

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
INSTITUT FÜR ENERGIETECHNIK

LEHRSTUHL
FÜR FLUIDMECHANIK

Numerische Simulation
kavitierender Strömungen
in hydraulischen Strömungsmaschinen

Moritz Frobenius

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Th. Sattelmayer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. B. Stoffel,
Technische Universität Darmstadt
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. G.H. Schnerr

Die Dissertation wurde am 19.12.2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 14.05.2004 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidmechanik der Technischen Universität München.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Rudolf Schilling, der es mir ermöglichte, diese Arbeit anzufertigen und durch seine wissenschaftliche Anleitung und konstruktive Unterstützung wesentlich zum Gelingen beigetragen hat. Seine lehrreichen Anregungen und die zahlreichen fachlichen Diskussionen mit ihm waren mir stets eine wertvolle Hilfe während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Bernd Stoffel und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Günter H. Schnerr danke ich für die Übernahme der Koreferate und das große Interesse, das sie meiner Arbeit entgegengebracht haben. Ebenso möchte ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer danken, der freundlicherweise als Vorsitzender der Prüfungskommission zur Verfügung stand.

Gerne möchte ich an dieser Stelle auch die Gelegenheit nutzen, all meinen Kollegen Dank auszusprechen, die mit ihrem Teamgeist und ihrer Hilfsbereitschaft zur Überwindung mancher Hürden beigetragen haben.

Ganz herzlichen Dank möchte ich auch meinen Eltern aussprechen, die mich beim Erreichen meiner beruflichen Ziele immer bestärkt und nach Kräften unterstützt haben. Meiner Frau Annette gilt mein besonderer Dank für die umfassende Unterstützung und die Rücksichtnahme während meiner gesamten Ausbildungszeit.

München, Juni 2004

Moritz Frobenius

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen	IX
Zusammenfassung	XVII
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.1.1 Physikalische Grundlagen	1
1.1.2 Erscheinungsformen von Kavitation	3
1.1.3 Auswirkungen der Kavitation	5
1.2 Stand des Wissens	6
1.2.1 Theoretische Arbeiten	6
1.2.2 Experimentelle Arbeiten	9
1.2.3 Numerische Methoden zur Kavitationssimulation	13
1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise	21
2 Modellbildung	22
2.1 Grundgleichungen	22
2.2 Kavitationsmodellierung	23
2.2.1 Modellierung der Keimverteilung	23
2.2.2 Transportgleichung für den Dampfanteil	24
2.2.3 Blasendynamik	26
2.2.4 Koppelung der Blasendynamik mit dem Stromfeld	31

2.3	Mittelung der Erhaltungsgleichungen	31
2.3.1	Reynolds'scher Separationsansatz	31
2.3.2	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen	32
2.4	Turbulenzmodellierung	35
2.4.1	Lineare Wirbelviskositätsmodelle	35
2.4.2	Nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle	37
2.4.3	Wandbehandlung	39
2.4.4	Staupunktströmung	41
2.4.5	Kavitierende Strömung	42
2.5	Rotierendes Bezugssystem	44
2.5.1	Grundgleichungen im Relativsystem	44
2.5.2	Turbulenzmodelle im Relativsystem	45
3	Numerisches Verfahren	46
3.1	Definition des Kontrollvolumens	46
3.2	Diskretisierung	48
3.2.1	Integralform der Erhaltungsgleichungen	48
3.2.2	Berechnung der Oberflächen- und Volumenintegrale	48
3.2.3	Approximation der Gradienten	50
3.2.4	Diskretisierung der konvektiven Flüsse	50
3.2.5	Diskretisierung der diffusiven Flüsse	55
3.2.6	Diskretisierung der Quellterme	57
3.2.7	Zeitliche Diskretisierung	59
3.3	Lösung des Gleichungssystems	59
3.4	Transportgleichung für den Dampfvolumenanteil	61
3.5	Druckkorrektur-Verfahren	62
3.5.1	Strömungen inkompressibler Fluide	63

3.5.2	Druckkorrektur-Verfahren für konturangepasste Netze	64
3.5.3	Druckkorrektur-Verfahren für kavitierende Strömungen	68
3.6	Randbedingungen	70
3.6.1	Einströmrand	71
3.6.2	Ausströmrand	72
3.6.3	Wand	73
3.6.4	Symmetrie	76
3.6.5	Blockgrenzen	76
3.6.6	Periodische Ränder	77
4	Validierung	78
4.1	Kavitierende Strömung durch eine Venturi-Düse	78
4.1.1	Beschreibung des Testfalls	79
4.1.2	Verwendete Rechennetze	80
4.1.3	Strömung durch die Venturi8-Düse - instationär	81
4.1.4	Strömung durch die Venturi8-Düse - stationär	96
4.1.5	Strömung durch die Venturi4-Düse - stationär	99
4.2	Kavitierende Strömung um ein Profil	102
4.2.1	Beschreibung des Testfalls	102
4.2.2	Verwendete Rechennetze	102
4.2.3	Simulation der kavitationsfreien Strömung	104
4.2.4	Instationär kavitierende Strömung	105
4.2.5	Stationäre Simulation der kavitierenden 3D-Strömung	109
5	Strömung in einem Kreiselpumpenlaufrad	113
5.1	Testfall	113
5.2	Verwendete Rechennetze	115
5.3	Simulation des Betriebsverhaltens	116

5.4	Simulation des Förderhöhenabfalls	118
5.5	Analyse des Förderhöhenabfalls	122
5.5.1	Experimentelle Beobachtungen	123
5.5.2	Versperrungswirkung	123
5.5.3	Einfluss der Kavitation auf die Schaufeldruckverteilung	126
5.5.4	Einfluss der Kavitation auf die turbulente kinetische Energie .	127
5.6	Untersuchung des Spalteinflusses	128
6	Bewertung und Ausblick	133
	Literaturverzeichnis	135

Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

Abkürzungen

2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
ALE	Asymmetric Leading Edge
CDS	Central Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
CLE	Circular Leading Edge
DS	Druckseite
EXP	Experiment
KAV	Kavitation
KL	Produktionstermmodifikation nach KATO UND LAUNDER [50]
LCL	Modell nach LIEN, CHEN UND LESCHZINER [70]
LDV	Laser Doppler Velocimetry
LIV	Laser Induced Fluorescence
MINMOD	Diskretisierungs-Verfahren nach HARTEN [45]
MM	Realizability-Bedingung nach MOORE & MOORE [78]
MPI	Message Passing Interface
NVF	Normalized Variable Formulation
NVSF	Normalized Variable and Space Formulation
NVD	Normalized Variable Diagram
NS2D	Zweidimensionaler Navier-Stokes-Code
NS3D	Dreidimensionaler Navier-Stokes-Code
PIV	Particle Image Velocimetry
RSR	Radseitenraum
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
SIMPLE	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations

SIP	Strongly Implicit Procedure
SS	Saugseite
STD	Standard- k - ϵ -Modell
UDS	Upwind Differencing Scheme
TU	Technische Universität
TVD	Total Variation Diminishing

Lateinische Zeichen

A	Eintrag der Koeffizientenmatrix
C	Konstante
C_i	Modellkonstanten
C_p	Druckbeiwert
$C_{\epsilon,1}, C_{\epsilon,2}$	Konstanten des k - ϵ -Modells
C_μ, \tilde{C}_μ	Modellkonstanten bzw. Modellfunktion
$C_{\mu,r}$	Funktion der Realizability-Bedingung
C_{rough}	Konstante der Wandfunktion
C_{Korr}	Korrekturfaktor
C_S	Konstante des Gradienten-Transportmodells
F	Integraler Fluss durch eine Zellgrenzfläche
\tilde{E}	Konstante der Wandfunktion
H	Förderhöhe
L	Länge
L_{Cav}	Länge der Kavitationszone
$NPSH$	Net Positive Suction Head (Netto Energiehöhe)
N	Anzahl
P_k	Produktion von k
P_{ij}	Produktionstensor
PD_{ij}	Druckdiffusionstensor
Pe	Peclet-Zahl
Q	Volumenstrom
Q_0	Volumenstrom im Optimalpunkt
Q	Integraler Quellterm
R, R_0	Keim-Radius

Re	Reynolds-Zahl
Re_T, Re_y	turbulente Reynolds-Zahl
Res	Residuum
St	Strouhal-Zahl
S	Fläche
S_{DKG}	Quellterm in der Druckkorrekturgleichung
S_{KAV}	Quellterm zur Berücksichtigung der Kavitation
S_{ij}	Deformationstensor
\tilde{S}_{ij}	Invariante des Deformationstensors
\tilde{S}^{rot}	Rotationsbedingter Quellterm in den Impulsgleichungen
T	Temperatur
T	Zeitintervall
T_T	turbulentes Zeitmaß
TD_{ij}	turbulenter Transporttensor
Tu	Turbulenzgrad
U	Geschwindigkeit
V	Volumen
VD_{ij}	viskoser Diffusionstensor
VZ	Vorzeichen
\vec{n}	Normalenvektor
\vec{r}	Ortsvektor
\vec{u}	Vektor der Geschwindigkeit
\vec{w}	Vektor der Relativgeschwindigkeit
\vec{x}	Lösungsvektor; Ortsvektor
b	Rechte Seite des Gleichungssystems
b_{ij}	Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen
c	Schallgeschwindigkeit
f	Frequenz
f	Fluss durch eine Zellgrenzfläche
f_n	Funktion der Realizability-Bedingung
f_ρ	Funktion zur Dichte-Korrektur
g	Erdbeschleunigung
k	turbulente kinetische Energie
k	Exponent
k_r	Äquivalente Sandrauigkeit

\dot{m}	Massenstrom
n	Koordinate in Normalenrichtung, Exponent
n	Drehzahl
nq	Spezifische Drehzahl
n_0	Keimanzahl
p	Druck
p_s	statischer Druck
p_t	Totaldruck
q	Quellterm
r	Radius
s	Spaltweite, Schaufellänge
t	Zeit
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
$u_{Re-Entrant}$	Geschwindigkeit des Re-Entrant-Jets
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit
$-\rho \overline{u'_i u'_j}$	Reynolds-Spannungstensor
v	spezifisches Volumen
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
w	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
x	x-Koordinate, Referenzlänge
y	y-Koordinate, Wandabstand
z	z-Koordinate

Griechische Zeichen

Δ	Differenz
Γ	Allgemeiner Diffusionskoeffizient
Φ	Druck-Scher-Korrelation
Π_{ij}	Umverteilungstensor
Ω_{ij}	Rotationstensor
Ω_{ij}^A	absoluter Rotationstensor
Ω^F	Winkelgeschwindigkeit bei Rotation um die z-Achse
$\vec{\Omega}^F$	Winkelgeschwindigkeitsvektor
$\tilde{\Omega}_{ij}$	Invariante des Rotationstensors
α	Dampfvolumenanteil
β	Blendingfaktor, Relaxationsfaktor

β	Anstellwinkel
δ	allgemeiner Differenzialoperator; Kronecker-Symbol
δ_{ij}	Einheitsmatrix
ϵ	Dissipationsrate
γ_p	Blendingfaktor bei der Austrittsrandbedingung
ϕ	allgemeine Größe
λ	Interpolationsfaktor
μ	dynamische Viskosität
μ_{eff}	effektive dynamische Viskosität
μ_T	turbulente Viskosität
ξ	netzorientierte Koordinate
ρ	Dichte
σ	Kavitationszahl
σ_0	Oberflächenspannung
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Modellkonstanten
τ	viskose Normal- und Schubspannung
τ_w	Wandschubspannung

Tiefgestellte Zeichen

∞	ungestörte Zuströmung
B	Blase
$Blasen$	Blasen
D	deviatorischer Anteil
G	nicht-gelöstes Gas
IC_{ic}	inception
P	Zellmittelpunkt
T	turbulent
Tu	turbulent
$char$	charakteristisch
i	innen
i	Zählindex
in	inflow
j	Zählindex

<i>k</i>	Zählindex
<i>krit</i>	kritisch
<i>l</i>	Flüssigkeit (liquid)
<i>l</i>	Zählindex
<i>lin</i>	linear
<i>min</i>	Minimalwert
<i>nb</i>	Nachbarzellen
<i>n</i>	in Normalenrichtung
<i>out</i>	outflow
<i>r</i>	erforderlich (required)
<i>r</i>	radiale Komponente
<i>ref</i>	Referenz
<i>s</i>	senkrecht zur normalen und tangentialen Richtung
<i>t</i>	total
<i>t</i>	in tangentialer Richtung
<i>turb</i>	turbulent
<i>v</i>	Dampf (vapour)
0	Referenz
1	Eintritt
2	Austritt
3%	3% Förderhöhenabfall

Hochgestellte Zeichen

+	Dimensionslose Werte der Turbulenzmodelle
*	Aus den diskretisierten Impulsgleichungen berechnete Werte; Dimensionsbefreite Werte; Konstanten im Turbulenzmodell
'	Werte der Schwankungsbewegung bei Reynolds-Mittelung; Korrekturwerte beim Druckkorrekturverfahren
<i>high</i>	hohe Ordnung
<i>low</i>	niedere Ordnung
<i>mod</i>	modifiziert

<i>m</i>	nichtlinearer Iterationschritt
<i>n</i>	linearer Iterationschritt
<i>neu</i>	neuer Wert
<i>num</i>	numerisch
<i>o,oo</i>	vergangene Zeitschritte
<i>turb</i>	turbulent

Kopfnoten

—	Reynolds-gemittelte Werte; Flächenmittelwerte; an die Zellgrenzflächen interpolierte Werte; Impulsgemittelte Werte
~	dimensionslose Variable

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein numerisches Verfahren zur realitätsnahen Berechnung kavitierender Strömungen in hydraulischen Strömungsmaschinen vorgestellt.

Zur Beschreibung der Kavitation wird ein blasendynamisches Kavitationsmodell verwendet und in das am Lehrstuhl entwickelte Navier-Stokes-Verfahren integriert. Ein nicht-konservatives Druck-Korrektur-Verfahren sorgt dabei trotz des enormen Dichteunterschiedes zwischen dampfförmiger und flüssiger Phase für ein stabiles Lösungsverhalten. Durch die Verwendung eines impliziten 3-Level-Zeitschritt-Verfahrens ist der Zeitschritt nicht limitiert, so dass der entwickelte CFD-Code sowohl für stationäre als auch für instationäre Simulationen angewendet werden kann.

Zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit des Verfahrens werden zwei Testfälle untersucht. Es zeigt sich, dass bei der instationären Simulation der kavitierenden Strömung mit Standard-Turbulenzmodellen keine realitätsnahen Ergebnisse erzielt werden können. Die vorgeschlagenen Verbesserungen der Turbulenzmodellierung, z.B. die Behebung der Staupunktanomalie durch die Realizability-Bedingung oder die Berücksichtigung der Änderung der Gemischdichte bei der Berechnung der turbulenten Viskosität, führen zu erheblichen Verbesserungen der Simulationsergebnisse. Das entwickelte instationär rechnende, zeitechte Verfahren ist somit in der Lage, wesentliche Effekte wie das Auftreten des Re-Entrant-Jets und die Wolkenablösung physikalisch richtig zu erfassen.

Um das Verfahren auch als Baustein eines Entwicklungssystems für hydraulische Strömungsmaschinen einsetzen zu können, wurde das Kavitationsmodell auf den Sonderfall der stationären Simulation kavitierender Strömungen erweitert. Die Anwendung des entwickelten CFD-Codes erfolgt am Beispiel der kavitierenden Strömung durch das Laufrad einer Kreiselpumpe mit der spezifischen Schnellläufigkeit $n_q = 26 \text{ 1/min}$. Das entwickelte Verfahren ist bei der stationären Simulation kavitierender Strömungen in der Lage, die kavitationsbedingte Änderung des Betriebsverhaltens der Kreiselpumpe genau vorherzusagen. Für die untersuchten Betriebspunkte liegt die Übereinstimmung des berechneten Förderhöhenabfalls mit gemessenen Werten im Bereich der experimentellen Messunsicherheit. Die Untersuchung der Strömung durch den Radseitenraum zeigt, dass dieser für die Ausbildung und Art der Kavitation im Laufrad entscheidenden Einfluss haben kann.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

1.1.1 Physikalische Grundlagen

Unter dem Begriff Kavitation wird die Bildung einer Dampfphase in einer Flüssigkeit bezeichnet¹. Bei Absenken des statischen Druckes unter einen kritischen Wert bilden sich Dampfblasen, die in Abhängigkeit von Druck und Temperatur anwachsen und wieder zusammenfallen.

Ein Anhaltswert für den statischen Druck, bei dem Kavitation auftritt, ist der zur Umgebungstemperatur gehörende Sättigungsdampfdruck p_v . Der lokale Kavitationsbeiwert σ , auch als Thoma-Zahl² bekannt, bestimmt sich aus der Differenz zwischen statischem Druck p und Sättigungsdampfdruck, dividiert durch den dynamischen Druck der Anströmung,

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho_l U^2}, \quad (1.1)$$

und ist ein Maß für die Kavitationsanfälligkeit einer Strömung. Unterschreitet der Kavitationsbeiwert den Wert Null, ist mit dem Auftreten von Kavitation zu rechnen. Der kritische Kavitationsbeiwert σ_{ic} ³, ab dem tatsächlich Kavitation auftritt, hängt jedoch von mechanisch-dynamischen Effekten wie z.B. der Trägheit des umgebenden Fluids, der Oberflächenspannung und der Viskosität sowie der Fluidqualität ab.

Neben der oben beschriebenen Dampfkavitation treten bei einer Druckabsenkung auch die sogenannte Gaskavitation und die Pseudokavitation auf. Bei der Pseudo-

¹lat. cavus = hohl, Kavitation = Hohlraumbildung

²Prof. Dr.-Ing. D. Thoma, von 1921-1942 Professor an der Technischen Hochschule München

³ic = incipient

kavitation handelt es sich um eine Aufweitung der in der Flüssigkeit befindlichen ungelösten Gasblasen infolge der Druckabsenkung, wogegen bei der Gaskavitation das in der Flüssigkeit gelöste Gas entsprechend dem jeweiligen Sättigungsgrad ausdiffundiert. Während diese beiden Kavitationsarten bei jedem Druckniveau auftreten, setzt Dampfkavitation erst mit Unterschreitung des kritischen Drucks ein. Verglichen mit der Dampfkavitation und der Pseudokavitation handelt es sich bei der Gaskavitation um einen sehr langsamen Vorgang. Im allgemeinen treten aber alle drei Kavitationsarten gleichzeitig auf und beeinflussen sich gegenseitig.

Thermische Effekte können in vielen Fällen vernachlässigt werden. Dies unterscheidet die Kavitation vom Sieden, bei dem der Verdampfungsvorgang durch den Wärmetransport dominiert wird. Wie in Abbildung 1.1 ersichtlich folgt der Siedevorgang einer Isothermen, und der Phasenübergang geschieht aufgrund der Wärmezufuhr bei konstantem Druck. Beim Kavitationsvorgang wird im p - v -Diagramm eine geringe Temperaturabsenkung beobachtet. Eine eindeutige Trennung von Sieden und Kavitation ist nicht immer möglich, insbesondere wenn es sich bei dem kavitierenden Fluid nicht um kaltes Wasser handelt. Bei Kavitation tritt sowohl das Blasenwachstum als auch der Kollaps von Blasen auf, während die Blasen beim Sieden kontinuierlich wachsen.

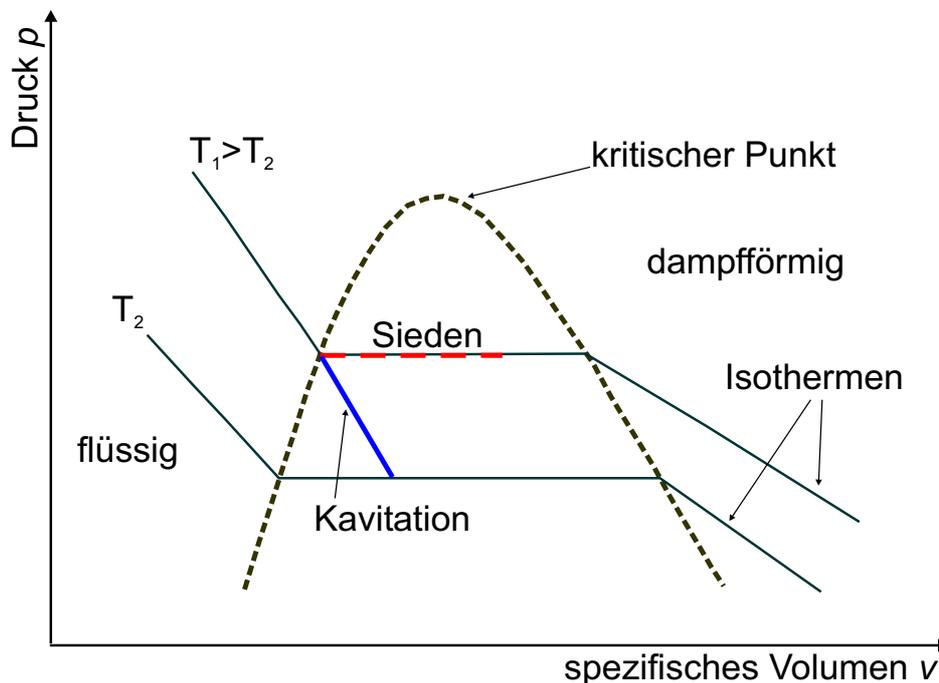


Abbildung 1.1: Vergleich von Kavitation und Sieden im $p - v$ -Diagramm

1.1.2 Erscheinungsformen von Kavitation

In Abhängigkeit der Strömungsbedingungen lassen sich verschiedene Erscheinungsformen von Kavitation beobachten. In der Literatur findet man fünf Kategorien von Kavitation, siehe auch Abbildung 1.2:

- Einzelblasenkavitation („travelling bubble cavitation“):

Die Einzelblasenkavitation wird charakterisiert durch deutlich voneinander getrennte, relativ große Blasen, die sich in Wandnähe mit der Strömung bewegen und dabei individuell wachsen und kollabieren. Die Blasen sind kugel- oder halbkugelförmig und erreichen eine Größe von mehreren Millimetern. Es tritt weder Blasenkoaleszenz noch Blasenzerfall auf. Bei Betrachtung mit bloßem Auge zeigt die Kavitationszone hierbei ein milchiges oder auch wolkiges Aussehen, da die Einzelblasen vom Auge nicht aufgelöst werden können. Mit Hochgeschwindigkeitsaufnahmen ist es jedoch möglich, diese sichtbar zu machen.

- Schichtkavitation („sheet cavitation“):

Die Schichtkavitation, auch anhaftende Kavitation genannt, besteht aus einem zusammenhängenden dampfgefüllten Gebiet, das an der umströmten Wand anliegt und dabei die Flüssigkeitsströmung von der Wand trennt. In ihrem beginnenden Stadium zeigt sich die Schichtkavitation meistens als Streifenkavitation („string cavitation“), die von einzelnen Rauigkeitselementen der Oberfläche ausgeht. Diese Kavitationsart kann als quasi-stationär betrachtet werden.

- Wolkenkavitation („cloud cavitation“):

Bei kleineren Kavitationszahlen wird die kavitierende Strömung zunehmend instationär. Es kommt zum Ablösen von Blasenwolken. Dies wird durch den sogenannten „Re-Entrant-Jet“ verursacht. Im hinteren Bereich der Kavitationsschicht wird die Phasengrenze instabil und das geschlossene Dampfgebiet bricht auf. Dies führt zur Entstehung von Blasenwolken, die von der Strömung in einem Wirbel stromab transportiert werden. Die Blasengröße liegt in der Größenordnung von 10 bis 100 μm bei einer sehr hohen Blasendichte von bis zu 10^3 Blasen pro cm^3 [66]. In diesem Zusammenhang wird auch von einer „dispersen“ Struktur der Kavitation gesprochen.

- Superkavitation („supercavitation“):

Wächst das Kavitationsgebiet über den umströmten Körper hinaus, spricht man von Superkavitation. Bei Hochgeschwindigkeitsprojektilen reduziert sich aufgrund der Superkavitation der Reibungswiderstand [96]. Auch kann der Auftriebsbeiwert höher sein als bei kavitationsfreier Anströmung.

- Wirbelkavitation („vortex cavitation“):

Wirbelkavitation bildet sich aufgrund des niedrigen Druckes im Kern einzelner Wirbel. Die Wirbel entstehen in Scherschichten von abgelösten oder strahlartigen Strömungen oder als Spitzenwirbel an freien Tragflügeln oder Schaufeln von nicht ummantelten Laufrädern.

Für die geschilderten Kavitationsarten existieren in der Literatur keine einheitlichen Definitionen. Insbesondere der Übergang zwischen Blasen- und Wolkenkavitation ist fließend.

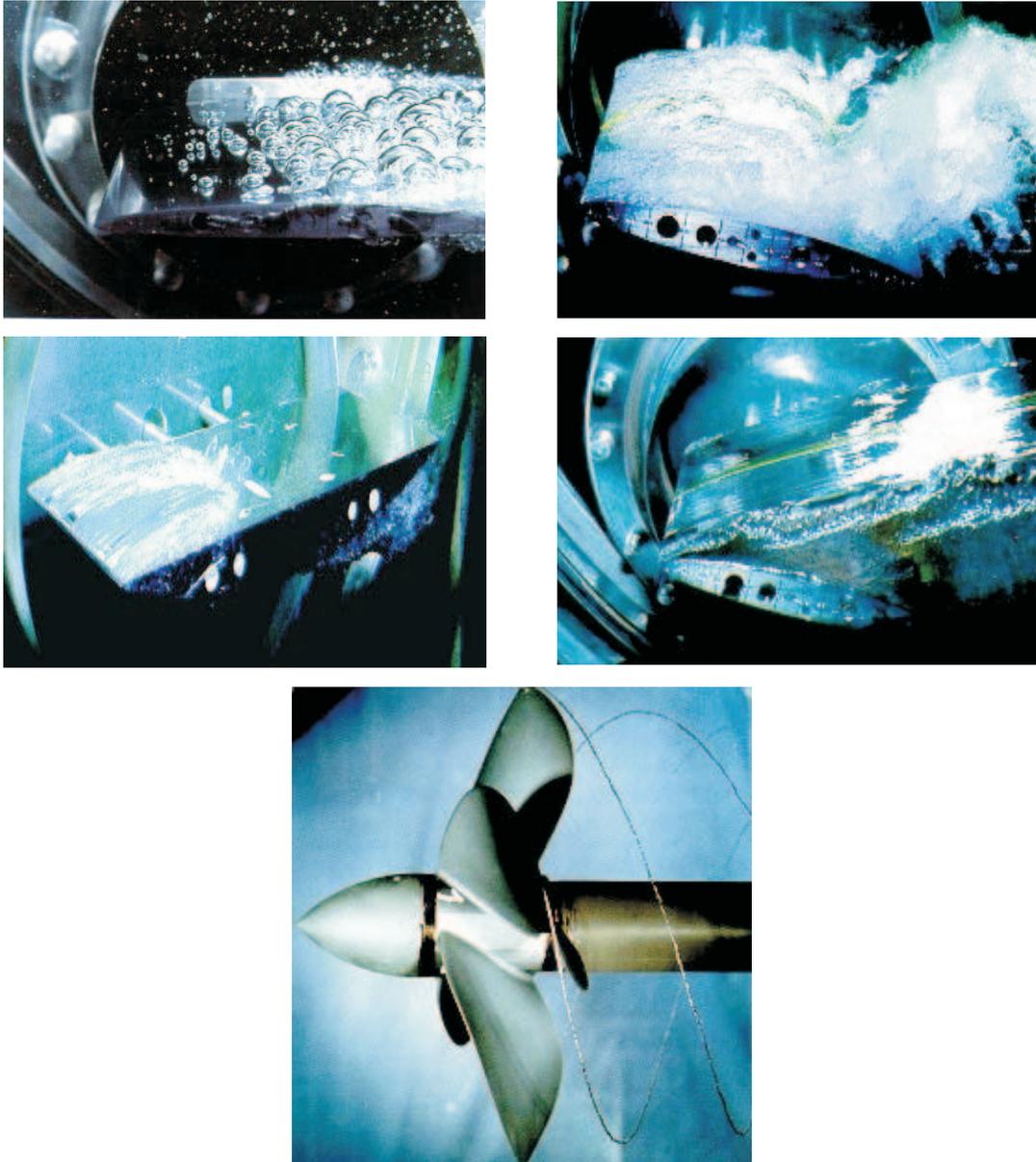


Abbildung 1.2: Aufnahmen verschiedener Arten von Kavitation: Blasen- und Wolkenkavitation (oben links), Wolkenkavitation (oben rechts), Schichtkavitation (Mitte links), Superkavitation (Mitte rechts), Wirbelkavitation (unten), aus [33], mit freundlicher Genehmigung

1.1.3 Auswirkungen der Kavitation

Kavitation beeinflusst den Auftrieb und Widerstand eines Profils und somit auch den Wirkungsgrad einer Strömungsmaschine. Der Auftrieb eines umströmten Profils wird tendenziell reduziert und der Widerstand erhöht [129]. Eine Ausnahme ist die „beginnende Kavitation“. Hier beträgt das Kavitationsgebiet weniger als 30% der Profillänge, der Auftriebsbeiwert kann den Wert bei kavitationsfreier Strömung um bis zu 20% übersteigen [129]. Außerdem können enorme instationäre Auftriebschwankungen auftreten [2]. Die Instationarität der Kavitation tritt dabei in Abhängigkeit des Kavitationstyps mehr oder weniger deutlich in Erscheinung, siehe Kapitel 1.1.2. Die experimentell ermittelten Strouhal-Zahlen für instationär kavitierende Strömungen liegen im Bereich von $0.1 < St < 0.3$ [34],[59],[119].

Kavitation tritt in einer Vielzahl von hydraulischen Maschinen und Systemen auf, wie z.B. Pumpen, Wasserturbinen oder Schiffspropellern. Als Folge von Kavitation kommt es zu Kavitationserosion, Wirkungsgradverlusten, Geräusentstehung und mechanischen Schwingungen. Dabei ist die Gefahr des Auftretens von Kavitationserosion bei Pumpen wesentlich größer als bei Turbinen, da die Kavitationblasen wegen des positiven Druckgradienten bei höheren Drücken kollabieren. Abbildung 1.3 zeigt die kavitationsbedingte Erosion an einer Turbinenschaufel.



Abbildung 1.3: Kavitationserosion an einer Kaplanturbinenschaufel.

Kavitation hat aber auch erwünschte Auswirkungen. So kann Kavitation in Einspritzdüsen von direkt einspritzenden Diesel- und Ottomotoren zu einer verbesserten Spraybildung führen, was sich auf den nachfolgenden Verbrennungsprozess und somit

die Schadstoffbildung auswirkt. Kavitation wird auch gezielt zur Abwasserreinigung und in der Medizintechnik eingesetzt.

Bei Kreiselpumpen tritt Kavitation in erster Linie an den Schaufeln des rotierenden Laufrads auf. Der Kavitationszustand einer Pumpe wird über den NPSH-Wert⁴ beschrieben, der als Differenz zwischen dem im Saugstutzen herrschenden Totaldruck p_{t1} und dem Dampfdruck p_v definiert ist.

$$NPSH = \frac{p_{t1} - p_v}{\rho g} . \quad (1.2)$$

Der erforderliche NPSH-Wert einer Pumpe, $NPSH_r$ ⁵, stellt daher den Dampfdruckabstand im Saugstutzen einer Pumpe dar, bei dem ein bestimmtes Kavitationskriterium eingehalten wird. Beispielsweise kennzeichnet $NPSH_{ic}$ ⁶ den NPSH-Wert einer Pumpe, bei dem Kavitation gerade beginnt. $NPSH_{3\%}$ kennzeichnet den NPSH-Wert, bei dem die Kavitation einen Förderhöhenabfall von 3% verursacht.

1.2 Stand des Wissens

1.2.1 Theoretische Arbeiten

Kavitationskeime und Keimbildungsmechanismen

Kavitationserscheinungen haben ihren Ursprung in der instabilen Aufweitung von Kavitationskeimen. Die Keime sind dafür verantwortlich, dass Flüssigkeiten in der Regel keine Zugspannungen ertragen können, obwohl theoretische Berechnungen ertragbare Zugspannungen in der Größenordnung von 1000 bar liefern. Die Berechnungen stützen sich auf die Theorie der **homogenen Keimbildung** in Flüssigkeiten. Dabei wird die neue Phase im Inneren der Ausgangsphase durch molekulare Austauschvorgänge gebildet. Die größten gemessenen Zugspannungen in entgastem, gefiltertem Wasser betragen jedoch nur etwa 250 bar, unbehandeltes Wasser kann nahezu gar keine Zugspannungen ertragen. Dies wird dadurch erklärt, dass selbst in reinem Wasser eine hohe Anzahl von Keimen existieren. Die Bildung der neuen Phase beginnt an diesen Störstellen, man spricht von **heterogener Keimbildung**. Bei den Keimen kann es sich um Gasblasen, hydrophobe Feststoff-Partikel, Porenkeime oder auch um Gaseinschlüsse in Oberflächenrauigkeiten handeln.

Unbehandeltes Wasser weist eine Keimanzahl von $n = 100 - 1000 \frac{\text{Keime}}{\text{cm}^3}$, bei einem mittleren Keimradius von $R = 10 \mu\text{m}$ [43], auf. Oberhalb eines Grenzwerts der Keimanzahl stellt sich eine Sättigung ein, und die kavitierende Strömung lässt sich

⁴NPSH = Net positive suction head

⁵engl. required

⁶engl. incipient

durch Zufuhr weiterer Keime nicht beeinflussen. Diese Sättigungsgrenze muss jedoch nicht mit der Gas-Sättigungsgrenze zusammenfallen.

Der Radius der Kavitationskeime hängt unter anderem vom Gehalt der im Fluid gelösten Luft ab. Der Keimradius ist aufgrund der Existenz dieser sog. **Keimbildungsbarriere** von entscheidender Bedeutung für den Nukleationsprozess. Die Keimbildungsbarriere legt den kritischen Radius

$$r_{krit} = \frac{2 \sigma_0}{p_v - p_\infty} . \quad (1.3)$$

fest, ab dem Dampfblasen erst wachstumsfähig sind [43]. An dieser Stelle wird mit σ_0 die Oberflächenspannung bezeichnet, auf deren Einfluss die Existenz der Keimbildungsbarriere beruht.

Bei Blasen mit einem Radius kleiner als r_{krit} ist wegen $p_i = 2\sigma_0/r + p_\infty$ der Blaseninnendruck größer als der Sättigungsdampfdruck p_v . Erst wenn der Blasenradius den kritischen Radius erreicht und somit der Blaseninnendruck gleich dem Dampfdruck ist, kann die Blase wachsen. Bei konstanter Temperatur und somit konstantem Dampfdruck hängt der kritische Blasenradius vom Umgebungsdruck p_∞ ab.

Beschreibung des Wachstums bzw. des Kollaps von Blasen

Das Wachstum und der Zusammenfall einer einzelnen kugelsymmetrischen Blase in einem unendlich ausgedehnten Fluid werden mit den Grundgleichungen der Blasendynamik beschrieben. RAYLEIGH [73] stellte 1917 eine mathematische Beschreibung des Blasenwachstums vor. Dabei wird die zeitliche Änderung des Blasenradius bei dem Umgebungsdruck p und der Umgebungstemperatur T betrachtet. Der Blaseninnendruck und die Temperatur im Inneren der Blase werden mit p_B bzw. mit T_B bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Blase kugelsymmetrisch bleibt und die Dampftemperatur im Inneren der Blase homogen ist und der Flüssigkeitstemperatur an der Blasenwand entspricht. Dampf und Flüssigkeit werden als inkompressibel betrachtet. Die erweiterte Rayleigh-Gleichung lautet:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_B - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma_0}{\rho_l R} - 4 \frac{\mu}{\rho_l R} \frac{dR}{dt} . \quad (1.4)$$

Der Oberflächenspannungsterm wurde von PLESSET & ZWICK [85] hinzugefügt, weswegen Gleichung 1.4 auch als Rayleigh-Plesset Gleichung bezeichnet wird. Die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt das durch mechanische Effekte wie die Trägheit kontrollierte Wachstum der Einzelblase, das sogenannte „Inertia Controlled Growth“. Erst wenn die Blase so groß ist, dass die Bereitstellung latenter Wärme für die Verdampfung nicht mehr gewährleistet ist, gewinnen thermische Effekte an Bedeutung, und man spricht vom „Heat Diffusion Controlled Growth“.

Eine erweiterte Form von Gleichung 1.4 zur Berücksichtigung der Kompressibilität der Flüssigkeit wird von KELLER & KOLODNER [57] vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}\right) R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c} \frac{dR}{dt}\right) \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \\ & = \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}\right) \frac{p_B - p_\infty}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l c} \frac{dp_B}{dt} . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Kompressibilität der flüssigen Phase nur dann von Bedeutung ist, wenn sehr hohe Blasenwandgeschwindigkeiten erreicht werden. Dies ist der Fall, wenn während des Blasenkollapses die Kugelsymmetrie über große Radienverhältnisse R_0/R erhalten bleibt. In technischen Anwendungen trifft die Annahme der Kugelsymmetrie in der Regel nicht zu, da diese aufgrund von festen Wänden, anderen Blasen etc. gestört wird. Zum asymmetrischen Blasenkol­laps wurden numerische Simulationen von PLESSET & CHAPMAN [84] durchgeführt. Die Studien belegen die Entstehung eines Mikrojets, der mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung von $100 - 1000 \text{ m/s}$ auf die Wand trifft. Dies führt zu Druckspitzen, sogenannten Wasserschlägen, welche die Festigkeit der eingesetzten Werkstoffe übersteigen können. Abbildung 1.4 zeigt die Dynamik einer implodierenden Dampfblase in Wandnähe. Eine anfängliche Einbuchtung der Blasenwand resultiert in einem gegen die Wand gerichteten Flüssigkeitsstrahl, dem Mikrojet.

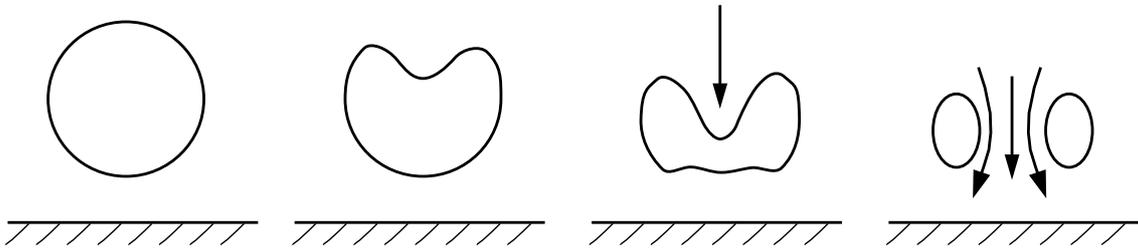


Abbildung 1.4: Ausbildung eines Mikrojets beim asymmetrischen Blasen­kollaps

CHAHINE ET AL. [15] berechnen den Kollaps einer aus mehreren Einzelblasen bestehenden Blasenwolke. Ein wesentliches Ergebnis ihrer Studie ist, dass die Blasen im Zentrum der Wolke quasi kugelsymmetrisch kollabieren, außer im Endstadium. Außerdem zeigte sich, dass die Blasenwechselwirkung das Blasenwachstum behindert und den Blasen­kollaps forciert.

1.2.2 Experimentelle Arbeiten

Schicht-, Blasen- und Wolkenkavitation

Die experimentelle Untersuchung kavitierender Strömungen ist ein wichtiger Bestandteil für das Verständnis der Kavitation und dient auch als Basis für die Entwicklung von numerischen Verfahren. Messungen von Auftrieb und Widerstand sowie von Wanddruckverteilung und Strömungsgeschwindigkeit werden in der Regel durch die Visualisierung der Strömung, beispielsweise mit Hochgeschwindigkeits-Videoaufnahmen, ergänzt. Charakteristische Merkmale der Kavitation, wie z.B. die disperse Blasenstruktur des Kavitationsgebietes oder das Auftreten eines Re-Entrant-Jets, konnten so identifiziert werden. Die Ergebnisse grundlegender experimenteller Untersuchungen werden im Folgenden kurz zusammengestellt.

Der Phasenanteil, die Blasengröße und die Strömungsgeschwindigkeiten bei **Schichtkavitation** wurden von STUTZ & REBOUD [120] untersucht. Die Messungen zeigen, dass der Druck im Kavitationsbereich etwa gleich dem Dampfdruck der Flüssigkeit ist. Die Stromlinien in der Nähe der Kavitationszone deuten darauf hin, dass die Strömung durch die Phasengrenzfläche hindurch geht. Im Bereich stromab des Kavitationsgebiets kommt es zu einer Rückströmung, dem sogenannten Re-Entrant-Jet, der bei kavitationsfreien Bedingungen nicht auftritt.

Einzelblasenkavitation wurde unter anderem von KUHN DE CHIZELLE ET AL. [63] mit Hilfe von Hochgeschwindigkeitsaufnahmen untersucht. Dabei wurde beobachtet, dass sich die Blasen verformen und teilen. Die Beschreibung des Blasenverhaltens bei Einzelblasenkavitation mit der Rayleigh-Plesset-Gleichung ist somit nicht ausreichend. Die Blasen bestehen aus wenigen, zum Teil sehr großen Blasen mit $R \cong 5\text{mm}$. Die Fluidqualität, insbesondere der Gasanteil, beeinflusst entscheidend die Anzahl und Größe der Kavitationsblasen, siehe LIU & BRENNEN [72]. Eine sehr geringe Keimanzahl in der Anströmung kann unter Umständen die Entstehung von Blasen- und Wolkenkavitation verhindern und direkt zur Bildung von Schichtkavitation führen. Durch Luftinjektion kann die Kavitation stabilisiert und deren Art beeinflusst werden [48].

KUBOTA ET AL. [62] untersuchten instationäre Strukturen von **Wolkenkavitation**. Dabei wurde die instationäre Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Kavitationswolke mit LDA⁷ gemessen. Die Untersuchungen ergaben, dass sich die Kavitationswolken mit geringerer Geschwindigkeit als die mittlere freie Strömungsgeschwindigkeit in der Strömung mitbewegen.

Die Experimente von KAWANAMI ET AL. [51] zeigen, dass der Re-Entrant-Jet am Ende des Kavitationsgebietes maßgeblich für die Ablösung der **Wolkenkavitation** verantwortlich ist. Die Geschwindigkeit des Re-Entrant-Jets liegt dabei in der Größenordnung der Geschwindigkeit der Hauptströmung. Das Ablösen kann durch ein kleines hervorstehendes Hindernis, das die Rückströmung blockiert, verhindert

⁷Laser-Doppler-Anemometry

werden. Dies bestätigen auch die Untersuchungen von HOFMANN [48] und HOFMANN ET AL. [49]. Die Hauptquelle für die Wirbelproduktion ist der Blasenkollaps am stromab gelegenen Rand des Kavitationsgebiets [41], [42]. Geringe Änderungen der Größe des Kavitationsgebiets können das Turbulenzniveau und die Grenzschicht hinter der Kavitationszone massiv verändern.

Laut CALLENAERE ET AL. [14] ist eine Ursache für den Re-Entrant-Jet ein hoher Druckgradient am Ende der Kavitationszone. Ist die Kavitationsschicht dick genug, kommt es aufgrund der Interaktion des Re-Entrant-Jets mit der Kavitation zur Wolkenablösung. Liegt die Dicke der Kavitationszone in der Größenordnung der Dicke des Re-Entrant-Jets, so bildet sich ein Zweiphasengemisch [34].

Die Wirkung der Kavitationsblasen auf die Grenzschicht der Strömung wurde von LI & CECCIO [69] untersucht. Sie finden, dass einzelne Blasen in Wandnähe lokal turbulente Gebiete verursachen können, welche wiederum Teile der anliegenden Schichtkavitation wegreißen können. Auch FRANC & MICHEL [35] stellen eine starke Interaktion zwischen anliegender Kavitation und Grenzschicht fest.

Maßstabeffekte

Unter dem Begriff Maßstabeffekte versteht man im Allgemeinen die Abweichung des Prototyps im Betriebs- und Kavitationsverhalten vom Verhalten des Modells bzw. von auf Überlegungen der klassischen Ähnlichkeitsmechanik beruhenden Vorhersagen. Die wichtigsten klassischen Ähnlichkeitskennzahlen zur Beschreibung kavitierender Strömungen sind die Reynolds-Zahl Re und der Kavitationsbeiwert σ . Die Konstanz beider Kennzahlen gewährleistet jedoch nicht die Übertragbarkeit der Ergebnisse vom Prototyp auf das Original. Dafür werden mehrere Ursachen genannt. Eine wesentliche ist die **Fluidqualität**, siehe ARNDT [1] und KELLER [53], [54].

Die Qualität eines Fluids kann anhand dessen Zerreißfestigkeit oder mittels Messung des Keimgehalts quantitativ bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Fluidqualität als weiteren Parameter entwickelte KELLER [54], [56] besondere Maßstabgesetze. Diese wurden von AWAD [5] bezüglich des Einflusses der Drehzahl auf Pumpen übertragen.

- Fluidqualitätseffekte:

Der Keimgehalt einer Flüssigkeit beschränkt maßgeblich die ertragbaren Zugspannungen und wirkt sich somit direkt auf den kritischen Kavitationsbeiwert σ_{ic} aus, bei dem Kavitation einsetzt. Die Zerreißfestigkeit des Fluids wird besonders vom Anteil an gelösten bzw. ungelösten Gasen bestimmt. Schwebstoffe sind somit nur von untergeordneter Bedeutung. Die ertragbaren Zugspannungen nehmen mit zunehmendem Gasgehalt stark ab [52]. Der Einfluss der Fluidqualität auf den Wirkungsgrad einer hydraulischen Strömungsmaschine ist allerdings gering [43].

Der Keimgehalt des Fluids wirkt sich auch auf den Typ der Kavitation aus, wie Experimente von LIU & BRENNEN [72] und LI & CECCIO [69] belegen. Basierend auf den Arbeiten von KELLER zu den bei Kavitationsbeginn auftretenden Maßstabeffekten untersuchten AWAD ET AL. [6] und STRIEDINGER [118] den Einfluss der Wasserqualität und der Rotationsgeschwindigkeit auf den Kavitationsbeginn bei Kreiselpumpen unterschiedlicher Laufradformen. Über die Messung der Zerreifhigkeit des Wassers mit Hilfe der Wirbeldsenmethode [52] wurde die Fluidqualität in Abhängigkeit des Systemdruckes und Gasstigungsgrades sowie der Temperatur bestimmt. In gasgesttigtem Wasser ist nur eine sehr geringe Zerreißfestigkeit zu erzielen. Bei Untersättigung nimmt die Zerreißfestigkeit größere Werte an. Eine aufwendigere Methode zur Bestimmung der Fluidqualität ist die Messung des Keimgehalts, wie sie z.B. von LIU & BRENNEN [72] durchgeführt wurde.

- Reynolds-Zahl-Effekte:

In zahlreichen Experimenten wird der kritische Kavitationsbeiwert mit der Reynolds-Zahl korreliert. Es zeigt sich die Tendenz, dass mit größer werdender Reynolds-Zahl der kritische Kavitationsbeiwert ansteigt [54]. Mit Zunahme bzw. Abnahme der Reynolds-Zahl treten Größen- bzw. Geschwindigkeitsmastabeffekte auf, je nachdem, ob die Reynolds-Zahl durch Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit oder durch Vergrößerung der geometrischen Abmessungen des umströmten Körpers steigt. Nach KELLER [54] wächst der kritische Kavitationsbeiwert mit dem Quadrat der Geschwindigkeit an, $\sigma_i \sim U^2$, aber nur mit der Wurzel der Länge, $\sigma_i \sim \sqrt{L}$. Im Hinblick auf die Übertragbarkeit von Messergebnissen bei kavitierenden Strömungen ist daher eine konstante Reynolds-Zahl eine weder notwendige noch hinreichende Bedingung für die Übertragbarkeit der Ergebnisse.

- Turbulenzeffekte:

Durch die Turbulenz der Anströmung werden lokale Druckschwankungen verursacht, deren typische Amplituden im Bereich von $\Delta\sigma_{Tu} = \pm(0.01 - 0.05)$ liegen [43]. Die Auswirkung der Turbulenz auf die Kavitation ist vernachlässigbar, wenn $|\Delta\sigma_{Tu}| \ll |\sigma_{min}|$ ist. Mit σ_{min} wird dabei der niedrigste Kavitationsbeiwert im Strömungsfeld bezeichnet.

- Viskosittseffekte:

Die steigende Viskosität eines Fluids reduziert den kritischen Kavitationsbeiwert, da sie das Blasenwachstum verlangsamt, siehe auch Kapitel 1.2.1. Der Einfluss der Viskosität auf den kritischen Kavitationsbeiwert ist besonders bei Strömungen mit Ablösung von Bedeutung [43]. Durch die höhere Viskosität des Fluids wird die Wirbelbewegung in einer abgelösten Strömung gebremst und das Druckminimum im Wirbelkern abgebaut. Bei anliegender Strömung bestimmt die erhöhte Viskosität direkt die Dicke der Grenzschicht und damit die Möglichkeit einer Ablösung [13].

- Thermische Effekte:

Dieser Effekt beruht auf der Reduktion der Wachstums- bzw. Kollaps- geschwindigkeit der Blasen [13], [43]. Die Wirkung der Fluidtemperatur auf die Entstehung der Kavitation wurde bislang noch nicht durch systematische Messungen dokumentiert. Aufgrund von blasendynamischen Überlegungen wird erwartet, dass sich Kavitationseffekte mit zunehmender Temperatur vermindern. Thermische Effekte hängen von den Stoffeigenschaften wie der Dichte, der Wärmekapazität, der latenten Wärme und der Wärmeleitung des Fluids ab. Dies erschwert die systematische experimentelle Untersuchung dieses Faktors.

Experimentelle Untersuchung von Kavitation in Kreiselpumpen

Im hydraulischen Strömungsmaschinenbau beschränkte sich die Kavitationsuntersuchung zunächst auf die Analyse der Auswirkung der Strömungskavitation auf das Betriebsverhalten von Kreiselpumpen. Dabei standen unterschiedliche Aspekte im Mittelpunkt, wie das Saugverhalten der Pumpe, die geometrische Gestaltung der Laufradschaufeln, die erosiven Eigenschaften der Kavitation, die Auswirkung der Spaltströmung und der Verlauf der NPSH-Absenkkurven sowie der Einfluss der Wasserqualität. Einen Überblick über die Ergebnisse geben die entsprechenden Kapitel in den Büchern von PFLEIDERER & PETERMANN [83] und RAABE [87]. Die Auswirkung der Kavitation wird dabei üblicherweise durch Ermittlung der integralen Betriebsgrößen Förderhöhe und Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Kavitationszuständen erfasst, so z.B. bei DREISS [25]. Die Wechselwirkung zwischen Kavitation und Teillastphänomenen untersuchte SPOHNHOLTZ [113].

Basierend auf Arbeiten von KELLER [52],[53],[54],[56] zu den bei Kavitationsbeginn auftretenden Maßstabeffekten, siehe Kapitel 1.2.1, untersuchten AWAD [5] und STRIEDINGER [118] den Einfluss von Wasserqualität und Drehzahl auf den Kavitationsbeginn bei Kreiselpumpen. Die Wasserqualität wurde dabei über die Messung der Zerreißfestigkeit des Wassers mit Hilfe der Wirbeldüsenmethode [52] bestimmt. Es zeigt sich, dass sowohl die Wasserqualität als auch die Drehzahl einen signifikanten Effekt auf den Kavitationsbeginn der Pumpe haben. Die klassischen Maßstabgesetze lassen sich nicht direkt auf Kreiselpumpen übertragen.

Thermische Effekte wurden von ARNDT [1] beschrieben. STEPANOFF [114] versuchte mit Hilfe der „B-Faktor“- Methode den Einfluss der Fluideigenschaften mit ihrer Auswirkung auf das Kavitationsverhalten zu korrelieren.

Alle oben erwähnten Untersuchungen erfassen die Kavitation nur indirekt über ihre Auswirkung auf die Förderparameter der Strömungsmaschine. Die Fragestellung nach den Auswirkungen auf die Förderparameter bekommt ihre Bedeutung aus der Tatsache, dass als Kriterium für ein noch tolerierbares Maß an Kavitation in der industriellen Praxis am häufigsten das eines kavitationsbedingten Förderhöhenabfalls um 3% ($NPSH_{3\%}$) angewandt wird. Das Kriterium des kavitationsbedingten Förderhöhenabfalls ist allerdings unter Vorbehalt zu betrachten, da es die Mechanismen

im Saugbereich der Maschine, also dem Bereich, in dem die Kavitation stattfindet, in Beziehung mit der integralen Förderhöhe der Gesamtmaschine setzt. Der Einfluss der Kavitationserscheinung auf die Förderhöhe und somit die Energieumsetzung der Pumpe ist außerordentlich komplex. Die Kenntnis des Förderhöhenabfalls erlaubt somit nur bedingt Rückschlüsse auf die Art der Kavitation selbst. Ebenso ist die Auswirkung der Kavitation auf das Betriebsverhalten nicht unbedingt direkt mit ihrer erosiven Auswirkung auf die Maschine selbst koppelbar. Die durch Kavitation verursachte Schädigung kann bereits vor Eintreten von Förderhöhenabfall ein signifikantes Ausmaß erreichen, siehe auch [83].

Aus diesen Gründen wurde in den letzten Jahren die Kavitation in Laufradschaufeln hydraulischer Maschinen verstärkt direkt experimentell untersucht, was allerdings wegen der Messdatenübertragung vom rotierenden auf das stationäre System nicht unproblematisch ist. Messungen des instationären Schaufeldruckverlaufs im rotierenden System bei einer Kreiselpumpe niedriger spezifischer Drehzahl wurden von DREISS [25] vorgenommen, wobei die Übertragung der Messwerte per Funk erfolgte. FRIEDRICHS [38], [36], [37] machte mit Hilfe einer digitalen Videokamera Aufnahmen einer in einem radialen Pumpenlaufrad kavitierenden Strömung. Dabei wurde auch das Phänomen der „rotierenden“ oder „alternierenden“ Kavitation untersucht. Die Kavitationsgebiete in benachbarten Schaufeln beeinflussen sich dabei wechselseitig. Rotierende Kavitation tritt vor allem bei Teillast auf. TSUJIMOTO [123] beobachtete verschiedene Arten von rotierender Kavitation in Inducern für Turbopumpen.

1.2.3 Numerische Methoden zur Kavitationssimulation

Mit dem Aufkommen immer leistungsfähigerer und preisgünstigerer Rechnersysteme hat die numerische Strömungsberechnung in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen. Bei der Auslegung und Optimierung hydraulischer Strömungsmaschinen gehört sie mittlerweile zum Stand der Technik, siehe z.B. BADER [9], SCHILLING [97], SCHILLING ET AL. [98] oder MAURER ET AL. [75].

Dies gilt jedoch noch nicht für die Berechnung kavitierender Strömungen. Die Schwierigkeiten bei der numerischen Simulation von Kavitation resultieren aus den enormen Unterschieden der in der kavitierenden Strömung auftretenden Längen- und Zeitskalen. Beispielsweise variiert die charakteristische Längenskala bei einer kavitierenden Strömung in einer Kreiselpumpe zwischen dem Radius eines Kavitationskeimes $L_{char} \sim 10^{-5} m$ und der Pumpenabmessungen $L_{char} \sim 10^0 m$. Die Zeitskalen liegen zwischen $t_{char} \sim 10^{-5} s$ für den Blasenkollaps und der Durchströmdauer der Pumpe $t_{char} \sim 10^0 s$. Für eine korrekte räumliche und zeitliche Auflösung wären Berechnungsgitter mit 10^{15} Zellen bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-6} s$ notwendig. Dies liegt noch weit außerhalb der Möglichkeiten der heute verfügbaren Rechner- und Speicherleistung, so dass die Simulation kavitierender Strömungen nur unter stark vereinfachenden Annahmen möglich ist. Neben diesen prinzipiellen Problemen liegen die Schwierigkeiten bei der Simulation kavitierender Strömungen in der korrekten

Modellierung des Phasenübergangs sowie in der numerischen Behandlung der bei Kavitation in der Strömung auftretenden Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasserdampf.

Die einfachste Möglichkeit zur Vorhersage von Kavitation ist die Identifikation von Kavitationsgebieten mit Hilfe von Dampfdruckisobaren im Strömungsfeld der einphasigen Berechnung. Damit lässt sich jedoch nur ermitteln, ob mit Kavitation zu rechnen ist oder nicht. Die Auswirkungen der Kavitation auf Auftrieb und Widerstand, bzw. bei Pumpen auf die Förderhöhe und den Wirkungsgrad können so nicht erfasst werden. Aus diesem Grund wurde versucht, Kavitationsphänomene mit Methoden der Simulation zweiphasiger Strömungen zu berechnen und somit auch die Auswirkung von Kavitation auf das Strömungsfeld zu erfassen. In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Kavitationsmodelle und numerischer Methoden entwickelt, die je nach Anwendungsfall Vor- und Nachteile aufweisen. Unabhängig von der Modellierung des Phasenübergangs gibt es prinzipiell zwei unterschiedliche Methoden zur Simulation von Mehrphasenströmungen, die Interface-Tracking-Methoden und die sogenannten Continuum-Methoden.

Interface-Tracking-Methoden

Diese Methoden basieren auf der Annahme, dass zwischen den beiden Phasen Flüssigkeit und Dampf eine fest definierte Phasengrenze liegt. Bei der Berechnung einer kavitierenden Strömung wird die Phasengrenze mit Hilfe der Dampfdruck-Isobaren ermittelt. Es wird dabei angenommen, dass das Kavitationsgebiet einen konstanten Druck gleich dem Dampfdruck der Flüssigkeit hat. Physikalisch ist dies nicht korrekt, und es zieht numerische Probleme nach sich. Es ist deshalb notwendig, ein empirisches Schließungsmodell, ein sogenanntes „wake-model“ einzuführen, welches den Druckrückgewinn am Ende des Kavitationsgebietes wiedergibt. Die Strömung wird nur für die flüssige Phase um das Kavitationsgebiet herum berechnet. Die Lokalisierung der Phasengrenze mit der Dampfdruck-Isobaren ist ein iterativer, aber nicht zeitechter Prozess, weshalb mit dieser Methode nur stationäre Phänomene untersucht werden können. Da nur die flüssige Phase berechnet wird, hat die Methode den Vorteil, dass der Dichteunterschied zwischen Wasser und Wasserdampf ohne Bedeutung ist.

Die Annahme einer fest definierten Phasengrenze ist noch am ehesten bei Schichtkavitation erfüllt. Deswegen werden Interface-Tracking Methoden vor allem zur Simulation dieser Kavitationsart verwendet. CHEN & HEISTER [16] berechnen mit dieser Methode die stationär kavitierende Strömung um verschiedene Rotationskörper, DUPONT & AVELLAN [27] untersuchen das Kavitationsgebiet an der Vorderkante eines NACA009-Profiles mit Hilfe eines Potential- bzw. eines Navier-Stokes-Verfahrens. Dabei wird die Form des Kavitationsgebiets mit der Potentialmethode ermittelt und dann mit dem Navier-Stokes-Verfahren korrigiert. Eine genaue experimentelle Überprüfung zeigt jedoch, dass diese Methode den Ort des Blasenzusammenfalls bei höheren Reynolds-Zahlen nicht vorhersagen kann.

Anwendungen von Interface-Tracking-Methoden zur Berechnung kavitierender Pumpenströmungen sind wegen der komplexen Geometrie selten. SCHÜTTE [105] verwendet ein sogenanntes Stromlinienverschiebungs-Verfahren für die zweidimensionale Berechnungen einer reibungsfreien Laufradströmung bei Ausbildung einer stationären Kavität. Die Ergebnisse sind von DREISS & SCHÜTTE [26] im Vergleich zum Experiment dargestellt. Die Länge des Kavitationsgebietes wird nur bei geringem Förderhöhenabfall von der Berechnung richtig wiedergegeben.

Interface-Tracking-Methoden setzen eine scharfe Phasengrenze voraus und können nur zur Berechnung von Schichtkavitation verwendet werden, jedoch nicht zur Beschreibung von Blasenablösung. Ferner sind sie bislang nur auf ebene 2D oder axi-symmetrische Fälle angewendet worden. Sie sind deshalb für die Simulation kavitierender Strömungen in Kreiselpumpen kaum geeignet.

Interface-Capturing- oder Continuum-Methoden

Im Gegensatz zu den Interface-Tracking-Methoden wird bei Continuum-Methoden die Strömung beider Phasen berechnet. Vernachlässigt man dabei die Relativbewegung zwischen beiden Phasen, dann können beide über eine Rechenzelle gemittelt und so als ein Fluid mit variablen Stoffeigenschaften behandelt werden. Stoffeigenschaften wie z.B. die Dichte können dabei in Abhängigkeit des Dampf- bzw. des Flüssigkeitsgehalts der Zelle zwischen den Stoffeigenschaften des Dampfes und denen der reinen Flüssigkeit variieren.

Die mathematische Beschreibung der Blasenströmung benötigt, abgesehen von der Modellierung des Phasenübergangs, keine zusätzlichen Gleichungen im Vergleich zur Simulation einphasiger Strömungen. Deshalb sind „Continuum“ Methoden numerisch sehr effizient. Wegen der Berücksichtigung beider Phasen treten bei der Berechnung aber Dichtesprünge an der Phasengrenze auf, die numerische Probleme aufwerfen und die Verwendung sogenannter „shock-capturing“ oder „interface-capturing“-Methoden bei der Diskretisierung erfordern. Continuum Methoden sind nicht auf die Modellannahme einer scharfen Phasengrenze beschränkt und können somit auch zur Simulation von Blasen- oder Wolkenkavitation verwendet werden.

Der Phasenübergang wird bei Continuum-Methoden durch eine geeignete Beziehung zwischen der variablen Dichte des Wasser-Dampf-Gemisches und den anderen Zustandsgrößen beschrieben. Wenn diese Beziehung nicht nur für die Verdampfung, sondern auch für die Kondensation gilt, ist keine Schließungsbedingung für den stromab gelegenen Rand des Kavitationsgebietes erforderlich. Continuum Methoden können auch zur Simulation instationär kavitierender Strömungen verwendet werden, da der Phasenübergang durch direkte Kopplung mit dem Strömungslöser zeitecht simuliert werden kann. Da der Phasenübergang von einer Reihe physikalischer Phänomene wie Wärmeübergang, Oberflächenspannung, Viskosität, Kompressibilität, Blasenwechselwirkung und turbulenten Einflüsse abhängt, existieren eine Vielzahl von verschiedenen Kavitationsmodellen, die im Wesentlichen in drei Kategorien eingeteilt werden können:

- Kavitationsmodelle basierend auf einem Zustandsgesetz

Hier wird der Phasenübergang mit einem Zustandsgesetz beschrieben. Einfache Zustandsgesetze sind aus der Thermodynamik bekannt und liefern einen Zusammenhang zwischen Dichte und Druck [115]. Das Zustandsgesetz muss physikalisch sinnvoll sein und darf das numerische Lösungsverfahren nicht destabilisieren. Die in der Literatur verwendeten Zustandsgesetze lassen sich mit dem Verhältnis zwischen der Flüssigkeits- und der Dampfdichte oder mit der Breite bzw. mit dem Gradienten der Übergangsfunktion charakterisieren. Die Kopplung eines Zustandsgesetzes mit einer zweidimensionalen Strömungsrechnung wurde zuerst von DELANNOY & KUENY [24] angewandt. Das Zustandsgesetz basiert dabei auf einer Sinusfunktion und beschreibt den Übergang der Gemischdichte von der Fluidichte zur Dampfdichte in Abhängigkeit vom Druck $\rho = \rho(p)$. Es wird eine instationäre kavitierende Strömung in einem Kanal mit konvergent-divergent verlaufenden Wänden untersucht. Die Berechnungen zeigen ein zyklisches Anwachsen des Kavitationsgebietes, die Bildung eines Re-Entrant-Jets, der das Kavitationsgebiet abschneidet sowie das Abschwimmen von Kavitationsgebieten. Die Berechnungen wurden unter der Annahme einer reibungsfreien Strömung durchgeführt, die Ausbildung der Rückströmung wurde also nicht durch Reibungseffekte verursacht.

REBOUD ET AL. [89] und COUTIER-DELGOSHA ET AL. [20] benutzen dieses Modell, um die kavitierende Strömung in zwei unterschiedlichen Kanalgeometrien zu simulieren. In Abhängigkeit von der Geometrie tritt in einen Fall ein quasi-stationäres Kavitationsgebiet, im anderen Fall ein instationär oszillierendes Kavitationsverhalten auf. In beiden Fällen stimmen die Simulationsergebnisse gut mit dem Experiment überein.

SCHMIDT ET AL. [101],[102] verwenden eine logarithmische Funktion für das Zustandsgesetz. Im Gegensatz zu dem Verfahren von DELANNOY & KUENY, bei dem die beiden Phasen inkompressibel sind, verwenden SCHMIDT ET AL. ein kompressibles Verfahren. Auch VENTIKOS & TZABIRAS [125] betrachten beide Phasen als kompressibel, verwenden aber ein druckbasiertes Lösungsverfahren.

- Auf blasendynamischen Betrachtungen basierende Kavitationsmodelle

Kavitation wird als Wachstums- und Kollapsprozess einzelner Dampfblasen in einem sich ändernden Druckfeld betrachtet. Da es wegen der hohen Anzahl an Kavitationsblasen nicht möglich ist, jede einzelne aufzulösen, werden alle Blasen einer Rechenzelle aufsummiert und gleich behandelt. Man spricht dabei auch von „homogenen“ Kavitationsmodellen, da dieses Aufsummieren voraussetzt, dass die Blasen homogen in der Rechenzelle verteilt und klein gegenüber den Abmessungen der Rechenzelle sind. Der Radius der Blasen ist mit dem Phasenanteil der Dampfphase korreliert. Mit diesem Radius wird das Wachstum bzw. der Kollaps der Blasen in Abhängigkeit von den Strömungsgrößen berechnet. Hieraus ergibt sich die Verdampfungs- und die neue Dichte

des Gemisches. Die Gleichungen, die die Blasendynamik beschreiben, wurden schon in Kapitel 1.2.1 dargestellt. Die auf der Blasendynamik beruhenden Kavitationsmodelle können die Keimkonzentration in der Zuströmung als Parameter berücksichtigen. Allerdings haben sie den Nachteil, dass mit steigendem Dampfgehalt und wachsendem Blasenradius die Annahme einer homogenen Blasenverteilung ihre Gültigkeit verliert und somit auch die Wachstumsbeziehungen streng genommen nicht mehr gelten. Dies steht auch in direktem Zusammenhang mit der Größe der Rechenzellen.

KUBOTA ET AL. [61] verwendet die Rayleigh-Plesset-Gleichung, Gleichung 1.4, um den Phasenanteil in Abhängigkeit vom Blasenradius zu bestimmen. Aus dem Phasenanteil wird dann die Gemischdichte berechnet. Die zweidimensionale instationär kavitierende Strömung um ein NACA0015-Profil wird bei unterschiedlichen Anstellwinkeln simuliert. Das Modell ist in der Lage, das zyklische Abschwimmen von Blasenwolken am Ende des Kavitationsgebietes zu reproduzieren. Aufgrund der Zeitabhängigkeit der Rayleigh-Plesset-Gleichung kann das Modell aber nur für instationär kavitierende Strömungen benutzt werden. Zudem neigt das Verfahren wegen der hohen Abhängigkeit zwischen Druck und Dichte durch die direkte Kopplung zu Instabilitäten. Auch SCHULZ [104] sowie CHEN & HEISTER [18] verwenden die Rayleigh-Plesset-Gleichung zur Beschreibung des Blasenwachstums. CHEN & HEISTER [18] berechnen mit ihrer Methode die instationär kavitierende Strömung um verschiedene Rotationskörper. Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass die Amplitude der durch die Kavitation verursachten Druckfluktuationen von dem in der Berechnung vorgegebenen Keimgehalt der Strömung abhängt. Die Hauptfrequenz bleibt davon jedoch nahezu unabhängig.

Da es sich bei Gleichung 1.4 um eine nichtlineare Differentialgleichung handelt, deren Lösung numerisch aufwendig ist, wird häufig die vereinfachte Form unter Vernachlässigung von Trägheit, Oberflächenspannung und Viskosität verwendet:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{p_B - p_\infty}{|p_B - p_\infty|} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_B - p_\infty|}{\rho_l}} \quad (1.6)$$

Gleichung 1.6 wird als Rayleigh-Gleichung bezeichnet. Diese Gleichung dient in den Arbeiten von ATHAVALE ET AL. [3], SINGAL ET AL. [109], SAUER [94], SAUER & SCHNERR [95], [103] sowie YUAN & SCHNERR [130] zur Berechnung des Blasenwachstums. Dabei benutzen SAUER [94], SAUER & SCHNERR [95], [103] und YUAN & SCHNERR [130] eine modifizierte Volume-of-Fluid Methode in Verbindung mit der Rayleigh-Gleichung als Wachstumsgesetz. Am Beispiel einer instationär kavitierenden Strömung um ein NACA 0015 Profil bei 6° Anstellung wird der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen auf das Berechnungsergebnis im Vergleich zum Experiment gezeigt. ATHAVALE ET AL. [3] und SINGAL ET AL. [109] leiten aus der Rayleigh-Gleichung je einen Term zur Beschreibung des Blasenwachstums und zur Beschreibung des Blasenkollapses ab.

- Empirische Kavitationsmodelle

Neben den auf der Blasendynamik beruhenden Methoden und den Zustandsgesetz-Methoden zur Beschreibung des Phasenübergangs, welche jeweils einen physikalischen Hintergrund haben, gibt es eine Reihe von Autoren, die den Phasenübergang lediglich abhängig von der Differenz zwischen dem lokalen statischen Druck und dem Dampfdruck ($p - p_v$) machen. Die Methoden basieren auf der von CHEN & HEISTER [17] angegebenen Gleichung für die Änderung der Dichte

$$\frac{D\rho}{Dt} = C (p - p_v). \quad (1.7)$$

Dabei ist C eine empirische, mit Einheiten behaftete Konstante. Zunächst erscheint die Größe von C , durch die die Dynamik der Dichteänderung bestimmt wird, rein zufällig. Ist C jedoch sehr groß, hat also eine kleine Änderung des Druckes eine große Dichteänderung zur Folge, was wiederum durch die Verknüpfung mit den Strömungsgleichungen zu einer großen Druckänderung führt. So sorgt die starke Kopplung von Druck und Dichte dafür, dass der Druck im Kavitationsgebiet genau auf Dampfdruckniveau gehalten wird. Ab einer ausreichenden Größe von C ist das Rechenergebnis von der Konstanten unabhängig.

KUNZ ET AL. [65] [64] verwenden zur Beschreibung des Blasenwachstums bzw. des Blasenkollapses eine ähnliche Methode mit unterschiedlichen empirischen Konstanten für das Blasenwachstum und den Blasenkollaps, die durch Vergleich mit experimentellen Daten ermittelt wurden.

ŠENOČAK & SHYY [107] benutzen ein Druckkorrektur-Verfahren und zur Kopplung von Druck, Geschwindigkeit und Dichte die Beziehung

$$\rho' = C (1 - \alpha_l) P' \quad (1.8)$$

wobei P' die Druckkorrektur und α_l der Volumenanteil der Flüssigkeit ist, der mit Hilfe einer Transportgleichung mit empirischen Quelltermen bestimmt wird. Durch die Änderung der Gemischdichte wird die Druckkorrekturgleichung zu einer Konvektions-Diffusions-Gleichung. Die einphasige inkompressible Druckkorrektur-Gleichung ist eine reine Diffusions-Gleichung. Sowohl die Druckkorrektur als auch die Interpolation der Massenflüsse werden bei ŠENOČAK & SHYY wie bei kompressiblen Strömungen behandelt, was zu verbesserten Konvergenzraten führt.

Einen anderen Weg verfolgen AVVA & SINGHAL [4]. Deren Vorgehensweise basiert auf der Annahme, dass es sich bei Kavitation um einen Phasenübergang bei konstanter Enthalpie handelt. Sie lösen zusätzlich zu den Impulsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung eine Transportgleichung für die Mischungsenthalpie. Der Dampfgehalt wird anhand der berechneten Mischungsenthalpie und der lokal in der Rechenzelle herrschenden thermodynamischen Größen berechnet. Dieses sogenannte „Constant Enthalpy Vaporisation“ (CEV)-Modell ist in dem kommerziellen CFD-Code CFX-TASCflow implementiert.

Die beschriebenen Continuum-Modelle unterscheiden sich neben der Beschreibung des Phasenübergangs auch in Hinblick auf die numerische Koppelung des Kavitationsmodells mit den Erhaltungsgleichungen. Es ist zum einen möglich, das Kavitationsmodell direkt mit den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls mit einer Euler-Euler-Betrachtung zu verbinden. Die zweiphasige Strömung wird dabei als ein kompressibles Fluid behandelt, dessen Dichte im Bereich des Dampfdrucks sehr stark vom Druck abhängt. Die auf direkter Koppelung basierende Vorgehensweise wird von DELANNOY & KUENY [24] bzw. REBOUD ET AL. [89] durch Vorgabe eines barotropischen Zustandsgesetzes $\rho = \rho(p)$ angewandt. Im Bereich der auf Blasendynamik beruhenden Modelle benutzen KUBOTA ET AL. [61] und SCHULZ [104] die direkte Koppelung.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, beide Phasen getrennt zu betrachten und den Phasenübergang mit Hilfe einer sogenannten Ratengleichung zu beschreiben. Dies bedeutet, dass nicht der Zustand, sondern die Änderung des Zustandes vom Kavitationsmodell beschrieben wird. Die Ratengleichung stellt eine zusätzliche Transportgleichung für den Volumen- oder Massenanteil einer der beiden Phasen dar. Eine Ratengleichung wird von CHEN & HEISTER [18] und SAUER & SCHNERR [94],[95], [103] im Bereich der Blasendynamik verwendet. MERKLE ET AL. [77] verwenden sowohl die direkte Koppelung des Zustandsgesetzes mit den Impulsgleichungen als auch die Modellierung des Phasenübergangs mit Hilfe einer Ratengleichung. Beide Modelle führen nach Angaben der Autoren zu realistischen Ergebnissen. Die Modellierung des Phasenübergangs mit Hilfe einer Ratengleichung erweist sich jedoch als numerisch stabiler.

Numerische Simulation kavitierender Strömungen in Kreiselpumpen

Zur Simulation kavitierender Pumpenströmungen wurden bislang nur wenige der beschriebenen Verfahren angewandt. ATHAVALÉ ET AL. [3] simulieren mit ihrem „full cavitation model“ die dreidimensionale reibungsbehaftete kavitierende Strömung in einer Axialpumpe, einer Radialpumpe und einem Inducer zur Förderung von flüssigem Sauerstoff. Eine Besonderheit dieses Modells ist die Berücksichtigung des Einflusses der turbulenten Druckschwankung auf die Kavitation mit Hilfe einer Erhöhung des kritischen Drucks $p_{krit} = 0.39 \cdot \rho \cdot k$. Die Berechnungsergebnisse sind in [3] aber nur qualitativ dargestellt und nicht experimentell überprüft.

VISSER [126] benutzt das „Constant Enthalpy Vaporisation“(CEV)-Modell des kommerziellen Programms CFX-TASCflow, um die kavitierende Strömung in einer Kreiselpumpe mit und ohne Spirale zu simulieren. Dabei wird der Förderhöhenabfall für verschiedene Volumenströme berechnet. Der Förderhöhenabfall von 3% wird mit experimentellen Daten verglichen und zeigt gute Übereinstimmung.

Auch DUPONT & OKAMURA [28] benutzen das CEV-Modell. Sie vergleichen es mit anderen kommerziell verfügbaren Kavitationsmodellen und außerdem mit einer analytischen Methode zur Abschätzung des Förderhöhenabfalls, siehe auch DUPONT &

AVELLAN [27]. Die analytische Methode zeigt für geringen Förderhöhenabfall sehr gute Übereinstimmung mit dem numerischen Verfahren, bei wesentlich geringerer Rechenzeit. Die mit den drei verglichenen kommerziellen Programmen erzielten Ergebnisse weisen dagegen sehr große Unterschiede auf.

MEDVITZ ET AL. [76] und KUNZ ET AL. [65] bestimmen mit ihrem Verfahren in einer quasi-3D Analyse den Förderhöhenabfall einer halbaxialen Kreiselpumpe. Der Förderhöhenabfall wird aber nur im Designpunkt mit dem experimentell ermittelten verglichen.

WURSTHORN [128] analysiert die kavitierende Strömung in einer 2D-Pumpe mit Hilfe des kommerziellen CFD-Codes StarCD, in den das Kavitationsmodell von SCHMIDT ET AL. [101],[102] integriert ist. Dabei mussten die Modellparameter des Kavitationsmodells erst angepasst werden, um überhaupt sinnvolle und stabile Simulationen durchführen zu können. Wesentliche Effekte der Kavitation, beispielsweise der Förderhöhenabfall, konnten im Vergleich mit dem Experiment reproduziert werden. Allerdings werden die Kavitationszonen bei allen durchgeführten Simulationen zu klein vorhergesagt.

COURTIER-DELGOSHA ET AL. [21] verwenden das von DELANNOY & KUENEY [24] entwickelte barotropische Kavitationsmodell zur Simulation der kavitierenden Strömung in einem Inducer sowie einer radialen und einer halbaxialen Kreiselpumpe. Neben der Berechnung des Einflusses der Kavitation auf das Förderverhalten wird auch die veränderte Schaufelanströmung bei Kavitation untersucht. Die Übereinstimmung des berechneten Förderhöhenabfalls mit dem Experiment ist bei der Radialpumpe sehr gut. Allerdings wird der NPSH-Wert des Steilabfalls beim Inducer nicht richtig berechnet.

FROBENIUS ET AL. [40] und SCHILLING & FROBENIUS [99] verwenden das blasendynamische Kavitationsmodell von SAUER & SCHNERR [95], [103] zur Simulation der kavitierenden Strömung in einer Kreiselpumpe niedriger spezifischer Drehzahl. Der für verschiedene Volumenströme berechnete Förderhöhenabfall stimmt im Bereich des Nennvolumenstroms gut mit experimentellen Ergebnissen überein. Außerdem werden berechnete und gemessene Schaufeldruckverteilungen verglichen. Es ist zu beobachten, dass die Kavitationszonen in der Simulation stets kleiner bzw. kürzer bestimmt werden als im Experiment. Dies deutet darauf hin, dass die von SAUER verwendete Beschreibung des dynamischen Blasenwachstums für stationäre Simulationen so nicht angewandt werden kann.

Die gleiche Laufradgeometrie wird von NOHMI ET AL. [81] und NOHMI & GOTO [80] experimentell und numerisch untersucht. Zur Strömungssimulation wird CFX-TASCflow mit dem CEV-Kavitationsmodell verwendet. Die Abweichung zwischen den gemessenen und berechneten Förderhöhenabfallkurven sind im Nennpunkt noch gering, bei Überlast dagegen groß. Die Autoren erwähnen außerdem große Konvergenzprobleme.

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Simulation kavitierender Strömungen in hydraulischen Strömungsmaschinen, das als Modul eines numerischen Entwicklungssystems für Strömungsmaschinen im industriellen Entwurfs- und Optimierungsprozeß eingesetzt werden kann.

Der zu entwickelnde CFD-Code soll eine realitätsnahe Berechnung der kavitierenden Strömung ermöglichen. Wesentliche physikalische Effekte, wie das Auftreten des Re-Entrant-Jets und die Wolkenablösung, sind zu erfassen. Dies lässt sich nur mittels einer zeitechten, instationären Simulation erreichen.

Damit der CFD-Code darüber hinaus als Baustein eines Entwicklungssystems für hydraulische Strömungsmaschinen einsetzbar ist, muss das Verfahren auch zur stationären Simulation kavitierender Strömungen anwendbar sein. Nur so lassen sich während des Design-Prozesses innerhalb einer vertretbaren Zeitdauer Aussagen über das Auftreten von Kavitation und deren Einfluss gewinnen. Das zu entwickelnde Verfahren soll in der Lage sein, das Kavitationsverhalten, insbesondere die kavitationsbedingte Änderung des Betriebsverhaltens von Strömungsmaschinen mit einer für die praktische Anwendung hinreichenden Genauigkeit vorherzusagen.

Als Basis-Code dient ein von SKODA [110] entwickeltes Navier-Stokes-Verfahren. Zunächst wird das blasendynamische Kavitationsmodell von SAUER [94] in diesen Code implementiert. Um den gestellten Anforderungen gerecht zu werden, kommt ein implizites 3-Level-Zeitschrittverfahren zur Anwendung. Dadurch ist der Zeitschritt nicht limitiert und das Verfahren kann sowohl zur stationären als auch zur instationären, zeitechten Simulation angewendet werden.

Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens soll anhand zweier Testfälle, für die detaillierte experimentelle Daten vorliegen, nachgewiesen werden. Dabei sollen vor allem lokale Strömungsgrößen, wie die Geschwindigkeit oder der Volumenanteil der Dampfphase, mit den im Experiment ermittelten Werten verglichen werden. Außerdem wird der Einfluss der Turbulenzmodellierung und der Diskretisierung auf die Kavitationssimulation untersucht.

Die Anwendung des entwickelten Verfahrens erfolgt am Beispiel der kavitierenden Strömung durch das Laufrad einer Kreiselpumpe mit der spezifischen Schnellläufigkeit $n_q = 26 \text{ 1/min}$. Hierbei wird untersucht, inwieweit das entwickelte Verfahren bei der stationären Simulation der kavitierenden Strömung in der Lage ist, die realen Strömungsverhältnisse abzubilden und wo die Grenzen der Anwendbarkeit liegen. Vom CFD-Code vorhergesagte und gemessene integrale Größen, wie z.B. der Förderhöhenabfall, werden für verschiedene Betriebspunkte verglichen. Darüber hinaus werden lokale Strömungsphänomäne, wie der Einfluss der Radseitenraumströmung auf die Kavitationsausbildung analysiert.

Kapitel 2

Modellbildung

In diesem Kapitel werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen behandelt, die für das entwickelte Rechenverfahren von Bedeutung sind. Zunächst werden die beschreibenden Erhaltungsgleichungen aufgestellt, dann das blasendynamische Kavitationsmodell und die Koppelung des Kavitationsmodells mit den Erhaltungsgleichungen beschrieben. Schließlich wird auf die Modellierung der Turbulenz der Zweiphasenströmung eingegangen. Die Besonderheiten für rotierende Bezugssysteme werden aufgrund ihrer Bedeutung bei Strömungen in hydraulischen Maschinen in einem gesonderten Kapitel betrachtet.

2.1 Grundgleichungen

Bei der kavitierenden Strömung handelt es sich um ein Phasengemisch aus Wasser und Wasserdampf. Unter Vernachlässigung des Schlupfes zwischen den Phasen werden die Erhaltungsgleichungen der einphasigen Strömung auch zur Beschreibung der Zweiphasenströmung verwendet. Diese wird als Strömung eines Fluidgemisches mit gemittelten Stoffeigenschaften modelliert. Dabei definiert die Variable α den volumetrischen Anteil¹ der dampfförmigen Phase pro Einheitsvolumen des Gemisches:

$$\alpha = \frac{\text{Volumen der gasförmigen Phase in einer Zelle}}{\text{Zellvolumen}} . \quad (2.1)$$

Für die Stoffeigenschaften des Gemisches gilt:

$$\rho = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l , \quad (2.2)$$

$$\mu = \alpha \mu_v + (1 - \alpha) \mu_l . \quad (2.3)$$

¹engl. volume fraction oder void fraction

Hierbei steht der Index v für die dampfförmige², und l für die flüssige³ Phase. ρ bezeichnet die Dichte und μ die dynamische Viskosität.

Das Stromfeld des Fluidgemisches ist definiert durch die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = u_i = (u, v, w)^T$ in den kartesischen Koordinatenrichtungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = x_i = (x, y, z)^T$ sowie durch den statischen Druck p .

Die Strömung des Fluidgemisches wird mathematisch durch die Erhaltungsgleichungen für die Masse und den Impuls beschrieben. In kartesischen Koordinaten erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Die Bestimmung des Dampfanteils α ist Aufgabe des Kavitationsmodells, welches im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

2.2 Kavitationsmodellierung

Kavitation wird als Wachstums- und Kollapsprozess von Blasen betrachtet. Ausgangspunkte für die Verdampfung sind die in der Flüssigkeit vorhandene Kavitationskeime. Aus diesen bilden sich Dampfblasen, die mit der Strömung konvektiert werden und wieder kollabieren. Zur Beschreibung dieses Vorgangs ist die Modellierung der Keimverteilung, des konvektiven Transports, der Volumenänderung und der Wachstums- bzw. Kollapseschwindigkeit erforderlich.

2.2.1 Modellierung der Keimverteilung

In realen Flüssigkeiten existierende Keime weisen eine spektrale Größenverteilung auf und können von verschiedener Art sein, beispielsweise Partikel oder Gasblasen. Eine genaue Modellierung dieser Keimverteilung erfordert eine Unterteilung nach der Größe in diskrete Keimklassen und die Unterscheidung nach dem Keimtyp. Dies bedeutet einen enormen numerischen Aufwand, da für jede Keimklasse eine Transportgleichung gelöst werden muss. Deshalb werden die verschiedenen Keimtypen

²vapour

³liquid

idealisiert zu einem Keimtyp „Mikroblase“ zusammengefasst. Die spektrale Keimverteilung in einer Flüssigkeit wird durch die Annahme eines mittleren Keimradius R und einer mittleren Keimanzahl n angenähert. Eine Mikroblase mit dem Anfangsradius $R = R_0$ wird als Keim bezeichnet. Der Parameter n ist eine Stoffkonstante der Flüssigkeit und wird definiert als:

$$n_0 = \frac{\text{Anzahl der Kavitationskeime}}{\text{Einheitsvolumen der Flüssigkeit}} . \quad (2.6)$$

Die Keimanzahl wird so explizit an das Volumen der Flüssigkeit und nicht an das Gemischvolumen gekoppelt. Dies hat den physikalischen Hintergrund, dass durch den Bezug auf das Flüssigkeitsvolumen die Keimerhaltung erfüllt wird, siehe SAUER [94].

2.2.2 Transportgleichung für den Dampfanteil

Kavitation wird mathematisch durch die Formulierung einer Transportgleichung für den Dampf volumenanteil in Verbindung mit einem Quellterm modelliert. Dieser hat die Funktion einer Dampfquelle bzw. Senke, d.h. das Dampf volumen wird abhängig vom statischen Druck vergrößert oder verringert.

Die Erhaltungsgröße α wird als volumetrischer Anteil des Dampfes pro Einheitsvolumen Gemisch definiert und kurz als **Dampfanteil** bezeichnet. Das Dampf volumen berechnet sich aus der Blasenanzahl und dem Volumen einer Einzelblase. Deshalb ergibt sich für den Dampfanteil α :

$$\alpha = \frac{V_v}{V} = \frac{N_{\text{Blasen}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{V_v + V_l} . \quad (2.7)$$

Unter Verwendung der Keimkonzentration n_0 kann die Keimanzahl aus dem im Volumen V vorhandenen Wasservolumen V_l berechnet werden, und es ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Dampfanteil α :

$$\alpha = \frac{n_0 V_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{n_0 V_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + V_l} = \frac{n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} . \quad (2.8)$$

Die Änderung des Dampfanteils in einer Rechenzelle infolge von Konvektion und Blasenwachstum bzw. -kollaps wird durch die Transportgleichung für den Dampfanteil α beschrieben:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u_j)}{\partial x_j} = \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \cdot \nabla u . \quad (2.9)$$

Zur Herleitung der zeitlichen Änderung des Dampfanteils $d\alpha/dt$ wird eine Blasenwolke in einem mitbewegten Kontrollvolumen betrachtet. Das Dampfvolmen V_v ergibt sich aus der Blasenanzahl N_{Blasen} und dem Blasenvolmen, siehe Gleichung 2.7. Die zeitliche Änderung des Dampfvolmens ergibt sich durch die totale Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{d}{dt}(V_v) = \frac{d}{dt} \left(N_{Blasen} \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{d}{dt}(N_{Blasen}) + N_{Blasen} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) . \quad (2.10)$$

Sowohl die Änderung der Blasenanzahl im Zell-Volumen als auch die Größenänderung der Blasen beeinflussen das Dampfvolmen. Die Anzahl der Blasen in einer Rechenzelle wird unter Verwendung des Parameters n_0 aus dem im Kontrollvolumen vorhandenen Wasservolumen berechnet:

$$N_{Blasen} = n_0 V_l = n_0 V(1 - \alpha) , \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}(N_{Blasen}) = -n_0 V \frac{d\alpha}{dt} . \quad (2.12)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen 2.11 und 2.12 in Gleichung 2.10 erhält man:

$$\frac{d}{dt}(V_v) = -n_0 \frac{4}{3} \pi R^3 V \frac{d\alpha}{dt} + n_0 V(1 - \alpha) \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) . \quad (2.13)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (1 - \alpha) \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) . \quad (2.14)$$

Zur Berechnung der Divergenz des Strömungsfeldes ∇u wird die Kontinuitätsgleichung 2.4 in der nicht-konservativen Form verwendet:

$$\nabla u = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_v - \rho_l}{\rho} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho_v}{dt} - \frac{1 - \alpha}{\rho} \frac{d\rho_l}{dt} . \quad (2.15)$$

Die Flüssigkeit wird als inkompressibel betrachtet, die Dichte des Dampfes entspricht der Sättigungsdampfdichte. Wird außerdem angenommen, dass die Masse des Dampfes in der Zelle gegenüber der Masse der flüssigen Phase vernachlässigbar ist, $\alpha \rho_v \ll (1 - \alpha) \rho_l$, kann die Volumenerhaltung weiter vereinfacht werden. Diese Annahme ist für Wasser bei einer Temperatur von $20^\circ C$ bis zu einem maximalen Dampfanteil von $\alpha = 0.999$ sehr gut erfüllt.

$$\nabla u = -\frac{\rho_v - \rho_l}{\alpha\rho_v + (1-\alpha)\rho_l} \frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{1}{1-\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right). \quad (2.16)$$

Gleichung 2.14 und 2.16 werden in die allgemeine Transportgleichung für den Dampf-volumenanteil α (Gleichung 2.9) eingesetzt, und man erhält:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u_j)}{\partial x_j} = \frac{d\alpha}{dt} \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right). \quad (2.17)$$

Zur Berechnung des Quellterms auf der rechten Seite der Transportgleichung fehlt noch eine Beziehung zur Beschreibung des Blasenwachstums, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

2.2.3 Blasendynamik

Ausgangspunkt zur Modellierung des Blasenwachstums ist eine einzelne Kugelblase, die sich in einem unendlich ausgedehnten Fluid befindet, siehe Abbildung 2.1.

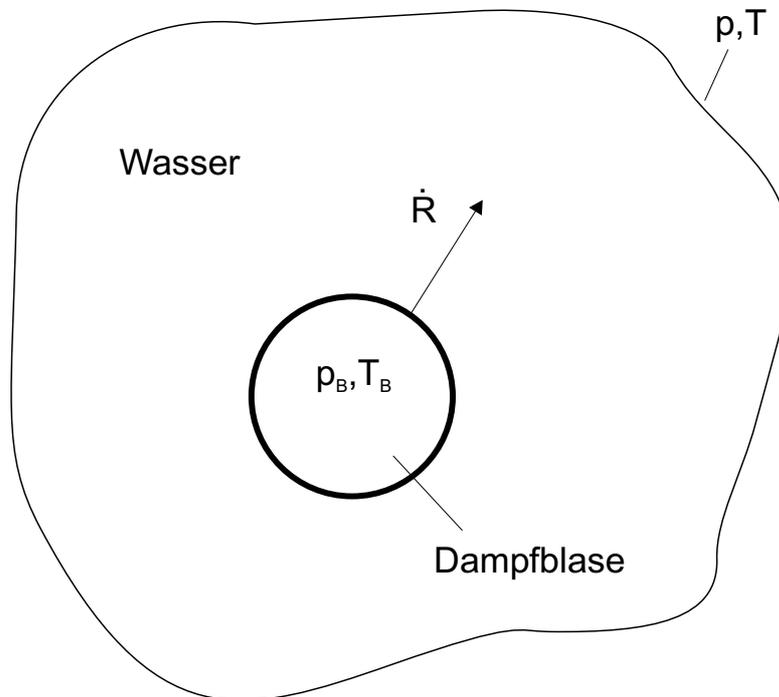


Abbildung 2.1: Blasenwachstum in einem unendlich ausgedehntem Fluid

Die Kontinuitäts- und Impulsgleichung in Polarkoordinaten lauten unter der Voraussetzung $v = w = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_l}{\rho_l} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2\mu_l}{r^2} \right). \quad (2.19)$$

Hierbei ist u die radiale Komponente der Fluidgeschwindigkeit. Nach Integration der Impulsgleichung von der Blasenoberfläche $r = R$ bis ∞ und unter Verwendung von Gleichung 2.18 ergibt sich die Rayleigh-Plesset-Gleichung:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_B - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R} - 4 \frac{\mu_l}{\rho_l R} \frac{dR}{dt}. \quad (2.20)$$

Bei der Herleitung der Rayleigh-Plesset-Gleichung wird die radiale Geschwindigkeit u gleich der Änderung des Blasenradius dR/dt gesetzt. Dies ist strenggenommen nur zur Beschreibung des Blasenwachstums ohne Massentransport über die Phasengrenze gültig. Dennoch ist diese Annahme eine gute Näherung bei Verdampfung oder Kondensation. Um dies zu zeigen, wird eine Dampfblase wie in Abbildung 2.1 betrachtet. Die Volumenänderung des entstehenden Dampfes muss gleich der Größenänderung der Blase $4\pi R^2 dR/dt$ sein. Deswegen ist die Verdampfungsrate gleich $\rho_v(T_B) 4\pi R^2 dR/dt$, wobei $\rho_v(T_B)$ die Dampfdichte in Abhängigkeit der Blasentemperatur T_B ist. Die Verdampfungsrate muss gleich dem Massenstrom der Flüssigkeit relativ zur Phasengrenze sein. Deshalb ergibt sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in negativer radialer Richtung relativ zur Phasengrenze zu $\rho_v(T_B)(dR/dt)/\rho_l$. Daraus folgt:

$$u = \frac{dR}{dt} - \frac{\rho_v(T_B)}{\rho_l} \frac{dR}{dt} = \left[1 - \frac{\rho_v(T_B)}{\rho_l} \right] \frac{dR}{dt}. \quad (2.21)$$

In den meisten Fällen ist die Dampfdichte viel kleiner als die Dichte der Flüssigkeit $\rho_v \ll \rho_l$, so dass die Herleitung von Gleichung 2.20 zulässig ist.

Die Kompressibilität ist bei den meisten technischen Anwendungen von untergeordneter Bedeutung. Für das Blasenwachstum ist die Kompressibilität der Flüssigkeit vernachlässigbar, da die Blasenwandgeschwindigkeiten im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit sehr klein sind. Dies gilt für den Fall einer Einzelblase. In einem Gemisch bestehend aus Blasen und Flüssigkeit liegt die Schallgeschwindigkeit weit unter den Werten der reinen Komponenten, d.h. eine Flüssigkeit verhält sich durch Zumischung von geringen Gasvolumina kompressibel, siehe Abbildung 2.2. Die Ausbreitung von Druckwellen in einer Blasenflüssigkeit kann daher erheblich von der in einer reinen Flüssigkeit abweichen, siehe BRENNEN [13].

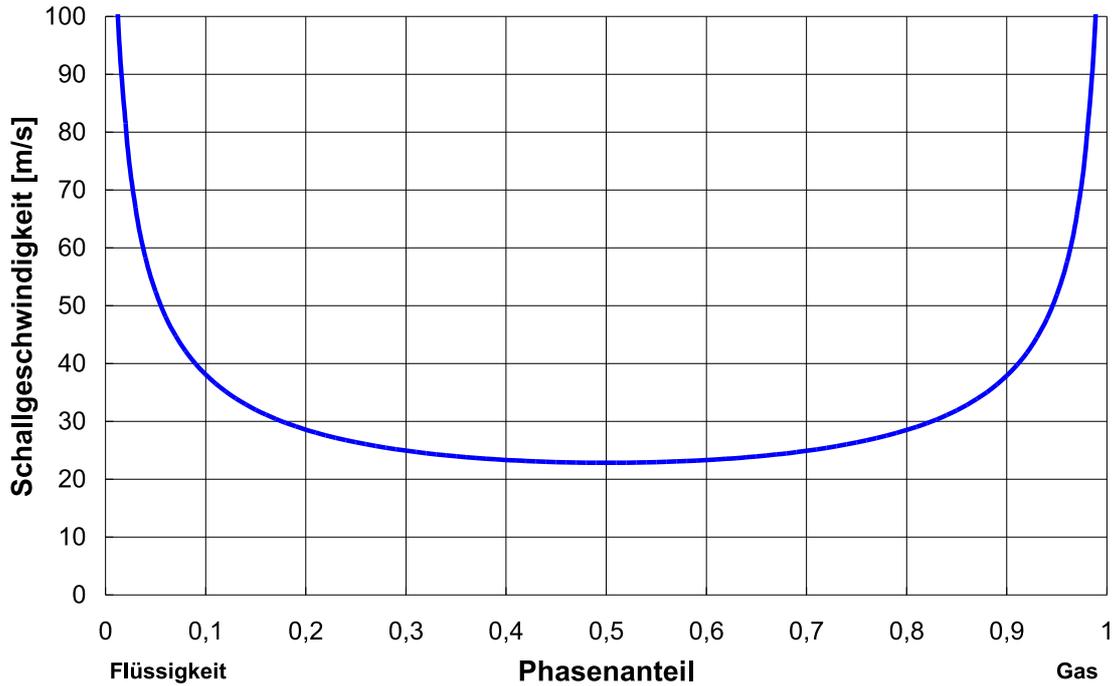


Abbildung 2.2: Schallgeschwindigkeit einer Blasenflüssigkeit (Wasser-Luft) in Abhängigkeit vom Gasanteil

Die Rayleigh-Plesset-Gleichung kann erweitert werden, um den Einfluss von nicht-gelösten Gasen auf das Wachstum und den Kollaps von Blasen zu beschreiben, siehe HICKLING & PLESSET [46] und BRENNEN [13]. Werden thermische Effekte vernachlässigt, wird angenommen, dass sich das in der Blase befindende nicht-gelöste Gas polytrop verhält:

$$p_G = p_{G0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} . \quad (2.22)$$

Hierbei sind R_0 und p_{G0} der anfängliche Blasenradius und der anfängliche Druck des nichtgelösten Gases. Der Exponent k ist näherungsweise konstant. $k = 1$ bedeutet konstante Blasentemperatur, wogegen $k = \gamma$ adiabates Verhalten beschreibt. Der Blaseninnendruck addiert sich somit aus dem Dampfdruck des umgebenden Fluids und dem Partialdruck des nichtgelösten Gases zu

$$p_B = p_v + p_{G0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} . \quad (2.23)$$

Die Rayleigh-Plesset-Gleichung unter Berücksichtigung des nichtgelösten Gases lautet somit

$$\frac{p_v - p_\infty}{\rho_l} + \frac{p_{G0}}{\rho_l} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho_l R} + 4 \frac{\mu_l}{\rho_l R} \frac{dR}{dt} . \quad (2.24)$$

Die Gleichungen 2.20 bzw. 2.24 werden durch ein 4-Schritte-Runge-Kutta-Verfahren zeitlich integriert. Man erhält die Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{R} = dR/dt$, die dann zur Berechnung des neuen Blasenradius verwendet wird. Anfangs- und Randbedingungen sind gegeben durch einen initialen Blasenradius R_0 und eine Anfangswachstumsgeschwindigkeit \dot{R}_0 .

BRENNEN [13] berechnet mit Gleichung 2.24 bei Vernachlässigung des Oberflächenspannungs- und Viskositätsterms das Wachstum und den Kollaps einer Einzelblase. Dabei sinkt der Umgebungsdruck p_∞ zuerst unter den Dampfdruck und steigt dann wieder an, siehe Abbildung 2.3. Die Blase wächst zunächst gleichmäßig an und erreicht ihre maximale Größe kurz nach dem Druckminimum. Der Blasen kollaps verhält sich vollkommen anders. Die Blase kollabiert extrem schnell, um danach wiederholt anzuwachsen und zusammenzufallen. Diese sogenannten „Rebounds“ würden sich ohne viskose Effekte unendlich oft wiederholen.

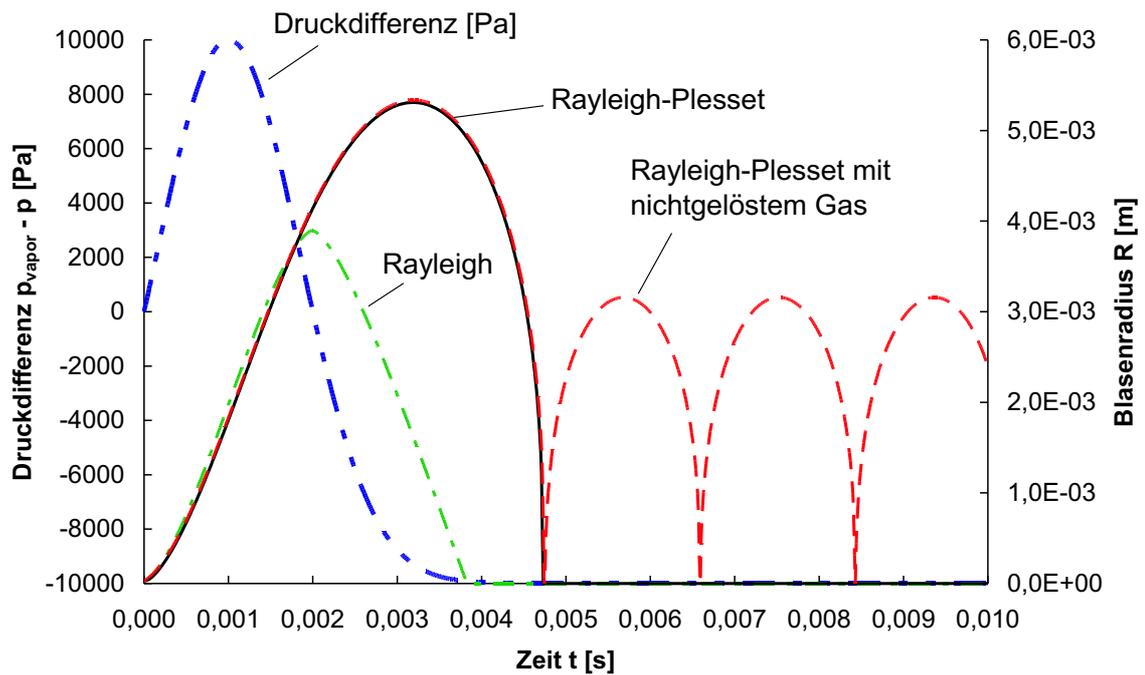


Abbildung 2.3: Vergleich von typischen Lösungen der Rayleigh-Gleichung und der Rayleigh-Plesset-Gleichung mit und ohne Berücksichtigung von nichtgelöstem Gas

Bei der Modellierung der Kavitationsblasen mit Hilfe des Dampfvolumentanteils sind alle Blasen in einer Rechenzelle gleich. Der Blasenrebound kann deshalb numerisch

nicht richtig dargestellt werden, da für eine solche Darstellung vorauszusetzen wäre, dass alle Blasen in einer Rechenzelle gleichzeitig kollabieren, was in der Realität natürlich nicht der Fall ist. Die theoretisch extrem hohen Blaskollapseschwindigkeiten in der Größenordnung von 100 m/s würden auch zu numerischen Problemen führen. Eine zeitlich exakte Auflösung des Blaskollapses liegt darüberhinaus für industrielle Anwendung weit außerhalb der momentanen Möglichkeiten heutiger Rechner.

Die Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung ist numerisch sehr aufwendig, weshalb analytische Beziehungen gesucht werden, die das Blasenwachstum hinreichend genau beschreiben. Von vielen Autoren, z.B. SAUER [94], [95], ATHAVALA ET AL. [3] oder SINGHAL ET AL [109], wird die Rayleigh-Gleichung zur Beschreibung des Blasenwachstums und des Blaskollapses herangezogen:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{p_B - p_\infty}{|p_B - p_\infty|} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_B - p_\infty|}{\rho_l}}. \quad (2.25)$$

Dabei werden bei der Rayleigh-Plesset-Gleichung die Einflüsse der Oberflächenspannung, der Viskosität und der Trägheit vernachlässigt.

Nach BRENNEN [13] nähert sich das Wachstum einer Einzelblase sehr schnell einem gleichmässigen Wachstum an, das in guter Näherung durch die Rayleigh-Gleichung beschrieben werden kann. Trägheitseffekte spielen beim Blasenwachstum nur für sehr kurze Zeit eine Rolle. Außerdem behalten die Blasen während des Wachstums weitgehend ihre Kugelform und der Einfluss von Nachbarblasen ist noch gering. Die Beschreibung des Wachstums der Blasen mit der Rayleigh-Gleichung ist somit zulässig.

Der Blaskollaps verläuft wesentlich komplizierter. Zunächst wächst der gegenseitige Einfluss der Blasen, es kommt zur sogenannten Blaseninteraktion. Dadurch können die Blasen ihre Kugelform verlieren und sich stark verformen. Darüber hinaus können Blasen aufplatzen⁴ oder mehrere Blasen zusammenwachsen⁵, siehe BRENNEN [12], [13]. Diese Vorgänge lassen sich aber nur stochastisch vorhersagen. Dazu müssten einzelne Blasen betrachtet werden. Bei einer Mittelung der Blasen in einer Rechenzelle können solche Vorgänge nur mit empirischen Modellen beschrieben werden. Erste Ansätze dazu finden sich bei BRENNEN [12]. Er führt sogenannte „additional damping terms“ in der Rayleigh-Plesset-Gleichung ein, um die Wirkung der Blaseninteraktion zu beschreiben. Da der Blaskollaps zusätzlich noch stark von der Turbulenz des Fluids beeinflusst wird und auch dafür keine anwendbaren Beschreibungen existieren, wird in dieser Arbeit auch der Blaskollaps mit der Rayleigh-Beziehung, Gleichung 2.25, beschrieben.

⁴engl. fission

⁵engl. fusion

2.2.4 Koppelung der Blasendynamik mit dem Stromfeld

Die im letzten Abschnitt hergeleitete Wachstumsrelation basiert auf der Modellannahme einer einzelnen Blase in einem unendlich ausgedehnten Fluid. Für die numerische Simulation wird diese Vorstellung durch die Betrachtung einer Blase in einer Rechenzelle ersetzt. Die Koppelung des Blasenwachstums mit dem Strömungsfeld wird durch den in der Rechenzelle herrschenden statischen Druck p vorgenommen. Dabei wird angenommen, dass die Blase für die Dauer eines physikalischen Zeitschritts ΔT in der Rechenzelle verbleibt. Da es sich um ein homogenes Modell handelt, muss sichergestellt werden, dass der Blasendurchmesser klein ist gegenüber den Abmessungen der Rechenzelle.

In den Gleichungen für das Blasenwachstum wird der Umgebungsdruck der Blase p_∞ durch den in der Zelle herrschenden Druck p ersetzt. Der Druck auf der Blasenoberfläche p_B wird gleich dem Sättigungsdampfdruck p_v gesetzt. Aus dem Dampfanteil α wird dann der Radius der Blasen in einer Rechenzelle unter Verwendung der Blasenanzahl n_0 berechnet:

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{4}{3} \pi n_0} \frac{\alpha}{1 - \alpha}} . \quad (2.26)$$

Mit dem Blasenradius und der Rayleigh-Gleichung 2.25 als Wachstumsrelation kann der Dampfvolumenterm berechnet werden, der zur Berechnung der Transportgleichung für den Dampfanteil 2.17 und der Druckkorrektur-Gleichung 2.16 benötigt wird.

2.3 Mittelung der Erhaltungsgleichungen

2.3.1 Reynolds'scher Separationsansatz

Nach REYNOLDS [90] lässt sich für stationäre Problemstellungen die lokal an einem Ort vorherrschende Strömungsgröße ϕ aufteilen in einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\phi}$ und einen Schwankungsanteil ϕ'

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}) + \phi'(\vec{x}, t) . \quad (2.27)$$

Die zeitlich gemittelte Größe ergibt nach Gleichung 2.27

$$\bar{\phi}(\vec{x}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(\vec{x}, t) dt \quad , \quad (2.28)$$

wobei der zeitliche Mittelwert des Schwankungsanteils $\overline{\phi'}(\vec{x}, t)$ verschwindet.

Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf instationäre Strömungen anwenden, solange die Voraussetzung erfüllt ist, dass die globale zeitliche Änderung der Strömung wesentlich langsamer verläuft als die turbulenten Schwankungen. In diesem Fall lautet der Separationsansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \phi'(\vec{x}, t) \quad (2.29)$$

mit einer Vorschrift zur Mittelwertbildung entsprechend

$$\bar{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(\vec{x}, t) dt \quad , \quad (2.30)$$

wobei die Integrationszeit Δt groß genug ist, um einen repräsentativen Mittelwert zu bestimmen, jedoch klein ist gegenüber der globalen Zeitskala.

2.3.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Führt man den Separationsansatz nach Gleichung 2.27 bzw. 2.29 in die für das Fluidgemisch gültige Kontinuitätsgleichung 2.4 und die Navier-Stokes-Gleichungen 2.5 ein und mittelt diese zeitlich, siehe z.B. WILCOX [127], so erhält man die Reynolds-gemittelten Gleichungen in der Form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad . \quad (2.32)$$

Dabei wird die Mittelung nicht auf den Dampfvolumenteil und somit auf die Dichte ρ des Zweiphasengemisches angewandt, da davon ausgegangen wird, dass der Dampfvolumenteil keinen turbulenten Schwankungen unterliegt und somit innerhalb eines Zeitschrittes konstant bleibt. Diese Gleichungen beschreiben im Gegensatz zu den originären Erhaltungsgleichungen den Transport der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit und des Druckes. Sie erhalten zusätzlich den Reynolds-Spannungstensor $-\rho \overline{u'_i u'_j}$, der aus der Mittelung der konvektiven Terme stammt. Die Reynolds-Spannungen stellen die zeitlich gemittelte Wirkung der turbulenten Konvektion dar; ihren zunächst irreführenden Namen kann man aus einer gängigen Modellierungsstrategie, der Wirbelviskositätsannahme, heraus verstehen.

Da der Reynolds-Spannungstensor zunächst unbekannt ist, ist das Gleichungssystem nicht geschlossen. Naheliegender wäre es, den Reynolds-Spannungstensor durch entsprechende Transportgleichungen zu ermitteln. Nach DURBIN & PETERSON REIF [31] lauten diese:

$$\frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} - \epsilon_{ij} + \Phi_{ij} + PD_{ij} + TD_{ij} + VD_{ij} . \quad (2.33)$$

Der konvektive Transport der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors wird bestimmt durch die Produktion P_{ij} , die Dissipation ϵ_{ij} , die Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} , die Druckdiffusion PD_{ij} , den turbulenten Transport TD_{ij} und die viskose Diffusion VD_{ij} . Die Terme sind wie folgt definiert:

$$P_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} ; \quad (2.34)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} ; \quad (2.35)$$

$$\Phi_{ij} = \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} ; \quad (2.36)$$

$$PD_{ij} = -\overline{\left(\frac{\partial u'_i p'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j p'}{\partial x_i} \right)} ; \quad (2.37)$$

$$TD_{ij} = -\rho \overline{\frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k}} ; \quad (2.38)$$

$$VD_{ij} = \mu \overline{\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k^2}} . \quad (2.39)$$

Da außer P_{ij} und VD_{ij} alle Terme unbekannt sind, ist die Gleichung 2.33 nicht geschlossen. Vielmehr müssen die Dissipation ϵ_{ij} , die Tripelkorrelation TD_{ij} sowie die Druck-Geschwindigkeitskorrelationen Φ_{ij} und PD_{ij} modelliert werden.

Gleichung 2.33 ist eine Tensorgleichung. Bildet man die Spur der Gleichung, so erhält man die Gleichung für die turbulente kinetische Energie k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \rho k}{\partial x_k} = & - \underbrace{\overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{P_k = \text{Produktion}} - \underbrace{\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}}_{\epsilon = \text{Dissipation}} \\ & - \underbrace{\overline{\frac{\partial u'_i p'}{\partial x_i}}}_{\text{Druck-Diffusion}} - \underbrace{\frac{\rho}{2} \overline{\frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k}}}_{\text{Turbulenter Transport}} + \underbrace{\mu \overline{\frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2}}}_{\text{Viskose Diffusion}} . \quad (2.40) \end{aligned}$$

Die turbulente kinetische Energie pro Einheitsmasse ist definiert als die halbe Spur des Reynolds-Spannungstensors:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} . \quad (2.41)$$

Der Produktionsterm P_k stellt dabei keine Nettoproduktion dar, sondern beschreibt, wie der Hauptströmung Energie entzogen und den turbulenten Fluktuationen zugeführt wird. Durch die Dissipation ϵ wird die turbulente kinetische Energie in Wärme dissipiert.

Der Dissipationstensor ϵ_{ij} wird in seinen isotropen und seinen deviatorischen Anteil aufgeteilt:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3}\epsilon\delta_{ij} + \epsilon_{D,ij} . \quad (2.42)$$

Die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie ϵ ist definiert als die halbe Spur des Dissipationstensors

$$\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_{ij} . \quad (2.43)$$

Nun kann der Umverteilungstensor Π_{ij}^h eingeführt werden. Er bestimmt eine Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie innerhalb der einzelnen Komponenten des Reynolds-Spannungstensors und weist eine verschwindende Spur auf.

$$\Pi_{ij}^h = \Phi_{ij} - \epsilon_{D,ij} . \quad (2.44)$$

Somit kann die Transportgleichung für die Reynolds-Spannungen in folgender Form modelliert werden:

$$\frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ji} - \frac{2}{3}\epsilon\delta_{ij} + \Pi_{ij}^h + PD_{ij} + TD_{ij} + VD_{ij} . \quad (2.45)$$

Die Dissipation ϵ wird durch eine eigene Transportgleichung ermittelt, die im folgenden Kapitel diskutiert wird. Die noch zu bestimmenden Terme sind der Umverteilungstensor Π_{ij}^h sowie die Summe aus dem turbulenten und dem aus der Druck-Geschwindigkeits-Korrelation resultierenden Transport $PD_{ij} + TD_{ij}$. Bezüglich des letzteren Terms schlagen DALY & HARLOW [22] ein Gradiententransportmodell vor:

$$PD_{ij} + TD_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) . \quad (2.46)$$

Die Modellierung des Umverteilungstensors geschieht getrennt nach dem sogenannten Slow- und Rapid-Term unter der Annahme homogener Turbulenz, siehe DURBIN & PETERSON REIF [31]:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^h = & \underbrace{-C_1 \epsilon b_{ij}}_{\text{Slow-Term}} \\ & + \underbrace{C_2 \rho k S_{ij} + C_3 k \left(b_{ij} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + C_4 k (b_{ik} \Omega_{jk} + b_{jk} \Omega_{ik})}_{\text{Rapid-Term}} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Scherrate S_{ij} und die Rotation Ω_{ij} sind folgendermaßen definiert:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.48)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.49)$$

wobei b_{ij} der Anisotropietensor ist:

$$b_{ij} = \frac{\overline{\rho u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

2.4 Turbulenzmodellierung

Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen 2.32 sind wegen des zunächst unbekanntem Reynolds-Spannungstensors $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ nicht geschlossen. Dieser Term ist mit bekannten Größen so zu bestimmen, dass zum einen das Schließungsproblem gelöst und zum anderen die Physik der Strömung möglichst gut modelliert wird. Der naheliegende Ansatz ist, die Reynolds-Transportgleichung 2.33 zu lösen. Damit wird das Problem auf die Modellierung des Dissipationstensors ϵ_{ij} , des turbulenten Transportterms TD_{ij} , der Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} und der Druck-Geschwindigkeits-Korrelation PD_{ij} reduziert. Diese Methode erfordert die Lösung von zumindest sechs Transportgleichungen zuzüglich einer Beziehung für die Dissipation ϵ .

Eine in der Ingenieurspraxis verwendete Näherung ist die Modellierung über die Wirbelviskositätsannahme von BOUSSINESQ [11], welche die direkte Modellierung des Reynolds-Spannungstensors erlaubt. Dabei wird die Existenz einer von den Strömungsgrößen abhängigen turbulenten Viskosität μ_T vorausgesetzt.

2.4.1 Lineare Wirbelviskositätsmodelle

Die Grundlage linearer Wirbelviskositätsmodelle ist die Verknüpfung der Komponenten des Reynoldsspannungstensors mit dem mittleren Stromfeld:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \quad (2.51)$$

Das Schließungsproblem reduziert sich damit auf die Bestimmung der Wirbelviskosität μ_T . Diese kann auf ein turbulentes Zeitmaß T_T und ein integrales Längenmaß L_T zurückgeführt werden, wie eine Dimensionsanalyse zeigt:

$$\mu_T \propto \rho \frac{L_T^2}{T_T} . \quad (2.52)$$

Somit reduziert sich das Problem weiter auf die Bestimmung des turbulenten Zeit- und Längenmaßes. In der Praxis werden diese Maße nicht direkt bestimmt, sondern über die turbulente kinetische Energie k nach Gleichung 2.41, und ihre Dissipationsrate ϵ nach Gleichung 2.43. Das Längen- und Zeitmaß ergibt sich zu

$$T_T = \frac{k}{\epsilon} , \quad (2.53)$$

$$L_T = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} . \quad (2.54)$$

Die Größen k und ϵ werden mit entsprechenden Transportgleichungen ermittelt. Es erweist sich als zweckmäßig, eine effektive Viskosität μ_{eff} zu definieren, die sich aus der molekularen Viskosität μ und der turbulenten Viskosität μ_T zusammensetzt:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_T . \quad (2.55)$$

Beim k - ϵ -Modell wird die Wirbelviskosität entsprechend Gleichung 2.52 ausgedrückt durch:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} , \quad (2.56)$$

worin C_μ eine Proportionalitätskonstante ist. Damit ergibt sich:

$$\mu_T = \rho C_\mu k T_T . \quad (2.57)$$

Somit entspricht \sqrt{k} einem charakteristischen Geschwindigkeitsmaß u_T . Die Summe aus Druckdiffusion und turbulentem Transport in Gleichung 2.40 wird unter Verwendung von Gleichung 2.51 mit einem Gradiententransportansatz approximiert:

$$\overline{u'_i p'} + \frac{\rho}{2} \overline{u'_i u'_j u'_k} = -\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} . \quad (2.58)$$

Eine exakte Gleichung für die Dissipation ϵ kann aus den Navier-Stokes-Gleichungen ähnlich wie die Transportgleichung für die kinetische Energie k , siehe Gleichung

2.40, abgeleitet werden. Die Schließung der exakten ϵ -Gleichung ist wesentlich komplexer als die der turbulenten kinetischen Energie, siehe WILCOX [127]. Die Transportgleichung für die Dissipation ϵ ist deshalb als eine Modelgleichung anzusehen, siehe FERZIGER & PERIĆ [32].

Die modellierten Gleichungen für die turbulente kinetische Energie k und deren Dissipationsrate ϵ lauten schließlich:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon , \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{C_{\epsilon 1} P_k - \rho C_{\epsilon 2} \tilde{\epsilon}}{T_T} . \quad (2.60)$$

Das turbulente Zeitmaß T_T wurde in Gleichung 2.53 definiert. P_k ist der Produktions-term von k und lautet mit Gleichung 2.34:

$$P_k = -\rho \overline{u_i' u_j'} S_{ij} = 2\mu_T S_{ij} S_{ij} , \quad (2.61)$$

worin die Scherrate S_{ij} nach Gleichung 2.48 gegeben ist.

Das Standard- k - ϵ -Modell nach LAUNDER & SPALDING [67] wird im weiteren mit STDKEPS bezeichnet. Es ist nur für hohe Reynolds-Zahlen gültig. Die im Modell enthaltenen Konstanten sind in Tab. 2.1 zusammengefasst.

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Tab.2.1: Konstanten des Standard- k - ϵ -Modells

2.4.2 Nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle

Nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle kombinieren die Einfachheit und Robustheit der Wirbelviskositätsmodelle mit der Überlegenheit von Reynolds-Spannungsmodellen. Dabei wird die Anisotropie der Turbulenz über eine explizite Abhängigkeit des Reynolds-Spannungstensors von lokalen Strömungsgrößen eingeführt.

Die Grundlage nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle bildet eine konstitutive Gleichung, welche aus einer Reihenentwicklung des Spannungstensors nach dem Scher- und Rotationstensor, Gleichungen 2.48 und 2.49, hervorgeht. Entwickelt man den Anisotropietensor, Gleichung 2.50, bis zu den Termen dritter Ordnung, so folgt die kubische konstitutive Gleichung:

$$\begin{aligned}
b_{ij} = & -2 \frac{\mu_T}{k} S_{ij} \\
& + 4C_1 \frac{\mu_T}{\tilde{\epsilon}} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{lk} \delta_{ij} \right) + 4C_2 \frac{\mu_T}{\tilde{\epsilon}} (\Omega_{ik} S_{ki} + \Omega_{jk} S_{ki}) \\
& + 4C_3 \frac{\mu_T}{\tilde{\epsilon}} \left(\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \right) + 8C_4 \frac{\mu_T k}{\tilde{\epsilon}^2} (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{ki} \Omega_{li}) S_{kl} \\
& + 8C_5 \frac{\mu_T k}{\tilde{\epsilon}^2} \left(\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij} \right) \\
& + 8C_6 \frac{\mu_T k}{\tilde{\epsilon}^2} S_{ij} S_{kl} S_{lk} + 8C_7 \frac{\mu_T k}{\tilde{\epsilon}^2} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} .
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Die Koeffizienten C_1 bis C_7 sind entsprechend den Anforderungen zu kalibrieren. In dieser Arbeit wird das nichtlineare Modell von LIEN ET AL. [70] (LCL) verwendet. Das Modell berücksichtigt die Stromlinienkrümmung bei der Kalibrierung der Koeffizienten.

Das LCL-Modell basiert auf dem quadratischen Modell von SHIH ET AL. [108], das für Strömungen mit hoher Reynolds-Zahl entwickelt wurde und eine Realizability-Bedingung beinhaltet.

Nichtlineare Modelle verwenden im Gegensatz zu linearen Modellen nicht die Gleichung 2.61, sondern die Spur des Produktionstensors nach der exakten Beziehung 2.34 zur Bestimmung der Produktion P_k in den Transportgleichungen für k und ϵ .

Um die Realizability-Bedingung zu erfüllen, siehe Kapitel 2.4.4, sind die Koeffizienten eine Funktion der Invarianten des Deformationstensors \tilde{S} und des Rotationstensors und $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{S} = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} , \tag{2.63}$$

$$\tilde{\Omega} = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} . \tag{2.64}$$

Die Koeffizienten und Dämpfungsfunktionen des LCL-Modells sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ		
$\frac{2/3}{4+\tilde{S}+0.9\tilde{\Omega}}$	$1.44(1 + P'_k/P_k)$	1.92	1.0	1.3		
$P'_k = 1.33 \left(1 - 0.3e^{Re_T^2} \right) \left(P_k + 2\mu \frac{k}{y^2} e^{-0.00375 Re_y^2} \right) ; Re_T = \frac{\rho k^2}{\tilde{\epsilon} \mu} ; Re_y = \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}$						
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\frac{3/4}{C_\mu(1000+\tilde{S}^3)}$	$\frac{15/4}{C_\mu(1000+\tilde{S}^3)}$	$\frac{19/4}{C_\mu(1000+\tilde{S}^3)}$	$-10 C_\mu^2$	0	$-2 C_\mu^2$	$2 C_\mu^2$

Tab.2.2: Konstanten des LCL-Modells

2.4.3 Wandbehandlung

Die bei der Beschreibung der Turbulenzmodelle behandelten Schließungsansätze gehen von Strömungen außerhalb des unmittelbaren Wirkungsbereiches von festen Wänden aus. Die Wandnähe kann durch die turbulente Reynolds-Zahl, die von dem turbulenten Geschwindigkeitsmaß u_T und dem integralen turbulenten Längenmaß L_T abhängt, charakterisiert werden:

$$Re_T = \frac{\rho u_T L_T}{\mu} . \quad (2.65)$$

Fernab von Wänden ist Re_T groß. Die wandnahe Strömung zeichnet sich durch die Existenz einer dünnen viskosen Unterschicht aus, in der turbulente Einflüsse wegen der Haftbedingung der Wand gänzlich verschwinden. Hier nähert sich die turbulente Reynolds-Zahl dem Wert Null an.

Aus Messungen ist bekannt, dass sich eine vollentwickelte, turbulente Grenzschicht in drei Bereiche unterteilen lässt, siehe Abbildung 2.4:

- Viskose Unterschicht
- Logarithmische Schicht
- Turbulente Außenströmung

Die Übergänge zwischen den Bereichen sind fließend.

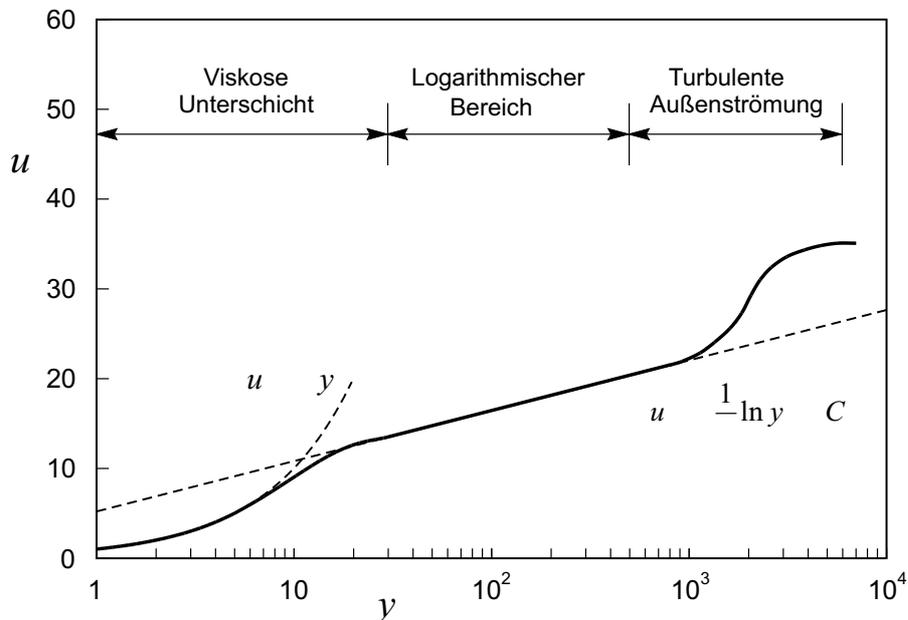


Abbildung 2.4: Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht

Bei der Modellierung der Kavitation ist davon ausgegangen worden, dass die Kavitationsblasen klein gegenüber der Größe der Rechenzelle sind. Dies muss auch in Wandnähe gelten. Durch Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes kann der wandnahe Bereich überbrückt werden, so dass die Anzahl der Gitterpunkte in Wandnähe wesentlich reduziert werden kann und die Zellgröße somit ausreichend groß bleibt, um den Modellannahmen zu genügen.

Bei der Verwendung einer Wandfunktion wird davon ausgegangen, dass das Rechengebiet erst im logarithmischen Bereich beginnt. Während das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil u^+ in der viskosen Unterschicht einen linearen Verlauf hat, folgt es in der logarithmischen Schicht dem Universellen Logarithmischen Wandgesetz [100], das in Abbildung 2.4 dargestellt ist:

$$u_\tau^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C . \quad (2.66)$$

In Gleichung 2.66 bedeutet C eine Konstante mit $C = 5.2$. Die verwendeten dimensionslosen Größen sind wie folgt definiert:

$$u_t^+ = \frac{u_t}{u_\tau} , \quad (2.67)$$

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y_P}{\mu} . \quad (2.68)$$

worin u_t die wandtangente Geschwindigkeitskomponente und y^+ den dimensionslosen Wandabstand bedeuten. Die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ ist:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} . \quad (2.69)$$

Da die Strömung im logarithmischen Bereich in einem lokalen Gleichgewicht zwischen Produktion P_k und Dissipation ϵ ist, gilt nach DURBIN & PETERSON REIF [31]:

$$u_\tau = C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k} . \quad (2.70)$$

Mit der Approximation für das Längenmaß $L_T \approx k y_p / C_\mu^{3/4}$, siehe DURBIN & PETERSON REIF [31], ergibt sich mit Gleichung 2.54:

$$\epsilon \approx \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_P} . \quad (2.71)$$

Die Implementierung der Wandfunktion wird in Kapitel 3.6.3 erläutert.

2.4.4 Staupunktströmung

Ein bedeutender Nachteil der Wirbelviskositätsannahme, Gleichung 2.51, wird in Staupunktströmungen offensichtlich, in denen eine unphysikalisch hohe Produktion von turbulenter kinetischer Energie P_k berechnet wird. Diese Überproduktion wirkt sich massiv auf den Zustand der weiter stromab liegenden Grenzschicht aus. Durch die Einbringung von turbulenter kinetischer Energie in die turbulente Grenzschicht wird diese stabilisiert, so dass eine eventuelle Ablösung gar nicht oder weiter stromab erscheint. Die Überproduktion von turbulenter kinetischer Energie kann bei der Simulation kavitierender Strömungen dazu führen, dass die Bildung eines Re-Entrant-Jets verhindert wird und anstelle einer instationären Wolkenablösung eine stationäre Kavitationszone entsteht.

DURBIN [29] und DURBIN & PETTERSON REIF [31] führen diesen Umstand auf die quadratische Abhängigkeit von P_k von der Scherrate S_{ij} zurück, vergleiche Gleichung ???. DURBIN [30] argumentiert, dass die Turbulenzintensität in Staupunktnähe abnehmen muss, wohingegen eine Erhöhung der Turbulenzintensität aufgrund der Wirbelviskositätsannahme vorhergesagt wird.

KATO & LAUNDER [50] führen eine pragmatische Korrektur ein, indem sie den Umstand ausnützen, dass der Rotationstensor, Gleichung 2.49, in Staupunktnähe sehr klein wird. Sie definieren den Produktionsterm, vergleiche Gleichung ???:

$$P_{k,KL} = 2\mu_T \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}} . \quad (2.72)$$

Diese ad-hoc-Korrektur wird als wirksame Methode zur Unterdrückung der Staupunktanomalie in hydraulischen Maschinen verwendet. Allerdings bleibt die Wirkung der Kato-Lauder-Modifikation nicht auf die gewünschte Umgebung des Staupunktes beschränkt.

DURBIN [29] führt die Staupunktanomalie auf die Verletzung der Realizability-Bedingung zurück. Die Realizability-Bedingung besteht aus mathematischer Sicht aus einer Beschränkung der Normalspannungen:

$$0 \leq \overline{u'_\alpha u'_\alpha} \leq 2k . \quad (2.73)$$

Die Realizability-Bedingung wurde von SHIH ET AL. [108] als eine Wirbelviskositätsformulierung in Strömungen mit hoher Reynolds-Zahl ausgedrückt, indem sie die Konstante C_μ abhängig von der Invarianten der Scherrate S_{ij} und der Rotation Ω_{ij} machten. MOORE & MOORE [78] griffen diese Methode auf und formulierten sie so, dass sie auch bei linearen k - ϵ -Modellen mit Wandfunktionen verwendbar ist. Zunächst wird ein Koeffizient $C_{\mu,r}$ folgendermaßen formuliert:

$$C_{\mu,r} = \frac{1}{2.74 + 1.9 \left(\tilde{S}^{2.4} + \tilde{\Omega}^{2.4} \right)^{\frac{1}{2.4}}}. \quad (2.74)$$

Die Invarianten \tilde{S} und $\tilde{\Omega}$ sind in den Gleichungen 2.63 und 2.64 gegeben. Die Realizability-Bedingung wird in Gleichung 2.56 mittels eines Faktors f_n implementiert:

$$\mu_T = \rho C_\mu f_n \frac{k^2}{\epsilon}; \quad f_n = \min \left(1; \frac{C_{\mu,r}}{C_\mu} \right). \quad (2.75)$$

Nichtlineare Wirbelviskositätsansätze wie das LCL-Modell, das in Kapitel 2.4.2 vorgestellt wurde, berücksichtigen die Realizability-Bedingung bereits. Somit ist die durch Gleichung 2.75 eingeführte Korrektur dort nicht notwendig.

2.4.5 Kavitierende Strömung

Einfluss der turbulenten Druckschwankungen

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass die Turbulenz einen großen Einfluss auf die Kavitation hat, siehe z.B. KELLER ET AL. [55]. Die richtige Modellierung der Turbulenz der Zweiphasenströmung wirkt sich somit auch auf die Modellierung des Kavitationsvorganges aus. Zur Berücksichtigung der turbulenten Druckschwankungen p'_{turb} bei der Bestimmung der Blasenwachstumsgeschwindigkeit, Gleichung 2.25, wird zum Sättigungsdampfdruck p_v noch der Anteil der turbulenten Druckschwankung

$$p'_{turb} = 0.39 \rho k \quad (2.76)$$

addiert, siehe ATHAVALE ET AL. [3].

Nicht-Gleichgewichts-Turbulenz-Modell

Im Standard- k - ϵ -Modell werden die empirischen Konstanten C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, σ_k und σ_ϵ verwendet. Wenn die Strömung sich nicht mehr im Gleichgewicht befindet, also bei Rückströmung oder Rotation, müssen die Werte dieser Konstanten angepasst werden, um Nicht-Gleichgewichts-Effekte berücksichtigen zu können. Dabei wirken sich $C_{\epsilon 1}$ und $C_{\epsilon 2}$ auf die Produktion und die Dissipation in der ϵ -Transportgleichung aus und damit auch auf die Wirbelviskosität. ŞENOCAK [107] verwendet ein sogenanntes Nicht-Gleichgewichts- k - ϵ -Modell. Die Konstanten des Modells werden in Tabelle 2.3 den Konstanten des Standard- k - ϵ -Modells gegenübergestellt. Es wurde

jedoch festgestellt, dass die Verwendung des Nicht-Gleichgewichts-Modells anstelle des Standard- k - ϵ -Modells auf des Ergebniss der Simulation einer kavitierenden Strömung keinen großen Einfluss hat, verglichen beispielsweise mit dem Einfluss verschiedenener Netzfeinheiten.

Modell	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
Standard- k - ϵ	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Nichtgleichgewichts- k - ϵ	0.09	$1.15 + 0.25(P_k/\epsilon)$	$1.45 + 0.45(P_k/\epsilon)$	0.8927	1.15

Tab. 2.3: Empirische Konstanten des Standard- k - ϵ -Modells und des Nichtgleichgewichts-Modells

Turbulente Viskosität der Zweiphasenströmung

REBOUD ET AL. [89] und COUTIER-DELGOSHA ET AL. [20] verwenden ein k - ϵ -RNG-Turbulenzmodell zur Simulation der kavitierenden Strömung in einem Venturi-Strömungskanal. Es wurde festgestellt, dass das im Experiment von STUTZ & REBOUD [119] beobachtete instationäre Kavitationsverhalten nicht richtig vorhergesagt wurde. Die Simulation ergab nach einigen Schwingungen ein stationäres Kavitationsgebiet. Die vorhergesagte Länge der Kavitationszone war zu kurz und der Dampfanteil im Kavitationsgebiet zu hoch. Nach REBOUD ET AL. [89] tritt bei der Simulation der Re-Entrant-Jet, der für das Ablösen der Kavitationsblasen verantwortlich ist, nicht auf, da die turbulente Viskosität lokal überschätzt wird.

Um das Verhalten des Re-Entrant-Jets und die Kavitationswolkenablösung besser vorherzusagen, wurde eine empirische Dichte-Funktion $f_\rho(\rho)$ eingeführt:

$$f_\rho(\rho) = \rho_v + \left(\frac{\rho_v - \rho}{\rho_v - \rho_l} \right)^n (\rho_l - \rho_v) ; \quad n \gg 1 . \quad (2.77)$$

Die Dichte-Funktion $f_\rho(\rho)$ wird anstelle der Gemischdichte ρ zur Berechnung der turbulenten Viskosität benutzt:

$$\mu_T = f_\rho(\rho) C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} . \quad (2.78)$$

Mit dieser Erweiterung des Standard- k - ϵ -Modells erzielten REBOUD ET AL. [89] und COUTIER-DELGOSHA [20] bei der Simulation des instationären Verhaltens der kavitierenden Strömung bessere Ergebnisse. Allerdings stellten BASUKI ET AL. [10] fest, dass der Exponent n in der Dichte-Funktion, Gleichung 2.77, sehr groß sein muss, $n \geq 1000$, damit die Dichte-Korrektur überhaupt eine Wirkung hat.

2.5 Rotierendes Bezugssystem

Die Strömung in Hydraulischen Maschinen ist durch das Wirken von Trägheitskräften gekennzeichnet, die durch die Stromlinienkrümmung oder durch die Rotation des Bezugssystems aufgeprägt werden. Beide Effekte haben unmittelbaren Einfluss auf die Hauptströmung und auf die Turbulenz. Während die Wirkung der Stromlinienkrümmung auf die Hauptströmung implizit in den Impulsgleichungen berücksichtigt wird, muss die Systemrotation durch eine geeignete Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden. Dem Einfluss der Stromlinienkrümmung und der Systemrotation auf die Turbulenz kann durch entsprechende Maßnahmen bei der Formulierung der Turbulenzmodelle Rechnung getragen werden.

2.5.1 Grundgleichungen im Relativsystem

Die bisher hergeleiteten Gleichungen 2.31 und 2.32 zur Erhaltung der Kontinuität und des Impulses beschreiben die Strömung in hydraulischen Strömungsmaschinen bereits vollständig. Durch die Transformation in ein rotierendes Bezugssystem lässt sich die numerische Lösung dieser Gleichungen allerdings erheblich vereinfachen, da sich die Strömung durch ein Laufrad im Absolutsystem beschrieben als periodisch instationäres, im Relativsystem hingegen als stationäres Problem darstellt. Zur Transformation, die z.B. bei TRUCKENBRODT [122], gegeben ist, werden zusätzlich die Relativgeschwindigkeit $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}^F$, mit der das Bezugssystem dreht, eingeführt.

Für die Umfangsgeschwindigkeit $\vec{u}_\phi = (u_x, u_y, u_z)^T$ ergibt sich allgemein

$$\vec{u}_\phi = \vec{\Omega}^F \times \vec{r}, \quad (2.79)$$

und speziell bei einer Rotation um die z-Achse, die im folgenden immer angenommen werden soll

$$\vec{u}_\phi = \begin{pmatrix} -\Omega^F y \\ +\Omega^F x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Die Beziehung zwischen Absolut-, Umfangs- und Relativgeschwindigkeit lässt sich durch folgende kinematische Beziehung wiedergeben:

$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{u}_\phi = \vec{w} + \vec{\Omega}^F \times \vec{r}. \quad (2.81)$$

Bedingt durch die Transformation der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen treten in den Impulsgleichungen zusätzliche Terme S^{rot} auf, die bei einer zeitlich konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω^F den Zentrifugal- und Corioliskräften entsprechen:

$$\vec{S}^{rot} = \underbrace{-\vec{\Omega}^F \times (\vec{\Omega}^F \times \vec{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{-2\vec{\Omega}^F \times \vec{w}}_{\text{Corioliskraft}}. \quad (2.82)$$

Nach KROLL [60] ist es von Vorteil, die Impulsgleichungen in eine Form überzuführen, dass diese den Transport der Absolutgeschwindigkeiten im Relativsystem beschreiben. Dabei werden die Fliehkraftterme und ein Teil der Coriolisterme in Gleichung 2.82 auf die linke Seite der Impulsgleichungen gebracht:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial(\bar{w}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} + \tau_{ij}^{turb}}{\partial x_j} + S_i^{rot,mod}, \quad (2.83)$$

wobei der modifizierte Quellterm $S^{rot,mod}$ wie folgt definiert ist:

$$\vec{S}^{rot,mod} = -\vec{\Omega}^F \times \vec{u}. \quad (2.84)$$

Diese Formulierung führt in der Regel zu einem stabilen numerischen Verhalten, siehe RITZINGER [93]. Sie hat den Vorteil, dass bei der Berechnung des Übergangs von einem rotierenden in ein stehendes System, z.B. bei einer Laufrad-Leitrad-Interaktion, die Transformation der Geschwindigkeiten entfällt.

Der Einfachheit halber wird im folgenden nicht mehr explizit zwischen Relativ- und Absolutgeschwindigkeit w_i und u_i unterschieden.

2.5.2 Turbulenzmodelle im Relativsystem

Das am meisten verwendete Turbulenzmodell, das lineare k - ϵ -Modell, kann die rotationsbedingten Effekte nur ungenau vorhersagen, siehe SPEZIALE [112].

Nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle berücksichtigen die durch die Stromlinienkrümmung bewirkten Effekte über den Rotationstensor Ω_{ij} , insbesondere in den kubischen Termen. Nach DURBIN & PETERSON REIF [31] ist es möglich, bei nichtlinearen Wirbelviskositätsmodellen zumindest qualitativ die Systemrotation durch Einführen des absoluten Rotationstensors Ω_{ij}^A zu berücksichtigen. Dreht das Bezugssystem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω^F , und bezeichnet Ω_{ij} den Rotationstensor relativ zu dem rotierenden Bezugssystem, so gilt für den absoluten Rotationstensor Ω_{ij}^A im Absolutsystem:

$$\Omega_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \epsilon_{ij} \Omega^F = \Omega_{ij} - \epsilon_{ij} \Omega^F. \quad (2.85)$$

Die Geschwindigkeiten u_i sind hier und im folgenden als Relativgeschwindigkeiten zu interpretieren.

Damit wird beim LCL-Modell der relative Rotationstensor Ω_{ij} durch den absoluten Rotationstensor Ω_{ij}^A ersetzt.

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

In diesem Kapitel wird das numerische Verfahren zur Simulation kavitierender Strömungen beschrieben. Als Basis wird das Navier-Stokes-Verfahren NS2D/NS3D zur Simulation einer einphasigen, inkompressiblen und reibungsbehafteten Strömung verwendet, das von SKODA [110] entwickelt und detailliert beschrieben wurde. Die Beschreibung des numerischen Verfahrens orientiert sich weitgehend an dieser Arbeit. Der Code verwendet die Finite-Volumen-Methode zur Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen. Die Koppelung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes erfolgt mit dem SIMPLE-Verfahren. Die Implementierung des Kavitationsmodells basiert auf der Arbeit von SAUER [94].

Zunächst wird die Diskretisierung der Grundgleichungen beschrieben, dann wird das Druckkorrektur-Verfahren für kavitierende Strömungen hergeleitet. Schließlich wird auf die Implementierung der Randbedingungen und die Lösung des Gleichungssystems eingegangen. Die zur Beschreibung der kavitierenden Strömung verwendeten Grundgleichungen wurden bereits in Kapitel 2 vorgestellt.

3.1 Definition des Kontrollvolumens

Der NS2D/NS3D-Code basiert auf einem Finite-Volumen-Verfahren, das auf strukturierten Gittern arbeitet. Das Rechengebiet wird zunächst in Teilblöcke aufgeteilt. Diese Blöcke werden durch ein geeignetes Rechnernetz in beliebig viele quadrilaterale (NS2D) bzw. hexaederförmige (NS3D) Kontrollvolumina zerlegt, deren Eckpunkte durch Geraden miteinander verbunden sind und in deren Mittelpunkten die Lösungsvariablen u, v, w, p und α definiert werden. Diese Anordnung der Variablen wird als „nicht-versetzt“¹ bezeichnet. Ein Kontrollvolumen ist in zweidimensionaler Darstellung in Abbildung 3.1 zu sehen. Für jedes dieser Volumina werden die Erhaltungsgleichungen in Integralform formuliert. Eine wichtige Eigenschaft der Finite-

¹engl. collocated

Volumen-Methode ist, dass die Erhaltung der Masse und des Impulses auch für die diskretisierten Gleichungen erfüllt sind.

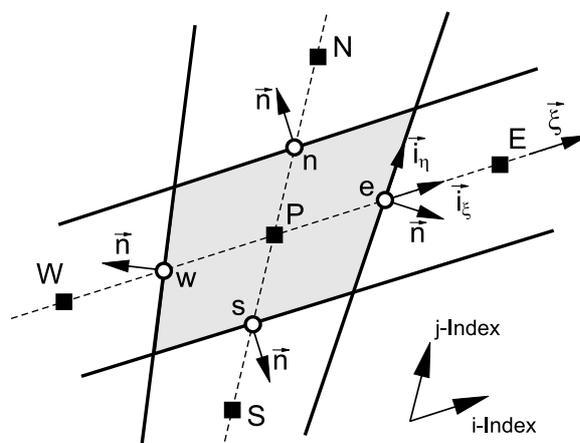


Abbildung 3.1: Vereinfachte zweidimensionale Darstellung eines Kontrollvolumens mit der Definition der verwendeten Bezeichnungen

Um den Zellmittelpunkt, der mit P bezeichnet wird und als arithmetisches Mittel der Koordinaten der Eckpunkte ermittelt wird, ist das grau unterlegt dargestellte Zellvolumen V angeordnet. Diese zellzentrierte Anordnung wird in der sogenannten Kompassnotation bezeichnet, d.h. die Nachbarzellen sind in i -Richtung mit *West*, *East*, und in j -Richtung mit *South*, *North* betitelt. Im Dreidimensionalen werden die Nachbarzellen in k -Richtung mit *Bottom* und *Top* bezeichnet. Die den zwei benachbarten Zellen gemeinsamen Zellflächenmittelpunkte heißen entsprechend w , e , s , n , b oder t . Die den zwei benachbarten Zellen gemeinsame Zellfläche hat den Flächeninhalt S .

Jede Zellfläche ist charakterisiert durch den Einheits-Normalenvektor \vec{n} und den Einheitsrichtungsvektor $\vec{\xi}$ entlang der Verbindungslinie zweier Zellmittelpunkte. Im Dreidimensionalen berechnen sich der Flächeninhalt sowie der Normalenvektor \vec{n} mit Hilfe des Vektorproduktes der beiden Diagonalverbindungsvektoren innerhalb der betrachteten Fläche. Das Zellvolumen V wird im Zweidimensionalen mittels des Kreuzproduktes der Diagonalverbindungsvektoren zwischen den Zelleckpunkten und im Dreidimensionalen aus der Summe von zwölf Tetraedern berechnet, siehe RIEDEL [92]

Um eine konsistente und konservative Formulierung der zu lösenden Gleichungen zu gewährleisten, müssen die Teilvolumina das gesamte Rechengebiet einnehmen, so dass die Summe der Teilvolumina das Gesamtvolumen ergibt. Weiterhin muss die Fläche zwischen zwei Teilvolumina für beide benachbarten Zellen identisch sein.

3.2 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

3.2.1 Integralform der Erhaltungsgleichungen

Die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen der Impulserhaltung und der turbulenten Transportgleichungen bestehen aus einem zeitabhängigen Term, einem konvektiven und einem diffusiven Transportterm sowie aus dem Quellterm. Aufgrund ihrer ähnlichen Struktur wird im folgenden der Transport einer allgemeinen Erhaltungsgröße ϕ beschrieben. Auf die Transportgleichung für den Dampfvolumenanteil α wird gesondert in Kapitel 3.4 eingegangen.

Die Transportgleichung für die Erhaltungsgröße ϕ lautet mit einem allgemeinen Diffusionskoeffizienten Γ :

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q_\phi . \quad (3.1)$$

Bei einem Finite-Volumen-Verfahren wird die Gleichung 3.1 über jedes in Kapitel 3.1 beschriebene Teilvolumen integriert. Dabei ist es zweckmäßig, die Volumenintegrale des konvektiven und diffusiven Terms durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß in Oberflächenintegrale zu überführen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi u_j \cdot n_j dS = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS + \int_V q_\phi dV . \quad (3.2)$$

Die Integration ist bei den Volumenintegralen über die gesamte Zelle P und bei den Oberflächenintegralen über die gesamte Fläche S des Teilvolumens durchzuführen. Die Integranden der Oberflächenintegrale werden als Flüsse f bezeichnet, wobei f^c den konvektiven und f^d den diffusiven Fluss darstellt:

$$f^c = \rho \phi u_j n_j ; \quad f^d = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \cdot n_j . \quad (3.3)$$

Bis zu diesem Schritt wurden keine approximativen Modellierungen verwendet. Die allgemeine Ausgangsgleichung wurde durch mathematische Operationen in eine für die weitere Behandlung besser geeignete Form gebracht.

3.2.2 Berechnung der Oberflächen- und Volumenintegrale

Für eine konsistente Berechnung der integralen Terme muss das verwendete Rechenetz die Bedingungen erfüllen, dass die Teilvolumina das gesamte betrachtete Gebiet

vollständig ausfüllen und sich dabei nicht überlappen. Die Zellflächen zweier benachbarter Elemente müssen eindeutig definiert sein. Ist darüber hinaus sichergestellt, dass der Fluss, der aus einer Fläche austritt, genau so in das benachbarte Element eintritt, wird das Verfahren als konservativ bezeichnet.

Im folgenden wird stellvertretend für alle Teilflächen eines Kontrollvolumens nur die repräsentative Zellfläche e betrachtet. Die Informationen an den anderen Seiten des Bilanzelements ergeben sich durch eine Vertauschung der Indizes.

Oberflächenintegrale

Die exakte Auswertung der Oberflächenintegrale in Gleichung 3.2 ist nur möglich, wenn die zu integrierende Verteilung auf der gesamten Fläche bekannt ist. Zur Bestimmung des Flusses sind damit zwei Annahmen erforderlich: Zum einen muss die a priori unbekannte Verteilung durch eine analytische Funktion, die durch eine oder mehrere Stützstellen definiert ist, angenähert werden. Zum zweiten müssen die Werte an diesen Stützstellen durch geeignete Interpolationsalgorithmen aus den Werten an den Zellmittelpunkten bestimmt werden.

Für das vorliegende Verfahren wird angenommen, dass der integrale Fluss durch die Teilfläche S_e durch einen Mittelwert repräsentiert wird, der in der Mitte der Zellfläche definiert ist:

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e . \quad (3.4)$$

Diese Annahme entspricht einer Genauigkeit zweiter Ordnung, was bedeutet, dass sich der Fehler bei einer Verdoppelung der Auflösung viertelt. Das Problem reduziert sich nun auf die Bestimmung des Flusses f_e im Zellflächenmittelpunkt. Es wird in den Kapiteln 3.2.4 und 3.2.5 diskutiert.

Volumenintegrale

Der integrale Quell- bzw. Senkenterm Q_P im Teilvolumen P ergibt sich als Volumenintegral über das Teilvolumen. Setzt man die Existenz eines repräsentativen Mittelwerts q_P von q im Zellmittelpunkt voraus, so ergibt sich:

$$Q_P = \int_V q dV \approx q_P V . \quad (3.5)$$

Die Genauigkeit dieser Annahme ist zweiter Ordnung, wenn P in der Mitte der Zelle definiert ist und wenn q konstant oder linear veränderlich ist. Insbesondere ist bei dieser Approximation keine Interpolation erforderlich, da der unmittelbar bekannte Wert am Zellmittelpunkt verwendet wird.

3.2.3 Approximation der Gradienten

Die Approximation des diffusiven Terms und des Druckgradienten in den Impulsgleichungen erfordert die Berechnung einer örtlichen Ableitung im Zellmittelpunkt P . Diese wird mittels des Satzes von Gauß mit einem Oberflächenintegral approximiert:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)_P \approx \frac{\sum_l \phi_l n_i S_l}{V}; \quad l = w, e, s, n, b, t. \quad (3.6)$$

Bei der Bestimmung des Oberflächenintegrals in Gleichung 3.6 muss der Wert ϕ_l im Zellflächenmittelpunkt der Fläche l bekannt sein. Er wird mit Hilfe einer linearen Interpolation (CDS²) bestimmt. Für $l = e$ lautet ϕ_e :

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + (1 - \lambda_e) \phi_P. \quad (3.7)$$

Der Interpolationsfaktor λ_e berechnet sich mit dem Ortsvektor \vec{r} zu:

$$\lambda_e = \frac{\vec{r}_e - \vec{r}_P}{\vec{r}_E - \vec{r}_P}. \quad (3.8)$$

Die Berechnung von ϕ_l für die anderen Zellflächen wird analog durchgeführt.

3.2.4 Diskretisierung der konvektiven Flüsse

Der in Gleichung 3.3 definierte konvektive Fluss einer allgemeinen Variable ϕ durch die Zellfläche e beschreibt den Transport von ϕ mit dem Stromfeld. Mit Gleichung 3.4 ergibt sich der Fluss zu:

$$F_e^c = \int_{S_e} \rho \cdot \phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS \approx \rho \dot{F}_e \phi_e. \quad (3.9)$$

Das Produkt $\rho_e \dot{F}_e$ ist der Massenstrom, der über die Zellfläche e tritt. Die Approximation der Gemischdichte muss hier so erfolgen, dass die Massenerhaltung gewährleistet wird. Die Kontinuitätsgleichung für ein Fluid variabler Dichte wurde durch die Beziehung für den Volumenstrom und die Transportgleichung für den Dampfvolumenanteil α ersetzt. Daher wird die Dichte ρ_e in Abhängigkeit des Volumenanteils α_e berechnet:

$$\rho_e = \alpha_e \rho_v + (1 - \alpha_e) \rho_l. \quad (3.10)$$

²CDS = Central Differencing Scheme

Die Verwendung dieser Gleichung garantiert die Massenerhaltung an den Zellflächen, die Ermittlung des Zellflächenwertes α_e wird in Kapitel 3.4 erläutert. \vec{F}_e wird zunächst als bekannt angenommen.

Die transportierte Größe ϕ_e steht stellvertretend für die Geschwindigkeitskomponenten und die Turbulenzgrößen k und ϵ . Die Aufgabe besteht nun darin, die Größe ϕ_e auf dem Zellflächenmittelpunkt durch eine geeignete Interpolationsvorschrift aus den zellzentrierten Werten der umliegenden Teilvolumina zu bestimmen. Wie PATANKAR [82] verdeutlicht, ist grundsätzlich die Genauigkeit der Interpolation gegenläufig zu ihrer numerischen Stabilität.

Konsistenz und Konvergenz

Ein Verfahren zur Approximation partieller Differentialgleichungen wird als konsistent bezeichnet, wenn bei einer beliebigen Verfeinerung des Rechengitters die numerische Lösung in die exakte Lösung der diskretisierten Differentialgleichung übergeht. Dies beinhaltet, dass der Abbruchfehler, der bei einer Taylorreihenentwicklung als ein Term höherer Ordnung bezeichnet wird, bei beliebig feiner Auflösung gegen Null geht. Dieser Abbruchfehler hat eine ähnliche Form wie der diffusive Term der Differentialgleichung, so dass man ein Verfahren mit einem großen Abbruchfehler als diffusiv bezeichnet. Im Falle der Approximation der konvektiven Terme muss das Interpolationsverfahren bei feiner werdender Auflösung somit den konvektiven Term möglichst genau wiedergeben. Daran knüpft sich auch die Bedingung, dass der Fluss, der aus einer Zelle austritt, in die benachbarte Zelle eintritt, siehe auch FERZIGER & PERIĆ [32].

Der Begriff der Konsistenz ist eng mit dem der Konvergenz verbunden. Die Konvergenz geht aus den Stabilitätseigenschaften des Diskretisierungsverfahrens hervor und beinhaltet, dass die diskretisierte Differentialgleichung bei einem beliebig feinen Gitter bis auf die Rundungsfehler in die exakte Differentialgleichung übergeht. Eine genaue Analyse ist in der Regel nur für einfache, lineare Konvektions-Diffusionsprobleme möglich.

In der Praxis wird die Konvergenz nachgewiesen, indem die Navier-Stokes-Gleichungen auf einer Serie von systematisch verfeinerten Rechennetzen gelöst werden. Ändert sich die Lösung bei einer weiteren Verfeinerung nicht mehr, wird sie als gitterunabhängig bezeichnet. Eine systematische Verfeinerung des Zeitschrittes führt bei einem konvergenten Verfahren zu einer zeitschrittunabhängigen Lösung. Die Potenz, mit der der Fehler bei einer Verdoppelung der Auflösung geringer wird, wird als Ordnung des Verfahrens bezeichnet.

Nicht ganz korrekt wird oft der Zustand einer iterativen Lösung als Konvergenz bezeichnet. So definiert man ein Konvergenzkriterium, unter das die Residuen der zu lösenden Gleichungen fallen müssen, damit der Iterationsprozess als beendet angesehen werden kann.

Stromauf- und lineare Interpolation

Bei der Stromauf-Interpolation (UDS³) wird der gesuchte Wert ϕ_e abhängig von der an der Zellfläche vorherrschenden Geschwindigkeit durch den stromauf gelegenen Zellwert angenähert. Im englischen Sprachraum wurde hierfür der Begriff „Upwind Differencing Scheme“ (UDS) eingeführt:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{falls } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 . \end{cases} \quad (3.11)$$

Die lineare Interpolation (CDS) wurde bereits in Gleichung 3.7 vorgestellt.

Die Anwendung der Interpolationsvorschriften zur Approximation des konvektiven Flusses gestaltet sich problematisch, wie im folgenden gezeigt wird.

Das Upwind Differencing Scheme besitzt eine Genauigkeit erster Ordnung und ist uneingeschränkt stabil. Der Nachteil dieser Interpolationsmethode besteht darin, dass sie sich numerisch diffusiv verhält. Durch eine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt P für ein kartesisches Netz und eine positive Geschwindigkeit $\vec{u} \cdot \vec{n}$ ergibt sich:

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_P + \dots \quad (3.12)$$

Durch die Stromauf-Interpolation wird nur der erste Term wiedergegeben und es entsteht aus dem ersten der vernachlässigten Terme ein zusätzlicher diffusiver Anteil mit dem Koeffizienten Γ_e^{num} , der oft als falsche oder numerische Diffusion bezeichnet wird:

$$f_{e,num}^d = \Gamma_e^{num} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(\rho u) \Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} . \quad (3.13)$$

Beim Central Differencing Scheme ist die Genauigkeit der linear interpolierten Werte zweiter Ordnung, also höherwertiger als die Stromauf-Interpolation. Diese Methode besitzt jedoch die Eigenschaft, dass sie, angewendet auf den konvektiven Transportterm, während der iterativen Lösungsprozedur oszillierende Lösungen erzeugt und damit die Stabilität des Verfahrens beeinträchtigt. PATANKAR [82] zeigt am vereinfachten Beispiel einer eindimensionalen stationären Konvektions-Diffusionsgleichung, dass die Verwendung von CDS für den konvektiven Term ab einer Zell-Peclet-Zahl größer als zwei physikalisch unsinnige Lösungen liefert und damit eine schlechte Approximation des Zellflächenwerts darstellt. Die Peclet-Zahl ist hierbei definiert als

³UDS = Upwind Differencing Scheme

$$Pe_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e}, \quad (3.14)$$

mit $(\delta x)_e$ als Abstand zwischen zwei Zellmittelpunkten. Sie beschreibt das Verhältnis aus konvektivem und diffusivem Transport in der Energiegleichung, allerdings auf die Zellwerte bezogen und nicht auf die globalen Abmessungen einer Problemstellung. Analog dazu beschreibt die Reynolds-Zahl das Verhältnis aus konvektivem und diffusivem Transport bei der Impulsgleichung.

Die Notwendigkeit einer numerisch stabilen Approximation für den konvektiven Fluss, die gleichzeitig zweiter Ordnung genau ist, stellt ein fundamentales Problem bei finiten Approximationen dar, das in der Fachwelt intensiv diskutiert wurde. Im Folgenden wird eine Auswahl an verbesserten Verfahren vorgestellt. Maßgeblich für den entwickelten CFD-Code ist hierbei die Bedingung, dass die Interpolationsmethode eine Approximationsgenauigkeit mit einer Ordnung größer als eins ermöglicht und gleichzeitig keinen erheblich größeren Rechenaufwand mit sich bringt.

Verbesserte Interpolationsmethoden

Ein Verfahren, das ursprünglich auf SPALDING [111] zurückgeht, ist das sogenannte „Hybrid-Verfahren“. Hierbei wird, abhängig von der in Gleichung 3.14 definierten Zell-Peclet-Zahl das Central Differencing Scheme verwendet, wenn die Stabilitätsbedingung $|Pe| < 2$ erfüllt ist, ansonsten das Upwind Differencing Scheme. Um die Eignung dieses Verfahrens für die numerische Berechnung von Laufrad-Strömungen zu prüfen, wurde für ein typisches Simulationsergebnis die Zell-Peclet-Zahl berechnet, wobei das Längenmaß $(\delta x)_e$ von der Größenordnung $\sqrt[3]{V}$ sei, siehe BADER [9]. Es ergibt sich, dass etwa 98% der Zellen Peclet-Zahlen größer als zwei aufweisen. Eine Verwendung des Hybrid-Verfahrens führt, angewendet auf Laufradströmungen, also nur in 2% der Zellen zu einem verbesserten Ergebnis gegenüber dem reinen Upwind Differencing Scheme. Es kommt deshalb nicht als sinnvolle Alternative in Frage.

RITZINGER [93] und BADER [9] verwenden eine Linearkombination von CDS und UDS mit einem konstanten Blendingfaktor β :

$$\phi_e^{n+1} = (\phi_e^{low})^{n+1} + \beta (\phi_e^{high} - \phi_e^{low})^n. \quad (3.15)$$

In Gleichung 3.15 bezeichnet $(\phi_e^{low})^{n+1}$ den implizit diskretisierten Anteil mit einer Approximation niedriger Ordnung zum Iterationsschritt $n + 1$. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite ist die explizit berechnete Korrektur der Approximation höherer und niedriger Ordnung zum Iterationsschritt n , die zum Quellterm addiert wird. Diese nachgeführte Korrektur wird auch als „Deferred Correction Scheme“ (DCS) bezeichnet.

Der Blendingfaktor β legt das Verhältnis zwischen beiden verwendeten Interpolationsmethoden fest, wobei dieser aus dem Intervall $0 \leq \beta \leq 1$ zu wählen ist. Der Blendingfaktor ist so klein zu wählen, dass im gesamten Strömungsgebiet eine stabile Lösung garantiert wird. Dadurch wird auch dort, wo eine höherwertige Diskretisierung möglich wäre, das numerisch diffusive UDS verwendet und somit die Genauigkeit der numerischen Lösung herabgesetzt.

Bei kavitierenden Strömungen wird wegen der extrem großen Änderungen der Gemischdichte der Blendingfaktor β im Kavitationsgebiet gleich Null gesetzt, im restlichen Strömungsgebiet wird der vom Benutzer gewählte Wert beibehalten. Dies sorgt bei hohen Dichtesprüngen für eine stabile Lösung, da dort die Ordnung des Verfahrens herabgesetzt wird. Insgesamt bleibt aber die gewählte Ordnung des Verfahrens erhalten.

Die nachgeführte Korrektur bringt den Nachteil mit sich, einen a priori unbekanntem Blendingfaktor zu spezifizieren. Neben diesem, in der Literatur als **Flux-Blending** bekannten Verfahren wird das sogenannte **Flux-Limiter**-Verfahren zur Entwicklung genauer, stabiler Interpolationsverfahren verwendet. Dabei wird der mit einem hochgenauen Verfahren auf der Zellfläche ermittelte Fluss durch ein geeignetes Begrenzungskriterium derart limitiert, dass lokal zwar die Genauigkeit herabgesetzt wird, insgesamt aber die Ordnung des Verfahrens erhalten bleibt. Diese Verfahren sind als TVD⁴-Verfahren in der Literatur bekannt. Sie stammen ursprünglich aus der Entwicklung von Euler-Verfahren für aerodynamische Anwendungen.

Die Basis für limitierte Verfahren ist die von LEONARD & MOKHTARI [68] eingeführte Methodik der NVF⁵, die später von DARWISH & MOUKALLED [23] für inhomogene Netztopologien zum NVSF⁶ erweitert wurde. Die NVSF-Methode ist nicht nur zur Entwicklung von Interpolationsverfahren geeignet, sondern erleichtert auch die Implementierung bestehender Verfahren erheblich. Sie wird im folgenden kurz beschrieben.

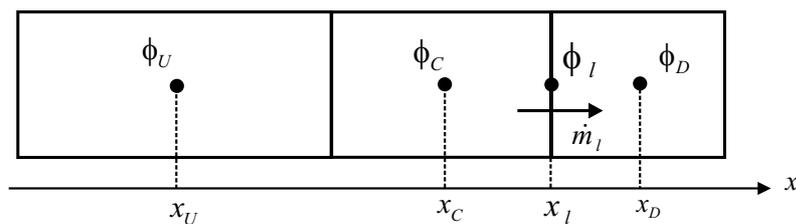


Abbildung 3.2: Eindimensionale Betrachtung der Kontrollvolumina zur Bestimmung des konvektiven Flusses

Die Analyse in der NVSF beruht auf der lokal eindimensionalen Betrachtung des konvektiven Terms. Abbildung 3.2 stellt drei in Strömungsrichtung angeordnete Zellen eines inhomogenen Netzes dar. Gesucht ist die interpolierte Variable ϕ_l auf der

⁴Total Variation Diminishing

⁵NVF = Normalized Variable Formulation

⁶NVSF = Normalized Variable and Space Formulation

Zellfläche l in Abhängigkeit von den beiden stromauf gelegenen Werten ϕ_C und ϕ_U sowie dem stromab gelegenen Wert ϕ_D ⁷. Die entsprechenden Positionen sind mit x_C , x_U und x_D bezeichnet. Zunächst werden die dimensionslosen Variablen $\tilde{\phi}$ und \tilde{x} definiert:

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{x} = \frac{x - x_U}{x_D - x_U}. \quad (3.17)$$

Mit Hilfe der Normierung kann die Anzahl der unabhängigen Variablen, von denen die normierte Variable $\tilde{\phi}_l$ abhängt, auf drei reduziert werden:

$$\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_l). \quad (3.18)$$

In dieser Arbeit wird das MINMOD-Verfahren nach HARTEN [45] verwendet. Die Funktion $\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_l)$ für das MINMOD-Verfahren ist:

$$\tilde{\phi}_l = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{x}_l}{\tilde{x}_C}\right) \tilde{\phi}_C & 0 < \tilde{\phi}_C \leq \tilde{x}_C \\ \left(\frac{\tilde{x}_l - \tilde{x}_C}{1 - \tilde{x}_C}\right) + \left(\frac{\tilde{x}_l - 1}{\tilde{x}_C - 1}\right) \tilde{\phi}_C & \tilde{x}_C < \tilde{\phi}_C \leq 1 \\ \tilde{\phi}_C & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.19)$$

Im NS2D/NS3D-Code ist die eindimensionale Formulierung des MINMOD-Verfahrens in jeder Indexrichtung hinterlegt.

Obwohl das MINMOD-Verfahren die Genauigkeit automatisch dem lokalen Strömungszustand anpasst, um eine stabile Lösung zu erzeugen, kann es - insbesondere bei der Simulation kavitierender Strömungen - notwendig sein, analog zu den **Flux-Blending**-Verfahren einen UDS-Beitrag zum konvektiven Fluss zu geben, siehe Gleichung 3.15. Der Blending-Faktor β und damit die Ordnung des Verfahrens kann aber in der Regel deutlich höher als bei der Kombination CDS-UDS gewählt werden.

3.2.5 Diskretisierung der diffusiven Flüsse

Die numerische Berechnung des in Gleichung 3.3 enthaltenen diffusiven Transportterms wird durch den für die Zellfläche gemittelten Fluss

$$F_e^d = \int_{S_e} \Gamma \text{grad}(\phi) \cdot \vec{n} dS \approx (\Gamma \text{grad} \phi \cdot \vec{n})_e S_e \quad (3.20)$$

⁷U = Uwind C = Central D = Downwind

approximiert. Zur Auswertung dieses Terms ist der Austauschkoefizient Γ und der Gradient von ϕ auf der Zellfläche zu berechnen. Beide werden durch eine lineare Interpolation nach Gleichung 3.7 bestimmt. Neben den unmittelbaren Nachbarn der Zelle P ist auch die nächstweitere Zellschicht betroffen, so dass die implizite Implementierung von Gleichung 3.20 schwierig ist.

Einen alternativen Lösungsweg schlägt MUZAFERIJA [79] vor. Der diffusive Fluss wird durch eine Ortsableitung in Richtung des Normalenvektors gebildet:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e. \quad (3.21)$$

Für wenig gescherte Netze ist $\vec{n} \approx \vec{\xi}$, siehe Abbildung 3.1. Mit dieser Annahme und unter Verwendung einer zentralen Differenz lässt sich der resultierende diffusive Fluss durch eine Zellfläche implizit durch den Ausdruck

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{|\vec{r}_E - \vec{r}_P|} \quad (3.22)$$

darstellen. Der explizit nachgeführte Term korrigiert die vereinfachte Betrachtungsweise durch die korrekte Ableitung in n -Richtung. Der gesamte diffusive Fluss durch eine Zellfläche ist nach MUZAFERIJA [79] damit

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e^{n+1} + \Gamma_e S_e \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e - \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e \right)^n. \quad (3.23)$$

Die in obiger Gleichung überstrichenen Terme bezeichnen die von den Zellmittelpunkten an die Zellflächen interpolierten Gradienten. Zusammengefasst ergibt sich für den diffusiven Fluss mit den Gleichungen 3.22 und 3.23:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E^{n+1} - \phi_P^{n+1}}{|\vec{r}_E - \vec{r}_P|} + \Gamma_e S_e \overline{(\text{grad } \phi)}|_e^n (\vec{n} - \vec{i}_\xi). \quad (3.24)$$

Der explizit betrachtete Korrekturterm, der die Differenz zwischen der lokalen ξ - und n -Richtung enthält, ist in der Regel klein gegenüber dem implizit diskretisierten Anteil, so dass diese Approximation das Konvergenzverhalten nicht stark beeinflusst.

Für eine vollständige Bilanz der diffusiven Flüsse muss die Diskretisierung wie bei den konvektiven Termen auf alle sechs Teilflächen des Kontrollvolumens angewendet werden.

Der diffusive Term bei den Impulsgleichungen

Da es sich bei der Impulsgleichung um eine Vektorgleichung handelt, unterscheiden sich deren diffusive Terme von dem der allgemeinen Transportgleichung, siehe Gleichung 3.20. Formal lässt sich der gesamte Spannungstensor der Impulsgleichungen in zwei Anteile aufspalten, z.B. für die Gleichung der i -ten Geschwindigkeitskomponente:

$$F_e^d = \int_{S_e} \mu \operatorname{grad} u_i \cdot \vec{n} dS + \int_{S_e} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{i}_j \cdot \vec{n} dS . \quad (3.25)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite hat die Form des allgemein definierten diffusiven Transportterms in Gleichung 3.20. Er wird mit der oben beschriebenen Methode behandelt. Der zweite Summand auf der rechten Seite verschwindet unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung 2.4 nur, wenn die Dichte und die Viskosität auf allen Randflächen einer Zelle als konstant angenommen werden kann. Gilt diese Voraussetzung nicht, wie z.B. bei turbulenten kavitierenden Strömungen, so ist er immer noch klein gegenüber dem ersten Anteil. Aus diesem Grund wird dieser Term explizit behandelt.

Die zur Berechnung des Terms erforderlichen Geschwindigkeitsgradienten an den Zellflächen bestimmen sich dabei wieder aus den in den Zellmittelpunkten bekannten Gradienten durch lineare Interpolation.

3.2.6 Diskretisierung der Quellterme

Alle in den zu lösenden Transportgleichungen auftretenden Quellterme werden über den in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Ansatz approximiert.

Berechnung des Druckgradienten in den Impulsgleichungen

Im Falle der Impulsgleichungen wird der darin enthaltene Druckgradient, siehe Gleichung 2.5, in eine konservative Form von Oberflächenintegralen umgewandelt:

$$- \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = - \int_S p \vec{i}_i \cdot \vec{n} dS . \quad (3.26)$$

In diskretisierter Form ergibt sich:

$$- \left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_P V_P = - \sum_l p_l \vec{i}_i \cdot \vec{n} S_l ; \quad l = w, e, s, n, b, t . \quad (3.27)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass beide Ausdrücke in Gleichung 3.27 gleichwertig sind, wenn zur Berechnung des Druckgradienten $\partial p / \partial x_i$ an der Stelle P der Gauß'sche Integralsatz angewendet wird.

Berechnung der Transportgleichungen des Turbulenzmodells

Die verwendeten Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodelle, für die je eine Transportgleichung für k und ϵ , siehe Gleichung 2.59 und 2.60, gelöst werden, erfordern besondere Aufmerksamkeit.

Zunächst sollen die Vorzeichen der in den Transportgleichungen enthaltenen Quellterme abgeschätzt werden. Die Turbulenzgrößen k und ϵ sind definitionsgemäß stets positiv. Der in Gleichung 2.61 bzw. 2.72 definierte Produktionsterm P_k lässt sich in eine Summe aus Quadraten von Geschwindigkeitsgradienten umformen und ist somit ebenfalls stets positiv. Gleiches gilt für die in den Modellen enthaltenen Konstanten, die Gemischdichte ρ und die turbulente Viskosität μ_t . Aus dieser Abschätzung folgt, dass der erste Term stets positiv und damit ein echter Quellterm ist, während der zweite Term stets negativ ist und damit formal einen Senkenterm darstellt.

Die numerische Behandlung der Gleichungen muss sicherstellen, dass die Summe aus Quell- und Senkenterm zu keiner Zeit kleiner als Null werden, um nicht im Laufe der iterativen Lösungsprozedur negative Turbulenzgrößen zu erzeugen. Aus diesem Grund werden die Transportgleichungen nicht in der vorliegenden Form gelöst.

Im Falle des k - ϵ -Turbulenzmodells wird der Senkenterm der k -Gleichung um einen expliziten Faktor ϵ^n/k^n erweitert und damit bezüglich k linearisiert. Die rechte Seite der k -Gleichung sieht umgeformt wie folgt aus:

$$\dots + P_k - \varrho \epsilon \quad \Rightarrow \quad \dots + P_k - \varrho \frac{\epsilon^n}{k^n} k^{n+1} . \quad (3.28)$$

Durch die Erweiterung wird die Endlösung der k -Gleichung nicht beeinflusst, da im auskonvergierten Zustand $k^{n+1} = k^n$ gilt, und somit die originäre Transportgleichung erhalten bleibt.

Der erweiterte Term wird nun dem impliziten Teil von k_P zugeschlagen, wobei die von PATANKAR [82] postulierte Forderung nach einem negativen Quellterm-Koeffizienten stets erfüllt ist. Diese Bedingung ist für die stabile Berechnung der Gleichung erforderlich, da der negative Quellterm-Koeffizient auf der rechten Seite zu einer Erhöhung des zentralen Koeffizienten a_P auf der linken Seite und damit zu einer Verstärkung der Diagonaldominanz der Lösungsmatrix führt.

Durch obige Umformung ist auf der rechten Seite nur ein positiver Quellterm verblieben, der eine bestehende Lösung erhöht, aber niemals verringert. Eine temporäre Berechnung negativer Turbulenzgrößen ist damit unterbunden.

Im Falle der ϵ -Transportgleichung, siehe Gleichung 2.60, wird der Senkenterm ebenfalls formal bezüglich ϵ linearisiert und zum impliziten Anteil von ϵ_P addiert:

$$\dots + \frac{1}{T_T} (C_{\epsilon 1} P_k - \varrho C_{\epsilon 2} \epsilon) \quad \Rightarrow \quad \dots + \frac{\epsilon^n}{k^n} (C_{\epsilon 1} P_k - \varrho C_{\epsilon 2} \epsilon^{n+1}) . \quad (3.29)$$

3.2.7 Zeitliche Diskretisierung

Die Zeitableitung in Gleichung 3.2 gibt die zeitliche Entwicklung der Größe ϕ wieder und wird als Volumenintegral behandelt. SAUER [94] verwendet eine implizite Euler Methode zur zeitlichen Diskretisierung. Dieses Verfahren ist nur 1. Ordnung genau, weshalb die Verwendung von sehr kleinen Zeitschritten erforderlich ist, um eine zeitechte Lösung erzielen zu können.

Aus diesen Gründen wird die diskrete Zeitableitung in dieser Arbeit über ein implizites Drei-Zeitebenen-Verfahren bestimmt, das die Funktionswerte des aktuellen, des letzten (o) und des vorletzten (oo) Zeitschrittes verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV \approx V_P \frac{3\phi_P - 4\phi_P^o + \phi_P^{oo}}{2\Delta t}. \quad (3.30)$$

Das Verfahren, das aus einer Taylor-Reihenentwicklung folgt, zeichnet sich durch eine Genauigkeit zweiter Ordnung bei nahezu unbegrenzter Stabilität aus.

3.3 Lösung des Gleichungssystems

Die allgemeine Transportgleichung in integraler Form, siehe Gleichung 3.2, beinhaltet konvektive und diffusive Terme sowie Zeitterme und Quellterme. Im vorangegangenen Kapitel wurde anhand einer repräsentativen Zellfläche e gezeigt, wie diese einzelnen Terme approximiert werden. Um letztendlich die diskretisierte Transportgleichung einer allgemeinen Variable ϕ zu erhalten, werden die jeweiligen Flüsse durch die sechs Teilflächen eines Kontrollvolumens und die Quellen und der Zeitterm entsprechend Gleichung 3.2 bilanziert. Nach Umformung nimmt diese Gleichung folgende lineare Form an:

$$A_P \phi_P^m = \sum A_{nb} \phi_{nb}^m + b_\phi^{m-1}. \quad (3.31)$$

Die Aufspaltung der Gleichung erfolgt nach Termen, die den Wert am zentralen Punkt P , Werte an dessen unmittelbaren Nachbarpunkten und sonstige Einflüsse enthalten. Die Koeffizienten A_{nb} beschreiben den Einfluss der Umgebung auf den Punkt P durch Konvektion und Diffusion. Der Quellterm b_ϕ beinhaltet sowohl die im Kontrollvolumen wirkenden Kräfte, wie z.B. die Coriolisterme im Falle der Impulsgleichungen, als auch die aus dem Deferred Correction Scheme stammenden Korrekturterme, die eine höherwertige Flussapproximation sicherstellen.

Die einzelnen Transportgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten und die Turbulenzgrößen werden sequentiell gelöst. Da die Erhaltungsgleichungen zum einen

nicht-linear und zum anderen stark wechselseitig gekoppelt sind, müssen die linearisierten Gleichungen iterativ gelöst werden.

Um das Stromfeld vollständig zu beschreiben, wird für jeden Punkt im Rechennetz eine Bilanzgleichung 3.31 aufgestellt. Durch die konservative Formulierung wird sichergestellt, dass ein Massen- oder Impulsfluss, der aus einer Zelle austritt, vollständig in die benachbarte Zelle einströmt.

Kontrollvolumen, die an Randflächen angrenzen, werden mit Randbedingungen versehen, welche die Problemstellung beschreiben. Diese werden in Kapitel 3.6 näher erläutert.

Die Gesamtheit aller Bilanzgleichungen führt zu einem System von N linearen Gleichungen mit N als Anzahl der betrachteten Finiten Volumina im Rechennetz, das in folgender Weise angeschrieben werden kann:

$$A \vec{\phi} = \vec{b} . \quad (3.32)$$

Darin bezeichnet A eine $N \times N$ -Matrix mit einer die Koeffizienten A_P beinhaltenden Hauptdiagonalen und sechs symmetrisch angeordneten Nebendiagonalen mit den entsprechenden Koeffizienten A_{nb} .

Zur Berechnung des Gleichungssystems 3.32 wird die „Strongly Implicit Procedure“ (SIP) von STONE [117] verwendet. Dieser Algorithmus wurde speziell für die Lösung algebraischer Gleichungen, die aus einer Diskretisierung partieller Differentialgleichungen stammen, entwickelt und basiert auf einer unvollständigen Zerlegung der Matrix A in eine obere und untere, schwach besetzte Dreiecksmatrix.

Wie alle linearen iterativen Gleichungslöser für dünnbesetzte Bandmatrizen benötigt die SIP eine diagonaldominante Lösungsmatrix, d.h. dass der Diagonalkoeffizient betragsmäßig größer als die Summe der Nachbarkoeffizienten sein muss.

Jede höherwertige konvektive Diskretisierung als das UDS in der Konvektions-Diffusions-Gleichung 3.2 bewirkt, dass nicht nur die unmittelbaren Nachbarn, sondern auch weitere Zellschichten auf Gleichung 3.32 Einfluss nehmen. Die Forderung nach einer dünnen Diagonalstruktur würde verletzt werden. Deshalb werden die konvektiven Flüsse mit einer nachgezogenen Korrektur implementiert, was erstmalig von KHOSLA & RUBIN [58] vorgeschlagen wurde. Dieses Vorgehen bietet sich an, da wegen der **Flux-Blending**-Technik ohnehin ein UDS-Fluss berechnet wird, siehe Gleichung 3.15.

Um die Diagonaldominanz der Matrix A zu gewährleisten, wird die allgemeine diskretisierte Gleichung 3.31 durch einen Ansatz von PATANKAR [82] umgeformt. Die unmittelbar aus Gleichung 3.31 berechnete Lösung ϕ^{neu} wird in der Regel aus Stabilitätsgründen mit der Vorschrift

$$\phi_P^m = \phi_P^{m-1} + \beta_\phi (\phi^{neu} - \phi^{m-1}) . \quad (3.33)$$

unterrelaxiert, wobei der Relaxationsfaktor aus dem Intervall $0 < \beta_\phi < 1$ gewählt wird. Löst man die Gleichung 3.31 nach ϕ_P^{neu} auf und setzt diesen Ausdruck in Gleichung 3.33 ein, so erhält man nach der Umformung folgenden Zusammenhang:

$$\frac{A_P}{\beta_\phi} \phi_P^m = \sum A_{nb} \phi_{nb}^m + b_\phi^{m-1} + \frac{1 - \beta_\phi}{\beta_\phi} A_P \phi_P^{m-1} . \quad (3.34)$$

Diese umgeformte Gleichung wird während der Iterationen gelöst.

Zur Beurteilung der Güte der Lösung wird das Residuum herangezogen. Das Residuum Res_{lin}^n zur linearen Iteration n des linearen Gleichungslösers berechnet sich wie folgt:

$$Res_{lin}^n = b_\phi^n - A_P \phi_P^n - \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb}^n . \quad (3.35)$$

Eine Reduktion der Summennorm von Res_{lin}^n um eine Größenordnung ist ausreichend, da im Zusammenhang mit dem impliziten Druckkorrekturverfahren keine genauere Lösung gefordert wird.

Die Konvergenzgüte der äußeren Iterationen wird mit dem entsprechenden Residuum Res_{nlin}^m beurteilt, das zur äußeren Iteration m folgendermaßen gebildet wird:

$$Res_{nlin}^m = Res_{lin}^{n=1} = b_\phi^{m-1} - A_P \phi_P^{m-1} - \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb}^{m-1} . \quad (3.36)$$

In der Regel sind Lösungen brauchbar, bei denen die Summennorm von Res_{nlin}^m der zu lösenden Gleichungen um vier Größenordnungen fällt. Bei der Simulation kavitierender Strömungen sollte die Maximumnorm von Res_{nlin}^m zur Abschätzung der Konvergenzgüte herangezogen werden, da das Gebiet unzureichender Konvergenz auf wenige Zellen, die den Wert der Summennorm dominieren, begrenzt ist.

3.4 Transportgleichung für den Dampfvolumenteil

Die Diskretisierung der Transportgleichung für den Dampfvolumenteil ergibt sich durch Integration der Gleichung 2.17 und Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \frac{1}{V} \sum_l \alpha_l F_l^t = \frac{n_0}{1 + n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right). \quad (3.37)$$

Dabei werden die konvektiven Flüsse mit den zum Zeitpunkt t berechneten Volumenströmen gebildet.

Bei Kavitation ist die Dampfphase homogen in der Rechenzelle verteilt. Es strömt ein Gemisch aus Dampfblasen und Flüssigkeit aus der Zelle. Die Zusammensetzung des Fluids, das über die Phasengrenze zur Nachbarzelle konvektiert wird, entspricht der Zusammensetzung des Fluids, das sich momentan in der Zelle befindet. Dieser physikalische Sachverhalt wird numerisch durch die Stromauf-Interpolation für den Wert des Dampfvolumentanteils an der Phasengrenzfläche beschrieben:

$$\alpha_e = \begin{cases} \alpha_P & \text{falls } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \alpha_E & \text{falls } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Für jeden Zeitschritt wird zunächst die Transportgleichung für den Dampfvolumenteil gelöst. Mit den neuen Werten für den Phasenanteil werden dann die Dichte und die Viskosität des Gemisches aktualisiert. Anschließend wird das im folgenden Kapitel beschriebene Druckkorrektur-Verfahren ausgeführt, bevor sich der Ablauf für den nächsten Zeitschritt wiederholt. Bei stationären Simulationen ist der Zeitschritt nur noch ein künstlicher Zeitschritt, der die Funktion einer Unterrelaxion hat. Der Ablauf des Verfahrens bleibt aber prinzipiell gleich.

3.5 Druckkorrektur-Verfahren

Im Kapitel 3.2.4 wurde für die Approximation des konvektiven Flusses zunächst angenommen, dass die Volumenströme an den Zellflächen bekannt sind. Zur Bestimmung des Stromfeldes unter Erhaltung der Masse wird ein Druckkorrektur-Verfahren angewendet, welches aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitet wird. Beim NS2D/NS3D-Code kommt der weitverbreitete SIMPLE⁸-Algorithmus zur Anwendung, der von PATANKAR [82] vorgeschlagen und von FERZIGER & PERIĆ [32] für konturangepasste Rechnetze erweitert wurde. Zur Simulation der kavitierenden Strömung wurde das SIMPLE-Verfahren - ähnlich wie in der Arbeit von SAUER [94] beschrieben - angepasst.

⁸SIMPLE = Semi IMPLICIT procedure for Pressure-Linked Equations

3.5.1 Strömungen inkompressibler Fluide

Innerhalb eines Iterationsschrittes stellt sich die diskretisierte Impulsgleichung der i -ten Geschwindigkeitskomponente wie folgt dar:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{m*} + \sum A_{nb}^{u_i} u_{i,nb}^{m*} = b_{u_i}^{m-1} - V \left(\frac{\partial p^{m-1}}{\partial x_i} \right)_P . \quad (3.39)$$

Der Druckterm wird formal für die weitere Herleitung vom restlichen Quellterm abgespalten. Das aus dieser Gleichung zum Iterationsschritt m berechnete Geschwindigkeitsfeld erfüllt die Impulsgleichung, nicht jedoch die Kontinuitätsgleichung. Aus diesem Grund werden die aus den Impulserhaltungsgleichungen berechneten Geschwindigkeiten als vorläufiges Ergebnis mit dem Index * gekennzeichnet.

Um zusätzlich die Massenerhaltung zu erfüllen, werden der Druck aus dem vorangegangenen Iterationsschritt p^{m-1} und die vorläufigen Geschwindigkeiten u_i^{m*} um einen kleinen Wert korrigiert.

$$u_i^m = u_i^{m*} + u_i' \quad ; \quad p^m = p^{m-1} + p' . \quad (3.40)$$

Da auch nach der Korrektur die Impulserhaltung zu gewährleisten ist, gilt Gleichung 3.39 auch für die Geschwindigkeiten u_i^m und den Druck p^m . Subtrahiert man diese Gleichung von Gleichung 3.39, und geht man davon aus, dass $b_{u_i}^{m-1} = b_{u_i}^m$, so erhält man einen Zusammenhang zwischen u_i' und p' :

$$u_{i,P'} = -\frac{\sum A_{nb}^{u_i} u_{i,nb}'}{A_P^{u_i}} - \frac{V}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P = \hat{u}'_{i,P} - \frac{V}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P . \quad (3.41)$$

Der Term mit den Geschwindigkeitskorrekturen an den Nachbarpunkten wird dabei als $\hat{u}'_{i,P}$ abgekürzt. Aus der Kontinuitätsgleichung 2.31 ergibt sich zusammen mit Gleichung 3.40:

$$\frac{\partial u_{i,P}^{m*}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}'_{i,P}}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.42)$$

Unter Anwendung der Beziehung 3.41 folgt daraus die Erhaltungsgleichung für die Druckkorrektur p' :

$$\frac{\partial u_{i,P}^{m*}}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{u}'_{i,P}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{V}{A_P^{u_i}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P . \quad (3.43)$$

Problematisch bei dieser Gleichung ist der zweite Term mit den unbekanntem Geschwindigkeitskorrekturen der Nachbarpunkte $\hat{u}'_{i,P}$.

Beim SIMPLEC-Algorithmus nach VAN DOORMAL & RAITHBY [124] wird der Term folgendermaßen approximiert:

$$\hat{u}_{i,P}' \approx \frac{\sum_{nb} A_{nb}^{u_i}}{A_P^{u_i}}. \quad (3.44)$$

Beim SIMPLE-Verfahren wird dieser Ausdruck vernachlässigt, was aber mit einer für Druck und Geschwindigkeiten erforderlichen Relaxation verbunden ist. Mit obiger Annahme vereinfacht sich der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeits- und Druckkorrekturen zu

$$u_{i,P}' = -\frac{V}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P, \quad (3.45)$$

d.h., die Geschwindigkeitskorrekturen sind proportional zum Druckkorrektur-Gradienten in Richtung der Geschwindigkeitskomponente. Die Struktur der Druckkorrektur-Gleichung (DKG) vereinfacht sich, so dass darauf effiziente Lösungsverfahren angewendet werden können.

Die zu lösende Erhaltungsgleichung für die Druckkorrektur lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{V}{A_P^{u_i}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P = \frac{\partial u_{i,P}^{m*}}{\partial x_i}. \quad (3.46)$$

Sie hat die Form einer elliptischen Gleichung für p' mit einem Quellterm $\text{div}(\vec{u}_p)^{m*}$ auf der rechten Seite. Erfüllt das Geschwindigkeitsfeld \vec{u}_p^{m*} die Kontinuitätsgleichung, so ist der Quellterm für die Druckkorrektur gleich Null.

Die Form der Kontinuitätsgleichung 2.31 kann nur bei inkompressiblen Flüssigkeiten verwendet werden, da hier die Dichte konstant ist, d.h. $\rho = \text{const.}$. Bei einem Zweiphasengemisch ist dies nicht der Fall. Der Behandlung der Gemischdichte bei der Simulation kavitierender Strömungen kommt entscheidene Bedeutung zu. Dies wird in Kapitel 3.5.3 beschrieben.

3.5.2 Druckkorrektur-Verfahren für konturangepasste Netze

Zur Lösung der Gleichung 3.46 wird diese über ein Finites Volumen integriert, mit dem Gauß'schen Integralsatz in eine Summe von Oberflächenintegralen umgewandelt

und über die Flächen des Kontrollvolumens in Abbildung 3.1 integriert. Dazu wird die Kontinuitätsgleichung in ihrer Integralform angeschrieben, wobei die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes nicht gleich Null ist:

$$\sum_l \dot{F}_l^{m*} = \Delta \dot{F} \neq 0 \quad ; \quad l = e, w, s, n, , b, t . \quad (3.47)$$

Mit Hilfe eines Korrekturvolumenstroms \dot{F}' kann nun eine Bedingung für die Divergenzfreiheit formuliert werden:

$$\sum_l \dot{F}'_l + \Delta \dot{F} = 0 \quad ; \quad l = e, w, s, n, , b, t . \quad (3.48)$$

Die Volumenstromkorrektur \dot{F}' wird mit den Korrekturgeschwindigkeiten laut Gleichung 3.41 bestimmt. Die Beziehung für die auf die Zellfläche e interpolierte Korrekturgeschwindigkeit normal zur Zellfläche $u'_{n,e}$ lautet:

$$u'_{n,e} \approx - \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_e . \quad (3.49)$$

Der Diagonalkoeffizient A_P^u ist für alle Komponenten der Impulsgleichung identisch, was durch eine besondere Maßnahme bei der Implementierung der Wandrandbedingung erreicht wird, vergleiche Kapitel 3.6.3. Der überstrichene Term bezeichnet eine lineare Interpolation nach Gleichung 3.7. Die Gleichung für den Korrekturvolumenstrom lautet nun für die Zellfläche e :

$$\dot{F}'_e = u'_{n,e} S_e \approx -S_e \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_e . \quad (3.50)$$

Der Gradient der Druckkorrektur in Zellnormalenrichtung wird zentral um die Fläche e als Volumenintegral diskretisiert:

$$\dot{F}'_e = -S_e \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_e \left[\frac{p'_E - p'_P}{(\vec{r}_E - \vec{r}_P) \cdot \vec{n}} \right]_e . \quad (3.51)$$

Das Einsetzen von Gleichung 3.51 in 3.48 ergibt die diskrete Druckkorrekturgleichung. Die Auswertung dieser Gleichung erfordert die Berechnung der Normalgeschwindigkeiten an den Zellflächen. Diesem Punkt muss besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

PATANKAR [82] zeigt für orthogonale Netze, dass die Impuls- und Druckkorrekturgleichung entkoppelt sind, wenn für den Druck und die Geschwindigkeiten eine

nicht-versetzte Variablenanordnung, bei der alle Informationen an ein und demselben Ort gespeichert sind, verwendet wird. Diese Anordnung wird auch als **colocated variable arrangement** bezeichnet. Er empfiehlt deshalb eine versetzte Variablenanordnung, ein sogenannte **staggered variable arrangement**, das ursprünglich auf HARLOW & WELSH [44] zurückgeht. Für nicht-orthogonale Netze ist die versetzte Variablenanordnung jedoch schwierig umzusetzen und führt zu einem erheblichen Verwaltungsaufwand innerhalb eines CFD-Codes.

Zur Umgehung des Problems wird im NS2D/NS3D-Code deshalb ein **colocated variable arrangement** mit einem Stabilisierungsterm nach RHIE & CHOW [91] verwendet, der die Koppelung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes sicherstellt und die Ausbildung oszillierender Lösungen unterbindet.

Die gesuchte Normalgeschwindigkeit an der Zellfläche $u_{n,e}^{m*}$ berechnet sich nach folgender Vorschrift:

$$u_{n,e}^{m*} = \overline{u_{n,e}^{m*}} - \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}}\right)}_e \left[\overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)}_e - \overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)}_e \right]^{m-1}. \quad (3.52)$$

Darin bezeichnen überstrichene Terme an die Zellfläche interpolierte Werte. Der zweite Term auf der rechten Seite stellt den Stabilisierungsterm dar, der korrigierend in die Flussberechnung eingreift, sobald Oszillationen im Druckfeld auftreten. Die Verwendung des Korrekturterms resultiert aus der Interpolation der Impulsgleichung auf die Zellfläche. FERZIGER & PERIĆ [32] weisen darauf hin, dass der Korrekturterm in Gleichung 3.52 bei einem großen Koeffizienten $A_P^{u_n}$ klein wird, wie es beispielsweise bei instationären Rechnungen mit sehr kleinen Zeitschritten der Fall ist.

Die in Gleichung 3.52 enthaltenen Druckgradienten werden nach FERZIGER & PERIĆ [32] wie folgt approximiert:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)_e \approx \frac{p_E - p_P}{(\vec{r}_E - \vec{r}_P) \vec{n}}, \quad (3.53)$$

$$\overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n}\right)}_e \approx \frac{\overline{(\text{grad } p)}_e (\vec{r}_E - \vec{r}_P)}{(\vec{r}_E - \vec{r}_P) \vec{n}}. \quad (3.54)$$

Der resultierende vorläufige Volumenstrom \dot{F}_e^{m*} durch die repräsentative Zellfläche e ergibt sich zu

$$\dot{F}_e^{m*} = u_{n,e}^{m*} S_e, \quad (3.55)$$

mit $u_{n,e}^{m*}$ aus den Gleichungen 3.52 bis 3.54:

$$u_{n,e}^{m*} = \overline{u_{n,e}^{m*}} - \frac{1}{(\vec{r}_E - \vec{r}_P) \vec{n}} \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_e \left[(p_E - p_P) - \overline{(\text{grad } p)}_e (\vec{r}_E - \vec{r}_P) \right]^{m-1} . \quad (3.56)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 3.51 und 3.55 in Gleichung 3.48 erhält man die Druckkorrektur-Gleichung in Abhängigkeit des Wertes p'_P im Zellmittelpunkt und der Mittelpunktwerte p'_L der Nachbarzellen $L = E, W, S, N, B, T$:

$$\sum_{l,L} -S_l \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_l \left[\frac{p'_L - p'_P}{(\vec{r}_L - \vec{r}_P) \vec{n}} \right]_l = S_{DKG} \quad ; \quad \begin{array}{l} l = e, w, s, n, b, t ; \\ L = E, W, S, N, B, T . \end{array} \quad (3.57)$$

Dabei ist

$$S_{DKG} = \sum_l S_l \overline{u_{n,l}^{m*}} - S_l \cdot \frac{1}{(\vec{r}_L - \vec{r}_P) \vec{n}} \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_l \left[(p_L - p_P) - \overline{(\text{grad } p)}_l (\vec{r}_L - \vec{r}_P) \right]^{m-1} . \quad (3.58)$$

mit $l = e, w, s, n, b, t$;

$L = E, W, S, N, B, T$.

Die numerische Lösung des Gleichungssystems kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Lösung der diskretisierten Impulsgleichung 3.39 zur Bestimmung von u_i^{m*} .
2. Korrektur des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes:
 - Bestimmung des Volumenstromdefekts $\Delta \dot{F}$ mit den Gleichungen 3.48 und 3.55,
 - Berechnung der Druckkorrektur p' aus der Lösung der Druckkorrektur-Gleichung 3.48,
 - Korrektur des Druckfeldes unter Verwendung eines Unterrelaxationsfaktors β_p :

$$p^m = p^{m-1} + \beta_p p' , \quad (3.59)$$

- Korrektur der Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten P:

$$u_{i,P}^m = u_{i,P}^{m*} + u_{i,P}' \quad ; \quad u_{i,P}' = - \left(\frac{V}{A_P^{u_i}} \right)_P \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P . \quad (3.60)$$

3. Korrektur der Volumenströme an den Zellflächen l mit Gleichung 3.51:

$$\dot{F}_l^m = \dot{F}_l^{m*} + F_l' . \quad (3.61)$$

4. Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen für die turbulenten Größen k und ϵ ,
5. Beginn einer neuen Iteration.

3.5.3 Druckkorrektur-Verfahren für kavitierende Strömungen

Zur Herleitung der Druckkorrektur-Gleichung für kavitierende Strömungen wird die Kontinuitätsgleichung in ihrer für kavitierende Strömungen angepassten Form verwendet:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} . \quad (3.62)$$

Analog zum SIMPLE-Verfahren für inkompressible Strömungen wird die Beziehung zwischen Druck- und Geschwindigkeitskorrektur hergeleitet,

$$u_{i,P'} = -\frac{V}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P \quad (3.63)$$

und in die Kontinuitätsgleichung 3.62 eingesetzt:

$$\frac{\partial u_i^{m*} + u_i'}{\partial x_i} = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} , \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{V}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) \right] = -\frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \left[\frac{\partial u_i^{m*}}{\partial x_i} \right]_P . \quad (3.65)$$

Diese Gleichung wird analog zur inkompressiblen Druckkorrektur-Gleichung diskretisiert und man erhält die Druckkorrektur-Gleichung für kavitierende Strömungen in Abhängigkeit des Wertes p'_P im Zellmittelpunkt und der Mittelpunktwerte p'_L der Nachbarzellen $L = E, W, S, N, B, T$:

$$\sum_{l,L} -S_l \left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)_l \left[\frac{p'_L - p'_P}{(\vec{r}_L - \vec{r}_P) \cdot \vec{n}} \right]_l = S_{DKG} - \frac{1}{1 - \alpha} \frac{d\alpha}{dt} V , \quad (3.66)$$

mit $l = e, w, s, n, b, t$;
 $L = E, W, S, N, B, T$.

Die totale Ableitung des Dampfvolumentanteils nach der Zeit wurde bereits in Kapitel 2.2.2 behandelt. Man erhält:

$$\sum_{l,L} -S_l \overline{\left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)}_l \left[\frac{p'_L - p'_P}{(\vec{r}_L - \vec{r}_P) \vec{n}} \right]_l = S_{DKG} - \underbrace{\frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)}_{S_{KAV}} V, \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad l &= e, w, s, n, b, t; \\ L &= E, W, S, N, B, T. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der zusätzliche Quellterm S_{KAV} durch Anwendung der Kettenregel umformuliert. Zur Berechnung des Wachstums bzw. des Kollaps von Kavitationsblasen wird die Rayleigh-Beziehung, Gleichung 2.25, verwendet. Um beim Blasen kollaps einen negativen Ausdruck unter der Wurzel zu vermeiden, wird das Vorzeichen VZ abgespalten.

$$\begin{aligned} S_{KAV} &= \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} V \\ &= VZ \cdot \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \sqrt{\frac{2|p_v - p_P|}{3\rho_l}} V, \end{aligned} \quad (3.68)$$

mit

$$VZ = \frac{p_v - p_P}{|p_v - p_P|}. \quad (3.69)$$

Der Quellterm S_{KAV} ist damit explizit eine Funktion des Druckes p_P . Dies erschwert die Lösung der Druckkorrektur-Gleichung bei kavitierenden Strömungen erheblich.

Deshalb wird ein von SAUER [94] entwickeltes Verfahren benutzt, das die Änderung des Quellterms bei der Lösung der Druckkorrektur-Gleichung mitberücksichtigt. Ist der Quellterm positiv, wird ein positives p'_P berechnet und der Druck p_P angehoben. Die treibende Druckdifferenz ($p_v - p_P$) wird reduziert und das Blasenwachstum verlangsamt sich. Die Reduktion des Quellterms durch ein positives p'_P kann durch die partielle Ableitung des Quellterms nach dem Druck approximiert werden:

$$\frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} = \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{\partial \dot{R}}{\partial p} V. \quad (3.70)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitung der Blasenwachstumsgeschwindigkeit nach dem Druck wird für Wachstum und Kollaps getrennt durchgeführt:

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial p} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{\frac{2}{3\rho_l} (p_v - p_P)} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3\rho_l} (p_v - p_P)}} \frac{2}{3\rho_l} (-1) & \text{Wachstum} \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(-\sqrt{\frac{2}{3\rho_l} (p_P - p_v)} \right) = \frac{-1}{\sqrt{\frac{2}{3\rho_l} (p_P - p_v)}} \frac{2}{3\rho_l} (+1) & \text{Kollaps} \end{cases} \quad (3.71)$$

Für das Wachstum und für den Kollaps der Kavitationsblasen bewirkt eine Druckerhöhung $p' > 0$ die Reduktion der Blasenwachstumsgeschwindigkeit \dot{R} . Für das Blasenwachstum ist dies unmittelbar einsichtig, da die treibende Druckdifferenz reduziert wird, $(p_v - (p + p')) < (p_v - p)$. Auch beim Blasen kollaps wird bei einer Druckerhöhung die Blasenwachstumsgeschwindigkeit reduziert. Da beim Kollaps die Blasenwachstumsgeschwindigkeit ein negatives Vorzeichen hat, bewirkt eine Druckerhöhung eine betragsmäßig größere Kollapsgeschwindigkeit.

Mit Gleichung 3.71 kann der korrigierte Quellterm in Abhängigkeit der Druckkorrektur p'_P berechnet werden:

$$S_{KAV}^K = S_{KAV} + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} p'_P . \quad (3.72)$$

Damit lautet die Druckkorrektur-Gleichung zur Berechnung kavitierender Strömungen:

$$\sum_{l,L} -S_l \left(\frac{V}{A_P^{u_n}} \right)_l \left[\frac{p'_L - p'_P}{(\vec{r}_L - \vec{r}_P) \cdot \vec{n}} \right]_l = S_{DKG} - \left(S_{KAV} + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} p'_P \right) , \quad (3.73)$$

mit $l = e, w, s, n, b, t ;$
 $L = E, W, S, N, B, T .$

Die Korrektur des Quellterms wird implizit behandelt und Gleichung 3.73 lautet in Matrixschreibweise:

$$\left(A_P + \frac{\partial S_{KAV}}{\partial p} \right) p'_P + \sum_{nb} A_{nb} p'_{nb} = S_{DKG} - S_{KAV} . \quad (3.74)$$

Nach der Lösung der Druckkorrektur-Gleichung werden das Druckfeld und das Geschwindigkeitsfeld bzw. die Volumenströme aktualisiert. Der Ablaufplan entspricht dem Druckkorrektur-Verfahren für inkompressible Strömungen in Kapitel 3.5.2.

3.6 Randbedingungen

Die Diskretisierung der Transportgleichung einer allgemeinen Variable ϕ setzt den Wert am betrachteten Punkt in Beziehung zu seinen Nachbarpunkten und sonsti-

gen Einflüssen. Wie schon erwähnt, fehlen an Zellen, die an Berandungsflächen des betrachteten Strömungsgebiets angrenzen, Informationen für die Bilanzgleichung. Zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems müssen an diesen Orten für jede Variable Randbedingungen vorgegeben werden.

Entsprechend sind an diesen Flächenelementen Aussagen über die drei Geschwindigkeitskomponenten $(u_x, u_y, u_z)^T$, die Turbulenzgrößen k und ϵ , über die Druckkorrektur p' sowie über den Dampfvolumenanteil α zu treffen.

Dies kann über die Vorgabe eines Gradienten oder über eine direkte Wertzuweisung geschehen, was entsprechend als Neumann- oder Dirichlet-Randbedingung bezeichnet wird.

3.6.1 Einströmrand

Geschwindigkeiten

An Einströmrandern werden die Geschwindigkeitskomponenten direkt mit einer Dirichlet-Randbedingung vorgeschrieben. Dies kann im kartesischen Koordinatensystem $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ oder im Zylinder-Koordinatensystem $\vec{u} = (u_r, u_u, u_z)^T$ durchgeführt werden.

Druck und Druckkorrektur

Für den Druck p und für die Druckkorrektur p' wird eine Neumann-Randbedingung mit einem konstanten Gradienten entlang der Netzlinien verwendet. Die Implementierung erfolgt über eine lineare Extrapolation aus den Werten im Feld.

Turbulenzgrößen

Zusätzlich zu den Stromfeldgrößen müssen an Einströmrandern Werte für die spezifische turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ϵ definiert werden. Die Turbulenzgrößen werden mit der Dirichlet-Randbedingung belegt.

Phasenanteil und Keimradius

Am Einströmrand werden auch die Fluideigenschaften in Form des Dampfvolumenanteils α und des mittleren Keimradius R mit Hilfe der Dirichlet-Randbedingung vorgegeben. Wenn nicht anders angegeben, wird $\alpha_{in} = 1.1 \cdot e^{-5}$ und $R_{in} = 3 \cdot e^{-5} m$ angenommen.

3.6.2 Ausströmrand

Geschwindigkeiten

Am Ausströmrand ist die Strömung vorab nicht bekannt, sondern Ergebnis der Rechnung. Aus diesem Grund definiert man die Geschwindigkeitskomponenten hier über eine Extrapolation der Form $\partial u_i / \partial \xi = 0$. Diese Art der Randbedingung ist streng genommen nur gültig, wenn der Ausströmrand möglichst weit stromab liegt und keinen Einfluss auf die Strömung im Rechengebiet nimmt.

Druck und Druckkorrektur

Der Druck wird mit einer Dirichlet-Bedingung vorgegeben. Die entsprechende Dirichlet-Randbedingung für die Druckkorrektur ist $p' = 0$. Die Geschwindigkeit $u_{n,e}^{m*}$ wird mit Gleichung 3.52 und der Massenstrom mit Gleichung 3.55 bestimmt, wobei die Interpolationen in Extrapolationen aus dem Feldinneren übergehen. Da der Wert der Druckkorrektur am Rand gleich Null ist, aber der Gradient der Druckkorrektur nicht verschwindet, sind auch die Geschwindigkeitskorrekturen nach Gleichung 3.49 und die Volumenstromkorrektur nach Gleichung 3.50 ungleich Null. Somit sind die Geschwindigkeiten und der Volumenstrom am Austrittsrand während des Iterationsprozesses mit den Gleichungen 3.60 und 3.61 zu korrigieren. In Gleichung 3.60 wird die Geschwindigkeitskorrektur nach Gleichung 3.49 für die Zellfläche eingesetzt, wobei die Interpolation in eine Extrapolation übergeht.

Der statische Druck am Austritt p_{out} kann als konstanter oder als flächengemittelter Wert p_{const} oder p_{av} über der Austrittsfläche festgeschrieben werden. Zwischen den beiden Zuständen kann über einen Faktor $0 \leq \gamma_p \leq 1$ linear variiert werden:

$$p_{out} = \gamma_p p_{av} + (1 - \gamma_p) p_{const} . \quad (3.75)$$

Turbulenzgrößen

Bei turbulenter Rechnung werden die Turbulenzgrößen k und ϵ linear entlang der Netzlinien extrapoliert.

Dampfphasenanteil und Keimradius

Für den Dampfanteil und für den Blasenradius wird eine Neumann-Randbedingung $\phi_r = \phi_P$ vorgeschrieben. Der Fluss berechnet sich analog zu den Geschwindigkeiten. Allerdings sollte darauf geachtet werden, dass der Austrittsrand weit genug vom Kavitationsgebiet entfernt liegt, da es zu numerischen Problemen kommen kann, wenn Dampf bis zum Austrittsrand transportiert wird.

3.6.3 Wand

An undurchlässigen Wänden verschwindet der Volumenfluss sowie der konvektive Fluss durch die Wand. Der Impulsaustausch findet lediglich über den diffusiven Fluss statt.

Geschwindigkeiten und Wandschubspannungen

Die Geschwindigkeiten an der Wand sind aufgrund der Haftbedingung gleich der Wandgeschwindigkeit selbst. Für im Absolutsystem drehende Wände gilt $\vec{w} = 0$ bzw. $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, für stehende Wände $\vec{u} = 0$.

Für die Berechnung der Impulsgleichungen ist es erforderlich, die an ein Randkontrollvolumen angreifenden Wandschubspannungen τ_w nach Betrag und Richtung zu bestimmen.

Die Richtung, in die die viskosen Kräfte an der Randfläche angreifen, wird nach FERZIGER & PERIĆ [32] durch die wandparallele Richtung des Geschwindigkeitsvektors im Zellmittelpunkt der wandnächsten Zelle approximiert. Diesem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, dass sich die Wirkrichtung der Wandschubspannung zwischen Wand und wandnächster Zelle nicht ändert.

Zur Berechnung wird ein lokales Koordinatensystem $(t, n, s)^T$ eingeführt, wobei t die wandparallele Richtung, n die wandnormale Richtung und s die auf t und n senkrecht stehende Richtung bezeichnen soll. Für die am Zellvolumen angreifenden Wandschubspannungskomponenten gilt:

$$\tau_{nn} = 2 \mu \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 , \quad (3.76)$$

$$\tau_{nt} = \mu \frac{\partial u_t}{\partial n} , \quad (3.77)$$

$$\tau_{ns} = \mu \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 . \quad (3.78)$$

Gleichung 3.78 impliziert, dass der Einheitsvektor in Tangentialrichtung t_i mit dem wandparallelen Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}_{i,t,P} = u_{i,t,P}$ zusammenfällt, siehe Abbildung 3.3, so dass $u_s \equiv 0$ ist. Für t_i gilt somit

$$t_i = \frac{u_{i,t,P}}{|u_{i,t,P}|} . \quad (3.79)$$

Im Zweidimensionalen ist die Bestimmung von $u_{i,t,P}$ trivial, im Dreidimensionalen dagegen wird $u_{i,t,P}$ durch Abzug des wandnormalen Geschwindigkeitsvektors vom Geschwindigkeitsvektor ermittelt:

$$u_{i,t,P} = u_{i,P} - u_{i,n,P} \cdot n_i = u_{i,P} - (u_{i,P} \cdot n_i) n_i . \quad (3.80)$$

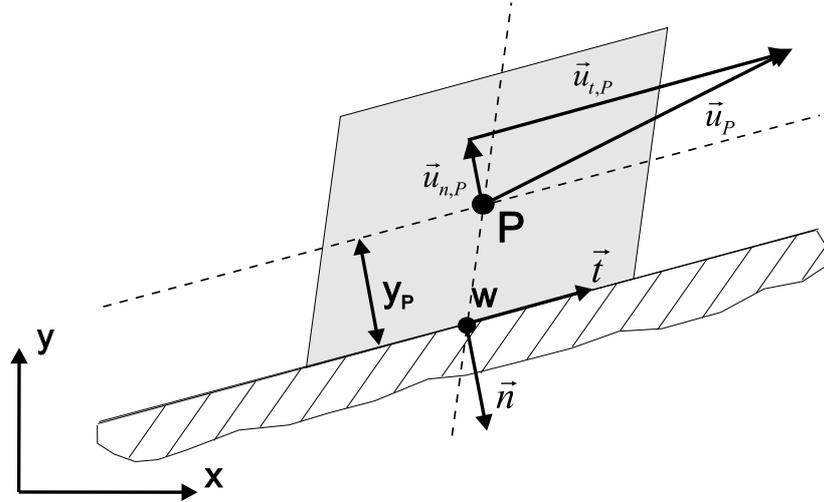


Abbildung 3.3: Skizze einer Wandzelle zur Erläuterung der Berechnung der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente

Der diffusive Wandfluss \vec{f}_w^d lässt sich mit Gleichung 3.4 wie folgt berechnen, wobei S_w der Flächeninhalt der Wandfläche ist:

$$f_{i,w}^d = \int_{S_w} \tau_{nt} t_i dS \approx \tau_{nt} t_i S_w . \quad (3.81)$$

Die Wandschubspannung τ_{nt} nach Gleichung 3.77 wird mit der Geschwindigkeit $u_{i,P}$ im Mittelpunkt der wandnächsten Zelle und $u_{i,w}$ an der Wand sowie dem normalen Wandabstand des wandnächsten Zellmittelpunktes y_P folgendermaßen approximiert:

$$\tau_{nt} \approx \mu \frac{t_j (u_{j,P} - u_{j,w})}{y_P} . \quad (3.82)$$

Die Implementierung des diffusiven Flusses zum Iterationszähler m wird mittels einer nachgezogenen Korrektur so vorgenommen, dass der Diagonalkoeffizient $A_p^{u_i}$ für alle Geschwindigkeitskomponenten u_i der gleiche ist:

$$f_{i,w}^{d,m} \approx \left(u_i \frac{S_w}{y_P} \right)^m + \left[-u_i \frac{S_w}{y_P} + t_i \mu \frac{t_j (u_{j,P} - u_{j,w})}{y_P} S_w \right]^{m-1} . \quad (3.83)$$

Druck und Druckkorrektur

Da Wände fluidundurchlässig und somit der resultierende Massenstrom gleich Null ist, gilt an Wänden die Bedingung $\partial p' / \partial n = 0$. Der statische Druck wird linear aus dem Rechenggebiet an die Wände extrapoliert.

Turbulenzgrößen

Für die turbulente kinetische Energie k wird aufgrund der Haftbedingung sowohl die Dirichlet-Bedingung $k = 0$, als auch eine Neumann-Randbedingung $\partial k / \partial n = 0$ implementiert. Für die Dissipationsrate wird die Randbedingung

$$\epsilon_w = \mu \frac{4k_P}{y_P^2} - \epsilon_P \quad (3.84)$$

verwendet, siehe SKODA [110].

Bei der Implementierung der Wandfunktion ist zunächst das logarithmische Wandgesetz nach Gleichung 2.66 zu hinterlegen. Um die Wandimplementierung des diffusen Flusses, Gleichung 3.83, beibehalten zu können, wird dazu zunächst eine Viskosität $\mu_{(wf)}$ eingeführt:

$$\mu_{(wf)} = \tau_{w,(wf)} \frac{y_P}{t_j (u_{j,P} - u_{j,w})} . \quad (3.85)$$

Die von der Wandfunktion bestimmte Wandschubspannung $\tau_{w,(wf)}$ lässt sich mit den Gleichungen 2.69 und 2.66 ausdrücken, so dass für $\mu_{(wf)}$ folgt:

$$\mu_{(wf)} = y^+ \frac{\mu k}{\ln(y^+ \tilde{E})} \quad \text{mit} \quad \tilde{E} = \exp(k C_{rough}) . \quad (3.86)$$

Die Größe C_{rough} ist die mittels einer empirischen Korrelation für Wandrauigkeiten angepasste Konstante des logarithmischen Gesetzes und lautet:

$$C_{rough} = C - \frac{1}{k} \ln(1 + 0.3k_r^+) \quad \text{mit} \quad k_r^+ = \frac{y^+ k_r}{y_P} . \quad (3.87)$$

Dabei ist k_r die äquivalente Sandrauigkeit.

Bei der Verwendung der Wandfunktion wird die ϵ -Gleichung in der wandnächsten Zellschicht nicht gelöst, sondern entsprechend Gleichung 2.71 mit $k = k_P$ vorgeschrieben.

Dampfvolumenanteil

Der Dampfvolumenanteil an der Wand wird mit einer Neumann-Randbedingung, d.h. für einen konstanten Gradienten entlang der Netzlinien bestimmt.

3.6.4 Symmetrie

Die Symmetrierandbedingung wird oft auch als reibungsfreie Wand oder Euler-Wand bezeichnet. Hier wird der Volumenfluss und der konvektive Fluss durch die Wand gleich Null gesetzt. Der Impulsaustausch findet über den diffusiven Fluss statt.

Geschwindigkeiten

Ähnlich wie an der Wand wird für die Symmetrie der diffusive Fluss über Betrag und Richtung der Schubspannung τ_s vorgeschrieben:

$$\tau_{nn} = 2 \mu_{eff} \frac{\partial u_n}{\partial n}, \quad (3.88)$$

$$\tau_{nt} = \mu_{eff} \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0, \quad (3.89)$$

$$\tau_{ns} = \mu_{eff} \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0. \quad (3.90)$$

Analog zur Wandrandbedingung wird die Bedingung 3.88 mit einer nachgeführten Korrektur implementiert:

$$f_{i,w}^{d,m} \approx \left(u_i \frac{S_s}{y_P} \right)^m + \left[-u_i \frac{S_s}{y_P} + t_i \mu \frac{t_j (u_{j,P} - u_{j,s})}{y_P} S_s \right]^{m-1}. \quad (3.91)$$

Druck und Druckkorrektur

Druck und Druckkorrektur werden mit der Neumann-Randbedingung für einen verschwindenden Gradienten auf den Symmetrierand extrapoliert.

Turbulenzgrößen und Dampfvolumenteil

Alle Turbulenzgrößen und der Dampfvolumenteil α werden mit einer Neumann-Randbedingung für einen verschwindenden Gradienten gesetzt.

3.6.5 Blockgrenzen

Der NS2D/NS3D-Code ist ein blockstrukturiertes Verfahren basierend auf einer Idee von LILEK ET AL. [71]. Dabei müssen die Netzknoten zweier angrenzender Blöcke nicht aufeinander liegen. Die Blöcke können aufgrund einer flexiblen Datenstruktur im Zwei- wie auch im Dreidimensionalen beliebig zueinander orientiert sein.

Der Code ist mittels der Software-Bibliothek MPI⁹ parallelisiert. Eine detaillierte Beschreibung der Datenverwaltung und der Parallelisierung findet sich in SKODA [110].

Das Blockinterface wird mit demselben Algorithmus zur Bestimmung der Flüsse behandelt wie das Innere des Rechenblocks, damit die Konservativität des Verfahrens gewährleistet ist. Die Diskretisierung höherer Ordnung wird dabei auch über Blockgrenzen hinweg beibehalten.

3.6.6 Periodische Ränder

Periodische Blockgrenzen unterscheiden sich bezüglich der Datenverwaltung nicht von den in Kapitel 3.6.5 beschriebenen Blockgrenzen.

Skalare Transportgrößen werden unmittelbar an die entsprechenden periodischen Randflächen übergeben. Die Geschwindigkeitsvektoren müssen zusätzlich über eine Rotationsmatrix um den Teilungswinkel γ gedreht werden.

Die Behandlung periodisch verdrehter Gradienten erfordert bei den Geschwindigkeiten besondere Aufmerksamkeit. Nähere Informationen hierzu finden sich z.B. bei RITZINGER [93] oder SKODA [110].

⁹MPI = Message Passing Interface

Kapitel 4

Validierung

Kavitierende Strömungen wurden in zahlreichen Experimenten untersucht. Die meisten in der Literatur verfügbaren Ergebnisse experimenteller Untersuchungen beschränken sich jedoch auf Aufnahmen des Kavitationsgebietes in Verbindung mit Druckmessungen auf der jeweiligen Profloberfläche oder Kanalwand. Es existieren nur sehr wenige experimentelle Ergebnisse, bei denen auch die Zwei-Phasen-Strömung innerhalb des Kavitationsgebietes untersucht wurde. Dazu gehören die Untersuchungen von STUTZ & REBOUD [119], [120], [121], die die Geschwindigkeitsverteilung und den lokalen Dampfanteil in der Kavitationszone in einem konvergent-divergenten Kanal mit Hilfe einer Messsonde bestimmten.

Zur Validierung des entwickelten CFD-Codes sollen außerdem experimentelle Ergebnisse von HOFMANN [48] und BACHERT [7] herangezogen werden. Hier wurde die kavitierende Strömung um ein zur Strömung angestelltes Profil in einem Kanal untersucht. Es wurden die Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Kavitationszone mit einem sogenannten PIV/LIF-Verfahren [7] und darüber hinaus die Schaufeldruckverteilungen gemessen.

4.1 Kavitierende Strömung durch eine Venturi-Düse

Detaillierte Messungen der instationär kavitierenden Strömung in einem konvergent-divergenten Kanal wurden von STUTZ & REBOUD durchgeführt. Neben Aufnahmen der kavitierenden Strömung mit Hilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera wurden Messungen der Geschwindigkeit und des Dampfvolumentanteils im Kavitationsgebiet durchgeführt, weshalb diese Ergebnisse zum Vergleich mit Ergebnissen aus der Simulation hervorragend geeignet sind.

4.1.1 Beschreibung des Testfalls

In einen Strömungskanal wurde eine konvergent-divergente Düse integriert. Die Messstrecke ist 520 mm lang, 44 mm breit und am Eintritt 50 mm hoch. Der konvergente Teil steigt in einem Winkel von 18° an, der divergente Teil hat einen Öffnungswinkel von 8° , weshalb diese Düse im weiteren als „Venturi8“ bezeichnet wird. Am engsten Querschnitt ist der Kanal 34.3 mm hoch. Die Geometrie der Düse und ein Ausschnitt des verwendeten Rechennetzes sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Eine zweite Geometrie, bei der der konvergente Teil einen Winkel von 4.3° und der divergente Teil einen Winkel von 4° hat, wurde zusätzlich untersucht. Am engsten Querschnitt ist dieser Kanal 43.7 mm hoch. Diese als „Venturi4“ bezeichnete Geometrie ist zusammen mit einem Ausschnitt des verwendeten Rechennetzes in Abbildung 4.2 dargestellt.

Bei den Experimenten wurde beobachtet, dass im Venturi8-Testfall instationäre Kavitation mit periodischer Wolkenablösung auftritt, während es beim Venturi4-Testfall zu einer quasi-stationären Schichtkavitation kommt. In den von STUTZ & REBOUD [119], [120], [121] veröffentlichten Ergebnissen werden größtenteils zeitlich gemittelte Geschwindigkeits- bzw. Dampfgehaltsverteilungen vorgestellt, das instationäre Verhalten wird vor allem qualitativ beschrieben.

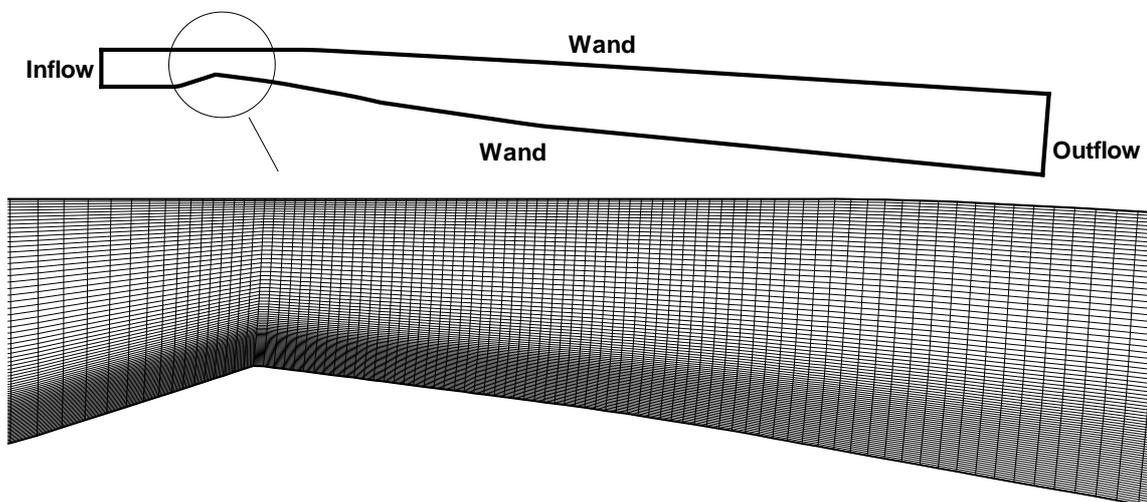


Abbildung 4.1: Geometrie des konvergent-divergenten Kanals „Venturi8“ und Ausschnitt des zur Simulation verwendeten Rechennetzes

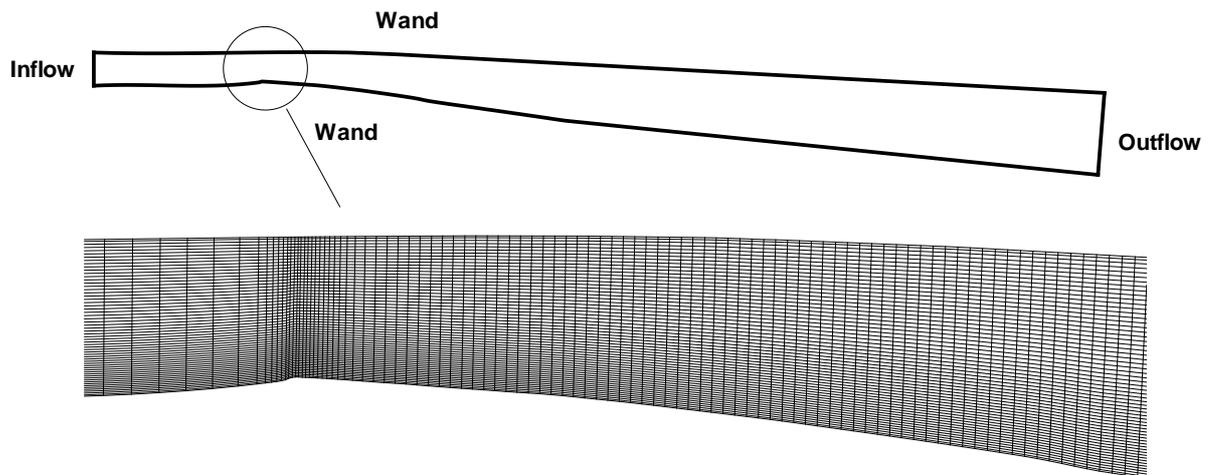


Abbildung 4.2: Geometrie des konvergent-divergenten Kanals „Venturi4“ und Ausschnitt des zur Simulation verwendeten Rechengitters

4.1.2 Verwendete Rechengetze

Der Qualität des Rechengitters kommt bei der numerischen Simulation kavitierender Strömungen entscheidende Bedeutung zu, siehe auch ŞENOCAK [106]. Bei technischen Strömungen herrschen Reynolds-Zahlen in der Größenordnung von $1 \cdot 10^6$ bis $1 \cdot 10^7$. Die turbulente Grenzschicht ist bei solchen Reynolds-Zahlen sehr dünn [100], weshalb Turbulenzmodelle mit Wandfunktion verwendet werden. Auch aus Gründen der Rechenzeit ist dies notwendig. Der dimensionslose Wandabstand y^+ der ersten Rechenzelle muss sich dabei im Geltungsbereich des logarithmischen Wandgesetzes befinden. Der dimensionslose Wandabstand hängt von der turbulenten Reynolds-Zahl ab, siehe Gleichung 2.65. Tritt nun in Wandnähe Kavitation auf, sinkt dort mit der Dichte des Zweiphasengemisches auch die lokale Reynolds-Zahl, was dazu führen kann, dass sich die erste Rechenzelle nicht mehr im logarithmischen Bereich befindet. Auch aufgrund der Modellannahme einer dispersen Blasenverteilung innerhalb einer Rechenzelle ist eine beliebige Verfeinerung des Gitters nicht möglich, siehe Kapitel 2.2.

Aus diesen Gründen wurde bei der Netzgenerierung der dimensionslose Wandabstand y^+ der wandnächsten Rechenzelle bei kavitationsfreier Strömung im Bereich $80 \leq y^+ \leq 100$ gewählt. Damit liegt der dimensionslose Wandabstand bei Kavitation noch bis zu einem lokalen Dampfvolumenanteil von $\alpha < 60\%$ im Bereich des logarithmischen Wandgesetzes. Die folgenden Rechenzellen wurden dann wieder kleiner gewählt, so dass eine feine Auflösung des Kavitationsgebietes gewährleistet ist. Aufgrund der relativ einfachen Geometrie wurde eine 1-Block-Topologie gewählt. Für

beide untersuchten Strömungskanäle wurde eine Studie der Abhängigkeit des Simulationsergebnisses vom Rechenetz durchgeführt. Zur Simulation der kavitierenden Strömung wurde für die Venturi8-Geometrie ein Rechenetz mit $200 \times 80 = 16000$ Rechenzellen, bei der Venturi4-Geometrie eines mit $220 \times 80 = 17600$ Rechenzellen verwendet. Für diese Auflösung erhält man eine netzunabhängige Lösung.

4.1.3 Instationäre Simulation der kavitierenden Strömung durch die Venturi8-Düse mit 8° Öffnungswinkel

Das blasendynamische Kavitationsmodell wurde von SAUER [94] grundsätzlich zur Simulation instationär kavitierender Strömungen entwickelt. Deshalb soll die Validierung des entwickelten Codes zunächst mit der Simulation instationär kavitierender Strömungen beginnen.

Für das instationäre Verhalten der kavitierenden Strömung gibt es nach CALLENAERE [14] zwei unterschiedliche physikalische Ursachen. Zum einen kann es zu Instabilitäten aufgrund äußerer Bedingungen kommen, beispielsweise durch Schwankungen des Systemdruckes. Diese Art der Instabilität wird als „system instability“ bezeichnet. Zum anderen gibt es bei kavitierenden Strömungen auch eine sogenannte „intrinsic instability“, also eine Instabilität aufgrund der Kavitation selbst. Diese wird ausgelöst durch das Auftreten des Re-Entrant-Jets, das Ablösen eines Teils der Kavitationszone und die dadurch entstehenden Druckschwankungen.

In der Realität sind beide Arten der Instabilität natürlich nicht immer voneinander zu trennen. Bei den hier vorgestellten instationären Simulationen wird das Druckniveau am Austritt des Rechengebietes auf einem konstanten Wert gehalten, so dass Systeminstabilitäten weitgehend unterdrückt werden. Das sich einstellende instationäre Verhalten der Strömung ist also in erster Linie eine innere Instabilität.

Zur Simulation der kavitierenden Strömung wird zunächst eine stationäre Simulation der Strömung bei ausreichend hohem Austrittsdruck durchgeführt, um eine kavitationsfreie Strömung zu gewährleisten. Bei der darauf folgenden instationären Simulation wird dann der Druck bei jedem Zeitschritt gesenkt, bis das gewünschte Druckniveau erreicht ist. Dabei wird das Druckniveau über die Druckrandbedingung am Austritt eingestellt. Dies ist vor allem aus Gründen der numerischen Stabilität notwendig, siehe SKODA [110].

Die Simulationen der kavitierenden Strömung durch den Venturi8-Kanal wurden bei Zeitschritten zwischen $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ und $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ durchgeführt. Für Zeitschritte kleiner als $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ist die Lösung unabhängig vom Zeitschritt. Am Einströmrand wurde eine Geschwindigkeit von $u_{in} = 7.2 \text{ m/s}$ und ein Turbulenzgrad von $Tu = 1\%$ vorgegeben. Als Fluid wurde kaltes Wasser mit $n_0 = 1 \cdot 10^8$ Keimen pro m^3 Flüssigkeit mit einem Sättigungsdampfdruck von $p_v = 3575 \text{ Pa}$ angenommen.

Einfluss der Turbulenzmodellierung

REBOUD ET AL. [89] und ŞENOCAK [106] stellten bei der numerischen Untersuchung der kavitierenden Strömung durch den Venturi8-Kanal fest, dass am hinteren Rand des Kavitationsgebietes die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ϵ sehr stark anwachsen. Dies stimmt mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen von GOPALAN & KATZ [41], [42] überein, die feststellten, dass aufgrund des Blasenkollapses am Ende eines Kavitationsgebietes ein Wirbel erzeugt wird und dadurch die turbulente kinetische Energie steigt. Bei der Simulation mit Standard-Turbulenzmodellen wird diese turbulente kinetische Energie überschätzt. Dies kann dazu führen, dass eine zu geringe Geschwindigkeit des Re-Entrant-Jets berechnet wird, die nicht ausreicht, das Ablösen eines Teils der Kavitationszone zu bewirken. Deshalb soll zunächst der Einfluss der Turbulenzmodellierung auf das instationäre Verhalten der Strömungssimulation untersucht werden.

Im folgenden werden Simulationen der kavitierenden Strömung durch den Venturi8-Kanal mit dem Standard- k - ϵ -Modell von LAUNDER & SPALDING [67], dem k - ϵ -Modell mit der Realizability-Methode nach MOORE & MOORE [78], dem nicht-linearen k - ϵ -Modell (LCL) von LIEN ET AL. [70] und dem k - ϵ -Modell mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], Gleichung 2.78, untersucht. Dabei wird der Exponent der Dichte-Korrektur in Gleichung 2.77, zu $n = 10$ gesetzt. Die Simulationen werden bei einem konstanten Kavitationsbeiwert von $\sigma = 2.37$ am Austritt durchgeführt. Zur Diskretisierung der konvektiven Terme wird bei allen durchgeführten Simulationen das MINMOD-Verfahren verwendet, siehe Kapitel 3.2.4. Aufgrund des instationären Verhaltens der kavitierenden Strömung kann der Kavitationsbeiwert am Eintritt stark schwanken. Bei allen Simulationen ergibt sich ein periodisch instationäres Verhalten, das sich aber bei den einzelnen Fällen signifikant unterscheidet.

Bei der Simulation mit dem Standard- k - ϵ -Modell wächst das Kavitationsgebiet im engsten Querschnitt an und verkleinert sich wieder, ohne dass es zur Ablösung einer Kavitationswolke kommt. Das Anwachsen und Sinken des Dampfolumens im gesamten Strömungsfeld über der Zeit ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Zusätzlich ist noch der dimensionslose Druck C_p

$$C_p = \frac{p_{in} - p_v}{\frac{\rho}{2} u_{in}^2} \quad (4.1)$$

am Eintritt des Strömungsfeld über der Zeit aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass der statische Druck am Eintritt beim Schrumpfen der Kavitationszone, also bei sinkendem Dampfolumenanteil, stark ansteigt. Auch der Druckverlauf ist periodisch instationär. Die Frequenz des Vorgangs liegt bei $f \approx 5 \text{ Hz}$ und damit weit unter der im Experiment beobachteten Frequenz von $f \approx 40 \text{ Hz}$.

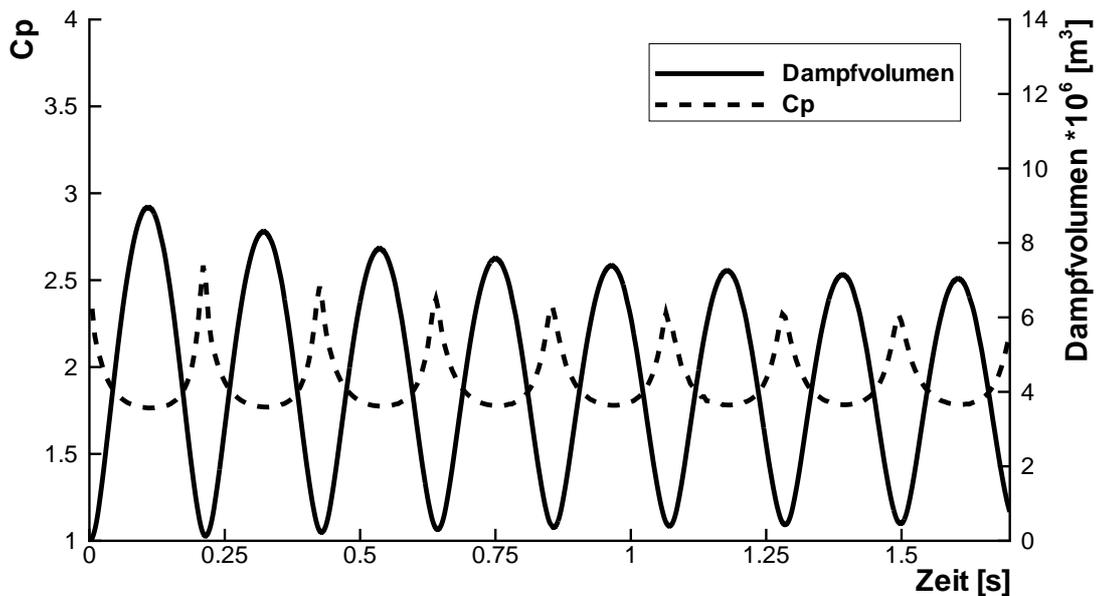


Abbildung 4.3: Verlauf des Dampfvolumens im gesamten Strömungsfeld und des dimensionslosen Druckes C_p am Eintritt über der Zeit

Der Dampfvolumenteil im Kern des Kavitationsgebietes ist bei der Simulation mit dem Standard- k - ϵ -Modell sehr hoch, $\alpha > 50\%$, siehe Abbildung 4.4. Dies steht im Widerspruch zu den experimentellen Untersuchungen, wo der Dampfvolumenteil immer unter $\alpha < 50\%$ bleibt. Auch ŞENOCAK [106] erhält bei der Simulation der instationär kavitierenden Strömung durch den Venturi8-Kanal mit dem Standard- k - ϵ -Modell nur ein wiederholtes Anwachsen und Schrumpfen der Kavitationszone und es kommt nicht zur Wolkenablösung.

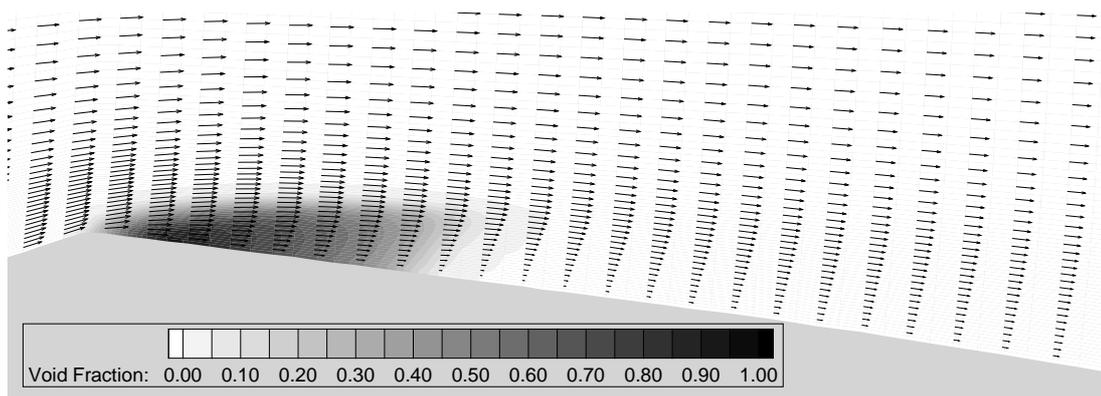


Abbildung 4.4: Zeitlich gemittelter Dampfanteil bei der Simulation mit dem Standard k - ϵ -Turbulenzmodell

Die Benutzung der Realizability-Bedingung in Verbindung mit dem k - ϵ -Modell führt zu einer geringfügigen Verbesserung des Simulationsergebnisses. Die Frequenz des Kavitationsvorganges ist mit $f \approx 6 \text{ Hz}$ etwas größer als bei der Simulation ohne

Verwendung der Realizability-Bedingung und damit näher am experimentellen Ergebnis. Zur Wolkenablösung kommt es aber auch bei Benutzung der Realizability-Bedingung nicht. Allerdings nimmt die Intensität der Drucksprünge beim Blasen-kollaps zu, was Abbildung 4.5 verdeutlicht. Die starken Druckschwankungen haben auch numerische Stabilitätsprobleme zur Folge.

Bei der Simulation der kavitierenden Strömung mit dem LCL-Turbulenzmodell werden diese Drucksprünge noch größer, so dass für das betrachtete Druckniveau keine stabile Lösung erzielt werden konnte.

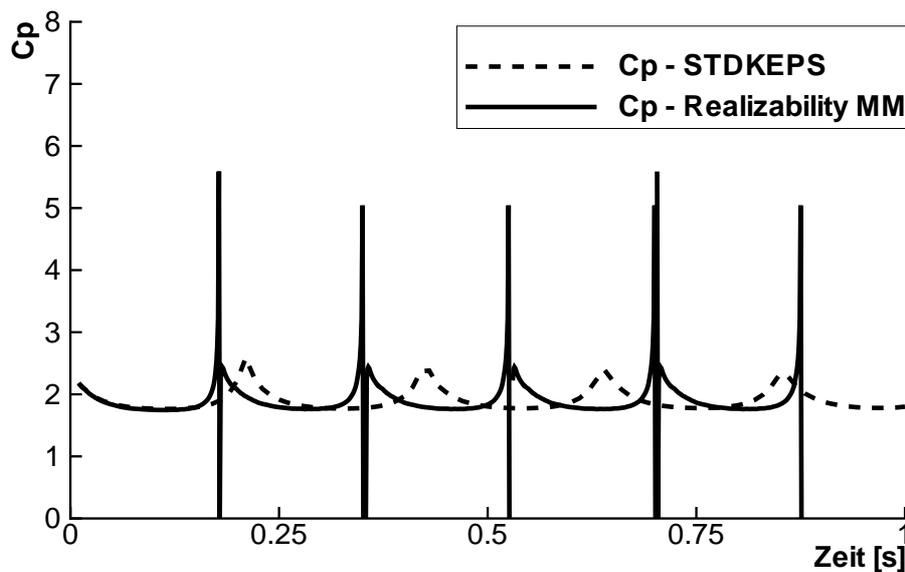


Abbildung 4.5: Vergleich des dimensionslosen Druckes C_p am Eintritt über der Zeit bei der Simulation mit und ohne Verwendung der Realizability-Bedingung

Im Gegensatz zu den bislang vorgestellten Ergebnissen ergibt sich bei der Verwendung der Dichte-Funktion nach REBOUD ET AL. [88] mit $n = 10$ als Exponent ein vollkommen anderer Vorgang. Die berechnete turbulente Viskosität im Bereich des Re-Entrant-Jets ist geringer. Dadurch ist der Re-Entrant-Jet in der Lage, bis fast zur Vorderseite der Kavitation vorzudringen und einen erheblichen Teil des Kavitationsgebietes abzulösen. Aufgrund des Re-Entrant-Jets bildet sich ein Wirbel, in dessen Zentrum ein lokales Druckminimum entsteht. Die abgelöste Kavitationswolke wird von der Strömung zusammen mit dem Wirbel mittransportiert, bis sie im Bereich höheren Druckes kollabiert. Der anliegende Teil der Kavitationszone schrumpft zunächst etwas, bis der Vorgang von Neuem beginnt. Der Dampfphasenanteil während eines Kavitationszyklus ist als Konturplot in Abbildung 4.6 dargestellt.

Der instationäre Vorgang ist aufgrund der Ablösung nicht so regelmäßig periodisch wie bei der Simulation ohne die Dichte-Funktion. Ein einzelner Zyklus dauert zwischen 25 und 84 ms, die mittlere Frequenz der Vorgangs liegt bei $f \approx 15 \text{ Hz}$. Der

Kollaps des abgelösten Kavitationsgebietes löst einen Drucksprung aus. Die im Strömungsfeld auftretenden Druckschwankungen haben eine Amplitude in der gleichen Größenordnung wie bei der Simulation ohne Dichte-Funktion, sind aber unregelmäßiger. Dies liegt daran, dass der abgelöste Anteil der Kavitationszone nicht immer exakt gleich groß ist und auch unterschiedlich weit mit der Strömung transportiert wird. Der Kavitationsbeiwert am Eintritt variiert zwischen $\sigma = 1.84$ und $\sigma = 2.95$. Der mittlere Kavitationsbeiwert ist $\sigma = 2.07$. Im anliegenden Teil des Kavitationsgebietes ist der maximale Dampfphasenanteil $\alpha < 80\%$, im abgelösten Kavitationsgebiet liegt er im Bereich $1\% < \alpha < 30\%$. Der Verlauf des dimensionslosen Druckes C_p am Eintritt des Strömungsfeldes über der Zeit ist für die Simulation mit und ohne Dichte-Funktion in Abbildung 4.7 dargestellt.

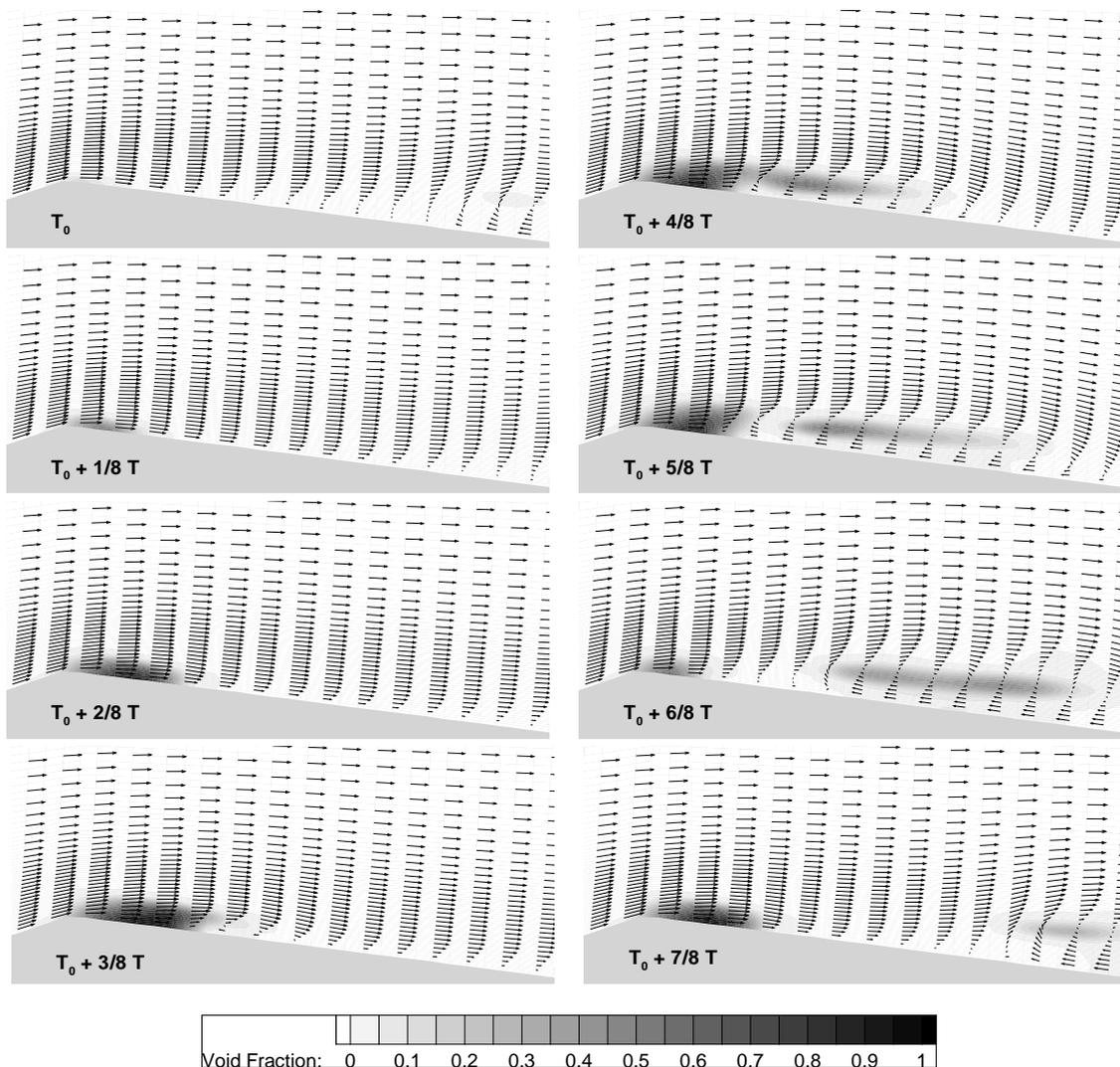


Abbildung 4.6: Instationäres Verhalten der Kavitation im Venturi-Kavitationskanal bei der Simulation mit dem Standard- k - ϵ -Modell und der Dichte-Funktion nach REBOUD ET AL. [89] mit $n = 10$ als Exponent bei einem mittleren Kavitationsbeiwert $\sigma_{in} = 2.07$ am Eintritt

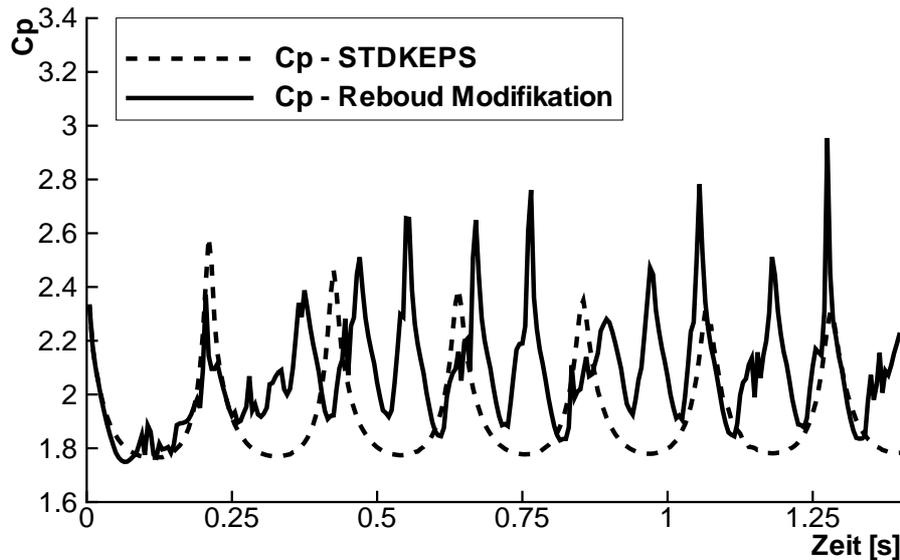


Abbildung 4.7: Vergleich des dimensionslosen Druckes C_p am Eintritt über der Zeit bei der Simulation mit dem Standard- k - ϵ -Modell und der Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89]

Analyse der lokalen Strömungsgrößen

Die Ergebnisse aus der instationären Simulation mit dem Standard- k - ϵ -Modell bei Verwendung der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89] sollen im folgenden genauer analysiert werden. Dabei werden die lokale Geschwindigkeit im Bereich der Kavitationszone und der Dampfvolumenteil mit den im Experiment ermittelten Werten verglichen.

Im Experiment von STUTZ & REBOUD [119], [121] wurde der lokale Dampfgehalt mit Hilfe einer Doppelmesssonde ermittelt, die an vier Stellen nach dem engsten Kanalquerschnitt in den Kanal eingeführt wurde. Die relative Unsicherheit bei der Bestimmung des lokalen Dampfanteils wird von den Autoren mit 15% angegeben. Mit dieser Sonde wurde auch die lokale Strömungsgeschwindigkeit in Kanalrichtung gemessen. Hier wird die Messunsicherheit mit 10% angegeben. Die ermittelten Werte für die Strömungsgeschwindigkeit außerhalb des Kavitationsgebietes stimmen gut mit den ebenfalls durchgeführten LDA-Messungen überein. Die Messebenen sind in Abbildungen 4.8 bis dargestellt.

Im Experiment [119] beträgt die mittlere Ausdehnung des anliegenden Kavitationsgebietes $L_{cav} = 45 \text{ mm}$. Dabei wird die Unsicherheit bei der Messung der Kavitationslänge mit $\pm 5 \text{ mm}$ angegeben. Die gleiche mittlere Länge des Kavitationsgebietes erhält man in der Simulation bei einem durchschnittlichen Kavitationsbeiwert am Eintritt von $\sigma_{in} = 1.88$. Der Kavitationsvorgang läuft bei diesem Druckniveau mit einer Frequenz von $f \approx 27 \text{ Hz}$ ab.

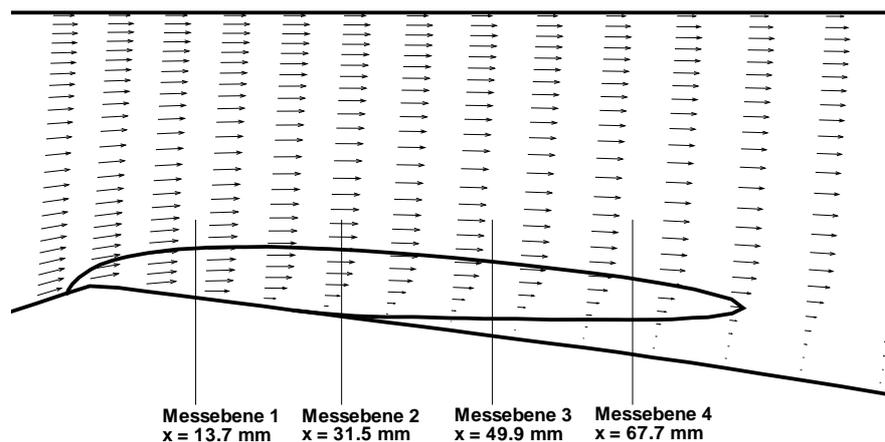


Abbildung 4.8: Messebenen zur Bestimmung des Dampfvolumentails und der Geschwindigkeit in Kanalrichtung bei den Experimenten von STUTZ & REBOUD [119]

Sowohl der lokale Dampfphasenanteil, als auch die Geschwindigkeitskomponente in Kanalrichtung im Inneren der Kavitationszone wurden mit einer Abtastrate von 67.5 kHz gemessen. Dabei wurden bei der instationären Messung nur die ersten drei Sensoren benutzt.

In den folgenden Abbildungen 4.9 bis 4.13 wird der von der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur berechnete Dampfanteil für fünf Zeitpunkte der Wolkenablösung den Messergebnissen gegenübergestellt. Dabei treffen sich die jeweiligen Zeitpunkte aus dem Experiment und der Simulation nicht exakt, weshalb nur ein qualitativer Vergleich des Wachstums und Ablösevorgangs möglich ist. Die Kavitationsgebiete sind mit einer Isolinie für $\alpha = 5\%$ dargestellt.

Zu Beginn des Wachstums der Kavitationszone wird der lokale Dampfvolumenteil der anliegenden Kavitationszone vom Kavitationsmodell überschätzt, siehe Abbildung 4.9. Der abgelöste Teil der Kavitationszone ist in der Simulation viel konzentrierter, d.h. der Dampfanteil im Zentrum der Kavitationswolke wird überschätzt und die Ausdehnung der Kavitationszone quer zur Strömungsrichtung wird unterschätzt, siehe Abbildung 4.10 bis 4.13. Dies kann daran liegen, dass diffusive Effekte, beispielsweise aufgrund der Turbulenz, in der Transportgleichung für den Dampfvolumenteil nicht berücksichtigt werden. Im weiteren Verlauf des Ablöseprozesses ist die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment besser, vor allem, wenn man die im Experiment angenommene Messunsicherheit von 15% berücksichtigt. Zu allen Zeitpunkten ist der gemessene Dampfvolumenteil $\alpha < 50\%$, so dass die Annahme einer dispersen Blasenverteilung vom Experiment bestätigt wird.

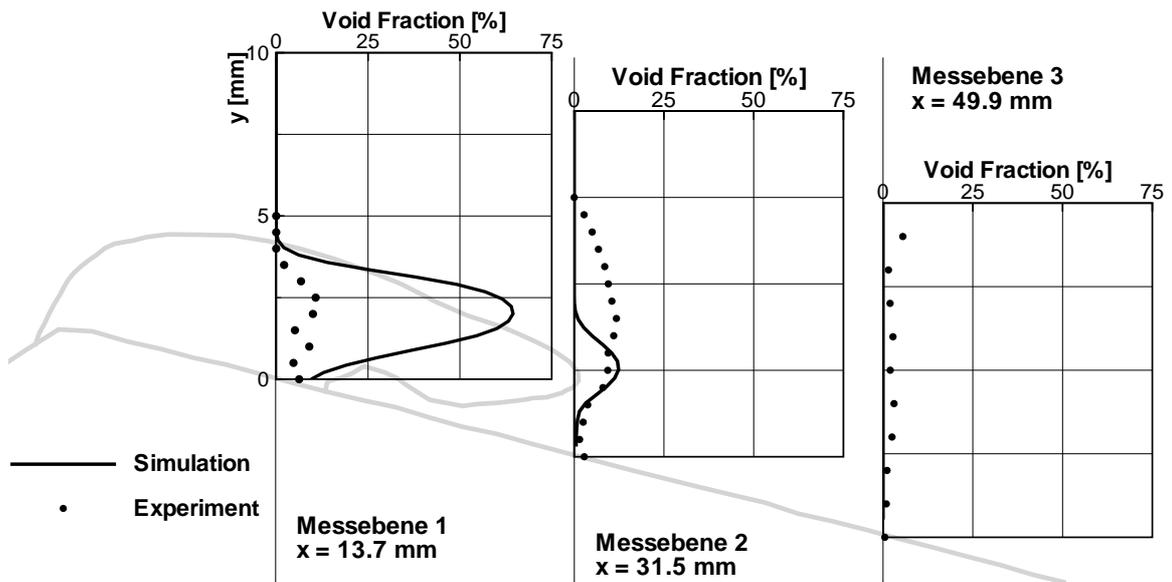


Abbildung 4.9: Vergleich von vorhergesagtem und gemessenen Dampfanteil zum Zeitpunkt $t/T = 0/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2m/s$

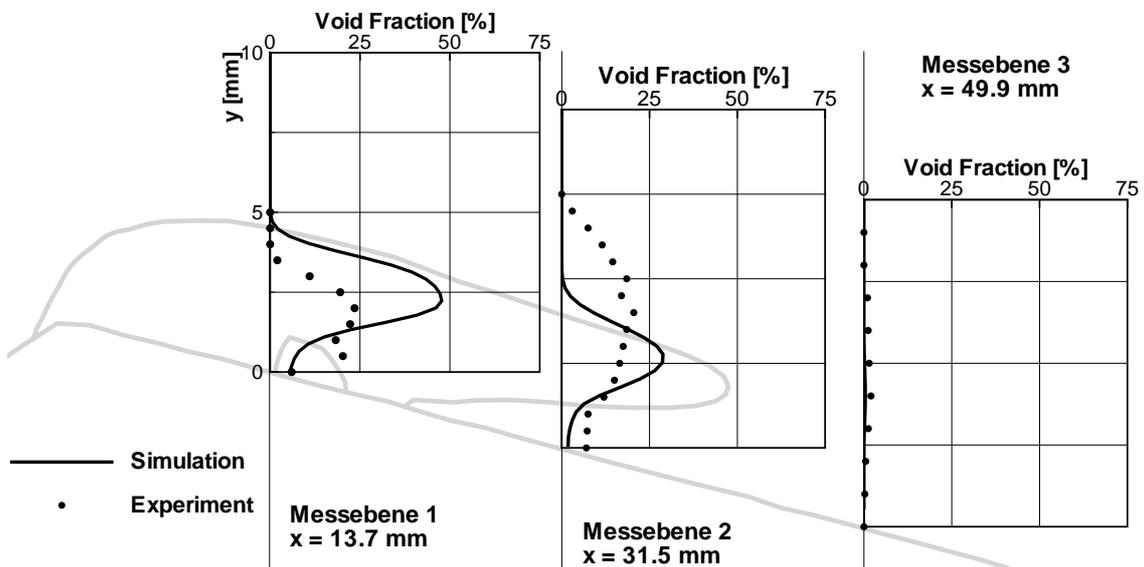


Abbildung 4.10: Vergleich von vorhergesagtem und gemessenen Dampfanteil zum Zeitpunkt $t/T = 5/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2m/s$

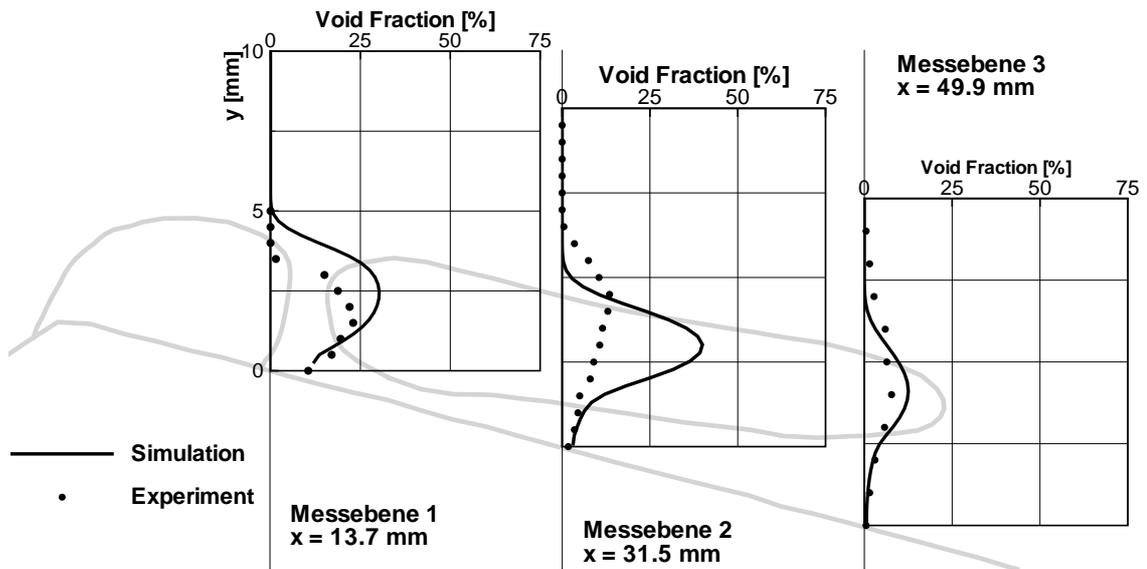


Abbildung 4.11: Vergleich von vorhergesagtem und gemessenen Dampfanteil zum Zeitpunkt $t/T = 10/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2 \text{ m/s}$

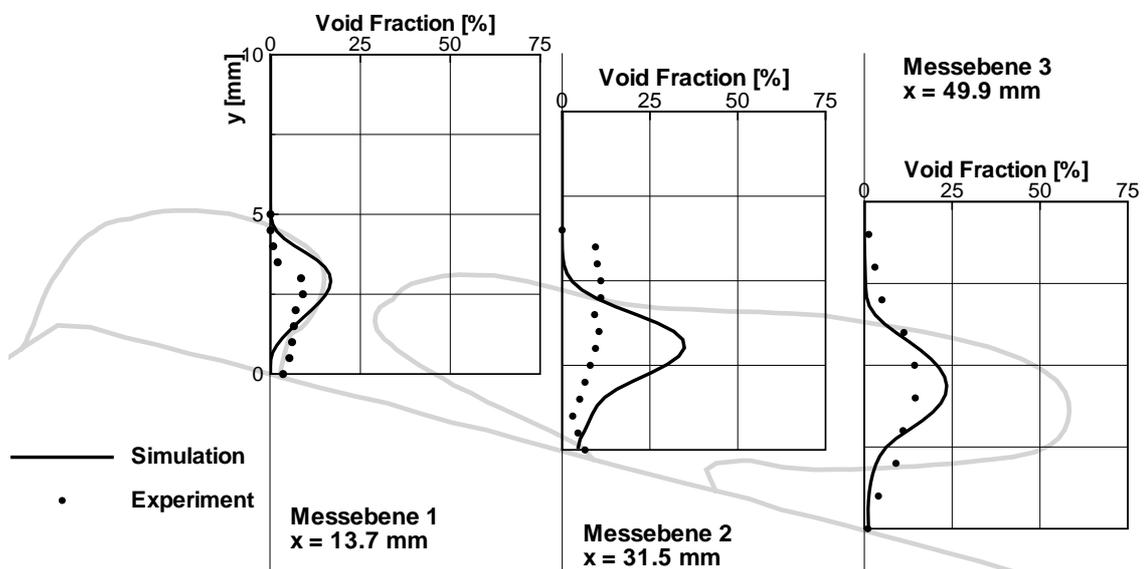


Abbildung 4.12: Vergleich von vorhergesagtem und gemessenen Dampfanteil zum Zeitpunkt $t/T = 15/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2 \text{ m/s}$

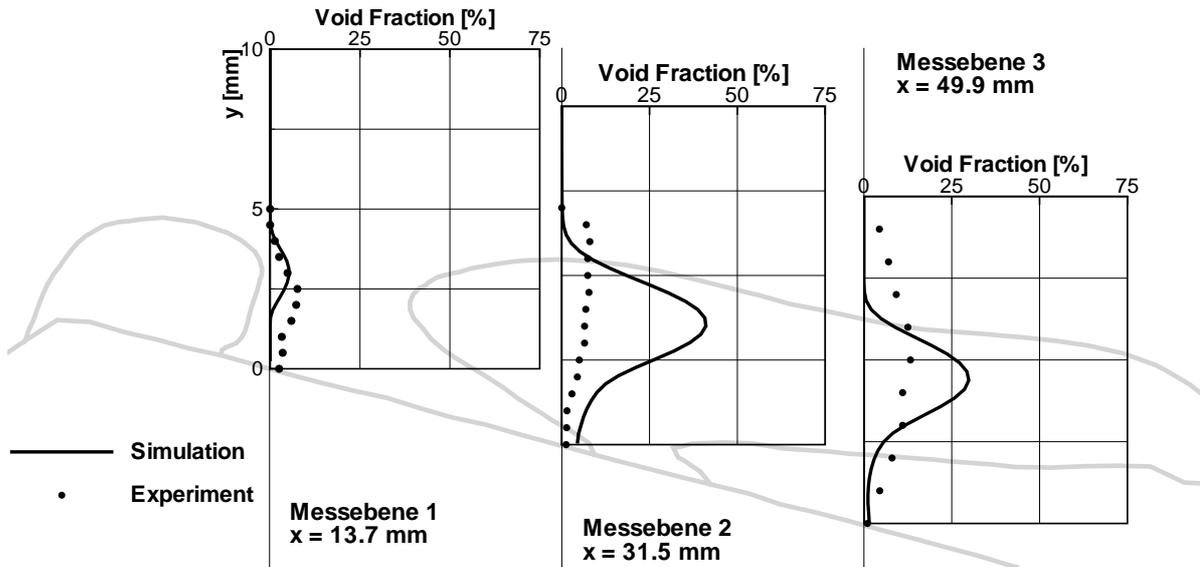


Abbildung 4.13: Vergleich von vorhergesagtem und gemessenem Dampfanteil zum Zeitpunkt $t/T = 20/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2 m/s$

In den Abbildungen 4.14 bis 4.18 wird der von der instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur vorhergesagte Geschwindigkeitsverlauf in den ersten drei Messebenen mit dem im Experiment ermittelten verglichen. Berücksichtigt man die Messunsicherheit von 10% bei der Bestimmung der Geschwindigkeit, kann die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment im Bereich der ersten Messebene als sehr gut angesehen werden. Allerdings ergeben sich im Bereich der Ablösung zum Teil große Diskrepanzen. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass die verwendeten Turbulenzmodelle nicht ausreichend zur Simulation der abgelösten kavitierenden Strömung geeignet sind.

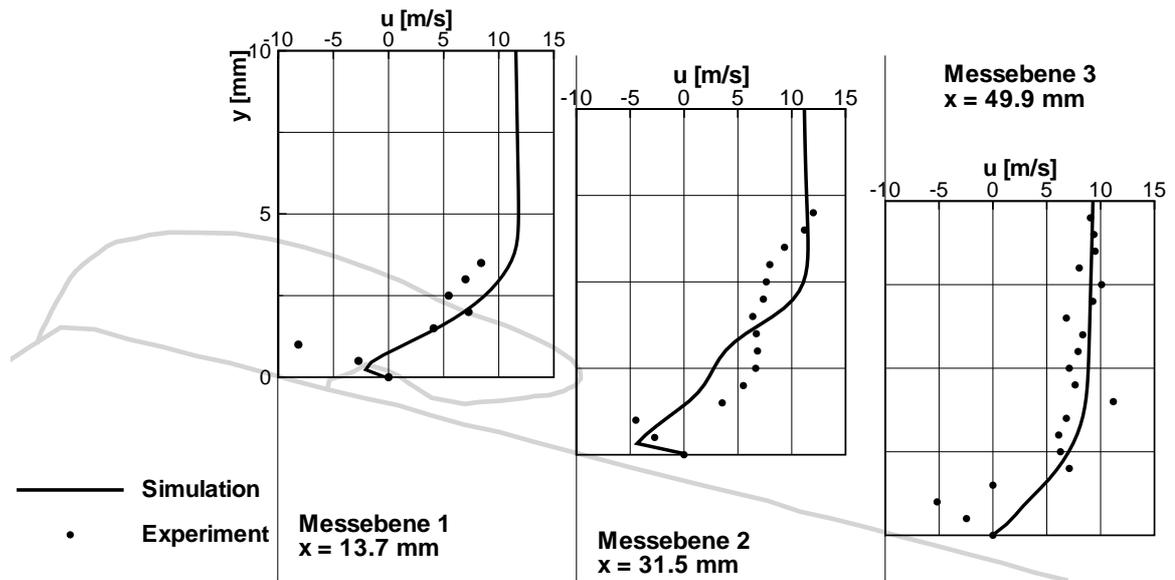


Abbildung 4.14: Vergleich von vorhergesagter und gemessener Geschwindigkeit in Kanalrichtung zum Zeitpunkt $t/T = 0/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2$ m/s

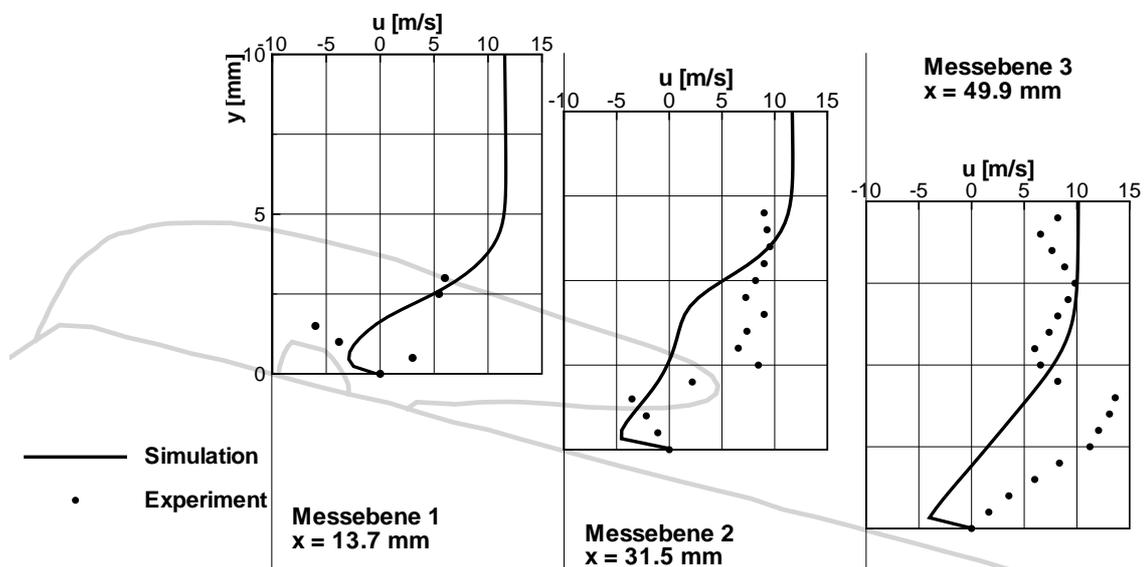


Abbildung 4.15: Vergleich von vorhergesagter und gemessener Geschwindigkeit in Kanalrichtung zum Zeitpunkt $t/T = 5/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2$ m/s

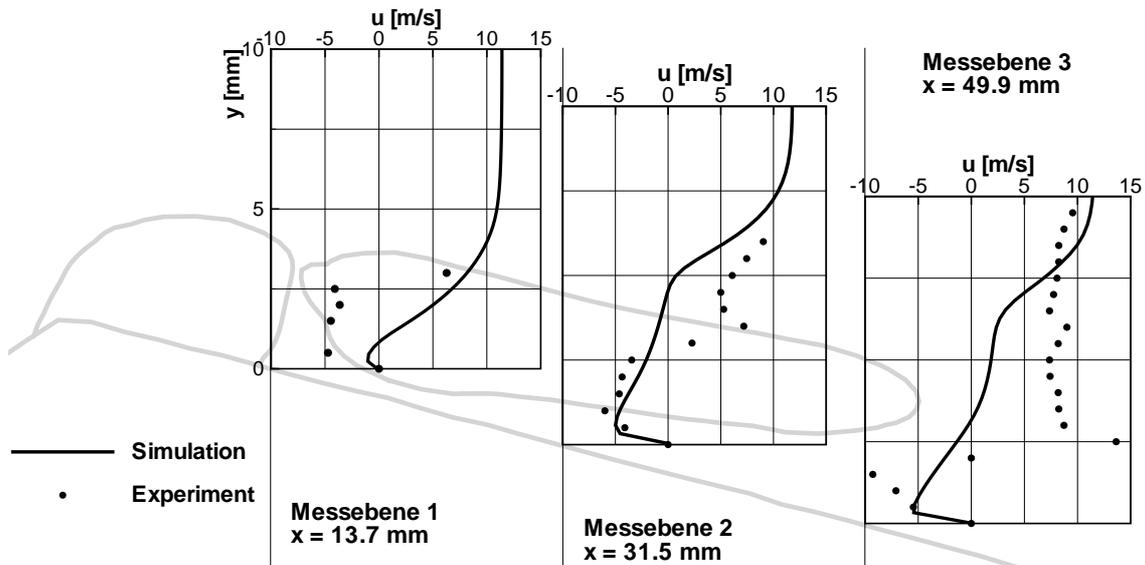


Abbildung 4.16: Vergleich von vorhergesagter und gemessener Geschwindigkeit in Kanalrichtung zum Zeitpunkt $t/T = 10/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2$ m/s

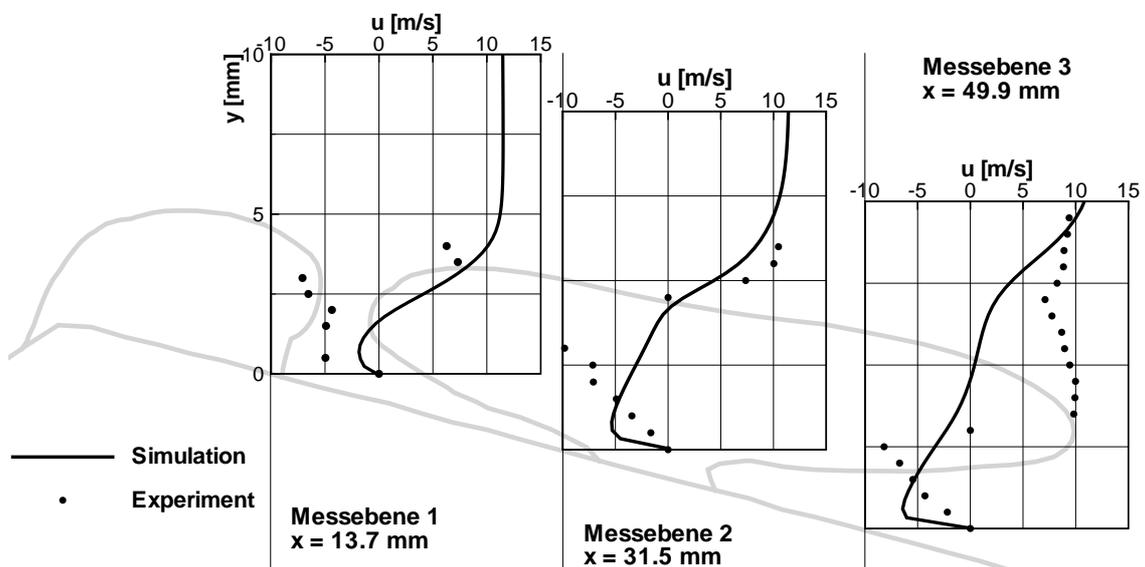


Abbildung 4.17: Vergleich von vorhergesagter und gemessener Geschwindigkeit in Kanalrichtung zum Zeitpunkt $t/T = 15/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2$ m/s

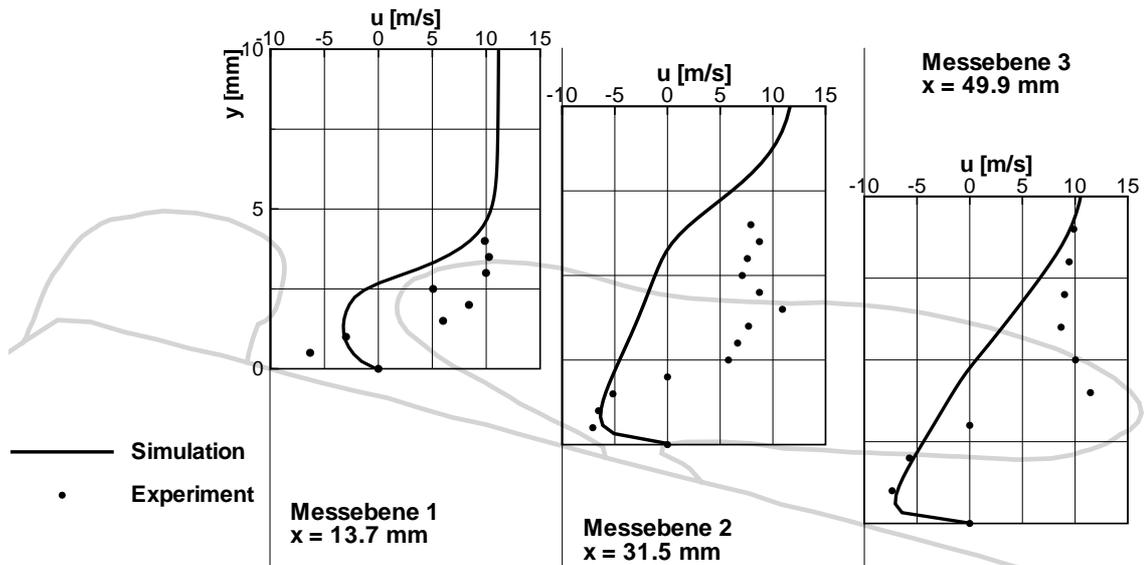


Abbildung 4.18: Vergleich von vorhergesagter und gemessener Geschwindigkeit in Kanalrichtung zum Zeitpunkt $t/T = 20/22$. Instationäre Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], $u_{in} = 7.2\text{m/s}$

In Abbildung 4.19 wird der in der instationären Simulation berechnete und dann zeitlich gemittelte Dampfanteil in den Messebenen mit dem gemessenen verglichen. Die Mittelung erfolgte über 10 Abfolgen des Kavitationsvorgangs. Zusätzlich ist noch der zeitlich gemittelte Dampfanteil aus den instationären Simulationen von REBOUD ET AL. [89] und SENOCAK [106] dargestellt. In Abbildung 4.19 rechts unten sind die Messebenen skizziert, außerdem ist die Kavitationszone mit einer Isolinie für $\alpha = 5\%$ dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen dem vorhergesagten mittleren Dampfanteil und dem gemessenen ist generell gut, vor allem, wenn man die angegebene Messunsicherheit von 10% bei der Bestimmung der Geschwindigkeit und 15% beim Dampfvolumenteil berücksichtigt. Die Streuung des Dampfanteils wird von der Simulation zu gering vorhergesagt. Dies wird besonders in Messebene 2 deutlich. Die Streuung des Dampfanteils der abgelösten Kavitationswolke wird aber auch von den anderen CFD-Codes nicht ausreichend berücksichtigt. Da von SENOCAK [?] und REBOUD ET AL. [89] andere Kavitationsmodelle benutzt werden, deutet dies darauf hin, dass nicht die Kavitationsmodellierung die Ursache dafür ist. Vielmehr sind die verwendeten Turbulenzmodelle, wie schon oben erwähnt, für die Simulation abgelöster kavitierender Strömungen nicht ausreichend genau.

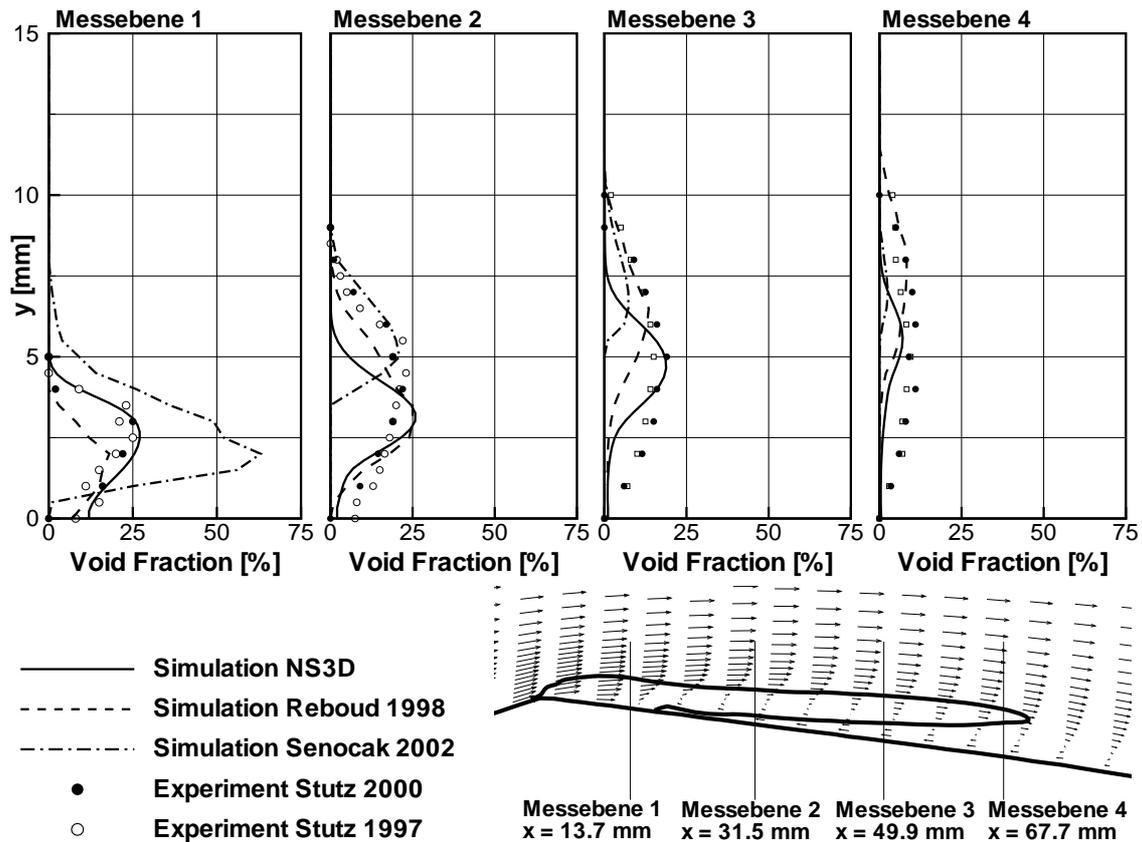


Abbildung 4.19: Vergleich des von der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL [89] vorhergesagten zeitlich gemittelten Dampfanteils mit experimentellen Werten und den Ergebnissen anderer Simulationen

Abbildung 4.20 vergleicht die von der instationären Simulation vorhergesagte zeitlich gemittelte Geschwindigkeit in Kanalrichtung mit der im Experiment gemessenen Geschwindigkeit in den vier Messebenen. Zusätzlich sind die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten aus den instationären Simulationen von REBOUD ET AL. [89] und ŞENOCAK [106] dargestellt. Die im Experiment bestimmten Geschwindigkeiten sind recht unregelmässig, was daran liegt, dass die Strömung stark instationär ist. Der Re-Entrant-Jet wird in allen Messebenen gut vorhergesagt, allerdings wird die Ausdehnung des Rückströmgebietes senkrecht zur Kanalwand etwas zu gering vorhergesagt. Weil die Streuung der Dampfphase von der Simulation nicht ausreichend beschrieben ist, besteht der Re-Entrant-Jet bei der Simulation aus reinem Fluid, während im Experiment im Bereich des Re-Entrant-Jets eine Zweiphasen-Strömung mit niedrigem Dampfanteil beobachtet wird.

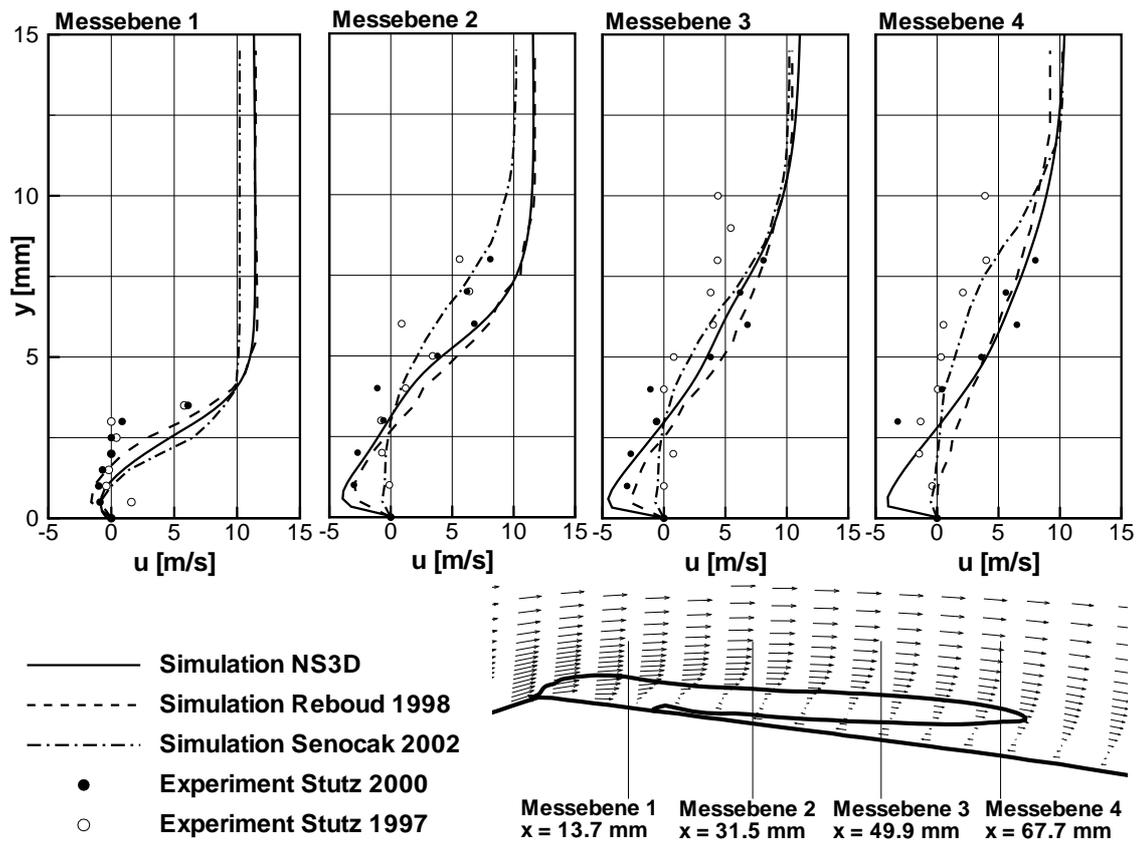


Abbildung 4.20: Vergleich des von der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL [89] vorhergesagten zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils mit experimentellen Werten und den Ergebnissen anderer Simulationen

4.1.4 Stationäre Simulation der kavitierenden Strömung durch die Venturi8-Düse mit 8° Öffnungswinkel

Für die meisten industriellen Anwendungen sind instationäre Simulationen zu aufwändig. Dies liegt zum einen an der dafür benötigten Rechenzeit, zum anderen auch an den hohen Datenmengen, die bei instationären Simulationen anfallen und auszuwerten sind. Zur Simulation kavitierender Strömungen in der industriellen Praxis ist es daher notwendig, einen Strömungslöser zur Verfügung zu stellen, der auch in der Lage ist, die zeitlich gemittelte Strömung schnell und genau vorherzusagen. Der in Kapitel 2 und 3 beschriebene CFD-Code zur Simulation kavitierender Strömungen wurde deshalb auch zur Simulation stationärer kavitierender Strömungen verwendet. Dazu ist es notwendig, die Quellterme in der Transportgleichung für den Dampfvolumenteil, Gleichung 3.37, anzupassen. Nur so kann erreicht werden, dass der aufgrund der instationären Ablösung entstehende Dampfanteil bei der stationären Simulation nicht vernachlässigt wird. Der Quellterm

$$S_{KAV} = C_{Korr} \cdot \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad (4.2)$$

wird dabei mit einem Korrekturfaktor C_{Korr} multipliziert:

$$C_{Korr} = \begin{cases} 50 & ; \quad \text{falls } p < p_v \\ 1/50 & ; \quad \text{falls } p > p_v \end{cases} \quad (4.3)$$

Die Korrekturfaktoren wurden so gewählt, dass die Übereinstimmung zwischen zeitlich gemittelter instationärer Lösung und stationärer Lösung möglichst groß ist.

Bei der stationären Simulation wurde wie bei der instationären Simulation am Einströmrand eine Geschwindigkeit von $u_{in} = 7.2 \text{ m/s}$ vorgegeben. Die Länge des anliegenden Teils der Kavitationszone liegt im Experiment bei $L_{Cav} = 45 \text{ mm}$. Als Fluid wurde kaltes Wasser mit $n_0 = 1 \cdot 10^8$ Keimen pro m^3 Flüssigkeit mit einem Sättigungsdampfdruck von $p_v = 3575 \text{ Pa}$ angenommen. Zur stationären Simulation der kavitierenden Strömung wurde sowohl das k - ϵ -Turbulenzmodell mit der Realizability-Bedingung nach MOORE & MOORE als auch das LCL-Modell verwendet. Die Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89], Gleichung 2.77, kommt bei der stationären Simulation nicht zur Anwendung.

Die in der stationären Simulation ermittelten Werte für den lokalen Dampfgehalt werden in Abbildung 4.21 mit den im Experiment von STUTZ & REBOUD [119],[121] gemessenen Werten verglichen. Zusätzlich sind die zeitlich gemittelten Werte aus der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89] dargestellt. Es zeigt sich, dass das stationäre Kavitationsmodell den Dampfanteil im vorderen Bereich der Kavitationszone zu groß vorhersagt. Das Ablösen des Kavitationsgebietes und die Verteilung des Dampfanteils am Ende des Kavitationsgebietes stimmt dagegen gut mit dem Experiment überein, auch im Vergleich mit dem Ergebnis der instationären Simulationen.

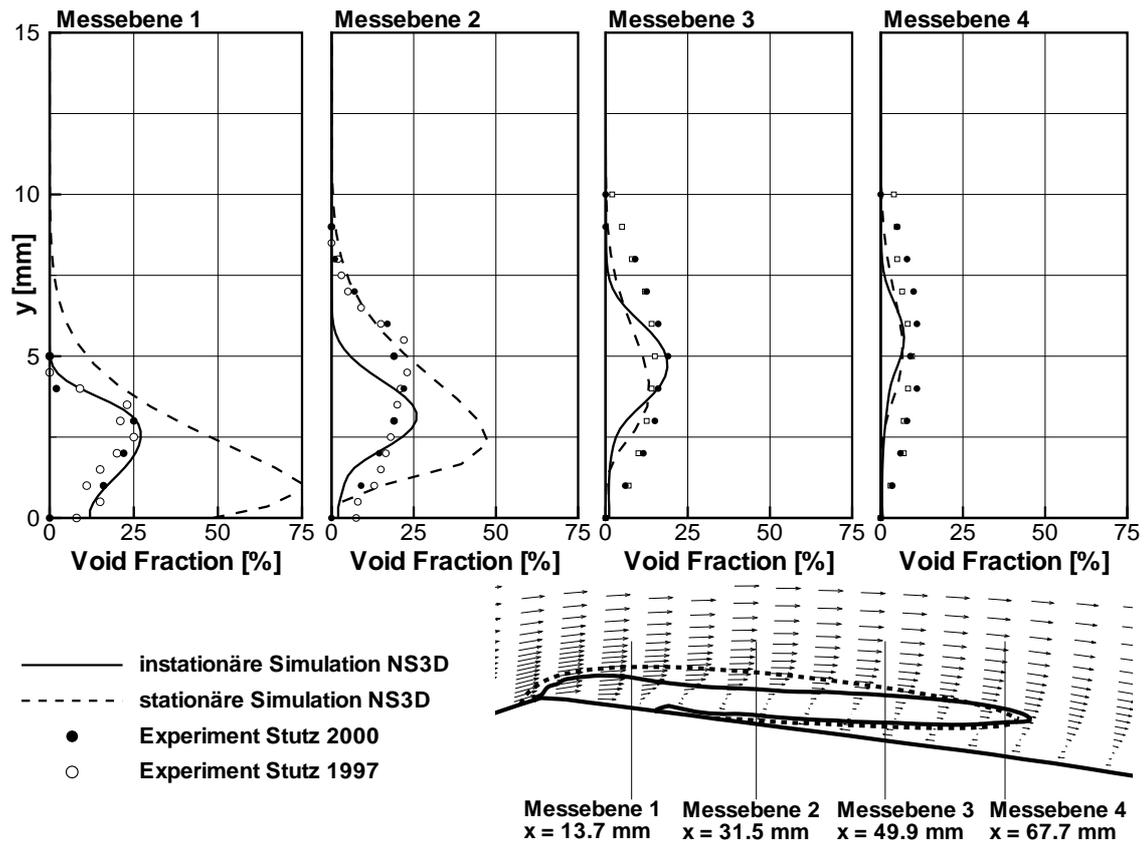


Abbildung 4.21: Vergleich des von der stationären Simulation vorhergesagten Dampfanteils und des von der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur [89] vorhergesagten zeitlich gemittelten Dampfanteils

Abbildung 4.22 vergleicht die in der stationären Simulation ermittelte Geschwindigkeit in Kanalrichtung mit der im Experiment gemessenen Geschwindigkeit. Zusätzlich sind die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten aus der instationären Simulation dargestellt.

Der Re-Entrant-Jet besteht bei beiden Simulationen aus reinem Fluid, $\alpha \approx 0$, während im Experiment der Re-Entrant-Jet ein Zweiphasengemisch mit niedrigem Dampfanteil ist, siehe auch Abbildung 4.21. Das Geschwindigkeitsprofil wird in den Messebenen 3 und 4 sehr gut vorhergesagt. In der Messebene 2 wird der Re-Entrant-Jet unterschätzt, in der Messebene 1 tritt in der stationären Simulation gar keine Rückströmung mehr auf. Das bedeutet, dass die Stärke des Re-Entrant-Jets vom stationären Kavitationsmodell unterschätzt wird. Eine Verbesserung des Ergebnisses der stationären Simulation ist auch durch eine weitere Veränderung des Parameters C_{Korr} in der Transportgleichung für den Dampfvolumenteil nicht möglich.

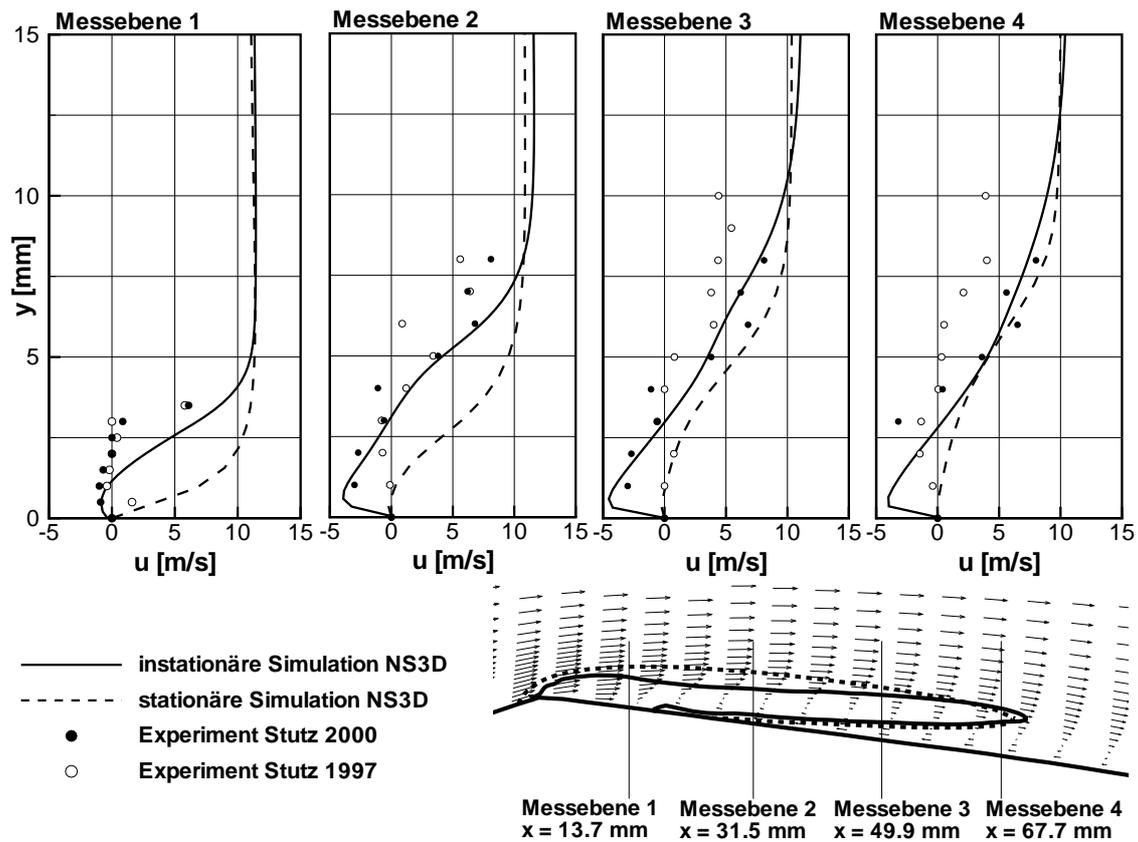


Abbildung 4.22: Vergleich des von der stationären Simulation vorhergesagten Geschwindigkeitsprofils und des von der instationären Simulation mit der Dichte-Korrektur [89] vorhergesagten zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils

Der Einfluss der Turbulenzmodellierung auf das Simulationsergebnis ist bei der stationären Simulation weitaus geringer als bei der instationären Simulation. Es kann nur eine geringe Verbesserung der Vorhersage des Re-Entrant-Jets durch eine Verbesserung der Turbulenzmodellierung und eine höhere Ordnung bei der Interpolation der konvektiven Flüsse erreicht werden. Abbildung 4.23 vergleicht die Geschwindigkeitsprofile in den Messebenen 1 bis 4 für die Simulation mit dem Standard- $k-\epsilon$ -Modell mit den Geschwindigkeitsprofilen der Simulation mit dem nicht-linearen LCL-Modell. Bei beiden Simulationen wurde zur Interpolation der konvektiven Flüsse das MINMOD-Verfahren verwendet. Zum Vergleich sind die experimentellen Werte dargestellt. Es zeigt sich, dass der Re-Entrant-Jet bei Verwendung des LCL-Turbulenzmodells etwas stärker ausgeprägt ist. Der Bereich des Re-Entrant-Jets normal zur Wand ist größer und der Re-Entrant-Jet ist auch noch in der Messebene 2 sichtbar. Es ist jedoch nicht möglich, mit Hilfe einer stationären Simulation die kavitierende Strömung in allen Messebenen richtig vorherzusagen.

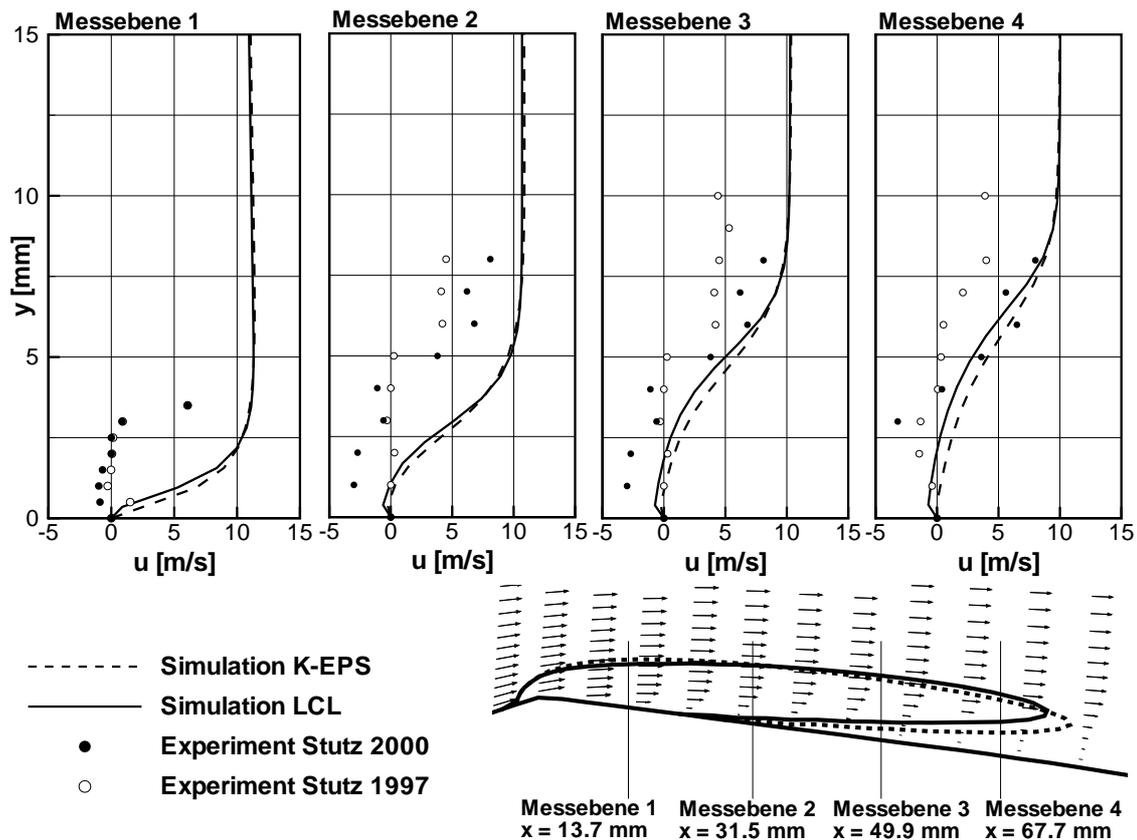


Abbildung 4.23: Einfluss des gewählten Turbulenzmodells auf die Vorhersage des Re-Entrant-Jets bei der stationären Simulation

4.1.5 Stationäre Simulation der kavitierenden Strömung durch die Venturi4-Düse mit 4° Öffnungswinkel

Analog zu den in Kapitel 4.1.4 beschriebenen Simulationen wurde auch die kavitierende Strömung durch den Venturi4-Kanal mit dem stationären Kavitationsmodell simuliert. Bei dieser Geometrie stellt sich im Experiment eine fast stationäre Schichtkavitation ein, nur am hinteren Ende der Kavitationsschicht kommt es zu instationären Schwankungen. Das Entstehen des Re-Entrant-Jets hängt nach FRANC [34] unter anderem vom Druckgradienten, den die Strömung erfährt, ab. Ein hoher Druckgradient begünstigt die Bildung des Re-Entrant-Jets, ein niedriger Druckgradient verhindert sie. Der geringere Öffnungswinkel des Venturi4-Kanals bewirkt einen geringeren Druckgradienten in der Strömung. Dadurch ist auch der Re-Entrant-Jet nicht so stark ausgeprägt wie beim Venturi8-Kanal.

Auch bei der experimentellen Untersuchung des Venturi4-Kanals wurden der Dampf-volumenanteil und die Geschwindigkeitsverteilung mit Hilfe einer Messsonde be-

stimmt. Die fünf Messebenen sind in den folgenden Abbildungen rechts unten dargestellt. Die von der stationären Simulation vorhergesagten Dampfvolumenteilungen in den Messebenen werden in Abbildung 4.24 mit den im Experiment bestimmten verglichen. Die Abbildung 4.25 zeigt die berechneten Geschwindigkeitsprofile im Vergleich zu den gemessenen. Die Simulation wurde mit dem nichtlinearen LCL-Turbulenzmodell durchgeführt. Zur Diskretisierung der konvektiven Flüsse wurde das MINMOD-Verfahren benutzt. Als Fluid wurde kaltes Wasser mit $n_0 = 5 \cdot 10^7$ Keimen pro m^3 Flüssigkeit mit einem Sättigungsdampfdruck von $p_v = 3575 \text{ Pa}$ angenommen. Der Druck am Austritt wird so gewählt, dass sich wie im Experiment eine Kavitationszone mit der Länge $L_{cav} = 80 \text{ mm}$ einstellt. Die Einströmgeschwindigkeit beträgt $u_{in} = 10.8 \text{ m/s}$

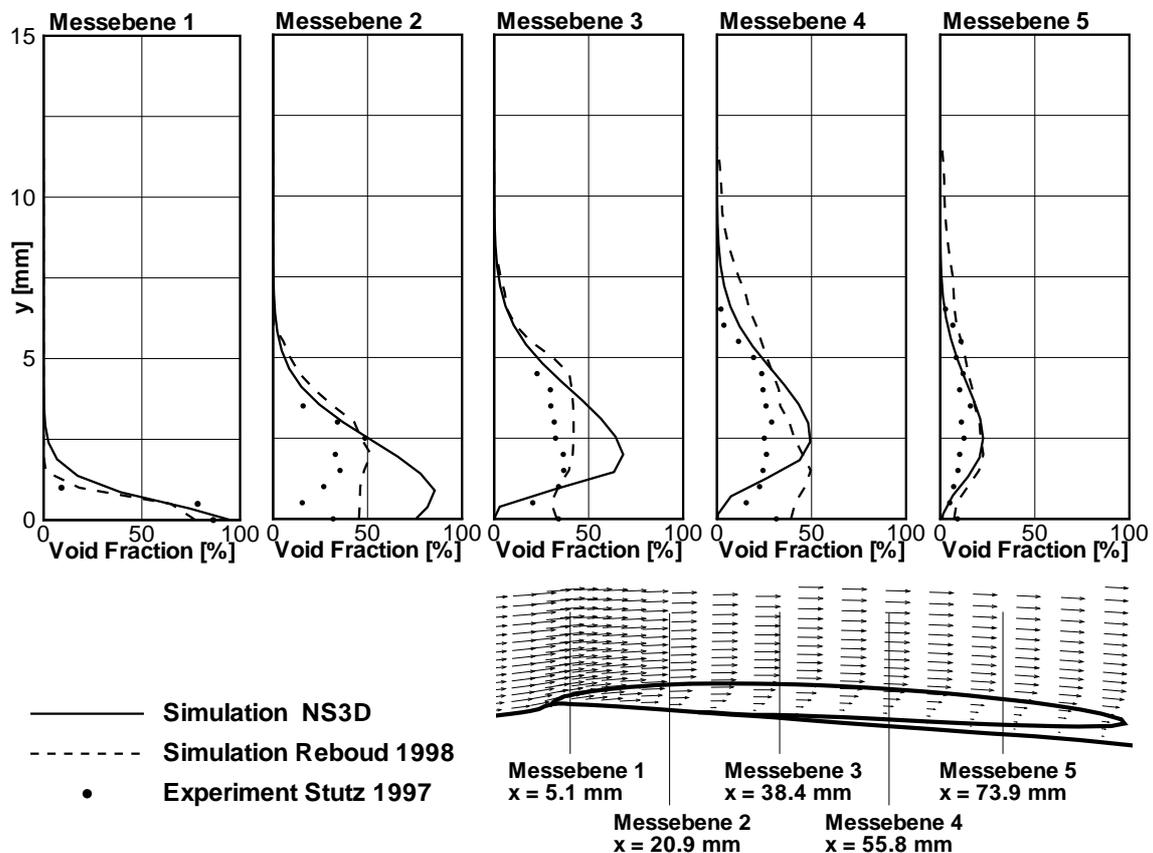


Abbildung 4.24: Vergleich des vorhergesagten Dampfvolumenteilanteils mit experimentellen Werten und den Ergebnissen der instationären Simulation von REBOUD ET AL. [89]

Bei der stationären Simulation kommt es zu keinem ausgeprägten Re-Entrant-Jet, siehe Abbildung 4.25. Bei der instationären Simulation von REBOUD ET AL. [89] wird eine Re-Entrant-Jet-Geschwindigkeit im Bereich von $4 \text{ m/s} < u_{Re-Entrant} < 1 \text{ m/s}$ berechnet. Dabei ist die Abweichung zwischen Simulation und Experiment in den

Messeebenen 2 bis 5 gering. Allerdings wird der Re-Entrant-Jet von der stationären Simulation in allen Messeebenen unterschätzt.

Die Vorhersage des Dampfvolumentanteils stimmt recht gut mit dem Experiment überein, siehe Abbildung 4.24. Das Kavitationsgebiet ist bei dieser Geometrie viel flacher und länger gestreckt als bei der Venturi8-Geometrie.

Durch eine weitere Verfeinerung des Rechnetetzes lässt sich eine geringfügige Verbesserung der stationären Simulationsergebnisse erzielen. Der Rechenaufwand dafür steigt aber extrem an.

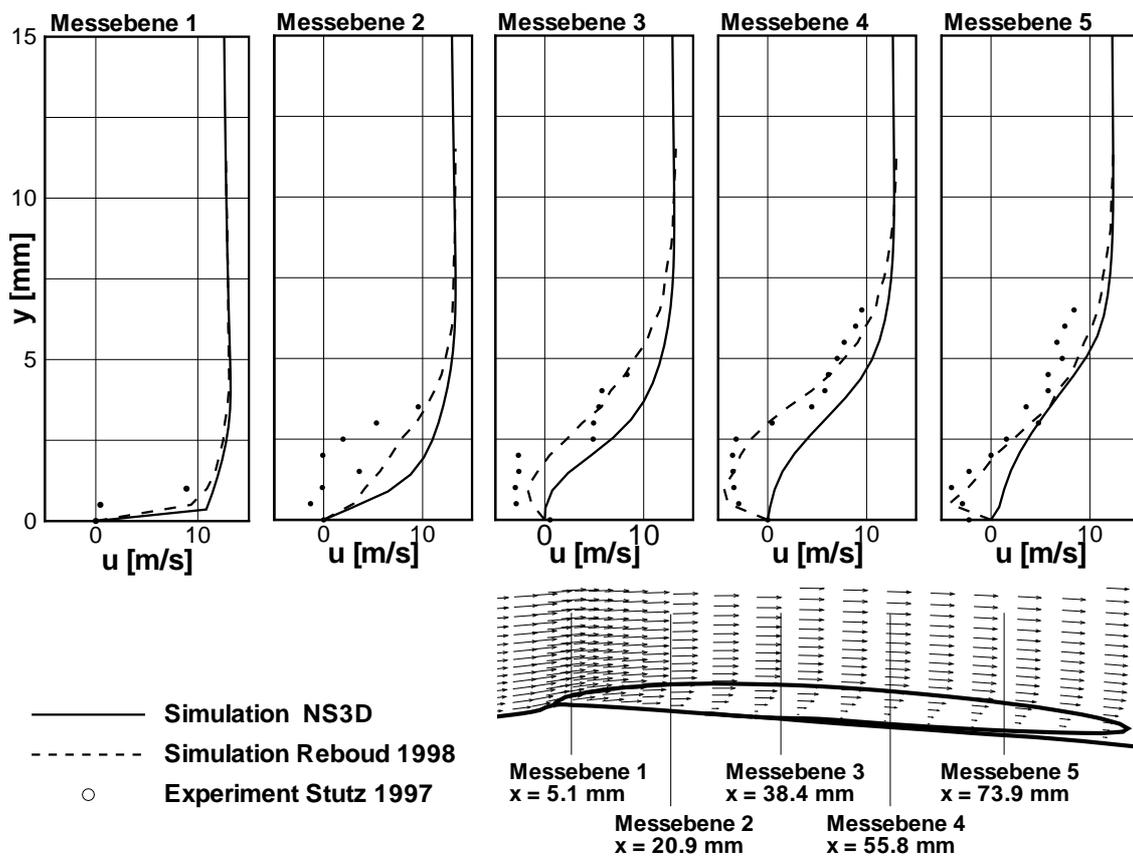


Abbildung 4.25: Vergleich des vorhergesagten Geschwindigkeitsprofils mit experimentellen Werten und den Ergebnissen der instationären Simulation von REBOUD ET AL. [89]

4.2 Kavitierende Strömung um ein Profil

4.2.1 Beschreibung des Testfalls

Neben der Strömung durch den Venturi-Kanal wurde außerdem die instationär kavitierende Strömung um das CLE-Profil¹ mit halbrunder Vorderkante berechnet. Die Umströmung des Profils mit gerader Vorderkante wurde von HOFMANN [49] experimentell untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung werden mit Ergebnissen der instationären 2D-Simulation der kavitierenden Strömung verglichen, siehe Kapitel 4.2.4. Die Ergebnisse der Untersuchung von BACHERT [7], der das gleiche Profil mit gepfeilter Vorderkante, das ALE-Profil², untersuchte, werden Ergebnissen der 3D-Simulation gegenübergestellt, siehe Kapitel 4.2.5.

Das Profil mit einer Profillänge von $L = 0.107 \text{ m}$ ist in einem Winkel von $\beta = 5^\circ$ zur Strömung angestellt. Die Experimente wurden bei Anströmgeschwindigkeiten von $u_\infty = 13 \text{ m/s}$ und $u_\infty = 16 \text{ m/s}$ durchgeführt, was einer Reynolds-Zahl von $Re = 1.3 \cdot 10^6$ bzw. $Re = 1.6 \cdot 10^6$ entspricht. Mit Hilfe eines Keimgenerators wurde die Zugspannung des Wassers eingestellt. Zusätzlich zur Messung des statischen Drucks auf der Profilloberfläche wurden mit einer Kamera Aufnahmen des Kavitationsgebietes gemacht. Die Particle-Image-Velocimetry (PIV) lieferte die Geschwindigkeitsvektoren der Flüssigkeitsströmung außerhalb des Kavitationsgebiets. BACHERT [7] untersuchte außerdem mit Hilfe der sogenannten PIV/LIF -Methode³ die Geschwindigkeitsvektoren der Zweiphasenströmung innerhalb des Kavitationsgebietes. Dieses Verfahren wurde zum ersten Mal von FRIEDRICHS verwendet und ist in [36] genauer beschrieben. Eine ausführliche Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Ergebnisse der experimentellen Untersuchung findet sich bei BACHERT ET AL. [7] und HOFMANN [48].

4.2.2 Verwendete Rechennetze

Zur Simulation der kavitierenden Strömung um das CLE- und das ALE-Profil wurde ein Multi-Block Rechennetz mit vier Blöcken generiert, siehe Abbildung 4.26. Dabei wurde um das Profil ein O-Netz gelegt, das mit seinem Nachbarblock über ein „non-matching grid interface“ verbunden ist, so dass die Zellenanzahl in den beiden Blöcken nicht übereinstimmen muss. Dadurch kann der innere Block, in dem Kavitation auftritt, beliebig verfeinert werden, ohne dass die Anzahl der Rechenzellen im gesamten Strömungsfeld steigt. Für das O-Netz wurden drei verschiedene Netzfeinheiten untersucht, siehe Tab. 4.1.

¹CLE = **C**ircular **L**eading **E**dge

²ALE = **A**symmetric **L**eading **E**dge

³LIF = **L**aser **I**nduced **F**luoreszenz

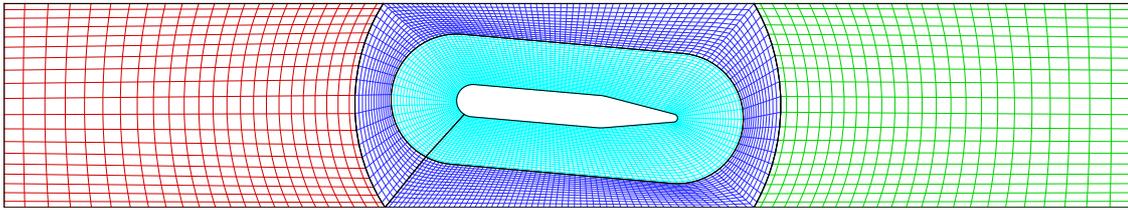


Abbildung 4.26: Netz-Topologie zur Simulation der CLE-Profilumströmung

Grobe Auflösung	157 x 30 Zellen
Mittlere Auflösung	197 x 45 Zellen
Feine Auflösung	237 x 60 Zellen

Tab. 4.1: Verwendete Netzfeinheiten für das O-Netz

Zur Simulation der turbulenten kavitierenden Strömung wurden Turbulenzmodelle mit Wandfunktion verwendet. Daher wurde darauf geachtet, dass der dimensionslose Wandabstand der wandnächsten Zelle y^+ , siehe Gleichung 2.67, zwischen $y^+ = 30$ und $y^+ = 300$ und somit im Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes liegt. Der wandnächste Gitterpunkt hat bei allen verwendeten Rechnernetzen ungefähr den gleichen Abstand, die Netzverfeinerung findet erst ab dem zweiten Gitterpunkt statt. Der dimensionslose Wandabstand y^+ der drei verwendeten Rechnernetze ist in Abbildung 4.27 über der x-Koordinate dargestellt.

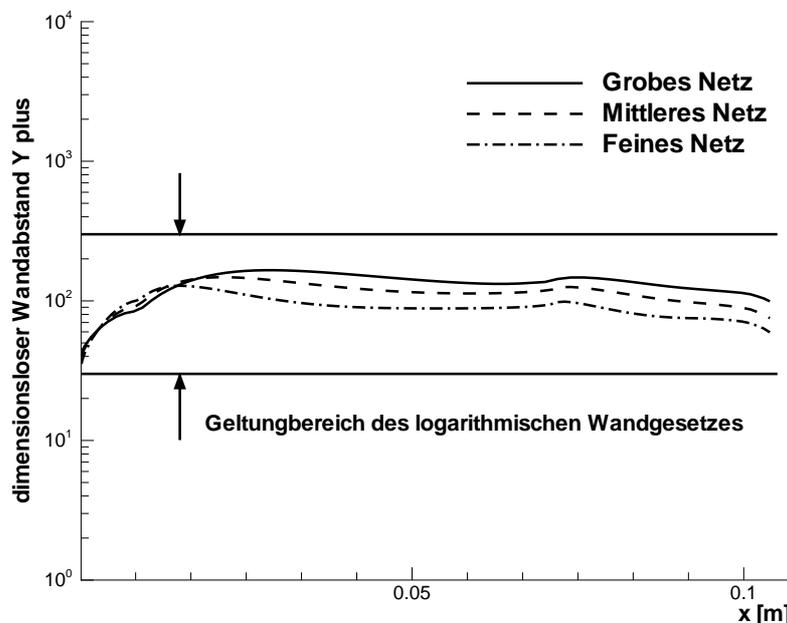


Abbildung 4.27: Dimensionsloser Wandabstand y^+ bei verschiedenen feiner Gitterauflösung

4.2.3 Simulation der kavitationsfreien Strömung

Die Simulation der kavitationsfreien Strömung wurde mit dem Standard- k - ϵ -Modell unter Verwendung der Realizability-Methode nach MOORE & MOORE für alle drei Netzfeinheiten durchgeführt. Zum Vergleich wurde auch eine Simulation mit einem Low-Reynolds Turbulenzmodell durchgeführt, bei dem die Grenzschicht durch zusätzliche Rechenzellen aufgelöst wurde und keine Wandfunktion verwendet wurde. In Abbildung 4.28 ist der berechnete dimensionslose Druckbeiwert C_p , Gleichung 4.1, über der x -Koordinate aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Saugspitze am Übergang von der halbrunden Vorderkante zum Profil konstanter Dicke mit dem groben und dem mittleren Rechenetz nur ungenau aufgelöst werden kann, siehe Abbildung 4.28. Nur die mit dem feinen Netz ermittelte Druckverteilung entspricht nahezu der mit Wandauflösung. Zur genauen Bestimmung des Punktes beginnender Kavitation, d.h. incipient cavitation, σ_{ic} , ist somit eine feine Netzauflösung unabdingbar. Die benötigte Rechenzeit steigt allerdings überproportional mit der Anzahl der Rechenzellen.

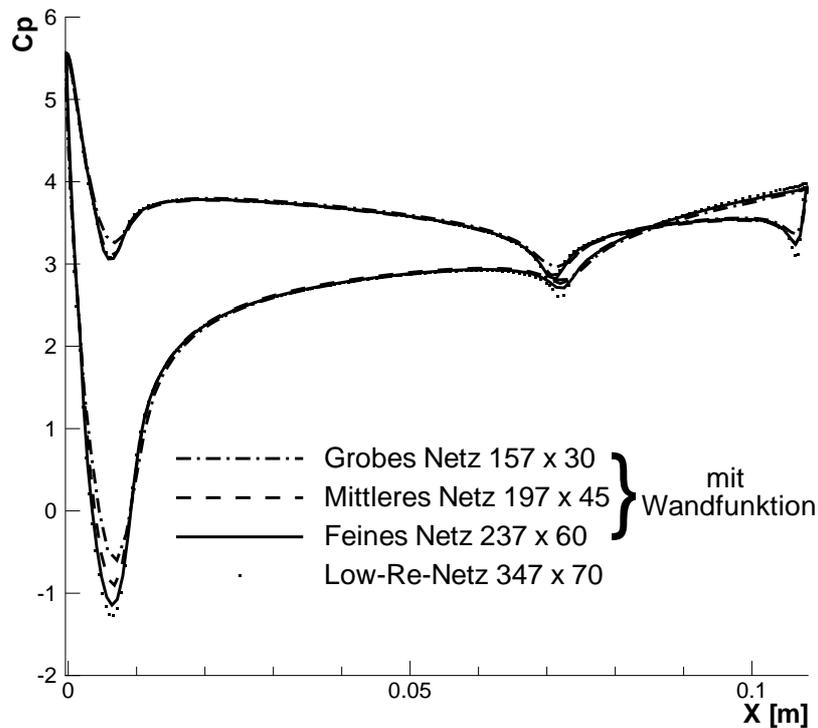


Abbildung 4.28: Vergleich der dimensionslosen Druckverteilung bei verschiedenen feiner Auflösung

Da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf der Simulation ausgebildeter Kavitation liegt und die Druckverteilungen bis auf die Saugspitze nahezu übereinstimmen, kann jedoch davon ausgegangen werden, dass schon das grobe Netz zur Simulation von Strömungen ausgebildeter Kavitation ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Der Einfluss der Feinheit des Rechnetzes auf das Ergebnis der instationären Simulation der kavitierenden Strömung wird im folgenden genauer untersucht.

4.2.4 Instationär kavitierende Strömung

Zunächst wird der entwickelte CFD-Code zur Simulation der kavitierenden CLE-Profilumströmung bei einem Anstellwinkel von $\beta = 5^\circ$ angewandt. Simulationen wurden für Reynolds-Zahlen von $Re = 1.3 \cdot 10^6$ und $Re = 1.6 \cdot 10^6$ bei Kavitationszahlen zwischen $\sigma = 2.0$ und $\sigma = 2.7$ durchgeführt. Als Fluid wurde im Experiment mit Luft gesättigtes Wasser verwendet. Bei der Simulation wurde als Fluid Wasser mit $n_0 = 1 \cdot 10^8$ Keimen mit einer Keimgröße $R_0 = 30 \cdot 10^{-6} m$ angenommen, um eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem Experiment zu erhalten.

Eine Periode des instationären Kavitationsvorganges ist beispielhaft für $Re = 1.3 \cdot 10^6$ und $\sigma = 2.0$ in Abbildung 4.29 dargestellt. Zunächst wächst das Kavitationsgebiet stabil an, bis sich ein Re-Entrant-Jet ausbildet. Dadurch löst ein Teil des Kavitationsgebietes ab und wird von der Hauptströmung mittransportiert, während sich die Hauptkavitationszone zurückbildet, bis der Vorgang periodisch von neuem beginnt. Dargestellt sind jeweils der Konturplot des Phasenanteils für $0 \leq \alpha \leq 1$ und die zugehörigen Strömungsvektoren.

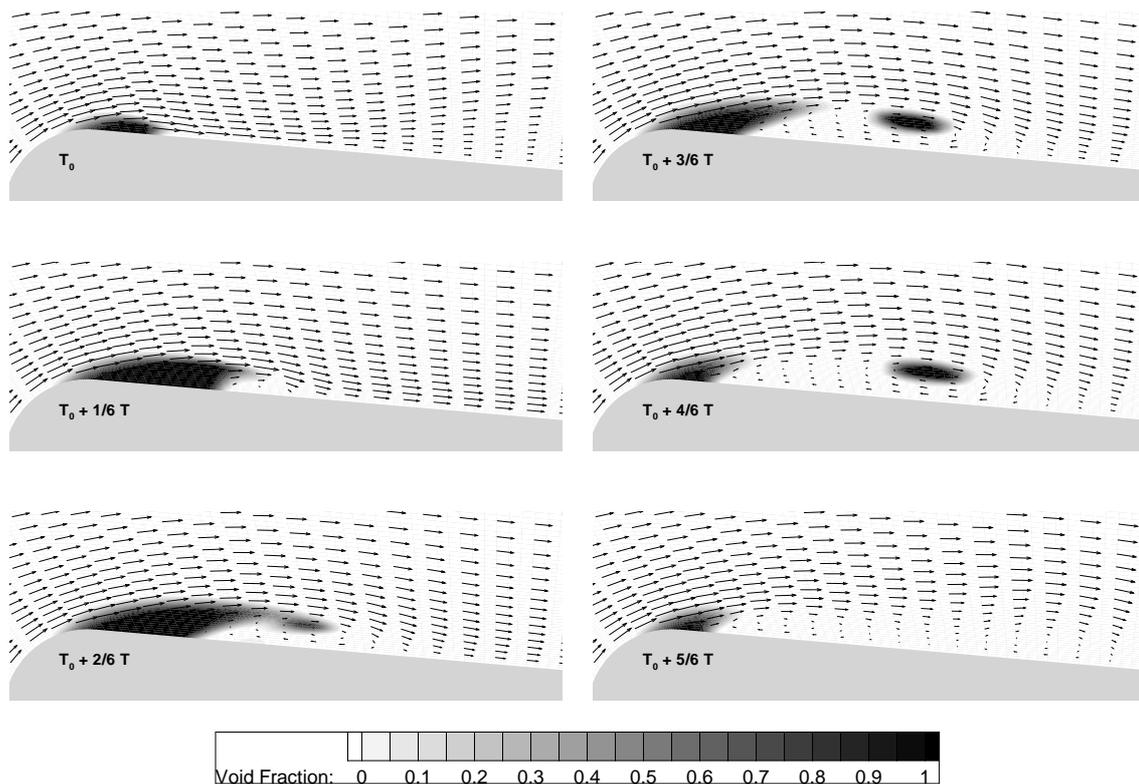


Abbildung 4.29: Dampffanteil und Stromlinien für eine Periode der instationär kavitierenden Strömung um das CLE-Profil mit einem Anstellwinkel von $\beta = 5^\circ$ bei einer Reynoldszahl von $Re = 1.3 \cdot 10^6$, einem Kavitationsbeiwert $\sigma = 2.0$ und einem Zeitinkrement $\Delta T = T/6$, Simulation mit dem k - ϵ -Modell und der Realizability-Methode nach MOORE & MOORE [78]

Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 4.30 den mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommenen Kavitationsvorgang aus dem Experiment von HOFMANN [49]. Die beobachtete Frequenz der Wolkenablösung liegt bei 300 Hz , was einer Strouhal-Zahl von $St = 0.25$ entspricht. Die Reynolds-Zahl in diesem Experiment beträgt $Re = 1.6 \cdot 10^6$ und der Kavitationsbeiwert ist $\sigma = 2.7$.

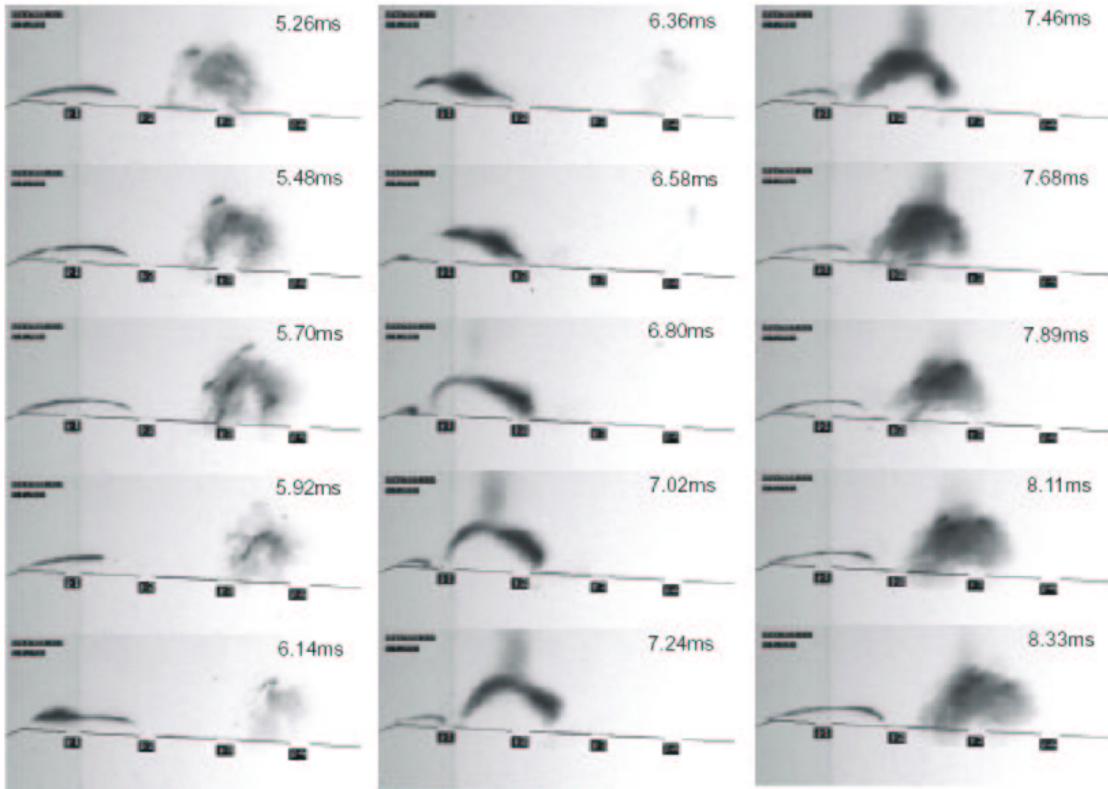


Abbildung 4.30: Hochgeschwindigkeitsaufnahmen einer Periode des Kavitationsvorgangs bei $Re = 1.6 \cdot 10^6$ und $\sigma = 2.7$ [49]

Bei der Beobachtung der kavitierenden Strömung mit bloßem Auge kann natürlich keine instationäre Blasenablösung wahrgenommen werden, da der Vorgang viel zu schnell abläuft. Man sieht daher eine geschlossen wirkende Kavitationsschicht, die am hinteren Ende leicht oszilliert.

Entscheidend für die richtige Simulation des Re-Entrant-Jets und der Ablösung der Kavitationszone bei der Profilmströmung ist auch bei diesem Testfall die Turbulenzmodellierung. Aufgrund der Kavitation entsteht bei der Simulation ein Bereich sehr hoher turbulenter Viskosität am Ende der Kavitationszone, siehe Kapitel 4.1.3. Dieser Effekt wird zusätzlich verstärkt durch die falsche Berechnung der turbulenten kinetischen Energie im Staupunkt, siehe Abbildung 4.31. Das Standard- $k-\epsilon$ -Modell überschätzt die turbulente kinetische Energie und damit die turbulente Viskosität im Bereich des Staupunkts, siehe auch SKODA [110]. Die im Staupunktbereich überschätzte turbulente kinetische Energie wird dann mit der Strömung konvektiert und

führt zu einer zusätzlichen Erhöhung der turbulenten Viskosität im Bereich der Kavitationszone. Deshalb wird in dieser Arbeit die Realizability-Methode nach MOORE & MOORE [78] verwendet, um diese sogenannte Staupunktanomalie zu vermeiden. Die Dichte-Korrektur nach REBOUD ET AL. [89] wird nicht zur Simulation kavitierender Profilmströmungen verwendet.

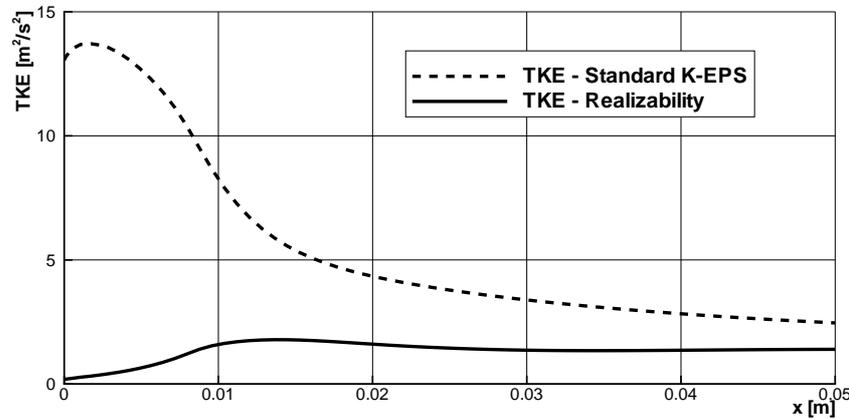


Abbildung 4.31: Vergleich der berechneten turbulenten kinetischen Energie der wandnächsten Zelle entlang der Profilloberfläche mit dem Standard- k - ϵ -Modell mit und ohne Realizability Bedingung

Für die instationäre Simulation der kavitierenden Strömung ist es zusätzlich wichtig, das Rechennetz im Kavitationsgebiet ausreichend fein aufzulösen. Der Bereich des Re-Entrant-Jets muss mit mehreren Rechenzellen aufgelöst werden, andernfalls kann die Rückströmung nicht richtig vorhergesagt werden.

Die aus den Simulationsergebnissen bestimmte Frequenz der Wolkenablösung und somit auch die Strouhal-Zahl des Vorganges hängen von dem bei der Simulation gewählten Zeitschritt und der gewählten Netzfeinheit ab. Je kleiner der Zeitschritt bei der Simulation gewählt wird, desto weiter nähert sich die vorhergesagte Strouhal-Zahl des Vorgangs einem konstanten Wert an, der mit dem experimentell ermittelten gut übereinstimmt. Mit Zeitschritten kleiner als $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ kann mit dem gewählten Netz keine Verbesserung mehr erreicht werden. Der Einfluss von Zeitschritt und Rechennetz auf das zeitliche Verhalten der Strömungslösung ist beispielhaft für eine Reynoldzahl von $Re = 1.3 \cdot 10^6$ und einen Kavitationsbeiwert von $\sigma = 2.5$ in Abbildung 4.32 dargestellt.

Die Frequenz der Kavitationswolkenablösung wurde im Experiment sowohl durch die Beobachtung des instationären Vorgangs mit Hilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera als auch mit einer Fourier-Analyse der Druckschwankungen auf dem Profil untersucht, siehe HOFMANN ET AL. [49]. Die Ergebnisse beider Methoden stimmen dabei sehr gut überein. Die Frequenz des Kavitationsvorgangs nimmt mit sinkendem Kavitationsbeiwert ab. In Abbildung 4.33 sind die von der numerischen Simulation für verschiedene Kavitationsbeiwerte vorhergesagten Ablösefrequenzen im Vergleich zu den im Experiment beobachteten dargestellt. Zusätzlich sind berechnete Werte der numerischen Simulation von REBOUD ET AL. [88] für zwei Kavitationsbeiwerte dargestellt.

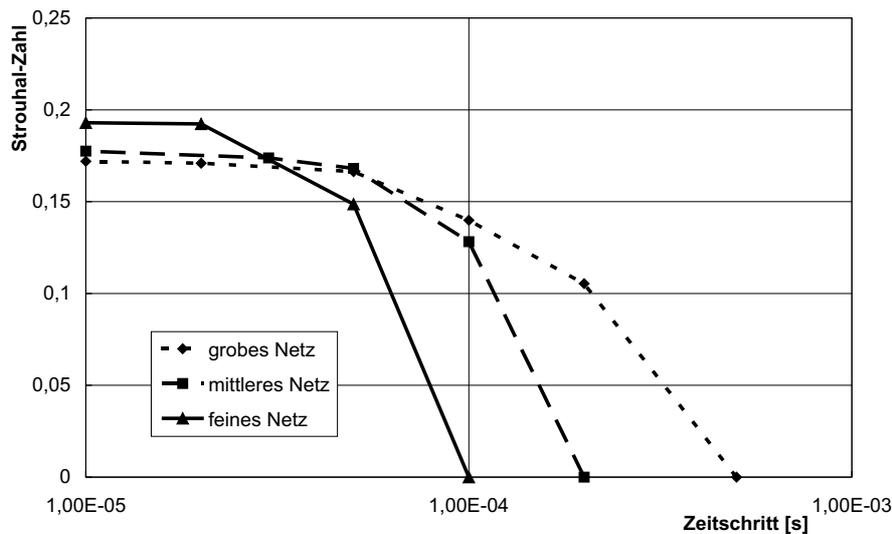


Abbildung 4.32: Einfluss des gewählten Zeitschritts und der verwendeten Netzfeinheit auf die Strouhal-Zahl des Kavitationsvorgangs; CLE-Profilumströmung bei $Re = 1.3 \cdot 10^6$ und $\sigma = 2.0$

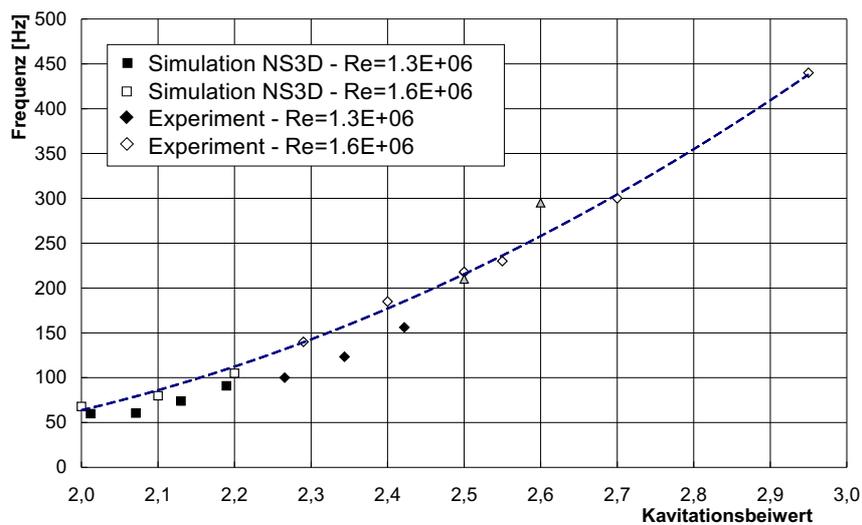


Abbildung 4.33: Abhängigkeit der Frequenz der Wolkenablösung vom Kavitationsbeiwert

Das instationäre Verfahren gibt die reale kavitierende Strömung gut wieder. Sowohl die Bildung eines Re-Entrant-Jets als auch die Ablösung von Kavitationswolken werden gut vorhergesagt. Die Größe des vorhergesagten Kavitationsgebietes stimmt gut mit den im Experiment gemessenen Ausdehnungen überein. Das entwickelte Verfahren ist somit in der Lage, die Zeitabhängigkeit des Ablösevorgangs richtig vorherzusagen.

4.2.5 Stationäre Simulation der kavitierenden 3D-Strömung

Von BACHERT [7] wurden die mit 15° bzw. 25° gepfeilten ALE-Profile experimentell untersucht. Die beiden Profile, siehe Abbildung 4.34, sind jeweils mit 5° zur Strömung angestellt. Simulationen wurden analog zur experimentellen Untersuchung für eine Reynolds-Zahl von $Re = 1.3 \cdot 10^6$ mit Kavitationszahlen von $\sigma = 2.5$, $\sigma = 2.3$ und $\sigma = 2.0$ durchgeführt. Die verwendete Netztopologie entspricht der bei der 2D-Geometrie verwendeten, siehe Abbildung 4.26.

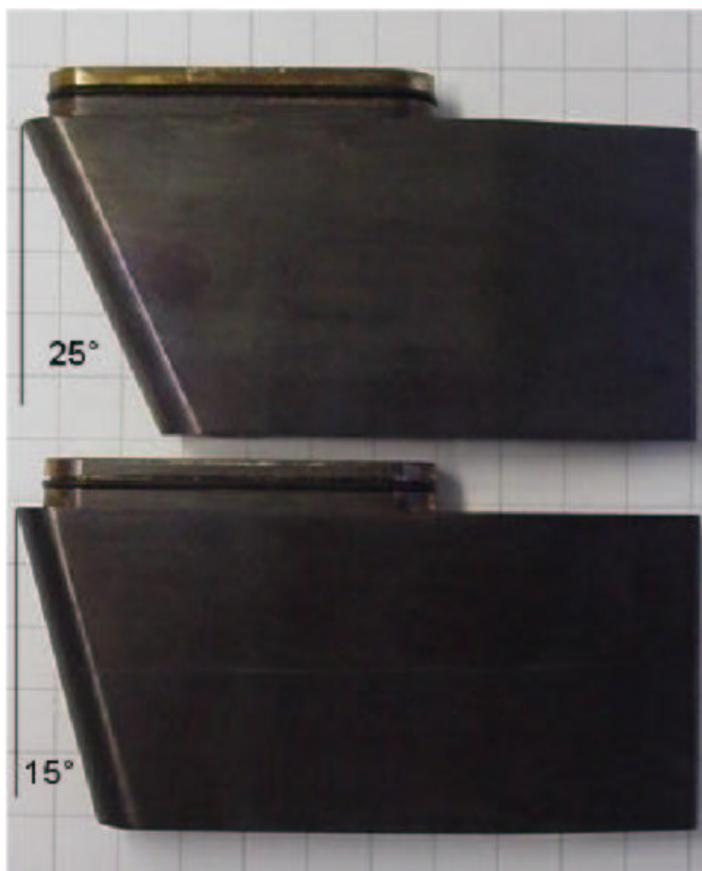


Abbildung 4.34: ALE-Profile mit 15° bzw. 25° Pfeilung

Zunächst wird die kavitierende Strömung um das ALE-Profil mit 15° Pfeilung betrachtet. Abbildung 4.35 zeigt die von der Simulation vorhergesagten Kavitationsgebiete als Iso-Kontur-Plots für einen Dampfanteil von $\alpha = 10\%$. Diese werden in Abbildung 4.36 Aufnahmen des Kavitationsgebietes aus dem Experiment gegenübergestellt. Die Farbskala aus den Aufnahmen des Experiments hängt von der Stärke der lokalen Lichtreflexion ab und gibt keine Auskunft über den lokalen Dampfanteil. Sowohl im Experiment als auch in der Simulation ist das Kavitationsgebiet an der in Strömungsrichtung linken Seite des gepfeilten Profils kürzer. Die Kavitationszone

wächst dann zur Mitte hin an und hat nach etwa zwei Drittel der Profiltiefe seine größte Ausdehnung. Dies wird von der Simulation qualitativ richtig vorhergesagt.

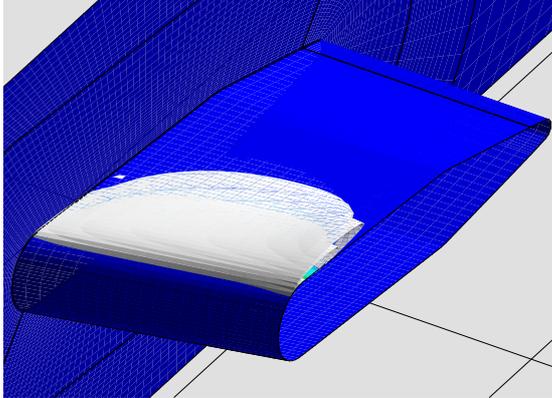


Abbildung 4.35: Berechnete Ausdehnung des Kavitationsgebietes bei $\sigma = 2.5$ und einem Pfeilungswinkel $\beta = 15^\circ$; dargestellt ist die Isofläche für einen Dampf-volumenanteil von $\alpha = 10\%$

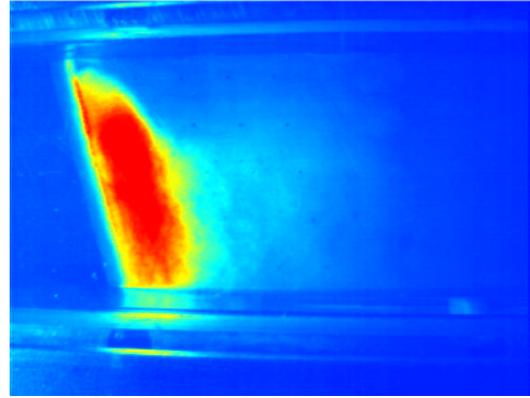


Abbildung 4.36: Aufnahme des Kavitationsgebietes aus dem Experiment für $\sigma = 2.5$ bei einem Pfeilungswinkel von $\beta = 15^\circ$; die Farbskala gibt keine Auskunft über den Phasenanteil

Dieser 3D-Effekt ist beim Pfeilungswinkel von 25° noch ausgeprägter, siehe Abbildung 4.37 bis 4.40. Hier tritt auf der linken Seite des Profils überhaupt keine Kavitation auf. In der Nähe der Frontscheibe löst das Kavitationsgebiet ab und es kommt zur instationären Ablösung der Kavitationswolken. Bei sinkender Kavitationszahl prägt sich dieser Effekt stärker aus.

Sowohl im Experiment, als auch in der Simulation, wird deutlich, dass ein größerer Pfeilungswinkel zu einer stärker ablösenden Kavitation in der Nähe der Frontscheibe führt. Die gezeigten Kontur-Plots geben allerdings nur einen qualitativen Vergleich zwischen Simulation und Experiment.

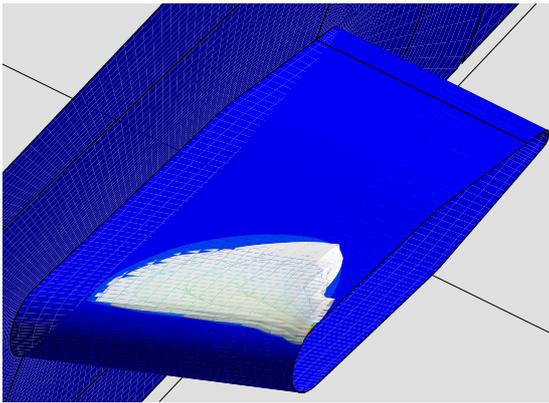


Abbildung 4.37: Berechnete Ausdehnung des Kavitationsgebietes bei $\sigma = 2.5$ und einem Pfeilungswinkel $\beta = 25^\circ$; dargestellt ist die Isofläche für einen Dampf-volumenanteil von $\alpha = 10\%$

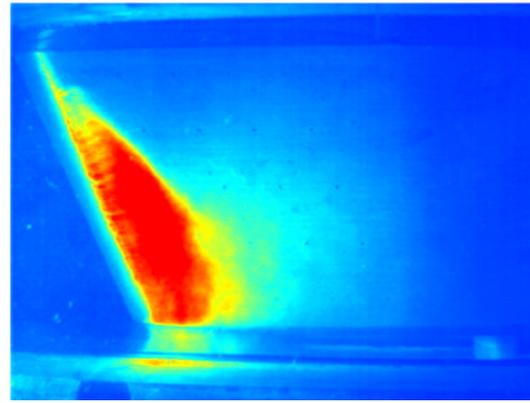


Abbildung 4.38: Aufnahme des Kavitationsgebietes aus dem Experiment für $\sigma = 2.5$ bei einem Pfeilungswinkel von $\beta = 25^\circ$; die Farbskala gibt keine Auskunft über den Phasenanteil

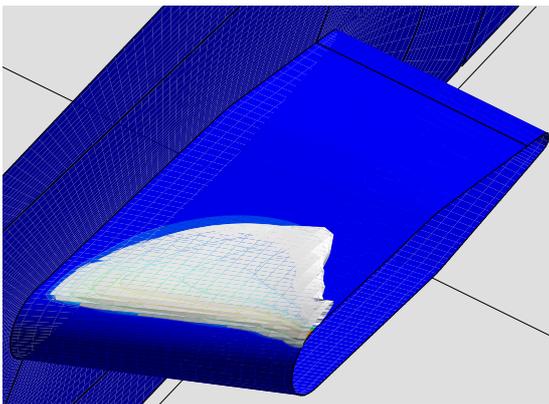


Abbildung 4.39: Berechnete Ausdehnung des Kavitationsgebietes bei $\sigma = 2.0$ und einem Pfeilungswinkel $\beta = 25^\circ$; dargestellt ist die Isofläche für einen Dampf-volumenanteil von $\alpha = 10\%$

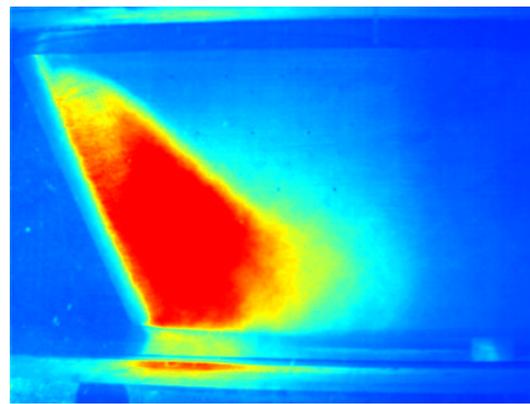


Abbildung 4.40: Aufnahme des Kavitationsgebietes aus dem Experiment für $\sigma = 2.0$ bei einem Pfeilungswinkel von $\beta = 25^\circ$; die Farbskala gibt keine Auskunft über den Phasenanteil

Eine genauere Validierung der berechneten Ergebnisse ist durch den Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsverteilung mit den bei der PIV/LIF-Messung erhaltenen Strömungsvektoren möglich. In Abbildung 4.41 sind die berechneten Stromlinien bei dem ALE-Profil mit 15° Pfeilung in einem Schnitt 5 mm von der Frontscheibe entfernt für den Kavitationsbeiwert $\sigma = 2.0$ dargestellt. Die im Experiment gemessenen Geschwindigkeitsvektoren werden in Abbildung 4.42 gezeigt. Die stationäre Simulation gibt den Geschwindigkeitsverlauf der kavitierenden Strömung gut wieder. Bei niedrigem Kavitationsbeiwert bildet sich der Re-Entrant-Jet aus, und das Kavitationsgebiet löst vom Profil ab. Dies wird von der stationären Simulation richtig vorhergesagt.

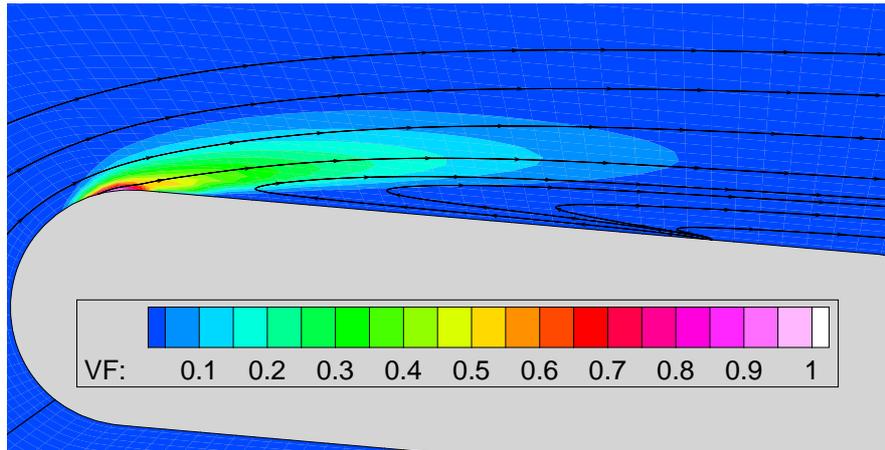


Abbildung 4.41: Berechnete Ausdehnung des Kavitationsgebietes und Stromlinien in der Nähe der Frontscheibe; ALE-Profil mit einem Pfeilungswinkel von $\beta = 15^\circ$ bei $\sigma = 2.0$

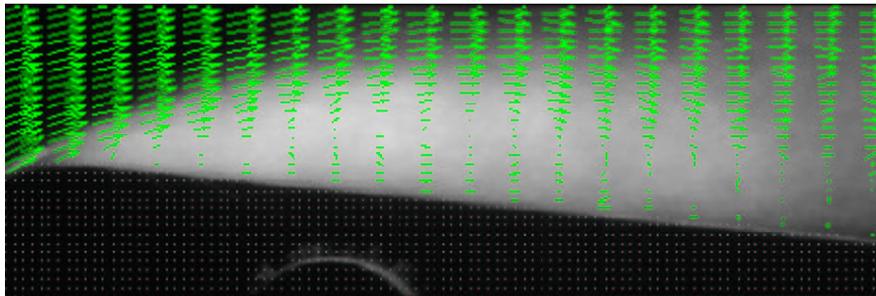


Abbildung 4.42: Gemessene Strömungsvektoren in der Nähe der Frontscheibe; ALE-Profil mit einem Pfeilungswinkel von $\beta = 15^\circ$ bei $\sigma = 2.0$

Tabelle 4.2 vergleicht die berechneten und gemessenen mittleren Geschwindigkeiten des Re-Entrant-Jets in der Nähe der Frontscheibe. Es wird deutlich, dass die Simulation die Rückströmung für kleine Pfeilungswinkel unterschätzt. Der 3D-Effekt aufgrund der Pfeilung wird vom CFD-Code für kleine Pfeilungswinkel nicht richtig vorhergesagt. Für große Pfeilungswinkel wird die mittlere Re-Entrant-Jet-Geschwindigkeit dagegen relativ gut vorhergesagt.

$u_{re-entrant-jet} [m/s]$	$\beta = 15^\circ$ Experiment	$\beta = 15^\circ$ Simulation	$\beta = 25^\circ$ Experiment	$\beta = 25^\circ$ Simulation
$\sigma = 2.5$	-3.3	-0.6	-2.2	-1.9
$\sigma = 2.3$	-4.2	-1.3	-4.6	-3.3
$\sigma = 2.0$	-3.3	-1.7	-3.3	-2.5

Tab. 4.2: Vergleich der berechneten und gemessenen mittleren Re-Entrant-Jet-Geschwindigkeit in der Nähe der Frontscheibe

Kapitel 5

Strömung in einem Laufrad einer radialen Kreiselpumpe RP28

5.1 Testfall

Der entwickelte CFD-Code wurde zur Simulation der kavitierenden Strömung durch ein Laufrad einer Radialpumpe mit der spezifischen Drehzahl $n_q = 26 \text{ 1/min}$ verwendet. Die kavitierende Laufradströmung wurde am Fachgebiet für Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik an der TU Darmstadt experimentell untersucht.

Die Laufradgeometrie ist dreidimensional und entspricht einer in der Praxis üblichen Ausführung. Das Laufrad besitzt sechs Schaufeln, der Austrittsdurchmesser beträgt 260 mm , und die Austrittsbreite ist 23.5 mm . Die Deckscheibe ist aus PMMA und durchsichtig, damit im Experiment Aufnahmen der Strömung gemacht werden können. Es wurden Untersuchungen mit einer Spaltweite des saugseitigen Spaltes von $s = 0.25 \text{ mm}$ und $s = 0.5 \text{ mm}$ durchgeführt. Abbildung 5.1 zeigt eine Aufnahme des Laufrades mit der durchsichtigen Deckscheibe. Die Abströmung des Laufrades erfolgt in einen schaufellosen Kreisringdiffusor. Über eine Umlenkscheibe gelangt das Fluid in einen Ringraum, von dem 12 Schlauchleitungen in einen Sammelflansch führen, siehe Abbildung 5.2. Dadurch soll eine rotationssymmetrische Druckverteilung am Laufradaustritt sicher gestellt werden, um instationären Einflüsse auf das Kavitationsbild auf den Laufschaufeln zu vermeiden.

Der Luftgehalt des Fluids wurde mit Hilfe des sogenannten „Brandtschen Apparates“ bestimmt, siehe BACHERT UND STOFFEL [8]. Es wurde sichergestellt, dass das Fluid mit Luft gesättigt ist. Die Förderhöhe wurde über die Differenz des statischen Druckes von Eintritt zu Austritt der Pumpe errechnet. Die Druckmessbohrungen liegen am Austritt bei einem Durchmesser von 250 mm und am Eintritt 550 mm vor dem Saugmund. Bei einer Nenndrehzahl von $n = 1750 \text{ 1/min}$ liefert das Laufrad im dazugehörigen Gehäuse einen Nennvolumenstrom von $Q_{opt} = 125 \text{ m}^3/\text{h}$. Bei

einer Drehzahl von $n = 2000 \text{ 1/min}$ liegt der Volumenstrom im Optimalpunkt bei $Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$. Eine detaillierte Beschreibung des Versuchsstandes findet sich bei HOFMANN [48]. Die Versuchspumpe und die verwendete Messtechnik sind bei BACHERT & STOFFEL [8] beschrieben.



Abbildung 5.1: Laufrad RP26 mit durchsichtiger Deckscheibe.

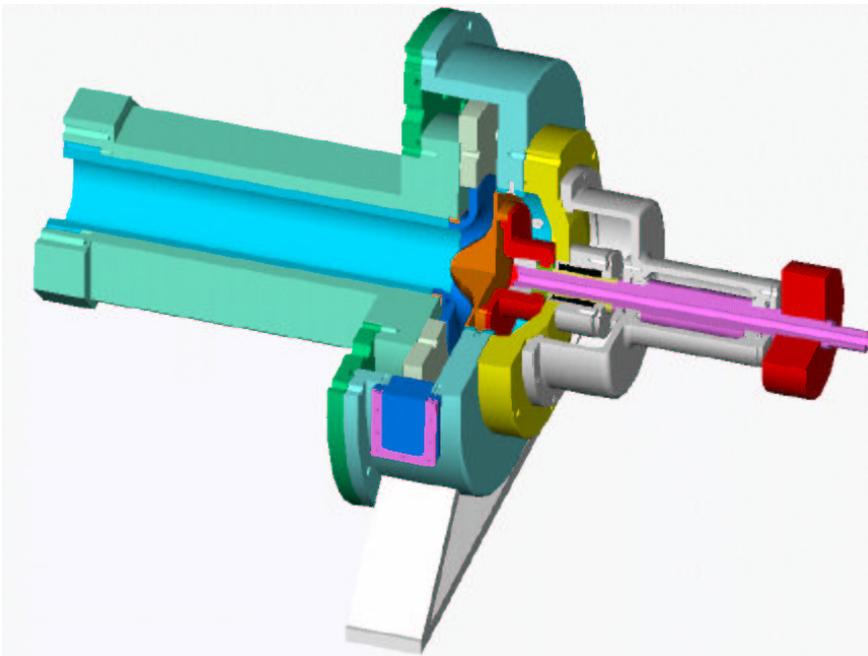


Abbildung 5.2: Schnitt durch die Versuchspumpe

5.2 Verwendete Rechennetze

Bei der Simulation der Laufradströmung wurde eine sogenannte „free impeller“ Simulation durchgeführt. Das bedeutet, dass die stationäre Relativströmung in nur einem Schaufelkanal berechnet wird. Der Einfluss der Spaltströmung wird bei der Simulation der Laufradströmung zunächst vernachlässigt. Zur Vernetzung eines Schaufelkanals wurde eine 1-Block-H-Topologie mit 112 000 Rechenzellen verwendet. Dieses Rechennetz ist in Abbildung 5.3 in der konformen Abbildung dargestellt. Bei der Netzgenerierung wurde darauf geachtet, dass der dimensionslose Wandabstand y^+ an allen Wänden im Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes liegt. Zur Berechnung der Laufradkennlinie wird das Rechennetz bis zum Radius $r = 250 \text{ mm}$ gezogen, da im Experiment bei diesem Radius die Druckmessstellen für den druckseitigen statischen Druck liegen. Zur Simulation der Förderhöhenabfallkurven wird das Rechennetz nur bis kurz hinter die Schaufelhinterkante bei $r = 150 \text{ mm}$ geführt, damit die Strömung im radialen Diffusor nicht mitberücksichtigt werden muss.

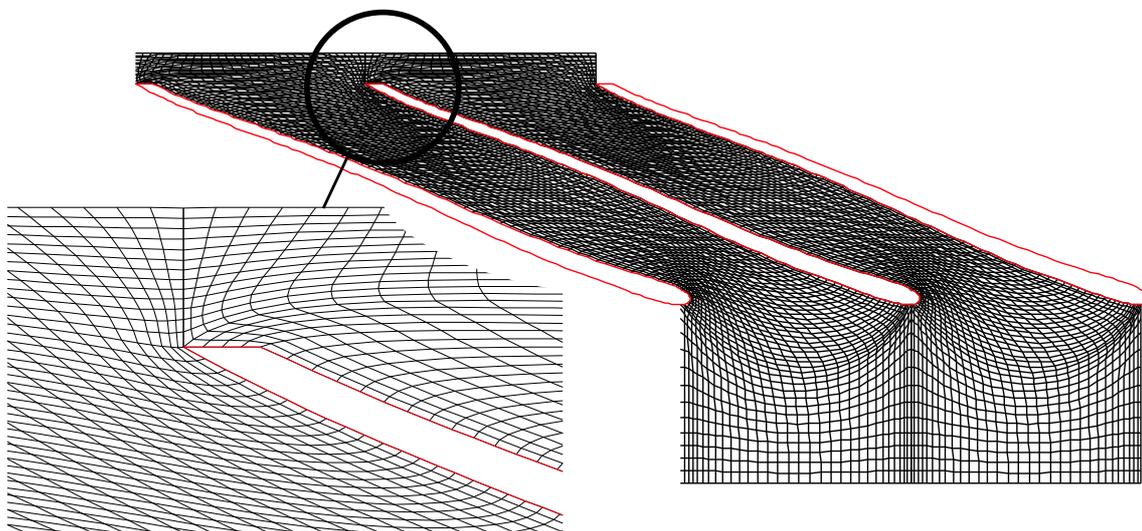


Abbildung 5.3: Darstellung des verwendeten Rechennetzes in der konformen Abbildung

Zur Berücksichtigung des Einflusses der Spaltströmung wird das Rechenggebiet um den saugseitigen Radseitenraum erweitert. Dabei wird wie im Experiment eine Spaltweite von $s = 0.5 \text{ mm}$ eingestellt. Auch bei der Generierung des Radseitenraumnetzes wird das y^+ -Kriterium beachtet. Das Multi-Block-Rechennetz zur Simulation der Laufradströmung mit Radseitenraum ist im Meridianschnitt in Abbildung 5.4 dargestellt. Es wurden Simulationen der Strömung sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung des Radseitenraumes durchgeführt.

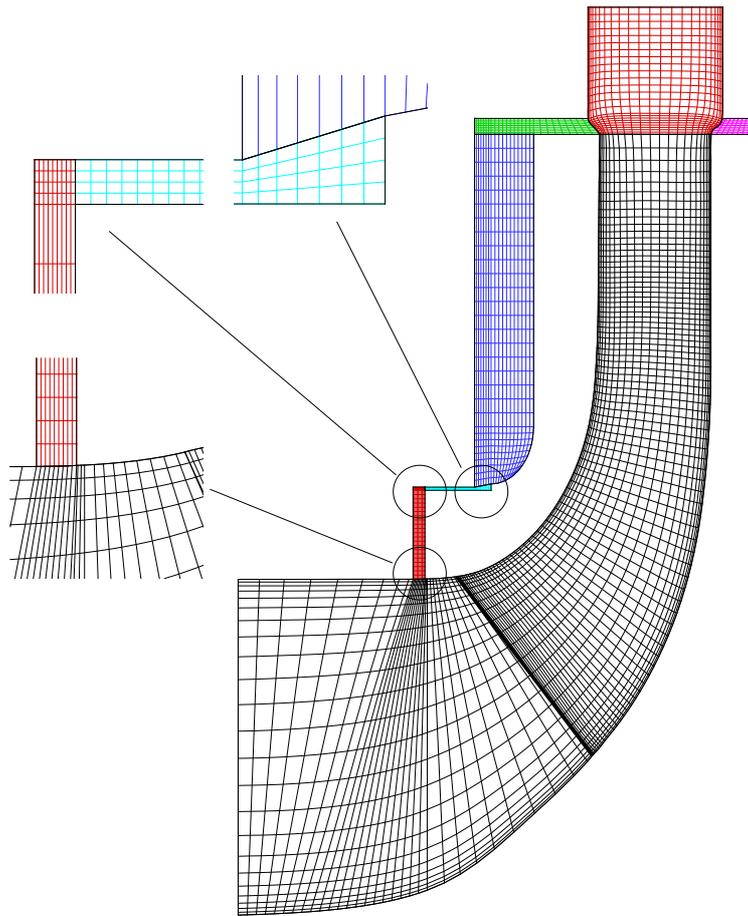


Abbildung 5.4: Darstellung des verwendeten Rechnetzes bei Berücksichtigung des Radseitenraumes im Meridianschnitt

5.3 Simulation des Betriebsverhaltens

Bei der stationären Simulation der Laufradströmung wird der Volumenstrom durch die Geschwindigkeit am Einströmrand eingestellt. Der statische Druck wird als Randbedingung am Ausströmrand vorgegeben. Zur Berechnung der Kennlinie wird zunächst die kavitationsfreie, d.h. die einphasige Strömung durch das Laufrad simuliert. Dabei wird die Förderhöhe H , die aus der Differenz der statischen Drücke zwischen Laufradaus- und Eintritt ermittelt wird, über dem Volumenstrom Q aufgetragen.

$$H = \frac{p_{s2} - p_{s1}}{\rho g}, \quad (5.1)$$

In Abbildung 5.5 sind die berechneten Kennlinien im Vergleich mit den gemessenen für den untersuchten Drehzahlbereich dargestellt. Im betrachteten Lastbereich zeigt

sich eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Die Erhöhung der Drehzahl bewirkt eine Verschiebung der Kennlinie hin zu einer entsprechend größeren Förderhöhe.

Die vorhergesagten Kennlinien liegen etwas höher als die gemessenen, da bei der Simulation die Spaltströmung zunächst nicht berücksichtigt wurde. Der Spalteinfluss wurde exemplarisch für die Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ untersucht. Aufgrund des Spaltvolumenstroms sinkt dabei die Förderhöhe im Vergleich zur spaltfreien Simulation, siehe Abbildung 5.5. Diese Differenz erklärt sich durch den um den Spaltvolumenstrom vergrößerten Laufradvolumenstrom, bedingt durch die Spaltströmung, bei konstantem Anlagenvolumenstrom. Die unter Berücksichtigung des saugseitigen Radseitenraumes errechnete Kennlinie stimmt mit der gemessenen Kennlinie sehr gut überein.

Auf die Spaltströmung und deren Auswirkungen auf die kavitierende Laufradströmung wird in Kapitel 5.6 detailliert eingegangen.

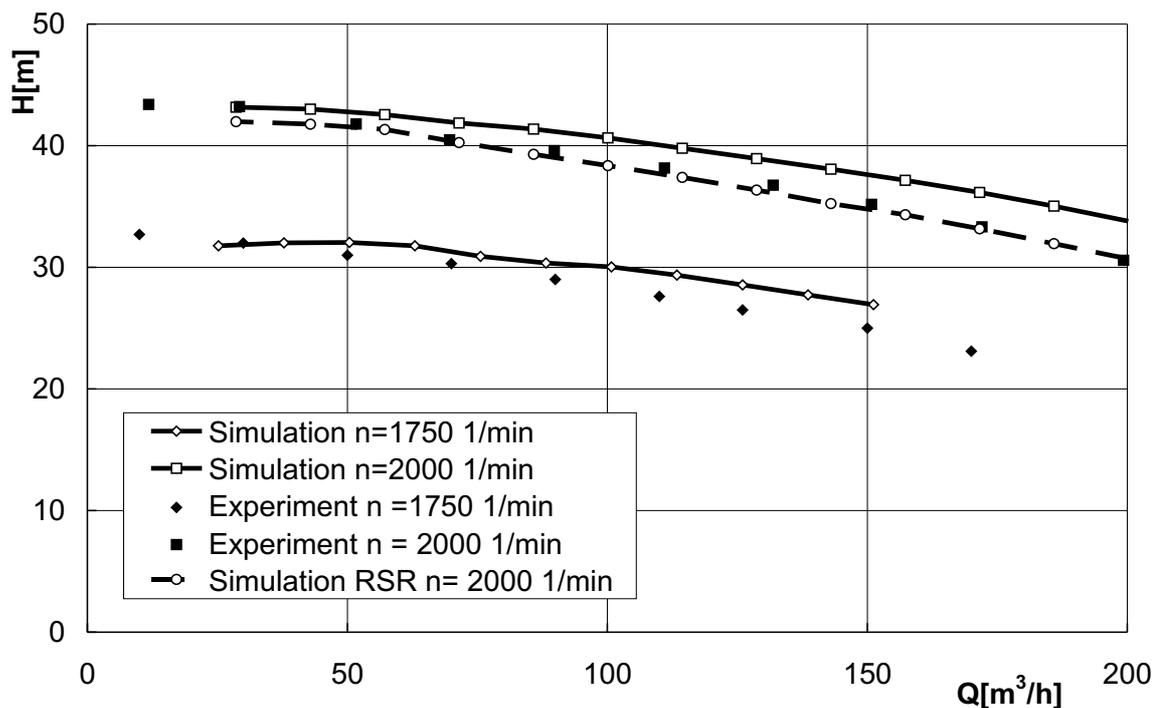


Abbildung 5.5: Vergleich der vorhergesagten und gemessenen Kennlinie des Laufrades für $n = 1750 \text{ 1/min}$ und $n = 2000 \text{ 1/min}$

5.4 Simulation des Förderhöhenabfalls

Ausgangspunkt für die Berechnung der Förderhöhenabfallkurven ist eine stationäre Strömungssimulation bei ausreichend hohem Druckniveau, so dass der minimale statische Druck im Strömungsfeld größer ist als der Dampfdruck und somit eine kavitationsfreie Strömung garantiert ist. Das Druckniveau wird dann sukzessive über die Druckrandbedingung am Ausströmrand abgesenkt. In Gebieten, in denen der statische Druck den Dampfdruck unterschreitet, bilden sich Dampfstrukturen. Die Schrittweite der Druckabsenkung kann anfangs noch groß gewählt werden. Bei ausgebildeter Kavitation muss der Druck in sehr kleinen Schritten gesenkt werden, um den Steilabfall der Förderhöhe richtig vorherzusagen. Nach jeder stationären Simulation wird das Ergebnis gespeichert und ausgewertet. Für jedes Druckniveau wird die Förderhöhe aus Gleichung 5.1 und der NPSH-Wert am Eintritt des Strömungsfeldes aus Gleichung 1.2 bestimmt.

Als Kriterium für die Konvergenz des Verfahrens wurde bei der Simulation des Förderhöhenabfalls eine Verringerung der Residuen für Druck, Geschwindigkeit und Dampfvolumenteil um vier Größenordnungen angenommen, d.h. $Res = 1 \cdot 10^{-4}$. Dieses Kriterium kann bei sehr großen Kavitationsgebieten im Laufrad nicht in allen Fällen erreicht werden. Dies liegt an der Annahme eines konstanten Volumenstroms am Eintritt. Der Einfluss der Versperrungswirkung auf den Volumenstrom wird nicht berücksichtigt. Deshalb wird ab einem Förderhöhenabfall von 3% als Konvergenzkriterium $Res = 5 \cdot 10^{-4}$ verwendet. Im Bereich des Steilabfalls tritt die Kavitation außerdem stark instationär auf, was bei der stationären Simulation zu zusätzlichen Instabilitäten führen kann.

Bei der Simulation wurde als Fluid Wasser mit der Dichte $\rho_l = 998.4 \text{ kg/m}^3$ und der molekularen Viskosität $\mu_l = 1.02 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ verwendet. Das Fluid hat einen Dampfdruck von $p_v = 3168 \text{ Pa}$ bei einer Temperatur von $T = 298 \text{ K}$. Ferner wurde angenommen, dass sich im Wasser $n_0 = 10^8$ Keime pro m^3 mit einem minimalen Radius von $R_0 = 10^{-6} \text{ m}$ befinden. Die Dichte des Wasserdampfes wurde konstant $\rho_v = 0.1 \text{ kg/m}^3$ gesetzt. Ein Turbulenzgrad am Eintritt des Rechengbietes von $Tu = 2\%$ wurde angenommen.

Einen Vergleich des vorhergesagten und des gemessenen Verlaufes des relativen Förderhöhenabfalls H/H_0 für die Drehzahlen $n = 1750 \text{ 1/min}$ und $n = 2000 \text{ 1/min}$ beim jeweiligen Nennvolumenstrom zeigt Abbildung 5.6. Bei der Drehzahl $n = 1750 \text{ 1/min}$ tritt zum ersten Mal bei einem Druckniveau von $NPSH_{IC} = 2.86 \text{ m}$ Kavitation auf. Der Steilabfall der Förderhöhe beginnt bei $NPSH_{3\%} = 1.97 \text{ m}$. Im Experiment wurde ein Wert von $NPSH_{3\%} = 2.06 \text{ m}$ gemessen. Bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ setzt die Kavitation bei $NPSH_{IC} = 3.73 \text{ m}$ ein. Für den Steilabfall wird $NPSH_{3\%} = 2.46 \text{ m}$ vorhergesagt, das Experiment liefert $NPSH_{3\%} = 2.56 \text{ m}$. Die Abweichung der vorhergesagten Ergebnisse der Simulation von den Ergebnissen der Messung liegt in der Größenordnung der Messunsicherheit.

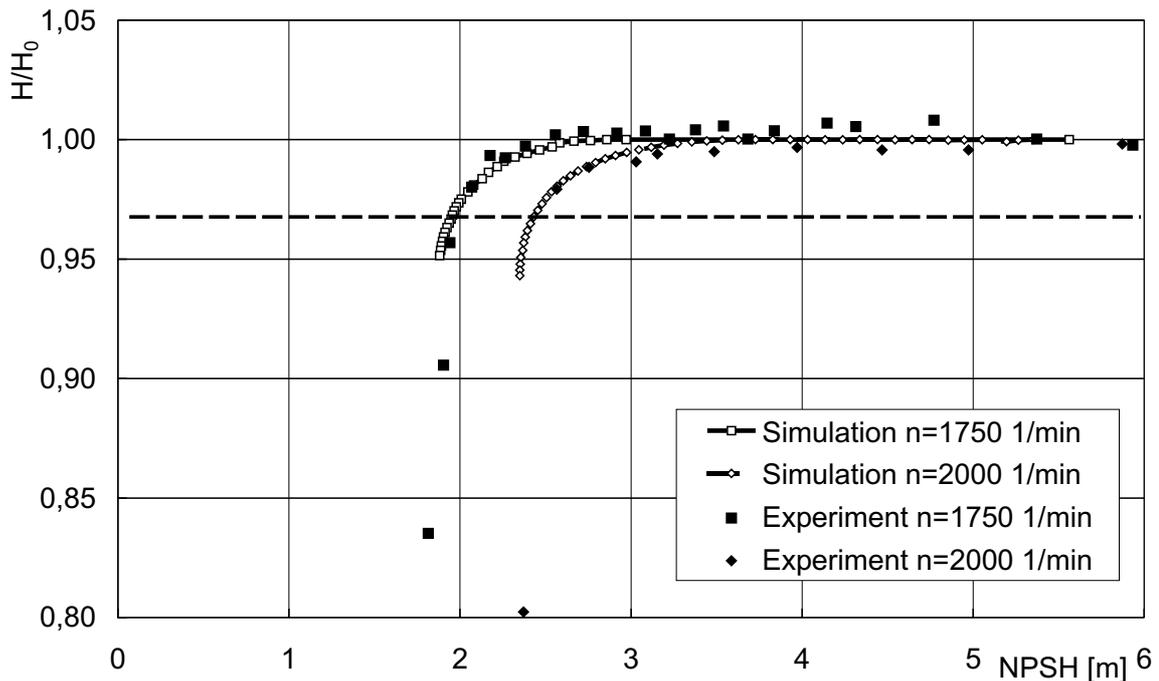


Abbildung 5.6: Vergleich des vorhergesagten und gemessenen relativen Förderhöhenabfalls bei der Drehzahl $n = 1750 \text{ 1/min}$ und $n = 2000 \text{ 1/min}$ im jeweiligen Optimalpunkt

Die Förderhöhenabfallkurven für die Betriebspunkte von $Q = 0.8 \cdot Q_{opt}$ bis $Q = 1.2 \cdot Q_{opt}$ bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass es für einen hohen Volumenstrom $Q = 1.2 \cdot Q_{opt}$ zu einem „schleichenden“ Förderhöhenabfall kommt, d.h. die Kavitation setzt schon bei hohen $NPSH$ -Werten ein, und die Förderhöhe sinkt relativ stetig und langsam ab. Für Volumenströme zwischen $Q = 1.1 \cdot Q_{opt}$ und $Q = 0.9 \cdot Q_{opt}$ setzt die Kavitation erst bei niedrigen $NPSH$ -Werten ein, und es kommt zu einem plötzlichen, sehr steilen Abfall der Förderhöhe. Für $Q = 0.9 \cdot Q_{opt}$ findet unmittelbar vor dem Steilabfall sogar eine leichte Erhöhung der Förderhöhe statt. Der Förderhöhenabfall bei $Q = 0.8 \cdot Q_{opt}$ verläuft dagegen nicht mehr ganz so steil. Das Kavitationsverhalten der Kreiselpumpe wird vom Experiment bestätigt. Es entspricht tendenziell dem Verhalten einer in FROBENIUS ET AL. [40] untersuchten Radialpumpe.

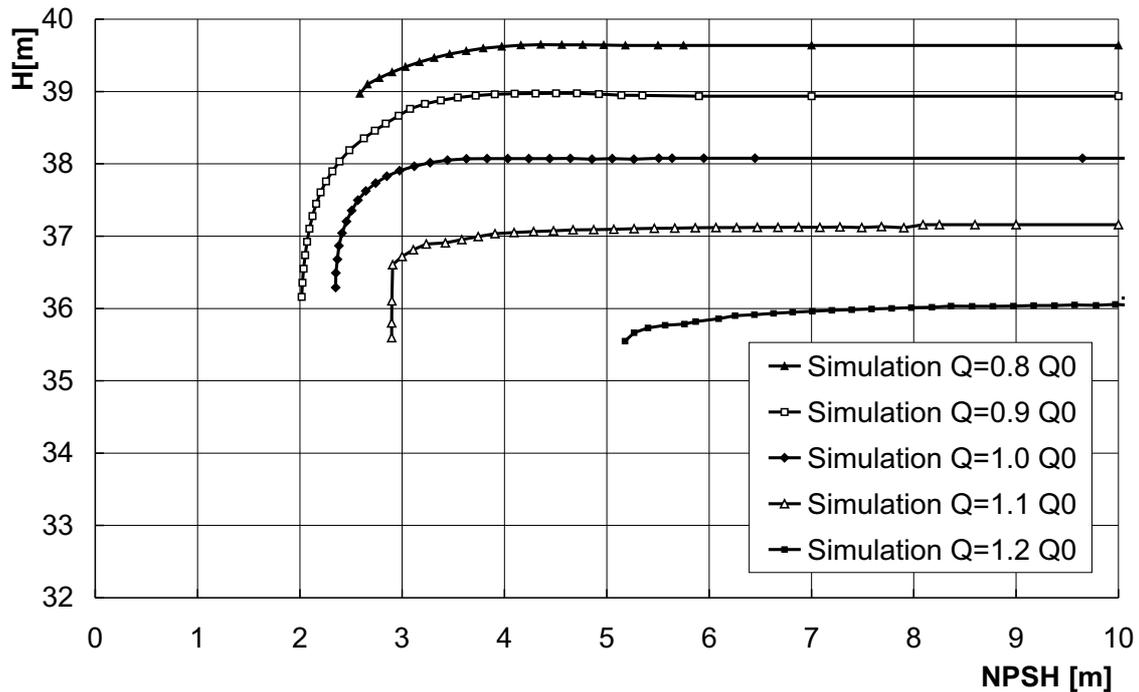


Abbildung 5.7: Berechneter Förderhöhenabfall für verschiedene Volumenströme bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$

Die aus den berechneten Förderhöhenabfallkurven ermittelten Werte für beginnende Kavitation $NPSH_{IC}$ und den 3%-Förderhöhenabfall $NPSH_{3\%}$ bei der Drehzahl $n = 1750 \text{ 1/min}$ sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Zum Vergleich sind die aus den Messungen der Hersteller-Firma und dem Experiment am Pumpenprüfstand ermittelten $NPSH_{3\%}$ -Werte aufgetragen. Die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment ist im gesamten betrachteten Bereich sehr gut. Die Abweichung der vom Hersteller angegebenen Werte liegt daran, dass dort das Laufrad mit anschließender Spirale betrieben wurde und nicht mit einem unbeschaukelten Radialdiffusor.

Den Vergleich der $NPSH_{3\%}$ -Werte aus der Simulation mit den im Experiment bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ gemessenen zeigt die Abbildung 5.9. Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment im gesamten untersuchten Volumenstrombereich sehr gut. Das Kavitationsverhalten bei $n = 2000 \text{ 1/min}$ ist dem bei der Drehzahl $n = 1750 \text{ 1/min}$ sehr ähnlich.

Bei beiden Drehzahlen ist deutlich erkennbar, dass die $NPSH_{3\%}$ -Kurve nicht dem $NPSH_{IC}$ -Verlauf folgt. Dieses für Kreiselpumpen niedriger spezifischer Drehzahl typische Verhalten kann damit erklärt werden, dass der zentrifugale Anteil an der Energieumsetzung im Laufrad insbesondere bei Teillast so groß wird, dass die hydrodynamischen Vorgänge im Bereich der Vorderkante, d.h. die Ausbildung der Kavitation oder die Fehlanströmung bei Teil- und Überlast, kompensiert werden und deshalb die Förderhöhe lange auf hohem Niveau bleibt.

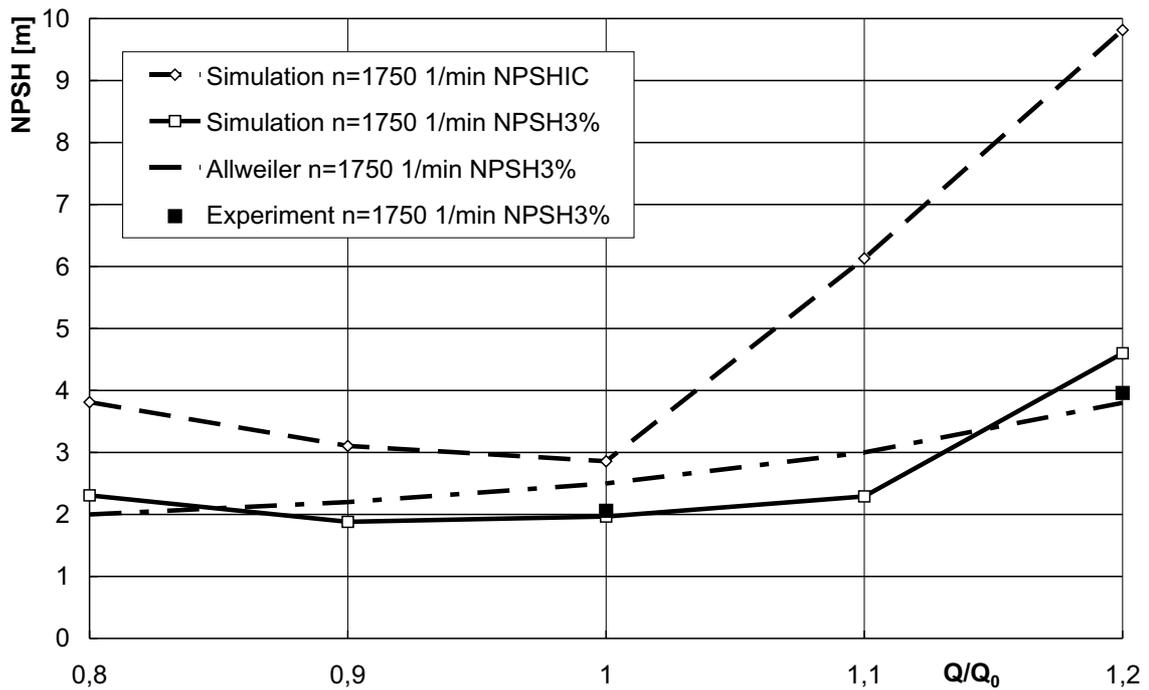


Abbildung 5.8: Vergleich der berechneten und gemessenen $NPSH_{3\%}$ -Werte sowie berechneter $NPSH_{IC}$ -Werte als Funktion des bezogenen Volumenstroms bei der Drehzahl $n = 1750 \text{ 1/min}$

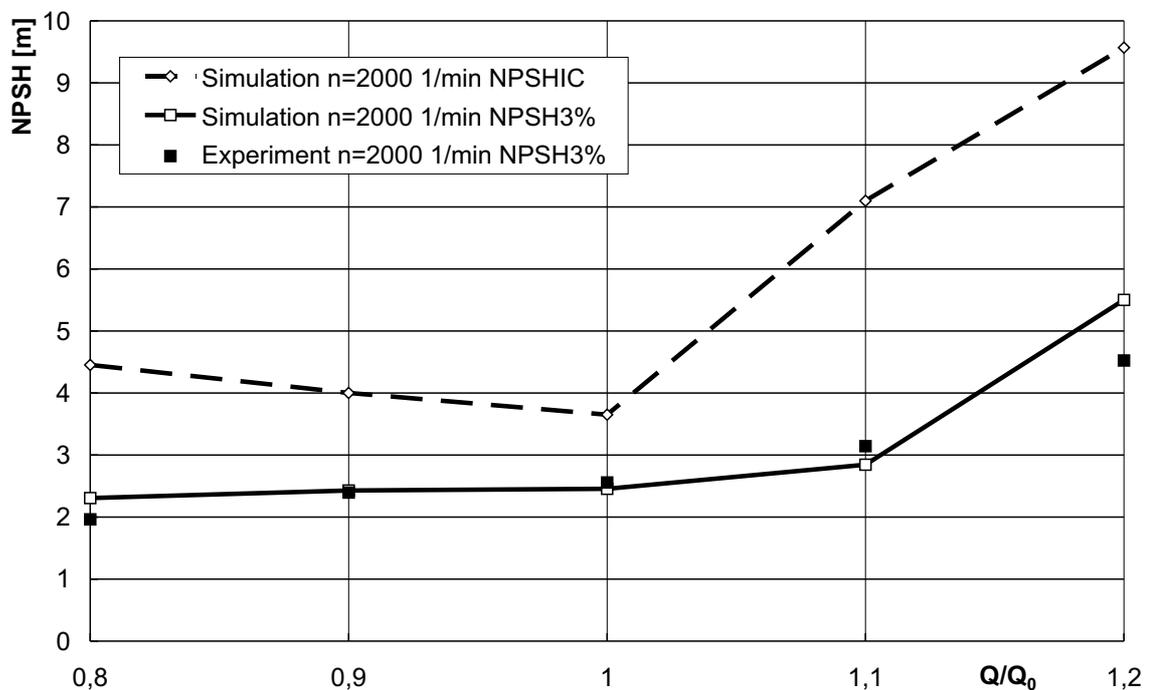


Abbildung 5.9: Vergleich der berechneten und gemessenen $NPSH_{3\%}$ -Werte sowie berechneter $NPSH_{IC}$ -Werte als Funktion des bezogenen Volumenstroms bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$

5.5 Analyse des Förderhöhenabfalls

Zur Analyse des Förderhöhenabfalls sollen die Kavitationserscheinungen für die Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ im Optimalpunkt $Q = 143 \text{ m}^3/h$ genauer untersucht werden. Es werden fünf Zustände entlang der Förderhöhenabfallkurve untersucht, siehe Abbildung 5.10. Dabei kennzeichnet Punkt *A* den Punkt beginnender Kavitation. Die Förderhöhe fällt zunächst bei sinkendem *NPSH*-Wert nur sehr langsam ab. Bei Punkt *B* beträgt die Förderhöhe nur noch 99% der ursprünglichen Förderhöhe und bei Punkt *C* 98%. Der 3%-Förderhöhenabfall tritt im Punkt *D* auf und im Punkt *E* ist die Förderhöhe auf 95% der ursprünglichen Förderhöhe gesunken. Ab dem Punkt *E* bleibt der *NPSH*-Wert konstant.

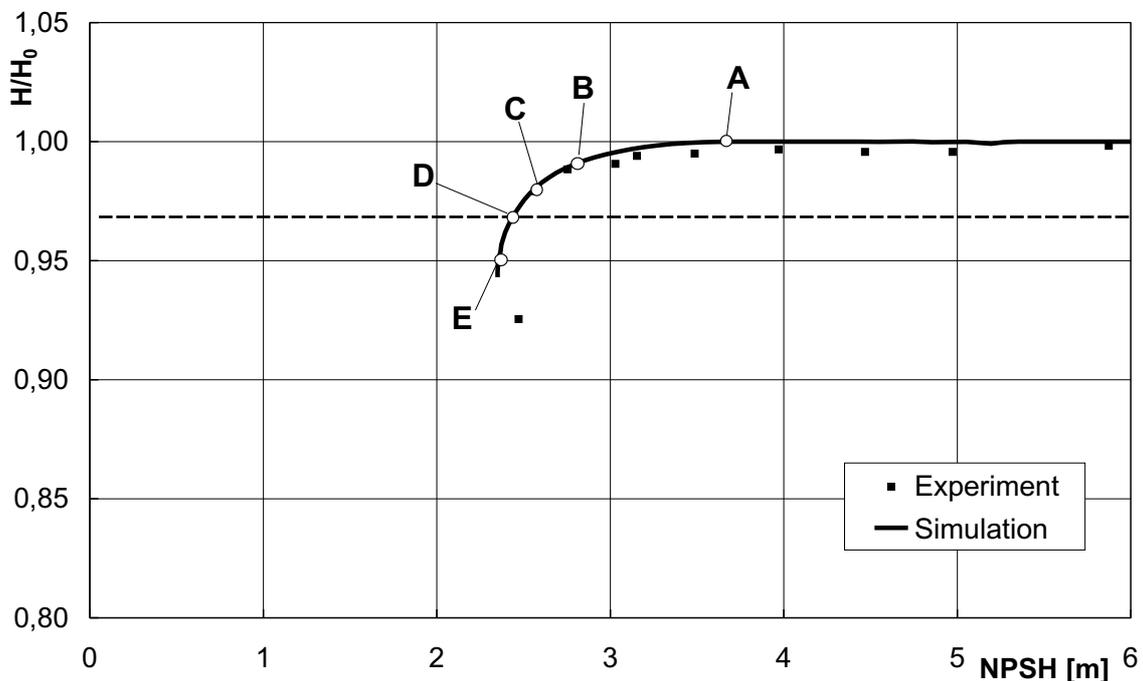


Abbildung 5.10: Analyse des Förderhöhenabfalls bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ im Optimalpunkt $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

Für die anderen in der Simulation untersuchten Volumenströme ergeben sich prinzipiell die gleichen Kavitationserscheinungen. In Abhängigkeit vom Volumenstrom und damit von der Schaufelanströmung sind aber Druck- und Saugseitenkavitation verschieden stark ausgeprägt. Da im Optimalpunkt sowohl Druck- als auch Saugseitenkavitation schon bei niedrigem Förderhöhenabfall auftreten, wird dieser Betriebspunkt als der allgemeingültigste der untersuchten Fälle angesehen und zur Analyse der Ursachen für den Förderhöhenabfall verwendet.

5.5.1 Experimentelle Beobachtungen

Im Experiment wurden neben der Messung der Pumpenkennlinie und der Abrisskurven auch optische Untersuchungen der Laufradkavitation durchgeführt. Optischer Zugang ist im Saugmundbereich und im radialen Bereich gegeben. Der dazwischen liegende Teil des Laufrades kann nicht eingesehen werden, so dass der Ort der beginnenden Kavitation nicht exakt detektiert werden kann.

Bei den experimentellen Untersuchungen wurde beobachtet, dass schon ab einem Druckniveau von $NPSH = 5.5 \text{ m}$ Spaltkavitation auftritt. Bei der untersuchten Spaltweite von $s = 0.25 \text{ mm}$ ist die Spaltkavitation nicht sehr stark ausgeprägt und kann bei der Simulation vernachlässigt werden. Sie hat allerdings bei der Spaltweite $s = 0.5 \text{ mm}$ entscheidenden Einfluss auf die Ausbildung der Kavitationsgebiete. Auf die Spaltkavitation und deren Auswirkung wird gesondert im Kapitel 5.6 eingegangen. Auf der Saugseite wurde für hohe $NPSH$ -Werte Einzelblasenkavitation festgestellt. Beim Steilabfall der Förderhöhe kommt es zu Schichtkavitation auf der Saugseite. Außerdem tritt Kavitation auch im radialen Bereich auf. Dies bedeutet, dass die Kavitationsgebiete von der Schaufeldruck- und Saugseite bis in den radialen Bereich transportiert werden. Dieser Vorgang ist starken zeitlichen Schwankungen unterworfen, was im Experiment sehr gut beobachtet werden konnte. Die Spaltkavitation ist auch beim Steilabfall der Förderhöhe stärker ausgeprägt.

5.5.2 Versperrungswirkung

Die in Abbildung 5.10 dargestellten Punkte der Förderhöhenabfallkurve sollen nun genauer betrachtet werden. In Abbildung 5.11 ist der Dampfvolumenteil in der konformen Abbildung und im Meridianschnitt auf der Druck- und auf der Saugseite der Schaufel für die betrachteten Zustände dargestellt. Kavitation entsteht zunächst auf der Saugseite (A). Das saugseitige Kavitationsgebiet wächst bei sinkendem $NPSH$ -Wert an, die Förderhöhe bleibt davon zunächst nahezu unberührt (B). Der Dampfvolumenteil innerhalb des saugseitigen Kavitationsgebietes ist sehr hoch, $40\% < \alpha < 90\%$, was auf Schichtkavitation schließen lässt. Die Förderhöhe beginnt erst zu sinken, wenn auch auf der Druckseite der Schaufel Kavitation entsteht. Bei $NPSH = 2.80 \text{ m}$ ist das Kavitationsgebiet auf der Druckseite in der Nähe der Deckscheibe gerade eben erkennbar (B). Dieses Kavitationsgebiet wächst bei sinkendem Druckniveau an und breitet sich bis etwa zur Hälfte der Schaufelhöhe aus. Es liegt genau im Bereich des engsten Querschnitts zwischen den Schaufeln und trägt damit entscheidend zum Förderhöhenabfall bei. Der Dampfvolumenteil innerhalb des druckseitigen Kavitationsgebietes ist niedriger als bei der Saugseitenkavitation, $10\% < \alpha < 60\%$. Wenn auch das saugseitige Kavitationsgebiet den engsten Querschnitt erreicht hat, bricht die Förderhöhe vollständig zusammen (D und E).

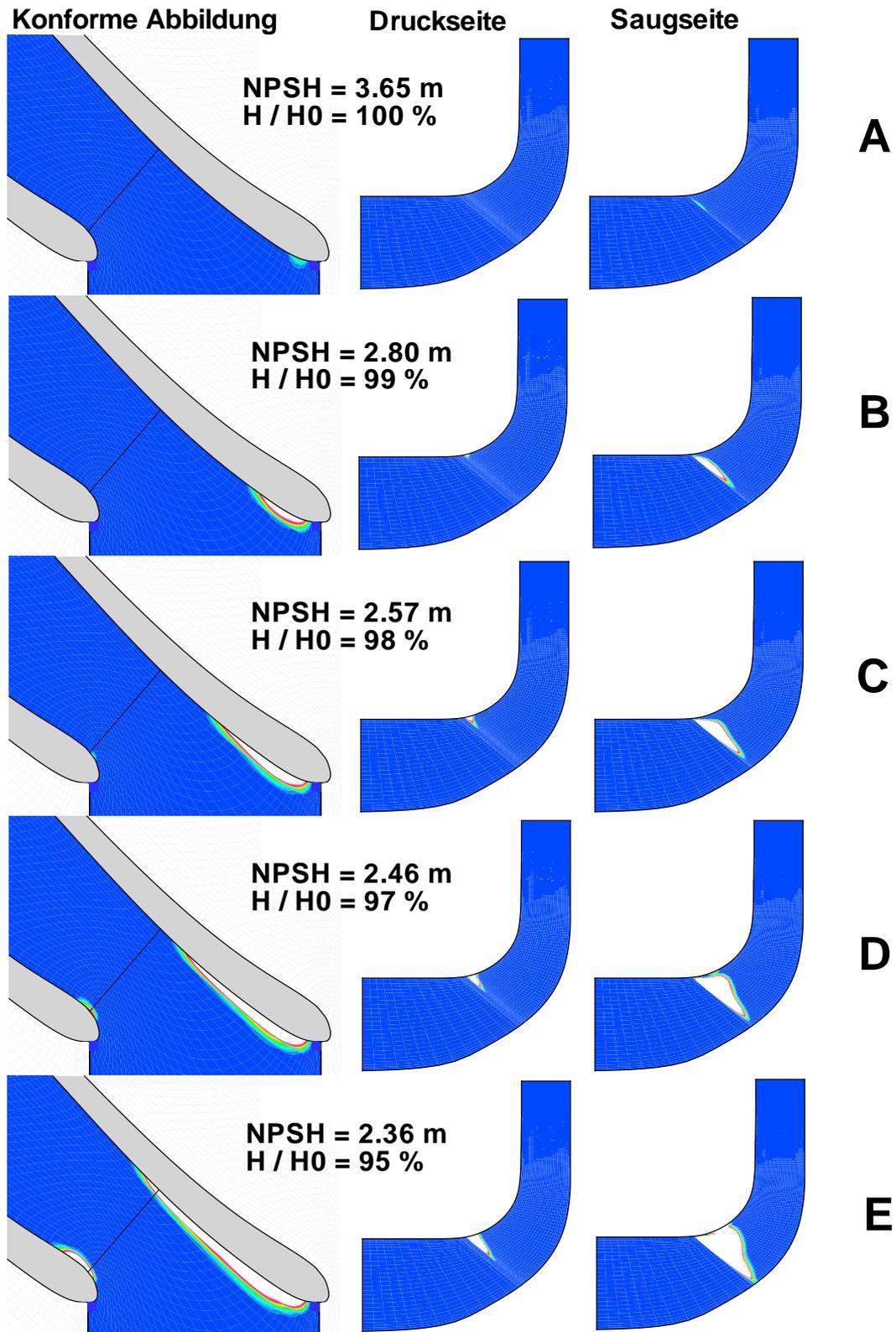


Abbildung 5.11: Ausbildung der Kavitationszonen auf der Saug- und Druckseite bei sinkendem NPSH-Wert

Der Dampfvolumenteil α im engsten Querschnitt ist für einen Förderhöhenabfall von 1%, 3% und 5% in Abbildung 5.12 dargestellt. Hier wird die Versperrungswirkung der Kavitation deutlich: Bei einem Förderhöhenabfall von 1% hat das Kavitationsgebiet auf der Saugseite den engsten Querschnitt noch nicht erreicht. Der Dampfanteil auf der Druckseite ist noch sehr gering, $\alpha < 2\%$. Bei 3% Förderhöhenabfall ist der Dampfanteil sowohl auf der Druck- als auch auf der Saugseite auf $\alpha > 10\%$ gestiegen. Das Kavitationsgebiet versperrt fast 5% des engsten Querschnitts. Beim Totalabfall erreicht der Dampfvolumenteil auf Druck- und Saugseite Werte von $\alpha > 20\%$. Das Kavitationsgebiet wird vor allem auf der Saugseite sehr dick und versperrt etwa 10% des engsten Querschnitts.

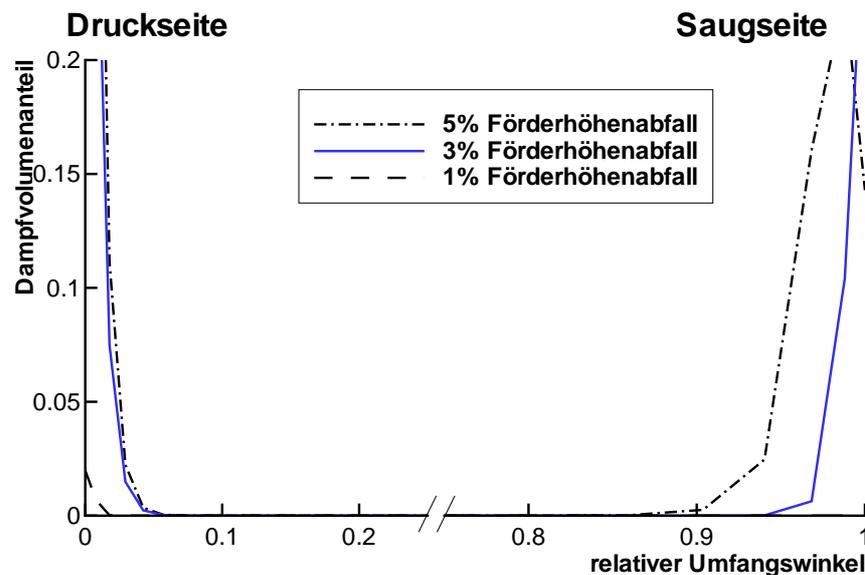


Abbildung 5.12: Dampfanteil im engsten Querschnitt zwischen der Druck- und der Saugseite bei zunehmendem Förderhöhenabfall

Bei der Untersuchung einer ähnlichen Radialpumpe, siehe FROBENIUS ET AL. [40], wurde festgestellt, dass es sich bei der Saugseitenkavitation in der Regel um eine quasi-stationäre Schichtkavitation handelt. Sie verändert bei geringer Kavitationsdicke zunächst nur den Auftrieb des angeströmten Profils und kann dabei sogar zu einer Erhöhung der Förderhöhe beitragen. Für den Förderhöhenabfall ist die saugseitige Schichtkavitation nicht so stark verantwortlich. Dagegen tritt Druckseitenkavitation immer stark instationär auf. Sie löst dann vom Profil ab und kann bis in den radialen Bereich hinein transportiert werden. Bei der stationären Simulation des Förderhöhenabfalls werden diese instationären Effekte nicht modelliert. Dennoch wird aus den Abbildungen 5.11 und 5.12 deutlich, dass die druckseitige Kavitation maßgeblich für den Förderhöhenabfall verantwortlich ist.

5.5.3 Einfluss der Kavitation auf die Schaufeldruckverteilung

Der Einfluss der Kavitation auf die Schaufeldruckverteilung ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Der dimensionslose Druck C_p , Gleichung 4.1, ist über der dimensionslosen Schaufellänge s/s_{max} für den Punkt beginnender Kavitation (A) und den 3%-Förderhöhenabfall (D) aufgetragen. Die linke Seite der Abbildung zeigt den C_p -Verlauf in der Mitte des Strömungskanals, die rechte den C_p -Verlauf auf einer Strombahn nahe der Deckscheibe. Durch die Druckabsenkung entsteht ein relativ langes Kavitationsgebiet auf der Saugseite, bei dem der Druck gleich dem Dampfdruck ist. Das Kavitationsgebiet auf der Druckseite ist kleiner, allerdings treten auf der Druckseite sehr starke Druckgradienten auf. Eine Beeinflussung der Druckverteilung im radialen Bereich der Schaufel durch die Kavitation ist noch nicht feststellbar.

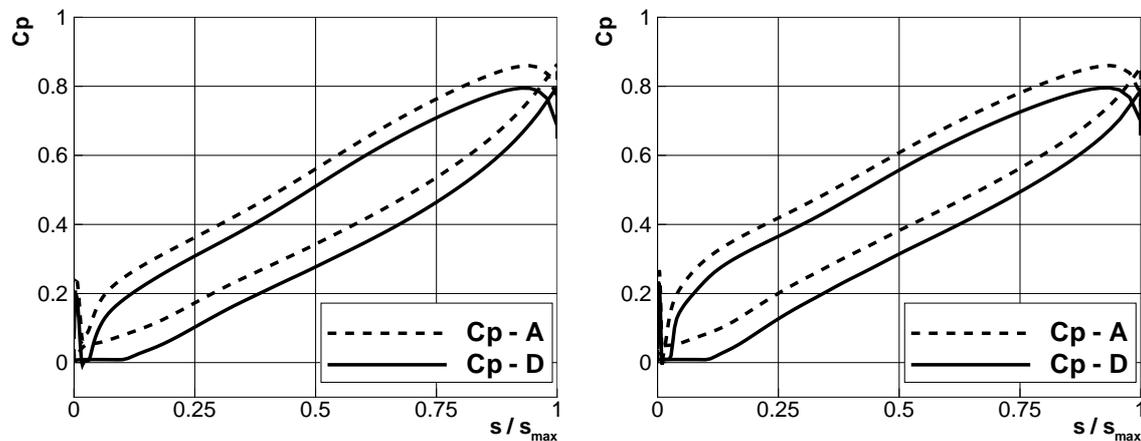


Abbildung 5.13: Vergleich des C_p -Verlaufes in der Mitte des Strömungskanals (links) und in der Nähe der Deckscheibe (rechts) bei beginnender Kavitation (A) und beim 3% -Förderhöhenabfall (D)

Die Schaufeldruckverteilung in der Mitte des Strömungskanals wird in Abbildung 5.14 genauer betrachtet. Bei beginnender Kavitation liegt der Druck auf der Schaufeldruckseite in der Mitte des Strömungskanals noch deutlich über dem Dampfdruck, während auf der Schaufelsaugseite schon Kavitation entsteht. Die Saugseitenkavitation bewirkt eine Beschleunigung der Strömung, was zu einem weiteren Absinken des statischen Druckes führt. Dieser Effekt verstärkt das Auftreten der Druckseitenkavitation bei kleineren $NPSH$ -Werten. Die Druckseitenkavitation wird also durch die Druck- und Geschwindigkeitsänderung auf der Saugseite induziert. Zu vergleichbaren Beobachtungen bei ähnlichen Radialpumpen gelangen auch FRIEDRICHS [36], COUTIER-DELGOSHA ET AL. [19] und POUFFARY ET AL. [86].

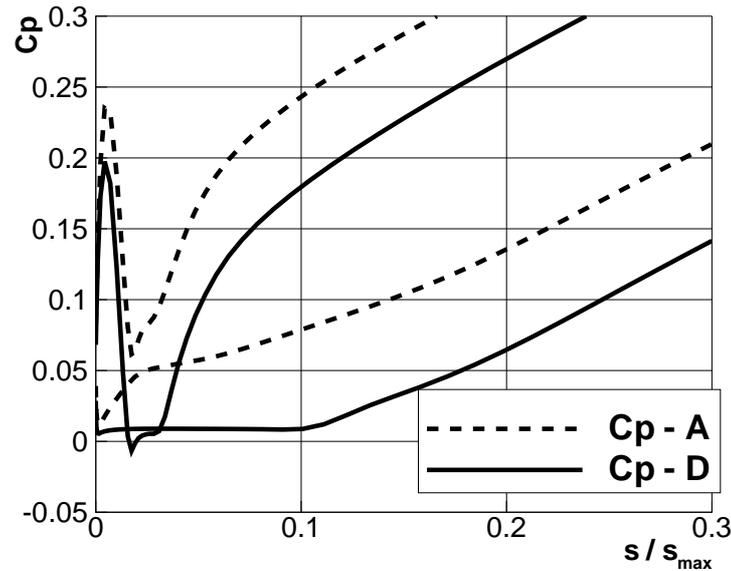


Abbildung 5.14: Vergrößerte Darstellung des C_p -Verlaufes in der Mitte des Strömungskanals bei beginnender Kavitation (A) und beim 3% -Förderhöhenabfall (D) im Bereich der Schaufelvorderkante

5.5.4 Einfluss der Kavitation auf die turbulente kinetische Energie

Ein Teil der durch die Kavitation entstehenden Verluste im Laufrad wird durch die Erhöhung der turbulenten kinetischen Energie erzeugt. Dies ist in Abbildung 5.15 dargestellt. Die oberen beiden Abbildungen zeigen die turbulente kinetische Energie entlang einer Strombahn in Deckscheibennähe für beginnende Kavitation (Punkt A in der Förderhöhenabfallkurve) und bei 3%-Förderhöhenabfall (Punkt D in der Förderhöhenabfallkurve). Auf der Saugseite (links), wo sich eine quasi-stationäre Schichtkavitation gebildet hat, erhöht sich die turbulente kinetische Energie entlang der Strombahn aufgrund der Kavitation nur geringfügig. Dagegen steigt die turbulente kinetische Energie am Ende der Kavitationzone auf der Druckseite, in der sogenannten „closure region“, um den Faktor 8 an. Dies bedeutet, dass die durch die Erhöhung der turbulenten kinetischen Energie induzierten Verluste erst nach der Kavitationszone entstehen. Eine signifikante Erhöhung der turbulenten kinetischen Energie in der „closure region“ aufgrund der Kavitation wurde auch von HIRSCHI ET AL. [47] beobachtet.

Die beiden Bilder in Abbildung 5.15 unten zeigen die turbulente kinetische Energie entlang einer Strombahn in der Mitte des Schaufelkanals. Auf der Saugseite (links) steigt die turbulente kinetische Energie aufgrund der Kavitation leicht an, auf der Druckseite (rechts) gibt es keine signifikante Änderung, da das druckseitige Kavitationsgebiet auf den äußeren Bereich in der Nähe der Deckscheibe beschränkt bleibt, siehe Abbildung 5.11.

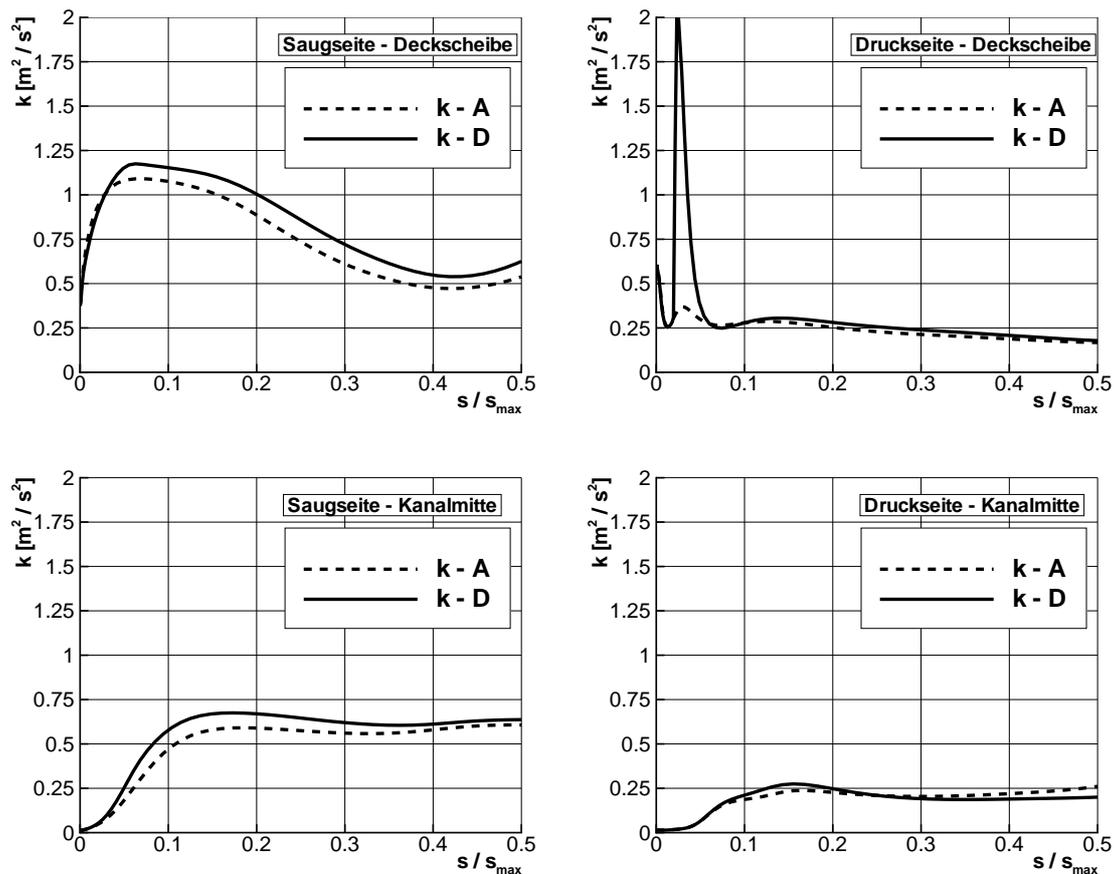


Abbildung 5.15: Einfluss der Kavitation auf die turbulente kinetische Energie; dargestellt ist die turbulente kinetische Energie entlang einer Strombahn in der Nähe der Deckscheibe (oben) und in der Mitte des Strömungskanals (unten) bei beginnender Kavitation (A) und beim 3%-Förderhöhenabfall (D) für die Saugseite (links) und die Druckseite (rechts)

5.6 Untersuchung des Spalteinflusses

Der Einfluss der Spaltströmung auf den Kavitationsbeginn und die Ausprägung der Kavitation wurde unter anderen von STOFFEL & LUDWIG [116] und LUDWIG [74] experimentell untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass die Spaltkavitation neben dem Spaltvolumenstrom auch von der Spaltgeometrie abhängt. Aufgrund der Spaltkavitation ändert sich das Strömungsfeld im Spaltbereich und damit die Schaufelanströmung. Auch das Keimspektrum kann durch die Spaltkavitation beeinflusst werden.

Im Experiment von BACHERT & STOFFEL [8] blieb die Spaltaustrittsgeometrie unverändert, nur die Spaltweite wurde variiert. Bei großer Spaltweite $s = 0.5 \text{ mm}$ konnte im Experiment keine Kavitation auf der Saugseite beobachtet werden. Vielmehr kommt es zu instationär umlaufenden Kavitationsgebieten, deren Ursprung

kurz nach dem saugseitigen Spalt des Radseitenraumes, also schon vor dem Lauf-
radeintritt liegt. Dagegen tritt bei der numerischen Simulation ohne Berücksichti-
gung des Radseitenraumes ein großes Kavitationsgebiet auf der Saugseite auf, siehe
Kapitel 5.5. Der Einfluss der Spaltströmung auf die Ausbildung der Kavitation soll
mit dem entwickelten CFD-Code für die Spaltweite $s = 0.5 \text{ mm}$ genauer untersucht
werden.

Der Spaltvolumenstrom tritt in den Saugraum der Kreiselpumpe mit einem be-
stimmten Mitdrall ein und kann somit das Kavitationsverhalten an der Schaufel-
eintrittskante erheblich verändern. Damit einher geht auch eine Verringerung der
Förderhöhe. Die numerische Simulation zeigt, dass die Förderhöhe bei der Drehzahl
 $n = 2000 \text{ 1/min}$ im Optimalpunkt $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$ bei einer Spaltweite von
 $s = 0.5 \text{ mm}$ um $\Delta H \cong 2.7 \text{ m}$ absinkt im Vergleich zur spaltfreien Simulation, siehe
auch Kapitel 5.3. Die Messung bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ ergibt beim Volu-
menstrom $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$ einen Unterschied in der Förderhöhe zwischen den
Spaltweiten $s = 0.5 \text{ mm}$ und $s = 0.25 \text{ mm}$ von $\Delta H \cong 1.3 \text{ m}$.

Der Einfluss des Radseitenraumes wurde bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ im Opti-
malpunkt $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$ numerisch untersucht. In Abbildung 5.16 und 5.17
werden die Druckverteilungen in Nabennähe und in der Mitte des Strömungskanals
bei beiden Simulationen der kavitationsfreien Strömung verglichen. Der Einfluss der
Spaltströmung wird hier sehr deutlich. Die Zuströmung zum Laufrad erfolgt auf-
grund der Spaltströmung mit einer Drallkomponente in Drehrichtung, so dass eine
Saugspitze auf der Schaufeldruckseite entsteht. Dies begründet, warum im Expe-
riment bei großer Spaltweite Druckseitenkavitation und keine Saugseitenkavitation
beobachtet werden konnte.

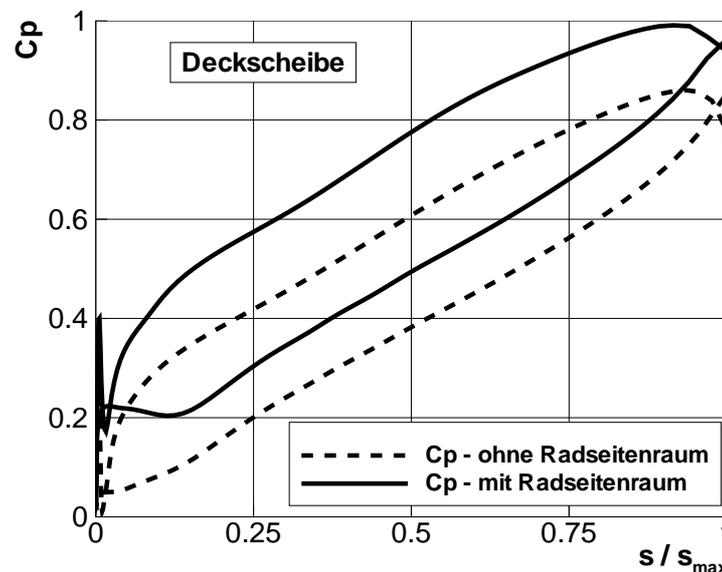


Abbildung 5.16: Vergleich der berechneten Druckverteilungen mit
und ohne Berücksichtigung des Radseitenraumes nahe der Deck-
scheibe bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ und dem Volumenstrom
 $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

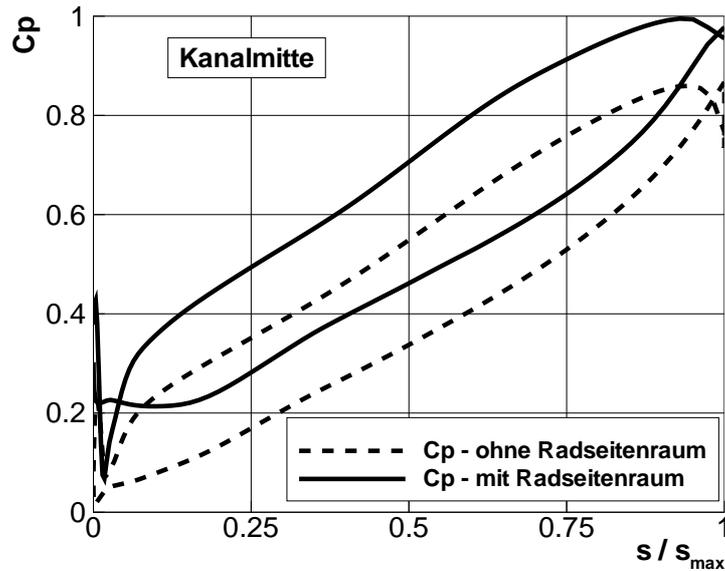


Abbildung 5.17: Vergleich der berechneten Druckverteilungen mit und ohne Berücksichtigung des Radseitenraumes in der Mitte des Strömungskanals bei der Drehzahl $n = 2000 \text{ 1/min}$ und dem Volumenstrom $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

Kontur-Plots des statischen Druckes im Meridianschnitt auf der Saug- und der Druckseite des Schaufelkanals sind in Abbildung 5.18 dargestellt. Betrachtet man die Strömungsvektoren und die Druckverteilung im Strömungsfeld, wird sichtbar, dass der statische Druck bereits vor dem Laufradeintritt ein sehr niedriges Niveau erreicht, siehe Abbildung 5.19. Durch die Zuströmung aus dem Radseitenraum bildet sich vor dem Laufrad ein Wirbel, in dessen Kern der statische Druck sehr niedrig ist. Dies kann die Beobachtung von instationärer Kavitation schon vor dem Laufradeintritt im Experiment erklären.

Abbildung 5.20 zeigt die vorhergesagten Kavitationsgebiete im Laufrad für den Optimalpunkt $Q = 143 \text{ m}^3/h$ mit und ohne Berücksichtigung des Radseitenraumes. Bei der Simulation ohne Radseitenraum ist deutlich zu erkennen, dass sich nach der Vorderkante des Laufrades auf der Saugseite ein großes Kavitationsgebiet gebildet hat, welches sich über mehr als $2/3$ der Schaufelbreite erstreckt. Auf der Druckseite entsteht nur ganz außen in der Nähe der Deckscheibe Kavitation. Bei der Simulation mit Radseitenraum entsteht eine große Kavitationszone auf der Druckseite der Schaufel nach der Schaufelvorderkante. Außerdem tritt Kavitation schon vor der Laufradvorderkante in der Nähe der Deckscheibe auf.

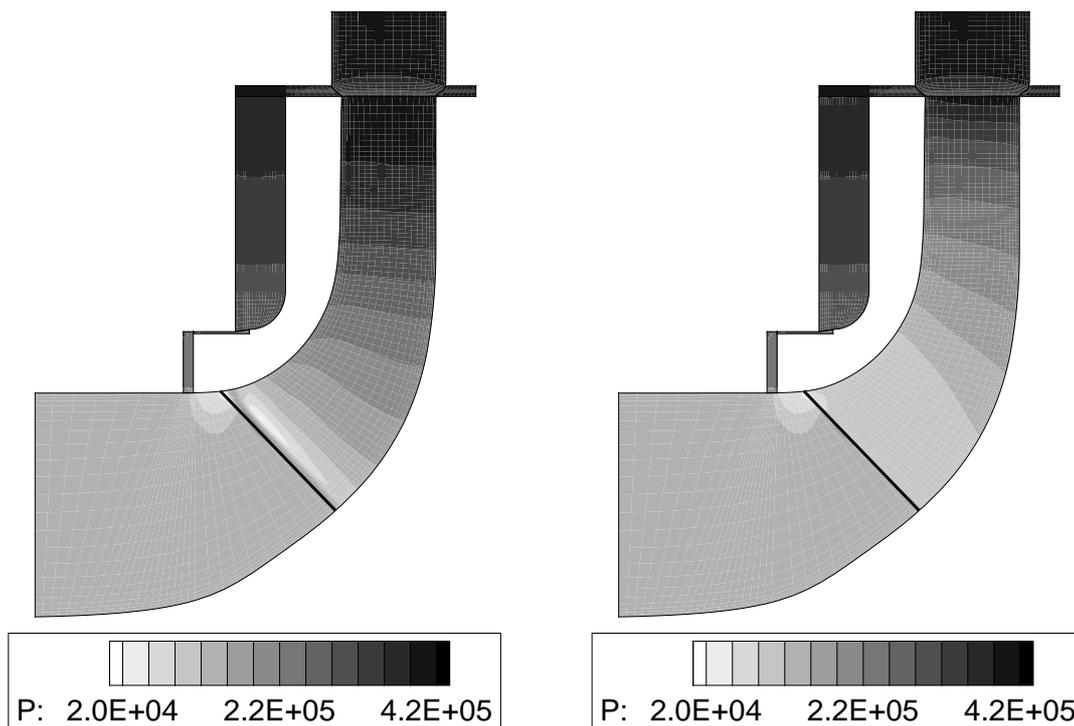


Abbildung 5.18: Isolinien des statischen Druckes im Meridianschnitt des Laufrades auf der Saugseite (links) und auf der Druckseite (rechts) für $n = 2000 \text{ 1/min}$ und $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

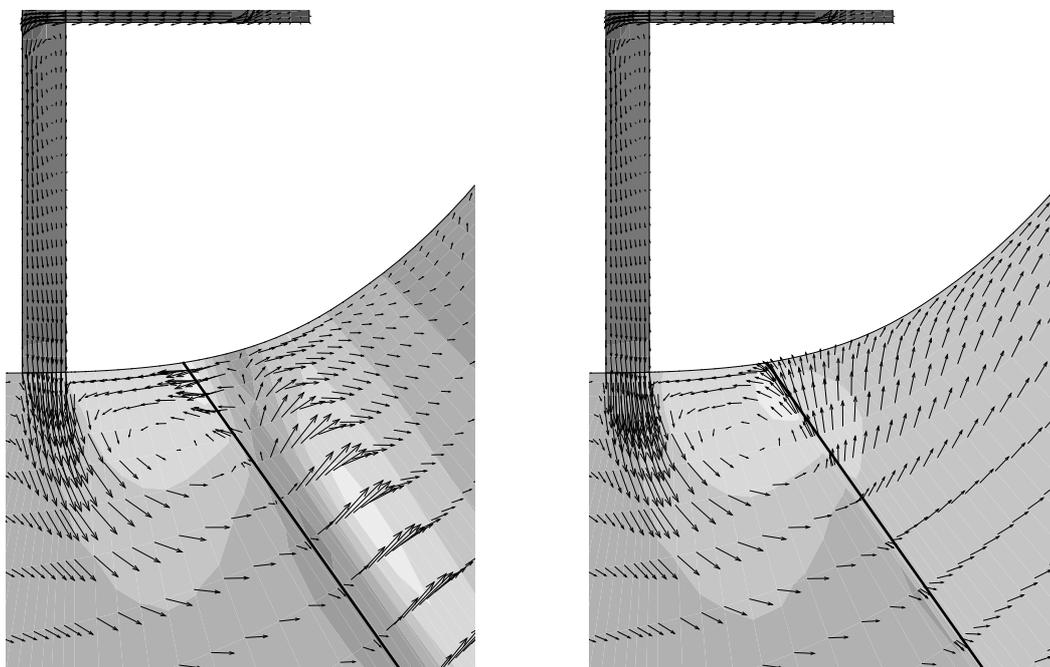


Abbildung 5.19: Strömungsvektoren und Druckverteilung am Laufradeintritt nahe der Schaufelsaugseite (links) und nahe der Schaufeldruckseite (rechts) für $n = 2000 \text{ 1/min}$ und $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

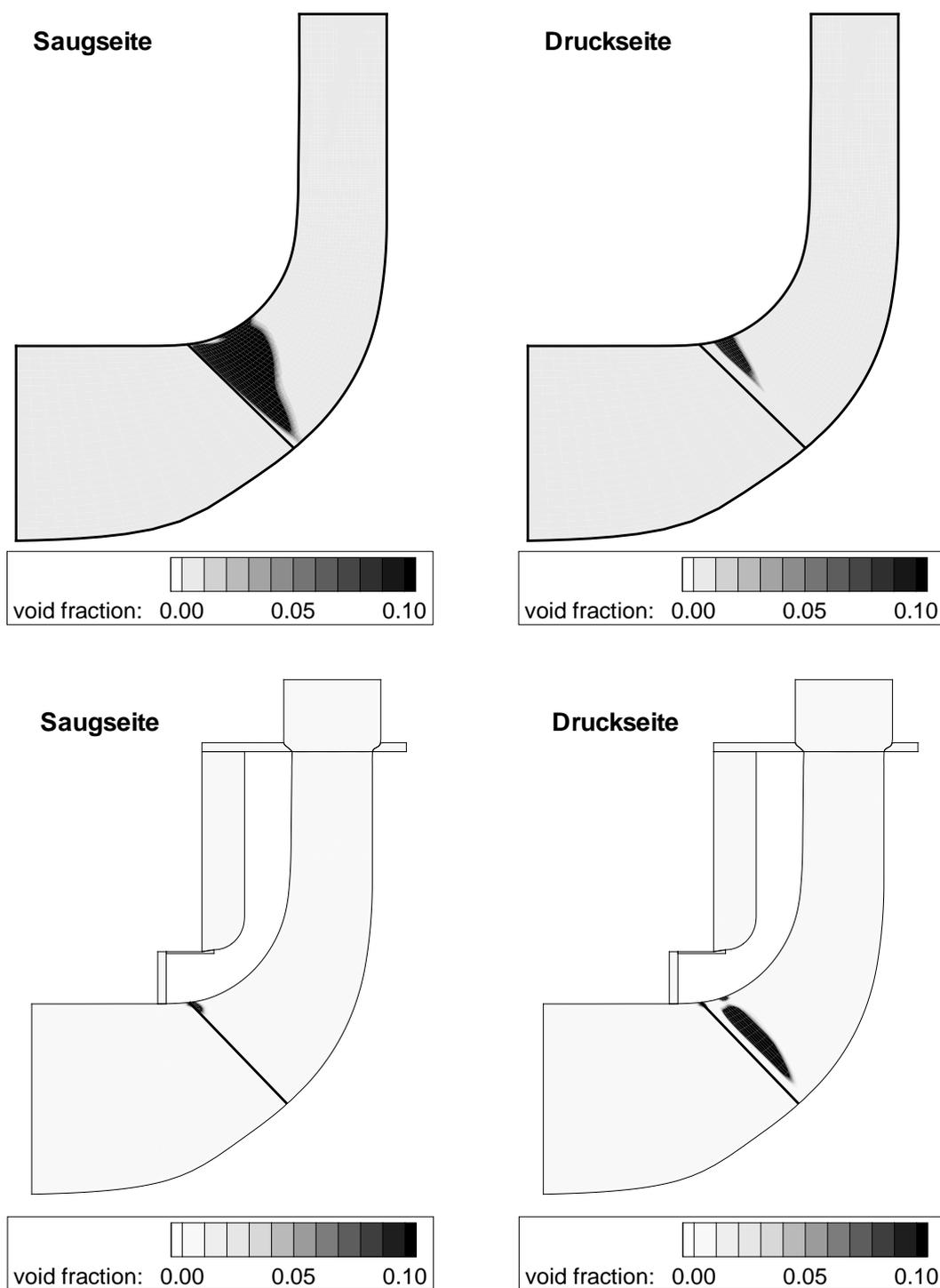


Abbildung 5.20: Kavitationsgebiete bei der Simulation mit (unten) und ohne Berücksichtigung des Radseitenraumes (oben); dargestellt ist jeweils die Saugseite (links) und die Druckseite (rechts) bei $n = 2000 \text{ 1/min}$ und $Q = Q_{opt} = 143 \text{ m}^3/h$

Kapitel 6

Bewertung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein numerisches Verfahren zur realitätsnahen Berechnung kavitierender Strömungen in hydraulischen Strömungsmaschinen vorgestellt.

Zur Beschreibung der Kavitation wurde ein blasendynamisches Kavitationsmodell verwendet und in das am Lehrstuhl entwickelte Navier-Stokes-Verfahren integriert. Ein nicht-konservatives Druck-Korrektur-Verfahren sorgt dabei trotz des sehr großen Dichteunterschieds zwischen dampfförmiger und flüssiger Phase für ein stabiles Lösungsverhalten. Durch die Verwendung eines impliziten 3-Level-Zeitschritt-Verfahrens ist der Zeitschritt nicht limitiert, so dass der entwickelte CFD-Code sowohl für stationäre als auch für instationäre Simulationen angewendet werden kann.

Zur Ermittlung der Leistungsfähigkeit und zur Validierung des Verfahrens wurden zwei Testfälle untersucht: Die kavitierende Strömung in einem konvergent-divergenten Kanal und um ein angestelltes Profil mit halbrunder Vorderkante. Bei beiden Testfällen zeigt sich, dass bei der instationären Simulation der kavitierenden Strömung mit Standard-Turbulenzmodellen keine sinnvollen Ergebnisse erzielt werden können. Die vorgeschlagenen Verbesserungen der Turbulenzmodellierung, z.B. die Behebung der Staupunktanomalie durch die Realizability-Bedingung oder die Berücksichtigung der Änderung der Gemischdichte bei der Berechnung der turbulenten Viskosität, führen zu erheblichen Verbesserungen der Simulationsergebnisse. Das entwickelte, instationär rechnende, zeitechte Verfahren ist somit in der Lage, wesentliche Effekte wie das Auftreten des Re-Entrant-Jets und die Wolkenablösung physikalisch richtig zu erfassen. Die Frequenzen der Wolkenkavitation werden gut vorhergesagt. Der Vergleich des vorhergesagten Dampfanteils und der berechneten Geschwindigkeiten in der Kavitationszone zeigt eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Die Ergebnisse liegen zum Teil sogar näher an den experimentellen Werten als die Ergebnisse anderer CFD-Codes aus der Literatur. Bei allen betrachteten Verfahren zeigt sich aber auch, dass die Interaktion zwischen der Strömungsturbulenz und der Kavitation noch nicht ausreichend genau beschrieben wird.

Um das Verfahren auch als Baustein eines Entwicklungssystems für Strömungsmaschinen einsetzen zu können, wurde das Kavitationsmodell zur stationären Simulation der kavitierenden Strömung erweitert. Die Anwendung des entwickelten CFD-Codes erfolgt am Beispiel der kavitierenden Strömung durch das Laufrad einer Kreiselpumpe mit der spezifischen Schnellläufigkeit $n_q = 26 \text{ 1/min}$. Dabei ist das entwickelte Verfahren bei der stationären Simulation der kavitierenden Strömung in der Lage, die kavitationsbedingte Änderung des Betriebsverhaltens der Kreiselpumpe genau vorherzusagen. Für die untersuchten Betriebspunkte liegt die Abweichung des berechneten Förderhöhenabfalls von den gemessenen Werten im Bereich der Messunsicherheit. Bei der Analyse des Förderhöhenabfalls konnten experimentelle Untersuchungen bestätigt werden, die die instationäre Druckseitenkavitation als maßgebliche Ursache für den Förderhöhenabfall sehen. Die Untersuchung der Strömung durch den Radseitenraum zeigt, dass dieser für die Ausbildung und Art der Kavitation im Laufrad entscheidenden Einfluss haben kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ARNDT, R.E.: Cavitation in fluid machinery and hydraulic structures. In: *Ann. Rev. Fluid Mechanics* 13 (1981), S. 273–328
- [2] ARNDT, R.E. ; KELLER, A. ; KJELDSEN, M.: Unsteady operation due to cavitation. In: *Proceedings of the 20th IAHR Symposium*. Charlotte, 2000
- [3] ATHAVALE, M.M. ; LI, H.Y. ; JIANG, Y. ; SINGHAL, A.K.: Application of the Full Cavitation Model to Pumps and Inducers. In: *Proceedings of the ISROMAC-8*. Honolulu, 2000
- [4] AVVA, R.K. ; SINGHAL, A.K.: An enthalpy based model of cavitation. In: *ASME FED - Cavitation and Gas-Liquid Flow in Fluid Machinery* Bd. 226, 1995
- [5] AWAD, I.: *Experimentelle Untersuchung zum Einfluß der Wasserqualität und der Drehzahl auf das Kavitationsverhalten von Kreiselpumpen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 1999
- [6] AWAD, I. ; LUDWIG, G. ; STOFFEL, B.: Experimental Investigations Concerning the Influence of Liquid Property and Speed of Rotation on the Inception of Blade Cavitation in a Centrifugal Pump. In: *Proceedings of the Third International Symposium on Cavitation* Bd. 1. Grenoble, 1998, S. 329–334
- [7] BACHERT, R. ; LUDWIG., G. ; STOFFEL, B. ; FROBENIUS, M. ; SCHILLING, R.: Three-Dimensional, Unsteady Cavitation Effects on a Single Hydrofoil and in a Radial Pump - Measurements and Numerical Calculations: Part One: Experiments. In: *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation*. Osaka, 2003
- [8] BACHERT, R. ; STOFFEL, B.: Entwicklung und experimentelle Validierung eines Codes zur numerischen Berechnung kavitierender Strömungen in Kreiselpumpen / Fachgebiet Turbomaschinen und Fluidantriebstechnik, Technische Universität Darmstadt. 2003. – Forschungsbericht. Abschlußbericht zum AIF-Forschungsvorhaben
- [9] BADER, R.: *Simulation kompressibler und inkompressibler Strömungen in Turbomaschinen*, Technische Universität München, Dissertation, 2000

- [10] BASUKI, W. ; SCHNERR, G.H. ; YUAN, W.: Single-phase and Modified Turbulence Models for Simulation of Unsteady Cavitating Flows. In: *German-Japanese Workshop on Multiphase Flow*. Forschungszentrum Karlsruhe - Wissenschaftliche Berichte FZKA 6759, 2003, S. F14–F29
- [11] BOUSSINESQ, J.: Essai sur La Théorie Des Eaux Courantes. In: *Mem. Présenté Acad. Sci.* 23 (1877), S. 46. – Paris
- [12] BRENNEN, C. E.: Fission of collapsing cavitation bubbles. In: *Journal of Fluid Mechanics* 472 (2002), S. 153–166
- [13] BRENNEN, C.E.: *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press, 1995
- [14] CALLENAERE, M. ; FRANC, J.P. ; MICHEL, J.M. ; RIONDET, M.: The Cavitation Instability Induced by the Development of a Re-Entrant Jet. In: *Journal of Fluid Mechanics* 444 (2001), S. 223–256
- [15] CHAHINE, G.L. ; DURAISWAMI, R.: Dynamical interactions in a multi-bubble cloud. In: *Journal of Fluid Engineering* 114 (1992)
- [16] CHEN, Y. ; HEISTER, S.D.: A Numerical Treatment for Attached Cavitation. In: *Journal of Fluids Engineering* 116 (1994), S. 613–618
- [17] CHEN, Y. ; HEISTER, S.D.: Two-Phase Modeling of Cavitated Flows. In: *Computers & Fluids* 24 (1995), Nr. 7, S. 799–809
- [18] CHEN, Y. ; HEISTER, S.D.: Modelling Hydrodynamic Nonequilibrium in Cavitating Flows. In: *Journal of Fluids Engineering* 118 (1996), S. 172–178
- [19] COUTIER-DELGOSHA, O. ; FORTES-PATELLA, R. ; POUFFARY, B. ; REBOUD, J.L. ; COMBES, J.F. ; ARCHER, A.: Cavitation performance of a centrifugal pump: Numerical and experimental investigations. In: *Proceedings of the 21th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*. Lausanne, 2002
- [20] COUTIER-DELGOSHA, O. ; FORTES-PATELLA, R. ; REBOUD, J.L. ; HAKIMI, N.: Numerical Simulation of Cavitating Flow in 2D and 3D Inducer Geometries. In: *4th European Conference on Turbomachinery*. Firenze, 2001
- [21] COUTIER-DELGOSHA, O. ; FORTES-PATELLA, R. ; REBOUD, J.L. ; POUFFARY, B.: 3D Numerical Simulation of Pump Cavitating Behaviour. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Montreal, 2002
- [22] DALY, B.J. ; HARLOW, F.H.: Transport equations of turbulence. In: *Physics of Fluids* 13 (1970), S. 2634–2649
- [23] DARWISH, M.S. ; MOUKALLED, F.: Normalized variable and space formulation methology for high-resolution schemes. In: *Journal of Numerical Heat Transfer* 26 (1994), S. 79–96

- [24] DELANNOY, Y. ; KUENY, J.L.: Two-phase flow approach in unsteady cavitation modeling. In: *Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME FED*, vol. 98 (1990), S. 153–158
- [25] DREISS, A.: *Untersuchung der Laufradkavitation einer radialen Kreiselpumpe durch instationäre Druckmessungen im rotierenden System*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 1997
- [26] DREISS, A. ; SCHÜTTE, V.: Numerische und experimentelle Untersuchung von Kavitationszuständen im Laufrad einer radialen Kreiselpumpe. In: *Pumpentagung Karlsruhe '96*. Karlsruhe, 1996
- [27] DUPONT, Ph. ; AVELLAN, F.: Numerical Computation of a Leading Edge Cavity. In: *Cavitation '91, ASME-Fluid Engineering Division*, 1991, S. 47–54
- [28] DUPONT, Ph. ; OKAMURA, T.: Cavitating Flow Calculations in Industry. In: *Proceedings of ISROMAC-9*. Honolulu, 2002
- [29] DURBIN, P.A.: On the k - ϵ -stagnation point anomaly. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (1996), S. 89–90
- [30] DURBIN, P.A.: Computational studies for turbomachinery simulations. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Montreal, 2002
- [31] DURBIN, P.A. ; PETTERSON REIF, B.A.: *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. John Wiley & Sons Ltd., 2000
- [32] FERZIGER, J.H. ; PERIĆ, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997
- [33] FRANC, J.-P. ; AVELLAN, F. ; BELAHADJI, B. ; BILLARD, J.Y. ; FRÉCHOU, D. ; FRUMAN, D.H. ; KARIMI, A. ; KUENY, J.L. ; MICHEL, J.M. ; BRIANÇON-MARJOLLET, L.: *La Cavitation: Mécanismes physiques et aspects industriels*. EDP Sciences, Grenoble, 1995
- [34] FRANC, J.P.: Partial Cavity Instability and Re-Entrant-Jet. In: *Proceedings of the Fourth International Symposium on Cavitation*. Pasadena, 2001
- [35] FRANC, J.P. ; MICHEL, J.M.: Attached Cavitation and the Boundary Layer: Experimental Investigation and Numerical Treatment. In: *Journal of Fluid Mechanics* 154 (1985), S. 63–90
- [36] FRIEDRICHS, J.: *Auswirkungen instationärer Kavitationsformen auf Förderhöhenabfall und Kennlinieninstabilität von Kreiselpumpen*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2003
- [37] FRIEDRICHS, J. ; KOSYNA, G.: Unsteady PIV Flow Field Analysis of a Centrifugal Pump Impeller under Rotating Cavitation. In: *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation*. Osaka, 2003

- [38] FRIEDSRICHS, J. ; KOSYNA, G.: Rotating Cavitation in a Centrifugal Pump Impeller of Low Specific Speed. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Conference*. New Orleans, 2001
- [39] FROBENIUS, M. ; SCHILLING, R. ; BACHERT, R. ; STOFFEL, B. ; LUDWIG, G.: Three-Dimensional, Unsteady Cavitation Effects on a Single Hydrofoil and in a Radial Pump - Measurements and Numerical Calculations: Part Two: Numerical Simulation. In: *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation*. Osaka, 2003
- [40] FROBENIUS, M. ; SCHILLING, R. ; FRIEDRICH, J. ; KOSYNA, G.: Numerical and Experimental Investigations of the Cavitating Flow in a Centrifugal Pump Impeller. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Montreal, 2002
- [41] GOPALAN, S. ; KATZ, J.: Modeling Issues in the Closure Region of Attached Cavitation. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, 1999
- [42] GOPALAN, S. ; KATZ, J.: Flow Structure and modeling issues in the closure region of attached cavitation. In: *Physics of Fluids* 12 (2000), S. 895–911
- [43] HAMMIT, F.G.: *Cavitation and multiphase flow phenomena*. McGraw-Hill, 1980
- [44] HARLOW, F.H. ; WELSH, J.E.: Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface. In: *Physics of Fluids* 8 (1965), S. 2182–2189
- [45] HARTEN, A.: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Computational Physics* 49 (1983), S. 357–393
- [46] HICKLING, R. ; PLESSET, M.S.: Collapse and rebound of a spherical bubble in water. In: *Physics of Fluids* 7 (1964), Nr. 3, S. 7–14
- [47] HIRSCHI, R. ; DUPONT, Ph. ; AVELLAN, F. ; FAVRE, J.-N. ; GÜLICH, J.-F. ; PARKINSON, E.: Centrifugal Pump Performance Drop due to Leading Edge Cavitation: Numerical Predictions Compared with Model Tests. In: *ASME Journal of Fluids Engineering* 120 (1998), S. 705–711
- [48] HOFMANN, M.: *Ein Beitrag zur Verminderung des erosiven Potentials kavitierender Strömungen*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2001
- [49] HOFMANN, M. ; LOHRBERG, H. ; LUDWIG, G. ; STOFFEL, B. ; REBOUD, J.L. ; FORTES-PATELLA, R.: Numerical and Experimental Investigations on the Self-Oscillating Behaviour of Cloud Cavitation - Part I: Visualisation. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, 1999

- [50] KATO, M. ; LAUNDER, B.E.: The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. In: *9th Symposium on Turbulent Shear Flows*. Kyoto, 1993
- [51] KAWANAMI, Y. ; KATO, H. ; TANIMURA, M. ; TAGAYA, Y.: Mechanism and Control of Cloud Cavitation. In: *Journal of Fluid Engineering* 119 (1997), S. 788–794
- [52] KELLER, A.: Maßstabeffekte bei der Anfangskavitation unter Berücksichtigung der Zugspannungsfestigkeit der Flüssigkeit. In: *Pumpentagung Karlsruhe '84*. Karlsruhe, 1984
- [53] KELLER, A.: Kavitationserscheinungen und deren zuverlässige Vorhersage durch Modellversuche. In: *Pumpentagung Karlsruhe '92*. Karlsruhe, 1992
- [54] KELLER, A.: Cavitation Scale Effects - Empirically found relations and the correlation of cavitation number and hydrodynamic coefficients. In: *Proceedings of the Fourth International Symposium on Cavitation*. Pasadena, 2001
- [55] KELLER, A. ; ROTT, H.K.: The Effect of Flow Turbulence on Cavitation Inception. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Vancouver, 1997
- [56] KELLER, A. ; ROTT, H.K.: Scale Effects on Tip Vortex Cavitation Inception. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, 1999
- [57] KELLER, J.B. ; KOLODNER, I.I.: Damping of underwater explosion bubble oscillations. In: *J. of Applied Physics* 27 (1956), S. 1152–1161
- [58] KHOSLA, P.K. ; RUBIN, S.G.: A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. In: *Computers & Fluids* 2 (1974), S. 207–209
- [59] KJELDSSEN, M. ; EFFERTZ, M. ; ARNDT, R.E.: Investigations of unsteady cavitation phenomena. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, 1999
- [60] KROLL, N.: *Berechnung von Strömungsfeldern um Propeller und Rotoren im Schwebeflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen*. DLR, 1989 (DLR-FB 89-37)
- [61] KUBOTA, A. ; KATO, H. ; YAMAGUCHI, H.: A new modeling of cavitating flows: a numerical study of cavitation on a hydrofoil section. In: *Journal of Fluids Mechanics* 240 (1992), S. 59–96
- [62] KUBOTA, A. ; KATO, H. ; YAMAGUCHI, H. ; MAEDA, M.: Unsteady structure measurement of cloud cavitation on a foil section using conditional sampling technique. In: *Journal of Fluids Engineering* 111 (1989), S. 205–210

- [63] KUHN DE CHIZELLE, Y. ; CECCIO, S.L. ; BRENNEN, C.E.: Observations and scaling of travelling bubble cavitation. In: *Journal of Fluid Mechanics* 293 (1995), S. 99–126
- [64] KUNZ, R.F. ; BOGER, D.A. ; ; STINEBRING, D.R. ; CHYCZEWSKI, T.S. ; AND, H.J. G.: A Preconditioning Navier-Stokes Method for Two-Phase Flow with Application to Cavitation Prediction. In: *Computers and Fluids* 29 (2000), S. 849–875
- [65] KUNZ, R.F. ; BOGER, D.A. ; CHYCZEWSKI, T.S. ; STINEBRING, D.R. ; GIBELING, H.J.: Multi-Phase CFD Analysis of Natural and Ventilated Cavitation about Submerged Bodies. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, Juli 1999
- [66] LANZENBERGER, K.: *Numerische und analytische Ansätze zur Simulation kavitierender Strömungen*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1995
- [67] LAUNDER, B.P. ; SPALDING, D.B.: The numerical computation of turbulent flows. In: *Computer Methods in applied mechanics and engineering* 3 (1974), S. 269–289
- [68] LEONARD, B.P. ; MOKHTARI, S.: Beyond first-order upwinding: the ultra-sharp alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30 (1990), S. 729–766
- [69] LI, C.-Y. ; CECCIO, S.L.: Interaction of Travelling Bubbles with the Boundary Layer and Attached Cavitation. In: *Journal of Fluids Mechanics* 322 (1996), S. 329–353
- [70] LIEN, F.S. ; CHEN, W.L. ; LESCHZINER, M.A.: Low-Reynolds-number eddy viscosity modeling based on non-linear stress-strain/vorticity relations. In: *Proceedings of the 3rd Int. Symposium on Engineering Turbulence Modeling and Experiments*. Kreta, 1996
- [71] LILEK, Ž. ; MUZAFERIJA, S. ; PERIĆ, M. ; SEIDL, V.: An implizit finite-volume method using nonmatching blocks of structured grids. In: *Numerical Heat Transfer, Part B* 32 (1997), S. 385–401
- [72] LIU, Z. ; BRENNEN, C.E.: Cavitation nuclei population and event rates. In: *Journal of Fluids Engineering* 120 (1998), S. 728–737
- [73] LORD RAYLEIGH: On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. In: *Philosophical Magazine* 34 (1917), Nr. 200, S. 94–98
- [74] LUDWIG, G.: *Experimentelle Untersuchung zur Kavitation am saugseitigen Dichtspalt von Kreiselpumpen sowie sekundären Auswirkungen des Spaltes*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 1992

- [75] MAURER, W. ; SKODA, R. ; FROBENIUS, M. ; SCHILLING, R.: Numerical Simulation of the 3D Flow Field Through a Slurry Pump. In: *International Conference on Multiphase Flow - ICMF 2001*. New Orleans, 2001
- [76] MEDVITZ, R.B. ; KUNZ, R.F. ; BOGER, D.A. ; LINDAU, J.W. ; YOCUM, A.M. ; PAULEY, L.L.: Performance Analysis of Cavitating Flow in Centrifugal Pumps Using Multiphase CFD. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Conference*. New Orleans, 2001
- [77] MERKLE, C.L. ; FENG, J. ; BUELOW, P.E.O.: Computational modeling of the dynamics of sheet cavitation. In: *Third International Symposium on Cavitation* Bd. 2. Grenoble, 1998, S. 307–311
- [78] MOORE, J.G. ; MOORE, J.: Realizability in turbulence modeling for turbomachinery CFD. In: *ASME Turbo Expo, Indianapolis, ASME Paper 99-GT-24* (1999)
- [79] MUZAFERIJA, S.: *Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach*, University of London, PhD Thesis, 1994
- [80] NOHMI, M. ; GOTO, A.: Cavitation CFD in a Centrifugal Pump. In: *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation*. Osaka, 2003
- [81] NOHMI, M. ; GOTO, A. ; IGA, Y. ; IKOHAGI, T.: Experimental and Numerical Study of Cavitation Breakdown in a Centrifugal Pump. In: *Proceedings of the 4th ASME-JSME Joint Fluid Engineering Conference*. Honolulu, 2003
- [82] PATANKAR, S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, New York, 1980
- [83] PFLEIDERER, C. ; PETERMANN, H.: *Strömungsmaschinen*. Springer Verlag, 1991 (6. Auflage)
- [84] PLESSET, M.S. ; CHAPMAN, R.B.: Collapse of an initially spherical vapor cavity in the neighborhood of a solid boundary. In: *Journal of Fluid Mechanics* 47 (1971), Nr. 2, S. 283–290
- [85] PLESSET, M.S. ; ZWICK, S.A.: The growth of a vapour bubble in superheated liquids. In: *Journal of Applied Physics* 25 (1954), S. 493–498
- [86] POUFFARY, B. ; COUTIER-DELGOSHA, O. ; FORTES-PATELLA, R. ; REBOUD, J.L.: Evaluation of the effects of cavitation on the flow in a centrifugal pump: Analysis of the breakdown mechanisms. In: *Proceedings of the 21th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*. Lausanne, 2002
- [87] RAABE, J.: *Hydraulische Maschinen und Anlagen*. VDI-Verlag, 1989 (2. Auflage)

- [88] REBOUD, J.L. ; FORTES-PATELLA, R. ; HOFMANN, M. ; LOHRBERG, H. ; LUDWIG, G. ; STOFFEL, B.: Numerical and Experimental Investigations on the Self-Oscillating Behaviour of Cloud Cavitation - Part II: Dynamic Pressures. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, 1999
- [89] REBOUD, J.L. ; STUTZ, B. ; COUTIER, O.: Two-Phase Flow Structure of Cavitation: Experiment and Modelling of Unsteady Effects. In: *Third International Symposium on Cavitation* Bd. 1. Grenoble, 1998, S. 203–208
- [90] REYNOLDS, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* 186 (1895), S. 123
- [91] RHIE, C.M. ; CHOW, W.L.: A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. In: *AIAA Journal* 21 (1983), S. 1525–1532
- [92] RIEDEL, N.: *Rotor-Stator Wechselwirkung in hydraulischen Maschinen*, Technische Universität München, Dissertation, 1997
- [93] RITZINGER, S.: *Simulation realer Laufradströmungen*, Technische Universität München, Dissertation, 1997
- [94] SAUER, J.: *Instationär kavitierende Strömungen - Ein neues Modell, basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2000
- [95] SAUER, J. ; SCHNERR, G.H.: Unsteady Cavitating Flow - A New Cavitation Model Based on a Modified Front Capturing Method and Bubble Dynamics. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Boston, 2000
- [96] SCHAFFAR, M. J. ; REY, C. J. ; BOEGLER, G. S.: Experiments on Supercavitating Projectiles Fired Horizontally into Water. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Montreal, 2002
- [97] SCHILLING, R.: Application of CFD-Techniques in Fluid Machinery. In: *Invited Lecture - 12th International Conference on Fluid Flow Technologies*. Budapest, 2003
- [98] SCHILLING, R. ; FERNÁNDEZ, A. ; ASCHENBRENNER, T. ; RIEDEL, N. ; BADER, R.: Echtzeit-Entwurf von Beschauelungen - Möglichkeiten und Grenzen. In: *Pumpentagung Karlsruhe '96*. Karlsruhe, 1996
- [99] SCHILLING, R. ; FROBENIUS, M.: Numerical Simulation of the Two-Phase Flow in Centrifugal Pump Impellers. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. Montreal, 2002

- [100] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin, 1997
- [101] SCHMIDT, D.P. ; RUTLAND, C.J. ; CORRADINI, M.L.: A Numerical Study of Cavitating Flow Through Various Nozzle Shapes. In: *SAE Technical Paper Series 971597* (1997)
- [102] SCHMIDT, D.P. ; RUTLAND, C.J. ; CORRADINI, M.L.: A Fully Compressible, Two-Dimensional, Model of Small, High Speed, Cavitating Nozzles. In: *Atomization and Sprays* 9 (1999), Nr. 3, S. 255–276
- [103] SCHNERR, G.H. ; SAUER, J.: Physical and Numerical Modeling of Unsteady Cavitation Dynamics. In: *International Conference on Multiphase Flow - ICMF 2001*. New Orleans, 2001
- [104] SCHULZ, R.: *Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Simulation von Wolkenkavitation*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1995
- [105] SCHÜTTE, V.: Modellierung und Berechnung von Blasenströmungen und Kavitation in Laufradkanälen von Kreiselpumpen. In: *Pumpentagung Karlsruhe '92*. Karlsruhe, 1992
- [106] ŠENOČAK, I.: *Computational Methodology for the Simulation of Turbulent Cavitating Flows*, University of Florida, Dissertation, 2002
- [107] ŠENOČAK, I. ; SHYY, W.: A Pressure-Based Method for Turbulent Cavitating Flow Computation. In: *31st AIAA Fluid Dynamics Conference & Exhibit*. Anaheim, Juni 2001
- [108] SHIH, T.-H. ; ZHU, J. ; LUMLEY, J.L.: A realisable Reynolds stress algebraic equation model / NASA. 1993 (105993). – Forschungsbericht
- [109] SINGHAL, A.K. ; ATHAVALE, M.M. ; LI, H.Y. ; JIANG, Y.: Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Conference*. New Orleans, 2001
- [110] SKODA, R.: *Numerische Simulation abgelöster und transitionaler Strömungen in Turbomaschinen*, Technische Universität München, Dissertation, 2003
- [111] SPALDING, D.B.: A Novel Finite-Differencing Formulation for Differential Equations Involving Both First and Second Derivatives. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4 (1972), S. 551
- [112] SPEZIALE, C.G.: Turbulence modeling in noninertial frames of reference. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 1 (1991), S. 3–19
- [113] SPOHNHOLZ, H.-H.: *NPSH-Verhalten von Halbaxialpumpen bei Teillast*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 1997

- [114] STEPANOFF, A.J.: Cavitation in centrifugal pumps with liquids other than water. In: *Journal of Engineering for Power, Trans. ASME, Series A* 83 (1961), S. 79–90
- [115] STEPHAN, K. ; MAYINGER, F.: *Thermodynamik*. Berlin : Springer-Verlag, 1992 (14. Auflage)
- [116] STOFFEL, B. ; LUDWIG, G.: The influence of the gap flow at the impeller inlet on cavitation and part load recirculation in a centrifugal pump. In: *Proceedings of the ISROMAC-3*. Honolulu, 1990
- [117] STONE, H.L.: Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations. In: *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing* 5 (1968), Nr. 3, S. 530–558
- [118] STRIEDINGER, R.: *Ein Beitrag zur Bedeutung der Wasserqualität und von Maßstabgesetzen in Kreiselpumpen bei beginnender Kavitation*, Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2002
- [119] STUTZ, B. ; REBOUD, J.L.: Experiments on Unsteady Cavitation. In: *Experiments in Fluids* 22 (1997), S. 191–198
- [120] STUTZ, B. ; REBOUD, J.L.: Two-Phase Flow Structure of Sheet Cavitation. In: *Physics of Fluids* 9 (1997), Nr. 12, S. 3678–3686
- [121] STUTZ, B. ; REBOUD, J.L.: Measurements within Unsteady Cavitation. In: *Experiments in Fluids* 29 (2000), S. 545–552
- [122] TRUCKENBRODT, E.: *Stömungsmechanik*. Springer, Berlin, 1968
- [123] TSUJIMOTO, Y. ; YOSHIDA, Y. ; MAEKAWA, Y. ; WATANABE, S. ; HASHIMOTO, T.: Observation of Oscillating Cavitation of an Inducer. In: *ASME Journal of Fluid Engineering* 119 (1997), S. 775–781
- [124] VAN DOORMAL, J.P. ; RAITHBY, G.D.: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. In: *Journal of Numerical Heat Transfer* 7 (1984), S. 147–163
- [125] VENTIKOS, Y. ; TSABIRAS, G.: A numerical method for the simulation of steady and unsteady cavitating flows. In: *Computers & Fluids* 29 (2000), S. 63–88
- [126] VISSER, F.C.: Some user experience demonstrating the use of computational fluid dynamics for cavitation analysis and head prediction of centrifugal pumps. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Conference*. New Orleans, 2001
- [127] WILCOX, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, California, 1998

- [128] WURSTHORN, S.: *Numerische Untersuchung kavitierender Strömungen in einer Modellkreiselpumpe*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2001
- [129] YAMAGUCHI, H. ; KATO, H. ; TOYODA, T.M.: High Performance foil sections with delayed cavitation inception. In: *Proceedings of the ASME-Fluid Engineering Division Summer Meeting*. San Francisco, Juli 1999
- [130] YUAN, W. ; SCHNERR, G. H.: Cavitation in injector nozzles, effect of injection pressure fluctuations. In: *Proceedings of the Fourth International Symposium on Cavitation*. Pasadena, 2001