ϵ -Umgebung verläuft. Die Größe von ϵ hängt dabei von der Stärke der Perturbationen ab, so daß sich im Nominalfall mit $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ die ϵ -Umgebung auf den Gleichgewichtspunkt selbst zusammenzieht⁹.

In Analogie zum Nominalfall wird ein Regler als *robuster Invarianzregler* bezeichnet, wenn die Regelziele (2.20) und (2.47) erfüllt sind. Satz 2.3 zur Existenz von Invarianzregelgesetzen im Nominalfall kann auf den perturbierten Fall erweitert werden, indem die vorausgesetzten Bedingungen an den perturbierten Fall in der folgenden Weise angepaßt werden: Bedingung 2.1 an das Regelgesetz muß nur außerhalb der durch die letztendliche Begrenztheit entstehenden ϵ -Umgebung gelten. Die Fluchtpunktbedingung (Satz 2.3 a) sowie die *sign-matching* Bedingung (Satz 2.3 b) muß für alle $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ gelten. Dann existiert eine Funktion $\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ für die Reglerparameter so, daß das zugrundeliegende Regelgesetz ein robustes Invarianzregelgesetz ist. Im Unterschied zum Nominalfall ist asymptotische Stabilität von \mathbf{x} nur bis zum Erreichen der ϵ -Umgebung möglich. Innerhalb dieser Umgebung wird nur noch robuste Invarianz von \mathcal{G} gesichert, nicht jedoch weiteres asymptotisches Einschwingen von $\mathbf{x}(t)$.

Zusammenfassung und Bewertung

In diesem Kapitel wurden Bedingungen für die Invarianz eines gegebenen Zustandsraumgebiets hergeleitet. Eine Erweiterung der Invarianzbedingung auf Systeme mit nicht glatten Vektorfeldern ist möglich [73, 98], so daß beispielweise auch mechanische Systeme

⁹Ein hinsichtlich Robustheit äußerst konservativer, analytischer Zusammenhang zwischen ϵ und \mathbf{r} kann durch die Auswertung einer Ljapunov-Funktion für das lineare Teilsystem hergeleitet werden, siehe Lemma 5.3 aus [47].

mit nicht vernachlässigbarer Haftreibung invariant geregelt werden können. Eine technische Anwendung, bei der die Invarianz eines Zustandsraumgebiets im Vordergrund steht, ist die in Kapitel 5 vorgestellte Invarianzregelung zur Überschlagsvermeidung von Kraftfahrzeugen.

Geht es jedoch neben der Invarianz eines Gebiets noch zusätzlich um asymptotische E-/A-Stabilität, so ist die Betrachtung des Systems in E-/A-linearisierter Form notwendig. Dafür wurde zunächst eine Koordinatentransformation sowie ein linearisierendes Rückführregelgesetz zur Normalenform hergeleitet. Es wurde gezeigt, daß bei einem beliebig gewählten Invarianzgebiet das Regelziel der asymptotischen E-/A-Stabilität der Invarianzbedingung widersprechen kann. Daraus wurden Bedingungen an die Form des Invarianzgebiets sowie an die Reglerparameter formuliert, bei deren Einhaltung ein solcher Konflikt vermieden wird. Diese Bedingungen führten zu einem Existenzsatz für Invarianzregler, der auf den perturbierten Fall erweitert werden kann und die Grundlage für die Entwicklung systematischer Entwurfsverfahren für Invarianzregler darstellt. So werden im folgenden Kapitel 3 zwei Invarianzregler hergeleitet. Das vorliegende, theoretische Grundgerüst für Invarianzregelung kann jedoch auch dazu dienen, in zukünftiger Forschungsarbeit *dynamische* Invarianzregelgesetze mit z. B. größeren Einzugsbereichen oder einfacher zu ermittelnden Invarianzgebieten zu entwickeln.

Eine Erweiterung der dargestellten Theorie für *zeitdiskrete* Implementierungen oder zur Berücksichtigung von Totzeiten im geschlossenen Regelkreis ist möglich und wird bei der Überschlagsvermeidung von Kraftfahrzeugen in Kapitel 5 beispielhaft durchgeführt.

3 Zwei spezielle Entwurfsverfahren für Invarianzregler

Im vorangegangenen Kapitel wurden Invarianzregler als E-/A-stabilisierende Regelgesetze definiert, die ein gegebenes Zustandsraumgebiet invariant halten. Falls das Stabilisierungsproblem nur *lokalen* Charakter hat, also nur kleine Abweichungen des Systemzustands vom Gleichgewichtspunkt vorliegen, ist der Entwurf eines Invarianzreglers ein bereits gelöstes, einfaches Problem: Falls die Tangentenlinearisierung des zugrundeliegenden, nichtlinearen Systems (2.9) um den Gleichgewichtspunkt ein vollständig steuerbares und beobachtbares System liefert, kann z. B. durch ein LQ-Reglerentwurfsverfahren ein lokal asymptotisch stabilisierendes, lineares Regelgesetz berechnet werden. Da ein Einzugsbereich¹ des linearen Reglers für das nichtlineare System ein Invarianzgebiet darstellt, liefern Standardverfahren zur Einzugsbereich-Analyse Invarianzgebiete [65]. Diese auf Tangentenlinearisierung basierenden Regelungsmethoden stoßen jedoch schnell auf die Grenzen der Anwendbarkeit, falls

- *große* Abweichungen des Systemzustands (durch z. B. einen großen anfänglichen Regelfehler) vom Gleichgewichtspunkt auftreten und damit die mit linearen Regelgesetzen erzielbaren Einzugsbereiche zu gering ausgedehnt sind,
- die Tangentenlinearisierung kein vollständig beobachtbares und steuerbares System liefert.

In diesen Fällen kann ein geeignetes Invarianzregelgesetz bei bereits durchgeführter Rückführlinearisierung zur Normalenform (2.16)-(2.17) und erfüllter Systemannahme 1 und 2 zu einer globaler wirkenden Stabilisierung eingesetzt werden.

¹Als *Einzugsbereich* eines linearen Reglers wird hier der Bereich im Zustandsraum verstanden, in dem das geregelte, nichtlineare System asymptotisch stabil ist.

Das vorliegende Kapitel gliedert sich wie folgt: Basierend auf den Bedingungen des Existenzsatzes 2.3 wird zunächst im ersten Teil für die mit Systemannahme 1 und 2 definierte, allgemeine Systemklasse ein Entwurfsverfahren für Invarianzregler hergeleitet. Ein Nachteil dieses Verfahrens liegt in der möglicherweise geringen Ausdehnung der Invarianzgebiete im Fall einer nur lokal begrenzten Nulldynamik.

Daher wird für die spezielle Unterklasse der unteraktuierten Rang-2-Systeme ein effizienteres Reglerentwurfsverfahren im anschließenden zweiten Teil dieses Kapitels hergeleitet. Die Einschränkung auf Rang-2-Systeme bietet den Vorteil, daß spezielle dynamische Eigenschaften des geregelten Doppelintegratorsystems ausgenutzt werden können, um weiter ausgedehnte Invarianzgebiete zu erhalten. Zusammenfassende Entwurfsschemata systematisieren zusammen mit Signalflußplänen des geregelten Gesamtsystems die Verfahren.

3.1 Invarianzreglerentwurf für die betrachtete, allgemeine Systemklasse

3.1.1 Schaltende Struktur des Invarianzregelgesetzes

Das im Folgenden vorgestellte Invarianzregelgesetz nützt die Tatsache aus, daß die Invarianzbedingung (2.41) nur am Rand $\partial\mathcal{G}$ einschränkende Bedingungen an die Steuergröße stellt. Daher kann im Gebietsinnern ein Regelgesetz verwendet werden, das nur zur asymptotischen E-/A-Stabilisierung dient. Abhängig vom Anfangszustand und den Reglerparametern kann jedoch die damit geregelte Systemtrajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ stoßen. Um an einem solchen Auftreffpunkt die geregelte Systemtrajektorie in \mathcal{G} zu halten, muß das Regelgesetz zusätzlich zur asymptotischen E-/A-Stabilität (2.42) noch die Invarianzbedingung (2.41) erfüllen. Dies wird durch *Schalten* der Reglerparameter \mathbf{k} des hier betrachteten Regelgesetzes vom Typ (2.40) erreicht. Wie in Abb. 3.1 gezeigt, ist bei einer solchen Strategie der Reglerparametervektor $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i$ im Innern von \mathcal{G} konstant. Trifft die Systemtrajektorie zum Zeitpunkt t_{i+1} auf $\partial\mathcal{G}$, so wird auf den neuen Parametervektor \mathbf{k}_{i+1} umgeschaltet, der durch die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{k}_{i+1} : \dot{\Phi}(t_{i+1}, \mathbf{k}_{i+1}) = -\dot{\Phi}^{\max} \quad (3.1)$$

(mit einer Konstanten $\dot{\Phi}^{\max} > 0$) ermittelt wird und robuste Invarianz von \mathcal{G} sicherstellt. Dabei muß der Stabilität des resultierenden geschalteten, linearen Teilsystems besondere

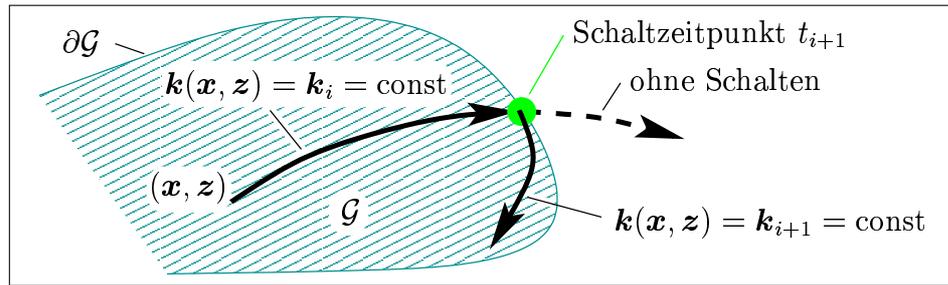


Abbildung 3.1: Schaltstrategie: Im Innern $\mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$ ist der Reglerparametervektor \mathbf{k} konstant; auf $\partial\mathcal{G}$ wird \mathbf{k} so umgeschaltet, daß die Systemtrajektorie \mathcal{G} nicht verläßt.

Aufmerksamkeit gezollt werden: So bewirkt das Umschalten linearer Systeme zu *beliebigen* Zeitpunkten i. allg. ein instabiles Systemverhalten, obwohl jedes der einzelnen Teilsysteme für sich alleine betrachtet stabil ist [66, 71]. Kann man die Umschaltstrategie beeinflussen, so kann Stabilität der Familie geschalteter Systeme erreicht werden, indem eine bestimmte Wartezeit nach jedem Umschaltvorgang eingehalten wird, siehe Lemma 9 in [71]. Da bei der hier betrachteten Regelungsstrategie die Auftreffzeitpunkte t_i auf den Gebietsrand jedoch a priori unbekannt sind, muß das geschaltete Regelgesetz trotz *beliebiger* Schaltzeitpunkte das lineare Teilsystem (2.16) asymptotisch stabilisieren. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt zunächst nur ein schaltendes Regelgesetz für das lineare Teilsystem (2.16) hergeleitet, das diesen Stabilitätsanforderungen genügt.

3.1.2 Dissipativitätsbasierte Regelung des linearen Teilsystems

Das in diesem Abschnitt hergeleitete, schaltende, bilineare Regelgesetz für das lineare Teilsystem (2.16) basiert auf dem Dissipativitätsprinzip: Dabei wird ein Regelgesetz $u = u(\mathbf{x}, v)$ mit einer neuen virtuellen Eingangsgröße v verwendet, das für eine *Speicherfunktion* S den Zusammenhang

$$S(\mathbf{x}(T)) - S(\mathbf{x}(0)) \leq \int_0^T w(v(t), y(t)) dt$$

zwischen v und einer neuen Ausgangsfunktion y erzielt. Die Funktion $w(\cdot)$ wird dabei als *Einspeisungsrate* bezeichnet und ist bei *passivitätsbasierten* Verfahren zu $w = v y$ definiert. Ein Invarianzregelungsverfahren, das auf einem solchen passivierenden Regler aufbaut, wird in Anhang C.2 sowie in [107] verwendet.

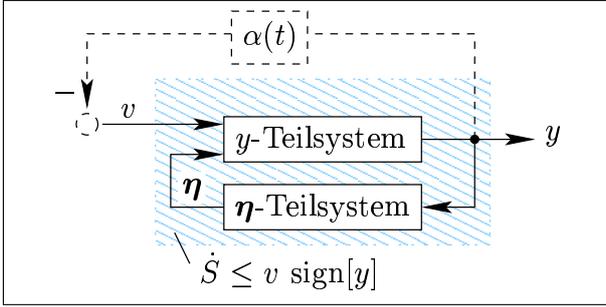


Abbildung 3.2: Dissipative Regelung des linearen Teilsystems (2.16).

tritt dadurch in der *sign-matching* Bedingung aus (3.26) ein betragsmäßig konstanter Term $\gamma \text{sign}[y]$ anstatt eines linearen Terms γy auf. Das schraffiert unterlegte System aus Abb. 3.2 besitzt als neue Ein- und Ausgangsgrößen v und y und teilt sich in die zwei Teilsysteme der y - und η -Dynamik auf. Als Speicherfunktion wird dabei die nicht glatte, positiv-definite, radial unbegrenzte Funktion

$$S(\eta, y) = \eta^T \mathbf{P}_{11} \eta + \text{sign}[y] y, \quad \mathbf{P}_{11} > 0 \quad (3.2)$$

gewählt. Wie in Anhang B.5 gezeigt wird, kann die zeitliche Ableitung von S mit einer negativ-definiten Funktion nach oben abgeschätzt werden und stellt eine Ljapunov-Funktion für das geregelte lineare Teilsystem nach einer (in Anhang A auf nicht glatte Funktionen) erweiterten Definition dar. Verwendet man die in Abb. 3.2 gestrichelt eingezeichnete, zusätzliche Rückführung $v = -\alpha(t) y$ mit einem stückweise konstanten Schaltparameter $\alpha(t) > 0$, so ist die zeitliche Ableitung \dot{S} unabhängig von den Umschaltzeitpunkten und dem Betrag von $\alpha(t)$ immer negativ-definit. Daraus folgt asymptotische Stabilität des geregelten linearen Teilsystems. Wie im folgenden Satz 3.1 und dessen Beweis formal gezeigt wird, handelt es sich dabei sogar um exponentielle Stabilität.

Beispiel 3.1 *Es wird der Fall betrachtet, daß das lineare Teilsystem (2.16) relativen Systemrang $r = 2$ besitzt, es sich also um das einfache Doppelintegratorsystem*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (3.3)$$

²Wie in Abschnitt 2.4.1 definiert, gilt $\text{sign}[0] = 0$.

Das im Folgenden hergeleitete *dissipative* Regelgesetz verwendet im Unterschied dazu eine Einspeisungsrate² $w = v \text{sign}[y]$ und liefert, zusammen mit einer Koordinatentransformation $\mathbf{x} \Leftrightarrow (y, \eta)$ aus (3.9), die Darstellung aus Abb. 3.2 für das geregelte lineare Teilsystem (2.16). Der Vorteil des hier vorgestellten dissipativitätsbasierten Verfahrens gegenüber dem passivitätsbasierten Verfahren liegt in dem sign-Term in der Einspeisungsrate. So

mit Ausgangsfunktion $\bar{y} = x_1$ handelt. Anstatt \bar{y} zu regeln, wird eine neue Ausgangsfunktion $y = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2$ mit zwei positiven Konstanten ν_1 und ν_2 gewählt. Es kann gezeigt werden, daß das neue Regelziel $y(t \rightarrow \infty) = 0$ das ursprüngliche Regelziel $\bar{y}(t \rightarrow \infty) = 0$ beinhaltet, da auf der Menge $\{\mathbf{x} \mid y(\mathbf{x}) = 0\}$ beide Zustandsvariablen x_1 und x_2 exponentiell stabil gegen den Ursprung konvergieren. System (3.3) wird zunächst mittels der invertierbaren Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \eta &= x_1 & x_1 &= \eta \\ y &= \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 & x_2 &= \frac{y - \nu_1 \eta}{\nu_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

in die äquivalente Form

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{y - \nu_1 \eta}{\nu_2} \\ \dot{y} &= \frac{\nu_1}{\nu_2} y - \frac{\nu_1^2}{\nu_2} \eta + \nu_2 u \end{aligned} \quad (3.5)$$

überführt. Daraus erkennt man, daß ein E-/A-linearisierendes Regelgesetz für (3.5) mit

$$u = \frac{1}{\nu_2} \left(-\frac{\nu_1}{\nu_2} y + \frac{\nu_1^2}{\nu_2} \eta + \bar{v} \right)$$

gegeben ist, wobei \bar{v} eine (nur für die Herleitung benötigte) Hilfseinganggröße darstellt. Damit folgt System (3.5) zu

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{y - \nu_1 \eta}{\nu_2} \\ \dot{y} &= \bar{v} . \end{aligned}$$

Berechnet man entlang der Systemtrajektorie dieses Systems die zeitliche Ableitung der Speicherfunktion $S = \eta^2 + \text{sign}[y] y$, so erhält man mit einer Abschätzung der zeitlichen Ableitung des sign-Terms gemäß (A.5) die Ungleichungsnebenbedingung

$$\dot{S} \leq -2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta^2 + \frac{2}{\nu_2} \eta y + \text{sign}[y] \bar{v} .$$

Daraus folgt mit der Hilfseinganggröße $\bar{v} = v - \text{sign}[y] \frac{2}{\nu_2} \eta y$

$$\dot{S} \leq -2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta^2 + \text{sign}[y] v \leq \text{sign}[y] v = w(y, v)$$

und damit der eingangs erklärte dissipative Zusammenhang zwischen v und y bezüglich der Einspeisungsrate $w = \text{sign}[y] v$. Wählt man noch $v = -\alpha(t) y$, so folgt das vollständige, dissipative Regelgesetz aus obigen Teilschritten zu

$$u = \frac{1}{\nu_2} \left(-\frac{\nu_1}{\nu_2} y + \frac{\nu_1^2}{\nu_2} \eta - \frac{2}{\nu_2} \text{sign}[y] \eta y - \alpha(t) y \right) , \quad (3.6)$$

3 Zwei spezielle Entwurfsverfahren für Invarianzregler

wobei es sich wegen dem gemischt-quadratischen Term ηy um ein bilineares Regelgesetz handelt. Da wegen der Wahl $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$ unabhängig von $\alpha(t) > 0$ immer

$$\dot{S} \begin{cases} < 0 & \text{für } (\eta, y) \neq (0, 0) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, und die Speicherfunktion S eine nicht glatte Ljapunov-Funktion nach einer erweiterten Definition in Anhang A darstellt, ist das geregelte System asymptotisch stabil.

In Abb. 3.3 (a) wird der zeitliche Verlauf der Zustandsvariablen mit Anfangswerten $y(0) = 2, \eta(0) = -1, \alpha(0) = 1$ und Reglerparametern $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$ gezeigt, wobei der Parameter $\alpha(t)$ zu willkürlich gewählten Zeitpunkten zweimal sprunghaft um den vierfachen Wert erhöht wurde. In das x_1 - x_2 -Koordinatensystem aus Abb. 3.3 (b) wurden zur Veranschaulichung zusätzlich die Koordinatenachsen des (η, y) -Systems eingezeichnet. Man erkennt aus (b), daß y um so schneller gegen null konvergiert, je größer der Wert von $\alpha(t)$ ist und die asymptotische Stabilität nicht vom Schalten von $\alpha(t)$ beeinträchtigt wird.

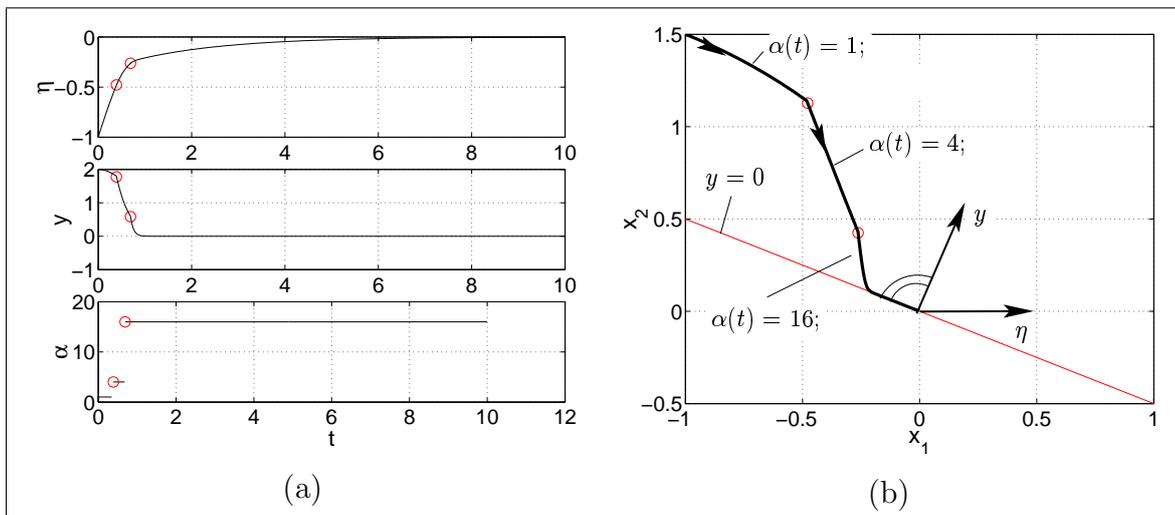


Abbildung 3.3: Das geregelte lineare Doppeltintegratorsystem ist *unabhängig* von der Schaltstrategie asymptotisch stabil. Kreise markieren die Schaltzeitpunkte von $\alpha(t)$.

Analog zum vorangegangenen Beispiel wird für den Regelungsentwurf die neue Ausgangsfunktion

$$y = \nu^T x \tag{3.7}$$

betrachtet. Der konstante Koeffizientenvektor $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^r$ wird dabei so gewählt, daß die Nullstellen des Polynoms

$$\nu_r \lambda^{r-1} + \dots + \nu_2 \lambda + \nu_1 \quad (3.8)$$

strikt negative Realteile besitzen, es sich also um ein Hurwitz-Polynom handelt. Die Übertragungsfunktion zwischen u und der neuen Ausgangsfunktion y des linearen Teilsystems (2.16) ergibt sich zu

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\nu_1 + \nu_2 s + \dots + \nu_r s^{r-1}}{s^r} .$$

Man erkennt, daß $H(s)$ aufgrund obiger Forderung negativer Realteile Nullstellen mit ausschließlich *negativen* Realteilen besitzt. Daher ist das Teilsystem (2.16) bezüglich der neuen Ausgangsfunktion (3.7) minimalphasig, d. h. für $y = 0$ konvergiert die Gesamtdynamik (bestehend aus der y -Dynamik und einer noch zu spezifizierenden $\boldsymbol{\eta}$ -Dynamik) asymptotisch stabil gegen den Ursprung. Daher beinhaltet das neue Regelziel $y(t \rightarrow \infty) = 0$ das ursprüngliche Regelziel $x_1(t \rightarrow \infty) = 0$.

Wegen der speziellen Wahl der linearen Funktion $y(\boldsymbol{x})$ gemäß (3.7) existiert immer eine liegende Matrix $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times r}$ so, daß die lineare Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{\nu}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad (3.9)$$

eindeutig umkehrbar ist. Desweiteren soll \boldsymbol{T} die Bedingung

$$\boldsymbol{T} \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

erfüllen. Wie im späteren Verlauf der Herleitung noch zu erkennen sein wird, kann damit sichergestellt werden, daß die Steuergröße u nicht in die $\boldsymbol{\eta}$ -Dynamik eingeht. Die Rücktransformation folgt zu

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{m}_2 y , \quad (3.11)$$

wobei $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{\nu}]^{-T} = [\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{m}_2]$, $\boldsymbol{M}_1 \in \mathbb{R}^{r \times (r-1)}$ (stehende Matrix), sowie $\boldsymbol{m}_2 \in \mathbb{R}^r$ gilt. Wendet man die Rücktransformation (3.11) auf das lineare Teilsystem (2.16) an, so erhält man die Systemdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{q}_{12} y \quad (3.12)$$

$$\dot{y} = \boldsymbol{q}_{21} \boldsymbol{\eta} + q_{22} y + \nu_r u \quad (3.13)$$

mit den Systemmatrizen und -vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}, & \mathbf{q}_{12} &= \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{m}_2 \in \mathbb{R}^{(r-1) \times 1}, \\ \mathbf{q}_{21} &= \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{A} \mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (r-1)}, & q_{22} &= \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{A} \mathbf{m}_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Nulldynamik von System (3.12)-(3.13) ergibt sich mit $y = \text{const} = 0$ und $u = 0$ zu $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta}$ und ist aufgrund der Minimalphasigkeit global exponentiell stabil. Daher existiert für eine gegebene, positiv-definite, quadratische Matrix $\mathbf{W}_{11} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$ immer eine Lösung $\mathbf{P}_{11} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$ zu der Ljapunov-Gleichung

$$\mathbf{Q}_{11}^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11} \mathbf{Q}_{11} = -\mathbf{W}_{11}. \quad (3.15)$$

Damit läßt sich der folgende Satz zur dissipativitätsbasierten Regelung des linearen Teilsystems (2.16) formulieren:

Satz 3.1 *Das lineare Teilsystem (2.16) ist durch das unterlagerte Regelgesetz³*

$$u = \frac{1}{\nu_r} (v - 2 \text{sign}[y] y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{q}_{21} \boldsymbol{\eta} - q_{22} y) \quad (3.16)$$

und dem virtuellen Regelgesetz

$$v(y) = -\alpha(t) y, \quad \alpha(t) \geq \alpha^* > 0 \quad (3.17)$$

mit einer beliebigen positiven Konstanten α^* global exponentiell stabil.

Der zugehörige Beweis findet sich in Anhang B.5. Dabei ist anzumerken, daß zum Nachweis *exponentieller* Stabilität die Beweismethoden geschalteter linearer Systeme nicht anwendbar sind, da es sich hier um ein *bilineares* System handelt. Des Weiteren kommt die Methode der *multiplen Ljapunov-Funktionen* nicht zum Einsatz, da dies lediglich zum Nachweis von Stabilität im Sinne von Ljapunov [66] oder asymptotischer Stabilität [71] führt. Aus diesem Grund wird in Anhang B.5 die behauptete exponentielle Stabilität durch direktes Herleiten der für exponentielle Stabilität definitionsgemäßen Eigenschaften bewiesen.

Wie im Folgenden gezeigt wird, erfüllt das bilineare Regelgesetz bestehend aus (3.16)-(3.17) die beiden Anforderungen *i)* und *ii)* der Bedingung 2.1:

³Die hier verwendete Schreibweise $\text{sign}[y] y$ ist für die folgenden Abschätzungen zeitlicher Ableitungen entlang von Systemtrajektorien vorteilhaft und wird daher aus didaktischen Gründen in einigen Fällen der äquivalenten Schreibweise $|y|$ vorgezogen.

- i) Da das Regelgesetz (3.17) nur einen Reglerparameter $\alpha(t)$ besitzt, ist die Grundmenge \mathcal{K} zulässiger Regelparаметervektoren hier durch die skalare Menge $\alpha > 0$ gegeben. Wie aus dem Beweis von Satz 3.1 ersichtlich ist, stellt die Speicherfunktion $S(\boldsymbol{\eta}, y)$ eine Ljapunov-Funktion für das geregelte lineare Teilsystem dar.
- ii) Setzt man das unterlagerte Regelgesetz (3.16) in (3.12)-(3.13) ein, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}_{12} y \\ -2 \operatorname{sign}[y] y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} v . \quad (3.18)$$

Für $y \neq 0$ folgt der Zusammenhang

$$\operatorname{sign} \left[\nabla S^T(\boldsymbol{\eta}, y) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \right] v(y, \alpha(t)) \stackrel{(A.5)}{=} \operatorname{sign}[y] v(y, \alpha(t)) \stackrel{(3.17)}{=} -|y| \alpha(t) ,$$

so daß für $y \neq 0$ der Parameter $\alpha(t)$ immer so groß positiv gewählt werden kann, daß die Ungleichungsbedingung (2.43) erfüllt ist.

Mit dem, in diesem Abschnitt hergeleiteten, schaltenden Regelgesetz (3.16)-(3.17) ist Bedingung 2.1 an das asymptotisch stabilisierende Regelgesetz aus Satz 2.3 erfüllt. Im folgenden Abschnitt werden die verbleibenden Bedingungen (a) (Ausschluß von Fluchtpunkten und begrenzte Nulldynamik) und (b) (*sign-matching*-Bedingung) aus Satz 2.3 behandelt.

3.1.3 Invarianzregelgesetz

Die im vorangegangenen Abschnitt auf das lineare Teilsystem (2.16) beschränkte Betrachtung wird nun auf das Gesamtsystem erweitert, das sich mit dem Regelgesetz (3.16)-(3.17) in den neuen $(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z})$ -Koordinaten zu

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}_{12} y \quad (3.19)$$

$$\dot{y} = - (2 \operatorname{sign}[y] \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} + \alpha(t)) y \quad (3.20)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) - \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) y \alpha(t) \quad (3.21)$$

ergibt, mit den neuen Vektorfeldern der internen Dynamik

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \mathbf{g} \nu_r^{-1} (2 \operatorname{sign}[y] y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}_{21} \boldsymbol{\eta} + q_{22} y) , \quad \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \nu_r^{-1} .$$

Es werden Invarianzgebiete mit einer Invarianzfunktion der Struktur

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) = \Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) + \gamma S(\boldsymbol{\eta}, y) - C \quad (3.22)$$

betrachtet, wobei C eine positive Konstante und S die Speicherfunktion (3.2) für das geregelte lineare Teilsystem ist; Φ_0 soll radial unbeschränkt sein. Für die zeitliche Ableitung von S entlang der Trajektorie des geregelten, linearen Teilsystems (3.19)-(3.20) folgt unter Berücksichtigung von (3.15) sowie einer Abschätzung der zeitlichen Ableitung der sign-Funktion gemäß (A.5) die in (B.2) hergeleitete Ungleichungsbedingung

$$\dot{S} \leq -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} - |y| \alpha(t) . \quad (3.23)$$

Damit ergibt sich die Invarianzbedingung (2.41) zu

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} \leq & \frac{d\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})^T}{d(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}_{12} y \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \end{bmatrix} - \gamma \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} + \\ & - \left(\frac{\partial \Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) + \gamma \operatorname{sign}[y] \right) \alpha(t) y \leq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Daraus erkennt man, daß mit Einhaltung von

$$\frac{d\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})^T}{d(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, 0, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} \cap \{y = 0\} \quad (3.25)$$

wegen dem bei $y \neq 0$ negativ-definiten Anteil $-\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} < 0$ von $\dot{\Phi}$ in (3.24) in einer ϵ -Umgebung

$$\mathcal{U} = \partial \mathcal{G} \cap \{0 < |y| < \epsilon\} , \quad \epsilon > 0$$

des Gebietsrands $\partial \mathcal{G}$, die Invarianzbedingung *unabhängig* von $\alpha(t)$ immer erfüllt ist. Für eine in (3.27) folgende Optimierung wird an dieser Stelle eine obere Schranke ϵ^* für ϵ eingeführt. Interpretiert man $\alpha(t)$ als Eingangsgröße von System (3.19)-(3.21), so stellt (3.25) Bedingung a) nach lokal begrenzter Nulldynamik und einem Ausschluß von Fluchtpunkten aus dem Existenzsatz 2.3 dar.

Des Weiteren erkennt man aus (3.24), daß durch die *sign-matching* Bedingung

$$\operatorname{sign} \left[\frac{\partial \Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) + \gamma \operatorname{sign}[y] \right] \stackrel{!}{=} \operatorname{sign}[y] \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} \setminus \mathcal{U} \quad (3.26)$$

(Satz 2.3, b)) sichergestellt werden kann, daß außerhalb von \mathcal{U} auf dem Gebietsrand $\partial \mathcal{G}$ durch genügend großes α der Wert von $\dot{\Phi}$ aus (3.24) negativ wird und damit die Invarianzbedingung (2.22) erfüllt ist. Dabei existiert immer ein genügend großer Wert für γ so, daß der Term $\gamma \operatorname{sign}[y]$ in der linken Seite von (3.26) betragsmäßig dominiert und damit (3.26) erfüllt ist. Bei einem passivitätsbasierten Regelgesetz ergäbe sich hier

anstatt des sign-Terms der lineare Ausdruck γy , so daß in einer Umgebung von $y = 0$ ohne weitere Einschränkungen an den ersten Summanden aus (3.26) die *sign-matching* Bedingung durch keine Wahl von γ erfüllt werden könnte.

Eine mögliche Berechnungsvorschrift einer unteren Schranke γ^* für γ ist mit einer Gütefunktion $\sigma(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) = \vartheta \left| (\partial\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})/\partial\mathbf{z})^T \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \right|$ gemäß

$$\begin{aligned} \gamma^*(C) &= \max_{(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z})} \sigma(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \\ \text{u. d. N. } i) \quad \Phi(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) &= \Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) + \sigma(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) S(\boldsymbol{\eta}, y, \alpha) = C \\ ii) \quad |y| &> \epsilon^* . \end{aligned} \tag{3.27}$$

gegeben, wobei $\vartheta = \text{const} > 1$ gelten soll.

Korollar 3.1 *Es existiert immer eine endliche Lösung $\gamma^*(C)$ zu (3.27).*

Der Beweis von Korollar 3.1 wird in Anhang B.6 geführt und ist nicht trivial, da die Nebenbedingung *i*) bezüglich $|y|$ nicht zwangsläufig beschränkte Konturflächen besitzt.

Anmerkung 3.1 *Eine Vereinfachung ergibt sich für den wichtigen Spezialfall, daß das zugrundeliegende System (2.16)-(2.17) in eingangsnormalisierter Normalenform vorliegt, d. h. wenn $\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ gilt. In diesem Fall entfällt der erste Summand im Argument der Signum-Funktion in (3.26), so daß die sign-matching Bedingung immer erfüllt ist und $\gamma > 0$ frei wählbar ist.*

Satz 3.2 *Es wird System (2.16)-(2.17) betrachtet, für das Systemannahme 2 gelte. Gegeben sei ein Zustandsraumgebiet \mathcal{G} , für das Bedingung (3.25) erfüllt ist und in dem der Startpunkt $(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0))$ liegt. Weiterhin sei $\alpha(0) > 0$. Das schaltende Invarianzregelgesetz, bestehend aus (3.16)-(3.17) mit einer Schaltstrategie*

$$\begin{aligned} \alpha(t_i \leq t < t_{i+1}) &= \alpha_i \quad \text{mit } t_i : \Phi(t_i) = 0 \\ \alpha_i : \dot{\Phi}(t_i, \alpha_i) &= -\dot{\Phi}^{\max} \end{aligned} \tag{3.28}$$

und einer Konstanten $\dot{\Phi}^{\max} > 0$ erzielt die folgenden Eigenschaften:

- i) \mathcal{G} ist positiv invariant,*
- ii) das geregelte bilineare Teilsystem (3.19)-(3.20) ist exponentiell stabil,*
- iii) die Zahl der Umschaltungen des Schaltparameters $\alpha(t)$ ist endlich,*

iv) die Folge der Schaltparameter ist streng monoton steigend, d. h. $\alpha(0) < \alpha(t_1) < \dots$

Der Beweis wird in Anhang B.7 geführt.

Anmerkung 3.2 Unter den Annahmen von Satz 3.2 kann immer eine untere Schranke α^* für α mit

$$\alpha^* = \arg \max_{\alpha} \max_{(\boldsymbol{\eta}, y, \boldsymbol{z}) \in \partial \mathcal{G}} \dot{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, y, \boldsymbol{z}, \alpha) \leq 0 \quad (3.29)$$

so berechnet werden, daß mit konstantem $\alpha \geq \alpha^*$ das Gebiet \mathcal{G} positiv invariant ist.

Ein gleichfalls auf hochverstärkende Rückführung basierendes Verfahren wird in [46] (Theorem 9.3.1) verwendet, um ein global minimalphasiges System zu stabilisieren. Damit sind jedoch die folgenden, schwerwiegenden Nachteile verbunden:

- Die numerische Berechnung der unteren Schranke α^* ist aufwendig, da das Optimierungsproblem (3.29) i. allg. nicht konvex ist.
- Das resultierende konstante Regelgesetz kann zu signifikant höheren Verstärkungen führen, als beim geschalteten Invarianzregelgesetz. Letzteres stellt selbständig durch sukzessives Hochschalten die Verstärkungen so ein, daß die Invarianzbedingung gerade noch erfüllt ist. Damit ergibt sich der maximale Reglerparameter $\max[\alpha_i]$, abhängig vom initialen Zustandspunkt, den initialen Reglerparametern, sowie dem Schaltparameter $\dot{\Phi}^{\max}$, zu einem i. allg. deutlich kleineren Wert als bei einer konstanten Reglerparametrierung mit α^* nach (3.29).
- Hochverstärkende Regler verursachen das Problem einer hohen Stellenergie, sowie Stabilitätsprobleme bei Meßrauschen, Verzögerungen im geschlossenen Regelkreis oder nicht modellierter Systemdynamik.

3.1.4 Hinweise zur Synthese von Invarianzgebieten

Der aufwendigste Schritt im vorangegangenen Entwurfsverfahren besteht darin, eine Funktion Φ_0 zu finden, mit der Bedingung (3.25) erfüllt ist. Dazu muß die Stabilität des Gesamtsystems (3.19)-(3.21) auf dem Zustandsraumbereich

$$(\boldsymbol{\eta}, y, \boldsymbol{z}) \in \partial \mathcal{G} \cap \{y = 0\} \quad (3.30)$$

untersucht werden. Setzt man $y = 0$ in das Gesamtsystem (3.19)-(3.21) ein, so folgt die Nulldynamik

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, 0, \mathbf{z}) . \quad (3.32)$$

Eine Ljapunov-Funktion $\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})$ für dieses System erfüllt auch Bedingung (3.25) und liefert gemäß

$$\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) = \bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) \quad (3.33)$$

eine geeignete Funktion Φ_0 . Die Berechnung eines für Invarianzregelung geeigneten Gebiets kann also auf das Standardproblem der Berechnung einer Ljapunov-Funktion zurückgeführt werden. Damit können die in der Literatur zahlreich vorhandenen Verfahren zur Erzeugung von Ljapunov-Funktionen angewendet werden [95, 96]. Es ist zu beachten, daß gegenüber vollständig auf Ljapunov-Funktionen basierenden Regelungsverfahren hier nur für das *reduzierte* System (3.31)-(3.32) eine Ljapunov-Funktion benötigt wird und sich dadurch der Rechenaufwand reduziert.

Da die meisten Methoden zur Berechnung von Ljapunov-Funktionen nur numerische Näherungslösungen liefern, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein auf Reihenentwicklung gestütztes, analytisches Verfahren entwickelt, siehe Anhang C.3.

3.1.5 Diskussion der erzielbaren Stabilität

Die hier getroffene, wesentliche Voraussetzung ist die Annahme der Existenz einer Funktion Φ_0 , die Bedingung (3.25) erfüllt. Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, ist dafür ein hinreichendes Kriterium die Existenz einer Ljapunov-Funktion $\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z})$ für das reduzierte System (3.31)-(3.32). Eine dabei nützliche Systemklassifikation kann mittels der in Definition 2.2 eingeführten Systemmerkmale der *Minimalphasigkeit*, *schwachen Minimalphasigkeit* und *Nichtminimalphasigkeit* durchgeführt werden.

- A. Falls System (2.16)-(2.17) *minimalphasig* ist (asymptotisch stabile Nulldynamik), so ist System (3.31)-(3.32) im gesamten $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})$ -Zustandsraum asymptotisch stabil und damit auch auf dem eingeschränkten Bereich \mathcal{U} . Daher stellt $\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z})$ auf der gesamten Ebene der Nulldynamik eine Ljapunov-Funktion für System (3.31)-(3.32) dar, so daß die Konstante C aus (3.22) beliebige positive Werte annehmen kann. Daraus folgt, daß durch die Wahl eines entsprechend großen Werts für C das invariant regelbare Zustandsraumgebiet \mathcal{G} in seiner Ausdehnung beliebig groß

gemacht werden kann. Folglich ist in diesem Fall *semiglobale*⁴ *asymptotische Gesamtsystemstabilität* erzielbar.

Im *schwach minimalphasigen* Fall (Nulldynamik ist nur stabil im Sinne von Ljapunov) existiert für System (3.31)-(3.32) auf der gesamten Ebene der Nulldynamik eine Ljapunov-ähnliche Funktion, deren zeitliche Ableitung im Unterschied zu einer echten Ljapunov-Funktion auch außerhalb des Ursprungs null werden kann. Dies stellt jedoch für Invarianzregelung keine Einschränkung dar, da (3.25) nur negative Semidefinitheit der Invarianzfunktion fordert. In diesem Fall ist die interne Dynamik *semiglobal begrenzt* und die Ausgangsfunktion *semiglobal asymptotisch stabil*.

- B. Im *nichtminimalphasigen* Fall mit lokal begrenzten Regionen, können nur diese lokalen Regionen mit dem beschriebenen Invarianzregler stabilisiert werden. Da in diesem Fall die Ljapunov-Funktion \bar{V} aus (3.33) im stabilen Bereich nach oben beschränkt ist, besitzt die Konstante C aus (3.22) eine obere Schranke \bar{C} . Sie läßt sich durch die folgende Maximierungsaufgabe berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \max C \\ \text{u. d. N. } i) \quad & \max_{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})} \dot{\bar{V}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) \stackrel{(3.31)-(3.32)}{=} \max_{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})} \nabla \bar{V}^T(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, 0, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \leq 0 \\ ii) \quad & \bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) = C \\ iii) \quad & (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}, 0, \mathbf{z}, C) \cap \{y = 0\} . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Hierbei ist zu beachten, daß Nebenbedingung *iii)* optional ist, da ein Weglassen lediglich zu konservativeren Resultaten, d. h. kleineren Werten für \bar{C} führen kann.

In diesem Fall kann neben einer *lokal asymptotisch stabilen* E-/A-Dynamik die interne Dynamik nur *lokal begrenzt* werden.

Ein Nachteil des beschriebenen Verfahrens zur Invarianzregelung ist, daß im obigen Fall B nur auf einen möglicherweise *kleinen* lokalen Bereich des Zustandsraums invariant geregelt werden kann. Aus diesem Grund wird in Abschnitt 3.2 für den Spezialfall eines NMP-Systems mit relativem Systemrang zwei eine weiter spezialisierte Invarianzregelungsstrategie hergeleitet, mit der ein großer Einzugsbereich möglich ist.

⁴Ein System besitzt *semiglobale* Stabilitätseigenschaften, wenn für *jedes* gegebene Anfangswertgebiet ein Regler existiert, der diese Stabilitätseigenschaften erzielt, siehe [47] und Anhang A.

3.1.6 Entwurfsschema und Grenzen des Verfahrens

Das in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitete Entwurfsverfahren wird im folgenden Entwurfsschema aus Tabelle 3.1 nochmals zusammengefaßt. Dabei wird davon ausgegangen, daß das betrachtete System bereits in Normalenform (2.16)-(2.17) vorliegt, Systemannahme 2 erfüllt und die Regelstrecke exakt bekannt ist (Nominalfall). Außerdem werden ideale technische Verhältnisse hinsichtlich der Reglerrealisierung (z. B. keine Stellgrößenbeschränkungen) und Zustandsschätzung (alle Systemzustände stehen ohne Beobachtungsfehler zur Verfügung) vorausgesetzt.

Tabelle 3.1: Entwurfsschema für ein dissipativitätsbasiertes Invarianzregelgesetz.

<i>Schritt 1</i>	<p>Schaltendes Regelgesetz für das lineare Teilsystem (2.16): Lege ein Hurwitz-Polynom der Form (3.8) fest und bestimme eine Matrix \mathbf{T}, die Bedingung (3.10) erfüllt. Berechne damit die Transformationsmatrix \mathbf{M} aus (3.11) sowie \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{q}_{12}, \mathbf{q}_{21} und q_{22} aus (3.14). Setze eine positiv-definite Matrix \mathbf{W}_{11} fest und berechne die Lösung \mathbf{P}_{11} der Ljapunov-Gleichung (3.15). Damit liegen alle Komponenten zur Bildung des schaltenden Regelgesetzes (3.16)-(3.17) vor.</p>
<i>Schritt 2</i>	<p>Bestimmung eines geeigneten Invarianzgebiets:</p> <ul style="list-style-type: none"> <i>i)</i> Bestimme eine Funktion Φ_0 durch die Berechnung einer Ljapunov-Funktion für System (3.31)-(3.32). Alternativ kann Φ_0 mit dem Reihenentwicklungsverfahren aus Anhang C.3 bestimmt werden. <i>ii)</i> Falls das zugrundeliegende System (2.16)-(2.17) in eingangsnormalisierter Normalenform vorliegt, lege einen positiven Wert für γ fest. Andernfalls ist die Wahl von γ durch die von C abhängige untere Schranke $\gamma^*(C)$ aus (3.27) beschränkt. <i>iii)</i> Falls die Nulldynamik (2.18) global stabil im Sinne von Ljapunov ist, wähle einen beliebigen positiven Wert für C. Andernfalls ist die Wahl von C durch die obere Schranke \bar{C} aus (3.34) beschränkt. <i>iv)</i> Eine geeignete Invarianzfunktion folgt mit Φ_0, S aus (3.2), sowie γ und C zu (3.22). Daraus ergibt sich \mathcal{G} gemäß (2.21).
<i>Schritt 3</i>	<p>Eine Schaltstrategie für $\alpha(t)$ ist mit (3.28) gegeben.</p>

Zusammenfassend lassen sich folgende Grenzen und Probleme des Verfahrens angeben:

- Es ist die Kenntnis einer Funktion Φ_0 notwendig, die für die Nulldynamik (3.31)-

(3.32) Ljapunov-ähnliche Eigenschaften besitzt. Bei hoher Systemordnung der Null-dynamik ist jedoch die analytische Berechnung einer Ljapunov-Funktion \bar{V} und damit der Funktion Φ_0 i. allg. nicht möglich, so daß numerische Näherungen angewendet werden müssen.

- Es wird eine vollständige Zustandsrückführung benötigt, so daß die bekannten Probleme bei der Messung bzw. Beobachterschätzung auftreten.
- Durch das automatische Hochschalten von $\alpha(t)$ am Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ kann eine hochverstärkende Rückführung mit den bereits genannten Problemen entstehen. Des Weiteren können durch die Schaltvorgänge hochfrequente, nicht modellierte Dynamiken angeregt werden.
- Eine zeitdiskrete Reglerrealisierung erfordert das Schalten von $\alpha(t)$ bereits vor Erreichen des Gebietsrands $\partial\mathcal{G}$. Dies kann durch die Einführung eines Sicherheitsabstands zu $\partial\mathcal{G}$ erreicht werden, siehe Kapitel 5.
- Stellgrößenbeschränkungen können nach derzeitigem Stand der Forschung nur tendenziell mitberücksichtigt werden, vgl. Anmerkung 3.4 am Ende dieses Kapitels. Falls Stellgrößenbeschränkungen aktiv werden, führt dies meist zur Destabilisierung des Gesamtsystems.

3.1.7 Simulationsbeispiel

Das in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitete Reglerentwurfsverfahren wird nun anhand des einfachen Beispielsystems aus [59]

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.35)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (3.36)$$

$$\dot{z} = -z^3 + z^3 x_2 \quad (3.37)$$

mit einer Ausgangsfunktion $\bar{y} = x_1$ und einer kubischen Nichtlinearität angewendet. Verwendet man einen konventionellen linearen PD-Regler $u = -k_p x_1 - k_d x_2$ um den Systemausgang im Ursprung zu stabilisieren, so ergibt sich für die Anfangswerte $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 2$, $z(0) = -3$ und den Parametersatz $k_p = 1$, $k_d = 3$ der in Abb. 3.4 (a) gezeigte, asymptotisch stabile Verlauf der Zustandsvariablen. Verwendet man hingegen den nur leicht veränderten Parametersatz $k_p = 1$, $k_d = 1$, so läuft die zeitliche Lösung der Systemtrajektorie bei $t \approx 0.0748$ gegen eine Singularität und das System destabilisiert sich in endlicher Zeit (*finite-escape*), siehe Abb. 3.4 (b). Daraus erkennt man, daß nicht jede

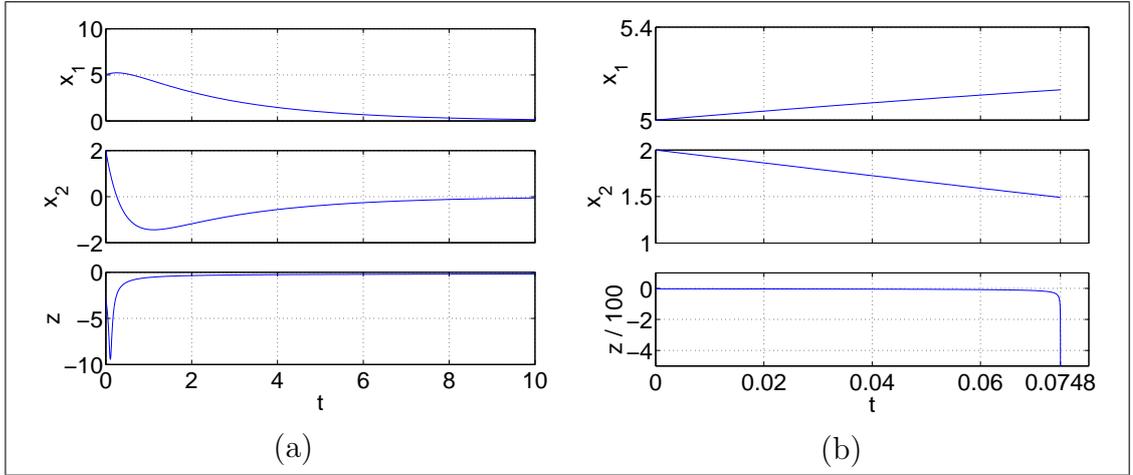


Abbildung 3.4: Stabilität des Beispielsystems bei konventioneller Regelung; (a): stabil für $k_d = 3$, (b): *finite-escape* für $k_d = 1$ bei $t \approx 0.0748$.

Reglerparametrierung, die das PD-geregelte, lineare Doppelintegratorsystem *ohne* interne Dynamik stabilisiert, zur asymptotischen E-/A-Stabilität sowie internen Stabilität im Falle des Vorliegens einer internen Dynamik führt.

Das im Folgenden vorgestellte Invarianzregelgesetz hingegen erzielt unabhängig von der Wahl der Reglerparameter und Anfangswerte *immer* Gesamtsystemstabilität.

In Beispiel 3.1 wurde das dissipativitätsbasierte Regelungsverfahren bereits für das lineare I_2 -System (3.35)-(3.36) angewendet, und es ergibt sich zusammen mit der ins (η, y) -Koordinatensystem transformierten internen Dynamik (3.37) das System

$$\dot{\eta} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \eta + \frac{1}{\nu_2} y \quad (3.38)$$

$$\dot{y} = -2 \operatorname{sign}[y] y \frac{1}{\nu_2} \eta + v \quad (3.39)$$

$$\dot{z} = -z^3 + z^3 \frac{1}{\nu_2} (y - \nu_1 \eta) . \quad (3.40)$$

Für die Nulldynamik $\dot{z} = -z^3$ berechnet sich die zeitliche Ableitung der Ljapunov-Kandidats Funktion

$$\bar{V}(z) = z^2/2 \quad (3.41)$$

zu $\dot{\bar{V}}(\eta, z) = -z^4 \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta\right)$. Damit erfüllt $\Phi_0(z) = \bar{V}(z)$ Bedingung (3.25), wenn für die Reglerparameter $\nu_1 > 0$ und $\nu_2 > 0$ auf dem Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$

$$1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta \geq 0 \Leftrightarrow \eta \geq -\frac{\nu_2}{\nu_1} \quad (3.42)$$

gilt. Mit (3.41) sowie der Speicherfunktion $S = \eta^2 + y \operatorname{sign}[y]$ folgt die Invarianzfunktion (3.22) schließlich zu

$$\Phi(\eta, y, z) = z^2/2 + \gamma (\eta^2 + |y|) - C . \quad (3.43)$$

Da (3.35)-(3.37) in eingangsnormalisierter Normalenform vorliegt, kann gemäß Anmerkung 3.1 der Wert von γ beliebig gewählt werden. Aus (3.43) folgt mit der Wahl $\gamma = 1$ die Beziehung $\Phi(\eta, y, z) \leq 0 \Rightarrow C \geq z^2/2 + \eta^2 + |y| \Rightarrow |\eta| \leq \sqrt{C}$, so daß (3.42) und damit (3.25) mit Einhaltung der Ungleichungsbedingung $\nu_2/\nu_1 \geq \sqrt{C}$ erfüllt ist. Da die Wahl von $C > 0$ frei ist und \bar{V} eine Ljapunov-Funktion für die Nulldynamik darstellt, ist semiglobale asymptotische Gesamtsystemstabilität erzielbar.

Mittels der zeitlichen Ableitung von $\Phi(\eta, y, z)$ entlang der Trajektorie von (3.38)-(3.40) folgt mit dem virtuellen Regelgesetz (3.17) die Invarianzbedingung zu

$$\dot{\Phi} \leq -z^4 \underbrace{\left(1 - \frac{y - \nu_1 \eta}{\nu_2}\right)}_{> 0 \text{ für } y = 0 \text{ wegen (3.42)}} - 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta^2 - \alpha(t) |y| = -\dot{\Phi}^{\max} \quad \forall (\eta, y, z) \in \partial \mathcal{G} . \quad (3.44)$$

Nach $\alpha(t)$ aufgelöst ergibt sich daraus

$$\alpha(t) = |y|^{-1} \left(\dot{\Phi}^{\max} - z^4 \left(1 - \frac{y - \nu_1 \eta}{\nu_2}\right) - 2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \eta^2 \right) \quad (3.45)$$

mit einem konstanten $\dot{\Phi}^{\max} > 0$. Jedesmal, wenn die Systemtrajektorie auf den Gebietsrand $\partial \mathcal{G}$ trifft, wird (3.45) ausgewertet und damit \mathcal{G} invariant gehalten. Da wegen (3.42) mit kleinem Wert von $|y|$ die Invarianzbedingung (3.44) inhärent erfüllt ist und daher die Systemtrajektorie nicht mehr auf $\partial \mathcal{G}$ stößt, muß die Berechnungsvorschrift (3.45) nur für die von null verschiedenen Werte $|y| > \epsilon > 0$ ausgewertet werden, so daß sich keine Singularität ergibt. Mit initialen Zustandsvariablen $\eta(0) = -0.1$, $y(0) = C - \eta_0^2 - z_0^2 - 0.1 = 6.60875$, $z(0) = 0.75$, $\alpha(0) = 1$, sowie den Parametern $\dot{\Phi}^{\max} = 4$, $C = 7$, $\nu_1 = 0.4$ und $\nu_2 = 1.1583$ ergibt sich der Trajektorienverlauf aus Abb. 3.5 (a). Der zugehörige Verlauf der für den Invarianzregler wichtigen Größen $\alpha(t)$ und $\Phi(t)$ ist in Abb. 3.5 (c) gezeigt. Dabei wurde der zeitliche Ausschnitt $t \in [0.17, 0.25]$ vergrößert dargestellt, da nur in diesem Bereich die Systemtrajektorie an den Gebietsrand stößt. In Abb. 3.5 (d) ist die Trajektorie $(\eta(t), y(t), z(t))$ zusammen mit einem Teil des Gebietsrands $\partial \mathcal{G}$ aufgetragen. Man erkennt, daß die Trajektorie sieben mal an $\partial \mathcal{G}$ stößt, \mathcal{G} jedoch nicht verläßt.

Zu beachten ist, daß $\alpha(t)$ den Wert 18 nicht überschreitet. Die untere Schranke für $\alpha(t)$, die laut Anmerkung 3.2 notwendig wäre, um ohne Schalten das Gebiet \mathcal{G} invariant

zu halten, wurde mit einem numerischen Optimierungsalgorithmus zu dem höheren Wert $\alpha^* = 40.65$ berechnet. Das Optimum wurde am Punkt $\eta^* = -0.4160$, $y^* = 2.106$, $z^* = 4.346$ angenommen. In Abb. 3.6 (a) wird der Simulationsverlauf der Zustandsvariablen für diesen hochverstärkenden Regler gezeigt. Aus dem Vergleich der Steuergrößenverläufe Abb. 3.6 (b) und Abb. 3.5 (b) erkennt man, daß im hochverstärkenden Fall der Betrag der maximal erforderlichen Steuergröße mit $|u| \leq 240$ etwa fünfmal so hoch ist, wie im Fall der Invarianzregelung mit nur $|u| \leq 53$.

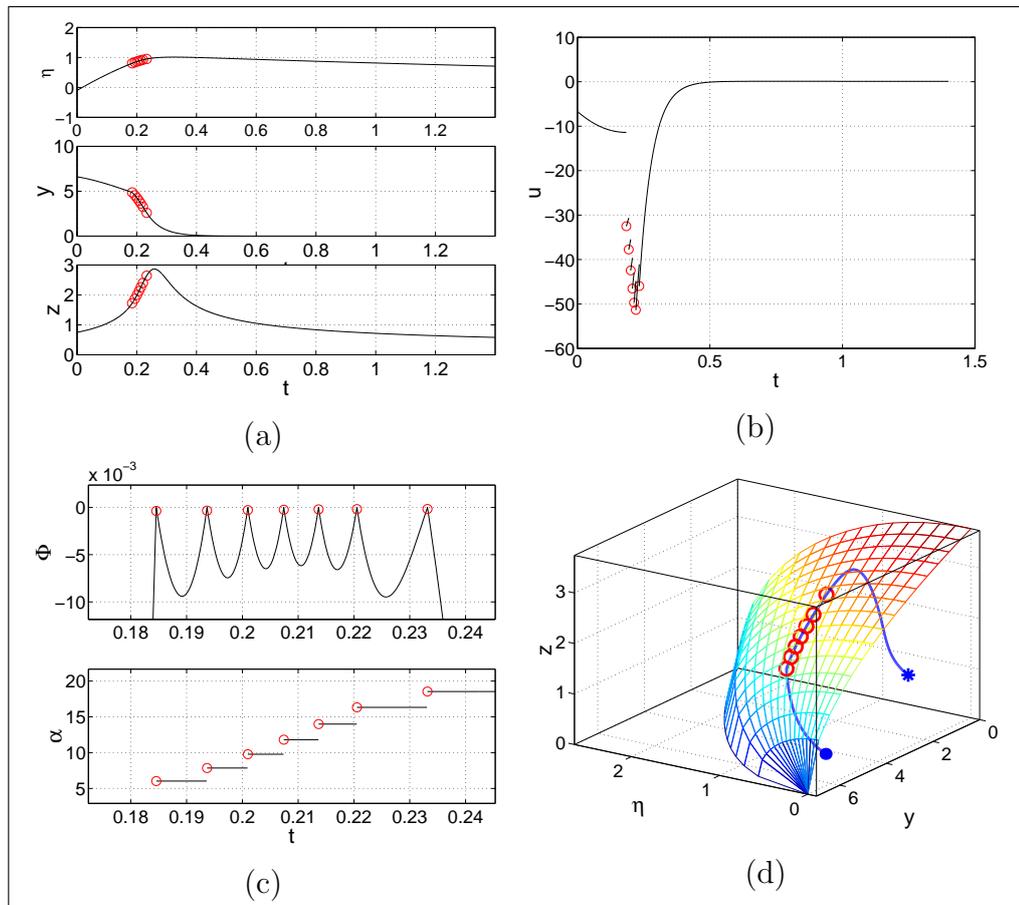


Abbildung 3.5: Schaltender, bilinearer Invarianzregler: (a) Systemzustände; (b) Steuergrößenverlauf; (c) Zeitlicher Ausschnitt von $\alpha(t)$, $\Phi(t)$; Kreise kennzeichnen Schaltzeitpunkte; (d) Phasenbahn mit aufgeschnittenem Invarianzgebiet; Startpunkt: ausgefüllter Kreis, Endpunkt ($t=20$): Stern; Auftreffpunkte auf $\partial\mathcal{G}$: Kreise.

Weitere Simulationsbeispiele mit Invarianzregelung finden sich in [105, 107, 106].

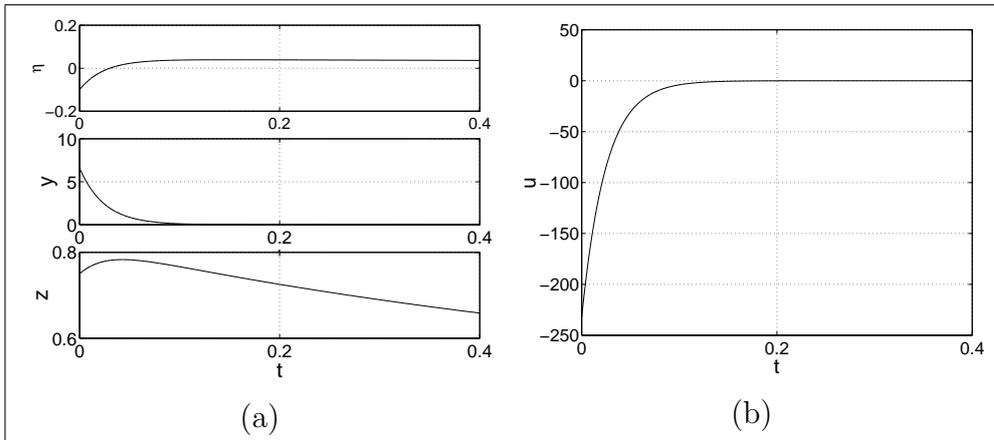


Abbildung 3.6: Hochverstärkende Regelung

3.2 Invarianzreglerentwurf für Rang-2-Systeme

Viele praxisrelevante unteraktuierte Systeme gehören der Klasse der mechanischen Systeme an. Der SISO-Fall impliziert dabei, daß eine Normalenform-Rückführlinearisierung zu einem Doppelintegratorsystem (anstatt des im vorangegangenen Abschnitt betrachteten, allgemeinen Fall eines r -fach-Integratorsystems) führt.

Wie später gezeigt wird, kann unter bestimmten Einschränkungen des initialen Zustandspunkts der Einschwingvorgang eines I_2 -Systems durch einen PD-Regler mit geschalteten Reglerparametern so modifiziert werden, daß die Geschwindigkeit des damit geregelten Doppelintegratorsystems nicht das Vorzeichen wechselt. Diese Eigenschaft ermöglicht eine vereinfachte Invarianzgebietssynthese. Außerdem ist bei nur lokal begrenzter Nulldynamik das erzielbare Invarianzgebiet und damit der Einzugsbereich weiter ausgedehnt als beim Entwurfsverfahren des vorangegangenen Abschnitts. Aus diesen Gründen wird in diesem Abschnitt die betrachtete Systemklasse auf Rang-2-Systeme in der Normalenform

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.46)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (3.47)$$

$$\dot{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u \quad (3.48)$$

$$\bar{y} = x_1 \quad (3.49)$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-2}$, einem glatten Drift- und Einkoppelvektorfeld $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n-2}$

sowie einer unbeschränkten Steuergröße $u \in \mathbb{R}$ fokussiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $x_1(0) \leq 0$ angenommen.

Das Invarianzregelgesetz soll aus einem geschalteten PD-Regler der Form

$$u(x_1^*(t), k_d(t), \mathbf{x}) = k_p (x_1^*(t) - x_1) - k_d(t) x_2 \quad (3.50)$$

bestehen, mit stückweise konstanter Geschwindigkeitsverstärkung $k_d(t) > 0$ und Sollwertparameter $x_1^*(t)$ sowie einer konstanten Proportionalverstärkung $k_p > 0$. Die initialen Werte der Schaltparameter seien $k_d(0) = k_{d,0} > 0$ und $x_1^*(0) = 0$. Die Invarianzfunktion wird mit einer positiven Konstante γ sowie einer glatten, radial unbegrenzten, skalaren Funktion $\Phi_0(x_1, \mathbf{z})$ zu

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) + \gamma x_2 \quad (3.51)$$

gewählt. Die grundlegende Idee, die zu dieser abweichenden Definition führt besteht darin, daß sich die zeitliche Ableitung von Φ entlang der Systemtrajektorie von (3.46)-(3.48) mit dem Regelgesetz (3.50) zu

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0(x_1, \mathbf{z}) + \gamma (k_p (x_1^*(t) - x_1) - k_d(t) x_2)$$

ergibt und man durch geeignete Modifikationen der Parameter k_d und x_1^* die Invarianzbedingung $\dot{\Phi} \leq 0$ einhalten kann.

Die folgenden zwei Bedingungen werden für den Invarianzreglerentwurf in diesem Abschnitt benötigt:

1. Die Funktion Φ_0 muß auf dem Zustandsraumgebiet

$$\mathcal{N} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mid \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge 0 \geq x_1 \geq x_1(0)\}$$

die Nichtanstiegsbedingung

$$\frac{\partial \Phi_0(x_1, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{f}((x_1, 0), \mathbf{z}) \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{N} \quad (3.52)$$

erfüllen. Eine Funktion mit solchen Eigenschaften ist beispielsweise durch eine Ljapunov-Funktion für die Nulldynamik

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}((x_1, 0), \mathbf{z}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}), \quad x_1 = \text{const} \quad (3.53)$$

von System (3.46)-(3.48) gegeben. Alternativ kann die Berechnung einer impliziten Lösung $\Gamma(x_1, \mathbf{z}) = 0$ einer begrenzten Phasenbahn der Nulldynamik zu einer geeigneten Funktion Φ_0 gemäß $\Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = \Gamma(x_1, \mathbf{z})$ führen.

2. Es soll ein n -dimensionales, offenes Zustandsraumgebiet $\chi \subseteq \mathcal{G}$ so existieren, daß jede Trajektorie $\mathbf{z}(t)$ der Nulldynamik (3.53) für $0 \geq x_1 \geq x_1(0)$ nach *endlicher* Zeit in das Gebietsinnere von χ läuft. Wie anhand zweier Beispielfälle für $n = 4$ in Abb. 2 erläutert, beinhaltet ein geeignetes Gebiet χ immer den Koordinatensprung.

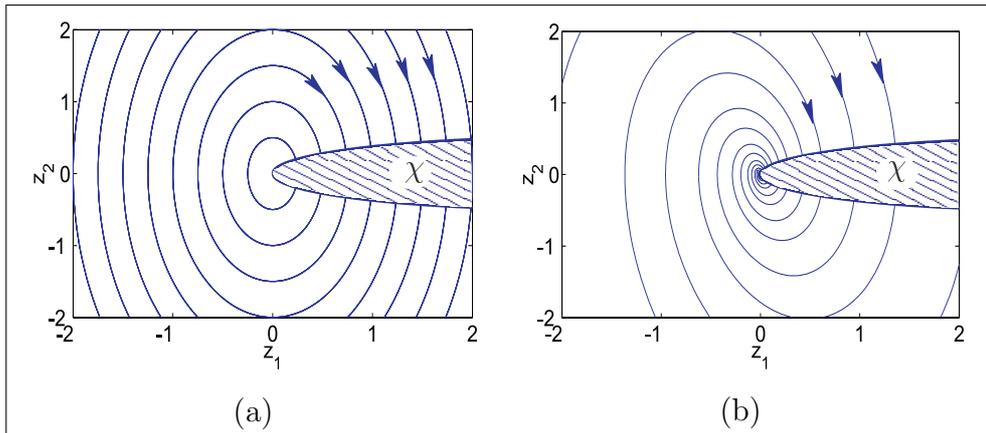


Abbildung 3.7: Qualitativer Verlauf der Nulldynamik in einer Umgebung des Gleichgewichtspunkts: (a) Ungedämpfte Oszillationen, (b) stabiler Strudel. In beiden Fällen wird die Region χ periodisch durchlaufen.

In dem Gebiet χ soll die zeitliche Ableitung der Invarianz-Funktion $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ entlang der Systemtrajektorie des mit (3.50) und initialen Schaltparametern geregelten Gesamtsystems (3.46)-(3.48) negativ-definit sein.

Die in Punkt 1 geforderte Funktion Φ_0 existiert immer, wenn Systemannahme 2 zutrifft. Des Weiteren folgt aus der Annahme einer begrenzten Nulldynamik sowie aus der Stetigkeit der betrachteten Regelstrecke, daß es um die Fläche der Nulldynamik herum ein lokal ausgedehntes Gebiet geben muß, innerhalb dessen das geregelte Gesamtsystem asymptotisch stabil ist (siehe Beweis B.4 von Korollar 2.2). Dies impliziert die Existenz einer Gesamtsystem-Ljapunov-Funktion und damit eines geeigneten Gebiets χ .

Anmerkungen zum Gebiet χ :

- Die Kenntnis des Gebiets χ wird benötigt, um mit dem, im Folgenden vorgestellten, schaltenden Invarianzregler eine *endliche Verweildauer* (engl. *dwell time*) der Gesamtsystemtrajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ im Gebiet χ und damit asymptotische Stabilität des geregelten linearen Teilsystems (3.46)-(3.47) garantieren zu können.

- Falls die zeitliche Ableitung $\dot{\Phi}$ im *gesamten* Innern von \mathcal{G} negativ-definit wäre, so wäre Φ eine Gesamtsystem-Ljapunov-Funktion. In diesem Fall wäre der PD-Regler (3.50) mit konstanten, initialen Schaltparametern ein Invarianzregler und das eingangs gestellte Regelungsproblem auf einfache Weise gelöst. Es soll jedoch nur *innerhalb* von χ die Bedingung $\dot{\Phi} < 0$ gelten, so daß sich die Invarianzfunktion Φ auch nur *innerhalb* von χ wie eine Gesamtsystem-Ljapunov-Funktion verhält und das Gebiet χ vom Systemzustand i. allg. wieder verlassen wird.
- Durch die Wahl des Gebiets χ kann heuristisches Systemwissen in die Regelung einfließen und spiegelt somit den pragmatisch orientierten Charakter der folgenden Invarianzregelung wieder. Bei mechanischen Systemen, deren Nulldynamik aus Pendelbewegungen in der Schwerkraft besteht, ist ein solches Gebiet beispielsweise bei bestimmten Nulldurchgängen der Geschwindigkeit gegeben.

Der Rest dieses Abschnitts gliedert sich wie folgt: Zunächst wird ein schaltender Regler für das lineare Teilsystem entwickelt, der ein Schalten der Reglerparameter $k_d(t), x_1^*(t)$ zu *beliebigen* Zeitpunkten zuläßt, und damit die notwendige Freiheit zum Invarianthalten von \mathcal{G} bereitstellt. Im darauffolgenden Abschnitt 3.2.2 wird gezeigt, daß die Bedingungen von Existenzsatz 2.3 eingehalten sind, so daß mit der in Abschnitt 3.2.3 dargestellten Schaltstrategie ein Invarianzregelgesetz vorliegt.

3.2.1 Schaltendes lineares Regelgesetz

Das lineare Doppelintegratorsystem (3.46)-(3.47) soll mit dem geschalteten PD-Regler (3.50) in den Ursprung lagegeregelt werden.

Die Werte der Schaltparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ werden mit dem Reglerautomaten aus Abb. 3.8 mit drei diskreten Reglerzuständen *ini*, *approach* und *wait* bestimmt. Die Transitionsbedingungen $tran(i)$ sowie die beim Zustandsübergang jeweils auszuführenden Aktionen $act(i)$ mit $i \in \{1, \dots, 4\}$ sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

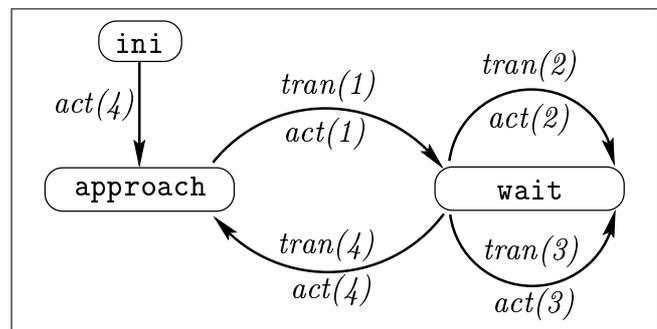


Abbildung 3.8: Hybrider Reglerautomat zur Berechnung von $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$.

Tabelle 3.2: Transitionsbedingungen $tran(i)$ und Aktionen $act(i)$ des hybriden Reglerautomaten aus Abb. 3.8.

Transitionsbedingungen	Aktionen
$tran(1): (\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) \in \partial\mathcal{G}$	$act(1): i = i + 1,$ $(x_{1,i}^*, k_{d,i}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, x_{1,i-1}^*, k_{d,i-1}),$ $x_1^*(t) = x_{1,i}^*, \quad k_d(t) = k_{d,i}$
$tran(2): (\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) \in \partial\mathcal{G} \wedge x_2(t) > 0$	$act(2):$ wie $act(1)$
$tran(3): x_2(t) = 0$	$act(3): x_1^*(t) = x_1(t)$
$tran(4): (\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) \in \chi$	$act(4): x_1^*(t) = 0, \quad k_d(t) = k_{d,0}$

Die prinzipielle Wirkungsweise des hier verwendeten Schaltalgorithmus ist wie folgt: Im Reglerzustand **ini** werden die stückweise konstanten Variablen $k_{d,i}$ und $x_{1,i}^*$ des hybriden Reglerautomaten mit $k_d(0) = k_{d,0}$ und $x_1^*(0) = x_{1,0}^* = 0$ initialisiert sowie die Laufvariable i zu null gesetzt. Das Gebiet \mathcal{G} ist formal wie in (2.21) definiert, wobei die zugrundeliegende Invarianzfunktion $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ im folgenden Abschnitt 3.2.2 noch eingehend behandelt wird.

Im Reglerzustand **approach** ist der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ auf den initialen (letztendlich gewünschten) Sollwert 0 geschaltet. Der Startpunkt $(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0))$ liege im Innern von \mathcal{G} . Stößt die Systemtrajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$, so wird mittels der Zustandsübergangsaktion $act(1)$ der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ sowie $k_d(t)$ aus den Vorgängerwerten der Reglerparameter $k_{d,i-1}$ und $x_{1,i-1}^*$ sowie aus dem Systemzustand (\mathbf{x}, \mathbf{z}) mittels einer, im Folgenden noch näher zu bestimmenden vektorwertigen Funktion $(x_{1,i}^*, k_{d,i}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, k_{d,i-1}, x_{1,i-1}^*)$ so berechnet, daß die Systemtrajektorie am Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ ins Gebietsinnere reflektiert wird. Da in diesem Abschnitt, getrennt vom Invarianzproblem, zunächst nur das Problem der asymptotischen Stabilisierung des linearen Teilsystems betrachtet wird, wird die Schaltstrategie zum Invarianthalten von \mathcal{G} sowie die Funktion $\mathbf{p}(\cdot)$ erst im folgenden Abschnitt 3.2.3 näher erläutert, und es werden hier nur die für asymptotische Stabilität notwendigen Eigenschaften an $\mathbf{p}(\cdot)$ formuliert:

- Für den Sollwertparameter $x_{1,i}^*$ gelte die Ungleichungsbedingung

$$0 \geq x_{1,i}^* \geq x_1(t_i), \quad t_i : \Phi(t_i) = 0. \quad (3.54)$$

- Für die Geschwindigkeitsverstärkung $k_d(t)$ soll die Bedingung

$$k_d(t)^2 - 4k_p > 0 \quad (3.55)$$

zum aperiodischen Einschwingen des linearen Teilsystems erfüllt sein.

Durch das Umschalten des Sollwertparameters $x_1^*(t)$ in der Zustandsübergangsaktion $act(1)$ auf den aktuellen, von null verschiedenen Wert von $x_1(t)$, wird das bis dahin exponentielle Einschwingen zum Ursprung hin, an einem neuen, vorübergehend gültigen Sollwert $x_1^*(t) \neq 0$ gestoppt. Falls die Trajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ während des Einschwingvorgangs auf diesen neuen Sollwert $x_1^*(t) \neq 0$ erneut an den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ mit einer von null verschiedenen Geschwindigkeit $x_2(t)$ stößt, werden mittels der Zustandsübergangsaktion $act(2)$ nochmals der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ sowie die Geschwindigkeitsverstärkung $k_d(t)$ angepaßt und damit verhindert, daß die Trajektorie \mathcal{G} verläßt.

Wie später noch genauer erklärt wird, kann das Gebiet \mathcal{G} nur unter der Voraussetzung invariant geregelt werden, daß die Geschwindigkeit $x_2(t)$ das Vorzeichen nicht wechselt. Um dies zu garantieren, wird bei der Detektion eines Nulldurchgangs von $x_2(t)$ mittels der Zustandsübergangsaktion $act(3)$ der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ auf den momentanen Wert von $x_1(t)$ geschaltet, wodurch die Bewegung des geregelten linearen Teilsystems *instantan* zum Stillstand kommt und ein Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit $x_2(t)$ verhindert wird.

Bis zum Erreichen von $\chi \subseteq \mathbb{R}^n$ verbleibt der Regler im Wartezustand **wait** und geht dann in den Zustand **approach** über, bei dem auf den ursprünglichen Sollwert $x_1^*(t) = 0$ und die ursprüngliche Geschwindigkeitsverstärkung $k_d(t) = k_{d,0}$ zurückgeschaltet wird.

Fazit: Diese Schaltstrategie erzielt asymptotisch stabiles Einschwingen des geregelten linearen Teilsystems mit der *zusätzlichen Freiheit*, den Einschwingvorgang des geregelten linearen Teilsystems in bestimmten Bereichen des Zustandsraums durch Übergang zum Reglerzustand **wait** unterbrechen zu können. Diese Freiheit wird im Folgenden dazu genutzt, das Gebiet \mathcal{G} invariant zu halten.

Satz 3.3 *Das lineare Teilsystem (3.46)-(3.47) sei mit dem geschalteten PD-Regelgesetz (3.50) sowie dem Schaltalgorithmus aus Abb. 3.8 und Tabelle 3.2 geregelt. Das Gebiet χ sei so gewählt, daß der Reglerzustand **approach** eine endliche Aufenthaltsdauer besitzt. Falls der Startpunkt $(x_1(0), x_2(0))$ die Bedingung*

$$x_1(0) \lambda^{\min} \geq x_2(0) \geq 0 \quad (3.56)$$

mit $\lambda^{\min} = -k_{d,0}/2 - ((k_{d,0}/2)^2 - k_p)^{1/2}$ und ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit $x_1(0) \leq 0$ erfüllt, gelten die folgenden Aussagen:

i) Die Geschwindigkeit $x_2(t)$ des geregelten linearen Teilsystems ist stets positiv.

ii) Das geregelte lineare Teilsystem (3.46)-(3.47) ist asymptotisch stabil.

Der Beweis wird in Anhang B.8 geführt.

3.2.2 Existenzbedingungen für Invarianzregler

Die Invarianzbedingung (2.41) folgt mit der zeitlichen Ableitung von $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ zu

$$\dot{\Phi} = \nabla \Phi_0^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} + \left(\frac{\partial \Phi_0^T}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g} + \gamma \right) \left(k_p (x_1^*(t) - x_1) - k_d(t) x_2 \right) \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} . \quad (3.57)$$

Daraus erkennt man, daß mit

$$\text{sign} \left[\frac{\partial \Phi_0^T}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g} + \gamma \right] > 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial \mathcal{G} , \quad (3.58)$$

$x_2 > 0$ und $x_1^*(t) - x_1 > 0$ durch Erhöhen von $k_d(t)$ sowie durch Herabsetzen von $x_1^*(t)$ die Invarianzbedingung (3.57) erfüllt werden kann. Würde (3.58) nicht zutreffen, müßte $k_d(t)$ reduziert werden, so daß $\dot{\Phi} \leq 0$ möglicherweise negative Werte für $k_d(t)$ erfordern würde und damit asymptotische E-/A-Stabilität verletzt wäre. Es handelt sich also bei (3.58) um die *sign-matching* Bedingung aus Satz 2.3 b), die einen Konflikt zwischen den Regelzielen der Invarianz von \mathcal{G} und asymptotischer E-/A-Stabilität verhindert. Analog zur Berechnungsvorschrift (3.27) aus Abschnitt 3.1.3 kann durch Maximierung der Gütefunktion $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \vartheta \left| \partial \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) / \partial \mathbf{z}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right|$ gemäß

$$\gamma^* = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (3.59)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) + \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) x_2 = 0$$

mit einer Konstanten $\vartheta > 1$ eine untere Schranke γ^* für γ so ermittelt werden, daß die Ungleichungsbedingung (3.58) erfüllt ist.

An dieser Stelle wird klar, warum mittels der speziellen Parameterschaltstrategie des PD-Regelgesetzes aus Abschnitt 3.2.1 garantiert werden muß, daß $x_2(t)$ das Vorzeichen nicht wechselt. Läge zum Beispiel periodisches Einschwingen des PD-geregelten Doppelintegrators vor, so könnte beim Nulldurchgang der Geschwindigkeit $x_2(t) \neq \text{const} = 0$ durch Vergrößern des Werts von $k_d(t)$ die Invarianzbedingung (3.57) nicht garantiert werden.

Des Weiteren ist aus (3.57) ersichtlich, daß für $x_2 = \text{const} = 0$ die eingangs formulierte Nichtanstiegsbedingung (3.52) an Φ_0 notwendig ist. Damit ist die noch fehlende Bedingung a) aus Satz 2.3 erfüllt und es existiert eine Parameterschaltstrategie so, daß das geschaltete PD-Regelgesetz ein Invarianzregelgesetz darstellt.

Wie im Beweis von Satz 3.4 gezeigt wird, verhindert die spezielle Schaltstrategie von $x_1^*(t)$ und $k_d(t)$ ein gleichzeitiges Auftreten von $x_2 = 0$ und $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial\mathcal{G}$. Daher ist die Forderung aus Satz 2.3 a) nach einer offenen Umgebung (hier von $x_2 = 0$) nicht notwendig. Dies erklärt auch das Wegfallen der zweiten Nebenbedingung aus (3.27) verglichen mit (3.59).

3.2.3 Schaltstrategie für die Reglerparameter

Die Reglerparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ werden am Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ gemäß

$$\begin{aligned} k_d(t_i \leq t < t_{i+1}) &= k_{d,i} \\ x_1^*(t_i \leq t < t_{i+1}) &= x_{1,i}^* \end{aligned} \quad (3.60)$$

geschaltet und sind damit stückweise konstant. Dabei werden die Schaltzeitpunkte mit $t_i : \Phi(t_i) = 0$ bezeichnet und die im vorangegangenen Abschnitt bereits erwähnte vektorwertige Funktion $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, x_{1,i-1}^*, k_{d,i-1}) = (x_{1,i}^*, k_{d,i})$ ist durch

$$x_{1,i}^* = \max \left[\dot{\Phi}^{-1}(t_i, -\dot{\Phi}^{\max}, k_{d,i-1}), x_1(t_i) \right] \quad (3.61)$$

$$k_{d,i} = \dot{\Phi}^{-1}(t_i, -\dot{\Phi}^{\max}, x_{1,i}^*) \quad (3.62)$$

definiert. Dabei bezeichnet $\dot{\Phi}^{-1}(t_i, -\dot{\Phi}^{\max}, k_{d,i-1})$ die nach x_1^* aufgelöste Umkehrfunktion von $\dot{\Phi}(\cdot, x_1^*) = -\dot{\Phi}^{\max}$ und $\dot{\Phi}^{-1}(t_i, -\dot{\Phi}^{\max}, x_{1,i}^*)$ die nach k_d aufgelöste Umkehrfunktion von $\dot{\Phi}(\cdot, k_d) = -\dot{\Phi}^{\max}$. Anschaulich bedeuten diese Berechnungsvorschriften, daß beim Auftreffen der Trajektorie auf $\partial\mathcal{G}$ zunächst der Parameter $k_d(t)$ unverändert bleibt und $x_1^*(t)$ mittels (3.61) so berechnet wird, daß $\dot{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, k_d(t) = k_{d,i-1}, x_1^*(t) = x_{1,i}^*)$ unter Einhaltung der Nebenbedingung (3.54) möglichst den Wert $-\dot{\Phi}^{\max}$ erreicht. Mit dem neu berechneten Sollwertparameter $x_{1,i}^*$ wird nun ein Wert für $\dot{\Phi}$ ermittelt. Falls aufgrund der Nebenbedingung (3.54) für $x_{1,i}^*$ dieser Wert von $\dot{\Phi}$ noch größer als die zulässige obere Schranke $-\dot{\Phi}^{\max}$ ist, wird in einem zweiten Schritt der Dämpfungsparameter $k_{d,i}$ in (3.62) entsprechend weit hochgesetzt.

Mit (3.61)-(3.62) wird garantiert, daß die robuste Invarianzbedingung (2.33) eingehalten wird. Wie in Abschnitt 2.3.2 bereits erklärt wurde, kann durch Erhöhen des

positiven Parameters $\dot{\Phi}^{\max} > 0$ die Invarianzbedingung robust gegenüber Parameterperturbationen gemacht werden. Damit läßt sich der folgende Satz zur Invarianzregelung unteraktuierter Rang-2-Systeme formulieren:

Satz 3.4 *Gegeben sei eine Funktion Φ_0 , die die Abstiegsbedingung (3.52) erfüllt und mit $\gamma = \gamma^*$ aus (3.59) gemäß der Gebietsdefinition (3.51) ein Zustandsraumgebiet \mathcal{G} bestimmt. Des Weiteren sei ein geeignetes Rückschaltgebiet χ bekannt. Es wird das mit dem schaltenden PD-Regelgesetz (3.50) geregelte Gesamtsystem (3.46)-(3.48) betrachtet. Die stückweise konstanten Reglerparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ seien mittels des hybriden Reglerautomaten aus Abb. 3.8 und Tabelle 3.2 sowie der Berechnungsvorschrift (3.61)-(3.62) berechnet. Der Startpunkt $(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0))$ liege in $\mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$ und erfülle die Anfangsbedingung (3.56) sowie ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit $x_1(0) \leq 0$. Des Weiteren erfülle der initiale Wert $k_{d,0}$ die aperiodische Einschwingbedingung (3.55). Dann gilt:*

- i) *Das Gebiet \mathcal{G} ist positiv invariant.*
- ii) *Das geregelte lineare Teilsystem ist asymptotisch stabil.*

Der Beweis wird in Anhang B.9 geführt.

3.2.4 Entwurfsschema

Dem Entwurfsschema in Tabelle 3.3 wird eine *eingangsnormalisierte* Normalenform (d. h. $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$), eine lokal begrenzte Nulldynamik (Systemannahme 2) sowie die Kenntnis eines geeigneten Rückschaltgebiets χ vorausgesetzt. Das Invarianzregelgesetz wird wie in Abb. 3.9 gezeigt implementiert. Wie beim Verfahren aus Abschnitt 3.1.6, werden auch hier wieder ideale Verhältnisse hinsichtlich der Reglerrealisierung und Zustandsschätzung vorausgesetzt.

Wie in Anmerkung 3.3 erklärt, kann das Verfahren auf Normalenformen in nicht-eingangsnormalisierter Form erweitert werden. Daher liegen die Grenzen der Anwendbarkeit hauptsächlich in der Ermittlung des Rückschaltgebiets χ sowie der Funktion Φ_0 . Zusätzlich sind die in Abschnitt 3.1.6 erläuterten Probleme bei der Reglerrealisierung auch im vorliegenden Fall zu beachten.

Anmerkung 3.3 *Falls das System in nicht-eingangsnormalisierter Normalenform vorliegt, d. h. falls $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$ gilt, muß gemäß (3.59) eine Optimierung zur Bestimmung einer unteren Schranke γ^* für γ durchgeführt werden.*

Tabelle 3.3: Entwurfsschema eines Invarianzreglers für Rang-2-Systeme.

<i>Schritt 1</i>	<p>Bestimmung eines geeigneten Invarianzgebiets:</p> <p>A. Eine implizite Lösung $\Gamma(x_1, \mathbf{z}) = 0$ einer stabilen Phasenbahn der Nulldynamik (3.53) liefert eine geeignete Funktion Φ_0 mittels $\Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = \Gamma(x_1, \mathbf{z})$.</p> <p>B. Alternative: Falls die analytische Berechnung einer stabilen Phasenbahn zu aufwendig ist, bestimme eine Ljapunov-Funktion $V(x_1, \mathbf{z})$ für den stabilen Teil der Nulldynamik (3.53). Daraus folgt eine geeignete Funktion $\Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = V(x_1, \mathbf{z}) - C$. Die Konstante $C > 0$ muß dabei so gewählt werden, daß auf der Konturfläche $\{(x_1, \mathbf{z}) \mid V(x_1, \mathbf{z}) = C\}$ die Bedingung $\dot{V} \leq 0$ gilt. Falls das System minimalphasig ist, kann C beliebig groß gewählt werden. Andernfalls ist der Wert von C nach oben hin beschränkt.</p> <p>Aufgrund der vorausgesetzten eingangsnormalisierten Normalenform kann für $\gamma \geq 0$ ein beliebiger positiver Wert gewählt werden. Damit ergibt sich die Invarianzfunktion gemäß (3.51) zu $\Phi = \Phi_0 + \gamma x_2$. Zur Wahl von γ vergleiche auch Anmerkung 3.4.</p>
<i>Schritt 2</i>	Wähle $\vartheta > 1$ und $k_p > 0$. Daraus berechnet sich der Anfangswert von $k_d(t)$ für aperiodisches Einschwingen gemäß (3.55) zu $k_{d,0} = 2\vartheta \sqrt{k_p}$.
<i>Schritt 3</i>	<p>Finde ein passendes Rückschaltgebiet χ durch einen Bereich des Zustandsraums</p> <ul style="list-style-type: none"> i) innerhalb dessen die Invarianzfunktion Φ lokal eine Ljapunov-Funktion für das Gesamtsystem darstellt, ii) das von allen Phasenbahnen der Nulldynamik (3.53) nach endlicher Zeit durchlaufen wird.
<i>Schritt 4</i>	Ein Invarianzregelgesetz folgt aus dem hybriden Reglerautomaten aus Abb. 3.8 zusammen mit der Zustandsübergangstabelle 3.2 und den Berechnungsvorschriften (3.61)-(3.62).

Anmerkung 3.4 Ein großer Wert von γ bewirkt qualitativ, daß bei bereits kleinen Geschwindigkeiten x_2 die Trajektorie auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ stößt und daher der exponen-

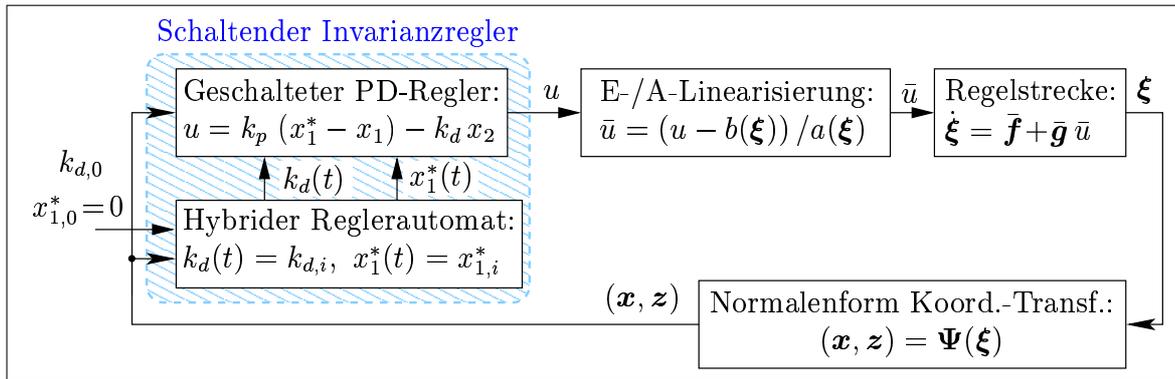


Abbildung 3.9: Signalflußplan des geregelten Rang-2-Systems. Es werden idealisierte technische Verhältnisse hinsichtlich der Reglerrealisierung und Zustandsmessung vorausgesetzt.

tielle Einschwingvorgang des linearen Doppelintegratorsystems unterbrochen wird. Daher entstehen nur kleine Werte für die virtuelle Steuergröße u und es können tendenziell Stellgrößenbeschränkungen durch Vergrößern von γ mitberücksichtigt werden. Verkleinert man hingegen den Wert von γ , so vergrößern sich die notwendigen Stellgrößen und das Invarianzgebiet \mathcal{G} dehnt sich weiter aus. Eine genaue Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen erfordert jedoch nicht nur eine Betrachtung der virtuellen Steuergröße u , sondern auch der tatsächlichen Steuergröße \bar{u} aus der Normalenform-Rückführlinearisierung. Im Allg. zieht jedoch eine betragsmäßige Vergrößerung von u auch eine betragsmäßige Vergrößerung von \bar{u} nach sich.

Zusammenfassung und Bewertung

Basierend auf den in Kapitel 2 formulierten, allgemeinen Existenzbedingungen für Invarianzregler wurden in diesem Kapitel zwei Entwurfsverfahren für Invarianzregler vorgestellt. Dabei wurde für beide Regler zunächst ein schaltendes Regelgesetz für das lineare Teilsystem entwickelt, das trotz Schalten bestimmter Reglerparameter zu beliebigen Zeitpunkten asymptotische bzw. exponentielle Stabilität des geregelten linearen Teilsystems garantiert. Die mit dem Schalten der Reglerparameter gewonnene Freiheit ermöglicht den Einsatz einer Schaltstrategie für die Reglerparameter, mit der neben den geforderten Stabilitätseigenschaften des geregelten linearen Teilsystems die Invarianzbedingung eingehalten werden kann. Mit diesen Regelgesetzen wird das E-/A-Verhalten asymptotisch

bzw. exponentiell stabilisiert und zusätzlich die interne Dynamik beschränkt gehalten, so daß damit systematische Verfahren zur Invarianzregelung vorliegen.

Dabei eignet sich der im ersten Teil dieses Kapitels präsentierte dissipativitätsbasierte Invarianzregler besonders für Systeme mit global begrenzter Nulldynamik, da hier das Invarianzgebiet beliebig groß gewählt werden kann. Im Fall nur lokal begrenzter Nulldynamik hingegen, kann sich das Invarianzgebiet auf einen kleinen Bereich um den Gleichgewichtspunkt reduzieren. Das damit verbundene Problem eines möglicherweise zu geringen Einzugsbereichs wurde mit dem im zweiten Teil des vorliegenden Kapitels hergeleiteten Invarianzreglers für die Unterklasse der Rang-2-Systeme entschärft. Die Besonderheit dieses zweiten Invarianzregelungsverfahrens besteht darin, die Konvergenz des geregelten, linearen Teilsystems in bestimmten, für Invarianz ungünstigen Regionen, anzuhalten. Erst wenn die Systemtrajektorie der Nulldynamik einen für Invarianz günstigen Zustandsraumbereich erreicht hat, wird die Konvergenz fortgesetzt. Dies wird durch die speziellen dynamischen Eigenschaften des bei Rang-2-Systemen vorliegenden Doppelintegratorsystems ermöglicht. Eine Erweiterung auf Systeme höheren Rangs ist prinzipiell möglich und erfordert die weitere Erforschung der mit schaltenden Regelgesetzen geregelten Dynamik von r -fach-Integratorsystemen.

Vergleicht man die beiden Invarianzregler mit Ljapunov-basierten Regelgesetzen, so stellt man fest, daß sowohl bei Invarianzreglern als auch bei Ljapunov-Reglern eine Funktion mit bestimmten Abstiegseigenschaften entlang der Systemtrajektorie der Nulldynamik gefunden werden muß. Während jedoch eine Ljapunov-Funktion im *gesamten* n -dimensionalen Zustandsraum diese Abstiegseigenschaften erfüllen muß, ist dies für eine Invarianzfunktion nur auf einem reduzierten Bereich des Zustandsraums notwendig. Verglichen mit Ljapunov-basierten Reglern erfordern die hier vorgestellten Invarianzregelgesetze daher einen *geringeren Entwurfsaufwand*.

Der Hauptaufwand und damit die Grenzen der beschriebenen Verfahren liegen in der Generierung geeigneter Invarianzgebiete. Dafür ist derzeit die Kenntnis einer Ljapunov-ähnlichen Funktion auf einem reduzierten Teil des Zustandsraums notwendig.

4 Invarianzregelung eines unteraktuierten Roboters

Das im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Entwurfsverfahren für Invarianzregler von Rang-2-Systemen wird nun am Beispiel des in Abb. 4.1 skizzierten, unteraktuierten Roboters R2D1 (Rotations-Freiheitsgrade: 2, Drive: 1) angewendet und experimentell erprobt. Dabei handelt es sich um einen zweiarmigen SCARA-Typ-Roboter, bei dem nur das erste Gelenk angetrieben ist. Die Bewegungsebene der Roboterarme kann gegenüber dem Erdschwerefeld mit Gravitationsvektor \mathbf{g}_{grav} um einen Inklinationswinkel α von bis zu -45° geneigt werden.

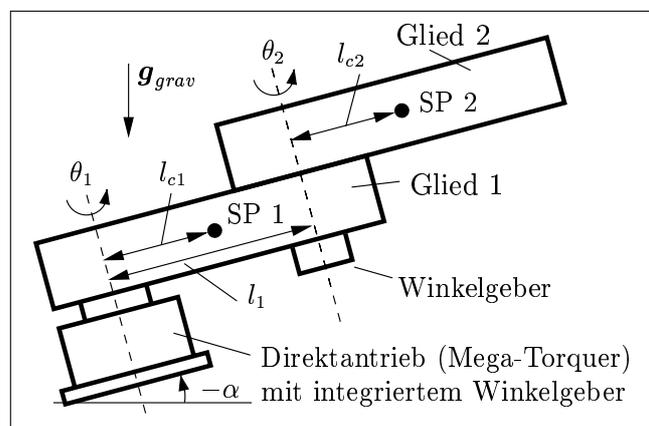


Abbildung 4.1: Schematischer Aufbau von R2D1.

Artverwandte Roboter sind der *Acrobot* [23], bei dem nur das zweite Gelenk angetrieben ist und die Rotationsebene parallel zum Gravitationsfeld steht (Fall: $\alpha = -90^\circ$), das als *Pendubot* bezeichnete rotierende invertierte Pendel [24], bei dem nur das erste Gelenk angetrieben ist und die Rotationsebene wieder parallel zum Gravitationsfeld steht, oder das *gyroskopische Pendel* [25], bei dem anstatt eines zweiten Arms eine angetriebene Schwungscheibe montiert und der erste Arm nicht angetrieben ist. Bei diesen unteraktuierten Robotern besteht das Regelziel häufig in der Überführung der nach unten gerichteten, stabilen Gleichgewichtslage der Gelenke, in die nach oben gerichtete, instabile Gleichgewichtslage sowie deren dortige, lokale Stabilisierung. Dabei kommen meist

energiebasierte Verfahren zum Einsatz, die jedoch einen minimalphasigen Systemausgang voraussetzen. Ein solcher minimalphasiger Systemausgang ist bei den genannten Systemen der Gelenkwinkel des *angetriebenen* Gelenks. Dies setzt jedoch voraus, daß man die vom nichtangetriebenen Gelenkwinkel verursachte interne Dynamik auch dann als stabil ansieht, wenn das nichtangetriebene Gelenk mit beschränkter Winkelgeschwindigkeit in eine Richtung weiterdreht und damit der nichtangetriebene Gelenkwinkel nur modulo 2π gezählt begrenzt ist.

In den meisten technischen Anwendungen ist jedoch der Systemausgang als Teil der Aufgabenstellung fest vorgegeben und kann daher nicht immer als minimalphasig vorausgesetzt werden. Daher geht es bei der hier betrachteten Regelung für R2D1 um die bezüglich Gesamtsystemstabilität anspruchsvollere Regelungsaufgabe, den nichtminimalphasigen Systemausgang in Form des nichtangetriebenen Gelenkwinkels lagezuregeln und dabei die vom ersten Gelenk erzeugte, größtenteils instabile interne Dynamik stabil zu halten. Dabei handelt es sich um ein Standardproblem der Regelung unteraktuierter Rang-2-Systeme, für das die Regelung von R2D1 repräsentativ durchgeführt wird. Technisch relevante Anwendungsbeispiele sind z. B. Senkrechtstarter, Gasturbinen, Laufkatzen, Transport von Flüssigkeiten und Bahnregelungen nicht-holonomer Roboter.

4.1 Modellierung

Das dynamische Modell von R2D1 ist durch

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{r}(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1)$$

gegeben, mit den Gelenkwinkeln $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$, den Antriebsmomenten $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$, Kreiselmomenten $\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = [n_1 \ n_2]^T$, Gravitationsmomenten¹ $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\theta}) = [g_1^* \ g_2^*]^T$, Reibungsmomenten² $\mathbf{r}^*(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = [r_1^* \ r_2^*]^T$ und der Massenmatrix $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = [m_{ij}] > 0$. Da das zweite Gelenk nicht angetrieben ist, gilt $\tau_2(t) \equiv 0$. Für R2D1 ergeben sich die dynamischen Parameter in (4.1) mit g_0 als Betrag der Erdbeschleunigung sowie den zusammengefaßten Systemparametern

$$\begin{aligned} A &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + I_1 + I_2 & B &= m_2 l_1 l_{c2} \\ C &= g_0 (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) & D &= g_0 m_2 l_{c2} \end{aligned}$$

¹Der hochgestellte Stern * dient zur Unterscheidung des Gravitationsmoments vom Einkoppelvektorfeld der Normalenform.

²Der hochgestellte Stern * dient zur Unterscheidung der Reibmomente vom Fehlervektor.

zu

$$\begin{aligned}
m_{11} &= A + 2B \cos \theta_2 & n_1 &= -B (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 & g_2^* &= -D \sin \alpha \sin (\theta_1 + \theta_2) \\
m_{12} &= m_{21} = m_{22} + B \cos \theta_2 & n_2 &= B \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 & g_1^* &= g_2^* - C \sin \alpha \sin \theta_1 \\
m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 .
\end{aligned}$$

Die geschätzten physikalischen Parameter sowie die zusammengefaßten Systemparameter sind in Tabelle 4.1 und 4.2 in normierten Einheiten angegeben. Dabei sind die Inertia I_1, I_2 der beiden Roboterglieder bezüglich der Schwerpunkte l_{c1}, l_{c2} der jeweiligen Glieder angegeben, siehe Abb. 4.1. l_1 bezeichnet die Länge des ersten Glieds, m_1 und m_2 die jeweiligen Massen.

Tabelle 4.1: Geschätzte physikalische Parameter von R2D1 in normierten Einheiten.

l_1	l_{c1}	l_{c2}	I_1	I_2	m_1	m_2
0.3	0.1541	0.0845	0.1309	0.1083	7.315	6.185

Tabelle 4.2: Geschätzte, zusammengefaßte Systemparameter in normierten Einheiten.

A	B	C	D	m_{22}
1.01378	0.15680	29.2621	5.12742	0.15244

Ein aus Experimenten geschätztes, viskoses und statisches Reibungsmodell für die Gelenke von R2D1 wurde für das erste Gelenk in der Form

$$r_1^* = b_1 \dot{\theta}_1 + \text{sign}[\dot{\theta}_1] \left(c_1 + (a_1 - c_1) e^{-d_1 |\dot{\theta}_1|} \right) \quad (4.2)$$

und für das zweite Gelenk in der Form $r_2^* = a_2 \text{sign}[\dot{\theta}_2] + b_2 \dot{\theta}_2$ angenommen. Dabei sind die viskosen Reibungsparameter zu $b_1 = 0.1606$, $b_2 = 0.0046$, die Gleitreibungsparameter zu $c_1 = 2.25$, $a_2 = 0.0860$, sowie die Haftreibungsparameter des ersten Gelenks zu $a_1 = 2.500$ mit $d_1 = 0.1$ geschätzt. Die Vorzeichenfunktion erfüllt dabei die Bedingung $\text{sign}[0] = 0$. In den damit durchgeführten Experimenten zeigte sich, daß aufgrund schwankender Luftfeuchte und Temperatur trotz des erweiterten Reibungsmodells (4.2) die Haftreibungseffekte tagesabhängig sind und nur mit einem großen Fehler kompensiert werden können.

4.2 Regelziele und Normalenform

Abhängig von Systemkonfiguration und Regelziel ergeben sich bei R2D1 unterschiedliche Stabilitätseigenschaften. Mit Brocketts notwendigen Stabilisierungskriterien [78] kann gezeigt werden, daß R2D1 im horizontal ausgerichteten Fall ($\alpha = 0^\circ$) nicht durch stetig differenzierbare Regelgesetze auf einzelne Gleichgewichtspunkte stabilisiert werden kann [4, 5, 51, 116]. In Abb. 4.2 sind Phasenporträts der Nulldynamik für einen Sollwinkel $\theta_2^s = 45^\circ$ und Neigungswinkel von (a): $\alpha = -30^\circ$ und (b): $\alpha = 0^\circ$ skizziert. Man

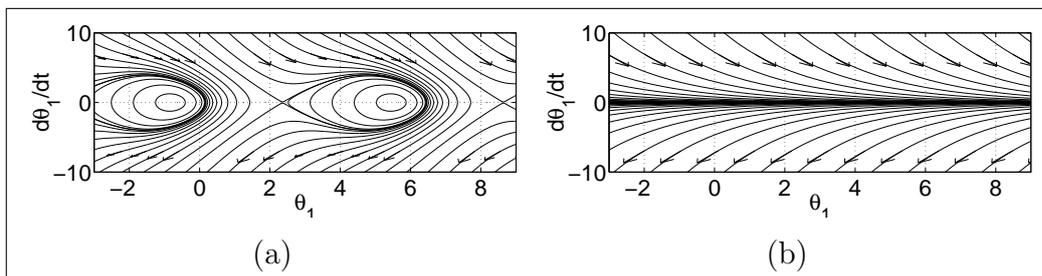


Abbildung 4.2: Nulldynamik von R2D1 für $\theta_2^s = 45^\circ$ und zwei Neigungswinkel: (a) $\alpha = -30^\circ$, (b) $\alpha = 0^\circ$.

erkennt daraus, daß im Fall $\alpha = 0^\circ$ die Nulldynamik für die Lageregelung des zweiten Gelenks keine endlich ausgedehnten stabilen Bereiche besitzt. Systemannahme 2 ist also nicht erfüllt, so daß keine fluchtpunktfreien Invarianzgebiete existieren. Daher ist dieser Betriebsfall für die hier behandelte Invarianzregelung nicht geeignet und es wird im Folgenden nur der mit $\alpha = -30^\circ$ geneigte Fall betrachtet, bei dem Systemannahme 2 aufgrund der gegebenen Stabilisierbarkeit erfüllt ist. Das hier betrachtete Regelungsproblem verfolgt die beiden Ziele:

- Positionsregelung des zweiten Gelenkwinkels θ_2 auf einen konstanten Sollwinkel θ_2^s , d. h. mit einer Ausgangsfunktion $\bar{y} = \theta_2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = \theta_2^s$$

- Begrenztheit der Dynamik des unregulierten ersten Gelenks.

Dazu werden zunächst die Systemzustände gemäß $\boldsymbol{\xi} = (\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$ umbenannt, so daß System (4.1) in die Form (2.9) eines Zustands-Dgl.-Systems *erster* Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{\xi}) \tau \quad (4.3)$$

mit dem Drift- und Einkoppelvektorfeld

$$\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{M}|^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 |\mathbf{M}| \\ -m_{22}(n_1 + g_1 + r_1) + m_{12}(n_2 + g_2 + r_2) \\ \xi_4 |\mathbf{M}| \\ -m_{11}(n_2 + g_2 + r_2) + m_{12}(n_1 + g_1 + r_1) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{M}|^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ m_{22} \\ 0 \\ -m_{12} \end{bmatrix}$$

sowie der Determinanten der Massenmatrix $|\mathbf{M}| = m_{22}A - m_{22}^2 - B^2(\cos \xi_3)^2$ überführt wird. Für den Systemausgang gilt $\bar{y} = \xi_3 = h(\boldsymbol{\xi})$ mit einem Sollwert $\xi_3^s = \theta_2^s$. Um eine eingangsnormalisierte Normalenform für diese Ausgangsfunktion zu erhalten, wird eine Koordinatentransformation gemäß (2.12) und (2.13) mit

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_2 - \xi_4 \bar{g}_2 / \bar{g}_4(\xi_3) \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 + x_2 \bar{g}_2 / \bar{g}_4(x_1) \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

angewendet. Die zur eingangsnormalisierten Normalenform notwendige Rückführlinearisierung (2.15) folgt mit $a(\boldsymbol{\xi}) = L_{\bar{\mathbf{g}}} L_{\bar{\mathbf{f}}} h(\boldsymbol{\xi})$ und $b(\boldsymbol{\xi}) = L_{\bar{\mathbf{f}}}^2 h(\boldsymbol{\xi})$ gemäß (2.14). Auf das System (4.3) angewendet, ergibt sich die eingangsnormalisierte Normalenform

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (4.6)$$

$$\dot{z}_1 = q_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (4.7)$$

$$\dot{z}_2 = q_4(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (4.8)$$

mit $q_i = L_{\bar{\mathbf{f}}} \Psi_i$, $i \in \{3, 4\}$.

Die Rückführlinearisierung (2.15) ist nur für $a(\boldsymbol{\xi}) = -m_{12}(\xi_3)/|\mathbf{M}(\xi_3)| \neq 0$ definiert, woraus sich mit den dynamischen Parametern aus Tabelle 4.2 ein Gültigkeitsbereich für $\xi_3 = \theta_2$ von $|\theta_2| < 166^\circ$ ergibt. Physikalisch interpretiert bedeutet dies, daß bei $\theta_2 = 166^\circ$ das verkoppelnde, nicht-Diagonalelement $m_{12}(\theta_2)$ der Massenmatrix zu null wird und damit keine *starke inertiale Verkopplung* mehr vorliegt [62, 21].

Anmerkung 4.1 Für die Koordinatentransformation (4.4) wurde das System der beiden partiellen Differentialgleichungen $L_{\bar{\mathbf{g}}} \Psi_i = 0$, $i \in \{3, 4\}$ gelöst, das sich für R2D1 in der einfachen Form

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_4} \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \xi_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{22} \\ m_{12}(\xi_2) \end{bmatrix} = 0$$

darstellt. Die sich aus der Lösung ergebenden neuen Koordinaten z_1 und z_2 können wie folgt physikalisch interpretiert werden: Die Koordinate $z_2 = \xi_1 = \theta_1$ bezeichnet den Winkel des ersten Gelenks; die Koordinate $z_1 = \xi_2 - \xi_4 \bar{g}_2 / \bar{g}_4$ bezeichnet den durch $-\bar{g}_4 = -m_{12}$ geteilten, verallgemeinerten Impuls p_2 , der sich beim Hamilton-Ansatz³ gemäß

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \xi_1 - \bar{g}_4 \xi_4 \\ -\bar{g}_4 \xi_2 + \bar{g}_2 \xi_4 \end{bmatrix}$$

berechnet.

Der Vorteil der eingangsnormalisierten Normalenform ist, daß die virtuelle Steuergröße u die interne Dynamik (4.7)-(4.8) nicht beeinflusst, womit sich die in Abschnitt 3.2.4 bereits erwähnte Vereinfachung im Reglerentwurf ergibt (siehe auch Anmerkung 3.3). Eine methodische Erweiterung des hier verwendeten speziellen Ansatzes zur Berechnung eingangsnormalisierter Normalenformen für eine Klasse unteraktuierter mechanischer Systeme ist in [50] ausgearbeitet.

4.3 Invarianzregelung im Nominalfall

Im Folgenden wird für R2D1 das in Abschnitt 3.2 vorgestellte Entwurfsverfahren für Invarianzregler angewendet und experimentell erprobt. Um die prinzipielle Wirkungsweise des Invarianzreglers zu erklären, werden die vorhandenen, geringen Parameterschätzfehler zunächst nur mittels einer konservativen Abschätzung berücksichtigt.

4.3.1 Entwurf eines Invarianzreglers

Dem Synthesalgorithmus aus Tabelle 3.3 folgend, wird in diesem Abschnitt schrittweise ein Invarianzregler für R2D1 entworfen:

Schritt 1:

Eine Invarianzfunktion ist nach (3.51) mit

$$\Phi = \Phi_0(x_1, z_1, z_2) + \gamma x_2 \quad (4.9)$$

gegeben. Dabei kann eine Funktion Φ_0 , die die Nichtanstiegsbedingung (3.52) erfüllt, gemäß Punkt A. von Schritt 1 durch Lösen der Phasenbahn-Dgl. der Nulldynamik von

³Siehe [86] S. 352, Gl. (12.15).

(4.5)-(4.8) ermittelt werden. Wie in [116] gezeigt, ergibt sich die Nulldynamik nach einigen elementaren Rechenschritten mit $x_1 = x_1^* = \text{const}$, $x_2 = 0$ und $u = 0$ zu

$$\ddot{z}_2 = -\frac{n_2(\dot{z}_2, x_1^*) + g_2^*(z_2, x_1^*)}{m_{12}(x_1^*)}. \quad (4.10)$$

Dabei ist zu beachten, daß wegen $x_2 = 0$ für die Zustandsvariablen der internen Dynamik nach (4.4) die Bedingungen $z_1 = \dot{\theta}_1$, $z_2 = \theta_1$ gelten. In Anhang D wird eine implizite Lösung der Phasenbahnen (z_1, z_2) der Nulldynamik (4.10) für ein konstantes $x_1 = x_1^*$ mit

$$\Gamma = z_1^2 - c_1(x_1^*, \mu) e^{-c_3(x_1^*)} (z_2 + x_1^*) - c_2(x_1^*) c_4(x_1^*) \sin(x_1^* + z_2 + \varphi(x_1^*)) = 0 \quad (4.11)$$

berechnet, wobei die Hilfsfunktionen $c_i(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ und der konstante Gebietsparameter $\mu \in (0; \pi)$ in Anhang D beschrieben sind. Bedingung (3.52) ist daher mit der Wahl $\Phi_0 = \Gamma$ wegen

$$\frac{\partial \Phi_0(x_1^*, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \begin{bmatrix} q_3((x_1^*, 0), \mathbf{z}) \\ q_4((x_1^*, 0), \mathbf{z}) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{für } \Phi_0(x_1^*, \mathbf{z}) = 0 \wedge x_2 = 0 \quad (4.12)$$

erfüllt. Dabei stellt μ ein Maß für den Abstand des Gebietsrands $\{\Phi_0 = 0\}$ von der Separatrix der Nulldynamik dar. So stimmt der Gebietsrand $\partial \mathcal{G}$ für $\mu = 0$ auf der Fläche der Nulldynamik mit der Separatrix überein. Für $\mu \rightarrow \pi$ nähert sich der Gebietsrand gegen den stabilen Gleichgewichtspunkt an, d. h. das Gebiet verjüngt sich zu einer Gleichgewichtspunktgeraden. In Abb. 4.3 ist der durch $\{\Phi_0 = 0\}$ definierte Gebietsrand für $\mu = 0.5$ gezeigt. Wie man an dem zusätzlich eingezeichneten Phasenporträt der Nulldynamik für $x_1 = \pi/4$ erkennt, besteht $\{(x_1, \mathbf{z}) \mid \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = 0\}$ aus stabilen Trajektorien der Nulldynamik.

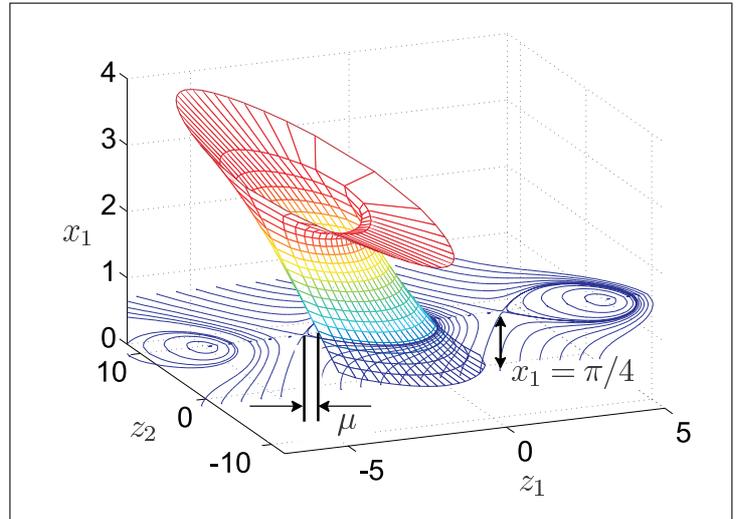


Abbildung 4.3: Darstellung von $\{(x_1, \mathbf{z}) \mid \Phi_0(x_1, \mathbf{z}) = 0\}$ mit $\mu = 0.5$. Zusätzlich ist das Phasenporträt der Nulldynamik aus Abb. 4.2 (a) für $x_1 = \pi/4$ eingezeichnet.

Da es sich bei System (4.5)-(4.8) um eine eingangsnormalisierte Normalenform handelt, kann $\gamma > 0$ frei gewählt werden. Wie bereits in Anmerkung 3.4 erwähnt, führt ein höherer Wert von γ tendenziell zu niedrigeren virtuellen, und damit auch tatsächlichen Stellgrößen. Ein erhöhter Wert von γ bewirkt jedoch auch, daß bei bereits niedrigen Werten der Zustandsvariablen $x_2 = \dot{\theta}_1$ die Invarianzfunktion Φ den Wert Null annimmt und daher nur geringe Einschwinggeschwindigkeiten erreicht werden. In Experimenten hat sich die Wahl $\gamma = 0.5$ in diesem Sinne als ein guter Kompromiß zwischen den verfügbaren Stellamplituden und der erzielten Ausdehnung des Invarianzgebiets \mathcal{G} erwiesen.

Schritt 2:

Die Reglerparameter sind zu $k_p = 180$ und $k_{d,0} = 2\sqrt{180} + 1$ (das Addieren von 1 impliziert $\vartheta = 1.037 > 1$) gewählt, wodurch aperiodisches Einschwingen gewährleistet ist.

Schritt 3:

Das Rückschaltgebiet χ wurde in Experimenten zu einer Umgebung

$$\chi = \begin{cases} \{(z_1, z_2) \mid 0 \leq z_2 \leq \delta, \quad -\pi - x_1^* \leq z_1 \leq -x_1^*\} & \text{falls } x_1^* \geq 0 \\ \{(z_1, z_2) \mid 0 \geq z_2 \geq -\delta, \quad -x_1^* \leq z_1 \leq \pi - x_1^*\} & \text{falls } x_1^* < 0 \end{cases}$$

ermittelt, wobei δ eine beliebig kleine positive Konstante ist. Grundlage dieser Wahl von χ war die in Experimenten und Monte-Carlo-Simulationen durchgeführte Beobachtung, daß das asymptotische Einschwingen des zweiten Gelenkwinkels auf seinen Sollwert x_1^* im Zustandsraumbereich χ nicht zu einer instabilen internen Dynamik führte. D. h. innerhalb von χ stieß die Gesamtsystemtrajektorie trotz asymptotischer Konvergenz des zweiten Gelenkwinkels nie auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$.

Schritt 4:

Als Invarianzregler wird das geschaltete PD-Regelgesetz (3.50) verwendet, wobei sich die Schaltparameter $x_1^*(t)$ und $k_d(t)$ aus dem hybriden Reglerautomaten aus Abb. 3.8 zusammen mit Tabelle 3.2 und der Berechnungsvorschrift (3.61)-(3.62) ergeben.

Zur experimentellen Einsetzbarkeit waren die folgenden Modifikationen des nominalen Invarianzreglers notwendig:

- Die physikalischen Parameter von R2D1 wurden so identifiziert, daß sich ohne Haftreibungseffekte eine gute Übereinstimmung zwischen dem Trajektorienverlauf der Simulation und dem Experiment ergab, [115]. Aufgrund nur ungenau modellierbarer Haftreibungseffekte sowie einer mit Restfehlern behafteten Parameteridentifika-

tion besteht jedoch immer eine Grundunsicherheit in den angenommenen Systemparametern, weshalb zur experimentellen Validierung die Invarianzregelung Robustheitseigenschaften besitzen muß. Daher wurde für die Berechnungsvorschrift (3.61)-(3.62) der Schaltparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ der für Robustheit verantwortliche Parameter zu $\dot{\Phi}^{\max} = 20$ gewählt. Dabei wurde der Wert von $\dot{\Phi}^{\max}$ heuristisch so groß gewählt, daß die Invarianzbedingung in den damit durchgeführten Experimenten immer erfüllt war und dabei so klein gehalten, daß der Antriebsmotor des ersten Gelenks nicht in die Momentenbegrenzung lief. Ein *systematischer* robuster Invarianzregelungsentwurf erfolgt in Abschnitt 4.4, wo absichtlich eine Parameterperturbation in Form einer Zusatzmasse von 200 g am zweiten Glied eingebracht wird. Wie in Tabelle 4.4 gezeigt, führt dies zu Werten von $\dot{\Phi}^{\max}$ im Intervall [29; 44], woraus man Erkennen kann, daß der hier gewählte Wert von 20 im Rahmen kleiner Parameterschätzfehler liegt.

- Um die durch Parameterschätzfehler verursachten Restregelbewegungen des geregelten linearen Teilsystems zu reduzieren, wurde die proportionale Rückführverstärkung k_p bei jedem Umschalten von $k_d(t)$ neu berechnet, was faktisch zu einer Erhöhung von k_p führte. Aperiodisches Einschwingen wurde dabei gewährleistet, indem die Berechnungsvorschrift $k_p(t) = k_d^2(t)/(\vartheta 4)$ (mit einer Konstanten $\vartheta > 1$) verwendet wurde. Durch die damit erhöhten Rückführparameter ergab sich in den durchgeführten Experimenten eine größere Robustheit des geregelten linearen Teilsystems gegenüber den Parameterschätzfehlern, ohne dabei die Invarianzeigenschaften von \mathcal{G} zu beeinträchtigen.
- Um sicherzustellen, daß trotz der verwendeten *zeitdiskreten* Reglerrealisierung ein Gebietsrandtreffer des Systemzustands immer rechtzeitig detektiert wird, wurde anstatt bei $\Phi = 0$, bereits bei $\Phi = \Phi^{\max} = -0.1$ geschaltet. Der Wertebereich von Φ ist $[0; -15]$, wobei $\Phi = 0$ den Gebietsrand und $\Phi = -15$ den innersten Punkt von \mathcal{G} definiert. Daraus ist zu erkennen, daß mit der Wahl von -0.1 für Φ^{\max} das Invarianzgebiet nur unwesentlich eingeschränkt wird. In Kapitel 5 wird ein systematischer Weg zur Berechnung dieses Sicherheitsabstands hergeleitet. Damit kann die Invarianz von \mathcal{G} robust gemacht werden gegenüber einer zeitdiskreten Reglerrealisierung und eventuell vorhandenen Totzeiten im geschlossenen Regelkreis.

4.3.2 Experimentelle Ergebnisse

Für eine experimentelle Validierung wurde eine quasi-kontinuierliche Reglerimplementierung mit einer Abtastzeit von $\Delta t = 1$ ms durchgeführt. Die Gelenkwinkelpositionen wurden dafür aus inkrementalen Winkelgebern mit einer Auflösung von $\Delta\theta_1 = 0.0023^\circ$ (153600 Striche/Umdrehung) und $\Delta\theta_2 = 0.018^\circ$ (20000 Striche/Umdrehung) gemessen. Die Winkelgeschwindigkeiten wurden mit einem in Anhang D beschriebenen, erweiterten Luenberger-Beobachter geschätzt. Eine inverse Motorkennlinie für den verwendeten NSK-Motor lag aus [16] vor und ist in Anhang D tabellarisch angegeben.

Der Sollwertverlauf $\theta_2^s(t) = x_{1,0}^*(t)$ für θ_2 wurde als Rechteckfunktion gewählt, die zwischen den beiden Werten $+75^\circ$ und -75° schaltet. Die Umschaltung erfolgt dabei 5 Sekunden nach Erreichen der Sollwertumgebung $|\theta_2^s - \theta_2| < 0.3^\circ$. Der noch freie Gebietsparameter μ wurde zu $\mu = 0.5$ gewählt, um damit einen Sicherheitsabstand des Gebietsrands zum instabilen Bereich der Nulldynamik zu gewährleisten.

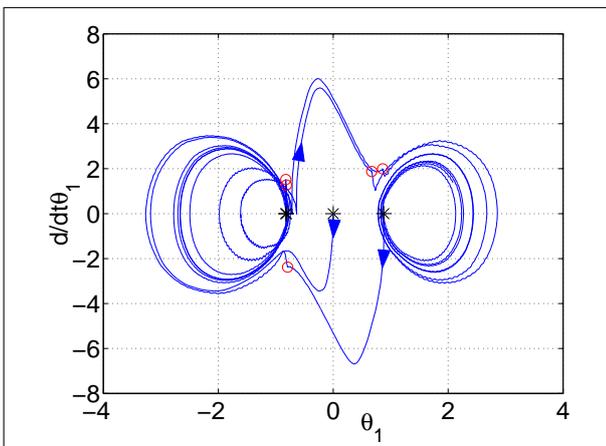


Abbildung 4.4: Phasenporträt der internen Dynamik. Kreise: Parameterumschaltungen, Sterne: Sollwertsprünge.

bzw. rechten Hälfte die Nulldynamiken für $\theta_2^s = 75^\circ$ / bzw. $\theta_2^s = -75^\circ$ dar. Die Kreise markieren Zustandspunkte, bei denen die Reglerparameter umgeschaltet wurden; mit Sternen werden die Zustandspunkte gekennzeichnet, bei denen ein Sollwertsprung stattfand. Man erkennt, daß trotz wechselnder Anfangswerte die interne Dynamik begrenzt bleibt.

Es wurde ein rechteckförmige Sollwertverlauf gewählt, damit ein Lageregelungsproblem mit *wechselnden* Anfangsbedingungen vorliegt. Da die Stabilität der internen Dynamik bei einer reinen PD-Regelung ohne Invarianzregelung mit unterlagerter Rückführlinearisierung u. a. von den Anfangsbedingungen abhängt, wird bei einer solchen herkömmlichen Regelung das Gesamtsystem instabil. Wie in Abb. 4.4 und Abb. 4.5 gezeigt wird, folgt hingegen der mit Invarianzregelung geregelte Systemausgang θ_2 dem Sollwert bei gleichzeitig begrenzter interner Dynamik.

In Abb. 4.4 stellen die kreisförmigen, oszillierenden Bewegungen in der linken/

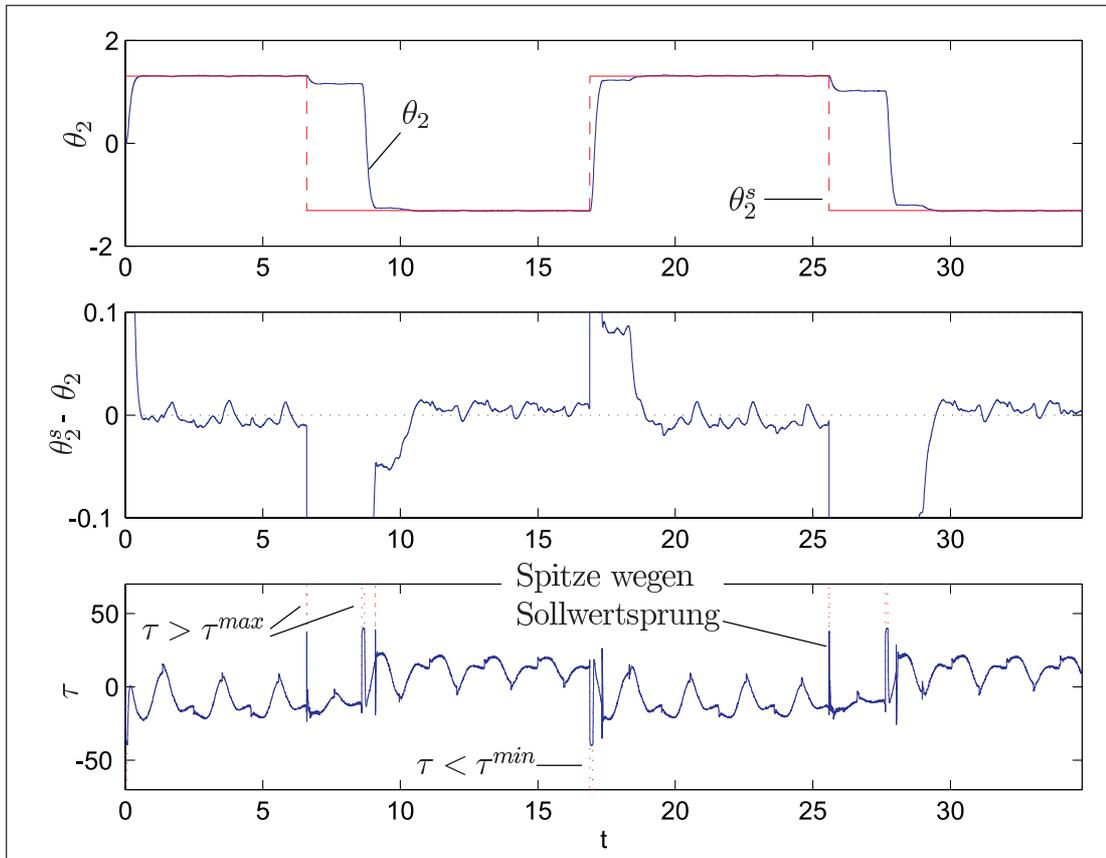


Abbildung 4.5: Folgeverhalten der Ausgangsgröße θ_2 gegenüber dem Sollwertverlauf θ_2^s sowie zugehöriger Momentenverlauf τ .

Das obere Teilbild aus Abb. 4.5 zeigt den Sollwertverlauf $\theta_2^s(t)$ (gestrichelt) sowie das Einschwingverhalten der Ausgangsgröße $\theta_2(t)$. Der entsprechende Regelfehler wird im mittleren Teilbild abgebildet. Aufgrund der bereits erwähnten Parameterschätzfehler entstehen die gezeigten Abweichungen der Regelgröße $\theta_2(t)$ vom Sollwert $\theta_2^s(t)$ in einem Bereich von $|\theta_2^s - \theta_2| \leq 1^\circ$.

Das untere Teilbild von Abb. 4.5 zeigt den Motormomentenverlauf $\tau(t)$ zusammen mit dem gestrichelt eingetragenen, vom Regler kommandierten Wert. Man erkennt, daß aufgrund der Sollwertsprünge und der damit verbundenen großen Regelfehler der Motor in die Momentenbegrenzung läuft. Das Gesamtsystem bleibt jedoch stabil, da der Invarianzregler sofort nach Auftreten einer Überschreitung der Momentenbegrenzung auf einen niedrigeren, übergangsweise gültigen Sollwert zurückschaltet, da die Systemtrajektorie an den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ stößt.

In Abb. 4.6 wird in einem zeitlichen Ausschnitt der Zusammenhang der wichtigen

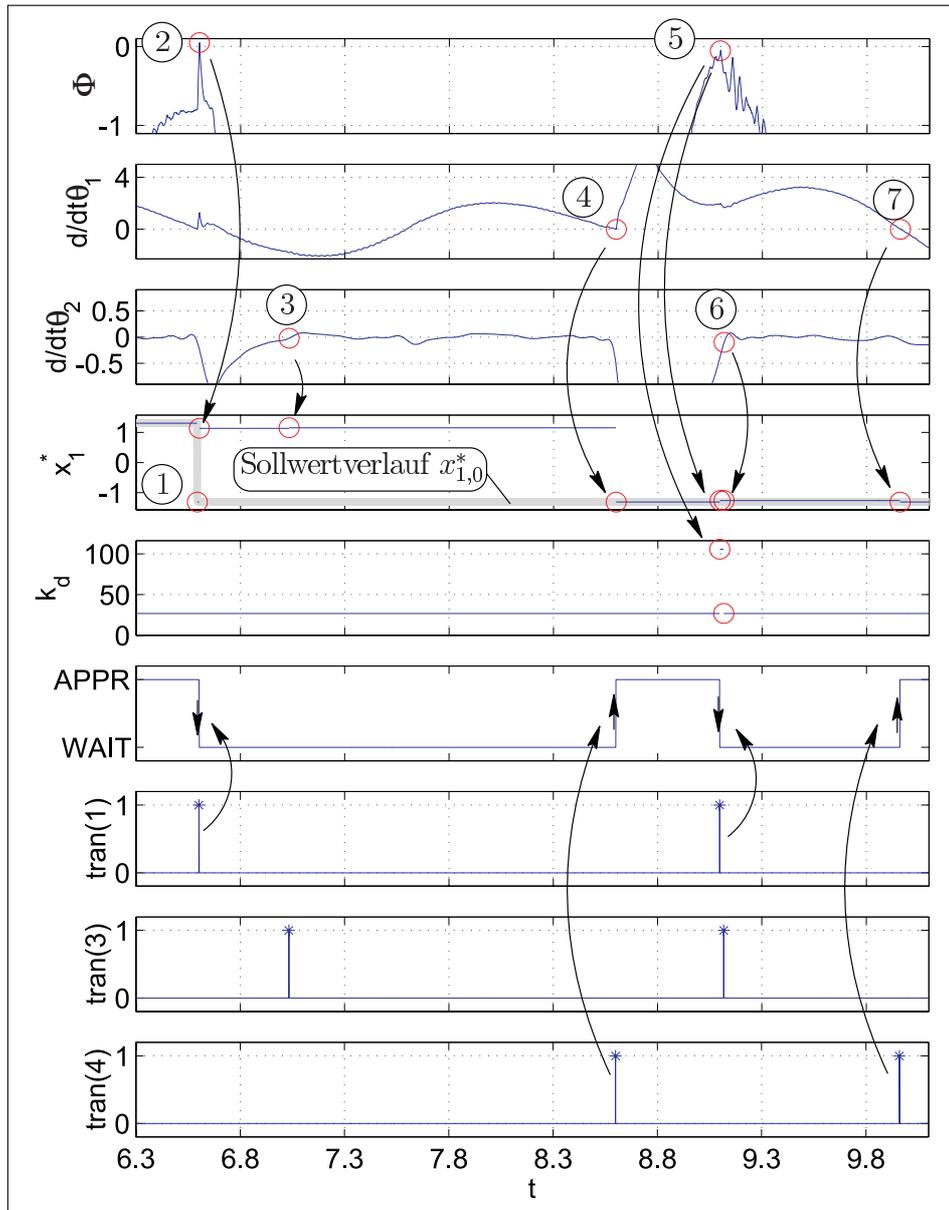


Abbildung 4.6: Zeitlicher Ausschnitt des Verlaufs der Schaltparameter. Die Kreise markieren Schaltzeitpunkte. Im vierten Teilbild ist der rechteckförmige Sollwertverlauf durch eine fett, hellgraue Linie gekennzeichnet.

Parameter des Invarianzreglers gezeigt. Bei ① wechselt der Sollwert von 75° auf -75° . Durch das resultierende transiente Verhalten stößt die Trajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ bei ② auf $\partial\mathcal{G}$, so daß der Regler vom Zustand **approach** in den Zustand **wait** übergeht. Dabei wird der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ auf den aktuellen Wert von $x_1(t)$ zurückgeschaltet ($act(1)$). Bei ③ wird $x_2(t)$ zu null. Um zu verhindern, daß x_2 das Vorzeichen wechselt, wird

nochmals der Sollwertparameter an den aktuellen Wert von $x_1(t)$ angepaßt ($act(3)$). Der Regler verweilt in diesem Wartezustand `wait`, bis bei ④ das Gebiet χ erreicht wird und der Regler in den Zustand `approach` zurück wechselt. Dabei wird auf den Sollwert -75° zurückgeschaltet ($act(4)$). Bei ⑤ trifft die Systemtrajektorie erneut auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ und der Reglerzustand `wait` wird wieder aktiv. Die Sollwertangleichung genügt in diesem Fall nicht, um $\dot{\Phi}$ negativ zu machen, und der Parameter k_d wird erhöht ($act(1)$). Durch die Detektion eines Nulldurchgangs von $x_2(t)$ bei ⑥ erfolgt kurze Zeit später eine erneute Angleichung des Sollwertparameters ($act(2)$) sowie das Zurückschalten des Reglerparameters $k_d(t)$ auf den initialen Wert $k_{d,0}$. Bei ⑦ wechselt der Regler in den Zustand `approach` zurück, da das Rückschaltgebiet χ erreicht wurde.

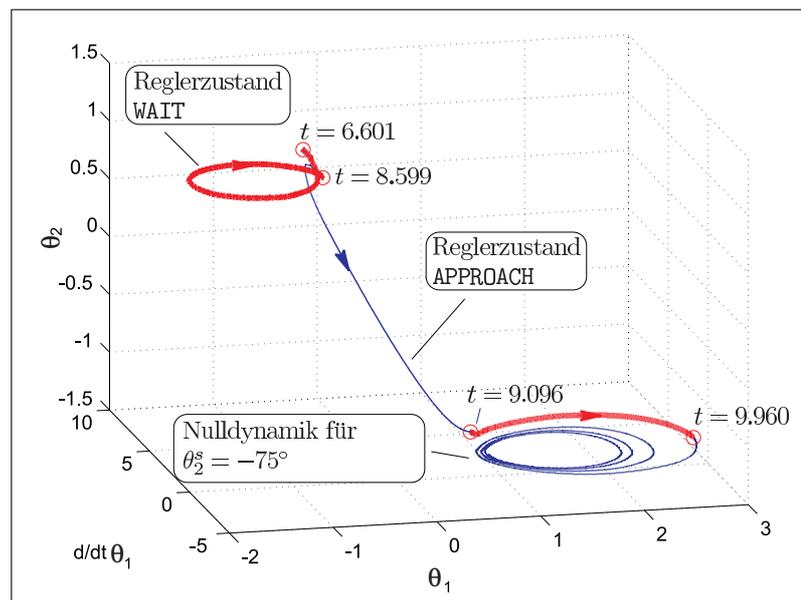


Abbildung 4.7: Phasenporträt der internen Dynamik über θ_2 .

Der sich in diesem Zeitintervall ergebende Verlauf der internen Dynamik $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t))$ in Abhängigkeit vom Systemausgang $\bar{y} = \theta_2$ wird in Abb. 4.7 gezeigt. Man erkennt, daß nach dem Umschalten des Sollwerts von 75° auf -75° der Regler schnell in den Zustand `wait` wechselt. Bis zum Erreichen des Rückschaltgebiets verläuft der interne Systemzustand auf einer stabilen Trajektorie (fett eingezeichnet). Ab dem Zeitpunkt $t = 8.599$ wechselt der Regler in den Zustand `approach` zurück und der Systemausgang konvergiert gegen den aktuellen Sollwert -75° . Bei $t = 9.096$ stößt die Systemtrajektorie erneut an den Gebietsrand, so daß das geregelte System bis $t = 9.960$ auf dem aktuellen

Wert des Systemausgangs wartet und dann nach Erreichen des Rückschaltgebiets χ ohne weitere Unterbrechung asymptotisch gegen den Sollwert konvergiert.

4.3.3 Videoaufnahme des Experiments

Das dynamische Verhalten, das R2D1 mit Invarianzregelung zeigt, wurde auf Video aufgenommen.



Darin wird zunächst der bereits auf $\theta_2 = 90^\circ$ eingeschwungene Systemzustand gezeigt. Die darauffolgende Sequenz zeigt das Einschwingen von $\theta_2(0) = 0^\circ$ auf $\theta_2^s = 125^\circ$. Man kann deutlich erkennen, wie der Einschwingvorgang bei ca. $\theta_2 = 45^\circ$ vorübergehend angehalten wird. Nachdem das System eine hinsichtlich Stabilität günstige Position eingenommen hat, wird die Konvergenz ohne weitere Unterbrechung zum Sollwert $\theta_2^s = 125^\circ$ fortgesetzt. Im folgenden wird der Einschwingvorgang von $\theta_2(0) = 0^\circ$ auf $\theta_2^s = +90^\circ$ gezeigt, sowie zwei weitere Umschaltvorgänge auf $\theta_2^s = -90^\circ$ und wieder zurück auf $\theta_2^s = +90^\circ$.

4.4 Robuste Invarianzregelung

Im vorangegangenen Abschnitt stand die prinzipielle Wirkungsweise der Invarianzregelung im Vordergrund, so daß die für Experimente notwendige Robustheit gegenüber kleinen Parameterschätzfehlern nur durch eine heuristische und stark konservative Abschätzung mittels des Parameters $\dot{\Phi}^{\max} = 20$ erzielt wurde. Demgegenüber steht in

diesem Abschnitt die Robustheitsfrage im Mittelpunkt der Betrachtung. So wird nun auf systematischem Weg beweisbare Robustheit gegenüber gewichtigeren Parameterperturbationen erzielt. Dabei ist das Hauptaugenmerk darauf gelegt, das Regelziel der asymptotischen E-/A-Stabilität durch die benötigte robuste Invarianz nur wenig einzuschränken, d. h. die Robustheit *wenig konservativ* auszulegen. Dafür wird für eine gezielt in das System eingebrachte Parameterperturbation die in den Abschnitten 2.3.2 und 2.4.2 hergeleitete, robuste Invarianzregelungstheorie angewendet.

4.4.1 Gezielte Perturbation durch eine Zusatzmasse

Für Robustheitsuntersuchungen wird eine gezielte Perturbation in das System eingebracht. Dazu kann eine Zusatzmasse $m_z = 0.2$, die am Ende des zweiten Gelenks im Abstand $l_z = 0.3$ von der zweiten Gelenkachse befestigt ist, abmontiert werden. Dieses Vorgehen bietet die folgenden Vorteile:

- Es wird nur die Masse, das Trägheitsmoment sowie der Schwerpunkt des zweiten Glieds verändert. Durch diese geringe Zahl an perturbierten Systemparametern reduziert sich der Berechnungsaufwand des hinsichtlich Stabilität ungünstigsten Fehlervektors aus (2.31).
- Alle wesentlichen Effekte (letztendliche Begrenztheit des geregelten linearen Teilsystems, Abweichungen der Nulldynamik, verbleibende, schwache Verkopplung der Teilsysteme der Normalenform) die durch Perturbation auftreten können werden abgedeckt.

Der nur schwer modellierbare Haftreibungseffekt ist bei Robotersystemen aufgrund der dadurch verursachten Restregelbewegungen ein wichtiger Störeinfluß, der i. allg. adaptive und robuste Regelungsstrategien erfordert. Bei der hier betrachteten Methode der Invarianzregelung ist jedoch die Haftreibung von geringerer Bedeutung, da sie sich erst bei verschwindenden Geschwindigkeiten der Gelenkwinkel und damit im eingeschwungenen Zustand störend auswirkt. Wie weiter unten genauer erläutert, wird die Invarianzregelung in einer nahen Umgebung des Regelziels auf eine rein asymptotisch stabilisierende Regelung umgeschaltet, ohne Invarianz des betrachteten Gebiets weiter zu gewährleisten. Aus diesem Grund stellen durch Haftreibung verursachte Perturbationen für das hier betrachtete *Invarianzregelungskonzept* keine wesentlichen Einschränkungen dar.

Bezeichnet man den relativen Schätzfehler der Masse m_2 mit r_1 , des Trägheitsmoments I_2 mit r_2 sowie des Schwerpunkts l_{c2} mit r_3 , so ergibt sich unter Berücksichtigung der in

Abschnitt 4.3.2 bereits erwähnten Schätzfehler der Nominal-Systemparameter ein Fehleraum $\mathcal{R} = \{\mathbf{r} \mid |r_1| = 17.0\%, |r_2| = 22.0\%, |r_3| = 13.0\%\}$ der relativen Schätzfehler. Wie in [117, 118] gezeigt wurde, reicht es für Robustheitsuntersuchungen bei der *vorliegenden speziellen* Perturbation aus, die acht Eckpunkte des Fehleraums zu betrachten. Der Einfluß, den die fehlende Masse am zweiten Gelenk auf die zusammengefaßten Systemparameter ausübt, wird in Tabelle 4.3 dargestellt. Im perturbierter Fall schränkt sich der zulässige Bereich für θ_2 auf $|\theta_2| \leq 165^\circ$ gegenüber dem Nominalfall ein, um $a(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}) \neq 0$ zu garantieren.

Tabelle 4.3: Systemparameter mit und ohne Zusatzmasse (perturbierter Fall).

	A	B	C	D	m_{22}
Nominalfall (mit Zusatzmasse)	1.01378	0.15680	29.2621	5.12742	0.15244
Perturbierter Fall (ohne Zusatzmasse)	0.97722	0.13853	28.6647	4.52999	0.13415
Relative Abweichung	-3.606%	-11.652%	-2.042%	-11.652%	-11.997%

4.4.2 Robustes Invarianzregelgesetz

Aufgrund dieser Perturbationen erzielt die Rückführlinearisierung (2.15) anders als beim vorangegangenen Nominalfall kein vollständig entkoppeltes, lineares Doppelintegratorsystem. Vielmehr ergibt sich ein schwach verkoppeltes, nichtlineares System der Form (2.28)-(2.29).

Regelziel: Letztendliche Begrenztheit

Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 erläutert wurde, kann aufgrund der Perturbationen das verwendete lineare PD-Regelgesetz den Regelfehler nur in einen, i. allg. kleinen, Bereich (ϵ -Umgebung) um den Ursprung überführen, so daß sich anstatt exponentieller Stabilität nunmehr *letztendliche Begrenztheit* (Definition 2.6) einstellt.

Zur Berechnung einer ϵ -Umgebung wird für das ideale Doppelintegratorsystem (4.5)-(4.6) des Nominalfalls eine Ljapunov-Funktion der quadratischen Form $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ berechnet. Dazu wird die symmetrische, positiv definite Matrix \mathbf{P} durch Lösen der Ljapunov-Gleichung

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{I}$$

mit einer zusammengefaßten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{b}[k_p \ k_{d,0}]$ des geregelten Doppelintegratorsystems ermittelt. Mit der zeitlichen Ableitung von V entlang der Trajektorie des perturbierten, linearen Teilsystems folgt die gesuchte ϵ -Umgebung zu

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} \mid \dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, x_1^*, k_{d,0}) \geq 0 \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{G} \wedge \mathbf{r} \in \mathcal{R} \wedge x_1^s \in [0; 75^\circ/180^\circ\pi] \right\} .$$

Mit den gegebenen Perturbationen folgt mittels eines Optimierungsalgorithmus der in Abb. 4.8 gezeigte Zustandsraumbereich, der durch eine Hüllellipse H abgeschätzt wird. Damit konvergiert die Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ des perturbierten linearen Teilsystems solange exponentiell stabil gegen den Ursprung, bis sie in den Hüllellipsoiden H aus Abb. 4.8 eintritt. Ab diesem Zeitpunkt kann eine weitere Konvergenz von $\mathbf{x}(t)$ gegen den Ursprung nicht mehr gesichert werden; es folgt nur noch Invarianz des Hüllellipsoiden.

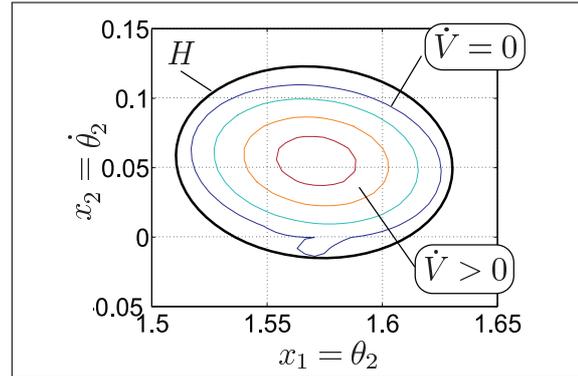


Abbildung 4.8: Bereich $\mathcal{B} = \{\dot{V}(\mathbf{x}) \geq 0\}$ sowie einhüllende Ellipse H im Zustandsraum des perturbierten linearen Teilsystems, in dem keine exponentielle Stabilität mehr erzielbar ist.

Robuste Schaltstrategie

Aufgrund der vorliegenden letztendlichen Begrenztheit besteht das neue Regelziel darin, das Gebiet \mathcal{G} solange invariant zu halten, bis der Regelfehler die ϵ -Umgebung erreicht hat. Da innerhalb der ϵ -Umgebung keine Aussage mehr über das Vorzeichen von x_2 und den Regelfehler $x_1^* - x_1$ getroffen werden kann, kann \mathcal{G} in diesem Bereich nicht mehr mit Schalten der PD-Reglerparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ invariant gehalten werden. Aus diesem Grund wird bei dem hier verwendeten robusten Invarianzregler das Regelziel der Invarianz von \mathcal{G} innerhalb der ϵ -Umgebung aufgegeben. Um dennoch Gesamtsystemstabilität zu garantieren, wird das Gebiet \mathcal{G} so gewählt, daß $\partial\mathcal{G}$ die Nulldynamikebene genügend weit im Inneren des stabilen Bereichs schneidet. Dies kann durch die Erhöhung des Werts für den Gebietsparameter μ erreicht werden. Damit kann sichergestellt werden, daß die Systemtrajektorie bei Verlassen von \mathcal{G} , wegen dem nur geringen Abstand zur Nulldynamikebene im Einzugsbereich stabiler Phasenbahnen der Nulldynamik liegt und damit stabil verläuft.

Die Berechnungsvorschriften (3.61)-(3.62) für die Schaltparameter $k_d(t)$ und $x_1^*(t)$ im

gezeigte instabile Verlauf des Systemzustands. Im ersten Teilbild von Abb. 4.9 erkennt man, daß der Systemausgang dem Sollwertverlauf bis $t = 17.5$ Sekunden folgt.

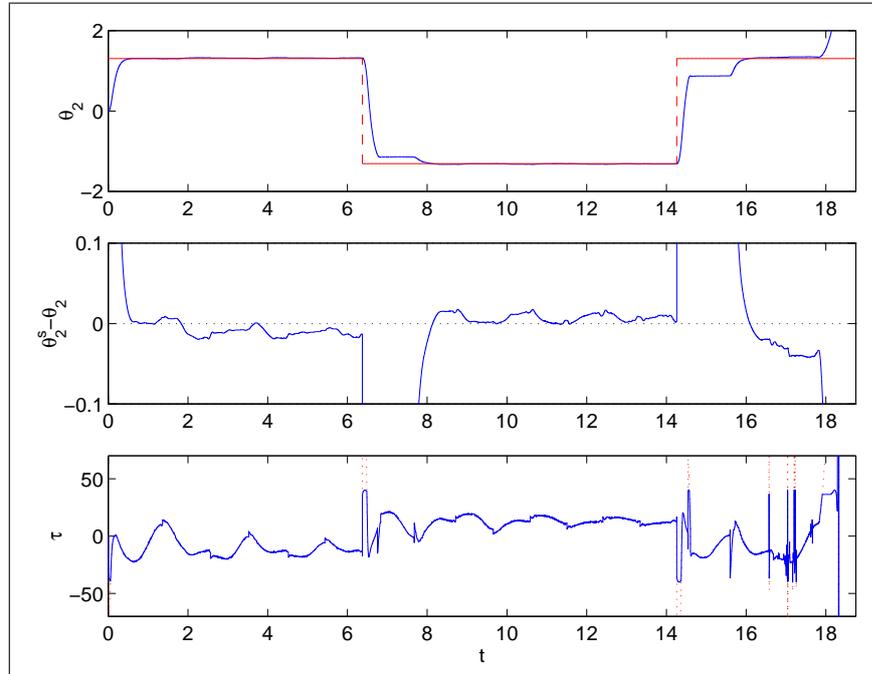


Abbildung 4.9: Experimentalergebnisse des nominal geregelten, perturbierten Systems.

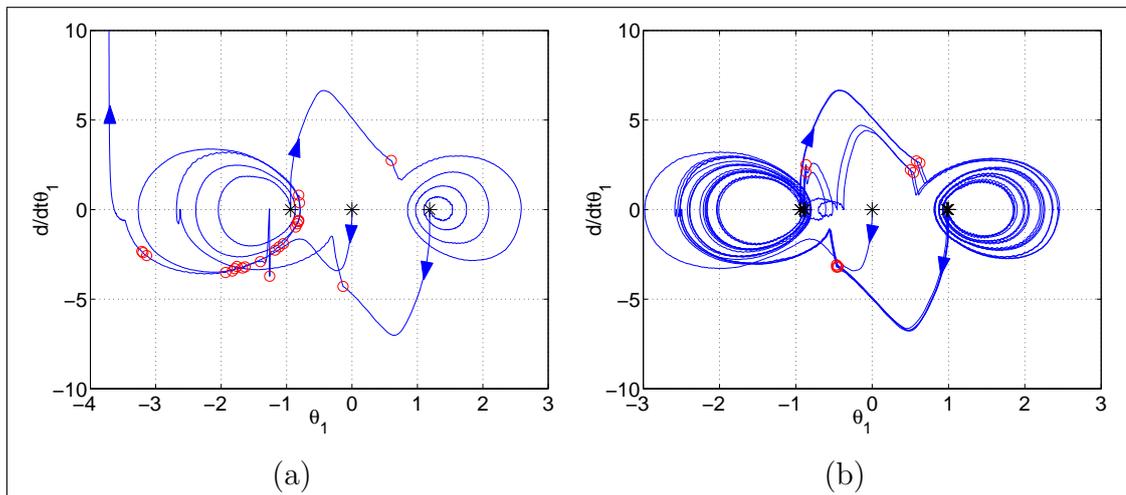


Abbildung 4.10: Interne Dynamik des perturbierten Systems: (a) Instabil mit Nominalregler, (b) stabil mit robustem Regler. Kreise: Parameterumschaltungen, Sterne: Sollwertsprünge

Wie aus Abb. 4.11 ersichtlich ist, stößt der Systemzustand $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ gegen Ende des Verlaufs immer häufiger gegen den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$. Dies liegt daran, daß die für den Gebietsentwurf angenommene Nulldynamik nicht mehr mit der Nulldynamik des perturbierten Systems übereinstimmt. Daher können bei einem geringen Abstand zur

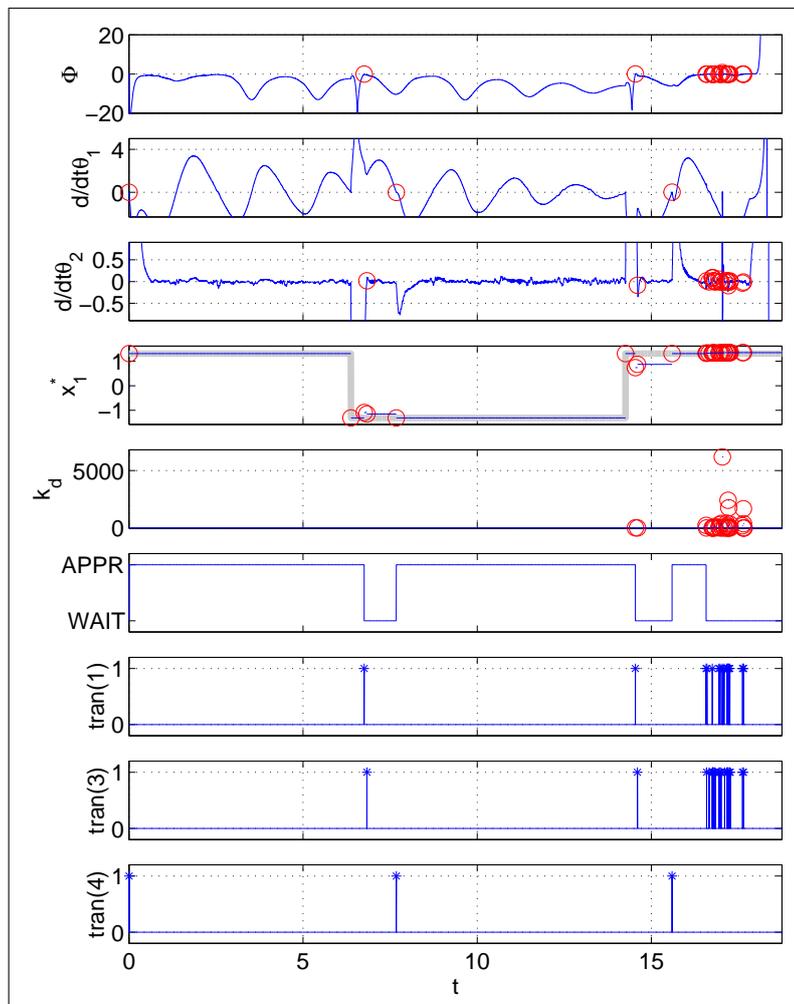


Abbildung 4.11: Schaltparameter des nominal geregelten, perturbierten Systems. Die Kreise markieren Schaltzeitpunkte. Im vierten Teilbild ist der rechteckförmige Sollwertverlauf durch eine fette, hellgraue Linie gekennzeichnet.

Ebene der Nulldynamik, d. h. bei weit abgeklungenem Regelfehler, Fluchtpunkte auftreten. Dies zeigt sich zum einen in der gehäuften Zahl an Umschaltungen, zum andern an dem sehr hohen Rückführparameter $k_d(t)$. Die Systemtrajektorie verläßt das Invarianzgebiet \mathcal{G} aufgrund zweier unterschiedlicher Effekte: Zum einen wird wegen der hohen

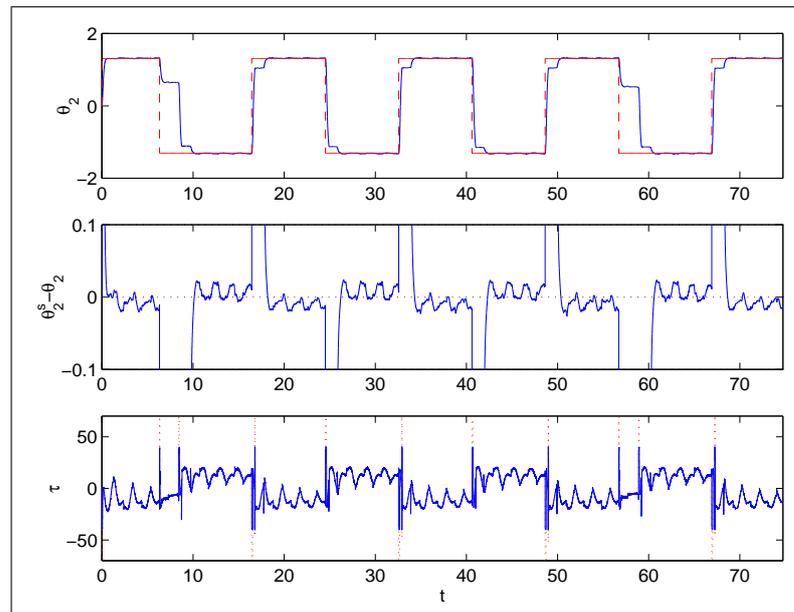


Abbildung 4.12: Unabhängigkeit der Stabilität von Anfangswerten: Stabiler Verlauf über mehr als vier Perioden des rechteckförmigen Sollwertverlaufs.

Rückführparameter die Stellgrößenbeschränkung wirksam; zum andern werden die Rückführparameter nicht groß genug berechnet, da die nominelle Invarianzbedingung im hier vorliegenden, perturbierten Fall nicht Invarianz von \mathcal{G} sichert.

Verwendet man hingegen den robusten Invarianzregler, so ergibt sich der stabile Verlauf der Phasenbahn der internen Dynamik aus Abb. 4.10 (b), sowie der Verlauf der Ausgangsgröße $\theta_2(t)$ aus Abb. 4.12. Dabei wurde das Experiment über die längere Zeitdauer von $t = 60$ Sekunden durchgeführt, um zu demonstrieren, daß Stabilität auch bei *verschiedenen*, vorab unbekanntenen Anfangswerten gewährleistet ist.

Die Auswirkung der Berücksichtigung der Perturbationen zur Einhaltung der robusten Invarianzbedingung wird mittels Tabelle 4.4 verdeutlicht. Zu jedem Auftreffzeitpunkt auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ wurde die im Experiment hinsichtlich Stabilität ungünstigste Konstellation der Schätzfehler protokolliert und damit der für robuste Invarianz notwendige Wert von $\dot{\Phi}^{\max}$ berechnet. Während ohne Zusatzmasse $\dot{\Phi} \leq \dot{\Phi}^{\max} = 20$ für Invarianz ausreichend war, muß so beispielsweise zum Zeitpunkt $t = 48.972$ die restriktivere Bedingung $\dot{\Phi} \leq -46.553$ eingehalten werden. Des Weiteren erkennt man aus Tabelle 4.4, daß der in diesem Abschnitt verwendete robuste Invarianzregler durch die getrennte Auswertung der Invarianzbedingung bei jedem Auftreffpunkt auf den Gebietsrand zu einer *wenig konservativen* Robustheit führt. Im Vergleich dazu, basiert der im vorangegangenen Ab-

schnitt 4.3.2 verwendete robuste Invarianzregler darauf, daß die Invarianzbedingung für *alle* Punkte des Gebietsrands $\partial\mathcal{G}$ mit nur *einem* (pauschalen) Wert $\dot{\Phi}^{\max} = 20$ erfüllt ist.

Tabelle 4.4: Für die Invarianzbedingung ungünstigste Schätzfehler-Konstellationen.

Gebietsrandtreffer-Zeitpunkte t_i	$\dot{\Phi}^{\max}$	$r_1(t_i)$	$r_2(t_i)$	$r_3(t_i)$
6.350	29.365	-0.17	0.22	-0.13
8.731	28.998	-0.17	0.22	0.13
16.776	43.970	0.17	-0.22	0.13
24.895	33.079	-0.17	0.22	0.13
32.918	43.204	0.17	-0.22	0.13
41.007	32.195	-0.17	0.22	0.13
48.972	46.553	0.17	-0.22	0.13
56.760	30.742	-0.17	0.22	-0.13
59.200	28.230	-0.17	0.22	0.13
67.253	44.655	0.17	-0.22	0.13

4.5 Vergleich mit anderen Regelungsverfahren

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, existieren nur wenige Regelungsverfahren, die sich für die Regelung nichtlinearer, unteraktuierter Systeme eignen. Im Folgenden wird die Anwendbarkeit dieser bekannten Regelungsverfahren zur Ausgangsregelung von R2D1 entlang des in den vorangegangenen Abschnitten betrachteten, rechteckförmigen Sollwertverlaufs unter Beibehaltung interner Stabilität diskutiert:

- Die bekannte Regelungsmethode einer Rückführlinearisierung zur Normalenform mit überlagertem linearen Regler mit konstanten Parametern würde das System – abhängig von Anfangswerten und Reglerparametern [62] – destabilisieren.
- Das auf Passivität basierende Verfahren [59] setzt ebenso wie der hochverstärkende Regler aus [46] und dessen adaptive Variante [45] eine *global asymptotisch stabile* Nulldynamik voraus, so daß sich diese Verfahren nicht zur Stabilisierung von R2D1 eignen.
- Das in [57,58] entwickelte Verfahren mittels Multirate-Regelung wurde nur für den horizontal ausgerichteten Fall ($\alpha = 0$) entwickelt und ist daher nicht anwendbar.

Außerdem gewährt dieses Verfahren aufgrund diverser Näherungen im Reglerentwurf keine beweisbare Stabilität.

- Ein zur Invarianzregelung alternatives Verfahren bestünde darin, die Trajektorie von R2D1 entlang einer vorab berechneten Steuertrajektorie durch lokal wirkende, lineare Regler zu stabilisieren. Hierbei stellt sich jedoch zum einen das Problem eines sehr geringen Einzugsbereichs der linearen Regler, so daß bereits bei kleinen Perturbationen das System instabil wird. Zum andern benötigt man für das hier vorgestellte Experiment eine Menge von Steuertrajektorien, da durch den gewählten Sollwertverlauf die Anfangswerte im gesamten Zustandsraum liegen können und daher nicht vorab bekannt sind [69]. Als letzter Nachteil sei darauf hingewiesen, daß geschaltete lineare Systeme nur unter sehr restriktiven Bedingungen stabil sind, selbst wenn jedes der einzelnen linearen Teilsysteme für sich alleine betrachtet stabil ist, [71].

Zusammenfassung und Bewertung

Das im zweiten Teil des vorangegangenen Kapitels 3 hergeleitete Entwurfsverfahren für Invarianzregler von Rang-2-Systemen wurde in diesem Kapitel am Beispiel des unteraktuierten Experimentalroboters R2D1 exemplarisch durchgeführt. Die Grenzen der Anwendbarkeit des Entwurfsverfahrens werden bei der Invarianzgebietssynthese sowie der Bestimmung des Rückschaltgebiets χ deutlich: So wurde für die Synthese eines fluchtpunktfreien Invarianzgebiets die Phasenbahn-Dgl. der Nulldynamik gelöst und ein geeignetes Rückschaltgebiet für den schaltenden PD-Regler heuristisch ermittelt. Dies war nur aufgrund der niedrigen Dimension zwei der internen Dynamik möglich, wohingegen der Fall einer höher-dimensionalen, internen Dynamik, aufwendige Ljapunov-Stabilitätsanalysen erfordert.

Zusätzlich wurde der schaltende Invarianzregler für eine perturbierende Zusatzmasse durch ein wenig konservatives Verfahren robustifiziert. In Experimenten konnte damit robuste Gesamtsystemstabilität nachgewiesen werden, so daß ein nichtlineares, schaltendes Regelungsverfahren für unteraktuierte Rang-2-Systeme mit *beweisbarer robuster Stabilität* zur Verfügung steht. Das Problem der Abhängigkeit der Gesamtsystemstabilität von Reglerparametern und Anfangswerten ist damit für die hier betrachtete Klasse von Systemen gelöst.

Eine Erweiterung auf unteraktuierte mechanische MIMO-Systeme mit $k - 1$ unab-

hängigen Antrieben und k mechanischen Freiheitsgraden ist prinzipiell dadurch möglich, daß $k - 2$ Antriebe für die exakte E-/A-Linearisierung von $k - 2$ mechanischen Freiheitsgraden und deren Stabilisierung verwendet werden. Das verbleibende System, bestehend aus einem Antrieb und zwei mechanischen Freiheitsgraden, entspricht dann der hier betrachteten SISO-Systemklasse, so daß der vorgestellte Invarianzregler beispielsweise auch für unteraktuierte Laufmaschinen anwendbar wäre.

5 Kippvermeidung von Kraftfahrzeugen mittels Invarianzregelung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden für die spezielle Klasse der unteraktuierten, stetig-differenzierbaren SISO-Systeme in steuerungsaffiner Form zwei Invarianzregelgesetze entwickelt. Demgegenüber erfolgt in diesem Kapitel ein Ausblick auf die Anwendung von Invarianzregelung zur Stabilisierung einer größeren Systemklassen. Dazu wird beispielhaft die Überschlagsvermeidung von kippsgefährdeten Kraftfahrzeugen betrachtet – ein System das in nicht-steuerungsaffiner Form vorliegt, nicht differenzierbar ist und durch eine konservative Modellierung der Lenkdynamik nicht vernachlässigbare Totzeiten beinhaltet.

5.1 Technischer Hintergrund

Zum Führen eines Kraftfahrzeugs entlang eines gegebenen Fahrbahnverlaufs übernimmt der Fahrer¹ die Rolle eines komplexen nichtlinearen Reglers. Dabei kann der Fahrer durch seine Sinne den Fahrzeugzustand schätzen und die als Steuergrößen zu Verfügung stehenden Gaspedal- sowie Lenkradstellungen dazu verwenden, ein bestimmtes Fahrverhalten einzuprägen. Betrachtet man die Aufgabe der Spurführung entlang des Fahrbahnverlaufs vom regelungstechnischen Aspekt aus, so folgen als zu regelnde Ausgangsfunktionen der Winkel und der Betrag des im Fahrzeugschwerpunkt gemessenen Geschwindigkeitsvektors. Da die Gier- und Rolldynamik (Bewegung um die Hoch- und Längsachse) des Fahrzeugs auf diese Ausgangsfunktionen keinen Einfluß hat (also an den Ausgängen

¹Aus Gründen der Vereinfachung wird in diesem Abschnitt abkürzend für beide Geschlechter die Terminologie „Fahrer“ anstatt „Fahrer und Fahrerin“ verwendet.

nicht beobachtbar ist), kann eine auf reiner Ausgangsrückführung beruhende Bahnfolgeregelung diese internen Dynamiken nicht stabilisieren; es stellen sich – abhängig von der gefahrenen Bahn – ein stabiler oder ein instabiler Verlauf der internen Dynamiken ein. Aufgrund dieser, an den Systemausgängen nicht beobachtbaren, internen, instabilen Dynamiken, handelt es sich bei einem Kfz um ein nichtlineares, unteraktuiertes NMP-System. Ein geschulter Fahrer wählt daher seine Lenk- und Beschleunigungsmanöver so, daß neben der Fahrbahnspurhaltung auch die internen Dynamiken stabil bleiben, d. h. daß das Fahrzeug nicht schleudert oder kippt. Damit erfüllt der Fahrer die Regelziele eines Invarianzreglers, nämlich

- i)* asymptotische E-/A-Stabilisierung des Bahnfolgeregelungsproblems und
- ii)* Stabilität der internen Dynamiken.

Ziel dieses Kapitels ist es daher, einen auf Invarianzregelung beruhenden, elektronischen Fahrassistenten zu entwickeln, der einen weniger geübten Fahrer bei der Stabilisierung des Fahrzeugs unterstützt. Stehen beide Eingangsgrößen (Lenkrad- und Gaspedalstellung) für einen solchen elektronischen Fahrassistenten zur Verfügung, so kann sowohl das Spurhalteproblem *i)* als auch die Stabilisierung der internen Dynamiken *ii)* betrachtet werden. Um zunächst die prinzipielle Anwendbarkeit von Invarianzregelung zu demonstrieren, wird in dieser Arbeit jedoch die Lenkradstellung als *einzigste* Eingangsgröße angenommen. Des Weiteren wird ein hoch liegender Fahrzeugschwerpunkt vorausgesetzt, so daß tendenziell die Rolldynamik hinsichtlich Stabilität dominant gegenüber der Gierdynamik ist und daher nur das Stabilisierungsproblem der Rolldynamik betrachtet wird.

Wie in [37] gezeigt wird, ist es bei Fahrzeugen mit erhöhtem Schwerpunkt (wie z. B. bei Lkws) auch für geübte Fahrer in Kurvenmanövern mit selbst niedrigen Geschwindigkeiten schwierig, Kippen zu vermeiden. Im Schrifttum wird über verschiedene Lösungsansätze berichtet: Lin u.a. schlagen in [32] ein System vor, das über eine Hydraulik den Rollwinkel des Fahrzeugaufbaus aktiv regelt. Die damit verbundene Schwerpunktverschiebung führt zur Verbesserung des Kippverhaltens des Fahrzeugs. Ackermann und Odenthal [29] greifen in die Lenkung des Fahrzeugs ein und reduzieren den vom Fahrer eingeschlagenen Lenkwinkel. Da die Parameter des dafür verwendeten Regelgesetzes jedoch heuristisch gewählt werden, kann eine Überschlagsvermeidung nicht garantiert werden. Beide Ansätze verwenden ein linearisiertes, erweitertes Einspur-Modell als Grundlage des Reglerentwurfs. Weitere Arbeiten zur Kippstabilisierung finden sich in [30, 31].

Der hier verfolgte Ansatz basiert auf dem in [29] vorgeschlagenen Prinzip aktiv in die Lenkung einzugreifen, und resultiert in einen auf Invarianzregelung beruhenden Anti-

Kipp-Fahrassistenten (RAC: Rollover Avoidance Controller). Damit kann formal Begrenztheit nachgewiesen werden, wohingegen die oben erwähnten Regelungsansätze das Fahrverhalten zwar verbessern, ein Stabilitätsnachweis jedoch offen bleibt. Die prinzipielle Wirkungsweise des RAC besteht darin, bei einer überschlagskritischen Fahrsituation, den vom Fahrer eingeschlagenen Lenkwinkel so weit zu reduzieren, daß das Fahrzeug aufgrund der dadurch verminderten Querbeschleunigung nicht kippt. Da die Längsbeschleunigung nicht als Eingangsgröße zur Verfügung steht, führt dies zu einem Verlassen des gewünschten Fahrbahnverlaufs. Ein zu großes Abweichen der gefahrenen von der gewünschten Bahn kann dabei jedoch verhindert werden, indem der Lenkwinkel nur so weit reduziert wird, wie es für eine Überschlagsvermeidung notwendig ist.

Der RAC wurde in Experimenten mit einem Fahr Simulator evaluiert, wobei ein Fahrer im geschlossenen Regelkreis agiert. Dabei tritt das Problem auf, eine ergonomische Schnittstelle zwischen RAC und Fahrer zu schaffen. Hierzu wurde ein momentengesteuerter Bedienhebel verwendet, der dem Fahrer haptisch – durch Kraftrückkopplung – Informationen über die momentane Kippsituation vermittelt. Der Trend zum „steer-by-wire“ in Kraftfahrzeugen, also einer mechanischen Entkopplung zwischen Lenkrad und Vorderrädern, bietet für solche Interaktionen neue Möglichkeiten. So muß die Kraft, die dem Fahrer über den Bedienhebel vermittelt wird, nicht mehr die tatsächlich am Reifen angreifende Kraft widerspiegeln. Alternativ können so dem Fahrer Informationen über den Zustand der Rolldynamik des Fahrzeuges geliefert werden, wodurch ein schnelleres und besseres Begreifen des momentanen Zustands der Fahrzeugdynamik ermöglicht werden kann.

5.2 Kfz-Modell

Dem RAC-Entwurf wird das nichtlineare Einspur-Modell aus [35] zugrunde gelegt. Wie in Abb. 5.1 (a) skizziert, wird dabei von einem starren Fahrwerk mit Schwerpunkt S in der Fahrbahnebene ausgegangen. Dieses Modell umfaßt drei Zustandsvariablen: Der Schwimmwinkel β des Fahrzeugschwerpunkts gibt die Abweichung der Richtung zwischen Fahrzeuglängsachse und Geschwindigkeitsvektor \boldsymbol{v} des Fahrzeugschwerpunkts an; die Gierrate $\dot{\psi}$ beschreibt die Drehung des Fahrzeugs um die Hochachse, wobei ψ der Winkel zwischen einem fahrzeugfesten ${}_kx\text{-}{}_ky$ - und dem ortsfesten ${}_ix\text{-}{}_iy$ -Koordinatensystem ist.

Da der Fahrzeugschwerpunkt in der Fahrbahnebene liegt, kann dieses Fahrzeugmodell keine Rollbewegungen beschreiben. Daher wird das Einspur-Modell, wie in Abb. 5.1 (b)

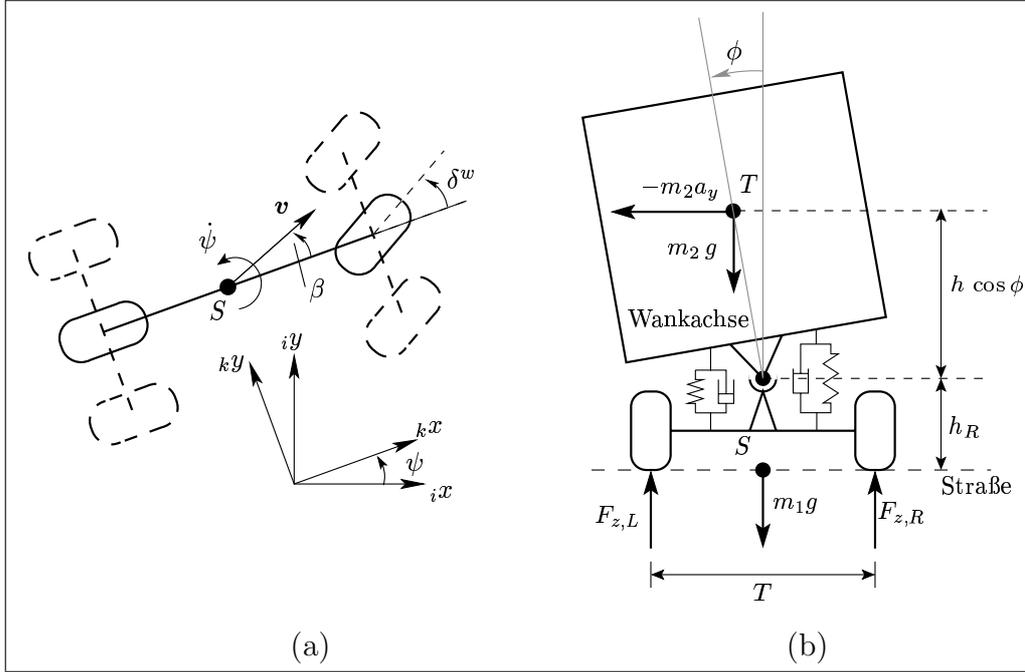


Abbildung 5.1: (a) Einspur-Modell. (b) Durch eine Zusatzmasse m_2 erweitertes Einspur-Modell.

gezeigt, um eine Zusatzmasse m_2 erweitert [36], deren Schwerpunkt T im Ruhezustand in einer Höhe $h + h_R$ über der Fahrbahn liegt und die über ein Feder-Dämpfer-System gelagert ist. Dabei bezeichnet ϕ den Rollwinkel des Aufbaus. Dieses Fahrzeugmodell kann nun Rollbewegungen beschreiben. Der wesentliche Vorteil dieses *erweiterten* Einspur-Modells gegenüber einem vollständigen Zweispur-Modell liegt darin, daß es einen guten Kompromiß zwischen realitätsnaher Modellierung und Komplexität darstellt. Die Tatsache, daß das Modell keine Nickbewegungen vollziehen kann, wird durch die zusätzliche Annahme einer konstanten Geschwindigkeit v begründet, da in diesem Fall auch beim realen Fahrzeug nur vernachlässigbar geringe Nickbewegungen auftreten. Die Bewegungsgleichungen des erweiterten Modells werden in Anhang E für die Zustandsvariablen $\zeta = (\beta, v, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi})$ mittels der Lagrange-Methode hergeleitet und in die Form

$$\dot{\zeta} = \bar{f}(\zeta) + \bar{g}(\zeta, \delta^w) \quad (5.1)$$

gebracht, wobei das Drift- und Steuervektorfeld $\bar{f}, \bar{g} \in \mathbb{R}^5$ aufgrund des verwendeten, nicht stetig-differenzierbaren HSRI-Reifenmodells [33] ebenfalls nicht stetig-differenzierbar ist. Allen hier aufgeführten Simulationen und Berechnungen liegt eine ebene, trockene Straße mit einem Haftkoeffizienten $\mu = 0.8$ zugrunde.

Die Lenkdynamik, die das Übertragungsverhalten zwischen dem vom Fahrer (δ^{drv}) oder RAC (δ^{inv}) gewünschten Lenkwinkel δ zum Lenkwinkel δ^w der Vorderräder beschreibt, wird durch ein Totzeitsystem mit Totzeit T_t hinsichtlich Stabilität konservativ angenähert, d. h. es gilt

$$\delta^w(t) = \delta(t - T_t) . \quad (5.2)$$

Außerdem sei eine Stellratenbeschränkung der Lenkdynamik durch

$$\left| \frac{d}{dt} \delta^w(t) \right| \leq \omega^{\text{max}} \quad (5.3)$$

gegeben. Zusammen mit der Chassis-Dynamik (5.1) läßt sich das Kfz also durch einen Zustandsvektor (ζ, δ^w) und eine Steuergröße δ beschreiben. Eine Begrenzung der Zustandsvariablen (ζ, δ^w) durch bauartbedingte, technische Grenzwerte sei im Folgenden durch ein beschränktes Zustandsraumgebiet $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^6$ gegeben.

5.3 Quantifizierung der Kippgefahr

Zur Festlegung eines geeigneten Invarianzgebiets \mathcal{G} benötigt man zunächst ein quantitatives Maß dafür, wie nah das Fahrzeug dem Punkt des Umkippen ist. Hierzu wird der zustandsabhängige *Überschlags-Koeffizient*

$$R(\zeta, \delta^w) = \frac{F_{z,R} - F_{z,L}}{F_{z,R} + F_{z,L}} \quad (5.4)$$

aus [29, 36] verwendet. Dabei bezeichnet $F_{z,R/L}$ die rechte bzw. linke vertikale Kraft auf die Räder, siehe Abb. 5.1 (b). Bei $R(\zeta, \delta^w) = +1$ ($R(\zeta, \delta^w) = -1$) heben die linken (rechten) Räder ab. Im Bereich $-1 < R(\zeta, \delta^w) < +1$, haben alle Räder Bodenkontakt, so daß sich ein kippfreies Zustandsraumgebiet zu

$$\mathcal{G} = \{(\zeta, \delta^w) \mid |R(\zeta, \delta^w)| \leq 1\} \quad (5.5)$$

ergibt. Die Berechnung von $R(\zeta, \delta^w)$ kann durch ein Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung und ein Momentengleichgewicht um den in Abb. 5.1 (b) gekennzeichneten Punkt S erfolgen. In den daraus resultierenden Gleichungen tritt die Beschleunigung $\ddot{\phi}$ des Rollwinkels auf. Dadurch hängt der Überschlags-Koeffizient von der Fahrzeugdynamik (5.1) ab und man erhält den Überschlags-Koeffizienten als Funktion des Systemzustands ζ und des Lenkwinkels δ^w der Vorderräder.

Eine anschauliche Interpretation des Überschlags-Koeffizienten kann durch die folgende Approximation gegeben werden: Legt man ein *lineares*, erweitertes Einspur-Modell zugrunde, so folgt nach [29, 32] unter der Annahme kleiner Neigungswinkel ϕ sowie der Annahme, daß die Masse m_1 des Chassis klein gegenüber der Zusatzmasse m_2 ist, die Näherung

$$R \approx \frac{h + h_R}{T/2} \frac{a_y}{g} + \frac{h}{T/2} \phi. \quad (5.6)$$

Bei stationärer Kreisfahrt mit Kurvenradius ρ ergibt sich der Betrag der Querbeschleunigung zu $|a_{y,st}| = \|\mathbf{v}\|^2/\rho$. Daraus liest man ab, daß sich $|a_{y,st}|$ und damit wegen (5.6) auch der Betrag des Überschlags-Koeffizienten $|R|$ durch Bremsen des Fahrzeugs oder eine Rücknahme des Lenkeinschlags reduziert. Dieses Verhalten gilt qualitativ auch für das in dieser Arbeit zugrundegelegte, *nichtlineare*, erweiterte Einspur-Modell.

5.4 Anwendung von Invarianzregelung

Wie im vorangegangenen Abschnitt hergeleitet wurde, kippt das Fahrzeug nicht, solange sich der Systemzustand (ζ, δ^w) innerhalb des Gebiets \mathcal{G} befindet. Stellt man sicher, daß \mathcal{G} ein Invarianzgebiet ist, so ist Stabilität der Rolldynamik gewährleistet. Das Stabilitätsproblem wird dadurch auf ein Invarianzproblem zurückgeführt.

Falls \mathcal{G} inhärent, d. h. ohne zusätzliche Invarianzregelung, invariant ist, verläßt der Systemzustand (ζ, δ^w) unabhängig vom Wert der Steuergröße δ dieses Gebiet nicht. Ein solcher Fall ist z. B. bei einem tiefliegenden Sportwagen gegeben, bei dem der Fahrzeugschwerpunkt nahe der Fahrbahnebene liegt. Pkws mit schweren Dachlasten oder beladene Lkws besitzen jedoch i. allg. einen hohen Schwerpunkt und neigen daher zum Kippen. In diesen Fällen muß für eine Überschlagsvermeidung das Gebiet \mathcal{G} durch einen Invarianzregler invariant gehalten werden. Um das Prinzip eines Invarianzreglers zur Überschlagsvermeidung zu erklären, wird zunächst die

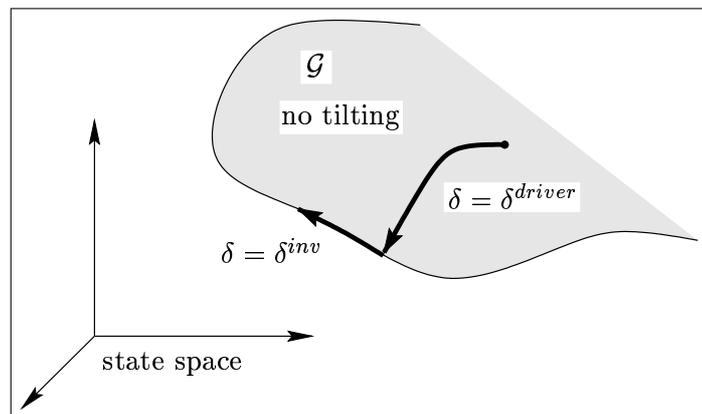


Abbildung 5.2: Umschaltstrategie des RAC unter Vernachlässigung der Lenkdynamik.

Lenkdynamik vernachlässigt, d. h. $T_t = 0$ gesetzt. In diesem Fall stellt der Lenkwinkel δ^w die Steuergröße und ζ den Zustand des zu regelnden Systems dar. Wie in Abb. 5.2 gezeigt, ist im Inneren des Gebiets \mathcal{G} die Lenkung auf den Fahrer übertragen, d. h. es gilt $\delta = \delta^{\text{drv}}$. Trifft ζ auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$, so wird die Steuergröße δ^w so berechnet, daß der Systemzustand ζ das Gebiet \mathcal{G} nicht verläßt und zusätzlich die Differenz zum vom Fahrer am Lenkrad eingestellten Lenkwinkel δ^{drv} minimal ist. Der dafür notwendige Lenkwinkel wird hier mit *Invarianzwinkel* δ^{inv} bezeichnet. Um zu verhindern, daß der Systemzustand ζ das Gebiet \mathcal{G} verläßt, wird die Fahrzeuglenkung vollständig auf den RAC übertragen, d. h. es gilt nun $\delta = \delta^{\text{inv}}$. Erst wenn der vom Fahrer am Lenkrad eingestellte Lenkwinkel δ^{drv} so gewählt ist, daß sich damit der Systemzustand wieder ins Gebietsinnere bewegen würde, wird die Lenkung auf den Fahrer zurückgeschaltet und es folgt $\delta = \delta^{\text{drv}}$. Wie in Abb. 5.2 skizziert, führt diese Schaltstrategie zu einem Gleiten des Systemzustands entlang des Gebietsrands $\partial\mathcal{G}$, solange der Invarianzregler die Lenkung inne hat.

Abb. 5.3 zeigt die Struktur des RAC: Ein Kippdetektor berechnet den Überschlagskoeffizienten R und überwacht, ob sich der Systemzustand im Gebietsinnern befindet. Mittels eines Umschalters wird zwischen dem vom Fahrer eingestellten Lenkwinkel δ^{drv} und dem in der Berechnungseinheit ermittelten Invarianzwinkel δ^{inv} umgeschaltet.

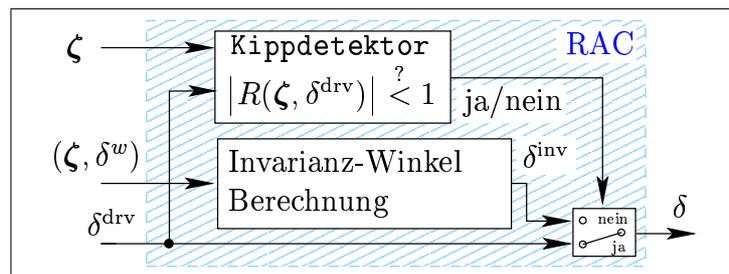


Abbildung 5.3: Struktur des RAC.

5.4.1 Zeitdiskrete Invarianzregelung

Definiert man eine Invarianzfunktion zu

$$\Phi(\zeta, \delta^w) = |R(\zeta, \delta^w)| - 1, \quad (5.7)$$

so folgt das invariant zu haltende, kippfreie Zustandsraumgebiet \mathcal{G} aus (5.5) zu

$$\mathcal{G} = \{(\zeta, \delta^w) \mid \Phi(\zeta, \delta^w) \leq 0\} .$$

Unter der, im vorangegangenen Abschnitt zugrundegelegten Annahme, daß der Lenkwinkel δ^w direkt eingestellt werden kann, kann \mathcal{G} invariant gehalten werden, indem zu

jedem Auftreffzeitpunkt der Trajektorie (ζ, δ^w) auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ der Lenkwinkel gemäß

$$\delta^{\text{inv}} : \quad \Phi(\zeta, \delta^w = \delta^{\text{inv}}) \leq 0 \quad (5.8)$$

berechnet wird. Abweichend von der in Kapitel 2 hergeleiteten Invarianzbedingung ist bei (5.8) die Betrachtung der zeitlichen Ableitung der Invarianzfunktion $\dot{\Phi}$ nicht notwendig, da die Invarianzfunktion *direkt* von der Steuergröße δ^w abhängt.

Im Folgenden wird die Lenkdynamik berücksichtigt, d. h. es gilt $T_t > 0$. In diesem Fall muß der Lenkwinkel $\delta^w = \delta(t - T_t)$ als ein weiterer Systemzustand betrachtet werden, so daß es keinen Durchgriff zwischen der nun gültigen Steuergröße δ und der Invarianzfunktion Φ mehr gibt. Daher ist die Invarianzbedingung (2.22) anzuwenden und es folgt mit der Chassis- und Lenkdynamik (5.1)-(5.2)

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial\Phi^T}{\partial\zeta} (\bar{f}(\zeta) + \bar{g}(\zeta, \delta^w)) + \frac{\partial\Phi}{\partial\delta^w} \frac{d}{dt} \delta(t - T_t) \leq 0 \quad \forall(\zeta, \delta^w) \in \partial\mathcal{G}. \quad (5.9)$$

Daraus erkennt man, daß (5.9) keine kausale Bedingung für die Steuergröße δ liefert. Eine Lösung des Problems kann durch eine *zeitdiskrete* Version der Invarianzregelung gefunden werden. Die dabei auftretenden Abtastzeitpunkte werden mit $t_k = k \Delta t$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet. Im Folgenden wird die abkürzende Notation $\delta_k = \delta(t_k)$ verwendet. Bei einer zeitdiskreten Realisierung eines Regelgesetzes stehen die rückgeführten Systemzustände erst mit einer maximalen Verzögerung eines Abtastschritts Δt für die Berechnung der Steuergröße zur Verfügung. Da die Ausgabe der Steuergröße gleichfalls erst mit einer maximalen Verzögerung eines Abtastschritts erfolgt, ergibt sich zusammen mit der Abschätzung der Lenkdynamik eine maximale Gesamtverzögerungszeit von $T_{t, \text{ges}} = 2 \Delta t + T_t$. Die zeitdiskrete Invarianzregelung basiert nun anschaulich darauf, bereits im Zeitpunkt $T_{t, \text{ges}}$ *bevor* der Systemzustand auf den Gebietsrand trifft, Maßnahmen zur Erhaltung der Invarianz des Gebiets \mathcal{G} zu treffen. Dazu wird zunächst die Invarianzfunktion mit

$$\Phi(t_k \leq t \leq t_k + T_{t, \text{ges}}) \leq \Phi(t_k) + \epsilon \quad (5.10)$$

abgeschätzt, wobei $\epsilon > 0$ eine noch zu bestimmende Konstante bezeichnet und die Fortschreibung der Funktion $\Phi(t)$ im Zeitintervall $(t_k; t_k + T_{t, \text{ges}}]$ berücksichtigt. Nach dem Zeitpunkt t_k kann aufgrund der Verzögerungszeit $T_{t, \text{ges}}$ der Verlauf der Systemtrajektorie $(\zeta(t), \delta^w(t))$ bis zum Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ nicht mehr beeinflusst werden. Um trotzdem sicherstellen zu können, daß $(\zeta(t), \delta^w(t))$ innerhalb dieser Zeitspanne das Gebiet \mathcal{G} nicht verläßt, muß also bereits zum Zeitpunkt t_k die Steuergröße so gewählt werden, daß \mathcal{G}

invariant bleibt. Daraus folgt, daß der RAC bereits bei $\Phi = -\epsilon < 0$ (anstatt erst bei $\Phi = 0$) in die Lenkung eingreifen muß. Dies führt zu einem verkleinerten Gebiet

$$\hat{\mathcal{G}} = \{(\zeta, \delta^w) \mid \Phi(\zeta, \delta^w) \leq -\epsilon\} , \quad (5.11)$$

das, wie in Abb. 5.4 gezeigt, vollständig im ursprünglichen Gebiet \mathcal{G} liegt. In Abb. 5.4

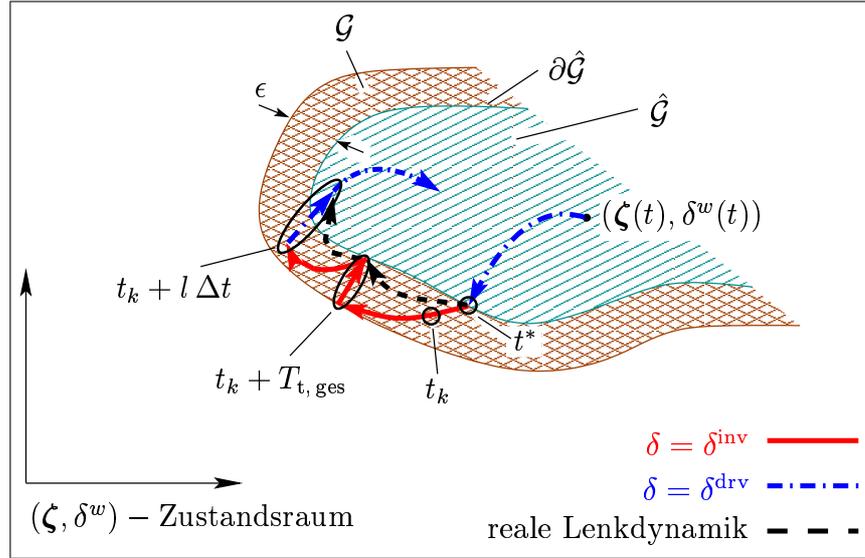


Abbildung 5.4: Der doppelt schraffierte Streifen $\mathcal{G} \setminus \hat{\mathcal{G}}$ berücksichtigt den Einfluß der Lenkdynamik sowie der zeitdiskreten Reglerrealisierung. Die Kreise und Ovale kennzeichnen wichtige Zeitpunkte.

ist der Fall skizziert, daß zum Zeitpunkt t^* (mit $t_{k-1} < t^* < t_k$) die Systemtrajektorie auf $\partial\hat{\mathcal{G}}$ trifft. Dies wird aufgrund der zeitdiskreten Realisierung erst zum Zeitpunkt t_k detektiert. Der daraufhin vom RAC berechnete Lenkwinkel δ^w liegt zum verzögerten Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ an den Vorderrädern an, so daß die Trajektorie im Intervall $(t^*; t_k + T_{t, \text{ges}})$ das Gebiet $\hat{\mathcal{G}}$ verlassen kann. Ein Verlassen von \mathcal{G} hingegen kann durch die Wahl eines ausreichend großen Wertes für ϵ verhindert werden, so daß ϵ als Invarianzreserve (im Folgenden kurz Reserve genannt) dient. Zum Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ liegt der Invarianzwinkel δ_k^{inv} an den Vorderrädern an, so daß die Trajektorie nach $\hat{\mathcal{G}}$ zurückkehrt. Falls die Lenkdynamik tatsächlich durch eine reine Totzeit beschrieben ist, ergibt sich dabei der in Abb. 5.4 dargestellte *sprunghafte* Verlauf. Der, aufgrund einer kontinuierlichen Lenkdynamik, in realen Systemen immer sich ergebende *stetige* Verlauf der Systemtrajektorie ist zusätzlich in Abb. 5.4 gestrichelt eingetragen. Man erkennt daraus, daß die Abschätzung der Lenkdynamik als Totzeit zu einem, hinsichtlich Invarianz von

\mathcal{G} , konservativem Ergebnis führt. Zum Zeitpunkt $t_k + l \Delta t$, $l \in \{1, 2, \dots\}$, ist der Lenkwinkel vom Fahrer so gewählt, daß sich die Systemtrajektorie mit diesem Lenkwinkel ins Innere von $\hat{\mathcal{G}}$ bewegen würde. Daher wird zu diesem Zeitpunkt die Lenkung wieder auf den Fahrer zurückgeschaltet.

Zur Berechnung eines geeigneten Wertes für ϵ wird eine Gütefunktion

$$\bar{\epsilon}(\zeta, \delta^w) = T_{t, \text{ges}} \dot{\Phi}(\zeta, \delta^w) \quad (5.12)$$

definiert, wobei für die zeitliche Ableitung der Invarianzfunktion Φ wegen

$$\frac{d}{dt} \delta^w(t) = \frac{d}{dt} \delta(t - T_t) \stackrel{(5.3)}{\leq} \omega^{\max}$$

die Abschätzung²

$$\dot{\Phi}(\zeta, \delta^w) \leq \frac{\partial \Phi(\zeta, \delta^w)^T}{\partial \zeta} (\bar{f}(\zeta) + \bar{g}(\zeta, \delta^w)) + \left| \frac{\partial \Phi(\zeta, \delta^w)}{\partial \delta^w} \right| \omega^{\max} \quad (5.13)$$

gilt. Damit erhält man die Berechnungsvorschrift:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \max_{(\zeta, \delta^w)} \bar{\epsilon}(\zeta, \delta^w) \\ \text{u. d. N. } i) \quad &(\zeta, \delta^w) \in \mathcal{G} \setminus \text{In}\{\hat{\mathcal{G}}(\bar{\epsilon}(\zeta, \delta^w))\} \\ ii) \quad &(\zeta, \delta^w) \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

wobei $\text{In}\{\hat{\mathcal{G}}\} = \hat{\mathcal{G}} \setminus \partial \hat{\mathcal{G}}$ das Gebietsinnere von $\hat{\mathcal{G}}$ bezeichnet. Anschaulich bedeutet (5.14), daß in der ϵ -Umgebung (doppelt schraffierter Streifen in Abb. 5.4) des Gebietsrands $\partial \mathcal{G}$ der maximale Zuwachs von Φ ermittelt wird. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die ϵ -Umgebung als zulässiger Optimierungsbereich selbst vom Ergebnis ϵ der Optimierung abhängt, so daß in der Nebenbedingung *i)* das Gebiet $\hat{\mathcal{G}}$ von $\bar{\epsilon}(\zeta, \delta^w)$ (anstatt von ϵ) abhängt. Ein wohldefiniertes Ergebnis für ϵ wird durch die Nebenbedingung *ii)* gewährleistet, die die Zustandsvariablen auf den beschränkten Bereich \mathcal{T} einschränken.

Die Reserve ϵ ist damit groß genug gewählt, um zu garantieren, daß vom Zeitpunkt t_k der Detektion von $(\zeta, \delta^w) \in \partial \hat{\mathcal{G}}$ bis zum Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ des Anliegens des vom Invarianzregler berechneten Winkels δ_k^{inv} an den Vorderrädern die Systemtrajektorie das Gebiet \mathcal{G} nicht verläßt. Der Invarianzwinkel δ_k^{inv} muß nun so berechnet werden, daß

²Die zeitliche Ableitung bei (durch das nicht differenzierbare HSRI-Reifenmodell bedingten) Knickstellen von Φ wird als das jeweilige Maximum der Menge von rechts- und linksseitigen Ableitungen verstanden.

zum Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ des Anliegens dieses Winkels an den Vorderrädern für die Invarianzfunktion die Bedingung

$$\Phi(t_k + T_{t, \text{ges}}) \leq -\epsilon \quad (5.15)$$

erfüllt ist und damit die Systemtrajektorie in jedem Fall wieder nach $\hat{\mathcal{G}}$ überführt wird. Da sich der Systemzustand (ζ, δ^w) jedoch während der Verzögerungszeit $T_{t, \text{ges}}$ verändert, reicht die Kenntnis des Systemzustands zum Zeitpunkt t_k nicht für die Berechnung des (zum späteren Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ wirkenden) Invarianzwinkels δ_k^{inv} aus. Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, durch modellgestützte prädiktive Verfahren den nahen zukünftigen Verlauf des Systemzustands und damit (ζ, δ^w) zum Zeitpunkt $t_k + T_{t, \text{ges}}$ zu schätzen. Eine einfachere, aber dafür konservativere Methode ist, die vom Zeitpunkt t_k während der Zeitspanne $T_{t, \text{ges}}$ aus erreichbare Menge $\text{Reach}\{\zeta(t_k), \delta(t < t_k)\}$ (engl. *reachable set*) von Zustandspunkten zu betrachten und den Invarianzwinkel so zu berechnen, daß Bedingung (5.15) für *alle* Punkte dieser Menge erfüllt ist. Für die Berechnung eines geeigneten Invarianzwinkels δ_k^{inv} folgt damit

$$\delta_k^{\text{inv}} : \max_{\delta_k^{\text{inv}}} \Phi(\zeta, \delta_k^{\text{inv}}) \leq -\epsilon \quad (5.16)$$

$$\text{u. d. N. } \zeta \in \text{Reach}\{\zeta(t_k), \delta(t < t_k)\} .$$

Damit kann im folgenden Satz für das mit dem RAC geregelte, erweiterte Einspurmodell formal Stabilität der Rolldynamik nachgewiesen werden.

Satz 5.1 *Betrachtet wird ein Kfz mit Chassis- und Lenkdynamik (5.1)-(5.2). Wird für alle Zustandspunkte $(\zeta, \delta^w) \in \mathcal{G} \setminus \text{In}\{\hat{\mathcal{G}}\}$ der Invarianzwinkel δ_k^{inv} gemäß (5.16) berechnet, so haben zu allen Zeiten die Räder des betrachteten Fahrzeugs Bodenkontakt.*

Der zugehörige Beweis geht aus den vorangegangenen Ausführungen anschaulich hervor und wird in Anhang B.10 formal geführt.

Anmerkung 5.1 *In praktischen Anwendungsfällen läßt sich die Berechnung des Invarianzwinkels gegenüber (5.16) drastisch vereinfachen: Da die Lenkdynamik in realen Fahrzeugen wesentlich schneller als die Chassis-Dynamik einschwingt, ist die Näherung $\Phi(t_k, \delta^{\text{inv}}) \approx \Phi(t_k + T_{t, \text{ges}}, \delta^{\text{inv}})$ gültig, so daß für den Invarianzwinkel die gegenüber (5.16) weniger aufwendige, implizite Gleichung*

$$\delta_k^{\text{inv}} : \Phi(t_k, \delta^w = \delta_k^{\text{inv}}) = -\epsilon \quad (5.17)$$

zu lösen ist.

Ausblick auf Robustheit

Bisher wurde nur der Nominalfall betrachtet, d. h. alle Parameter des Fahrzeugs wurden als exakt bekannt vorausgesetzt. Satz 5.1 kann jedoch auch auf den Fall unsicherer physikalischer Parameter mit bekannten oberen und unteren Schranken erweitert werden. Dazu wird in der Berechnung der Reserve ϵ in (5.12) diejenige unsichere Parameterkombination verwendet, bezüglich derer $\dot{\Phi}$ ein Maximum besitzt, d. h. die unsicheren Parameter werden wie in Abschnitt 2.3.2 diskutiert, durch entsprechende marginale Funktionen ersetzt.

Die in realen Anwendungsfällen nicht vernachlässigbaren Schätzfehler des Systemzustands (ζ, δ^w) können in die Bestimmung von ϵ durch einen zusätzlichen Totzeitterm einbezogen werden.

5.5 Experimentelle Resultate

5.5.1 Experimentalaufbau

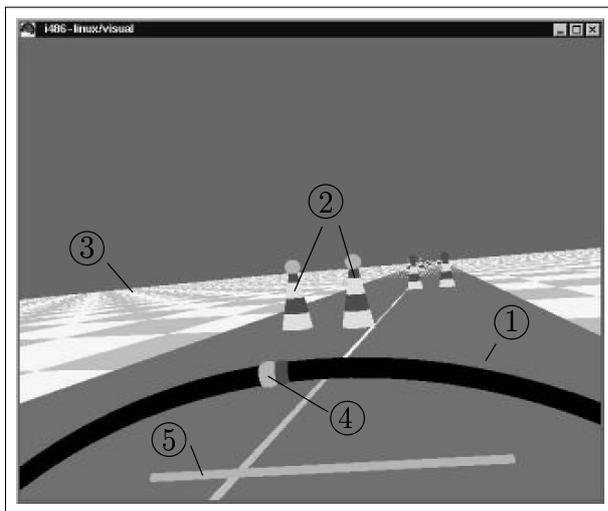


Abbildung 5.5: 3-D-Simulationsumgebung: Straße mit Pylonen und virtuelles Lenkrad mit Markierung

soll. Die Neigung des Horizonts ③ während der Fahrt entspricht der Kabinenneigung, also dem Rollwinkel ϕ des Fahrzeugaufbaus. Auf dem virtuellen Lenkrad ① befinden sich zwei Markierungen ④. Die linke Markierung gibt den vom Fahrer eingestellten

Zur Untersuchung des in Abschnitt 5.4 vorgestellten RAC im Fall nicht präzifizierbarer Lenkmäner eines Fahrers, wurde die Regelung in einem Fahrsimulator getestet. Mit einem Lenkhebel kann der Fahrer ein virtuelles Fahrzeug in einer virtuellen 3-D-Welt lenken. Die virtuelle Umgebung in Abb. 5.5 zeigt die Sicht des Fahrers durch die Frontscheibe des Fahrzeugs auf eine schematische Fahrsituation sowie ein virtuelles Lenkrad ①. Alternierende Pylonen ② stellen auf einer zweispurigen Straße Hindernisse dar, denen der Fahrer ausweichen

Lenkwinkel δ^{drv} an, die rechte Markierung repräsentiert den ggf. vom RAC berechneten Invarianzwinkel δ_k^{inv} . Im Bild unten befindet sich ein Balken ⑤, dessen Länge proportional zum momentanen Überschlags-Koeffizienten R ist. Zusätzlich zu diesen visuellen Informationen werden dem Fahrer über den Lenkhebel haptische Informationen über die Größe des Überschlags-Koeffizienten R und damit über die momentane Kippsituation vermittelt. Dazu wurde über den Lenkhebel auf die Hand des Fahrers ein Drehmoment $M_L = (e^{-5(R+1)} - e^{-5(-R+1)}) M_L^{\text{max}}$ ausgeübt, wobei das maximal zulässige Moment M_L^{max} des Hebels mit 3.8 Nm so gewählt wurde, daß der Fahrer den Hebel über einen längeren Zeitraum ohne Anstrengung halten konnte.

Die Momentenkennlinie ist in Abb. 5.6 abgebildet und so gewählt, daß der Fahrer bei Manövern im Grenzbereich zum Kippen die drohende Kippgefahr durch eine exponentiell anwachsende und ihm entgegenwirkende Lenkhebel-Kraft spürt. Der Fahrer erfährt dadurch eine signifikante, harte Rückmeldung bei Überschreitung der Kippgrenze. Weitere Untersuchungen über ergonomisch günstige Rückkopplungen sollten in zukünftiger Forschungsarbeit durchgeführt werden.

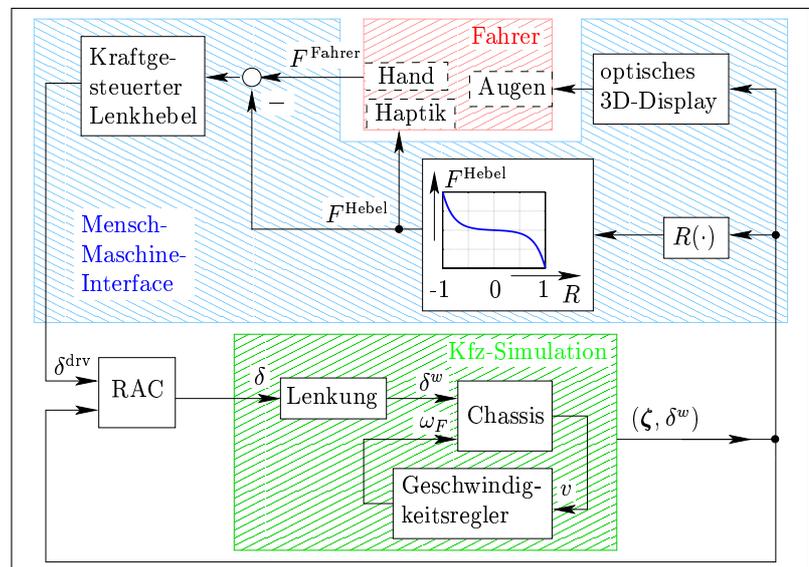


Abbildung 5.6: Struktur des Fahrersimulators mit detailliertem Mensch-Maschine Interface.

In Abb. 5.6 wird gezeigt, wie das Mensch-Maschine-Interface (MMI) in den geschlossenen Regelkreis eingeht. So erhält der Fahrer visuelle und haptische Informationen über den aktuellen Fahrzustand und gibt den Lenkwinkel δ^{drv} über den Lenkhebel an den RAC weiter. Dieser entscheidet, wie bereits in Abb. 5.3 detailliert vorgestellt wurde, ob der vom Fahrer gewählte Lenkwinkel oder der Invarianzwinkel zur Lenkung verwendet werden soll. Die simulierte Kfz-Dynamik beinhaltet die Lenk- und Chassis-Dynamik. Wie im folgenden Abschnitt erläutert, ist ein zusätzlicher Geschwindigkeitsregler für das Chassis notwendig, um eine konstante Fahrgeschwindigkeit zu garantieren.

5.5.2 Regelung

Den Experimenten liegen die Fahrzeugdaten aus Tab. E.1 zugrunde. Dabei ist zu beachten, daß das simulierte Fahrzeug aufgrund seiner geringen Spurbreite $T = 0.93$ m und der Höhe der Zusatzmasse im Vergleich zu realen Fahrzeugen leichter, d. h. schon bei geringerem Lenkeinschlag, umkippt. Wie im folgenden Experiment gezeigt wird, kann der RAC selbst bei dem angenommenen, kippgefährdeten Fahrzeug Stabilität erzielen.

Die Abtastzeit des zeitdiskreten RAC betrug $\Delta t = 0.01$ Sekunden. Die Lenkdynamik wurde als PT_2 -System angenommen, mit einer Kennkreisfrequenz $\omega_{0,L} = 10 \pi$ rad/s und einer Dämpfung $D_L = 2/\sqrt{2}$, die zum schnellsten Einschwingen führt. Die Einschwingzeit der Lenkdynamik berechnet sich damit zu $T_{\text{ein}} = 3/(\omega_{0,L} D_L) = 0.135$ Sekunden. Die Reserve ϵ wurde mittels Simulationen und Experimenten heuristisch zu $\epsilon = 0.1$ bestimmt. In den durchgeführten Experimenten hat es sich gezeigt, daß die Näherung aus Anmerkung 5.1 gültig ist und sich daher die Berechnung des Invarianzwinkels (5.16) zu (5.17) vereinfachen ließ. Zur Lösung der impliziten Gleichung (5.17) wurde das Optimierungsverfahren *Goldener-Schnitt* [97] angewendet, da dieses Verfahren ohne die zeitliche Ableitung von Φ auskommt. Damit konnte der Wert des Invarianzwinkels mit einer relativen Fehlertoleranz kleiner 0.001 nach maximal fünf Optimierungsschritten ermittelt werden.

Um den Fehler, der durch die nicht modellierte Nickbewegung des Fahrzeugs entsteht (siehe Abschnitt 5.2) klein zu halten, wurde die Geschwindigkeit auf einen konstanten Sollwert $v_0 = 50$ km/h geregelt. Als Eingangsgröße steht dafür die Winkelgeschwindigkeit ω_F der Front-Antriebsräder zur Verfügung, so daß sich mit einem Reifenradius r_0 der Sollwert der Radwinkelgeschwindigkeiten zu $\omega_F^s = v_0/r_0$ berechnet. Als Regelgesetz wurde heuristisch das zeitdiskrete Regelgesetz

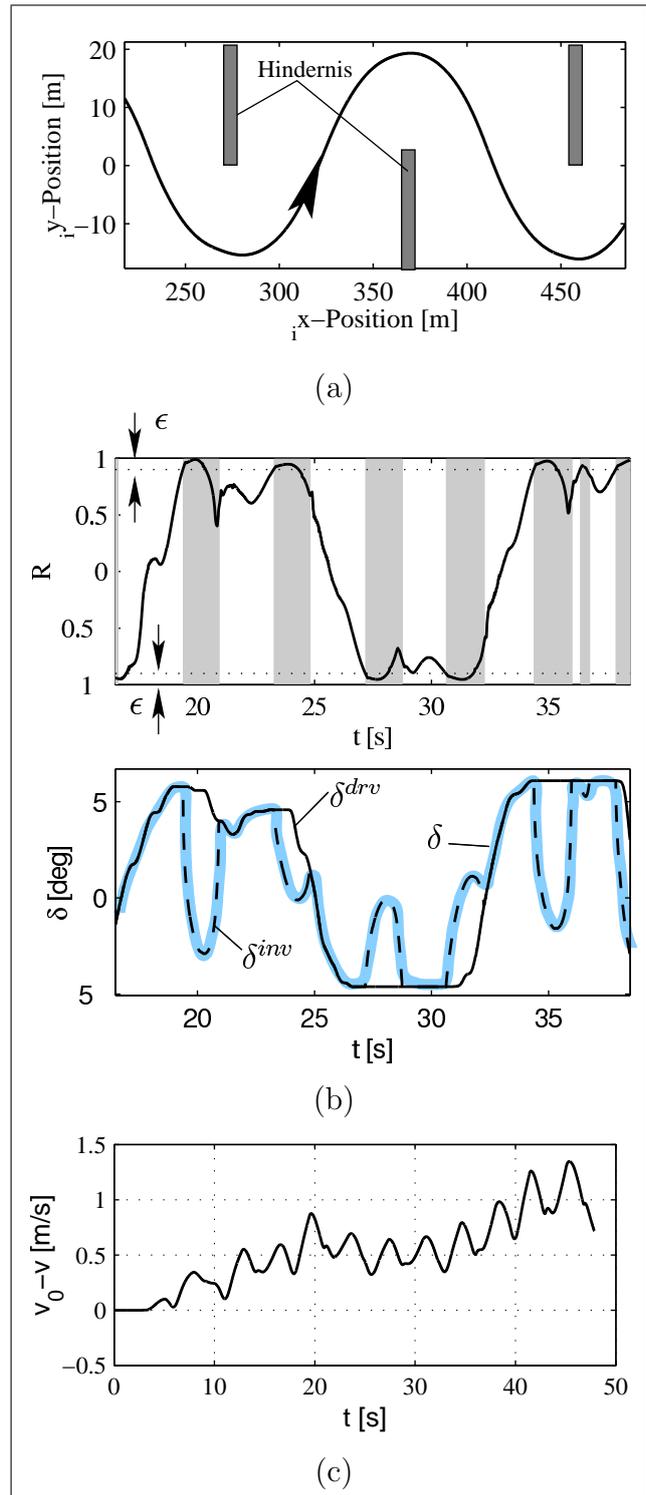
$$\omega_{F,k+1} = \omega_{F,k} + K_k (\omega_F^s - \omega_{F,k})$$

mit einem veränderlichen Verstärkungsfaktor $K_k = 0.03 \omega_{F,k}$ gewählt. In den damit durchgeführten Experimenten zeigte sich, daß dieses einfache Regelgesetz ausreichte, um die Fahrzeuggeschwindigkeit in einen genügend schmalen Bereich um die Sollgeschwindigkeit zu begrenzen, siehe Abb. 5.5.3 (c).

5.5.3 Experimente

In Abb. 5.5.3 (a) wird ein vom geschulten Fahrer gelenktes Slalom-Manöver mit drei Hindernissen gezeigt. Der vom Fahrer vorgegebene Winkel δ^{drv} ist im unteren Teilbild von Abb. 5.5.3 (b) als durchgezogene Linie aufgetragen. Sobald der Betrag des Überschlags-Koeffizienten (Abb. 5.5.3 (b) oben) den Schwellwert $1 - \epsilon$ übersteigt, wird der Invarianzregler aktiv und wählt den in Abb. 5.5.3 (b) unten gestrichelt dargestellten Lenkwinkel δ^{inv} . Aufgrund der Lenkdynamik überschreitet $|R|$ zwar den Schwellwert $1 - \epsilon$, allerdings ist zu erkennen, daß die Reserve ϵ ausreichend groß gewählt ist, um \mathcal{G} invariant zu halten. Bei diesem Manöver wäre das Fahrzeug ohne RAC bereits beim erstmaligen Eintauchen des Systemzustands in die ϵ -Umgebung umgekippt, da R den Wert $+1$ mit der Wahl des Lenkwinkels δ^{drv} überschritten hätte. Wie in Abb. 5.5.3 (c) gezeigt, weicht die Kfz-Geschwindigkeit vom Sollwert $v_0 = 50 \text{ km/h} = 13.8 \bar{\text{m}}/\text{s}$ nur geringfügig ab, so daß die eingangs angenommene Vernachlässigung der Nickdynamik gerechtfertigt ist.

Abbildung 5.7.: (a) x - y -Bahn; (b) oben: aktive Zeitbereiche des RAC sind grau gekennzeichnet; unten: Lenkwinkel; (c) Geschwindigkeitsabweichung.



Zusammenfassung und Bewertung

Die in diesem Abschnitt dargestellte, *zeitdiskrete* Version eines Invarianzreglers erweitert die bestehende Theorie dahingehend, daß bereits bei einem Abstand ϵ zum Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ Maßnahmen zur Erhaltung der Invarianz getroffen werden. Diese Methode ist auf eine größere Systemklasse verallgemeinerbar, so daß die *zeitkontinuierlichen* Invarianzregler der vorangegangenen Kapitel für *zeitdiskrete* Implementierungen erweitert werden können. Außerdem kann die hier vorgestellte Idee, ein mittels Systemanalyse gewonnenes Stabilitätsgebiet invariant zu regeln, für eine Vielzahl unterschiedlicher Anwendungen genutzt werden. So sind beispielsweise in sozio-ökologischen Systemen oder bei chemischen Prozessen Zustandsraumbereiche bekannt, in denen ein ökologisches/bzw. chemisches Gleichgewicht, und damit Stabilität gewährleistet ist [20].

Betrachtet man den Nutzen von Invarianzregelung bei der speziellen Anwendung zur Überschlagsvermeidung von Kraftfahrzeugen, so läßt sich feststellen, daß mit den Vorschriften zur Bestimmung der Reserve ϵ Beschränktheit nachweisbar ist. Des Weiteren ist der RAC-Entwurf nicht auf lineare Fahrzeugmodelle beschränkt, sondern kann, wie im vorliegenden Fall durchgeführt, auch auf nichtlineare Fahrzeugmodelle angewendet werden.

Der in einem Fahrsimulator getestete RAC basiert auf einer heuristischen Bestimmung der Reserve ϵ . Da die vorgestellte Methode zur Berechnung von ϵ konservative Abschätzungen verlangt, muß in zukünftiger Forschungsarbeit untersucht werden, wie brauchbar die damit erzielbaren Ergebnisse sind, d. h. wie stark der RAC die Lenkfreiheit des Fahrers einschränkt.

Des Weiteren ist eine Verbesserung der haptischen Schnittstelle zum Menschen nötig: Die Fahrer konnten das am Lenkhebel rückgekoppelte Moment erst nach einiger Übung richtig interpretieren, so daß eine Überlagerung der gewählten Momentenkennlinie mit den tatsächlich am Reifen angreifenden Kräften und Momenten als notwendig erscheint.

Zusätzlich ist durch das Einbeziehen der Längsbeschleunigung als eine weitere Steuergröße eine Verbesserung des Fahrverhaltens zu erwarten. Durch die Reduzierung der Fahrzeuggeschwindigkeit verringert sich während eines Kurvenfahrmanövers die Querschleunigung, so daß sich tendenziell die gleiche Wirkung wie bei der Rücknahme des Lenkwinkels ergibt. Dadurch könnte der minimal erzielbare kippfreie Kurvenradius des Fahrzeugs reduziert werden, was zum einen eine spätere Ausweichreaktion des Fahrers zum anderen auch bei weniger breiten Straßen ein erfolgreiches Ausweichmanöver erlauben würde.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde das Stabilisierungsproblem von E-/A-linearisierten SISO-Systemen mit einer am Systemausgang nicht beobachtbaren, internen Dynamik betrachtet. Klassische, auf Ausgangsrückführung basierende Regelungen erzielen bei solchen Systemen zwar ein stabiles E-/A-Verhalten, das Gesamtsystem kann jedoch aufgrund einer möglicherweise instabilen internen Dynamik instabil werden. So kann die Systemtrajektorie nach Abklingen des transienten E-/A-Verhaltens gegen eine instabile Bahn der Nulldynamik, oder bereits nach endlicher Zeit gegen eine Singularität in der zeitlichen Lösung (*finite escape*) streben.

Die in dieser Arbeit eingeführte, neuartige Regelungsmethode der Invarianzregelung löst dieses Stabilitätsproblem, indem neben der Forderung nach asymptotisch stabiler E-/A-Dynamik ein gegebenes, beschränktes Zustandsraumgebiet invariant gehalten wird, d. h. die Systemtrajektorie soll das Gebiet nicht verlassen. Aufgrund der Beschränktheit des Invarianzgebiets sind auch die Systemzustände für alle Zeiten beschränkt, so daß Beschränktheit der internen Dynamik garantiert wird.

Das zentrale Problem dieses Regelungskonzepts besteht darin, daß sich die Regelziele der Invarianz eines gegebenen Zustandsraumgebiets sowie der asymptotischen E-/A-Stabilität einander widersprechen können. Damit müßte eines der beiden Ziele zugunsten des anderen aufgegeben werden. Der Hauptbeitrag dieser Arbeit liegt darin, praktisch erfüllbare Bedingungen an das invariant zu haltende Zustandsraumgebiet sowie an das asymptotisch E-/A-stabilisierende Regelgesetz zu finden, bei deren Einhaltung ein solcher Konflikt vermieden wird. Der aus diesen Bedingungen resultierende Existenz-Satz für Invarianzregler stellt die Grundlage für die in dieser Arbeit vorgestellten beiden Invarianzregler-Entwurfsverfahren dar. Eine Erweiterung auf Robustheit gegenüber ungenau bekannten Systemparametern stellt dabei die Anwendbarkeit von Invarianzregelung in realen Systemen sicher.

Das erste Entwurfsverfahren basiert auf einem schaltenden, bilinearen Regelgesetz für das E-/A-linearisierte Teilsystem und ist für eine allgemein gehaltene Systemklasse anwendbar. Ein Nachteil der damit erzeugten Invarianzregler besteht darin, daß bei Systemen mit einer nur lokal stabilen Nulldynamik, die erzielbaren Invarianzgebiete und damit die stabilen Einzugsbereiche der Regelung u. U. sehr klein ausfallen. Daher wurde für die häufig auftretende Unterklasse der Rang-2-Systeme ein weiteres Entwurfsverfahren für Invarianzregler entwickelt, mit dem, im Fall nur lokal stabiler Nulldynamik, weit ausgedehnte Zustandsraumgebiete invariant gehalten werden können. Dabei wird von speziellen Systemeigenschaften des bei Rang-2-Systemen definitionsgemäß auftretenden Doppelintegratorsystems Gebrauch gemacht.

Das für die allgemeinere Systemklasse anwendbare Entwurfsverfahren wurde an einem Simulationsbeispiel ausführlich getestet. Für das auf Rang-2-Systeme spezialisierte, zweite Entwurfsverfahren stand ein Experimentalsystem zur Verfügung: So wurde beispielhaft für die Klasse der nichtlinearen, unteraktuierten Rang-2-Systeme der unteraktuierte Experimentalroboter R2D1 mit einem als nichtminimalphasig gewählten Systemausgang durch Invarianzregelung stabilisiert. Dieses System wurde in einer Konfiguration betrieben, in der die Nulldynamik nur lokal stabil ist und das *finite escape* Stabilitätsproblem auftreten kann. R2D1 repräsentiert daher eine in der Technik häufig vorkommende und bisher nicht mit einem großen Einzugsbereich stabilisierbare Systemklasse. Des Weiteren konnte experimentell nachgewiesen werden, daß ein robuster Invarianzregler tatsächlich das durch eine Zusatzmasse gestörte Robotersystem stabilisiert. Damit weist robuste Invarianzregelung die für reale Einsatzfälle notwendigen Robustheitseigenschaften gegenüber Parameterschätzfehlern auf.

Die bis dahin behandelte Invarianzregelung setzte *zeitkontinuierliche* und *stetig-differenzierbare* Systeme voraus. Am Beispiel der Überschlagsvermeidung von Kraftfahrzeugen mit erhöhtem Schwerpunkt wird zusätzlich ein Ausblick darauf gegeben, daß Invarianzregelung auch zur Stabilisierung *nicht stetig-differenzierbarer* Regelstrecken mit *Totzeiten* im Regelkreis und einer *zeitdiskreten* Implementierung eingesetzt werden kann. Dabei wurde die Kfz-Dynamik durch einen realitätsnahen Fahrsimulator ersetzt. Der experimentelle Charakter entstand durch einen, mit einer haptischen Schnittstelle verbundenen, menschlichen Fahrer, so daß der Invarianzregler zusätzlich mit dem nicht-prädizierbaren menschlichen Eingriff zurecht kommen mußte.

Eine Bewertung der hier vorgestellten Invarianzregelung im Vergleich mit bestehenden, Ljapunov-basierten Regelungsverfahren ergibt, daß Invarianzregelung wesentlich weni-

ger restriktive Systemvoraussetzungen fordert und der Entwurfsprozeß einfacher ist. So benötigt Invarianzregelung nur auf der Berandung des invariant zu haltenden Zustandsraumgebiets eine Abstiegsbedingung, wohingegen bei Ljapunov-basierten Verfahren eine solche Bedingung im gesamten Gebietsinnern notwendig ist.

Der mit dem hohen Entwurfsaufwand bei Ljapunov-basierten Verfahren erkaufte Vorteil liegt in der asymptotischen Stabilität des geregelten *Gesamtsystems*. Demgegenüber erzielt das hier vorgestellte Verfahren der Invarianzregelung lediglich Begrenztheit des internen Systemzustands und asymptotische E-/A-Stabilität.

Aufgrund der Verwandtschaft zu Ljapunov-basierten Verfahren ergeben sich bei Invarianzregelung ähnliche Robustheitseigenschaften gegenüber ungenau geschätzten Systemparametern. Die zur Robustifizierung benötigten Berechnungen vereinfachen sich jedoch bei Invarianzregelung, da auch hier nur der Gebietsrand, und nicht das gesamte Gebietsinnere betrachtet werden muß. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit Invarianzregelung eine, gegenüber Ljapunov-basierten Verfahren vereinfachte, Regelungsstrategie zur Verfügung steht, die durch ihre Robustheitseigenschaften auch in realen Systemen einsetzbar ist.

Eine mögliche, vielversprechende Fortführung dieser Arbeit liegt in der Weiterentwicklung der *dynamischen Invarianzregelung*, bei der sich das Invarianzgebiet mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf einzelne Gleichgewichtspunkte zusammenzieht oder gegen eine einzelne, stabile Phasenbahnen expandiert. Damit ist eine Erweiterung auf asymptotische *Gesamtsystemstabilität* möglich.

Zusätzlich könnte die in dieser Arbeit verwendete harte Umschaltung der Reglerparameter am Rand des Invarianzgebiets und die dadurch erzeugte Unruhe im System durch eine zeitkontinuierliche Adaptionstrategie verbessert werden.

Des Weiteren ist eine Anwendung von Invarianzregelung zur Lösung des bei adaptiven (im Sinne des Erlernens unbekannter Systemparameter), nichtlinearen Systemen auftretenden Stabilitätsproblems denkbar. So könnte der Zustandsraum um die Menge der adaptierten Parameter erweitert, und ein beschränktes Zustandsraumgebiet invariant gehalten werden. Dadurch wäre Gesamtsystemstabilität auch während des Adaptionvorgangs der unbekannt Systemparameter gewährleistet.

Eine weitere mögliche Anwendungen von Invarianzregelung liegt in der Stabilisierung von MIMO-Systemen. Die dazu notwendige Erweiterung des Begriffs der Unteraktuertheit kann sich auf den in der Literatur bekannten, *vektorwertigen* relativen Rang des Systems stützen. Im Unterschied zum SISO-Fall enthält die Bedingung zum Invari-

anthalten eines gegebenen Zustandsraumgebiets im MIMO-Fall mehrere Steuergrößen. Dies bringt den Vorteil mit sich, daß bei Auftreten eines Fluchtpunktes bezüglich einer Steuergröße noch weitere unabhängige Steuergrößen zum Invarianthalten zur Verfügung stehen und daher das Fluchtpunkt-Problem entschärft wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit dieser Arbeit die theoretische Grundlage für Invarianzregelung für eine allgemein gehaltene Systemklasse erforscht, und durch zwei Entwurfsmethoden sowie zwei Experimente ergänzt wurde. Damit ist zum einen die Grundlage weiterer Erforschung der Regelung unteraktuierter Systeme gelegt worden, zum anderen liegen für den Entwickler anwendbare Entwurfsverfahren vor, wodurch eine Brücke zwischen Theorie und Praxis geschlagen wurde.

A Mathematische Definitionen

Radial unbegrenzte Funktionen

Eine Funktion $W(\mathbf{x})$ ist *radial unbegrenzt* (engl. *radially unbounded* [47]), wenn die Bedingung

$$|W(\mathbf{x})| \rightarrow \infty \iff \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (\text{A.1})$$

gilt. Daraus folgt, daß eine Konturfläche $\{\mathbf{x} \mid W(\mathbf{x}) = c\}$, $c = \text{const}$, begrenzt ist, falls $W(\mathbf{x})$ radial unbegrenzt ist.

Definitheit einer Funktion

Eine Funktion $f(x)$ ist *positiv-definit*, wenn die Bedingung

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ = 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

gilt. *Negative Definitheit* folgt analog mit einem strikten $<$ -Ungleichheitszeichen. Falls anstatt der strikten Ungleichheitszeichen ein \geq bzw. \leq steht, so ist f *positiv-semidefinit* bzw. *negativ-semidefinit*.

Marginale Funktion

Gegeben sei eine nicht näher spezifizierte Grundmenge \mathcal{Z} für eine Variable z sowie eine Gütefunktion $\phi(x, z)$. Die *marginale Funktion* (auch *Master-Funktion* genannt) $f(x)$ wird nach [82] (S. 168) durch

$$f(x) = \inf_{z \in \mathcal{Z}} [\phi(x, z)]$$

definiert. Analog ist auch eine Definition mit dem sup-Operator möglich [43], Kapitel 2.2.

Verschiedene Darstellungen der zeitlichen Ableitung entlang einer Systemtrajektorie

Betrachtet wird ein System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{A.2}$$

mit einem genügend oft differenzierbaren Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, einer genügend oft differenzierbaren Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ sowie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Die zeitliche Ableitung von $h(\mathbf{x})$ entlang der Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ berechnet sich zu

$$\dot{h}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{(A.2)}}{=} \frac{dh(\mathbf{x})^T}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dh(\mathbf{x})^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

und kann in der praktischen Form der *Lie-Ableitung*

$$\dot{h}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$$

ausgedrückt werden. Die wiederholte Anwendung der Lie-Ableitung nach zum Beispiel zweier Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ergibt sich zu

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{d(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}))^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) .$$

Falls die Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ k -fach nach der Zeit entlang der Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ abgeleitet werden soll, wird die Schreibweise $L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x})$ benützt, d. h. es ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = \frac{d(L_{\mathbf{f}}^{k-1}h(\mathbf{x}))^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) .$$

Ljapunov-Funktion, Regelungs-Ljapunov-Funktion (CLF) und RCLF

Sei $V(\mathbf{x})$ eine positiv-definite, radial unbegrenzte, glatte Funktion. Falls die zeitliche Ableitung von $V(\mathbf{x})$ entlang der Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ von System (A.2) negativ-semidefinit ist, so wird V als *Ljapunov-Funktion* bezeichnet [73].

Eine Ljapunov-Funktion stellt eine verallgemeinerte Energiefunktion des zugrundeliegenden Systems dar. Daraus ist anschaulich klar, daß das System asymptotisch stabil ist, wenn außerhalb des Ursprungs $\dot{V} < 0$ und im Ursprung $\dot{V} = 0$ gilt. Falls nur $\dot{V} \leq 0$ gilt, sind die Zustandsvariablen des Systems begrenzt, so daß nur Stabilität im Sinne von Ljapunov folgt. In einigen Fällen läßt sich jedoch der Satz von LaSalle anwenden, um auch im negativ-semidefiniten Fall asymptotische Stabilität nachzuweisen. Dabei muß geprüft werden, ob die einzige positiv invariante Menge der Menge von Punkten $\{\mathbf{x} \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ der Ursprung ist.

Falls ein System stabil ist, existiert eine Ljapunov-Funktion. Falls umgekehrt keine Ljapunov-Funktion existiert, ist das System instabil.

Es wird nun ein unreguliertes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \tag{A.3}$$

betrachtet, das gegenüber System (A.2) um eine Steuervariable $u \in U$ erweitert wurde. U bezeichnet dabei den zulässigen Bereich von u . Eine positiv-definite, radial unbegrenzte, glatte Funktion $V(\mathbf{x})$ ist eine Regelungs-Ljapunov-Funktion (engl. *control Lyapunov-function*, kurz: CLF), falls

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \inf_{u \in U} \nabla V(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) < 0$$

gilt, [43]. Dies bedeutet, daß eine CLF ein Kandidat für eine Ljapunov-Funktion ist, deren zeitliche Ableitung durch eine geeignete Wahl von u negativ gemacht werden kann.

Falls \mathbf{f} affin in u ist, so ist nach [74] die Existenz einer CLF hinreichend für Stabilisierbarkeit mit glatten Regelgesetzen.

Falls ein asymptotisch stabilisierendes Regelgesetz $u(\mathbf{x})$ für System (A.3) existiert, existiert auch eine CLF.

Eine *robust control Lyapunov-function* (RCLF) ist eine CLF, die für alle Elemente einer Menge von Systemen gültig ist. Diese Systemmenge entsteht durch Perturbation eines Nominalsystems.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Existenz einer Ljapunov-Funktion notwendig und hinreichende Argumente für die Stabilität eines geregelten Systems liefert, während die Existenz einer CLF notwendig und hinreichende Argumente für die Stabilisierbarkeit eines unregulierten Systems bereit stellt [43].

Ljapunov-Gleichung

Betrachtet werde ein lineares System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u .$$

Eine quadratische Ljapunov-Kandidatsfunktion sei $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ mit einer quadratischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{P} > 0$. Die zeitliche Ableitung von V entlang der Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ ergibt sich zu

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u .$$

Daraus erkennt man, daß ein lineares Regelgesetz $u = -R^{-1}/2 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ mit einer positiven Konstanten $R > 0$ zu einer negativ definiten zeitlichen Ableitung

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - R^{-1} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}^T) \mathbf{x}$$

führt, falls die Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - R^{-1} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

mit einer positiv definiten Matrix $\mathbf{Q} > 0$ erfüllt ist. Betrachtet man das geregelte System mit einer geregelten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T$, so folgt die Ljapunov-Gleichung

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q} .$$

Erweiterte Definition von Ljapunov-Funktionen

Es wird eine stetige, aber nicht zwangsläufig differenzierbare, positiv-definite, konvexe Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Des Weiteren soll V radial unbegrenzt sein. Sei \mathbf{x}_0 ein stetig-differenzierbarer Punkt auf einer Fläche $V(\mathbf{x}) = c$. Dann wird die Tangentialebene durch \mathbf{x}_0 mit der impliziten Gleichung

$$h(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0) + \nabla V(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \stackrel{!}{=} 0$$

beschrieben [79]. Falls $h(\mathbf{x}) > 0$ gilt, folgt, daß \mathbf{x} zwischen der Tangente und der Fläche $V(\mathbf{x}) = 0$ liegt. Andernfalls liegt \mathbf{x} außerhalb.

Diese Betrachtung kann auf nicht-differenzierbare Punkte \mathbf{x}^K (Knickpunkt) der Fläche $V(\mathbf{x}) = c$ erweitert werden. So definiert man alle Ebenen, für die $h(\mathbf{x}^K) \leq 0$ gelten, als *Subtangentialebenen*. Die Menge aller Subtangentialebenen in \mathbf{x}^K wird als *Subdifferential* $\partial V(\mathbf{x}^K)$ bezeichnet. In Abb. A.1 ist im zweidimensionalen Fall das Konzept des Subdifferentials sowie der Subtangentialebenen veranschaulicht.

Definiert man unter Verwendung des Subdifferentials die zeitliche Ableitung von V entlang der Trajektorie eines Systems der Form (A.2) als

$$\dot{V}^{sub}(\mathbf{x}) = \sup [\partial V^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})] ,$$

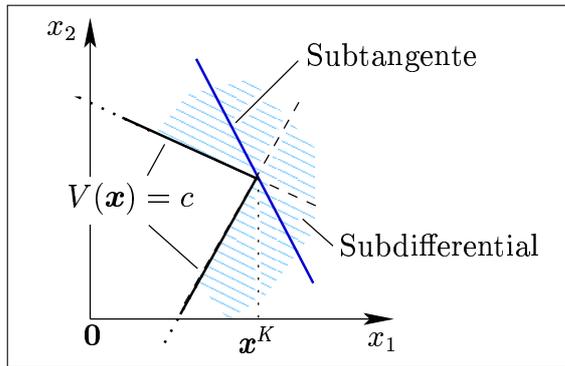


Abbildung A.1: Veranschaulichung des Subdifferentials.

so gilt

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t \dot{V}^{sub}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau .$$

Daraus folgt, daß die Funktion V entlang der Systemtrajektorie $\mathbf{x}(t)$ nicht zunimmt, falls die Abstiegsbedingung

$$\dot{V}^{sub}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Damit läßt sich zeigen, daß die für stetig-differenzierbare Ljapunov-Funktionen bekannten Stabilitätsresultate auf die hier definierte Klasse nicht glatter Funktionen übertragen werden können, [73].

Abschätzung der Ableitung der sign-Funktion

Betrachtet werde ein System

$$\dot{y} = f(y)$$

mit $f(0) = 0$. Die zeitliche Ableitung der Funktion $s(y) = \text{sign}[y] y$ entlang der Trajektorie $y(t)$ ist bei $y = 0$ nicht definiert, da der Gradient $\nabla(\text{sign}[y] y)$ durch die Unstetigkeit von $\text{sign}[y] y$ an der Stelle $y = 0$ nicht definiert ist. Oftmals ist jedoch nur ein Supremum von $\dot{s}(y)$ erforderlich, so daß eine Erweiterung des Gradienten von $\text{sign}[y] y$ zu der Menge (Subdifferential)

$$\nabla(\text{sign}[y] y) \begin{cases} = \text{sign}[y] & \text{für } y \neq 0 \\ \in [-1; 1] & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

zur Abschätzung

$$\max \left[\frac{d}{dt} (\text{sign}[y] y) \right] = \max [\nabla(\text{sign}[y] y) \dot{y}] = \begin{cases} \text{sign}[y] \dot{y} & \text{für } y \neq 0 \\ \max[-\dot{y}, +\dot{y}] = 0 & \text{für } y = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

nach unten beschränkt ist. Anschaulich bedeutet dies, daß es zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Mindestschwingrate gibt. Daneben liegt ein weiterer Vorteil exponentieller Stabilität darin, daß ein System, das im Nominalfall exponentiell stabil ist, bei ausreichend schwacher Perturbation der Systemparameter immer noch asymptotisch stabil ist. Ein nominell asymptotisch stabiles System hingegen kann selbst bei kleinsten Perturbationen bereits instabil werden.

Man klassifiziert Regelgesetze durch die erzielten Stabilitätseigenschaften. Dabei ist neben den oben genannten Arten von Stabilität noch eine weitere Unterscheidung hinsichtlich des Gültigkeitsbereichs im Zustandsraum üblich: Ein Regler ist *lokal* stabilisierend, wenn das geregelte System nur in einem begrenzten Bereich des Zustandsraums stabil ist. Man spricht von *semiglobaler* Stabilität, wenn es für jeden Anfangspunkt ein, möglicherweise unterschiedliches, stabilisierendes Regelgesetz gibt. Ein Regelgesetz ist *global* stabilisierend, wenn es für *alle* Anfangspunkte stabil ist.

B Zusammenstellung von Beweisen und Herleitungen

B.1 Beweis von Satz 2.2

Beweis: Im Bereich $\xi \in \mathcal{V}$ hält $\bar{u} = 0$ das Gebiet \mathcal{G} positiv invariant, da damit für die zeitliche Ableitung von Φ die Ungleichung $\nabla\Phi^T(\xi) \bar{f}(\xi) \leq 0$ gilt und folglich die Invarianzbedingung (2.22) erfüllt ist. Im Bereich $\xi \notin \mathcal{V}$ kann wegen der Offenheit von \mathcal{V} immer eine positive Konstante $\epsilon > 0$ so gefunden werden, daß $|\nabla\Phi^T(\xi) \bar{g}(\xi)| \geq \epsilon$ gilt. Daraus folgt, daß es immer einen endlichen Wert für \bar{u} gibt, so daß die Invarianzbedingung (2.22) erfüllt ist. ■

B.2 Beweis von Korollar 2.1

Beweis: Falls das durch Tangentlinearisierung gewonnene, lineare System vollständig steuerbar und beobachtbar ist, existiert immer ein Regelgesetz, das den Ursprung des zugrundeliegenden Gesamtsystems (2.9) zumindest lokal asymptotisch stabilisiert. Daraus folgt die Existenz eines offenen, lokal um den Ursprung des Gesamtsystems gelegenen und invarianten Zustandsraumgebiets, das durch eine radial unbegrenzte Invarianzfunktion Φ implizit definiert werden kann. ■

B.3 Beweis von Satz 2.3

Beweis:

Fall 1 $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{U}$: \mathcal{G} ist positiv invariant, da $\dot{\Phi} \leq 0$ gilt und damit die Invarianzbedingung (2.41) innerhalb von \mathcal{U} erfüllt ist.

Fall 2 $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \notin \mathcal{U}$: Definitionsgemäß gilt $\nabla\Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g}) \neq 0$. Damit und wegen der Definition der Signum-Funktion gemäß $\text{sign}[0] = 0$ folgt aus (2.46) die Bedingung $\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} \neq 0$ und es gilt (2.43). Des Weiteren ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.43) und (2.46) aus (2.41) die zeitliche Ableitung von Φ zu

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \stackrel{(2.43),(2.46)}{\leq} \nabla\Phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} - c(\|\mathbf{x}\|) \left| \nabla\Phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \right|. \quad (\text{B.1})$$

Daher existiert für jeden beliebig großen, positiven Wert von $\nabla\Phi^T(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{f})$ immer ein ausreichend negativ großer Wert für $-c(\|\mathbf{x}\|)$, so daß $\dot{\Phi} \leq 0$ gilt und damit die Invarianzbedingung erfüllt ist.

Wegen $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0 \implies u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow 0$ muß sich nach Voraussetzung von Fall 2 \mathbf{x} außerhalb einer offenen Umgebung von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ befinden. Nach Bedingung 2.1 existiert daher immer ein Parametervektor \mathbf{k} so, daß $-c(\|\mathbf{x}\|)$ jeden beliebigen negativen Wert annehmen kann. Daher kann die Invarianzbedingung $\dot{\Phi} \leq 0$ erfüllt werden.

Begrenztheit der Reglerparameter: Der Term $\nabla\Phi^T(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{f})$ ist begrenzt, da $\|\mathbf{z}\|$ nach Voraussetzung auf $\partial\mathcal{G}$ begrenzt ist und $\|\mathbf{x}\|$ wegen der geforderten asymptotischen E-/A-Stabilität begrenzt ist. Weiterhin ist der Term $\nabla\Phi^T(\mathbf{b}, \mathbf{g})$ aufgrund der Stetigkeit des zugrundeliegenden Systems in $\partial\mathcal{G} \setminus \mathcal{U}$ betragsmäßig nach unten beschränkt. Daraus folgt, daß mit einem betragsmäßig beschränkten Wert der Steuergröße u die Invarianzbedingung $\dot{\Phi} \leq 0$ erfüllt werden kann. Endliche Werte der Steuergröße erfordern auch nur endliche Werte der Reglerparameter, solange sich u außerhalb einer offenen Umgebung von null befindet.

Notwendigkeit der Bedingung b): Annahme: Das Driftvektorfeld zeigt von \mathcal{G} weg, es gelte $\nabla V^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq -\nabla V^T \mathbf{b} u^{\text{inv}}$, die *sign-matching* Bedingung (2.46) gelte nicht und $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial\mathcal{G}$. Dann folgt $\dot{\Phi} \leq 0$ dann und nur dann wenn $\dot{V} = \nabla V^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \nabla V^T \mathbf{b} u^{\text{inv}} \geq 0$. ■

B.4 Beweis von Korollar 2.2

Beweis: *Hinreichend:* Zunächst wird gezeigt, daß eine genügend kleine, offene Umgebung des beschränkten Gebiets der Nulldynamikebene und ein darin definiertes Regelgesetz existiert, so daß darin das geregelte Gesamtsystem asymptotisch stabil gegen das beschränkte Gebiet der Nulldynamikebene konvergiert: Dies trifft zu, da es zum einen für das linearisierte Teilsystem eine asymptotisch stabile Regelung gibt. Zum anderen

muß gezeigt werden, daß die Trajektorie des geregelten Gesamtsystems für alle Zeiten definiert ist, also keine Instabilität nach endlicher Zeit auftreten kann. Ein durch eine Tangentenlinearisierung gewonnenes und in der Nähe der Nulldynamikebene gültiges lineares Ersatzsystem ist immer Lipschitz-stetig. Damit kann in einer genügend kleinen Umgebung des beschränkten Gebiets der Nulldynamikebene die Existenz und Eindeutigkeit nachgewiesen werden.

Nach Ljapunovscher Stabilitätstheorie existiert eine Ljapunov-Funktion V für das Gesamtsystem in einer genügend kleinen Umgebung der Nulldynamikebene, da es ein stabilisierendes Regelgesetz gibt. Eine Konturfläche $V = c$, ($c > 0$, konstant, ausreichend klein) dieser Ljapunov-Funktion stellt eine Invarianzgebietsberandung $\partial\mathcal{G}$ dar, so daß eine Invarianzfunktion durch $\Phi = V - c$ gegeben ist.

Für eine Ljapunov-Funktion gilt zwingend $\dot{V} < 0$ für alle Punkte außerhalb des Ursprungs. Daher existiert die in a) aus Satz 2.3 geforderte, offene ϵ -Umgebung.

Bedingung b) aus Satz 2.3 ist ebenfalls erfüllt, da es sich dabei um eine *notwendige* Bedingung für die Existenz eines Invarianzregelgesetzes und damit auch für eine Ljapunov-Funktion handelt.

Notwendig: Die Notwendigkeit folgt trivial aus der Forderung a) von Satz 2.3 im Fall $u = 0$. ■

B.5 Beweis von Satz 3.1

Beweis: Das lineare Teilsystem (2.16) wird mit dem unterlagerten Regelgesetz (3.16) in die Form (3.18) überführt. Da es sich dabei um ein bilineares System handelt, können Stabilitätsbeweismethoden geschalteter linearer Systeme nicht angewendet werden. Ein Beweis mittels *multipler Ljapunov-Funktionen* [66] führt nur zum Nachweis von Ljapunov-Stabilität oder asymptotische Stabilität [71] und ist daher gleichfalls nicht brauchbar. Aus diesem Grund wird exponentielle Stabilität im Folgenden durch einen direkten Nachweis der definitionsgemäßen notwendigen Eigenschaften bewiesen. Im Folgenden bezeichnet $\lambda_{\max}[\cdot]$ ($\lambda_{\min}[\cdot]$) den maximalen (minimalen) Eigenwert einer gegebenen Matrix.

Asymptotische Stabilität: Unter Berücksichtigung von (A.5) und (3.17) kann die zeitliche Ableitung \dot{S} von (3.2) entlang der Systemtrajektorie von (3.18) durch

$$\begin{aligned} \dot{S} &\leq -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} + 2y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} + \max \left[\frac{d}{dt} \text{sign}[y] y \right] \\ &\stackrel{\text{(A.5)}}{=} -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} + 2y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} + \text{sign}[y] \dot{y} \\ &\stackrel{\text{2. Zeile von (3.17),(3.18)}}{=} -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} - \text{sign}[y] y \alpha(t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

abgeschätzt werden. Mit (3.2), (3.17) und (B.2) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\dot{S}}{S} &\leq -\frac{\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\eta} + |y| \alpha(t)}{\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} + |y|} \leq -\frac{\lambda_{\min}[\mathbf{W}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y| \alpha^*}{\lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y|} \\ &\leq -\frac{\min[\lambda_{\min}[\mathbf{W}_{11}], \alpha^*] (\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y|)}{\max[\lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}], 1] (\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y|)}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\dot{S} \leq -\zeta S$ mit der Konstanten

$$\zeta = \min[\lambda_{\min}[\mathbf{W}_{11}], \alpha^*] / \max[\lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}], 1].$$

Asymptotische Stabilität folgt, da die Speicherfunktion $S(t)$ gemäß

$$S(t) \leq S_0 e^{-\zeta t}, \quad S_0 = S(0) \quad (\text{B.3})$$

asymptotisch stabil gegen null abnimmt und $S = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\eta}, y) = (\mathbf{0}, 0)$ gilt.

Exponentielle Stabilität: Für exponentielle Stabilität muß sich die Speicherfunktion $S(t)$ durch eine Norm des Systemzustands $(\boldsymbol{\eta}, y)$ nach unten und oben abschätzen lassen. Eine entsprechende *obere Schranke* ist dabei durch

$$S \leq \lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + y^2 + \frac{1}{4} \quad (\text{B.4})$$

gegeben, da $S \leq \lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y|$ und, wie in Abb. B.1 skizziert, die Ungleichungsbedingung $|y| \leq y^2 + 1/4$ gilt. Eine *untere Schranke* für S ist mit

$$S \geq \begin{cases} \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + y^2 & \text{für } \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y| \leq 1 \\ (\lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + y^2)^{1/2} & \text{für } \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y| > 1 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

gegeben, da $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\eta} \geq \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}$ und für den ersten Fall von (B.5) die logische Argumentationskette

$$\lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + |y| \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq |y|$$

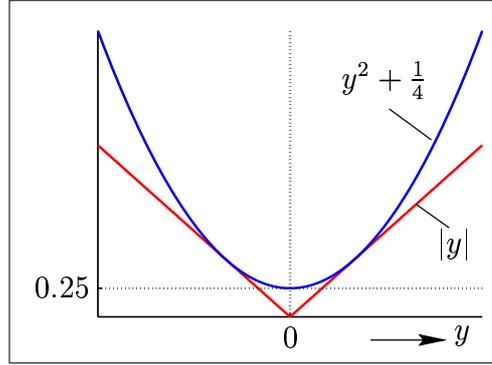


Abbildung B.1: Eine obere Schranke für $|y|$ ist durch $y^2 + 1/4$ gegeben.

gilt. Der zweite Fall von (B.5) folgt aus der Überlegung, daß mit $a = \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} \geq 0$ und $b = |y| \geq 0$ die Speicherfunktion gemäß $S \geq a + b$ abgeschätzt werden kann und die logische Argumentationskette

$$\begin{aligned} a + b \geq 1 &\Rightarrow a + 2b \geq 1 \Rightarrow a(a + 2b) \geq a \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq a + b^2 \\ &\Rightarrow (a + b)^2 \geq a + b^2 \Rightarrow a + b \geq (a + b^2)^{1/2} \end{aligned}$$

gilt.

Mit den Konstanten $\underline{\varrho} = \min[1, \lambda_{\min}[\mathbf{P}_{11}]]$, $\bar{\varrho} = \max[1, \lambda_{\max}[\mathbf{P}_{11}]]$, $d = (\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + y^2)^{1/2}$ und $d_0 = d(0)$ ergibt sich aus (B.3), (B.4) und dem ersten Fall von (B.5) die folgende Abstiegsbedingung für $d^2(t)$:

$$d^2(t) \leq e^{-\zeta t} (\bar{\varrho} d_0^2 + 1/4) / \underline{\varrho}. \quad (\text{B.6})$$

Mit der vom Anfangswert d_0 abhängigen Konstanten $K_1(d_0) = ((\bar{\varrho} d_0^2 + 1/4) / (\underline{\varrho} d_0^2))^{1/2}$ sowie $d_0 \neq 0$ folgt schließlich

$$d(t) \leq K_1(d_0) d_0 e^{-\zeta/2 t}. \quad (\text{B.7})$$

Für den zweiten Fall von (B.5) ergibt sich analog zum ersten Fall

$$d(t) \leq e^{-\zeta t} (\bar{\varrho} d_0^2 + 1/4) / \underline{\varrho}^{1/2}.$$

Mit der Konstanten $K_2(d_0) = (\bar{\varrho} d_0^2 + 1/4) / (\underline{\varrho}^{1/2} d_0)$ und $d_0 \neq 0$ folgt daraus

$$d(t) \leq K_2(d_0) d_0 e^{-\zeta t}. \quad (\text{B.8})$$

Aus (B.7) und (B.8) folgt schließlich die globale Abstiegsbedingung

$$d(t) \leq \max [K_1(d_0), K_2(d_0)] d_0 e^{-\zeta/2t} ,$$

die das Regelziel der exponentiellen Stabilität definitionsgemäß für jeden Anfangszustand erfüllt. Es ist zu beachten, daß die Konstante $\max [K_1(d_0), K_2(d_0)]$ vom Anfangswert d_0 abhängt. Trotzdem liegt *globale* exponentielle Stabilität vor, da das zugrundeliegende Regelgesetz (3.16),(3.17) nicht von $(\boldsymbol{\eta}(0), y(0))$ abhängt. ■

B.6 Beweis von Korollar 3.1

Beweis: 1. Die Nebenbedingung *i)* aus (3.27) hat bezüglich der Variablen $\boldsymbol{\eta}$ und \boldsymbol{z} begrenzte Konturflächen, d. h. sie ist radial unbegrenzt bezüglich $\boldsymbol{\eta}$ und \boldsymbol{z} . Für ein konstantes $C > 0$ kann damit weder $\|\boldsymbol{\eta}\|$ noch $\|\boldsymbol{z}\|$ gegen Unendlich streben.

2. Die Gütefunktion $\sigma(\boldsymbol{\eta}, y, \boldsymbol{z})$ kann aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von $\hat{g}(\boldsymbol{\eta}, y, \boldsymbol{z})$ nur dann gegen Unendlich streben, wenn die Norm mindestens einer Zustandsvariablen gegen Unendlich strebt. Aus diesem Grund kann ausgeschlossen werden, daß die Gütefunktion wegen $\|\boldsymbol{\eta}\|$ oder $\|\boldsymbol{z}\|$ gegen Unendlich strebt, da beide wegen dem Fall 1 begrenzt sind.

3. Falls die Gütefunktion gegen Unendlich strebt, kann dies nur wegen $|y| \rightarrow \infty$ sein. Wegen $S(\cdot, |y| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ und $\sigma(\cdot, |y| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ folgt aber, daß Nebenbedingung *i)* aus (3.27) auch gegen Unendlich streben würde, so daß mit einem endlichen Wert für $C > 0$ die Nebenbedingung *i)* verletzt wäre. ■

B.7 Beweis von Satz 3.2

Beweis:

i)-ii) Folgt unmittelbar aus Satz 2.3, da alle dafür notwendigen Bedingungen erfüllt sind.

iii) Da das lineare Teilsystem (2.16) exponentiell stabil ist, existiert ein Zeitpunkt, ab dem $|y| < \epsilon$ gilt und wegen der erfüllten Bedingung *a)* aus Satz 2.3 (hier (3.25)) die Trajektorie nicht mehr an den Gebietsrand stoßen kann. Daher tritt nach diesem Zeitpunkt kein weiteres Schalten auf. Da außerdem wegen $\dot{\Phi}^{\max} > 0$ kein Schnattervorgang entlang des Gebietsrands $\partial\mathcal{G}$ auftritt, ist die Zahl der Umschaltungen von $\alpha(t)$ endlich.

iv) Auf \mathcal{U} ist die Aussage trivial erfüllt, da hier $\partial\mathcal{G}$ nicht mehr berührt wird und daher kein Schalten stattfindet. Im Bereich $\partial\mathcal{G} \setminus \mathcal{U}$ gilt wegen der erfüllten *sign-matching* Bedingung (3.26) für die zeitliche Ableitung von Φ

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}, \alpha(t)) = & \nabla\Phi^T(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}_{12}y \\ -2 \operatorname{sign}[y] y \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\eta} \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \end{bmatrix} + \\ & - \left| \nabla\Phi^T(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}, y, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \right| |y| \alpha(t) . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Wegen der speziellen, affinen Abhängigkeit der zeitlichen Ableitung $\dot{\Phi}$ von α in (B.9) folgt die Beziehung

$$\dot{\Phi}(t_{i+1}, \alpha(t_{i+1})) < \dot{\Phi}(t_{i+1}, \alpha(t_i)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t_{i+1}) > \alpha(t_i) ,$$

so daß die Behauptung aus *iv)* bewiesen ist. ■

B.8 Beweis von Satz 3.3

Beweis: *i)* Da wegen (3.55) beide Eigenwerte λ_1, λ_2 des geregelten linearen Teilsystems rein reell, negativ und unterschiedlich sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Relation $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ angenommen werden. Des weiteren wird o.B.d.A. zur Vereinfachung für den Sollwertparameter $x_1^* = 0$ angenommen. Um eine explizite Darstellung der Phasenbahn $x_2(x_1)$ zu erhalten, wird mit der Vander Monde-Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

die Koordinatentransformation $\mathbf{x} = \mathbf{M} \mathbf{z}$ durchgeführt, so daß sich die Modalform $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$ mit Lösung $z_i(t) = z_i(0) e^{\lambda_i t}$, $i \in \{1, 2\}$ ergibt. Löst man $z_1(t)$ nach t auf und ersetzt damit t in $z_2(t)$, so folgt als Phasenbahn

$$z_2(z_1) = z_{20} \left| \frac{z_1}{z_1(0)} \right|^\epsilon \quad (\text{B.10})$$

mit $\epsilon = \lambda_2/\lambda_1$. Es wird nun angenommen, daß die Ungleichungsbedingung $x_2 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \geq 0$ und damit

$$z_2(t) \leq -\epsilon^{-1} z_1(t) \quad (\text{B.11})$$

für $t \geq 0$ gilt. Mit der Phasenbahn (B.10) folgt daraus

$$z_2(0) \left| \frac{z_1}{z_1(0)} \right|^\epsilon \leq -\epsilon^{-1} z_1. \quad (\text{B.12})$$

Die in (3.56) vorausgesetzte Anfangsbedingung $x_2(0) \geq 0$ bedeutet in \mathbf{z} -Koordinaten $z_2(0) \leq -\epsilon^{-1} z_1(0)$. In (B.12) eingesetzt, folgt nach Kürzen von $\epsilon^{-1} > 0$

$$-z_1(0) \left| \frac{z_1}{z_1(0)} \right|^\epsilon \leq -z_1.$$

Für den Fall $z_1(0) > 0$ folgt

$$\left| \frac{z_1}{z_1(0)} \right|^\epsilon \geq \frac{z_1}{z_1(0)}$$

und daraus wegen $0 < \epsilon < 1$ und $z_1 \leq z_1(0) \Rightarrow 0 < z_1/z_1(0) \leq 1$ die Richtigkeit der Behauptung.

Für den Fall $z_1(0) < 0$ ist (B.11) auf triviale Weise erfüllt, da die Rücktransformation mit

$$z_2 = \frac{x_2 - \lambda_1 x_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

gegeben ist, daraus nach Voraussetzung (3.56) die Bedingung $z_2(t) \leq 0$ folgt und außerdem die rechte Seite $-\epsilon^{-1} z_1(t)$ wegen $z_1(0) < 0 \Rightarrow z_1(t) < 0$ positiv ist.

Im Fall $z_1(0) = 0$ gilt $z_1(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Damit folgt die Koordinatentransformation zu $x_1 = z_2$ und $x_2 = \lambda_2 z_2$. Nach Voraussetzung gilt $x_1(0) = z_2(0) \leq 0$ und daher $z_2(t) \leq 0$. Schließlich folgt $x_2(t) = \lambda_2 z_2(t) \geq 0$.

Zur Veranschaulichung ist in Abb. B.2 der zulässige Wertebereich für den Anfangspunkt $(x_1(0), x_2(0))$ des Doppelintegratorsystems zusammen mit einigen für den aperiodischen Einschwingfall charakteristischen Phasenbahnen abgebildet. Die Eigenvektoren des geregelten Systems sind mit \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 bezeichnet, wobei \mathbf{q}_1 dem schnelleren Eigenwert $\lambda^{\min} = \lambda_1$ zugeordnet ist. Man erkennt, daß eine Phasenbahn, die innerhalb des grauen Bereichs startet, in den Ursprung überführt wird, ohne daß x_2 während des Einschwingvorgangs zu null wird.

Reglerzustand `wait`: Falls zum Zeitpunkt t^* ein Nulldurchgang $x_2(t^*) = 0$ detektiert wird, wird in der Zustandsübergangsaktion `act(3)` der Sollwertparameter $x_1^*(t^*)$ auf den

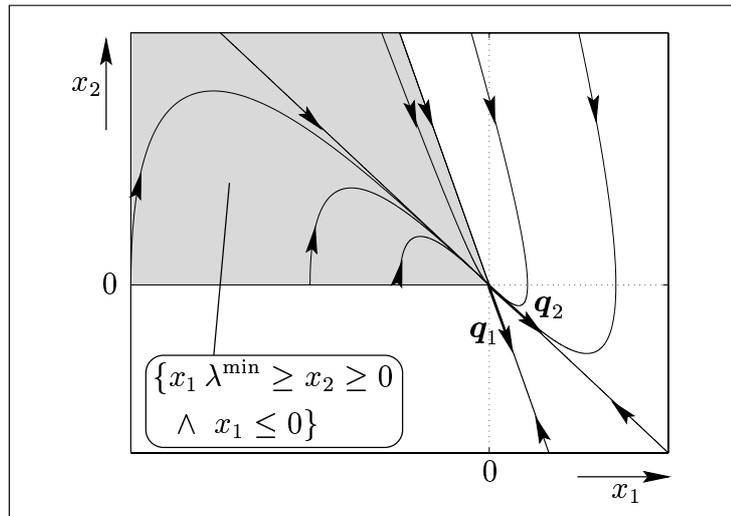


Abbildung B.2: Zulässiger Wertebereich für den Anfangspunkt $(x_1(0), x_2(0))$.

zum Detektionszeitpunkt aktuellen Wert von $x_1(t^*)$ geschaltet. Ab diesem Zeitpunkt wird *instantan* der Einschwingvorgang des linearen Teilsystems gestoppt und es gilt bis zum Rückschaltzeitpunkt zum Reglerzustand **approach** $x_1 = \text{const}$, $x_2 = 0$. Daraus folgt, daß während der aktiven Zeit des Reglerzustands **wait** die behauptete Ungleichungsbedingung $x_2(t) \geq 0$ gleichfalls zutrifft.

ii) Zum Beweis der asymptotischen Stabilität wird eine positiv definite, quadratische Ljapunov-ähnliche Funktion $V = 1/2 (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)$ mit zwei Konstanten $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$ eingeführt. Die zeitliche Ableitung von $V(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorie des mit dem geschalteten PD-Regler (3.50) geregelten linearen Teilsystems (3.46)-(3.47) ergibt sich für den Reglerzustand **approach** zu

$$\dot{V} = x_1 x_2 (p_1 - p_2 k_p) - p_2 k_{d,0} x_2^2 .$$

Mit der Wahl $p_1 = p_2 k_p$ folgt daraus $\dot{V} = -p_2 k_{d,0} x_2^2 \leq 0$. Wechselt der Regler zum Zeitpunkt t_i vom Zustand **approach** zum Zustand **wait**, so gilt auch hier $\dot{V} \leq 0$, da im neuen Reglerzustand **wait** durch die möglichen Zustandsübergangsaktionen *act(2)* und *act(3)* für x_1 und x_2 die Bedingungen

$$0 \geq x_1(t \geq t_i) \geq x_1(t = t_i) , \quad 0 \leq x_2(t \geq t_i) \leq x_2(t = t_i)$$

und damit $d/dt x_1^2(t) \leq 0$ und $d/dt x_2^2(t) \leq 0$ folgt.

Nach Voraussetzung wechselt nach *endlicher* Wartezeit der Regler vom Zustand **wait** zurück nach **approach** und konvergiert dort eine endliche Zeit lang gegen den Ursprung.

Dies reicht nach [71] zusammen mit LaSalle's Theorem [47] für asymptotische Stabilität des geschalteten linearen Teilsystems aus. ■

B.9 Beweis von Satz 3.4

Beweis: *i)* Aus (3.57) ist klar, daß mit γ^* aus (3.59) die Invarianzbedingung (3.57) im Falle $x_2 > 0$ durch Vergrößern von $k_d(t)$ und Verkleinern von $x_1^*(t)$ erfüllt werden kann. Dadurch ist die *sign-matching* Bedingung erfüllt.

ii) Bei Auftreffen der Systemtrajektorie auf $\partial\mathcal{G}$ wird nach dem maximalen Reduzieren des Sollwertparameters $x_1^*(t)$ auf die untere Schranke $x_1(t)$ die Geschwindigkeitsverstärkung $k_d(t)$ heraufgesetzt, um \mathcal{G} invariant zu halten. Mit jedem weiteren Erhöhen von $k_d(t)$ konvergiert $x_2(t)$ immer schneller gegen Null, so daß wegen der Voraussetzung (3.52) der Term

$$\frac{\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})^T}{\partial\mathbf{z}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (\text{B.13})$$

aus (3.57) gegen null oder einen negativen Wert strebt. Der durch

$$\frac{\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})^T}{\partial x_1} x_2 + \left(\frac{\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})^T}{\partial\mathbf{z}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \gamma^* \right) (k_p(x_1^*(t) - x_1) - k_d(t)x_2) \quad (\text{B.14})$$

eventuell verbleibende positive Anteil von $\dot{\Phi}$ kann durch einen genügend großen Wert von $k_d(t)$ bei Auftreffen der Systemtrajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ auf $\partial\mathcal{G}$ beliebig negativ gemacht werden. Begründung:

Fall $x_2 > 0$: Ein Erhöhen von $k_d(t)$ gemäß der Schaltfunktion $p(\bullet)$ kann nur dann stattfinden, wenn der Sollwertparameter $x_1^*(t)$ auf den minimal zulässigen (d. h. auf den zum Schaltzeitpunkt gültigen) Wert $x_1(t)$ zurückgeschaltet worden ist und daher $x_1^*(t) - x_1(t) = 0$ gilt.

Da das Einschwingen von $(x_1(t), x_2(t))$ *aperiodisch* ist, fällt wegen $x_2(t) > 0$ die Geschwindigkeit $x_2(t)$ *streng monoton ab* während eines Zeitintervalls, das länger als bis zum Zeitpunkt des Nulldurchgangs von $x_2(t)$ dauert. Durch Vergrößern des Wertes von $k_d(t)$ kann der Abklingvorgang von $x_2(t)$ beliebig beschleunigt werden. Zusammen mit $\dot{x}_2 = u$ folgt daraus, daß der Ausgang $u = k_p(x_1^*(t) - x_1) - k_d(t)x_2$ des geschalteten PD-Reglers während dieses Zeitintervalls durch einen ausreichend großen Wert von $k_d(t)$ beliebig negativ gemacht werden kann.

Da weiterhin $\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})/\partial\mathbf{z}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \gamma^* > 0$ gilt und der Term $\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})/\partial x_1$ in \mathcal{G} begrenzt ist, kann der Term (B.14) bei Auftreffen der Systemtrajektorie auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ für genügend große Werte von $k_d(t)$ beliebig negativ gemacht werden.

Fall $x_2 = 0$: Beim Nulldurchgang von $x_2(t)$ wird durch Angleichen des Sollwertparameters mittels der Zustandsübergangsaktionen $act(\beta)$ das Einschwingen des linearen Teilsystems instantan beendet, so daß ab diesem Zeitpunkt $u \equiv 0$ gilt. Die Invarianzbedingung (3.57) ist in diesem Fall inhärent, d. h. unabhängig vom geschalteten PD-Regelgesetz erfüllt. Dies folgt aus der Tatsache, daß (B.14) aufgrund der hier verwendeten, speziellen Schaltstrategie null ist, und wegen (3.52) der Term (B.13) negativ definit ist. Aus diesem Grund kann die Systemtrajektorie nach der Zustandsübergangsaktionen $act(\beta)$ nicht mehr auf den Gebietsrand $\partial\mathcal{G}$ treffen.

Um die Analyse zu vervollständigen, ist der Fall eines *gleichzeitigen* Nulldurchgangs von $x_2(t)$ und eines Auftreffens der Systemtrajektorie auf $\partial\mathcal{G}$ zu untersuchen: Ein Nulldurchgang kann nur stattfinden, wenn die Systemtrajektorie im Vorfeld bereits auf $\partial\mathcal{G}$ gestoßen ist und der Sollwertparameter x_1^* auf den aktuellen Wert von x_1 geschaltet wurde. Wegen einer zu diesem Zeitpunkt positiven Geschwindigkeit $x_2 > 0$ gilt in der Folge $x_1^*(t) - x_1(t) < 0$. Daraus kann man schließen, daß ein wiederholter Nulldurchgang von x_2 zusammen mit einem gleichzeitigen Auftreffen auf $\partial\mathcal{G}$ nicht möglich ist, da wegen $x_1^*(t) - x_1(t) < 0$ der Reglerausgang negativ ist und deshalb in einer genügend nahen Umgebung von Null von $x_2(t)$ der Term (B.14) negativ ist. Daraus folgt $\dot{\Phi} < 0$ und die Systemtrajektorie bewegt sich von $\partial\mathcal{G}$ weg.

Anmerkung B.1 Würde der Sollwertparameter nicht geschaltet werden, so würde der positive Anteil $(\partial\Phi_0(x_1, \mathbf{z})/\partial\mathbf{z} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \gamma^*) k_p (x_1^*(t) - x_1)$ aus (B.14) nicht negativ gemacht werden können. Dadurch entstünden Fluchtpunkte, was sich praktisch dadurch auswirkt, daß der Parameter $k_d(t)$ nach endlicher Zeit über alle Schranken anwächst, da x_2 mit jedem Vergrößern von $k_d(t)$ immer schneller gegen null abfällt.

iii) Asymptotische Stabilität: Innerhalb des Gebiets χ bewegt sich die Gesamtsystemtrajektorie $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ von $\partial\mathcal{G}$ weg ins Innere von \mathcal{G} hin. Dies führt – zusammen mit der Tatsache, daß χ definitionsgemäß offen und n -dimensional ausgedehnt ist – zu einer *endlichen Verweildauer* im Reglerzustand **approach**. Da damit alle Voraussetzungen von

Satz 3.3 erfüllt sind, folgt asymptotische Stabilität des geregelten linearen Doppelintegratorsystems. ■

B.10 Beweis von Satz 5.1

Beweis: Es wird gezeigt, daß \mathcal{G} invariant ist, d. h. daß für alle Zeitpunkte $\Phi \leq 0$ gilt. Dazu wird angenommen, daß die Trajektorie das reduzierte Gebiet $\hat{\mathcal{G}}$ zum Zeitpunkt t^* innerhalb des Abtastintervalls $t_{k-1} \leq t^* < t_k$ verlasse. Für die Invarianzfunktion $\Phi(t)$ folgt gemäß (5.10) die Abschätzung

$$\Phi(t^* \leq t < t_k + T_{t, \text{ges}}) \leq \Phi(t^*) + \epsilon = 0 . \quad (\text{B.15})$$

Zum Zeitpunkt $t = t_k + T_{t, \text{ges}}$ liegt der Invarianz-Winkel δ_k^{inv} an den Vorderrädern an und es folgt wegen (5.16) für die Invarianzfunktion

$$\Phi(t_k + T_{t, \text{ges}}) \leq -\epsilon . \quad (\text{B.16})$$

Setzt man dieses Ergebnis in der Berechnung des darauffolgenden Intervalls ein, so ist die Invarianzbedingung gleichfalls erfüllt:

$$\Phi(t_k + T_{t, \text{ges}} \leq t < t_{k+1} + T_{t, \text{ges}}) \leq \Phi(t_k + T_{t, \text{ges}}) + \epsilon = 0 . \quad (\text{B.17})$$

Damit ist gezeigt, daß zu allen Zeitpunkten $t \geq t^*$, in denen der Invarianzregler das Kfz lenkt, die Invarianzfunktion Φ nicht positiv ist, woraus Invarianz von \mathcal{G} folgt. ■

C Weitere Komponenten zur Invarianzregelung

In den folgenden zwei Abschnitten werden zwei weitere schaltende Regelgesetze für das lineare Teilsystem (2.16) so hergeleitet, das die Existenzbedingung 2.1 an ein Invarianzregelgesetz erfüllt ist. Dabei handelt es sich im Unterschied zu dem bilinearen Regelgesetz aus Abschnitt 3.1 um *lineare* schaltende Regler. Im dritten Abschnitt wird ein Verfahren zur analytischen Berechnung von Invarianzgebieten für das dissipativitätsbasierte Verfahren hergeleitet.

C.1 CLF-basiertes Invarianzregelgesetz

Schaltendes lineares Regelgesetz

Basierend auf der aus [43] bekannten Backstepping Methode zur Generierung von Regelungs-Ljapunov-Funktionen (CLF), wird ein lineares, geschaltetes Regelgesetz abgeleitet. Eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_i] = \mathbf{S} \boldsymbol{x}$ mit der Umkehrfunktion $\boldsymbol{x} = \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\kappa}$ und $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^r$ ist mit den Transformationsmatrizen

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 s_2 & -s_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \pm s_1 \cdots s_{r-1} & \mp s_2 \cdots s_{r-1} & \cdots & -s_{r-1} & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{r-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

gegeben, wobei das negative (positive) Vorzeichen in der letzten Zeile von \mathbf{S} für gerades (ungerades) r gültig ist. Setzt man das Regelgesetz

$$u(\mathbf{x}) = \kappa_r(\mathbf{x}) s_r \quad (\text{C.2})$$

in (2.16) ein und wendet die inverse Koordinatentransformation (C.1) an, so ergibt sich $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W} \boldsymbol{\kappa}$ mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{r-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & s_r \end{bmatrix}.$$

Damit folgt (2.16) in $\boldsymbol{\kappa}$ -Koordinaten zu

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{S} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S} \mathbf{W} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{P} \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{C.3})$$

mit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -s_1^2 & -s_1 + s_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ s_1^2 s_2 & s_1 s_2 - s_2^2 & -s_2 + s_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ & & & & -s_{r-1} + s_r \end{bmatrix}.$$

Mit $\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \mathbf{P}^T + \mathbf{P}$ folgt die zeitliche Ableitung von

$$V(\boldsymbol{\kappa}) = \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{C.4})$$

zu

$$\dot{V}(\boldsymbol{\kappa}) = \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\kappa}. \quad (\text{C.5})$$

Diese kann immer mit einer geeigneten Wahl von $\mathbf{Q} < 0$ negativ-definit gemacht werden, so daß (C.4) eine Ljapunov-Funktion für das geregelte, lineare Teilsystem (C.3) darstellt.

Mit der Schreibweise $D_k = \det [q_{i,j}], i, j \in \{1, \dots, k\}$ läßt sich \mathbf{Q} mittels des Sylvester-Kriteriums auf negative Definitheit gemäß

$$(-1) D_1(s_1) = -2s_1 > 0 \quad (\text{C.6})$$

$$(-1)^2 D_2(s_1, s_2) = -1 - 2s_1^2 - s_1^4 + 4s_1s_2 > 0 \quad (\text{C.7})$$

...

$$(-1)^r D_r(s_1, \dots, s_r) = (-1)^r \det [\mathbf{Q}] > 0 \quad (\text{C.8})$$

überprüfen. Durch Festlegen von $s_1 < 0$ ergibt sich in (C.7) eine Ungleichungsbedingung für s_2 . Setzt man s_1 und s_2 in $(-1)^3 D_2(s_1, s_2, s_3) > 0$ ein, so folgt eine Ungleichungsbedingung für s_3 . Mit diesem *Backstepping* Verfahren lassen sich alle r Parameter s_i geeignet festlegen. Im Originalraum (\mathbf{x} -Raum) ergibt sich das Regelgesetz (C.2) zu

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \kappa_r(\mathbf{S} \mathbf{x}) \\ &= s_r \begin{bmatrix} \pm s_1 \cdots s_{r-1} & \mp s_2 \cdots s_{r-1} & \cdots & -s_{r-1} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

und ist daher ein lineares Regelgesetz der Form

$$u(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.10})$$

mit

$$\mathbf{k}^T = -s_r(t) \begin{bmatrix} \pm s_1 \cdots s_{r-1} & \mp s_2 \cdots s_{r-1} & \cdots & -s_{r-1} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Beispiel C.1 Im Spezialfall $r = 2$ folgt die Ljapunov-Funktion zu $V = x_1^2 + (x_2 - s_1 x_1)^2$ und das Regelgesetz (C.2) ergibt sich zu $u = s_2 (x_2 - s_1 x_1)$. Dabei folgen aus (C.6) und (C.7) die Bedingungen $s_1 < 0$ und $s_2 < \frac{1+2s_1^2+s_1^4}{4s_1}$.

Verglichen mit einem PD-Regelgesetz $u = -k_p x_1 - k_d x_2$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die Beziehung $k_p = s_1 s_2$ und $k_d = -s_2$. Die Bedingung (C.7) ist in Abb. C.1 (a) visualisiert, indem die linke Seite der Ungleichung in einem Höhenliniendiagramm aufgetragen ist. Dabei markiert zusätzlich die gepunktete Linie den aperiodischen Grenzfall $k_d = 2 \sqrt{k_p}$ und man erkennt, daß sich die Reglerparametrierung nach dem CLF-basierten Verfahren über alle drei Einschwingfälle (periodisch, aperiodisch und aperiodischer Grenzfall) erstreckt, jedoch Teile des periodischen Einschwingverhaltens unterhalb der 0-Höhenlinie ausgrenzt. In Abb. C.1 (b) werden die möglichen Pole des geregelten Doppelintegratorsystems markiert. Dabei bildet sich der Bereich oberhalb der 0-Höhenlinie aus Abb. C.1 (a) in den umrandeten Bereich sowie die nach $-\infty$ laufende Linie mit Imaginärteil Null ab. Die Begrenzungslinie in Abb. C.1 (b) ergibt sich, wenn

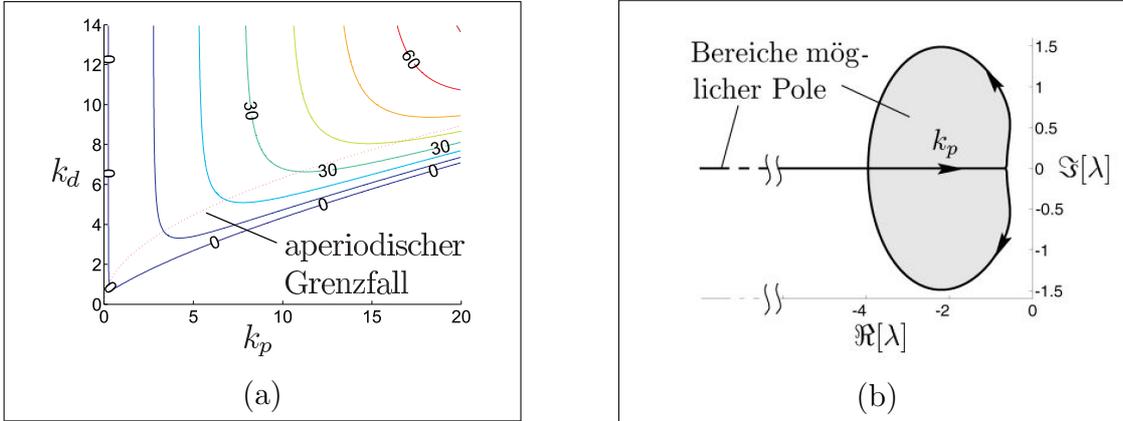


Abbildung C.1: Stabilitätskarte im Parameterraum und als Wurzelortskurve. (a) Bedingung (C.7) im k_p - k_d -Raum. Gepunktet: Aperiodischer Grenzfall. (b) Wurzelortskurve mit k_p als Parameter.

k_p den Wertebereich $0.25 < k_p < \infty$ durchläuft. Der Bereich $k_p \leq 0.25$ erfüllt, wie in Abb. C.1 (a) gezeigt, nicht mehr die Bedingung (C.7).

Wie im vorangegangenen Beispiel erläutert, schränkt die Reglerparametrierung des CLF-basierten Verfahrens das dynamische Einschwingverhalten gegenüber einem allgemeinen linearen Regelgesetz ein. Mit dieser Einschränkung wird die Freiheit erkauft, den Parameter s_r des CLF-basierten Regelgesetzes zu jeder Zeit auf jeden, die Ungleichung (C.8) erfüllenden Wert umschalten zu können, ohne dabei die exponentielle Stabilität des geregelten r -fach Integratorsystems zu beeinträchtigen. Dies wird im folgenden Satz formal bewiesen:

Satz C.1 Gegeben sei ein Wert s_r^* für s_r , so daß (C.8) erfüllt ist. Das lineare, schaltende Regelgesetz, das sich aus (C.9) mit $s_r(t)$ als Schaltparameter ergibt, stabilisiert unabhängig von der verwendeten Schaltstrategie das lineare Teilsystem (2.16) exponentiell im Ursprung, solange $s_r(t)$ die obere Schranke s_r^* nicht übersteigt.

Beweis: Die zeitliche Ableitung (C.5) kann durch $\dot{V} = \sigma(\boldsymbol{\kappa}, s_1 \dots s_{r-1}) + (s_r - s_{r-1}) \kappa_r^2$ ausgedrückt werden, wobei

$$\sigma(\boldsymbol{\kappa}, s_1, \dots, s_{r-1}) = \boldsymbol{\kappa}_r^T \mathbf{Q}_{r,r} \boldsymbol{\kappa}_r + 2 \kappa_r \sum_{i=1}^{r-1} q_{r,i} \kappa_i$$

und $\boldsymbol{\kappa}_r = [\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1}]^T$; die Matrix $\mathbf{Q}_{r,r} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$ ergibt sich aus \mathbf{Q} , wenn die r te Zeile und Spalte gestrichen wird.

Da s_r^* die Ungleichungsbedingung (C.8) erfüllt, gilt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $s_r = s_r^*$ die Bedingung $\dot{V} < 0$. Dies – zusammen mit der Tatsache, daß die Funktion $\sigma(\boldsymbol{\kappa}, s_1, \dots, s_{r-1})$ nicht vom Parameter s_r abhängt – erlaubt den Schluß, daß $\dot{V} < 0$ für alle $s_r \leq s_r^*$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Da V eine positiv-definite und quadratische Funktion ist, stellt sie für die *Familie der linearen, geschalteten Systeme*, die sich aus der Regelstrecke (2.16) mit Regelgesetz (C.9) und Schaltparameter $s_r(t) \leq s_r^*$ zu

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^T s_r(t)) \mathbf{x} \quad (\text{C.12})$$

ergibt, eine *gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion* dar. Aus der Stabilitätstheorie hybrider Systeme ist bekannt, daß die Existenz einer solchen gemeinsamen quadratischen Ljapunov-Funktion für ein lineares geschaltetes System eine notwendige und hinreichende Bedingung für exponentielle Stabilität darstellt, siehe z. B. [71]. ■

Mit diesem schaltenden Regelgesetz kann ein Invarianzregler durch eine geeignete Umschaltstrategie von $s_r(t)$ erzeugt werden, da die beiden Anforderungen *i)* und *ii)* der Existenzbedingung 2.1 für einen Invarianzregler erfüllt sind:

i) Eine Grundmenge \mathcal{K} zulässiger Regelparametervektoren ist durch (C.11) gegeben, wenn der freie Parameter s_r gemäß $s_r \leq s_r^*$ variiert wird.

ii) Wegen

$$\frac{dV(\boldsymbol{\kappa})^T}{d\boldsymbol{\kappa}} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial x_r} = 2 \boldsymbol{\kappa}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \kappa_r$$

folgt nach Einsetzen des Regelgesetzes (C.9)

$$\begin{aligned} \text{sign} [\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) &= \text{sign} \left[\frac{dV(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}))^T}{d\boldsymbol{\kappa}} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial x_r} \right] s_r \kappa_r(\mathbf{x}) \\ &= \text{sign} [2 \kappa_r(\mathbf{x})] s_r \kappa_r(\mathbf{x}) = 2 |\kappa_r(\mathbf{x})| s_r \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

und man erkennt, daß s_r für alle $\kappa_r(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ immer so stark negativ gewählt werden kann, daß $\text{sign} [\nabla V^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] u(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ beliebig negativ wird und (2.43) erfüllt ist.

Invarianzgebiet

In diesem Abschnitt werden Vorschriften zur Berechnung geeigneter Zustandsraumgebiete der Struktur

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \gamma \kappa_r^2(\mathbf{x}) \quad (\text{C.14})$$

vorgestellt. Dabei soll die Funktion $\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ radial unbeschränkt und regulär für den Wert 0 sein, was durch stetige Differenzierbarkeit von $\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ erfüllt ist. Die Regularität von Φ_0 bei 0 sichert die Existenz und Eindeutigkeit des Gradienten $\nabla\Phi_0$ auf $\partial\mathcal{G}$. Die geforderte Differenzierbarkeit kann mit Hilfe einer Erweiterung des Differentialoperators ∇ auf den Subdifferentialoperator auch auf den Fall der reinen Stetigkeit ohne Differenzierbarkeit erweitert werden.

Die *sign-matching* Bedingung (Punkt b) aus Satz 2.3 folgt zu

$$\text{sign} \left[\nabla\Phi_0^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} + 2\gamma \kappa_r(\mathbf{x}) \right] \stackrel{!}{=} \text{sign} [\kappa_r(\mathbf{x})] \quad \forall(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial\mathcal{G} \setminus \mathcal{U} . \quad (\text{C.15})$$

Die Berechnung einer oberen Schranke ϵ^* für ϵ (von \mathcal{U}) kann durch die Optimierungsvorschrift

$$\begin{aligned} \epsilon^* &= \max [\epsilon] \\ \text{u. d. N. } (i) \quad & \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{U}(\epsilon)} \left[\nabla\Phi_0^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \right] < 0 \\ (ii) \quad & \epsilon > 0 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

erfolgen. Damit läßt sich γ durch folgende Optimierungsvorschrift konservativ abschätzen:

$$\gamma > \frac{1}{2\epsilon^*} \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \partial\mathcal{G} \setminus \mathcal{U}(\epsilon^*)} \left| \nabla\Phi_0^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \right| . \quad (\text{C.17})$$

Anmerkung C.1 Eine Vereinfachung ergibt sich für den wichtigen Spezialfall, daß die Funktion Φ_0 nicht von \mathbf{x} abhängt und das zugrundeliegende System in eingangsnormalisierter Normalenform (siehe [39]) vorliegt, d. h. wenn der Einkoppelterm $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ in (2.16)-(2.17) entfällt. In diesem Fall ergibt sich der erste Summand im Argument der sign Funktion in (C.15) zu Null, so daß die *sign-matching* Bedingung immer erfüllt ist, $\gamma > 0$ willkürlich gewählt werden kann und ϵ^* nicht mehr berechnet werden muß.

Unter der Annahme, daß Bedingung a) aus Satz 2.3 (Fluchtpunktbedingung und lokal stabile Nulldynamik) sowie die *sign-matching* Bedingung erfüllt ist, kann Satz 3.2 für das

hier hergeleitete CLF-basierte Verfahren angewendet werden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß der schaltende Parameter $s_r(t)$ (anstatt $\alpha(t)$) ist, $s_r(0)$ die Bedingung (C.8) erfüllen muß und die Folge der Werte für $s_r(t)$ streng monoton fällt.

Diskussion der erzielbaren Stabilität

Die Einhaltung der *sign-matching* Bedingung kann ohne weitere Einschränkungen an den ersten Summanden aus (C.15) nicht garantiert werden, da γ mit dem Term κ_r gewichtet ist. Ein Nachteil des beschriebenen CLF-basierten Invarianzreglers liegt also im Wesentlichen darin, daß die *sign-matching* Bedingung nur in Spezialfällen erfüllbar ist. Wie im Abschnitt 3.1 gezeigt, kann durch den Einsatz eines nicht glatten, bilinearen Regelgesetzes die Einhaltung der *sign-matching* Bedingung stets garantiert werden.

Zusätzlich zur robusten Invarianz, ist robuste exponentielle Stabilität des linearen Teilsystems (2.16) durch einen auf *Robust-Control-Lyapunov Functions* (RCLF) basierenden linearen backstepping Reglerentwurf erreichbar. Während man beim dissipativitätsbasierten und passivitätsbasierten Verfahren nur aufgrund der exponentiellen Stabilität Robustheit gegenüber kleinen Parameterperturbationen besitzt, existiert in [43] eine ausführliche Entwurfsmethodik zur Robustifizierung des geschaltet geregelten, linearen Teilsystems. Dies stellt den wesentlichen Vorteil des CLF-basierten Verfahrens dar.

C.2 Passivitätsbasiertes Invarianzregelgesetz

Schaltendes lineares Regelgesetz

Für das lineare Teilsystem (2.16) wird im Folgenden ein passivierendes Zustandsregelgesetz hergeleitet. Dazu wird die Koordinatentransformation (3.9)-(3.11) aus Abschnitt 3.1.2 angewendet und das lineare Teilsystem (2.16) in (ξ, y) -Koordinaten der Form (3.12)-(3.13) überführt.

Wendet man anstatt des unterlagerten Regelgesetzes (3.16) das Regelgesetz

$$u = \frac{1}{\nu_r} (v - 2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \xi - \mathbf{q}_{21} \xi - q_{22} y) \quad (\text{C.18})$$

an, so ergibt sich aus (3.12)-(3.13)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{Q}_{11} \xi + \mathbf{q}_{12} y \\ \dot{y} &= v - 2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \xi . \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Um zu zeigen, das dieses System passiv ist, wird die zeitliche Ableitung der Funktion

$$S = \xi^T \mathbf{P}_{11} \xi + \frac{1}{2} y^2 \quad (\text{C.20})$$

entlang der Trajektorie $(\boldsymbol{\xi}(t), y(t))$ des Systems (C.19) zu

$$\dot{S}(\boldsymbol{\xi}(t), y(t)) = -\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\xi} + y v \quad (\text{C.21})$$

berechnet. Da die Passivitätsbedingung $\dot{S}(\boldsymbol{\xi}(t), y(t)) \leq y v$ gilt und S eine differenzierbare, positiv-definite Funktion ist, ist das geregelte System (C.19) zwischen dem neuen Systemausgang y und der virtuellen Steuergröße v passiv mit S als Speicherfunktion [59, 52].

Satz C.2 Gegeben sei eine beliebige positive Konstante α^* und eine Funktion $\alpha(t)$, die die Bedingung

$$\alpha(t) \geq \alpha^* > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{C.22})$$

erfüllt und sonst beliebig gewählt ist. Das lineare Teilsystem (2.16) ist mit der passivierenden Zustandsrückführung (C.18) und dem virtuellen Regelgesetz

$$v = -\alpha(t) y \quad (\text{C.23})$$

global exponentiell stabil.

Beweis: Die Funktion S stellt mit dem Regelgesetz (C.23) und unter Einhaltung der Bedingung (C.22) eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion für die Familie geschalteter linearer Systeme (C.19) dar, da S radial unbegrenzt und die zeitliche Ableitung

$$\dot{S} = -\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\xi} - \alpha(t) y^2 \quad (\text{C.24})$$

auf dem gesamten Teilzustandsraum des geregelten linearen Teilsystems (d. h. für alle $(\boldsymbol{\xi}, y) \in \mathbb{R}^r$) negativ-definit ist. Daraus folgt z.B. nach [71] globale exponentielle Stabilität. ■

Das resultierende Regelgesetz ergibt sich aus der passivierenden Zustandsrückführung (C.18) zusammen mit dem Regelgesetz (C.23) der virtuellen Steuergröße v zu

$$u = \frac{-1}{\nu_r} ((\alpha(t) + q_{22}) y + (2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{q}_{21}) \boldsymbol{\xi}) . \quad (\text{C.25})$$

Dabei handelt es sich um ein lineares Regelgesetz der Form (C.10) mit dem zeitvariablen Reglerparametervektor

$$\mathbf{k}^T(t) = \begin{bmatrix} 2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{q}_{21} & \alpha(t) + q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \nu^T \end{bmatrix} . \quad (\text{C.26})$$

Das lineare System (C.19) in $(\boldsymbol{\xi}, y)$ -Koordinaten ergibt zusammen mit der internen Dynamik (2.17) das mit dem unterlagerten Regelgesetz (C.18) geregelte Gesamtsystem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ y \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{b}} v \\ \dot{z} &= \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, y, z) + \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}, y, z) v \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

mit den Systemmatrizen des linearen Teilsystems

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{q}_{12} \\ -2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix},$$

den Vektorfeldern des nichtlinearen Teilsystems

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \mathbf{g} \nu_r^{-1} (2 \mathbf{q}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}_{21} \boldsymbol{\xi} + q_{22} y)$$

und $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \nu_r^{-1}$, sowie der virtuellen Steuergröße v als Eingangsgröße. Im Folgenden wird anstatt des ursprünglichen Systems (2.16)-(2.17) das System (C.27) betrachtet, da mit einer geeigneten Umschaltstrategie für $\alpha(t)$ des Regelgesetzes (C.23) für (C.27) die beiden Anforderungen *i)* und *ii)* der Existenzbedingung 2.1 erfüllt sind:

- i)* Da das Regelgesetz von System (C.27) nur einen Reglerparameter $\alpha(t)$ besitzt, ist die Grundmenge \mathcal{K} zulässiger Regelparametervektoren hier durch die skalare Menge $\alpha > \alpha^* > 0$ gegeben.
- ii)* Um zu zeigen, daß auch Punkt *ii)* aus Bedingung 2.1 erfüllt ist, wird die linke Seite aus (2.43) in den $(\boldsymbol{\xi}, y)$ -Raum transformiert und das Einkoppelvektorfeld $\hat{\mathbf{b}}$ aus (C.27) eingesetzt. Wählt man als Ljapunov-Funktion die Speicherfunktion (C.20), so ergibt sich damit

$$\text{sign} \left[\nabla S^T(\boldsymbol{\xi}, y) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \right] v(y, \alpha(t)) = \text{sign}[y] v(y, \alpha(t)) \stackrel{(\text{C.23})}{=} -|y| \alpha(t).$$

Daraus folgt, daß für $y \neq 0$ der Parameter $\alpha(t)$ immer so groß positiv gewählt werden kann, daß die Ungleichungsbedingung (2.43) erfüllt ist.

Invarianzfunktion und Schaltstrategie

Analog zur Invarianzfunktion (C.14) des CLF-basierten Verfahrens, läßt sich für das passivitätsbasierte Verfahren ein geeignetes Invarianzgebiet implizit mittels einer Invarianzfunktion der Form

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}, y, z) = \Phi_0(\boldsymbol{\xi}, z) + \gamma S(\boldsymbol{\xi}, y, \alpha) - C \quad (\text{C.28})$$

definieren, wobei C eine positive Konstante ist. Die zeitliche Ableitung der Invarianzfunktion entlang des mit (C.23) geregelten Systems (C.27) ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, y, z, \alpha) &= \dot{\Phi}_0(\boldsymbol{\xi}, y, z) + \gamma \dot{S}(\boldsymbol{\xi}, y, z, \alpha) \\ &\stackrel{(\text{C.21}), (\text{C.27})}{=} \frac{d\Phi_0(\boldsymbol{\xi}, z)^T}{d(\boldsymbol{\xi}, z)} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}_{12} y \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, y, z) \end{bmatrix} - \gamma \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}_{11} \boldsymbol{\xi} + \\ &\quad - \left(\frac{\partial \Phi_0(\boldsymbol{\xi}, z)^T}{\partial z} \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}, y, z) + \gamma y \right) \alpha(t) y . \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Daraus folgt, daß mit Einhaltung der Bedingung

$$\frac{d\Phi_0(\boldsymbol{\xi}, z)^T}{d(\boldsymbol{\xi}, z)} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, 0, z) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\xi}, y, z) \in \partial \mathcal{G} \cap \{y = 0\} \quad (\text{C.30})$$

und der *sign-matching* Bedingung

$$\text{sign} \left[\frac{\partial \Phi_0(\boldsymbol{\xi}, z)^T}{\partial z} \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\xi}, y, z) + \gamma y \right] \stackrel{!}{=} \text{sign} [y] \quad \forall (\boldsymbol{\xi}, y, z) \in \partial \mathcal{G} \setminus \mathcal{U} \quad (\text{C.31})$$

Satz 3.2 auch für das in diesem Abschnitt hergeleitete, passivitätsbasierte Regelgesetz gilt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß der geschaltete Parameter $\alpha(t)$ (anstatt $s_r(t)$) ist und die Folge der Schaltparameter streng monoton ansteigt (anstatt streng monoton abfällt). Eine obere Schranke ϵ^* für ϵ (aus \mathcal{U}) sowie eine marginale Funktion $\gamma(C)$ als untere Schranke für γ kann analog zu den Optimierungsproblemen (C.16) und (C.17) bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Existenz einer Funktion $\gamma(C)$ nur für ausreichend kleine Werte von C gesichert ist, d. h. es können u. U. nur *lokale* Aussagen getroffen werden.

Bewertung und Vergleich mit CLF-basierter Methode

Die Diskussion der erzielbaren Stabilität des vorangegangenen Abschnitts ist gleichfalls für das passivitätsbasierte Verfahren gültig. Für robuste Stabilität des geregelten linearen Teilsystems steht jedoch beim passivitätsbasierten Ansatz keine Entwurfsmethodik

zur Verfügung. Da die erzielte Stabilität jedoch exponentiell ist, besitzt auch das nominal geregelte lineare Teilsystem gegenüber kleinen Parameterperturbationen Robustheitseigenschaften [47].

Weiterhin ist anzumerken, daß die in (3.7) angenommene, in \boldsymbol{x} lineare Ausgangsfunktion auch durch bestimmte nichtlineare Ausgangsfunktionen ersetzt werden kann. Eine eingehende Abhandlung dazu findet sich in [59].

Ein wesentlicher Vorteil des passivitätsbasierten Verfahrens gegenüber dem CLF-basierten Verfahren besteht darin, daß die notwendige Bedingung a) aus Satz 2.3 (Fluchtpunktbedingung und lokal stabile Nulldynamik) durch die zur Auswahl stehenden Ausgangsfunktionen vom Typ (3.7) leichter zu erfüllen ist. Diese Entwurfsfreiheit ist beim CLF-basierten Verfahren nicht gegeben, da durch das zugrundeliegende Backstepping-Verfahren (C.6)-(C.8) zur Berechnung der CLF-Reglerparameter s_i die endgültige Form der CLF-Reglerfunktion $\kappa_r(\boldsymbol{x})$ nicht direkt beeinflussbar ist.

Ein weiterer Vorteil des passivitätsbasierten Verfahrens besteht in der freien Polvorgabe des linearen geregelten Systems. Wie am Beispiel C.1 erläutert wurde, steht beim CLF-basierten Verfahren nur ein kleiner Bereich der komplexen Polebene für eine entsprechende Polvorgabe des geregelten Systems zur Verfügung.

C.3 Invarianzgebietssynthese für die dissipativitätsbasierte Methode

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur analytischen Synthese fluchtpunktfreier Invarianzgebiete für die dissipativitätsbasierte Invarianzregelung hergeleitet. Wie bereits in Abschnitt 3.1.4 angemerkt wurde, stellt eine Ljapunov-Funktion für die Nulldynamik (3.31)-(3.32) immer eine geeignete Invarianzfunktion dar.

Da die meisten Methoden zur Berechnung einer Ljapunov-Funktion nur numerische Näherungen liefern, wurde das folgende Verfahren zur *analytischen* Reihenentwicklung einer Invarianzfunktion entwickelt: Es wird eine radial unbegrenzte Funktion $W_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z})$ gesucht, die so viele Terme wie möglich von

$$\dot{W}_0 \Big|_{y=0} = \frac{dW_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z})}{d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z})}^T \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{Q}_{11} \boldsymbol{\eta} \\ \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\eta}, 0, \boldsymbol{z}) \end{array} \right] \Big|_{y=0} \quad (\text{C.32})$$

auf $\partial\mathcal{G} \cap \{y = 0\}$ negativ oder zu null macht. Bezeichnet man die Summe aller in diesem

ersten Schritt erzielten negativen bzw. positiven Terme der rechten Seite von (C.32) mit $\dot{W}_0^-(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})$ bzw. $\dot{W}_0^+(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})$, so erhält man die Zerlegung

$$\dot{W}_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) = \dot{W}_0^-(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) + \dot{W}_0^+(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) . \quad (\text{C.33})$$

Zunächst wird angenommen, daß $\dot{W}_0^+(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z})$ eine lineare Funktion von $\boldsymbol{\eta}$ gemäß

$$\dot{W}_0^+(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{z}) \mathbf{F} \boldsymbol{\eta} \quad (\text{C.34})$$

ist, mit einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\mathbf{c}^T(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{1 \times (r-1)}$ und einer konstanten Matrix $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$.

Satz C.3 *Unter der Annahme (C.34) existiert eine konstante Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)}$ so, daß mit der Kompensationsfunktion*

$$W_1(\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta})^{1/2} \quad (\text{C.35})$$

die Nichtanstiegsbedingung (3.25) durch die Invarianzfunktion (3.22) mit

$$\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) = W_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) + W_1(\boldsymbol{\eta}) \quad (\text{C.36})$$

erfüllt ist.

Im folgenden Beweis wird die für einen späteren Entwurfsalgorithmus benötigte Berechnung einer geeigneten Matrix \mathbf{P} für (C.35) hergeleitet.

Beweis: Die gesuchte Matrix \mathbf{P} erfülle die Ljapunov-Gleichung

$$\mathbf{Q}_{11}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{Q}_{11} = -2 \delta \mathbf{I} , \quad (\text{C.37})$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} und $\delta > 0$. Die für $\delta = 1$ gültige, spezielle Lösung von (C.37) sei im Folgenden mit $\mathbf{P}(\delta = 1) = \tilde{\mathbf{P}}$ bezeichnet. Aus (C.37) sowie der allgemein geltenden Beziehung $\lambda_{\max}[\delta \mathbf{P}] = \delta \lambda_{\max}[\mathbf{P}]$ folgt für die vom variablen Parameter δ abhängige Lösungsschar $\mathbf{P}(\delta)$ der Zusammenhang

$$\lambda_{\max}[\mathbf{P}(\delta)] = \delta \lambda_{\max}[\tilde{\mathbf{P}}] , \quad (\text{C.38})$$

wobei $\lambda_{\max}[\mathbf{P}(\delta)]$ den sich aus (C.37) ergebenden, maximalen Eigenwert von $\mathbf{P}(\delta)$ bezeichnet. Des Weiteren folgt mit (C.37) die zeitliche Ableitung von $W_1(\boldsymbol{\eta})$ aus (C.35) entlang der Trajektorie von Teilsystem (3.31) zu

$$\dot{W}_1 = -\frac{\delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}(\delta) \boldsymbol{\eta}}} \leq -\frac{\delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}}{\sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{P}(\delta)] \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}}} . \quad (\text{C.39})$$

Mit

$$\underline{\varrho} = \delta / \sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{P}(\delta)]} \stackrel{\text{(C.38)}}{=} \delta / \sqrt{\delta \lambda_{\max}[\tilde{\mathbf{P}}]} = \sqrt{\delta / \lambda_{\max}[\tilde{\mathbf{P}}]} \quad (\text{C.40})$$

kann (C.39) weiter abgeschätzt werden zu

$$\dot{W}_1 \leq -\underline{\varrho} \sqrt{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}}. \quad (\text{C.41})$$

Damit erhält man für $\dot{\Phi}_0$ die Abschätzung

$$\dot{\Phi}_0 \stackrel{\text{(C.36)}}{=} \dot{W}_0 + \dot{W}_1 \stackrel{\text{(C.33)}}{=} \dot{W}_0^+ + \dot{W}_0^- + \dot{W}_0 \stackrel{\text{(C.34),(C.41)}}{\leq} \mathbf{c}^T(\mathbf{z}) \mathbf{F} \boldsymbol{\eta} - \underline{\varrho} \sqrt{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}}.$$

Diese Ungleichungsbedingung läßt sich mittels der Substitution

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{z}) = [a_i(\mathbf{z})]^T = \mathbf{c}^T(\mathbf{z}) \mathbf{F}$$

weiter zu

$$\dot{\Phi}_0 \leq \mathbf{a}^T(\mathbf{z}) \boldsymbol{\eta} - \underline{\varrho} \sum_{i=1}^{r-1} |\eta_i| = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(\mathbf{z}) \eta_i - \underline{\varrho} |\eta_i| \quad (\text{C.42})$$

vereinfachen. Um die rechte Seite von (C.42) negativ auf $\partial\mathcal{G} \cap \{y = 0\}$ zu machen, wird eine untere Schranke $\underline{\varrho}$ für ϱ durch Optimierung berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{\varrho}(\gamma, C) &= \max_{\mathbf{z}, 1 \leq i \leq r-1} [a_i(\mathbf{z})] \\ \text{u. d. N. } \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}, C) &= W_0(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}) + \gamma S(\boldsymbol{\eta}, 0) - C \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Dabei ist zu beachten, daß das Gebiet $\hat{\mathcal{G}} : \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{z}, C) \leq 0$ nicht von ϱ abhängt und wegen dem fehlenden, positiv-definiten Term $W_1(\boldsymbol{\eta})$ das ursprüngliche Gebiet \mathcal{G} vollständig einschließt. Daher stellte der mittels (C.43) ermittelte Wert $\underline{\varrho}$ für eine entsprechende Optimierung auf dem ursprünglichen Gebiet \mathcal{G} eine obere Schranke dar und ist daher gültig im Sinne einer konservativen Abschätzung.

Weiterhin ist $\|\mathbf{z}\|$ in $\hat{\mathcal{G}}$ begrenzt, so daß wegen der stetig differenzierbaren Abhängigkeit der Koeffizienten $a_i(\mathbf{z})$ von \mathbf{z} auch $a_i(\mathbf{z})$ begrenzt sind. Es folgt, daß immer eine Lösung für (C.43) existiert. Die Verwendung des max-Operators anstatt eines sup-Operators begründet sich durch diese Begrenztheit von $\|\mathbf{z}\|$ auf dem Gebiet $\hat{\mathcal{G}}$.

Mit Hilfe der unteren Schranke $\underline{\varrho}$ sowie der Vorschrift (C.40) kann nun die für $W_1(\boldsymbol{\eta})$ benötigte Matrix \mathbf{P} aus der Ljapunov-Gleichung (C.37) mit

$$\delta = \underline{\varrho}^2 \lambda_{\max}[\tilde{\mathbf{P}}] \quad (\text{C.44})$$

berechnet werden. ■

Die prinzipielle Idee dieser Methode zur Gebietssynthese besteht darin, den unerwünschten positiven Term \dot{W}_0^+ in $\dot{\Phi}$ durch einen ausreichend negativen Term \dot{W}_1 zu kompensieren. Die zugrundeliegende Funktion W_1 wird dazu aus der Quadratwurzel des quadratischen Terms $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}$ gebildet, so daß die folgenden drei, für die Kompensation notwendigen Eigenschaften entstehen:

1. \dot{W}_1 ist *linear in $\boldsymbol{\eta}$* ,
2. \dot{W}_1 kann *ausreichend negativ* gemacht werden,
3. W_1 ist positiv-definit.

Oben behandelter Fall ist unter der Linearitätsannahme (C.34) gültig. Falls hingegen \dot{W}_0^+ in $\boldsymbol{\eta}$ *quadratische* Terme besitzt, können diese durch eine Funktion $W_1 = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}$ kompensiert werden. In diesem Fall gilt

1. \dot{W}_1 ist *quadratisch in $\boldsymbol{\eta}$* ,
2. \dot{W}_1 kann *ausreichend negativ* gemacht werden,
3. W_1 ist positiv-definit.

Eventuell vorliegende, kubisch positive Terme können mittels $W_1 = (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta})^{3/2}$ kompensiert werden usw. Daraus läßt sich die folgende Regel formulieren: Wenn \dot{W}_0^+ gemäß $\dot{W}_0^+ = \mathbf{c}^T(\mathbf{z}) (\mathbf{F}_1 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\eta} + \dots)$ in eine Potenzreihe über $\boldsymbol{\eta}$ entwickelt werden kann, ist eine zur Kompensation geeignete Funktion mit $W_1 = (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\eta})^{1/2} + (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\eta})^{2/2} + (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}_3 \boldsymbol{\eta})^{3/2} + \dots$ gegeben. Die verschiedenen Syntheseschritte eines Invarianzgebiets werden zur Übersicht im folgenden Entwurfsschema zusammengefaßt.

Tabelle C.1: Entwurfsverfahren für Invarianzgebiete

<i>Schritt 1</i>	Falls eine geeignete Funktion Φ_0 , die (3.25) erfüllt, bekannt ist, fahre mit <i>Schritt 3</i> fort. Andernfalls suche eine Funktion $W_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z})$, die so viele Terme wie möglich von \dot{W}_0 negativ-definit macht.
<i>Schritt 2</i>	Berechne die marginale Funktion $\underline{\varrho}(\gamma, C)$ aus (C.43) sowie $\tilde{\boldsymbol{P}}$ aus (C.37). Bestimme damit $\delta(\gamma, C)$ aus (C.44) und $\boldsymbol{P}(\gamma, C)$ aus (C.37). Damit folgt aus (C.36) die gesuchte Funktion $\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z}, \gamma, C)$ mit den noch unbestimmten Parametern γ und C .
<i>Schritt 3</i>	Falls das System in eingangsnormalisierter Normalenform vorliegt, wähle ein konstantes $\gamma > 0$. Andernfalls berechne eine untere Schranke $\gamma^*(C)$ für γ aus (3.27).
<i>Schritt 4</i>	Berechne einen Wert C^* so, daß der initiale Systemzustand im Gebiet \mathcal{G} liegt, d. h. $\Phi(\boldsymbol{x}(0), y(0), \boldsymbol{z}(0), C^*) \leq 0$ mit der Invarianzfunktion Φ aus (3.22) und $\Phi_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{z}, C)$ aus (C.36).

D Technische Details zum Experimentalsystem R2D1

Motor Kennlinie

In der folgenden Tabelle [D.1](#) ist die inverse Motor Kennlinie des NSK-Motors nach [\[16\]](#) abgebildet. Dabei bezeichnen die Tabelleneinträge die für ein gewünschtes Motormoment zu kommandierenden Momentenwerte in Abhängigkeit der momentanen Motorgeschwindigkeit $\dot{\theta}_1$. Die in der ersten Zeile aufgetragenen tatsächlich eingepprägten Werte des Motormoments τ sind bezüglich der Gravitationskonstante g_0 normiert. Die einzelnen Tabelleneinträge können Werte im Bereich $[0; 10]$ annehmen und sind so normiert, daß ein Motorkommando von 10 dem maximalen Motormoment entspricht.

Zustandsbeobachter

Der vorgestellte Invarianzregler benötigt alle Systemzustände. Wie in [Abschnitt 4.3.2](#) bereits erwähnt, werden die beiden Gelenkpositionen θ_1 und θ_2 im Experiment mittels inkrementaler Winkelgeber gemessen. Für die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ stehen jedoch keine Sensoren zur Verfügung. Eine Schätzung mittels des differenzierenden Filters

$$\hat{\dot{\theta}}(k) = \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{\Delta T}$$

liefert jedoch aufgrund der geringen Abtastzeit von $\Delta T = 1\text{ms}$ die geringe Auflösung von $\Delta\dot{\theta}_1 = 2.3^\circ/s$ und $\Delta\dot{\theta}_2 = 18^\circ/s$, was im Experiment zu Instabilität aufgrund der damit verbundenen Totzeiten führte. Daher wurde der in [Abb. D.1](#) skizzierte erweiterte Luenberger-Beobachter implementiert.

Dieser besitzt ein nichtlineares Vorfilter, mit dem die Beschleunigungen $\hat{\ddot{\theta}}$, die auf die Gelenke wirken, berechnet werden. Für einen Filterentwurf können diese Beschleunigun-

Tabelle D.1: Inverse Motorkennlinie des NSK-Motors

$\dot{\theta}_1 \setminus \tau/g_0$	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50
0.0	0.00	1.61	3.44	4.56	5.73	6.87	8.42	9.59	10	10
0.5	0.00	1.89	3.51	4.71	5.90	6.94	8.50	9.62	10	10
1.0	0.00	1.92	3.50	4.74	5.89	7.12	8.59	9.56	10	10
1.5	0.00	1.85	3.45	4.62	5.80	7.19	8.60	9.49	10	10
2.0	0.00	1.82	3.40	4.55	5.69	7.08	8.50	9.41	10	10
2.5	0.00	1.82	3.35	4.51	5.60	6.94	8.33	9.35	9.94	10
3.0	0.00	1.82	3.32	4.50	5.52	6.77	8.15	9.32	9.91	10
3.5	0.00	1.79	3.30	4.42	5.43	6.66	8.00	9.26	9.89	10
4.0	0.00	1.69	3.19	4.30	5.28	6.53	7.92	9.23	9.89	10
4.5	0.00	1.67	3.17	4.28	5.25	6.41	7.86	9.20	9.93	10
5.0	0.00	1.69	3.13	4.31	5.25	6.34	7.78	9.20	9.95	10
5.5	0.00	1.67	3.10	4.28	5.22	6.31	7.80	9.19	10	10
6.0	0.00	1.61	3.05	4.21	5.17	6.23	7.77	9.22	10	10
6.5	0.00	1.59	2.97	4.19	5.13	6.18	7.79	9.26	10	10
7.0	0.00	1.54	2.92	4.19	5.11	6.12	7.84	9.29	10	10
7.5	0.00	1.47	2.86	4.13	5.08	6.08	7.84	9.37	10	10
8.0	0.00	1.47	2.84	4.13	5.08	6.04	7.93	9.5	10	10
8.5	0.00	1.45	2.79	4.15	5.11	6.00	8.00	9.67	10	10
9.0	0.00	1.43	2.77	4.13	5.09	6.09	8.14	9.94	10	10
9.5	0.00	1.39	2.76	4.10	5.08	6.14	8.47	10	10	10
10.0	0.00	1.37	2.71	4.08	5.06	6.28	8.88	10	10	10
10.5	0.00	1.35	2.67	4.08	5.09	6.47	9.22	10	10	10
11.0	0.00	1.33	2.61	4.08	5.13	6.75	9.71	10	10	10
11.5	0.00	1.32	2.60	4.09	5.17	7.19	10	10	10	10
12.0	0.00	1.28	2.55	4.09	5.21	7.50	10	10	10	10
12.5	0.00	1.30	2.55	4.05	5.29	8.00	10	10	10	10
13.0	0.00	1.25	2.50	4.06	5.37	8.63	10	10	10	10
13.5	0.00	1.22	2.46	4.11	5.49	9.25	10	10	10	10
14.0	0.00	1.20	2.45	4.21	5.67	10	10	10	10	10
14.5	0.00	1.19	2.44	4.22	5.85	10	10	10	10	10
15.0	0.00	1.16	2.42	4.24	6.50	10	10	10	10	10
15.5	0.00	1.18	2.45	4.38	7.00	10	10	10	10	10
16.0	0.00	1.19	2.48	4.58	7.56	10	10	10	10	10

gen als Eingangsgröße zweier zeitdiskreter, idealer Doppelintegratorsysteme angenommen werden. Dafür werden mittels Rechteckintegration die Systemmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 \Delta T^2 & 0 \\ \Delta T & 0 \\ 0 & 0.5 \Delta T^2 \\ 0 & \Delta T \end{bmatrix}$$

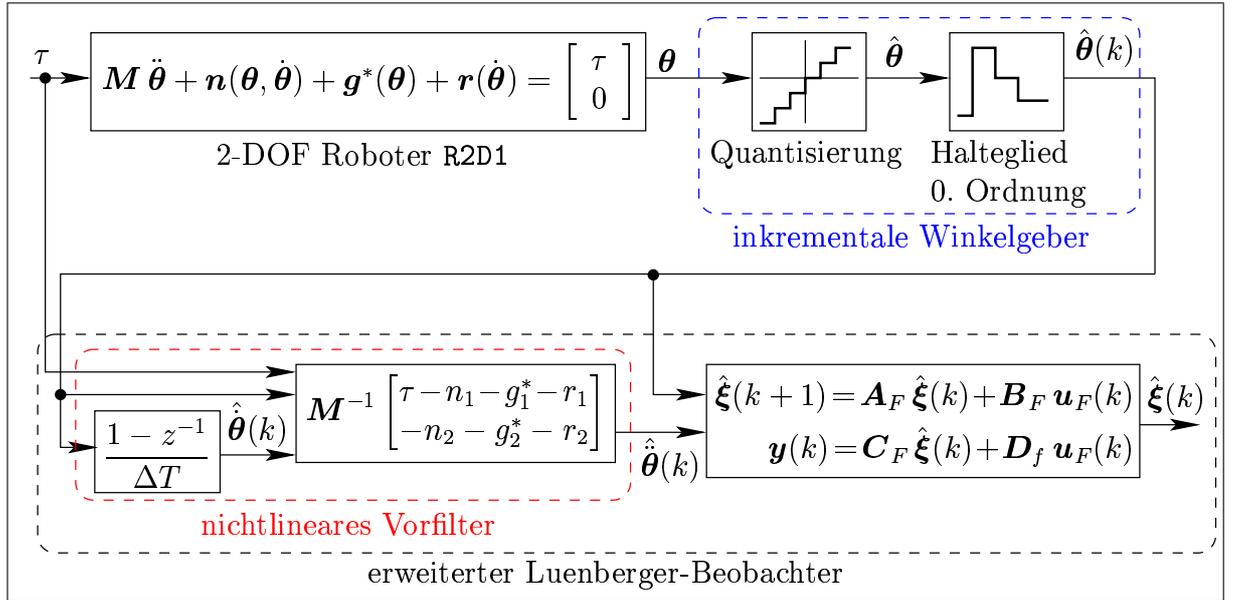


Abbildung D.1: Erweiterter Luenberger-Beobachter.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eines zeitdiskreten Ersatzsystems berechnet. Mit einer (stehenden) Beobachter-Rückführmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

den Vektoren $\mathbf{l}_1 = [l_{1,1} \ l_{1,2}]^T$, $\mathbf{l}_2 = [l_{2,1} \ l_{2,2}]^T$, $l_{i,j} \in \mathbb{R}$ und der Definition

$$\mathbf{u}_F = [\hat{\theta}_1(k) \ \hat{\theta}_2(k) \ \hat{\theta}_1(k) \ \hat{\theta}_2(k)]^T$$

ergeben sich die Filtermatrizen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_F &= \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}, & \mathbf{B}_F &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_F &= \mathbf{C}, & \mathbf{D}_F &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Parameterierung der Rückführmatrix \mathbf{L} erfolgte durch Vorgabe der Pole der zeitkontinuierlichen Doppelintegratorsysteme gemäß $\lambda_{1,2} = -150 \pm j150$ für das erste Gelenk und $\lambda_{3,4} = -130 \pm j130$ für das zweite Gelenk. Transformiert man diese kontinuierli-

chen Pole $\lambda_{i,j}$ mittels der Rechteck-Substitutionsmethode in den zeitdiskreten Raum, so erhält man $\lambda_{i,j}^z$. Aus den entkoppelten Eigenwertgleichungen

$$|\mathbf{A}_F - \mathbf{l}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda^z \mathbf{I}| = 0 \quad i \in \{1, 2\}$$

ergeben sich damit die Beobachter-Rückführverstärkungen zu

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.297094 & 38.7513 \\ 0.25807 & 29.6895 \end{bmatrix}.$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß die Wirkung der Rückführung der gemessenen Systemzustände $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sowie deren geschätzter Geschwindigkeiten $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ in den Linearisierungsblock zur Berechnung der Beschleunigungen $\ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ nicht untersucht wurde. Die in den Experimenten erzielte Wirkung des erweiterten Luenberger-Beobachters war jedoch für die Untersuchungen und Experimente zur Invarianzregelung ausreichend.

Phasengleichung der Nulldynamik

Konzept der Lösung

Mit den Substitutionen

$$\kappa_1(x_1^*) = \frac{B \sin x_1^*}{m_{22} + B \cos x_1^*}, \quad \kappa_2(x_1^*) = \frac{D \sin \alpha}{m_{22} + B \cos x_1^*},$$

sowie der neuen Variablen $y = z_1$ folgt die Nulldynamik (4.10) zu

$$\ddot{y} = -\kappa_1(x_1^*) \dot{y}^2 + \kappa_2(x_1^*) \sin(x_1^* + y). \quad (\text{D.1})$$

Dabei handelt es sich um eine nichtlineare Dgl. *zweiter* Ordnung der Form $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$, die nur schwer lösbar ist. Daher wird die Dgl. auf die einfacher zu handhabende Form einer nichtlinearen (nicht autonomen) Dgl. *erster* Ordnung $y_2' = f^*(y_1, y_2)$ transformiert, wobei $y_2 = \dot{y}_1$ und $y_2' = dy_2/dy_1$. Wegen der Nichtlinearität dieser Dgl. ist ein direktes Lösungsverfahren nicht möglich, so daß die Eigenschaft genutzt wird, daß es sich dabei um eine Bernoulli-Dgl. handelt. Eine solche Dgl. kann durch eine geeignete Koordinatentransformation in ein System linearer Dglen. überführt werden, für die Standardlösungsverfahren zur Verfügung stehen.

Transformation auf eine Dgl. 1. Ordnung

Wählt man $y_1 = y + x_1^*$, so folgt

$$\ddot{y} = \ddot{y}_1 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt} \frac{dy_2}{dy_1} = y_2 y_2',$$

und weiter aus (D.1) die nichtlineare, nicht autonome Dgl. 1. Ordnung

$$y_2 y_2' = \kappa_2(x_1^*) \sin y_1 - \kappa_1(x_1^*) y_2^2 . \quad (\text{D.2})$$

Transformation auf eine lineare Dgl. 1.Ordnung

Eine Lösung (y_1^{*I}, y_2^{*I}) von (D.2) ist die Ruhelage bei $y_2^{*I} = 0$ und $y_1^{*I} : \sin y_1^{*I} = 0$.

Für $y_2 \neq 0$ ergibt sich mit

$$\begin{aligned} a &= \kappa_1(x_1^*) \\ b(y_1) &= \kappa_2(x_1^*) \sin y_1 \end{aligned}$$

aus (D.2) die Bernoulli-Dgl. der Ordnung $n = -1$

$$y_2' + a y_2 = b(y_1) y_2^{-1} . \quad (\text{D.3})$$

Nach Multiplikation mit $2 y_2$ und der Substitution

$$\eta(y_1) = y_2(y_1)^2 \quad (\text{D.4})$$

geht (D.3) – wegen $\eta' = 2 y_2 y_2'$ – über in die lineare Dgl.

$$\eta' + 2 a \eta = 2 b(y_1) . \quad (\text{D.5})$$

Rücksubstitution der Funktionen a und $b(y_1)$ ergibt nach Umstellung

$$\eta' + 2 \kappa_1(x_1^*) \eta = 2 \kappa_2(x_1^*) \sin y_1 . \quad (\text{D.6})$$

Lösung der linearen Dgl. 1.Ordnung

Die *homogene* Lösung von (D.6) ergibt sich mit der reellen Konstanten c_1 zu

$$\eta^h(y_1) = c_1 e^{-2 \kappa_1 y_1} .$$

Partikuläre Lösung: Mittels Komplexifizierung ergibt sich mit $\eta^* \in \mathbb{C}$ ($\eta = \Im(\eta^*)$)¹ aus (D.6) die Dgl.

$$\eta^{*'} + 2 \kappa_1(x_1^*) \eta^* = 2 \kappa_2(x_1^*) e^{j y_1} . \quad (\text{D.7})$$

Diese besitzt wegen $-2 \kappa_1 \neq j$ die partikuläre, komplexwertige Lösung

$$\eta^{*p} = a_0 e^{j y_1}$$

¹ $\Im(\eta^*)$ bezeichnet den Imaginärteil von η^*

mit der Konstanten

$$a_0(x_1^*) = \frac{2 \kappa_2(x_1^*)}{2 \kappa_1(x_1^*) + j} = 2 \kappa_2(x_1^*) \frac{2 \kappa_1(x_1^*) - j}{4 \kappa_1(x_1^*)^2 + 1} .$$

Als partikuläre Lösung von (D.6) folgt

$$\eta^p = \Im(\eta^{*p}) = \frac{2 \kappa_2(x_1^*)}{1 + 4 \kappa_1(x_1^*)^2} (2 \kappa_1(x_1^*) \sin y_1 - \cos y_1) .$$

Mit der trigonometrischen Beziehung

$$\alpha \sin y_1 + \beta \cos y_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(y_1 + \varphi) \quad \varphi = \text{atan2}(\beta, \alpha)$$

läßt sich die partikuläre Lösung noch weiter vereinfachen zu

$$\eta^p = \frac{2 \kappa_2(x_1^*)}{1 + 4 \kappa_1(x_1^*)^2} \sqrt{4 \kappa_1(x_1^*)^2 + 1} \sin(y_1 + \varphi(x_1^*))$$

mit $\varphi = \text{atan2}(-1, 2\kappa_1(x_1^*))$. Mit den Konstanten

$$\begin{aligned} c_2(x_1^*) &= 2 \frac{\kappa_2(x_1^*)}{1 + c_3^2} & c_3(x_1^*) &= 2 \kappa_1(x_1^*) \\ c_4(x_1^*) &= \sqrt{1 + c_3(x_1^*)^2} & \varphi(x_1^*) &= \text{atan2}(-1, c_3(x_1^*)) \end{aligned}$$

folgt schließlich die allgemeine, vollständige, reellwertige Lösung von (D.6) zu

$$\eta = \eta^h + \eta^p = c_1(x_1^*) e^{-c_3(x_1^*) y_1} + c_2(x_1^*) c_4(x_1^*) \sin(y_1 + \varphi(x_1^*)) .$$

Der Parameter $c_1(x_1^*)$ ergibt sich aus der Anfangsbedingung $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$ zu

$$c_1(y_{10}, y_{20}, x_1^*) = (y_{20}^2 - c_2(x_1^*) c_4(x_1^*) \sin(y_{10} + x_1^* + \varphi(x_1^*))) e^{c_3(x_1^*) (y_{10} + x_1^*)} .$$

Die Lösungen der Phasengleichung von (4.10) folgen durch Rücksubstitution von (D.4) sowie mit der oben bestimmten Ruhelage zu

$$\text{Lösung I: } y_2^{*I} = 0, y_1^{*I} = k \pi, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Lösung II: } y_2^{*II} = \pm \sqrt{c_1(x_1^*) e^{-c_3(x_1^*) y_1^{*II}} + c_2(x_1^*) c_4(x_1^*) \sin(y_1^{*II} + \varphi(x_1^*))} . \quad (\text{D.9})$$

Stabile Bereiche der Nulldynamik

Die instabilen Gleichgewichtspunkte der Nulldynamik liegen bei

$$\theta_{10}^{\text{inst}} = (2k + 1) \pi - x_1^*, k \in \mathbb{Z} \quad \dot{\theta}_{10} = 0 . \quad (\text{D.10})$$

Die Separatrix, die die stabilen von den instabilen Phasenbahnen trennt, muß durch diese Punkte laufen. Für $0 \leq x_1^* < \pi$ ergibt sich mit $k = -1$ der Startpunkt der Separatrix zu $(\theta_{10}^{inst} = -\pi - x_1^*, \dot{\theta}_{10} = 0)$. Für $-\pi < x_1^* \leq 0$ folgt mit $k = 0$ der Startwert zu $(\theta_{10}^{inst} = \pi - x_1^*, \dot{\theta}_{10} = 0)$. Daraus folgt, daß sich mit der Konstanten $\mu \in (0; i\pi)$, $i \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ und

$$\theta_{10} = -x_1^* + \text{sign}[x_1^*] (\mu + \pi) \quad (\text{D.11})$$

stabile Phasenbahnen der Nulldynamik ergeben. Damit folgt, daß c_1 von μ und x_1^* abhängt: $c_1 = c_1(x_1^*, \mu)$. Wählt man $\mu \rightarrow \pi$, so schrumpft das durch die Separatrix eingeschlossene Zustandsraumgebiet auf eine Gerade zusammen. Mit $\mu \rightarrow 0$ hingegen ergibt ist der eingeschlossene Bereich maximal ausgedehnt. Die Funktion Γ aus (4.11) ist so definiert, daß $\Gamma = 0$ mit einer stabilen Phasenbahn der Nulldynamik übereinstimmt. Quadriert man beide Seiten von (D.9) und zieht die rechte Seite ab, so erhält man mit (D.11) und den für $\dot{\theta}_2 = 0$ gültigen Definitionen $y_2 = z_1 = \dot{\theta}_1, y_1 = \theta_1 + x_1^* = z_2 + x_1^*$ die implizite Darstellung

$$\Gamma(z_1, z_2, x_1^*, \mu) = z_1^2 - c_1(x_1^*, \mu) e^{-c_3(x_1^*)} (z_2 + x_1^*) - c_2(x_1^*) c_4(x_1^*) \sin(z_2 + x_1^* + \varphi(x_1^*)) .$$

Anmerkung Da die Lösung (D.9) nicht nach $y_{20} = \dot{\theta}_{10} = z_{10}$ explizit auflösbar ist, kann keine Lösung eines ersten Integrals in expliziter Form gefunden werden. Wählt man eine Invarianzfunktion gemäß (4.11), so gilt die Abstiegsbedingung (4.12) nur für die Konturlinie $\Gamma = 0$, d. h. für die Phasenbahn, die für den gewählten Anfangswert θ_{10} gültig ist. Der Unterschied zwischen dem ersten Integral und der gewählten Funktion Γ wird in Abb. D.2 deutlich.

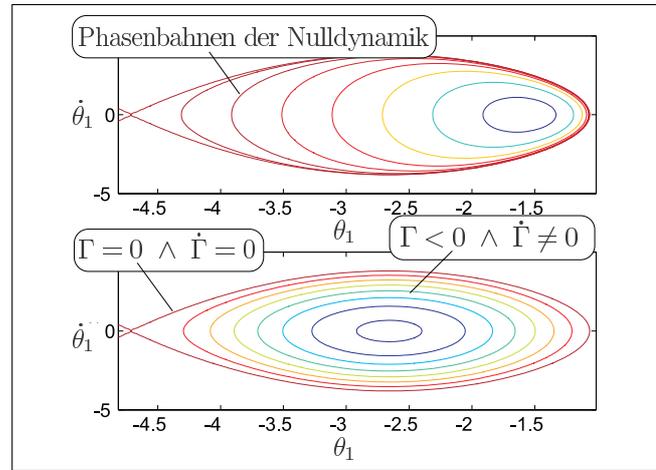


Abbildung D.2: Oben: Konturlinien des ersten Integrals für $x_1^* = \theta_2^s = 90^\circ$ und $\alpha = -30^\circ$. Unten: Konturlinien von Γ für den gleichen Betriebsfall und $\mu = 0$.

E Technische Details zum Kfz-Fahrsimulator

Bewegungsgleichungen des erweiterten Einspur Kfz-Modells

Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen des erweiterten Modells für die Zustandsgrößen $\zeta = [\beta \ v \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$ mittels der Lagrange-Methode hergeleitet. Hierzu werden zunächst die Geschwindigkeits- und Rotationsvektoren des Fahrwerks und der Zusatzmasse in Weltkoordinaten beschrieben.¹ Für den Geschwindigkeitsvektor des Fahrwerks sowie den Ortsvektor der Zusatzmasse folgt damit nach Abb. 5.1

$${}_i\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \psi) v \\ \sin(\beta + \psi) v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}_i\mathbf{r}_T = \begin{bmatrix} -h \sin(\phi) \sin(\psi) + {}_i x_S \\ h \sin(\phi) \cos(\psi) + {}_i y_S \\ h \cos(\phi) + h_R \end{bmatrix}.$$

Der zugehörige Geschwindigkeitsvektor von T wird mit ${}_i\mathbf{v}_T = {}_i\dot{\mathbf{r}}_{ST}$ bezeichnet. Mit ${}_k\boldsymbol{\Omega}_S = [0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T$ und ${}_k\boldsymbol{\Omega}_T = [-\dot{\Phi} \ 0 \ \dot{\psi}]^T$ sowie den Trägheitstensenoren des Chassis ${}_k\mathbf{J}_1$ und des Aufbaus ${}_k\mathbf{J}_2$ im k -System errechnen sich die kinetischen Energien des Fahrzeugmodells zu

$$T_S = \frac{1}{2} ({}_i\mathbf{v}_S^T m_1 {}_i\mathbf{v}_S + {}_k\boldsymbol{\Omega}_S^T {}_k\mathbf{J}_1 {}_k\boldsymbol{\Omega}_S)$$

$$T_T = \frac{1}{2} ({}_i\mathbf{v}_T^T m_2 {}_i\mathbf{v}_T + {}_k\boldsymbol{\Omega}_T^T {}_k\mathbf{J}_2 {}_k\boldsymbol{\Omega}_T)$$

und die potentiellen Energien zu

$$V_S = 0$$

$$V_T = m_2 g h \cos \Phi + \frac{1}{2} c_\Phi \Phi^2.$$

¹In Weltkoordinaten dargestellte Vektoren werden durch ein tiefgestelltes i vor der Variablen gekennzeichnet. Nachgestellte Indizes geben den Punkt an, auf den sich dieser Vektor bezieht. So ist ${}_i\mathbf{v}_T$ der Geschwindigkeitsvektor des Punktes T dargestellt im Weltkoordinatensystem i .

Mit Hilfe der Lagrangefunktion

$$L = (T_S + T_T) - (V_S + V_T)$$

ergeben sich gemäß Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_S} - \frac{dL}{dx_S} = {}_iF_x \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_S} - \frac{dL}{dy_S} = {}_iF_y \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{dL}{d\psi} = M_z \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{dL}{d\phi} = -d_{\dot{\phi}} \dot{\phi} \quad (\text{E.4})$$

die Bewegungsgleichungen abhängig von den am Fahrzeug angreifenden externen Kräften ${}_iF_x$, ${}_iF_y$ und des externen Moments M_z . Eine Vereinfachung ergibt sich bei der Darstellung der Bewegungsgleichungen im k -Koordinaten-System. Für eine entsprechende Transformation werden (E.1)–(E.2) mit einer Rotationsmatrix multipliziert, die eine Drehung der Vektoren um den Winkel ψ um die Hochachse bewirkt. Außerdem werden die Geschwindigkeiten des Fahrzeugs durch die fahrzeugfesten Zustände β und ψ mittels

$$\begin{bmatrix} {}_i\dot{x}_S \\ {}_i\dot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\beta + \psi) \\ v \sin(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

ausgedrückt. Damit liegen die Bewegungsgleichungen in fahrzeugfesten k -Koordinaten mit dem Zustandsvektor $\zeta = [\beta \ v \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$ vor.

Das in die Bewegungsgleichungen eingehende externe Moment M_z sowie die in k -Koordinaten gemessenen externen Kräfte ${}_kF_x$ und ${}_kF_y$ lassen sich durch den Kraftschluß der Reifen mit der Fahrbahnunterlage ermitteln. Die dazu benötigten Reifenkräfte F_{sf} , F_{sr} , F_{lf} , F_{lr} folgen stark nichtlinearer, unstetiger und hysteresebehafteter Kennlinien und werden hier aus der Fahrzeuggeschwindigkeit v , dem Schräglaufwinkel α der Reifen [35], die vertikalen Auflagekräfte F_z sowie der Winkelgeschwindigkeit ω der Reifen durch das HSRI Reifenmodell [33] bestimmt. Über den in Abb. E.1 geometrisch motivierten Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} {}_kF_x \\ {}_kF_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \delta & 0 \\ \cos \delta & 1 \\ l_f \cos \delta & -l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{sf} \\ F_{sr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \delta & 1 \\ \sin \delta & 0 \\ l_f \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{lf} \\ F_{lr} \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

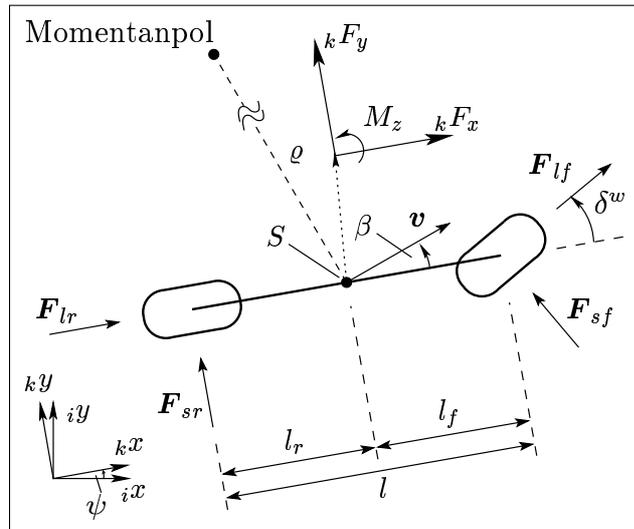


Abbildung E.1: Auf das Fahrwerk wirkende Kräfte und Momente.

werden dann die gesuchten externen Kräfte und Momente berechnet. Nach Einsetzen in die Bewegungsgleichungen und elementaren Umformungen erhält man schließlich als Standardbeschreibung für das erweiterte Fahrzeugmodell

$$\dot{\zeta} = \bar{f}(\zeta) + \bar{g}(\zeta, \delta^w)$$

mit einem nicht glatten Drift- und Steuervektorfeld $\bar{f}, \bar{g} \in \mathbb{R}^5$, siehe [119] für eine explizite Angabe der umfangreichen algebraischen Terme.

Rechnerstruktur der Simulationsumgebung

Aufgrund der hohen benötigten Rechenleistung wurde die gesamte Simulation auf drei verschiedene PCs verteilt, die über TCP-Sockets miteinander kommunizieren, Abb. E.2. Rechner 1 wird ausschließlich für die Fahrzeugsimulation und die Invarianzregelung verwendet. Für die Visualisierung ist Rechner 2 zuständig, Rechner 3 übernimmt die Momentenregelung des Steuerhebels.

Fahrzeugdaten

Die Daten des erweiterten Einspur Kfz Simulationsmodells sind in Tabelle E.1 angegeben. Eine Beschreibung des HSRI Reifenmodells findet sich in [33, 119].

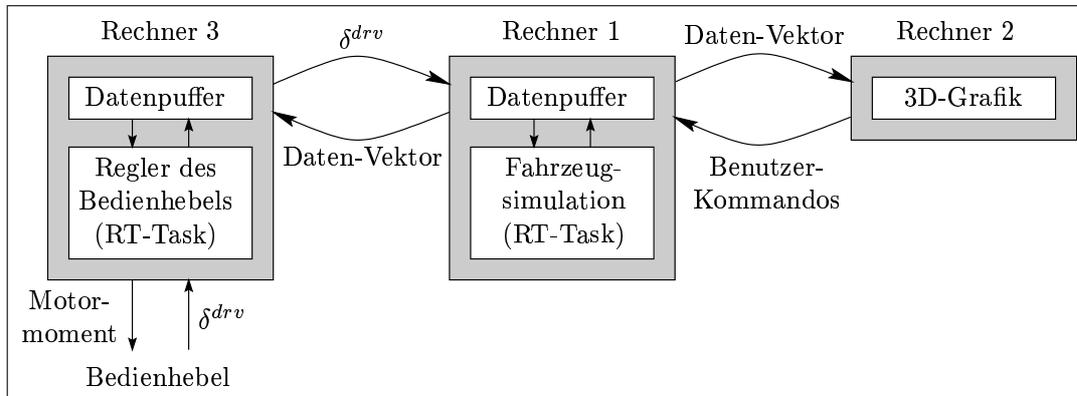


Abbildung E.2: Kommunikations-Schema der Rechner der Simulationsumgebung.

Tabelle E.1: Fahrzeugdaten

Masse des Fahrzeugs	$m = 14300 \text{ kg}$
Masse des Fahrwerks	$m_1 = 1813 \text{ kg}$
Masse des Aufbaus	$m_2 = 12487 \text{ kg}$
Gesamtlänge	$l = 3.49 \text{ m}$
Abstand Vorderachse S	$l_f = 1.95 \text{ m}$
Abstand Hinterachse S	$l_r = 1.54 \text{ m}$
Höhe von T über der Kippachse	$h = 1.6 \text{ m}$
Höhe der Kippachse	$h_R = 0.68 \text{ m}$
Spurbreite	$T = 0.93 \text{ m}$
Erdbeschleunigung	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$
Reibungskoeffizient der Straße	$\mu = 0.8$
vordere Kurven-Steifigkeit	$c_f = 582 \cdot 10^3 \text{ N/rad}$
hintere Kurven-Steifigkeit	$c_r = 783 \cdot 10^3 \text{ N/rad}$
Kippsteifigkeit	$c_\Phi = 457 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$
Kippdämpfung	$d_\Phi = 100 \cdot 10^3 \text{ N/rad}$
Kippträgheit der Masse	$J_{2x} = 24201 \text{ kg m}^2$
gesamte Gier-Trägheit	$J_z = 34917 \text{ kg m}^2$
Totzeit der Lenkdynamik	$T_t = 0.1 \text{ s}$
Schwellwert für RAC	$\varepsilon = 0.1$
Abtastzeit	$\Delta t = 0.01 \text{ s}$
Reifen Radius	$r_0 = 0.287 \text{ m}$

Literaturverzeichnis

Regelung spezieller unteraktuierter Systeme:

- [1] S. A. AL-HIDDABI UND N. H. MCCLAMROCH. Output Tracking for Nonlinear Non–minimum Phase VTOL Aircraft. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 4573–4578. Tampa, Florida USA (1998).
- [2] S. A. AL-HIDDABI UND N. H. MCCLAMROCH. Trajectory Tracking Control and Maneuver Regulation Control for the CTOL Aircraft Model. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1958–1963. Phoenix, Arizona (1999).
- [3] J. ALVAREZ UND D. CORTÉS. Indirect Control of High Frequency Power Converters for AC Generation. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 4072–4077. Sydney, Australia (2000).
- [4] H. ARAI UND S. TACHI. Position Control of a Manipulator with Passive Joints Using Dynamic Coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(4):528–534 (1991).
- [5] H. ARAI, K. TANIE, UND N. SHIROMA. Feedback Control of a 3-DOF Planar Underactuated Manipulator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Seiten 703–709. Albuquerque, New Mexico (1997).
- [6] J. BAILLIEUL. Kinematically Redundant Robots With Flexible Components. *Automatica*, Seiten 15–21 (1993).
- [7] A. BANASZUK UND J. HAUSER. On control of planar periodic orbits. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 3830–3836. Phoenix, Arizona (1999).
- [8] L. BENVENUTTI, P. D. GIAMBERARDINO, UND L. FARINA. Trajectory Tracking for PVTOL Aircraft: a Comparative Analysis. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Seiten 1563–1568. Kobe, Japan (1996).

- [9] A. DE LUCA, R. MATTONE, UND G. ORIOLO. Stabilization of Underactuated Robots: Theory and Experiments for a Planar 2R Manipulator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Seiten 3274–3280. Albuquerque, New Mexico (1997).
- [10] A. P. DOWLING. Nonlinear self-excited oscillations of a ducted flame. *Journal of Fluid Mechanics*, 346:271–290 (1997).
- [11] M. GRUNDELIUS UND B. BERHARDSSON. Control of Liquid Slosh in an Industrial Packaging Machine. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1654–1659. Tampa, Florida (1999).
- [12] M. GRUNDELIUS UND B. BERNHARDSSON. Control of Liquid Slosh in an Industrial Packaging Machine. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Seiten 1654–1659. Kohala Coast-Island of Hawai'i, Hawai'i, USA (1999).
- [13] HITOSHI ARISUMI, TETSUO KOTOKU, UND KIYOSHI KOMORIYA. Swing Motion Control of Casting Manipulation. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(4):56–64 (1999).
- [14] J. HU UND G. PRATT. Nonlinear Switching Control of Bipedal Walking Robots with Provable Stability. In *Proceedings of the 1st. IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. Massachusetts Institute of Technology (2000).
- [15] A. G. LOUKIANOV, J. CABRERA-VÁZQUES, V. I. UTKIN, J. M. CAÑEDO, UND J. M. RAMÍREZ. Control of the System Synchronous Generator-Exciter via VSC. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 3057–3062. Sydney, Australia (2000).
- [16] K. M. LYNCH. *Nonprehensile Robotic Manipulation: Controllability and Planning*. Doktorarbeit, The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania 15213 (1996).
- [17] MARCEL BERGERMAN, CHRISTOPHER LEE, UND YANGSHENG XU. A Dynamic Coupling Index for Underactuated Manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 12:693–707 (1995).
- [18] R. MUKHERJEE UND D. CHEN. Control of Free-Flying Underactuated Space Manipulators to Equilibrium Manifolds. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5):561–570 (1993).
- [19] M. REYHANOGLU. Control and Stabilization of an Underactuated Surface Vessel. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2371–2376. Kobe (1996).

-
- [20] O. RICHTER. *Simulation des Verhaltens ökologischer Systeme*. Academic Press, INC., Orlando, San Diego, New York, Austin, London, Montreal, Sydney, Tokyo, 2 Auflage (1986).
- [21] R. SCHILLING. *Fundamentals of Robotics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1 Auflage (1990).
- [22] Y. SHITESSEL UND C. TOURNES. Nonminimum Phase Output Tracking in Dynamic Sliding Manifolds with Application to Aircraft Control. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Seiten 2071–2076. Kobe, Japan (1996).
- [23] M. W. SPONG. The Swingup Control Problem for the Acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(1):49–55 (1995).
- [24] M. W. SPONG UND D. J. BLOCK. The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education. In *34th IEEE Conf. on Decision and Control*, Seiten 555–556. New Orleans (1995).
- [25] M. W. SPONG, P. CORKE, UND R. LOZANO. Nonlinear Control of the Gyroscopic Pendulum (2000). Unpublished.
- [26] T. SUZUKI, M. KOINUMA, UND Y. NAKAMURA. Chaos and Nonlinear Control of a Nonholonomic Free-Joint Manipulator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seiten 2668–2675. Minneapolis, Minnesota (1996).
- [27] R. VENUGOPAL UND D. S. BERNSTEIN. State Space Modeling and Active Control of Slosh. In *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, Seiten 1072–1077. Dearborn, MI, USA (1996).

Regelung von Kraftfahrzeugen:

- [28] J. ACKERMANN. Robust Control Prevents Car Skidding. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(3):23–31 (1997).
- [29] J. ACKERMANN UND D. ODENTHAL. Damping of Vehicle Roll Dynamics by Gain Scheduled Active Steering. In *Proceedings of European Control Conference*. Karlsruhe, Germany, Paper No. 1041-2 (1999).
- [30] W. HIRSCHBERG, H. WEINFURTER, UND C. JUNG. Ermittlung der Potenziale zur Lkw-Stabilisierung durch Fahrdynamiksimulation. In *VDI-Kongreß Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau*. Würzburg (2000).

- [31] C. JUNG UND W. HIRSCHBERG. Payload monitoring as one basis for commercial vehicle dynamics. In *Seminar Understanding Human Monitoring and Assessment*. Delft (1997).
- [32] R. C. LIN, D. CEBON, UND D. J. COLE. Optimal roll control of a single-unit lorry. In *Proc. IMechE*, Band 210, part D, Seiten 45–55 (1996).
- [33] M. MITSCHKE. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Band C. Springer-Verlag, Berlin, Germany (1990).
- [34] D. ODENTHAL, T. BÜNTE, UND J. ACKERMANN. Nonlinear Steering and Braking Control for Vehicle Rollover Avoidance. In *Proceedings of European Control Conference*. Karlsruhe, Germany, Paper No. 241 (1999).
- [35] P. RIEKERT UND T. E. SCHUNCK. Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs. *Ingenieur Archiv*, 11:210–224 (1940).
- [36] L. SEGEL. Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. In *Proc. IMechE*, Seiten 310–330 (1956-1957).
- [37] A. T. VAN ZANTEN, R. ERHARD, UND G. PFAFF. VDC, The Vehicle Dynamics Control System of Bosch. In *Advancements in ABS/TCS and Brake Technology (SP-1075)*, Seiten 9–26. Detroit, Michigan (1995).
- [38] J. WOHLFARTH. *Aufbau eines Simulationsmodells eines allradgelenkten Fahrzeugs und Einsatz zur Analyse sicherheitskritischer Fahrmanöver*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1994).

Allgemeine Regelungsmethoden für unteraktuierte Systeme und Roboter:

- [39] F. ALLGÖWER. *Näherungsweise Ein-/Ausgangs-Linearisierung nichtlinearer Systeme*. Nummer 582 in Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8. VDI-Verlag, Düsseldorf (1996).
- [40] F. ALLGÖWER. Approximate Input-Output Linearization of Nonminimum Phase Nonlinear Systems. In *Proceedings of European Control Conference*, Seiten Paper TU-E A1, CD-Rom file ECC604.pdf, 6 Seiten. Brüssel (1997).
- [41] M. BERGERMAN UND Y. XU. Robust joint and Cartesian control of underactuated manipulators. *Transactions of the ASME: Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118(3):557–565 (1996).

-
- [42] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, UND P. ROUCHON. On Differentially Flat Nonlinear Systems. In *Nonlinear Control Systems Design*, Seiten 408–412. Pergamon Press. (1992).
- [43] R. A. FREEMAN UND P. V. KOKOTOVIĆ. *Robust Nonlinear Control Design*. Birkhäuser-Verlag, Berlin (1996).
- [44] R. M. HIRSCHORN UND E. ARANDA BRICAIRE. Practical stabilization of locally linearizable systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1623–1628. Phoenix, Arizona (1999).
- [45] A. ILCHMANN UND A. ISIDORI. Adaptive Dynamic Output Feedback Stabilization of Nonlinear Systems. *Asian Journal on Control (under review)*.
- [46] A. ISIDORI. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 3 Auflage (1995).
- [47] H. K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. MacMillan, New York, 2 Auflage (1992).
- [48] C. LEE UND Y. XU. Actuability of Underactuated Manipulators. Technischer Bericht CMU-RI-TR-94-13, Robotic Institute, Carnegie Mellon University (1994).
- [49] Y. NAKAMURA UND T. SUZUKI. Chaos and Nonlinear Control of a Nonholonomic Free-Joint Manipulator. In *Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS*, Seiten 314–321. München (1994).
- [50] R. OLFATI SABER UND A. MEGRETSKI. Controller design for a class of underactuated nonlinear Systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 4182–4187. Tampa, FL (1998).
- [51] G. ORIOLO UND Y. NAKAMURA. Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2398–2403. Brighton, England (1991).
- [52] R. ORTEGA, A. L. A, P. J. NICKLASSON, UND H. SIRA-RAMÍREZ. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London, 1 Auflage (1998).
- [53] RALF ROTHFUSS. *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Nummer 664 in Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8. VDI-Verlag, Düsseldorf (1997).
- [54] M. REYHANOGLU, A. SCHAFT, N. MCCLAMROCH, UND I. KOLMANOVSKY. Nonlinear Control of a Class of Underactuated Systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1682–1687. Kobe (1996).

- [55] M. REYHANOGLU, A. VAN DER SCHAFT, N. H. McCLAMROCH, UND I. KOLMANOVSKY. Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9):1663–1671 (1999).
- [56] J. A. ROSAS FLORES, J. ALVAREZ GALLEGOS, UND R. CASTRO LINARES. Stabilization of a Class of Underactuated Systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2168–2173. Sydney, Australia (2000).
- [57] N. SCHERM UND B. HEIMANN. Dynamics and control of underactuated manipulation systems: A discrete-time approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 30:237–248 (1999).
- [58] N. SCHERM UND B. HEIMANN. Nichtlineare zeitdiskrete Regelung eines unteraktuierten Manipulators. *Automatisierungstechnik*, 49(3):107–114 (2001).
- [59] R. SEPULCHRE, M. JANKOVIĆ, UND P. KOKOTOVIĆ. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London (1997).
- [60] A. SERRANI, A. ISIDORI, C. BYRNES, UND L. MARCONI. Recent Advances in Output Regulation of Nonlinear Systems. In *NONLINEAR CONTROL IN THE YEAR 2000*, Herausgeber, A. Isidori and F. Lamnabhi-Lagarrigue and Witold Respondek, Seiten 409–419. Springer-Verlag, Berlin (2000).
- [61] J.-H. SHIN, C.-Y. LEE, UND J.-J. LEE. Adaptive Robust Control of Underactuated Robot Manipulators. In *Proceedings of Advanced Intelligent Mechatronics*. Tokyo (1997).
- [62] M. W. SPONG. Partial Feedback Linearization of Underactuated Mechanical Systems. In *Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS*, Seiten 314–321. München (1994).
- [63] M. W. SPONG. Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems. In *13th IFAC Triennial World Congress*, Seiten 431–435. San Francisco (1996).
- [64] M. W. SPONG. Underactuated Mechanical Systems. In *CONTROL PROBLEMS IN ROBOTICS UND AUTOMATION*, Herausgeber, B. Siciliano and K. P. Valavanis, Band 230 von *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London (1997).
- [65] T. VINCENT. Control Using Chaos. *IEEE Control Systems Magazine*, Seiten 20–36 (1997).

Hybride Regelung:

- [66] M. S. BRANICKY. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475–482 (1998).
- [67] M. BUSS. *Methoden zur Regelung Hybrider Dynamischer Systeme — Modelle, Regelkreise, Optimalsteuerung, Rechnerwerkzeuge und Mechatronik-Anwendungen* — Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8. VDI-Verlag, Düsseldorf (2001, to appear).
- [68] M. CORLESS. Robust Stability Analysis and Controller Design with Quadratic Lyapunov Functions. In VARIABLE STRUCTURE UND LYAPUNOV CONTROL, Herausgeber, A. Zinober, Seiten 181–203. Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [69] J. DENK. *Echtzeitfähige optimale Regelungsverfahren für mechatronische Multi-Kontaktsysteme*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1999).
- [70] A. FILIPPOV. Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Side. *American Mathematical Society Translations*, 42(2):199–231 (1964).
- [71] D. LIBERZON UND A. S. MORSE. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70 (1999).
- [72] N. MCCLAMROCH UND I. KOLMANOVSKY. A Hybrid Switched Mode Control Approach for V/STOL Flight Control Problems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2648–2653. Kobe, Japan (1996).

Mathematische Grundlagen:

- [73] H. AMANN. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2 Auflage (1995).
- [74] Z. ARTSTEIN. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis*, 7:1163–1173 (1983).
- [75] R. BIANCHINI UND G. STEFANI. Sufficient Conditions of Local Controllability. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 967–970. Athens (1986).
- [76] R. BIANCHINI UND G. STEFANI. Controllability Along a Trajectory: A Variational Approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(4):900–927 (1993).

- [77] W. BOOTHBY. *An Introduction To Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, INC., Orlando, San Diego, New York, Austin, London, Montreal, Sydney, Tokyo, 2 Auflage (1986).
- [78] R. W. BROCKETT. Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential geometric control theory*, Seiten 181–191. Boston (1983).
- [79] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. GROSCHE, V. ZIEGLER, UND D. ZIEGLER. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1996).
- [80] H.-D. CHIANG UND J. THORP. Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: A Constructive Methodology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(12):1229–1241 (1989).
- [81] N. EULER UND W.-H. STEEB. *Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations*. BI-Wissenschaftsverlag, Wien, Zürich, 1 Auflage (1992).
- [82] J.-B. HIRIART URRUTY UND CLAUDE LEMARECHAL. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer-Verlag, Berlin, 1 Auflage (1993).
- [83] V. JURDJEVIC. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, New York, Oakleigh, Melbourne, Australia (1997).
- [84] K. MEYBERG UND P. VACHENAUER. *Höhere Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [85] K. MEYBERG UND P. VACHENAUER. *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [86] H. NIJMEIJER UND A. SCHAFT. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [87] K. OGATA. *State Space Analysis Of Control Systems*. Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1 Auflage (1967).
- [88] J. S. SHAMMAZ. A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 13:117–123 (1989).
- [89] D. D. ŠILJAK. *Nonlinear Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1 Auflage (1969).
- [90] H. J. SUSSMAN. Subanalytic Sets and Feedback Control. *Journal of Differential Equations*, 31:31–52 (1979).
- [91] H. J. SUSSMAN. A General Theorem on Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1):158–194 (1987).

-
- [92] H. SUSSMANN. Orbits Of Families Of Vector Fields And Integrability Of Distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 180:171–188 (1973).
- [93] H. J. SUSSMANN. Limitations on the Stabilizability of Globally Minimum Phase Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(1):117–119 (1990).
- [94] H. J. SUSSMANN UND P. V. KOKOTOVIĆ. The Peaking Phenomenon and the Global Stabilization of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:424–439 (1991).
- [95] B. TIBKEN. Estimation of the Domain of Attraction for Polynomial Systems via LMI's. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 3860–3864. Sydney, Australia (2000).
- [96] B. TIBKEN UND O. HACHICHO. Estimation of the Domain of Attraction for Polynomial Systems Using Multidimensional Grids. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 3870–3874. Sydney, Australia (2000).
- [97] W. T. VETTERLING, S. A. TEUKOLSKY, W. H. PRESS, UND B. P. FLANNERY. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge (1988).

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der TU München entstandene, eigene Veröffentlichungen:

- [98] J. MARECZEK UND M. BUSS. Preliminary Studies on Geometric Invariance Control Synthesis. In *Proceedings of European Control Conference*. Karlsruhe, Germany, Paper No. 861 (1999).
- [99] J. MARECZEK UND M. BUSS. Robust Stabilization of SISO Non–Minimum Phase Nonlinear Systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2494–2595. Phoenix, AZ, USA (1999).
- [100] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Comparison of Control Algorithms for a Nonholonomic Underactuated 2-DOF Robot. In *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics AIM'97*. Tokyo, Japan, Paper No. 96 (1997).
- [101] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Robust Global Stabilization of the Underactuated 2-DOF Manipulator R2D1. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seiten 2640–2645. Leuven, Belgium, Paper No.423 (1998).

- [102] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Robuste Regelung eines nicht-holonomen, unterbestimmt angetriebenen SCARA Roboters. In G. FACHAUSCHUSS 1.4: THEORETISCHE VERFAHREN DER REGELUNGSTECHNIK, Herausgeber, K. Reinschke, Seiten 189–198. w.e.b. Universitätsverlag Dresden, Dresden (1998).
- [103] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Robust Control of a Non-Holonomic Underactuated SCARA Robot. In PROGRESS IN SYSTEM, ROBOT ANALYSIS, UND CONTROL DESIGN, Herausgeber, S. G. Tzafestas and G. Schmidt, Band 243 von *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Seiten 381–396. Springer-Verlag, London (1999).
- [104] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Robuste Regelung eines nicht-holonomen, unteraktuierten SCARA Roboters. *Automatisierungstechnik*, 47(5):199–208 (1999).
- [105] J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Sufficient Conditions for Invariance Control of a Class of Nonlinear Systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1900–1905. Sydney, Australia (2000).
- [106] J. MARECZEK, M. BUSS, UND M. W. SPONG. Invariance Control of Normal Forms with Input Driven Internal Dynamics. In *Proceedings of the American Control Conference*, Seiten 3648–3653. Arlington, VA, USA (2001).
- [107] J. MARECZEK, M. BUSS, UND M. W. SPONG. Invariance Control of a Class of Cascade Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):636–640 (2002).
- [108] J. MARECZEK, S. HECKER, UND M. BUSS. Intelligent Switching Control of Nonlinear Non-minimum Phase Relative Degree Two Systems. In *Proceedings of European Control Conference*, Seiten 985–990. Porto, Portugal (2001).
- [109] J. MARECZEK, D. WOLLHERR, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Überschlagsvermeidung bei Kraftfahrzeugen durch Invarianzregelung. *Automatisierungstechnik*, 50(2):70–78 (2002).
- [110] D. WOLLHERR, J. MARECZEK, M. BUSS, UND G. SCHMIDT. Rollover Avoidance of Steerable Vehicles with Invariance Control. In *Proceedings of European Control Conference*, Seiten 3522–3527. Porto, Portugal (2001).

Im Rahmen dieser Arbeit am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der TU München angefertigte Hauptseminar-, Studien- und Diplomarbeiten:

- [111] A. BAUER. *Entwicklung eines digitalen Tachometers mit garantierter minimaler Auflösung für die Regelung eines Roboterarms*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1997).
- [112] D. CHAU. *Contrôle par le Chaos d'un Robot Sous-Animé à Deux Degrés de Liberté*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1998).
- [113] M. FILIPOVIĆ. *Entwicklung eines Massenschiebers für die Analyse von robusten Regelungsverfahren für R2D1*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1998).
- [114] S. HECKER. *Multimodales Telelabor* (2000). Hauptseminar, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München.
- [115] S. HECKER. *Regelung nichtlinearer NMP-Systeme mittels dynamischer Invarianzgebiete*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (2001).
- [116] J. MARECZEK. *Regelung eines Roboters mit nichtangetriebenen Gelenken*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (1997).
- [117] C. SCHWEIGER. *Synthese und Analyse einer robusten Invarianzregelung für R2D1*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (2000).
- [118] C. SCHWEIGER. *Synthese von Invarianzgebieten und robusten Schaltstrategien zur nichtlinearen Regelung unteraktuierter Systeme*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (2001).
- [119] D. WOLLHERR. *Robuste Lenkregelung für Ausweichmanöver eines Kraftfahrzeugs*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München (2000).

Stichwortverzeichnis

A

adaptive nichtlineare Systeme
 Erweiterung 117

B

Backstepping 139, **141**
Bernoulli-Dgl. 157
Brunovski-Form 18

C

chaosbasierte Regelung 5
Chassis-Dynamik 103
CLF 3, **121**, 139

D

Definitheit
 negative 119
 positive 119
 semi 119
Direktantrieb 75
diskrete Reglerzustände 65
Dissipativität 45
Doppelintegratorsystem 62

E

Einspeisungsrate 45
Einspur-Modell 101
 Bewegungsgleichungen 161
 erweitertes 102
Einzugsbereich 43
endliche Verweildauer 64
erstes Integral 159
erweiterter Luenberger-Beobachter .. 153

Existenzsatz 38

F

Fahrzeugsimulation 163
Familie geschalteter Systeme 143
Fehlerraum 28
finite-escape 14
flachheitsbasierte Regelung 4
Fluchtpunkt
 bedingung 36
 Definition 25

G

Gebiet
 Invarianz- 6
 Rückschalt- 70
geschalteter PD-Regler 63
Gierdynamik 99
glatte Funktionen 21
gyroskopisches Pendel 75

H

hochverstärkende Regler 3, **54**, 61
HSRI-Reifenmodell 102
Hurwitz-Polynom 49
Hybrider Reglerautomat 65

I

inertiale Verkopplung 79
Information
 haptisch 111
 visuell 111
interne Dynamik 18

interner Zustand	18	Tangenten-	25
Invarianz		Ljapunov	
bedingung	24	Funktion	
robuste	30	Definition	120
eines Zustandsraumgebiets	21	erweiterte Definition	122
Gebietssynthese	149–152	Gleichung	121
nominale		M	
negative	24	marginale Funktion	30, 119
positive	23	Mega-Torquer	<i>siehe</i> Direktantrieb
regler		MIMO-Systeme	
nominal	22	Erweiterung	97, 117
robust	40	minimalphasig	20
reserve	<i>siehe</i> Reserve	schwach	21
robuste	29	Systemausgang	21
Invarianzregelgesetz		MMI	111
bilinear	48	Motorkennlinie	153
CLF-basiert	139–145	Multirate-Regelung	5
dissipativitätsbasiert	44–58	N	
passivitätsbasiert	145–149	näherungsweise E-/A-Linearisierung ..	4
Invarianzregelung		nichtholonome Nebenbedingung ...	2, 20
dynamische	117	nichtminimalphasig	21
zeitdiskrete	106	linear	12
Invarianzwinkel	105	Systemausgang	21
K		Nickbewegungen	102
Kompensationsfunktion	150	Nominalfall	24
Koordinaten		Normalenform	
Entwurfs-	19	eingangsnormalisierte	18
Normalenform	19	globale	17
Original	19	Nulldynamik	20
Kraftrückkopplung	101	eines linearen Systems	12
L		Namensgebung	12
Lagrange-Methode	102	P	
Lenkdynamik	103	Passivitätsbedingung	146
Lenkwinkel	103	perturbierter Fall	24
letztendliche Begrenztheit	40 , 90	Phasenbahn	124
Lie-Ableitung	120	Pol-Nullstellen Kompensation	12
Linearisierung		R	
E-/A-	15	R2D1	75
Rückführ-	16		

radial unbegrenzte Funktion	119		
Rang-2-Systeme	62		
RCLF	121 , 145		
reachable set	109		
Regelungs-Lie-Algebra	5		
Regelungs-Ljapunov-Funktion	<i>siehe</i>		
CLF			
Regelziele	21		
Reglerparametervektor	35		
relative Schätzfehler	28		
relativer Rang	16		
Reserve	107		
Roboter			
Acrobot	75		
gyroskopische Pendel	75		
Pendubot	75		
R2D1	75		
SCARA	75		
unteraktuiert	75		
Rolldynamik	99		
Rückführlinearisierung	<i>siehe</i>		
Linearisierung			
S			
Satz von LaSalle	120		
Separatrix	159		
Sicherheitsabstand	84		
sign-Funktion			
Ableitung	123		
Definition	35		
sign-matching Bedingung	36		
Simulationsumgebung 3-D	110		
Sollwertparameter	63		
Speicherfunktion	45		
Stabilität	124		
asymptotische	124		
Brockettsches Kriterium	78		
exponentielle	124		
globale	125		
interne	21		
Ljapunov	124		
lokale	125		
semiglobale	125		
Stabilitätskarte im Parameterraum	142		
steer-by-wire	101		
Stellgrößenbeschränkungen	72		
Steuergröße			
virtuell	17		
Steuergröße			
tatsächliche	18		
virtuell	18		
Subdifferential	122		
Sylvester-Kriterium	141		
T			
Tangentenlinearisierung	<i>siehe</i>		
Linearisierung			
TCP-Sockets	163		
Trajektorie	124		
Transitionsbedingungen	65		
U			
Überschlags-Koeffizient	103		
unteraktuiert			
mechanische Systeme	1, 20		
verallgemeinerte Definition	20		
V			
verallgemeinerter Impuls	80		
Verhulst-Wachstumsgesetz	13		
W			
Wurzelortskurve	142		
Z			
Zustandsrückführung			
dynamische	12		
statische	12		
Zweispur-Modell	102		
Zweite Methode von Ljapunov	3		