

**Numerische Simulation des unterkühlten
Blasensiedens in turbulenter Strömung:
Ein Euler-Lagrange-Verfahren
auf orthogonalen Gittern**

Maximilian Emans

Institut für Informatik
der Technischen Universität München
Lehrstuhl für numerische Programmierung und
Ingenieuranwendungen in der Informatik

**Numerische Simulation des unterkühlten
Blasensiedens in turbulenter Strömung:
Ein Euler-Lagrange-Verfahren
auf orthogonalen Gittern**

Maximilian Emans

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Hans Michael Gerndt

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Christoph Zenger
2. Univ.-Prof. Dr. Dr. E.h. Franz Mayinger, em.

Die Dissertation wurde am 10. September 2003 bei der Technischen Universität
München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 9. Dezember 2003
angenommen.

Zusammenfassung

Zur numerischen Simulation des Blasensiedens wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem mehrere hundert Blasen in turbulenter Strömung berücksichtigt werden können. Die Large-Eddy-Simulation der Strömung stützt sich auf ein Finite-Volumen-Verfahren, das die Erhaltung von Impuls und kinetischer Energie durch die Diskretisierung der Operatoren sicherstellt. Durch einen objektorientierten Implementierungsansatz ist es dabei gelungen, durch vektorisierte Bearbeitung zusammenhängender Teilgebiete die Effizienz des Verfahrens zu erhalten und gleichzeitig eine diversifizierte Randbehandlung bei komplexen Geometrien in übersichtlichen Quelltext umzusetzen. Die Beschreibung der sich zeitlich ändernden Blasengestalt erfolgt aus Effizienzgründen mit nur neun dynamisch bestimmten Parametern. Das Modell wurde durch Vergleich mit experimentellen Daten validiert. Das Verfahren wird verwendet, um Strömung und Temperaturfeld in einem quadratischen Kanal mit einer beheizten Wand zu simulieren.


Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Physikalische Grundlagen	5
2.1. Begriffe, Definitionen und Gleichungen	6
2.2. Nicht deformierbare Partikeln in Fluiden	10
2.3. Deformierbare Partikeln, Blasen und Tropfen in Fluiden	11
2.3.1. Übergangsbedingungen an der Phasengrenze	11
2.3.2. Physikalische Einflußgrößen	13
2.3.3. Experimentelle Untersuchungen zur Umströmung von Blasen	14
2.4. Wärmeübergang an beheizten Wänden	22
2.4.1. Wärmeübergang ohne Phasenwechsel	22
2.4.2. Wärmeübergang mit Phasenwechsel	25
3. Ein impuls- und energierhaltendes Finite-Volumen-Verfahren	31
3.1. Anforderungen an ein Programm zur Simulation disperser turbu- lenter Strömungen	32
3.2. Räumliche Diskretisierung der Operatoren	33
3.2.1. Formulierung des Gleichungssystems	33
3.2.2. Gewünschte Eigenschaften der Diskretisierung	34
3.2.3. Diskretisierung der einzelnen Terme im zweidimensionalen Fall	37
3.2.4. Diskretisierung der einzelnen Terme im dreidimensionalen Fall	43
3.2.5. Interpretation des Verfahrens	47
3.3. Der Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen	49
3.3.1. Zeitdiskretisierung	50
3.3.2. Implementierung der Operatoren	56
3.3.3. Globale Programmstrukturen	60
3.3.4. Zusammenfassung wichtiger Eigenschaften des Verfahrens .	63
3.4. Simulation turbulenter Strömungen	64
3.4.1. Beschreibung des verwendeten LES-Verfahrens	66
3.4.2. Simulation der Strömung durch einen geraden Kanal mit quadratischem Querschnitt	75

4. Ansätze zur Simulation disperser turbulenter Strömungen	81
4.1. Anforderungen an Simulationsverfahren für das Blasensieden in turbulenter Kanalströmung	82
4.1.1. Simulation der äußeren Phase	82
4.1.2. Simulation der dispersen Phase	83
4.2. Übersicht über Verfahren zur Simulation von Mehrphasenströmungen	83
4.2.1. Oberflächenangepaßte Gitter	84
4.2.2. Volume-of-Fluid-Verfahren	85
4.2.3. Front-tracking-Methoden	86
4.2.4. Boltzmann-Methoden	88
4.2.5. Homogenisierende Verfahren	88
4.2.6. Euler-Lagrange-Verfahren	89
4.3. Verfahren zur Simulation von Phasenübergangsphänomenen . . .	91
4.4. Welches Verfahren eignet sich?	92
5. Ein effizientes Zweiwegverfahren zur Modellierung von Blasen	95
5.1. Grundzüge des vorgestellten Verfahrens	95
5.2. Modellierung des Einflusses der äußeren Kraft	97
5.3. Bestimmung der Blasenform	98
5.4. Fehlerkorrektur	106
5.4.1. Verbesserung der Wiedergabe des Einflusses der äußeren Kraft	107
5.4.2. Verallgemeinerungen der Fehlerkorrektur	111
5.4.3. Validierung der strömungsmechanischen Eigenschaften des Blasenmodells	114
5.5. Modellierung des Phasenübergangs	119
5.5.1. Ermittlung der Volumenänderung einer Blase durch Kondensation und Verdampfung	119
5.5.2. Die Auswirkung der Volumenänderung der Blase auf die kontinuierliche Phase	123
5.5.3. Validierung der Modellierung des Phasenübergangs	125
5.5.4. Beispiel: Blasenbildung bei der Erhitzung von ruhendem Wasser	126
5.6. Kollisionen von Blasen mit festen Wänden und anderen Blasen . .	128
5.7. Implementierung	128
6. Numerische Simulation des Blasensiedens an beheizten Wänden	131
6.1. Problemstellung	131
6.2. Parameter und Auswertung der Rechnungen	132
6.2.1. Auswertung der Felddaten	133
6.2.2. Gesamtenergieeintrag	135
6.3. Simulation der Strömung im ebenen Spalt	137

6.3.1. Turbulente Spaltströmung bei $Re = 5200$	138
6.3.2. Laminare Spaltströmung bei $Re = 750$	141
6.4. Kanalströmung bei $Re = 2800$	142
6.4.1. Inertgasblasen	145
6.4.2. Dampfblasen	151
6.4.3. Interpretation der Ergebnisse	161
6.5. Kanalströmung bei $Re = 6000$	163
6.5.1. Inertgasblasen	164
6.5.2. Dampfblasen	171
6.5.3. Bewertung der Ergebnisse	180
6.6. Zusammenfassender Vergleich der betrachteten Fälle	181
6.7. Wärmeübergang im Kanal mit rauher Wand	183
6.7.1. Validierung der Simulationsergebnisse	185
6.7.2. Einphasige Strömung	186
6.7.3. Inertgasblasen	190
6.7.4. Dampfblasen	192
7. Zusammenfassung und Ausblick	197
7.1. Überblick über die Ergebnisse dieser Arbeit	197
7.2. Ausblick	198
A. Interpolationsvorschriften zur Berechnung der konvektiven Terme	199
B. Kontinuitätserhaltende Interpolation in 3D	203
C. Formelzeichen	207

1. Einleitung

 bwohl die Fortschritte der Rechnertechnik und zahlreiche Verbesserungen auf algorithmischer Seite in den letzten Jahrzehnten zu einer Vervielfachung der verfügbaren Rechenleistung geführt haben, gibt es heute noch strömungsmechanische Probleme zuhauf, die durch numerische Simulationen nicht oder nur in unbefriedigender Weise gelöst werden können. Dazu zählt zweifellos die Simulation turbulenter Strömungen, aber auch Mehrphasenströmungen im allgemeinen.

Simulation turbulenter Strömungen

Die Direkte Numerische Simulation (DNS) von turbulenten Strömungen dient heute in erster Linie dazu, Daten bereitzustellen, auf deren Grundlage die Phänomenologie der Turbulenz untersucht werden kann. Wegen der hohen rechnerischen und algorithmischen Anforderungen konnte diese Technik der Grundlagenforschung erst in den vergangenen zwei Jahrzehnten entwickelt werden. Die Dokumentation der Eigenschaften einer turbulenten Strömung zwischen zwei ebenen Platten von Kim et al. [51] im Jahr 1987 gilt als Meilenstein.

Im industriellen Umfeld und der angewandten Forschung dagegen spielen Verfahren eine wichtige Rolle, bei denen die Turbulenz modelliert wird. Da hier im Vordergrund steht, befriedigende Ergebnisse mit geringem Aufwand und in kurzer Zeit zu erhalten, werden Abstriche hinsichtlich der Genauigkeit eher in Kauf genommen.

In beiden Fällen ist es erstrebenswert, den anfallenden Rechenaufwand nach Möglichkeit zu reduzieren. Wegen der mit orthogonalen Gittern erreichbaren kurzen Programmlaufzeiten werden diese Gitter bevorzugt eingesetzt. Ihr Nachteil, daß nämlich die Gitterpunkte relativ gleichmäßig über das Rechengebiet verteilt werden müssen, daß also auch auf Teilgebiete mit sehr einheitlichem Strömungsverhalten viel Rechenzeit und Speicherplatz unnötigerweise verwendet wird, muß dabei bisher in der Regel akzeptiert werden.

Abhilfe ließe sich durch die Verwendung adaptiv verfeinerter Rechengitter schaffen. Bisher jedoch erleiden solche Verfahren entweder einen Genauigkeitsverlust an den Übergängen zwischen den Gittern unterschiedlicher Verfeinerungsstufen

oder sie sind nicht zu stabilisieren. Es mangelte bisher an einem grundlegenden Verständnis der mathematischen Modellierung, so daß diese Probleme nicht systematisch angegangen werden konnten. Darüber hinaus sind die bei adaptiven Gittern anzutreffenden Datenstrukturen kompliziert; entsprechende Programme sind somit nur schwer vektorisierbar und haben daher lange Laufzeiten.

Simulation von Mehrphasenströmungen

Die Simulationsverfahren für Mehrphasenprobleme setzen jeweils auf einer Methode zur Simulation einer einphasigen Strömung auf. Sie sind traditionell sehr stark spezialisiert und haben sich an die sich über die letzten Jahrzehnte wandelnden technischen Möglichkeiten aber auch Anforderungen angepaßt. Zentrales Problem bei der Simulation von Zweiphasenströmungen ist die Berechnung der Veränderung der Phasengrenzfläche. So konnten etwa 1969 von Le Clair et al. [57] Rechnungen durchgeführt werden, mit denen die lokalen Geschwindigkeiten an der Oberfläche fallender kugelförmiger Tropfen bestimmt wurden. Die Berechnung vollständiger Geschwindigkeitsfelder war erst ab etwa den 80er Jahren des vergangenen Jahrhunderts möglich. Ebenfalls in dieser Zeit erlangten Verfahren, mit denen die Gestalt der Phasengrenzfläche dynamisch berechnet wird, Bedeutung bei der numerischen Simulation von Mehrphasenströmungen. Als wegbereitend kann hier die Beschreibung der Volume-of-Fluid-Methode durch Hirt und Nichols [44] gelten.

Blasensieden in turbulenter Strömung

Von unterkühltem Blasensieden spricht man, wenn eine Flüssigkeit, deren Temperatur nicht oberhalb der Siedetemperatur liegt, an einer beheizten Wand vorbeiströmt und dabei lokal so stark aufgeheizt, d.h. überhitzt wird, daß es zur Verdampfung kleiner Flüssigkeitsmengen kommt. Gegenüber dem Filmsieden bilden sich beim Blasensieden an der beheizten Fläche keine ausgedehnten Dampfpolster. Der Vorgang des Blasensiedens ist deshalb von Bedeutung, weil dabei gegenüber dem einphasigen Erwärmen und dem großflächigen Verdampfen mehr Wärme pro Flächeneinheit an das Fluid übertragen werden kann.

Wo es eine technische oder wirtschaftliche Notwendigkeit erfordert, kann also versucht werden, einen wärmeübertragenden Apparat in einem Temperaturbereich zu betreiben, bei dem es zum unterkühlten Blasensieden kommt, weil der dann hohe Wärmeübergang eine platzsparende Dimensionierung der Anlage erlaubt. Als Teil des gesamten Verdampfungsvorgangs kommt das unterkühlte Blasensieden in zahlreichen Apparaten vor, etwa in Kühl- und Klimaanlage oder Wärmeübertragern in Kraftwerken. Wegen ansteigender Leistung bei gleichzeitig

fortschreitender Miniaturisierung der Computerbauteile und der damit wachsenden abzuführenden Wärmemenge pro Gerätevolumen ist von Seiten der Computerindustrie ein steigendes Interesse an kleinskaligen Wärmeübertragungsbau- teilen zu erwarten.

Die physikalischen Phänomene an beheizten Wänden können in ihrem globalen Effekt seit geraumer Zeit quantifiziert werden. Bei der Beantwortung der aus Sicht der Anlagenbauer wichtigen Frage, welche Wärmeübertragungsfläche bei einem bestimmten Betriebszustand und einer zu übertragenden Wärmemenge vorzusehen ist, kann auf mittlerweile jahrzehntelange Erfahrung im Apparatebau und die Ergebnisse gezielter Forschung zurückgegriffen werden. Die lokalen Ursachen dieser Effekte sind aber bis heute zum Teil nicht richtig verstanden. Erst in jüngster Zeit werden hier Fortschritte erzielt. Diese sind im wesentlichen auf die Entwicklung der Meßtechnik zurückzuführen. Trotzdem befriedigen die Möglichkeiten der Meßtechnik in diesem Bereich noch kaum. Die numerische Simulation dieser Art von Vorgängen ist zwar nicht wesentlich weniger aufwendig, verspricht aber Daten zu liefern, die zum Verständnis beitragen und möglicherweise bei der Planung neuer Experimente von Nutzen sind.

Aufbau dieser Arbeit

Die Aufgabe, die in dieser Arbeit gelöst werden soll, ist also, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem das unterkühlte Blasensieden in turbulenter Strömung simuliert werden kann.

Im auf diese Einleitung folgenden **2. Kapitel** werden die physikalischen Grundlagen der Zweiphasenströmungen und des Wärmeübergangs in ein strömendes Fluid diskutiert und ihre mathematische Beschreibung eingeführt. Anhand dimensionsloser Kennzahlen und anschaulicher Beispiele werden die wichtigsten Einflußgrößen benannt. Anschließend wird ein Überblick gegeben über den aktuellen Stand des Wissen.

Das **3. Kapitel** enthält eine Beschreibung des verwendeten numerischen Verfahrens zur Strömungssimulation. Neben dem eigens entwickelten Verfahren der räumlichen Diskretisierung wird dabei der Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Diskretisierung herausgestellt. Das verwendete Turbulenzmodell wird präsentiert. Schließlich wird die Funktionsfähigkeit des Programms anhand in der Literatur dokumentierter Problemfälle unter Beweis gestellt.

Im **4. Kapitel** werden die gebräuchlichen Verfahren zur Simulation von Zweiphasenströmungen vorgestellt und auf ihre Tauglichkeit zur Simulation des Blasensiedens in turbulenter Strömung hin untersucht.

Das Euler-Lagrange-Verfahren zur Simulation des Blasensiedens wird im Detail

im **5. Kapitel** vorgestellt. Auf die Beschreibung der einzelnen Modellbestandteile folgt dabei jeweils ein Abschnitt, in dem die neu hinzukommenden Modelleigenschaften durch Vergleich mit dem Experiment validiert werden.

Das **6. Kapitel** ist ganz der Beschreibung und Diskussion der Ergebnisse von Berechnungen zu Wärmeübergangsproblemen gewidmet. Betrachtet werden dabei Fälle von Spaltströmungen und turbulenten Strömungen durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt. Untersucht werden die Unterschiede zwischen der Strömung mit Dampfblasen und Inertgasblasen sowie einphasiger Strömung anhand des Temperaturfelds, der Turbulenzintensität und des Sekundärströmungsfelds.



An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Zuerst gilt mein Dank Herrn Professor Zenger, meinem Doktorvater. Die Tatsache, daß er es mir als Ingenieur ermöglichte, an seinem Lehrstuhl an der Fakultät für Informatik im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 438 „Mathematische Modellierung, Simulation und Verifikation in materialorientierten Prozessen und intelligenten Systemen“ zu arbeiten, eröffnete mir den Zugang zu für mich neuen Betrachtungsweisen. In zahlreichen engagierten Gesprächen wies mich Professor Zenger ein in seine Ideen zur numerischen Strömungsmechanik. Insbesondere für das Aufbringen der dafür notwendigen Geduld bin ich ihm zu Dank verpflichtet.

Viele wertvolle Erkenntnisse verdanke ich auch den Gesprächen mit Professor Mayinger, der mit seiner Arbeitsgruppe ebenfalls am erwähnten Sonderforschungsbereich beteiligt war und der durch sein Interesse an meiner Arbeit sehr dazu beigetragen hat, daß diese auch für die Ingenieurwissenschaft verwertbare Ergebnisse hervorbrachte. In diesem Sinne bin ich auch seiner Mitarbeiterin Anita Lucic verbunden, sowie Michael Manhart, der mir einige äußerst wertvolle praktische Tips gegeben hat.

Besonderen Dank schulde ich auch Stefan Achatz, Michael Bader und meinem Vater Martin Emans für das aufmerksame Korrekturlesen der Arbeit. Weiterhin danke ich Viktor Ganzha, Thomas Huckle, Christoph Kranz und Sergey Pankratov dafür, daß sie mich stets bei meiner Arbeit mit Wohlwollen und Hingabe freundschaftlich unterstützt haben. Nicht zuletzt danke ich unserem Systemadministrator Alexander Mors, der durch seinen unermüdlichen Einsatz den Betrieb der Rechner des Lehrstuhls sicherte, auf denen die dieser Arbeit zugrundeliegenden Simulationsrechnungen durchgeführt wurden.

2. Physikalische Grundlagen

Unter dem Begriff der Strömungsmechanik wird eine Vielzahl von Arbeitsgebieten zusammengefaßt. Als Teilgebiet der Physik umfaßt sie alle Forschungsgegenstände, die maßgeblich durch die Dynamik von Flüssigkeiten oder Gasen beeinflusst werden. Die physikalische Beschreibung und mathematische Modellierung dieser Art von Dynamik erfolgt auf der Grundlage einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise der Materie. Beispiele aus diesem weiten Feld können so unterschiedlich wie kosmische Galaxien und Mikropumpen sein.

Ebenso ist die Thermodynamik ein Teilgebiet der Physik. Sie befaßt sich mit den verschiedenen Erscheinungsformen von Energie, mit der Umwandlung von einer Form von Energie in andere und mit den Eigenschaften der Materie, die damit in Zusammenhang stehen (vgl. Stephan und Mayinger [105]). Angewandt werden die Erkenntnisse thermodynamischer Forschung insbesondere in der Verfahrenstechnik; zahlreiche Beispiele lassen sich aber auch aus anderen Wissenschaftszweigen wie der Geologie oder der Chemie benennen. Thermodynamik ist fast überall dort von Bedeutung, wo Energieumwandlungsprozesse betrachtet werden.

Da in der Strömungsmechanik Energieumwandlung oft eine entscheidende Rolle spielt und umgekehrt auch thermodynamische Prozesse maßgeblich von der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen beeinflusst werden, sind sehr viele physikalische Phänomene nicht einem der beiden Teilgebiete zuzuordnen, sondern können nur unter Zuhilfenahme der Erkenntnisse sowohl der Thermodynamik als auch der Strömungsmechanik vollständig verstanden werden. Der in dieser Arbeit zu untersuchende Vorgang des unterkühlten Blasensiedens ist sowohl ein strömungsmechanisches als auch ein thermodynamisches Problem.

Die Strömungsmechanik aber ebenso wie die Thermodynamik kann somit auch als Teilgebiet diverser, insbesondere phänomenologisch orientierter Forschungsgebiete verstanden werden, in denen sie zum Verständnis verschiedenster Prozesse Beiträge leistet. Vor diesem Hintergrund ist es natürlich, daß sich eine einheitliche Verwendung von Begriffen und Zeichen im wesentlichen innerhalb der verschiedenen Anwendungsgebiete herausgebildet hat.

Zunächst werden daher strömungsmechanische und thermodynamische Begriffe und Gleichungen eingeführt. Die Auswahl und Formulierung der Gleichungen

richtet sich nach dem Bedarf der folgenden Abschnitte, in denen die für *Mehrphasenströmungen* und *disperse Strömungen* typischen Formulierungen behandelt werden. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei denjenigen Aspekten zuteil, die mit dem Blasensieden in Zusammenhang stehen. Durch die Einführung der relevanten dimensionslosen Kennzahlen werden die wichtigsten Einflußgrößen aufgezeigt; auf diese Weise gelingt dann eine Klassifizierung der Problemfälle. Auf dieser Grundlage wird ein Überblick über die in der Literatur verfügbaren experimentellen Daten gegeben. Dies geschieht bereits unter dem Aspekt der Entwicklung eines geeigneten numerischen Verfahrens, mit dem die der Arbeit zugrundeliegenden Problemstellungen behandelt werden sollen. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels führt die wesentlichen Begriffe aus dem Bereich der *Wärmeübertragung* ein und referiert in kurzer Form den Stand der Forschung auf dem Gebiet des unterkühlten Blasensiedens.

2.1. Begriffe, Definitionen und Gleichungen

Disperse Strömungen sind durch das Vorhandensein von mindestens zwei *Phasen* gekennzeichnet. Unter dem Begriff der Phase wird dabei ein Gebiet verstanden, das von einem für die Betrachtung hinreichend homogenem Material ausgefüllt ist. Prinzipiell kann dabei Massenaustausch über die *Phasengrenzen* hinweg stattfinden. Unter Phasengrenze wird dabei diejenige Fläche verstanden, die zwei Phasen voneinander trennt.

Beispiele für *Zweiphasensysteme* sind in Wasser aufsteigende Luftblasen, einem Luftstrom ausgesetzte Staubpartikeln oder Emulsionen wie Mayonnaise, bei der Wassertröpfchen in Öl suspendiert sind. Bei vielen Zweiphasensystemen ist der Gebrauch der Begriffe *kontinuierliche* und *dispergierte* oder *disperse Phase* üblich geworden. Unter der kontinuierlichen Phase versteht man diejenige Phase, die die andere, die dispergierte Phase, in relativ kleine, abgeschlossene Volumina trennt. Bei den drei genannten Beispielen werden die Luftblasen, die Staubpartikeln bzw. die Wassertröpfchen als disperse Phase bezeichnet.

In bestimmten Fällen können bei den Bezeichnungen die Übergänge fließend sein, z.B. dann, wenn von beiden Phasen in einem betrachteten Gebiet ungefähr dasselbe Volumen vorliegt; in diesem Fall hängt es von der Lage der Oberfläche und der räumlichen Verteilung der Phasen ab, welche als die kontinuierliche und welche als die dispergierte gilt. In der Regel ist aber offensichtlich, welche Phase als die kontinuierliche zu bezeichnen ist. Wir werden es mit Systemen zu tun haben, bei denen die kontinuierliche Phase gegenüber der dispergierten volumenmäßig bei weitem überwiegt und bei denen die dispergierte Phase zudem nur kleine zusammenhängende Gebiete einnimmt.

Disperse Strömungen sind weiterhin dadurch gekennzeichnet, daß die kontinuierliche Phase ein Fluid, also flüssig oder gasförmig ist. Die disperse Phase dagegen kann in allen drei Phasenzuständen vorliegen; die eben genannten Beispiele illustrieren das. Das Ziel dieser Arbeit ist die numerische Simulation von Strömungen von Flüssigkeiten, deren Merkmale durch die Gegenwart von Gasblasen geprägt sind. Zweiphasensysteme, bei denen die kontinuierliche Phase flüssig und die disperse gasförmig ist, stehen also im Vordergrund.

Grundgleichungen einphasiger, inkompressibler Fluide

Die eine Strömung eines inkompressiblen Fluids kennzeichnenden Größen sind der Geschwindigkeitsvektor \vec{u} und der Druck p als Funktion von Ort und Zeit. Diese Größen gehorchen den *Navier-Stokes-Gleichungen*. Dabei handelt es sich um ein System partieller Differentialgleichungen, das aus einer Impulsgleichung je Raumrichtung und einer Kontinuitätsgleichung besteht:

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \circ \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} \quad (2.1)$$

$$\nabla \circ \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

Parameter dabei sind die Fluidichte $\rho = const.$, die dynamische Viskosität μ und die äußeren Kräfte wie die Erdbeschleunigung, die in \vec{f} zusammengefaßt werden. Zusätzlich werden Anfangs- und Randbedingungen für den Druck und die Geschwindigkeiten festgelegt.

Ein Gleichungssystem für dimensionslose Größen erhält man dadurch, daß die Längenmaße und Größen mit physikalischen Einheiten auf eine charakteristische Länge d bzw. eine charakteristische Geschwindigkeit u_0 oder ein geeignetes Produkt von Potenzen von beiden bezogen werden:

$$\vec{x}^+ = \vec{x} \cdot \frac{1}{d}, \quad \vec{u}^+ = \vec{u} \cdot \frac{1}{u_0}, \quad p^+ = p \cdot \frac{1}{\rho \cdot u_0^2}, \quad t^+ = t \cdot \frac{u_0}{d} \quad (2.3)$$

Parameter des Differentialgleichungssystems sind dann die *Reynoldszahl*, die mit der charakteristischen Geschwindigkeit u_0 , der charakteristischen Länge d und der kinematischen Zähigkeit des Fluids

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.4)$$

zu

$$Re := \frac{u_0 \cdot d}{\nu} \quad (2.5)$$

definiert ist und die äußeren Kräfte, die durch

$$\vec{f}^+ = \vec{f} \cdot \frac{d}{u_0^2} \quad (2.6)$$

2. Physikalische Grundlagen

dimensionslos dargestellt sind. Die Navier-Stokes-Gleichungen in den dimensionslosen Größen lauten¹:

$$\frac{\partial \vec{u}^+}{\partial t^+} + (\vec{u}^+ \circ \nabla^+) \vec{u}^+ = -\nabla^+ p^+ + \frac{1}{Re} \Delta^+ \vec{u}^+ + \vec{f}^+ \quad (2.7)$$

$$\nabla^+ \circ \vec{u}^+ = 0 \quad (2.8)$$

Daneben sind oft eine oder mehrere *passive, skalare Transportgrößen* wie die Temperatur oder die Konzentration eines löslichen Stoffes von Interesse. Eine Transportgröße wird als passiv bezeichnet, wenn ihr Einfluß auf das Strömungsfeld vernachlässigbar ist. Das Verhalten einer solchen Transportgröße c wird von einer sogenannten Transportgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{u} \circ \nabla) c = D \Delta c + q \quad (2.9)$$

Parameter sind der Diffusionskoeffizient D des Stoffes in der kontinuierlichen Phase, dessen Konzentration mit c bezeichnet wird, sowie die in q zusammengefaßten Quell- und Senkterme. Gegenseitige Wechselwirkungen wie Reaktionen werden in den Quell- und Senktermen berücksichtigt. Es kann auch vorkommen, daß die Diffusionskoeffizienten von der Konzentration weiterer Stoffe abhängig sind.

Die Konzentration c eines Stoffes wird entdimensioniert durch

$$c^+ = \frac{c - c_\infty}{c_0}. \quad (2.10)$$

c_∞ und c_0 sind charakteristische Bezugsgrößen. Mit der Einführung der *Schmidtzahl*

$$Sc := \frac{\nu}{D} \quad (2.11)$$

und der Entdimensionierung von q durch

$$q^+ = \frac{d}{u_0 \cdot c_0} \quad (2.12)$$

entsteht folgende Differentialgleichung in den dimensionslosen Größen:

$$\frac{\partial c^+}{\partial t^+} + (\vec{u}^+ \circ \nabla^+) c^+ = \frac{1}{Sc \cdot Re} \Delta^+ c^+ + q^+ \quad (2.13)$$

Parameter der Differentialgleichung sind also das Produkt von Schmidtzahl und Reynoldszahl und der zusammenfassende Quell- und Senkterm q^+ .

Für den Fall, daß die Transportgröße die Temperatur ist, wird die Schmidtzahl durch die *Prandtlzahl* ersetzt:

$$Pr := \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} \quad (2.14)$$

¹Mit ∇^+ bzw. Δ^+ werden der dimensionslose Nabla- bzw. Laplace-Operator bezeichnet, deren Entdimensionierung ebenfalls die Längeneinheit d zugrunde liegt.

c_p ist darin die spezifische Wärmekapazität und λ die Wärmeleitfähigkeit des Fluids. Die Temperatur in physikalischen Einheiten wird in dieser Arbeit mit θ bezeichnet, in dimensionsloser Form wird das Zeichen T verwendet; das Entdimensionieren erfolgt analog Gleichung (2.10).

In der vorliegenden Arbeit wird überwiegend mit dimensionslosen Größen gearbeitet. Die Kennzeichnung dieser Größen durch das hochgestellte $^+$ -Zeichen wird daher meist weggelassen. Um etwa Vergleiche mit Daten aus der Literatur, in der mit dimensionsbehafteten Größen gearbeitet wird, übersichtlicher ausführen zu können, kann die dimensionslose Darstellungsform nicht ganz durchgehend beibehalten werden. Wenn es notwendig ist, davon abzuweichen, wird darauf ausdrücklich hingewiesen.

Mehrphasensysteme und Phasengrenzflächen

Treten mehrere Phasen in einem Berechnungsgebiet auf, so gelten die Navier-Stokes-Gleichungen für jede dieser Phasen innerhalb des Gebiets der Phase; das betrachtete Gebiet der Gültigkeit der Navier-Stokes-Gleichungen mit einheitlichem Parametersatz deckt sich mit dem Teil des Raums, der von der jeweiligen Phase eingenommen wird. Die Parameter sind jeweils an die Materialdaten anzupassen.

Die Ränder der Gebiete, in denen die Navier-Stokes-Gleichungen mit einheitlichen Parametern gelten, fallen also genau mit den Phasengrenzen zusammen. Die Strömungen an beiden Seiten einer Phasengrenze beeinflussen sich gegenseitig. Dieser wechselseitige Einfluß wird mathematisch modelliert durch die Formulierung von *Übergangsbedingungen*. Betrachtet man das Gebiet einer Phase, so können die Übergangsbedingungen als zeitlich sich ändernde Randbedingungen aufgefaßt werden. Im Gegensatz zu den Übergangsbedingungen für die strömungsmechanischen Größen Geschwindigkeit und Druck sind die Übergangsbedingungen für die Transportgrößen in der Regel relativ einfach: Die entsprechenden Funktionen sind oft über die Phasengrenze hinweg stetig.

In den nächsten beiden Abschnitten sind die Übergangsbedingungen für die strömungsmechanischen Größen und die wichtigsten Parameter für disperse Strömungen zusammengestellt. Das für eine solche Charakterisierung der Systeme wichtigste Unterscheidungsmerkmal ist das Verhalten der Einschlüsse in der kontinuierlichen Phase. Danach lassen sich die Einschlüsse zunächst unterteilen hinsichtlich ihrer Deformierbarkeit. Einschlüsse, die unter den wirkenden Kräften ihre Form innerhalb der betrachteten Zeitskalen ändern, werden als *deformierbar* bezeichnet; darunter fallen etwa Tropfen und Blasen, aber auch beispielsweise Fettpartikeln in Milch oder Styroporkügelchen in Flüssigkeiten. Starr dagegen sind die *nicht deformierbaren* Partikeln, z.B. Sandkörner. Die deformierbaren Partikeln können

anhand ihres Materialverhaltens weiter unterschieden werden: Solche, die sich wie Flüssigkeiten verhalten, werden als *viskos* bezeichnet; andere, beispielsweise die Styroporkügelchen, werden als *elastisch* bezeichnet.

Auf die Formulierung der Übergangsbedingungen folgend werden jetzt die Einflüsse der Systemparameter auf das betrachtete System behandelt. Das Augenmerk richtet sich dabei auf den in dieser Arbeit zentralen Fall eines Systems mit flüssiger kontinuierlicher und gasförmiger disperser Phase. Es wird ein Überblick gegeben über verfügbare, aus Experimenten gewonnene Daten zur quantitativen Beschreibung dieser Systeme.

2.2. Nicht deformierbare Partikeln in Fluiden

Bei Kontinuumsbetrachtungen wird i.a. davon ausgegangen, daß an festen Rändern, und um solche handelt es sich bei den Partikeloberflächen, das benetzende Fluid, also hier die kontinuierliche Phase, dieselbe Geschwindigkeit wie der feste Rand, also die Partikeloberfläche, hat. An der Partikeloberfläche ist also zu verlangen

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2. \quad (2.15)$$

Der Index 1 bezeichnet hier und im folgenden die zur kontinuierlichen Phase, der Index 2 die zur dispergierten Phase gehörende Größe. Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeit der Partikeloberfläche im Bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem etwa bei rotierenden Partikeln über die gesamte Oberfläche nicht konstant sein muß, sondern im allgemeinen eine Funktion des Orts und der Zeit ist.

Die (stationäre) Bewegung einer Partikel mit einem Durchmesser² d_p in einem umgebenden Fluid wird gekennzeichnet durch die *Partikelreynoldszahl*

$$Re_p := \frac{d_p \cdot u_\infty}{\nu} \quad (2.16)$$

und die *Archimedeszahl*

$$Ar := \frac{d_p^3 \cdot g \cdot \Delta\rho}{\rho \cdot \nu}. \quad (2.17)$$

u_∞ ist darin die Sink- bzw. Aufstiegs geschwindigkeit der Partikel in ungestörter Strömung, ρ die Dichte der kontinuierlichen Phase, $\Delta\rho$ die Dichtedifferenz zwischen kontinuierlicher und disperser Phase und g der Betrag des Vektors des

²Bei unregelmäßig geformten Partikeln wird oft ein *Äquivalentdurchmesser* angegeben. Dabei handelt es sich um den Durchmesser einer Kugel, deren Eigenschaft von Interesse genauso ist wie die Eigenschaft der unregelmäßig geformten Partikel, beispielsweise also den Durchmesser einer volumengleichen Kugel.

Schwerefelds. Die Partikelreynoldszahl setzt Trägheitskräfte und viskose Kräfte zueinander ins Verhältnis, während die Archimedeszahl Auftrieb gegen Viskosität bewertet. Gebräuchlich ist auch eine mit Ω bzw. als *Ljaschenkozahl* Lj bezeichnete dimensionslose Kennzahl

$$\Omega = Lj := \frac{u_\infty^3 \cdot \rho}{\Delta\rho \cdot \nu \cdot g}. \quad (2.18)$$

In der Verfahrenstechnik wird mit einem Ar - Ω -Diagramm oft die Sinkgeschwindigkeit von Partikeln bestimmt. Die so ermittelte Sinkgeschwindigkeit bzw. Bewegungsgeschwindigkeit von festen Partikeln in Fluiden wird klassischerweise zum Auslegen von Trennapparaten verwendet, vgl. Schubert et al. [97].

2.3. Deformierbare Partikeln, Blasen und Tropfen in Fluiden

Bei deformierbaren Partikeln, Blasen oder Tropfen als dispergierte Phase gelten an den deformierbaren Oberflächen besondere Übergangsbedingungen. Die sich daraus ergebenden Randbedingungen für die Navier-Stokes-Gleichungen der kontinuierlichen Phase werden durch diese Übergangsbedingungen verbunden mit den Spannungszuständen im Partikelinneren, bzw. Strömungsfeldern im Blasen- und Tropfeninneren, die ihrerseits über dieselben Übergangsbedingungen von der Bewegung der umgebenden kontinuierlichen Phase abhängen. Bei elastischen Partikeln gehorchen die Spannungen in der Partikel den Gesetzmäßigkeiten der Strukturmechanik, bei Blasen und Tropfen dagegen gelten ebenfalls die Navier-Stokes-Gleichungen, die mit den entsprechenden Parametern der dispersen Phase formuliert werden müssen.

2.3.1. Übergangsbedingungen an der Phasengrenze

Neben dem Geschwindigkeitsvektor ist hier der *viskose Spannungstensor* von entscheidender Bedeutung. Die Oberflächenform wird üblicherweise durch einen Kugelausschnitt angenähert; deshalb wird seine Matrix hier mit Kugelkoordinaten r , ϕ und θ indiziert, wobei der erste Index die Orientierung der Fläche angibt, auf die die Spannung ausgeübt wird, und der zweite die Richtung der Spannung:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\phi} & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\phi r} & \tau_{\phi\phi} & \tau_{\phi\theta} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\phi} & \tau_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Von den Übergangsbedingungen betroffen sind diejenigen Größen, die zwei an der Phasengrenze benachbarten Fluidelementen gemeinsam sind. Das sind die

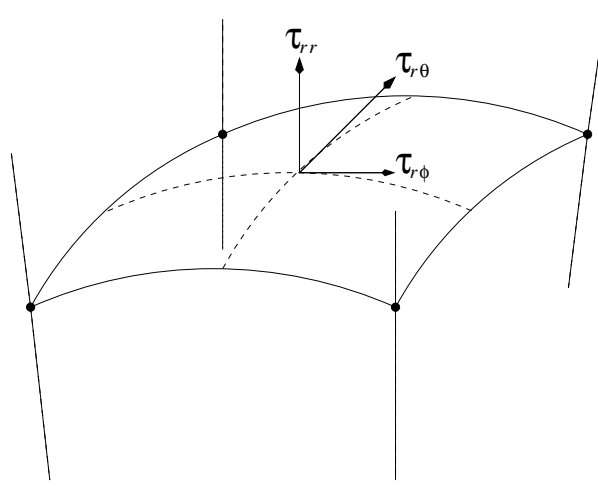


Abbildung 2.1.: Skizze zu den Übergangsbedingungen für den viskosen Spannungstensor an der Phasengrenze

Geschwindigkeiten, der Druck und die Komponenten des viskosen Spannungstensors, deren erster Index ein r ist (vgl. Abbildung 2.1). Werden die beiden Phasen als ineinander nicht löslich betrachtet, d.h. findet kein Massenfluß über die Phasengrenze hinweg statt und wird außerdem die Oberflächenspannung als konstant angenommen, dann müssen folgende Übergangsbedingungen an der Phasengrenze erfüllt werden (vgl. Zapryanov und Tabakova [130]):

- Stetigkeit des Geschwindigkeitsvektors:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad (2.20)$$

Das impliziert, daß in einem mit der Phasengrenze mitbewegten Bezugssystem die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Phasengrenze an der Phasengrenze gleich null ist.

- Stetigkeit der Normalkomponente des Spannungstensors:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} + \gamma \cdot (1/R_\phi + 1/R_\theta) \quad (2.21)$$

Darin bezeichnet σ_r die Normalspannung in Richtung der Oberflächennormalen und γ die Oberflächenspannung. R_ϕ und R_θ sind die Hauptkrümmungsradien der Phasengrenzfläche. Zwischen der Normalspannung und der entsprechenden Komponente des viskosen Spannungstensors τ_{rr} in der Richtung der Normalen der Grenzfläche besteht folgender Zusammenhang (Schlichting und Gersten [96]):

$$\tau_{rr} = \sigma_r + p \quad (2.22)$$

Daraus resultiert im wesentlichen eine Übergangsbedingung für den Druck. Er ist über die Phasengrenze hinweg nicht stetig; es existiert aber an der

Phasengrenze von beiden Seiten her je eine stetige Fortsetzung des Drucks als Feldfunktion. In einem ruhenden System wird der Drucksprung an der Phasengrenzfläche beschrieben durch den Term $\gamma \cdot (1/R_\phi + 1/R_\theta)$.

- Stetigkeit der Tangentialspannungen:

$$\tau_{r\theta,1} = \tau_{r\theta,2} \quad (2.23)$$

$$\tau_{r\phi,1} = \tau_{r\phi,2} \quad (2.24)$$

Im Hinblick auf die spätere Nutzung der Gleichungen zur Simulation von Zweiphasenströmungen wird hier eine zentrale Schwierigkeit deutlich: Bei fest vorgegebener Oberflächenform stünde als zusätzlicher Freiheitsgrad zur Erfüllung der drei Stetigkeitsbedingungen des Spannungstensors (2.21), (2.23) und (2.24) nur die stetige Fortsetzung eines der beiden Drücke an der Phasengrenze zur Verfügung³. Das System wäre überbestimmt. Mit fest vorgegebener Oberflächenform ist das System der Bewegungsgleichungen im allgemeinen Fall damit nicht mehr exakt lösbar. Anders ausgedrückt ist im allgemeinen Fall die Berechnung der Deformation der Oberflächen erforderlich, wenn die Übergangsbedingungen an der Phasengrenze eingehalten werden sollen, weil dann mit den beiden Hauptkrümmungsradien R_ϕ und R_θ zwei weitere Freiheitsgrade hinzukommen.

Weil elastische Partikeln ganz andere Eigenschaften als die viskosen haben und die Gesetzmäßigkeiten über einen von der in der Strömungsmechanik gebräuchlichen Kontinuumsbetrachtung grundsätzlich verschiedenen Zugang erschlossen werden, wird im weiteren auf die Betrachtung elastischer Partikeln verzichtet.

2.3.2. Physikalische Einflußgrößen

Die wesentlichen physikalischen Einflüsse auf das Verhalten von viskosen Tropfen und Blasen in umgebenden Fluiden werden durch die Einführung weiterer dimensionsloser Kennzahlen systematisiert. Auf Grace [32] geht die *Dimensionsanalyse* zurück, die auf folgende Kennzahlen führt:

- *Eötvöszahl*:

$$Eö := \frac{g \cdot \Delta\rho \cdot d_p^2}{\gamma} \quad (2.25)$$

Darin ist g die Erdschwere und $\Delta\rho$ die Dichtedifferenz zwischen Gas und Flüssigkeit. In vielen Fällen, beispielsweise bei in Wasser aufsteigenden Luftblasen, wird wegen der geringen Dichte des Gases im Vergleich zu der der Flüssigkeit $\Delta\rho$ zu ρ_1 gesetzt. d_p ist der Durchmesser einer Kugel gleichen Volumens wie die Partikel. Mit γ ist die Oberflächenspannung der

³Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors entfallen als Freiheitsgrade, weil sie durch Gleichung (2.20) bereits festgelegt sind.

betrachteten Stoffpaarung bezeichnet. Die Eötvöszahl ist ein Maß für die Verformbarkeit der Blase oder des Tropfens. Sie beschreibt das Verhältnis von Auftriebskraft zu den wirkenden Oberflächenkräften.

- *Mortonzahl:*

$$Mo := \frac{g \cdot \mu^4 \cdot \Delta\rho}{\rho^2 \cdot \gamma^3} \quad (2.26)$$

Mit μ wird wieder die dynamische Viskosität der kontinuierlichen Phase bezeichnet. Die Mortonzahl setzt Reibungskräfte ins Verhältnis zu den Oberflächenkräften (vgl. Moore [80]).

- *Partikelreynoldszahl* oder auch *Blasen-* bzw. *Tropfenreynoldszahl:*

$$Re_p := \frac{\rho \cdot d_p \cdot u_\infty}{\mu} \quad (2.27)$$

Sie ist mit der bei festen Partikeln eingeführten Partikelreynoldszahl identisch; u_∞ bezeichnet hier die *terminale Aufstiegs geschwindigkeit* der Blase, der sich ihre Aufstiegs geschwindigkeit in unendlich ausgedehntem umgebenden Fluid, d.h. bei vernachlässigbaren Einflüssen der Gefäßwände, asymptotisch annähert.

Anstatt der Eötvöszahl ist im ingenieurwissenschaftlichen Bereich die *Weberzahl* gebräuchlicher:

$$We := \frac{\rho \cdot d_p \cdot u_\infty^2}{\gamma}. \quad (2.28)$$

Sie setzt die Trägheitskräfte zu den Oberflächenkräften ins Verhältnis und hat damit eine ähnliche Aussage wie die Eötvöszahl: Definiert man u_∞ zu $\sqrt{g \cdot d_p}$, dann sind Eötvöszahl und Weberzahl identisch.

2.3.3. Experimentelle Untersuchungen zur Umströmung von Blasen

Für die Praxis ist es von entscheidender Bedeutung, daß ein numerisches Verfahren eine verlässliche Vorhersage der zu untersuchenden physikalischen Vorgänge liefert. Für die Entwicklung numerischer Simulationsverfahren ist deshalb stets der Vergleich zwischen berechnetem Ergebnis und durch experimentelle Arbeit erlangten Daten unabdingbar. Dies gilt besonders bei solchen numerischen Simulationen, bei denen wichtige Zusammenhänge durch ein Modell erfaßt werden und dazu weitreichende Modellannahmen gemacht werden müssen. In der Strömungsmechanik ist nur in Fällen, bei denen über die mathematische Modellierung durch die Navier-Stokes-Gleichungen hinaus keine weitere Modellierung

notwendig ist und bei denen in numerischer Hinsicht alle möglicherweise auftauchenden Probleme unter Kontrolle gehalten werden können, die Verlässlichkeit des Simulationsergebnisses mit der experimenteller Daten vergleichbar; ein Beispiel dafür ist die Direkte Numerische Simulation turbulenter Strömungen (DNS), deren Möglichkeiten und Grenzen in Abschnitt 3.4 beschrieben werden.

Bei dispersen Strömungen jedoch ist die Modellierung von Teilen der betrachteten Gesamtheit an physikalischen Vorgängen bis heute weitgehend unverzichtbar. Trotzdem sind auf diesem Gebiet bisher zwischen Experiment und numerischer Simulation vergleichende Arbeiten sehr selten. Eine Zielsetzung dieser Arbeit war es deshalb, das vorgestellte numerische Verfahren so oft wie möglich daraufhin zu testen, ob experimentelle Beobachtungsdaten durch Simulation desselben Problems reproduziert werden können. Deshalb wird in diesem Abschnitt über die Verfügbarkeit solcher Daten ausführlich berichtet.

Eine Partikel- und Blasenbewegung in umgebenden Fluiden wird durch makroskopische Größen wie die Partikelgeschwindigkeit und im Fall von Blasen deren Form beschrieben. Die dabei geltenden Zusammenhänge wurden durch die Auswertung einschlägiger experimenteller Daten gewonnen und sind seit längerem bekannt. Sie haben teilweise bereits Eingang in die Lehrbücher gefunden. Für kugelförmige Partikeln können sie etwa bei Schubert et al. [97], einem Lehrbuch zur mechanischen Verfahrenstechnik, nachgeschlagen werden. Die für Blasen geltenden Gesetzmäßigkeiten sind in Brauer [6] zusammengestellt. Die technisch relevanten mechanischen Effekte von dispersen Strömungen sind ebenfalls experimentell erforscht. Das genannte Standardwerk von Brauer enthält auch zum Themenkomplex der Blasenströmungen eine erschöpfende Darstellung der bekannten Zusammenhänge. In Molerus [78] werden die Strömungen mit einer großen Anzahl fester Partikeln auf ähnliche Weise behandelt.

Der genannten Literatur ist zu entnehmen, daß die Bewegung von Blasen schon auf makroskopischer Ebene wesentlich schwieriger zu beschreiben ist als die von festen Partikeln. Auf mikroskopischer Ebene, wo das Interesse der genauen Kenntnis des Strömungsfeldes in der Umgebung einer Partikel oder einer Blase gilt, sind im Fall der festen Partikeln die gesuchten Größen heute meßtechnisch und in neuester Zeit auch durch numerische Simulation (in diesem Fall zumindest solange, als die Strömung laminar bleibt) in jedem denkbaren Einzelfall zu erlangen.

Mikroskopische Phänomene bei der Bewegung von Blasen dagegen sind sehr viel schwerer zugänglich. Dabei kann die Wissenschaft derzeit nicht auf alle Fragen Antworten geben. Hier wird daher versucht, bekannte Fakten zusammenzutragen, und, wo das nicht gelingt, darzulegen, weshalb es bis heute sehr schwierig ist, mittels Experiment die die makroskopischen Beobachtungen verursachenden mikroskopischen Phänomene zu erfassen. Die Darstellung erfolgt vor dem Hintergrund der Suche nach geeigneten experimentellen Daten, um ein numerisches Verfahren validieren zu können.

Zuvor aber werden die bei der Bewegung von Blasen auftretenden makroskopischen Erscheinungen und Möglichkeiten zu deren Vorhersage besprochen, um die für alle beobachteten Phänomene relevanten äußeren Einflußfaktoren anschaulich darstellen und quantifizieren zu können.

Blasenform und terminaler Aufstiegsgeschwindigkeit

Mittels der Eötvöszahl, der Mortonzahl und der Partikelreynoldszahl wurden die Ergebnisse zahlreicher Meßreihen vergleichbar gemacht. Sie sind in einem Diagramm (Abbildung 2.2) zusammengetragen worden. Man kann das Diagramm beispielsweise dazu benutzen, um die terminale Aufstiegsgeschwindigkeit einer Blase bei bekannten Stoffwerten zu ermitteln: Dazu berechnet man aus den Stoff-

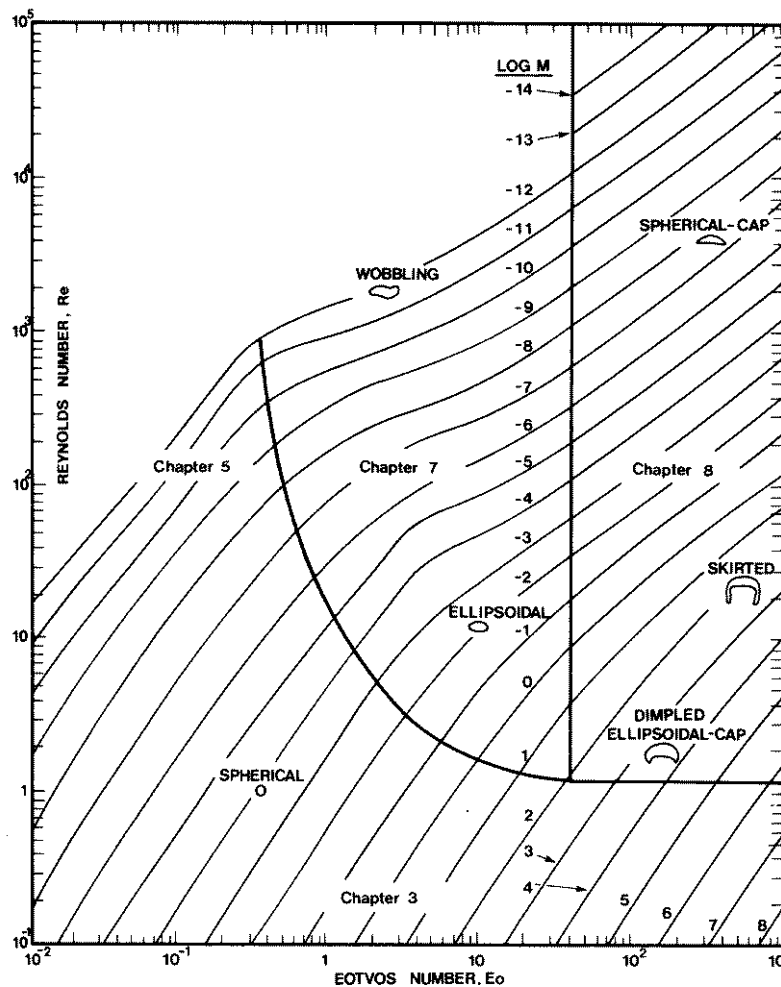


Abbildung 2.2.: Zusammenhang zwischen Eötvöszahl, Mortonzahl und Partikelreynoldszahl, aus Clift et al. [14]

werten der beteiligten Fluide die Eötvöszahl und die Mortonzahl; die Partikelreynoldszahl liest man aus dem Diagramm ab und berechnet damit die terminale Aufstiegs geschwindigkeit u_∞ .

Für das betrachtete System einer Luftblase, die in ruhendem Wasser aufsteigt, wurden für verschiedene Blasendurchmesser Werte der dimensionslosen Kennzahlen berechnet und in Tabelle 2.1 zusammengestellt, um einen Eindruck davon zu vermitteln, welche Werte die Kennzahlen bei diesem bekannten System annehmen. Die verwendeten Stoffwerte für Luft und Wasser bei 20°C und Atmosphärendruck werden mit für an dieser Stelle bei weitem hinreichender Genauigkeit Prandtl et al. [86] entnommen⁴:

Dichte (Wasser)	998.3 kg/m ³
dynamische Viskosität (Wasser)	1.00 · 10 ⁻³ kg/(m · s ²)
kinematische Viskosität (Wasser)	1.00 · 10 ⁻⁶ m ² /s
Oberflächenspannung	0.072 kg/s ²
Erdschwere	9.81 m/s ²

Für Luftbläschen in Wasser können die Geschwindigkeiten u_∞ entweder über den in Abbildung 2.2 dargestellten Zusammenhang zwischen Re_p , $Eö$ und Mo aus Re_p berechnet werden oder alternativ aus Abbildung 2.3 abgelesen werden. Abbildung 2.3 zeigt zudem, daß die Reinheit der kontinuierlichen Phase auf die Aufstiegs geschwindigkeit einen entscheidenden Einfluß hat: Enthält die kontinuierliche Phase Verunreinigungen, so bildet sich je nach deren Grenzflächenaktivität an der Phasengrenze eine Schicht dieser „Fremdmoleküle“ in der Art einer Gummihaut aus, so daß an der Phasengrenze das dispergierte Fluid der Bewegung der kontinuierlichen Phase nicht mehr folgt. Die Übergangsbedingungen entsprechen im Fall starker Verunreinigung denen eines umströmten verformbaren Festkörpers (Prandtl et al. [86]).

Tabelle 2.1.: Dimensionslose Kennzahlen für in ruhendem Wasser aufsteigenden Luftblasen verschiedener Durchmesser

d_p	u_∞	Re_p	$Eö$	We	Mo	g^+
0.2 mm	1.8 cm/s	3.6	5.61 · 10 ⁻³	0.93 · 10 ⁻³	2.86 · 10 ⁻¹¹	6.06
0.5 mm	6.0 cm/s	30	35.0 · 10 ⁻³	25.7 · 10 ⁻³	2.86 · 10 ⁻¹¹	1.36
1.0 mm	15 cm/s	150	0.14	0.32	2.86 · 10 ⁻¹¹	0.44
5.0 mm	20 cm/s	1000	3.50	2.86	2.86 · 10 ⁻¹¹	1.23
1.0 cm	25 cm/s	2500	14.0	8.93	2.86 · 10 ⁻¹¹	1.57

⁴Genauere Werte für weite Temperatur- und Druckbereiche können in Dampf tafeln, etwa Haar et al. [38] nachgeschlagen bzw. mit den dort angegebenen Näherungen berechnet werden.

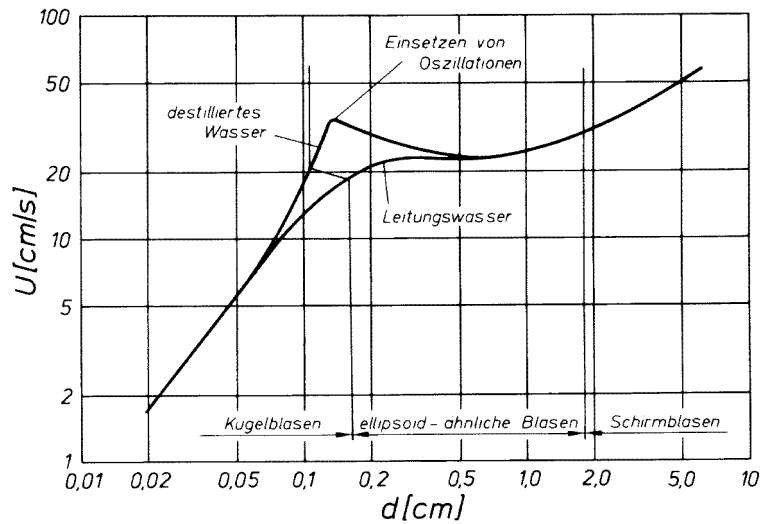


Abbildung 2.3.: Zusammenhang zwischen Äquivalentdurchmesser d_p (d) und terminaler Aufstiegsgeschwindigkeit u_∞ aus Prandtl et al. [86]

Untersuchungen zum Strömungsfeld in der Umgebung einer aufsteigenden Blase

Die Validierung eines numerischen Verfahrens könnte in naheliegender Weise erfolgen durch den Vergleich von experimentellen und numerischen Felddaten einer Strömung in einem einfachen Fall z.B. dem einer Blase, die in ruhender Flüssigkeit, allein durch ihre Auftriebskraft angetrieben, aufsteigt. Die Erfassung des Strömungsfelds in der Umgebung einer solchen Blase erweist sich aber im Experiment als außerordentlich schwierig. Waren im Fall von umströmten Kugeln bereits Mitte der 50er Jahre des 20. Jahrhunderts für weite Reynoldszahlbereiche quasi alle denkbaren Daten mittels Experiment zugänglich (Taneda [108]), so sind selbst heute nur lückenhaft vergleichbare Daten zur Blasenumströmung erhältlich.

Die Gründe für den Mangel an experimentellen Daten insbesondere von der Vermessung von Strömungsfelder um relativ kleine Blasen liegen in den großen technischen Schwierigkeiten, die Umströmung von Blasen zu erfassen. Bereits im vorangegangenen Kapitel wurde erwähnt, daß beispielsweise beim Luft/Wasser System bei bestimmten Blasen eine deutliche Abhängigkeit der terminalen Aufstiegsgeschwindigkeit von der Konzentration an oberflächenaktiven Substanzen in der kontinuierlichen Phase zu beobachten ist. In einem zusammenfassenden Artikel haben Grace et al. [33] die Meßdaten zahlreicher Experimentatoren zusammengetragen; eine aus der Schrift abzuleitende Aussage ist, daß oberflächenaktive Substanzen die Aufstiegsgeschwindigkeit je nach Stoffpaarung und Blasengröße

um bis zu 200% verändern können. Diese Effekte werden mit zunehmender Blasengröße deutlich geringer. Insbesondere für kleine Blasen sind also unabhängig von den zu messenden Größen und dem verwendeten Verfahren extreme Anforderungen an die Reinheit der verwendeten Fluide zu stellen.

Weil Zweiphasensysteme gegenüber Störungen jeglicher Art extrem empfindlich sind, ist der Einsatz von Meßmethoden, die nicht berührungsfrei arbeiten, wie z.B. die *Hitzdrahtanemometrie*, von vornherein auszuschließen, um etwa das Geschwindigkeitsfeld aufzunehmen. Solche Methoden werden aber in anderen Bereichen, z.B. der experimentellen Turbulenzforschung häufig und erfolgreich eingesetzt.

Eine weitere Methode zur experimentellen Bestimmung von Strömungsfeldern ist die *Particle-Image-Velocimetry* (PIV). Dabei werden in das zu vermessende Fluid Partikeln eingegeben, die sich möglichst mit der Strömung mitbewegen; sie werden in kurzen Zeitabständen photographiert. Aus der Veränderung der einzelnen Partikelpositionen werden die Geschwindigkeitsvektoren berechnet (Raffel et al. [90]). Weiterhin ist die *Laser-Doppler-Anemometrie* (LDA) eine weitverbreitete Methode zur Vermessung von Geschwindigkeitsfeldern. Bei der Laser-Doppler-Anemometrie wird aus der Phasenverschiebung zweier Laserstrahlen bei der Reflexion eines Teilchens in einem Kontrollvolumen auf die Geschwindigkeit des Teilchens geschlossen (Durst et al. [19], Mayinger [69]). Beide Methoden arbeiten mit dem Fluid beigemengten Partikeln. Schon bei einphasigen Strömungen sind bei der Auswahl der beigemengten Partikeln bestimmte Anforderungen zu beachten, so müssen sie z.B. der Strömung gut folgen und so beschaffen sein, daß sie von der eingesetzten Optik gut erfaßt werden können. Im betrachteten Fall des Vorhandenseins einer zweiten Phase dürfen sie mit den bei Blasen auftretenden Grenzflächen keinesfalls in Wechselwirkung treten, weil sich dadurch, wie bereits erwähnt, die Eigenschaften der Strömung massiv ändern können.

Das typische Anwendungsgebiet der Laser-Doppler-Anemometrie ist die Vermessung turbulenter Strömungsfelder. Die dabei aufzulösenden kleinsten Skalen bewegen sich in den wichtigsten Fällen im Bereich von 0.1 bis 1.0 mm (Durst et al. [19]); die meisten verwendeten Geräte sind auf diesen Größenordnungsbereich ausgelegt. Das Strömungsfeld in der Umgebung einer Blase mit einem Durchmesser im Millimeterbereich kann damit von solchen Geräten nicht mehr fein genug aufgelöst werden. Für die üblicherweise eingesetzten Geräte bei der Particle-Image-Velocimetry gilt ähnliches.

Die Laser-Doppler-Anemometrie arbeitet mit einem Kontrollvolumen, in dem die Vorgänge über eine bestimmte Zeit hinweg betrachtet werden können. Aus der Tatsache, daß mit einem Gerät nur ein Kontrollvolumen beobachtet werden kann, resultiert als weitere Schwierigkeit, daß mit der Versuchsanlage zahlreiche exakte Wiederholungen desselben physikalischen Vorgangs möglich sein müssen, um ein raumaufgelöstes Geschwindigkeitsfeld zu erhalten. Im Fall von aufsteigenden

Blasen dürfte das nicht einfach zu realisieren sein. Bei der Vermessung turbulenter Strömungsfelder sind zudem zeitlich gemittelte Größen von Interesse. Wenn es gelingt, systematische Fehlerquellen auszuschalten, dann kann also durch eine hinreichende Datenbasis die gesuchte Größe ermittelt werden. Bei laminaren Geschwindigkeitsfeldern in der Umgebung aufsteigender Gasblasen sind zeitlich gemittelte Größen jedoch nicht von Nutzen⁵.

All diese Schwierigkeiten wirken sich im Fall relativ großer Blasen nur schwach aus, weil dabei die Oberflächeneffekte eine relativ kleine Rolle spielen und weil die etablierten Meßverfahren relativ bequem eingesetzt werden können. So ist die erstaunliche Beobachtung zu erklären, daß die physikalisch deutlich komplexeren Vorgänge in der Umgebung der verhältnismäßig großen kappenförmigen Blasen bereits seit recht langer Zeit vergleichsweise gut verstanden und durch weitreichende experimentelle Analysen des die Blase umgebenden Strömungsfelds dokumentiert sind. Beispielsweise haben Bhaga und Weber [3] bereits 1981 solche Blasen photographiert und sogar die Stromlinien experimentell visualisiert. Allerdings fehlen hier noch oft quantitative Angaben zum Feld der Geschwindigkeiten, die in neueren Arbeiten vorhanden sind.

Die dargestellten extremen Anforderungen an Instrumentarium und Material zur Vermessung von Geschwindigkeitsfeldern führen dazu, daß die zu dem Thema veröffentlichten Ergebnisse jeweils unter sehr speziellen Bedingungen erlangt wurden. Das Strömungsfeld um eine in einem großen Flüssigkeitsvolumen ungestört aufsteigende einzelne Blase wurde so bisher nach Kenntnisstand des Autors nicht vermessen. Die in der Arbeit von Lucic et al. [62, 63] vorgestellten und dokumentierten Beobachtungen, um ein Beispiel zu nennen, umfassen zwar Fälle mit ruhendem Fluid, erstrecken sich aber nicht auf den grundlegenden Fall einer im ruhenden Fluid ohne störenden Wandeinfluß aufsteigenden Blase. Im verwendeten experimentellen Aufbau ist es nämlich nur möglich, die Blasen an der Behälterwand einzuführen. Bei Vergleichen zum Zwecke der Validierung von Simulationsergebnissen muß der Wandeinfluß bei der Simulation also bereits modelliert werden können.

In einer anderen Arbeit von Monji et al. [79] wird die Particle-Image-Velocimetry verwendet. Die Autoren können mit dem Versuchsaufbau zwar Blasen in der Mitte eines Gefäßes einbringen, jedoch veröffentlichen sie nur Geschwindigkeitsfelder für Fälle, in denen die Blase sich in einer Rohrströmung befindet. Es gibt weitere Arbeiten, in denen experimentelle Untersuchungen des Strömungsfelds in der Umgebung einer Blase veröffentlicht wurden. Es scheint aber leider so zu sein, daß die verfügbaren Veröffentlichungen wenig Material enthalten, mit dem bei

⁵Denkbar wäre freilich im Fall aufsteigender Blasen, die Messeinrichtung mit der Blase bei ihrer Aufstiegsbewegung mitzuführen, relativ zu einem mit der Blase mitgeführten Bezugssystem ortsfest zu messen und zeitlich zu mitteln. Aus technischen Gründen scheint dies aber wenig realistisch.

einfacher Konstellation ein Modell quantitativ anhand des Geschwindigkeitsfelds zu validieren wäre. Zum selben Schluß kommen übrigens Oliver und Chung [83], deren Suche nach experimentellen Daten ebenfalls weitgehend ergebnislos blieb. Als quantitativer Anhaltspunkt für den Vergleich zwischen Simulation und Realität müssen deshalb makroskopische Daten, über die im Abschnitt 2.3.3 berichtet wurde, herangezogen werden.

Die erwähnten Arbeiten von Lucic et al. [62, 63] enthält zwar keine vollständige Beschreibung des Geschwindigkeitsfelds in der Umgebung einer einzelnen, ungestört aufsteigenden Blase, dafür aber eine detaillierte Dokumentation von Blasengröße und -geschwindigkeit in Fällen mit mehreren Blasen, die in einer numerischen Simulation gut nachempfunden werden können; daneben sind wertvolle Angaben über eine der Geschwindigkeitskomponente in einer solchen Konstellation gegeben. Diese Angaben werden verwendet, um die Vorhersage der Interaktion der Einzelblasen mit dem vorgestellten numerischen Verfahren zu überprüfen.

Validierung durch Vergleich mit bekannten Feldern einer einphasigen Strömung?

Die Tatsache, daß experimentelle Daten auf mikroskopischer Ebene nicht ausreichend verfügbar sind, motiviert die Suche nach Alternativen, wie die Gültigkeit einer Vorhersage des Strömungsfelds in der Nähe aufsteigender Blasen nachgewiesen werden kann. In Frage kommt dabei der Vergleich mit der Potentiallösung einer Kugelumströmung sowie die Kugelumströmung selbst.

Aufsteigende Blasen haben um sich ein Strömungsfeld, das nicht mit der Potentialtheorie beschrieben werden kann. Maxworthy [68] widerlegt diesen „Irrglauben“ mit dem Argument, daß im Fall der Potentialströmung die Reibungsfreiheit zu einer beständigen Beschleunigung der Blase führen würde. Die These sei deshalb mit der Beobachtung, daß es bei Blasen terminale Aufstiegsgeschwindigkeiten gibt, nicht vereinbar. Durch ein einfaches Experiment mit einer aus gefärbtem Medium in klares Medium aufsteigenden Blase untermauert er seinen Standpunkt. Die aufsteigende Blase dürfte nämlich dann, wenn die Potentialtheorie das Strömungsfeld um sie näherungsweise beschriebe, keinesfalls größere Mengen an gefärbtem Fluid mitnehmen; sein Experiment zeigt aber gerade, daß die Blase eine ganze Spur an gefärbtem Fluid nach sich zieht. Die Potentiallösung ist als Näherung der Blasenströmung also nicht brauchbar.

Alle Experimente zeigen, daß zwischen dem Verhalten von Blasen und festen Körpern mit gleicher Geometrie ein Unterschied besteht, der allerdings bei bestimmten Stoffpaarungen und Blasengrößen mit zunehmender Belastung der kontinuierlichen Phase mit oberflächenaktiven Stoffen geringer wird. Das Strömungsfeld der Kugelumströmung kann also bedingt als Näherung für das gesuchte

Strömungsfeld in der Umgebung einer Blase verwendet werden.

Zusammenfassung

Nach Wissen des Autors gibt es bisher keine umfassende Zusammenstellung gemessener Daten des Geschwindigkeitsfelds für wenig komplexe Zweiphasenprobleme, die zur Validierung eines die Blasenbewegung beschreibenden Modells taugen würde. Bekannte Strömungsfelder können diesbezüglich im allgemeinen nicht als Ersatz für experimentelle Daten dienen.

Die vorhandene Literatur erlaubt es aber, Modelle in Einzelfällen durch Vergleich makroskopischer berechneter Größen mit dem Experiment auf ihre Gültigkeit hin zu überprüfen.

Die dargestellten Schwierigkeiten bei der experimentellen Gewinnung von Daten und der Mangel an entsprechenden Veröffentlichungen weist aber andererseits darauf hin, daß hier durch numerische Simulation Beiträge zur Aufklärung der physikalischen Zusammenhänge geleistet werden können.

2.4. Wärmeübergang an beheizten Wänden

In zahlreichen verfahrenstechnischen Anlagen besteht das Problem, einem Fluid Wärme zuzuführen, um es auf eine bestimmte Temperatur zu bringen. Dieser Vorgang spielt sich meist in sogenannten Wärmeübertragern ab. Sie bestehen im allgemeinsten Fall aus einer beheizten Wand und einem Gebiet, in dem das zu erwärmende Fluid über diese Wand hinwegströmt. Hinsichtlich der Art der Beheizung der Wand und der geometrischen Gestaltung unterscheiden sich die verschiedenen Wärmeübertragerbauarten je nach Anwendung teilweise beträchtlich. Auch die physikalischen Vorgänge an der Wärmeübertragerwand variieren mit der Anwendung. Bei der Erhitzung des Wassers, das in einem Wärmekraftwerk die Turbinen zur Stromerzeugung antreibt, wird das Wasser weit über die Siedetemperatur hinaus erhitzt und verläßt die Wärmeübertragereinheit in dampfförmigen Zustand. Beim Erhitzen von Milch zum Zweck der Pasteurisierung andererseits wird Sorge dafür getragen, daß die Siedetemperatur nicht erreicht wird. Abbildung 2.4 zeigt schematisch den Aufbau eines Wärmeübertragers mit Phasenübergang.

2.4.1. Wärmeübergang ohne Phasenwechsel

An Wänden, an denen die Temperatur des beheizten Fluids stets unterhalb der (druckabhängigen) Siedetemperatur θ_S bleibt, bewirkt der Strömungszustand

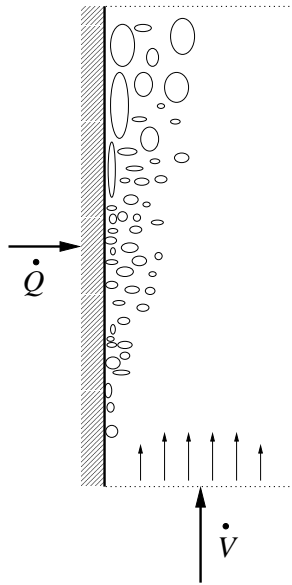


Abbildung 2.4.: Funktionsprinzip eines Wärmeübertragers mit Phasenübergang;
 \dot{Q} : Wärmestrom, \dot{V} : Volumenstrom

einen qualitativen Unterschied bei den Wärmeleitungsvorgängen und damit bei den Temperaturverläufen.

- Im Fall *laminarer Strömung* entsteht an geraden Wänden in wandnormaler Richtung ein Temperaturverlauf, der durch einen relativ flachen Gradienten in Wandnähe gekennzeichnet ist. Da bei laminarer Strömung kein Massenaustausch senkrecht zur Stromlinie stattfindet, wird die Wärme nur diffusiv ins Fluidinnere geleitet. Der Vorgang ist damit abhängig von einer Strömungsgeschwindigkeit, die das laminare Geschwindigkeitsprofil bestimmt sowie der Wärmeleitfähigkeit λ , bzw. der Prandtlzahl Pr , die bereits in Gleichung (2.14) eingeführt wurde; während das Geschwindigkeitsprofil durch Konvektion in wandparalleler Richtung den Nachschub an kaltem Fluid bzw. den Abtransport von erhitztem Fluid bestimmen, ist λ , bzw. Pr ein Maß für die Diffusionsgeschwindigkeit.
- Der Temperaturverlauf in der Nähe von Wänden mit *turbulenter Anströmung* zeichnet sich durch einen starken Anstieg des Temperaturgradienten in Wandnähe aus. Unmittelbar an der Wand ist der Temperaturverlauf wegen der laminaren Unterschicht linear. Die thermischen Vorgänge werden zusammenfassend charakterisiert durch den *Wärmeübergangskoeffizienten* α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \quad (2.29)$$

Darin taucht die Grenzschichtdicke δ auf. Ihre Bedeutung ist aus Abbildung

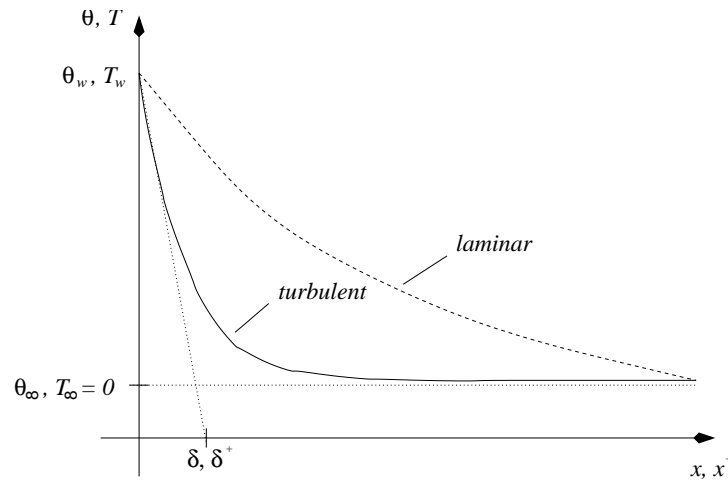


Abbildung 2.5.: Temperaturverlauf in der Nähe beheizter Wände, schematisch; die mit $+$ gekennzeichneten Größen sind dimensionslos, θ bezeichnet die dimensionsbehaftete, T die dimensionslose Temperatur.

2.5 ersichtlich. α ist abhängig von der Wärmekapazität λ , der dynamischen Viskosität μ , der Fluidichte ρ_F , der spezifischen Wärmekapazität c_p , dem Verhältnis von Wandtemperatur θ_W zur Temperatur θ_∞ in hinreichendem Abstand von der Wand, der Strömung in der Nähe der Wand und der Geometrie (Stephan und Mayinger [105]). α taucht in der Definition der dimensionslosen *Nußeltzahl*

$$Nu := \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \quad (2.30)$$

auf, die für die Charakterisierung der thermische Eigenschaften wärmeübertragender Systeme üblich geworden ist. Sie ist für zahlreiche technisch bedeutende Fälle tabelliert (z.B. VDI-Wärmeatlas [119]) und wird vielfach zur Auslegung technischer Anlagen verwendet.

Setzt man Gleichung (2.29) in die Definitionsgleichung der Nußeltzahl (2.30) ein, so erhält man

$$Nu = \frac{d}{\delta}. \quad (2.31)$$

Der dimensionslose Ausdruck für die Dicke der *thermischen Grenzschicht* δ^+ wird damit durch den Reziprokwert der Nußeltzahl,

$$\delta^+ = \frac{1}{Nu}, \quad (2.32)$$

dargestellt, wenn die Skalierung der Längen mit derselben Bezugslänge d erfolgt, mit der die Nußeltzahl gebildet wird. In Abbildung 2.5 werden die Temperaturverläufe als Funktion des senkrechten Wandabstands x für den

laminaren und den turbulenten Fall schematisch dargestellt. Es ist dabei sowohl eine Achsenbeschriftung für dimensionsbehaftete als auch für dimensionslose Größen angebracht. Die Äquivalenz beider Auftragungen wird durch folgende Entdimensionierung der Temperatur sichergestellt:

$$T = \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_0} \quad (2.33)$$

θ_0 ist darin eine Referenztemperatur, für die später ebenfalls die Anströmtemperatur eingesetzt wird. T_W bezeichnet die dimensionslose Wandtemperatur.

2.4.2. Wärmeübergang mit Phasenwechsel

Werden thermische Vorgänge betrachtet, die sich an einer beheizten Wand bei einer Temperatur um den Siedepunkt herum abspielen wie das Blasensieden, dann werden üblicherweise folgende Begriffe zur Charakterisierung der Temperaturverhältnisse gebraucht: Die Angabe der Temperatur der Wand, die dabei höher als die Siedetemperatur ist, erfolgt als Temperaturdifferenz zwischen Wandtemperatur und Siedepunkt und wird *Überhitzung* genannt. Umgekehrt gibt man die Temperatur der Flüssigkeit in einem Abstand von der Wand als Differenz zwischen Siedetemperatur und der Flüssigkeitstemperatur an. Diese Differenz wird als *Unterkühlung* bezeichnet.

Der Vorgang des Blasensiedens spielt sich in einem Temperaturbereich um den Siedepunkt herum ab. Üblicherweise liegt dabei die Wandtemperatur um einige K über dem Siedepunkt; die Anströmtemperatur ist maximal gleich der Siedetemperatur, etwa beim sogenannten Sättigungssieden, oft aber einige K darunter. Dadurch ist es möglich, daß auf relativ engem Raum sowohl überhitztes als auch unterkühltes Fluid vorliegen. Bei einem System mit festen Stoffparametern hängt die Entwicklung des Blasendurchmessers mit der Zeit ab von der Anströmung der beheizten Platte und von Wand- und Fluidtemperatur. Vom Blasensieden spricht man dann, wenn sich an einer Heizfläche einzelne Blasen bilden.

Nicht jede Art von Phasenübergang an beheizten Wänden wird somit als Blasensieden bezeichnet. Wird die Wandtemperatur über das zur Erzeugung einzelner Blasen hinausreichende Maß gesteigert, so kommt es zum sogenannten *Filmsieden*. Dabei werden so große Mengen an Fluid verdampft, daß die Flüssigkeit die Heizfläche nicht mehr hinreichend gut erreichen kann. U.a. wirkt sich dann die geringe Wärmeleitfähigkeit des Dampfs negativ auf den Wärmeübergang aus. Daneben wird der konvektive Massenaustausch zwischen dem Gebiet in unmittelbarer Wandnähe und dem Fluidinnern durch die turbulente Strömung großflächig unterbunden.

2. Physikalische Grundlagen

In Wärmeübertragern bzw. Teilen von solchen Anlagen, in denen es zum Blasensieden kommt, wird oft ein gegenüber dem Beheizen des einphasigen Fluids und gegenüber dem Filmsieden erhöhter Wärmeübergang und eine erhöhte Heizflächenbelastung beobachtet. Die *Nukijama-Kurve* (Abbildung 2.6) weist einen deutlichen Knick in dem Bereich auf, in dem der einphasige Bereich verlassen wird und durch Verdampfung die gasförmige Phase des Fluids ins Spiel kommt. Für diese Erhöhung des Wärmeübergangskoeffizienten, die in den Bereich des Blasensiedens fällt, werden im wesentlichen drei Mechanismen verantwortlich gemacht:

- *Latenter Wärmetransport*: Durch Verdampfung des Fluids in der überhitzten Schicht in unmittelbarer Wandnähe wird dieser Schicht Wärme entzogen. Die Dampfblasen geraten in unterkühlte Regionen in einigem Abstand

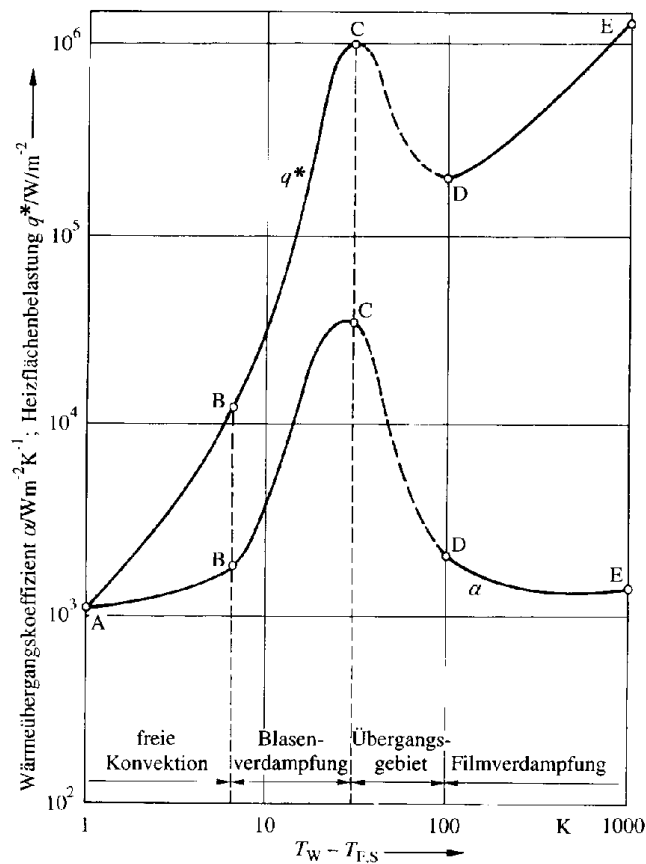


Abbildung 2.6.: Wärmeübergangskoeffizient α (untere Kurve) und Heizflächenbelastung q^* als Funktion der Überhitzung (obere Kurve) $T_W - T_S$ beim Sieden von Wasser unter Atmosphärendruck. T_W : Wandtemperatur, T_S : Siedetemperatur der Flüssigkeit, jeweils in K (aus Grassmann et al. [34])

von der Wand. Wenn die Temperatur an der Blasenoberfläche unter die Siedetemperatur absinkt, kommt es zur Kondensation unter Wärmeabgabe; das unterkühlte Fluid wird dadurch aufgeheizt.

- *Verstärkte Konvektion*: Die Blasen bewegen sich aufgrund des Dichteunterschieds der beiden Phasen relativ zum umgebenden Fluid. Sie verursachen so zum einen Strömungsstrukturen, die zusätzlich zur Turbulenz für Wärmeaustausch sorgen. Zum anderen können sie ein Nachlaufgebiet unterschiedlicher Größe haben, das den Blasen folgt und somit ebenfalls heißes Fluid von der Wand wegbewegt, wenn die Blase Abstand von der Wand gewinnt.
- *Mikrokonvektion*: Direkt an der Phasengrenze treten zusätzliche mikroskopische Fluidbewegungen auf, die auf Oberflächeneffekte zurückzuführen sind. Sie sorgen für weiteren Massenaustausch.

Welcher Vorgang in welchen Situationen für den erhöhten Wärmeaustausch verantwortlich ist, kann bis heute nicht mit Sicherheit gesagt werden (Prodanovic [88]). Bevor diese Frage weiter diskutiert wird, wenden wir uns kurz der Charakterisierung der Dampfblasen zu, denen hier eine zentrale Rolle zukommt.

Charakterisierung der Dampfblasen

Für das thermodynamische Verhalten von Dampfblasen ist die *Jakobzahl*

$$Ja := \frac{\rho_F \cdot c_p \cdot (\theta_S - \theta_\infty)}{\rho_D \cdot \Delta h_S} \quad (2.34)$$

von entscheidender Bedeutung. Mit θ_s ist darin die Siedetemperatur der Flüssigkeit bezeichnet, mit θ_∞ die Anströmtemperatur in ausreichendem Abstand von der Wand und mit Δh_S die spezifische Verdampfungsenthalpie. Die Jakobzahl setzt die Energie zur Verdampfung ins Verhältnis zur Energie, die zum Aufheizen derselben Flüssigkeitsmenge auf Siedetemperatur nötig ist. Nach Chen [11] kann damit der Kondensationsvorgang in folgender Weise charakterisiert werden:

- $Ja < 70$: Die Kondensation erfolgt *wärmetransportgesteuert*. Die Temperaturdifferenz zwischen Siedetemperatur und Umgebungstemperatur ist so klein, daß der konvektive und auch der diffusive Abtransport der freiwerdenden Kondensationswärme die Kondensationsgeschwindigkeit limitiert.
- $Ja > 70$: Es ist mit *trägheitsgesteuertem* Kondensieren zu rechnen, d.h. die Kondensation ist aufgrund der hohen Temperaturdifferenz derart heftig, daß das Nachströmen der kalten Flüssigkeit in das freiwerdende Volumen die Geschwindigkeit des Kondensationsvorgangs begrenzt.

Strömungsmechanisch verhalten sich Dampfblasen, deren Volumen sich nicht zu schnell⁶ ändert, in erster Näherung wie Inertgasblasen mit veränderlichem Volumen. In dieser Arbeit wurden solche Inertgasblasen mit der Blasenreynoldszahl, der Mortonzahl und der Eötvös- bzw. Weberzahl charakterisiert. An dieser Beschreibung kann im Hinblick auf ein numerisches Verfahren festgehalten werden, wenn $Ja < 70$ erfüllt ist. Für den anderen Fall müssen die durch das rasche Nachströmen entstehenden turbulenten Strukturen in der Nähe der Blasenoberfläche von einem numerischen Verfahren entweder aufgelöst oder aber gesondert modelliert werden.

Überblick über den Stand der Forschung

Ähnlich wie bei den Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang sind die Vorgänge an Wärmeübertragerwänden, bei denen die Verdampfung des beheizten Fluids eine Rolle spielt, seit geraumer Zeit auf makroskopischer Ebene erfaßt. Im Anlagenbau kann man sich umfangreicher Tabellenwerke, etwa des VDI-Wärmeatlas [119], bedienen und über die Nußeltzahl, die für verschiedenste geometrische Fälle und Fluide tabelliert ist, die Wärmeübertragungsfläche dimensionieren.

Aktueller Gegenstand der Forschung dagegen ist die Frage, welche Wärmetransportmechanismen in den diversen Anwendungen von dominanter Bedeutung sind. Es kann nicht ausgeschlossen werden, daß sich durch genaue Kenntnis dieser Mechanismen auch im konstruktiven Bereich noch Verbesserungen realisieren lassen; bei Anlagen etwa, die aufgrund der physikalischen Eigenschaften des beheizten Fluids im einphasigen Bereich betrieben werden müssen und bei denen der deutlich verbesserte Wärmeübergang beim Blasensieden deshalb nicht genutzt werden kann, wäre es denkbar, durch Zugabe von Inertgasblasen ähnliche Effekte wie die der Dampfblasen zu erzielen. Ob das möglich ist, hängt wesentlich vom Mechanismus der Wärmeübertragung ins Fluid ab. Bei der Klärung dieser Art von Fragen kann das Potential numerischer Simulationsrechnungen von großer Bedeutung sein, um die vorhandenen experimentellen Daten zu ergänzen.

Den experimentellen Arbeiten ist die Schwierigkeit gemein, daß die Vermessung von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei Wärmeübertrageranlagen, die im Bereich des unterkühlten Siedens arbeiten, äußerst anspruchsvoll ist. Zur Vermessung des Geschwindigkeitsfelds gilt das in Abschnitt 2.3.3 gesagte. Über Arbeiten, in denen explizite Angaben über Geschwindigkeitsfelder in der Nähe beheizter Wände gemacht werden, ist nichts bekannt. Dagegen gibt es eine Anzahl von Arbeiten aus neuester Zeit, die sich mit der Charakterisierung der Blasenbewegung und auch -form befassen. Der Einsatz von *Hochgeschwindigkeitskinematographie*

⁶ „Schnell“ bedeutet hier schnell im Bezug auf die Zeitskalen der Strömung; Kondensationsvorgänge, die nur wenige ms lang dauern, können durchaus als nicht zu schnell betrachtet werden, weil die Zeitskalen turbulenter Strömungen oft noch kürzer sind.

in den 80er und 90er Jahren des vergangenen Jahrhunderts hat dazu geführt, daß die überaus rasch ablaufenden Verdampfungsvorgänge an Wärmeübertragerrwänden untersucht werden konnten.

Eine umfassende Untersuchung zur Entwicklung des Blasenradius kurz nach der Entstehung der Blase legen Kandlikar et al. [50] vor. Photographische Aufnahmen werden in extrem kurzen Abständen von Experimenten mit Wasser als beheiztem Fluid gemacht. Die Autoren variieren dabei die Strömungsgeschwindigkeit, den Strömungszustand, die Größe der Keimstelle sowie Überhitzungs- und Unterkühlungstemperatur. Ergebnisse sind Daten zur Entstehungsgeschichte der Blasen. Die Daten können aber in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden, weil sie größtenteils die Blasenentstehung beschreiben, nicht aber das Verhalten der Blase in ihrer weiteren Lebensgeschichte.

Umfangreiche quantitative Untersuchungen mit dem Schwerpunkt der Bestimmung des Blasendurchmessers zur Zeit der Blasenablösung sowie zahlreiche aufschlußreiche photographische Aufnahmen von isolierten Blasenkeimstellen enthalten die Arbeiten von Thorncroft und Klausner [109] und Thorncroft et al. [110]. Im Hinblick auf die vorliegende Arbeit gilt aber hier ähnliches wie bei den Daten von Kandlikar et al. [50]: Im Zentrum des Interesses der Autoren steht die Entstehung der Blase an der Keimstelle, ein komplexer Dreiphasenvorgang⁷, der hier nicht modelliert wird. In der Arbeit von Thorncroft et al. [110] wird die quantitative Beschreibung der Vorgänge ebenfalls vor der Kondensation der Blase abgebrochen. Eine etwas andere Stoßrichtung verfolgen Zeitoun und Shoukri [131], die für verschiedene Fälle den Dampfanteil am Gesamtvolumen untersuchen.

Für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sind die Arbeiten von Faraji et al. [23], Prodanovic [88], Prodanovic et al. [89], Bibeau und Salcudean [4] und Lucic et al. [61]. In diesen Arbeiten wird nicht nur die Blasenentstehung, sondern auch der Kondensationsvorgang untersucht. Die Arbeit von Bibeau und Salcudean [4] enthält erstmalig eine Darstellung der Vorgänge während der gesamten Lebenszeit einer Blase, und zwar nicht nur der Entwicklung des Blasenradius, sondern auch der Bewegung der Blase, was bei der Entwicklung des numerischen Verfahrens von großer Bedeutung war. Lucic et al. [61] enthält u.a. diese Angaben für eine Reihe an Parameterkombinationen unter Verwendung von Wasser als beheiztem Fluid.

Schließlich ist die Arbeit von Van Helden et al. [118] zu erwähnen, in der u.a. auf das unterschiedliche Verhalten von Dampf- und Inertgasblasen eingegangen wird. Auch hier wird im Fall von Dampfblasen die Veränderung des Radius über der Zeit angegeben. Ebenso sind Daten zum Weg vorhanden, den die Blasen zurücklegen.

⁷entstehende Blase – gasförmig, umgebendes Fluid – flüssig, Material der Wand – fest

Was die Aufklärung des Temperaturfelds in der Nähe einer beheizten, turbulent angeströmten Wand angeht, so enthält von den genannten Arbeiten einzig die von Lucic et al. [61] Untersuchungen dazu, wobei mittels *holographischer Interferometrie* thermische Grenzschichten an der Wand und in der Nähe der Blasen vermessen werden. In den Dissertationen von Nordmann [81] und Chen [11] sowie in Nordmann und Mayinger [82] werden Ablösevorgänge von Blasen mit dieser Technik untersucht, wobei allerdings bei diesen Arbeiten die Zustände in der Umgebung von einzelnen vertikal in leichtem Gegenstrom aufsteigenden Blasen betrachtet werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß aus der Literatur zwar einiges Wissen über das Verhalten der dampfförmigen Phase in der Nähe von beheizten Wänden für zahlreiche Fälle zusammengetragen werden kann; die Durchführung der Messungen ist aber derart aufwendig, daß im Bezug auf die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Simulation der physikalischen Vorgänge an Wärmeübertragerwänden festgestellt werden kann, daß es nur einige wenige geeignete, ausreichend dokumentierte Fallbeschreibungen gibt, die zur Validierung des Verfahrens dienen können. Insgesamt aber besteht noch erheblicher Forschungsbedarf, zu dessen Deckung möglicherweise auch der Einsatz numerischer Verfahren beitragen kann. Dies gilt insbesondere für die Quantifizierung der Beiträge der einzelnen Wärmeübergangsmechanismen zum Gesamtwärme fluß an beheizten Wänden mit turbulenter Anströmung.

3. Ein impuls- und energierhaltendes Finite-Volumen-Verfahren

Unter Simulation von Strömungen versteht man die Voraussage des Verhaltens von Fluiden unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen. Das Verhalten von Fluiden wird üblicherweise beschrieben durch das Feld des Geschwindigkeitsvektors und das zugehörige Druckfeld. Strömungen inkompressibler newtonscher Fluide können durch die numerische Berechnung einer Näherungslösung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) und (2.2) in den Unbekannten \vec{u} und p simuliert werden.

Zur Simulation von Strömungen, wie sie in Natur und Technik vorkommen, existieren heute zahlreiche Verfahren, von denen keines als das allgemein beste bezeichnet werden kann. Vielmehr richtet sich die Wahl des Verfahrens nach den speziellen Anforderungen der Simulation. *Finite-Volumen-Verfahren* werden häufig zur Simulation turbulenter Strömungen eingesetzt. Weil sie prinzipiell zur Simulation von Strömungen in komplexen Geometrien verwendet werden können und sich auf orthogonalen Gittern als effiziente Verfahren implementieren lassen, sind sie für die dieser Arbeit zugrundeliegende Aufgabenstellung geeignet. Die etablierten Verfahren dieser Art jedoch haben zumeist den Nachteil, daß sich lokale Gitterverfeinerungen nur bedingt realisieren lassen. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb ein herkömmliches Finite-Volumen-Verfahren in der Weise weiterentwickelt, daß damit lokale Gitterverfeinerung prinzipiell möglich ist und gleichzeitig die Vorteile bestehender Finite-Volumen-Verfahren erhalten bleiben. In diesem Kapitel wird das in dieser Arbeit eingesetzte Verfahren im Detail besprochen.

Zunächst werden dazu die Anforderungen an das zu verwendende Programm systematisch zusammengetragen, bevor in den sich anschließenden Abschnitten dargelegt wird, wie das Programm diesen Anforderungen gerecht wird. Die Darstellung beginnt mit der Erläuterung des Konzepts der Diskretisierung der zeitunabhängigen, räumlichen Differentialoperatoren, bei deren Gestaltung die Auswirkung numerischer Effekte auf die Einhaltung der grundlegenden physikalischen Erhaltungssätze durch die berechnete Lösung berücksichtigt wird. Darauf folgend wird aufgezeigt, auf welche Weise dieses Konzept in einen Algorithmus zur

näherungsweise Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen eingebunden wird. Auch bei der algorithmischen Umsetzung des Verfahrens unterscheidet sich das verwendete Programm von anderen Finite-Volumen-Verfahren; in einem weiteren Abschnitt wird deshalb die Implementierung des Algorithmus behandelt. Das Kapitel abschließend wird das verwendete Turbulenzmodell erläutert und die Eignung des Programms zur Simulation turbulenter Strömungen anhand der Simulation der turbulenten Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt belegt.

3.1. Anforderungen an ein Programm zur Simulation disperser turbulenter Strömungen

Je nach Einsatzgebiet werden an die Simulationswerkzeuge im Bereich der numerischen Simulation von Strömungen ganz unterschiedliche Anforderungen gestellt. Während etwa für Rechnungen im Bereich der Turbulenzforschung von den Wissenschaftlern Rechenzeiten im Bereich von Monaten hingenommen werden, so sind Konstrukteure im industriellen Umfeld auf Verfahren mit wesentlich kürzeren Rechenzeiten angewiesen. Natürlich unterscheiden sich auch die Anforderungen an die Genauigkeit in beiden Fällen erheblich.

In diesem Abschnitt wird festgehalten, welches die spezifischen Anforderungen an ein Programm sind, mit dem die gestellten Aufgaben aus dem Bereich der Simulation disperser turbulenter Strömungen bewältigt werden sollen.

- **Leistungsfähigkeit:** Programme, die zur Simulation turbulenter Strömungen verwendet werden, müssen sowohl hinsichtlich der Rechenzeit als auch des benötigten Speicherplatzes so effizient wie möglich sein. Turbulente Strömungen erfordern eine feine Auflösung des Rechengebiets; das hat zur Folge, daß große Datenmengen gespeichert und große Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Alle Programmteile müssen so gestaltet werden, daß das Gesamtprogramm das in einem vernünftigen Zeitrahmen leisten kann.
- **Genauigkeitsanforderungen:** Die Simulation turbulenter Strömungen ist sinnvollerweise nur mit Programmen durchführbar, mit denen Ergebnisse erhalten werden, die mindestens von zweiter Ordnung genau sind (vgl. Breuer [8]). Die verwendeten räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsverfahren müssen dem Rechnung tragen. Zudem ist darauf zu achten, daß die Verfahren masseerhaltend sind und die Energiebilanz nicht verfälschen.
- **Geometrische Flexibilität:** Disperse Strömungen zeichnen sich durch komplexe Geometrien aus. Bei allen Programmteilen ist daher darauf zu achten, daß beim Übergang von einfachen auf komplexe Geometrien we-

sentliche Eigenschaften nicht verloren gehen.

- **Implementierung:** Das verwendete Programm sollte die neueren Entwicklungen in der Informatik berücksichtigen, es sollte etwa objektorientiert programmiert sein. Dadurch wird eine weitere Verwendung des gesamten Programms und von Programmteilen erleichtert. Daneben sollte dem Trend in der Entwicklung der Rechnerarchitekturen und Übersetzer Rechnung getragen werden: Das Programm sollte deshalb leicht vektorisierbar und parallelisierbar sein.
- **Erweiterbarkeit:** Im selben Sinne sollte das Programm von vornherein so gestaltet werden, daß Weiterentwicklungen etwa auf dem Gebiet der räumlichen Diskretisierung wie die Verwendung einer adaptiv verfeinerten Diskretisierung am Programm vorgenommen werden können.

Es wird im folgenden Abschnitt das Prinzip eines Programms zur Simulation von Strömungen vorgestellt, das neben den mittlerweile selbstverständlichen Anforderungen wie der Robustheit und der Verwendbarkeit auf diversen Plattformen auch die genannten speziellen Anforderungen erfüllt.

3.2. Räumliche Diskretisierung der Operatoren

3.2.1. Formulierung des Gleichungssystems

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden in der dimensionslosen Notation wie in Gleichung (2.7) und (2.8) eingeführt betrachtet: In diskretisierter Form werden diese mit der Massenmatrix $\mathbf{\Omega}^1$ geschrieben als

$$\mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} + \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h - \mathbf{D} \vec{u}_h + \mathbf{M} \vec{p}_h = \vec{f}_h \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}^T \vec{u}_h = \vec{0}. \quad (3.2)$$

Die mit dem Index h versehenen Vektoren \vec{u}_h und \vec{p}_h enthalten als Komponenten die Werte der Geschwindigkeits- bzw. Druckfunktionen an den Punkten des verwendeten Rechengitters. Die mit den Großbuchstaben bezeichneten Operatoren \mathbf{D} , $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und \mathbf{M} bzw. \mathbf{M}^T sind dementsprechend Matrizen. Nach demselben Schema werden die Transportgleichungen geschrieben:

$$\mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{c}_h}{\partial t} + \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{c}_h - \mathbf{D} \vec{c}_h = \vec{q}_h \quad (3.3)$$

¹Die Massenmatrix $\mathbf{\Omega}$ ist im Fall äquidistanter Gitter eine Diagonalmatrix mit gleichgroßen Elementen. Sie beschreibt im allgemeinen Fall eine Gewichtung der gegenseitigen Einflüsse der Zellen aufeinander.

Die auftretenden Matrizen $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und $\mathbf{\Omega}$ in Gleichung (3.1) und (3.3) sind bei der hier vorgestellten Diskretisierung identisch. Die Matrizen \mathbf{D} unterscheiden sich lediglich dadurch, daß hier bei der Transportgleichung der konstante Faktor $\frac{1}{Pr}$ bei allen Elementen dazukommt.

Die Art der Diskretisierung bestimmt maßgeblich die Einträge der auftretenden Matrizen. Über die Art der Diskretisierung und die daraus resultierenden Eigenschaften von \mathbf{D} , \mathbf{M} und $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ sowie des gesamten betrachteten Systems wird in den folgenden Abschnitten berichtet.

3.2.2. Gewünschte Eigenschaften der Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung der Differentialgleichungen soll so vorgenommen werden, daß die benötigten Operatoren \mathbf{M} , $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und \mathbf{D} so konstruiert werden können, daß bei ihrer Verwendung in den Impulsgleichungen im Inneren des Rechengebiets die Impulserhaltung sichergestellt und die zeitliche Änderung der mechanischen Energie niemals positiv ist. Bei Transportgleichungen soll die Erhaltung der Transportgröße durch die Diskretisierung garantiert werden. Wichtige physikalische Eigenschaften von strömungsmechanischen Systemen werden dann exakt in das Berechnungsschema abgebildet.

Impulserhaltung und Energiebilanz bei den Impulsgleichungen

Durch Multiplikation von Gleichung (3.1) mit einem Vektor \vec{e}_h^T , dessen Komponenten alle den Wert 1 haben, wird folgender Ausdruck für die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses erhalten (vgl. Verstappen und Veldman [121]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \vec{u}_h) &= \vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} = \\ &- \vec{e}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h - \vec{e}_h^T \mathbf{M} \vec{p}_h + \vec{e}_h^T \mathbf{D} \vec{u}_h + \vec{e}_h^T \vec{f}_h \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wählt man die Elemente der Matrizen $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$, \mathbf{D} und \mathbf{M}^T so, daß

$$\mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{e}_h = \vec{0}, \quad \mathbf{D} \vec{e}_h = \vec{0}, \quad \mathbf{M}^T \vec{e}_h = \vec{0} \quad (3.5)$$

gilt, dann ergibt sich für die Änderung des Gesamtimpulses im Inneren des Rechengebiets

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \vec{u}_h) = 0, \quad (3.6)$$

wenn keine äußere Kraft wirkt ($\vec{f}_h = \vec{0}$). Das Modell ist also bezüglich des Impulses im Sinne der Physik korrekt.

Eine vergleichbare Betrachtung kann für die mechanische Energie angestellt werden: Werden die diskreten Impulsgleichungen von links mit dem transponierten Geschwindigkeitsvektor \vec{u}_h^T multipliziert, so erhält man eine Bilanz der mechanischen Energie. Die zeitliche Änderung der gesamten mechanischen Energie im Inneren des Rechengebiets muß stets kleiner null sein. Die Operatoren sind also so zu wählen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{u}_h^T \mathbf{\Omega} \vec{u}_h) &= 2 \cdot \left(\vec{u}_h^T \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} \right) = \\ &2 \cdot \left(-\vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h - \vec{u}_h^T \mathbf{M} \vec{p}_h + \vec{u}_h^T \mathbf{D} \vec{u}_h + \vec{u}_h^T \vec{f}_h \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der Term $\vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h$ läßt sich dabei in folgender Weise umformulieren:

$$\begin{aligned} \vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h &= \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h + \vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h + (\mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h) \vec{u}_h \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{u}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{u}_h + \vec{u}_h^T \mathbf{C}^T(\vec{u}_h) \vec{u}_h \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_h^T \left[\mathbf{C}(\vec{u}_h) + \mathbf{C}^T(\vec{u}_h) \right] \vec{u}_h. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Wenn es gelingt, die Antisymmetrie der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und die positive Definitheit von $-\mathbf{D}$ sicherzustellen, also die Bedingungen

$$\mathbf{C}(\vec{u}_h) = -\mathbf{C}^T(\vec{u}_h) \quad \text{und} \quad \vec{x}_h^T (-\mathbf{D}) \vec{x}_h > 0 \quad \forall \vec{x}_h \quad (3.9)$$

zu erfüllen, ist in Abwesenheit äußerer Kräfte auch die zeitliche Abnahme der mechanischen Energie im Rahmen der durch die numerische Lösung der Gleichungssysteme erreichbaren Genauigkeit gewährleistet. An \mathbf{M} sind keine weiteren Bedingungen zu stellen, da

$$\vec{u}_h^T \mathbf{M} \vec{p}_h = (\mathbf{M}^T \vec{u}_h)^T \vec{p}_h = 0 \quad (3.10)$$

zu Gleichung (3.7) keinen Beitrag leistet, wenn die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

Es ist physikalisch sinnvoll, die Forderungen aus (3.5) und (3.9) nur für das Innere des Rechengebiets zu stellen und das Wirken äußerer Kräfte dabei auszuschließen, weil es möglich sein muß, sowohl über die Ränder des Rechengebiets als auch über äußere Kräfte Energie in das Rechengebiet einzubringen. Bei den in dieser Arbeit betrachteten physikalischen Problemstellungen wird in der Tat auf

diese Weise dem System mechanische Energie zugeführt: Bei der Kanalströmung über die zwischen den Kanalenden angelegte Druckdifferenz genauso wie bei der Betrachtung des Aufstiegs von Blasen, bei der die aus dem Dichteunterschied zwischen Gas und Flüssigkeit resultierende Kraft als äußere Kraft auf das Fluid wirkt.

Dadurch, daß bei Einhaltung der besagten Bedingungen den Berechnungen ein physikalisches Ersatzmodell zugrunde liegt, bei dem die Erzeugung von Energie ausgeschlossen wird, kann kein mathematische Verfahren zur Lösung der Gleichungen, das eine Lösung findet, beispielsweise unendliche Geschwindigkeiten errechnen. Werden bei einem beliebigen Verfahren diese Eigenschaften durch die Verwendung von bestimmten Operatorarten einmal verloren, so können sie nicht etwa durch Erhöhung der Ordnung des Verfahrens wiedergewonnen werden.

Für die Simulation turbulenter Strömungen ist die Forderung $\mathbf{C}(\vec{u}_h) = -\mathbf{C}^T(\vec{u}_h)$ von besonderer Wichtigkeit. Weil turbulente Strömungen durch hohe Reynoldszahlen gekennzeichnet sind, deren Reziprokwert den diffusiven Term $\mathbf{D}\vec{u}_h$ gegenüber dem konvektiven Term $\mathbf{C}(\vec{u}_h)\vec{u}_h$ gewichtet, dominiert letzterer. Die Energiedissipation durch den diffusiven Term ist also klein gegen den konvektiven Energietransport. Wird dieser aufgrund der Diskretisierung überschätzt, so kann es vorkommen, daß der Energiegewinn aufgrund von Fehlern größer ist als der physikalisch richtige Energieverlust durch Dissipation. Ein solcher Fehler führt nicht nur (wie jeder Fehler) zu einer Verfälschung des Ergebnisses, sondern kann auch ein sogenanntes „Explodieren“ des Verfahren zur Folge haben, das in solchen Fällen gänzlich unbrauchbar werden kann, wenn unendliche Werte für die Geschwindigkeiten errechnet werden.

Erhaltungseigenschaften bei der Transportgleichung

Der Impulserhaltung bei den Impulsgleichungen entspricht bei einer Transportgleichung die Erhaltung der Transportgröße. Ein physikalisches Transportproblem ist bei Abwesenheit von Quellen und Senken der Transportgröße im Inneren des betrachteten Gebiets dadurch gekennzeichnet, daß die „Gesamtmenge“ der Transportgröße über die Zeit unverändert bleibt, d.h. die Masse eines gelösten Stoffes, der als Transportgröße aufgefaßt wird, bleibt ebenso konstant wie die gesamte thermische Energie, wenn die Temperatur die Transportgröße ist.

Bei der Diskretisierung der Transportgleichung (3.3), die das physikalische Problem mathematisch modelliert, ist also analog den Impulsgleichungen Wert darauf zu legen, daß die Erhaltungseigenschaft nicht verloren geht. Wie die Impulsbilanz,

so erhält man eine Bilanz für die Transportgröße dadurch, daß man die entsprechende Gleichung (hier die Transportgleichung) von links mit \vec{e}_h^T multipliziert:

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \vec{c}_h) = \vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{c}_h}{\partial t} = - \vec{e}_h^T \mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{c}_h + \vec{e}_h^T \mathbf{D} \vec{c}_h + \vec{e}_h^T \vec{q}_h \quad (3.11)$$

Die Forderung, daß die Transportgröße erhalten bleibt,

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_h^T \mathbf{\Omega} \vec{c}_h) = 0, \quad (3.12)$$

wird erfüllt, wenn die Matrizen $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und \mathbf{D} folgende Eigenschaften haben:

$$\mathbf{C}(\vec{u}_h) \vec{e}_h = \vec{0}, \quad \text{und} \quad \mathbf{D} \vec{e}_h = \vec{0} \quad (3.13)$$

Da das genau dieselben Eigenschaften sind, die aus der Betrachtung der Impulsbilanz für die Operatoren $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und \mathbf{D} abgeleitet wurden, vgl. Gleichungen (3.5), liegt es auf der Hand, für diese beiden Operatoren in den Impuls- und Transportgleichungen dasselbe Diskretisierungsschema zu wählen. Damit wird nachträglich eine Rechtfertigung gegeben für die zunächst willkürliche Festlegung, daß die konvektiven Terme und diffusiven Terme in den Impuls- bzw. Transportgleichungen in den Gleichungen (3.1) bzw. (3.3) mit denselben Symbolen dargestellt worden sind.

Im folgenden wird aufgezeigt, wie die Gleichungen diskretisiert werden können, damit Operatoren erhalten werden, die diese Eigenschaften besitzen, die in (3.5) und (3.9) zusammengefaßt sind.

3.2.3. Diskretisierung der einzelnen Terme im zweidimensionalen Fall

Anordnung der Unbekannten

Im Hinblick auf die übergeordneten Eigenschaften des Algorithmus, insbesondere die Erweiterbarkeit zu einem adaptiven Schema, ist es sinnvoll, die Geschwindigkeitswerte und die Transportgrößen an den Knotenpunkten des verwendeten Gitters zu berechnen. Es wird die in Abbildung 3.1 gezeigte Anordnung der Stützpunkte an einer Gitterzelle verwendet: Wie bei Verstappen und Veldman [120], die das von Harlow und Welsh [40] vorgeschlagene Schema verwenden, werden hier, um ein eindeutig lösbares Gleichungssystem zu erhalten, die Impulsgleichungen (3.1) an den Punkten aufgestellt, an denen die Geschwindigkeitswerte errechnet werden. Die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird jeweils auf den einzelnen Gitterzellen gefordert. Die verwendete Druck-Geschwindigkeitskopplung

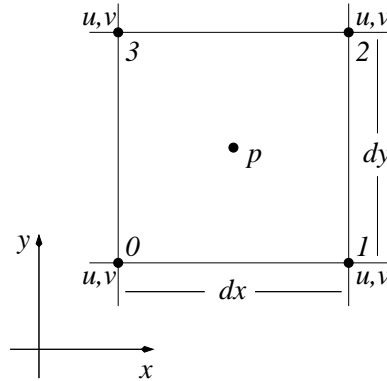


Abbildung 3.1.: Gitterzelle zur Diskretisierung im zweidimensionalen Fall

legt dann nahe, den Druck in der Zellmitte zu lokalisieren. Wie beim Schema nach Harlow und Welsh [40] und der Verwendung äquidistanter Gitter ist es dabei möglich, Operatoren zu bestimmen, die die in (3.5) und (3.9) geforderten Eigenschaften haben; die Gitter müssen dazu nur mehr orthogonal sein.

Kontinuitätsgleichung

Bei der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung werden die Zellen als finite Volumen betrachtet. Um die Volumenströme durch die Grenzflächen zu erhalten, wird die Geschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche bzw. -linie in deren Mitte mit dem (gerichteten) Flächeninhalt multipliziert. Die Geschwindigkeit in der Mitte der Grenzfläche wird durch lineare Interpolation der beiden Geschwindigkeiten an den beiden beteiligten Knoten gewonnen. Das entspricht der Ermittlung des Flusses über die Zellkante durch Integration der Funktion der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente nach der Trapezregel, bei der die Funktionswerte an den Zellecken als Stützstellen genommen werden. Für den Volumenstrom durch die linke Grenzfläche in Abbildung 3.1 gilt dann beispielsweise:

$$\dot{V}_{03} = \frac{1}{2}(u_0 + u_3) \cdot dy \quad (3.14)$$

Aufsummieren der einzelnen Volumenströme durch die Grenzflächen ergibt mit den in Abbildung 3.1 eingeführten Bezeichnungen die Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung (3.2) auf einer Zelle:

$$\frac{1}{2}(u_0 + u_3 - u_1 - u_2) \cdot dy + \frac{1}{2}(v_0 + v_1 - v_2 - v_3) \cdot dx = 0. \quad (3.15)$$

Die Einträge in die Matrix \mathbf{M}^T lauten also an den zu den beteiligten Knoten gehörigen Stellen $\pm 0.5 \cdot dx$ bzw. $\pm 0.5 \cdot dy$ und sonst 0. \mathbf{M}^T erfüllt damit die in (3.5) geforderte Eigenschaft. Man kann sich außerdem davon überzeugen, daß \mathbf{M}

angewandt auf \vec{p}_h bei einheitlichem Gitterlinienabstand in jeder Koordinatenrichtung den Druckgradienten an der Gittergrenze als Steigung einer Fläche darstellt, die die Drücke an den Mittelpunkten der beteiligten Zellen bilinear interpoliert.

Diffusiver Term

Mit der Diskretisierung mit dem Fünfpunktstern ergeben sich Matrixeinträge von \mathbf{D} , so daß $(-\mathbf{D})$ vom zugrunde liegenden Laplace-Operator die Eigenschaften der Symmetrie und der positiven Definitheit erbt, vgl. Hackbusch [39]. Die Forderungen aus (3.5) und (3.9) sind damit erfüllt.

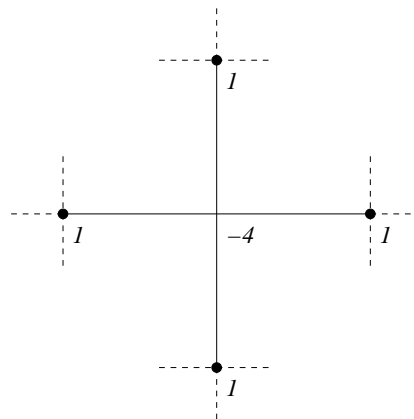


Abbildung 3.2.: Fünfpunktstern zur Diskretisierung des diffusiven Terms im zweidimensionalen Fall

Konvektiver Term

Wegen seiner Nichtlinearität erfordert die Diskretisierung des konvektiven Terms besondere Beachtung. Ausgeschrieben lauten seine Bestandteile in der Impulsgleichung in x -Richtung:

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(vu)}{\partial y} \tag{3.16}$$

In diesen Ausdrücken wird die jeweils zuerst geschriebene Geschwindigkeitskomponente (hier beim ersten Term u und beim zweiten Term v) als transportierende Größe und die zuletzt geschriebene als transportierte Größe (hier bei beiden Termen u) aufgefaßt. Durch diese Unterscheidung ist es möglich, alle in Impuls- und

3. Ein impuls- und energierhaltendes Finite-Volumen-Verfahren

Transportgleichungen auftretenden Terme dieses Typs mit

$$\frac{\partial(uc)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(vc)}{\partial y} \quad (3.17)$$

zu erfassen; c kann dann beispielsweise auch eine Temperatur oder eine Konzentration sein. Die Ausdrücke, die die transportierenden Größen enthalten, werden dann zur Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ zusammengefaßt, die vom Geschwindigkeitsfeld abhängt. Abbildung 3.3 zeigt, an welchen Stellen und mit welchen Gewichten sowohl transportierende als auch transportierte Größen genommen werden müssen, wenn die Gleichung am Punkt 3 aufgestellt wird, damit sie in Verbindung mit einer geeigneten Mittelung in ihrer Gesamtheit eine Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ mit den gewünschten Eigenschaften aufbauen.

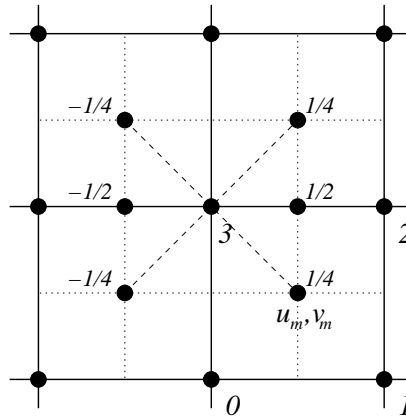


Abbildung 3.3.: Differenzenstern zur Diskretisierung des konvektiven Terms in x -Richtung im zweidimensionalen Fall

Bei der Ermittlung der Matrixeinträge von $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ ist einerseits darauf zu achten, daß die Zeilensumme jeweils null ergibt, damit Forderung (3.5) erfüllt ist. Wenn auf allen Gitterzellen die Kontinuitätsgleichung gilt und wenn in der Mitte einer jeden Gitterzelle die u -Geschwindigkeit als transportierende Größe gemittelt wird zu

$$u_m = \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + \frac{1}{4}(v_0 + v_2 - v_1 - v_3) \cdot \frac{dx}{dy}, \quad (3.18)$$

die v -Geschwindigkeit entsprechend zu

$$v_m = \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_2 + v_3) + \frac{1}{4}(u_0 + u_2 - u_1 - u_3) \cdot \frac{dy}{dx} \quad (3.19)$$

(siehe Kasten auf Seite 42) und auf den Gitterzellgrenzen linear interpoliert wird, dann ist auf jeder Viertelzelle (vgl. Abbildung 3.3) wieder die Kontinuität erfüllt. Deshalb ist auch auf dem Gebiet, das durch die vier an Punkt 3 anstoßenden

Viertelzellen gebildet wird, die Kontinuität erfüllt, und der angegebene Differenzenstern ergibt Zeileneinträge in $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$, deren Summe null ist, d.h.

$$\mathbf{C}(\vec{u}_h)\vec{e}_h = \vec{0}. \quad (3.20)$$

Bei Verwendung des Differenzensterns aus Abbildung 3.3 gilt das für jede sinnvolle Interpolationsvorschrift für die transportierte Größe.

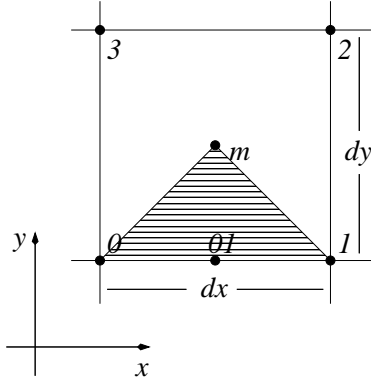
Andererseits folgt aus der Forderung der Antisymmetrie von $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ in Gleichung (3.9), daß in der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ zwei sich an der Hauptdiagonale gegenüberliegende Einträge den gleichen Betrag bei unterschiedlichem Vorzeichen haben müssen. Um das zu erreichen, müssen die Interpolationsvorschriften für die transportierte Größe spezifiziert werden. Es ist dabei an den Zellkanten wieder linear zu interpolieren; die Werte in den Zellmittelpunkten werden hier durch ebenfalls lineare Interpolation zwischen dem Wert am Punkt, an dem der Differenzenstern gebildet wird, und dem in der Zelle diagonalen gegenüberliegenden Punkt erhalten. Am Zellmittelpunkt wird dabei also unterschieden, ob die zu interpolierende Größe die transportierende oder die transportierte ist.

Wie aus Anhang A hervorgeht, wird bei Verwendung der angegebenen Interpolationsvorschriften für sowohl transportierende als auch transportierte Größen eine antisymmetrische Matrix erhalten. Die aus der Impuls- bzw. Energiebilanz abgeleiteten wünschenswerten mathematischen Eigenschaften (3.5) und (3.9) der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ werden damit erfüllt.

Allein um die Antisymmetrie sicherzustellen, verbietet sich die Anwendung eines *Upwind-Verfahrens*, bei dem je nach Strömungsrichtung die eine oder andere Seite bei der Differenzenbildung bevorzugt wird. Daneben verliert man bei Upwind-Verfahren in der Regel eine Ordnung an Genauigkeit. Auch deshalb also, weil an das hier präsentierte Verfahren die Forderung gestellt wird, daß es mindestens von zweiter Ordnung genau sein muß, kann hier kein Upwind-Verfahren eingesetzt werden². Der eigentliche Grund für den Einsatz von Upwind-Verfahren in zahlreichen anderen Fällen liegt darin, daß diese in Verbindung mit expliziten Euler-Verfahren erster Ordnung zur Zeitintegration – im Gegensatz zu den Verfahren mit zentralen Differenzen etwa – ein insgesamt stabiles Verfahren ergeben (vgl. Griebel et al. [35]). Ein stabiles Verfahren kann jedoch auch erhalten werden, wenn in Verbindung mit den zentralen Differenzen der hier dargelegten Art ein entsprechendes anderes Verfahren zur Zeitintegration verwendet wird, wie in Abschnitt 3.3.1 erläutert werden wird.

²Der Einsatz von Upwind-Verfahren höherer Ordnung erhielte zwar die Ordnung der Genauigkeit, würde aber wieder die Antisymmetrieeigenschaften von $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ verletzen.

Kontinuitätserhaltende Interpolation der Geschwindigkeiten im zweidimensionalen Fall



Diskretisierungsschema mit Bezeichnungen zur Interpolation

Ziel ist es, eine Formel für jede Geschwindigkeitskomponente in der Mitte einer Zelle anzugeben, so daß auf rechtwinkligen Viertelzellen, die den Zellmittelpunkt als Eckpunkt enthalten, die Kontinuität erfüllt ist, wenn sie auf der Ausgangszelle erfüllt ist. Dazu führt man die Bezeichnungen links ein.

Man betrachte nun das schraffiert eingetragene Dreieck. In diesem Dreieck lautet die diskrete Näherung von $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{dx} \cdot (u_1 - u_0).$$

Für $\frac{\partial v}{\partial y}$ gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{dy/2} \cdot (v_m - v_{01}) = \frac{2}{dy} \cdot (v_m - \frac{1}{2}(v_0 + v_1)),$$

wenn der Wert v_{01} durch lineare Interpolation gebildet wird wie das bei der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung selbst der Fall war.

Setzt man v_m zu

$$v_m = \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_2 + v_3) + \frac{1}{4}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3) \cdot \frac{dy}{dx},$$

dann kann man durch Nachrechnen unter Verwendung dieses und der bisher zurechtgelegten Ausdrücke zeigen, daß die Kontinuitätsgleichung auf dem betrachteten Dreieck tatsächlich erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{dx} \cdot (u_1 - u_0) + \frac{2}{dy} \cdot \left[\frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_2 + v_3) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3) \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}(v_0 + v_1) \right] \\ &= \frac{1}{2dx}(-u_0 + u_1 + u_2 - u_3) + \frac{1}{2dy}(-v_0 - v_1 + v_2 + v_3) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wenn die Kontinuität auf der Zelle erfüllt ist.

Für die anderen drei Dreiecke verfährt man ebenso und stellt fest, daß man v_m wie beschrieben wählen muß und u_m zu

$$u_m = \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + \frac{1}{4}(v_0 - v_1 + v_2 - v_3) \cdot \frac{dx}{dy}.$$

3.2.4. Diskretisierung der einzelnen Terme im dreidimensionalen Fall

Anordnung der Unbekannten

Für die Anordnung der Unbekannten wird das in Abbildung 3.4 gezeigte Schema verwendet. Wie im zweidimensionalen Fall werden zwei Gitter verwendet: eines

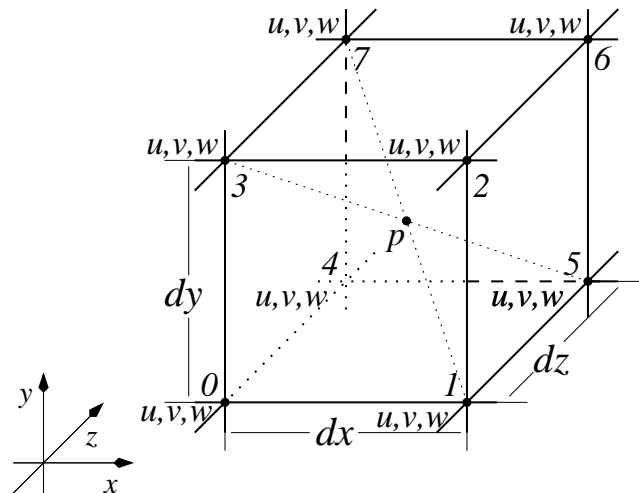


Abbildung 3.4.: Gitterzelle zur Diskretisierung im dreidimensionalen Fall

für die Geschwindigkeiten u , v und w und eines für den Druck p . Eine Zelle verfügt somit über einen Punkt, an dem der Druck gespeichert wird und ist an acht Punkten beteiligt, an denen die Geschwindigkeiten berechnet werden. Die Transportgrößen, die der Übersichtlichkeit halber in Abbildung 3.4 nicht erscheinen, werden wie im zweidimensionalen Fall an den Punkten des Geschwindigkeitsgitters berechnet.

Kontinuitätsgleichung

In der Betrachtungsweise der Finite-Volumen-Verfahren stellt die Kontinuitätsgleichung eine Massenbilanz dar. Weil hier nur dichtebeständige Fluide betrachtet werden, können zum Aufstellen der Massenbilanz die Volumenströme durch die Seitenflächen der Zelle verwendet werden. Zur Ermittlung des Volumenstroms durch beispielsweise die untere Fläche in Abbildung 3.4 mit den Knotenpunkten 0, 1, 4 und 5 wird das arithmetische Mittel der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Fläche (hier v) mit dem gerichteten Flächeninhalt multipliziert:

$$\dot{V}_{0145} = \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_4 + v_5) \cdot dx \cdot dz \quad (3.21)$$

Aufsummieren der Volumenströme durch die sechs Seitenflächen und Nullsetzen der Summe ergibt die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{4}(u_0 + u_3 + u_4 + u_7 - u_1 - u_2 - u_5 - u_6) \cdot dy \cdot dz \\
 &+ \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_4 + v_5 - v_2 - v_3 - v_6 - v_7) \cdot dx \cdot dz \\
 &+ \frac{1}{4}(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 - w_4 - w_5 - w_6 - w_7) \cdot dx \cdot dy \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Die Matrixeinträge von \mathbf{M}^T können aus Gleichung (3.22) abgelesen werden. Für \mathbf{M}^T gilt damit die in Gleichung (3.5) aufgestellte Forderung

$$\mathbf{M}^T \vec{e}_h = \vec{0} \quad (3.23)$$

genauso wie im zweidimensionalen Fall.

Diffusiver Term

Aus dem Fünfpunktstern im zweidimensionalen Fall wird ein Siebenpunktstern im dreidimensionalen Fall. Dieser hat dieselben Eigenschaften wie der Fünfpunktstern: Auch er erbt die Symmetrie und die negative Definitheit vom zugrundeliegenden Laplace-Operator. \mathbf{D} hat damit die geforderten Eigenschaften:

$$\mathbf{D} \vec{e}_h = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{x}_h^T (-\mathbf{D}) \vec{x}_h > 0 \quad \forall \vec{x}_h \quad (3.24)$$

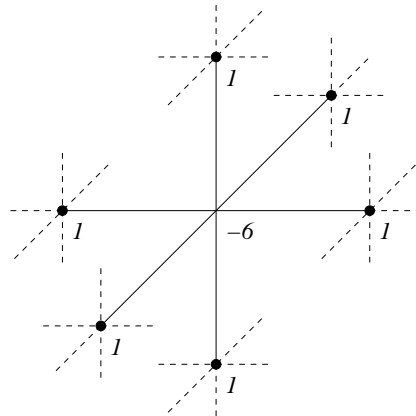


Abbildung 3.5.: Siebenpunktstern zur Diskretisierung des diffusiven Terms im dreidimensionalen Fall

Konvektiver Term

Beim konvektiven Term wird aus dem zweidimensionalen Siebenpunktstern (Abbildung 3.3) ein dreidimensionaler 19-Punktstern. Seine räumliche Lage soll Ab-

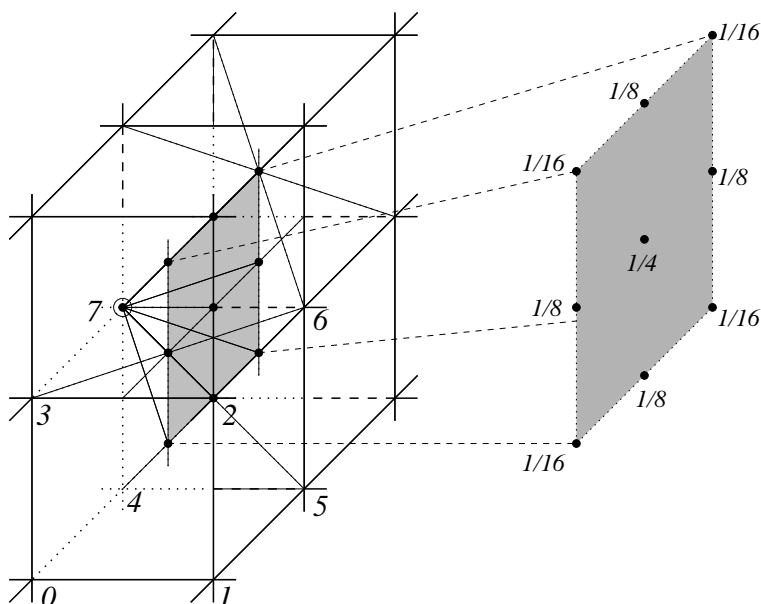


Abbildung 3.6.: Halber Differenzenstern zur Diskretisierung des konvektiven Terms in x -Richtung im dreidimensionalen Fall

Abbildung 3.6 verdeutlichen. Aus ihr gehen auch die Gewichte hervor, mit denen die einzelnen Punkte genommen werden. Sämtliche zu verwendende Punkte sind nicht Gitterpunkte des Geschwindigkeitsgitters. Deshalb muß interpoliert werden. Die interpolierten Werte liegen dabei auf den Ecken von Quadern mit der jeweils halben Seitenlänge, von denen jeweils acht eine Zelle des Diskretisierungsschemas ausfüllen. Damit die Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ auch im dreidimensionalen Fall Gleichung (3.20) erfüllt sowie im Hinblick auf die Erweiterbarkeit der Berechnungsmethode auf eine adaptive Diskretisierung ist darauf zu achten, daß die interpolierten Werte der transportierenden Größen jeweils die Kontinuität auf den Achtelquadern erfüllen. Mit folgenden Interpolationsvorschriften ist das gewährleistet:

- **Punkte in der Mitte der Zellkanten:** Lineare Interpolation, beispielsweise u -Geschwindigkeit im Punkt in der Mitte der Kante mit den Punkten 0 und 4:

$$u_{04} = \frac{1}{2}(u_0 + u_4) \quad (3.25)$$

Zwischen den Richtungen der Kanten und der Richtung der Geschwindigkeitskomponente besteht keine Abhängigkeit.

- **Punkte in der Mitte der Zellseitenflächen:** Die beiden Geschwindigkeitskomponenten parallel zur jeweiligen Seitenfläche werden anders interpoliert als die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche. Für die Geschwindigkeiten in der Mitte der Fläche mit den Knotenpunkten 0, 1, 4 und 5, einer x,z -Fläche mit $y = const.$, (vgl. Abbildung 3.4) gilt beispielsweise

weise:

$$u_{0145} = \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + u_4 + u_5) + \frac{1}{8}(w_0 - w_1 - w_4 + w_5) \frac{dx}{dz} \quad (3.26)$$

und

$$w_{0145} = \frac{1}{4}(w_0 + w_1 + w_4 + w_5) + \frac{1}{8}(u_0 - u_1 - u_4 + u_5) \frac{dz}{dx} \quad (3.27)$$

Die Vorzeichen entsprechen denen der Interpolation im zweidimensionalen Fall (vgl. Gleichung (3.18 und 3.19). Die v -Komponente, die senkrecht zur Seitenfläche steht, wird bilinear interpoliert:

$$v_{0145} = \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_4 + v_5) \quad (3.28)$$

- **Punkte in der Mitte der Zelle:** Die Interpolationsvorschriften lauten:

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7) \\ &+ \frac{3}{16}(v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 - v_7) \frac{dx}{dy} \\ &+ \frac{3}{16}(w_0 - w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 + w_6 - w_7) \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{8}(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7) \\ &+ \frac{3}{16}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 - u_7) \frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{3}{16}(w_0 + w_1 - w_2 - w_3 - w_4 - w_5 + w_6 + w_7) \frac{dy}{dz} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{8}(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7) \\ &+ \frac{3}{16}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 + u_6 - u_7) \frac{dz}{dx} \\ &+ \frac{3}{16}(v_0 + v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 + v_6 + v_7) \frac{dz}{dy} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die transportierten Größen werden wie im zweidimensionalen Fall linear entlang der Zellkanten, der Diagonalen der Zellseitenflächen bzw. der Raumdiagonalen interpoliert.

Mit den genannten Interpolationsvorschriften für die transportierenden Größen wird erreicht, daß die Kontinuität der Achtelquader erfüllt ist. Das hat zur Folge, daß unabhängig vom Interpolationschema bei der transportierten Größe die Einträge einer Zeile von $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ genau die Terme der Summe der Kontinuitätsgleichungen der acht Achtelquader sind, die an den der Zeile zugeordneten Punkt anstoßenden. Ist das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei, ist damit auch sichergestellt, daß die Zeilensummen der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ alle null sind.

Bei linearer Interpolation der transportierten Größe entlang der Zellkanten, der Diagonalen der Zellseitenflächen bzw. der Raundiagonalen ist die Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ zudem antisymmetrisch, wie man sich wie beim zweidimensionalen Fall überlegen kann. Wieder können so mit den angegebenen Schemata alle aus Impuls- und Energiebilanz abgeleiteten wünschenswerten mathematischen Eigenschaften von $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ nachgewiesen werden.

Um kontinuieritätserhaltende Geschwindigkeitswerte an einem beliebigen Punkt zu erhalten, könnten die aufgeführten Interpolationsvorschriften zwischen den Eckpunkten der Achtelquader rekursiv sooft angewandt werden, bis der Abstand des Punktes zu einem Eckpunkt eines kleineren Quaders unter eine zu bestimmende Fehlerschranke gesunken ist. Eine schnellere Möglichkeit, kontinuieritätserhaltende Geschwindigkeitswerte an beliebigen Punkten zu erhalten wird in Anhang B beschrieben.

3.2.5. Interpretation des Verfahrens

Dem vorgestellten Verfahren liegt die Denkweise der Finite-Volumen-Verfahren zugrunde. Die ihrem physikalischen Ursprung nach kontinuierlichen Geschwindigkeitsfunktion (wie auch der Druck als Funktion) werden nur an diskreten Punkten im Raum betrachtet. Bei den meisten gebräuchlichen Finite-Volumen-Verfahren werden die kontinuierlichen Funktionen durch eine Interpolation erhalten, die in keinem Zusammenhang zur Diskretisierung der Operatoren steht. Das führt im allgemeinen dazu, daß die durch Interpolation erhaltenen stetigen Lösungsfunktionen an Punkten, die keine Gitterpunkte sind, keine der zu lösenden Gleichungen mehr erfüllen.

Bei Finite-Elemente-Verfahren werden stetige Lösungen ermittelt, die ein Energiefunktional minimieren (vgl. Braess [5] oder Brenner [7]). Über die Lösungsfunktionen können im ganzen Rechengebiet Werte der gesuchten Funktionen angegeben werden, die die gelösten Gleichungen in dem Maße erfüllen, in dem das Energiefunktional minimiert wurde. Für die Navier-Stokes-Gleichungen etwa, die hier betrachtet werden, gibt beispielsweise Jiang [46] ein solches Verfahren an. Exakt wird das Gleichungssystem zwar auch bei den Finite-Elemente-Verfahren i.a. nicht erfüllt, doch läßt sich für den Fehler eine obere Schranke angeben.

Beim vorgestellten Verfahren wurden Interpolationsvorschriften entwickelt, die garantieren, daß auch interpolierte Werte überall zumindest die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllen, wenn die Funktionswerte an den Gitterpunkten sie erfüllen. Diese Eigenschaft erfüllen Finite-Elemente-Verfahren oft nicht, weil hierbei stets der integrale Fehler, gemessen in einer bestimmten Norm, unter einer benennbaren Schranke liegt.

Die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung durch interpolierte Werte ist eine wich-

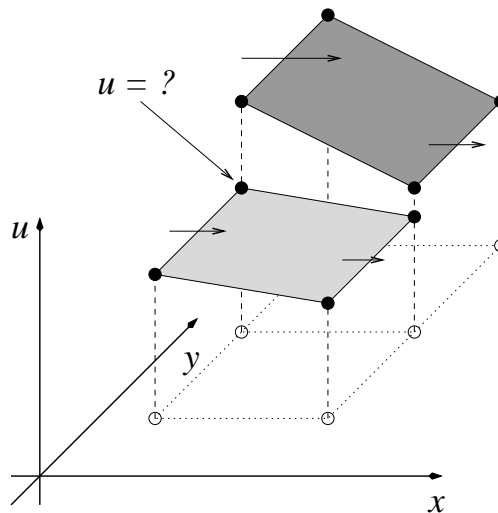


Abbildung 3.7.: Skizze zur Schwierigkeit der Gitterverfeinerung bei Verwendung des Diskretisierungsschemas nach Harlow und Welsh [40]. Mit u ist die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung bezeichnet.

tige Eigenschaft des räumlichen Diskretisierungsverfahrens. Als Beispiel für die Auswirkungen der Anwendung eines Verfahrens, das diese Eigenschaften nicht hat, sei hier die Beobachtung von Tryggvason et al. [114] genannt, die berichten, daß beim Einsatz der Front-tracking Methode (vgl. Abschnitt 4.2.3) die betrachteten Gasblasen aufgrund eines Verstoßes gegen die Kontinuitätsgleichung bei den interpolierten Werten ihr Volumen nicht beibehalten.

Die Möglichkeit, mit dem angegebenen Interpolationsverfahren aus den an den Rechenpunkten ermittelten diskreten Funktionswerten eine stetige, die Kontinuität erhaltende Lösung zu bekommen, ist also ein entscheidender Vorteil dieses Verfahrens. Wenn das Programm um die Möglichkeit der adaptiven Gitterverfeinerung oder mit Mehrgitterverfahren ergänzt werden soll, dann ist diese Eigenschaft unverzichtbar. Abbildung 3.7 zeigt, daß etwa mit dem weitverbreiteten Diskretisierungsschema nach Harlow und Welsh [40] Probleme beim Übergang auf feinere bzw. gröbere Gitter auftreten. Da die Punkte, an denen die Werte der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Zellbegrenzung jeweils in der Mitte der Fläche im dreidimensionalen bzw. Kante in zweidimensionalen Fall liegen und als konstant über die ganze Zellbegrenzung angenommen werden, sind die Funktionen über die Zellgrenzen hinweg im allgemeinen nicht stetig; gerade dort aber werden bei Gitterübergängen sinnvolle Werte benötigt, vgl. Eisenbach et al. [20].

3.3. Der Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

Das vorgestellte räumliche Diskretisierungskonzept ist in einem Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen implementiert worden. Das in dieser Arbeit eingesetzte Programm orientiert sich in vielen Punkten an Griebel et al. [35], Meier [72] und Mehl [70], die den Programmcode *Nast++* erarbeitet und dokumentiert haben. Das diesem Programm zugrundeliegende Schema des Algorithmus wird aufgegriffen. Die Chorinsche Projektionsmethode [12] wird hier ebenso angewandt wie bei *Nast++*; damit handelt es sich auch bei dem in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schema um ein Druck-Geschwindigkeitskorrekturschema, bei dem räumliche und zeitliche Diskretisierung auf ganz verschiedene Weise erfolgen.

In den drei genannten Arbeiten wird aber die räumlichen Diskretisierung nach Harlow und Welch [40] verwendet, mit denen sich eine Erweiterung auf ein adaptives Berechnungsschema der Geschwindigkeiten nur mit großen Schwierigkeiten erreichen läßt. Im wesentlichen aus diesem Grund wurde darauf verzichtet, die bestehenden Vorarbeiten aus den drei genannten Arbeiten auch algorithmisch zu nutzen.

Dazu kommt, daß *Nast++* ein einfaches explizites Zeitintegrationsschema zugrunde liegt, das nur von erster Ordnung genau ist. Die Erweiterung von *Nast++* auf ein Zeitintegrationsverfahren, das die Simulation turbulenter Strömungen ermöglicht, ist im modularen Konzept dieses Programms nicht vorgesehen und daher nur mit massiven Eingriffen in die Programmstruktur möglich.

Diese Aspekte haben es ratsam erscheinen lassen, ein neues Programm zu entwickeln und dabei auf den Erfahrungen von *Nast++* aufzubauen. In diesem Abschnitt werden die außer der räumlichen Diskretisierung bestehenden Unterschiede des verwendeten Algorithmus zu *Nast++* erläutert.

Das zu lösende Gleichungssystem ist schematisch für den zweidimensionalen Fall in Abbildung 3.8 dargestellt; in allen die Implementierung betreffenden Fragen wird der dreidimensionale Fall genau analog gehandhabt.

In der gewählten Darstellung enthält die rechte Seite der Impulsgleichungen nur noch den Term der Volumenkraft, während die Terme $\mathbf{C}(\vec{u}_h)\vec{u}_h$ und $\mathbf{D}\vec{u}_h$ auf der linken Seite zu $\mathbf{S}\vec{u}_h$ zusammengefaßt werden.

Der untere Teil des Gleichungssystems, $\mathbf{M}^T \vec{u}_h = \vec{0}$, stellt die Kontinuitätsgleichung dar. Sie wird auf jeder Gitterzelle aufgestellt; damit entspricht jeder Gitterzelle eine Zeile dieses Teils der Gesamtmatrix. Die obere Hälfte des oberen Teils der Matrix symbolisiert die Impulsgleichungen in x -Richtung, die untere die Impulsgleichungen in y -Richtung. Jede Zeile des oberen Teils der Matrix ist also

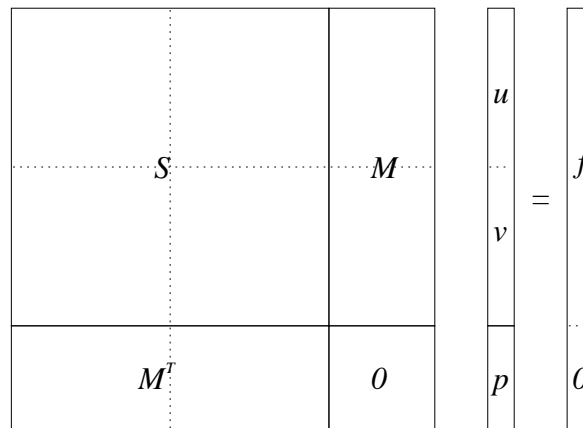


Abbildung 3.8.: Schematische Darstellung des diskretisierten Gleichungssystems für den zweidimensionalen Fall

einem Punkt zugeordnet, an dem die Impulsgleichungen diskretisiert werden. Die Zuordnung der Spalten zu den Unbekannten ist in Abbildung 3.8 gekennzeichnet.

3.3.1. Zeitdiskretisierung

Für instationäre Strömungen ist zur Lösung des Gleichungssystems eine Zeitdiskretisierung erforderlich. Die Zeitdiskretisierung muß die Stabilität des Algorithmus garantieren und sollte möglichst genau sein. Sie muß in einen Algorithmus umsetzbar sein, der möglichst wenig Speicherplatz zusätzlich zur Speicherung der gesuchten Größen sowie Rechenoperationen erfordert.

Hinsichtlich der Rechenzeit kommen implizite Verfahren nicht in Frage, weil die dabei zu lösenden Gleichungssysteme zu groß werden, wenn das Rechengebiet so fein aufgelöst wird, wie es für eine sinnvolle Turbulenzsimulation nötig ist. Bei der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen finden deshalb häufig Verfahren Anwendung, die auf der Chorinschen Projektionsmethode [12] basieren. Das explizite Fortschreiben des Geschwindigkeitsfelds wird dabei an die Berechnung des Druckfelds gekoppelt, indem der Druck mit einer von der Kontinuitätsgleichung abgeleiteten *Poissongleichung* so bestimmt wird, daß das mit diesem Druck fortgeschriebene Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei bleibt. Bei einem solchen *Druck-Korrekturschema* ist die angesprochene Poissongleichung das einzige (lineare) Gleichungssystem, für das bei jedem Zeitschritt eine Lösung gesucht werden muß.

Das Leapfrog-Verfahren

Weil ein zentrales Differenzenschema zur Diskretisierung der konvektiven Terme verwendet wird, empfiehlt sich zur Integration in der Zeit in Kombination mit der Chorinschen Projektionsmethode das sogenannte *Leapfrog-Verfahren*. Die Leapfrog-Schritte dieses expliziten Verfahrens entsprechen im wesentlichen einer Integration in der Zeit nach der Mittelpunktsregel (Ferziger und Peric [24]). Werden alle Terme der Impulsgleichungen bis auf die zeitliche Ableitung in $\Phi(t)$ zusammengefaßt, so lautet das Diskretisierungsschema im wesentlichen

$$\frac{\vec{u}_h(t^{n+1}) - \vec{u}_h(t^{n-1})}{2 \cdot \Delta t} = \Phi(t^n). \quad (3.32)$$

Nach $\vec{u}_h(t^{n+1})$ kann aufgelöst und so in der Zeit integriert werden. Aus Stabilitätsgründen muß von der reinen Mittelpunktsregel abgewichen werden, indem nicht alle Terme der Impulsgleichungen zum Zeitlevel t^n genommen werden, wie unten erläutert wird.

Das Leapfrog-Schema führt in Verbindung mit den zentralen Differenzen auf einen stabilen Algorithmus, ist von zweiter Ordnung genau und entspricht dem Stand der Technik der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. Manhart [65, 64]). Da es sich um ein Zweischrittverfahren handelt, müssen im Gegensatz etwa zum (in Verbindung mit den zentralen Differenzen bei vernünftigem Zeitschritt instabilen) Vorwärts-Euler-Verfahren (Fletcher [25]) die letzten zwei zeitlich zurückliegenden Geschwindigkeitsfelder gespeichert werden. Außerdem neigt das Verfahren zu $2\Delta t$ -Oszillationen, die durch sogenannte Leapfrog-Mittelungsschritte gedämpft werden. Solche Mittelungsschritte werden alle 41 Zeitschritte durchgeführt (Werner [127]) und entsprechen einer Integration nach der Mittelpunktsregel, ausgehend vom Mittel zwischen $n - 1$ -tem und n -tem Zeitlevel.

Werden die diskreten Werte der gesuchten Funktionen zum Zeitpunkt t^n mit \vec{u}_h^n bzw. \vec{p}_h^n bezeichnet, so wird zur Berechnung der Größen zum Zeitschritt $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ nach folgendem Schema vorgegangen:

- Berechnung einer Zwischengeschwindigkeit \vec{u}_h^* , die nicht divergenzfrei ist:

$$\vec{u}_h^* = \begin{cases} \vec{u}_h^{n-1} + 2\Delta t \left[-\mathbf{C}(\vec{u}_h^n)\vec{u}_h^n + \mathbf{D}\vec{u}_h^{n-1} - \mathbf{M}\vec{p}_h^n + \vec{f}_h \right] & \text{bei einem Leapfrog-Schritt} \\ \frac{1}{2}\vec{u}_h^n + \frac{1}{2}\vec{u}_h^{n-1} + \Delta t \left[-\frac{3}{2}\mathbf{C}(\vec{u}_h^n)\vec{u}_h^n \right. & \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{3}{2}\mathbf{D}\vec{u}_h^{n-1} - \frac{3}{2}\mathbf{M}\vec{p}_h^n + \frac{3}{2}\vec{f}_h \right] & \text{bei einem Leapfrog-Mittelungsschritt} \end{cases} \quad (3.33)$$

- Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} \Delta \vec{p}_h^{n+1} = -\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^T \vec{u}_h^* \quad (3.34)$$

für $\Delta \vec{p}_h^{n+1}$ (Poisson-Gleichung)

- Aktualisierung der Geschwindigkeitswerte (Druckkorrektur)

$$\vec{u}_h^{n+1} = \vec{u}_h^* - 2\Delta t \mathbf{M} \Delta \vec{p}_h^{n+1} \quad (3.35)$$

Das lineare Gleichungssystem (3.34) wird mit dem *Konjugierte-Gradienten-Verfahren* (CG, Algorithmus siehe Meister [73]) gelöst.

Bei der Wahl des Zeitschritts Δt , bei dem das Leapfrog-Verfahren stabil ist, müssen nach Fletcher [25] folgende zwei Ungleichungen erfüllt sein:

$$\Delta t \leq \frac{Re}{2} \cdot \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1} \quad (3.36)$$

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x}{u_{max}}, \frac{\Delta y}{v_{max}}, \frac{\Delta z}{w_{max}} \right) \quad (3.37)$$

Δx , Δy und Δz bezeichnen darin die Gitterweiten in der jeweiligen Raumrichtung, u_{max} , v_{max} und w_{max} die größten Absolutbeträge der Geschwindigkeiten in x -, y bzw. z -Richtung. Ungleichung (3.37) wird auch als *Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung* bezeichnet. Der Zeitschritt, der bei den Rechnungen in dieser Arbeit verwendet wird, ist zur Sicherheit halb so groß wie es die aufgeführten Ungleichungen zur Wahrung der Stabilität erlauben würden.

Die Tatsache, daß beim Leapfrog-Verfahren der diffusive Term mit dem Geschwindigkeitsfeld zum Zeitschritt $n - 1$ genommen werden muß, um die Stabilität zu gewährleisten, führt dazu, daß das in Abschnitt 3.2.2 gesagte nicht mehr uneingeschränkt gilt: Anstelle von Ungleichung (3.9) wäre nun zu zeigen, daß

$$\vec{u}_h^{nT} (-\mathbf{D}) \vec{u}_h^{n-1} > 0 \quad \forall n \quad (3.38)$$

gilt, damit von Seiten des Diskretisierungsverfahrens aus sichergestellt ist, daß im Inneren des Rechengebiets keine Energie erzeugt wird. Weil dazu die Eigenschaft der negativen Definitheit von \mathbf{D} nicht mehr ausreichend ist, kann ein strenger Beweis nur schwer geführt werden. Die Tatsache aber, daß das Verfahren bewährt ist in Einsatzgebieten, die bezüglich dieses Problems als kritisch gelten (Werner [127], Unger [117], Manhart [64]), spricht dafür, daß von der Verwendung des Verfahrens nicht abzuraten ist, weil Ungleichung (3.38) möglicherweise nicht erfüllt ist. Eine Erklärung dafür, warum das Verfahren dennoch erfolgreich eingesetzt wird, ist, daß bei Simulationen von Strömungen, die durch hohe Reynoldszahlen gekennzeichnet sind, der diffusive Term mit dem Reziprokwert dieser Reynoldszahl gegenüber den übrigen Termen bewertet wird. Entsprechendes gilt für die Fehler, die auf die Diskretisierung dieses Terms zurückgehen. Zudem erwächst die Notwendigkeit, bei der Simulation turbulenter Strömungen Verfahren zweiter Ordnung einzusetzen, im wesentlichen daraus, daß bei den Upwind-Verfahren erster Ordnung durch die Formulierung des konvektiven Terms zuviel Energie künstlich dissipiert. Der Fehler, der hier möglicherweise auftritt, ist aber ganz anderer Art: Er würde dazu führen, daß zuwenig Energie dissipativ aus dem Sy-

stem genommen wird. Im Übrigen ist bei typischen Anwendungen der Zeitschritt so klein, daß die Differenz zwischen \vec{u}_h^n und \vec{u}_h^{n-1} sehr klein wird. Damit wird die Ungleichung (3.38), wenn überhaupt, dann nur sehr wenig verletzt.

Ein Verfahren zur Stabilitätskontrolle

Die Tatsache, daß die Erfüllung von Ungleichung (3.38) durch die Konstruktion der Operatoren im Vorhinein nicht sichergestellt werden kann, motiviert die Suche nach einem anderen Weg, mit dem die Stabilität des Verfahrens aus energetischer Sicht garantiert werden kann. Aus der Bilanz der kinetischen Energie im Rechengebiet läßt sich mit den eingeführten Operatoren ein Verfahren angeben, mit dem mit geringem zusätzlichem Aufwand während des Programmablaufs überprüft werden kann, ob die gesamte kinetische Energie des betrachteten Systems tatsächlich nicht unkontrolliert zunimmt. Gleichzeitig kann damit ein Schema zur Zeitschrittberechnung beschrieben werden, bei dessen Anwendung die Abnahme der kinetischen Energie stets garantiert ist.

Zunächst betrachtet man dazu die Forderung nach der Abnahme der kinetischen Energie im Inneren des Rechengebiets in Abwesenheit äußerer Kräfte für den speziellen Fall des Leapfrog-Verfahrens. Die Richtung der Änderung von \vec{u}_h^{n-1} zwischen den Zeitpunkten t^{n-1} und t^{n+1} wird dabei beschrieben durch den Vektor

$$d\vec{u}_h := \left(-\mathbf{C}(\vec{u}_h^n)\vec{u}_h^n + \mathbf{D}\vec{u}_h^{n-1} - \mathbf{M}\vec{p}_h^{n+1} + \vec{f}_h \right). \quad (3.39)$$

Zum Zeitpunkt t^n lautet Ungleichung (3.7) in der für das Leapfrog-Verfahren zutreffenden Formulierung:

$$\begin{aligned} \vec{u}_h^{nT} \mathbf{\Omega} d\vec{u}_h = \\ 4\Delta t \left[-\vec{u}_h^{nT} \mathbf{C}(\vec{u}_h^n)\vec{u}_h^n + \vec{u}_h^{nT} \mathbf{D}\vec{u}_h^{n-1} - \vec{u}_h^{nT} \mathbf{M}\vec{p}_h^{n+1} + \vec{u}_h^{nT} \vec{f}_h \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Interpretiert man die linke Seite dieser Ungleichung als die Länge der Projektion des Vektors $d\vec{u}_h$ auf den Vektor \vec{u}_h^n , so wird die Bedeutung von Forderung (3.7) anschaulich klar (vgl. Abbildung 3.9). Die Länge des Vektors \vec{u}_h^{n+1} , geschrieben etwa als Norm

$$\|\vec{u}_h^{n+1}\| := \vec{u}_h^{n+1T} \mathbf{\Omega} \vec{u}_h^{n+1} \quad (3.41)$$

darf damit nicht größer sein als die des Vektors \vec{u}_h^n :

$$\|\vec{u}_h^{n+1}\| \leq \|\vec{u}_h^n\| \quad (3.42)$$

Betrachtet man die Terme in Ungleichung (3.40), so kann man in derselbe Weise nachvollziehen, weshalb dort die Kopplung der beiden Zeitlevel t^n und t^{n-1} dadurch geschieht, daß der konvektive Term zum Zeitpunkt t^n evaluiert wird und der diffusive zum Zeitpunkt t^{n-1} und nicht etwa umgekehrt. Da der Vektor, der den Anteil des konvektiven Terms zu $d\vec{u}_h$ darstellt, wegen Gleichung

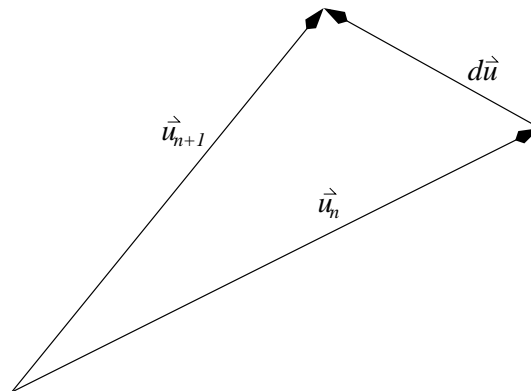


Abbildung 3.9.: Skizze zur geometrischen Interpretation der Formeln in Zusammenhang mit der Sicherstellung der Abnahme der kinetischen Energie

(3.9) stets senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor zum jeweiligen Zeitschritt steht, würde, wie Abbildung 3.10 zeigt, ein Fortschreiben des Vektors \vec{u}^{n-1} mit dem konvektiven Term zum Zeitpunkt t^{n-1} unmittelbar die Gesamtenergie, ausgedrückt als die Länge des Geschwindigkeitsvektors, erhöhen. Fortschreiben von \vec{u}^{n-1} mit dem konvektiven Term zum Zeitpunkt t^n dagegen verkürzt bereits den Geschwindigkeitsvektor.

Bei einem Fortschreiben der Geschwindigkeit \vec{u}^{n-1} um den Vektor $2\Delta t \cdot d\vec{u}_h$ muß der neu berechnete Geschwindigkeitsvektor \vec{u}^{n+1} folgende Ungleichung erfüllen,

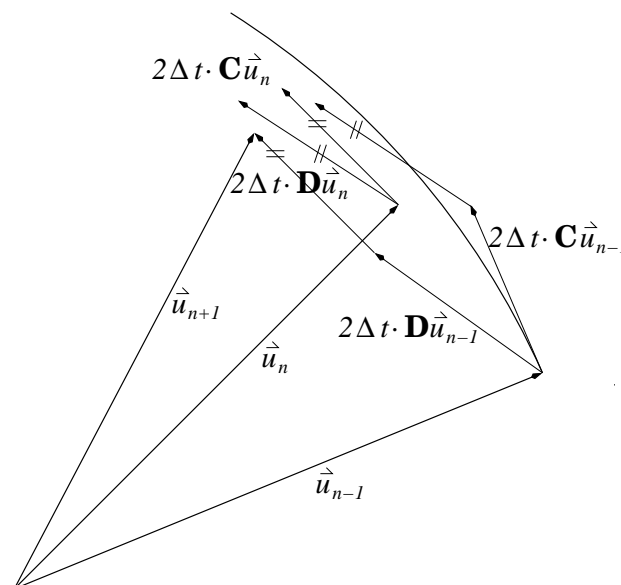


Abbildung 3.10.: Skizze zur geometrischen Interpretation des Leapfrog-Verfahrens

damit dem System nicht in unkontrollierter Weise Energie zugeführt wird:

$$\|\vec{u}_h^{n+1}\| \leq \|\vec{u}_h^{n-1}\| + 2\Delta t \cdot P \quad (3.43)$$

Mit P ist darin die mittlere Leistung bezeichnet, die dem betrachteten System über die Ränder oder innere Energiequellen zugeführt wird, während die Zeitspanne $2\Delta t = t^{n+1} - t^{n-1}$ verstreicht.

Setzt man \vec{u}^{n+1} zu $\vec{u}^{n-1} + 2\Delta t \cdot d\vec{u}_h$, so erhält man mit Ungleichung (3.43) folgende Bedingung, die an Δt zu stellen ist:

$$\Delta t \leq \frac{P - \vec{u}_h^{n-1T} \mathbf{\Omega} d\vec{u}_h}{2 \cdot \|d\vec{u}_h\|} \quad (3.44)$$

Erfüllt Δt diese Bedingung, dann wird dem System nur die über P explizit spezifizierte Energie zugeführt.

Die Erfüllung der Ungleichung ist während des Programmlaufs relativ einfach nachzuprüfen: Da $d\vec{u}_h$ ohnehin berechnet wird, sind lediglich die beiden Vektornormen und gegebenenfalls P zu berechnen. Zur Bestimmung dieses Terms können die ebenfalls berechneten Terme, die für Energieeintrag verantwortlich sind, verwendet werden³. Beim konvektiven Term und den äußeren Kräften ist das unproblematisch, lediglich für $\vec{u}_h^{nT} \mathbf{M} \vec{p}_h^{n+1}$ muß als Näherung $\vec{u}_h^{nT} \mathbf{M} \vec{p}_h^n$ verwendet werden. Alternativ kann die über Druckkräfte eingebrachte Energie auch über die dabei aufgebrauchte Leistung ermittelt werden.

Über die praktische Bedeutung von Ungleichung (3.44) muß allerdings gesagt werden, daß sie nicht allzu groß ist. So ist sie etwa bei allen in dieser Arbeit behandelten Problemen erfüllt, wenn der Zeitschritt nach dem herkömmlichen Verfahren mit den Ungleichungen (3.36) und (3.37) bestimmt wird.

Weitere Verfahren zur Zeitintegration

Obwohl sich das Leapfrog-Verfahren auch ohne die Stabilitätskontrolle bewährt hat, ist es erstrebenswert, ein Verfahren zu finden, bei dem allein durch die Operatoreigenschaften Impulserhaltung und Abnahme der kinetischen Energie erreicht werden können. Die weitverbreiteten expliziten Verfahren haben aber dieselbe potentielle Schwäche wie das Leapfrog-Verfahren: Es kann vorweg nicht gezeigt werden, daß der diffusive Term nicht eventuell zur Energieerzeugung beiträgt. So erlauben es das *Adams-Bashforth-Verfahren* und *Runge-Kutta-Verfahren* höherer Ordnung etwa ebenfalls nicht, mit der aufgezeigten Argumentation

³Ein hohes Maß an Stabilität wird insbesondere auch bei nicht divergenzfreien Anfangsbedingungen des Geschwindigkeitsfelds erreicht, wenn der Berechnung des Zeitschritts nach Ungleichung (3.44) die Auswertung sämtlicher Terme im gesamten Rechengebiet zugrundegelegt wird.

nachzuweisen, daß bei der Anwendung der Verfahren nur Energie vernichtet, nicht aber erzeugt wird. Einzig das *Lax-Wendroff-Verfahren* (Fletcher [25]) weist dieses Problem nicht auf. Bei der Anwendung auf die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen treten jedoch gemischte Orts-/Zeitableitungen auf; das Verfahren ist also nicht mehr als explizit einzustufen und damit im Rahmen von Druck-Geschwindigkeitskorrekturverfahren nicht einsetzbar.

Zusätzlich zum beschriebenen Leapfrog-Verfahren wurde zur alternativen Verwendung das Adams-Bashforth-Verfahren umgesetzt. Dabei entfallen die Mittelungsschritte, der aus Stabilitätsgründen nicht zu überschreitende Zeitschritt wird damit aber etwa viermal kleiner (Werner [127]) und der Aufwand größer, weil bei jedem Zeitschritt konvektiver und diffusiver Term auf der Grundlage von n -tem und $n - 1$ -tem Zeitlevel ausgewertet werden. Üblicherweise wird dieses Verfahren bei der Berechnung stationärer Fälle bevorzugt (Ferziger und Peric [24]); weil in dieser Arbeit ausschließlich instationäre Probleme behandelt werden, erübrigt sich eine eingehendere Behandlung dieses Verfahrens.

Die Transportgleichungen werden mit demselben Zeitschritt integriert. Das Fortschreiben der Transportgrößen erfolgt in der gleichen Weise wie das Fortschreiben der Geschwindigkeiten, d.h. es wird dasselbe Leapfrog-Schema eingesetzt.

3.3.2. Implementierung der Operatoren

Das Rechengebiet wird zunächst in Gitterzellen unterteilt, die das Rechengebiet ganz ausfüllen und die bis auf Ecken und Kanten keine gemeinsamen Punkte haben. Es wird davon ausgegangen, daß die Zellen ein orthogonales Gitter bilden, obwohl diese Einschränkung hinsichtlich der Implementierung nicht notwendig ist. Bei der gewählten Art der Programmierung gibt es keine globalen Arbeitsschritte, es werden vielmehr alle Operationen auf die lokale Ebene der Zellen ausgelagert und die Effekte globaler Operationen durch sequentielle und möglicherweise auch parallele Anwendung aller betroffenen lokalen Operationen erzielt.

Zellen als lokale Programmelemente

Die Zellen des Rechengitters sind in der angewandten objektorientierten Programmierweise *Instanzen* einer Klasse `Zelle`. Die *Methoden* dieser Klasse umfassen im wesentlichen die Operatoren sowie Zugriffsfunktionen auf die Daten, die zu den an die Zelle anstoßenden Knoten (Gitterpunkte) gehören. Weil die einzelnen Knoten sinnvollerweise nicht einer einzigen Zelle zugeordnet werden können, sondern i.a. mehrere Zellen an sie anstoßen, ist es unvorteilhaft, den zu einem Knoten gehörenden Speicherplatz in der Klasse `Zelle` bereitzuhalten. Es muß vielmehr eine übergeordnete Speicherstruktur geben, die allen Instanzen der Klasse `Zelle`

zur Verfügung steht. Diese Struktur ist in einer Klasse **Speicher** realisiert; der Speicherplatz für die Werte der gesuchten Funktionen an den Gitterpunkten steht als lineare Liste bzw. Vektor zur Verfügung. Darauf wird mit den globalen Knotennummern zugegriffen. Eine Zelle verfügt also neben ihren Methoden über die globalen Nummern der an ihren Ecken liegenden Knoten zur Adressierung der entsprechenden Werte sowie über ihre Gitterkoordinaten im verwendeten orthogonalen Gitter (vgl. Abbildung 3.11). Obwohl die Werte der Druckfunktion in der Zellmitte (vgl. Abbildung 3.1 bzw. 3.4) gespeichert werden und somit einer Zelle zugeordnet werden könnten, wird auch hier je eine Druckpunktnummer in der Klasse **Zelle** gespeichert, über die auf die ebenfalls übergeordnet gespeicherten Funktionswerte zugegriffen werden kann.

Eine Instanz der Klasse **Zelle** enthält somit nur Information von rein lokalem Charakter. Es kann nur auf zu anliegenden Knoten gehörende Daten zugegriffen werden. Die Art und Weise, wie die Knoten nummeriert werden, ist damit noch nicht festgelegt. Die Datenstruktur entspricht im wesentlichen derjenigen, die üblicherweise bei Finite-Elemente-Verfahren verwendet wird: Die Punkte des verwendeten Gitters werden je durch eine Knotennummer gekennzeichnet; unter Verwendung dieser Nummer wird der räumliche Zusammenhang der Punkte durch eine Verknüpfungsliste hergestellt. Diese Information tragen hier die Objekte des Typs **Zelle**. Gegenüber einer einfachen i, j, k -Nummerierung der Knoten, bei der die Knotennummern direkt aus der Lage des Knotens im Gitternetz berechnet werden können, wird beim hier implementierten Programm zusätzlicher Speicherplatz benötigt. Bei einer Erweiterung des Programms auf adaptive Gitter ist die damit bezahlte Flexibilität bei der Nummerierung aber unabdingbar, denn die Berechnung einer Knotennummer aus der Lage der Zelle ist dann nicht mehr ohne weiteres möglich.

Auswertung der Operatoren

Alle benötigten Operatoren sind als Methoden der Klasse **Zelle** so programmiert, daß sie die Beiträge der Zelle zur Anwendung des jeweiligen Operators auf einen Vektor auf die entsprechenden Stellen im Ergebnisvektor addieren. Der Operator, der das für eine Zelle bewerkstelligt, wird hier als lokaler Operator bezeichnet. Die in den Impulsgleichungen auftretenden globalen Operatoren **M**, **C**(\vec{u}_h) und **D** sind wiederum jeweils auf eine Methode je Impulsgleichung aufgeteilt. So entspricht etwa die Anwendung der im Quelltext `getDv` genannten Methode der zur Zelle mit den Koordinaten i und j gehörenden Instanz der Klasse **Zelle** der Anwendung des dieser Zelle zugeordneten Teils des Operators **D** in der Impulsgleichung in y -Richtung (v bezeichnet die Geschwindigkeit in y -Richtung).

Das Ergebnis der Anwendung des ganzen (globalen) Operators **D** auf den Geschwindigkeitsvektor \vec{u} erhält man, indem jede der zwei bzw. drei den Impulsglei-

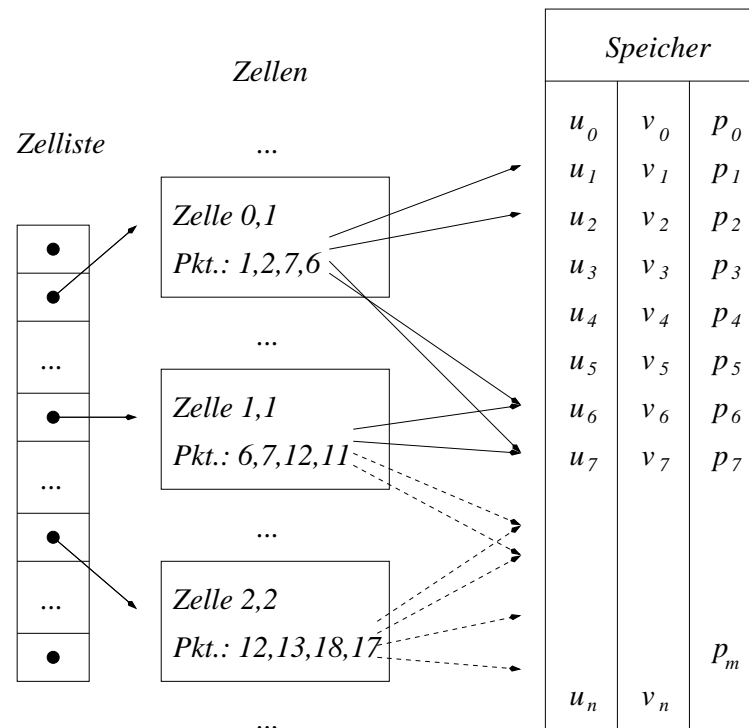


Abbildung 3.11.: Skizze zur Speicherstruktur und der Referenzierung: Die in der Klasse **Speicher** in Vektoren gespeicherten Variablen werden über globale Knotennummern adressiert, die in den Instanzen der Klasse **Zelle** gespeichert sind. Dargestellt ist die Adressierung der Geschwindigkeitswerte. Die Adressierung der Druckwerte erfolgt prinzipiell gleich, jedoch ist die Nummerierung eine andere.

chungen zugeordneten Methoden jeweils in jeder Instanz von **Zelle** angewandt wird und das Ergebnis am dafür bestimmten Speicherplatz aufsummiert wird. Jede Methode als Teiloperator für sich betrachtet entspricht einer Matrix voller Größe, die überall Nulleinträge hat außer an den Stellen, die zu den an ihr beteiligten Knoten gehören; in den Spalten entspricht das den Unbekannten an den Knoten, an denen die Zelle beteiligt ist, in den Zeilen den Impulsgleichungen, die an den an sie grenzenden Knoten aufgestellt werden. Die Summe der Matrizen der Teiloperatoren über die Zellen und die Impulsgleichungen ergibt die Gesamtoperatoren \mathbf{M} , $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ und \mathbf{D} . In Abbildung 3.12 ist dieses Prinzip als Skizze veranschaulicht. Es ist zu bemerken, daß das Aussehen der auftretenden Matrizen maßgeblich vom Schema der Nummerierung der Knoten abhängt; die in der Skizze auftretende Gleichmäßigkeit ist i.a. nicht gegeben.

In gleicher Weise ist der Operator \mathbf{M}^T umgesetzt: Auch dabei handelt es sich um eine Methode der Klasse **Zelle**, die rein lokal wirkt.

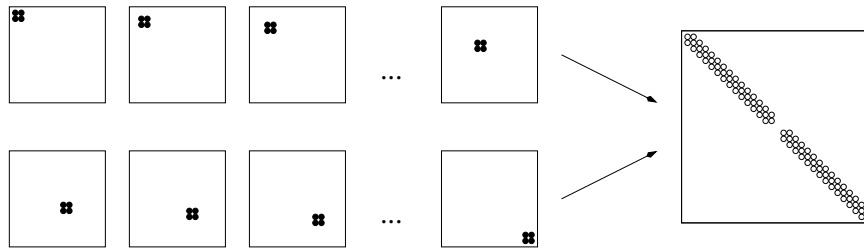


Abbildung 3.12.: Skizze zum Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Operatoren; Beispiel: \mathbf{D} (zweidimensional), die Kringel bezeichnen nicht Matrixeinträge, sondern markieren die Stellen, an denen sich beispielsweise Einträge befinden könnten.

Der Vektor $\mathbf{M}^T \mathbf{S} \vec{u}_h$ wird also ermittelt, indem alle Zellen aufgesucht und zunächst alle Teiloperatoren von \mathbf{D} und $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ auf \vec{u}_h angewandt werden. Dann werden erneut alle Zellen aufgesucht und \mathbf{M}^T auf das gerade berechnete $\mathbf{S} \vec{u}_h$ angewandt. Für $\mathbf{M}^T \mathbf{M} \vec{p}_h$ wird analog verfahren. Damit stehen die zur Zeitintegration benötigten Ausdrücke nach jeweils zwei Durchläufen durch alle Zellen des Rechengebiets zur Verfügung.

Bei dieser Art der Programmierung werden die Matrizen der globalen Operatoren nicht explizit berechnet. Auf Algorithmen, die zur Lösung der Poissongleichung in Frage kommen, wirkt sich das insofern aus, als daß nur solche Verfahren eingesetzt werden können, bei denen die Matrixeinträge nicht explizit benötigt werden. Beim verwendeten Konjugierte-Gradienten-Verfahren etwa sind nur die Ergebnisse der Anwendung der Matrix des zu lösenden Gleichungssystems auf bestimmte Vektoren zu berechnen. Das SOR-Verfahren oder ein algebraisches Mehrgitterverfahren können aus diesem Grund hier nicht eingesetzt werden.

Randbehandlung

Liegt eine Zelle am Rand des Rechengebiets, so ändern sich dadurch einzelne Methoden, während andere gleich bleiben. Bei festen Rändern etwa bleibt \mathbf{M}^T unverändert, bei \mathbf{D} hingegen sind Modifikationen vorzunehmen. Ebenfalls unverändert bleiben die Informationen über die Nummern der angrenzenden Knoten. Es bietet sich also vor dem Hintergrund der angestrebten objektorientierten Programmierweise an, von der Klasse `Zelle` eine Klasse abzuleiten, in der nur jeweils die veränderten Methoden überschrieben werden. Man spricht von *virtueller Vererbung*. Genau wie im von Griebel et al. [35] beschriebenen Algorithmus werden dabei die verschiedenen Randbedingungen vorgesehen. Sie sind alle in einer Zellklasse zusammengefaßt und werden durch ein sogenanntes *Flagfeld* voneinander unterschieden. Zellen, bei denen ein solches Überschreiben nötig ist, werden hier als Randzellen bezeichnet.

Hindernisstrukturen werden wie bei *Nast++* durch Hinderniszellen abgebildet. Auf dem von Hinderniszellen eingenommenen Raum werden keine Gleichungen gelöst; bei Hinderniszellen sind die Methoden, die die Anwendung der Operatoren repräsentieren, einfach leer.

3.3.3. Globale Programmstrukturen

Wie im vorangegangenen Abschnitt schon erwähnt, müssen immer dann, wenn das Ergebnis der Anwendung eines der implementierten Operatoren auf einen Vektor benötigt wird, einmal alle Zellen des Rechengebiets durchlaufen werden. Weil das im Programmablauf häufig geschieht, muß versucht werden, diese Durchläufe möglichst effizient umzusetzen.

Zunächst wurde eine Liste mit Zellzeigern, d.h. mit Zeigern auf die benötigten Instanzen der Klasse `Zelle` angelegt. Die Durchläufe aller Zellen werden dann als Durchläufe der Liste realisiert. Es zeigt sich aber sogleich, daß das Programm in dieser Struktur nur relativ langsam läuft. Architekturspezifische Compileroptionen, die den Programmablauf beschleunigen, wirken kaum. Das liegt daran, daß bei einem Großteil der Rechenarbeit die benötigten Speicheradressen nicht berechnet werden, sondern aus den Instanzen von `Zelle` abgerufen werden müssen. Es können daher weder sogenannte *Cache-Effekte* genutzt werden noch kann das Programm vektorisiert bearbeitet werden. Selbst wenn der Speicher für die Werte der gesuchten Funktionen so angelegt ist, daß Werte von benachbarten Punkten an benachbarten Speicherplätzen abgelegt werden, ist kaum eine Beschleunigung des Programmablaufs festzustellen, weil die Speicheradressen auch dann den Instanzen der Klasse `Zelle` als Knotennummer entnommen werden müssen.

Abhilfe wird geschaffen durch die Einführung der Klasse `Hyperzelle`. In einer Hyperzelle werden benachbarte Zellen zusammengefaßt und die Speicherplätze der Werte der gesuchten Funktionen im Gebiet der Hyperzelle in der von anderen Programmen mit orthogonalen Gittern bekannten i, j, k -Sortierung gespeichert. Die Methoden, die die Anwendung der Operatoren repräsentieren, werden so überschrieben, daß jetzt anstelle des Beitrags einer Zelle zum Ergebnisvektor der Beitrag aller an der Hyperzelle beteiligten Zellen berechnet und zum Ergebnisvektor addiert wird. Dabei können im Inneren der Hyperzelle verzweigungsfreie Schleifen eingesetzt werden, die dann vektorisiert werden können. Weil an den Rändern die Randbedingungen durch Programmverzweigung unterschieden werden, ist darauf zu achten, daß die Hyperzellen keine Randzellen enthalten, denn sonst ginge die Verzweigungsfreiheit des Programms verloren. Ein Beispiel für die Lage einer Hyperzelle in einem Rechengebiet, das Hindernisse enthält, zeigt Abbildung 3.13.

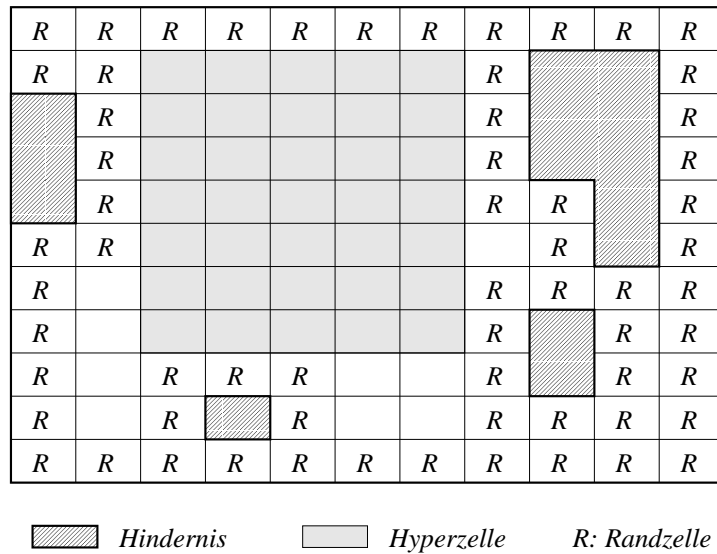


Abbildung 3.13.: Skizze zur möglichen Lage einer Hyperzelle in einem Rechengebiet mit Hindernissen

Bei Verwendung der Hyperzellen sind vor dem Programmlauf folgende Maßnahmen zu treffen:

- Zunächst müssen zusammenhängende, rechteckige bzw. quaderförmige Gebiete von Zellen, die weder Hindernis- noch Randzelle sind, detektiert werden, vgl. Abbildung 3.13.
- Die zu einem solchen Gebiet gehörenden Zellen werden zu Hyperzellen zusammengefaßt: Sie werden aus der Durchlaufliste gestrichen, dafür wird eine Hyperzelle mit den entsprechenden Lage- und Größenparametern in diese eingesetzt, vgl. Abbildung 3.14.
- Die Speicherplätze der betroffenen Rechenpunkte werden umsortiert, so daß eine reine i, j, k -Sortierung vorliegt, siehe beispielsweise Abbildung 3.15.

Von den Veränderungen durch die Ummummerierung können auch Zellen betroffen sein, die keine Hyperzellen berühren. Abbildung 3.15 zeigt eine Skizze zur Speicherverwaltung ohne Verwendung der Hyperzellen und zu den Veränderungen bei deren Einführung.

Die Zusammenfassung von Zellen zu einer Hyperzelle lohnt sich praktisch immer, besonders deutlich wird die Rechenzeiterparnis bei größeren, zusammenhängenden Gebieten ohne Hindernis- und Randzellen. Durch Vergleich der benötigten CPU-Zeiten auf einem Arbeitsplatzrechner (CPU: Pentium 3, 800 MHz) zur Berechnung eines Zeitschritts mit jeweils 200 Iterationen des Konjugierte-Gradienten-

3. Ein impuls- und energierhaltendes Finite-Volumen-Verfahren

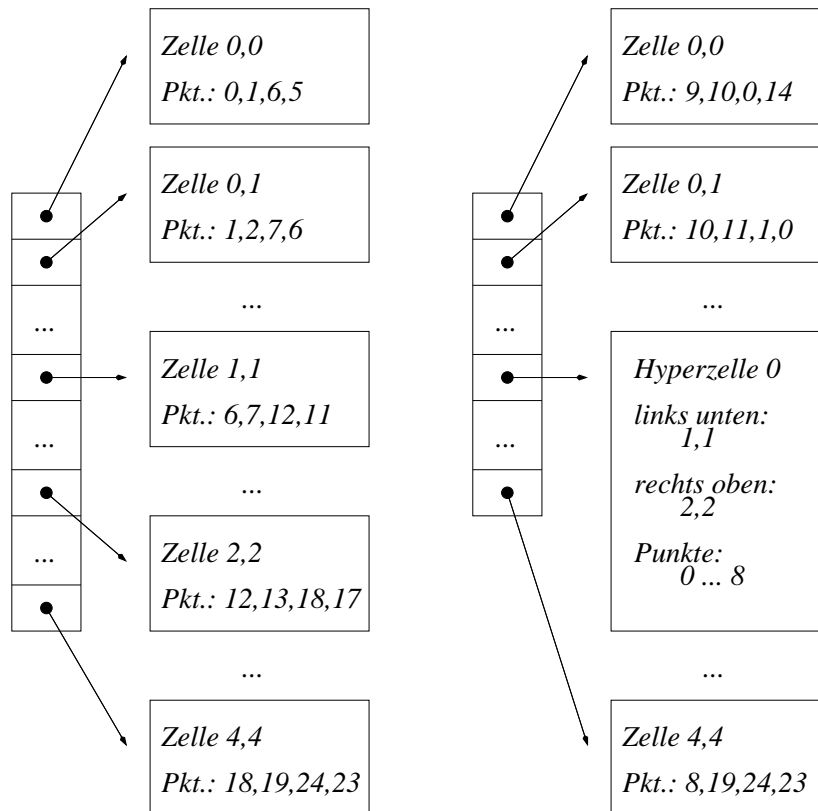


Abbildung 3.14.: Skizze zur Speicherorganisation ohne (links) und mit (rechts) Verwendung der Hyperzellen

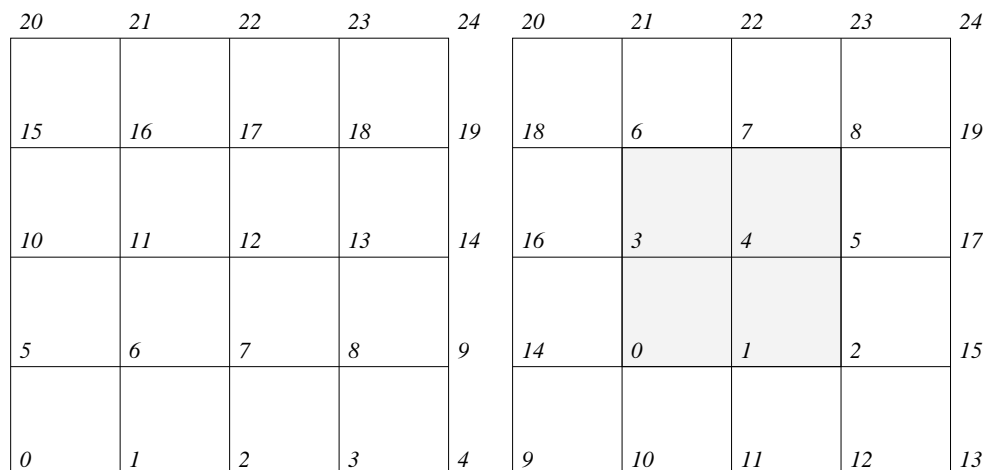


Abbildung 3.15.: Mögliche Nummerierung der Knoten für ein 4×4 -Gebiet vor (links) und nach (rechts) der Umnummerierung in Zusammenhang mit der Bildung der Hyperzellen (vgl. Text)

Verfahrens bei der Lösung der Poissongleichung, kann ein Anhaltspunkt für die Rechenzeiterparnis bei der Verwendung von Hyperzellen gegeben werden. Die Testrechnung, Teil einer vollständigen Simulation einer turbulenten Kanalströmung in einem Kanal mit quadratischem Querschnitt, wurde auf Gittern der Dimension $16 \times 16 \times 48$ bis $64 \times 64 \times 216$ durchgeführt. Im Hinblick auf die Simulation turbulenter Strömungen werden dabei realistische Auflösungen untersucht. Die Rechenzeit wird durch die Verwendung der Hyperzellen um bis zu einem Faktor 3 reduziert. Wie erwartet, fällt sie bei den größeren Gittern deutlich geringer aus. Tabelle 3.1 informiert über die beobachteten Rechenzeiten im einzelnen.

Tabelle 3.1.: Vergleich der Rechenzeiten mit Verwendung bzw. ohne Verwendung von Hyperzellen (CPU-Zeit in Sekunden, Faktor der Beschleunigung)

Auflösung	mit Hyperzellen	ohne Hyperzellen	Beschleunigung
$16 \times 16 \times 48$	13.6	21.8	1.6
$32 \times 32 \times 96$	78.8	173.2	2.2
$48 \times 48 \times 144$	238.5	628.5	2.6
$64 \times 64 \times 192$	542.1	1476.0	2.7

3.3.4. Zusammenfassung wichtiger Eigenschaften des Verfahrens

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren zur numerischen Simulation von Strömungen ist seinem Wesen nach ein Finite-Volumen-Verfahren. Es wurden jedoch auch wichtige Eigenschaften von Finite-Elemente-Verfahren adaptiert. Die wichtigste davon ist, daß eine Möglichkeit zur kontinuieritätserhaltenden Interpolation der berechneten diskreten Geschwindigkeitswerte existiert. Die Verwandtschaft mit Finite-Elemente-Verfahren zeigt sich auch in der Art der Programmierung. Objektorientierung und Denkweise der Finite-Elemente-Verfahren gehen bei der Grundversion des Programms Hand in Hand. Die hier verwendeten Zellen eines orthogonalen Gitters haben im wesentlichen dieselbe Funktion wie finite Elemente. In dieser Betrachtungsweise verliert das orthogonale Gitter aber den großen Vorteil der schnellen Laufzeit, die durch die Ausnutzung der Regelmäßigkeit erreicht werden kann. Erst die Zusammenfassung von Zellen zu den sogenannten Hyperzellen bringt wieder orthogonale Gitter hervor, deren Vorteile dann genutzt werden können. Die Methode kombiniert damit beide Betrachtungsweisen. Es ist beispielsweise denkbar, mit dem Verfahren randangepaßte Gitter mit orthogonalen Gittern im Inneren zu verbinden.

3.4. Simulation turbulenter Strömungen

Technisch relevante Strömungen sind häufig turbulent. Die Berechnung einer guten Näherung eines solchen Strömungsfelds muß damit den Eigenschaften der turbulenten Strömungen Rechnung tragen, die durch eine hohe Reynoldszahl gekennzeichnet sind. Für die hier betrachteten Rohr- bzw. Rechteckkanalströmungen wird als Umschlagpunkt von Laminarität zu Turbulenz eine Reynoldszahl von $Re \approx 2300$ angegeben, vgl. Prandtl et al. [86]. Diese *Kanalreynoldszahl* ist gebildet mit dem *hydraulischen Durchmesser*

$$d_h := \frac{4 \cdot \text{Querschnittsfläche}}{\text{benetzter Umfang}} \quad (3.45)$$

und der mittleren Fließgeschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung. In dieser Arbeit werden Fälle turbulenter Strömungen behandelt, bei denen die Kanalreynoldszahl zwischen dem Umschlagpunkt und $Re \approx 10000$ liegt.

Auch turbulente Strömungen werden durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Mit diesem Gleichungssystem werden solche Fälle gut modelliert, die die Bedingung erfüllen, daß die freie Weglänge eines Moleküls im Strömungsfeld klein ist gegen die Abmessungen der vorhandenen Strukturen; im Fall der turbulenten Strömungen sind das die kleinsten Wirbel mit charakteristischen Abmessung des *Kolmogorowschen Mikromaßes* η (erste Kolmogorowsche Ähnlichkeitshypothese [53]). Für diejenigen Strömungen, die, eingeschränkt durch die verfügbare Rechnerleistung, zur Zeit durch numerische Lösung des Differentialgleichungssystems auf hinreichend feinem Gitter simuliert werden können, ist diese Bedingung erfüllt, vgl. Breuer [8]. Diese Art der Simulation wird als *Direkte Numerische Simulation* (DNS) bezeichnet und hat einen sehr großen Bedarf an Speicher und Rechenzeit, weil auf einem Gitter gerechnet werden muß, das so fein ist, daß die Wirbel von der Größe des genannten Kolmogorowschen Mikromaßes noch aufgelöst werden.

Für einen Kanal mit einem rechteckigen Querschnitt mit den Abmessungen $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ und der Länge 8 cm , der von Wasser (kinematische Zähigkeit bei 20°C , $\nu = 1.004 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, Prandtl et al. [86]) mit einer Geschwindigkeit von etwa 0.4 m durchströmt wird, ergibt das eine Kanalreynoldszahl von $Re \approx 5300$. Mit der *Nikuradse-Näherung* (nach Prandtl et al. [86]) erhält man für die Druckdifferenz zum Antrieb dieser Strömung $\Delta p \approx 18 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Als *Dissipationsrate* in diesem Kanal, also als auf Masse und Zeitintervall bezogene Energie, die dissipiert, erhält man mit dem Volumenstrom \dot{V} , der Dichte $\rho = 998,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (vgl. Prandtl et al. [86]) und dem Volumen des Kanalstücks V die Dissipationsrate ϵ zu

$$\epsilon = \frac{\Delta p \cdot \dot{V}}{\rho \cdot V} \approx 0.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}. \quad (3.46)$$

Das Kolmogorowsche Mikromaß berechnet sich damit zu

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (3.47)$$

(Pope [85]). Löst man dieses Maß mit nur 5 Gitterpunkten in jeder Raumrichtung auf und verwendet äquidistante Gitterabstände, so erhält man als benötigte Anzahl an Gitterpunkten $n \approx 5 \cdot 10^9$.

Durch geschickte Wahl der Gitterweiten in den verschiedenen Raumrichtungen kann diese Zahl um Größenordnungen reduziert werden. So führt z.B. Friedrich [26] eine DNS eines vergleichbaren Falls mit etwa 10^7 Gitterpunkten durch und Gavrilakis [27] kommt bei der Simulation der Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt mit etwa $2 \cdot 10^7$ Gitterpunkten aus, obwohl sein Kanal länger ist. Beide Autoren verwenden Diskretisierungsverfahren, die in Raum und Zeit genau von zweiter Ordnung sind, wie das in dieser Arbeit vorgestellte.

Gitterpunkte können in den zitierten Fällen hauptsächlich dadurch eingespart werden, daß an den Rändern des Berechnungsgebiets, also an den Kanal- bzw. Rohrwänden, Gitterpunkte konzentriert werden, während im Inneren relativ weite Gitterabstände genommen werden. Dadurch wird sichergestellt, daß in denjenigen Gebiete, die für die Erzeugung und den Energiehaushalt der Turbulenz von größter Bedeutung sind, die physikalischen Phänomene hinreichend gut auf dem Gitter wiedergegeben werden. Dieses Einsparpotential kann für die dispersen Strömungen nicht genutzt werden, weil dabei überall im Rechengebiet Ränder der flüssigen Phase auftreten können, die gut genug aufgelöst werden müssen. Die Gitterpunktzahl würde deshalb bei einer direkten numerischen Simulation der dispersen turbulenten Strömungen sehr hoch werden. Eine Modellierung der Turbulenz ist also notwendig.

Die wichtigsten, heute verfügbaren Verfahren zur Turbulenzmodellierung sind entweder den Filterverfahren (*Large-Eddy-Verfahren*) oder Verfahren, die auf der Lösung der *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen* basieren, zuzuordnen. Letztere, für die die Abkürzung RANS („Reynolds-averaged Navier-Stokes“) gebräuchlich geworden ist, erfordern wenig Rechenleistung und Speicherplatz, weil die statistisch über einen langen Zeitraum gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen dabei durch Lösung einer oder zweier weiterer Gleichungen geschlossen werden, wobei man mit relativ wenigen Gitterpunkten auskommt. Ein prinzipielles Problem bei dieser Art von Verfahren ist, daß die Modellierung der Turbulenz dabei alle räumlichen Skalen umfassen muß. Wie Breuer [8] referiert, gibt es sogar prinzipielle Zweifel daran, ob ein solches Modell überhaupt in konsistenter Weise aufgestellt werden kann. Für den praktischen Einsatz haben sich diese modellbedingten Unzulänglichkeiten aber in vielen Fällen als nicht sehr störend erwiesen. Durch die Einführung geeigneter Wandapproximationen bei der Modellierung können mit solchen Verfahren Ergebnisse erzielt werden,

die den Ansprüchen vieler Anwender genügen, was sich an der Tatsache zeigt, daß diese Art der Turbulenzmodellierung mittlerweile bei den gebräuchlichen, kommerziell vertriebenen Programmen (z.B. CFX 5 von AEA Technology) zum Standard gehört. Im Fall komplexer Geometrien, wie sie bei dispersen Strömungen prinzipiell auftreten, muß ihr Einsatz aber auch bei Rechnungen auf sehr feinen Gittern kritisch bewertet werden.

Large-Eddy-Verfahren dagegen basieren auf einer räumlichen Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen. Die Modellierung betrifft damit nur die kleinen Skalen, die vom Rechengitter nicht mehr abgebildet werden, während die großen Skalen auf diesem direkt berechnet werden. Diejenige räumliche Abmessung, die „große“ von „kleinen“ Skalen trennt, wird durch die Filterweite bestimmt. Sie ist im Verhältnis zur eingesetzten Gitterweite geeignet zu wählen. Da die Modellierung sich nur auf einen Teil des Größenspektrums der Skalen erstreckt, kann sie gezielter erfolgen als bei den RANS-Verfahren; ihre Qualität steht und fällt mit der Gitterweite. Für immer kleiner werden Gitter- und damit Filterweiten geht die Large-Eddy-Simulation (LES) damit in die DNS über.

Neben den Nachteilen der RANS-Verfahren, die gerade im Fall der detaillierten Betrachtung disperser Strömungen auftreten, hat insbesondere letztere Eigenschaft der Large-Eddy-Verfahren dazu geführt, daß diesen in der vorliegenden Arbeit der Vorzug gegeben wird.

3.4.1. Beschreibung des verwendeten LES-Verfahrens

Innerhalb der Klasse der Large-Eddy-Verfahren gibt es eine Reihe von unterschiedlichen Verfahren, die aber alle auf der Filterung der zu lösenden Gleichungen und der Modellierung des dabei entstehenden Feinstrukturterms beruhen. Hier werden kurz diejenigen Aspekte dargestellt, die für das spezielle eingesetzte Verfahren von Bedeutung sind.

Prinzip der Large-Eddy-Verfahren

Die DNS ist deshalb so aufwendig, weil alle relevanten, d.h. signifikant energie-tragenden Strukturen einer Strömung aufgelöst werden müssen. Wie aus Abbildung 3.16 hervorgeht, bedeutet das nichts weniger als die räumliche Auflösung von Strukturen, deren Abmessungen sich um bis zu 6 Größenordnungen unterscheiden. Kosten entstehen dadurch, daß neben den größten Skalen, die im Grenzfall durch die Abmessung des Berechnungsgebiets gegeben sind, kleinskalige Erscheinungen in der Rechnung wiedergegeben werden müssen. Die den Large-Eddy-Verfahren zugrundeliegende Idee besteht darin, daß die kleinskaligen Strukturen nicht mehr mit Gitterpunkten aufgelöst werden, sondern nur in ihrem

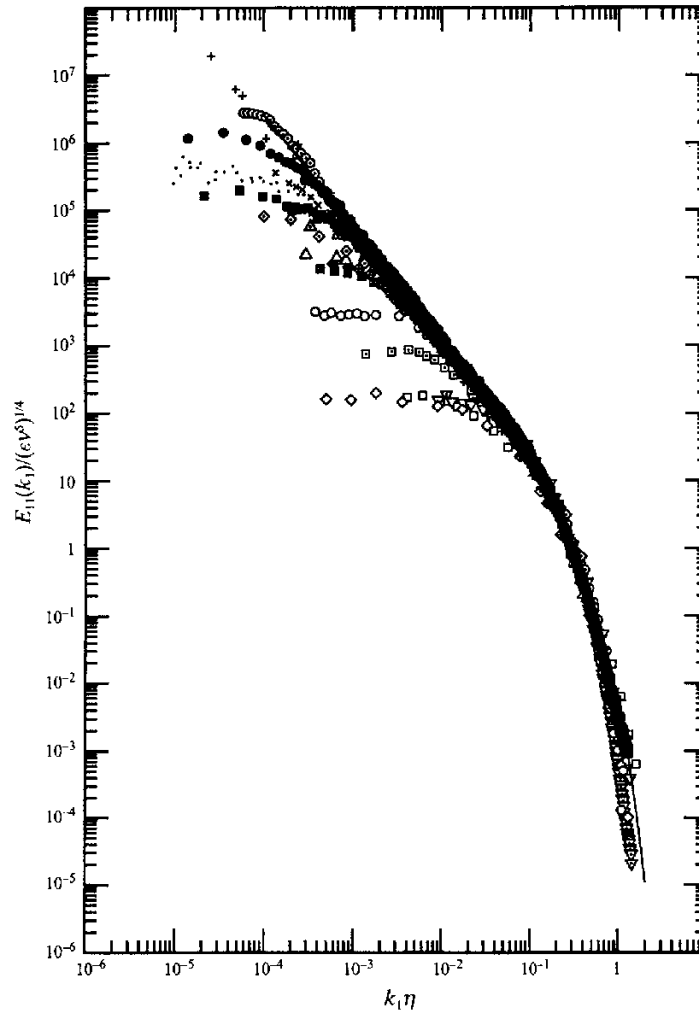


Abbildung 3.16.: Kinetsche Energie aufgetragen über der Wellenzahl in der Einheit des Kolmogorowschen Mikromaßes η . Daten aus Messungen und Rechnungen verschiedener Autoren. Aus Saddoughi und Veeravalli [94].

Effekt auf die großen Skalen über die Modellierung eines neu zum Gleichungssystem der Navier-Stokes-Gleichungen hinzukommenden Terms in die Rechnung einfließen.

Dieses Vorgehen kann formal mit einer Filterung begründet werden, mit der die Grobstruktur, die auf dem Gitter abgebildet werden kann, von der Feinstruktur, die es zu modellieren gilt, getrennt wird. Man wendet dazu auf das Differentialgleichungssystem einen *Filteroperator* folgender Form an:

$$\bar{u}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}) \cdot u(\vec{x} - \vec{r}, t) d\vec{r} \quad (3.48)$$

3. Ein impuls- und energieerhaltendes Finite-Volumen-Verfahren

Man erhält mit $\bar{u}(\vec{x}, t)$ die gefilterte Entsprechung zur Funktion $u(\vec{x}, t)$. Genauso werden im folgenden die gefilterten Größen gekennzeichnet durch das Symbol der entsprechenden Ausgangsgröße, das mit einem Querstrich $\bar{}$ versehen ist. In dem *Faltungsintegral* in Gleichung (3.48) ist $G(\vec{r})$ die Filterfunktion, die auch *Kern* genannt wird. Sie kann beispielsweise folgende Form haben:

$$G_{gau}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{6}{\pi\Delta^2}} e^{-6\vec{r}^T\vec{r}/\Delta^2} \quad (3.49)$$

Den dadurch beschriebenen Filter nennt man *Gaußfilter*. Die Filterfunktionen sind gekennzeichnet durch den Parameter Δ , der die sogenannte Filterweite repräsentiert. Neben dem Gaußfilter gibt es eine Reihe weiterer häufig in Zusammenhang mit der Large-Eddy-Simulation genannter Filtertypen, von denen die wichtigsten der *Hutfilter* und der *Tiefpaßfilter* sind. Für eine ausführliche Diskussion der Filtereigenschaften sei auf Breuer [8] und insbesondere Pope [85] verwiesen.

Wendet man irgendeinen Filteroperator, dessen Filterfunktion nicht bekannt zu sein braucht, der aber zu den Differentialoperatoren ein kommutatives Verhalten aufweist,

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \text{für irgendeine Funktion } f, \quad (3.50)$$

auf die Navier-Stokes-Gleichungen an, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_i} + \bar{f}_j \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.52)$$

Um die Lesbarkeit der folgenden Darstellung zu verbessern, wurde zur *Einsteinischen Summenkonvention* (vgl. Bronstein et al. [9], Abschnitt 4.3.1) übergegangen, die von den meisten Autoren in diesem Zusammenhang bevorzugt wird. In Gleichung (3.51) ist τ_{ij}^r der sogenannte *Residuumsspannungstensor*; über

$$\tau_{ij}^r := \tau_{ij}^{FS} - \frac{1}{3} \tau_{kk}^{FS} \cdot \delta_{ij} \quad (3.53)$$

steht er mit dem sogenannten *Feinstrukturspannungstensor* τ_{ij}^{FS} in Zusammenhang. Dieser ist definiert als die Differenz zwischen dem Produkt der gefilterten Geschwindigkeiten und dem gefilterten Produkt der (ungefilterten) Geschwindigkeiten:

$$\tau_{ij}^{FS} := \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.54)$$

\bar{p} in Gleichung (3.51) steht für den gefilterten Druck, dem der isotrope Anteil des Residuumsspannungstensors, $\frac{1}{3} \tau_{kk}^{FS}$, zugeschlagen wurde.

Bis auf den Term $\frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_i}$ entsteht bei der Filterung ein Gleichungssystem in den gefilterten Größen, das dem ursprünglichen in den ungefilterten gleich ist (vgl. auch Pope [85]). Ähnlich wie bei den RANS-Verfahren wird das Gleichungssystem durch Modellierung dieses Terms geschlossen.

Beim verwendeten Finite-Volumen-Verfahren, bei dem die gesuchten Funktionen an diskreten Stellen im Raum berechnet werden, wird das Anwenden des Diskretisierungsschemas allein als Filter betrachtet, der als *impliziter Filter* bezeichnet wird. Rogallo und Moin [91] demonstrieren die Wirkungsweise der impliziten Filterung am eindimensionalen Beispiel einer zentralen Differenzenapproximation mit räumlich zweiter Ordnung Genauigkeit für die Ableitung einer Variablen, die hier mit ϕ bezeichnet wird. Die Differenzenapproximation ist hierbei äquivalent der exakten Ableitung der gefilterten Variablen gemäß:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \int_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} \phi(\xi) d\xi \right] = \left. \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right|_i \quad (3.55)$$

Dadurch wird die Filterwirkung der Differenzenapproximation direkt deutlich (vgl. Breuer [8]). Als Filter wird der Hutfilter verwendet, dessen Kern durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$G_{hut}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } |r| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.56)$$

Die erwähnten Filtertypen gehören zum sogenannten „Convolution-Type“, einer bestimmten Klasse von Filtern. Die Filter dieser Klasse haben die Eigenschaft, daß sie zu den Differentialoperatoren ein kommutatives Verhalten aufweisen, wenn die Filterweite konstant ist, wie Dahlström [15] zeigt. Bei der Verwendung einer adaptiven Gitterweite ist die Filterweite, die ja bei der impliziten Filterung der Gitterweite entspricht, nicht mehr konstant. Ghosal und Moin [29] schlagen hier die Verwendung einer mittels einer nichtlinearen Transformationsvorschrift modifizierten Filterfunktion vor. Eine einfachere Möglichkeit haben Iovieno und Tordella [45] gefunden: Sie geben Berechnungsvorschriften für Terme an, mit denen das in der genannten Weise implizit gefilterte Gleichungssystem zu ergänzen ist; es kann gezeigt werden, daß diese numerisch leicht zugänglichen Terme die Fehler weitgehend aufheben.

Das Smagorinsky-Modell

Das älteste Modell, mit dem das auf diese Weise erhaltene Gleichungssystem geschlossen werden kann, ist das lineare Wirbelviskositätsmodell aus dem Jahre 1963, das auf Smagorinsky [99] zurückgeht. Über

$$\tau_{ij}^r = 2 \cdot \nu_t \cdot \bar{S}_{ij} \quad (3.57)$$

wird dabei τ_{ij}^r modelliert mit dem (implizit) gefilterten viskosen Spannungstensor, der sich aus den (implizit) gefilterten Geschwindigkeiten zu

$$\bar{S}_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.58)$$

berechnet. ν_t ist die *Wirbelviskosität* und errechnet sich mit

$$\|\bar{S}\| := \sqrt{2(\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})} \quad (3.59)$$

nach Smagorinsky [99] zu

$$\nu_t = (C_S \cdot \Delta)^2 \cdot \|\bar{S}\|. \quad (3.60)$$

C_S ist der *Smagorinsky-Koeffizient*, der als Parameter der Rechnung vorgegeben werden muß. Mit Δ wird die Filterweite des (impliziten) Filters bezeichnet, die der Gitterweite entspricht. Der gesuchte Term τ_{ij}^r wird also mit

$$\tau_{ij}^r = 2 \cdot (C_S \cdot \Delta)^2 \cdot \|\bar{S}\| \cdot \bar{S}_{ij} \quad (3.61)$$

modelliert, wobei alle vorkommenden Größen direkt aus dem (implizit) gefilterten Geschwindigkeitsfeld berechenbar sind. Je nach Anwendungsfall haben sich für C_S Werte zwischen $C_S \approx 0.12$ und $C_S \approx 0.17$ als am geeignetsten erwiesen.

Für die Berechnung beliebiger Strömungsfelder kann das Verfahren nur bedingt eingesetzt werden, weil der im untersuchten Fall geeignetste Koeffizient C_S im allgemeinen nicht bekannt ist. Jimenez und Moser [47] beispielsweise zeigen sogar, daß es bei vielen turbulenten Strömungen keine „richtige“ Wahl von C_S geben kann. In Gebieten bzw. Teilgebieten mit laminarer Strömung wird diese zudem prinzipiell falsch berechnet. Zwar existieren Arbeiten, mit denen für bestimmte geometrische Konstellationen, z.B. die ebene Spaltströmung, etwa in Abhängigkeit vom Wandabstand geeignete Werte für C_S angegeben werden (Moin und Kim [76]), jedoch befriedigt die Beschränkung auf bestimmte Geometrien keineswegs. Dadurch motiviert wurde daran gearbeitet, ein Modell zu entwickeln, mit dem diese Beschränkung aufgehoben werden kann. Die mit dem heutigen Kenntnisstand zu verwirklichenden Modelle werden als *dynamische Smagorinsky-Modelle* bezeichnet. Basierend auf einer Grundform, werden sie je nach Anwendung variiert.

Das dynamische Smagorinsky-Modell

Es wird ein Modell benötigt, mit dem der Smagorinsky-Koeffizient nicht mehr als Parameter in die Rechnung eingeht, sondern in Abhängigkeit vom momentanen und lokalen Strömungsfeld bestimmt wird. Grundlage der Erweiterung des Smagorinsky-Modells ist die Anwendung eines zweiten Filters, des sogenannten *Testfilters* $\hat{G}(\vec{r})$ mit der Filterweite $\hat{\Delta}$ auf die Gleichungen des Gleichungssystems.

$\hat{\Delta}$ wird dabei üblicherweise als $2 \cdot \Delta$ genommen. In dieser Arbeit wird als Testfilter der bereits erwähnte Gaußfilter (siehe Gleichung (3.49)) eingesetzt, der zu keinerlei kommutativen Fehlern führt. Die durch Anwendung des Testfilters erhaltenen Größen werden mit einem Dach $\hat{}$ gekennzeichnet. Die Anwendung des Filters auf das bereits durch die Diskretisierung gefilterte Gleichungssystem führt analog Gleichung (3.54) zu dem Ausdruck

$$T_{ij}^{TF} := \widehat{\hat{u}_i \hat{u}_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j. \quad (3.62)$$

Mit dem Residuumsstress-Tensor bezüglich des Testfilters T_{ij}^r läßt sich damit ähnlich zu Gleichung (3.61) schreiben:

$$T_{ij}^r := T_{ij}^{TF} - \frac{1}{3} T_{kk}^{TF} \cdot \delta_{ij} = 2 \cdot c_S \cdot \hat{\Delta}^2 \cdot \|\hat{S}\| \cdot \widehat{\bar{S}}_{ij} \quad (3.63)$$

c_S ist der dynamisch berechnete Smagorinsky-Koeffizient. Er ist eine Funktion des Orts und der Zeit. c_S entspricht formal dem Quadrat von C_S in Gleichung (3.61). Durch die Berechnung von c_S und Verwendung der Gleichung

$$\widehat{\tau}_{ij}^r = \widehat{\tau}_{ij}^{FS} - \frac{1}{3} \widehat{\tau}_{kk}^{FS} \cdot \delta_{ij} = 2 \cdot c_S \cdot \Delta^2 \cdot \|\widehat{S}\| \cdot \widehat{\bar{S}}_{ij}, \quad (3.64)$$

die aus Gleichung (3.53) bzw. (3.61) durch Anwendung des Testfilters hervorgeht, wird damit der bei der Filterung neu zum Gleichungssystem hinzukommende Term τ_{ij}^r modelliert. 1991 stellten Germano et al. [28] fest, daß sich von T_{ij}^{TF} ein Anteil

$$L_{ij} := \hat{u}_i \hat{u}_j - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} \quad (3.65)$$

abspalten läßt, der aus den ursprünglich auf dem Gitter vorhandenen Geschwindigkeiten \bar{u}_i und den gefilterten Geschwindigkeiten \hat{u}_i berechnet werden kann. Ergänzt man positiv und negativ um $\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \hat{u}_i \hat{u}_j - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}) \\ &= -T_{ij}^{TF} + \widehat{\tau}_{ij}^{FS}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Entdeckung dieses Zusammenhangs stellte für die Entwicklung der modernen Large-Eddy-Verfahren einen Durchbruch dar.

$$L_{ij} = \widehat{\tau}_{ij}^{FS} - T_{ij}^{TF} \equiv \hat{u}_i \hat{u}_j - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} \quad (3.67)$$

wird daher als *Germano-Identität* bezeichnet. L_{ij} ist, weil in der Rechnung die Geschwindigkeiten nach Gitterfilterung und nach Testfilterung vorhanden sind bzw. bestimmt werden können, relativ leicht numerisch zugänglich und kann mit der Germano-Identität dazu benutzt werden, um zwischen zu modellierender Feinstruktur und den mit dem Dach gekennzeichneten Testfiltergrößen einen Zusammenhang herzustellen. Um das gesuchte τ_{ij}^r mit einem geeigneten c_S berechnen zu können, wird dazu die Differenz zwischen Gleichung (3.63) und Gleichung (3.64)

gebildet:

$$L_{ij}^a := L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \cdot \delta_{ij} = 2 \cdot c_S \cdot M_{ij} \quad (3.68)$$

In M_{ij} sind dabei die Ausdrücke auf der rechten Seite der beiden Gleichungen wie folgt zusammengefaßt:

$$M_{ij} := \|\widehat{\bar{S}}\| \cdot \widehat{\bar{S}}_{ij} - \frac{\Delta^2}{\widehat{\Delta}} \cdot \|\bar{S}\| \cdot \bar{S}_{ij} \quad (3.69)$$

Gleichung (3.68) stellt ein überbestimmtes System dar. Lilly [58] hat 1992 vorgeschlagen, c_S so zu bestimmen, daß die Komponenten der Tensoren auf beiden Seiten dieser Gleichung im Sinne der Gaußschen kleinsten Quadrate so gut wie möglich übereinstimmen. Damit wird für c_S folgende Berechnungsvorschrift erhalten:

$$c_S = \frac{1}{2} \frac{M_{ij} \cdot L_{ij}}{M_{kl} \cdot M_{kl}}. \quad (3.70)$$

Dabei ist zu bemerken, daß $M_{ij} \cdot L_{ij} = M_{ij} \cdot L_{ij}^a$, weil M_{ij} nur aus anisotropen Anteilen besteht, wie aus den Gleichungen (3.63) und (3.64) hervorgeht. Die Berechnungsvorschrift von L_{ij} ist mit Gleichung (3.65) gegeben.

Ein numerisches Verfahren, bei dem c_S zu jedem Zeitschritt mit den genannten Formeln als Funktion von Ort und Zeit bestimmt wird, ist im allgemeinen nicht stabil, d.h. die Werte, die aus dem Strömungsfeld lokal für c_S berechnet werden, oszillieren sehr stark. Dieses Problem wird durch Mittelung im Raum oder in der Zeit beseitigt. Im Raum kann nur sinnvoll in Gebieten gleicher Turbulenzintensität gemittelt werden. In Spezialfällen gibt es solche Gebiete; in der ebenen Spaltströmung sind es beispielsweise wandparallele Platten. In Geometrien, die nur ein wenig komplexer sind, kommen solche Gebiete gleicher Turbulenzintensität aber im allgemeinen nicht mehr vor. Eine zeitliche Mittelung ist bei stark zeitabhängiger Strömung problematisch, weil einen festen Punkt im Raum sowohl Turbulenzballen als auch Gebiete mit nur wenig Turbulenzintensität passieren können. Meneveau et al. [74] haben 1996 einen Ausweg gefunden: Sie schlagen vor, entlang der Stromlinien zu mitteln und geben Gewichtungsfaktoren in Abhängigkeit vom Strömungsfeld an, mit denen das neu berechnete c_S gegenüber dem alten, bereits gemittelten, gewichtet werden muß, damit Stabilität sichergestellt ist. Die Stromlinien werden dabei als Bahnen von im Lagrangeschen Sinn betrachteten Partikeln verfolgt. Dieses Verfahren, das etwa 10% mehr Rechenoperationen und Speicherplatz als die räumlich mittelnden dynamischen Verfahren benötigt (Meneveau et al. [74]), kann in nahezu beliebigen Geometrien zur stabilisierenden Mittelung von c_S verwendet werden. Im Vergleich mit den räumlichen Mittelungsverfahren schneidet es nur sehr wenig schlechter ab, wie die Autoren nachweisen.

Die Implementierung des Verfahrens ist relativ einfach: Zunächst berechnet man nach Formel (3.70) an jedem Gitterpunkt ein vorläufiges c_S . An jedem Gitterpunkt betrachtet man den Geschwindigkeitsvektor: Multipliziert mit einem Zeitintervall ergibt er die Ortsänderung, die eine fiktive Partikel in diesem Zeitintervall erfahren hat, wenn sie sich jetzt am Ort eines Gitterpunkts befindet. Aus dem Feld der c_S -Werte zum vorangegangenen Zeitschritt kann man den c_S -Wert an dem Ort, an dem sich diese Partikel zum vorangegangenen Zeitschritt befunden hat, durch Interpolation berechnen, gegen den vorläufigen gewichten und so den endgültigen Wert von c_S an dieser Stelle erhalten.

Umsetzung im Algorithmus

Das Large-Eddy-Verfahren wird dadurch in den Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen integriert, daß der Term, der die Turbulenzmodellierung enthält, $\frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_i}$, gemäß Gleichung (3.51) hinzugefügt wird. τ_{ij}^r wird berechnet nach

$$\tau_{ij}^r = 2 \cdot c_S \cdot \Delta^2 \cdot \|\bar{S}\| \cdot \bar{S}_{ij} \quad (3.71)$$

(vgl. Gleichung (3.61)). Mit Δ ist die Filterweite des Gitterfilters bezeichnet, sie berechnet man (vgl. Sagaut [95]) aus den Gitterweiten in die drei Raumrichtungen dx , dy und dz :

$$\Delta = (dx \cdot dy \cdot dz)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.72)$$

Wenn die Filteroperation des groben Filters mit der Filterweite $\hat{\Delta}$ programmiert ist, dann kann mit einem vorläufigen c_S , bezeichnet als c_S^{vorl} , der Ausdruck $c_S^{vorl} \cdot \Delta^2$ mit folgendem Algorithmus aus einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld berechnet werden:

<ul style="list-style-type: none"> • Berechnung von L_{ij}: $L_{ij} := \hat{u}_i \hat{u}_j - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}$ • Berechnung von S_{ij}: $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ • Berechnung von $\ \bar{S}\$: $\ \bar{S}\ = \sqrt{2 \cdot \bar{S}_{ij} \cdot \bar{S}_{ij}}$ • Berechnung von M_{ij}: $M_{ij} := \ \hat{S}\ \cdot \widehat{\bar{S}_{ij}} - \frac{\Delta^2}{\hat{\Delta}^2} \cdot \ \bar{S}\ \cdot \bar{S}_{ij}$ • Berechnung von c_S^{vorl} $c_S^{vorl} = -\frac{1}{2} \frac{M_{ij} \cdot L_{ij}}{M_{kl} \cdot M_{kl}}$

Um das Verfahren zu stabilisieren, wird jetzt c_S^{vorl} gegen das c_S vom letzten Zeitschritt, das im Speicher gehalten werden muß und mit c_S^{alt} bezeichnet wird, gewichtet. Der Gewichtungsfaktor χ wird aus Nenner und Zähler von Gleichung (3.70) berechnet. Weil diese Größen vom vorangegangenen Zeitschritt benötigt werden, müssen auch diese im Speicher gehalten werden; die vorkommenden Größen vom vorangegangenen Zeitschritt werden mit M_{ij}^{alt} bzw. L_{ij}^{alt} bezeichnet. Folgendes Vorgehen wurde umgesetzt (vgl. Meneveau et al. [74]):

- Berechnung der Hilfsgröße T :

$$T = 1,5 \cdot \Delta (M_{ij}^{alt} L_{ij}^{alt})^{-\frac{1}{8}}$$
- Berechnung von χ :

$$\chi = \frac{\Delta t}{T + \Delta t}$$
- Gewichtung von c_S^{vorl} :

$$c_S = \chi \cdot c_S^{vorl} + (1 - \chi) \cdot c_S^{alt}$$
- Verhinderung negativer Wirbelviskositäten:
 Wenn c_S positiv, wird c_S gleich null gesetzt.

Modellierung des turbulenten Wärme- und Stofftransports

Werden bei einer Large-Eddy-Simulation auch eine oder mehrere Transportgleichungen gelöst, so gilt es auch hier, die auf dem Rechengitter nicht mehr darstellbaren Vorgänge in ihrem Effekt auf die großen Skalen zu modellieren. Im Fall von Wärme- und Stofftransport entfällt auf die Feinstruktur sogar ein im Vergleich zum Impulstransport größerer Anteil des gesamten Stofftransports. Die gefilterte Transportgleichung für eine Transportgröße c lautet:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = \frac{1}{Re \cdot Sc} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial q_i^r}{\partial x_i} + \bar{f}_i \quad (3.73)$$

Mit Querstrich gekennzeichnete Transportgrößen sind gefiltert. Aus praktischen Gründen werden die Transportgleichungen auf demselben Diskretisierungsgitter wie die Impulsgleichungen gelöst. Deshalb ist auch die implizite Filterung in beiden Fällen dieselbe. Zu modellieren bleibt hier der Term $\frac{\partial q_i^r}{\partial x_i}$, der beim Filtern der Gleichungen neu hinzukommt; q_i^r spielt dabei dieselbe Rolle wie der Residuumsstress-Tensor τ_{ij}^r , ist jedoch kein Tensor, weil die Transportgrößen skalar sind. Der *Feinstruktur-Wärmestrom* q_i^r läßt sich mit einer *turbulenten Wärmeleitfähigkeit* λ_t wie folgt parametrisieren:

$$q_i^r = \lambda_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \quad (3.74)$$

Der Zusammenhang zwischen der von der Schließung der Impulsgleichung her bekannten turbulenten Wirbelviskosität ν_t und λ_t wird über eine *turbulente Prandtl-*

zahl Pr_t hergestellt:

$$\lambda_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}. \quad (3.75)$$

Zwar gibt es Ansätze, die turbulente Prandtlzahl dynamisch (etwa mit der Methode von Germano [28], siehe z.B. Moin et al. [77]) zu bestimmen, jedoch hat sich der Ansatz gegenüber dem statischen Modell bisher nicht durchgesetzt. Die mit solchen dynamischen Ansätzen berechneten Werte für Pr_t schwanken zwischen etwa 0.3 und 0.9 (vgl. Breuer [8]). Grötzbach und Wörner [37] geben an, daß Werte von

$$Pr_t \approx 0.4 \quad (3.76)$$

zu verwenden seien. Im Anbetracht des erheblichen Aufwands, der zur dynamischen Bestimmung der turbulenten Prandtlzahl in Kauf zu nehmen wäre und der relativ geringen Schwankungsbreite der in der Literatur gefundenen Werte für diesen Wert scheint es nicht sinnvoll, die turbulente Prandtlzahl hier dynamisch zu bestimmen.

3.4.2. Simulation der Strömung durch einen geraden Kanal mit quadratischem Querschnitt

Um sicherzustellen, daß das implementierte LES-Verfahren mit dynamischer Berechnung des Smagorinsky-Koeffizienten und Stabilisierung mit der beschriebenen Methode brauchbare Ergebnisse liefert, wurde die Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt berechnet und mit den Ergebnissen der DNS von Gavrilakis [27] verglichen. Zwar werden neue Verfahren zur Modellierung inkompressibler Turbulenz üblicherweise daran gemessen, wie gut sie die DNS-Ergebnisse der ebenen turbulenten Kanalströmung von Kim et al. [51] reproduzieren können. Weil hier aber kein neues Verfahren zur Simulation turbulenter Strömungen untersucht werden soll, wurde die völlig ausreichende Dokumentation der DNS von Gavrilakis [27] zur Validierung der mit dem eigenen Programm erhaltenen Ergebnisse herangezogen. Gegenüber der Arbeit von Kim et al. [51] zeichnet sie sich dadurch aus, daß sie ein praxisrelevantes Problem behandelt, das der in dieser Arbeit vorgestellten Anwendung des eigenen Programms sehr ähnlich ist.

Dazu wird mit dem vorgestellten Verfahren eine LES mit $64 \times 64 \times 192$ Punkten auf einem Gebiet der Größe $1.0 \times 1.0 \times 8.0$ durchgeführt. Die Hauptströmungsrichtung ist die z -Richtung; in z -Richtung werden periodische Randbedingungen gesetzt, während an den übrigen Rändern Haftbedingungen gefordert sind. Die Kanalreynoldszahl des betrachteten Falls wird auf etwa 4200 eingestellt und ist damit derjenigen bei Gavrilakis [27] vergleichbar.

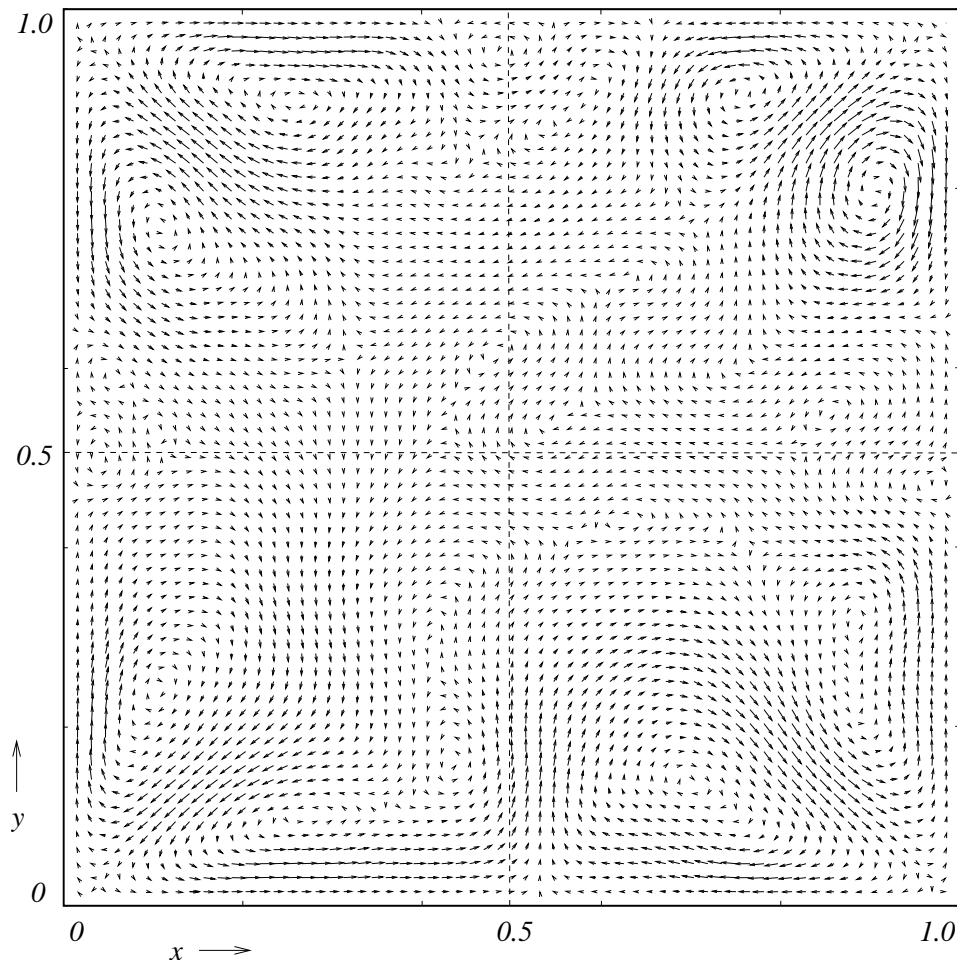


Abbildung 3.17.: Über die (dimensionslose) Zeit $t \approx 200$ bis $t \approx 500$ gemittelte Sekundärströmung ($Re \approx 4200$)

Ein wichtiges Merkmal der Strömung durch den quadratischen Kanal ist das Auftreten einer sogenannten Sekundärströmung, d.h. gemittelt über eine relativ lange Zeit tritt in den Ebenen senkrecht zur Hauptströmungsrichtung eine vergleichsweise schwache Strömung von charakteristischer Gestalt auf: Das Fluid strömt in die Ecken des Kanals, folgt dann der Kanalwand und kehrt etwa in der Mitte der Kanalwände wieder in die Kanalmitte zurück. Diese Sekundärströmung wird mit dem beschriebenen Modell gut dargestellt, es stellt sich wie bei der DNS von Gavrilakis [27] keine exakte Symmetrie ein.

In der Arbeit von Gavrilakis [27] werden weiterhin die mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung sowie die Standardabweichungen der drei Geschwindigkeitskomponenten angegeben. Die Geschwindigkeitskomponenten werden dabei jeweils an den beiden Bisektoren des Kanalquerschnitts betrachtet und an Linien parallel zur Hauptströmungsrichtung z örtlich sowie zeitlich über den angegebene

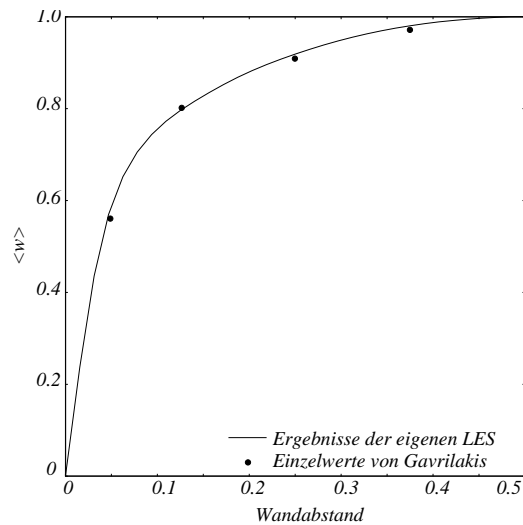


Abbildung 3.18.: Mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung entlang eines Bisektors des Kanals als Funktion des Wandabstands, bezogen auf mittlere Geschwindigkeit in der Kanalmitte; zeitlich gemittelt über die (dimensionslose) Zeit $t \approx 200$, bis $t \approx 500$ ($Re \approx 4200$)

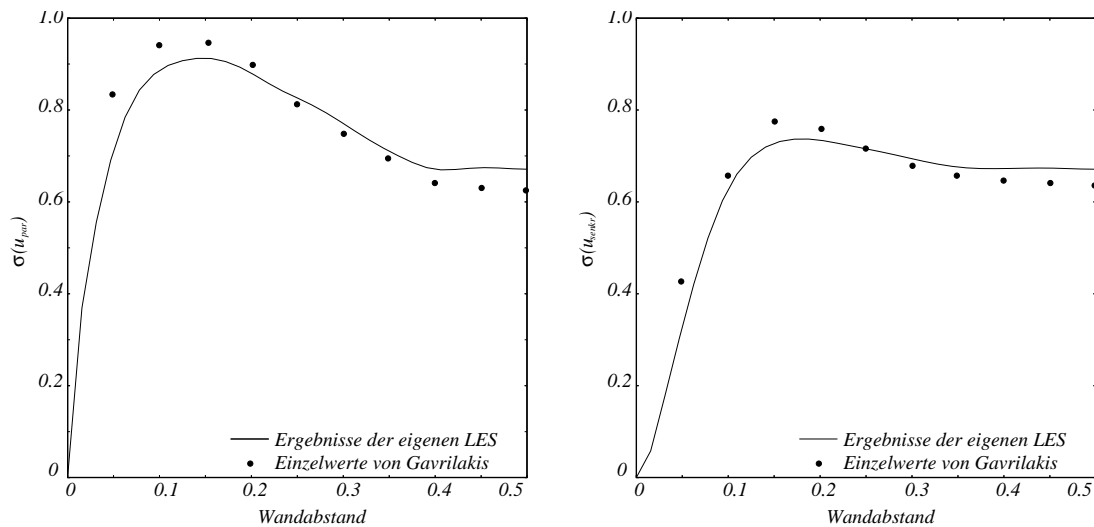


Abbildung 3.19.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand (links) und senkrecht zur Wand (rechts) entlang eines Bisektors des Kanals als Funktion des Wandabstands, bezogen auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit; zeitlich gemittelt über die (dimensionslose) Zeit $t \approx 200$ bis $t \approx 500$ ($Re \approx 4200$)

nen Zeitraum gemittelt. Die mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung wird mit dem eingeführten Modell sehr gut erhalten, der Vergleich mit der DNS

von Gavrilakis [27] ergibt keine bemerkbaren Unterschiede, wie aus Abbildung 3.18 hervorgeht.

Die Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponenten sind wie in der Turbulenzforschung üblich in Einheiten der Wandschubspannungsgeschwindigkeit (siehe Pope [85]) angegeben. Auf die dort gebräuchliche Angabe des Wandabstands in den sogenannten Wandeinheiten, die ebenfalls in zahlreichen Veröffentlichungen zur Turbulenz verwendet werden, wird in der hier verzichtet, weil die Arbeit von Gavrilakis, mit der verglichen wird, ebenfalls diese Einheiten nicht verwendet. Der Wandabstand wird angegeben in den dimensionslosen Längeneinheiten. Zur Untersuchung der Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponenten werden diese nicht unterschieden nach ihrer Richtung im Koordinatensystem, sondern nach ihrer Richtung bezüglich der nächsten Wand. Man trennt daher nach Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung w , die stets mit der z -Richtung des Koordinatensystems zusammenfällt, nach der Geschwindigkeit, die senkrecht zur Wand und zur Hauptströmungsrichtung steht (u_{senkr}) und derjenigen, die parallel zur Wand, aber senkrecht zur Hauptströmungsrichtung steht (u_{par}). Im folgenden wird bei den beiden letztgenannten Geschwindigkeitskomponenten auf die Angabe „senkrecht zur Hauptströmungsrichtung“ verzichtet.

Der Vergleich der Standardabweichungen mit der Vorgabe von Gavrilakis erlaubt folgende Feststellungen: Die Schwankung der Geschwindigkeitskomponenten in wandparalleler Richtung, $\sigma(u_{par})$, und in der Richtung senkrecht zur Wand $\sigma(u_{senkr})$, werden quantitativ gut wiedergegeben, wie Abbildung 3.19 belegt. Unterschiede zu den DNS sind dadurch gekennzeichnet, daß die jeweiligen Profile etwas flacher ausfallen, d.h. in Wandnähe werden die Werte unterschätzt, in der Kanalmitte überschätzt. Die Fehler hierbei sind gering und liegen in der Größenordnung von wenigen Prozent.

Die Schwankung der Geschwindigkeitskomponenten in Hauptströmungsrichtung, $\sigma(w)$, wird vom verwendeten Modell im Vergleich zur DNS stärker unterschätzt, die Abweichung erreicht hier fast 20%. Auch hier ist der Fehler beim charakteristischen Maximum in geringem Abstand von der Wand am größten, vgl. Abbildung 3.20. Die Gründe dafür, daß mit dem hier verwendeten LES-Verfahren nach Meneveau et al. [74] von DNS Berechnungen verschiedene Ergebnisse erzielt werden, liegen in der relativ geringen Auflösung des Rechengebiets insbesondere in Wandnähe, wo wegen des verwendeten äquidistanten Gitters schlicht zu wenige Gitterpunkte liegen. Außerdem trägt die Mittelung des Smagorinsky-Koeffizienten entlang der Stromlinie dazu bei, daß in einiger Entfernung von der Wand berechnete Werte von c_S an der Wand wirksam werden und dort ihre dämpfende Wirkung entfalten. LES-Varianten, die entlang Linien oder Ebenen gleichen Wandabstands die Mittelung von c_S vornehmen, zeigen diesen Effekt nicht.

Trotz der offensichtlichen Schwächen des verwendeten Modells in gewissen Punk-

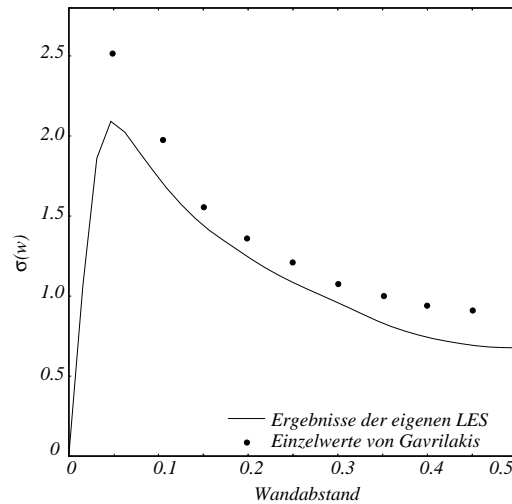


Abbildung 3.20.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung entlang eines Bisektors des Kanals als Funktion des Wandabstands, bezogen auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit; zeitlich gemittelt über die (dimensionslose) Zeit $t \approx 200$ bis $t \approx 500$ ($Re \approx 4200$)

ten ist gerade dieses Modell nach Meinung des Autors das einzige derzeit verfügbare, mit dem Simulationen turbulenter disperser Strömungen durchgeführt werden können. Es ist für die Simulation disperser turbulenter Strömungen nicht sinnvoll, an den Kanalwänden auf Kosten des Inneren die Auflösung wesentlich zu vergrößern, denn Ränder, die der größeren Auflösung bedürfen, können im Fall disperser Strömungen überall im Rechengebiet auftreten. Modelle, die die Berechnung durch Mittelung des Koeffizienten c_S auf Linien oder Flächen homogener Turbulenz stabilisieren, kommen nicht in Frage, weil bei dispersen Strömungen im allgemeinen Fall diese Linien oder Flächen nicht existieren. Das Verfahren von Meneveau et al. [74] kann, wie gezeigt wurde, bei mäßiger Auflösung im Fall der Kanalströmung noch befriedigende Ergebnisse einbringen und wird deshalb in dieser Arbeit verwendet.

3. Ein impuls- und energierhaltendes Finite-Volumen-Verfahren

4. Ansätze zur Simulation disperser turbulenter Strömungen

Für feste und deformierbare Partikeln sowie Tropfen oder Blasen ist es äußerst aufwendig, die im Abschnitt 2.3.1 zusammengefaßten Übergangsbedingungen bei einer Simulationsrechnung genau einzuhalten. Jeder, der versucht hat, solche Simulationen durchzuführen, wird bestätigen, daß die Systeme überaus empfindlich auf kleine Ungenauigkeiten bei der Formulierung der Übergangsbedingungen oder selbst auf systematische Fehler aus der Diskretisierung reagieren. Diesen Schwierigkeiten wird oft dadurch ausgewichen, daß erst gar nicht versucht wird, die Erfüllung der Übergangsbedingungen zu erzwingen. Anstatt dessen werden Methoden angewandt, die die Vorgänge an der Phasengrenze modellieren. Wichtige Eigenschaften solcher Verfahren sind neben möglichst hoher Genauigkeit, mit der die physikalischen Vorgänge abgebildet werden, hohe Stabilität und geringe Kosten in Bezug auf Speicherplatz und Rechenleistung.

Die Aufgabenstellung erfordert es, die in der Literatur beschriebenen Verfahren daraufhin zu prüfen, ob sie für die Simulation des Blasensiedens in turbulenter Kanalströmung sinnvoll eingesetzt werden können. In diesem Kapitel werden daher zunächst diese speziellen Anforderungen zusammengetragen. Bei der Simulation des Verhaltens von Dampfblasen sind im wesentlichen zwei Probleme zu bewältigen: Erstens muß es gelingen, die Zweiphasenströmung, d.h. das Verhalten von Gasblasen mit unveränderlichem Volumen, zu simulieren. Dazu gibt es in der Literatur zahlreiche Arbeiten. Zweitens muß der Phasenübergang in der Rechnung berücksichtigt werden. In der Literatur werden zu diesem Problem deutlich weniger Beiträge gefunden. Da die zweite Problemstellung nicht behandelt werden kann, wenn das erste Problem, die Simulation der Zweiphasenströmung ohne Phasenübergang nicht zufriedenstellend gelöst werden kann, werden im folgenden zunächst die in der Literatur beschriebenen Verfahren zur Lösung des ersten Problems diskutiert. Anschließend wird über Simulationsverfahren für Zweiphasenströmung mit Phasenübergang berichtet. Das Kapitel abschließend folgt eine Bewertung der Verfahren in Bezug auf ihren Einsatz im Rahmen der Aufgabenstellung, die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt.

4.1. Anforderungen an Simulationsverfahren für das Blasensieden in turbulenter Kanalströmung

Beim Blasensieden handelt es sich um ein Zweiphasenproblem mit Phasenübergang. Typisch ist der kleine Volumenanteil der Gasphase. Der Einfluß der Dampfblasen führt zu einer deutlichen Änderung der Systemeigenschaften, insbesondere des Wärmeübergangs. Aus diesem Grund ist es bei der Simulation solcher Systeme geboten, die Dampfblasen möglichst gut aufzulösen, um ihren Einfluß genau abzubilden. Der lokale Einfluß der Blasen auf die kontinuierliche Phase muß berücksichtigt werden, genauso wie der Einfluß der kontinuierlichen Phase auf die Blasenbewegung. Die Blasenbewegung ist dabei nicht symmetrisch und es kommen typischerweise mehrere Blasen vor, deren Bewegung sich gegenseitig beeinflusst. Das Verfahren sollte deshalb in der Lage sein, die Interaktion von mehreren Dutzend Blasen gut abzubilden.

Typische technische Vorgänge, bei denen das Blasensieden eine Rolle spielt, sind durch einen turbulenten Strömungszustand gekennzeichnet. Zur Simulation der Dynamik der äußeren Phase ist es also erforderlich, daß mit der eingesetzten Methode die Berechnung turbulenter Strömungen mit der erforderlichen Genauigkeit durchgeführt werden kann. Für die Simulation realistischer Szenarien ist es zudem wünschenswert, daß die Methode auch im Fall komplexer Geometrien eingesetzt werden kann.

4.1.1. Simulation der äußeren Phase

Für die Simulation der turbulenten Strömung der äußeren Phase selbst ist der weitaus größte Teil des gesamten Rechenaufwands bei der Simulation des Blasensiedens in turbulenter Strömung notwendig. Die Auswahl der Methode zur Bewältigung dieser Aufgabe richtet sich nach den Möglichkeiten bzw. der Verfügbarkeit der eingesetzten Computeranlage und den Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse.

Voraussetzung für die erfolgreiche Simulation turbulenter disperser Strömungen, d.h. für die korrekte Vorhersage des Verhaltens solcher Systeme mit der notwendigen Genauigkeit in angemessener Zeit, ist zunächst die näherungsweise Lösung der das Verhalten der äußeren Phase bestimmenden Navier-Stokes-Gleichungen. Für turbulente Strömungen wäre eine DNS erstrebenswert, weil dadurch die höchstmögliche Genauigkeit zu erzielen wäre (vgl. Abschnitt 3.4). Der hohe Rechenaufwand und die damit einhergehenden langen Rechenzeiten auf heute verfügbaren Anlagen stehen aber dem Einsatz dieser Methode für umfangreiche Untersuchungen in angemessener Zeit hinderlich im Wege. Wie in Abschnitt 3.4 dargestellt, können mit Large-Eddy-Verfahren technisch relevante turbulente

Strömungen heute erfolgreich simuliert werden. Das turbulente Strömungsverhalten der äußeren Phase wird in dieser Arbeit daher mit LES simuliert.

4.1.2. Simulation der dispersen Phase

Um die relevanten Vorgänge an beheizten Wänden, an denen es zum Blasensieden kommt, simulieren zu können, ist ein Verfahren erforderlich, das folgenden Ansprüchen genügt:

- Es müssen zahlreiche, d.h. mehrere Dutzend einzelne Blasen dargestellt werden.
- Der Effekt der Blasen auf das umgebende Fluid muß mit geringen Fehlern wiedergegeben werden, so daß die Simulation in allen Fällen physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert.
- Die Auswirkung der Strömung der umgebenden Flüssigkeit auf die Blasenbewegung ist zu berücksichtigen.
- Direkte und indirekte Interaktion der einzelnen Blasen untereinander müssen wiedergegeben werden.
- Die aufgrund des Phasenübergangs sich ändernden Blasengrößen bringen es mit sich, daß sowohl Blasen, die deutlich größer, als auch solche, die kleiner als die Gitterweite sind, zu berücksichtigen sind.

Bei der Berücksichtigung bzw. Modellierung des Einflusses der dispersen Phase ist außerdem zu beachten, daß diese hinsichtlich der Genauigkeit, mit der die Vorgänge an den Phasengrenzen abgebildet werden, zur Genauigkeit der Simulation der strömungsmechanischen Eigenschaften der äußeren Phase passen muß. Daneben ist es natürlich erstrebenswert, diese Genauigkeit mit so geringem Aufwand hinsichtlich Speicher und Rechenzeit wie möglich zu erzielen, keinesfalls aber darf der rechnerische Aufwand dafür die Größenordnung des Aufwands für die Simulation des Verhaltens der äußeren Phase deutlich übersteigen.

4.2. Übersicht über Verfahren zur Simulation von Mehrphasenströmungen

In der Literatur werden zahlreiche Verfahren zur numerischen Simulation von Zweiphasenströmungen beschrieben. Sie unterscheiden sich vor allem dadurch, wie die Phasengrenze und die dort auftretenden Unstetigkeiten der Parameter und Variablen in die Rechnung einfließen. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Verfahren genannt und in knapper Form skizziert. Die Einteilung folgt

dabei weitgehend der von Laurien [56], der die Verfahren im Bezug auf ihre Einsetzbarkeit im Reaktorbau bewertet.

Bei allen Verfahren, die hier genannt werden, handelt es sich um *Zweiwegverfahren*. Unter diesem Begriff werden Verfahren zusammengefaßt, bei denen sowohl die Auswirkung der Strömung des umgebenden Mediums auf die Partikeln als auch umgekehrt die Auswirkung der Partikeln auf die Strömung in die Rechnung eingeht. *Einwegverfahren*, die nur den Einfluß der äußeren Phase auf die Partikeln berücksichtigen, sind zur Simulation des Blasensiedens offensichtlich nicht geeignet und werden deshalb hier nicht behandelt.

Bei den meisten der im folgenden aufgeführten Verfahren werden beide Phasen als Kontinuum behandelt. Es liegt also die *Eulersche Betrachtungsweise* zugrunde. Daher werden diese Verfahren der Übergruppe der *Euler-Euler-Verfahren* zugeordnet. Einzig die in Abschnitt 4.2.6 genannten Verfahren gehören nicht zu dieser Gruppe.

4.2.1. Oberflächenangepaßte Gitter

Charakteristikum dieser Klasse von Methoden ist, daß das verwendete Rechengitter so ins Rechengebiet hineingelegt wird, daß genügend Gitterpunkte auf der Phasengrenze liegen, so daß diese durch den von den Gitterlinien gebildeten Polygonzug approximiert wird.

Neben auf diesem Konzept basierenden Lösungsansätzen zu allgemeinen Fragestellungen, z.B. Dandy und Leal [16], die prinzipiell für alle Fluid-Fluid-Phasengrenzen gelten, gibt es viele Arbeiten, die sich mit der stark eingeschränkten Gruppe von Stoffpaarungen der Gasblasen in Flüssigkeiten beschäftigen. Zu nennen sind hier in erster Linie die Arbeiten von Volkov [122, 123] sowie Christov und Volkov [13], die sich allgemein mit der numerischen Lösung der ein solches System beschreibenden Gleichungen befaßt haben und für bestimmte Fälle die physikalischen Eigenschaften diskutieren. Daneben gibt es auf diesem Gebiet ältere Arbeiten, z.B. Miksis et al. [75], die mit vereinfachten Beschreibungen der Phasengrenzflächen sehr viele Stoffpaarungen und Blasengrößen abdecken, die dabei aber wieder nur für spezielle Strömungsfelder gültige Ergebnisse liefern.

Die Lösung der Gleichungen mit dieser relativ präzisen Beschreibung der Oberfläche ist bei den genannten Arbeiten aber nur mit hohem Rechenaufwand bzw. unter stark vereinfachenden oder die Allgemeingültigkeit einschränkenden Annahmen zu bewerkstelligen. Weil auf unstrukturierten Gittern gerechnet wird, sind diese Simulationen grundsätzlich aufwendiger als solche, bei denen das Differentialgleichungssystem auf orthogonalen Gittern gelöst wird. Daneben müssen die Rechengitter beim Fortschreiten der Zeit stets an die Oberfläche angepaßt

werden. Dieser als *Remeshing* bezeichnete Vorgang erfordert zusätzlich Rechenzeit und Speicherplatz. Er entfällt in Fällen, bei denen zur Vereinfachung angenommen wird, daß sich die Oberflächengestalt mit der Zeit nicht ändert. Deshalb werden diese Ansätze nur bei Problemen mit sehr wenigen Blasen und speziellen Geometrien eingesetzt, in den genannten Arbeiten etwa wird stets Achsensymmetrie vorausgesetzt und nur eine Blase bzw. ein Tropfen betrachtet.

Vorteil dieser Methoden aber ist, daß die Übergangsbedingungen im Diskreten mit einer sehr hohen Genauigkeit umgesetzt werden können. Besonders vorteilhaft wirkt sich auch die Eigenschaft dieser Verfahren aus, daß Gebiete mit hohen zu erwartenden Gradienten der gesuchten Funktionen mit dem Gitter adaptiv sehr fein aufgelöst werden können. Typischerweise ist die Umgebung der Phasengrenzfläche geprägt von diesen hohen Gradienten.

4.2.2. Volume-of-Fluid-Verfahren

Ebenfalls den Euler-Euler-Verfahren zuzuordnen sind die Vertreter der sogenannten *Volume-of-Fluid-Methode*. Im Gegensatz zu den im vorangegangenen Abschnitt genannten Verfahren wird bei den auf der Volume-of-Fluid-Methode basierenden Verfahren die Gestalt der Oberfläche mit Hilfe der Lösung zusätzlicher Transportgleichungen bestimmt. Damit ist es möglich, die effizienten und gut entwickelten numerischen Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen auf orthogonalen Gittern einzusetzen. Die zusätzliche Transportgröße entspricht einer sogenannten *Markerfunktion*, durch deren Wert bestimmt wird, zu welcher Phase ein Punkt des Rechengebiets gehört, vgl. Abbildung 4.1. In der von Hirt und Nichols [44] beschriebenen Ausgangsvariante der Volume-of-Fluid-Methoden nimmt

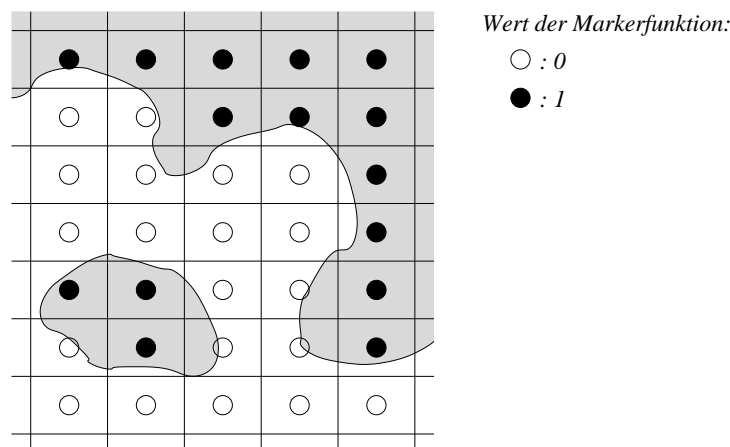


Abbildung 4.1.: Skizze zur Beschreibung der Volume-of-Fluid-Methode

die zusätzliche Transportgröße nur die Werte null und eins an. Diffusionsähnliche Effekte aufgrund numerischer Ungenauigkeiten sind damit unterbunden. Die Bestimmung der Lage der Phasengrenze erfolgt durch die Gradientenbildung an die Funktionswerte im Raum. Diese Information wird dazu genutzt, daß im Gebiet einer Phase die Transport- bzw. Kontinuitätsgleichung mit den Parametern dieser Phase auf orthogonalen Gittern gelöst wird. Die Methode verbreitete sich seit dem Erscheinen des Artikels von Hirt und Nichols [44] im Jahre 1981 rasch und wurde in vielfältiger Weise erweitert und abgewandelt.

Eine ältere Arbeit, in der die Simulation von Gasblasen in einem Fluid mit Hilfe der Volume-of-Fluid-Methode beschrieben wird, stammt von Tomiyama et al. [112]; die Autoren verwenden eine rotationssymmetrische Konstellation, um den Fall in zwei Raumdimensionen darstellen zu können, und berechnen sowohl die Blasenform als auch die Bewegung der Blase mit einer einfachen Form der Volume-of-Fluid-Methode. Die Genauigkeit der Ergebnisse, insbesondere beim Vergleich von Aufstiegsgeschwindigkeit aus Rechnung und Experiment, ist dabei nicht in allen Fällen befriedigend. Als Beispiel für ein modernes, auf der Volume-of-Fluid-Methode basierendes Verfahren kann das von Sabisch [93] beschriebene gelten: damit können die Oberflächenform und die Bewegungen einzelner Blasen mit sehr hoher Genauigkeit berechnet werden, indem aus den Werten einer Markerfunktion auf eine exakte Lage der Oberfläche zurückgeschlossen wird. Über eine sehr aufwendige DNS auf Grundlage einer Volume-of-Fluid-Methode berichten Kanai und Miyata [49]: In dieser Arbeit wird das Verhalten von wenigen Blasen in verschiedenen Arten turbulenter Strömung untersucht, wobei zur Verhinderung der Berechnung unphysikalischer Blasenvereinigungen zusätzlich modelliert wird.

In diesem Zusammenhang ist auch die *Level-Set-Methode* zu nennen. Deren Prinzip ist dem der *Volume-of-Fluid-Methode* sehr ähnlich. Hauptunterschied ist, daß die Markerfunktion andere Werte als null und eins annehmen kann, bei Sussmann et al. [106] etwa erfolgt die Phasenzuordnung über das Vorzeichen der Werte der Markerfunktion. Der Wert der Funktion richtet sich nach dem Abstand von der Phasengrenze, der somit leicht abrufbar ist und nicht als solcher berechnet zu werden braucht.

4.2.3. Front-tracking-Methoden

Von Göz et al. [30, 31], Bunner und Tryggvason [10] und Esmaeeli und Tryggvason [21, 22] wurden DNS-Rechnungen durchgeführt, bei denen die Veränderung der Gestalt von Blasenoberflächen durch die Verfolgung von Partikeln ermittelt wird, die sich an der Blasenoberfläche befinden und diese als Knoten eines Netzes approximieren (*Front-tracking-Methode*). Bei der zeitdiskreten Rechnung werden die masselosen Partikeln von der Strömung mittransportiert; nach einem Zeitschritt wird aus ihrer neuen Lage die aktuelle Gestalt der Oberfläche rekonstru-

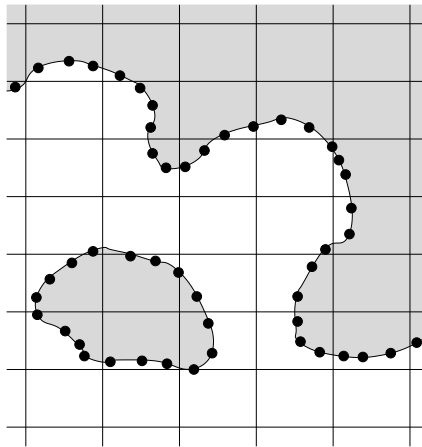


Abbildung 4.2.: Skizze zur Beschreibung der Front-tracking-Methode

iert. Damit ist die Lage und Gestalt der Oberfläche stets relativ genau bekannt, wie aus Abbildung 4.2 hervorgeht. Übergangsbedingungen können entsprechend formuliert werden. Tryggvason et al. [114] beschreiben dieses Verfahren im Detail.

Für die hohe Genauigkeit der Oberflächendarstellung wird durch den im Vergleich zur Volume-of-Fluid-Methode deutlich höheren Aufwand bezahlt. Neben der Verfolgung einer Vielzahl von Partikeln schlagen die Fortschreibung des Oberflächennetzes zu Buche sowie die Maßnahmen, die bei der Bildung von bestimmten Oberflächengestalten wie etwa Einschlüssen etc. notwendig werden. Für die Neuberechnung des Oberflächennetzes ist aber wesentlich weniger Rechenaufwand erforderlich als für das Remeshing bei Verfahren mit oberflächenangepaßten Gittern. Außerdem kann die aufwendige Simulation der Strömung insbesondere der äußeren Phase mit effizienten Algorithmen auf orthogonalen Gittern durchgeführt werden.

Mit diesem Verfahren werden sehr gute Ergebnisse bei der Berechnung des Strömungsfelds in der Umgebung von einer und auch mehreren Blasen erzielt. So können beispielsweise die Form und die gegenseitige Beeinflussung der Blasen damit sehr gut reproduziert werden. Aufgrund des hohen Aufwands und der damit erzielten Genauigkeit eignet sich die Methode hervorragend zur Anwendung in Verbindung mit DNS. Über den Einsatz der Methode in Verbindung mit Turbulenzmodellen, die physikalisch sinnvolle Simulationsrechnungen mit deutlich weniger Gitterpunkten und damit Rechenaufwand ermöglichen, ist nichts bekannt.

Weitere Anwendungen dieser Methode gehen auf Udaykumar et al. [115, 116] zurück. Es geht dabei um Dreiphasenströmungen, etwa große Luftblasen, die durch Rohrverengungen gedrückt werden, bzw. Erstarrungsvorgänge, bei denen

ebenfalls die sich rasch ändernde Gestalt von Phasengrenzflächen zu bestimmen ist.

4.2.4. Boltzmann-Methoden

Gute Ergebnisse werden auch bei Verwendung der Lattice-Boltzmann-Verfahren erzielt. Dabei wird die Strömung von beiden Phasen nicht durch eine numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen simuliert, sondern durch Modellierung des Verhaltens der Moleküle. Die Details der darauf basierenden Methoden zur Simulation von Mehrphasenströmungen werden deshalb hier nicht diskutiert. Der Vollständigkeit halber sei aber erwähnt, daß in der Literatur über erfolgreiche Simulationen von Blasenströmungen mit Boltzmann-Methoden berichtet wird. Beispielsweise Takada et al. [107] und Tölke [111] können die Form von Blasen sehr gut vorhersagen und haben auch erfolgreich die Simulation der Vereinigung zweier Blasen durchgeführt. Der dazu erforderliche Aufwand setzt auch diesen Verfahren so enge Grenzen, daß auch sie für die Simulation der Bewegung einer größeren Anzahl von Blasen nicht geeignet erscheinen.

4.2.5. Homogenisierende Verfahren

Eine Erweiterung der Volume-of-Fluid-Methoden stellen die *homogenisierenden Verfahren* dar, mit denen etwa von Bauer und Eigenberger [2] und Sokolichin und Eigenberger [100, 101] gearbeitet wurde. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß die Markerfunktion der Volume-of-Fluid-Methoden nicht mehr nur die diskreten Werte null und eins, sondern auch Werte dazwischen annehmen kann. Durch den Wert dieser Funktion wird dann der Volumenanteil der beiden Phasen auf dem Gebiet eines finiten Volumens festgelegt. Die geometrische Gestalt der Phasengrenzfläche bleibt unberücksichtigt (vgl. Abbildung 4.3). Die Navier-Stokes-Gleichungen werden dort mit entsprechend gemittelten Parametern gelöst. Auf diese Weise lassen

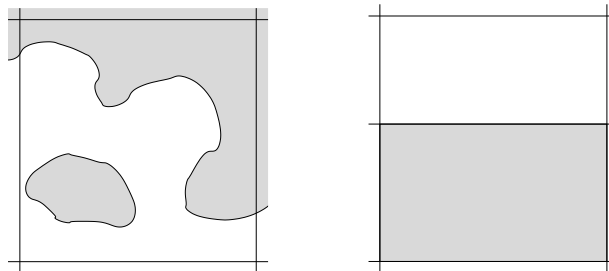


Abbildung 4.3.: Skizze zur Beschreibung der homogenisierenden Verfahren

sich große Mengen an Blasen in ihrer Auswirkung auf das Strömungsfeld beschreiben, einzelne Blasen können aber nicht mehr betrachtet werden, weil bei diesen Verfahren die Blasenoberflächen nicht mehr berechnet werden, sondern nur noch der Volumenanteil des Gases berücksichtigt wird. Um den Preis, über die Gestalt der Blasenoberfläche keine Aussage mehr machen zu können und alle damit verbundenen Effekte zu vernachlässigen, werden dabei die strömungsmechanischen Auswirkungen des Einblasens von mehreren Millionen Blasen in einen Blasensäulenreaktor simuliert. Einen Überblick über die Anwendungen solcher Verfahren enthält die Dissertation von Deen [17]. Für die Betrachtung einzelner Blasen sind diese Verfahren ohne Zusätze nicht einsetzbar.

4.2.6. Euler-Lagrange-Verfahren

Unter *Euler-Lagrange-Verfahren* versteht man Verfahren, bei denen die äußere Phase wie bei den bisher benannten Methoden als Kontinuum betrachtet wird, die Einschlüsse der dispersen Phase aber als Lagrangesche Partikeln (vgl. Abbildung 4.4). Die Verfahren unterscheiden sich im wesentlichen darin, in welcher Weise diese Partikeln beschrieben werden und wie ihr Einfluß auf die äußere Phase in die Rechnung einfließt. Sie werden häufig dann eingesetzt, wenn die betrachteten Partikeln bzw. Blasen deutlich kleiner als die Maschenweite des verwendeten Rechengitters sind und ihr Einfluß auf das berechnete Strömungsfeld vernachlässigbar ist bzw. aus den Informationen über die Lage und Ausrichtung der Partikeln modelliert werden soll. Ein Beispiel ist die Arbeit von Delnoij et al. [18], in der Blasenschwärme simuliert werden. In dieser Arbeit werden die Wechselwirkungen der Blasen untereinander wie Koaleszenz und Schwarmbildung bzw. Blasenvereinigung modelliert. Die Effekte der Blasen fließen wiederum dadurch in die Berechnung des Strömungsfelds ein, daß volumengemittelte Navier-Stokes-

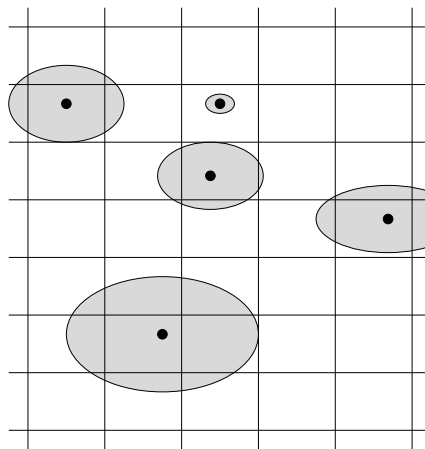


Abbildung 4.4.: Skizze zur Beschreibung der Euler-Lagrange-Verfahren

Gleichungen gelöst werden, wobei die aktuelle Phasenverteilung berücksichtigt wird.

Erst in jüngster Zeit werden Verfahren entwickelt, bei denen größere Blasen im Lagrangeschen Sinn betrachtet und verfolgt werden. Tomiyama et al. [113] beschreiben einen Ansatz, mit dem wie bei den Volume-of-Fluid-Verfahren Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Eigenschaften der jeweiligen Phase gelöst werden, zur Bestimmung der Phasengrenze aber nicht masselose Partikel verfolgt oder Transportgleichungen gelöst werden, sondern aus dem Strömungsfeld mittels empirischer Beziehungen die Bewegung einer Lagrangeschen Partikel zunächst frei wählbarer Form errechnet wird.

Ebenfalls sehr neu sind die Arbeiten von Lomholt et al. [60], Lomholt und Maxey [59], Maxey et al. [67], Maxey und Patel [66] sowie Xu et al. [128]. Diese Autoren verwenden ebenfalls ein Euler-Lagrange-Verfahren, das auch unter der Bezeichnung *Force-Coupling-Methode* bekannt ist und bei dem der Einfluß der Partikeln auf die Strömung über den Volumenkraftterm bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt wird, während andererseits aus dem berechneten Geschwindigkeitsfeld die Bewegung der Partikeln ermittelt wird. Der Volumenkraftterm wird in diesen Arbeiten so berechnet, daß das resultierende Geschwindigkeitsfeld in einiger Entfernung von der Phasengrenze demjenigen entspricht, das man bei der Umströmung fester kugelförmiger Körper unter Annahme der Stokeschen Hypothese (siehe Spurk [104]) exakt bestimmen kann. Der sinnvolle Anwendungsbereich dieser Methode ist damit auf den Gültigkeitsbereich der Stokeschen Hypothese beschränkt. Die Autoren setzen die auch Methode ein zur Simulation von Sedimentationsvorgängen ([59, 60, 66]) und weisen die Gültigkeit ihrer Voraussagen experimentell nach. Beim Einsatz der Methode zur Simulation der Bewegung von Blasen ([67, 128]) müssen diese klein genug sein, um ihre runde Form zu behalten und sollten sich auch festkörperartig verhalten, was ein gewisses Maß an Verunreinigung der äußeren Phase voraussetzt. In der Praxis beschränkt das den Einsatz dieser speziellen Methode auf die Simulation des Verhaltens sehr kleiner Blasen, deren Durchmesser $50\ \mu\text{m}$ nicht übersteigen darf (Maxey et al. [67]).

Prinzipiell haben Euler-Lagrange-Verfahren die Vorteile, daß in effizienter Weise auf orthogonalen Gittern gearbeitet werden kann und kein Remeshing erforderlich ist, daß sie leicht in bestehende Lösungsalgorithmen für Strömungsprobleme integriert werden können und daß bei der Wahl der Gitterweite auf die Erfordernisse des Bereichs in der Nähe der Phasengrenze keine Rücksicht genommen zu werden braucht. Nachteil dagegen ist, daß die hydrodynamischen Eigenschaften der Blasen oder Partikeln modelliert werden müssen, wobei Fehler entstehen können, vgl. Lomholt et al. [60].

In der Tat sind bei zahlreichen Anwendungen die genannten Vorteile solcher Zweiwegverfahren mit Lagrangescher Betrachtungsweise der Partikeln sehr wünschens-

wert, während die Nachteile in Kauf genommen werden können. Bei fast allen technisch relevanten Zweiphasenströmungen tritt bei der Anwendung der homogenisierenden Verfahren ein Informationsverlust auf. In solchen Fällen ist man bestrebt, diesen Informationsverlust so gering wie möglich zu halten oder seine Auswirkungen zu begrenzen. Die Anwendung von Zweiwegverfahren mit Lagrangescher Betrachtungsweise der Partikeln oder Blasen liefert gegen moderate Mehrkosten mehr Information als die homogenisierenden Verfahren.

In Fällen, bei denen die Strömung des kontinuierlichen Mediums aufgrund ihrer Eigenschaften sehr fein aufgelöst werden muß und bei denen etwa Blasen in einer Größe deutlich über der Gitterweite auftreten, kann es sinnvoll sein, zur Modellierung des Einflusses der Blase ein Modell zu verwenden, das diesen Einfluß ohne den massiven Mehraufwand etwa der Front-tracking-Methoden besser wiedergibt als die homogenisierenden Verfahren.

4.3. Verfahren zur Simulation von Phasenübergangsphänomenen

Die numerische Simulation von Zweiphasenproblemen ohne Phasenübergang ist ein aktueller Forschungsgegenstand, wie aus den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt hervorgeht. Es werden dazu in der Literatur zahlreiche Ansätze beschrieben, mit denen sich jeweils eine bestimmte Klasse von Probleme bearbeiten läßt. Traditionell bauen die Simulationsverfahren für Zweiphasensysteme mit Phasenübergang auf den Simulationsverfahren für Zweiphasenproblemen ohne Phasenübergang auf.

Die Verfahren unterscheiden sich deshalb dadurch, von welchem der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Verfahren zur Simulation von Zweiphasenströmungen ohne Phasenübergang sie sich ableiten. Die Art der Berücksichtigung des Phasenübergangs ist bei den in der Literatur beschriebenen Verfahren dagegen ähnlich: Bei allen der im folgenden genannten Arbeiten wird die Berechnung der Verschiebung der Phasengrenze auf Grundlage einer Massen- und Energiebilanz in einer gewissen Umgebung der Phasengrenze durchgeführt.

Mit oberflächenangepaßten Gittern arbeitet Welch [124]. Er beschäftigt sich mit der Simulation einer achsensymmetrischen Blase. Die Tatsache, daß ein zweidimensionales Problem behandelt wird, ist ein Hinweis auf den prinzipiellen Nachteile des hohen Aufwands hinsichtlich Rechenzeit und Speicherplatz bei der Verwendung unstrukturierter Gitter (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Auf den Volume-of-Fluid-Verfahren setzt die Arbeit von Welch et al. [125] auf. Hier wird der Vorgang des Filmsiedens an einer horizontal ausgerichteten Platte

bei ruhender Strömung simuliert.

Ebenfalls das Filmsieden an einer horizontal ausgerichteten Platte simulieren Son und Dhir [102, 103]. Ihr Verfahren stützt sich dabei auf die Level-Set-Methode. Mit demselben Problem beschäftigen sich auch Juric und Tryggvason [48]. Sie verwenden allerdings eine Front-tracking-Methode. Mit einer solchen arbeiten auch Ye et al. [129], die wiederum die Umströmung und Formänderung eines achsensymmetrischen Tropfens durch numerische Simulation untersuchen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß in der Literatur insgesamt sehr wenig über die Simulation von Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang berichtet wird. Alle hier genannten Arbeiten sind neueren Datums. Es werden jeweils spezielle Problemstellungen bearbeitet, bei denen eine Verallgemeinerung der Lösungsstrategie i.a. nicht vorgenommen werden kann. Die Simulation turbulenter Zweiphasenströmungen mit Phasenübergang bleibt dabei ganz ausgespart. Insbesondere ist nichts bekannt über Verfahren, die die speziellen Eigenschaften haben, die für die Simulationen des Vorgangs des Blasensiedens vonnöten wären.

4.4. Welches Verfahren eignet sich?

Homogenisierende Verfahren bieten sich an, wenn die typischen Partikelgrößen bzw. Einschlußgrößen der disperse Phase kleiner als die Gitterweite des verwendeten Rechengitters sind. Bei Blasen von einer Größenordnung, wie sie hier betrachtet werden sollen, und beim Einsatz von Large-Eddy-Verfahren sind die Blasen deutlich größer als die Abstände zweier Gitterpunkte. Eine Angabe der räumlichen Lage der Phasengrenze anstelle der Angabe des jeweiligen Volumensanteils der beiden Phasen führt dazu, daß für die Berechnung der Dynamik der kontinuierlichen Phase auf dem Rechengitter genauere Daten zur Verfügung gestellt werden können.

Es scheint daher nicht sinnvoll, für die in dieser Arbeit zu behandelnde Klasse von Problemen homogenisierende Verfahren einzusetzen. Für die übrigen im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Verfahren werden in Tabelle 4.1 Aufwand und erreichte Genauigkeit der Beschreibung der dispersen Phase gegenübergestellt. Der Aufwand für die einzelnen Verfahren wird im wesentlichen bestimmt durch die Anzahl der Freiheitsgrade. Wie nicht anders zu erwarten, werden mit zunehmender Anzahl an Freiheitsgraden auch höhere Genauigkeiten erzielt.

Da die Simulation turbulenter Strömungen mit Large-Eddy-Verfahren wegen der Anforderungen an Speicherplatz und Rechenzeit auf orthogonalen Gittern erfolgen muß, sind die Verfahren mit oberflächenangepaßten Gittern hier nicht einzusetzen.

Tabelle 4.1.: Vergleich einiger zur Simulation disperser Strömungen eingesetzter Verfahren

Verfahren	Freiheitsgrade	Genauigkeit	Diskretisierung
Verfahren mit oberflächenangepaßte Gitter	Koordinaten aller Gitterpunkte	im Rahmen der (anpaßbaren) Gitterweite	i.a. unstrukturierte Gitter
Front-tracking-Verfahren	Koordinaten der verfolgten Partikeln	im Rahmen der Weite des durch die Partikel aufgespannten Oberflächennetzes	gitterunabhängig, i.a. Einsatz orthogonaler Gitter
Volume-of-Fluid-Verfahren	Werte der Markerfunktion an den Gitterpunkten	im Rahmen der Gitterweite	gitterunabhängig, i.a. Einsatz orthogonaler Gitter
Euler-Lagrange-Verfahren	Parameter zur Beschreibung der Partikeln	im Rahmen der Gitterweite und der Partikelbeschreibung	gitterunabhängig, i.a. Einsatz orthogonaler Gitter

Front-tracking-Methoden, die sehr erfolgreich in Kombination mit DNS eingesetzt werden (vgl. Abschnitt 4.2.3), sind in der in der Literatur beschriebenen Form prinzipiell auch geeignet für den Einsatz mit LES, auch wenn die algorithmischen Maßnahmen zur Berechnung des Oberflächennetzes hinsichtlich des rechnerischen Aufwands stärker ins Gewicht fallen als bei einer DNS. Die mit diesem Aufwand erhaltene Information kann bei einer LES aber nur dann sinnvoll genutzt werden, wenn die Auflösung sehr fein ist und an die einer DNS heranreicht.

Volume-of-Fluid-Verfahren andererseits erfüllen die Anforderung nicht, daß Partikeln, die kleiner als die Gitterweite sind, bei der Rechnung berücksichtigt werden.

Das Verfahren, mit dem die hier zu untersuchenden dispersen Strömungen simuliert werden, ist der Klasse der Euler-Lagrange-Verfahren zuzuordnen. Eine Beschreibung der Blasengestalt durch wenige Parameter stellt sicher, daß der Aufwand zur Bestimmung der Freiheitsgrade gering bleibt. Andererseits sorgt die Lagrangesche Betrachtung der Blasen dafür, daß deren Größe unter der der Gitterweite liegen kann. Die Genauigkeit der Beschreibung der Phasengrenzfläche kann so gewählt werden, daß sie gut paßt zur Genauigkeit, mit der die Turbulenz aufgelöst wird.

4. Ansätze zur Simulation disperser turbulenter Strömungen

5. Ein effizientes Zweiwegverfahren zur Modellierung von Blasen

In diesem Kapitel werden die Details des verwendeten Euler-Lagrange-Verfahrens erläutert. Auf die Darstellung der Kopplung der Effekte der Blasen und der Simulation der Dynamik der äußeren Phase folgend wird auf die Bestimmung der Blasenform sowie des Blasenvolumens bei Dampfblasen eingegangen. Diese Abschnitte werden dabei jeweils abgeschlossen durch eine Validierung der mit dem vorgestellten Verfahren gewonnenen Daten durch Vergleiche mit Daten aus Experimenten.

5.1. Grundzüge des vorgestellten Verfahrens

Beim vorgestellten Euler-Lagrange-Verfahren wird die Blasenform durch ein Ellipsoid angenähert. Sie wird damit beschrieben durch die Länge der drei Halbachsen des Ellipsoids sowie die Orientierung des Ellipsoids im Raum, die durch die Winkel der Hauptachsen des Ellipsoids zu den Koordinatenachsen bestimmt ist. Die räumliche Lage der Blase wird durch den Ortsvektor des Ellipsoidmittelpunkts festgelegt. Diese Beschreibung einer Blase erfordert also nur den Speicherplatz von neun Gleitkommazahlen pro Blase.

Offensichtlich ist der weitaus wichtigste Effekt, den Blasen auf das umgebende kontinuierliche Fluid ausüben, die Auftriebskraft, die zur Aufstiegsbewegung der Blase führt. Diese Kraft ist die Folge der Dichtedifferenz zwischen der umgebenden Flüssigkeit und dem Gas in der Blase und schlägt sich in den Navier-Stokes-Gleichungen im Term der äußeren Kräfte nieder; sie wird dadurch modelliert, daß dieser Term als Funktion des Ortes jeweils mit der Dichte des am Ort vorhandenen Materials (Gas oder Flüssigkeit) berechnet wird. Die sonst in den Impulsgleichungen vorkommenden Parameter werden von der Flüssigkeit genommen. Es wird daher, im Gegensatz etwa zum Modell von Tomiyama et al. [113], überall mit derjenigen Reynoldszahl gerechnet, die mit den Stoffwerten der Flüssigkeit gebildet wurde. Vernachlässigt werden damit die geringere Trägheit und Viskosität der Gasphase.

In das numerische Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen wird das

Modell integriert, indem jeweils vor einem Zeitschritt ein Dichtefeld berechnet wird, in das die Blasen als Gebiete geringerer Dichte eingegangen sind. Die Integration der Navier-Stokes-Gleichungen über einen Zeitschritt wird unter Berücksichtigung dieses Dichtefelds durchgeführt. Schließlich wird die Veränderung der Position der Blasen aus dem gewonnenen Geschwindigkeitsfeld ermittelt und die neue Blasenform aus dem Druckfeld berechnet. Damit kann das Dichtefeld für den nächsten Zeitschritt bestimmt werden. Dieses Vorgehen ist schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt.

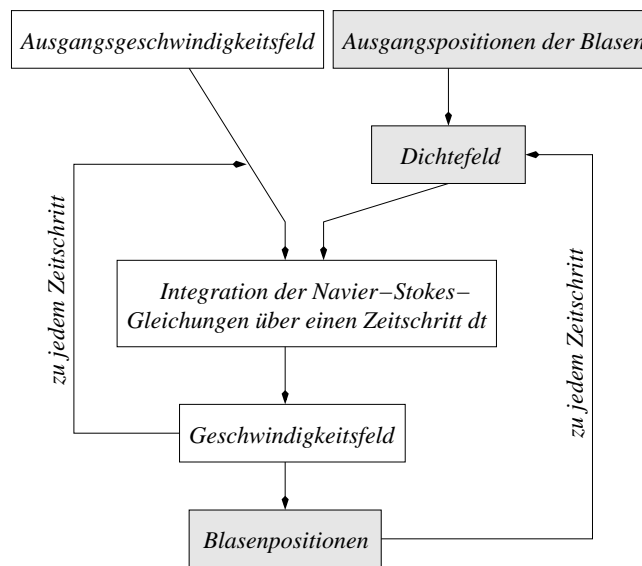


Abbildung 5.1.: Schema der Kopplung von Blasenmodell und Berechnung des Strömungsfelds der äußeren Phase

Die Bewegung der Blasen kann dabei verursacht werden durch die aufgrund des Dichteunterschieds wirkende Auftriebskraft sowie durch konvektiven Massentransport durch die Strömung des umgebenden Fluids. Die Bewegung der Blase, also die Änderung des die Lage ihres Mittelpunkts beschreibenden Ortsvektors, wird festgelegt durch Mittelung der lokalen Geschwindigkeitsvektoren im Blaseninneren. Die Grundlagen des Modells wurden bereits von Meier [72] erarbeitet.

Im folgenden wird daher gezeigt, wie das beschriebene einfache Modell so verbessert wurde, daß damit quantitative Vorhersagen einer Reihe von Phänomenen möglich sind. Dazu wird zunächst dargestellt, wie die auf das Fluid wirkende Kraft unabhängig von der Position der Blase im Gitternetz korrekt wiedergegeben werden kann. Dann wird die Methode beschrieben, mit der die Form der Blase ermittelt wird, was einer Bestimmung der Angriffspunkte dieser Kraft gleichkommt. Mit dem Modell werden aber i.a. die in Abschnitt 2.3.1 zusammengefaßten Übergangsbedingungen an der Phasengrenze disperser und kontinuierlicher Phase nicht erfüllt. Die unmittelbare Folge ist eine relativ schlechte Wiedergabe der makroskopischen Eigenschaften des Systems, etwa der Bewegung

des umgebenden Fluids. Als Ansatzpunkte für ein Korrekturschema kommen die erwähnten Parameter zur Beschreibung der Blasenform als Freiheitsgrade genauso in Frage wie die Dichtedifferenz zwischen kontinuierlicher und disperser Phase. Die hier eingesetzte Korrektur paßt die Dichte so an, daß die physikalischen Eigenschaften der Strömung möglichst gut modelliert werden. Es wird eine Rechtfertigung für die willkürliche Wahl der Dichtedifferenz als Freiheitsgrad, der zu Korrekturzwecken angepaßt wird, gegeben. Schließlich wird auf die Modellierung des Phasenübergangs eingegangen, die in Fällen eine Rolle spielt, bei denen Dampfblasen gebildet werden und kondensieren.

5.2. Modellierung des Einflusses der äußeren Kraft

Um die Beschreibung des Modells zu erleichtern, nehmen wir an, daß auf das System lediglich eine äußere Kraft und zwar parallel zur z -Achse des Koordinatensystems wirkt. Dabei soll es sich um die Erdschwere g handeln. Wegen der geringen Dichte des Gases im Vergleich zu der der Flüssigkeit gilt:

$$\rho_1 \gg \rho_2 \quad (5.1)$$

Hier und im folgenden deutet der Index 1 auf die äußere oder kontinuierliche Phase, der Index 2 auf die innere bzw. disperse Phase hin. Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 5.2 ist in der Impulsgleichung in z -Richtung, der der Erdschwere entgegengesetzten Koordinatenrichtung, die äußere Kraft (pro Volumeneinheit, dimensionslos) zu setzen zu

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r} \text{ auf einen Punkt im Blaseninneren weist,} \\ g & \text{sonst .} \end{cases} \quad (5.2)$$

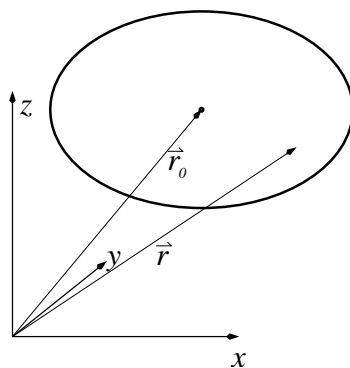


Abbildung 5.2.: Skizze zu den Bezeichnungen bei der Kräfteberechnung

Bei der Diskretisierung mit finiten Volumen ist das exakt, solange die Phasengrenze kein finites Volumen schneidet. Weil sich das aber bei der Verwendung orthogonaler Gitter nicht erreichen läßt und weil die Näherung der Grenzfläche

durch die orthogonalen Seitenflächen der Zellen des Rechengitters insbesondere für solche Blasen schlecht ist, die im Vergleich zum Rechengitter nicht sehr groß sind, muß die wirkende Kraft genauer berechnet werden als es allein aufgrund einer Entscheidung, ob eine Zelle sich im Blaseninneren oder in der kontinuierlichen Phase befindet, möglich ist. Um den integralen Effekt der Auftriebskraft größtmäßig korrekt zu erfassen, muß an den Zellen, die von der Phasengrenze geschnitten werden, der Volumenanteil der beiden Phasen ermittelt werden. Wenn man mit v_i den Volumenanteil der äußeren Phase am Volumen V der mit i adressierten Zelle bezeichnet, dann ist der integrale Effekt der Auftriebskraft richtig wiedergegeben, wenn der zur Zelle i gehörende Volumenkraftterm f_i an den diskreten Stellen, an denen die Gleichung aufgestellt wird, ersetzt wird durch

$$f_i = v_i \cdot g^+ \quad (5.3)$$

und v_i mit

$$v_i = \frac{1}{V} \int_{(V)} h(\vec{r}) dV \quad (5.4)$$

auf dem Volumen der Zelle i berechnet wird. Die Entdimensionierung der Erdschwere, die g^+ liefert, erfolgt nach Gleichung (2.6). Mit $h(x, y, z)$ wird in Gleichung (5.4) eine Markerfunktion eingeführt, die zwei Werte annimmt:

$$h(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r} \text{ auf einen Punkt im Blaseninneren weist,} \\ 1 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (5.5)$$

Die Integration ist trivial, falls die Zelle i ganz mit einer Phase ausgefüllt ist. In solchen Fällen gilt:

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{falls die Zelle ganz mit Gas gefüllt ist,} \\ 1 & \text{falls die Zelle ganz mit Flüssigkeit gefüllt ist .} \end{cases} \quad (5.6)$$

In den anderen Fällen muß die Integration ausgeführt werden. Eine geeignete Integrationsmethode ist die nach Gauß-Legendre (z.B. beschrieben von Schwarz [98]). Sie wird bei den Berechnungen in dieser Arbeit angewandt. Die Genauigkeit, mit der der integrale Effekt der Auftriebskraft berücksichtigt wird, ist damit diejenige mit der die Integration in Gleichung (5.4) ausgeführt wird.

5.3. Bestimmung der Blasenform

Wie aus Abbildung 2.2 (Seite 16) hervorgeht, erlaubt die Einschränkung der zugelassenen Blasenform auf ein Ellipsoid die Simulation von Zweiphasenströmungen in einem weiten Bereich denkbarer Stoffkombinationen. Der Bereich von $Eö < 10$ wird quasi ganz abgedeckt. Größere Blasen mit höherer Eötvöszahl haben Gestalten, die mehr Parameter zu ihrer Beschreibung erfordern. Es bleibt zu un-

tersuchen, ob aber auch das Verhalten dieser Blasen durch die Näherung ihrer Gestalt mit einem Ellipsoid zufriedenstellend vorhergesagt werden kann.

Im folgenden wird ein Verfahren erläutert, mit dem bei vorgegebener räumlichen Lage des Mittelpunkts der Blase die Parameter ihrer ellipsoidförmigen Gestalt ermittelt werden können. Das Verfahren basiert auf der Minimierung der potentiellen Verschiebungsenergie der Grenzfläche (vgl. Landau und Lifschitz [55]). Ein ähnliches Verfahren wird beispielsweise erfolgreich eingesetzt von Hartmann und Delgado [42, 43], um die Form eines umströmten Tropfens zu bestimmen; dabei handelt es sich um eine komplizierte Geometrie, zu deren Beschreibung zahlreiche Parameter notwendig sind. Die Grundidee kann aber im wesentlichen auf die Bestimmung der ein Ellipsoid beschreibenden Parameter übertragen werden.

Die Gestalt des Ellipsoids ist festgelegt durch die Parameter a , b , c (vgl. Abbildung 5.3), α_x , α_y und α_z , die die Verdrehung der Ellipsoidachsen um die jeweilige Achse des Koordinatensystems bezeichnen. Die in Abbildung 5.3 dargestellte Lage des Ellipsoids im Koordinatensystem ist durch die Winkel $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$ gekennzeichnet. Um diese Parameter in Abhängigkeit vom Druckfeld in der Umgebung der Blase zu bestimmen, betrachtet man ein infinitesimal kleines Flächenstück dA der Phasengrenze und überlegt, welche Arbeit zu leisten wäre, um dieses Flächenstück um eine Strecke Δx in normaler Richtung zu verschieben. Abbildung 5.4 führt die verwendeten Bezeichnungen ein. Die gesamte potentielle Verschiebungsenergie der Grenzfläche setzt sich additiv aus folgenden Anteilen

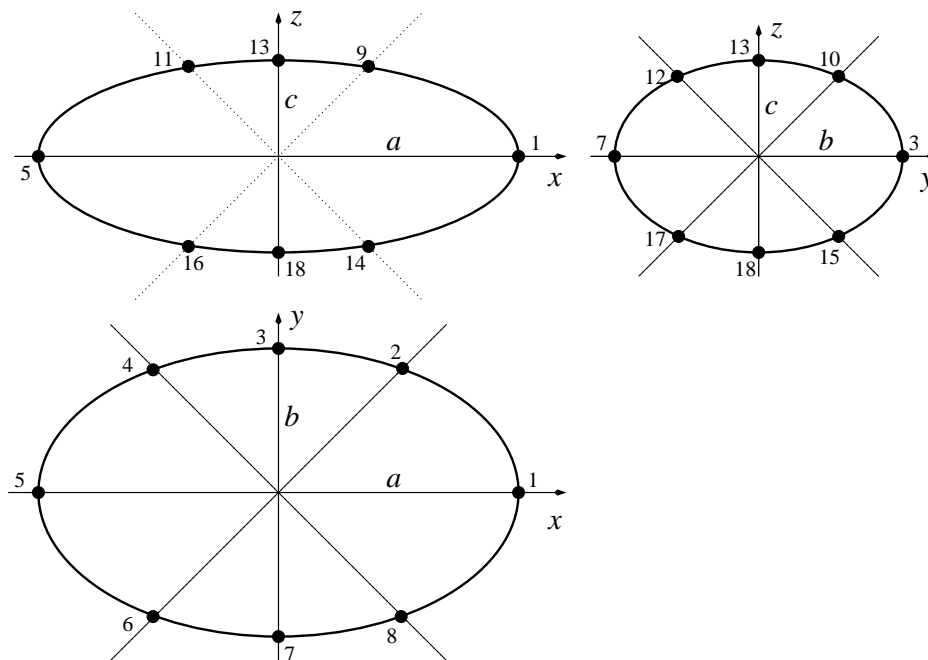


Abbildung 5.3.: Skizze zu den Bezeichnungen beim Ellipsoid

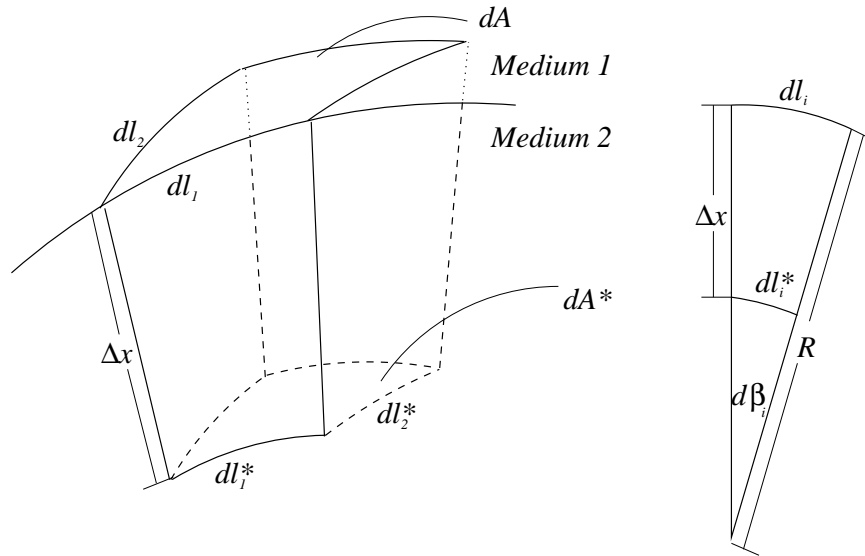


Abbildung 5.4.: Skizze zu den Bezeichnungen zur Bestimmung der Parameter des die Blase beschreibenden Ellipsoids

zusammen:

- Verschiebearbeit:

$$\Delta W_V = \int_{(A_b)} (p_2 - p_1) \cdot \Delta x \, dA \quad (5.7)$$

Mit A wird der Flächeninhalt der gesamten Phasengrenze bezeichnet. Die potentielle Verschiebung Δx wird in Richtung Medium 2 positiv gezählt.

- Oberflächenarbeit:

$$\Delta W_O = \int_{(A_b)} \gamma \, d(\Delta A) \quad (5.8)$$

Darin ist γ die Oberflächenspannung und

$$d(\Delta A) = dA^* - dA \quad (5.9)$$

die lokale Flächenänderung des kleinen Oberflächenstücks.

Für die gesamte potentielle Verschiebungsenergie gilt:

$$\Delta W = |\Delta W_V + \Delta W_O| \quad (5.10)$$

$$= \left| \int_{(A_b)} (p_2 - p_1) \cdot \Delta x \, dA + \int_{(A_b)} \gamma \, d(\Delta A) \right| \quad (5.11)$$

Man kann schreiben:

$$dA = dl_1 \cdot dl_2 \quad (5.12)$$

und

$$dA^* = dl_1^* \cdot dl_2^* \quad (5.13)$$

Abbildung 5.4 zeigt, daß sich dl_1 ausdrücken läßt als

$$dl_1 = R_\phi \cdot d\beta_1 \quad (5.14)$$

R_ϕ ist dabei der Hauptkrümmungsradius in Richtung der Kurve mit der Länge dl_1 . Ebenso drückt man dl_1^* aus als

$$\begin{aligned} dl_1^* &= (R_\phi - \Delta x) \cdot d\beta_1 \\ &= dl_1 - \Delta x \cdot d\beta_1 \\ &= dl_1 - \frac{\Delta x}{R_\phi} dl_1 \quad (\text{Gleichung (5.14)}) \\ &= dl_1 \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\phi}\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

In derselben Weise kann man dl_2^* formulieren:

$$dl_2^* = dl_2 \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\theta}\right) \quad (5.16)$$

R_θ ist der andere Hauptkrümmungsradius. Gleichung (5.13) kann dann damit unter Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung geschrieben werden als

$$dA^* = dl_1 \cdot dl_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\phi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\theta}\right) \quad (5.17)$$

$$\cong dl_1 \cdot dl_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\phi} - \frac{\Delta x}{R_\theta}\right). \quad (5.18)$$

Das kann man in Gleichung (5.9) einsetzen:

$$d(\Delta A) = dA \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{R_\phi} - \frac{\Delta x}{R_\theta}\right) - dA \quad (5.19)$$

$$= -dA \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{1}{R_\phi} + \frac{1}{R_\theta}\right) \quad (5.20)$$

Gleichung (5.10) wird damit zu

$$\Delta W = \left| \int_{(A_b)} \left[(p_2 - p_1) - \gamma \cdot \left(\frac{1}{R_\phi} + \frac{1}{R_\theta}\right) \right] \cdot \Delta x \, dA \right| \quad (5.21)$$

Ein thermodynamisches Gleichgewicht liegt vor, wenn diese potentielle Verschiebungsenergie der Grenzfläche gleich null ist:

$$\Delta W = 0 \quad (5.22)$$

Die Grenzfläche nimmt also im Gleichgewicht eine Form an, so daß die Hauptkrümmungsradien R_ϕ und R_θ überall so sind, daß gilt:

$$\Delta W = \left| \int_{(A_b)} \left[(p_2 - p_1) - \gamma \cdot \left(\frac{1}{R_\phi} + \frac{1}{R_\theta} \right) \right] \cdot \Delta x \, dA \right| = 0 \quad (5.23)$$

$$\forall \Delta x(\xi, \eta) \in V \subset C^1$$

ξ und η sind dabei lokale Koordinaten auf der Oberfläche. Mit V wird ein geeigneter Funktionenraum bezeichnet, der Teilmenge der Menge aller beschränkter, stetiger Funktionen ist. Gleichung (5.23) ist beispielsweise erfüllt, wenn überall lokal die Laplace-Formel

$$(p_2 - p_1) - \gamma \cdot \left(\frac{1}{R_\phi} + \frac{1}{R_\theta} \right) = 0 \quad (5.24)$$

gilt. Allgemein ist das aber nur zu erreichen, wenn die Gestalt der Oberfläche nicht auf eine bestimmte geometrische Form festgelegt ist. Zur exakten Beschreibung beliebiger Oberflächen sind sehr viele Parameter notwendig. In unserem Fall soll die Oberflächengestalt angenähert werden durch ein Ellipsoid, das in drei Raumrichtungen verdreht werden kann. Die zu bestimmenden Parameter werden zu einem Vektor zusammengefaßt:

$$\vec{x}^T = (a, b, c, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \quad (5.25)$$

Die Krümmungsradien sind an jeder Stelle des Ellipsoids Funktionen der die Oberflächengestalt beschreibenden Parameter und der Ortskoordinaten ξ und η :

$$R_\phi = f(\xi, \eta) \quad (5.26)$$

$$R_\theta = f(\xi, \eta) \quad (5.27)$$

Die Längen der Halbachsen a , b und c sind über das Volumen der Blase voneinander abhängig:

$$V_b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \quad (5.28)$$

Im allgemeinen Fall wird es wegen der vorgegebenen Form der Phasengrenzfläche nicht mehr möglich sein, Gleichung (5.23) exakt zu erfüllen, sondern man muß ein Minimum dieses Funktionals für geeignete Δx in den die Oberflächengestalt beschreibenden Parametern suchen. Gleichung (5.28) ist dabei als Nebenbedingung einzuhalten. Definiert man eine Funktion r zu

$$r(\xi, \eta) := (p_2 - p_1) - \gamma \cdot \left(\frac{1}{R_\phi} + \frac{1}{R_\theta} \right), \quad (5.29)$$

und faßt man Δx als Testfunktion eines allgemeinen Residuen-Verfahrens auf, dann ist es sinnvoll, durch die Wahl von

$$\Delta x = r \quad (5.30)$$

ΔW in eine quadratische Form zu überführen:

$$\Delta W = \int_{(A_b)} r(\xi, \eta)^2 dA \quad (5.31)$$

Das Integral wird jetzt durch eine Summe über den Integranden, evaluiert an n ausgewählten Punkten (ξ_i, η_i) der Phasengrenzfläche ($i = 1, \dots, n$), ersetzt. Die erforderliche Berechnung der Krümmungsradien R_ϕ und R_θ an beliebigen Stellen auf der Ellipsoidoberfläche erfolgt nach Projektion in eine Koordinatenebene mit den in Bronstein et al. [9], Abschnitt 3.6.3.4, angegebenen Formeln. Wenn die Punkte gleichmäßig über die Blasenoberfläche verteilt sind, dann ist es gerechtfertigt, alle Summanden gleich zu gewichten. Es sind dann die Komponenten von \vec{x} so zu bestimmen, daß

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n r(\xi_i, \eta_i)^2 = \min! \quad (5.32)$$

ein Minimum wird. Diese Aufgabe wird mit einem Simplex-Verfahren (nach Press et al. [87]) erledigt. Es hat sich gezeigt, daß man an den 18 in Abbildung 5.3 ausgewiesenen Punkten das Funktional in (5.32) evaluieren kann, um mit moderatem Rechenaufwand ein physikalisch sinnvolles Minimum zu finden.

Die Lösung der Minimierungsaufgabe ist im allgemeinen nicht eindeutig. Bei der Umsetzung in einen Algorithmus muß daher überprüft werden, ob eine physikalisch sinnvolle Parameterkombination zur Minimierung des Funktionals gefunden wurde.

Schwierigkeiten treten bei der Bewertung des äußeren Drucks p_1 auf. Dieser Wert ist physikalisch der hydrostatische Druck in der kontinuierlichen Phase an der Grenzfläche an einem Punkt. Im allgemeinen Fall ist dieser Punkt nicht identisch mit einem Punkt, an dem durch die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ein physikalischer Druck berechnet wurde. Deshalb ist eine Interpolation zwischen den benachbarten berechneten Werten notwendig. Werden dazu im Blaseninneren berechnete Druckwerte verwendet, dann sind große Fehler zu erwarten, weil im Blaseninneren keine Strömung der äußeren Phase berechnet wird. Deshalb muß Sorge dafür getragen werden, daß der Druck an einem Punkt genommen wird, der hinreichend weit von der Blase entfernt ist, daß keine Druckwerte vom Inneren der Blase in die Rechnung eingehen. Andererseits treten gerade in unmittelbarer Nähe der Blase große Druckgradienten auf. Es ist daher auch ungünstig, den Druck an einer zu weit von der Blasenoberfläche entfernten Stelle als Näherung für den Druck an der Blasenoberfläche selbst zu verwenden. Der Druck wird deshalb

an dem Gitterpunkt genommen, der der jeweiligen Stelle an der Phasengrenze außenliegend am nächsten ist.

Ein Beispiel zur Validierung

Mit dem Beispiel einer in Wasser aufsteigenden Luftblase soll gezeigt werden, daß der beschriebene Algorithmus die physikalischen Gegebenheiten brauchbar modelliert. Es wird dabei eine Luftblase bei $Re_p = 1000$ betrachtet. Sie steigt in einem genügend großen Gefäß (Abmessungen siehe Abschnitt 5.4) in ruhendem Wasser auf. Die physikalischen Parameter dieses Falls sind in Abschnitt 2.3.2 zusammengestellt. Parameter der Konstellation ist die Mortonzahl. Für Luftblasen in Wasser beträgt sie $Mo = 2.86 \cdot 10^{-11}$ (siehe Abschnitt 2.3.3). Abbildung 5.5 zeigt die berechnete Gestalt der Luftblase sowie einen Schnitt durch das Gefäß, der den Blasenmittelpunkt enthält und auf dem die Geschwindigkeitsvektoren aufgezeichnet sind. Gerechnet wurde auf einem Gitter der Größe $44 \times 44 \times 88$.

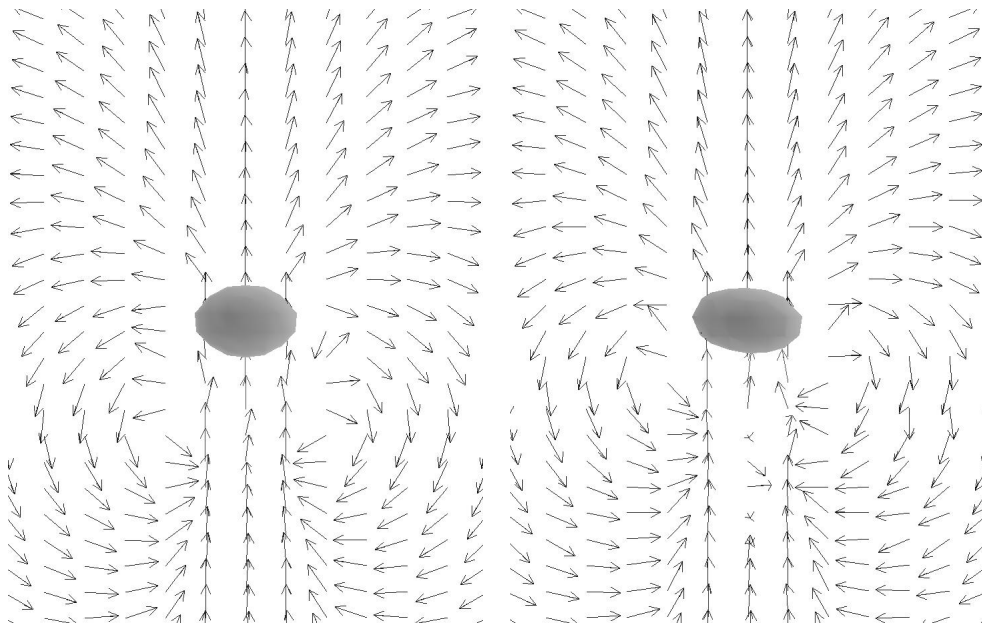


Abbildung 5.5.: Einzelblase $Re_p = 1000$, kurz vor (links) bzw. nach (rechts) dem Einsetzen von Instabilität

Durch einen Vergleich der berechneten Blasenform mit der nach Abbildung 2.2 (Seite 16) aufgrund von Experimenten zu erwartenden zeigt, daß die Blasengestalt vom Modell qualitativ korrekt wiedergegeben wird.

Zur Untersuchung, inwieweit das Verfahren auch quantitativ korrekte oder zumindest brauchbare Ergebnisse liefert, wurden für die Stoffpaarung Luft in Wasser

bei verschiedenen Blasendurchmessern dieselben Simulationen wie die eben beschriebene durchgeführt. Das sich in der Phase des Aufstiegs mit gleichbleibender Geschwindigkeit einstellende Verhältnis der in die z -Richtung weisenden Achse des Ellipsoids zu einer der beiden (gleichlangen) senkrecht dazu stehenden Achsen, $\frac{c}{a}$, wurde für verschiedene Eötvöszahlen berechnet und mit der von Wellek et al. [126] angegebene Ausgleichskurve

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{1 + E\ddot{o}^{0.757}} \quad (5.33)$$

verglichen. Die gerechneten Fälle sind in Tabelle 5.1 zusammengetragen und werden in Abbildung 5.6 mit dem von Wellek et al. angegebenen Funktionsverlauf verglichen.

Tabelle 5.1.: Zusammenstellung von Werten, die für $\frac{c}{a}$ beim Aufstieg einer Luftblase in ruhendem Wasser Blasendurchmessern numerisch erhalten werden. Zum Vergleich ist die Tabelle um die mit 5.33 berechneten Werte ergänzt.

Re_p	$E\ddot{o}$	numerisch	experimentell*
150	0.14	0.99	0.96
250	0.20	0.98	0.95
360	0.30	0.97	0.94
500	0.50	0.94	0.91
620	1.00	0.89	0.86
800	2.00	0.82	0.78
1000	3.50	0.74	0.70

*Ausgleichskurve nach Wellek et al. [126]

Aus Tabelle und Abbildung ist erkenntlich, daß sich die Fehler bei der Vorhersage des Achsenverhältnisses des die Blasenform approximierenden Ellipsoids auf einige Prozent belaufen. In der Tabelle nicht aufgeführt sind die für $Re_p < 150$ erhaltenen Werte für $\frac{c}{a}$. Sie nähern sich mit kleiner werdender Reynoldszahl dem Wert eins an. Dasselbe Verhalten beobachten die Experimentatoren. Die vom numerischen Verfahren vorhergesagte Kugelform der Blasen für solche Fälle entspricht also der Realität.

Eine Variation der Mortonzahl erübrigt sich, weil Gleichung (5.33) für $Mo < 10^{-6}$ gilt, wie Wellek et al. [126] angeben. Damit ist das Verfahren zur Simulation der Bewegung von vielen praxisrelevanten Gas/Flüssigkeitsgemischen geeignet.

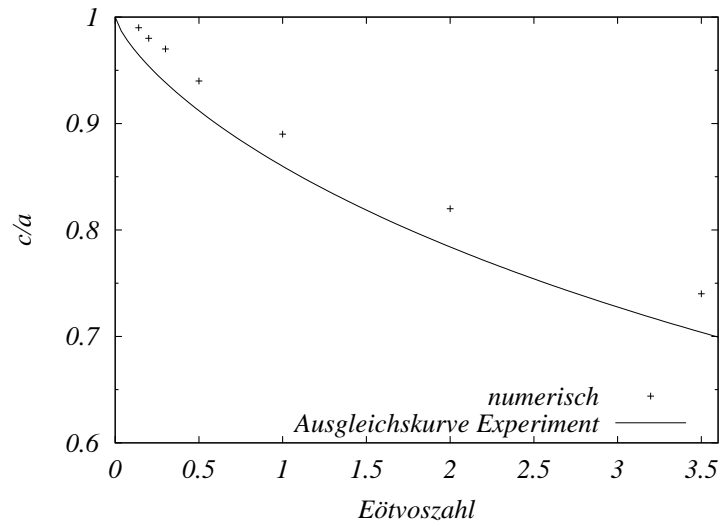


Abbildung 5.6.: Achsenverhältnis $\frac{c}{a}$ als Funktion der Eötvöszahl: Mit dem numerischen Verfahren erhaltene Werte im Vergleich mit der von Wellek et al. [126] angegebenen Ausgleichskurve

5.4. Fehlerkorrektur

Das vorgestellte Modell stellt nicht sicher, daß die physikalischen Übergangsbedingungen an der Phasengrenzfläche (vgl. Abschnitt 2.3.1) eingehalten werden.

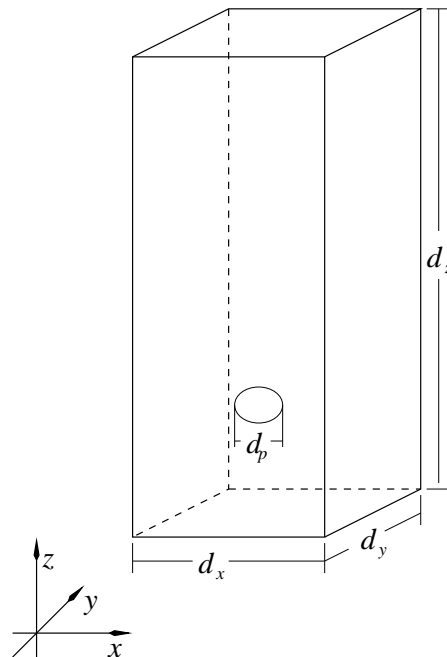


Abbildung 5.7.: Skizze zu den Bezeichnungen bei den Beispielrechnungen

Die Ursache dafür ist, daß im Blaseninneren mit den Parametern der kontinuierlichen Phase gerechnet wird. In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie versucht wird, die aus dieser Vereinfachung resultierenden Fehler klein zu halten.

5.4.1. Verbesserung der Wiedergabe des Einflusses der äußeren Kraft

Numerische Experimente haben gezeigt, daß die Fehler, die bei der Anwendung des Modells auftreten, abhängen von der Lage der Blase im verwendeten Rechengitter sowie vom Verhältnis zwischen Blasenradius und der Gitterweite. Für den Modellfall der in ruhendem Wasser aufsteigenden Blase wurde deshalb untersucht, um welchen Faktor die Wirkung der Auftriebskraft verändert werden muß, damit mit dem Verfahren die Aufstiegs geschwindigkeit der Blase korrekt wiedergegeben wird. Der Korrekturfaktor ζ gewichtet den Volumenkraftterm, über den der Dichteunterschied zwischen beiden Phasen in das Gleichungssystem eingeht. Gleichung (5.3), mit der dieser Term bestimmt wird, lautet mit Korrekturfaktor ζ :

$$f_i = \zeta \cdot v_i \cdot g^+ \quad (5.34)$$

Im numerischen Experiment wurde ζ als Funktion vom Verhältnis von dimensionslosem Blasenradius zu Gitterweite

$$R_g = \frac{d_p^+}{2h} \quad (5.35)$$

ermittelt.

Es wurden die Faktoren für zwei Positionen der Blase im Rechengitter untersucht: Zum einen wird der Blasenmittelpunkt auf dem Schnittpunkt einer Gitterlinie in x -Richtung und einer Gitterlinie in y -Richtung plaziert; der zugehörige Faktor wird mit ζ_{in} bezeichnet. Zum anderen wird die Lage der Blase so gewählt, daß der Blasenmittelpunkt von beiden genannten Linien den maximalen Abstand hat; in diesem Fall befindet er sich auf dem Schnittpunkt der Diagonalen in der x, y -Ebene einer Zelle. Der zugehörige Faktor wird mit ζ_{mit} gekennzeichnet. Die beiden unterschiedlichen Blasenpositionen sind in Abbildung 5.8 gegenübergestellt.

Die beiden Korrekturfaktoren wurden jeweils für die Reynoldszahlen $Re_p = 3.6$, $Re_p = 30$, $Re_p = 150$ und $Re_p = 1000$ als Funktion von R_g durch numerische Experimente bestimmt: In einem Gefäß mit den dimensionslosen Abmessungen von $d_x = 20$, $d_y = 20$ und $d_z = 40$ (Bezeichnungen siehe Abbildung 5.7) steigt in ruhender Flüssigkeit eine Blase auf erzwungenermaßen senkrechter Partikelbahn auf; wegen der Entdimensionierung mit der physikalischen terminale Aufstiegs geschwindigkeit sollte sich ihre dimensionslose terminale Aufstiegs geschwindigkeit zu 1.0 ergeben. Die Blase wird am Punkt mit den Koordinaten (10.0, 10.0, 1.3)

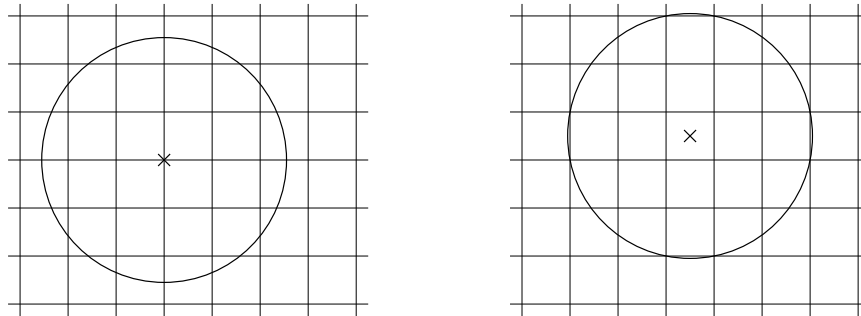


Abbildung 5.8.: Mögliche Positionen der Blasen im Gitternetz: links: Mittelpunkt auf der Gitterlinie, rechts: Blasenmittelpunkt in der Zellmitte

in das Gefäß eingebracht. Begonnen wird mit einer Simulation mit einem beliebigen Wert für ζ . Falls die terminale Aufstiegsgeschwindigkeit nicht den Wert 1.0 annimmt, wird die Simulation mit einem anderen Wert für ζ wiederholt. Mit einiger Erfahrung werden die geeigneten Werte von ζ nach wenigen solchen Iterationen gefunden. Für $Re_p = 30$ sind in Abbildung 5.9 die Korrekturfaktoren der Auftriebskraft, die die gewünschte terminale Aufstiegsgeschwindigkeit bewirken, beispielhaft aufgetragen. Die Lage der einzelnen ζ -Punkte für beide Blasenpositionen läßt darauf schließen, daß in dem numerischen Experiment noch andere Faktoren als das Verhältnis R_g auf ζ einen Einfluß haben. Es hat sich beispielsweise gezeigt, daß bei bestimmten Werten von R_g die gewählte Ausgangsposition

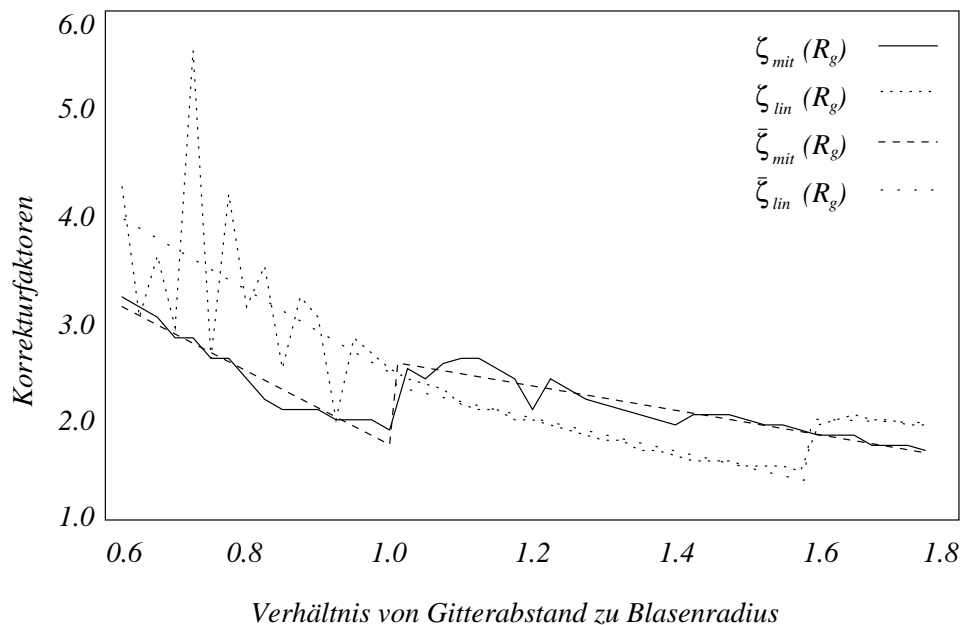


Abbildung 5.9.: Die Faktoren ζ_{lin} und ζ_{mit} sowie $\bar{\zeta}_{lin}$ und $\bar{\zeta}_{mit}$ als Funktion vom Verhältnis von Blasenradius zu Gitterweite R_g für $Re_p = 30$

der Blase im Mittelpunkt einer x, y -Fläche keine stabile Lage ist und daß die Blase diese auf ihrem Weg nach oben verläßt. Dieses Verlassen der senkrechten Aufstiegsbahn führt zu einer erheblichen Veränderung von ζ .

Um im Mittel ein möglichst gutes Ergebnis zu erzielen, bietet es sich an, für den Faktor ζ_{lin} und ζ_{mit} jeweils in geeigneten Bereichen mit den gefundenen Werten eine lineare Regression durchzuführen. Für die untersuchten Reynoldszahlen ergeben sich stückweise definierte lineare Funktionen mit folgender Gleichung:

$$\bar{\zeta} = m \cdot R_g + t \quad (5.36)$$

Die Parameter für die abschnittsweise linear definierte Ausgleichsfunktion zur Bestimmung der Korrekturfaktoren für die Blasenmittelpunktsposition auf dem Schnittpunkt der Gitterlinien sind in Tabelle 5.2 zusammengetragen, die entsprechenden Parameter für Blasenmittelpunkte im Zentrum der Zellen in Tabelle 5.3.

Die Regression hat zudem den Vorteil, daß sie eine Interpolation zwischen die gefundenen Werte für ζ_{lin} und ζ_{mit} impliziert, falls der relative Blasendurchmesser Werte annimmt, für die kein Korrekturfaktor bestimmt wurde. Mit den stückweise definierten Funktionen $\bar{\zeta}_{lin}$ und $\bar{\zeta}_{mit}$ können die gesuchten Faktoren für jeden Wert von R_g innerhalb des Wertebereichs ermittelt werden. In Ermangelung besserer Daten kann außerdem auf Werte für R_g , die außerhalb des Bereichs liegen, in dem Werte für ζ bestimmt wurden, extrapoliert werden.

Das eben eingeführte Korrekturverfahren basiert auf einer Anpassung des Dichteunterschieds, so daß bestimmte makroskopische Eigenschaften, hier die terminale Aufstiegs geschwindigkeit der Blase in ruhendem Medium, korrekt wiedergegeben werden. Es wäre aber auch denkbar, die Größe der Blase in bestimmter Weise zu verändern, um damit dasselbe Ziel zu erreichen.

Tabelle 5.2.: Parameter der Ausgleichsgeraden zur Ermittlung der Korrekturfaktoren $\bar{\zeta}_{lin}$

$\bar{\zeta}_{lin}$	m	t	Bereich
$Re_p = 3.6$	-4.8667	7.0560	$R_g < 0.813$
	-0.9203	2.9085	$R_g \geq 0.813$
$Re_p = 30$	-3.5914	5.3515	$R_g < 1.006$
	-1.1858	3.7536	$R_g \geq 1.006$
$Re_p = 150$	-8.9059	12.624	$R_g < 0.998$
	-3.5586	9.0876	$R_g \geq 0.998$
$Re_p = 1000$	-10.101	7.4439	$R_g < 0.971$
	-5.1984	9.5124	$R_g \geq 0.971$

Tabelle 5.3.: Parameter der Ausgleichsgeraden zur Ermittlung der Korrekturfaktoren $\bar{\zeta}_{mit}$

$\bar{\zeta}_{mit}$	m	t	Bereich
$Re_p = 3.6$	-4.0206	6.4823	$R_g < 1.006$
	-1.6028	3.9401	$R_g \geq 1.006$
$Re_p = 30$	-1.5288	2.9246	$R_g < 1.006$
	-0.5057	2.3909	$1.006 \leq R_g < 1.588$
	0.2143	2.3464	$R_g \geq 1.588$
$Re_p = 150$	-5.4692	10.741	$R_g < 1.575$
	-2.5714	8.1142	$R_g \geq 1.575$
$Re_p = 1000$	-8.6643	12.308	$R_g < 1.227$
	-3.6771	11.935	$R_g \geq 1.227$

Um zur Aussage zu kommen, daß der hier beschrittene Weg die gewünschte gute quantitative Vorhersage des Strömungsfelds in einiger Entfernung von der Blase gewährleistet, wären detaillierte experimentelle Untersuchungen des Strömungsfelds in der Umgebung einer Blase notwendig. Die Literatur zu diesem Thema weist aber große Lücken auf. Es fehlt nicht nur an einer Zusammenfassung experimenteller Arbeiten auf diesem Gebiet, sondern auch an Arbeiten, die Antworten auf die gestellte Frage in spezifischen Einzelfällen geben. Meier [72] hat die Ergebnisse der mit dem Vorgänger des vorgestellten Modells durchgeführten Simulationen mit experimentellen Ergebnissen von Lucic et al. (zusammengestellt in [62]) immerhin qualitativ verglichen und für alle untersuchten Fälle gute Übereinstimmung festgestellt.

Ein weiteres Indiz für die Korrektheit der mit dem vorgestellten Modell erhaltenen Ergebnisse liefert, zumindest für kleine Reynoldszahlen, folgende Überlegung: Werden in der näheren Umgebung um die Blase die Linien gleicher w -Geschwindigkeit (vertikale Richtung) betrachtet und mit denjenigen einer unter vergleichbaren Bedingungen umströmten Kugel verglichen, so ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung. U.a. aus der Veröffentlichung von Hartholt et al. [41] geht hervor, daß sich bei kleiner Reynoldszahl das Stromlinienbild und damit das Strömungsfeld in der Umgebung eines kugelförmigen Körpers kaum unterscheiden, wenn im einen Fall als Randbedingung am Körper die Haftbedingung und im anderen Fall die Rutschbedingung gesetzt werden. Bei der Rutschbedingung erhält man eine Entsprechung zur Umströmung einer Blase mit vernachlässigbarer Viskosität des Gases, bei der Haftbedingung eine Entsprechung der Kugelumströmung. Wenn das mit dem hier vorgestellten Modell berechnete Strömungsfeld in der Umgebung der Blase mit dem in der unter gleichen Bedingungen umströmten Kugel übereinstimmt, dann kann davon ausgegangen werden,

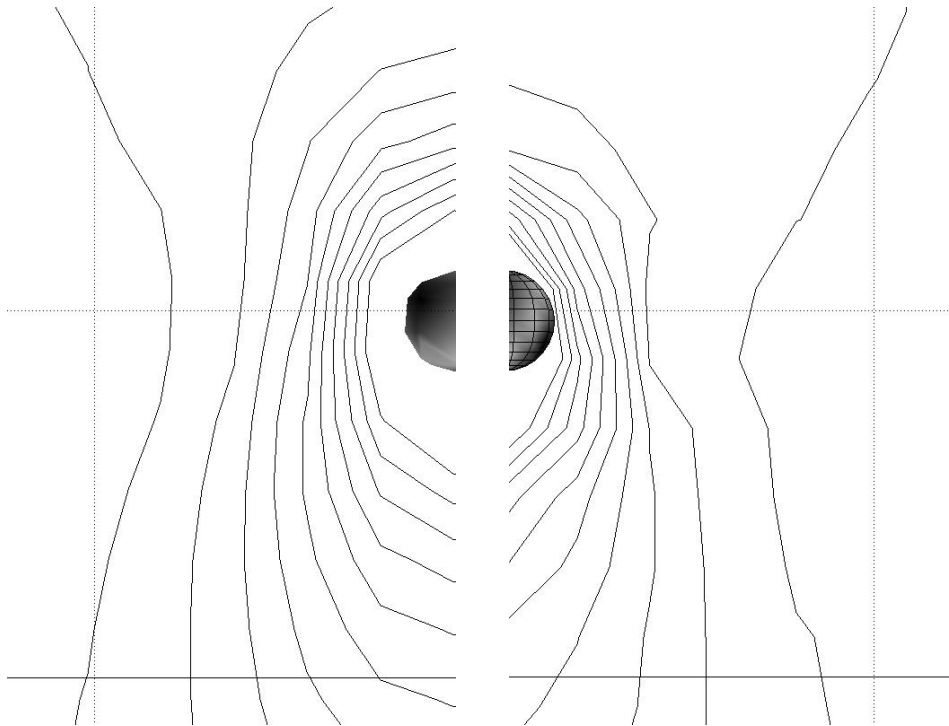


Abbildung 5.10.: Linien gleicher Geschwindigkeit in z -Richtung bei $Re_p = 3.6$;
links: aufsteigende Blase, $R_g = 1.425$, rechts: Kugelumströmung

daß das Modell in dieser Form die Realität gut abbildet. In Abbildung 5.10 sind die Ergebnisse der Simulation einer Kugelumströmung und des Aufstiegs einer Blase bei gleicher Reynoldszahl gegenübergestellt. Die Gestalt des gestörten Gebiets ist in den beiden Fällen sehr ähnlich. Kleine quantitative Unterschiede bestehen in der Größe dieses Gebiets; im Fall der umströmten Kugel ist es sowohl in Aufstiegsrichtung der Blase bzw. Anströmrichtung der Kugel als auch senkrecht dazu etwas kleiner. Eine mögliche Erklärung dafür ist, daß beim Blasenmodell am Rand der Blase in der Regel an Punkten eine geringere Dichte gesetzt wird, die nicht zum Blasenvolumen gehören; die Geometrie der Blase wird also etwas verwischt und die Blase erscheint in den diskretisierten Gleichungen stets etwas größer als sie tatsächlich ist.

5.4.2. Verallgemeinerungen der Fehlerkorrektur

Mit dem soweit vorgestellten Modell kann das Verhalten von Blasen in einer Flüssigkeit modelliert werden. Die dem Modell inhärenten Fehler werden durch Korrekturfaktoren soweit möglich ausgeglichen. Die Fehlerkorrektur wurde bisher durchgeführt bei Fällen, bei denen sich die Blase an zwei bestimmten Stellen relativ zum verwendeten Rechengitter befindet und bei denen so entdimensioniert

wurde, daß der Durchmesser einer Blase genau einer dimensionslosen Längeneinheit entspricht. Die Korrektur bei Blasen an beliebigen Stellen im Rechengebiet sowie bei einer Veränderung der Blasengröße, etwa durch Verdampfung oder Kondensation, oder beim Vorhandensein von Blasen mit unterschiedlichen Durchmessern erfordert eine Anpassung der ermittelten Faktoren an die jeweiligen Bedingungen.

Korrektur für beliebige Blasenposition

Im numerischen Experiment hat sich die naheliegende Vermutung bestätigt, daß der Korrekturfaktor für die beschriebene Korrektur des Einflusses der Auftriebskraft in z -Richtung eine Funktion der beiden anderen Ortskoordinaten x und y ist, die an den untersuchten Stellen Extremstellen in diesen beiden Variablen hat. Die Erklärung dafür ist, daß die beiden untersuchten Stellen, die Kreuzungspunkte der Gitterlinien in der x, y -Ebene und die Mittelpunkte der Zellen bei einem Schnitt dieser Ebene, ausgezeichnete Punkte des Gitters sind.

Um Werte für die Korrekturfaktoren zwischen den untersuchten Punkten zu erhalten, wird folgende Interpolation auf einen beliebigen Punkt (x, y) hin durchgeführt. Zuerst werden die globalen Koordinaten (x, y) in Koordinaten (x_0, y_0) eines zellokalen x_z, y_z -Koordinatensystem umgerechnet. Dann wird der Punkt in ein ξ, η -Koordinatensystem transformiert. Das ξ, η -Koordinatensystem ist gegenüber dem x_z, y_z -Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ gedreht und hat seinen Ursprung wie jenes in der linken unteren Ecke der Zelle, vgl. Abbildung 5.11. Die Transformations-

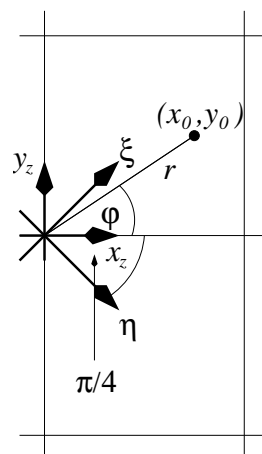


Abbildung 5.11.: Skizze zu den Bezeichnungen bei der Interpolation der Faktoren

vorschriften werden unter Verwendung der Hilfsvariablen r und ϕ angegeben zu:

$$r = \sqrt{x_z^2 + y_z^2} \quad (5.37)$$

$$\phi = \arccos \frac{x_z}{r} \quad (5.38)$$

$$\xi = r \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \phi \right) \quad (5.39)$$

$$\eta = r \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \phi \right) \quad (5.40)$$

Lediglich der Fall $r = 0$ muß gesondert behandelt werden: Wie aus Abbildung 5.11 hervorgeht gilt in diesem Fall $\xi = 0$ und $\eta = 0$.

Die Interpolationsvorschrift wird in den ξ, η -Koordinaten angegeben zu:

$$\alpha = \sin^2 \left(\pi \frac{\xi}{s_d} \right) \cdot \cos^2 \left(\pi \frac{\eta}{s_d} \right) \quad (5.41)$$

$$\zeta = \zeta_{mit} \cdot \alpha + \zeta_{lin} \cdot (1 - \alpha) \quad (5.42)$$

Mit s_d ist darin die Länge der Diagonalen einer Zelle (vgl. Abbildung 5.11) bezeichnet.

Diese Interpolation ermöglicht die Bestimmung der Korrekturfaktoren für Blasen, die sich an beliebigen Orten im Rechengebiet befinden. Es wird zwischen den für die ausgezeichneten Positionen im Gitternetz bestimmten Faktoren interpoliert. Die mit diesem Vorgehen erhaltenen Korrekturfaktoren führen zu Aufstiegs- geschwindigkeiten der Blasen, die mit zusätzlichen Fehlern von wenigen Prozent behaftet sein können.

Korrektur für variable Blasendurchmesser

Blasen mit einem beliebigen dimensionslosen Durchmesser d_p^{n+} haben eine Partikelreynoldszahl (vgl. Abschnitt 2.3.2), die bestimmt wird durch ihre terminale Aufstiegs- geschwindigkeit und ihren Durchmesser. Aus Clift [14] kann für eine bestimmte Stoffkombination, die durch die Mortonzahl gekennzeichnet ist, ein Zusammenhang zwischen der Eötvöszahl und der Reynoldszahl entnommen werden.

Wird wie üblich mit den Größen u_∞ und d_p entdimensioniert und werden die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen der betrachteten Blase mit u_∞^n und d_p^n bezeichnet, so berechnet sich die zur betrachteten Blase gehörende Eötvöszahl in folgender Weise:

$$E\ddot{o}^n = \frac{g \cdot \rho \cdot d_p^{n2}}{\gamma} \quad (5.43)$$

Die Erdschwere g wurde mit

$$g^+ = g \frac{d_p}{u_\infty^2} \quad (5.44)$$

entdimensioniert. Wird dieser Zusammenhang in Gleichung 5.43 eingesetzt, erhält man für die neue Eötvöszahl:

$$E\ddot{o}^n = g^+ \frac{\rho \cdot u_\infty^2 \cdot \frac{d_p^{n+2}}{d_p}}{\gamma} \quad (5.45)$$

Weil der Durchmesser der Blase ebenfalls mit d_p entdimensioniert wird und damit gilt

$$d_p^{n+} = \frac{d_p^n}{d_p}, \quad (5.46)$$

kann die Eötvöszahl berechnet werden zu

$$E\ddot{o}^n = g^+ \frac{\rho \cdot u_\infty^2 \cdot d_p^{n+2} \cdot d_p}{\gamma} \quad (5.47)$$

Mit der Definition der Weberzahl nach Gleichung (2.28) kann man also schreiben:

$$E\ddot{o}^n = g^+ \cdot d_p^{n+2} \cdot We \quad (5.48)$$

Wenn die Weberzahl und der dimensionslose Durchmesser der Blase bekannt ist, wie es bei Simulationsrechnungen der Fall ist, kann damit und mit dem von Clift et al. [14] wiedergegebene Zusammenhang zwischen Reynoldszahl und Eötvöszahl unmittelbar die Reynoldszahl der betrachteten Blase beliebiger Größe bestimmt werden.

Damit wiederum werden durch quadratische Interpolation der zu den vier Reynoldszahlen 3.6, 30, 150 und 1000 bestimmten Faktoren $\bar{\zeta}_{mit}$ und $\bar{\zeta}_{lin}$ die geeigneten Werte ermittelt.

5.4.3. Validierung der strömungsmechanischen Eigenschaften des Blasenmodells

Beim hier vorgestellten Modell wurden einige weitreichende Modellannahmen gemacht. Es muß deshalb gezeigt werden, daß das Modell die Wirklichkeit so gut abbildet, daß die damit gewonnene Daten von hinreichender Güte sind. Dies soll beim vorgestellten Modell anhand möglichst einfacher Problemfälle überprüft werden. Im Abschnitt 2.3.3 wurde bereits erwähnt, daß es nicht möglich ist, aus der Literatur umfassende experimentelle Daten zu naheliegenden Problemfällen zu erhalten. Bei der Anpassung der Modellparameter wurde deshalb die terminale Aufstiegsgeschwindigkeit von Einzelblasen in unendlich ausgedehntem ruhigen

Ozean herangezogen, obwohl es sich dabei um eine globale und keineswegs um eine lokale Größe handelt.

Die mittlere terminale Aufstiegs geschwindigkeit wird für den Bereich, in dem die systematischen Fehler durch Parameteranpassung beseitigt werden, natürlich korrekt vorhergesagt. Um einen Eindruck davon zu vermitteln, in welcher Größenordnung bei Verwendung des Modells zu erwartenden Fehler stets liegen können, ist ein typisches Beispiel für die zur Bestimmung der Korrekturfaktoren durchgeführten Rechnungen in diesen Abschnitt aufgenommen worden. In Abbildung 5.12 wurde die Geschwindigkeit einer Blase unter den beschriebenen Bedingungen bei einer Reynoldszahl von $Re_b = 150$ dargestellt, wie sie auf einem Gitter mit der Auflösung von $40 \times 40 \times 80$ Gitterzellen einmal mit und einmal ohne den geeigneten Korrekturfaktor berechnet wird.

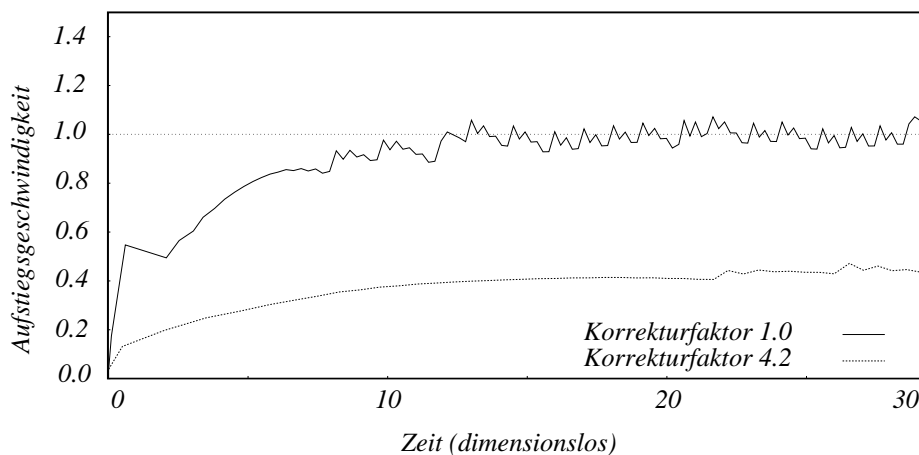


Abbildung 5.12.: Aufstiegs geschwindigkeit einer Einzelblase gegen die (dimensionslose) Zeit; Einzelheiten siehe Text.

Weit weniger offensichtlich ist es, daß mit dem Modell die Geschwindigkeiten von mehreren Blasen, deren Bewegungen sich gegenseitig beeinflussen, korrekt vorhergesagt werden können. Eine geeignete Dokumentation eines solchen Falls findet sich bei Lucic et al. [62]. Die Autoren messen die Aufstiegs geschwindigkeit von Luftblasen, die in ein quaderförmiges Gefäß über eine Düse eingeblasen werden. Das Gefäß ist gefüllt mit Wasser, das in vertikaler Richtung mit variierender mittlerer Geschwindigkeit u_L fließt. Außer im Fall des ruhenden Fluids ($u_L = 0$) liegt dabei eine turbulente Strömung vor. Es wurde versucht, die Bedingungen dieses Experiments so genau wie möglich nachzustellen. Die Querschnittsfläche des Gefäßes ist ein Rechteck mit den Abmessungen $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$. Die Gasblasen werden durch dosierte Gaszugabe über eine Düse in das Gefäß eingebracht. Die Düse befindet sich in der Mitte einer der kürzeren horizontalen Wände des Gefäßes.

5. Ein effizientes Zweiwegverfahren zur Modellierung von Blasen

Da der Versuchsaufbau so gestaltet ist, daß die Messungen in einem Teil des Gefäßes stattfinden, in dem bereits eine voll ausgebildete turbulente Strömung herrscht, müssen die Simulationsrechnungen in folgender Weise durchgeführt werden: In einer Rechnung wird die turbulente Kanalströmung für die jeweiligen Bedingungen und die jeweilige Auflösung simuliert, wobei durch periodische Randbedingungen an Ein- bzw. Ausströmseite dafür gesorgt wird, daß sich die Turbulenz voll ausbilden kann. In einer zweiten Rechnung wird das Blasenverhalten simuliert. Aus der ersten Rechnung wird dazu das Geschwindigkeitsfeld in einem Querschnitt des Kanals als Einströmrandbedingung für die Geschwindigkeiten bei der zweiten Rechnung genommen. Die Skizze in Abbildung 5.13 verdeutlicht die Koppelung der beiden Rechnungen. Technisch realisiert wird das Prinzip dadurch, daß die Daten aus der ersten Rechnung zusammen mit der aktuellen Zeitschrittweite auf die Festplatte geschrieben und von der zweiten Rechnung eingelesen werden. Die erste Rechnung legt damit die Zeitschrittweite der eigent-

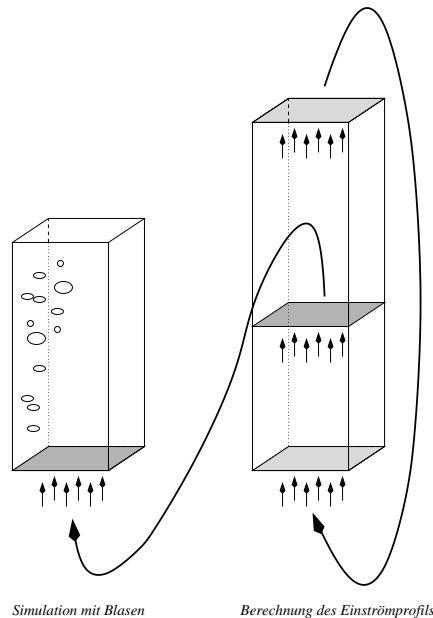


Abbildung 5.13.: Skizze zur Kopplung der Berechnung der turbulenten Kanalströmung und der Simulation der Strömung mit Blasen

lichen Simulationsrechnung mit fest. Stabilitätsprobleme aufgrund der Tatsache, daß die Simulationsrechnung einen kleineren Zeitschritt als die Berechnung der turbulenten Kanalströmung erforderte, gab es in keiner der Beispielrechnungen. Am Ausströmrand bei der zweiten Rechnung werden verkürzte Navier-Stokes-Gleichungen ohne den Druckterm gelöst. Zur Stabilisierung des Verfahrens ist es notwendig, dort eine um ca. 10 Zellen ins Innere des Gebiets reichende Schwamm-schicht anzubringen, innerhalb derer die Reynoldszahl exponentiell auf eins erhöht wird, vgl. Kloker et al. [52]. Die Daten aus dem Gebiet der Schwamm-schicht können nicht zur Auswertung verwendet werden.

Das Volumen der Blasen, die sich von der Düse lösen, hängt im wesentlichen vom Gasvolumenstrom durch die Düse, der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers und den Details der Düsengeometrie ab. Der Blasendurchmesser als Maß für das Blasenvolumen ist für die dem experimentellen Aufbau zugrundeliegenden Verhältnisse in Abhängigkeit von Gasvolumenstrom und Strömungsgeschwindigkeit des Wassers dokumentiert. Da die komplexen Dreiphasenvorgänge an der Düsenöffnung nicht simuliert werden, geht der in den Experimenten bestimmte Blasendurchmesser sozusagen als Anfangsbedingung in die Rechnung ein. In Abbildung 5.14 sind für verschiedene mittlere Strömungsgeschwindigkeiten bei einem konstanten Gasvolumenstrom von \dot{V}_G die berechneten Blasengeschwindigkeiten den gemessenen gegenübergestellt. Tabelle 5.4 gibt Auskunft über die sich beim Experiment einstellenden bzw. bei der Rechnung vorgegebenen Blasendurchmesser sowie über die übrigen Parameter der Rechnungen.

Aus Abbildung 5.14 geht in allen Fällen hervor, daß das numerische Verfahren Ergebnisse liefert, die mit experimentellen Beobachtungen in zufriedenstellender Übereinstimmung stehen. Auffallend ist, daß bei den beiden niedrigeren Strömungsgeschwindigkeiten des Wassers die Qualität der Voraussagen sehr gut ist, während bei der hohen Strömungsgeschwindigkeiten des Wassers Fehler bis zu 10% auftreten. Neben den Modellannahmen, deren vereinfachender Charakter

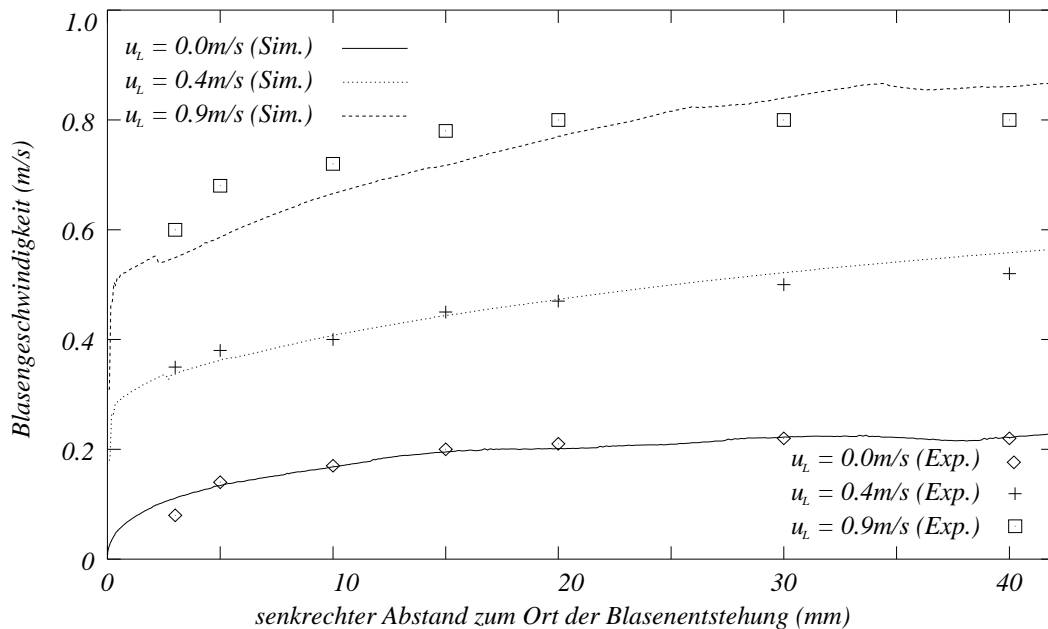


Abbildung 5.14.: Aufstiegs- oder Blasengeschwindigkeit u_L in m/s gegen Abstand vom Ort der Blasenbildung in mm für verschiedene Fälle aus Lucic et al. [62] (Fälle a, b und d)

5. Ein effizientes Zweiwegverfahren zur Modellierung von Blasen

Tabelle 5.4.: Parameter der Rechnungen zur Validierung

Fall	a	b	c	d	e
u_L [m/s]	0.0	0.4	0.3	0.9	0.3
\dot{V}_G [ml/min]	20	40	16	40	80
d_p [mm]	2.3	3.2	2.2	1.7	3.3
Re_p	500	700	480	340	720
Re	0	5250	4000	12000	4000
d_x [mm]	20				
d_y [mm]	10				
d_z [mm]	90			60	
z_{ori} [mm]	11.5	3.2	2.2	1.7	3.3
Auflösung	48 × 24 × 192 Zellen				

stets zu Fehlern in dieser Größenordnung führen kann, ist hier zu vermuten, daß das verwendete Turbulenzmodell die Eigenschaften der Strömung nicht mehr fein genug wiedergibt.

Weiterhin wurde von Lucic et al. [62] untersucht, wie sich das mittlere Strömungsprofil durch die Anwesenheit der Blasen verändert. Bei moderater Reynoldszahl ($u_L = 0.3$ m/s) wurde der Gasvolumenstrom variiert und die mittlere Geschwindigkeit in senkrechter Richtung in 16 mm Abstand oberhalb der Düse gemessen. Messung und numerische Simulation wurden bei Gasvolumenströmen von $\dot{V}_G = 0$ ml/min, $\dot{V}_G = 16$ ml/min und $\dot{V}_G = 80$ ml/min durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.15 gegenübergestellt. Wieder zeigt sich in allen Fällen

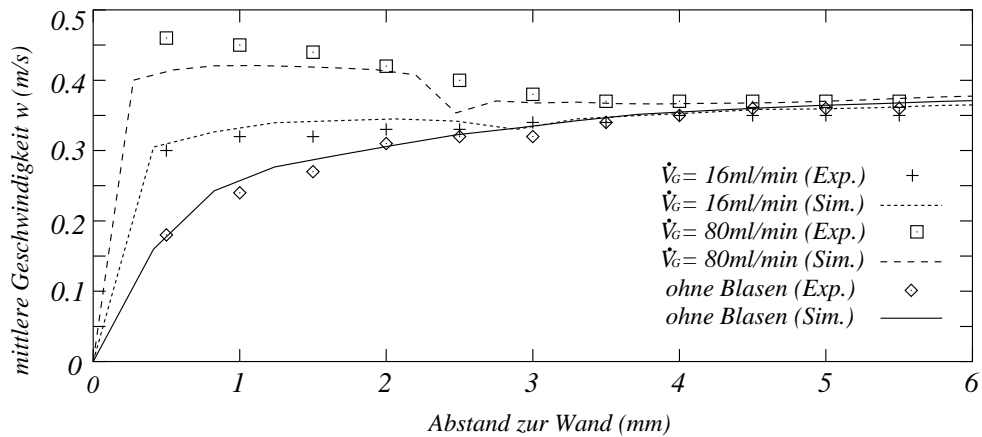


Abbildung 5.15.: Mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung (vertikale Komponente des Geschwindigkeitsvektors) in m/s als Funktion des Wandabstands in mm für verschiedene Fälle aus Lucic et al. [62] (Fälle c und e)

eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation. Die kleinen Abweichung zwischen den Meßpunkten und der berechneten Kurve können wieder auf die Turbulenzmodellierung zurückgeführt werden: Hier haben die relativ hohen Geschwindigkeitsgradienten in der Umgebung der bei $\dot{V}_G = 80 \text{ ml/min}$ entstehenden großen Gasblasen die Berechnung einer Wirbelviskosität zur Folge, die insgesamt zur Verkleinerung der Geschwindigkeitsgradienten führt. Im betrachteten Fall tritt dieser Effekt in der Nähe der Wand auf, wo der Wirkungsschwerpunkt des Turbulenzmodells liegt.

5.5. Modellierung des Phasenübergangs

Neben Problemfällen, bei denen kein Massenaustausch zwischen flüssiger und gasförmiger Phase zustandekommt wie der Bewegung von Luftblasen in Wasser, gibt es zahlreiche Anwendungen, bei denen wichtige Systemeigenschaften gerade durch den Massenaustausch zwischen den beiden Phasen bestimmt sind. Dazu zählen beispielsweise Konstellationen, deren Wirkungsprinzip auf dem Phasenwechsel des Mediums, d.h. auf Verdampfung und Kondensation beruht.

Wichtige technische Anwendungen dieses Prinzips sind Kälteanlagen und Wärmeübertrager. Das vorgestellte Verfahren ist geeignet für die Simulation der Effekte in der Gegenwart einzelner Blasen und hat seine Stärken bei Problemfällen, bei denen viele stark dispergierte Blasen auftreten. Bei den betrachteten Fällen darf der gesamte Gasvolumenanteil im Rechengbiet nicht zu hoch werden. Systeme, bei denen es etwa zum vollständigen Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand des Fluids im betrachteten Gebiet kommt, können mit diesem Verfahren nicht untersucht werden.

Sehr gut geeignet ist das Verfahren dagegen zur Simulation des unterkühlten Blasensiedens. Wird die Bildung der Blasen an der beheizten Wand dabei modelliert, so kann das Blasenwachstum in überhitzten Bereichen des Fluids in der Nähe der Wand sowie das Schrumpfen und Verschwinden der Blasen durch Kondensation in unterkühlten Gebieten in einiger Entfernung von der Wand simuliert werden. Außerdem können beispielsweise Begasungsanlagen betrachtet werden, bei denen Inertgas, z.B. Sauerstoff in kleine Blasen in eine Flüssigkeit eingebracht wird mit dem Ziel, daß sich das Gas in der Flüssigkeit löst.

5.5.1. Ermittlung der Volumenänderung einer Blase durch Kondensation und Verdampfung

Die Modellierung der Vorgänge der Verdampfung und der Kondensation geschieht anhand einer Energiebilanz in einem Gebiet, das die Blase umfaßt sowie zusätzlich

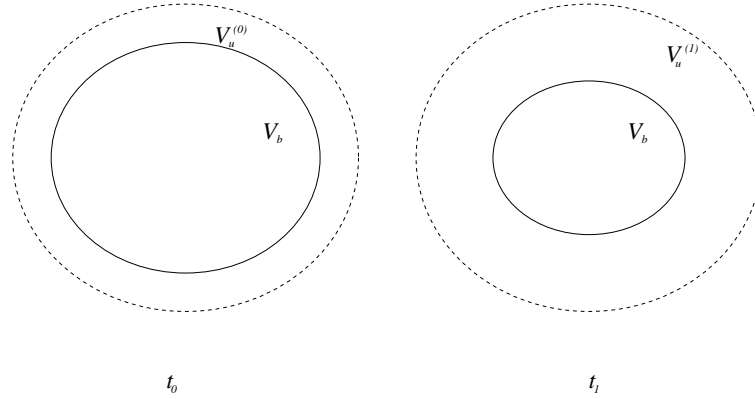


Abbildung 5.16.: Skizze zu den Bezeichnungen bei der Modellierung des Phasenübergangs

eine kleine Umgebung der Blase, in der sich die kontinuierliche, flüssige Phase befindet. Über die Bezeichnungen gibt Abbildung 5.16 Auskunft. Bei Vernachlässigung der Druckabhängigkeiten der thermodynamischen Größen kann man eine Energiebilanz im Volumen V_u im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ aufstellen:

$$\int_{(V_u)} h(\vec{x}, t_0) \cdot \rho(\vec{x}, t_0) dV = \int_{(V_u)} h(\vec{x}, t_1) \cdot \rho(\vec{x}, t_1) dV \quad (5.49)$$

t_0 ist der Anfang, t_1 das Ende des Zeitintervalls Δt ; mit $h(\vec{x}, t)$ wird die spezifische (massenbezogene) Enthalpie bezeichnet (vgl. diverse Lehrbücher, etwa Stephan und Mayinger [105] oder Grigull [36]). Für die Rechnungen mit Wasser wird der Wert den Wasserdampfatafeln (z.B. Haar et al. [38]) entnommen. Zum Zeitpunkt t_0 sei die Temperatur $\theta = \theta(\vec{x}, t)$ an allen Orten \vec{x} in V_u bekannt. Dann läßt sich die linke Seite von Gleichung (5.49) berechnen zu:

$$\int_{(V_u)} h(\vec{x}, t_0) \cdot \rho(\vec{x}, t_0) dV = \int_{(V_u - V_b^{(0)})} c_p [\theta(\vec{x}, t_0) - \theta_s] \cdot \rho_F dV + \Delta h_s \cdot \rho_D \cdot V_b^{(0)} \quad (5.50)$$

Darin wird mit θ_s die Siedetemperatur und mit Δh_s die Verdampfungsenthalpie bezeichnet. Für die Dichte von Dampf und Flüssigkeit steht das Zeichen ρ_D bzw. ρ_F . Es wird angenommen, daß das Volumen der Blase ganz von Dampf auf Siedetemperatur ausgefüllt wird. Der Nullpunkt für die Enthalpieberechnungen wird auf den Siedepunkt bei flüssigem Aggregatzustand gesetzt. Temperatur- und Druckabhängigkeiten der thermodynamischen Zustandsgrößen werden zunächst vernachlässigt. Mit der Annahme, daß zum Zeitpunkt t_1 das neue Blasenvolumen wieder überall Siedetemperatur aufweist und daß die flüssige Phase in der Umgebung $V_u - V_b^{(0)}$ ebenfalls überall auf Siedetemperatur ist, ergibt sich für die

rechte Seite von Gleichung (5.49):

$$\int_{V_u} h(\vec{x}, t_1) \cdot \rho(\vec{x}, t_1) dV = \Delta h_s \cdot \rho_D \cdot V_b^{(1)} \quad (5.51)$$

Zusammen mit Gleichung (5.50) und (5.51) kann man Gleichung (5.49) nach dem gesuchten $V_b^{(1)}$ auflösen und erhält:

$$V_b^{(1)} = \frac{1}{\Delta h_s \cdot \rho_D} \left(\int_{(V_u - V_b^{(0)})} c_p [\theta(\vec{x}, t_0) - \theta_s] \cdot \rho_F dV + \Delta h_s \cdot \rho_D \cdot V_b^{(0)} \right) \quad (5.52)$$

Definiert man eine dimensionslose Temperatur

$$T = \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_0}, \quad (5.53)$$

wobei θ_∞ und θ_0 Referenztemperaturen sind, dann erhält man mit der dimensionslosen spezifischen Wärmekapazität

$$c_p^+ := \frac{c_p \cdot \theta_0}{\Delta h_s} \quad (5.54)$$

folgende Gleichung, die die Bestimmung des (dimensionslosen) Volumens der Blase zum Zeitpunkt t_1 aus zum Zeitpunkt t_0 bekannten Größen erlaubt:

$$V_b^{(1)} = c_p^+ \cdot \frac{\rho_F}{\rho_D} \cdot \int_{(V_u - V_b^{(0)})} [T(\vec{x}, t_0) - T_s] dV + V_b^{(0)} \quad (5.55)$$

T_s ist darin die mit (5.53) entdimensionierte Siedetemperatur.

Gleichung (5.55) wurde hergeleitet unter Vernachlässigung der Druck- und Temperaturabhängigkeiten der thermodynamischen Zustandsgrößen. Insbesondere der Druck innerhalb der Blase aber, der vom (hier als konstant angenommenen) Blasenradius $r = d_p/2$ und der Oberflächenspannung γ nach einer vereinfachten Laplace-Gleichung als

$$p = \frac{2\gamma}{r} \quad (5.56)$$

abhängt, kann für variierende Blasengrößen stark unterschiedliche Werte annehmen. Wegen der Druckabhängigkeit der spezifischen Verdampfungsenthalpie werden dann mit Gleichung (5.55) zu große Blasen volumina berechnet. Weil der Druck mit kleiner werdendem Blasen volumen zunimmt und damit die Näherung der spezifischen Verdampfungsenthalpie durch den Wert bei Normaldruck immer schlechter wird, wirkt sich der Fehler gerade bei kleinen Blasen besonders stark aus.

Hier wird deshalb vorgeschlagen, die Verdampfungsenthalpie näherungsweise dadurch zu berechnen, daß Verdampfung bei Siedetemperatur unter Normaldruck mit anschließender Erhitzung des Dampfes auf die druckabhängige Endtemperatur angenommen wird; die spezifische Wärmekapazität des Dampfes $c_{p,D}$ wird dabei als konstant betrachtet; der entsprechende dimensionslose Ausdruck $c_{p,D}^+$ wird wie bei der spezifischen Wärmekapazität des Wassers analog Gleichung (5.54) erhalten. Der Zusammenhang zwischen Druck und Siedetemperatur wird dabei berechnet mit der *Antoine-Gleichung*

$$\log_{10} p = A - \frac{B}{C + \theta}, \quad (5.57)$$

einer vereinfachten Lösung der *Clausius-Clapeyronschen Gleichung*. (vgl. Stephan und Mayinger [105]). Die Konstanten darin werden ebenfalls [105] entnommen. Es ist darauf hinzuweisen, daß p und θ hier dimensionsbehaftet, d.h. in hPa bzw. °C einzusetzen sind. Damit und mit $c_{p,D}$ aus der Wasserdampf-tafel [38] bzw. einem anderen geeigneten Tabellenwerk wird eine Größe c_p^* definiert zu

$$c_p^* := \frac{c_p^+}{1 + c_{p,D}^+ \cdot (T - T_S)}. \quad (5.58)$$

Ersetzt man damit in Gleichung (5.55) c_p^+ , so erhält man eine Berechnungsvorschrift, die den Anstieg des Drucks bei kleiner werdender Dampfblase berücksichtigt. Zur Veranschaulichung sind in Tabelle 5.5 einige Werte für c_p^* zusammengestellt.

Tabelle 5.5.: Einige Werte von c_p^*/c_p^+ zur Veranschaulichung der Druckabhängigkeit der spezifischen Enthalpie

r [mm]	0.01	0.05	0.10	0.50	1.00	5.00
c_p^*/c_p^+	1.42	1.24	1.19	1.10	1.08	1.03

Bei diesem Vorgehen wurde bei der Formulierung beider Seiten von Gleichung (5.49) bei der Enthalpieberechnung das Blasen-volumen zum Zeitpunkt $t = t_0$ verwendet; vereinfachend wird dabei also bei der Berechnung des neuen Blasen-volumens die Siedetemperatur verwendet, die zum alten Blasen-volumen gehört. Diese Vereinfachung reduziert den Rechenaufwand erheblich, denn die Substitution der vom zu berechnenden Blasen-volumen abhängigen Temperatur durch die angegebenen Formeln würde dazu führen, daß Gleichung (5.52) nicht mehr geschlossen nach $V_b^{(1)}$ aufzulösen ist.

In der Praxis hat sich gezeigt, daß Gleichung (5.55) zur Berechnung eines neuen Blasen-volumens nicht in allen Fällen brauchbare Ergebnisse liefert. Das hat zunächst damit zu tun, daß die Umgebung der Blase, in der die Energiebilanz aufgestellt wird, nicht beliebig klein gewählt werden kann. Es hat sich bewährt,

die Umgebung etwa so groß zu wählen, daß der Abstand zwischen Blasenoberfläche und äußerem Rand der Umgebung überall etwa 1.0 bis 1.5 Gitterweiten entspricht. Es werden damit aber zum Teil von $V_b^{(0)}$ erheblich abweichende neue Blasenvolumina berechnet. Um das Verfahren stabil zu halten, wird die Blasenverkleinerung begrenzt auf eine Volumenreduktion von einem Drittel; das neue Blasenvolumen darf andererseits nicht größer als das geometrische Mittel zwischen altem Blasenvolumen und dem Volumen der Blasenumgebung sein. Das mit diesen Regeln bestimmte neue Blasenvolumen kann sich von $V_b^{(1)}$ unterscheiden und wird mit $V_b^{(2)}$ bezeichnet.

Eine mögliche Differenz zwischen $V_b^{(1)}$ und $V_b^{(2)}$ führt dazu, daß die Temperatur des flüssigen Fluids in der Umgebung der Blase neu berechnet werden muß; die Energiebilanz von Gleichung (5.49) wäre nicht mehr erfüllt. Die geeignete Temperatur T_u des Fluids in der Umgebung der Blase berechnet sich zu

$$T_u = T_s + \frac{V_b^{(1)} - V_b^{(2)}}{V_u - V_b^{(1)}} \cdot c_p^* \cdot \frac{\rho_F}{\rho_D}. \quad (5.59)$$

Fälle, daß das mit Gleichung (5.55) berechnete neue Blasenvolumen $V_b^{(1)}$ unbrauchbar ist, treten etwa auf, wenn eine Dampfblase in ein stark unterkühltes Gebiet gerät. Dann wird mit Gleichung (5.55) ein sehr kleines, unter Umständen sogar ein negatives Blasenvolumen berechnet. Gleichung (5.59) liefert in diesem Fall eine Temperatur in der Umgebung der Blase, die kleiner als die Siedetemperatur ist. Anschaulich bedeutet das, daß die Dampfblase nicht groß genug war, als daß durch die Kondensation ihres ganzen Volumens die ganze betrachtete Umgebung auf Siedetemperatur gebracht werden konnte.

Umgekehrt werden Blasenvolumina berechnet, die groß, unter Umständen sogar größer als das Volumen der betrachteten Umgebung sind, wenn die Umgebung der Blase stark überhitzt ist. In solchen Fällen wird mit Gleichung (5.59) eine Temperatur berechnet, die größer als die Siedetemperatur ist; es bleibt also überhitztes Fluid in der Umgebung der Blase zurück.

Im numerischen Verfahren wird die neue Größe der Blase $V_b^{(2)}$ bei der Berechnung des neuen Dichtefelds benötigt. Sie wird also bei jedem Zeitschritt neu berechnet. Die Form der Blase bleibt dabei zunächst unverändert, d.h die Verhältnisse der Halbachsen zueinander bleiben gleich.

5.5.2. Die Auswirkung der Volumenänderung der Blase auf die kontinuierliche Phase

Zunächst ist festzustellen, daß sich durch Verdampfung die zum Zeitpunkt t_0 im Gebiet V_u vorhandene Masse ausdehnt und daß sie sich durch Kondensation

zusammenzieht. Die Änderung des Volumens dieser zum Zeitpunkt t_0 in V_u vorhandenen Masse kann in erster Näherung als Differenz der Blasenvolumina zu den Zeitpunkten t_0 und t_1 angegeben werden zu $V_b^{(2)} - V_b^{(0)}$. Dabei wird vernachlässigt, daß das Volumen der flüssigen Phase im Volumen V_u bei Verdampfung abnimmt und bei Kondensation zunimmt. Diese Annahme ist dann berechtigt, wenn auch Annahme (5.1) zutrifft, wie es schon bei der Bestimmung des Dichtefelds vorausgesetzt wurde.

Die Volumendifferenz $V_b^{(2)} - V_b^{(0)}$ muß in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt werden, denn diese stellt für jede Zelle die lokale Volumenbilanz dar. Im Fall ohne Phasenübergang wird die Kontinuitätsgleichung zu

$$\nabla \circ \vec{u} = 0 \quad (5.60)$$

geschrieben. Die rechte Seite der diskretisierten Gleichung ist gleich dem Nullvektor, weil die Volumenbilanz über jede Zelle erfüllt sein muß, d.h. die Differenz zwischen der Summe der Volumenströme in die Zelle hinein und der aus der Zelle heraus gleich null sein muß. Für den jetzt auftretenden Fall ist diese Differenz an den Stellen, an denen Volumen durch Verdampfung hinzukommt oder durch Kondensation verschwindet, nicht mehr gleich null. Im diskreten Fall bedeutet das, daß die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\mathbf{M}^T \vec{u}_h = \vec{k}_h \quad (5.61)$$

Weil in diesem Gleichungssystem die Zeilen den Zellen zugeordnet sind, sind es auch die Komponenten des Vektors \vec{k}_h . Die Komponenten sind überall dort gleich null, wo keine Volumenänderung auftritt, in Fällen ohne Phasenübergang also überall. Kommt aber an einer Zelle im Rechengebiet ein Volumen ΔV_z hinzu, so nimmt die zugehörige Komponente von \vec{k}_h diesen Wert an.

Da sich die Blasen im Modell im allgemeinen über mehrere Zellen in jeder Raumrichtung erstrecken können, muß die pro Blase errechnete Volumendifferenz ΔV in einer festgelegten Weise den Zellen des Rechengebiets zugeteilt werden. Es hat sich als günstig erwiesen, $V_b^{(2)} - V_b^{(0)}$ auf alle an einer Blase beteiligten Zellen gleichmäßig zu verteilen. Sind n_z Zellen an der Blase beteiligt, so berechnet sich ΔV_z zu

$$\Delta V_z = \frac{V_b^{(2)} - V_b^{(0)}}{n_z} \quad (5.62)$$

Um Druckstöße zu vermeiden, wird die zu einem Zeitschritt an die Kontinuitätsgleichung weitergegebene Volumenänderung je Blase mit dem Faktor 0.5 unterrelaxiert. Die Komponenten des Vektors \vec{k}_h werden dadurch als Funktion der Zeit geglättet. Für den Einsatz des Verfahrens ist es unbedingt notwendig, daß das Rechengebiet mit einem Rand versehen ist, bei dem der Volumenstrom nicht vorgegeben ist, damit das neu hinzukommende Volumen abfließen bzw. durch

Kondensation verschwindendes Volumen nachgeliefert werden kann. Für realistische Problemfälle hat sich das Verfahren als stabil erwiesen; es muß aber darauf geachtet werden, daß $V_b^{(2)} - V_b^{(0)}$ in einem Zeitschritt nicht zu groß wird. Wird z.B. im Verlauf der Rechnung eine große Dampfblase in ein stark unterkühltes Teilgebiet des Rechengebiets eingebracht, dann verliert sie in einem einzigen Zeitschritt einen Großteil ihres Volumens. In solchen Fällen kann es vorkommen, daß die Lösung der Poissongleichung Schwierigkeiten macht.

5.5.3. Validierung der Modellierung des Phasenübergangs

Bei konstanter Temperatur der Umgebung der Blase, gegen null gehender Gitterweite h ($\lim_{h \rightarrow 0} V_u - V_b = 0$), sehr kleinem Zeitschritt Δt und der Gültigkeit der Annahme, daß die Gastemperatur im Blaseninnern konstant ist, liefert die beschriebene Modellierung des Phasenübergangs korrekte Ergebnisse. Der Einsatz des Modellierungsansatzes zur Simulation realistischer Probleme erfordert jedoch eine Validierung durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen.

Diese gestaltet sich ausgesprochen schwierig: Zwar können bei den Simulationsrechnungen die strömungsmechanischen Effekte beispielsweise durch Nullsetzen der Dichtedifferenz und der Betrachtung eines ruhenden Fluids als äußere Phase gleichsam ausgeschaltet werden; solche vereinfachten Szenarien lassen sich aber natürlich experimentell kaum realisieren.

Die Validierung des Verfahrens erfolgt daher anhand eines Falls, der den später in Kapitel 6 untersuchten nahe verwandt ist: Es wurde das Verhalten des Blasenradius als Funktion der Lebenszeit einer Blasen betrachtet, die an einer senkrechten, turbulent angeströmten Wand entsteht. Die Arbeit von Lucic et al. [61] enthält eine Dokumentation von Problemfällen, die sich für den Vergleich von numerischen und experimentellen Ergebnissen sehr gut eignen. Abbildung 5.17 stellt die experimentellen Daten den Simulationsergebnissen gegenüber. Die Temperatur der Wand beträgt in den untersuchten Fällen 2 K, die Unterkühlung des anströmenden Fluids (Wasser) 9 K. Die Simulation und Experiment zugrundeliegende Geometrie ist ein Kanal mit rechteckigem Querschnitt mit Seiten von 8 mm bzw. 10 mm. Beheizt wird eine der längeren Seitenwände. Der fast quadratische Querschnitt des Rechengebiets wird mit 48 Gitterzellen je Raumrichtung aufgelöst. Da wieder eine turbulente Einströmbedingung benötigt wird, muß der eigentlichen Simulation eine getrennte Rechnung vorausgehen, mit der die Kanalströmung in der entsprechenden Geometrie simuliert wird. Aus dieser Simulation wird das Geschwindigkeitsfeld in einem Querschnitt als Einströmbedingung für die eigentliche Simulation verwendet, vgl. Abschnitt 5.4.3.

Der Vergleich zeigt, daß mit dem Modell realistische Blasenlebenszeiten erhalten werden. Da der Blasenbildungs- und Ablösevorgang an der Wand nicht modelliert

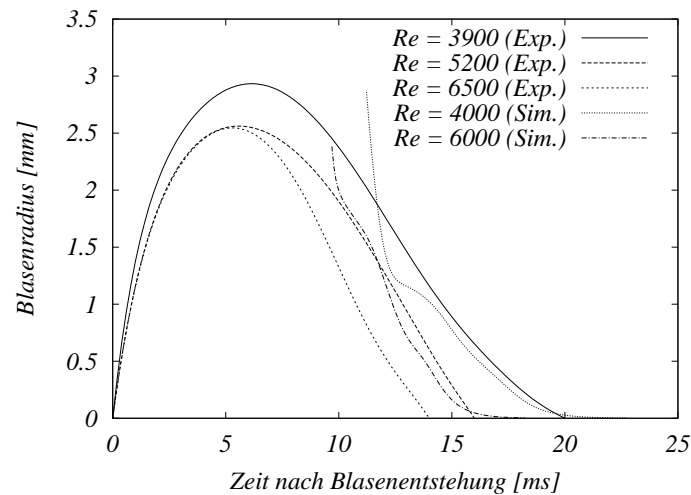


Abbildung 5.17.: Vergleich von experimentell gemessenem und numerisch berechnetem Blasenradius als Funktion der Lebenszeit von Dampfblasen für unterschiedliche Kanalreynoldszahlen. Experimentelle Daten aus Lucic et al. [61], Parameter siehe Text.

wird, gibt es zu dem Bereich der experimentellen Daten, in dem der Blasenradius wächst, keine numerisch ermittelte Entsprechung. Bei der Simulation werden die Blasen daher mit etwa dem maximalen experimentell ermittelten Radius an der Wand in die Strömung eingebracht. Das wenig befriedigende Verhalten der Steigung der numerisch bestimmten Kurven kurz nach dem Einsetzen der Blasen dürfte auch auf die mangelnde Modellierung der Blasenentstehung zurückzuführen sein. Sehr gut vorhergesagt wird hingegen das Blasenverhalten in der Zeitspanne vor der vollständigen Kondensation.

5.5.4. Beispiel: Blasenbildung bei der Erhitzung von ruhendem Wasser

In Abbildung 5.18 sind zwei Momentaufnahmen aus der Simulation der Vorgänge in einem beheizten Wassergefäß mit den Abmessungen $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ dargestellt, die $10 \times 10 \times 60$ dimensionslosen Längeneinheiten entsprechen. Die Simulation wurde auf einem Gitter mit $42 \times 42 \times 84$ Gitterzellen durchgeführt. Die Schwerkraft wirkt in z -Richtung. Zu Beginn hat das Wasser überall die Temperatur von 372.5 K . Beheizt wird die senkrechte Wand bei $x = 0$. Ihre Temperatur wird konstant auf 375.0 K gehalten. An der beheizten Wand gibt es zwei Blasenkeimstellen, eine auf der Höhe $z = 2.0$, die andere auf der Höhe $z = 5.0$, beide senkrecht übereinander auf einer Linie $y = 4.0$. Es wird angenommen, daß dort zu jedem Zeitschritt (≈ 0.04) ein Volumen verdampft, das dem einer Blase

mit dem Durchmesser von $25 \cdot 10^{-3}$ mm entspricht. Abbildung 5.18 zeigt Linien gleicher Temperatur in einem Schnitt $y = 4.0$ zu den (dimensionslosen) Zeiten $t \approx 8.2$ und $t \approx 20.0$. In der ersten Aufnahme befinden sich die Blasen noch an der Keimstelle. Sie werden durch die Vereinigung mit dem jeden Zeitschritt hinzukommenden neu verdampften Wassers, das als Blasen entsprechenden Volumens in der Rechnung berücksichtigt wird, am Ort der Keimstelle festgehalten. Bereits hier ist gegenüber dem Gebiet der Wand, an dem sich keine Dampfblasenkeimstellen befinden, eine Verschiebung der Linien gleicher Temperatur zu sehen. Mit dem Fortschreiten der Zeit lösen sich Blasen und steigen in der Nähe der Wand

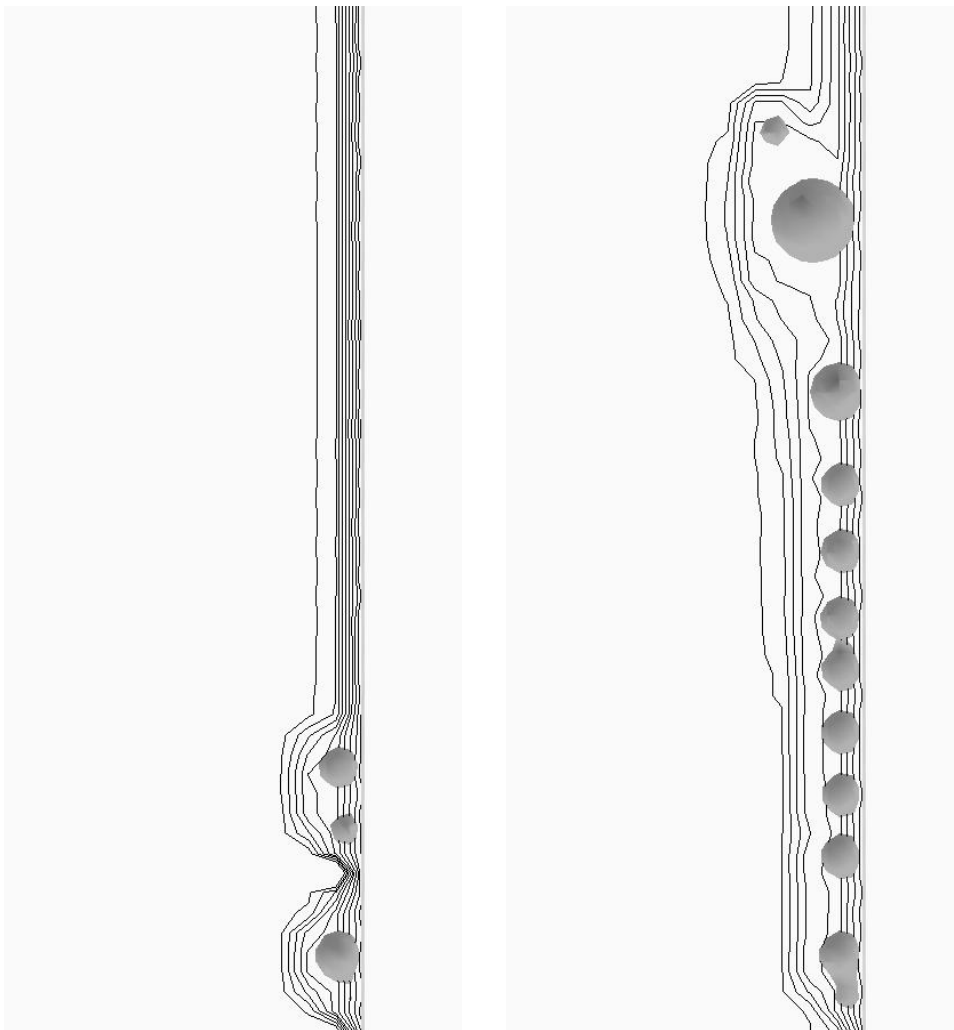


Abbildung 5.18.: Linien gleicher Temperatur bei der Verdampfung von Wasser. Links: $t \approx 8.2$, rechts: $t = 20.0$. Gefäßgröße: $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$, Gitterdimensionen: $42 \times 42 \times 84$ Gitterzellen, Anfangstemperatur des Wassers: 372.5 K , Wandtemperatur 375.0 K , weitere Angaben im Text.

nach oben. Solange sie sich, wie in der Abbildung, in unmittelbarer Nähe der Wand aufhalten, sorgen sie dafür, daß das überhitzte Medium an ihrer der Wand zugewandten Seite verdampft und Wasser an der anderen Seite aufgeheizt wird. Das bewirkt eine Verschiebung der Linien gleicher Temperatur zum Inneren des Fluids hin. Auf dem Bild, das zur Zeit $t = 20.0$ gehört, hat die große Blase oben im Bild einen Durchmesser von etwa 0.7 mm.

5.6. Kollisionen von Blasen mit festen Wänden und anderen Blasen

Das von Meier [72] eingesetzte einfache Prinzip wird weitgehend übernommen: Wird festgestellt, daß sich zwei Blasen überlappen, so kommt es zur Verschmelzung der Blasen, d.h. die beiden beteiligten Blasen werden durch eine Blase mit den zusammengezählten Volumina der beiden kollidierenden Blasen ersetzt. Der Mittelpunkt der neuen Blase ist der Schwerpunkt der beiden Ellipsoide der alten Blasen. Schließlich wird die Form der neuen Blase bestimmt.

Die Detektion der Kollision ist nicht mehr so einfach wie bei Meier, der keine variablen Blasengeometrien zuließ. Die Überprüfung, ob die Summe der Blasenradien kleiner als der Abstand ist, genügt nur bei kugelförmigen Blasen. Die gegen die Koordinatenachsen möglicherweise verdrehten Ellipsoide werden auf Überschneidung dadurch untersucht, daß überprüft wird, ob die achtzehn zur Deformationsberechnung herangezogenen Punkte innerhalb irgendeiner anderen Blase liegen. Der bei vielen Blasen dadurch entstehende erhebliche Aufwand wird reduziert, indem nur Blasenpaare auf mögliche Kollisionen hin untersucht werden, bei denen die Summe der jeweils längsten Halbachsen größer als der Abstand der Blasenmittelpunkte ist.

Die Interaktion der Partikeln mit den festen Wänden wird dadurch simuliert, daß Partikeln, deren Volumen über das Gebiet des Fluids hinausragt, so versetzt werden, daß sie die betreffende feste Wand gerade berühren.

5.7. Implementierung

Die einzelnen Blasen werden im Quelltext des verwendeten Programms durch Objekte repräsentiert. Es wurden drei Arten von Objekten vorgesehen: Die Klasse `Partikel` kann für beliebige ellipsoidale Partikeln mit starrer Form verwendet werden. Sie enthält als wesentliche Membervariablen die die Partikeln kennzeichnenden Daten Mittelpunktskoordinaten, Halbachsenlängen und Verdrehungswinkel. Als wichtigste Methoden sind `bewege` und `kollision` zu nennen, deren Na-

men ihre Bedeutung erklären. Die Objekte vom Typ `Blase` werden eingesetzt für Blasen, deren Volumen sich nicht ändert, d.h. beispielsweise für die beschriebenen Luftblasen in Wasser. Zusätzlich zu den in der Klasse `Partikel` vorhandenen Variablen und Methoden ist die Funktion `deform` enthalten, mit der die Blasenverformung bestimmt wird. Die Klasse `Dampfblase` schließlich stellt zusätzlich die bei einer möglichen Volumenänderung von Dampfblasen durch Phasenübergang notwendigen Methoden zur Verfügung. Es bietet sich an, im Sinne der Objektorientierung die Klasse `Blase` von der Klasse `Partikel` und die Klasse `Dampfblase` wiederum von der Klasse `Blase` abzuleiten.

Am Ende jedes Zeitschritts der Zeitintegration der Navier-Stokes-Gleichungen werden die Bewegung, gegebenenfalls die Deformation und die Volumenänderung der Blasen bzw. Partikel in folgender Reihenfolge bestimmt:

- gegebenenfalls Berechnung des neuen Volumens
- gegebenenfalls Berechnung der neuen Partikelform
- Berechnung der Lage des neuen Blasenmittelpunkts
- Feststellung möglicher Kollisionen und gegebenenfalls Verschmelzung der beteiligten Partikeln
- Ermittlung, ob sich die Partikeln noch im Rechengebiet befinden; Entfernung oder Versetzung der Partikeln.

Die Objekte der drei Klassen werden in getrennten Listen gespeichert. Sie werden mittels ebenfalls in einer Liste organisierter Zeiger angesprochen. Durch einen Listendurchlauf werden die Methoden der einzelnen Objekte der Reihe nach aufgerufen. Aufgrund der damit ermittelten Information wird vor jedem Zeitschritt das neue Dichtefeld berechnet.

5. Ein effizientes Zweiwegverfahren zur Modellierung von Blasen

6. Numerische Simulation des Blasensiedens an beheizten Wänden

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse einiger Simulationsrechnungen vorgestellt, die mit dem in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten Verfahren durchgeführt worden sind. Ziel dabei ist es, sowohl die Möglichkeiten des entwickelten Programms aufzuzeigen als auch zur Beantwortung offener Fragen aus dem Bereich des unterkühlten Blasensiedens beizutragen. Es wird für ausgewählte Fälle untersucht, wie sich die Anwesenheit von Inertgas- und Dampfblasen auf das Strömungsfeld in einem quadratischen Kanal bzw. ebenen Spalt auswirkt und welchen Einfluß das wiederum auf die lokalen Temperaturverläufe und damit den Wärmeübergang hat.

6.1. Problemstellung

Aufgrund der Schwierigkeiten, insbesondere an turbulent durchströmten Kanälen mit beheizten Wänden experimentell Messungen durchzuführen, sind die dazu in der Literatur vorhandenen Dokumentationen solcher Fälle nicht sehr zahlreich (vgl. Abschnitt 2.4.2). Insbesondere Daten von Feldern, sei es das Geschwindigkeitsfeld oder das Temperaturfeld, sind experimentell bisher kaum zugänglich. Sowohl im Bezug auf die Abschätzung technisch relevanter Kennzahlen als auch auf das Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Phänomene werden aber gerade diese Felddaten benötigt.

Mit dem vorgestellten numerischen Verfahren können diese Felddaten im Rahmen der Gültigkeit der gemachten Annahmen sowie der Genauigkeit der Lösung der Gleichungssysteme berechnet werden. Anhand dieser Daten wird versucht, auf folgende Fragen bezüglich der Konstellation eines in senkrechter Richtung durchströmten Kanals mit beheizter Wand Antworten zu geben:

- Welchen Einfluß haben Dampf- und Inertgasblasen auf die Sekundärströmung im Kanal?
- Wie ändert sich das Temperaturfeld in der Nähe der beheizten Wand durch die Zugabe von Inertgasblasen bzw. das Entstehen von Dampfblasen?
- Wie stark ist die durch die Blasenbewegung verstärkte Konvektion und wie schlägt sich das in einer Veränderung des Wärmeübergangs nieder?
- Durch welchen Mechanismus kommt der global beobachtete erhöhte Wärmeübergang im Bereich des unterkühlten Siedens zustande? Ist er hauptsächlich dem latenten Wärmetransport zuzuschreiben oder ist er Folge der verstärkten Konvektion durch die Bewegung der Blasen? Kommen dafür eventuell weitere Mechanismen in Frage?
- Wie ändern sich die Verhältnisse bei einer Veränderung der Anströmgeschwindigkeit?

6.2. Parameter und Auswertung der Rechnungen

Es wird ein senkrechter Kanal mit quadratischem Querschnitt bzw. ein senkrechter in eine Richtung unendlich ausgedehnter Spalt mit jeweils einer beheizten Wand betrachtet. Die Hauptströmungsrichtung ist gegen die Schwerkraft gerichtet. Abbildung 6.1 zeigt die verwendete geometrische Anordnung. Im Fall des Kanals sind die vier senkrechten Berandungen feste Wände, am oberen Rand gilt die in Abschnitt 5.4.3 erläuterte Ausströmbedingung, während unten als instationäre Randbedingung für die Geschwindigkeit eine turbulente Einströmung gesetzt wird (vgl. ebenfalls Abschnitt 5.4.3). An der beheizten Wand wird die Temperatur konstant auf θ_W gehalten, während an den übrigen drei Wänden Neumann-Randbedingungen für die Temperatur gelten. Neumann-Ränder für die Temperatur werden auch am Ausströmrand gesetzt; an der ganzen Einströmseite wird die Temperatur θ_{ein} vorgegeben. Im Fall des Spalts sind nur die Berandungen senkrecht zur x -Achse feste Wände, an denen auch die Temperatur vorgegeben wird; in y - und z -Richtung werden für die Geschwindigkeiten und die Temperatur periodische Randbedingungen gesetzt. Die Strömung wird hier durch eine konstante Druckdifferenz in senkrechter Richtung angetrieben.

Das Rechengebiet hat im Fall des Kanals dimensionslose Abmessungen von $10 \times 10 \times 60$, die von $48 \times 48 \times 108$ Gitterzellen aufgelöst werden. Die Abmessungen des Spalts betragen $10 \times 10 \times 80$ bei einer Auflösung von $48 \times 48 \times 144$ Gitterzellen (vgl. Abbildung 6.1).

Der Kanal bzw. Spalt wird jeweils von Wasser durchströmt. Die Stoffdaten werden dem Tabellenwerk von Haar et al. [38] entnommen. Im Fall von Inertgasblasen

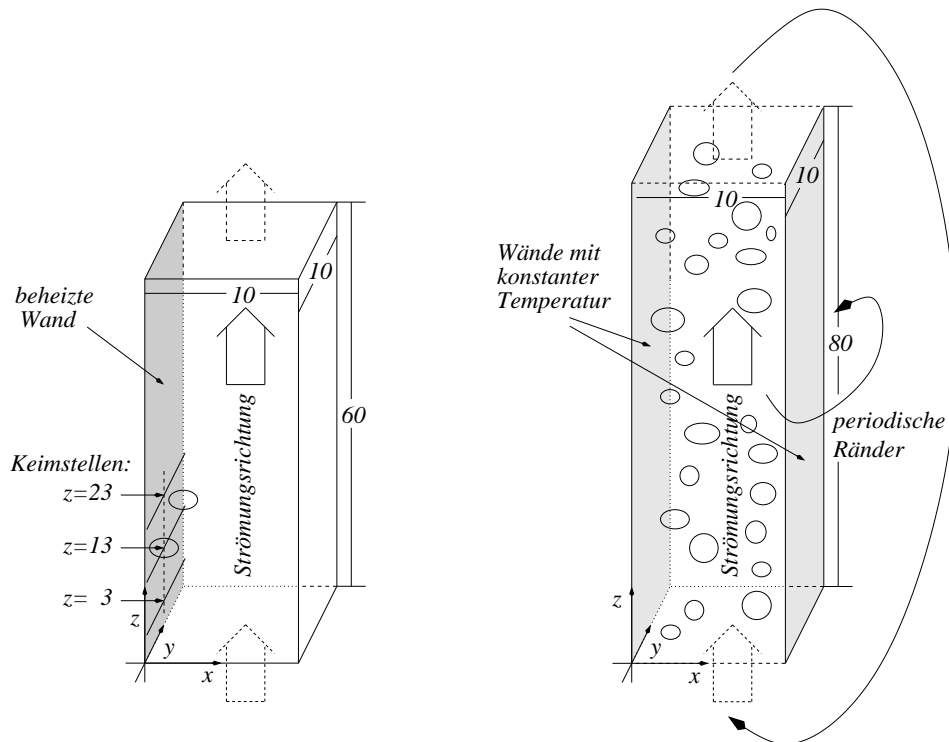


Abbildung 6.1.: Skizze zu den Simulationsrechnungen: Kanal mit quadratischem Querschnitt und einer beheizter Wand (links), Spalt mit zwei Wänden mit jeweils konstanter Temperatur (rechts)

beträgt die Partikelreynoldszahl 60 und bleibt über die Rechnung hinweg konstant. Bei Dampfblasen ändert sich die Partikelreynoldszahl. Beim Einsetzen der Dampfblasen beträgt sie ebenfalls 60. Die Entdimensionierung wird mit dem Blasenradius und der Aufstiegsgeschwindigkeit einer Blase von entsprechender Größe durchgeführt (vgl. Abschnitt 2.3.3). Die untersuchten Fälle werden im folgenden nach der mit dem hydraulischen Kanaldurchmesser und der mittleren Fließgeschwindigkeit gebildeten Kanalreynoldszahl unterschieden¹. Als Bezugstemperaturen θ_∞ und θ_0 dient jeweils die Temperatur der Einströmung θ_{ein} (in K). Die Jakobzahlen der betrachteten Fälle liegen bei etwa 10, die Kondensation ist also stets als wärmetransportgesteuert anzunehmen.

6.2.1. Auswertung der Felddaten

Alle betrachteten Vorgänge sind instationär. Eine sinnvolle Vorgehensweise bei der Auswertung des Geschwindigkeits- und des Temperaturfelds ist daher, über

¹Die Entdimensionierung der in die Rechnung eingehenden Größen bleibt davon unberührt.

einen bestimmten Zeitraum gemittelte Größen zu betrachten. Oft ist auch eine begrenzte örtliche Mittelung sinnvoll.

Temperaturverläufe und Standardabweichungen der Geschwindigkeiten

Die in den folgenden Abschnitten gezeigten Temperaturverläufe und Kurven der Standardabweichung von Geschwindigkeiten sind bei angegebener z -Koordinate gemittelt über einen angegebenen Zeitraum und über den Bereich $y = 4$ bis $y = 6$, was etwa dem Bereich entspricht, in dem die Blasen auftreten; Abszisse ist jeweils die x -Achse, die den Abstand zur Wand angibt. In den Diagrammen ist in ausgewählten Fällen die Tangente an den Temperaturverlauf bei $x = 0$ (an der Wand) hinzugefügt, aus deren Nullstelle die lokale Nußeltzahl nach Gleichung (2.30) bestimmt werden kann; weil der Entdimensionierung hier der Radius der Blase zugrundeliegt, der ein Zehntel des Kanaldurchmessers beträgt, ist der Reziprokwert der Nullstelle hier mit 10 zu multiplizieren, um die lokale Nußeltzahl zu erhalten.

Sekundärströmung

Ein Charakteristikum der turbulenten Strömung durch einen Kanal mit festen Wänden ist das Auftreten einer Sekundärströmung. Bei der Validierung der mit dem Turbulenzmodell erhaltenen Werte (Abschnitt 3.4.2) wurde bereits festgestellt, daß sie mit dem angegebenen Verfahren in befriedigender Weise wiedergegeben wird. Dort wurde ein in Hauptströmungsrichtung (z -Richtung) periodischer Fall untersucht; x,y -Flächen stehen senkrecht zu dieser Richtung und sind daher im Bezug auf die statistische Auswertung gleichwertig; sie konnten alle in einer Statistik ausgewertet werden.

Werden in den Kanal Blasen eingebracht, so sind die Flächen senkrecht zur z -Achse nicht mehr als statistisch gleichwertig zu betrachten. Um den Simulationsergebnisse mit Inertgas- und Dampfblasen geeignete Referenzdaten der einphasigen Strömung gegenüberstellen zu können, werden hier auch im einphasigen Fall die Sekundärströmungen in den verschiedenen x,y -Flächen betrachtet. Sie weisen Unterschiede auf, die bei einer größeren Datenbasis für die Mittelung der Geschwindigkeiten verschwinden würden. Um eine Statistik von gleicher Qualität wie in Abschnitt 3.4.2 zu erhalten, müßten die verwendeten verschiedenen Schnitte senkrecht zur z -Achse durch Schnitte zu weiteren Zeitpunkten ersetzt werden. Das würde den Rechenaufwand um einen Faktor 192 erhöhen; er entspricht der Anzahl der Gitterzellen in z -Richtung der Abschnitt 3.4.2 zugrundeliegenden Rechnung. Mit dem Vergleich der Sekundärströmung des Falls

ohne Blasen und der jeweiligen Sekundärströmungen der Fälle mit Blasen in derselben Schnittebene auf der Grundlage derselben zeitlichen Datenbasis ist es mit wesentlich weniger Rechenaufwand möglich, den Einfluß der Blasen zu studieren. Für die Kanalströmung wurde jeweils eine dimensionslose Zeitspanne der Länge 10 gewählt, in der die Strömung des untersuchten Typs bereits ihren quasi-stationären Zustand erreicht hat².

6.2.2. Gesamtenergieeintrag

Als rein makroskopische Größe wird weiterhin der Energieeintrag in das den Kanal durchströmende Fluid betrachtet. Es bietet sich an, den Energieeintrag zu bestimmen anhand der gesamten thermischen Energie E einer bestimmten Masse m an Fluid, die den Kanal beispielsweise in einer Zeitspanne Δt durchströmt. Der Energieeintrag ist dann die Differenz dieser Energiebeträge, die einmal vor dem Durchströmen des Kanals und das zweitemal nachher bestimmt werden.

E (in physikalischen Einheiten) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} E &= m \cdot \Delta h \\ &= \int_{(V_F)} \rho_F \cdot c_p \cdot (\theta - \theta_S) dV + \int_{(V_D)} \rho_D \cdot [c_{p,D} \cdot (\theta - \theta_S) + \Delta h_S] dV. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Neu hinzugekommen sind die Bezeichnungen V_F und V_D , die für das von Flüssigkeit bzw. Dampf eingenommene Volumen stehen, sowie Δh , die spezifische Enthalpie. Weiterhin bezeichnen θ_S die Siedetemperatur, Δh_S die spezifische Verdampfungsenthalpie, c_p und $c_{p,D}$ die spezifischen Wärmekapazitäten von Flüssigkeit bzw. Dampf und ρ_F und ρ_D die Dichten von Flüssigkeit bzw. Dampf. Die Abhängigkeit der Siedetemperatur vom Blaseninnendruck und damit dem Blasenradius ist dabei gemäß der Annahmen in Abschnitt 5.5.1 zu berücksichtigen. Die Integration einer skalaren Funktion des Ortes und der Zeit f über das gesamte Dampfvolumen kann ersetzt werden durch

$$\int_{(V_D)} f dV = \int_{(\Delta t)} \int_{(A_D)} f \cdot w dA dt, \quad (6.2)$$

wenn im Verlauf von Δt das Dampfvolumen V_D die Fläche A_D passiert, zu der die Geschwindigkeit in z -Richtung, w , senkrecht steht. Für das Flüssigkeitsvolumen kann diese Gleichung analog formuliert werden. Die Integration über das Volumen wird damit ersetzt durch eine Integration über die Zeit und über eine

²Um dem Verdacht entgegenzutreten, hier sei über eine nicht ausreichend lange Zeitspanne gemittelt worden, folgende Anmerkung: Die Zeit wird hier mit der terminalen Aufstiegs- geschwindigkeit und dem Blasenradius entdimensioniert. Würde man mit den vergleichbaren Einheiten von Gavrilakis [27] rechnen, so erstreckte sich der entsprechende Zeitraum auf immerhin 60 Zeiteinheiten.

Fläche A_D bzw. A_F , die einen Querschnitt des Kanals senkrecht zur z -Richtung darstellt. Dieses Vorgehen ermöglicht die Bestimmung der zugeführten Energie ohne die Notwendigkeit, Information über den lokalen Zustand des aus dem Kanal austretenden Materials zu speichern. Man schreibt unter Verwendung der Zeichen A_F und A_D für die von Flüssigkeit bzw. Dampf eingenommene Teilfläche des Querschnitts:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{(\Delta t)} \int_{(A_F)} \rho_F \cdot c_p \cdot (\theta - \theta_S) \cdot w \, dA + \\
 &\quad \int_{(A_D)} \rho_D \cdot [c_{p,D} \cdot (\theta - \theta_S) + \Delta h_S] \cdot w \, dA \, dt
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch Division durch die bekannten Bezugsgrößen erhält man

$$\begin{aligned}
 E^+ &= \frac{E}{\rho_D \cdot \Delta h_S \cdot d^3} \\
 &= \int_{(\Delta t^+)} \int_{(A_F^+)} \frac{\rho_F}{\rho_D} \cdot c_p^+ \cdot (T - T_S) \cdot w^+ \, dA^+ + \\
 &\quad \int_{(A_D^+)} c_{p,D}^+ \cdot [(T - T_S) + 1] \cdot w^+ \, dA^+ \, dt^+,
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

einen Ausdruck für die dimensionslose thermische Energie E^+ . Die algorithmische Umsetzung erfolgt im wesentlichen durch die Bestimmung einer mittleren senkrechten Geschwindigkeit $\bar{w}_{i,j}$ sowie der mittleren Temperatur $\bar{T}_{i,j}$ in der mit den Indizes i und j angesprochenen Zelle eines Querschnitts, die Berechnung des Flüssigkeitsvolumenanteils dieser Zelle $v_{i,j}$ (wie in Abschnitt 5.2 beschrieben) und durch Aufsummieren über die $imax \times jmax$ Zellen des Querschnitts:

$$\begin{aligned}
 E^+ &\approx \int_{(\Delta t^+)} \sum_{j=0}^{jmax} \sum_{i=0}^{imax} \left[\frac{\rho_F}{\rho_D} \cdot c_p^+ \cdot (\bar{T}_{i,j} - T_S) \cdot v_{i,j} \right. \\
 &\quad \left. [c_{p,D}^+ \cdot (\bar{T}_{i,j} - T_S) + 1] \cdot (1 - v_{i,j}) \right] \cdot \bar{w}_{i,j}^+ \cdot \frac{V^+}{\Delta z^+} \, dt^+
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

V^+ ist das Volumen einer Zelle, Δz^+ die Abmessung der Zelle in z -Richtung des Koordinatensystems. Die Integration über die Zeit erfolgt ebenfalls durch Näherung durch eine Summe der zu den verschiedenen Zeitschritten erhaltenen Werte.

Durch Differenzbildung zwischen den für zwei verschiedene Schnittebenen erhaltenen Ausdrücken für E^+ wird die dem Fluid zwischen diesen Ebene zugeführte thermische Energie ermittelt.

6.3. Simulation der Strömung im ebenen Spalt

Einige prinzipielle Erkenntnisse werden gewonnen, wenn man die Temperaturverläufe und die Turbulenzintensität der Strömung in einem ebenen (senkrechten) Spalt untersucht, bei dem die zwei gegenüberliegende Wände jeweils auf konstanter Temperatur gehalten werden. Die Kanalreynoldszahlen der untersuchten Fälle betragen 750 und 5200, es liegt also einmal ein laminarer, das andere Mal ein turbulenter Strömungszustand vor.

Wie im vorangegangenen Abschnitt dargestellt sind die hier untersuchten Fälle einer Spaltströmung durch periodische Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung (z -Richtung) und wandparalleler Richtung (y -Richtung) für die Geschwindigkeiten und die Temperatur gekennzeichnet. Das entspricht einem in diese beiden Richtungen unendlich ausgedehnten Spalt; eine sinnvolle praktisch realisierbare Anordnung ist nur schwer denkbar. Ebenso wenig realistisch sind die Randbedingungen in x -Richtung für die Temperatur. Hier wird jeweils die konstante Temperatur T_W bzw. T_0 vorgegeben.

Diese gewählte Anordnung hat aber den Vorteil, daß sich das Problem im Fall laminarer, einphasiger Strömung auf ein zweidimensionales Problem reduziert, weil keine der Unbekannten eine Funktion von y ist, und daß dafür eine geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems für die Geschwindigkeiten, den Druck und die Temperatur angegeben werden kann, die als Vergleich für Fälle mit mehrphasiger und turbulenter Strömung herangezogen werden kann.

Als Lösung der Impulsgleichungen für die laminare, einphasige Strömung erhält man ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung, (vgl. beispielsweise Paterson [84]). Die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Wand sind überall gleich null.

Ohne Quell- und Senkterme lautet die Transportgleichung für die Temperatur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (6.6)$$

Durch Nachrechnen kann leicht überprüft werden, daß

$$T(x, y, z) = T(x) = -\frac{T_W - T_0}{d_x} \cdot x + T_W \quad (6.7)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung mit den Randbedingungen $T(0) = T_W$ und $T(d_x) = T_0$ bzw. periodischen Rändern sonst ist. Nach Ladyshenskaya [54] ist diese Lösung als Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für zweidimensionale Fälle mit Dirichlet-Rändern eindeutig.

Bei diesen Simulationsrechnungen werden zeitlich und örtlich gemittelte Größen betrachtet. Die örtliche Mittelung erfolgt auf Ebenen parallel zur y, z -Ebene des

Koordinatensystems, deren Punkte wegen der Periodizität der betrachteten Fälle in y - und z -Richtung statistisch gleichwertig sind.

Der eigentlichen Simulation, deren zeitabhängige Ergebnisse dann gemittelt werden, geht folgende Vorbereitung voraus: Bevor die Blasen an zufälligen Positionen im Kanal plaziert werden, läuft die Simulationsrechnung so lange, bis ein quasi-stationärer Zustand erreicht ist. Zum Zeitpunkt der Blasenzugabe wird weiterhin das Temperaturfeld so vorgelegt, daß zwischen den Wänden ein lineares Temperaturgefälle herrscht. Im betrachteten Fall beträgt die so aufgebrachte Temperaturdifferenz $T_W = \Delta T = 0.0436$, wobei die Temperatur der Wand bei $x = 10.0$ $T = 0$ beträgt. Diesen Werten liegen Temperaturen in physikalischen Einheiten von $\theta_W = 383\text{ K}$ und $\theta_0 = 367\text{ K}$ zugrunde. Die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Wänden beträgt also 16 K. Das Fluid ist Wasser. Danach wird eine weitere Zeitspanne mit den Blasen ausgehend vom besagten Temperaturprofil simuliert. Erst nach Ablauf dieser Zeitspanne beginnt die Mittelung der Daten. Wegen der Blasenbewegung, die nicht quasi-stationär ist, weil irreversible Effekte wie Blasenvereinigung eintreten können, wird kein stationärer Zustand erreicht. Die Zeitspanne wird aber in sinnvoller Weise so gewählt, daß sich die Zustände zum einen nur mehr langsam ändern, daß aber zum anderen in der folgenden Zeit, in der die statistische Datenauswertung erfolgt, noch eine Strömung mit möglichst typischem Charakter, d.h. vielen einzelnen Blasen beobachtet wird.

Die für die statistische Auswertung betrachtete Zeitspanne ist je nach Strömungszustand und Blasenanzahl verschieden. Sie wird jeweils so gewählt, daß das Volumen, das einen Querschnitt des Kanals passiert, genau so groß ist wie das Volumen, das den Kanal bei turbulenter, einphasiger Strömung bei $Re = 5200$ in 10 Zeiteinheiten durchströmt. Damit ist gewährleistet, daß sich in den betrachteten Fällen die Strecken, die die Fluidteilchen im Mittel in senkrechter Richtung zurücklegen, nicht unterscheiden.

Für beide Strömungszustände werden Rechnungen mit 80, 40 und 20 Blasen durchgeführt. Das Volumenverhältnis von gasförmiger zu flüssiger Phase nimmt bei 80 Blasen einen Wert von 4.2% an. Zusätzlich wird die turbulente Strömung ohne Blasen simuliert.

6.3.1. Turbulente Spaltströmung bei $Re = 5200$

Abbildung 6.2 zeigt die mittleren Temperaturverläufe aus dem Zeitintervall, in dem die Statistik genommen wird. Als Referenz ist der lineare Temperaturverlauf angegeben, der sowohl Anfangswert der Simulation war als auch dem Temperaturverlauf im Gleichgewicht bei laminarer Strömung entspricht. Aus Abbildung

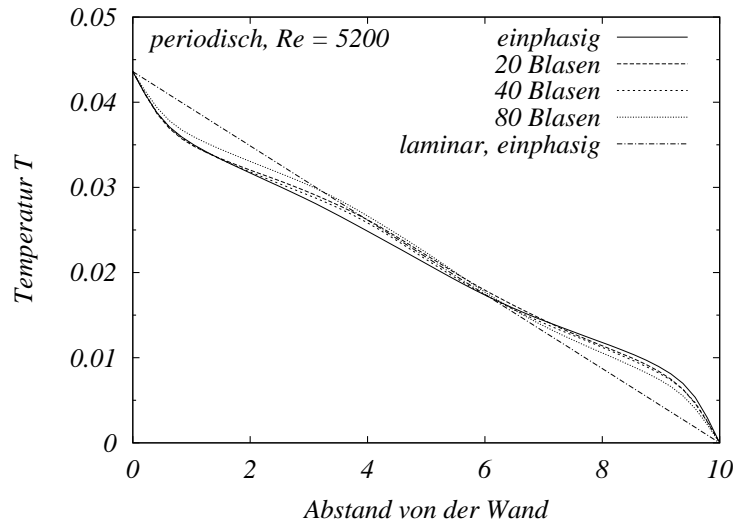


Abbildung 6.2.: Temperaturverlauf bei $Re = 5200$ im ebenen Spalt nach etwa 10 Zeiteinheiten

6.2 ist ersichtlich, daß die turbulente Strömung dazu führt, daß die Temperaturverläufe an den Wänden steiler enden als bei der laminaren Strömung. Dieser Effekt ist zu erwarten und wird in allen solchen Fällen beobachtet. Abbildung 6.2 zeigt außerdem, daß sich mit Blasen eine geringere Abweichung zum Temperaturverlauf der laminaren Strömung einstellt. Deutlicher weist diesen Sachverhalt Abbildung 6.3 aus. In diesem Diagramm ist die mittlere Abweichung der Temperatur dT zum linearen Temperaturverlauf $T_0(x)$ der laminaren Strömung für die diskutierten Fälle aufgetragen:

$$dT(x) = \frac{1}{2} \cdot [(T(x) - T_0(x)) + (T_0(d_z - x) - T(d_z - x))] \quad (6.8)$$

$$0 \leq x \leq d_z/2$$

Darin ist d_z die Kanalbreite. Bei einer Blasenanzahl von 80 ist diese Abweichung am geringsten, d.h. es wird am wenigsten Wärme von der Wand abtransportiert. Auffällig ist auch, daß zwischen den Kurven zu den Simulationen mit 20 und 40 Blasen kaum ein Unterschied besteht, während der Übergang auf 80 Blasen die angesprochene Änderung herbeiführt.

Eine anschauliche Erklärung dafür, daß bei 80 Blasen ein schwächerer Wärmetransport von der Wand weg als in den anderen Fällen beobachtet wird, ist die Dämpfung der Turbulenz durch die Gegenwart der Blasen. Befinden sich viele Blasen im Rechengebiet, so wird der Abstand zwischen zwei Blasen im Mittel kleiner und damit auch die Größe von Gebieten, in denen sich Turbulenz ausbilden bzw. halten kann. Dieser dämpfende Effekt, über den auch in den Arbeiten von Kanai und Miyata [49] und Xu et al. [128] berichtet wird, zeigt sich in

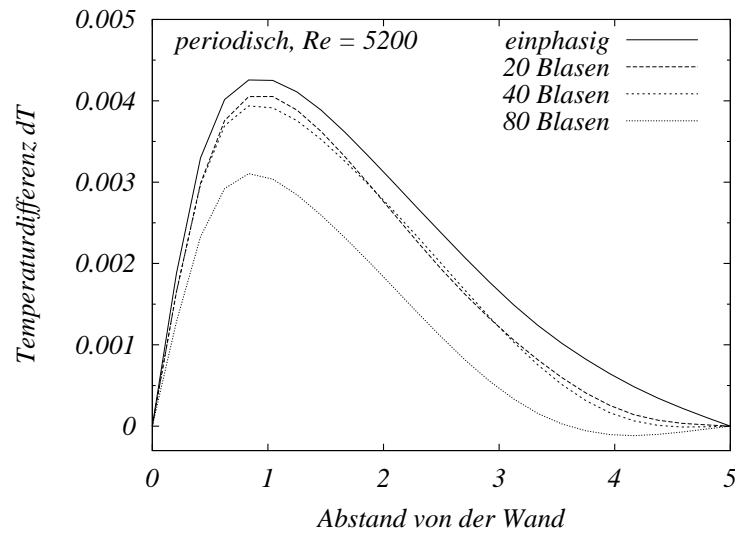


Abbildung 6.3.: Mittlere Abweichung zum Temperaturverlauf der laminaren Strömung bei $Re = 5200$ im ebenen Spalt nach etwa 10 Zeiteinheiten

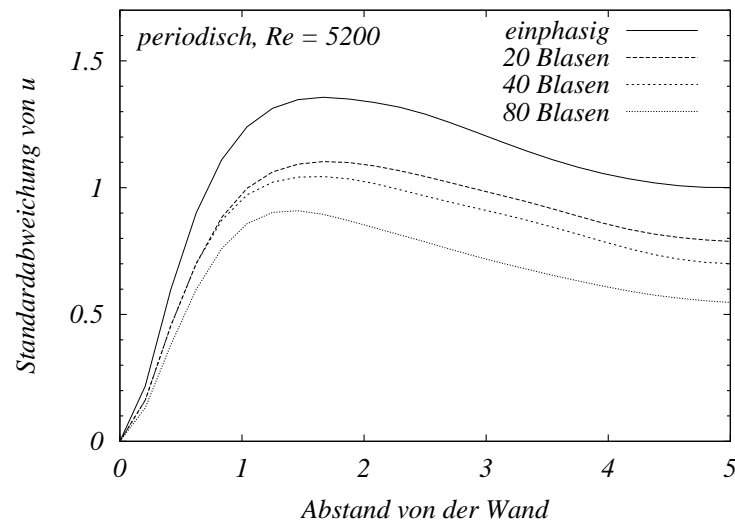


Abbildung 6.4.: Standardabweichung von u (Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand) bei $Re = 5200$ im ebenen Spalt nach etwa 10 Zeiteinheiten

der Standardabweichung von u , der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Wand. Abbildung 6.4 enthält die entsprechenden Kurvenverläufe für die untersuchten Fälle. Vergleicht man sie mit Abbildung 6.3, so stellt man fest, daß die maximale Abweichung zum Temperaturverlauf der laminaren Strömung mit der Verminderung der Standardabweichung von u qualitativ zusammenhängt: eine

kleinere Standardabweichung von u als Folge der Dämpfung der Turbulenz zieht eine schwächere Wärmeleitung ins Fluidinnere nach sich.

Die vorgelegten Daten bestärken also die These, daß die den Blasen zuzuschreibenden zusätzlichen Verwirbelungen und der damit erreichte zusätzliche Wärmetransport größtmäßig mehr als aufgewogen wird durch die Dämpfung der Turbulenz durch die Gegenwart der Blasen, die die Ausdehnung zusammenhängender Flüssigkeitsvolumen mit zunehmenden Gasanteil im betrachteten Gebiet immer kleiner werden lassen.

6.3.2. Laminare Spaltströmung bei $Re = 750$

Um abschätzen zu können, in welcher Größenordnung die durch die Blasenbewegung verursachte zusätzliche Konvektion liegt, wurden Simulationsrechnungen mit denselben Blasenanzahlen bei einer Kanalreynoldszahl von nur 750 durchgeführt. Die Fluidbewegung senkrecht zur Hauptströmungsrichtung ist einzig auf die Bewegung der Blasen zurückzuführen, weil beim herrschenden laminaren Strömungszustand kein Massenaustausch senkrecht zu den Stromlinien stattfindet, die ohne Blasen exakt parallel zur Wand verlaufen.

Die Abweichungen der Temperaturverläufe von denen der einphasigen, laminaren Strömung sind in Abbildung 6.5 zusammengestellt. Deutlich erkennbar ist, daß durch 20 Blasen weniger Wärmetransport ins Fluidinnere beobachtet wird als bei 40 und 80 Blasen. Der Unterschied, den eine Erhöhung der Blasenanzahl

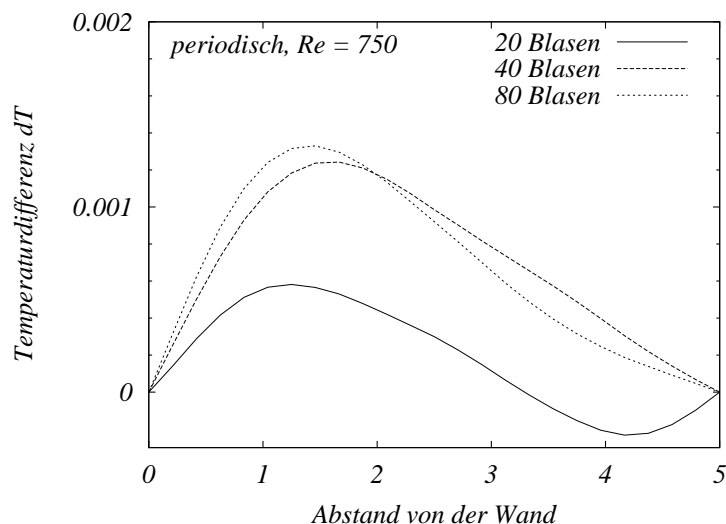


Abbildung 6.5.: Temperaturverläufe bei $Re = 750$ im ebenen Spalt nach etwa 70 Zeiteinheiten

von 40 auf 80 hervorbringt, ist nicht mehr groß. An der Wand aber nehmen die Steigungen der Kurven mit zunehmender Blasenanzahl noch deutlich zu.

Der allein durch Turbulenz verursachte Wärmetransport ins Fluidinnere schlägt in den untersuchten Fällen drei- bis fünfmal so stark zu Buche wie der Wärmetransport durch zusätzliche Fluidbewegung (vgl. Abbildung 6.3), die auf die Blasen zurückzuführen ist. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, daß bei $Re = 5200$ und 80 Blasen, wo die Standardabweichung von u etwa nur mehr Hälfte derjenigen der einphasigen Strömung beträgt, der dadurch reduzierte Wärmetransport nicht durch die zusätzliche Konvektion durch die Blasenbewegung wettgemacht werden kann.

6.4. Kanalströmung bei $Re = 2800$

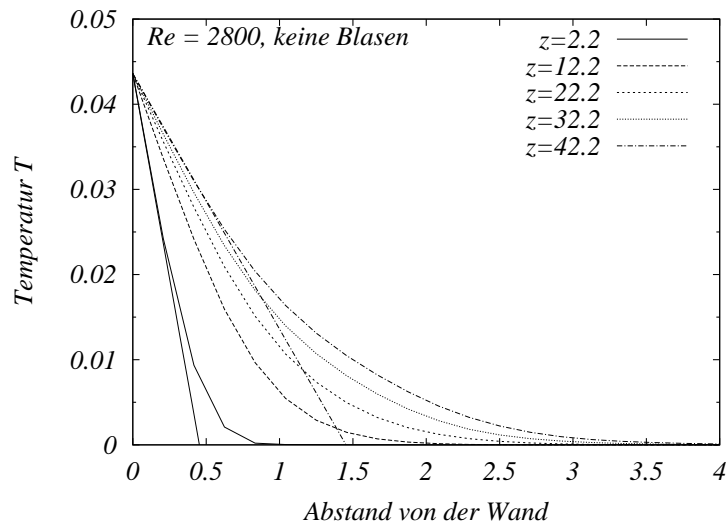
Bei einer Reynoldszahl von 2800 ist die Strömung in unserem Fall bereits schwach turbulent. Allen Ergebnissen dieses Abschnitts liegt die statistische Mittelung der Kanalströmung über einen Zeitraum von 10 dimensionslosen Zeiteinheiten zugrunde, denen eine Simulation von 50 Zeiteinheiten für die Ausbildung des turbulenten Geschwindigkeitsfelds vorausgehen sowie weitere 20 Zeiteinheiten, zu deren Beginn das Temperaturfeld mit $T = 0.0$ initialisiert wird. Im Fall der Simulation von Strömungen mit Inertgasblasen werden diese 15 Zeiteinheiten nach Setzen des Temperaturfelds in den genannten Abständen zugegeben. Es werden also vor der statistischen Auswertung 5 Zeiteinheiten mit den untersuchten Bedingungen simuliert. Die Temperaturen der Wand und des einströmenden Wassers sind dieselben wie in Abschnitt 6.3. Es liegt also eine Überhitzung von 10 K vor, der eine dimensionslose Temperatur von $T = 0.0436$ entspricht; die Unterkühlung beträgt 6 K ($T = 0.0$).

Die Ergebnisse der Simulation der einphasigen Strömung werden in diesem Abschnitt oft referenziert und daher zuerst vorgestellt. Der Temperaturverlauf in diesem Fall weist bereits den für turbulent angeströmte gerade Platten typischen Verlauf auf (Abbildung 6.6). Eingezeichnet sind die Tangenten an die Temperaturverläufe bei $z = 2.2$ und $z = 42.2$. Die zugehörigen Nußeltzahlen berechnen sich zu

$$Nu = \frac{10}{\delta}, \quad (6.9)$$

wobei δ die Nullstelle der jeweiligen Tangenten ist. δ definiert auch die Dicke der thermischen Grenzschicht. Die Nußeltzahlen ergeben sich hier zu 22.0 bzw. 6.8.

Betrachtet wird im weiteren die Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand (in x -Richtung) in den einzelnen Querschnitten des Kanals bei den untersuchten Fälle; diese Komponente des Ge-

Abbildung 6.6.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, keine Blasen

schwindigkeitsvektors ist für den konvektiven Wärmetransport von der Wand weg maßgeblich. Als Referenz ist es hier sinnvoll, diese Größe aus der Simulation zu nehmen, mit der die Einströmbedingungen erzeugt werden, weil dabei aufgrund der Periodizität in Strömungsrichtung weitaus mehr Daten für die Statistik zur Verfügung stehen. Diese Kurve ist in die jeweiligen Diagramme eingetragen.

Weitere Aufschlüsse über den Einfluß der Blasen auf die Strömung an der Wand liefert die Untersuchung der Sekundärströmung. Wiederum als Referenz dient die Sekundärströmung im Kanal ohne Blasen (Abbildung 6.7). In Abschnitt 6.2.1 wird erklärt, weshalb sich hier die Sekundärströmungen in den verschiedenen Querschnitten unterscheiden.

Im folgenden werden die Ergebnisse von Simulationen besprochen, bei denen Inertgasblasen in die Strömung eingebracht werden. Dabei werden zwei Frequenzen, mit der die Blasen zugegeben werden, untersucht. Zum anderen werden Fälle simuliert, bei denen zusätzlich der Phasenübergang an der beheizten Wand betrachtet wird. Wie in den vorangegangenen Kapiteln besprochen sind die Dreiphasenvorgänge direkt bei der Blasenbildung extrem komplex und können bis heute nicht genau vorhergesagt werden. Bei den folgenden Untersuchungen werden daher Dampfblasen mit einem festen Radius von 1.0 an der Keimstelle ins Rechengelände gesetzt. Wie beschrieben wird die Veränderung des Blasendurchmessers im Laufe der Lebensgeschichte der Blase simuliert.

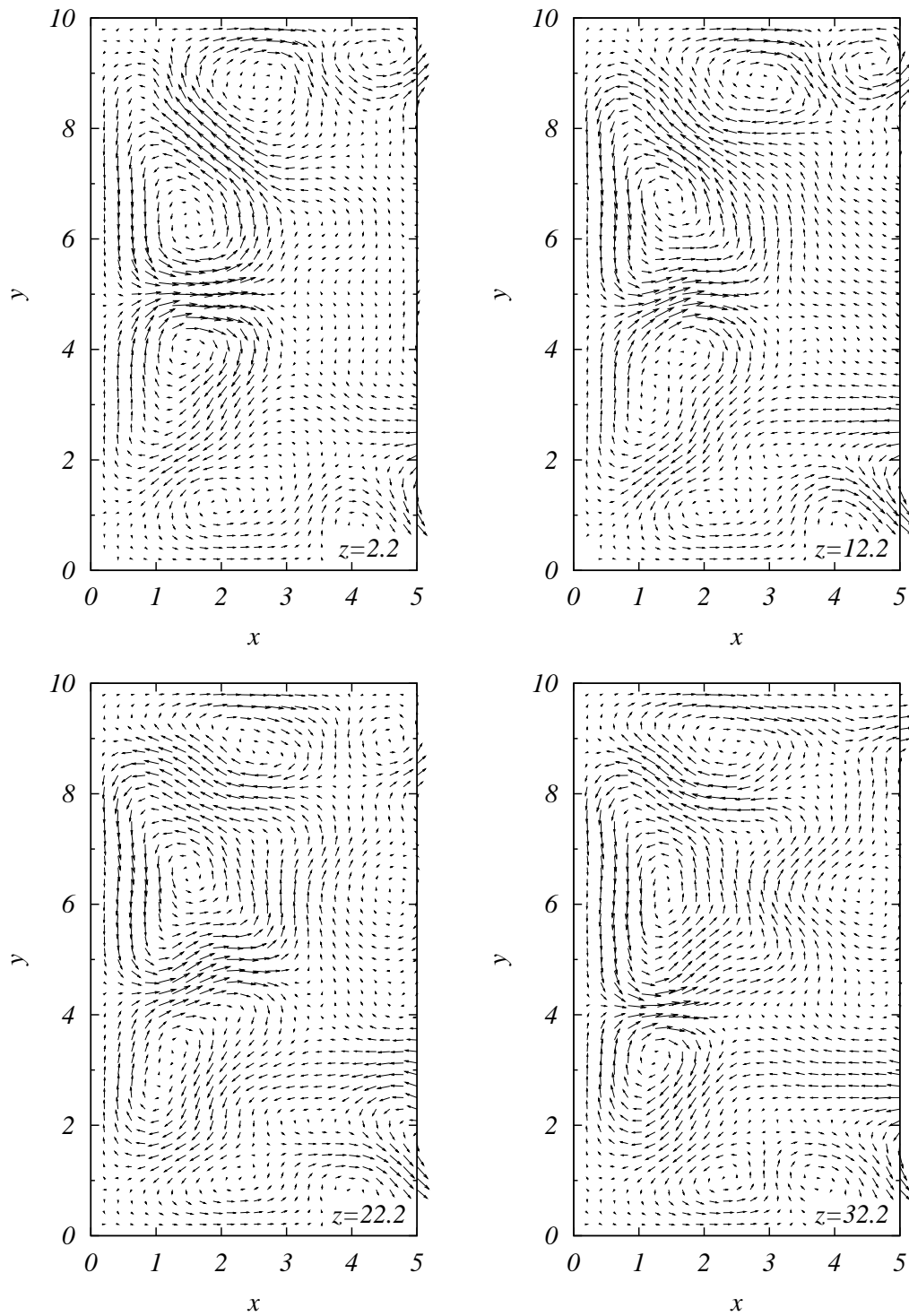


Abbildung 6.7.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, keine Blasen

6.4.1. Inertgasblasen

Von Interesse ist es jetzt zunächst, die Auswirkung der Zugabe von Inertgasblasen mit einer bestimmten Frequenz in den Kanal zu betrachten. Die Blasen werden in der Mitte der beheizten senkrechten Seitenfläche an der Stelle $x = 0.0$, $y = 5.0$ und $z = 2.0$ zugegeben (vgl. Abbildung 6.1). Es werden einmal alle 2.5 Zeiteinheiten und in einer zweiten Simulation alle 0.5 Zeiteinheiten eine Blase zugegeben. Die Temperaturverläufe an denselben Stellen im Kanal wie beim betrachteten einphasigen Fall sind in den Abbildungen 6.8 und 6.9 dargestellt.

Der Vergleich der beiden Abbildungen zeigt, daß sich die Frequenz der Blasenzugabe auf die Temperaturverläufe und damit auf den erzielten Wärmeübergang auswirkt. Bei $dt = 2.5$ verbessert sich der Wärmeübergang im oberen Bereich des Kanals, also in großem Abstand vom Ort der Blasen zugabe, deutlich gegenüber der einphasigen Strömung, während er im Bereich der Blasen zugabe nahezu unverändert bleibt. Bei $dt = 0.5$, also bei der höheren Frequenz der Blasen zugabe, wird im oberen Kanalbereich kein so guter Wärmeübergang mehr erzielt wie bei $dt = 2.5$, dafür ist er im Bereich der Blasen zugabe besser als sowohl im Fall mit $dt = 2.5$ als auch im einphasigen Fall. In Gegenwart von Inertgasen ist (bei $Re = 2800$) der Wärmeübergang niemals schlechter als bei der einphasigen Strömung. Die erreichte Verbesserung beträgt günstigstenfalls etwa 20%.

Zur Erklärung für die zunächst der Intuition widersprechende Beobachtung, daß eine Erhöhung der Anzahl der Blasen unter Umständen wieder zu einer Verschlechterung des Wärmeübergangs führt, trägt zunächst eine Untersuchung der

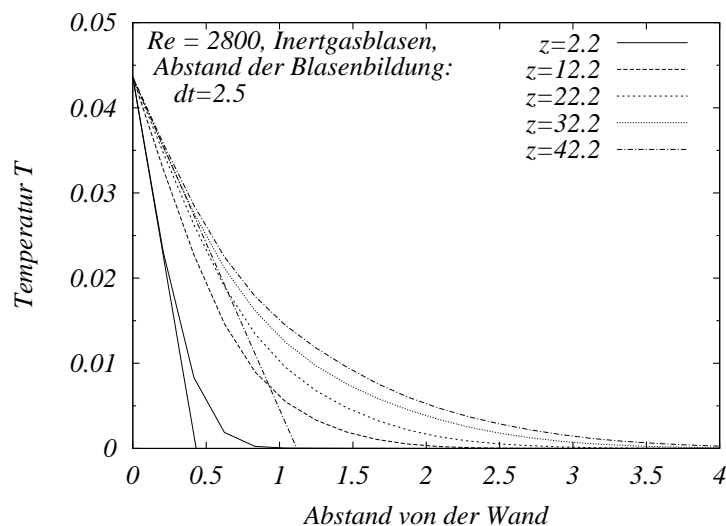


Abbildung 6.8.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 2.5$

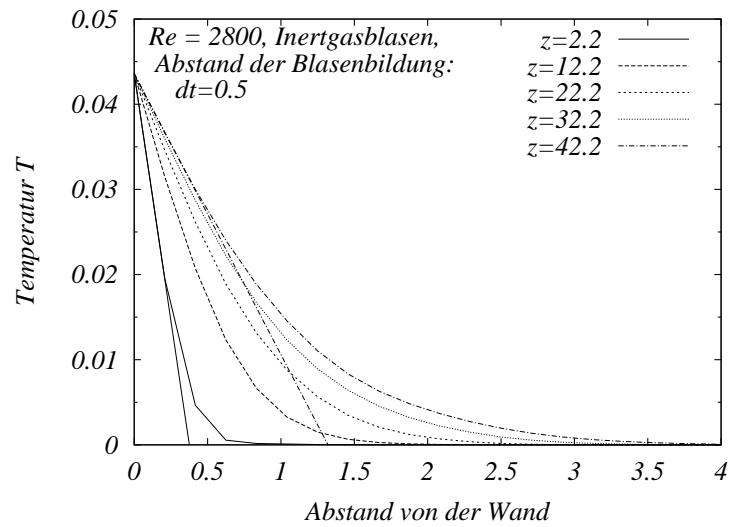


Abbildung 6.9.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 0.5$

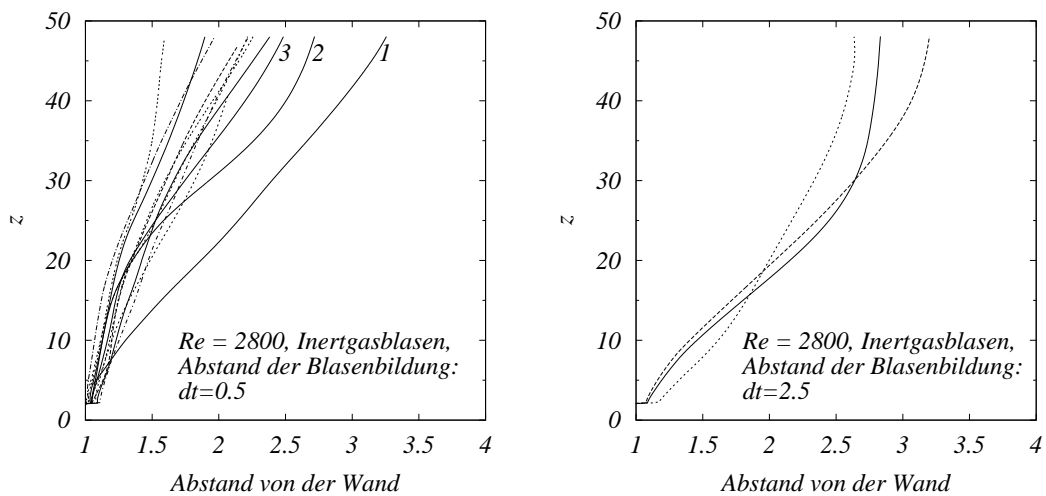


Abbildung 6.10.: Bahnlinien der Mittelpunkte von Inertgasblasen bei $Re = 2800$: links: Abstand der Blasenbildung $dt = 0.5$, mit Nummer versehen sind die Bahnen von Blasen aus dem Zeitraum vor der Zeitspanne, aus der die übrigen Daten stammen; rechts: Abstand der Blasenbildung $dt = 2.5$.

Bewegung der Blasen bei. In Abbildung 6.10 sind die Bahnen dargestellt, die die Mittelpunkte einzelner Blasen im Verlauf des betrachteten Zeitraums, in dem die Daten auch statistisch ausgewertet werden, zurücklegen. Auf den ersten Blick ist erkennbar, daß die Blasen im Fall von $dt = 0.5$ sich stets näher an der Wand

aufhalten³. Während bei $dt = 2.5$ bereits kurz oberhalb der Stelle der Blasen zugabe ein deutlicher Knick der Bahnlinien von der Wand weg zu sehen ist, so ist diese Erscheinung im Fall von $dt = 0.5$ nur undeutlich im Bereich von etwa $z = 25$ zu erkennen. Diese Beobachtung läßt sich wie folgt deuten: Während die gegenseitige Beeinflussung der Blasen im Fall von $dt = 2.5$ gering ist, führt sie im Fall von $dt = 0.5$ dazu, daß die Blasen eine relativ stabile Struktur ausbilden, indem sie wie an einer Schnur befestigt in Wandnähe aufsteigen. Über vergleichbare Ergebnisse berichtet auch Ruzicka [92], der die gegenseitige Beeinflussung in einer Linie aufsteigender Blasen theoretisch und numerisch untersucht. In Abbildung 6.10 sind zudem die Bahnen von Blasen gezeigt, die vor dem betrachteten Zeitraum aufgestiegen sind; sie sind mit Nummern in der Reihenfolge ihrer Bildung gekennzeichnet. Man kann daraus erkennen, daß sich vor dem betrachteten Zeitabschnitt die Blasenbahnen immer weiter zur Wand hin verschieben, ehe die Blasen die genannten Bahnen zu beschreiben beginnen. Auffällig ist dabei die Ähnlichkeit der Bahn der ersten Blasen mit der der im Abstand von $dt = 2.5$ gebildeten.

Vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Bewegungsmuster der Blasen können jetzt die ermittelten Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand und die Sekundärströmungen interpretiert werden. Abbildung 6.11 zeigt die Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand für den Fall der wenigen Blasen. Es fällt auf, daß die Abweichung zur Referenz stets gering ist. Zumeist wurden leicht höhere Werte als im Fall der einphasigen Strömung ermittelt. Eine andere Situation dagegen liegt bei $dt = 0.5$ vor: In dem Bereich, in dem die Blasen in geordneter Formation aufsteigen, ist durch die geringste Schwankung der u -Geschwindigkeit gekennzeichnet, wie aus Abbildung 6.12 ersichtlich ist. Hohe Werte werden hier in der Nähe der Blasen zugabestelle verzeichnet. Stromab folgt der Bereich mit regelmäßiger Blasenbewegung (Kurve zu $z = 12.2$); mit weiter zunehmendem Abstand von der Zugabestelle werden wieder höhere Werte der Standardabweichung errechnet. Wie Abbildung 6.10 ausweist, werden hier stärker voneinander abweichende Blasenbahnen beobachtet.

Der Vergleich der Sekundärströmung der einphasigen Strömung (Abbildung 6.7) mit den Sekundärströmungen der beiden Fallbeispiele mit Inertgasblasen hat eine ähnliche Aussage: Ist im Fall der wenigen Blasen ($dt = 2.5$, Abbildung 6.13) die Sekundärströmung oberhalb der Blasen zugabestelle nur wenig verändert, so ist sie bei vielen Blasen ($dt = 0.5$, Abbildung 6.14) überall außer im Bereich der Blasen zugabestelle deutlich abgeschwächt; die stärkste Abschwächung weist die Sekundärströmung bei $z = 12.2$ auf.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Konvektion von der Wand weg durch die Blasen eher gehemmt als verstärkt wird. Besonders ungünstig wirken

³Die in Abbildung 6.14 mit einer Nummer versehenen Bahnen stammen von Blasen, die vor dem betrachteten Zeitraum aufgestiegen sind, vgl. Bildunterschrift von Abbildung 6.10.

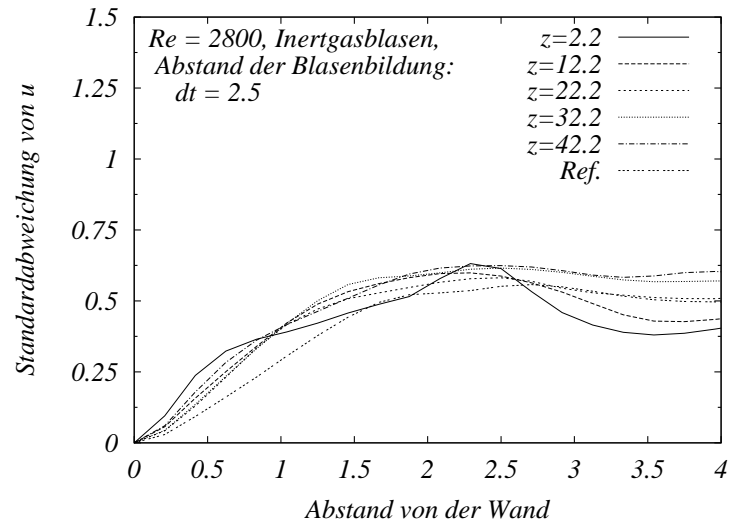


Abbildung 6.11.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 2.5$

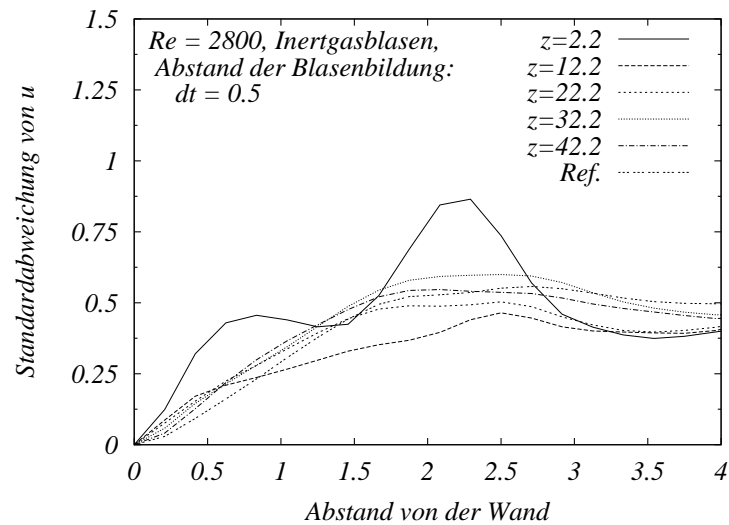


Abbildung 6.12.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 0.5$

sich Situationen aus, in denen die Blasen in regelmäßiger Formation aufsteigen. Positive Effekte auf den die Konvektion in senkrechter Richtung zur Wand werden in der Nähe der Stelle verzeichnet, an der die Blasen in die Strömung eingebracht werden.

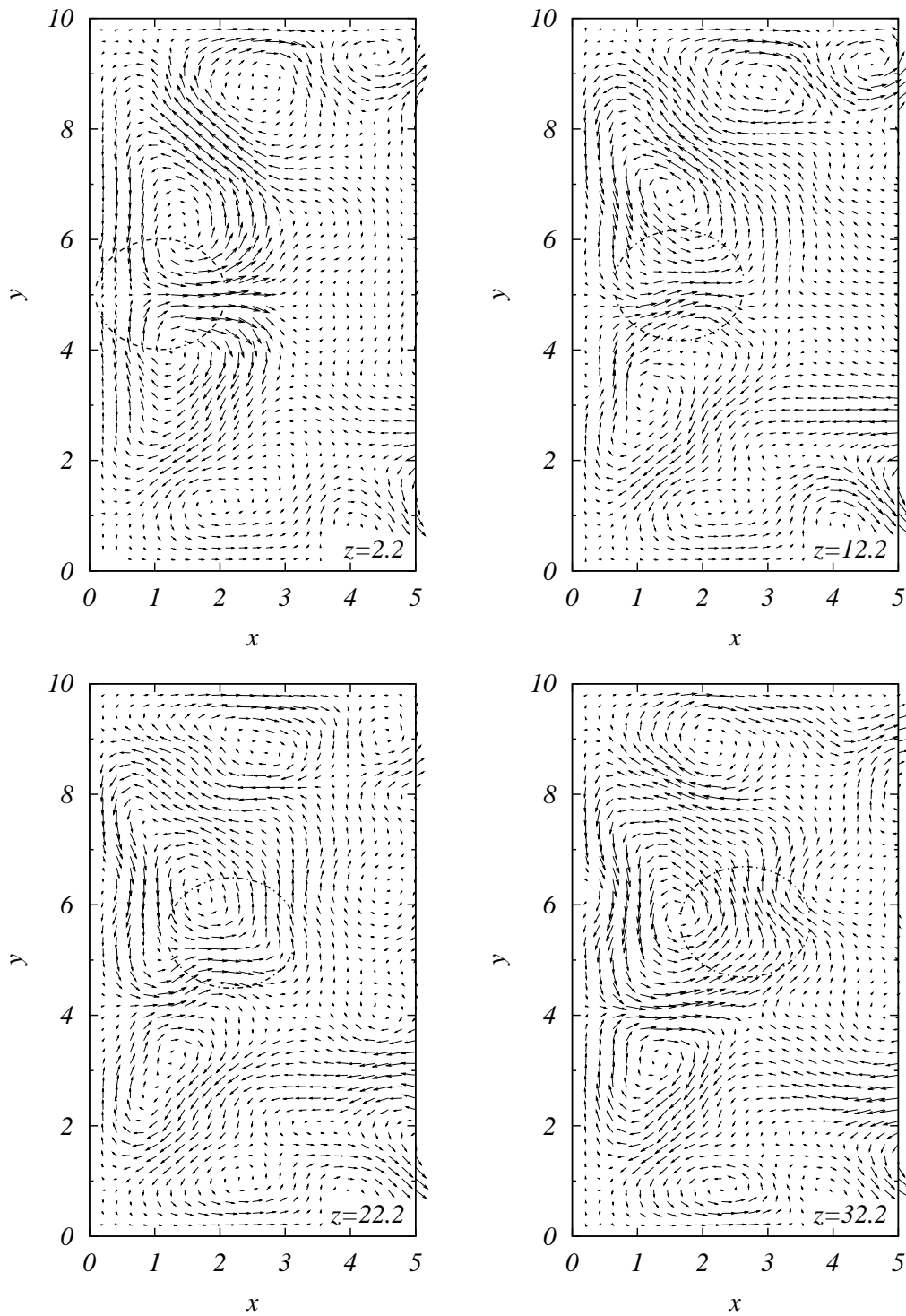


Abbildung 6.13.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Inertgasblasen Abstand der Blasenbildung $dt = 2.5$

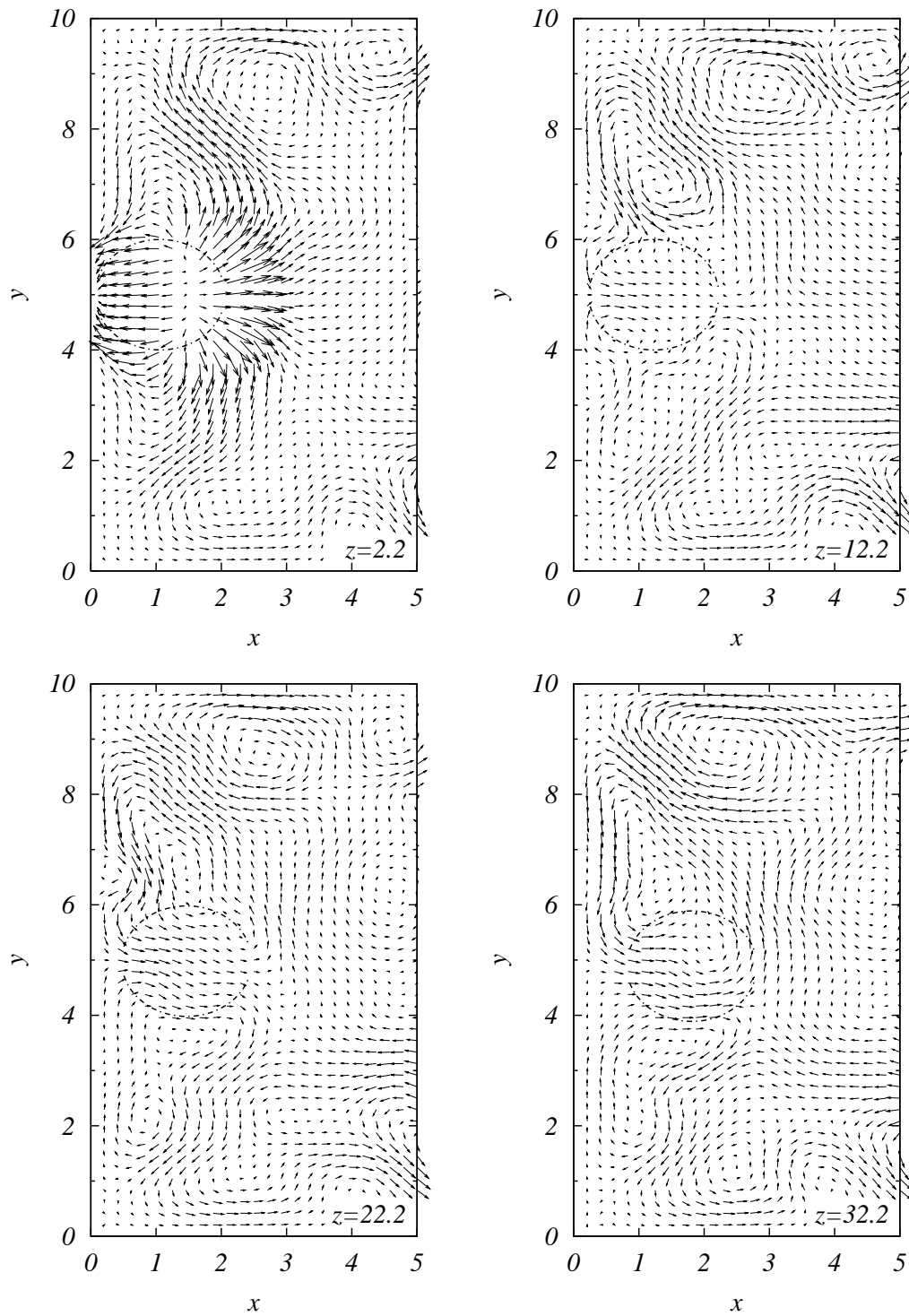


Abbildung 6.14.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 0.5$

6.4.2. Dampfblasen

Bei der Simulation der Strömung mit Phasenübergang an der beheizten Wand wird die z -Koordinate der Keimstelle, an der die Blasen eingebracht werden, variiert. x - und y -Koordinate sind wie bei den Inertgasblasen 0.0 bzw. 5.0; die Keimstelle befindet sich also stets in der Mitte der beheizten Wand. Es werden in getrennten Simulationen die Verhältnisse untersucht, die sich einstellen, wenn sich die Keimstelle bei $z = 3.0$, $z = 13.0$ und $z = 23.0$ befindet. Weil die thermische Grenzschicht der einphasigen Strömung mit zunehmender z -Koordinate dicker wird (vgl. Abbildung 6.6), verhalten sich die Blasen und davon beeinflusst die Temperaturverläufe stromabwärts je nach Lage der Keimstelle sehr unterschiedlich.

Bevor die Simulation der Strömung mit Phasenübergang beginnt, wird 15 dimensionslose Zeiteinheiten lang, ausgehend von dem mit der Temperatur $T = 0.0$ vorbelegten Temperaturfeld, die einphasige Strömung simuliert, in denen sich die thermische Grenzschicht ausbildet. Dann werden weitere 5 Zeiteinheiten simuliert, in denen Dampfblasen eingebracht werden. Erst jetzt werden, während mit der Simulation fortgefahren wird, die Ergebnisse statistisch ausgewertet.

Die Dampfblasen werden mit einem festen Radius von 1.0 in einem zeitlichen Abstand von $dt = 0.5$ an der Keimstelle ins Rechengebiet eingebracht.

Keimstelle bei $z = 3.0$

Zunächst wird untersucht, wie sich eine Dampfblasenzugabe bei $z = 3.0$ auswirkt; die Keimstelle befindet sich also ganz unten im Kanal und damit in dem Bereich, in dem sich die thermische Grenzschicht wegen des Zustroms unterkühlten Wassers von der Einströmseite des Kanals her noch kaum ausgebildet hat. Deshalb kondensieren die Blasen sehr schnell. Bei etwa $z = 5.0$ sind die Blasen bereits vollständig kondensiert.

Die Temperaturverläufe zeigt Abbildung 6.15. Man erkennt, daß die Dampfblasenzugabe im Bereich der Keimstelle den Wärmeübergang um etwa 10% gegenüber der einphasigen Strömung (Abbildung 6.6) verbessert. Dieser Wert wird ungefähr auch bei den Inertgasblasen bei einem Abstand der Blasenzugabe von $dt = 0.5$ erreicht (vgl. Abbildung 6.9). Im oberen Kanalbereich ab etwa $z = 15.0$, in dem keine Blasen mehr vorgefunden werden, wird dennoch ein im Vergleich zur einphasigen Strömung um bis zu 20% höherer Wärmeübergang festgestellt. Die Darstellung der Sekundärströmung kann zur Erklärung dieser nicht selbstverständlichen Beobachtung beitragen (Abbildung 6.17). Daraus ist ersichtlich, daß sich in dem Bereich der Kondensation der Blasen ein zusätzliches, gegenläufig

rotierendes Wirbelpaar in der Sekundärströmung ausbildet, das bis in eine Höhe von etwa $z = 20.0$ deutlich erkennbar bleibt. Es ist eingebettet in das aus der einphasigen Strömung bekannte Sekundärströmungsmuster und prägt das Erscheinungsbild der untersuchten Sekundärströmung sowie die Wärmetransporteigenschaften der Strömung maßgeblich.

Das Verhalten der Dampfblasen wirkt sich u.a. dadurch auch auf die Schwan-

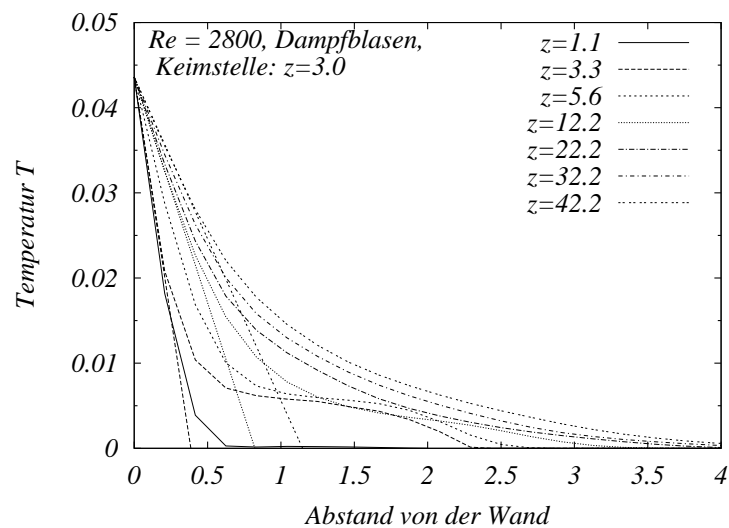


Abbildung 6.15.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

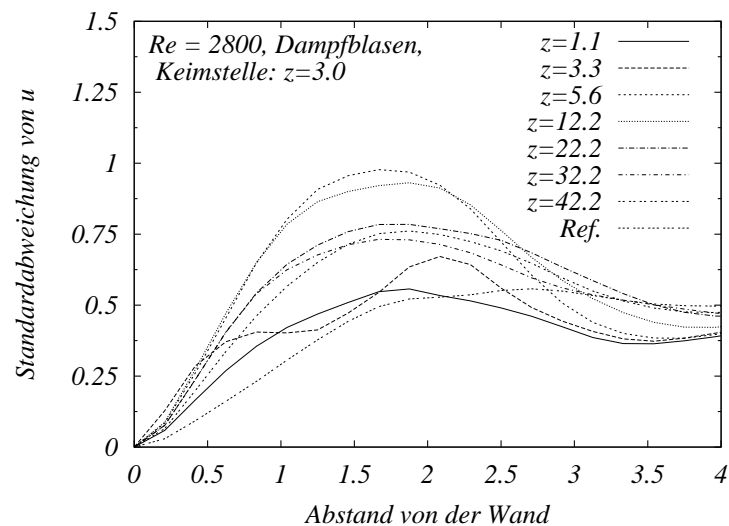


Abbildung 6.16.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

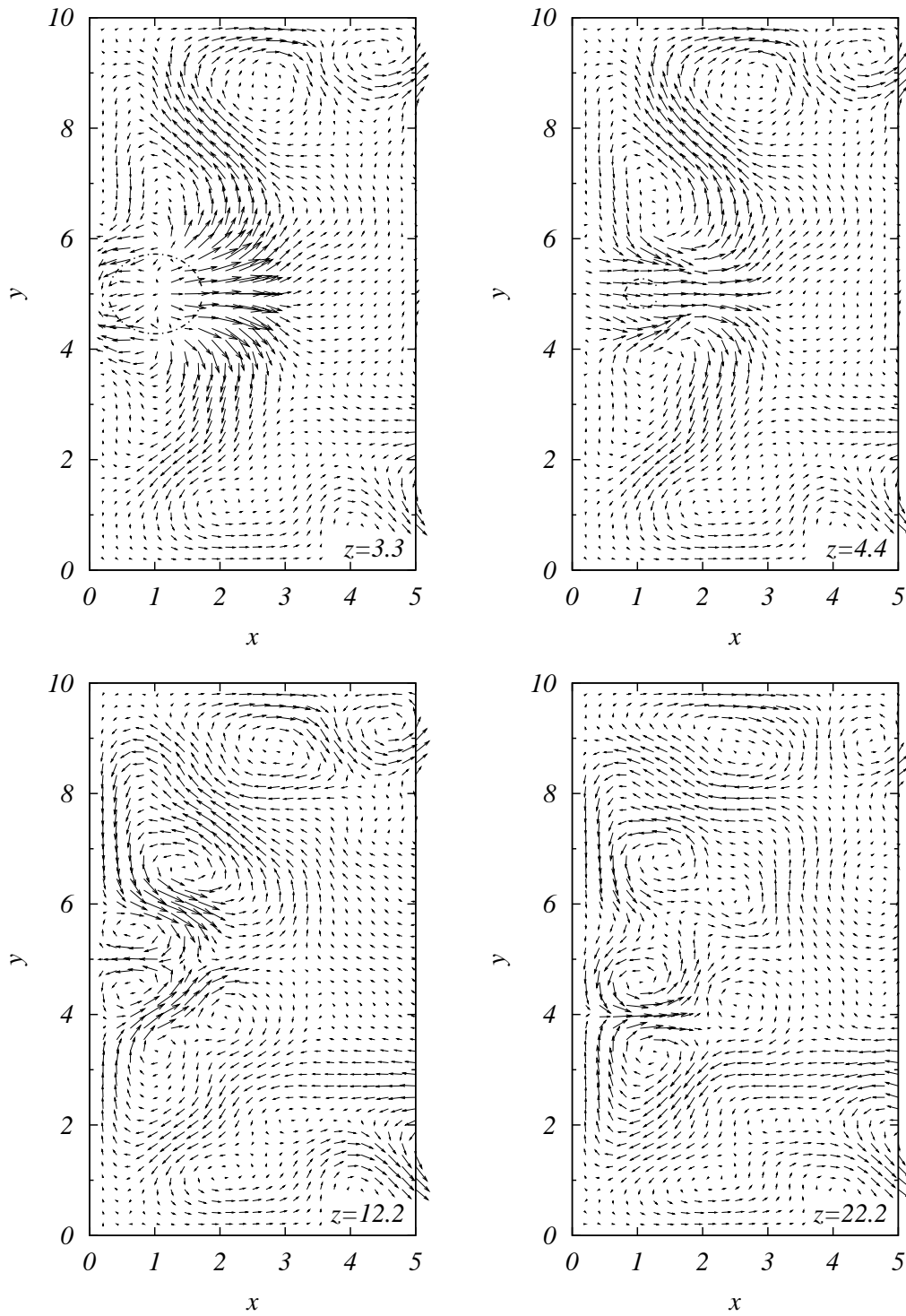


Abbildung 6.17.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

kung der u -Geschwindigkeit aus, wie Abbildung 6.16 zeigt. Im Bereich, in dem die Blasen kondensieren, werden besonders hohe Werte verzeichnet. Sie sind fast doppelt so hoch wie diejenigen aus dem Bereich der Keimstelle. Auch im Vergleich zu den Werten, die bei den Simulationen mit anderen z -Koordinaten der Keimstelle berechnet werden, sind sie signifikant höher (vgl. Abbildungen 6.21 und 6.25).

Vergleich der Strömungsfelder um Inertgasblasen und Dampfblasen

An dieser Stelle ist es interessant, das Strömungsfeld an der Wand, an der zum einen Inertgasblasen, zum anderen Dampfblasen eingebracht werden, zu analysieren. In Abbildung 6.18 sind die wichtigsten Unterschiede schematisch dargestellt. Die einphasige turbulente Strömung in der Nähe der Wand ist darin im unteren Drittel dargestellt durch einen Ausschnitt aus dem Feld der Sekundärströmung und einen Schnitt parallel zur Hauptströmungsrichtung, in dem die Geschwindigkeitsvektoren skizziert sind. Sowohl der Schnitt als auch der Ausschnitt aus dem Sekundärströmungsfeld stammen aus dem Bereich der Mitte der beheizten Wand.

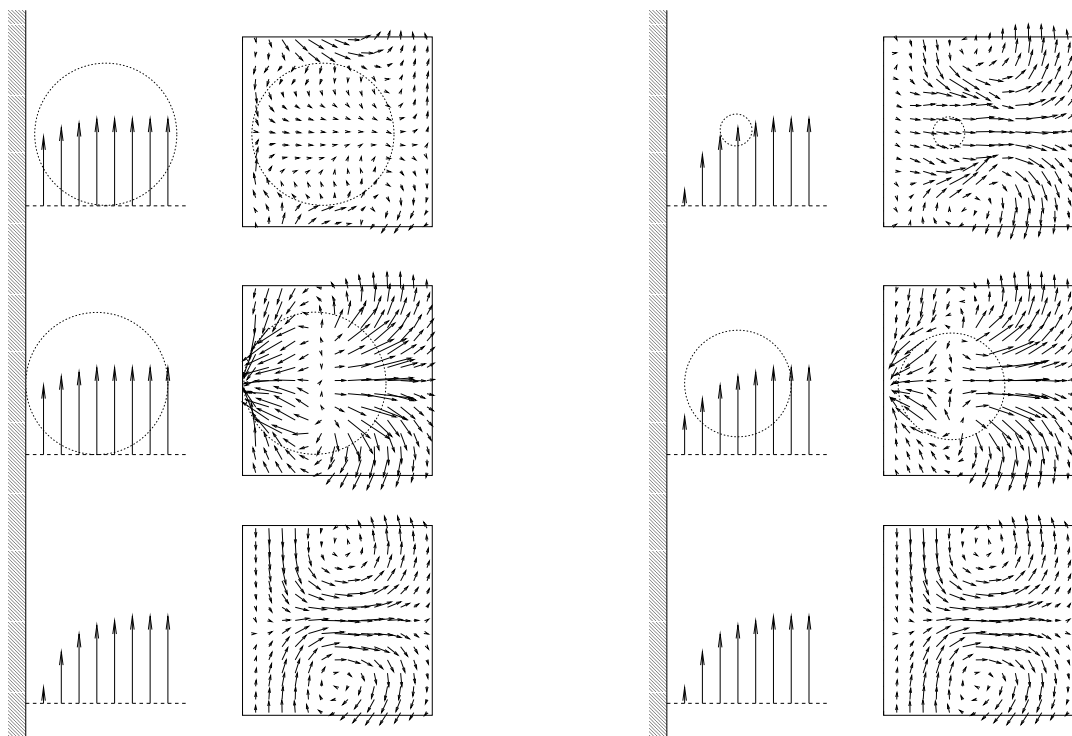


Abbildung 6.18.: Skizze zur Erklärung des qualitativen Unterschiedes zwischen der Strömung in Wandnähe bei Dampfblasen (rechts) und Inertgasblasen (links).

Typische ist die wandparallele Sekundärströmung zur Kanalmitte hin sowie das turbulente Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung.

Darüber ist die Situation in unmittelbarer Nähe des Ortes dargestellt, an dem die Dampf- bzw Inertgasblasen eingebracht werden. Der Gradient der Geschwindigkeit in senkrechter Richtung in unmittelbarer Wandnähe ist hier deutlich größer als im einphasigen Fall. Das kommt im wesentlich daher, daß zum diffusiven und konvektiven Impulstransport aus dem Kanalinneren, der mit der Reibung an der Wand im Gleichgewicht steht und das turbulente Geschwindigkeitsprofil verursacht, hier die Auftriebskraft als zusätzliche Kraft gegen die Wandreibung wirkt. Der Gradient an der Wand ist umso größer, je näher die Phasengrenze an der Wand ist. Bei der Inertgasblase ist sie nach dem Einbringen der Blase sehr nahe an der Wand, während sie im Fall von Dampfblasen, die kondensieren, sich schnell von der Wand entfernt.

Die Beschleunigung des Fluids in Wandnähe gegenüber der einphasigen Strömung wenig unterhalb des Ortes der Blasenbildung erfordert ein Nachströmen von Flüssigkeit aus dem Kanalinneren. Das verursacht die in den mittleren Skizzen deutlich sichtbare Sekundärströmung zur Wand hin. Sie ist umso stärker, je größer die Beschleunigung am Ort der Blasenzugabe ist, d.h. je länger die Blase nicht kleiner wird bzw. wächst.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Strömung mit Gas- und Inertgasblasen wird aus dem oberen Teil der Skizzen deutlich. Während im Fall von Inertgasblasen das Blasenvolumen nicht abnimmt und die Blasen, je nach der Frequenz ihrer

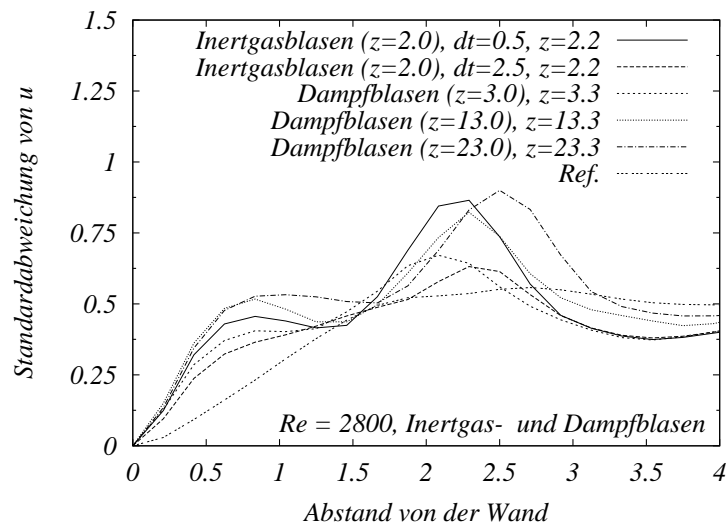


Abbildung 6.19.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ in der Nähe der Keimstelle für verschiedene betrachtete Fälle

Zugabe (und im allgemeinen Fall auch der sonstigen Einflüsse der Strömung) mehr oder weniger lange, in unmittelbarer Wandnähe aufsteigen (vgl. 6.10), kondensieren die Dampfblasen. Im Fall von kondensierenden Dampfblasen wird die Strömung in unmittelbarer Wandnähe durch das Verschwinden der Auftriebskraft verzögert; Flüssigkeit wird ins Kanalinnere zurückgedrängt. Bei Gasblasen wird die Strömung auch verzögert, allerdings nur in dem Maße, in dem die Blasen sich von der Wand entfernen. Diese Art von Verzögerung ist viel schwächer; Ihr Effekt auf die Sekundärströmungen ist kaum wahrzunehmen (vgl. Abbildungen 6.13 und 6.14).

Während die Verzögerung der Strömung an der Wand und die daraus resultierenden Effekte mit zunehmender Langlebigkeit der Blasen abnehmen, wird das Ausmaß der Veränderung der Sekundärströmung im Bereich der Stelle, an der die Blasen in das Strömungsfeld eingebracht werden, mit zunehmender Frequenz der Blasen zugabe größer; daneben wirkt sich auch hier die Lebensdauer der Blasen aus, allerdings umgekehrt: Die bei $z = 3.0$ zugegebenen Blasen, die rasch kondensieren, bewirken eine relativ geringe Steigerung der Schwankung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand, während die bei $z = 23.0$ zugegebenen diese auch in diesem Bereich deutlich verstärken wie in Abbildung 6.19 zu sehen ist.

Keimstelle bei $z = 13.0$

Werden die Dampfblasen bei $z = 13.0$ zugegeben, so haben sie eine längere Lebenszeit als die bei $z = 3.0$ zugegebenen, weil die thermische Grenzschicht auf Höhe der Keimstelle schon deutlich dicker ist (vgl. Abbildung 6.6). Durch die Störung der Strömung durch die Dampfblasen werden im Bereich der Keimstelle Wärmeübergangskoeffizienten berechnet, die um über 100% über denen der einphasigen Strömung auf selber Höhe liegen. Die Lauflänge, die die Blasen durchmessen bis sie vollständig kondensieren, ist länger als die der Blasen, die bei $z = 3.0$ eingebracht werden. Die zusätzliche Verwirbelung, die in der Sekundärströmung (Abbildung 6.22⁴) sichtbar wird, ist aber schwächer ausgeprägt.

Die Erklärung dafür ist in der Tatsache zu suchen, daß die Volumenabnahme der Blasen sich hier über einen längeren Zeitraum erstreckt; die von der Wand weg gerichtete Sekundärströmung ist sehr schwach, sie ist in Abbildung 6.22 kaum zu erkennen. Der zusätzliche Wirbel in der Sekundärströmung ist hier im Vergleich zum Fall mit der Blasenkeimstelle bei $z = 3.0$ viel schwächer ausgeprägt. Auswirkungen hat das auf die beobachtete Standardabweichung von u (Abbildung 6.21): Die Werte liegen zwar alle im Bereich, in dem die Blasen aufsteigen

⁴Der in die Sekundärströmung des Querschnitts bei $z = 17.8$ skizzierte Blasenradius ist auf der Grundlage von nur den 4 Blasen berechnet, die diese Höhe erreichten. Der Blasenradius ist hier – wie sonst auch – kein Maß für das den Querschnitt passierende Gasvolumen.

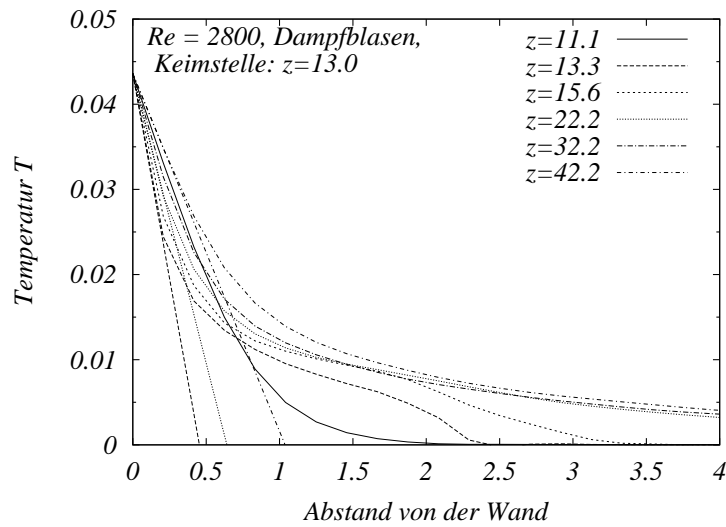


Abbildung 6.20.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

($0.0 < x < 2.5$), oberhalb der Referenz, sie sind aber (mit Ausnahme der Kurven bei $z = 11.1$ und $z = 13.3$, in der Nähe der Keimstelle) geringer als im Fall der Keimstelle bei $z = 3.0$.

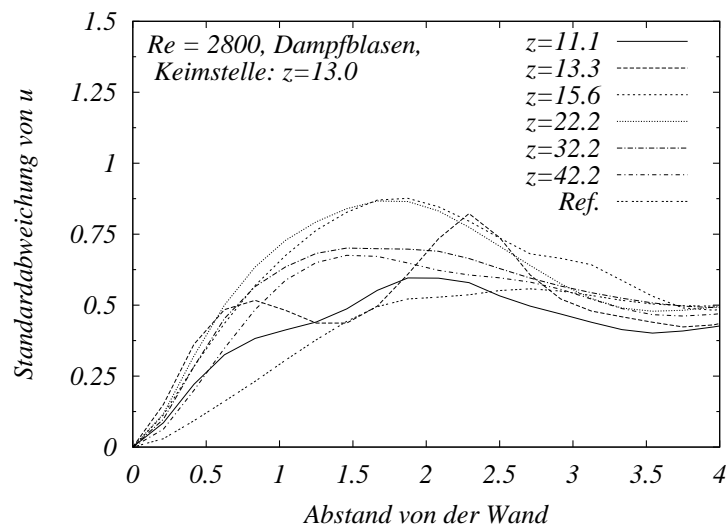


Abbildung 6.21.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

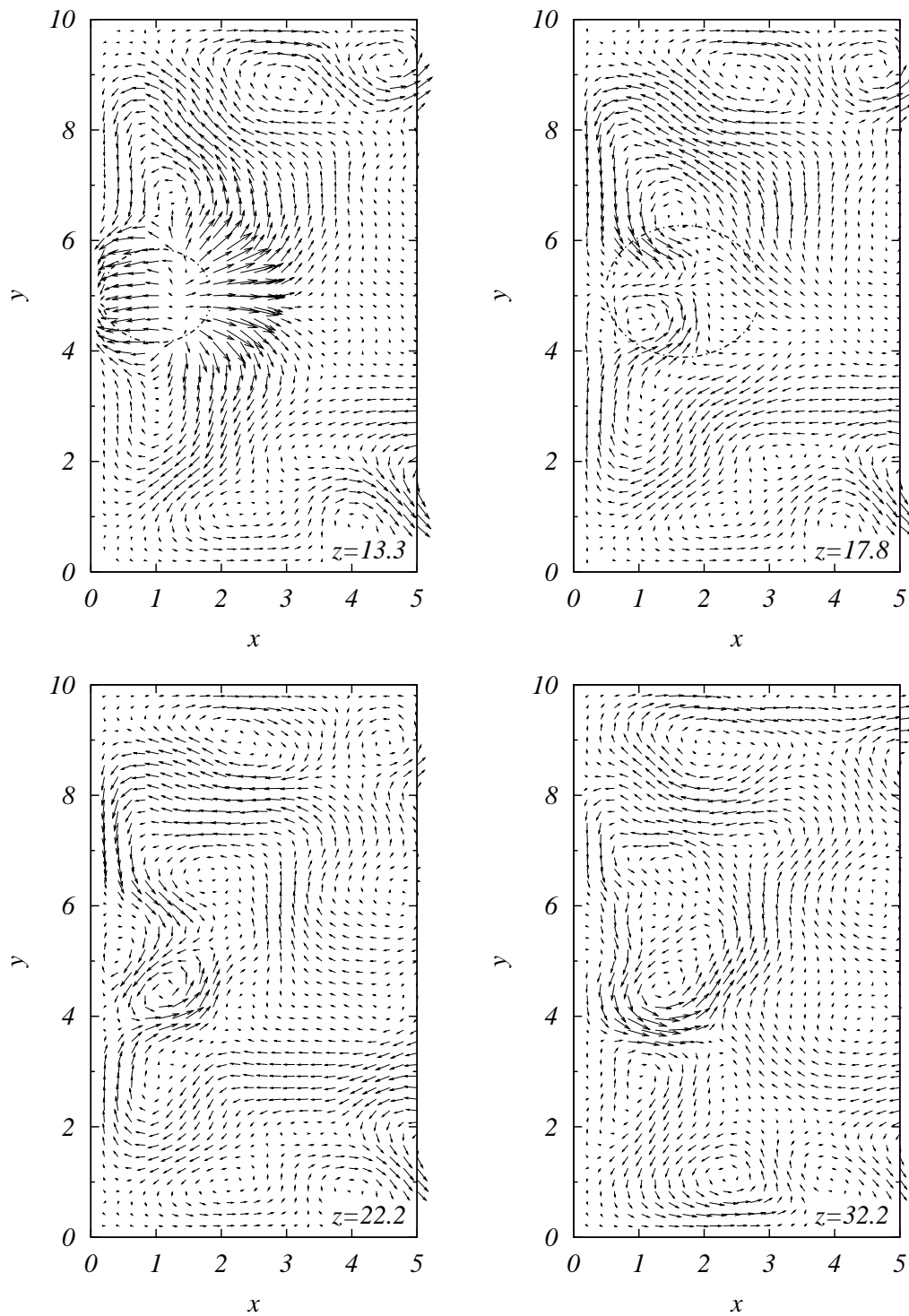


Abbildung 6.22.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

Keimstelle bei $z = 23.0$

Wird die Keimstelle weiter nach oben auf $z = 23.0$ gelegt, so stellt sich eine Strömung im Kanal ein, die zu den bisher betrachteten Fällen große Unterschiede aufweist und sich entsprechend auf den Mechanismus der Wärmeübertragung auf das Fluid auswirkt. Die Grenzschichtdicke (Abbildung 6.6) auf Höhe der Keimstelle bewirkt, daß die Blasen nicht mehr sofort an der Keimstelle zu kondensieren beginnen, sondern zunächst noch an Volumen zulegen.

Durch die verstärkte Fluidbewegung senkrecht zur Wand in der Nähe der Keimstelle werden hier Temperaturkurven beobachtet, deren Tangenten an der Wand eine um fast 200% größere Steigung aufweisen als diejenigen der Temperaturkurven im einphasigen Fall in selber Kanalhöhe (Abbildungen 6.23 und 6.25). Der Wärmeübergang beispielsweise 9 Längeneinheiten oberhalb der Keimstelle bei $z = 32.2$ aber fällt gegenüber demjenigen um 20% zurück, der ebenfalls 9 Längeneinheiten oberhalb der Keimstelle beobachtet wird, wenn diese bei $z = 13.0$ liegt. Auch die entsprechenden Kurven der Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand weisen geringere Werte auf. Diese Beobachtungen lassen sich darauf zurückführen, daß die Blasengröße sich in diesem Bereich relativ wenig ändert (Abbildung 6.24). Ähnlich dem Fall der Inertgasblasen, die in Abständen von $dt = 0.5$ in die Strömung eingebracht werden, bildet sich hier eine relativ stabile Formation in kleinem Abstand an der Wand aufsteigender Blasen aus. Dadurch wird der Abtransport der Wärme von der Wand durch turbulente Konvektion behindert. Erst bei etwa $z = 30$ beginnen die Blasen von der Wand abzudriften und an Volumen zu verlieren.

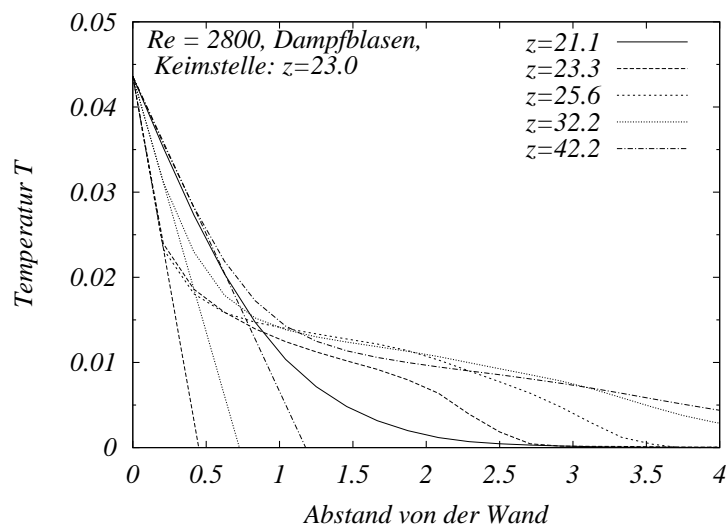


Abbildung 6.23.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

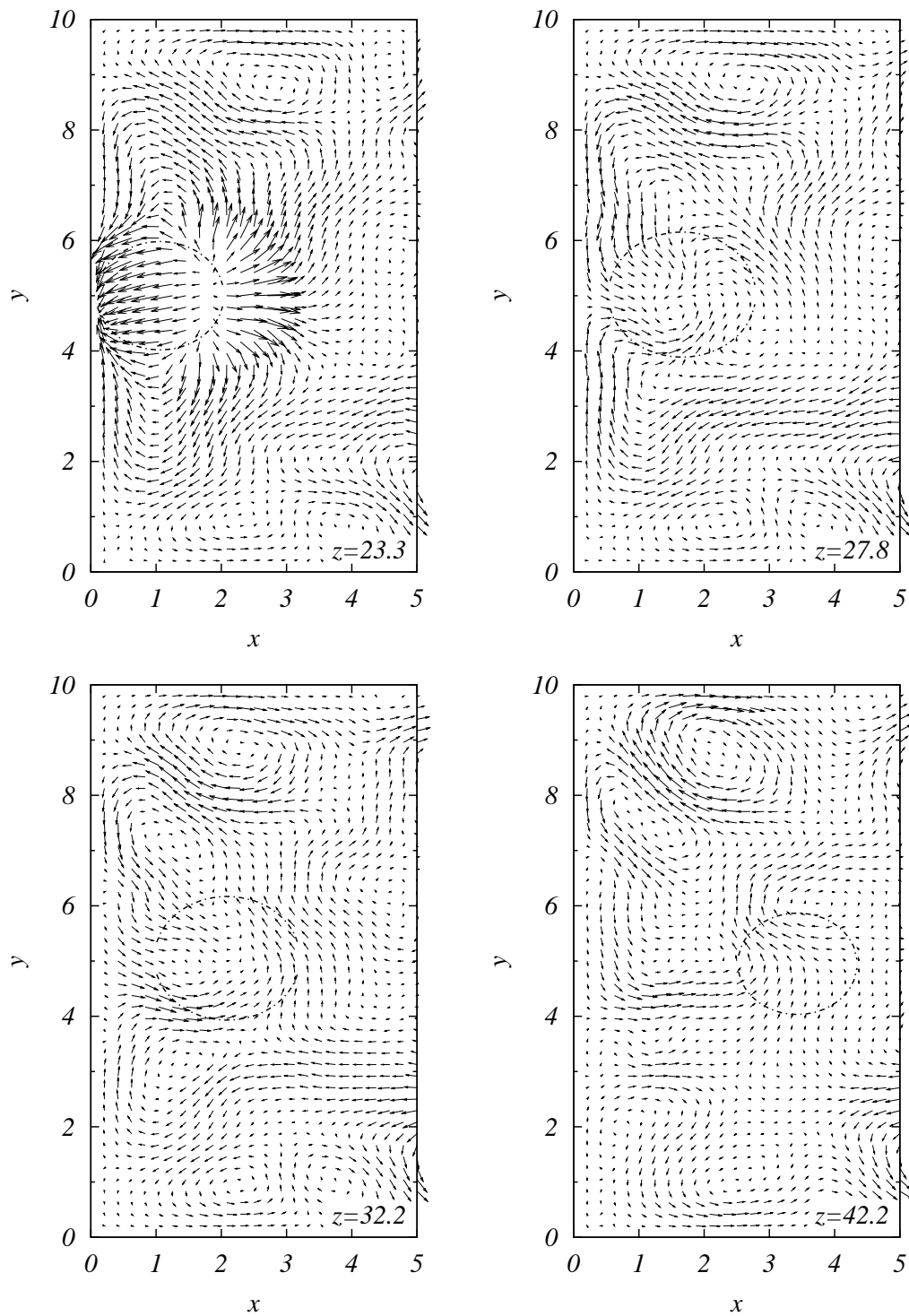


Abbildung 6.24.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

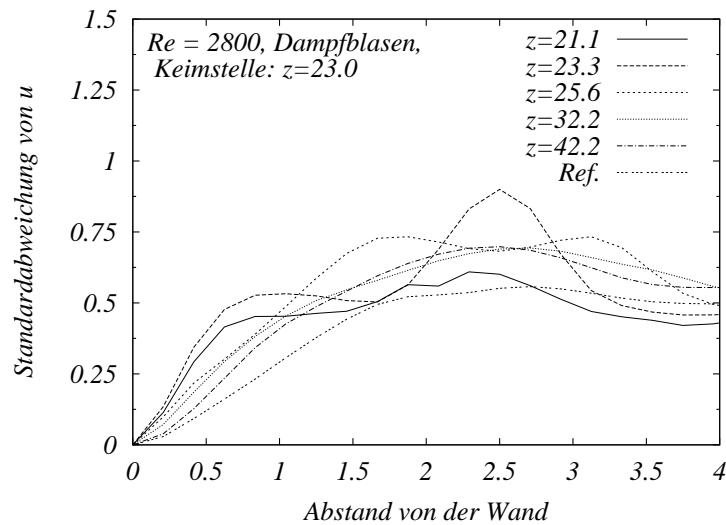


Abbildung 6.25.: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 2800$ Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

Der beschriebene dämpfende Effekt der Blasenbewegung auf die Turbulenz und den Wärmeübergang ist allerdings relativ zu den Beobachtungen bei Dampfblasen zu sehen, die bei $z = 3.0$ und $z = 13.0$ in den Kanal eingebracht werden. Im Vergleich zur einphasigen Strömung werden, was den Wärmeübergang und Querbewegung des Fluids betrifft, stets höhere Werte verzeichnet. Volumenzu- und -abnahme infolge von Kondensation und Verdampfung bewirken hier – im Gegensatz zu den betrachteten Fällen mit Inertgasblasen – eine ständige Veränderung der Fluidbewegung.

6.4.3. Interpretation der Ergebnisse

Zwischen den Ergebnissen, die die Simulationsrechnungen mit Inertgasblasen und mit Phasenübergang erbracht haben, bestehen nicht nur quantitative, sondern auch qualitative Unterschiede. Während festgestellt wurde, daß Inertgasblasen, die in kurzen Abständen an einer beheizten, turbulent angeströmten Wand entlang aufsteigen, einen gegenüber der einphasigen Strömung nur wenig verbesserten Wärmetransport ins Kanalinnere verursachen, werden bei Dampfblasen erheblich höhere Wärmeübergangsraten beobachtet. Die Gründe dafür liegen, wie gezeigt wurde, darin, daß insbesondere in dichter Folge aufsteigende Inertgasblasen die für den Wärmetransport wichtige Sekundärströmungsstruktur ungünstig beeinflussen, indem sie eine ebene Bewegung in wandparalleler Richtung ausführen; wenn sie in kurzen Abständen aufsteigen, sind die Zwischenräume klein, so daß sich dort keine effektiv wärmetransportierende Strömung ausbilden

Tabelle 6.1.: Energieeintrag \overline{E}^+ in den Kanal bei $Re = 2800$ pro Zeiteinheit, gemittelt über 10 Zeiteinheiten, für verschiedene untersuchte Fälle ($\Delta\overline{E}^+$: im Vergleich zur einphasigen Strömung zusätzlich eingebrachte thermische Energie)

Fall	\overline{E}^{+5}	$\Delta\overline{E}^+$
Dampfblasen, $z = 3.0$	1808	223
Dampfblasen, $z = 13.0$	2964	1379
Dampfblasen, $z = 23.0$	3514	1929
Inertgasblasen, $dt = 2.5$	1667	82
Inertgasblasen, $dt = 0.5$	1634	49
einphasig	1585	0

kann. Dampfblasen, die rasch kondensieren, führen zu einer Wirbelstruktur in der Sekundärströmung, die weit stromabwärts des Auftretens der Blasen bemerkbar bleibt und den Wärmetransport ins Kanalinnere erleichtert. Allen Fällen gemein ist eine relativ starke Störung der Strömung durch das Einbringen der Blasen und der dadurch teils deutlich verbesserte Wärmeübergang in diesem Bereich.

Es wurde deutlich, daß allein die strömungsmechanische Auswirkungen des Vorhandenseins von Blasen zu einer Verbesserung des Wärmetransports ins Kanalinnere führen. Der latente Wärmetransport aber leistet zusätzliche Beiträge. In Tabelle 6.1 ist der mittlere Gesamtenergieeintrag pro Zeiteinheit (siehe 6.2.2) in den Kanal in der Zeit, zu der die Simulationsergebnisse auch ausgewertet wurden, für die betrachteten Fälle zusammengestellt.

Obwohl die Schwankung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand und auch die sich in den Sekundärströmungen zeigenden zusätzlichen Wirbel abnehmen, wenn die Blasenkeimstelle nach oben verlegt wird, steigt der Eintrag thermischer Energie dadurch signifikant an. Offensichtlich ist also der latente Wärmetransport, der mit größeren Blasenvolumina einhergeht, so stark, daß der durch zunehmende Stabilisierung der Strömung und Dämpfung der Turbulenz bewirkte gegenteilige Effekt dadurch überdeckt wird.

Hinsichtlich der Frage, ob der beim Blasensieden stark erhöhte Wärmeübergang auf latenten Wärmetransport oder verstärkte Konvektion durch die von der Blasenbewegung hervorgerufene Bewegung verursacht wird, sind die Daten aus Tabelle 6.1 sehr aussagekräftig. Obwohl gerade die bei $z = 3.0$ eingebrachten Dampfblasen die Konvektion in der Nähe der beheizten Wand verstärken, wird der durch die Blasen erreichte zusätzliche Wärmetransport im Fall der von den anderen, im Kanal weiter oben liegenden Keimstellen aufsteigenden Blasen um ein Vielfaches

⁵Die Daten sind gegebenenfalls um den Energieeintrag durch das Einbringen von Dampfblasen bereinigt.

übertraffen.

Inertgasblasen bewirken also nach den vorliegenden Ergebnissen hier einen leicht verbesserten konvektiven Wärmetransport. Konvektive Effekte der einphasigen Strömung werden dabei einerseits außer Kraft gesetzt, andererseits verursacht aber insbesondere das Einbringen der Blasen zusätzliche Konvektion. Rasch kondensierende Dampfblasen führen ebenfalls zu einer zusätzlichen Konvektion. Wesentlich höhere Wärmeübertragungsraten werden aber dann erzielt, wenn latent Wärme transportiert wird.

6.5. Kanalströmung bei $Re = 6000$

Eine Erhöhung der Kanal Reynoldszahl auf 6000 durch eine erhöhte Fließgeschwindigkeit im Kanal bei ansonsten gleichen Bedingungen ermöglicht weitere interessante Beobachtungen. Die wichtigsten Unterschiede der Verhältnisse im Vergleich zu $Re = 2800$ gehen auf die Tatsache zurück, daß die Blasen schneller an der Wand entlanggetrieben werden, sowie auf die größere Turbulenzintensität der einphasigen Strömung. Die höhere Absolutgeschwindigkeit der Blasen ermöglicht eine höhere Frequenz der Blasenzugabe. Es resultiert eine höhere Heizflächenbelastung. Im Fall von Inertgasblasen werden Simulationen durchgeführt für die Fälle, daß die Blasen zugabe in (dimensionslosen) Zeitintervallen von $dt = 0.3$ und $dt = 1.5$ erfolgt. Die Dampfblasen werden hier ebenfalls im kürzeren Intervall von $dt = 0.3$ eingebracht. Wie im Fall von $Re = 2800$ liegt die Stelle, an der die Blasen eingebracht werden, bei $x = 0.0$ und $y = 5.0$; Inertgasblasen werden stets

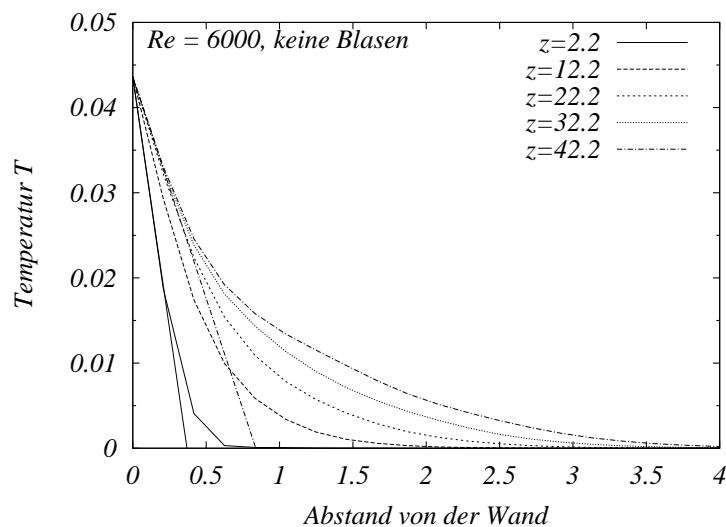


Abbildung 6.26.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, keine Blasen

bei $z = 2.0$ in die Strömung gesetzt, bei den Dampfblasen wird die z -Koordinate variiert.

Im Vergleich zur Strömung bei $Re = 2800$ ist hier der Wärmeübergang im einphasigen Fall deutlich besser. Die erhöhte Turbulenzintensität und die damit verbundene bessere Durchmischung sorgt vor allem nach einer gewissen Lauflänge, also im oberen Kanalteil, für um fast 100% höhere Nußeltzahlen, wie Abbildung 6.26 ausweist. Die Dicke der thermischen Grenzschicht nimmt also mit größer werdendem Abstand von der Einströmseite in z -Richtung langsamer zu als bei einer Kanalreynoldszahl von 2800.

6.5.1. Inertgasblasen

Das Einbringen von Inertgasblasen im Abstand von $dt = 1.5$ verändert den Wärmeübergang im Bereich des Einbringungsortes nur unmerklich. Im oberen Kanalteil wird sogar eine geringe Verschlechterung des Wärmeübergangs um etwa 10 % festgestellt, wie aus Abbildung 6.27 im Vergleich mit Abbildung 6.26 hervorgeht.

Eine Erhöhung der Frequenz, mit der die Blasen zugeführt werden, verschlechtert den Wärmeübergang im oberen Kanalbereich weiter, während in der Nähe des Einbringungsortes weiterhin kaum eine Änderung verzeichnet wird (Abbildung 6.28). Diese Beobachtungen lassen sich qualitativ zurückführen auf die Schwankung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand und die Se-

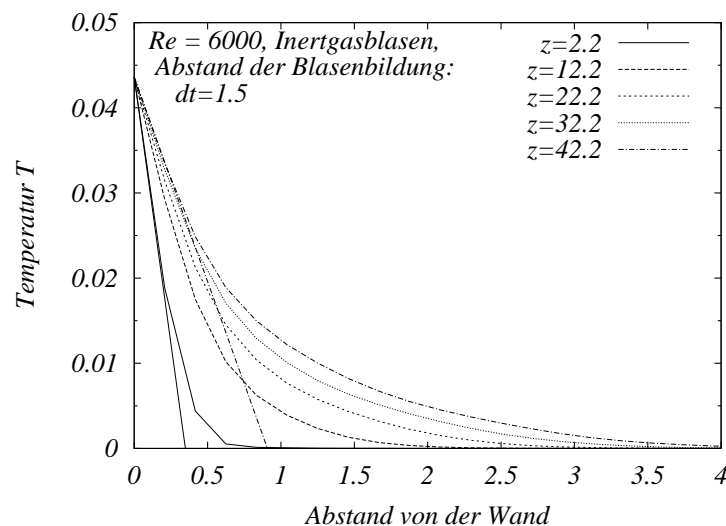


Abbildung 6.27.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 1.5$

kundärströmungen bei den betrachteten Fällen. Die Schwankung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand ist für den Fall $dt = 1.5$ in Abbildung 6.29 bzw. für den Fall $dt = 0.3$ in Abbildung 6.30 gegen den Wandabstand aufgetragen.

Zunächst fällt im Vergleich mit den entsprechenden Kurven aus den Simulationen bei $Re = 2800$ (Abbildung 6.11 bzw. 6.12) auf, daß hier im Bereich des Ortes der Blasenentstehung zwar höhere Werte erreicht werden als bei $Re = 2800$, daß diese Werte aber insbesondere in Wandnähe im Gegensatz zu $Re = 2800$ niedriger als die Referenz der einphasigen Strömung sind. Bei $Re = 6000$ wird in keinem der betrachteten Querschnitte außer dem nahe dem Ort der Blasenbildung eine Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand verzeichnet, die höher als die Referenz ist, im Gegenteil, besonders im wandnahen Bereich liegen sie um bis zu 50% darunter.

Bei der Simulation mit der kleineren Anzahl an Blasen ($dt = 1.5$) ist die Dämpfung der Turbulenz in allen betrachteten Schnitten geringer als bei $dt = 0.3$. Keine der Kurven entfernt sich weit von der Referenz, meist liegen die Werte knapp darunter. Insgesamt kann gesagt werden, daß sich die Schwankung der u -Geschwindigkeit im Fall der Blasenzugabe in Intervallen von $dt = 1.5$ kaum verändert, daß aber bei einer Blasenzugabe in Intervallen von $dt = 0.3$ generell eine starke Dämpfung beobachtet wird.

Weitere Einblicke liefern die Darstellungen der Sekundärströmungen in Verbindung mit den Bahnen der Blasenmittelpunkte. Wieder dient bei der Sekundärströmung die einphasige Strömung als Referenz (Abbildung 6.31). Im Vergleich

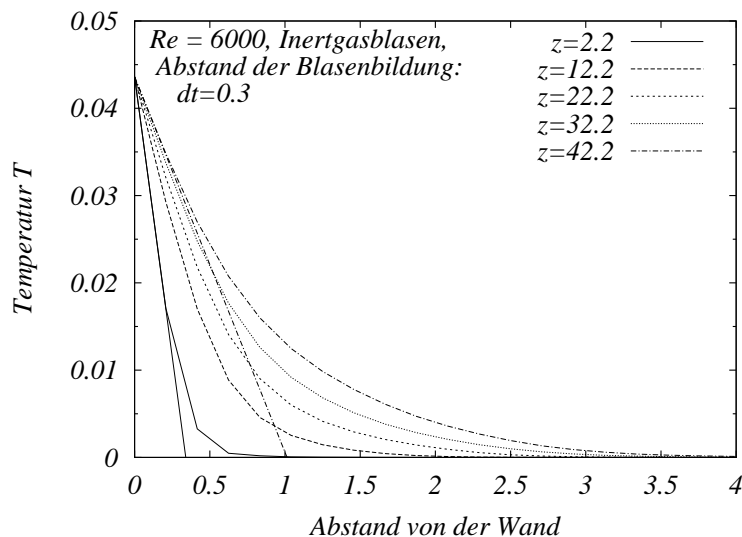


Abbildung 6.28.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 0.3$

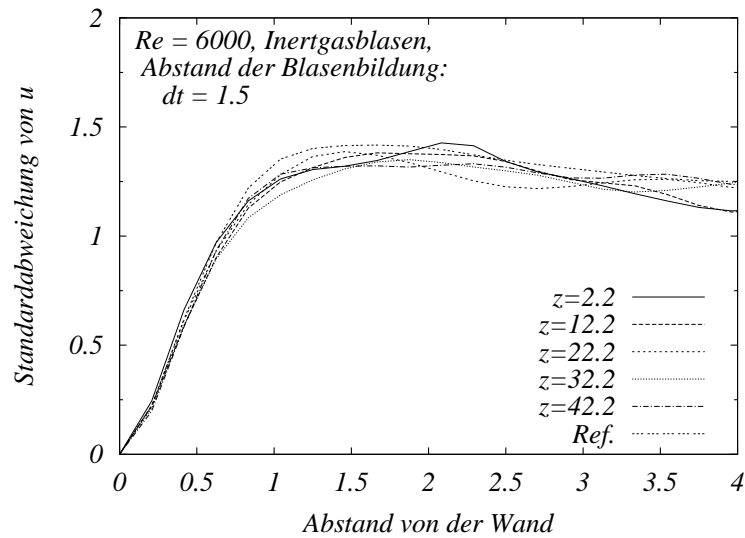


Abbildung 6.29.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 6000$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 1.5$

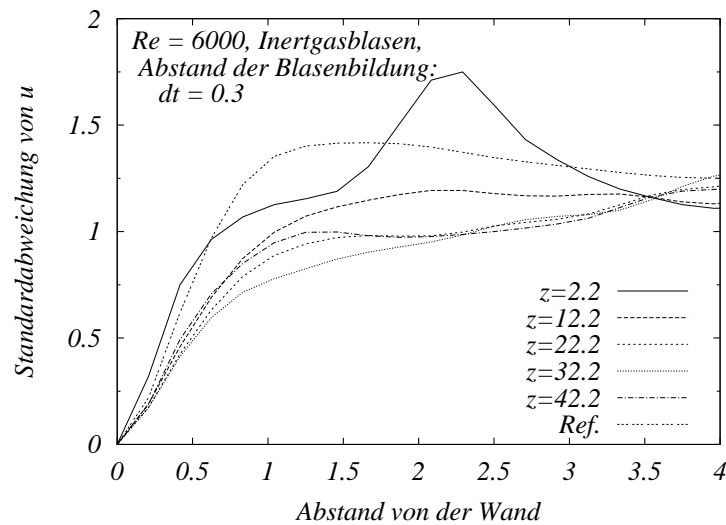


Abbildung 6.30.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 6000$, Inertgasblasen, Abstand der Blasenbildung $dt = 0.3$

zu $Re = 2800$ ist die Strömung hier deutlich weniger strukturiert. Die Beträge der Geschwindigkeitsvektoren der Sekundärströmung sind im Mittel größer; in den entsprechenden Abbildungen zu $Re = 2800$ haben die Vektorpfeile dieselbe Skalierung wie in den Abbildungen 6.31 bis 6.33 (zu $Re = 6000$).

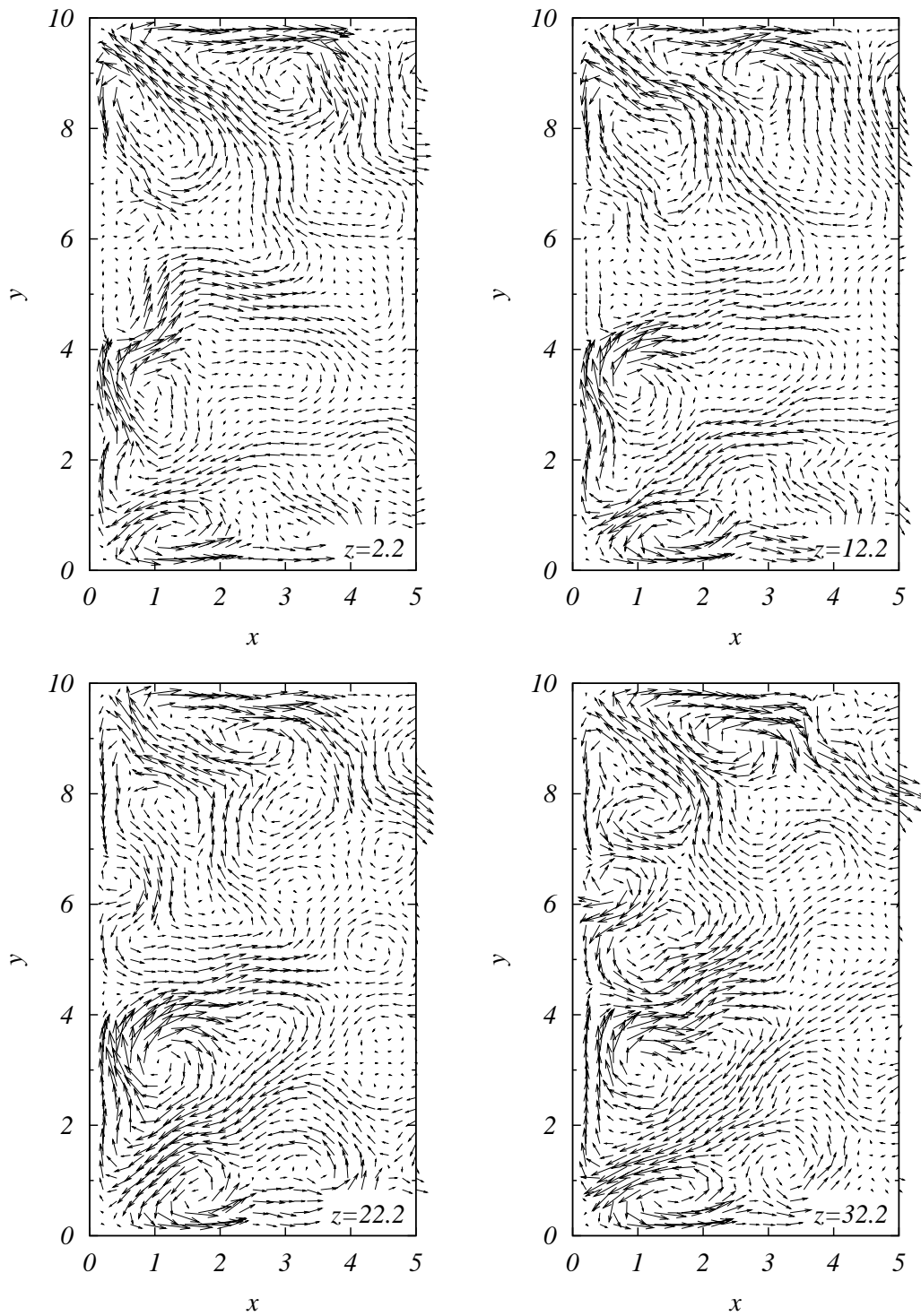


Abbildung 6.31.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, einphasig

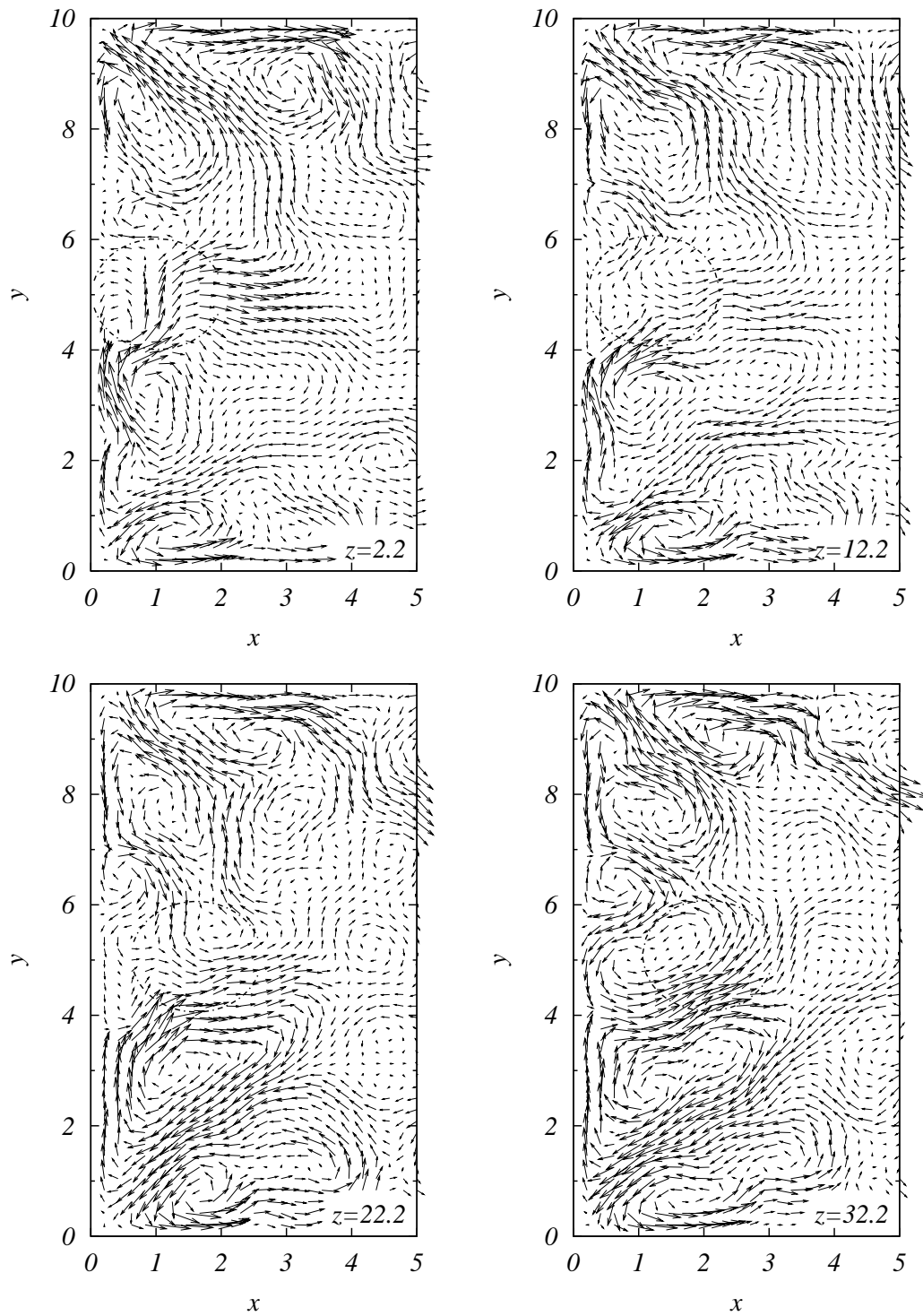


Abbildung 6.32.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, Inertgasblasen Abstand der Blasenbildung $dt = 1.5$

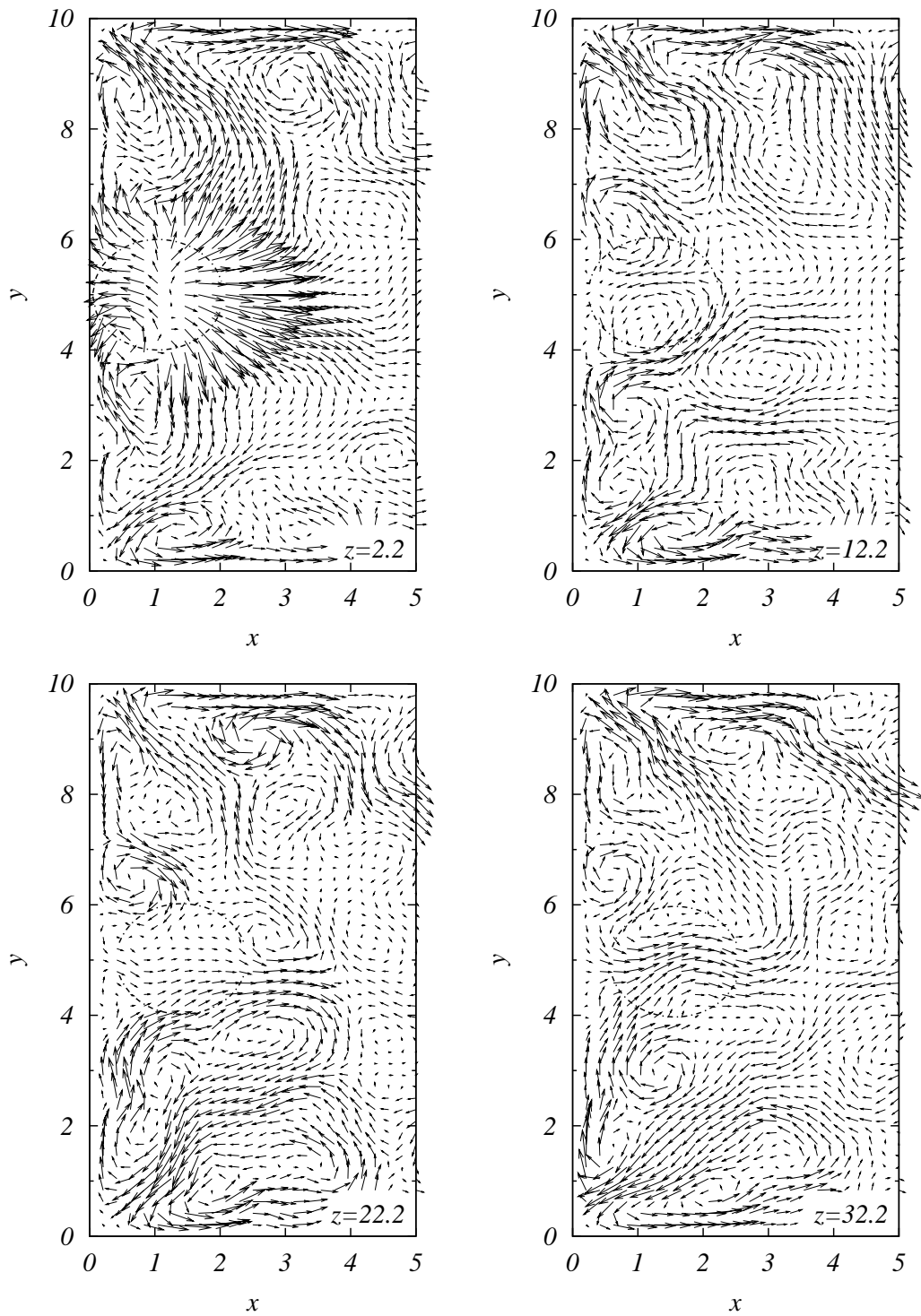


Abbildung 6.33.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, Inertgasblasen Abstand der Blasenbildung $dt = 0.3$

Bei $Re = 6000$ zeigt der Vergleich der Sekundärströmung des Falls, bei dem die Blasen im Abstand von $dt = 1.5$ zugegeben werden (Abbildung 6.32), daß die Veränderung der Sekundärströmung durch die Blasen im allgemeinen geringer ist als im entsprechenden Fall bei $Re = 2800$ (vgl. dazu die Abbildungen 6.13 und 6.7). Aus Abbildung 6.33 ($dt = 0.3$) ist ersichtlich, daß bei der höheren Kanalreynoldszahl die Störung der Strömung am Ort der Blasenentstehung sehr stark ist. Besonders bei etwa $x = 2.5$, wo auch das Maximum der Kurve der Standardabweichung liegt, weicht die Strömung der langsamen Blase mit hoher mittlerer Geschwindigkeit ins Kanalinnere aus bzw. strömt zur Kanalwand hin. Bei den Sekundärströmungen der Querschnitte weiter oben im Kanal ist zu bemerken, daß sich die Blasenpositionen wenig ändern. Die Blasen steigen trotz der starken Turbulenz wie im entsprechenden Fall bei $Re = 2800$ (Abbildung 6.14) in Wandnähe auf.

Aufgrund der höheren Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung werden die Blasen in beiden Fällen weniger stark von der Wand abgetrieben, wie Abbildung 6.34 im Vergleich mit Abbildung 6.10 ausweist. Die stärkere Turbulenz scheint hier eher zu einer Stabilisierung der Strukturen zu führen, die die Blasen im Fall von $dt = 0.3$ bilden, worauf die geringere Schwankungsbreite der Blasenbahnen hindeutet. Prinzipielle Unterschiede zwischen den beiden Fällen können aber nicht ausgemacht werden.

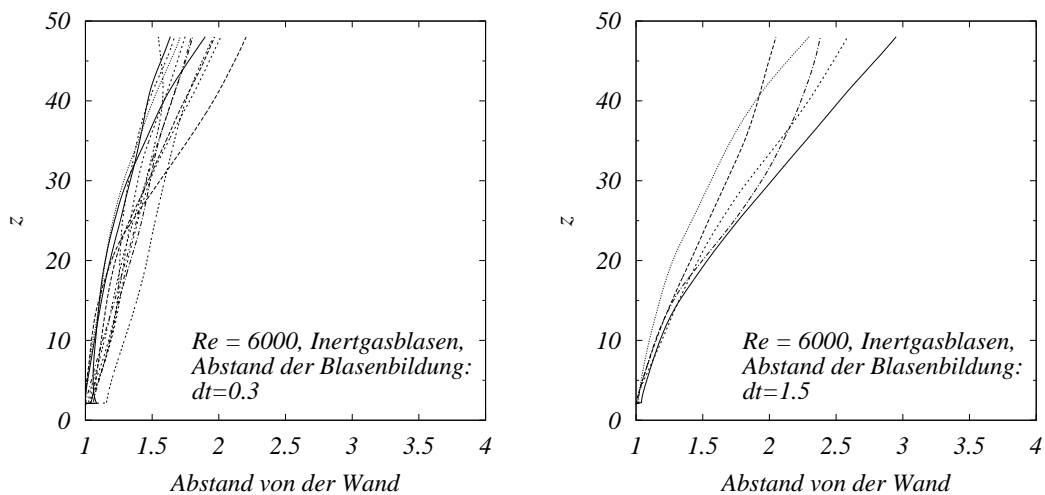


Abbildung 6.34.: Bahnlinien der Mittelpunkte von Inertgasblasen bei $Re = 6000$: links: Abstand der Blasenbildung $dt = 0.5$; rechts: Abstand der Blasenbildung $dt = 2.5$.

6.5.2. Dampfblasen

Bei der Simulation und der Vorbereitung dazu wird genauso verfahren wie in den entsprechenden Fällen mit einer Kanal Reynoldszahl von 2800. Der zeitliche Abstand, mit dem die Blasen zugegeben werden, beträgt $dt = 0.3$. Untersucht wird, wie sich Strömung und Temperaturfeld verhalten, wenn die Blasen an Keimstellen bei $z = 3.0$, $z = 13.0$ und $z = 23.0$ zugegeben werden.

Keimstelle bei $z = 3.0$

Aufgrund der hier sehr dünnen thermischen Grenzschicht (vgl. Abbildung 6.26) kondensieren die Blasen rasch. Im Vergleich zum äquivalenten Fall bei $Re = 2800$ wird der Kanal aber schneller durchströmt. Die Blasen legen daher in ihrer kürzeren Lebenszeit dennoch eine Strecke zurück, die der der Blasen im Fall von $Re = 2800$ vergleichbar ist. Hier werden ab einer Höhe von etwa $z = 6.0$ keine Blasen mehr beobachtet.

Der Wärmeübergang im Bereich der Keimstelle sowie im ganzen weiteren Verlauf des Kanals verbessert sich gegenüber der einphasigen Strömung um etwa 10%. Abbildung 6.36 zeigt die entsprechenden Kurvenverläufe.

In der Nähe der Keimstelle werden bei der Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand ähnliche Kurvenverläufe erhalten wie typischerweise bei $Re = 2800$ (Abbildung 6.37). Im Vergleich zur Referenz aber ergeben sich Unterschiede: Während in den entsprechenden Fällen bei $Re = 2800$ fast überall die Referenz übertroffen wurde, liegen die hier im Bereich von $x = 0.0$ bis etwa $x = 2.0$ festgestellten Werte zum Teil deutlich unterhalb der Referenz der einphasigen Strömung. Die Absolutwerte der jeweiligen Referenz und der untersuchten Fälle sind im Fall von $Re = 6000$ freilich stets höher als die im Fall von $Re = 2800$. Die Unterschiede im Vergleich zur Referenz lassen sich dadurch erklären, daß die Differenz der Turbulenzintensitätswerte in von Flüssigkeit besetzten Bereichen zu den Orten, an denen die Blasen sich befinden, bei $Re = 6000$ größer als bei $Re = 2800$ sind; innerhalb der Blasen werden die Standardabweichung nämlich zu null berechnet. In derselben Weise wirkt sich aus, daß die Frequenz der Blasen zugabe hier höher ist als im Fall von $Re = 2800$.

Die höchsten Turbulenzintensitäten werden in einem senkrechten Abstand von etwa 10 Längeneinheiten von der Keimstelle und etwa 2 Längeneinheiten von der Wand entfernt verzeichnet. Die Turbulenzintensität ist überall außer in der Nähe der Keimstelle größer oder nur wenig geringer als im Fall der einphasigen Strömung.

Bei der Sekundärströmung (Abbildung 6.35) wird im wesentlichen wieder die Wirbelkonfiguration wie bei $Re = 2800$ beobachtet, die hier allerdings ein fast

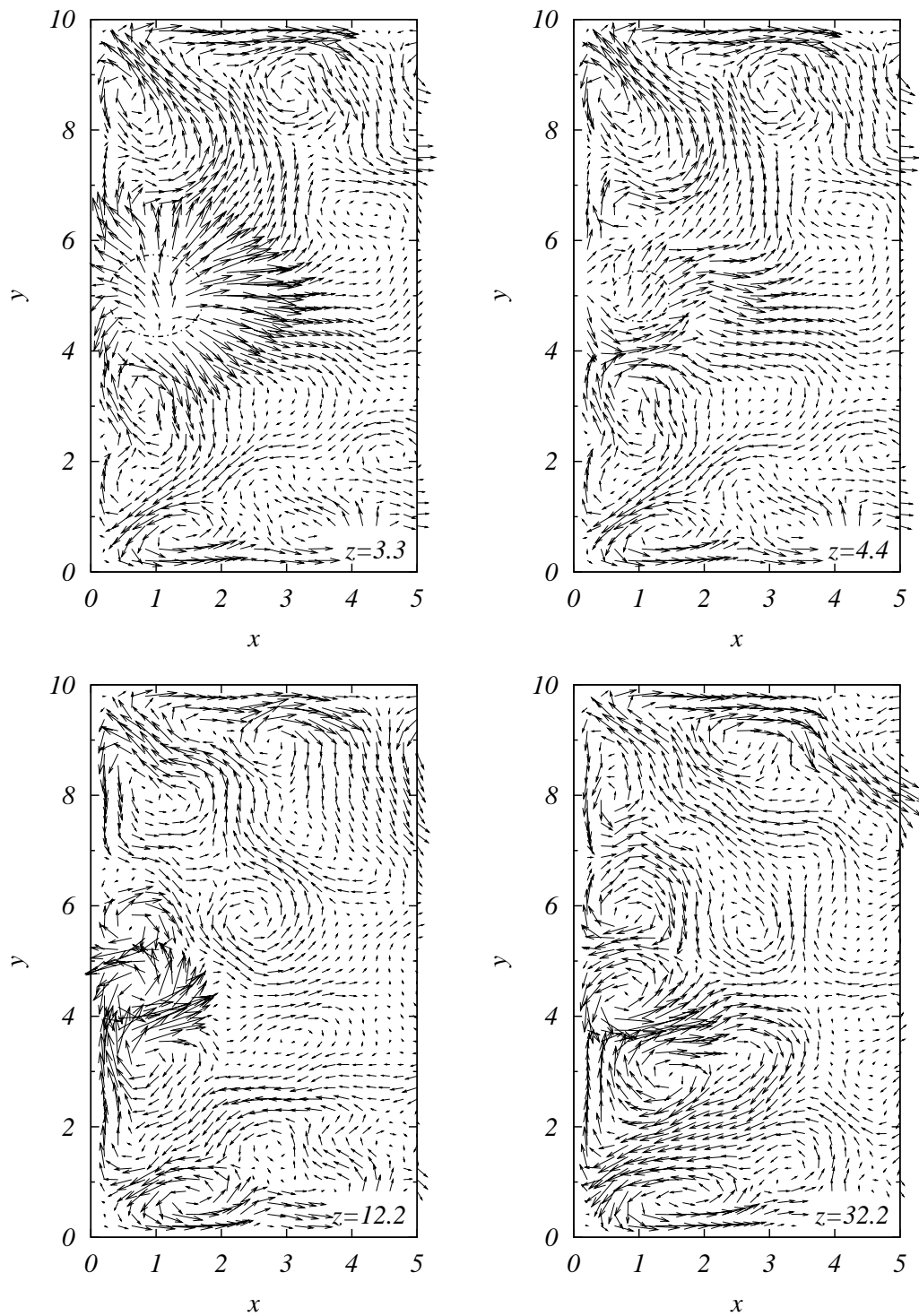


Abbildung 6.35.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

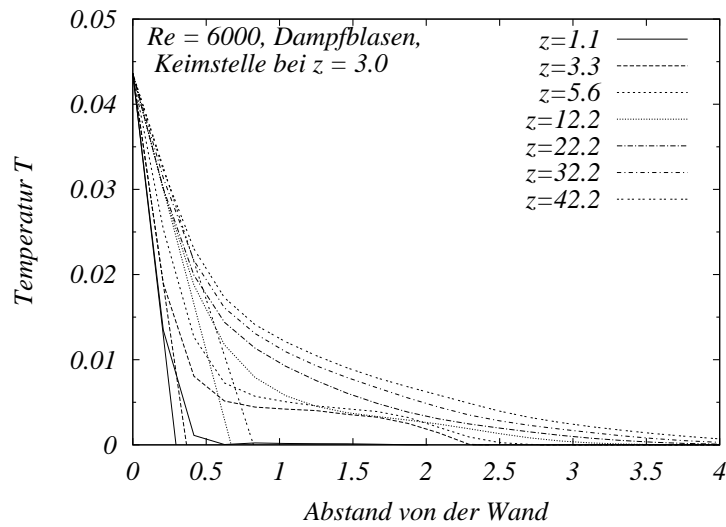


Abbildung 6.36.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

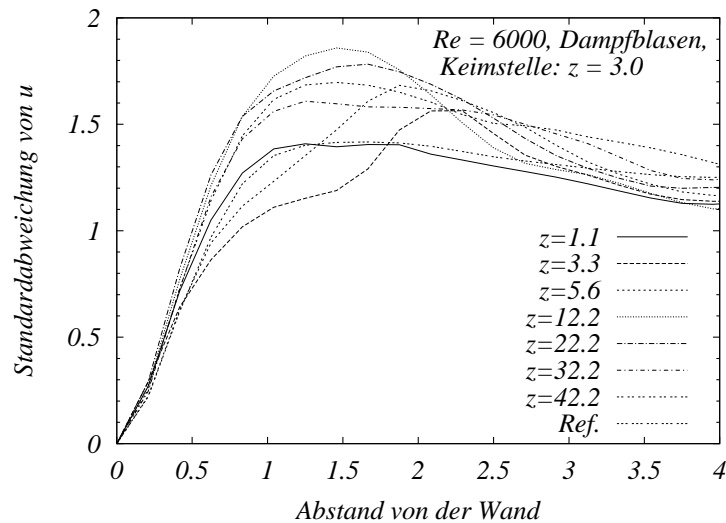


Abbildung 6.37.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 3.0$

doppelt so großes Gebiet einnimmt. Wie in allen Fällen bei der höheren Reynoldszahl sind die Strukturen hier weniger deutlich erkennbar. Klar wird jedoch, auf welche Weise das Wirbelpaar entsteht: Die Verzögerung der Strömung durch das Verschwinden der Dampfblasen infolge ihrer Kondensation bewirkt, daß Fluid von der Stelle, an der die Blasen sich befunden haben, wegströmen muß. Im Fall von $Re = 2800$ geschieht das weitgehend durch eine Strömung von der Wand weg. Hier weicht das Fluid zur Seite hin, d.h. in wandparalleler Richtung aus. Über die

Gründe, weshalb sich hier ein unterschiedliches Verhalten zeigt, kann im Moment nur spekuliert werden. Wahrscheinlich sind mehrere Effekte verantwortlich: So sind etwa die Blasen bei $Re = 2800$ hier bereits kleiner, d.h. die Kondensation spielt sich auf einem kleineren Kanalabschnitt ab; die Verzögerung erfolgt also ebenfalls auf engerem Raum und schlicht mehr Fluid pro Längeneinheit senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wird von der Stelle, an der die geringe Dichte der Blase eine Beschleunigung des Fluids verursacht hat, weggedrückt. Weiterhin wird aufgrund der höheren Geschwindigkeit in z -Richtung der durch das Nachströmen zur Wand aufgebrachte Impuls in Richtung zur Wand hin schneller nach oben transportiert; die Ausbildung der Strömung von der Wand weg würde hier also zu einem besonders hohen Gradienten der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand in senkrechter Richtung führen. Darüberhinaus entsteht bei $Re = 6000$ bereits bei $z = 3.3$ eine Strömung in wandparalleler Richtung, die auf Ausweichen von rascher strömendem Fluid von unten zurückzuführen ist; bei $Re = 2800$ wird dieser Effekt nicht beobachtet, weil der Gradient der Geschwindigkeit in z -Richtung an der Wand nicht so groß ist.

Keimstelle bei $z = 13.0$

Werden die Blasen bei $z = 13.0$ in die Strömung eingebracht, so weisen sie ein Verhalten auf, das dem der bei $z = 3.0$ zugegebenen sehr ähnlich ist. Die Kondensation erfolgt ebenfalls sehr rasch, d.h. etwa 3 Längeneinheiten oberhalb der Keimstelle sind die Blasen bereits kondensiert. Die in Abbildung 6.38 dargestellten mittleren Durchmesser sind bei gleichem senkrechten Abstand zur Keimstelle nur wenig größer als die der bei $z = 3.0$ eingebrachten Dampfblasen.

Bezüglich der Temperaturverläufe, die in Abbildung 6.39 gezeigt werden, kann festgestellt werden, daß im Bereich der Keimstelle zwar ein hoher Wärmeübergang berechnet wird, daß dieser aber anders als in allen Fällen mit einer Kanalreynoldszahl von 2800 schlechter ist als derjenige, der ganz unten im Kanal bei ungefähr $z = 2$ bei einphasiger Strömung ermittelt wird. Im Vergleich zum Wert der einphasigen Strömung in selber Höhe wird freilich eine Verbesserung um etwa 30% erreicht. Im oberen Kanalteil dagegen werden nur wenig höhere Werte gefunden.

Auch die Schwankung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand (Abbildung 6.40) wird hier von den Dampfblasen sowohl qualitativ als auch quantitativ in ähnlicher Weise beeinflusst wie im Fall, bei dem die Blasen bei $z = 3.0$ in die Strömung gesetzt werden.

Auch beim Vergleich der Sekundärströmungen, die Abbildung 6.38 zeigt, mit dem Fall, bei dem sich die Blasenkeimstelle bei $z = 3.0$ befindet (Abbildung

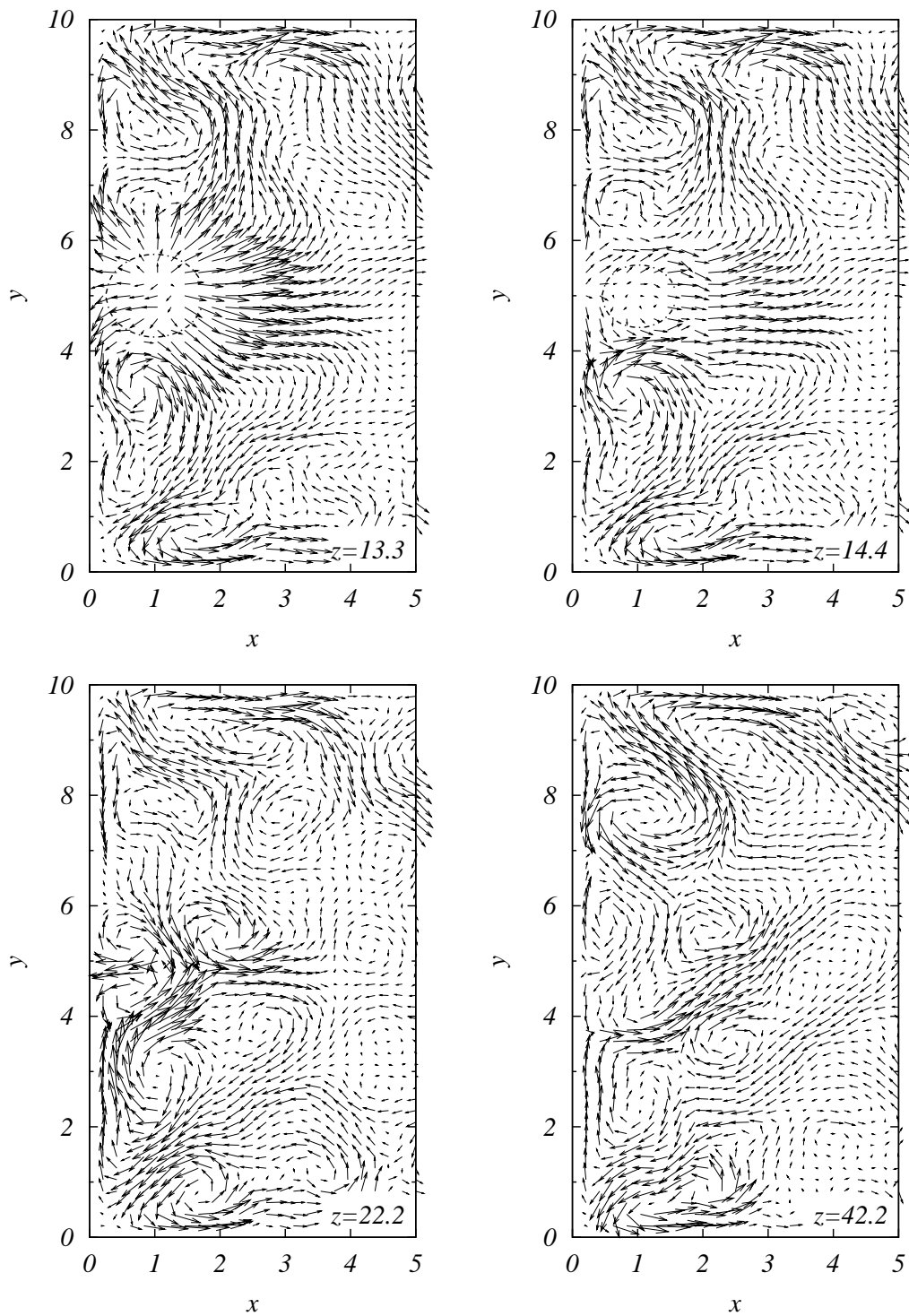


Abbildung 6.38.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

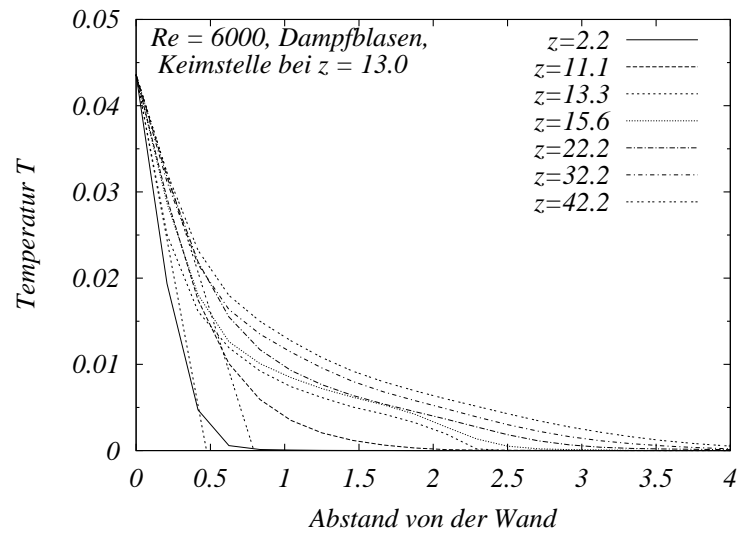


Abbildung 6.39.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

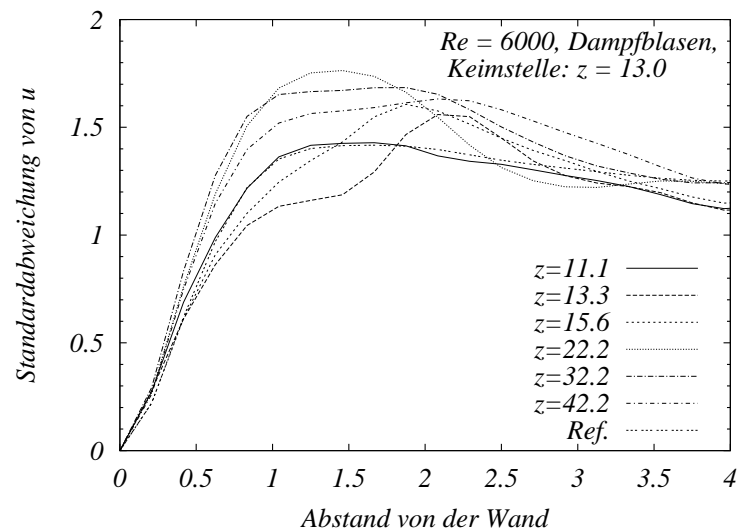


Abbildung 6.40.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 13.0$

6.35), erkennt man in der Nähe der Wand nur geringe Unterschiede. Die Verwirbelung insbesondere im oberen Kanalteil ist hier etwas geringer. Das Wirbelpaar in der Mitte der beheizten Wand hat sich hier 30 Längeneinheiten oberhalb der Keimstelle fast völlig aufgelöst. Der rechtsdrehende Wirbel in der Darstellung der Sekundärströmung im Querschnitt bei $z = 42.2$, der sich im Bereich von $x = 2.5$ und $y = 3.5$ befindet, kommt gegenüber dem Fall mit der Keimstelle bei $z = 3.0$

und der einphasigen Strömung hinzu. Er tritt ab etwa $z = 30$ in Erscheinung und sorgt dafür, daß das erwärmte Fluid weiter von der Wand weg bewegt wird, ehe es dorthin zurückzirkuliert.

Keimstelle bei $z = 23.0$

Die Verlegung der Keimstelle auf $z = 23$ bringt einen weiter verschlechterten Wärmeübergang im Bereich der Keimstelle, verglichen mit den anderen Keimstellen weiter unten im Kanal, mit sich. Gegenüber der einphasigen Strömung wird hier dennoch ein um etwa 40% höherer Wärmeübergang verzeichnet. Abbildung 6.41 weist die betreffenden Temperaturverläufe aus. Die Lebenszeit der Blase ist hier deutlich kürzer als im selben Fall bei einer Kanal Reynoldszahl von $Re = 2800$. Ein qualitativer Unterschied besteht auch darin, daß die Blasen hier von Beginn an durch Kondensation schrumpfen, während sie bei $Re = 2800$ zunächst wachsen.

Sowohl in der Sekundärströmung (Abbildung 6.43) als auch bei der Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand (Abbildung 6.42) zeigt sich ein den konvektiven Wärmetransport behindernder dämpfender Effekt der an dieser Stelle eingebrachten Blasen. Diese kondensieren erst bei etwa $z = 30$ vollständig.

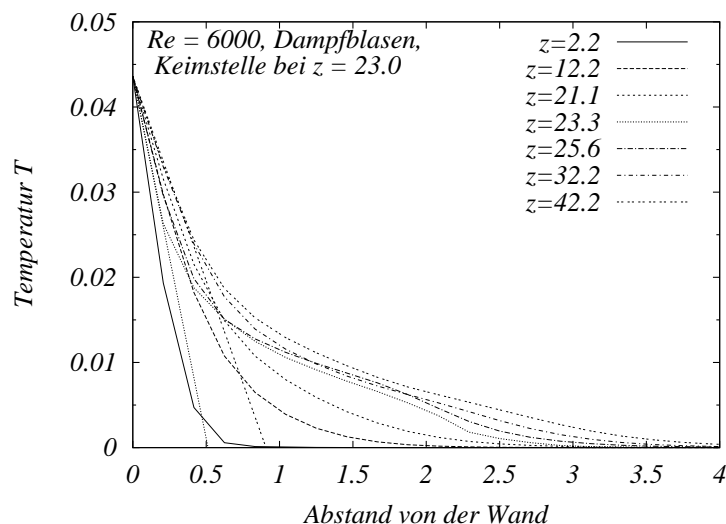


Abbildung 6.41.: Temperaturverläufe bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

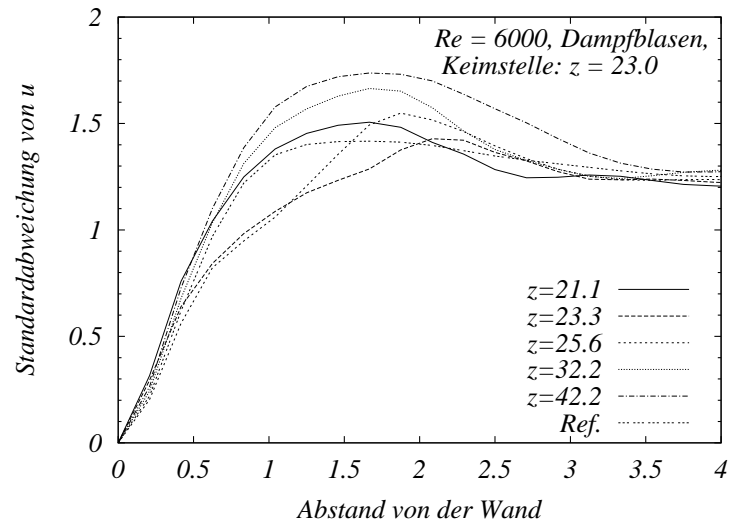


Abbildung 6.42.: Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

Die Sekundärströmung weist gegenüber der einphasigen Referenz keine zusätzlichen Wirbelstrukturen aus. Das für die Keimstellen bei $z = 3.0$ und $z = 13.0$ typische Wirbelpaar in der Mitte der beheizten Wand kann sich nicht ausbilden. Bei $z = 25.6$ ist die der Verzögerung der Strömung an der Wand zuzuschreibende von der Wand weg gerichtete Strömung erkennbar. Eine deutliche Schwächung und Verschiebung des Wirbels in der Mitte der beheizten Wand, der bei der einphasigen Strömung sehr nahe an die Wand heranreicht, ist in der Darstellung der Sekundärströmung im Querschnitt bei $z = 42.2$ zu sehen.

Die Schwankungen der u -Geschwindigkeit liegen überall unter denen, die erreicht werden, wenn sich die Keimstelle bei $z = 3.0$ oder $z = 13.0$ befindet. Hohe Werte werden nur in großem Abstand von der Keimstelle ab etwa $x = 1.5$ erreicht. Besonders im Bereich der Keimstelle werden die Kurven flacher. Es zeigt sich damit qualitativ ein ähnliches Verhalten wie bei den anderen Fällen mit Dampfblasen bei $Re = 6000$. Augenscheinlich werden die höchsten Werte für die Standardabweichung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand im Bereich oberhalb der Blasencondensation gefunden.

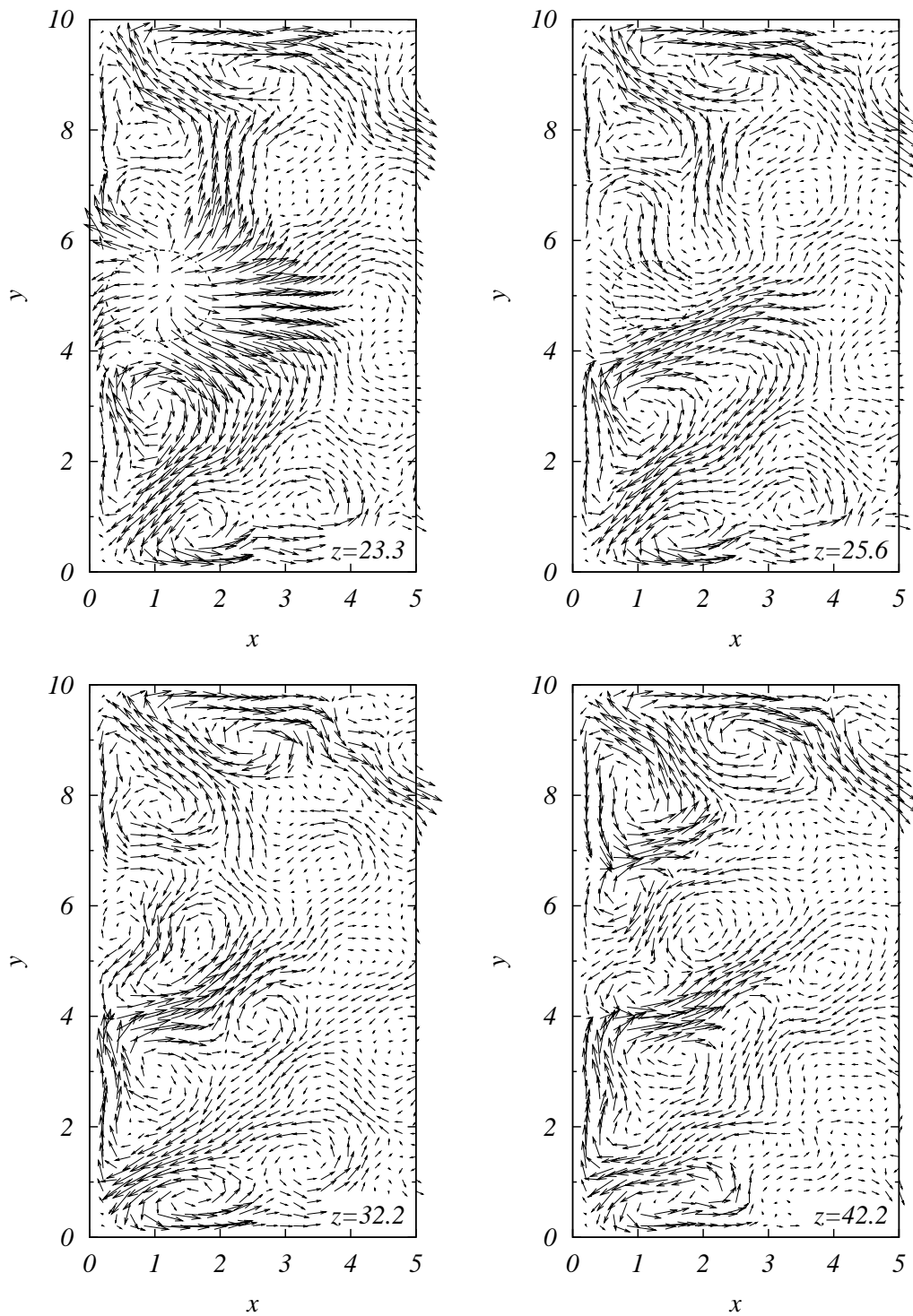


Abbildung 6.43.: Sekundärströmung bei $Re = 6000$, Dampfblasen, Keimstelle bei $z = 23.0$

6.5.3. Bewertung der Ergebnisse

Aufgrund der stärkeren Turbulenz ist der Einfluß, den die Blasen sowohl auf das Strömungs- als auch auf das Temperaturfeld hier haben, deutlich geringer als im Fall von $Re = 2800$. Das zeigt sich bei der Untersuchung der Temperaturverläufe genauso wie bei den Sekundärströmungen und den Standardabweichungen der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur beheizten Wand.

Ist das Verhalten der Systeme mit Inertgasblasen bei beiden betrachteten Reynoldszahlen ähnlich, so werden bei den Dampfblasen qualitative Unterschiede festgestellt. Eine Verschiebung der Keimstelle der Blasen bei $Re = 6000$ nach oben im Kanal hat eine Verschlechterung der Wärmeübertragung zur Folge, während bei $Re = 2800$ das Gegenteil beobachtet wird.

Zur Erklärung tragen die Daten bei, die zum gesamten Wärmeeintrag ins Fluid ermittelt werden; sie sind in Tabelle 6.2 zusammengestellt.

Tabelle 6.2.: Energieeintrag \bar{E}^+ in den Kanal bei $Re = 6000$ pro Zeiteinheit, gemittelt über 10 Zeiteinheiten, für verschiedene untersuchte Fälle ($\Delta\bar{E}^+$: im Vergleich zur einphasigen Strömung zusätzlich eingebrachte thermische Energie)

Fall	\bar{E}^{+6}	$\Delta\bar{E}^+$
Dampfblasen, $z = 3.0$	4054	293
Dampfblasen, $z = 13.0$	3933	172
Dampfblasen, $z = 23.0$	3895	134
Inertgasblasen, $dt = 1.5$	3770	9
Inertgasblasen, $dt = 0.3$	3752	-9
einphasig	3761	0

Im Vergleich zu $Re = 2800$ ist der Energieeintrag stets deutlich höher. Der sowohl durch Dampf- als auch durch Inertgasblasen verursachte zusätzliche Wärmeeintrag ist aber wesentlich geringer als bei $Re = 2800$. Gleiches gilt für den Anteil des dem latenten Wärmetransport zuzuschreibenden Energieeintrags, denn die bei Dampfblasen zusätzlich zur Einphasenströmung übertragene thermische Energie ist viel geringer als bei $Re = 2800$. Zudem führt die Verlegung der Keimstelle nach oben im Kanal hier – anders als bei $Re = 2800$ – zu einem geringeren zusätzlichen Wärmeeintrag.

Während bei $Re = 2800$ der latente Wärmetransport derart dominant ist, daß in den Fällen mit Dampfblasenkeimstellen bei $z = 13$ und $z = 23$ die Effekte

⁶Die Daten sind gegebenenfalls um den Energieeintrag durch das Einbringen von Dampfblasen bereinigt.

durch zusätzliche Konvektion überdeckt werden, sind letztere hier stärker. Durch das Verhalten der Dampfblasen ausgelöste zusätzliche Wirbel werden schwächer, wenn die Blasenkeimstelle im Kanal nach oben wandert, weil die aufgrund ansteigender Dicke der thermischen Grenzschicht länger werdenden Blasenlebenszeiten eine langsamere Veränderung der Blasen volumina zur Folge haben. Der geringerer Wärmeübergang von der Wand ins Fluid bei weiter oben liegender Blasenkeimstelle ist die sichtbare Konsequenz.

Die Frage, welche Wärmetransportmechanismen hier in in welchem Maße für den Gesamtwärmeübergang verantwortlich sind, läßt sich nicht so eindeutig beantworten. Zusätzliche Konvektion durch das Blasenverhalten muß nach den vorliegenden Ergebnissen als stärker eingeschätzt werden als der latente Wärmetransport. Die vorhandenen Ergebnisse erlauben jedoch nur im Vergleich mit denen der Simulationen bei $Re = 2800$ die Aussage, daß hier relativ wenig Wärme latent ins Fluidinnere gebracht wird. Der Vergleich mit den Daten, die durch die Simulationen der Fälle mit Inertgasblasen gewonnen wurden, kann diesbezüglich nicht als Referenz dienen, weil die Struktur des Strömungsfelds durch die Inertgasblasen in ganz anderer Weise beeinflußt wird als von Dampfblasen mit veränderlichem Volumen. Durch Zugabe von Inertgasblasen wird hier keine Verbesserung des Wärmeübergangs erreicht.

6.6. Zusammenfassender Vergleich der betrachteten Fälle

Die Untersuchungen in den beiden vorangegangenen Abschnitten abschließend werden die bei den beiden Reynoldszahlen erhaltenen Ergebnisse zusammenfassend miteinander verglichen. Es bietet sich an, dies anhand eines Vergleichs der ermittelten lokalen Nußeltzahlen als Funktion der Lauflänge der angeströmten Platte, also der z -Koordinate zu tun. Die Abbildungen 6.44 und 6.45 zeigen die Nußeltzahlen als Funktion von z für einige wichtige Fälle, die im vorangegangenen bereits beschrieben wurden.

Zunächst fällt dabei auf, daß die erhaltenen Werte im Fall von $Re = 6000$ im allgemeinen höher sind als die im Fall von $Re = 2800$. Die Unterschiede betragen bis zu 100%, etwa im Fall der einphasigen Strömung ab ungefähr $z = 30$.

Bei den betrachteten Fällen mit Inertgasblasen beobachtet man, daß im Fall der kleineren Reynoldszahl die ermittelten Nußeltzahlen stets oberhalb derjenigen der einphasigen Strömung liegen. Bei der höheren Reynoldszahl dagegen unterscheiden sich die Nußeltzahlen bis etwa $z = 25$ kaum; weiter stromab werden für

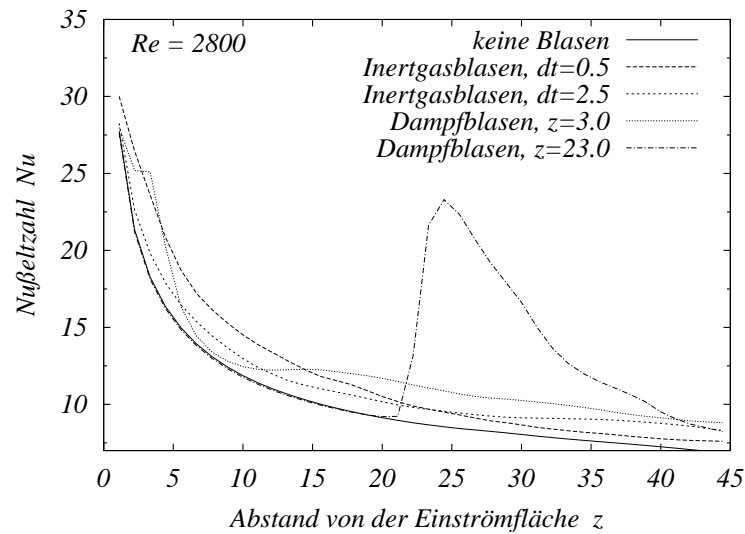


Abbildung 6.44.: Nußeltzahl als Funktion des Abstands von der Einströmfläche z für verschiedene Fälle bei $Re = 2800$

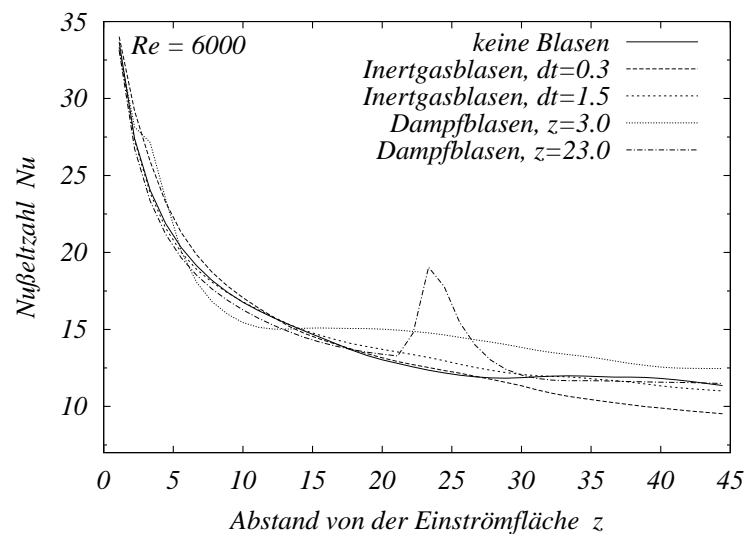


Abbildung 6.45.: Nußeltzahl als Funktion des Abstands von der Einströmfläche z für verschiedene Fälle bei $Re = 6000$

den Fall mit vielen Blasen ($dt = 0.3$) sogar deutlich geringere Nußeltzahlen als in der einphasigen Strömung verzeichnet. Interpretieren läßt sich das im Zusammenhang mit den bereits diskutierten Auswirkungen der Blasen auf die Strömung: Bei beiden Reynoldszahlen werden im jeweiligen Fall mit der größeren Blasenanzahl die Strukturen der turbulenten Strömung stark gestört. Bei $Re = 6000$ ist der Beitrag der Konvektion durch die turbulente Strömung zum gesamten Wärmetransport deutlich höher als bei $Re = 2800$, wie man an den Werten der

Nußeltzahlen für die einphasigen Fälle erkennen kann. Wird nun diese Konvektion durch die Blasen unterbrochen, so geht im Fall der höheren Reynoldszahl ein verhältnismäßig größerer Beitrag zum gesamten Wärmetransport verloren. Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, daß bei $Re = 2800$ die Verluste dadurch wettgemacht werden, daß auf andere Weise konvektiv Wärme transportiert wird: Als Ursache für diese zusätzliche Konvektion kommt nur die Blasenbewegung in Frage. Bei $Re = 6000$ ist der Effekt der zusätzlichen Konvektion nicht größer als der der Störung der turbulenten Strukturen.

In den Fällen mit Dampfblasen, die bei $z = 3$ gebildet werden, beobachtet man bei beiden Reynoldszahlen ab $z = 10$ bzw. $z = 15$ eine deutliche Erhöhung der Nußeltzahl gegenüber der einphasigen Strömung. Das ist bemerkenswert, weil in diesem Bereich auch in den Fällen mit Dampfblasen eine einphasige Strömung vorliegt, da die Dampfblasen hier bereits vollständig kondensiert sind. Als Ursache für die signifikante Erhöhung des Wärmeübergangs wurde für beide Reynoldszahlen die Ausbildung einer typischen Wirbelstruktur in der Folge der raschen Kondensation der Dampfblasen ausgemacht. Absolut erhöhen sich die Nußeltzahlen in beiden Fällen etwa um denselben Betrag, relativ ist die Erhöhung bei der niedrigeren Reynoldszahl aber höher, weil hier die Referenz der einphasigen Strömung einen niedrigeren Wert aufweist.

Werden Dampfblasen bei $z = 23$ in das Strömungsfeld eingebracht, so wird in beiden Fällen an dieser Stelle ein sprunghafter Anstieg der übertragenen Wärmemenge festgestellt. Bei $Re = 2800$ wird ein Anstieg der Nußeltzahl um das dreifache verzeichnet, während er bei $Re = 6000$ nur etwa 50% beträgt. Auch der Absolutwert des Maximums ist bei der niedrigeren Reynoldszahl höher. Ursächlich bedingt sind die Unterschiede hier durch die unterschiedliche Grenzschichtdicke in beiden Fällen: Bei der höheren Reynoldszahl ist sie zu gering, so daß es nicht zur Verdampfung größerer Mengen an Wasser kommt, während bei $Re = 2800$ deutliches Blasenwachstum und relativ lange Blasenlebenszeiten festgestellt werden. Die hier für $Re = 2800$ ermittelten Nußeltzahlen sowie die festgestellte gesamte Wärmemenge, die übertragen wird (vgl. 6.1), sprechen dafür, daß der latente Wärmetransport bei turbulent angeströmten beheizten Platten alle anderen thermischen Effekte größtmäßig bei weitem übertrifft.

6.7. Wärmeübergang im Kanal mit rauher Wand

Oft werden Flächen, die zum Zweck der Wärmeübertragung von einem Fluid angeströmt werden, bewußt nicht glatt konstruiert, sondern mit künstlichen Unebenheiten versehen, um den Wärmeübergang zu verbessern. Im vielen Fällen handelt es sich bei diesen künstlichen Unebenheiten um Rippen, die quer zur

Hauptströmungsrichtung verlaufen. Im wesentlichen soll dadurch erreicht werden, daß eine (im Fall turbulenter Anströmung zusätzliche) Bewegung des Fluids senkrecht zur Wand induziert wird, durch die der konvektive Wärmetransport von der Wand weg verstärkt wird.

Mit dem verwendeten Programm können auch Strömungen in komplexen Geometrien simuliert werden. Dieselben Vorgänge, die bisher im Kanal mit glatten Wänden untersucht wurden, können damit auch an rauhen Wänden simuliert werden, wenn die Rauigkeit durch Hindernisse modelliert wird. Hier werden Hindernisse betrachtet, die die Gestalt von senkrecht zur Hauptströmungsrichtung angebrachten Rippen haben, die an die beheizte Wand angebracht sind (vgl. Abbildung 6.46).

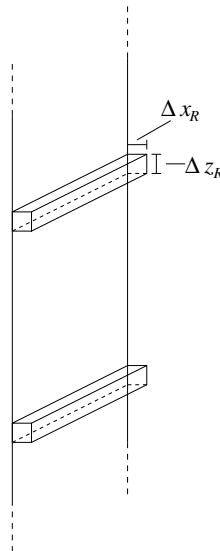


Abbildung 6.46.: Skizze zu den Simulationen von Strömungen an Wänden mit Oberflächenrauigkeit

Die in diesem Abschnitt angesprochenen Fälle werden nicht detailliert untersucht. Eine angemessene Betrachtung der Vorgänge würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, deren Schwerpunkt die Erarbeitung des numerischen Simulationsverfahrens war. In diesem Sinne sind die hier vorgestellten Ergebnisse ein weiterer Beleg für das Funktionieren der vorgestellten Methoden. Sie wurden in die Arbeit aufgenommen, um zu zeigen, daß sich die Methode auch für Problemfälle anwenden läßt, die durch komplexe Geometrien gekennzeichnet sind. Es werden daher beispielhaft einige Konstellationen betrachtet; die Ergebnisse können als Anhaltspunkte für künftige Untersuchungen dienen.

6.7.1. Validierung der Simulationsergebnisse

Anhand eines Beispiels aus der Literatur werden die mit dem verwendeten Programm erhaltenen Ergebnisse der Berechnung einer turbulenten Strömung in einem Spalt mit Wänden mit künstlicher Oberflächenrauigkeit validiert. Mit einer DNS haben Ashrafiyan und Andersson [1] einen solchen Fall untersucht.

Die Konfiguration dabei entspricht der in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen von Spaltströmungen (vgl. Abschnitt 6.3) mit dem Unterschied, daß an den beiden festen Wänden senkrecht zur Strömungsrichtung Rippen mit rechteckigem Querschnitt angebracht wurden, die sich über die gesamte Wandlänge erstrecken. Die Abmessungen des Kanals sind dieselben wie in Abschnitt 6.3, Höhe und Breite der Rippen sind $\Delta x_R = 0.42$ bzw. $\Delta z_R = 0.56$. Der Zwischenraum zwischen zwei Rippen entspricht der siebenfachen Rippenbreite. Auch die Dimensionen des Rechengitters werden von Abschnitt 6.3 übernommen, so daß der Rippenquerschnitt von 2×1 Gitterzellen aufgelöst wird. Die Kanal Reynoldszahl beträgt etwa 6000.

In Abbildung 6.47 ist das Profil der Strömung in Wandnähe dargestellt, wie es mit DNS von Ashrafiyan und Andersson [1] und mit dem eigenen Programm mit LES berechnet wurde. Da die Auflösung bei der eigenen Rechnung wesentlich geringer ist als die bei der DNS und da die Rippenhöhe mit nur zwei Gitterzellen aufgelöst wird, kann nicht erwartet werden, daß der Wirbel im Rückströmgebiet ordentlich wiedergegeben wird. Sichtbar ist aber, daß im eigentlichen Rückströmgebiet sehr kleine Geschwindigkeiten berechnet werden. Auch die Strömung oberhalb der Rippen entspricht qualitativ gut der mit der DNS berechneten.

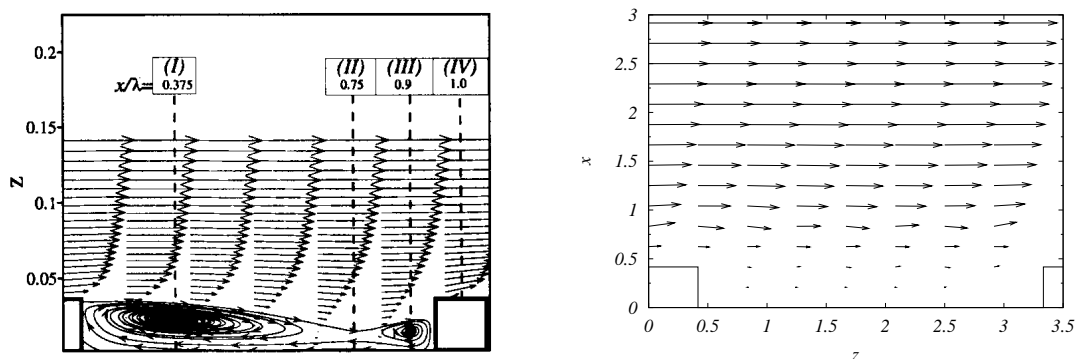


Abbildung 6.47.: Mittleres Geschwindigkeitsprofil der Strömung im Bereich einer Rippe: Qualitativer Vergleich der DNS-Ergebnisse von Ashrafiyan und Andersson [1] (links) mit den eigenen LES-Ergebnissen (rechts) bei $Re = 6000$.

6.7.2. Einphasige Strömung

Hier und in den folgenden beiden Abschnitten werden Ergebnisse von Simulationsrechnungen der Strömung und der Temperaturverteilung im Kanal mit quadratischem Querschnitt und einer beheizten Wand mit künstlicher Oberflächenrauigkeit vorgestellt. Die Kanal Reynoldszahl beträgt 2800. Damit unterscheiden sich die untersuchten Vorgänge von denen aus Abschnitt 6.4 nur dadurch, daß an der beheizten Wand quer zur Strömungsrichtung Rippen angebracht sind.

Die Abmessungen der Rippen betragen wie im vorangegangenen Abschnitt $\Delta x_R = 0.42$ und $\Delta z_R = 0.56$. Hier ist die erste Rippe bei $z = 5.0$, die zweite bei $z = 15.0$ und eine dritte bei $z = 25.0$ angebracht.

Zunächst ist es aufschlußreich, die Temperaturverläufe in der Nähe der ersten und zweiten Rippe zu vergleichen und in Bezug zu bringen zum Fall des Kanals mit glatten Wänden. Die Temperaturverläufe sind dargestellt in den Abbildungen 6.48 und 6.50. Beim Vergleich zwischen den Temperaturverläufen bei der ersten und zweiten Rippe fällt auf, daß der Wärmeübergang bei der zweiten Rippe nur unwesentlich schlechter ist als bei der ersten. Bemerkenswert ist das deshalb, weil die zweite Rippe sich bereits in einem Bereich befindet, in dem bei glatter Wand der Wärmeübergang bereits deutlich abgenommen hat (vgl. Abbildung 6.6). Gegenüber der glatten Wand ist der Wärmeübergang bei der ersten Rippe relativ wenig (um 10%) stärker, während bei der zweiten Rippe eine Verbesserung um 60% festzustellen ist. Eine Erklärung dafür liefert das mittlere Geschwindigkeitsprofil (gemittelt im Bereich $y = 4.0$ bis $y = 6.0$), das Abbildung 6.49 zeigt. Bei der

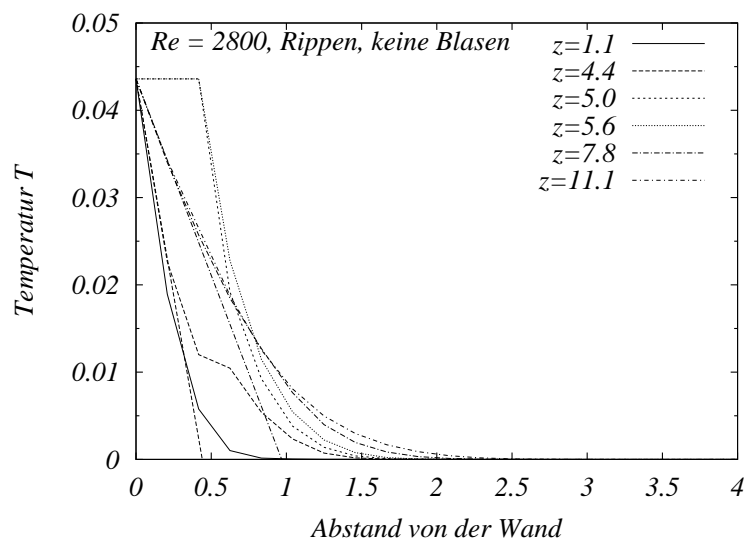


Abbildung 6.48.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, keine Blasen, Bereich der ersten Rippe

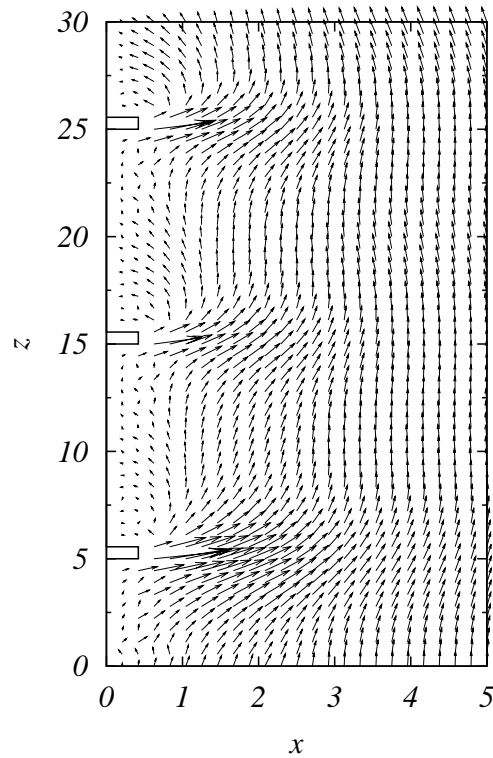


Abbildung 6.49.: Mittleres Geschwindigkeitsfeld im Bereich der Kanalmitte bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, keine Blasen

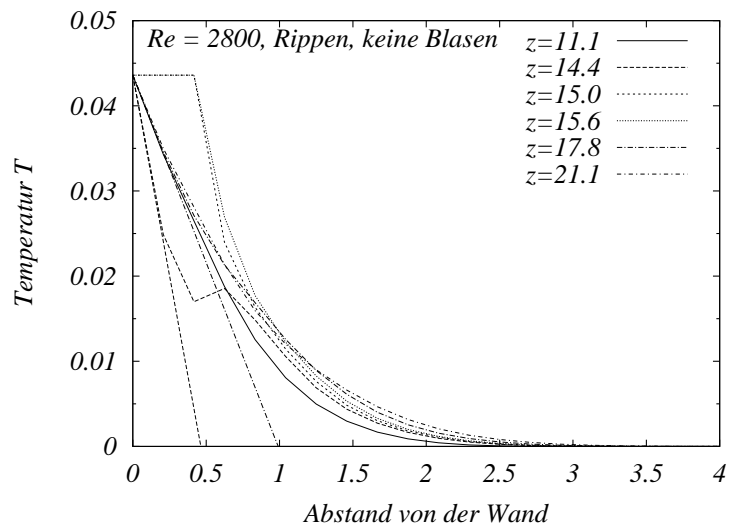


Abbildung 6.50.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, keine Blasen, Bereich der zweiten Rippe

zweiten Rippe ist das Gebiet mit geringen Strömungsgeschwindigkeiten oberhalb der Rippe deutlich kleiner als bei der ersten Rippe, d.h. die Strömung legt sich bei der zweiten Rippe schneller wieder an die Wand an. Die Ursache dafür ist, daß hier die Strömung durch die erste Rippe bereits abgebremst ist. Noch stärker ist dieser Effekt bei der dritten Rippe zu beobachten. Das Hindernis wirkt sich insofern auf die Sekundärströmung im Bereich der ersten Rippe (vgl. Abbildung 6.51) aus, als daß vor der Rippe die Gebiete, in denen die Sekundärströmung bei glatter Wand von der Wand weg gerichtet ist (vgl. Abbildung 6.7), hier durch eine noch stärkere Strömung von der Wand weg gekennzeichnet sind. Das betrifft die Mitte der beheizten Wand und die Kanälecken. Hinter der Rippe ist zwischen der Wandmitte und den Kanälecken die stärkste Rückströmung zu verzeichnen. In der Kanalmitte bildet sich ein Gebiet mit relativ geringen Geschwindigkeiten und der für die Strömung im Kanal mit glatter Wand typische Doppelwirbel erscheint um etwa die Rippenhöhe ins Kanalinnere versetzt. Im Bereich der zweiten Rippe erfolgt die Rückströmung zur Wand deutlich großflächiger (vgl. Abbildung 6.52).

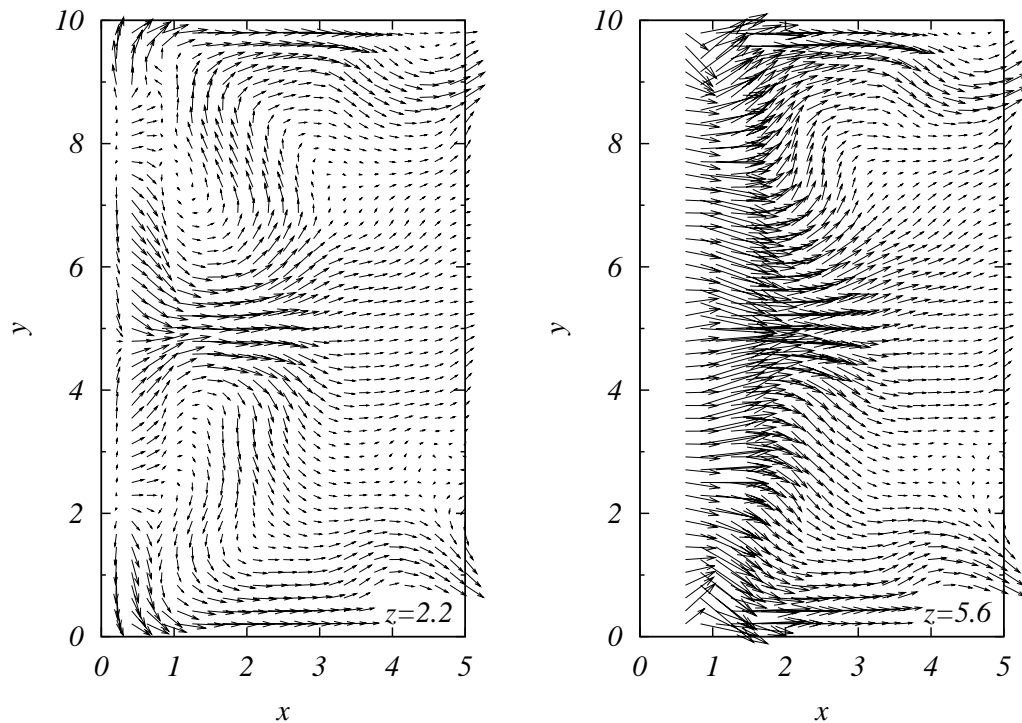


Abbildung 6.51.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, keine Blasen

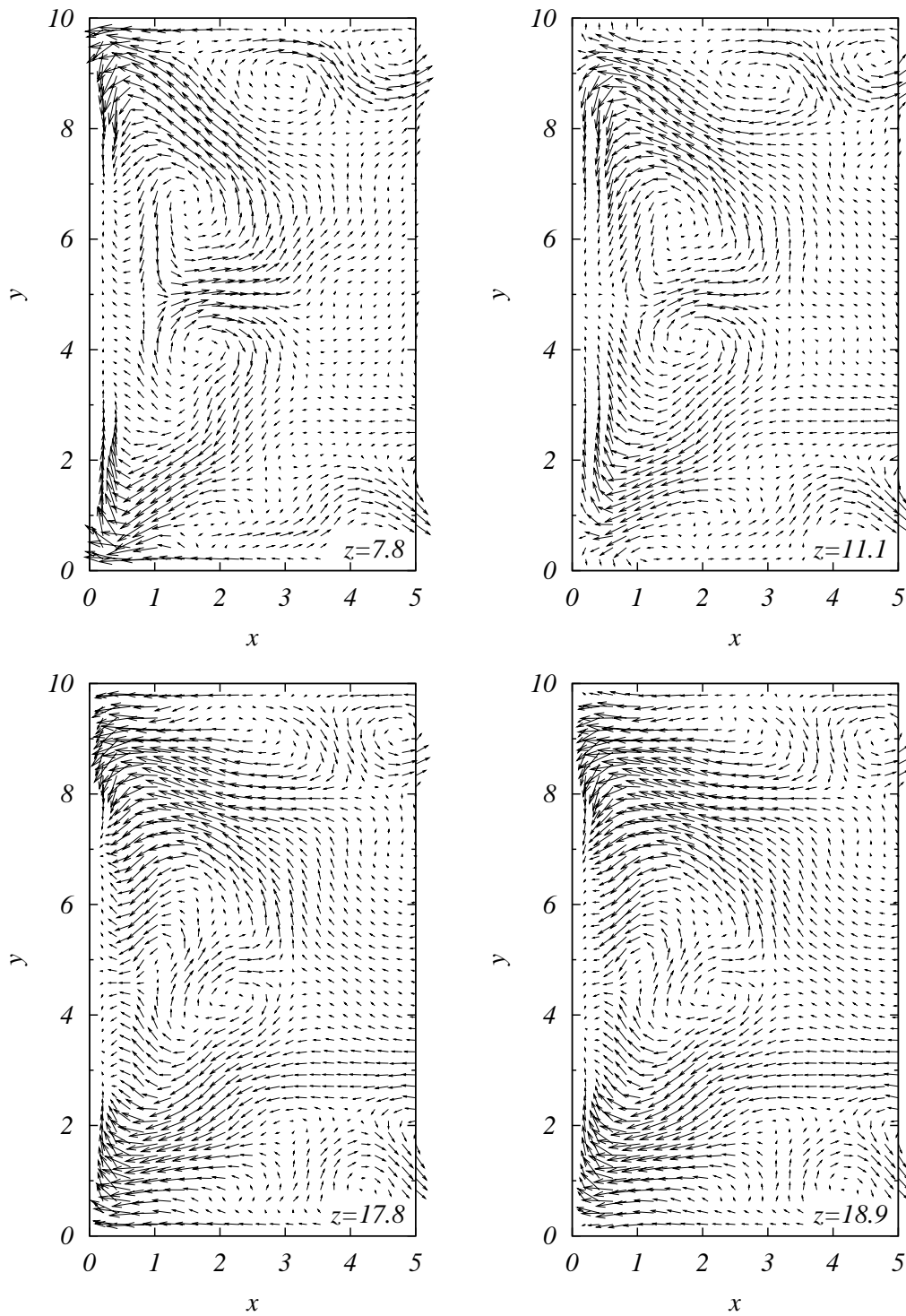


Abbildung 6.52.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, keine Blasen

6.7.3. Inertgasblasen

Beim Einbringen von Inertgasblasen in den Kanal mit der rauhen Wand bei $z = 2.0$ wird ein um etwa 60% verbesserter Wärmeübergang im Bereich oberhalb der ersten Rippe festgestellt. Abbildung 6.53 zeigt die entsprechenden Temperaturverläufe. Der zeitliche Abstand zwischen dem Einbringen zweier Blasen beträgt 0.5 dimensionslose Zeiteinheiten. Wie aus Abbildung 6.55 hervorgeht, beeinflusst die Gegenwart der Blasen die Strömung auch hier in erheblichem Ausmaß: Zum einen wird die Strömung vor der Rippe in unmittelbarer Wandnähe beschleunigt, was bewirkt, daß direkt unterhalb der Rippe die Strömung deutlich stärker von der Wand weg gerichtet ist. Andererseits aber ist in Gegenwart der Blasen das Gebiet mit sehr kleinen Geschwindigkeiten hinter der ersten Rippe viel kleiner als bei der einphasigen Strömung. Aus Abbildung 6.55 ist ersichtlich, daß im Bereich knapp oberhalb der ersten Rippe, in dem die Blasen aufsteigen, die Strömung bereits sehr schnell wieder ungefähr senkrecht nach oben gerichtet ist, während sie hier im einphasigen Fall noch deutlich von der Wand wegweist. Dadurch wird der Transport von nach oben gerichtetem Impuls in das Gebiet hinter der Rippe begünstigt und aufgrund der Beschleunigung des Fluids in diesem Bereich stellt sich eine Strömung zur Wand hin ein.

Zu den Bahnlinien, die die Blasen beschreiben, ist zu sagen, daß sie jeweils im Bereich der Rippen einen Knick von der Wand weg beschreiben, um kurz danach wieder weitgehend senkrecht zu verlaufen.

Die Sekundärströmung in Abbildung 6.54 ist wie beim entsprechenden Fall mit

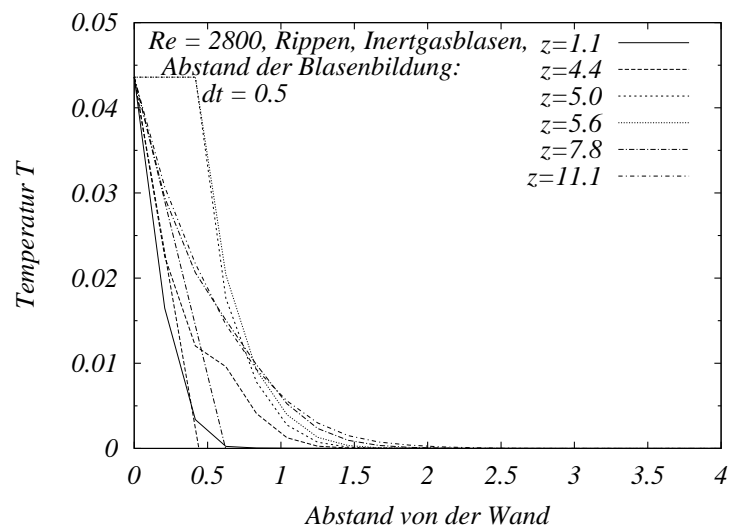


Abbildung 6.53.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Inertgasblasen, Bereich der ersten Rippe

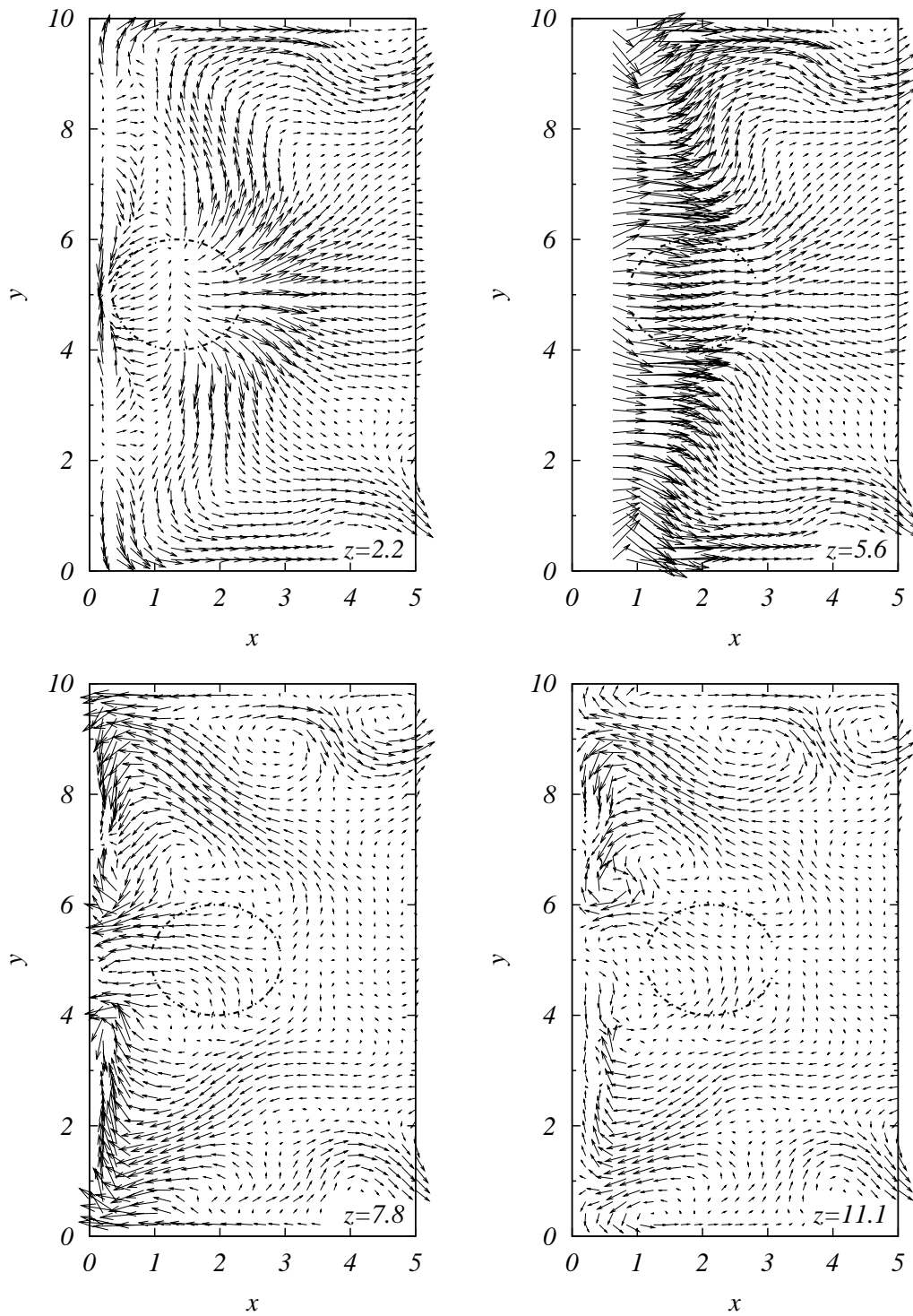


Abbildung 6.54.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Inertgasblasen

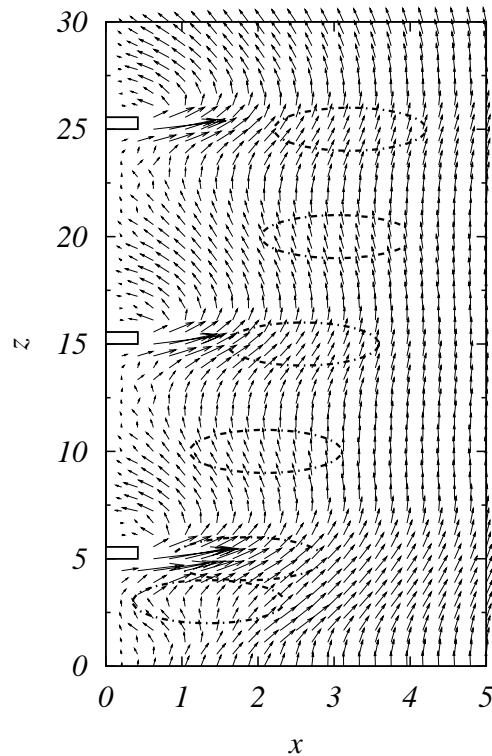


Abbildung 6.55.: Mittleres Geschwindigkeitsfeld im Bereich der Kanalmitte bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Inertgasblasen

glatter Wand dadurch gekennzeichnet, daß in dem Bereich, in dem sich die Blasen befinden, keine großen Geschwindigkeiten senkrecht zur Wand auftreten.

6.7.4. Dampfblasen

Läßt man nun an der Wand bei $z = 13.0$ alle 0.5 dimensionslosen Zeiteinheiten eine Dampfblase entstehen, so stellt man wieder im Bereich oberhalb der Rippe einen gegenüber dem Fall der einphasigen Strömung deutlich verbesserten Wärmeübergang fest, wie Abbildung 6.56 zeigt. In Abbildung 6.57 ist wieder das Strömungsprofil zusammen mit den mittleren Blasengrößen und -positionen dargestellt. Daraus ist ersichtlich, daß die Blasen oberhalb der Rippe bereits vollständig kondensiert sind, weil sie aufgrund der Rippe ins unterkühlte Innere des Kanals getrieben werden. Auffällig ist wieder das rasche Wiederanlegen der Strömung an die Wand, das auf die Gegenwart der Dampfblasen zurückzuführen ist, wie der Vergleich mit Abbildung 6.55 zeigt.

Die Sekundärströmung ist in Abbildung 6.58 dargestellt. Sie zeigt im wesentlichen dieselben Charakteristika wie die der Strömung mit Dampfblasen entlang einer

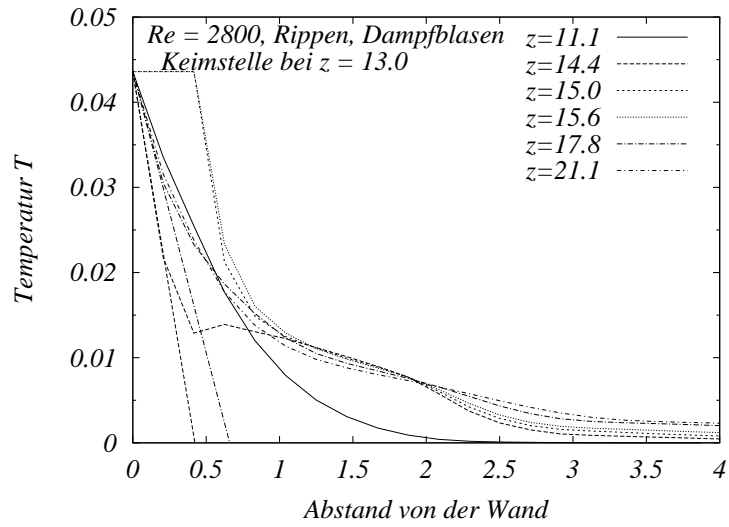


Abbildung 6.56.: Temperaturverläufe bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Dampfblasen, Bereich der zweiten Rippe

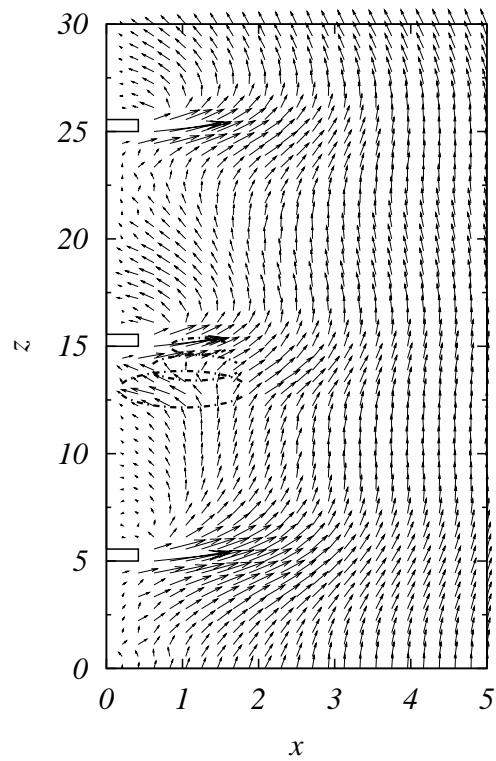


Abbildung 6.57.: Mittleres Geschwindigkeitsfeld im Bereich der Kanalmitte bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Dampfblasen

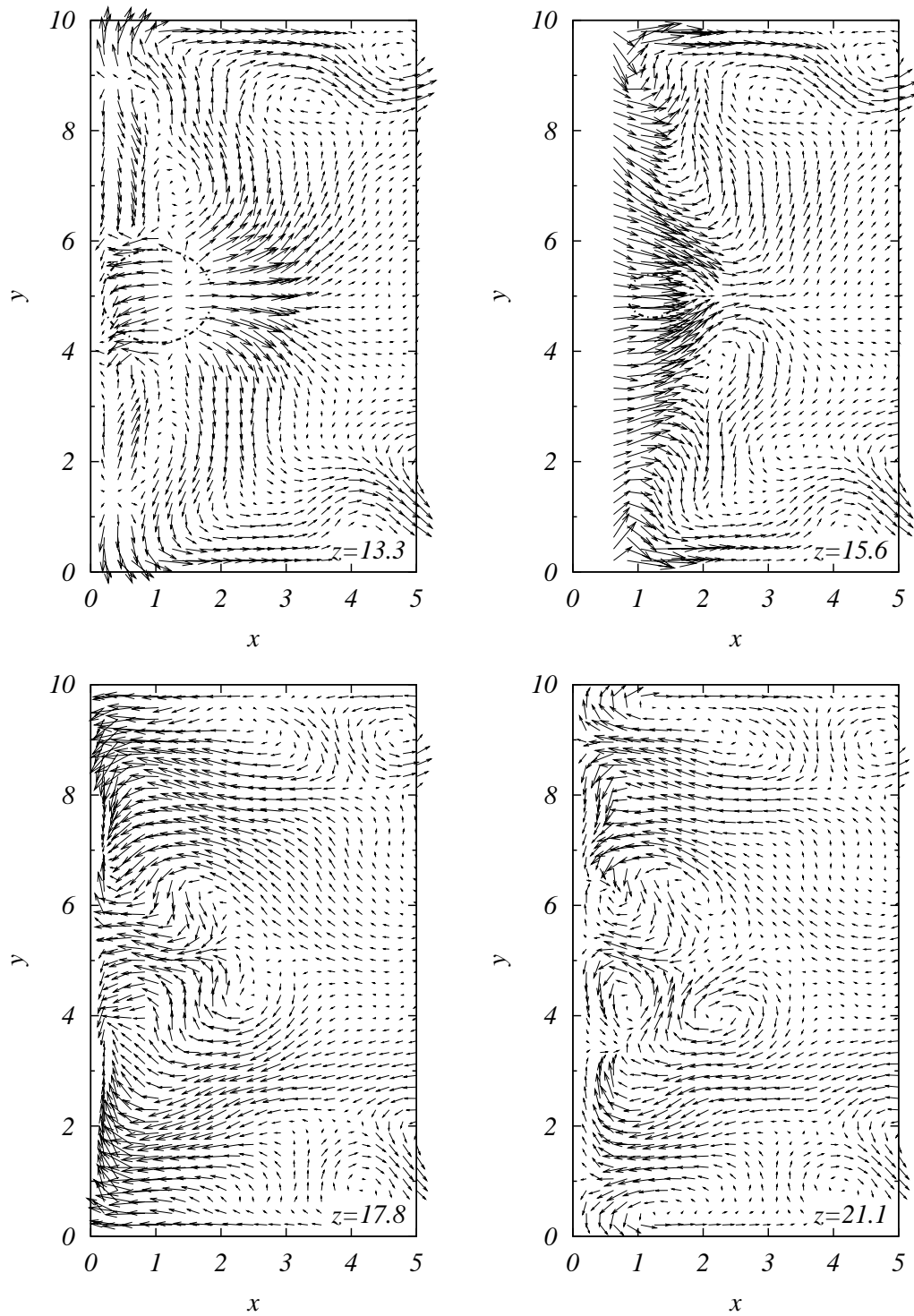


Abbildung 6.58.: Sekundärströmung bei $Re = 2800$, Oberflächenrauigkeit, Dampfblasen

glatten Wand. Durch den Kondensationsvorgang bildet sich ein Wirbelpaar in der Mitte der beheizten Wand. Im Gegensatz zu den Wirbelstrukturen, die bei der einphasigen Strömung beobachtet werden, ist es aber direkt an der Wand lokalisiert.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1. Überblick über die Ergebnisse dieser Arbeit

Zur Simulation der turbulenten Strömung wurde ein räumliches Diskretisierungsverfahren entwickelt, bei dem durch die mathematischen Eigenschaften der resultierenden Operatoren sichergestellt ist, daß der Gesamtimpuls erhalten bleibt und die gesamte kinetische Energie ohne Energiezufuhr nicht zunimmt. Gegenüber anderen Finite-Volumen-Verfahren ist es so konstruiert, daß diese Eigenschaften auch bei nicht-äquidistanten Gittern erhalten bleiben. Mit dem Verfahren gelingt eine Large-Eddy-Simulation einer turbulenten Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt, deren Ergebnisse im Vergleich zu denen einer DNS befriedigen.

Gegenüber den in der Literatur beschriebenen Verfahren zur Simulation von Mehrphasenströmungen zeichnet sich das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren dadurch aus, daß es in seiner Konstruktion konsequent einfach gehalten wurde, so daß der Aufwand der Modellierung der Blasen äußerst gering ist und gegenüber den Kosten zur Simulation der turbulenten Strömung nicht ins Gewicht fällt. Fehler aufgrund der einfachen Modellierung werden systematisch in numerischen Experimenten untersucht und korrigiert. Mit dem Verfahren erhaltene Ergebnisse wurden in relativ komplexen Fällen durch den Vergleich mit experimentellen Daten validiert.

Das Verfahren wurde als Werkzeug verwendet, um in Ergänzung zu experimentellen Daten die strömungsmechanischen und thermischen Vorgänge an Wärmetauscherwänden zu untersuchen. Im Vordergrund stand dabei die Frage, welcher Wärmetransportmechanismus beim unterkühlten Blasensieden in turbulenter Strömung dominierend ist. Es werden dazu Temperaturverläufe, Turbulenzintensitäten und Sekundärströmungsfelder als Ergebnisse von Simulationen verglichen. Während die geometrische Konfiguration zunächst gleich blieb, wurden Simulationen der einphasigen Strömung sowie der Strömung mit Inertgasblasen und Dampfblasen durchgeführt.

Deutliche Unterschiede zwischen den strömungsmechanischen Effekten von Inertgas- und Dampfblasen wurden beobachtet. Es wurde etwa festgestellt, daß bei Dampfblasen der Kondensationsvorgang eine zusätzliche Verwirbelung zur Folge

hat, die den konvektiven Wärmetransport deutlich steigert. Abschließend wurde anhand von Simulationen der Verhältnisse in einem Kanal mit durch Rippen künstlich aufgerauhten Wänden gezeigt, daß das Verfahren auch für Probleme mit komplexer geometrischer Konfiguration einsetzbar ist.

7.2. Ausblick

Hinsichtlich der Entwicklung der Verfahren zur Strömungssimulation können aufbauend auf dem hier vorgestellten Diskretisierungsverfahren Methoden entwickelt werden, die auf Gittern arbeiten, deren Gitterweite adaptiv an die Erfordernisse angepaßt wird.

Das verwendete Modell zur Simulation von Zweiphasenströmungen eignet sich nur zur Simulation von echten Blasenströmungen, d.h. von Strömungen, bei denen die Blasen relativ klein bleiben. Eine Erweiterung der Anwendbarkeit des Verfahrens auf Probleme mit größeren und unregelmäßiger geformten Blasen wäre dadurch zu realisieren, daß in solchen Fällen die Phasengrenzfläche durch ein Gitternetz von Markerpartikeln beschrieben wird. Damit könnte ein fließender Übergang zu den Front-tracking-Verfahren konstruiert werden.

Die Berechnungen von Strömungs- und Temperaturfeldern an beheizten Wänden zeigen, daß sowohl Dampf- als auch Inertgasblasen das Sekundärströmungsfeld in stark unterschiedlicher Weise beeinflussen. Zwar wurde versucht, das Modell so zu gestalten, daß die Fehler bei der Modellierung gering gehalten werden; sie können aber nicht ganz ausgeschlossen werden. Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse aber lassen darauf schließen, daß es lohnend sein kann, die simulierten Phänomene genauer zu untersuchen. Zur Aufklärung der Wirbelstrukturen in der Sekundärströmung bietet sich dabei eine Vermessung von mit geeignetem experimentellem Aufbau erzeugten Geschwindigkeitsfeldern mittels Laser-Doppler-Anemometrie genauso an wie die DNS in Kombination mit einer Front-tracking-Methode. Das ungelöste Problem der Aufnahme zeitabhängiger dreidimensionaler Geschwindigkeitsfelder und die jeder Simulation anhaftende Unsicherheit der Vorhersage deuten darauf hin, daß sichere Erkenntnisse hier nur durch eine Kombination von experimentellen und numerischen Methoden zu erlangen sind.

A. Interpolationsvorschriften zur Berechnung der konvektiven Terme

Um die Antisymmetrie der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ zu gewährleisten, muß bei Verwendung des in Abschnitt 3.2.3 (Seite 40) angegebenen Differenzensterns die transportierte Größe c auf Zell- und Kantenmittelpunkte hin interpoliert werden. Um zu zeigen, daß bei linearer Interpolation zwischen den beiden eine Kante begrenzenden Punkten bzw. zwischen den an einer Zelle diagonal gegenüberliegenden Punkten die Antisymmetrie sichergestellt werden kann, betrachten wir am Beispiel der konvektiven Terme in der Impulsgleichung in x -Richtung $\frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y}$ die betroffenen Koeffizienten der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$.

Der Koeffizient vor dem Wert von c am Punkt 2 in der Gleichung, die an Punkt 3 (Abbildung A.1) aufgestellt wird, ergibt sich dabei zu

$$a_{3,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{23}}{2 \cdot \Delta x}. \tag{A.1}$$

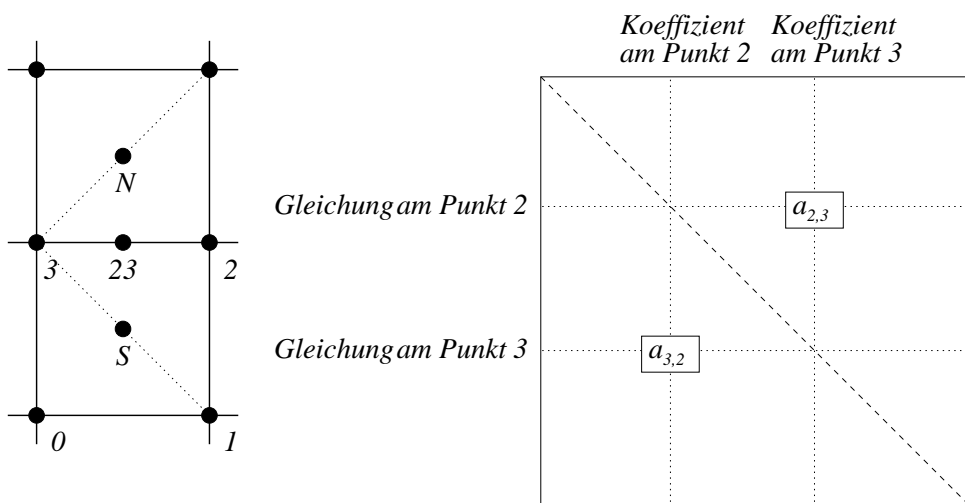


Abbildung A.1.: Differenzenstern zur Diskretisierung der konvektiven Terme im zweidimensionalen Fall mit Bezeichnungen und schematische Darstellung der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$

u_{23} bezeichnet darin die zwischen den Punkten 2 und 3 linear interpolierte Geschwindigkeit in x -Richtung. Die beiden Faktoren $\frac{1}{2}$ stammen dabei von den Gewichtungsfaktoren (Abbildung 3.3, Seite 40) und der linearen Interpolation. Abbildung A.1 zeigt schematisch, wo sich der Eintrag in $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ befindet. Bei linearer Interpolation aller für den betrachteten Differenzenstern benötigten Werte kommen zu $a_{3,2}$ keine weiteren Terme hinzu, insbesondere nicht durch die Ableitung in y -Richtung.

Um den Eintrag $a_{2,3}$, der in der Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ $a_{3,2}$ genau gegenüber liegt, zu bestimmen, muß man überlegen, wie der Koeffizient vor dem Wert von c am Punkt 3 in der an Punkt 2 aufgestellten Gleichung aussieht. Unter Berücksichtigung der Gewichtungsfaktoren des Differenzensterns und der Interpolation ergibt sich

$$a_{2,3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{23}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (\text{A.2})$$

Wieder treten keine weiteren Beiträge auf. Bei linearer Interpolation unterscheiden sich $a_{3,2}$ und $a_{2,3}$ also tatsächlich nur um das Vorzeichen. Die gleiche Überlegung kann man für alle Matrixeinträge anstellen und folgern, daß $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ antisymmetrisch ist.

Es fällt dabei aber auf, daß die Berechnungsvorschrift für den Wert der transportierten Größe in den Zellmittelpunkten nicht eindeutig ist: Wird etwa c am Punkt S zur Berechnung von $\frac{\partial(uc)}{\partial x}$ am Punkt 3 benötigt, so wird c zwischen den Punkten 1 und 3 interpoliert; wird dagegen c am selben Punkt zur Berechnung von $\frac{\partial(uc)}{\partial x}$ am Punkt 2 benötigt, so ist c zwischen den Punkte 0 und 2 zu interpolieren. Weiterhin ist bei der Interpolation zwischen transportierten und transportierenden Größen zu unterscheiden, auch wenn es sich dabei wie bei den Geschwindigkeiten in den Impulsgleichungen um dieselbe Variable handelt.

Eine naheliegende, eindeutige Interpolationsvorschrift für die Werte der transportierten Größe an den Zellmittelpunkten ist die bilineare Interpolation. c am Punkt S wird damit berechnet zu

$$c_S = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^3 c_i. \quad (\text{A.3})$$

Im folgenden werden anhand dieses Beispiels die Schwierigkeiten und Konsequenzen der Anwendung dieser Interpolationsvorschrift herausgestellt.

Unter Berücksichtigung der Gewichtungsfaktoren des bekannten Differenzensterns und der bilinearen Interpolationsvorschrift ergibt sich $a_{3,2}$ zu

$$a_{3,2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot u_{23} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_N + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_S}{2 \cdot \Delta x} + \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot v_N - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot v_S}{2 \cdot \Delta y}. \quad (\text{A.4})$$

Die Terme mit u_N und u_S stammen dabei aus der Approximation von $\frac{\partial(uc)}{\partial x}$, die mit v_N und v_S aus der Approximation von $\frac{\partial(vc)}{\partial y}$, zu der hier auch Beiträge geleistet

werden.

Überlegt man sich analog, mit welchen Gewichten c am Punkt 3 in der am Punkt 2 aufgestellten Gleichung auftritt, so erhält man für den Koeffizienten $a_{2,3}$:

$$a_{2,3} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot u_{23} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_N + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_S}{2 \cdot \Delta x} + \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot v_N - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot v_S}{2 \cdot \Delta y}. \quad (\text{A.5})$$

Die Terme, in die aus der Näherung von $\frac{\partial(vc)}{\partial y}$ stammen, haben in beiden Fällen dasselbe Vorzeichen. Konsequenz ist, daß eine Matrix $\mathbf{C}(\vec{u}_h)$ erhalten wird, die nicht antisymmetrisch ist [71].

A. Interpolationsvorschriften zur Berechnung der konvektiven Terme

B. Kontinuitätserhaltende Interpolation der Geschwindigkeiten im dreidimensionalen Fall

Die Interpolationsvorschriften für den zweidimensionalen Fall (Kasten auf Seite 42) können für alle sechs Seitenflächen einer Zelle für die beiden jeweils zur Seitenfläche parallelen Geschwindigkeitskomponenten formuliert werden. Im Fall der Fläche mit den Knotenpunkten 0, 1, 4 und 5 lauten diese:

$$u_m = \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + u_4 + u_5) + \frac{1}{4}(w_0 - w_1 + w_4 - w_5) \cdot \frac{dx}{dz} \quad (\text{B.1})$$

und

$$w_m = \frac{1}{4}(w_0 + w_1 + w_4 + w_5) + \frac{1}{4}(u_0 - u_1 + u_4 - u_5) \cdot \frac{dz}{dx}, \quad (\text{B.2})$$

Sie wurden so festgelegt, daß die Kontinuität im zweidimensionalen Fall

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.3})$$

auf der Fläche überall erfüllt ist, wenn die u - und die w -Geschwindigkeit überall so gewählt wird, daß ihr Wert die Gleichung derjenigen Hyperebene erfüllt, die durch die x -, z - und u - bzw. w - Werte an den Dreieckspunkten des entsprechenden Dreiecks der Grundfläche aufgespannt wird. Da auf der betrachteten Fläche im allgemeinen $v \neq \text{const.}$, gilt im Dreidimensionalen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= c \\ &= (-u_0 + u_1 - u_4 + u_5) \frac{1}{dx} + (-w_0 - w_1 + w_4 + w_5) \frac{1}{dz} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

mit einer Konstanten c . Der fehlende Term der Kontinuitätsgleichung im dreidimensionalen Fall, $\frac{\partial v}{\partial y}$, muß dann ebenfalls konstant sein. Man teilt das Zellvolumen in sechs fünfseitige Pyramiden, in denen die Terme $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ jeweils konstant sind. Die Eckpunkte der sechs Pyramiden sind jeweils die Eckpunkte der sechs

Seitenflächen der Zelle und der in Abbildung B.1 mit m bezeichnete Schnittpunkt der Raumdiagonalen der Zelle. Konsequenterweise approximiert man $\frac{\partial v}{\partial y}$ durch

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{dy}(v_m - v_{0145}). \quad (\text{B.5})$$

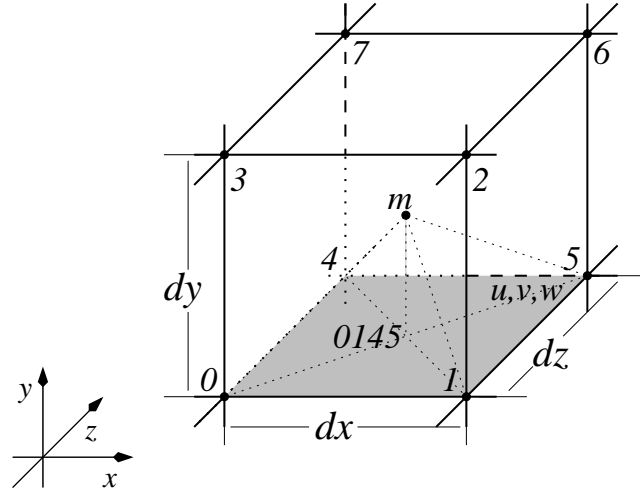


Abbildung B.1.: Diskretisierungsschema mit Bezeichnungen zur Interpolation

Weil v auf der betrachteten Fläche senkrecht steht, wird v_{0145} bilinear interpoliert zu

$$v_{0145} = \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + v_4 + v_5). \quad (\text{B.6})$$

Setzt man (B.4) bis (B.6) in die Kontinuitätsgleichung im dreidimensionalen Fall

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.7})$$

ein, dann stellt man beim Koeffizientenvergleich fest, daß (B.7) nur erfüllt ist, wenn v_m gewählt wird zu

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{8}(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7) \\ &+ \frac{1}{8}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 - u_7) \frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{1}{8}(w_0 + w_1 - w_2 - w_3 - w_4 - w_5 + w_6 + w_7) \frac{dy}{dz}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Analoges Vorgehen bei zwei weiteren, zur betrachteten Fläche nicht parallelen Seitenflächen ermöglicht die Bestimmung der beiden übrigen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors am mit Punkt m :

$$u_m = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8}(v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 - v_7) \frac{dx}{dy} \\
 & + \frac{1}{8}(w_0 - w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 + w_6 - w_7) \frac{dx}{dz} \tag{B.9} \\
 w_m = & \frac{1}{8}(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7) \\
 & + \frac{1}{8}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 + u_6 - u_7) \frac{dz}{dx} \\
 & + \frac{1}{8}(v_0 + v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 + v_6 + v_7) \frac{dz}{dy} \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

Die Bestimmung einer Komponente des Geschwindigkeitsvektors über zwei gegenüberliegende Pyramiden ergibt jeweils denselben Wert.

Um den Wert einer Komponente des Geschwindigkeitsvektors an einem beliebigen Punkt zu erhalten, muß man zunächst feststellen, in welcher der sechs fünfseitige Pyramiden sich der Punkt befindet. Dann teilt man diese Pyramide in vier Tetraeder, die als gemeinsame Kante die Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt m und der Mitte der Pyramidengrundfläche (im Beispiel der Punkt 0145) haben. Man konstruiert sich eine vierdimensionale Hyperebene in den drei Raumkoordinaten und der gesuchten Geschwindigkeitskomponente, beispielsweise u , die die vier Viertupel (x_i, y_i, z_i, u_i) mit den Werten für x, y, z und u an den mit i bezeichneten Eckpunkten des Tetraeders enthält. Die gesuchte Geschwindigkeitskomponente erfüllt die Gleichung an jedem beliebigen Punkt im Tetraeder.

C. Formelzeichen

Diese Zusammenstellung enthält die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Formelzeichen. Bezeichnungen von Zwischenergebnissen sind nur aufgenommen, wenn auf sie in anderen Kapiteln verwiesen wird. Die Angabe der Einheiten dient dem Verständnis der physikalischen Bedeutung des Formelzeichens; sie erfolgt hier stets in SI-Einheiten, auch dann, wenn in der Arbeit davon abgeleitete Einheiten verwendet werden. Verwechslungen sind auszuschließen, weil die Einheiten immer explizit ausgewiesen sind. Dimensionslose Größen haben in der Spalte das Zeichen –. Gelegentlich wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Bezeichnung dimensionsloser Größen durch + weggelassen. Darauf wird im Verzeichnis der Formelzeichen mit Fußnoten hingewiesen.

Griechische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erklärung
α	Wärmeübergangskoeffizient	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$	2.4.1
Δ	Filterweite	–	3.4.1
δ, δ^+	Dicke der thermischen Grenzschicht	$m, -^*$	2.4.1
ϵ	Dissipationsrate	$\frac{W}{kg}$	3.4.1
η	Kolmogorowsches Mikromaß	m	3.4.1
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{W}{m \cdot K}$	2.1
λ_t	turbulente Wärmeleitfähigkeit	–	3.4.1
γ	Oberflächenspannung	$\frac{kg}{s^2}$	2.3.1
μ	dynamische Viskosität	$\frac{kg}{m \cdot s}$	2.1
ν	kinematische Viskosität	$\frac{m^2}{s}$	2.1
ν_t	turbulente Wirbelviskosität	–	3.4.1

*Die Kennzeichnung mit + ist nicht konsistent.

C. Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erläuterung
ρ	Dichte	$\frac{kg}{m^3}$	2.1
ρ_1	Dichte der kontinuierlichen Phase	$\frac{kg}{m^3}$	2.3.1
ρ_2	Dichte der dispersen Phase	$\frac{kg}{m^3}$	2.3.1
ρ_F	Dichte der flüssigen Phase	$\frac{kg}{m^3}$	5.5.1
ρ_D	Dichte des Dampfes	$\frac{kg}{m^3}$	5.5.1
$\Delta\rho$	Dichtedifferenz	$\frac{kg}{m^3}$	2.1
τ	viskoser Spannungstensor	Pa	2.3.1
τ_{ij}^r	Residuumsstressspannungstensor	–	3.4.1
τ_{ij}^{FS}	Feinstrukturspannungstensor	–	3.4.1
θ	Temperatur	K	2.1
θ_S	Siedetemperatur des beheizten Fluids	K	2.4.1
θ_W	Temperatur der beheizten Wand	K	2.4.1
θ_∞	Temperatur des beheizten Fluids in ausreichendem Abstand von der Wand	K	2.4.1
ζ	Ausgleichsfaktor	–	5.4.1
ζ_{lin}, ζ_{mit}	Korrekturfaktor falls Blasenposition auf dem Gitterlinienschnittpunkt bzw. auf in der Zellmitte	–	5.4.1
$\bar{\zeta}_{lin}, \bar{\zeta}_{mit}$	linear ausgeglichener Korrekturfaktor falls Blasenposition auf dem Gitterlinienschnittpunkt bzw. auf in der Zellmitte	–	5.4.1
Ω	Massenmatrix	–	3.2.1

Lateinische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erläuterung
A_b	Oberfläche der Blase	m^2	5.3
A_F, A_F^+	von Flüssigkeit eingenommener Flächeninhalt	$m^2, -$	6.2.2
A_D, A_D^+	von Dampf eingenommener Flächeninhalt	$m^2, -$	6.2.2
a, b, c	Halbachsenlängen eines Ellipsoids	m	5.3
C	diskreter Operator der konvektiven Terme der Impuls- und Transportgleichungen	$-$	3.2.1
\vec{c}_h	Transportgröße (diskret)	$-$	3.2.1
c_p, c_p^+	spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit	$\frac{kJ}{kg \cdot K}, -$	2.1, 5.5.1
$c_{p,D}, c_{p,D}^+$	spezifische Wärmekapazität des Dampfes	$\frac{kJ}{kg \cdot K}, -$	5.5.1
c_p^*	modifizierte spezifische Wärmekapazität	$\frac{kJ}{kg \cdot K}, -$	2.1, 5.5.1
c_S	statischer Smagorinsky-Koeffizient	$-$	3.4.1
c_s	dynamisch berechneter Smagorinsky-Koeffizient	$-$	3.4.1
D	Diffusionskoeffizient	$\frac{m^2}{s}$	2.1
D	diskreter Operator der diffusiven Terme der Impuls- und Transportgleichungen	$-$	3.2.1
d	Bezugslänge	m	2.1
d_h	hydraulischer Durchmesser	m	3.4
d_p, d_p^+	Partikel- bzw. Blasendurchmesser	$m, -^*$	2.1
d_x, d_y, d_z	Gefäßabmessung in x -, y - bzw. z -Richtung	$m, -$	5.4.1
dx, dy, dz	Gitterweite in x -, y - bzw. z -Richtung	$-$	3.2.3, 3.4
\vec{e}_h	Vektor, dessen Komponenten alle gleich eins sind	$-$	3.2.2

*Die Kennzeichnung mit $+$ ist nicht konsistent.

C. Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erläuterung
f_i	äußere Kraft, die auf die mit i bezeichnete Zelle wirkt	–	5.2
\vec{f}	Term der äußeren Kräfte in den Impulsgleichungen	–	2.1
\vec{f}_h	diskretisierter Term der äußeren Kräfte in den Impuls- und Transportgleichungen	–	3.2.1
E, E^+	thermische Energie	$kJ, -$	6.2.2
\bar{E}^+	mittlerer Eintrag an thermischer Energie	–	6.4.3
g, g^+	Erdbeschleunigung	$\frac{m}{s^2}, -$	2.3.2, 5.2
h	Gitterweite	–	5.4.1
Δh_S	spezifische Verdampfungsenthalpie des beheizten Fluids	$\frac{kJ}{kg}$	2.4.2
\vec{k}_h	Vektor der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung, falls ungleich dem Nullvektor	–	5.5.2
M	diskreter Nablaoperator	–	3.2.1
P	mechanische, zugeführte Leistung	–	3.3.1
p, p^+	hydrostatischer Druck	$Pa, -^*$	2.1
\vec{p}_h	Vektor mit den diskreten Drücken	–	3.2.1
p_1, p_2	Druck außen bzw. innen an der Blasenoberfläche	Pa	5.3
Δp	Druckdifferenz	Pa	3.4
$\Delta \vec{p}_h^{n+1}$	Vektor mit den diskreten Werten für die Druckkorrektur	–	3.3.1
q	Quell- bzw. Senkterm in den Transportgleichungen	–	2.1
\vec{q}_h	diskretisierte Quell- bzw. Senkterme in den Transportgleichungen	–	3.2.1
q_i^r	Feinstruktur-Wärmestrom	–	3.4.1

*Die Kennzeichnung mit $+$ ist nicht konsistent.

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erläuterung
R_ϕ, R_θ	Hauptkrümmungsradien	m	2.3.1
R_g	Verhältnis von Blasenradius zu Gitterweite	–	5.4.1
\bar{S}_{ij}	(implizit gefilterter) viskoser Spannungstensor	–	3.4.1
T	Temperatur	–	2.4.1
T_S	Siedetemperatur des beheizten Fluids	–	5.5.1
T_U	Temperatur des Fluids in der Umgebung der Blase	–	5.5.1
T_W	Temperatur der beheizten Wand	–	2.4.1
$\bar{T}_{i,j}^+$	mittlere Temperatur in der mit i, j bezeichneten Zelle	–	6.2.2
T_{ij}^r	Residuumsstensionstensor (bzgl. des Testfilters)	–	3.4.1
T_{ij}^{TF}	Feinstrukturspannungstensor (bzgl. des Testfilters)	–	3.4.1
t, t^+	Zeit	$s, -^*$	2.1
$\Delta t, \Delta t^+$	Zeitintervall	–	3.3.1, 6.2.2
u, u^+	Geschwindigkeit in x -Richtung	$\frac{m}{s}, -^*$	2.1
\vec{u}, \vec{u}^+	Geschwindigkeitsvektor (Feldfunktion)	$\frac{m}{s}, -^*$	2.1
\vec{u}_h	Geschwindigkeitsvektor (diskret)	–	3.2.1
u_L	mittlere Fließgeschwindigkeit im Kanal	$\frac{m}{s}$	5.4.3
u_m, v_m, w_m	interpolierte Geschwindigkeit in der Mitte der Zellseitenfläche bzw. -kante in x -, y - bzw. z -Richtung	–	3.2.3
$u_{max}, v_{max}, w_{max}$	Absolutbetrag der maximalen Geschwindigkeit in x -, y - bzw. z -Richtung	–	3.3.1
u_{par}, u_{senkr}	wandparallele bzw. -normale Geschwindigkeitskomponente	–	3.4.2
u_∞	Bezugsgeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$	2.1
V, V^+	Volumen einer Zelle	–	5.2

*Die Kennzeichnung mit $+$ ist nicht konsistent.

C. Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheiten	Erläuterung
V_F, V_F^+	von Flüssigkeit eingenommenes Volumen	$m^3, -$	6.2.2
V_D, V_D^+	von Dampf eingenommenes Volumen	$m^3, -$	6.2.2
V_b, V_u	Volumen der Blase bzw. einer sie enthaltenden Umgebung	$m^3, -^*$	5.5.1
ΔV_z	die einer Zelle zugeschriebene Volumenzu- oder Abnahme durch Kondensation bzw. Verdampfung	$-$	5.5.2
\dot{V}	Volumenstrom	$\frac{m^3}{s}$	6.2.2
\dot{V}_G	eingeblassener Gasvolumenstrom	$\frac{m^3}{s}$	5.4.3
v, v^+	Geschwindigkeit in y -Richtung	$\frac{m}{s}, -^*$	2.1
$v_i, v_{i,j}$	Flüssigkeitsvolumenanteil der mit i bzw. i, j bezeichneten Zelle	$-$	5.2
w, w^+	Geschwindigkeit in z -Richtung	$\frac{m}{s}, -^*$	2.1
$\bar{w}_{i,j}^+$	mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung in der mit i, j bezeichneten Zelle	$-$	6.2.2
ΔW	gesamte potentielle Verschiebungsenergie	kJ	5.3
x, x^+	kartesische Koordinate	$m, -^*$	2.1
\vec{x}, \vec{x}^+	Vektor mit den kartesischen Koordinaten	$m, -^*$	2.1
Δx	Gitterweite in x -Richtung	$-$	3.3.1
Δx_R	Höhe der Rippe bei Rechnungen mit Oberflächenrauigkeit	$-$	6.7.1
y, y^+	kartesische Koordinate	$m, -^*$	2.1
Δy	Gitterweite in y -Richtung	$-$	3.3.1
z, z^+	kartesische Koordinate	$m, -^*$	2.1
z_{ori}	z -Koordinate des Gasdüse	m	5.4.3
Δz	Gitterweite in z -Richtung	$-$	3.3.1
Δz_R	Breite der Rippe bei Rechnungen mit Oberflächenrauigkeit	$-$	6.7.1

*Die Kennzeichnung mit $+$ ist nicht konsistent.

Literaturverzeichnis

- [1] ASHRAFIAN, A. und H. I. ANDERSSON: *Structure of Turbulence in Rough-wall Channel Flow*. In: *Proceedings of the Third National Conference on Computational Mechanics*, S. 51–73, Trondheim (Norwegen), 2003.
- [2] BAUER, M. und G. EIGENBERGER: *A Concept for Multi-Scale Modeling of Bubble Columns and Loop Reactors*. *Chemical Engineering Science*, 54:5109–5117, 1999.
- [3] BHAGA, D. und M. E. WEBER: *Bubbles in Viscous Liquids: Shapes, Wakes and Velocities*. *Journal of Fluid Mechanics*, 105:61–85, 1981.
- [4] BIBEAU, E. L. und M. SALCUDEAN: *Subcooled Void Growth Mechanisms and Prediction at Low Pressure and Low Velocity*. *International Journal of Multiphase Flow*, 20:837–863, 1994.
- [5] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer, Berlin Heidelberg, 1992.
- [6] BRAUER, H.: *Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmung*. Sauerländer, Aarau Frankfurt am Main, 1971.
- [7] BRENNER, S. C.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, Berlin Heidelberg, 1994.
- [8] BREUER, M.: *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Habilitationsschrift, FAU Erlangen-Nürnberg, Aachen, 2002.
- [9] BRONSTEIN, I., K. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.
- [10] BUNNER, B. und G. TRYGGVASON: *Direct Numerical Simulation of Three-dimensional Bubbly Flows*. *Physics of Fluids*, 11:1967–1969, 1999.
- [11] CHEN, Y.-M.: *Wärmeübergang an der Phasengrenze kondensierender Blasen*. Dissertation, TU München, 1985.

- [12] CHORIN, A.: *Numerical Solution of the Navier-Stokes-Equations*. Computational Mathematics, 22:745–762, 1968.
- [13] CHRISTOV, C. I. und P. K. VOLKOV: *Numerical Investigation of the Steady Viscous Flow past a Stationary Deformable Bubble*. Journal of Fluid Mechanics, 158:341–364, 1985.
- [14] CLIFT, R., J. R. GRACE und M. E. WEBER: *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, New York San Francisco London, 1978.
- [15] DAHLSTRÖM, S.: *Large Eddy Simulation of the Flow around a High-Lift Airfoil*. Dissertation, Department of Thermo- and Fluid Dynamics Chalmers University of Göteborg (Schweden), 2000.
- [16] DANDY, D. S. und L. G. LEAL: *Buoyancy-driven Motion of a Deformable Drop through a Quiescent Liquid at Intermediate Reynolds Numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 208:161–192, 1989.
- [17] DEEN, N. G.: *An Experimental and Computational Study of Fluid Dynamics in Gas-Liquid Chemical Reactors*. Dissertation, Aalborg University Esbjerg (Dänemark), 2001.
- [18] DELNOIJ, E., F. A. LAMMERS, A. M. KUIPERS und W. P. M. VAN SWAAIJ: *Dynamic Simulation of Dispersed Gas-Liquid Two-Phase Flow Using a Discrete Bubble Model*. Chemical Engineering Science, S. 1420–1458, 1997.
- [19] DURST, F., A. MELLING und J. WHITELAW: *Theorie und Praxis der Laser-Doppler-Anemometrie*. G. Braun, Karlsruhe, 1987.
- [20] EISENBACH, S., M. MANHART und R. FRIEDRICH: *Large-Eddy-Simulation of Turbulent Wall Bounded Flow with and without Adverse Pressure Gradient*. In: *High Performance Computing in Science and Engineering '02*, S. 272–284, Berlin Heidelberg, 2002. Springer.
- [21] ESMAEELI, A. und G. TRYGGVASON: *Direct Numerical Simulation of Bubble Flows. Part I — Low Reynolds Number Arrays*. Journal of Fluid Mechanics, 377:313–345, 1998.
- [22] ESMAEELI, A. und G. TRYGGVASON: *Direct Numerical Simulation of Bubble Flows. Part II — Moderate Reynolds Number Arrays*. Journal of Fluid Mechanics, 385, 1999.
- [23] FARAJI, D., Y. BARNEA und M. SALCUDEAN: *Vizualisation of Vapour Bubbles in Convective Subcooled Boiling of Water at Atmospheric Pressure*. In: *Proceedings of the 10th International Heat Transfer Conference*, S. 425–430, 1998.

-
- [24] FERZIGER, J. H. und M. PERIC: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin Heidelberg, 2. Aufl., 1999.
- [25] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin Heidelberg, 2. Aufl., 2000.
- [26] FRIEDRICH, R.: *Direct Numerical Simulation of Incompressible Turbulent Flows*. *Computers and Fluids*, 30:555–579, 2001.
- [27] GAVRILAKIS, S.: *Numerical Simulation of Low-Reynolds-Number Turbulent Flow Through a Straight Square Duct*. *Journal of Fluid Mechanics*, 244:101–129, 1992.
- [28] GERMANO, M., U. PIOMELLI, P. MOIN und W. H. CABOT: *A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model*. *Physics of Fluids*, A3:1760–1765, 1991.
- [29] GHOSAL, S. und P. MOIN: *The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry*. *Journal of Computational Physics*, 118:24–37, 1995.
- [30] GÖZ, M. F., B. BUNNER, M. SOMMERFELD und G. TRYGGVASON: *Direct Numerical Simulation of Bidisperse Bubble Swarms*. In: MICHAELIDES (Hrsg.): *Proc. of the 4. ICMF, New Orleans, USA*, 2001.
- [31] GÖZ, M. F., B. BUNNER, M. SOMMERFELD und G. TRYGGVASON: *Direct Numerical Simulation of Bubble Swarms with a Parallel Front-Tracking Method*. In: *High Performance Scientific and Engineering Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [32] GRACE, J. R.: *Shapes and Velocities of Bubbles Rising in Infinite Liquids*. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 51:116–120, 1973.
- [33] GRACE, J. R., T. WAIREGI und T. H. NGUYEN: *Shapes and Velocities of Single Drops and Bubbles Moving Freely through Immiscible Liquids*. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 54:167–173, 1976.
- [34] GRASSMANN, P., F. WIDMER und H. SINN: *Einführung in die thermische Verfahrenstechnik*. de Gruyter, Berlin Heidelberg, 1997.
- [35] GRIEBEL, M., T. DORNSEIFER und T. NEUNHOEFFER: *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1995.
- [36] GRIGULL, U.: *Technische Thermodynamik*. de Gruyter, Berlin New York, 1977.
- [37] GRÖTZBACH, G. und M. WÖRNER: *Direct Numerical and Large Eddy Simulation in Nuclear Applications*. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:222–240, 1999.

- [38] HAAR, L., J. S. GALLAGHER und G. S. KELL: *NBS/NRC Wasserdampf-tafel*. Springer, Berlin Heidelberg, 1998.
- [39] HACKBUSCH, W.: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [40] HARLOW, H. und J. E. WELSH: *Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface*. *Physics of Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [41] HARTHOLT, G. P., A. C. HOFFMANN und L. P. B. M. JANSSEN: *Finite Element Calculations of Flow Past a Spherical Bubble Rising on the Axis of a Circular Tube*. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 45:733–745, 1994.
- [42] HARTMANN, C. und A. DELGADO: *Numerische Simulation von Tropfen-deformation durch Verwendung eines Variationsprinzips*. *Chemie Ingenieur Technik*, 73:485–490, 2001.
- [43] HARTMANN, C. und A. DELGADO: *Numerical Simulation of Stress Distribution on Deformable Drops*. *Engineering in Life Science*, 2:1–4, 2002.
- [44] HIRT, C. W. und B. D. NICHOLS: *Volume of Fluid (VoF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*. *Journal of Computational Physics*, 39:201–235, 1981.
- [45] IOVIENO, M. und D. TARDELLO: *Variable Scale Filtered Navier-Stokes Equations: A New Procedure to Deal with the Associated Commutation Error*. *Physics of Fluids*, 15:1926–1936, 2003.
- [46] JIANG, B.: *The Least-Squares Finite Element Method*. Springer, Berlin Heidelberg, 1998.
- [47] JIMENEZ, J. und R. D. MOSER: *LES: Where Are We and What Can We Expect?*. AIAA Paper, 98, 1998.
- [48] JURIC, D. und G. TRYGGVASON: *Computations of Boiling Flow*. *International Journal of Multiphase Flow*, 24:387–410, 1998.
- [49] KANAI, A. und H. MIYATA: *Direct Numerical Simulation of Wall Turbulent Flows with Microbubbles*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35:593–615, 2001.
- [50] KANDLIKAR, S. G., V. R. MIZO und M. D. CARTWRIGHT: *Investigation of Bubble Departure Mechanism in Subcooled Boiling Flow of Water Using High-Speed Photography*. In: *Proceedings of the Convective Flow and Pool Boiling Conference 1997*, 1997.

-
- [51] KIM, J., P. MOIN und R. D. MOSER: *Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number*. Journal of Fluid Mechanics, 177:133–166, 1987.
- [52] KLOKER, M., U. KONZELMANN und H. FASEL: *Outflow Boundary Conditions for Spatial Navier-Stokes Simulations of laminar-turbulent Transition in Boundary Layers*. AIAA Journal, 1997.
- [53] KOLMOGOROW, A.: *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers*. In: *Doklad Akademij Nauk SSSR*, Bd. 30, 1941. Auf russisch.
- [54] LADYSHENSKAYA, O.: *Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokes-Gleichungen*. Akademie Verlag, Berlin, 1965.
- [55] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik IV: Hydrodynamik*. Akademie Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1971.
- [56] LAURIEN, E.: *The Numerical Simulation of Three-Dimensional Two-Phase Flows as a Tool for Light-Water Reactor Design and Safety Analysis*. In: *Proc. of the Annual Meeting on Nuclear Technology 2002, Bonn*. INFORUM-Verlagsgesellschaft, 2002.
- [57] LE CLAIR, B. P., A. E. HAMIELEC und H. R. PRUPPACHER: *A Numerical Study of the Drag on a Sphere at Low and Intermediate Reynolds Numbers*. Journal of Atmospheric Sciences, 27:308–315, 1969.
- [58] LILLY, D. K.: *A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method*. Physics of Fluids A4, 3:633–635, 1992.
- [59] LOMHOLT, S. und M. R. MAXEY: *Force-Coupling Method for Particulate Two-Phase Flow: Stokes Flow*. Journal of Computational Physics, 184:381–405, 2003.
- [60] LOMHOLT, S., B. STENUM und M. R. MAXEY: *Experimental Verification of the Force Coupling Method for Particulate Flows*. International Journal of Multiphase Flow, 28:225–246, 2002.
- [61] LUCIC, A., M. EMANS, F. MAYINGER und C. ZENGER: *Interferometric Study and Numerical Simulation of the Temperature Field in the Boundary Layer and Heat Transfer in Subcooled Flow Boiling*. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2003. angenommen.
- [62] LUCIC, A., F. MAYINGER, F. MEIER und C. ZENGER: *Experimental Study and Numerical Simulation of the Velocity Field around Rising Bubbles in Stagnant and Flowing Liquid*. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, S. 287–297, Rio de Janeiro, 2001.

- [63] LUCIC, A., F. MEIER, H.-J. BUNGARTZ, F. MAYINGER und C. ZENGER: *Numerical Simulation and Experimental Studies of the Fluid-Dynamic Behaviour of Rising Bubbles in Stagnant and Flowing Liquids*. In: *Lectures on Applied Mathematics - Proceedings of the Symposium Organized by the Sonderforschungsbereich 438 on the Occasion of Karl-Heinz Hoffmann's 60th Birthday*, S. 297–320, Berlin Heidelberg, 1999. Springer.
- [64] MANHART, M.: *Direkte Numerische Simulation - ein Werkzeug zur Vorhersage und Analyse komplexer turbulenter Strömungen*. Habilitationsschrift, TU München, 2001.
- [65] MANHART, M. und R. FRIEDRICH: *Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow of a Viscous Anisotropic Fluid*. In: *Lectures on Applied Mathematics - Proceedings of the Symposium Organized by the Sonderforschungsbereich 438 on the Occasion of Karl-Heinz Hoffmann's 60th Birthday*, S. 277–296, Berlin Heidelberg, 1999. Springer.
- [66] MAXEY, M. R. und B. K. PATEL: *Localized Force Representation for Particles Sedimenting in Stokes Flow*. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:2001.
- [67] MAXEY, M. R., B. K. PATEL, E. J. CHANG und L. P. WANG: *Simulations of Dispersed Turbulent Multiphase Flow*. *Fluid Dynamics Research*, 20:143–156, 1997.
- [68] MAXWORTHY, T.: *A Note on the Existence of Wakes behind Large, Rising Bubbles*. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:367–368, 1966.
- [69] MAYINGER, F. (Hrsg.): *Optical Measurements*. Springer, Berlin Heidelberg, 1994.
- [70] MEHL, M.: *Ein interdisziplinärer Ansatz zur dreidimensionalen numerischen Simulation von Strömungen, Stofftransport und Wachstum in Biofilmen auf der Mikroskala*. Dissertation, TU München, 2001.
- [71] MEHL, M. und M. PAHNKE. persönliche Kommunikation, 2003. Veröffentlichung geplant.
- [72] MEIER, F.: *Effiziente numerische Behandlung von Strömungen in veränderlichen Geometrien auf kartesischen Gittern*. Dissertation, TU München, 2000.
- [73] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1999.
- [74] MENEVEAU, C., T. S. LUND und W. H. CABOT: *A Lagrangian Dynamic Subgrid-Scale Model of Turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 319:353–385, 1996.

-
- [75] MIKSYS, M. J., J. M. VANDEN-BROEK und J. B. KELLER: *Rising Bubbles*. Journal of Fluid Mechanics, 123:31–41, 1982.
- [76] MOIN, P. und J. KIM: *Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow*. Journal of Fluid Mechanics, 200:471–509, 1982.
- [77] MOIN, P., K. SQUIRES, W. H. CABOT und S. LEE: *A Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport*. Physics of Fluids A, 3:2746–2757, 1991.
- [78] MOLERUS, O.: *Fluid-Feststoff-Strömungen*. Springer, Berlin Heidelberg, 1982.
- [79] MONJI, T., T. TAKAMATSU, T. KURIHARA und G. MATSUI: *Instantaneous and Local Turbulence Structure around a Rising Bubble by PIV Measurement*. Two Phase Flow Modelling and Experimentation, S. 1397–1404, 1999.
- [80] MOORE, D. W.: *The Rise of a Gas Bubble in a Viscous Liquid*. Journal of Fluid Mechanics, 6:113–130, 1958.
- [81] NORDMANN, D.: *Temperatur, Druck und Wärmetransport in der Umgebung kondensierender Blasen*. Dissertation, Universität Hannover, 1980.
- [82] NORDMANN, D. und F. MAYINGER: *Temperatur, Druck und Wärmetransport in der Umgebung kondensierender Blasen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1981. VDI-Forschungsheft Nr. 651.
- [83] OLIVER, D. L. R. und J. N. CHUNG: *Flow about a Fluid Sphere at Low to Moderate Reynolds Numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 177:4–18, 1987.
- [84] PATERSON, A. R.: *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge (England), 1983.
- [85] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge (Massachusetts, USA), 2001.
- [86] PRANDTL, L., K. OSWATITSCH und K. WIEGHARDT: *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 9. Aufl., 1993.
- [87] PRESS, W. H., B. P. FLANNARY, S. A. TEUKOLSKY und W. T. VETTERLING: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge (Massachusetts, USA), 1988.
- [88] PRODANOVIC, V.: *Bubble Behaviour in Subcooled Flow Boiling at Low Pressure and Flow Rates*. Doktorarbeit, University of British Columbia (USA), 2001.

- [89] PRODANOVIC, V., D. FRASER und M. SALCUDEAN: *Vapor Bubble Departure in Subcooled Flow Boiling*. In: *Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference*, Bd. 2, S. 339–344, 1998.
- [90] RAFFEL, M., C. E. WILLERT und J. KOMPENHAUS: *Particle Image Velocimetry*. Reihe Experimental Fluid Mechanics. Springer, Berlin Heidelberg, 1998.
- [91] ROGALLO, R. S. und P. MOIN: *Numerical Simulation of Turbulent Flows*. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, Bd. 16, S. 99–137, 1984.
- [92] RUZICKA, M.: *On Bubbles Rising in Line*. International Journal of Multiphase Flow, 26:1141–1181, 2000.
- [93] SABISCH, W.: *Dreidimensionale numerische Simulation der Dynamik von aufsteigenden Einzelblasen und Blasenschwärmen mit der Volume-of-Fluid-Methode*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [94] SADDUGHI, S. G. und S. V. VEERAVALLI: *Local Isotropy in Turbulent Boundary Layers at High Reynolds Numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 268:333–372, 1994.
- [95] SAGAUT, P.: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.
- [96] SCHLICHTING, H. und K. GERSTEN: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin Heidelberg, 9. Aufl., 1997.
- [97] SCHUBERT, H., E. HEIDENREICH, F. LIEPE und T. NEESSE: *Mechanische Verfahrenstechnik*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 2. Aufl., 1986.
- [98] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [99] SMAGORINSKY, J.: *General Circulation Experiments with the Primitive Equations, I, The Basic Experiment*. Mon. Weather Rev., 91:99–165, 1963.
- [100] SOCHOLICHIN, A. und G. EIGENBERGER: *Gas-Liquid Flow in Bubble Columns and Loop Reactors: Part I: Detailed Modelling and Numerical Simulation*. Chemical Engineering Science, 49:5735–5746, 1994.
- [101] SOCHOLICHIN, A. und G. EIGENBERGER: *Applicability of the Standard $k-\epsilon$ Turbulence Model to the Dynamic Simulation of Bubble Columns: Part I. Detailed Numerical Simulations*. Chemical Engineering Science, 54:2273–2284, 1999.
- [102] SON, G. und V. K. DHIR: *Numerical Simulation of Saturated Boiling on a Horizontal Surface*. Journal of Heat Transfer, 119:525–528, 1997.

-
- [103] SON, G. und V. K. DHIR: *Numerical Simulation of Film Boiling near Critical Pressures with a Level Set Method*. Journal of Heat Transfer, 120:183–192, 1998.
- [104] SPURK, J. H. (Hrsg.): *Strömungslehre*. Springer, Berlin Heidelberg, 4. Aufl., 1996.
- [105] STEPHAN, K. und F. MAYINGER (Hrsg.): *Thermodynamik: 1 Einstoffsysteme*. Springer, Berlin Heidelberg, 15. Aufl., 1998.
- [106] SUSSMANN, M., E. FATEM, P. SMEREKA und S. OSHER: *An Improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows*. Computers and Fluids, 27:663–680, 1998.
- [107] TAKADA, N., M. MISAWA, A. TOMIYAMA und S. HOSOKAWA: *Simulation of Bubble Motion under Gravity by Lattice Boltzmann Method*. Journal of Nuclear Science and Technology, 38:330–341, 2001.
- [108] TANEDA, S.: *Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Number*. Journal the Physical Society of Japan, 11:1104–1108, 1956.
- [109] THORNCROFT, G. E. und J. F. KLAUSNER: *Visual Observation of Vapor Bubble Dynamics in Vertical Flow Boiling*. In: *Proceedings of the Convective Flow and Pool Boiling Conference 1997*, 1997.
- [110] THORNCROFT, G. E., J. F. KLAUSNER und R. MEI: *An Experimental Investigation of Bubble Growth and Detachment in Vertical Upflow and Downflow Boiling*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 41:3857–3871, 1998.
- [111] TÖLKE, J.: *Gitter-Boltzmann-Verfahren zur Simulation von Zweiphasenströmungen*. Dissertation, TU München, 2001.
- [112] TOMIYAMA, A., H. SOU, A. MINAGAWA und T. SAKAGUCHI: *Numerical Analysis of a Single Bubble by VoF Method*. JSME International Journal, 36:51–56, 1993.
- [113] TOMIYAMA, A., I. ZUN, H. HIGAKI, Y. MAKINO und T. SAKAGUCHI: *A Three-Dimensional Particle Tracking Method for Bubbly Flow Simulation*. Nuclear Engineering and Design, 175:77–86, 1997.
- [114] TRYGGVASON, G., B. BUNNER, D. ESMAEELI, D. JURIC, N. AL-RAWAHI, W. TAUBER, J. HAN, S. NAS und Y.-J. JAN: *A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow*. Journal of Computational Physics, 169:708–759, 2001.

- [115] UDAYKUMAR, H. S., H.-C. KAN, W. SHYY und R. TRAN-SON-TAY: *Multiphase Dynamics in Arbitrary Geometries on Fixed Grids*. Journal of Computational Physics, 137:366–405, 1997.
- [116] UDAYKUMAR, H. S., R. MITTAL und W. SHYY: *Computation of Solid-Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids*. Journal of Computational Physics, 153:535–574, 1999.
- [117] UNGER, F.: *Numerische Simulation turbulenter Rohrströmungen*. Dissertation, TU München, 1993.
- [118] VAN HELDEN, W. G. J., C. W. M. VAN DER GELD und P. G. M. BOOT: *Forces on Bubbles Growing and Detaching in Flow along a Vertical Wall*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 38:2075–2088, 1995.
- [119] *VDI-Wärmeatlas*. VDI-Verlag, 8. Aufl., 1997.
- [120] VERSTAPPEN, R. W. C. P. und A. E. P. VELDMAN: *Direct Numerical Calculation at Lower Costs*. Journal of Engineering Mathematics, 32:143–159, 1997.
- [121] VERSTAPPEN, R. W. C. P. und A. E. P. VELDMAN: *Symmetry-Preserving Discretisation of Turbulent Channel Flow*. In: *High Performance Scientific and Engineering Computing*, Berlin Heidelberg, 2002. Springer.
- [122] VOLKOV, P. K.: *Modelling the Motion of a Vapor Bubble in a Tube in an Ascending Flow*. Fluid Dynamics, 29:500–507, 1987.
- [123] VOLKOV, P. K.: *Hydrodynamics of Rising Bubbles and Drops*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 66:85–113, 1994.
- [124] WELCH, S. W. J.: *Direct Simulation of Vapor Bubble Growth*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 41:1655–1666, 1998.
- [125] WELCH, S. W. J. und J. WILSON: *A Volume fo Fluid Based Method for Fluid Flows with Phase Change*. Journal of Computational Physics, 160:662–682, 2000.
- [126] WELLEK, R. M., A. K. AGRAWAL und A. H. P. SKELLAND: *Shape of Liquid Drops Moving in Liquid Media*. AIChE Journal, 12, 1966.
- [127] WERNER, H.: *Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine querliegende Rippe in einem Plattenkanal bei hoher Reynoldszahl*. Dissertation, TU München, 1991.
- [128] XU, J., M. R. MAXEY und G. EM KARNIADAKIS: *Numerical Simulation of Turbulent Drag Reduction Using Microbubbles*. Journal of Fluid Mechanics, 408:271–281, 2002.

- [129] YE, T., W. SHYY und J. CHUNG: *A Fixed-Grid, Sharp-Interface Method for Bubble Dynamics and Phase Change*. Journal of Computational Physics, 174:781–815, 2001.
- [130] ZAPRYANOV, Z. und S. TABAKOVA: *Dynamics of Bubbles, Drops and Rigid Particles*. Kluwer Academic Press, Dodrecht Boston London, 1999.
- [131] ZEITOUN, O. und M. SHOUKRI: *Axial Void Fraction Profile in Low Pressure Subcooled Flow Boiling*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 40:869–879, 1997.