

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
FACHGEBIET STRÖMUNGSMECHANIK

# Kompressibilitäts- und Dissipationseffekte in turbulenten Scherströmungen

Johannes Kreuzinger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Wolfgang H. Polifke, Ph.D. (CCNY)

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Rainer Friedrich, em.
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nikolaus A. Adams

Die Dissertation wurde am 29. Juni 2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 22. November 2005 angenommen.



# Danksagung

Ein paar Worte vorweg:

Diese Dissertation fasst die Resultate meiner wissenschaftlichen Arbeit am Fachgebiet Strömungsmechanik der Technischen Universität München zusammen. Dort konnte ich als Doktorand von Prof. Rainer Friedrich in großer Freiheit und ohne Druck arbeiten und von seinem Wissen und seinen Erfahrungen profitieren.

Durch seine weiten Verbindungen gab es Kontakte zu Wissenschaftlern aus aller Welt. Dies ermöglichte es mir mit Dr. Thomas Gatski während dessen Zeit als Gast am Fachgebiet zusammenzuarbeiten – eine Arbeit, die sehr produktiv war.

Auch die Diskussionen und die Zusammenarbeit mit den anderen Mitarbeitern am Fachgebiet – insbesondere mit Dr.-Ing. Holger Foysi – waren lehr- und hilfreich.

All diesen Menschen möchte ich danken für ihren Anteil am Entstehen dieser Arbeit.

Bei Prof. Nikolaus Adams bedanke ich mich für das zweite Gutachten über die Dissertation und bei Prof. Wolfgang Polifke für den Vorsitz bei der Prüfung.

München, Dezember 2005

Johannes Kreuzinger



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Literaturübersicht . . . . .	2
1.3	Inhalt der vorliegenden Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mathematisches Modell der Strömung und daraus abgeleitete statistische Bilanzgleichungen</b>	<b>4</b>
2.1	Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	4
2.2	Statistisch gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	7
2.3	Bilanzgleichung für die turbulente kinetische Energie $K = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$ . . . . .	8
2.4	Bilanzgleichung für die solenoidale Dissipationsrate $\varepsilon_s$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Numerisches Verfahren</b>	<b>14</b>
3.1	Anforderungen an ein numerisches Verfahren . . . . .	14
3.2	von Neumann-Analyse . . . . .	15
3.3	Zeitliches Integrationsverfahren . . . . .	17
3.4	Räumliche Ableitungsverfahren . . . . .	18
3.5	Räumliche Filter . . . . .	24
3.6	Anwendung auf die Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	26
3.6.1	<i>Upwind</i> -Formulierung . . . . .	26
3.6.2	Zentrale Formulierung mit zusätzlicher Tiefpassfilterung . . . . .	30
3.6.3	Berechnung der viskosen Terme . . . . .	30
3.6.4	Bestimmung des maximalen Zeitschrittes . . . . .	31
3.7	Randbedingungen . . . . .	31
3.7.1	Scherperiodische Randbedingung . . . . .	31
3.7.2	Freier Rand . . . . .	36
3.7.3	Isotherme Wand . . . . .	38
3.8	Anfangsbedingungen . . . . .	39
3.9	Implementierung, Parallelisierung und Performance auf dem Großrechner . . . . .	40
3.10	Validierung . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Untersuchte Strömungsfälle</b>	<b>44</b>
4.1	Homogene turbulente Scherströmung . . . . .	44

4.2	Turbulente Mischungsschicht . . . . .	49
4.3	Turbulente Kanalströmung . . . . .	54
4.4	Zusammenfassung der verwendeten Skalierungen . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Asymptotisches Verhalten der Terme der <math>\epsilon_s</math>-Bilanz und ihrer Modelle</b>	<b>60</b>
5.1	Asymptotisches Verhalten bei großen Reynoldszahlen . . . . .	60
5.2	Verhalten der Koeffizienten an der Wand . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Auswertung der Simulationen</b>	<b>66</b>
6.1	Homogene turbulente Scherströmung . . . . .	66
6.1.1	Parameter . . . . .	66
6.1.2	Genauigkeit der Simulationen . . . . .	68
6.1.3	Selbstähnlicher Zustand . . . . .	80
6.1.4	Kompressibilitätseinflüsse . . . . .	81
6.2	Turbulente Mischungsschicht . . . . .	86
6.2.1	Parameter . . . . .	86
6.2.2	Genauigkeit der Simulationen . . . . .	87
6.2.3	Selbstähnlichkeit . . . . .	90
6.2.4	Einflüsse von Kompressibilität und Dichteunterschieden . . . . .	98
6.3	Ebene turbulente Kanalströmung . . . . .	104
6.3.1	Parameter . . . . .	104
6.3.2	Genauigkeit der Simulationen . . . . .	106
6.3.3	Kompressibilitätseinflüsse . . . . .	118
6.4	Gültigkeit der Kontinuumsannahme . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Kompressibilitätseinflüsse auf die <math>\epsilon_s</math>-Bilanz</b>	<b>121</b>
7.1	Abschätzungen anhand von Skalenbetrachtungen . . . . .	121
7.2	Kompressibilitätseinflüsse auf einzelne Terme der $\epsilon_s$ -Bilanz . . . . .	123
7.2.1	Homogene turbulente Scherströmung . . . . .	123
7.2.2	Turbulente Mischungsschicht . . . . .	123
7.2.3	Turbulente Kanalströmung . . . . .	127
7.3	Unterscheidung zwischen direkten und indirekten Effekten . . . . .	129
7.3.1	Gewählte Vorgehensweise . . . . .	129
7.3.2	Homogene turbulente Scherströmung . . . . .	129
7.3.3	Turbulente Mischungsschicht . . . . .	132
7.3.4	Turbulente Kanalströmung . . . . .	134
7.4	Modellierung des baroklinen Terms . . . . .	139
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>146</b>
<b>A</b>	<b>Räumliche Strukturen der Terme der Enstrophiebilanz</b>	<b>148</b>

# Verwendete Formelzeichen

Die Liste umfasst die in der Arbeit häufiger vorkommenden Formelzeichen. Die übrigen Zeichen sind im Text erläutert.

## Lateinische Buchstaben

$a_{ij}$	-	Anisotropietensor der Reynoldsspannungen
$c$	$[m/s]$	Schallgeschwindigkeit
$c_v$	$[\frac{J}{kgK}]$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$c_p$	$[\frac{J}{kgK}]$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$E$	$[m^2/s^2]$	spezifische totale Energie
$e$	$[m^2/s^2]$	spezifische innere Energie
$G$	-	Verstärkungsfaktor
$H$	$[m]$	halbe Kanalhöhe
$h$	$[m^2/s^2]$	spezifische Enthalpie
$i$	-	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$K$	$[m^2/s^2]$	spezifische turbulente kinetische Energie
$Kn$	-	Knudsenzahl
$k$	$[1/m]$	Wellenzahl
$k^*$	$[1/m]$	modifizierte Wellenzahl der ersten Ableitung
$k^{2*}$	$[1/m^2]$	modifizierte quadrierte Wellenzahl der zweiten Ableitung
$L_x, L_y, L_z$	$[m]$	Abmessungen des Berechnungsgebiets
$l$	$[m]$	integrales turbulentes Längenmaß $\frac{q^3}{\varepsilon}$
$M_c$	-	konvektive Machzahl
$M_g$	-	Gradientenmachzahl $Sl/c$
$M_t$	-	turbulente Machzahl $q/c$
$P$	$[m^2/s^3]$	Produktionsrate spezifischer turbulenter kinetischer Energie
$Pr$	-	Prandtlzahl
$p$	$[Pa]$	Druck
$q$	$[m/s]$	turbulentes Geschwindigkeitsmaß $\sqrt{2K}$
$q_i$	$[W/m^2]$	Wärmestromvektor
$R$	$[\frac{J}{kgK}]$	spezifische Gaskonstante
$Re_{av}$	-	Reynoldszahl, gebildet mit über das gesamte Volumen gemittelten Größen
$Re_t$	-	turbulente Reynoldszahl $\frac{q^4}{\nu\varepsilon}$
$Re_\theta$	-	Reynoldszahl, gebildet mit der Impulsverlustdicke
$Re_\lambda$	-	Taylor-Reynoldszahl $\frac{q^2}{\sqrt{\nu\varepsilon}}$
$Re_\tau$	-	Reynoldszahl, gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit

$S$	$[1/s]$	Gradient der mittleren Geschwindigkeit
$s$	$[\frac{J}{kgK}]$	spezifische Entropie
$s_{ij}$	$[1/s]$	Deformationstensor
$S^*$	-	dimensionslose Scherrate
$T$	$[K]$	Temperatur
$t$	$[s]$	Zeit
$U_c$	$[m/s]$	Konvektionsgeschwindigkeit der kohärenten Strukturen
$u_i, (u, v, w)$	$[m/s]$	Geschwindigkeit
$x_i, (x, y, z)$	$[m]$	räumliche Koordinate

## Griechische Buchstaben

$\gamma$	-	Isentropenexponent
$\Delta t$	$[s]$	Zeitschrittweite
$\Delta U$	$[m/s]$	Geschwindigkeitsdifferenz in der Mischungsschicht
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	$[m]$	Gitterweiten
$\delta_{ij}$	-	Kronecker-Symbol
$\delta_\theta$	$[m]$	Impulsverlustdicke
$\delta_\omega$	$[m]$	Wirbelschichtdicke
$\dot{\delta}$	-	normierte zeitliche Wachstumsrate der Schichtdicke
$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	spezifische turbulente Dissipationsrate
$\varepsilon_s$	$[m^2/s^3]$	solenoidale spezifische turbulente Dissipationsrate
$\varepsilon_d$	$[m^2/s^3]$	dilatationale spezifische turbulente Dissipationsrate
$\epsilon_{ijk}$	-	schiefsymmetrischer Einheitstensor dritter Stufe
$\eta_k$	$[m]$	Kolmogorov-Skala $(\frac{\nu^3}{\varepsilon})^{\frac{1}{4}}$
$\Lambda$	-	dimensionslose Wachstumsrate spezifischer turbulenter kinetischer Energie
$\lambda$	$[m]$	Taylor-Mikromaß $\sqrt{\frac{\nu q^2}{\varepsilon}}$
$\lambda$	$[\frac{W}{mK}]$	thermische Leitfähigkeit
$\mu$	$[Pa \cdot s]$	dynamische Viskosität
$\nu$	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
$\rho$	$[kg/m^3]$	Dichte
$\tau_{ij}$	$[Pa]$	viskose Spannung
$\Phi$	$[\frac{J}{m^3s}]$	Dissipationsfunktion
$\phi$	$[\frac{J}{m^3s}]$	turbulente Dissipationsrate
$\omega$	$[1/s]$	Kreisfrequenz
$\omega^*$	$[1/s]$	modifizierte Kreisfrequenz
$\omega_i$	$[1/s]$	Wirbelvektor



## Terme in der Bilanz von $\varepsilon_s$

$P_\varepsilon^1$	1. Produktion durch mittlere Scherung
$P_\varepsilon^2$	2. Produktion durch mittlere Scherung
$P_\varepsilon^3$	Produktion durch den Gradienten des mittleren Wirbelvektors
$P_\varepsilon^4$	Produktion durch turbulente Wirbelstreckung
$\Upsilon$	viskose Vernichtung
$T_\varepsilon$	turbulenter Transport
$D_\varepsilon$	viskose Diffusion
$T_\varepsilon^c$	kompressibler Transport
$B_\varepsilon$	barokliner Term
$F_\varepsilon$	Veränderung von Wirbelstärke durch einen Gradienten der viskosen Spannungen senkrecht zum Dichtegradienten

## Modellkoeffizienten

	im Modell für ...
$C_\varepsilon^1$	...Produktion von $\varepsilon_s$ durch mittlere Scherung
$C_\varepsilon^2$	...den Abklingterm in der $\varepsilon_s$ -Gleichung
$C_1^3, C_2^3$	...die Produktion von $\varepsilon_s$ durch den Gradienten des mittleren Wirbelvektors
$f_t$	...den turbulenten Transport von $\varepsilon_s$
$C_\mu$	...die turbulente Viskosität

## Ableitungsoperatoren

$\nabla$	Gradient
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	partielle Ableitung
$(\cdot)'$	räumliche Ableitung
$(\dot{\cdot})$	zeitliche Ableitung
$\frac{D}{Dt}$	substantielle Ableitung

## Sonstige Zeichen

$\overline{(\cdot)}$	Reynoldsmittelung
$\langle (\cdot) \rangle$	Reynoldsmittelung
$\widetilde{(\cdot)}$	Favremittelung
$(\cdot)'$	Reynoldsfluktuation
$(\cdot)''$	Favrefluktuation
$\Re(\cdot)$	Realteil
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$(\cdot)_w$	Größe an der Wand
$(\cdot)_{av}$	über das gesamte Volumen gemittelte Größe
$(\cdot)^+$	Größe, skaliert mit Wandgrößen (Pluseinheiten)
$(\cdot)^*$	semilokal normierte Größe
$(\cdot)_0$	Größe zum Startzeitpunkt
$(\cdot)_{rms}$	Wurzel des mittleren Quadrats ( <i>root mean square</i> )



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Wesentliche Aufgabe eines im Bereich der Strömungsmechanik tätigen Ingenieurs ist es, vorherzusagen, welche Eigenschaften die Strömung eines Gases oder einer Flüssigkeit in einer bestimmten Konfiguration hat.

Dies sollte eigentlich eine einfache Aufgabe sein. Die Navier-Stokes-Gleichungen, die das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen in vielen technischen Anwendungen beschreiben, sind seit dem 19. Jahrhundert bekannt. Seit den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts sind numerische Verfahren zur Lösung dieser Gleichungen entwickelt worden, und schließlich gibt es seit den vierziger Jahren Rechner, so dass die numerischen Aufgaben nicht mehr von Hand gelöst werden müssen. Somit steht das notwendige Wissen und Werkzeug für die direkte numerische Simulation (DNS) von Strömungen im Prinzip zur Verfügung.

Allein, in turbulenter Strömung treten so viele Freiheitsgrade auf, dass die zur Zeit existierenden Rechner nur in den in technischen Anwendungen seltenen Fällen niedriger Reynoldszahl die Strömung direkt simulieren können. Die Nicht-linearität der Navier-Stokes-Gleichungen macht es unmöglich, Freiheitsgrade außer acht zu lassen, ohne ihre Auswirkungen wenigstens in Form von Modellen zu berücksichtigen.

Die älteste und bis heute übliche Reduzierung der Freiheitsgrade besteht darin, nur Lösungen für die statistischen Mittelwerte der Strömungsgrößen zu suchen, also die reynoldsgemittelten Gleichungen zu lösen. Dies wird RANS-Methode genannt, RANS steht für **R**eynolds **A**veraged **N**avier-**S**tokes. Die Modellierung der in diesen Gleichungen ungeschlossenen Terme kann algebraisch oder durch zusätzliche Differentialgleichungen erfolgen. Weit verbreitet ist ein Zweigleichungsmodell mit einer Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $K$  der um die Mittelwerte fluktuierenden Geschwindigkeit und einer für die Dissipationsrate  $\varepsilon$  dieser Energie, das  $K$ - $\varepsilon$ -Modell.

Dieses Modell wurde für inkompressible Strömungen entwickelt. In vielen Fällen konnten mit seiner Hilfe gute Vorhersagen getroffen werden, ebenso versagt es jedoch in vielen Fällen. Ungeachtet der bestehenden Unzulänglichkeit wird das Modell – mit Modifikationen – auch zur Vorhersage kompressibler Strömungen verwendet.

Die vorliegende Arbeit untersucht einen Teilaspekt der Vorhersage kompressibler Strömungen, den Einfluss von Kompressibilität auf die Modellierung der Transportgleichung für die Dissipationsrate.

## 1.2 Literaturübersicht

Zeman [61] und Sarkar *et al.* [48] teilten im Fall homogener Turbulenzfelder die Dissipationsrate  $\varepsilon$  auf in einen solenoidalen Teil  $\varepsilon_s$  und einen dilatationalen Teil  $\varepsilon_d = \frac{4}{3}\tilde{\nu}(\overline{\partial u_j/\partial x_j})^2$ . Dieser Teil wurde modelliert als  $\varepsilon_d = \alpha f(M_t)\varepsilon_s$ . Dabei ist  $\alpha$  ein Faktor der Größenordnung 1 und  $f(M_t)$  eine Funktion der Turbulenzmachzahl  $M_t$ . Obwohl im Ergebnis ähnlich, war die Motivation für die Modellierung in diesen Arbeiten unterschiedlich: Zeman ging von zusätzlicher Dissipation durch kleine Stöße im turbulenten Feld (*shocklets*) aus. Sarkar *et al.* betrachteten isotrope Turbulenz unter der Annahme eines akustischen Gleichgewichts zwischen Druck- und kompressiblen Geschwindigkeitsfluktuationen. Als Modellgleichung für  $\varepsilon_s$  wurde die unveränderte inkompressible Form verwendet. Mit den vorgeschlagenen Modifikationen konnte der starke Rückgang der Wachstumsrate von Mischungsschichten mit steigender Kompressibilität *a posteriori* wiedergegeben werden, mit gleichen Koeffizienten jedoch nicht das Verhalten von Grenzschichten (Wilcox [60]).

Eine spätere *a priori* Untersuchung von Sarkar [46] zeigte, dass explizite Kompressibilitätsterme – die dilatationale Dissipationsrate und die Druckdilatation – den Rückgang der Wachstumsrate in homogener turbulenter Scherströmung nicht erklären können. Der Grund für den Rückgang liegt vielmehr in einer aufgrund veränderter Turbulenzstruktur verringerten Produktionsrate in der Bilanz turbulenter kinetischer Energie. Die Auswertung von DNS-Daten einer Strömung entlang einer isothermen Kanalwand zeigte, dass auch bei relativ hohen Machzahlen Effekte von Schwankungen der Geschwindigkeitsdivergenz vernachlässigbar sind (Huang *et al.* [23]).

Krishnamurty & Shyy [27] und Aupoix [2] schlugen Modifikationen in der Transportgleichung für die Dissipationsrate vor, um Kompressibilitätseffekte wiederzugeben. Krishnamurty & Shyy modellierten den Effekt der baroklinen Erzeugung von Wirbelstärke, im Folgenden “barokliner Term” genannt. *A posteriori* konnte gezeigt werden, dass eine Berücksichtigung dieses Terms die Vorhersagen in einer Nachlaufströmung mit einer Machzahl von 2.46 leicht verbesserte. Aupoix [2] modellierte ebenfalls den baroklinen Term, was *a posteriori* die Berechnung der Wachstumsraten von Mischungsschichten zwischen Strömen unterschiedlicher Dichte deutlich verbesserte. Allerdings erwähnt er auch, dass diese Modifikation die Ergebnisse für Grenzschichten verschlechtert. Um die Vorhersage der Wachstumsraten in Mischungsschichten hoher Machzahl zu verbessern, schlägt er einen zusätzlichen Produktionsterm in der Transportgleichung der Dissipationsrate vor, um das turbulente Längenmaß  $(2K)^{(3/2)}/\varepsilon$  indirekt auf die Abmessungen eines *sonic eddy* (Breidenthal [8]) zu begrenzen. Der Rückgang der Wachstumsrate mit steigender Machzahl konnte so vom Modell wiedergegeben werden.

All diese reinen *a-posteriori*-Untersuchungen haben den Nachteil, dass nur indi-

rekt, über die Ergebnisse der Berechnungen, die Richtigkeit der Modellannahmen überprüft werden kann. So kann ein Modell in einer bestimmten Situation einen Effekt richtig vorhersagen, obwohl die zugrundeliegenden Annahmen falsch sind, wie dies bei den zuerst erwähnten Konzepten, basierend auf der dilatationalen Dissipationsrate, der Fall war. Es ist dann nicht verwunderlich, wenn solche Modelle in anderen Situationen versagen. Um allgemeingültige Modelle zu erhalten, ist es nötig, den beobachteten physikalischen Effekt in der richtigen Weise zu modellieren.

*A priori* wurde die Transportgleichung der Dissipationsrate in kompressiblen Strömungen bisher nur von Sinha & Candler [53] untersucht. Sie betrachteten eine Grenzschicht entlang einer adiabaten Wand bei einer Machzahl von 4. Bei hoher Machzahl identifizierten sie einen zusätzlichen relevanten Term. Ein Modell für diesen Term schlugen sie nicht vor.

### 1.3 Inhalt der vorliegenden Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird der Kompressibilitätseinfluss auf die Dissipationsrate *a priori* untersucht. Dabei werden freie und wandgebundene turbulente Scherströmungen betrachtet: homogene Strömung, Mischungsschicht und Kanalströmung. Für jede dieser Strömungen werden direkte numerische Simulationen bei unterschiedlichen Machzahlen ausgewertet, um sowohl die Bedeutung der Terme, die explizit von der Divergenz der Geschwindigkeiten und dem Dichtegradienten abhängen, als auch eine mögliche Veränderung der übrigen Terme in der Transportgleichung der Dissipationsrate zu quantifizieren. Werden relevante Kompressibilitätseffekte festgestellt, wird ein Modell vorgeschlagen.

Zu Beginn der Arbeit, in Kapitel 2, stehen die verwendeten Grundgleichungen und daraus abgeleitete statistisch gemittelte Gleichungen, insbesondere die Transportgleichung für die turbulente Dissipationsrate. In Kapitel 3 wird das verwendete numerische Verfahren beschrieben. Grundlegende Eigenschaften der betrachteten Strömungen sind Inhalt von Kapitel 4. Den Auswertungen der DNS-Daten vorangestellt sind theoretische Überlegungen über die Größenordnung der Terme in der Transportgleichung der Dissipationsrate (Kapitel 5). In Kapitel 6 werden die Parameter der durchgeführten direkten Simulationen aufgeführt. Die Genauigkeit der erzeugten Daten und die Wiedergabe charakteristischer Eigenschaften dieser Strömungen werden diskutiert. Kapitel 7 ist das Kernstück dieser Arbeit. Hier wird durch Auswertung der DNS-Daten der Kompressibilitätseinfluss auf die Terme in der exakten Transportgleichung der Dissipationsrate bestimmt. Dem folgt die *a priori*-Untersuchung von Modellen einzelner Terme und ein neuer Vorschlag zur Modellierung des baroklinen Terms. Wesentliche Ergebnisse der Arbeit werden im letzten Kapitel (8) zusammengefasst.

# Kapitel 2

## Mathematisches Modell der Strömung und daraus abgeleitete statistische Bilanzgleichungen

### 2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Gegenstand dieser Arbeit sind Strömungen von idealen Gasen. Sie werden jeweils als einphasiges Kontinuum im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet. In jedem Feldpunkt wird der Strömungszustand beschrieben durch die Dichte  $\rho$  [ $\frac{kg}{m^3}$ ], die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $u_i$  [ $\frac{m}{s}$ ] und die totale spezifische Energie  $E$  [ $\frac{m^2}{s^2} = \frac{J}{kg}$ ]. Die zeitliche Entwicklung dieser Größen lässt sich aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie bestimmen. In differentieller Form lauten sie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j E}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk} u_k}{\partial x_j} + \rho u_j f_j + \rho w \quad (2.3)$$

Diese Gleichungen enthalten neben den Strömungsvariablen auf den rechten Seiten Größen, für die zusätzliche Gleichungen benötigt werden: den Druck  $p$  [ $Pa$ ], den viskosen Spannungstensor  $\tau_{ij}$  [ $Pa$ ] und den Wärmestromvektor  $q_i$  [ $\frac{J}{m^2 s}$ ]. Der Quellterm  $f_i$  [ $\frac{m}{s^2} = \frac{N}{kg}$ ] ist eine spezifische Kraft, z.B. die Erdbeschleunigung,  $w$  [ $\frac{m^2}{s^3} = \frac{W}{kg}$ ] eine spezifische Leistung, z.B. Wärmeaufnahme durch Strahlungsabsorption.

Die totale spezifische Energie  $E$  ist die Summe aus spezifischer kinetischer Energie  $\frac{1}{2}u_i u_i$  und spezifischer innerer Energie  $e$ . Die Zusammenhänge zwischen Druck, innerer Energie, Dichte und Temperatur  $T$  [ $K$ ] sind bei einem thermisch und kalorisch idealen Gas:

$$p = \rho R T \quad (2.4)$$

$$e = c_v T \quad \text{mit } c_v, R = \text{konst.} \quad (2.5)$$

$c_v [\frac{J}{kgK}]$  ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,  $R [\frac{J}{kgK}]$  die spezifische Gaskonstante. Sie ist die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen:  $R = c_p - c_v$ . Der Isotropenexponent ist gegeben durch  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .

Nimmt man einen linearen Zusammenhang zwischen Verformungen und viskosen Spannungen an, so erhält man das Newtonsche Fließgesetz

$$\tau_{ij} = \mu \left( 2s_{ij} - \frac{2}{3}s_{kk}\delta_{ij} \right) + \mu_v s_{kk}\delta_{ij} \quad (2.6)$$

$$\text{mit } s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.7)$$

$\mu [Pa s]$  ist die dynamische Viskosität,  $\mu_v$  die Druckzähigkeit,  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol. Mit der stokesschen Hypothese  $\mu_v = 0$  erhält man

$$\tau_{ij} = \mu \left( 2s_{ij} - \frac{2}{3}s_{kk}\delta_{ij} \right). \quad (2.8)$$

Die Wärmeleitung in Gasen wird beschrieben durch das fouriersche Wärmeleitungsgesetz

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2.9)$$

$\lambda [\frac{W}{mK}]$  ist die thermische Leitfähigkeit.

Der Zusammenhang zwischen den molekularen Transportgrößen  $\mu$  und  $\lambda$  ist durch die Prandtlzahl gegeben:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}. \quad (2.10)$$

Sie wird als konstant angenommen. Die dynamische Viskosität ist im Wesentlichen von der Temperatur abhängig. Dieses Verhalten wird beschrieben durch

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^n. \quad (2.11)$$

Bei Normalbedingungen gilt für Luft  $\gamma = 1.4$ ,  $R = 287 \frac{J}{kgK}$ ,  $n = 0.7$ ,  $\mu(293.15K) = 1.824 \cdot 10^{-5} Pa s$ ,  $Pr = 0.71$ .

Alle bisher aufgeführten Gleichungen bilden ein geschlossenes System, die Navier-Stokes-Gleichungen, hier für die konservativen Variablen Dichte, Impuls und totale Energie. Diese Gleichungen kann man auf verschiedene Weise umformen, es bleibt jedoch stets bei der Struktur von fünf Transportgleichungen und zusätzlichen Zustandsgleichungen und Stoffgesetzen. Einige dieser Formen werden im Folgenden vorgestellt.

Anstelle der Gleichung für die spezifische Energie  $E$  kann auch die Gleichung für die innere Energie  $e = E - \frac{1}{2}u_i u_i$  verwendet werden:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j e}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \rho w \quad (2.12)$$

Unter Verwendung der Massenerhaltung kann man die Gleichungen in Transportgleichungen für primitive Variablen, z.B. die Geschwindigkeiten  $u_i$  und die Temperatur  $T$  umformen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.13)$$

$$c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \tau_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + w \quad (2.14)$$

Somit hat man ein System von drei Transportgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten und zwei Transportgleichungen für die thermodynamischen Zustandsvariablen  $\rho$  und  $T$ . Da der thermodynamische Zustand durch zwei beliebige Zustandsvariablen vollständig definiert ist, können diese beiden Variablen ausgetauscht werden. Das verwendete numerische Verfahren löst Gleichungen für die primitiven Variablen Druck, Geschwindigkeit und Entropie. Diese Variablen entsprechen im linearisierten Fall den drei Moden kompressibler Strömung nach Kovasznay [26]. Die Gleichung für den Druck erhält man aus den Gleichungen für Dichte und Temperatur gemäß dem totalen Differential der Zustandsgleichung  $dp = d\rho RT + \rho R dT$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \left( -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho w \right) \quad (2.15)$$

$\Phi$  steht als Abkürzung für die Dissipationsfunktion  $\tau_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \tau_{jk} s_{jk}$ .

Den Zusammenhang zwischen spezifischer Entropie  $s$  [ $\frac{J}{kgK}$ ] und anderen thermodynamischen Größen liefert die gibbssche Fundamentalgleichung

$$dh = c_p dT = T ds + \frac{dp}{\rho}. \quad (2.16)$$

$h$  [ $\frac{J}{kg}$ ] ist die spezifische Enthalpie. Die Transportgleichung für die Entropie  $s$  lautet somit

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{R}{p} \left( -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho w \right). \quad (2.17)$$

Da in der gibbsschen Fundamentalgleichung nur das totale Differential der Entropie bestimmt ist, hat die zugehörige Zustandsgleichung eine frei wählbare Integrationskonstante:

$$\begin{aligned} dh = c_p dT &= T ds + \frac{dp}{\rho} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} &= \frac{1}{R} ds + \frac{dp}{p} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(T/[1K]) &= \frac{1}{R} s + \ln(p/[1Pa]) + C \\ s &= c_p \ln(T/[1K]/(p/[1Pa])^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) + \tilde{C} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wählt man  $\tilde{C} := c_p \ln(R/[1 \frac{J}{kgK}])$ , so gilt die Zustandsgleichung

$$s = c_p \ln \left( RT/[1J/kg] (p/[1Pa])^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right). \quad (2.19)$$



## 2.2 Statistisch gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Zur Mittelung von Strömungsvariablen werden Reynolds- und Favre-Mittelwerte eingesetzt. Der Reynolds-Mittelwert  $\bar{a}$  ist der räumliche, zeitliche oder Ensemble-mittelwert einer Größe  $a$ . Die Differenz zwischen dem Mittelwert  $\bar{a}$  und der aktuellen Größe  $a$  an einem Ort zu einer Zeit ist die Reynolds-Fluktuation  $a'$ . Beim Favre-Mittelwert  $\tilde{a}$  handelt es sich um eine dichtegewichtete Reynoldsmitteilung:  $\bar{\rho}\tilde{a} = \overline{\rho a}$ . Die zugehörige Favre-Fluktuation ist  $a'' = a - \tilde{a}$ .

Favremittelung wird auf primitive Variablen angewandt, die, multipliziert mit  $\rho$ , konservative Größen oder zumindest Teile konservativer Größen ergeben. So berechnet sich aus der Geschwindigkeit  $u$  der Impuls  $\rho u$ , die Temperatur beschreibt einen Teil der totalen Energie  $\rho C_v T + \rho u_i u_i$ , ebenso  $u_i u_i$ . Von allen anderen Größen werden reynoldssche Mittelwerte gebildet. Man kann auch einfacher sagen, Größen, vor denen bei konservativer Schreibweise der Navier-Stokes-Gleichungen ein  $\rho$  steht, werden Favre-gemittelt.

Eine solche Mittelung für die Transportgleichungen von Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur ergibt folgenden Satz gemittelter Gleichungen:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = -\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) + \bar{\rho} \tilde{f}_i \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} c_v \frac{D\tilde{T}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{c_v \rho u_j'' T''} + \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \overline{\lambda \frac{\partial T''}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad - \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} - \overline{p \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} + \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \bar{\rho} \tilde{w} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (2.23)$$

Alle unterstrichenen Terme sind ungeschlossen. Vernachlässigt man die Korrelation von Viskositäts- und Geschwindigkeitsfluktuationen, so gilt

$$\bar{\tau}_{ij} \approx \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (2.24)$$

Wegen der nur schwachen Nichtlinearität der Abhängigkeit von  $\mu$  von  $T$  kann man außerdem annehmen

$$\overline{\mu(T)} \approx \mu(\tilde{T}) \quad (2.25)$$

$$\overline{\lambda(T)} \approx c_p \mu(\tilde{T}) / Pr. \quad (2.26)$$

An ungeschlossenen Größen bleiben die Reynoldsspannungen  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ , der turbulente Wärmestrom  $\overline{c_v \rho u_j'' T''}$ , die Korrelation von Wärmeleitfähigkeit und Temperaturgradienten  $\overline{\lambda \frac{\partial T''}{\partial x_j}}$ , die Druckdilatation  $-\overline{p \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}$  und die Dissipation  $\overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$  übrig.

## 2.3 Bilanzgleichung für die turbulente kinetische Energie $K = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$

Durch Umformung der Impulsbilanz  $\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}$  und der Massenbilanz  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  kann man Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen herleiten:

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i'' u_j''} &= \left( u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \\ &\quad - \left( \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Setzt man  $j = i$ , erhält man eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie<sup>1</sup>  $K = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{DK}{Dt} &= -\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} / 2 + \overline{u_j' p'} - \overline{u_i' \tau_{ij}'}) \\ &\quad - \overline{u_i''} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \right) + p' \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_j} - \tau_{ij}' \frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} &= -\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} / 2 + \overline{u_j' p'} - \overline{u_i' \tau_{ij}'}) \\ &\quad + p' \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_j} - \tau_{ij}' \frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Hier und im Folgenden wird angenommen, dass die Quellterme  $f_i$  und  $w$  nicht fluktuieren. Üblicherweise wird die erste Form (2.29) angegeben (z.B. Lele [31]<sup>2</sup>, Friedrich [17]). Die rechte Seite besteht aus Produktion, Transporttermen, Massenflussternen, Druckdilatation und Dissipation. Formt man diese Gleichung leicht um zu (2.30), so entfallen die Massenflusstern und Druckdilatation und Dissipation nehmen dieselbe Form an wie in der gemittelten Transportgleichung für die Temperatur bzw. innere Energie (2.22), allein mit umgekehrten Vorzeichen. Diese Terme wandeln also kinetische Energie in innere Energie um und umgekehrt. Dies geschieht zum einen durch Kompressions- bzw. Expansionsarbeit, zum anderen durch molekulare Diffusion von Impuls oder – einfacher gesagt – Reibungswärme (s. auch Lele [31]).

<sup>1</sup>Eigentlich müsste diese Größe “spezifische turbulente kinetischer Energie” genannt werden, da es sich um eine Energie pro Einheitsmasse handelt. Es ist jedoch üblich, das “spezifisch” wegzulassen.

<sup>2</sup>Lele verwendet immer Favre-Fluktuationen der Geschwindigkeit. Da  $\overline{a'b'} = \overline{a'(b' + \tilde{b} - \bar{b})} = \overline{a'b'}$ , ist dies in den hier auftretenden Korrelationen zweier Größen äquivalent zur Reynolds-Fluktuation.

## 2.4 Bilanzgleichung für die solenoidale Dissipationsrate $\varepsilon_s$

Zunächst muss der Begriff Dissipationsrate geklärt werden, da im Detail unterschiedliche Formulierungen verwendet werden.

Die Rate der Umwandlung kinetischer in innere Energie ist die Dissipationsfunktion

$$\Phi = \tau_{ij} s_{ij} = (\overline{\tau_{ij}} + \tau'_{ij}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.31a)$$

Ihr Mittelwert ist

$$\bar{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}} = \overline{\tau_{ij}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij}} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij}} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}. \quad (2.31b)$$

Die erste Aufspaltung des Mittelwertes trennt die Umwandlung kinetischer Energie der mittleren Strömung in innere Energie von der Umwandlung turbulenter kinetischer Energie. Üblich ist die zweite Aufspaltung, die diese Dissipation zerlegt in einen Teil, der nur von fluktuierenden Spannungen abhängt und den dissipativen Teil des Massenflusstems. Allein der Teil, der von fluktuierenden Spannungen abhängt, wird als turbulente Dissipationsrate definiert:

$$\phi = \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}}. \quad (2.32)$$

Dieser Term, explizit als Funktion der Viskosität und der Geschwindigkeitsgradienten ausgeschrieben, ist zu komplex, um eine Transportgleichung für ihn aufzustellen. Dazu empfiehlt es sich, den Term zu zerlegen und nur einzelne Anteile zu betrachten. Nach Friedrich [17] ist

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ \phi_1 &= 2\overline{\bar{\mu} s'_{ij} s'_{ij}} - \frac{2}{3}\overline{\bar{\mu} s'_{kk} s'_{ll}} \end{aligned} \quad (2.33a)$$

$$\phi_2 = 2\overline{\mu' s'_{ij} s'_{ij}} - \frac{2}{3}\overline{\mu' s'_{kk} s'_{ll}} \quad (2.33b)$$

$$\phi_3 = 2\overline{\mu' s'_{ij} \bar{s}_{ij}} - \frac{2}{3}\overline{\mu' s'_{kk} \bar{s}_{ll}}. \quad (2.33c)$$

Der Anteil, der nur von der mittleren Viskosität abhängig ist, kann weiter zerlegt werden in

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_s + \phi_d + \phi_I \\ \phi_s &= \overline{\bar{\mu} \omega'_i \omega'_i} \end{aligned} \quad (2.34a)$$

$$\phi_d = \frac{4}{3}\overline{\bar{\mu} s'_{kk} s'_{ll}} \quad (2.34b)$$

$$\phi_I = 2\bar{\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \right) \right). \quad (2.34c)$$

$\phi_s$  ist die solenoidale Dissipationsrate, verursacht durch Fluktuationen des Wirbelvektors  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ ,  $\phi_d$  die dilatationale Dissipationsrate aufgrund von fluktuierender Volumenänderung und  $\phi_I$  die Dissipation aufgrund von Inhomogenitäten gemittelter Größen.  $\phi$  hat die Einheit einer Leistung pro Volumen  $[\frac{W}{m^3}]$ . Viele Autoren verwenden auch für kompressible Strömungen die spezifische, durch die Dichte geteilte Größe  $\phi/\bar{\rho}$  mit der Einheit  $[\frac{m^2}{s^3}]$ . Auch hier werden im Folgenden meist die spezifischen Größen verwendet und mit  $\varepsilon$  bezeichnet.

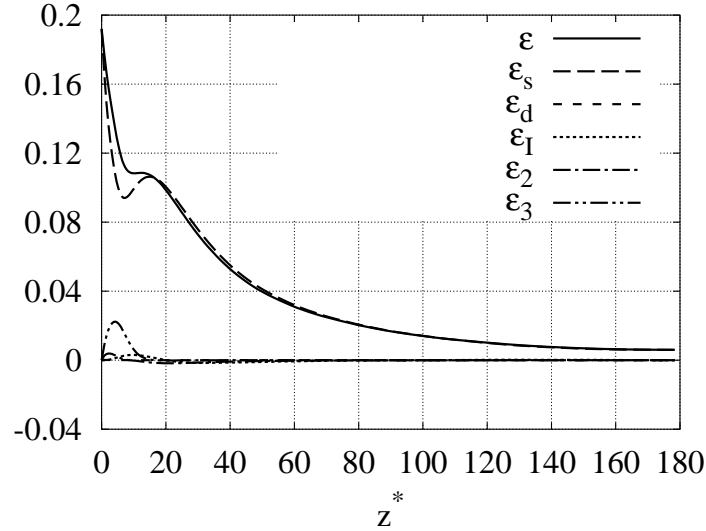


Abbildung 2.1: Aufteilung der Dissipationsrate in einer Überschall-Kanalströmung mit  $M = 3.1$  (K6000neu) in semilokaler Normierung

Die Auswertung der einzelnen Terme in kompressibler Kanalströmung (Abb. 2.1) zeigt, dass  $\varepsilon_s$  der wesentliche Anteil ist. Nur in einem kleinen Bereich in Wandnähe gewinnt zusätzlich  $\varepsilon_3$  an Bedeutung, erreicht allerdings nur ein Fünftel der gesamten Dissipationsrate. Somit kann die gesamte Dissipationsrate  $\varepsilon$  durch ihren solenoidalen Anteil  $\varepsilon_s = \overline{\tilde{\nu} \omega'_i \omega'_i}$  angenähert werden.

Glücklicherweise lässt sich für diese Gleichung relativ einfach eine Transportgleichung herleiten. Da  $d\varepsilon_s = \tilde{\nu} d(\overline{\omega'_i \omega'_i}) + \overline{\omega'_i \omega'_i} d\tilde{\nu}$ , entspricht die Transportgleichung für  $\varepsilon_s$  im Wesentlichen der mit  $2\tilde{\nu}$  multiplizierten Enstrophiebilanz<sup>3</sup>, die folgendermaßen aus den Transportgleichungen für die Geschwindigkeiten hergeleitet werden kann:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \overline{\omega'_i \omega'_i}}{\partial t} = \overline{\omega'_i \frac{\partial \omega'_i}{\partial t}} = \overline{\omega'_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial t}} = \overline{\omega'_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial t}} \quad (2.35)$$

Diese Transportgleichung wurde für kompressible Strömungen von Krishnamurty & Shyy [27] und Sinha & Candler [53] angegeben. Allerdings vernachlässigen Krishna-

<sup>3</sup>Andere Autoren verwenden  $\bar{\nu}$  oder spezifizieren die Art der Mittelung für  $\nu$  überhaupt nicht. Für die Anwendung in der Modellierung ist dies wahrscheinlich irrelevant, da ohnehin  $\tilde{\nu} \approx \mu(\bar{T})/\bar{\rho}$  angenommen werden muss. In den in dieser Arbeit ausgewerteten Simulationen beträgt der Unterschied in Fällen mit nennenswerten Viskositätsfluktuationen maximal 11% (Mischungsschicht M14) bzw. 3% (Kanalströmung K6000neu)

murty & Shyy Korrelationen mit Viskositätsfluktuationen und teilweise mit Dichtefluktuationen und sind ungenau in der Verwendung von Favre- und Reynolds-Fluktuationen. Die von Sinha & Candler angegebene Gleichung ist exakt<sup>4</sup>. Der Autor bevorzugt jedoch eine andere Aufteilung der Terme in der Transportgleichung. Sie wird im Folgenden angegeben, danach werden die Unterschiede zu Sinha & Candler's Aufteilung besprochen.

Die Transportgleichung für die solenoidale Dissipationsrate  $\varepsilon_s$  kann geschrieben werden als

$$\frac{D\varepsilon_s}{Dt} = P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 + P_\varepsilon^4 - \Upsilon + T_\varepsilon + D_\varepsilon + T_\varepsilon^c + B_\varepsilon + F_\varepsilon + \frac{\varepsilon_s}{\tilde{\nu}} \frac{D\tilde{\nu}}{Dt}. \quad (2.36)$$

Hier sind

$$P_\varepsilon^1 = -2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_{k,j}} \bar{u}_{i,k} \quad (2.37a)$$

$$P_\varepsilon^2 = -2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_{i,k}} \bar{u}_{k,j} \quad (2.37b)$$

die turbulente Produktion von Dissipation durch mittlere Scherung,

$$P_\varepsilon^3 = -2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_k} \bar{u}_{i,jk} = -2\tilde{\nu} \overline{\omega'_i u'_k} \bar{\omega}_{i,k} \quad (2.37c)$$

die Produktion durch den Gradienten des mittleren Wirbelvektors und

$$P_\varepsilon^4 = -2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_{i,k}u'_{k,j}} \quad (2.37d)$$

$$-\Upsilon = -2\tilde{\nu} \overline{((u'_{i,j} - u'_{j,i})/\rho)_{,k}} \tau_{ik,j} \quad (2.37e)$$

die Produktion durch turbulente Wirbelstreckung und die viskose Vernichtung von Wirbelstärke. Ihre Summe ergibt den Abklingterm.

$$T_\varepsilon = -\tilde{\nu} \overline{(u'_k(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_{i,j})_{,k}} \quad (2.37f)$$

$$D_\varepsilon = 2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i}) \frac{1}{\rho} \tau_{ik,j}}_{,k} \quad (2.37g)$$

sind turbulenter Transport und viskose Diffusion. Die übrigen Terme treten nur bei einer Formulierung der Gleichung für Strömungen veränderlicher Dichte auf. Sie hängen explizit von der Geschwindigkeitsdivergenz bzw. dem Dichtegradienten ab. Dies sind

$$T_\varepsilon^c = \tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})u'_{i,j}u'_{k,k}} \quad (2.37h)$$

der kompressible Transport, und

$$B_\varepsilon = 2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})\rho_{,j}p_{,i}/\rho^2} \quad (2.37i)$$

und

$$F_\varepsilon = -2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})\rho_{,j}\tau_{ik,k}/\rho^2}, \quad (2.37j)$$

---

<sup>4</sup>Bis auf einen Vorzeichenfehler in der Definition von  $\psi_\varepsilon$ , dort muss der zweite vom ersten Term abgezogen werden.

die Veränderung der Wirbelstärke durch Kräfte auf ein Volumenelement, die senkrecht zum Dichtegradienten stehen. Dabei wirken im baroklinen Term  $B_\varepsilon$  die Druckgradienten, in  $F_\varepsilon$  die Gradienten der viskosen Spannungen. Der letzte Term in Gleichung 2.36, die Änderung der mittleren Viskosität, muss nicht modelliert werden. In den in dieser Arbeit untersuchten Fällen war er darüberhinaus vernachlässigbar.

Die Produktionsterme und der turbulente Transport sind, bis auf den Faktor  $2\tilde{\nu}$ , identisch den inkompressiblen Termen der Enstrophiegleichung, wie sie z.B. von Tennekes & Lumley [57] angegeben werden.

Die hier gegebene Aufteilung unterscheidet sich von der von Sinha & Candler [53] gewählten in der Aufteilung der Terme, die aus dem viskosen Term der Impulsgleichung gebildet werden. Hier wird der Term analog zum viskosen Term in der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie zerlegt:

$$\begin{array}{ll}
\text{Gleichung für } \overline{\tilde{\nu}\omega'_i\omega'_i}: & \text{Gleichung für } \frac{1}{2}\overline{\rho u''_i u''_i}: \\
\overline{2\tilde{\nu}\omega'_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{kl}}{\partial x_l}\right)} & \overline{u''_i\frac{\partial\tau_{il}}{\partial x_l}} \\
= \overline{2\tilde{\nu}\omega'_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial 1/\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\tau_{kl}}{\partial x_l}} & (F_\varepsilon) \quad = 0 \\
+ 2\tilde{\nu}\overline{\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\omega'_i}{\rho}\epsilon_{ijk}\frac{\partial\tau_{kl}}{\partial x_j}} & (D_\varepsilon) \quad + \frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u''_i\tau_{il}} \\
- 2\tilde{\nu}\overline{\frac{\partial\omega'_i/\rho}{\partial x_l}\epsilon_{ijk}\frac{\partial\tau_{kl}}{\partial x_j}} & (-\Upsilon) \quad - \frac{\partial u''_i}{\partial x_l}\tau_{il}
\end{array}$$

Im Falle der Transportgleichung für die Dissipationsrate entsteht zuerst der Term  $F_\varepsilon$ , da der Rotationsoperator  $\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}$  getrennt auf  $\frac{1}{\rho}$  und  $\frac{\partial\tau_{kl}}{\partial x_l}$  angewandt wird. Nun kann der Divergenzoperator  $\frac{\partial}{\partial x_l}$ , ursprünglich angewandt auf die viskosen Spannungen, vor den Ausdruck gezogen werden, um einen Divergenzterm, die viskose Diffusion zu erhalten. Der dabei entstehende Term ist dann die viskose Vernichtung bzw. Dissipation. Die Terme erscheinen ungewohnt und schwer zu interpretieren. Unter der Annahme konstanter Dichte und Viskosität wird  $D_\varepsilon$  zu  $\nu^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\overline{\omega'_i\omega'_i}$  und  $-\Upsilon$  zu  $-2\nu^2\overline{\frac{\partial\omega'_i}{\partial x_j}\frac{\partial\omega'_i}{\partial x_j}}$ . Hier sind die Terme klar als viskose Diffusion und viskose Vernichtung zu erkennen.

Sinha & Candler [53] wählten diese inkompressiblen Terme auch für ihre kompressible Transportgleichung und summierten alle Terme, die Dichte- oder Viskositätsgradienten und -fluktuationen enthalten, in einem extra Term. Ihre Formulierungen für viskose Diffusion, viskose Vernichtung und Viskositäts-Variations-Term lauten:

$$D_\varepsilon^{SC} = \tilde{\nu}^2 \overline{(u'_{i,j}u'_{i,j} - u'_{i,j}u'_{j,i})_{,kk}} \quad (2.38a)$$

$$-\Upsilon^{SC} = -2\tilde{\nu}^2 \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})_{,k}u'_{i,jk}} \quad (2.38b)$$

$$C_\varepsilon^{SC} = -\Upsilon + D_\varepsilon + F_\varepsilon + \frac{\varepsilon_s}{\tilde{\nu}} \frac{D\tilde{\nu}}{Dt} - D_\varepsilon^{SC} + \Upsilon_\varepsilon^{SC} . \quad (2.38c)$$

Der Viskositäts-Variations-Term  $C_\varepsilon^{SC}$  ist sehr komplex und nicht mehr zu interpretieren. In Strömungen mit starken Viskositätsgradienten scheint diese Aufteilung außerdem ungeeignet. Nahe der gekühlten Wand in einem Überschallkanal mit

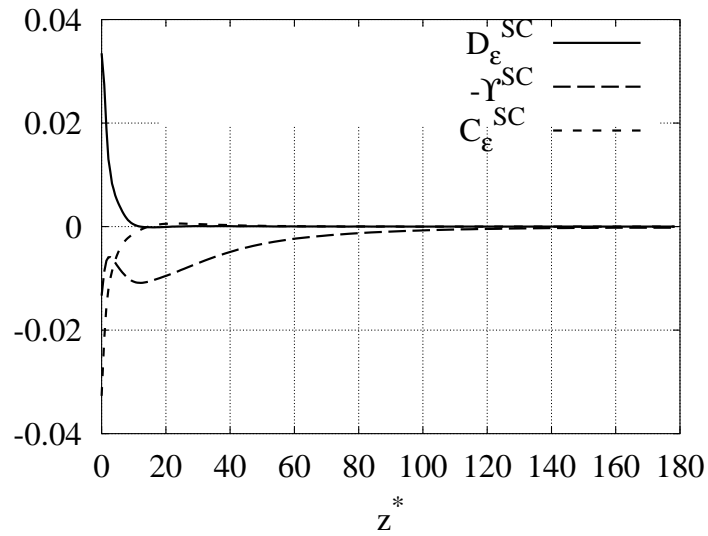


Abbildung 2.2: Aufteilung der Terme nach Sinha & Candler [53] in einer Kanalströmung mit  $M = 3.1$  (K6000neu), semilokale Normierung

$M = 3.1$  (K6000neu) erreicht  $C_\epsilon^{SC}$  sehr hohe Werte bis zum vierfachen des Wertes von  $\Upsilon$ . Dieser hohe Wert wird kompensiert durch einen ebenfalls sehr hohen Wert von  $D_\epsilon^{SC}$ , s. Abb.2.2. Hier handelt es sich um ein Artefakt, verursacht durch die Aufteilung in inkompressible Terme und den Rest, die physikalisch nicht motiviert ist. Sinha & Candler beobachteten dieses extreme Verhalten nicht, da entlang der von ihnen betrachteten adiabaten Wand die Viskositätsgradienten klein sind. Dort erreichte der Viskositäts-Variations-Term  $C_\epsilon^{SC}$  nur ein Achtel des maximalen Wertes von  $\Upsilon^{SC}$ . Die hier eingeführte Aufteilung führt zu Termen, die in Strömungen ohne und mit (auch hohen) Viskositätsgradienten ein ähnliches Verhalten aufweisen.

# Kapitel 3

## Numerisches Verfahren

### 3.1 Anforderungen an ein numerisches Verfahren

Die Navier-Stokes-Gleichungen in Druck-Geschwindigkeits-Entropie-Formulierung werden mit einem Finite-Differenzen-Verfahren numerisch integriert. Anforderungen an ein solches Verfahren sind nach Ferziger und Perić [13]:

- Konsistenz: Die diskretisierten Gleichungen müssen für unendlich feine Gitter in die exakten übergehen.
- Stabilität: Die Lösung ist beschränkt, wenn es die Lösung der exakten Gleichung ist.
- Konvergenz: Die numerische Lösung konvergiert für unendlich feine Gitter gegen die exakte.

Hinzu kommt die Forderung nach einer möglichst hohen Genauigkeit bei einem bestimmten, nicht unendlich feinen Gitter.

Konsistenz kann nachgewiesen werden, indem die Werte auf den Gitterpunkten durch Taylor-Reihen um einen Punkt ersetzt werden. Die Größenordnung des Unterschieds zwischen exakter und diskreter Gleichung, der Abbruchfehler, lässt sich dann in Potenzen der Gitterweiten angeben:  $\Delta x^n$  bzw.  $\Delta t^n$ .  $n$  wird Ordnung des Verfahrens genannt. Ist die Ordnung  $n > 0$ , ist das Verfahren konsistent. Hier wurden räumliche Verfahren 4., 5. und 6. Ordnung und ein Zeitintegrationsverfahren 3. Ordnung verwendet.

Die Stabilität der Diskretisierung nichtlinearer Gleichungen zu untersuchen, ist mathematisch aufwändig und außerhalb der in dieser Arbeit gesteckten Ziele. Möglich war die Untersuchung der Stabilität linearer Gleichungen. Eine geeignete einfache Modellgleichung ist die Konvektions-Diffusions-Gleichung. Die Stabilität der eingesetzten Diskretisierungen konnte anhand dieser Modellgleichung überprüft werden. Randbedingungen und Gitterstreckungen wurden dabei nicht berücksichtigt. Eine solche vereinfachte Analyse – genannt von Neumann-Analyse – ist meist ausreichend. Sie führt auf eine Beschränkung des Zeitschritts  $\Delta t$ , abhängig von der Gitterweite  $\Delta x$ .



Nichtlineare Terme führen allerdings zu einem Energietransfer in die kurzwelligsten noch dargestellten Moden. Ist die räumliche Auflösung nicht perfekt, was bei Simulationen turbulenter Strömungen beinahe immer der Fall ist, kann sich diese Energie aufstauen, da die Diskretisierungsfehler bei hohen Wellenzahlen am größten sind. Deswegen ist es notwendig, kurzwellige Moden gezielt zu dämpfen. Das wurde entweder durch die Verwendung von *upwind*-Schemata oder explizites Tiefpassfiltern erreicht.

Konsistenz und Stabilität sind im Falle gut gestellter linearer Probleme nach dem Lax-Äquivalenz-Theorem notwendig und hinreichend für Konvergenz. Im Falle nichtlinearer Gleichungen kann Konsistenz durch numerische Experimente getestet werden: Dasselbe Problem wird auf Gittern mit immer feineren Maschen gerechnet. Die Lösung sollte, entsprechend der Ordnung des Verfahrens, gegen eine gitterunabhängige Lösung, die gleich der exakten ist, konvergieren. Solche Tests wurden hier nicht durchgeführt.

Die letzte Forderung nach einer hohen Genauigkeit auf einem gegebenen Gitter betrifft hauptsächlich das räumliche Verfahren, da eine feinere Auflösung hier sehr teuer ist: Eine Halbierung des Zeitschrittes führt zur doppelten Rechenzeit, eine Halbierung der Gitterweite in allen Raumrichtungen, die aus Stabilitätsgründen ebenfalls eine Halbierung des Zeitschrittes verlangt, zur 16-fachen Rechenzeit. Deswegen wurden für die räumliche Diskretisierung optimierte Verfahren eingesetzt, die auch kurzwellige Moden möglichst genau behandeln.

Im Folgenden werden zuerst die von Neumann-Analyse, dann das verwendete Zeitschrittverfahren, die verwendeten räumlichen Diskretisierungen mit ihren Konsistenz- und Stabilitätseigenschaften, ihre Anwendung auf die Navier-Stokes-Gleichungen und zuletzt die verwendeten Randbedingungen beschrieben.

## 3.2 von Neumann-Analyse

Die von Neumann-Analyse untersucht das Verhalten des numerischen Verfahrens für die eindimensionale Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$\dot{u} = -cu' + \nu u'' = f(u) \quad (3.1)$$

in einem periodischen Gebiet. Der Ansatz  $u = \sum_k \hat{u}(t, k)e^{-ikx}$ , wobei  $k$  Wellenzahl genannt wird, reduziert die partielle Differentialgleichung auf gewöhnliche für jede Wellenzahl  $k$

$$\dot{\hat{u}} = i\omega(k)\hat{u}(t, k) \quad (3.2)$$

mit

$$i\omega(k) = ick - \nu k^2, \quad (3.3)$$

deren Lösung

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}(t=0, k)e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

ist. Diese Lösung ist beschränkt, da für alle Zeiten  $t > 0$

$$|e^{i\omega t}| = e^{-\nu k^2 t} \leq 1. \quad (3.5)$$

Das numerische Verfahren kann nicht exakte räumliche Ableitungen  $u'$  und  $u''$  bilden, sondern nur Approximationen an diese, nämlich  $\tilde{u}'$  und  $\tilde{u}''$ . Definiert man die modifizierten Wellenzahlen und die modifizierte Frequenz

$$k^*(k) := \tilde{u}'/u' \cdot k \quad (3.6)$$

$$k^{2*}(k) := \tilde{u}''/u'' \cdot k^2 \quad (3.7)$$

$$i\omega^* := ick^* - \nu k^{2*}, \quad (3.8)$$

lautet die numerisch approximierte rechte Seite von Gl. (3.1)

$$\sum_k i\omega^*(k) \hat{u}(t, k) e^{-ikx}. \quad (3.9)$$

Integriert man weiterhin exakt in der Zeit, ist die Lösung für jede Wellenzahl

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}(t=0, k) e^{i\omega^* t}. \quad (3.10)$$

Die Forderung, dass die Lösung für alle Zeiten  $t > 0$  beschränkt ist, ist erfüllt wenn

$$|e^{i\omega^* t}| \leq 1 \Leftrightarrow \Im(ck^*) + \Re(\nu k^{2*}) \geq 0. \quad (3.11)$$

Somit kann man allein räumliche Ableitungsverfahren auf ihre Stabilität hin untersuchen. Interessant ist der Fall reiner Konvektion ( $\nu = 0$ ). Die Lösung lautet dann

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}(t=0, k) e^{ic\Re(k^*)t - c\Im(k^*)t}. \quad (3.12)$$

Ein positiver Imaginärteil von  $k^*$  wirkt dämpfend, man spricht von numerischer Dissipation. Weicht der Realteil von  $k^*(k)$  von  $k$  ab, kann dies auch als eine modifizierte Konvektionsgeschwindigkeit  $c^* = c \cdot k^*/k$  gedeutet werden, man spricht vom Dispersionsfehler.

Die numerische, also approximierte zeitliche Integration vom Wert  $\hat{u}^n$  am Zeitpunkt  $t = t_n$  zum Wert  $\hat{u}^{n+1}$  am Zeitpunkt  $t = t_n + \Delta t$  kann man formal schreiben als:

$$\hat{u}^{n+1} = G(i\omega^*, \Delta t) \cdot \hat{u}^n. \quad (3.13)$$

$G$  ist der Verstärkungsfaktor. Die Bedingung für Stabilität ist hier

$$|G| \leq 1. \quad (3.14)$$

### 3.3 Zeitliches Integrationsverfahren

Zur zeitlichen Integration wird ein Runge-Kutta-Zeitschritt 3.Ordnung mit einem *low-storage*-Verfahren eingesetzt. Angewandt auf die Gleichung  $\dot{u} = f(u)$  lautet der Algorithmus, um die Lösung um einen Zeitschritt  $\Delta t$  in der Zeit zu integrieren:

$$g_1 \leftarrow f(u) \quad (3.15)$$

$$u \leftarrow u + \frac{\Delta t}{3} g_1 \quad (3.16)$$

$$g_2 \leftarrow f(u) \quad (3.17)$$

$$g_1 \leftarrow -\frac{5}{9}g_1 + g_2 \quad (3.18)$$

$$u \leftarrow u + \frac{15\Delta t}{16} g_1 \quad (3.19)$$

$$g_2 \leftarrow f(u) \quad (3.20)$$

$$g_1 \leftarrow g_2 - \frac{153}{128}g_1 \quad (3.21)$$

$$u \leftarrow u + \frac{8\Delta t}{15} g_1 \quad (3.22)$$

Der numerische Aufwand besteht in der dreimaligen Berechnung der rechten Seite  $f(u)$ , den drei Runge-Kutta-Teilschritten. Das Verfahren kommt mit nur zwei Hilfsfeldern  $g_1$  und  $g_2$  aus.

Angenommen  $f(u)$  ist linear in  $u$ , so lässt sich das resultierende Schema schreiben als

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u^n + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^n + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u^n. \quad (3.23)$$

Dies sind die ersten Terme der Taylorreihe für  $u$  um den Zeitpunkt  $t_n$ . Der erste vernachlässigte Term und damit der führende Fehlerterm ist  $\frac{1}{4!} \Delta t^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u^n$ . Halbiert man den Zeitschritt, braucht es zwei Runge-Kutta-Schritte, um zum selben Zeitniveau zu gelangen:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^n + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u^n \quad (3.24)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u^n + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^n + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u^n + \frac{7}{8 \cdot 4!} \Delta t^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u^n + \dots \quad (3.25)$$

Der Fehler im  $\Delta t^4$ -Glied beträgt nurmehr  $\frac{1}{8 \cdot 4!} \Delta t^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u^n$ , er wurde also bei einer Halbierung des Zeitschrittes geachtelt. Das Verfahren ist also dritter Ordnung.

Für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (3.1) ist der Zeitschritt

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n + i\omega \Delta t \hat{u}^n - \frac{1}{2!} \omega^2 \Delta t^2 \hat{u}^n - \frac{1}{3!} i\omega^3 \Delta t^3 \hat{u}^n = G \cdot \hat{u}^n. \quad (3.26)$$

Bedingung für Stabilität ist, dass der Betrag des Verstärkungsfaktors kleiner gleich eins ist:

$$|G| = \left| 1 + i\omega \Delta t - \frac{1}{2!} \omega^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} i\omega^3 \Delta t^3 \right| \leq 1 \quad (3.27)$$

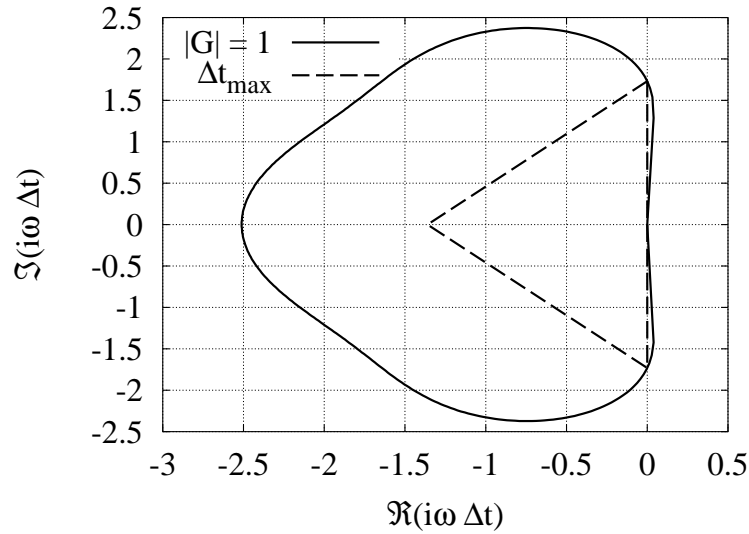


Abbildung 3.1: Stabilitätsbereich des Runge-Kutta-Zeitschritts 3. Ordnung und Zeitschrittkriterium nach Gl. (3.64)

Dies ist erfüllt, falls  $i\omega \Delta t$  innerhalb der in Abb.3.1 gezeigten Stabilitätskurve liegt. Bei reiner Konvektion ist  $i\omega \Delta t = ick \Delta t$ . Die maximal auf einem räumlichen Gitter darstellbare Wellenzahl ist  $k_{max} = 2\pi/\lambda_{max} = \pi/\Delta x$ . Somit wird Gl. (3.27) zur Bedingung  $|\frac{c\Delta t}{\Delta x}| \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ . Die linke Seite dieser Bedingung wird *CFL*-Zahl genannt. Im Falle reiner Diffusion gilt  $0 \leq \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{2.5128}{\pi^2}$ , wobei  $\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$  die Diffusionskennzahl  $C_d$  ist. Diese Werte gelten unter der Annahme eines perfekten räumlichen Diskretisierungsverfahrens. Zur Berücksichtigung der numerischen Diskretisierung ist  $i\omega$  durch  $i\omega^*$  zu ersetzen.

### 3.4 Räumliche Ableitungsverfahren

Es gibt zwei Maße für die Genauigkeit eines Ableitungsverfahrens: Seine Ordnung und sein Übertragungsverhalten. Die Ordnung allein beschreibt die Genauigkeit für gut aufgelöste Wellenzahlen, also kleine Werte von  $k \cdot \Delta x$ . Bei Berechnungen turbulenter Strömungen ist es jedoch praktisch unmöglich, eine Auflösung zu wählen, bei der alle auftretenden Strukturen gut aufgelöst sind. Vielmehr ist stets der gesamte auf einem bestimmten Gitter darstellbare Wellenzahlenbereich vertreten. Daher ist für die Beurteilung der Qualität eines Ableitungsverfahrens dessen Übertragungsfunktion ein besseres Maß als dessen Ordnung. Sie beschreibt den Unterschied zwischen angenäherter und exakter Ableitung abhängig von der Wellenzahl. Dies ist äquivalent zur Abweichung der modifizierten Wellenzahl  $k^*(k)$  von  $k$ . Üblicherweise wird der Verlauf der dimensionslosen Größe  $k^*(k)\Delta x$  über  $k\Delta x$  betrachtet.

Fast alle eingesetzten Verfahren sind Kompaktverfahren, d.h. der Wert der Ableitung an einem Punkt ist nicht nur explizit von den Funktionswerten des Punktes und seiner Umgebung abhängig, sondern auch von den benachbarten Werten der

Ableitung:

$$A \tilde{u}' = \frac{1}{\Delta x} B \vec{u} \quad (3.28)$$

oder

$$\sum_{\mu=-\mu_l}^{\mu_r} \alpha_\mu \tilde{u}'_{i+\mu} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{\nu=-\nu_l}^{\nu_r} \beta_\nu u_{i+\nu} \quad (3.29)$$

Um die Ableitungen berechnen zu können, muss das Gleichungssystem gelöst werden:  $\tilde{u}' = \frac{1}{\Delta x} A^{-1} B \vec{u}$ . Die Matrizen  $A$  und  $B$  sind dünn besetzt.  $A$  hat bei den verwendeten Verfahren maximal fünf besetzte Diagonalen. Daher kann das Gleichungssystem effizient mit einem Thomas-Algorithmus gelöst werden.

Im Folgenden sind alle eingesetzten Ableitungsverfahren mit ihren Koeffizienten und Übertragungsfunktionen aufgeführt.

### ***Upwind*-Verfahren für die erste Ableitung**

Mit *upwind* werden Verfahren bezeichnet, die die Ableitung für einen Punkt mittels eines Differenzensterns berechnen, dessen Schwerpunkt leicht stromauf des Punktes liegt. Diese Verfahren verursachen numerische Dissipation. Wurden die Koeffizienten numerisch bestimmt, so ist es nötig, dass sie mindestens auf ebensoviele Stellen genau sind wie die Rechenoperationen. Ansonsten wird die theoretische Ordnung nicht erreicht.

CULD 5.Ordnung (Adams & Shariff [1])

$\alpha_{-2}$	2.7844800835977184722765001482e-2
$\alpha_{-1}$	4.5586882948901069018048109823e-1
$\alpha_0$	9.999999999999999999999999999999e-1
$\alpha_1$	4.7747919080945909942598994944e-1
$\alpha_2$	3.882553757197359601218609376e-2
$\beta_{-2}$	-1.18727423955e-1
$\beta_{-1}$	-7.4820594258816874789592739287e-1
$\beta_0$	5.2666822731662e-4
$\beta_1$	7.184558284234524333463600357e-1
$\beta_2$	1.4795086989239969454956735717e-1

RAI 5.Ordnung  
(Rai & Moin [40])

$\alpha_0$	1
$\beta_{-3}$	-4/120
$\beta_{-2}$	30/120
$\beta_{-1}$	-1
$\beta_0$	40/120
$\beta_1$	60/120
$\beta_2$	-6/120
$\beta_3$	0

CUHD 5.Ordnung (Adams &Shariff [1])

$\alpha_{-2}$	0.035849272999368
$\alpha_{-1}$	0.7337612221857
$\alpha_0$	1.0
$\alpha_1$	-0.1690430965563
$\alpha_2$	-0.061336408258671
$\beta_{-2}$	-0.1760401349801
$\beta_{-1}$	-1.137476930424
$\beta_0$	1.062649434339
$\beta_1$	0.4520614721441
$\beta_2$	-0.201193841079

## Zentrale Verfahren für die erste Ableitung

Zentrale Verfahren haben symmetrische Differenzensterne. Ihre modifizierte Wellenzahl ist reell.

EXPLIZIT 6.Ordnung

$\alpha_0$	1
$\beta_{-3}$	-1/60
$\beta_{-2}$	3/20
$\beta_{-1}$	-3/4
$\beta_0$	0
$\beta_1$	3/4
$\beta_2$	-3/20
$\beta_3$	1/60

LELETRI 6.Ordnung (Lele [30])

$\alpha_{-1}$	1/3
$\alpha_0$	1
$\alpha_1$	1/3
$\beta_{-2}$	-1/36
$\beta_{-1}$	-7/9
$\beta_0$	0
$\beta_1$	7/9
$\beta_2$	1/36

LELEPENTA 4.Ordnung (Lele [30])

$\alpha_{-2}$	.08964063888888888888888888888889
$\alpha_{-1}$	.57714388611111111111111111111111
$\alpha_0$	1
$\alpha_1$	$-\alpha_{-1}$
$\alpha_2$	$-\alpha_{-2}$
$\beta_{-3}$	-0.03750245/6
$\beta_{-2}$	-0.9935500/4
$\beta_{-1}$	-1.3025166/2
$\beta_0$	0
$\beta_1$	$-\beta_{-1}$
$\beta_2$	$-\beta_{-2}$
$\beta_3$	$-\beta_{-3}$

## Zentrale Verfahren für die zweite Ableitung

EXPLIZIT2 6.Ordnung

$\alpha_0$	1
$\beta_{-3}$	1/90
$\beta_{-2}$	-3/20
$\beta_{-1}$	3/2
$\beta_0$	-245/90
$\beta_1$	3/2
$\beta_2$	-3/20
$\beta_3$	1/90

LELETRI2 6.Ordnung (Lele [30])

$\alpha_{-1}$	2/11
$\alpha_0$	1
$\alpha_1$	2/11
$\beta_{-2}$	3/44
$\beta_{-1}$	3/2 - 9/22
$\beta_0$	-2 · ( $\beta_{-2} + \beta_{-1}$ )
$\beta_1$	3/2 - 9/22
$\beta_2$	3/44

LELEPENTA2 4.Ordnung (Lele [30])

$\alpha_{-2}$	$(\beta_{-1} + 4\beta_{-2} + 9\beta_{-3} - 1)/2 - \alpha_{-1}$
$\alpha_{-1}$	$(23 \cdot \beta_{-1} + 20 \cdot \beta_{-2} \cdot 4 + 15 \cdot \beta_{-3} \cdot 9 - 24)/36$
$\alpha_0$	1
$\alpha_1$	$\alpha_{-1}$
$\alpha_2$	$\alpha_{-2}$
$\beta_{-3}$	0.17659730/9
$\beta_{-2}$	1.7233220/4
$\beta_{-1}$	0.21564935
$\beta_0$	-2 · ( $\beta_{-3} + \beta_{-2} + \beta_{-1}$ )
$\beta_1$	$\beta_{-1}$
$\beta_2$	$\beta_{-2}$
$\beta_3$	$\beta_{-3}$

## Randschemata

In nicht periodischen Richtungen müssen an den Randpunkten spezielle Schemata mit einseitigen Differenzensternen eingesetzt werden. Die für die unterschiedlichen inneren Verfahren verwendeten Randschemata sind im Folgenden aufgeführt. Die zweite Ableitung wurde in nichtperiodischen Richtungen stets durch zweimaliges einfaches Ableiten gebildet.

3. Ordnung für  
LELETRI, erster Punkt und  
LELEPENTA, erster Punkt

$\alpha_0$	2
$\alpha_1$	4
$\beta_0$	-5
$\beta_1$	4
$\beta_2$	1

4.Ordnung für  
LELETRI, zweiter Punkt und  
LELEPENTA, zweiter und dritter Punkt

$\alpha_{-1}$	1/4
$\alpha_0$	1
$\alpha_1$	1/4
$\beta_{-1}$	-3/4
$\beta_0$	0
$\beta_1$	3/4

5.Ordnung für CULD (Adams & Shariff [1])

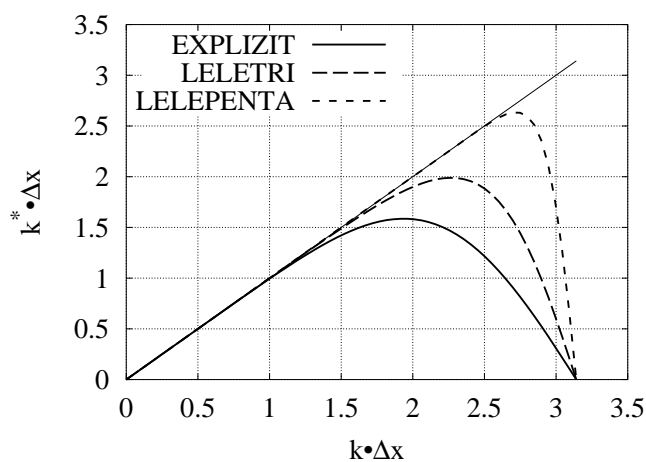


Abbildung 3.2: Modifizierte Wellenzahl der ersten Ableitung, zentrale Verfahren

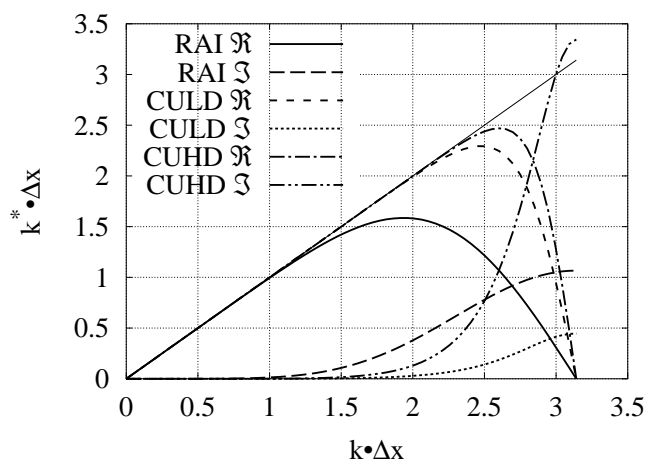


Abbildung 3.3: Modifizierte Wellenzahl der ersten Ableitung, *upwind*-Verfahren

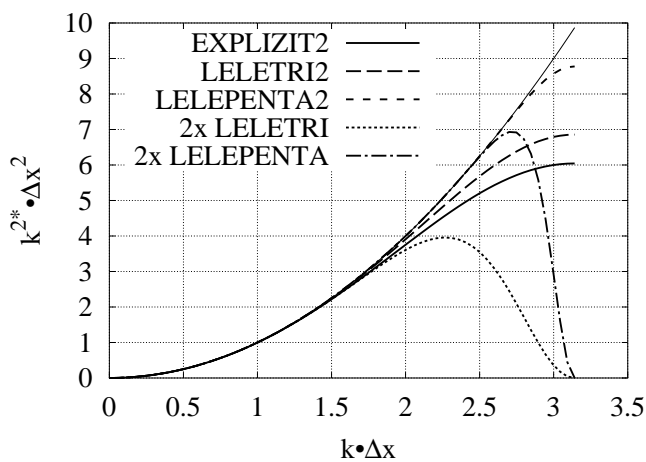


Abbildung 3.4: Modifizierte Wellenzahl der zweiten Ableitung



$A_{ij}$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 1$	1	-1.3841732050877192982456140351
$j = 2$	-3.06076124801960000000000000000005	1
$j = 3$	-9.28256878750520000000000000000002	6.6206367657894736842105263158
$j = 4$	-	-2.1229349764912280701754385965
$j = 5$	-	-
$B_{ij}$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 1$	-2.09169042028719999999999999999999	3.3623251557894736842105263157
$j = 2$	12.7390135650198	-11.845251485789473684210526316
$j = 3$	-7.59114187202940000000000000000004	8.83692208
$j = 4$	-3.324665234327	0.29908109
$j = 5$	0.2684839616238	-65.30768400000000000000000000000001
$A_{ij}$	$i = n - 1$	$i = n$
$j = n - 4$	-	-
$j = n - 3$	15.748395108771929824561403508	-
$j = n - 2$	27.04931558947368421052631579	4.07431150705387600000000000000001
$j = n - 1$	1	6.58361830342976800000000000000001
$j = n$	-0.32112048771929824561403508767	1
$B_{ij}$	$i = n - 1$	$i = n$
$j = n - 4$	-1.8466026	0.040891100302009
$j = n - 3$	-30.228379	-0.7577318529877
$j = n - 2$	21.1592312	-6.87542745514465200000000000000001
$j = n - 1$	12.27649478947368421052631579	4.20255625756072400000000000000001
$j = n$	-1.3607443894736842105263157896	3.389711950269619

Die maximalen modifizierten Wellenzahlen der Verfahren sind in den folgenden Tabellen angegeben. Sie sind relevant zur Bestimmung des maximalen Zeitschrittes. Sie sind stets geringer als die Maximalwerte von  $k\Delta x$  und  $k^2\Delta x^2$  ( $\pi$  bzw.  $\pi^2$ ).

Verfahren	$\max(k^* \Delta x)$
CULD	2.2932
CUHD	2.4697
LELETRI	1.9893
LELEPENTA	2.6328
EXPLIZIT	1.5855
RAI	1.5855

Verfahren	$\max(k^{2*} \Delta x^2)$
LELETRI2	6.8571
LELEPENTA2	8.7789
EXPLIZIT2	6.0444
2xLELETRI	3.9573
2xLELEPENTA	6.9318

Um Ableitungen auf nicht äquidistanten Gittern berechnen zu können, wurden neue Koordinaten  $\xi(x)$ ,  $\eta(y)$  und  $\zeta(z)$  eingeführt. Diese Koordinaten gehen von 0 bis eins. Die numerischen Gitter sind in diesen Koordinaten äquidistant:  $\Delta\xi_i = h$ . Die Ableitungen werden nach der Kettenregel berechnet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.30)$$

Im Falle äquidistanter Gitter im physikalischen Raum ist  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1/L_x$ , dem Inversen

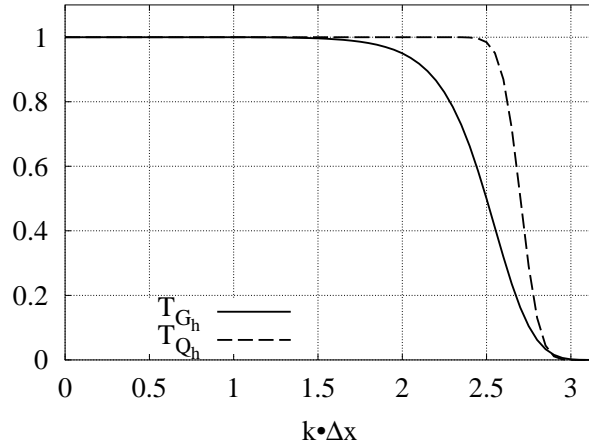


Abbildung 3.5: Transferfunktion des Filters in den homogenen Richtungen

der Gebietslänge. Für gestreckte Gitter kann  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  entweder analytisch angegeben werden, falls  $\xi(x)$  analytisch gegeben ist oder numerisch berechnet werden:  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1/\frac{\partial x}{\partial \xi}$ . Die Ordnung  $n$  des Ableitungsverfahrens bleibt auch in diesem Fall erhalten:

$$\begin{aligned} \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x}} &= \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + O(\Delta \xi^n) \right) / \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} + O(\Delta \xi^n) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta \xi^n) / \frac{\partial x}{\partial \xi} - O(\Delta \xi^n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta \xi^{2n}) + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die zweiten Ableitungen wurden auf nichtgestreckten Gittern folgendermaßen berechnet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \quad (3.32)$$

Auf gestreckten Gittern wurde zweimal hintereinander die erste Ableitung gebildet, um die wegen der Nachdifferenzierung nötigen zusätzlichen Größen  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$  zu vermeiden. Dies führt allerdings zu einer schlechteren Auflösung bei hohen Wellenzahlen.

### 3.5 Räumliche Filter

Bei einigen Berechnungen wurden zur Stabilisierung des Verfahrens Tiefpassfilter eingesetzt, s.u.

In der inhomogenen Richtung wurde ein expliziter Filter  $G$  mit der Übertragungsfunktion  $T(k\Delta x)$  eingesetzt, der von Stolz [54] entwickelt wurde. Der Filter greift auf einen *stencil* von 5 Punkten zu:

$$(u_i)_{\text{gefiltert}} = \sum_{\mu=-2}^{\mu=2} \alpha_{\mu} u_i \quad (3.33)$$

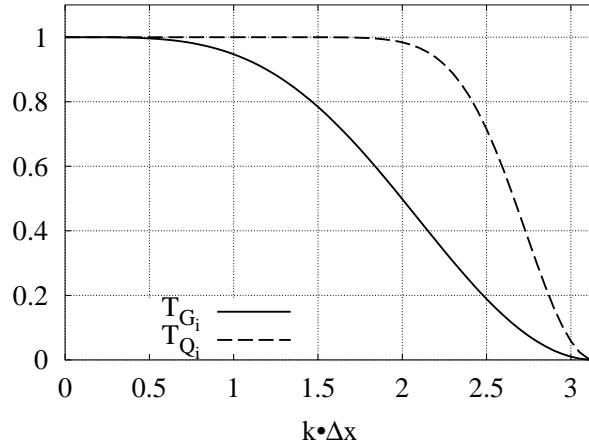


Abbildung 3.6: Transferfunktion des Filters in den inhomogenen Richtungen

Der Randpunkt wird nicht gefiltert, um keinen Konflikt mit den Randbedingungen zu riskieren. Die Koeffizienten des Filters werden so bestimmt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind: Für den Punkt neben dem Rand soll gelten:

$$T(0) = 1 \quad (3.34)$$

$$T(\pi) = 0 \quad (3.35)$$

$$M^1 = M^2 = M^3 = 0 \quad (3.36)$$

Dabei sind  $M^k$  die Momente des Filters, definiert als  $M^i = \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot z^k dz$ .  $T(0)$  ist also das nullte Moment  $M^0$ . Sind alle Momente vom ersten bis einschließlich dem  $k$ -ten Moment Null, bedeutet das, dass ein Polynom  $k$ -ten Grades durch den Filter nicht verändert wird. Für die Punkte im Inneren des Berechnungsgebietes wurden folgende Bedingungen verwendet:

$$T(0) = 1 \quad (3.37)$$

$$T(\pi) = 0 \quad (3.38)$$

$$M^1 = M^2 = 0 \quad (3.39)$$

$$\alpha_{-2} = \alpha_{+2} \quad (3.40)$$

Anstelle der letzten Bedingung verwendete Stolz entweder die Bedingung, dass der Imaginärteil der Übertragungsfunktion des Filters minimal sein sollte, oder  $M^3 = 0$ . Im Fall äquidistanter Gitter sind diese beiden Bedingungen mit der hier verwendeten äquivalent.

Die resultierenden Formeln für die Koeffizienten des Filters sind in Stolz [54], S.81 ff. angegeben.

Um einen schärferen *cut-off* bei hohen Wellenzahlen zu erreichen, wurde der Filter mit seinem approximativen Inversen multipliziert. Dazu wird der inverse Filter durch die ersten Terme der geometrischen Reihe angenähert.

$$G^{-1} = (I - (I - G))^{-1} \approx \sum_{m=0}^n (I - G)^m \quad (3.41)$$

Es wurde  $n = 5$  gewählt. Der endgültige Filter  $Q$  ist also

$$Q = G \cdot \sum_{m=0}^5 (I - G)^m = 6G - 15G^2 + 20G^3 - 15G^4 + 6G^5 - G^6. \quad (3.42)$$

Die Implementierung dieses Filters  $Q$  erfordert sechs Aufrufe des expliziten Filters  $G$  und zwei temporäre Speicherfelder:

$$\begin{aligned} t_1 &= G \cdot u & (3.43) \\ u &\leftarrow 6t_1 \\ t_2 &= G \cdot t_1 \\ u &\leftarrow u - 15t_2 \\ t_1 &= G \cdot t_2 \\ u &\leftarrow u + 20t_1 \\ t_2 &= G \cdot t_1 \\ u &\leftarrow u - 15t_2 \\ t_1 &= G \cdot t_2 \\ u &\leftarrow u + 6t_1 \\ t_2 &= G \cdot t_1 \\ u &\leftarrow u - t_2 \end{aligned}$$

In den homogenen Richtungen wurde ein periodischer Filter  $G_h$  eingesetzt, der bei Lele [30] in Gleichung (C.2.10.b) beschrieben ist. Dieser Filter wurde ebenfalls mit seinem approximativen Inversen multipliziert und zusätzlich danach noch quadriert, um eine Übertragungsfunktion mit einem scharfen *cut-off* zu erhalten. Der Filter ist implizit. Um ihn anzuwenden muss eine Pentadiagonalmatrix invertiert werden. Um Rechenoperationen zu sparen, wurde die Transferfunktion  $T_{G_h}$  des Filters berechnet (Gleichung (C.2.2) in [30]) und daraus die Transferfunktion  $T_{Q_h}$ :

$$T_{Q_h} = \left( T_{G_h} \cdot \sum_{m=0}^6 (1 - T_{G_h})^m \right)^2 \quad (3.44)$$

Das Feld wird fouriertransformiert. Die Fourierkoeffizienten werden mit den entsprechenden Werten der Übertragungsfunktion multipliziert, danach wird das Feld in den physikalischen Raum zurücktransformiert.

## 3.6 Anwendung auf die Navier-Stokes-Gleichungen

### 3.6.1 *Upwind*-Formulierung

Sesterhenn [52] schlug folgende algebraische Umformung der Navier-Stokes-Gleichungen vor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho c}{2}((X^+ + X^-) + (Y^+ + Y^-) \\
&\quad + (Z^+ + Z^-)) + \frac{p}{C_v} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + X^s + Y^s + Z^s \right) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\left( \frac{1}{2}(X^+ - X^-) + Y^u + Z^u \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\left( X^v + \frac{1}{2}(Y^+ - Y^-) + Z^v \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\left( X^w + Y^w + \frac{1}{2}(Z^+ - Z^-) \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial s}{\partial t} &= -(X^s + Y^s + Z^s) + \frac{R}{p} \left( -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi \right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

mit den Abkürzungen für die konvektiven Terme:

$$\begin{aligned}
X^s &= u \frac{\partial s}{\partial x} ; Y^s = v \frac{\partial s}{\partial y} ; Z^s = w \frac{\partial s}{\partial z} \\
X^+ &= (u + c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) ; X^v = u \frac{\partial v}{\partial x} \\
X^- &= (u - c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) ; X^w = u \frac{\partial w}{\partial x} \\
Y^+ &= (v + c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) ; Y^u = v \frac{\partial u}{\partial y} \\
Y^- &= (v - c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) ; Y^w = v \frac{\partial w}{\partial y} \\
Z^+ &= (w + c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) ; Z^u = w \frac{\partial u}{\partial z} \\
Z^- &= (w - c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) ; Z^v = w \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Die konvektiven Terme werden von Sesterhenn Pseudowellen genannt, die jeweils mit einer bestimmten Geschwindigkeit transportiert werden: Die akustischen Wellen  $X^+$ ,  $X^-$ ,  $Y^+$ ,  $Y^-$ ,  $Z^+$ ,  $Z^-$  mit der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente plus bzw. minus der Schallgeschwindigkeit, die Querkonvektions- und Entropietransportterme  $Y^u$ ,  $Z^u$ ,  $X^v$ ,  $Z^v$ ,  $X^w$ ,  $Y^w$ ,  $X^s$ ,  $Y^s$ ,  $Z^s$  nur mit der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente. Daher wird vorgeschlagen, die Ableitungen in diesen Termen mit *upwind*-Verfahren entsprechend der jeweiligen Konvektionsrichtung zu diskretisieren und so durch numerische Dissipation eine zielgenaue Stabilisierung des Verfahrens zu erreichen. Erst bei Einsatz einer *upwind*-Diskretisierung unterscheidet sich diese Formulierung von der gewöhnlichen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen, s. Kap. 2.1.

Der Effekt dieser Diskretisierung wird im Folgenden anhand des Transportes der Kovasznayschen Moden [26] in einer uniformen Grundströmung  $U_0 > 0$  gezeigt. Um das Problem analytisch fassen zu können, wurden nur Moden mit kleiner Amplitude betrachtet, was die Linearisierung der Gleichungen und die exakte Trennung der Moden erlaubt. Es wird ein Gebiet ohne Ränder betrachtet, so dass die von Neumann-Analyse eingesetzt werden kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird die Strömung als zweidimensional betrachtet. Außerdem werden viskose Terme vernachlässigt.

**Wirbelmode:** Es treten nur divergenzfreie Geschwindigkeitsfluktuationen  $u'$  und  $v'$  auf. Da die Grundströmung keine Gradienten hat, ergibt sich aus der Poisson-Gleichung für den Druck, dass dessen Fluktuationen von der Ordnung  $O(u'^2)$  und somit zu vernachlässigen sind. Auch gibt es keine Entropiefluktuationen.

Wenn  $U_0 < c$  ist, lauten die linearisierten Gleichungen (3.45)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{U_0}{2} \left( \frac{\partial u'^+}{\partial x} + \frac{\partial u'^-}{\partial x} \right) - \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial u'^+}{\partial x} - \frac{\partial u'^-}{\partial x} \right) \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -U_0 \frac{\partial v'^+}{\partial x} - \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial v'^+}{\partial y} - \frac{\partial v'^-}{\partial y} \right). \quad (3.48)$$

Die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x}^+$  und  $\frac{\partial}{\partial x}^-$  – *upwind* in positiver und negativer Koordinatenrichtung – werden mit den Ansätzen  $u' = \hat{u} e^{-i(k_x x + k_y y)}$  und  $v' = \hat{v} e^{-i(k_x x + k_y y)}$  unter Berücksichtigung der modifizierten Wellenzahl des numerischen Verfahrens  $k^* = k_r^* + ik_i^*$  zu  $\frac{\partial}{\partial x}^+ = -i(k_{xr}^* + ik_{xi}^*)$  und  $\frac{\partial}{\partial x}^- = -i(k_{xr}^* - ik_{xi}^*)$ . Somit lassen sich die Gleichungen schreiben als:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = ik_{xr}^* U_0 \hat{u} - k_{xi}^* c_0 \hat{u} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = ik_{xr}^* U_0 \hat{v} - k_{yi}^* c_0 \hat{v} - k_{xi}^* U_0 \hat{v} \quad (3.50)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$\hat{u} = \hat{u}_0 e^{ik_{xr}^* U_0 t - k_{xi}^* c_0 t} \quad (3.51)$$

$$\hat{v} = \hat{v}_0 e^{ik_{xr}^* U_0 t - (k_{yi}^* c_0 + k_{xi}^* U_0) t} \quad (3.52)$$

Hier bewirkt der jeweils erste Term im Exponenten die Konvektion der Geschwindigkeitsfluktuation, der zweite ihre numerische Dämpfung. Die Zeit, in der die Fluktuation  $u'$  eine Wellenlänge transportiert wird, ist  $T_\lambda = \frac{2\pi}{k_{xr}^* U_0}$ , die Zeit, bis sie um die Hälfte abgeklungen ist, ist  $T_{\frac{1}{2}} = -\frac{\ln(1/2)}{k_{xi}^* c_0}$ . Interessant ist nun, wieviele Wellenlängen eine Struktur transportiert wird, bevor sie um die Hälfte abgeklungen ist:

$$n_{\lambda u} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{T_\lambda} = -\frac{\ln(1/2)}{2\pi} \frac{k_{xr}^* U_0}{k_{xi}^* c_0} \approx 0.11032 \frac{k_{xr}^* M}{k_{xi}^*} \quad (3.53)$$

Für die Fluktuation  $v'$  ergibt sich eine Zahl von

$$n_{\lambda v} = -\frac{\ln(1/2)}{2\pi} \frac{k_{xr}^* U_0}{k_{yi}^* c_0 + k_{xi}^* U_0} \approx 0.11032 \frac{k_{xr}^* M}{k_{yi}^* + k_{xi}^* M}. \quad (3.54)$$

Hat die Wirbelstruktur gleiche Abmessungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung, so gilt  $k_{yi}^* = k_{xi}^*$  und damit für den Fall kleiner Machzahlen:  $n_{\lambda v} \approx n_{\lambda u}$ . Hier wird offensichtlich, dass der Wirbelmode bei kleinen Machzahlen durch das Verfahren stark gedämpft wird. So gilt z.B. bei Verwendung des Ableitungsverfahrens CULD für eine Struktur, die mit 4 Punkten pro Wellenlänge aufgelöst ist (d.h.  $k_x \cdot \Delta x = \pi/2$ )  $n_{\lambda u} = 0.11032 \cdot 278.83 \cdot M = 30.760 \cdot M$ . Bei einer Machzahl von  $M = 0.1$  halbiert sich also nach 3 Lauffängen durch numerische Dissipation die Amplitude einer Struktur, obwohl die Transferfunktion der Ableitung bei  $k_x \cdot \Delta x = \pi/2$  augenscheinlich noch sehr gut ist <sup>1</sup>. Der Grund für die hohe Dämpfung liegt darin, dass bei der Aufteilung der konvektiven Terme ein Teil der Wirbelfluktuation den sogenannten akustischen Wellen zugeschlagen wird, jedoch in Wirklichkeit nicht mit Schallgeschwindigkeit transportiert wird.

Ist  $U_0 > c$ , lautet die Gleichung

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -U_0 \frac{\partial u'^+}{\partial x} \quad (3.55)$$

mit den Lösungen

$$\hat{u} = \hat{u}_0 e^{ik_{xr}^* U_0 t - k_{xi}^* U_0 t} . \quad (3.56)$$

Hier ist die Zahl

$$n_{\lambda u} = -\frac{\ln(1/2)}{2\pi} \frac{k_{xr}^*}{k_{xi}^*} \quad (3.57)$$

unabhängig von der Machzahl. Beispielhaft gilt für eine Diskretisierung einer Wellenlänge mit vier Punkten  $n_{\lambda u} = 30.760$ . Die Gleichung für  $v'$  ist dieselbe wie im Fall  $U_0 < c$ .

**Akustischer Mode:** Für eine ebene akustische Welle, die in positiver  $x$ -Richtung läuft, gilt  $u' = \frac{1}{\rho_0 c_0} p'$ . Somit werden die linearisierten Gleichungen unabhängig von  $U_0$  größer oder kleiner 0 zu

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -(U_0 + c_0) \frac{\partial u'^+}{\partial x} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -(U_0 + c_0) \frac{\partial p'^+}{\partial x} . \quad (3.59)$$

Dies ist die *upwind*-Diskretisierung mit der physikalisch richtigen Transportgeschwindigkeit. Die Zahl der zurückgelegten Wellenlängen bis zum Abklingen auf die halbe Amplitude  $n_\lambda$  ist  $-\frac{\ln(1/2)}{2\pi} \frac{k_{xr}^*}{k_{xi}^*}$ .

---

<sup>1</sup>Wählt man 8 Punkte pro Wellenlänge, so gilt:  $n_{\lambda u} = 0.11032 \cdot 11214 \cdot M = 1237.1 \cdot M$ . Hier sieht man die hohe Ordnung des Verfahrens: CULD ist fünfter Ordnung, also sollte eine Halbierung der Gitterweite zu einem um den Faktor  $\frac{1}{32}$  geringeren Fehler führen. Tatsächlich ist die erreichte Lauffänge um den Faktor 40.218 höher, was in dieser Größenordnung liegt. Dass die Lauffänge nicht exakt 32-mal länger ist, liegt an den Fehlertermen höherer Ordnung.

**Entropiemode:** Der Entropiemode weist ausschließlich Entropiefluktuationen auf. Deren Transportgleichung ist:

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = -U_0 \frac{\partial s'^+}{\partial x} \quad (3.60)$$

Auch hier handelt es sich wieder um eine passende *upwind*-Diskretisierung mit der Kennzahl  $n_\lambda = -\frac{\ln(1/2)}{2\pi} \frac{k_{xr}^*}{k_{xi}^*}$ .

### 3.6.2 Zentrale Formulierung mit zusätzlicher Tiefpassfilterung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist das Verhalten von Wirbelmoden. Da diese bei dem obigen Verfahren am problematischsten sind, insbesondere bei geringen Machzahlen, und dieses Verfahren außerdem gegenüber üblichen Verfahren einen Mehraufwand an Ableitungen, Summationen und Multiplikationen erfordert, wurde für die zuletzt durchgeführten Simulationen der Mischungsschicht ein anderes Verfahren verwendet.

Die Navier-Stokes-Gleichungen in Druck-Geschwindigkeits-Entropie-Form (Gl. (2.15), (2.13) und (2.17)) wurden mit zentralen Differenzenschemata diskretisiert. Um das Verfahren zu stabilisieren, wurden alle Strömungsvariablen nach jedem Zeitschritt gefiltert. Dazu wurden Tiefpassfilter mit einem scharfen *cut-off* bei hohen Wellenzahlen eingesetzt (Kap. 3.5).

Der dadurch gemachte Fehler wurde quantifiziert, indem die kinetische Energie der Strömung vor und nach der Filterung gemessen wurde und in eine Filterdissipation umgerechnet wurde:

$$\varepsilon_{Filter} = \frac{K^{vor} - K^{nach}}{\Delta t} \quad (3.61)$$

Der Wert dieser Dissipation sollte klein im Vergleich zur Dissipationsrate turbulenter kinetischer Energie sein.

Pantano & Sarkar [36] geben für ihre DNS von Mischungsschichten einen Wert von  $\varepsilon_{Filter}/\varepsilon \approx 6\%$  an. Bei der hier durchgeführten Simulation M02, die  $\frac{5}{4}$ -mal so fein aufgelöst ist wie die von Pantano & Sarkar lag der Wert zum Zeitpunkt  $t\Delta U/\delta_{\theta 0} = 400$  bei 12%, für die doppelt so feine Simulation M10 bei 1.2%.

### 3.6.3 Berechnung der viskosen Terme

Bei der Berechnung der viskosen Terme werden, wenn möglich, direkte Verfahren zur Berechnung der zweiten Ableitung eingesetzt anstelle der zweimaligen Anwendung der ersten, da so eine höhere Genauigkeit für große Wellenzahlen erreicht wird. Aus demselben Grund werden Ableitungen von Produkten zerlegt, da Produkte höhere Wellenzahlen enthalten als die einzelnen Größen, und deswegen numerisch weniger genau abgeleitet werden können. Räumliche Ableitungen der Viskosität werden nach der Kettenregel gebildet:  $\frac{\partial \mu(T)}{\partial x} = \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x}$ . Die Divergenz des Wärmeflusses

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3.62)$$



beispielsweise wird folgendermaßen umgeformt:

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = \frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{d\mu}{dT} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (3.63)$$

### 3.6.4 Bestimmung des maximalen Zeitschrittes

Der maximale Zeitschritt für das Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung wird folgendermaßen bestimmt: Für jede Richtung  $i$  und für jeden Gitterpunkt muss gelten:

$$\Delta t \leq C_s \frac{\sqrt{3}}{\max(k^* \Delta x_i)} \frac{\Delta \xi_i^2 / (\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i})^2}{\Delta \xi_i / \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} (|u_i| + c) + 4 \frac{\mu}{\rho Pr}} \quad (3.64)$$

(Hier wird die Einsteinsche Summenkonvention nicht angewandt.)

Für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (3.1) begrenzt dies – unter der Annahme  $(k^* \Delta x)_{max} = \sqrt{(k^{2*} \Delta x^2)_{max}}$  und bei einem Wert  $C_s = 1$  – die Werte von  $i\omega^* \Delta t$  auf den Bereich innerhalb des gestrichelten Dreiecks in Abb. 3.1. Im Grenzfall reiner Konvektion erlaubt es dieses Kriterium, den Stabilitätsbereich des Zeitschrittes voll auszunutzen. Im Falle reiner Diffusion wird nur etwa die Hälfte des möglichen Zeitschrittes ausgenutzt. Dies ist aber nicht relevant, da bei den durchgeführten Simulationen stets die Konvektion das entscheidende Kriterium für die Zeitschrittbegrenzung war. Dies rührt daher, dass zum einen auch an einer festen Wand Konvektion von Schall stattfindet, zum anderen die kleinsten Gitterweiten an Wänden im Vergleich zu Spektralverfahren etwa 20mal größer sind.

Eine Wahl der Konstante  $C_s$  kleiner eins erlaubt es, den Zeitschritt weiter zu begrenzen, als es dieses Kriterium vorschreibt. Dies ist zum einen nötig, da das Verhalten der Navier-Stokes-Gleichungen, die ja nichtlinear sind, abweicht von dem Verhalten linearer Modellprobleme, zum anderen kann dadurch die Genauigkeit verbessert werden. Es wurden Werte zwischen 0.5 und 0.75 gewählt.

## 3.7 Randbedingungen

Alle betrachteten Strömungsfälle waren homogen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die numerische Entsprechung sind periodische Randbedingungen, d.h. die Verwendung periodischer Ableitungsverfahren.

Die an den Grenzflächen in der vertikalen  $z$ -Richtung gesetzten Randbedingungen sind in den folgenden Abschnitten beschrieben.

### 3.7.1 Scherperiodische Randbedingung

Simulationen homogener Turbulenz erfolgen in einem in alle Richtungen periodischen Rechengebiet. Im Fall der Scherturbulenz stellt sich das Problem, dass die Strömung in der Scherrichtung  $z$  nicht periodisch, sondern scherperiodisch ist. Es gelten die scherperiodischen Randbedingungen für fluktuierende Größen  $\varphi$ :

$$\varphi(t, x + m_1 L_x, y + m_2 L_y, z + m_3 L_z) = \varphi(t, x - S m_3 L_z, y, z). \quad (3.65)$$

$L_x, L_y, L_z$  bezeichnen die Länge des Berechnungsgebietes in die jeweilige Richtung,  $m_1, m_2, m_3$  sind beliebige ganze Zahlen.

Es gibt zwei verschiedene Wege, diese Randbedingungen zu erfüllen: Zum einen eine Koordinatentransformation in der Weise, dass die Berechnung der Strömung auf einem bewegten Gitter erfolgt, auf dem die scherperiodische Randbedingung zu einer einfachen periodischen wird. Dieses Verfahren wurde zuerst von Rogallo [44] und danach von vielen weiteren Autoren angewandt (Feinereisen [12], Lee [29], Blaisdell [6], Sarkar [47],[46]). Alternativ dazu besteht die Möglichkeit, mit einem raumfesten Gitter zu rechnen und die Scherperiodizität als Randbedingung zu implementieren. Dieses Verfahren wurde zuerst von Baron [3] auf inkompressible Scherturbulenz angewandt, danach von Schumann [51] und Gerz [20]. Im Folgenden werden beide Methoden mit ihren Vor- und Nachteilen kurz vorgestellt.

Rogallo führt folgende Koordinatentransformation durch:

$$\begin{aligned}x' &= x - Stz \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{3.66}$$

Stellt man die Fluktuationen in Abhängigkeit der neuen Koordinaten dar

$$\tilde{\varphi}(x', y', z', t') = \varphi(x, y, z, t)\tag{3.67}$$

und setzt dies zusammen mit der Transformation in (3.65) ein, erhält man

$$\tilde{\varphi}(t', x'_o, y' + m_2L_y, z' + m_3L_z) = \tilde{\varphi}(t', x'_u, y', z')\tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}x'_o &= x + m_1L_x - St(z' + m_3L_z) \\x'_u &= x - Sm_3L_zt - Stz' \\x'_o &= x'_u + m_1L_x.\end{aligned}\tag{3.69}$$

Damit gilt:

$$\tilde{\varphi}(t', x' + m_1L_x, y' + m_2L_y, z' + m_3L_z) = \tilde{\varphi}(t', x', y', z')\tag{3.70}$$

Dies entspricht gewöhnlichen periodischen Randbedingungen. Dadurch ist die Verwendung spektraler Verfahren in allen Raumrichtungen möglich, was der große Vorteil dieses Verfahrens ist.

Da sich das Rechengitter mit der mittleren Strömung mitbewegt, hat die mittlere Konvektion keinen Einfluss auf die Zeitschrittbegrenzung, hier ist nur die Konvektion durch fluktuierende Geschwindigkeiten zu berücksichtigen, was große Zeitschritte ermöglicht. Allerdings deformiert das bewegte Koordinatensystem mit der Zeit das Rechengebiet, es wird stark geschert. Um numerisch ungünstige extreme Scherung zu vermeiden, müssen die Daten in gewissen Abständen auf ein neues Gitter interpoliert werden. Da sich bei unterschiedlichen Gittern die darstellbaren Moden des Spektralraums für hohe Wellenzahlen unterscheiden, sind Verfahren nötig, um Aliasing-Fehler zu vermeiden (Rogallo [44], Blaisdell [6]). Dies führt dazu, dass

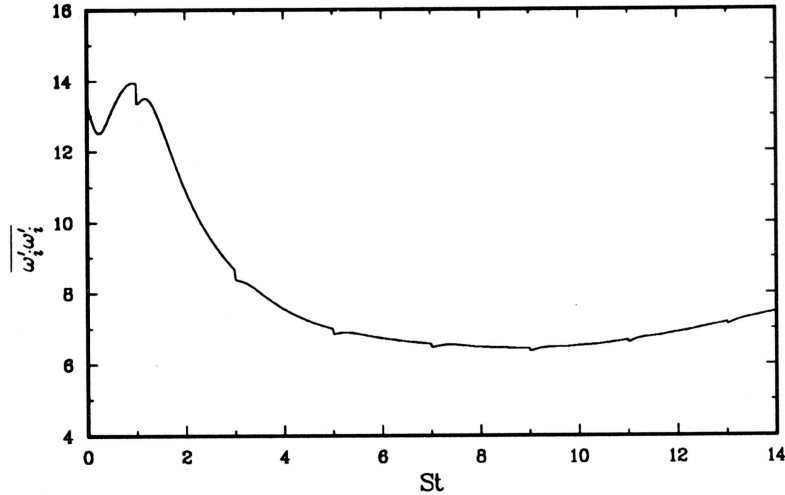


Abbildung 3.7: Verlust von Wirbelstärke durch Interpolation zwischen Gittern. (Blaisdell [6])

hohen Wellenzahlen Energie entnommen wird, was sich insbesondere in der Dissipation, die durch kurze Wellenlängen dominiert wird, auswirkt und zu Sprüngen in ihrem zeitlichen Verlauf führt, s. Abb.3.7.

Die Alternative zur Koordinatentransformation ist die Implementierung scherperiodischer Randbedingungen in der Scherrichtung bei Verwendung eines ruhenden Koordinatensystems, s. Abb.3.8. Eine periodische Randbedingung besteht darin, Ableitungen an den Randpunkten mit Differenzensternen zu bilden, die Punkte vom gegenüberliegenden Ende des Rechengitters einschließen. So wird z. B. eine Ableitung in  $x$ -Richtung am linken oberen Punkt P unter Verwendung der Punkte W' und O gebildet, der Hilfspunkt W' wird mit dem Wert an dem Punkt W belegt. Zur Bildung der Ableitung in  $z$ -Richtung, die scherperiodisch ist, wird auf die Punkte N' und S zurückgegriffen. Der Punkt N' wird ebenfalls mit einem Wert von der gegenüberliegenden Seite des Rechengebietes belegt, allerdings ist der Wert zusätzlich um  $-SL_z t$  in  $x$ -Richtung verschoben. Da im Allgemeinen an diesem Punkt kein Gitterpunkt liegt, muss der Wert durch periodische Interpolation gewonnen werden. Benötigt der Differenzenstern des Ableitungsverfahrens mehr Punkte als die oben verwendeten Nachbarpunkte, so müssen entsprechend mehr Randschichten interpoliert werden.

Diese Methode bietet den Vorteil, dass bei der Simulation keine zeitliche Veränderung der spektralen Auflösung auftritt und keine Energie entnommen wird. Der Nachteil ist, dass das numerische Verfahren nicht kontinuierlich in  $z$ -Richtung ist. Dadurch können Inhomogenitäten in  $z$ -Richtung entstehen. Außerdem ist die Verwendung spektraler Verfahren nicht möglich.

Da die Daten insbesondere im Hinblick auf die Dissipation und deren Transportgleichung ausgewertet werden sollen, ist eine sprunghafte Entnahme turbulenter kinetischer Energie zu bestimmten Zeitpunkten nicht akzeptabel. Daher wurde die Methode der scherperiodischen Randbedingungen gewählt.

Da nur eine endliche Anzahl von Randschichten interpoliert werden kann, er-



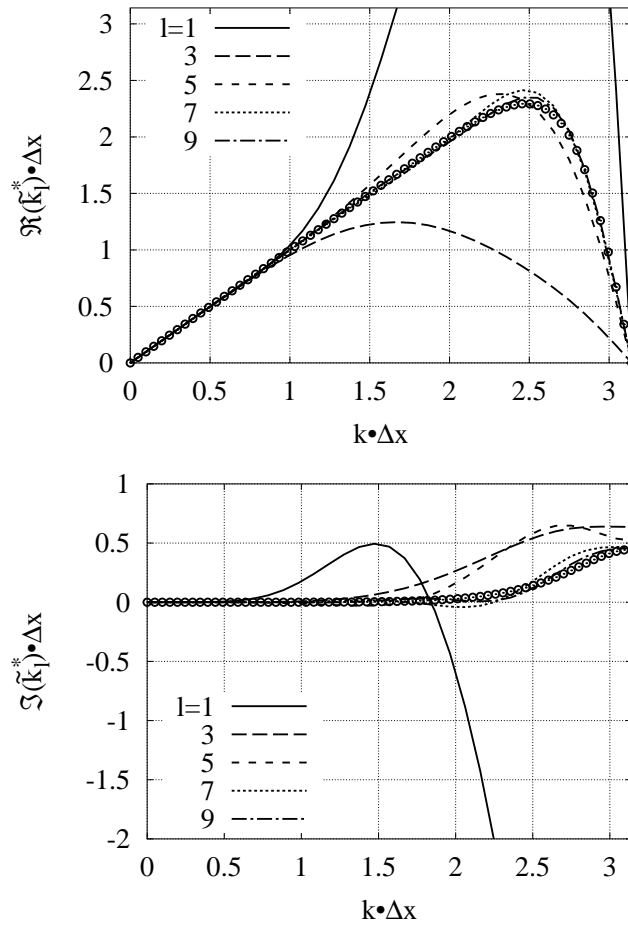


Abbildung 3.9:  $\tilde{k}_l^*$  für das kompakte *upwind*-Verfahren CULD am linken Rand. Dargestellt sind die Werte für den 1., 3., 5., 7. und 9. Punkt. Zum Vergleich ist die Transferfunktion des periodischen Verfahrens eingezeichnet ( $\odot$ ). Oben: Realteil; Unten: Imaginärteil

*upwind* Ableitungen und gewöhnliche explizite Verfahren 6. Ordnung (EXPLIZIT und EXPLIZIT2) für die viskosen Terme gewählt. Die Genauigkeitsordnung dieser Verfahren ist die gleiche wie bei den kompakten Verfahren CULD, LELETRI und LELETRI2. Sie haben allerdings schlechtere Übertragungsfunktionen als kompakte Verfahren. Dies kann durch ein feineres Gitter kompensiert werden. Wählt man das Gitter in  $z$ -Richtung 1.75 mal feiner als in den anderen Richtungen, so weisen die Verfahren RAI und CULD bis zu Wellenzahlen von  $k \cdot \Delta x = 2$  gleiches Übertragungsverhalten auf. Für die durch das feinere Gitter möglichen höheren Wellenzahlen hat das Verfahren eine deutliche Dämpfung, s. Abb.3.3. Somit kann man davon ausgehen, dass in allen Raumrichtungen ein gleichwertiges Ableitungsverfahren eingesetzt wird. Die expliziten Verfahren benutzen einen Differenzenstern von sieben Punkten, somit müssen drei Schichten von Randpunkten interpoliert werden, was durch eine spektrale Fourierinterpolation erfolgt.

### 3.7.2 Freier Rand

Bei ebenen Mischungsschichten sind die physikalischen Randbedingungen, die Fernfeldbedingungen  $u_{i\pm\infty}$ ,  $p_{\pm\infty}$  und  $s_{\pm\infty}$ , unendlich weit entfernt von der Mischungsschicht. Das Rechengebiet ist jedoch begrenzt, somit müssen Randbedingungen gefunden werden, die Abstrahlungen der Mischungsschicht reflektionsfrei passieren lassen. Da Wirbel auf die direkte Umgebung der Mischungsschicht begrenzt sind, genügt es, die Randbedingung etwas entfernt zu setzen, wo sie beinahe ausschließlich von Schallwellen erreicht wird. Die Verwendung nichtreflektierender Randbedingungen bedeutet, dass Schallwellen mit Laufrichtung in das Gebiet hinein zu Null gesetzt werden. In der Wellenformulierung muss z.B. am oberen Rand in  $z$ -Richtung  $Z^- = Z_0^-$  gesetzt werden.  $Z_0^-$  ist der Betrag der Pseudowelle der ungestörten Grundströmung. In diesem Fall, da es keine Gradienten der Grundströmung normal zum Rand gibt, gilt  $Z_0^- = 0$ . Diese Bedingung ist nur exakt für Schall, der normal auf den Rand zuläuft. Schräg laufender Schall wird gedämpft reflektiert.

Wird das zentrale Verfahren verwendet, müssen die Gleichungen für  $p$  und  $w$  modifiziert werden.  $-w\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma p\frac{\partial w}{\partial z}$  wird durch  $-\frac{\rho c}{2}(Z^+ + Z_0^-)$  ersetzt und  $-w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$  durch  $-\frac{1}{2}(Z^+ - Z_0^-)$ .

Ein stabiles Verfahren zu erreichen, erfordert noch eine Randbedingung für die viskosen Terme. Dies wird klar, wenn man die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.74)$$

betrachtet. Der Separationsansatz  $u(t, z) = T(t) \cdot Z(z)$  führt zu zwei einfachen linearen Differentialgleichungen

$$\dot{T} - \nu \lambda^2 T = 0 \quad (3.75)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0, \quad (3.76)$$

wobei  $\lambda$  eine beliebige komplexe Zahl ist. Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$T(t) = C_t \cdot e^{\nu \lambda^2 t} \quad (3.77)$$

$$Z(z) = C_{z1} \cdot e^{\lambda z} + C_{z2} \cdot e^{-\lambda z} \quad (3.78)$$

Somit sind alle Funktionen

$$u(t, z) = C_t \cdot e^{\nu \lambda^2 t} \cdot (C_{z1} \cdot e^{\lambda z} + C_{z2} \cdot e^{-\lambda z}) \quad (3.79)$$

Lösungen der Diffusionsgleichung. Die Lösungen sind nur dann beschränkt, wenn der Realteil von  $\lambda^2$  kleiner Null ist, was gleichbedeutend ist mit  $|\Im(\lambda)| > |\Re(\lambda)|$ . Ohne die Vorgabe von Randbedingungen sind jedoch auch Werte von  $\lambda$  möglich, die zu einer exponentiell mit der Zeit wachsenden Lösung führen.

Die Lösung bleibt beschränkt, falls  $u = 0$  für die Ränder  $z = 0$  und  $z = L_z$  gesetzt wird, bzw. die Werte auf den Rändern festgehalten werden, was mittels der

Transformation  $u \leftarrow u - (u|_{z=0} + \frac{u|_{z=Lz} - u|_{z=0}}{Lz} z)$  einem zu-Null-setzen entspricht. Die Lösung lautet nun

$$u(t, z) = C e^{\nu \lambda^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{i} z\right) \quad (3.80)$$

wobei  $\lambda = i \frac{\pi}{Lz} n$  mit einer beliebigen ganzen Zahl  $n$  ist. Die Lösung klingt also exponentiell mit der Zeit ab.

Die numerische Diskretisierung der Gleichung verhält sich ähnlich:

$$A \frac{\widetilde{\partial \vec{u}}}{\partial z} = B \vec{u} \quad (3.81)$$

$$\frac{\widetilde{\partial^2 \vec{u}}}{\partial z^2} = C \vec{u}; \quad C = A^{-1} B A^{-1} B \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu C \vec{u} \quad (3.83)$$

Eine Aussage über die Stabilität erhält man analog zur von Neumann-Analyse.  $\vec{u}$  wird jetzt jedoch nicht in Fouriermoden aufgespalten, sondern in die Eigenvektoren  $\vec{a}_l$  von  $C$ :

$$\vec{u} = \sum_{l=1}^n \hat{u}_l \vec{a}_l \quad (3.84)$$

Mit den Eigenwerten  $\lambda_l$  von  $C$  ist die Lösung von Gleichung (3.83)

$$\hat{u}_l(t) = \hat{u}_l(t=0) e^{\nu \lambda_l t}. \quad (3.85)$$

Diese Lösung ist beschränkt, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda_l$  gilt:

$$\Re(\lambda_l) \leq 0. \quad (3.86)$$

Wird keine Randbedingung gesetzt, existieren Eigenwerte mit einem Realteil größer Null. Verwendet man z.B. als Operator  $C$  die zweimalige Anwendung von LELE-PENTA, erhält man sowohl für ein Rechengebiet mit 35 als auch mit 512 Gitterpunkten drei Eigenwerte mit positivem Realteil.

Das Setzen der Randbedingung ist folgendermaßen zu berücksichtigen:  $u$  wird durch  $\text{diag}(0, 1 \cdots 1, 0)u$  ersetzt, was die Randwerte auf Null setzt. Somit werden die erste und letzte Spalte von  $C$  ausschließlich mit Null multipliziert. Welchen Wert  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  an den Rändern annimmt, ist irrelevant, da  $u$  am Rand ausschließlich durch die Randbedingung bestimmt ist. Somit sind auch die erste und die letzte Zeile von  $C$  bedeutungslos. Das Gleichungssystem kann also einfach um zwei Dimensionen reduziert werden:  $(\frac{\partial u}{\partial z})'$  und  $u'$  sind die Vektoren ohne die Randwerte,  $C'$  ist die Ableitungsmatrix ohne die erste und letzte Zeile und Spalte. Es ist wichtig, dass die Zeilen und Spalten von  $C$  gestrichen werden, nicht von  $A$  und  $B$ .

Der Realteil aller Eigenwerte von  $C'$  ist negativ für beide Punktezahlen (35 und 512).

Dass zusätzlich zur nichtreflektierenden akustischen Randbedingung noch eine weitere gesetzt werden muss, leuchtet ein, da ansonsten die Information über die

Geschwindigkeit außerhalb der Mischungsschicht nicht verwendet würde, die aber einen wesentlichen Teil der physikalischen Randbedingung ausmacht.

Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen werden die obigen Erkenntnisse umgesetzt, indem am Rand alle randnormalen zweiten Ableitungen zu Null gesetzt werden. Da diese Terme den viskosen Term dominieren, bedeutet dies, dass eine Änderung der Größen am Rand durch viskose Flüsse normal zum Rand beinahe vollständig unterdrückt wird. Damit ist die verwendete Randbedingung der von Poinot & Lele [38] vorgeschlagenen sehr ähnlich. Sie setzten  $Z^- = 0$  und  $\frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$ .

Somit sind die Randbedingungen für den oberen Rand:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\rho c}{2} (Z^+ + Z_0^-) + \frac{p}{C_v} \frac{Ds}{Dt} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= - \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} (Z^+ - Z_0^-) \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \\ Z_0^- &= 0 \end{aligned} \tag{3.87}$$

### 3.7.3 Isotherme Wand

Die physikalischen Bedingungen an einer festen isothermen Wand sind Dirichlet-Bedingungen für die Geschwindigkeiten  $u_i = 0$  und die Temperatur  $T = T_w$ . Somit sind nur Druck und Entropie zu bestimmen, wobei sie durch die integrierte gibbssche Fundamentalgleichung verknüpft sind, die für  $dT = 0$  lautet:

$$ds = -\frac{R}{p} dp \tag{3.88}$$

Diese Bedingung, eingesetzt in die Wellenformulierung der Navier-Stokes-Gleichung, ergibt Gleichungen für  $\frac{\partial p}{\partial t}$  und  $\frac{\partial s}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho c}{2} (X^+ + X^- + Y^+ + Y^- + Z^+ + Z^-) + \frac{p}{C_v} \frac{\partial s}{\partial t} \\ &= -\frac{\rho c}{2\gamma} (X^+ + X^- + Y^+ + Y^- + Z^+ + Z^-) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{R}{p} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.89}$$

In der Gleichung für den Druck kann man die Summen der Wellen parallel zur Wand vernachlässigen. Dies ist zulässig, da aufgrund der Haftbedingung gilt  $X^+ + X^- + Y^+ + Y^- = c \left( \frac{\partial p^+}{\partial x} - \frac{\partial p^-}{\partial x} + \frac{\partial p^+}{\partial y} - \frac{\partial p^-}{\partial y} \right)$  und damit - physikalisch gesehen - die Summe dieser Wellen Null ist. Nur durch die *upwind*-Diskretisierung erhält sie einen von Null verschiedenen Wert.

Bisher werden nur die zeitlichen Änderungen von  $p$  und  $s$  spezifiziert. Da aber die numerische Zeitintegration nicht exakt ist, kann es trotzdem zu einer langsamen



Veränderung der Wandtemperatur kommen. Um dies zu verhindern, wird vor jeder Berechnung der RHS der Navier-Stokes-Gleichungen die Entropie  $s$  neu gesetzt über die integrierte gibbssche Fundamentalgleichung (2.19). Dadurch wird die Bedingung für  $\frac{\partial s}{\partial t}$  redundant und die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho c}{2\gamma}(Z^+ + Z^-) = -\frac{\rho c^2}{2\gamma} \left( \frac{1}{\rho c} \left( \frac{\partial p^+}{\partial z} - \frac{\partial p^-}{\partial z} \right) + \frac{\partial w^+}{\partial z} + \frac{\partial w^-}{\partial z} \right) \\ s &= c_v \ln \left( p^{1-\gamma} (RT_w)^\gamma \right).\end{aligned}\quad (3.90)$$

Falls die zentrale Formulierung verwendet wird, wird die Bedingung für die zeitliche Änderung des Drucks zu  $\frac{\partial p}{\partial t} = -p \frac{\partial w}{\partial z}$ , was einfach die Relation zwischen Druck- und Volumenänderung bei isothermer Kompression oder Expansion ist.

### 3.8 Anfangsbedingungen

Bei der Simulation sich zeitlich entwickelnder Strömungen (homogene Scherturbulenz und Mischungsschicht) ist die Wahl passender Anfangsbedingungen wichtig, um den transienten Vorgang möglichst kurz zu halten und für eine lange Zeit ein entwickeltes turbulentes Strömungsfeld zu erhalten.

Die Startfelder setzen sich zusammen aus mittlerem Feld und fluktuierendem Feld. Die fluktuierenden Felder werden erzeugt durch den Algorithmus von Schumann [50] zur Erzeugung divergenzfreier Geschwindigkeitsfelder mit vorgeschriebenem Spektrum.

Der Algorithmus ist in der Lage, divergenzfreie Felder mit vorgeschriebenen Spektren und Korrelationen zu erzeugen. Für die vorliegende Arbeit wurden nur isotrope Felder erzeugt. Dieser einfachere Fall wird im Folgenden beschrieben:

Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}(\vec{x})$  wird zuerst im Fourierraum betrachtet:  $\hat{\vec{u}}(\vec{k})$ . Der Raum der Wellenzahlen wird in gleich dicke Kugelschalen um den Ursprung zerlegt. Es wird gezählt, wieviele diskret darstellbare Fouriermoden innerhalb jeder Schale liegen ( $Z_K(k)$ ).

Alle Fourierkoeffizienten mit  $k_x \geq 0$  werden mit Zufallszahlen belegt, die einen Mittelwert von 0 und eine *top hat*-pdf haben, d.h. sie sind statistisch gleichverteilt in einem Intervall  $[-\sqrt{3}\sigma : \sqrt{3}\sigma]$ .  $\sigma$  ist die Standardabweichung der Zufallszahlen.

Um das gewünschte Energiespektrum  $E(k)$  zu erhalten, werden die Koeffizienten modifiziert:  $\hat{\vec{u}}(\vec{k}) \leftarrow \hat{\vec{u}}(\vec{k}) \cdot E(k) / \sqrt{Z_K(k)}$ . Somit enthält jede Kugelschale im Spektralraum kinetische Energie proportional zu  $E(k)$ .

Die Geschwindigkeitsvektoren werden im Spektralraum in Anteile parallel und normal zum Wellenzahlenvektor zerlegt, nur der normale, d.h. der solenoidale Anteil wird behalten:  $\hat{\vec{u}}_s \leftarrow \hat{\vec{u}} - \frac{\vec{k}^*(\vec{k}^* \circ \hat{\vec{u}})}{\vec{k}^* \circ \vec{k}^*}$ . Dabei reduziert sich die Energie der jeweiligen Mode, jedoch sollte dies, da die Geschwindigkeiten zufällig verteilt sind, für jede Wellenzahl  $k$  gleichmäßig erfolgen, so dass die Form des Spektrums erhalten bleibt. Hier ist  $\vec{k}^*$  die modifizierte Wellenzahl des Ableitungsverfahrens. Somit ist die numerisch berechnete Divergenz  $\hat{\vec{u}}_s \circ \vec{k}^* = 0$ . Wird die *upwind*-Formulierung verwendet, so ist die Transferfunktion des Ableitungsverfahrens für die konvektiven Terme zu

verwenden, da die Divergenz in der Summe der konvektiven Terme in  $p$ -Gleichung enthalten ist. Der Imaginärteil von  $\vec{k}^*$  wird nicht berücksichtigt, da bei der Bestimmung der Divergenz eine *upwind*-Richtung keinen Sinn macht.

Für die Koeffizienten mit  $k_x \leq 0$  wird die Bedingung  $\hat{u}(-k_x, k_y, k_z) = \overline{\hat{u}(k_x, k_y, k_z)}$  verwendet, um ein rein reelles Geschwindigkeitsfeld zu erhalten.

Zur Kontrolle werden die Energiespektren und die Divergenz ausgegeben.

Zum Schluss wird das Geschwindigkeitsfeld in den physikalischen Raum transformiert. Für die Mischungsschicht wird das Feld mit einer Fensterfunktion  $e^{-(\frac{z}{2\delta_\theta})^2}$  multipliziert, um es auf den Bereich des mittleren Geschwindigkeitsgradienten zu beschränken. Danach wird das Feld noch einmal im Fourierraum divergenzfrei gemacht.

Zu Beginn einer Simulation werden die Geschwindigkeitsfluktuationen wie gewünscht normiert und zum mittleren Feld addiert. Für die thermodynamischen Größen werden keine Fluktuationen gesetzt.

Im Fall statistisch stationärer Strömung (Kanal) ist das Startfeld weniger entscheidend, da der eingependelte Zustand unabhängig von der Startlösung ist. Außerdem ist der transiente Vorgang kurz im Vergleich zu der Zeit, die zur Sammlung ausreichend vieler Stichproben für die Statistik nötig ist.

Als Startfelder für die Kanalströmung wurden Strömungsfelder anderer Simulationen verwendet, die auf die neuen Rechengitter interpoliert wurden. Um die gewünschten Mach- und Reynoldszahlen zu erhalten, wurden die thermodynamischen Größen jeweils modifiziert. Bei der Verwendung kleinerer Gebiete als dem der vorhandenen Lösung wurde einfach ein Bereich des Strömungsfeldes ausgeschnitten.

### 3.9 Implementierung, Parallelisierung und Performance auf dem Großrechner

Der Strömungslöser ist in der Programmiersprache FORTRAN 90 implementiert. Es wurde jedoch weitgehend auf den Einsatz FORTRAN 90-spezifischer Syntax verzichtet, und stattdessen herkömmlich wie in FORTRAN 77 programmiert, da der Compiler des eingesetzten Großrechners insbesondere bei der Verwendung von Pointern und Datenstrukturen Probleme mit der Optimierung hat.

Um die erforderlichen großen Rechengitter (bis zu 134 Mio. Punkte) bewältigen zu können, muss das Programm parallel auf mehreren Prozessoren arbeiten. Diese Parallelisierung erfolgt durch eine Gebietszerlegung in den periodischen Richtungen ( $x$  und  $y$ ). Jedem Prozessor ist ein Gebietsteil zugewiesen. Die Prozessoren kommunizieren mittels MPI. Sowohl ein *chained*-Algorithmus, bei dem die Prozessoren über *ghost layer* kommunizieren, als auch ein *transpose*-Algorithmus sind implementiert, um Berechnungen durchzuführen, die einen Datenaustausch zwischen den Prozessoren erfordern (Ableitungsbildung und Filterung).

Der Code hat einen Bedarf an Rechenleistung von  $6.5 \frac{kFlop}{Zeitschritt \cdot Punkt}$  und einen Bedarf an Hauptspeicher von  $1.0 \frac{kByte}{Punkt}$ . Auf dem Großrechner HITACHI SR8000 liegt die erreichte *performance* bei 200 bis 300  $\frac{MFlops}{Prozessor}$ . Verglichen mit der vom Leib-

niz Rechenzentrum in Testanwendungen erreichten *performance* von  $\approx 450 \frac{MFlops}{Prozessor}$  ist dies ein akzeptabler Wert, auch wenn er weit unter den  $1200 \frac{MFlops}{Prozessor}$  liegt, die von LINPACK-Routinen erreicht werden.

Der Hauptspeicherbedarf ist sehr hoch. An jedem Punkt sind sechs Variablen in doppelter Genauigkeit, d.h. à *64Bit* gespeichert. Somit hat der Code einen Speicherbedarf von 21 Feldern pro Variable. Hier ist sicher noch etwas Optimierung möglich. Da jedoch nicht der Hauptspeicherbedarf, sondern die notwendige hohe Rechenleistung der begrenzende Faktor ist, wurde dieses Optimierungspotential nicht voll ausgeschöpft.

Eine genaue Beschreibung der verwendeten Algorithmen und ihrer Implementierung findet sich in Foysi [15].

### 3.10 Validierung

Ob die Implementierung korrekt erfolgte, wurde zum einen separat für die einzelnen Ableitungsverfahren getestet, zum anderen wurde die gesamte Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen überprüft.

Für die nicht-periodischen Ableitungsverfahren wurden als Testfunktion Polynome gewählt. Bei einem Verfahren *n*ter Ordnung zur Bildung der ersten Ableitung muss der Fehler der diskreten Ableitung für Polynome *n*ten Grades im Bereich des Rundungsfehlers liegen, das heißt auf die letzten Stellen beschränkt sein. Bei Verfahren zur Bestimmung der zweiten Ableitung gilt dies für Polynome (*n* + 1)ten Grades. Ein Filter, dessen erste bis *n*te Momente verschwinden, lässt Polynome *n*ten Grades unverändert.

Im Falle periodischer Ableitungsverfahren wurde als Testfunktion ein Feld mit Null belegt, nur der erste Punkt mit dem Wert 1. Als Gebietslänge wird *n*, die Zahl der Punkte, gewählt. Die diskrete Fouriertransformation, wie sie in dem numerischen Rechenprogramm Octave implementiert ist, ergibt Koeffizienten von 1 für jede Wellenzahl, es gilt also

$$u_m = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} 1 \cdot e^{il \frac{2\pi \cdot (m-1)}{n}} \quad (3.91)$$

$$u'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{il \frac{2\pi}{n}}_{ik} e^{il \frac{2\pi \cdot (m-1)}{n}} \quad (3.92)$$

$$\widetilde{u'_m} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} ik^* e^{il \frac{2\pi \cdot (m-1)}{n}} . \quad (3.93)$$

Man sieht, dass die Koeffizienten der fouriertransformierten Ableitung  $ik^*$  entsprechen. Da  $\Delta x = 1$  gewählt wurde, ist  $k^* \cdot \Delta x = \hat{u}'_l/i$  über  $k \cdot \Delta x = l \frac{2\pi}{n}$  die Transferfunktion des Ableitungsverfahrens. Für die zweite Ableitung gilt  $k^{2*} \cdot \Delta x^2 = -\hat{u}''_l$ , für Filter  $T = (\hat{u}_l)_{gefiltert}$ . Zur Überprüfung der Verfahren wird die Testfunktion mit den im Strömungscode eingesetzten Routinen abgeleitet bzw. gefiltert. Die resultierenden Werte werden mit Octave fouriertransformiert, um die Transferfunktion zu

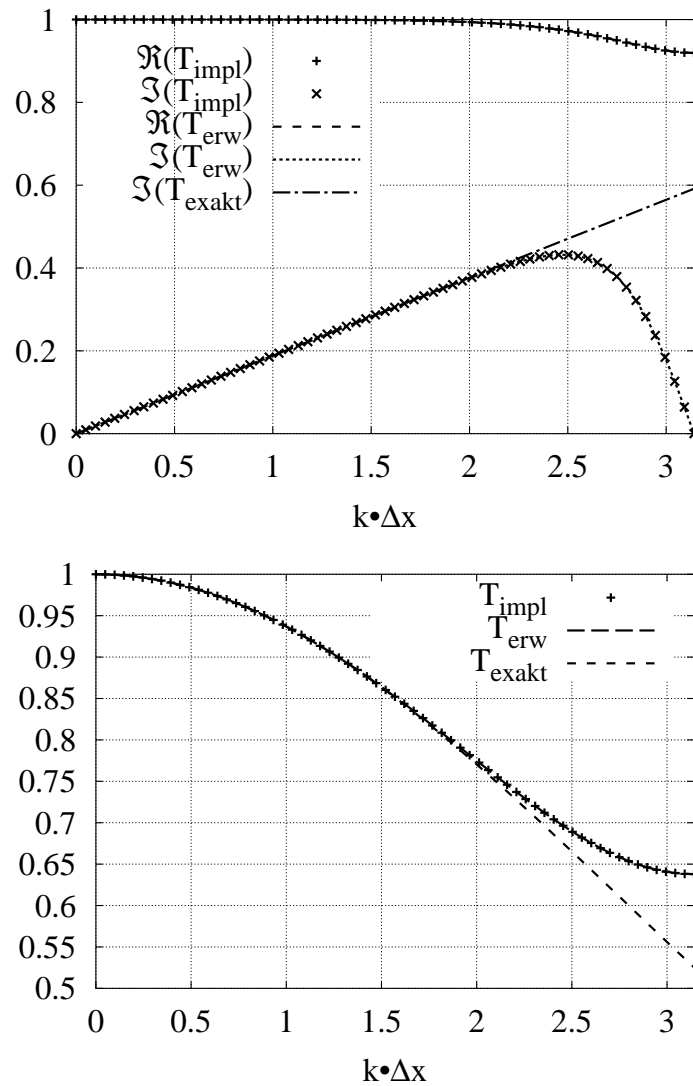


Abbildung 3.10: Transferfunktionen für einen Zeitschritt. Oben: Konvektionsgleichung; unten: Diffusionsgleichung

erhalten. Diese wird dann mit der analytisch bestimmten Transferfunktion verglichen. Die Unterschiede, beispielhaft für drei Ableitungsverfahren bei  $n = 128$ , sind:

	max. Fehler Realteil	max. Fehler Imaginärteil
CULD	9.8810e-15	1.3156e-14
LELETRI	6.2728e-15	5.5646e-15
LELETRI2	9.7700e-15	1.3841e-14

Der Fehler ist also von der Größenordnung der Maschinengenauigkeit, die Ableitungen sind korrekt implementiert.

Dieses Verfahren kann auch zur Überprüfung der gesamten Implementierung inklusive Zeitintegration verwendet werden. Startet man mit einem Druckfeld ohne Gradienten und wählt man eine niedrige Machzahl, so dass Reibungswärme keine

nennenswerten Temperatur- und Dichteunterschiede erzeugt, so wird die Impulstransportgleichung zur Konvektions-Diffusionsgleichung. Für den Fall einer gleichmäßigen Strömung in  $x$ -Richtung, in der Fluktuationen der Quergeschwindigkeit  $v$  transportiert werden, gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (3.94)$$

$$\approx -u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.95)$$

$$i\omega^*(k) = iuk^*(k) - \frac{\mu}{\rho} k^2 * (k) \quad (3.96)$$

$$T(k)_{erwartet} = 1 + i\omega^*(k)\Delta t - \frac{1}{2!}(\omega^*(k)\Delta t)^2 - \frac{i}{3!}(\omega^*(k)\Delta t)^3 \quad (3.97)$$

$$T(k)_{ideal} = e^{iuk\Delta t - \frac{\mu}{\rho} k^2 \Delta t} \quad (3.98)$$

Das Startfeld von  $v$  wird folgendermaßen belegt: Eins am ersten Punkt, Null an allen anderen. Somit sind alle Fourierkoeffizienten dieses Feldes gleich eins. Die Fourierkoeffizienten des Feldes nach einem Zeitschritt sind dann die Übertragungsfunktion  $T_{implementiert}$ , die bei korrekter Implementierung  $T_{erwartet}$  entsprechen muss. Der Fall reiner Konvektion lässt sich mit  $\mu = 0$  exakt darstellen. Im Fall reiner Diffusion bleibt stets eine leichte Veränderung der Viskosität durch die Reibungswärme. Diese relative Veränderung ist proportional zu  $(v'^2/c^2)^{0.7}$ . Eine Vergöberung der Schallgeschwindigkeit senkt also diese Veränderung, allerdings ergibt sich dann auch ein kleinerer Zeitschritt, so dass sich das Feld in einem Zeitschritt kaum mehr verändert.

Beispielhaft werden die Ergebnisse der Überprüfung des *upwind*-Verfahrens mit den Ableitungen CULD, LELETRI und LELETRI2 gezeigt. Als Startfeld und Parameter wurden verwendet:

nur Konvektion:

$$u = 1, v = (1, 0 \dots 0), n = 128, c = 1.0, \mu = 0, CFL = 0.18827$$

nur Diffusion:

$$u = 0, v = (1, 0 \dots 0), n = 128, \nu = 1/1400.0 = 7.1429 \cdot 10^6, c = 10^6, C_d = 0.065214$$

Die Kurven der erwarteten Transferfunktion und des Ergebnisses der vollen Implementierung liegen übereinander, siehe Abb. 3.10. Der maximale Fehler ist von der Größenordnung der Maschinengenauigkeit:

	max. Fehler Betrag	max. Fehler Phase
Konvektion	1.6653e-15	1.8319e-15
Diffusion	2.5535e-15	1.1047e-15

Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass beliebige Codes untersucht werden können, ohne in den Quellcode eingreifen zu müssen. Es muss nur möglich sein, das Startfeld zu definieren und einen Zeitschritt zu rechnen.

# Kapitel 4

## Untersuchte Strömungsfälle

Alle untersuchten Strömungsfälle sind idealisierte Strömungen, die aber geeignet sind, grundlegende Mechanismen, die auch in komplexeren Situationen auftreten, zu untersuchen. In diesem Kapitel werden ihre wesentlichen physikalischen Merkmale und Ergebnisse der Untersuchungen anderer Autoren erläutert.

### 4.1 Homogene turbulente Scherströmung

Homogene turbulente Scherströmung hat folgende Eigenschaften: Die mittlere Strömung bewegt sich nur in eine Richtung mit einem konstanten Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung ( $\vec{u} = (S \cdot z, 0, 0)$ ), wobei  $S = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  die Scher-rate ist, s. Abb.4.1. Die Strömung ist in alle Richtungen unendlich weit ausgedehnt. Statistische Größen sind unabhängig vom Ort ( $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = 0$ ), natürlich mit Ausnahme der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$ . Dies ist die einfachste Strömungskonfiguration mit Produktion von turbulenter kinetischer Energie. Diffusion tritt nicht auf, da die statistischen Größen nicht vom Ort abhängen. Im inkompressiblen Fall ist die einzige Senke turbulenter kinetischer Energie die viskose Dissipation  $\varepsilon$ . Sie wiegt aber die Produktion  $P$  nicht auf, so dass es zu einem stetigen Wachstum der tur-

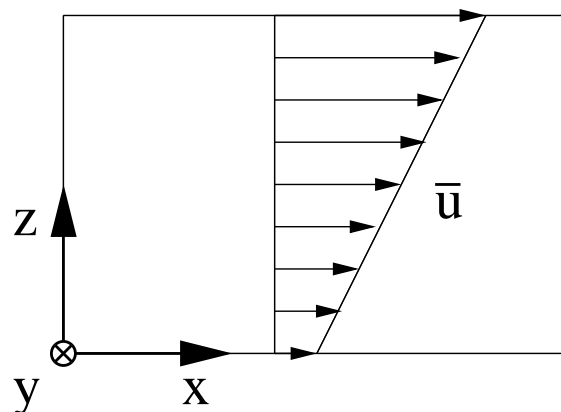


Abbildung 4.1: Homogene Scherströmung

bulenten Energie kommt (Pope [39]). Damit einher geht ein Anwachsen der integralen Längenmaße. Das einzige Längenmaß, das sich unabhängig vom aktuellen Zustand der Turbulenz bilden lässt, ist  $\sqrt{\nu/S}$ . Es ist proportional zum taylorschen Mikromaß, s.u. Da kein weiteres Längenmaß existiert, gibt es keine Begrenzung für die integralen Längenmaße, sie wachsen theoretisch ins Unendliche. Somit wird kein stationärer Zustand erreicht, jedoch wird die Strömung nach einer transienten Phase selbstähnlich: Statistische Werte werden bei Normierung mit  $S$  und  $K$  zeitunabhängig, wie Experimente und Simulationen zeigen (Pope [39], Rogers [42] Tavoularis [55]).

Aus der Annahme der Selbstähnlichkeit folgt, wieder für inkompressible Strömungen,

$$\varepsilon \sim SK \quad (4.1)$$

$$P \sim SK \quad (4.2)$$

und somit auch

$$\frac{dK}{dt} = P - \varepsilon \sim SK. \quad (4.3)$$

Die Proportionalitätskonstanten in diesen Beziehungen sind das Verhältnis zwischen turbulenter Zeitskala  $\frac{K}{\varepsilon}$  und Zeitskala der mittleren Scherung  $\frac{1}{S}$ , genannt dimensionslose Scherrate

$$S^* = \frac{SK}{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

die Scherkomponente des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen  $a_{ij} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2\rho K} - \frac{\delta_{ij}}{3}$

$$a_{13} = -\frac{P}{2KS} \quad (4.5)$$

und die Wachstumsrate

$$\Lambda = \frac{dK}{dt} / (SK). \quad (4.6)$$

Aus der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie lässt sich folgende Relation zwischen diesen Größen herleiten:

$$\Lambda = -2a_{13} - \frac{1}{S^*} \quad (4.7)$$

Die zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie ist

$$K = K_0 \cdot e^{\Lambda S(t-t_0)}. \quad (4.8)$$

Die dimensionslose Zeit  $t \cdot S$  wird auch totale Scherung genannt. Sie beschreibt, um wieviele Seitenlängen sich die obere Seite eines anfänglich ungescherten Quadrats relativ zur unteren Seite verschoben hat.

Die turbulenten Längenmaße integrales Maß, Taylor-Mikromaß und Kolmogorov-Skala verhalten sich folgendermaßen:

$$l = \frac{q^3}{\varepsilon} = \frac{2S^*}{S} \sqrt{2K_0} \cdot \exp\left(\frac{\Lambda S}{2}(t - t_0)\right) \quad (4.9)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\nu K}{\varepsilon}} = \sqrt{2S^* \frac{\nu}{S}} \quad (4.10)$$

$$\eta_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3 S^*}{S K_0}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(-\frac{\Lambda S}{4}(t - t_0)\right) \quad (4.11)$$

$q$  ist das turbulente Geschwindigkeitsmaß  $\sqrt{2K}$ . Da die Verhältnisse der Längenmaße wachsen, steigt auch die turbulente Reynoldszahl kontinuierlich:

$$Re_t = \frac{q^4}{\nu \varepsilon} = \frac{4S^*}{\nu S} K_0 \cdot \exp(\Lambda S(t - t_0)) \quad (4.12)$$

Hier zeigt sich die Herausforderung für eine direkte numerische Simulation: Im Laufe der Zeit wächst das integrale Längenmaß, während die Kolmogorov-Länge kleiner wird. Es steigen also einerseits die Anforderungen an die Größe des Berechnungsgebietes (Boxgröße) als auch an die Feinheit des Rechengitters. Daher sind mit begrenzten Rechnerressourcen nur begrenzte Zeiträume simulierbar.

In kompressibler Strömung existiert als zusätzliche Größe die mittlere Schallgeschwindigkeit  $\bar{c}$ . Sie ist selbst schon ein Geschwindigkeitsmaß, außerdem kann ein zusätzliches Längenmaß  $\bar{c}/S$  gebildet werden. Die zugehörigen Kennzahlen sind die turbulente Machzahl  $M_t = \frac{\sqrt{2K}}{\bar{c}}$  und die Gradientenmachzahl  $M_g = \frac{Sl}{\bar{c}}$ .

Wegen dieser zusätzlichen Skalen ist denkbar, dass das Anwachsen des Längenmaßes und der kinetischen Energie beschränkt ist. So ging Breidenthal [8] davon aus, dass das Längenmaß in Richtung des mittleren Gradienten maximal die Größenordnung von  $\bar{c}/S$  erreicht und erklärte mit dieser Annahme den Rückgang der Wachstumsrate von Mischungsschichten bei steigender Machzahl, s. Abschnitt 4.2. Es ist wahrscheinlich, dass die oben für inkompressible Strömungen eingeführten Konstanten jetzt von den beiden Machzahlen  $M_t$  und  $M_g$  abhängen. Dies leuchtet unmittelbar ein, da in der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie bei höheren Machzahlen zwei zusätzliche Terme auftreten, die Druckdilatation  $\overline{p'd'}$  und die dilatationale Dissipation  $\varepsilon_d$ . Auch Kompressibilitätseinflüsse auf die Anisotropie der Reynoldsspannungen über veränderte Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelationen sind möglich. Sind die Größen  $S^*$ ,  $a_{13}$  und  $\Lambda$  abhängig von den Machzahlen, so ist auch unabhängig von einem möglichen Sättigungseffekt keine Selbstähnlichkeit mehr zu erwarten, da z.B. ein Wachstum der turbulenten kinetischen Energie eine steigende turbulente Machzahl zur Folge hat.

Experimentell wurden nur Fälle sehr niedriger Machzahlen untersucht. Tavoularis & Karnik präsentieren in ihrer Veröffentlichung [55] eine Reihe von eigenen Experimenten und solchen fremder Autoren. Aus diesen ergeben sich folgende Mittelwerte für charakteristische Größen <sup>1</sup>:

$$\varepsilon/P = 0.68 \pm 0.06 \quad (4.13)$$

---

<sup>1</sup>Außerdem gibt es eine Klasse von Experimenten mit  $P \approx \varepsilon$ . Dies kann jedoch ein transienter



$$a_{11} = 0.17 \pm 0.04 \quad (4.14)$$

$$a_{22} = -0.06 \pm 0.03 \quad (4.15)$$

$$a_{33} = -0.11 \pm 0.02 \quad (4.16)$$

$$a_{13} = -0.16 \pm 0.01 \quad (4.17)$$

Daraus resultieren <sup>2</sup>:

$$S^* = \frac{SK}{\varepsilon} = \frac{P}{-2 \cdot a_{13} \cdot \varepsilon} = 4.60 \pm 0.5 \quad (4.18)$$

$$\Lambda = -2a_{13}(1 - \varepsilon/P) = 0.10 \pm 0.02 \quad (4.19)$$

Experimente für kompressible homogene Scherturbulenz sind wahrscheinlich sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich, wie folgende Abschätzung des notwendigen Geschwindigkeitsunterschieds im Windkanal zeigt. In erster Näherung wurde angenommen, dass die inkompressiblen charakteristischen Größen unverändert gelten. Der Geschwindigkeitsunterschied ist

$$\Delta U = S \cdot L. \quad (4.20)$$

$L$  ist die vertikale Abmessung des Messbereichs, bei Tavoularis & Karnik war  $L = 12 l_0$ . Somit gilt

$$\Delta U = S \cdot 12 \cdot l_0 = 12 \cdot 2 \cdot S^* \sqrt{2K_0} \approx 110.4 \cdot M_{t0} \cdot c. \quad (4.21)$$

Möchte man also eine Strömung mit einer anfänglichen turbulenten Machzahl von 0.3 untersuchen, beträgt der Geschwindigkeitsunterschied im Windkanal das 33-fache der Schallgeschwindigkeit. Dies bei homogener Temperatur und Turbulenzintensität zu bewerkstelligen, dürfte unmöglich sein.

Bei Tavoularis & Karnik [55] war der maximale Wert für die anfängliche turbulente Machzahl  $M_{t0} = 0.009$ .

Direkte numerische Simulationen kompressibler homogener Scherturbulenz führte zuerst Feiereisen [12] durch. Er verwendete aufgrund der damals niedrigeren Kapazitäten der Großrechner relativ kleine Gitter von  $64^3$  Punkten. Turbulente Machzahlen bis 0.3 wurden untersucht. Er stellte nur geringe Kompressibilitätseffekte fest, hauptsächlich zusätzliche Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen in Richtung des Geschwindigkeitsgradienten, die mit Schallwellen in dieser Richtung erklärt werden. Ebenfalls wurde eine leichte Modifikation der Druck-Scher-Korrelation festgestellt. Wegen der stetig wachsenden Längenmaße waren aufgrund der geringen Punktezahl nur Simulationen kurzer Zeiträume (bis  $t \cdot S = 7$ ) möglich.

Spätere Simulationen von Blaisdell [7] und Sarkar [47] verwendeten größere Gitter mit bis zu  $192^3$  bzw.  $128^3$  Punkten. Daher war es möglich, die Simulationen

---

Vorgang sein, oder aber bedingt durch die Abmessungen des Experiments. In den von Tavoularis & Karnik durchgeführten Experimenten beträgt in allen Fällen mit  $P \approx \varepsilon$  das anfängliche integrale Längenmaß, bestimmt durch die Maschenweite des Gitters im Windkanal, bereits ein Sechstel der vertikalen Abmessung der Messstrecke. In den Fällen mit  $P > \varepsilon$  ist dies höchstens ein Zwölftel.

<sup>2</sup>unter Verwendung des gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:  $c = f(a, b)$ ;  $a = \tilde{a} \pm \Delta a$ ;  $b = \tilde{b} \pm \Delta b \Rightarrow c = f(\tilde{a}, \tilde{b}) \pm \sqrt{(\Delta a \frac{\partial f}{\partial a})^2 + (\Delta b \frac{\partial f}{\partial b})^2}$

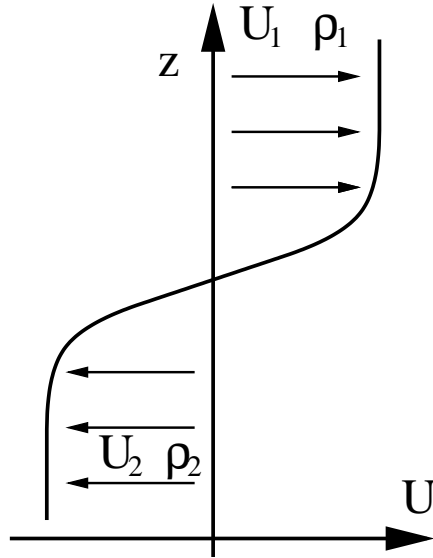


Abbildung 4.2: Mischungsschicht

länger durchzuführen. Es wurde eine deutliche Reduktion der Wachstumsrate turbulenter kinetischer Energie bei höherer Machzahl festgestellt. Beide Autoren begründeten dies mit den expliziten Kompressibilitätstermen  $\epsilon_d$  und  $\overline{p'd'}$  in der Transportgleichung für  $K$ . Beide Terme wirken als Senke turbulenter kinetischer Energie. Der Erste, der kompressible Anteil der homogenen Dissipationsrate, wandelt turbulente Energie durch viskose Effekte in Wärme um, der Zweite, der Druckdilatationsterm beschreibt den Austausch zwischen kinetischer und innerer Energie durch reversible Arbeit. Dass er in homogener Scherturbulenz im Mittel als Senke turbulenter kinetischer Energie wirkt, wurde von Sarkar [45] gezeigt. Bei höheren Machzahlen traten lokal schwache Stöße auf, *shocklets* genannt. Blaisdell [6] stellte fest, dass sich Scherströmungen unabhängig von den akustischen Anfangsbedingungen entwickeln, im Gegensatz zu Strömungen ohne Geschwindigkeitsgradienten.

In späteren Simulationen untersuchte Sarkar getrennt den Einfluss von turbulenter Machzahl  $M_t$  und Gradienten-Machzahl  $M_g$  [46]. Er beobachtete, dass eine Erhöhung einer der Machzahlen jeweils einen Rückgang der Wachstumsrate bewirkt, der Effekt jedoch bei der Gradientenmachzahl stärker ist. Dieser starke Rückgang ist nicht mehr durch die expliziten Kompressibilitätsterme zu erklären, vielmehr senkt eine Modifikation der Turbulenzstruktur das Wachstum der Turbulenz: Die Schwankungsbewegungen konzentrieren sich in Richtung der mittleren Strömung, Schwankungen quer dazu werden stark gedämpft. Da die Produktion von der Korrelation von Längs- und Querschwankungen abhängt ( $P = -\widetilde{u''w''} \cdot S$ ), sinkt sie.

Die Transportgleichung der Dissipationsrate wurde in keiner dieser Studien untersucht, was für die vorliegende Arbeit motivierend war.

## 4.2 Turbulente Mischungsschicht

Ein bereits etwas praxisnäherer Strömungsfall als die homogene Scherströmung ist die Vermischung zweier Ströme unterschiedlicher Geschwindigkeit, die turbulente Mischungsschicht. Im Fernfeld sind die Ströme ungestört, dort werden die Strömungsgrößen mit den Subskripten 1 und 2 für die untere bzw. obere Strömung bezeichnet, s. Abb 4.2. Das Geschwindigkeitsfeld in der Mischzone einer noch nicht turbulenten Mischungsschicht weist einen Wendepunkt auf und ist daher, unabhängig von der Reynoldszahl, instabil. Auch bei hoher Reynoldszahl dominieren große kohärente Strukturen das Strömungsfeld, die den *rollers*, die sich aus der primären Instabilität bilden, ähnlich sind (Brown & Roshko, [9]).

Experimentell untersucht wird meist die räumliche Mischungsschicht. Hier haben  $U_1$  und  $U_2$  die gleiche Richtung, nur unterschiedlichen Betrag. Charakteristische Geschwindigkeiten sind in diesem Fall die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta U = U_2 - U_1$  und die Konvektionsgeschwindigkeit  $U_c$  der kohärenten Strukturen. Man erhält  $U_c$  aus der Annahme, dass ein Beobachter, der sich mit  $U_c$  bewegt, zwischen zwei *rollers* einen Sattelpunkt sieht, d.h. in seinem Koordinatensystem haben der obere und der untere Strom gleichen Totaldruck. Unter dieser Annahme ist (Brown & Roshko, [9])

$$U_c = \frac{1 + U_2/U_1 \sqrt{\rho_2/\rho_1}}{1 + \sqrt{\rho_2/\rho_1}} \cdot U_1 = \frac{U_1 \sqrt{\rho_1} + U_2 \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}. \quad (4.22)$$

Im Falle  $\rho_2 = \rho_1$  ist dies das arithmetische Mittel von  $U_1$  und  $U_2$ . Charakteristisches Längenmaß ist die Dicke der Mischungsschicht. Hier existieren unterschiedliche Definitionen. Übliche Maße sind:

- Die visuelle Dicke  $\delta_{viz}$ . Hierzu ist eine Strömungsvisualisierung nötig. Die Schichtdicke ist dann der Abstand zwischen dem, was eine Person subjektiv als Ränder der Mischungsschicht bezeichnet. Dies ist gerechtfertigt, wenn nur Visualisierungen vorliegen. Zur Auswertung von Simulationen gibt es jedoch geeignetere Größen.
- Die Wirbelschichtdicke  $\delta_\omega = \Delta U / \left( \frac{d\tilde{u}}{dz} \right)_{max}$ . Ihr Betrag ist üblicherweise halb so groß wie der von  $\delta_{viz}$  (Papamoschou & Roshko [37]). Dieses Maß hat den Vorteil, dass es eindeutig aus Simulations- und Messdaten berechnet werden kann. Allerdings hängt der Maximalwert von  $\frac{d\tilde{u}}{dz}$  von der Güte der Statistik ab. Ist das mittlere Strömungsprofil verrauscht, ist der maximale Gradient höher.
- Frei von diesen Nachteilen sind integrale Maße. Das Üblichste ist die Impulsverlustdicke  $\delta_\theta$ . Vreman *et al.* [59] definiert sie wie folgt:

$$\delta_\theta = \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho} (U_1 - \tilde{u})(\tilde{u} - U_2) dz. \quad (4.23)$$

$\rho_0$  ist der Mittelwert der Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  der beiden sich mischenden Ströme. Das Verhältnis zwischen Wirbelschichtdicke und Impulsverlustdicke  $D_\omega$  beträgt typischerweise 5 in inkompressiblen Strömungen ohne Dichtegradienten (Pantano & Sarkar [36]).

Wählt man ein Koordinatensystem, in dem  $U_1 = 0$  ist, ist die Impulsverlustdicke

$$\delta_\theta = \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho} (\Delta U \tilde{u} - \tilde{u} \tilde{u}) dz. \quad (4.24)$$

Ersetzt man  $\rho_0$  durch  $\rho_\infty$  und  $\Delta U$  durch  $U_\infty$ , erhält man Schlichtings Definition der Impulsverlustdicke von Grenzschichten [49]. Die Impulsverlustdicke in Grenzschichten ist die Differenz zwischen der Dicke, die den Verlust von Impulsstrom, verglichen mit der ungestörten Außenströmung, kennzeichnet und der Verdrängungsdicke  $\delta^*$ :

$$\delta_\theta = \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_0 \Delta U^2 - \bar{\rho} \tilde{u}^2) dz - \frac{1}{\rho_0 \Delta U} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_0 \Delta U - \bar{\rho} \tilde{u}) dz \quad (4.25)$$

Mit der Schichtdicke kann eine Reynoldszahl definiert werden:

$$Re_\delta = \frac{\rho_0 \Delta U \delta}{\mu_0} \quad (4.26)$$

$\rho_0$  ist der Mittelwert der Dichtewerte im Fernfeld  $(\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\mu_0$  der Mittelwert der Viskositäten.

In Experimenten wurde beobachtet, dass das Wachstum der Schichtdicke bei turbulenter Strömung linear ist:

$$\frac{d\delta}{dx} = konst. \quad (4.27)$$

Dies ist konsistent mit der Annahme, dass die Mischungsschicht sich selbstähnlich entwickelt. Profile der gemittelten Geschwindigkeit normiert mit  $\Delta U$  und der Reynoldsspannungen normiert mit  $\Delta U^2$ , aufgetragen über die selbstähnliche Koordinate  $\zeta = z/\delta$ , sind unabhängig von  $x$  (s. Pope [39]).

Wählt man ein sich mit  $U_c$  bewegendes Koordinatensystem  $x'-t'$ , geht die räumliche in eine zeitliche Entwicklung über:

$$\frac{d\delta}{dt'} = \frac{d\delta}{dx} \cdot U_c \quad (4.28)$$

Nimmt man an, dass das Wachstum der Mischungsschicht unabhängig von der Reynoldszahl ist, was sowohl für nicht-viskose Instabilitäten als auch für große Reynoldszahlen gerechtfertigt ist, stehen im bewegten Koordinatensystem nur noch ein Längenmaß –  $\delta$  – und ein Zeitmaß –  $\delta/\Delta U$  – zur Verfügung. Daher liegt es nahe, zu schreiben (Papamoschou & Roshko, [37])

$$\delta = \dot{\delta} \Delta U \cdot t. \quad (4.29)$$

Brown & Roshko [9] und Papamoschou & Roshko [37] zeigten, dass die normierte zeitliche Wachstumsrate  $\dot{\delta}$ , bei Wahl der Konvektionsgeschwindigkeit nach Gl. (4.22), für inkompressible Strömungen universell ist, auch wenn es einige Ausreißer

in den Daten gibt. Dies gilt auch für die Mischung zweier Ströme unterschiedlicher Dichte.

Der Mittenbereich des zeitlichen Problems zeigt Ähnlichkeit zu homogener Scherturbulenz. Der Geschwindigkeitsgradient ist dort näherungsweise konstant. Die Anisotropie der Reynoldsspannungen ist ähnlich. Rogers & Moser [43] erhielten in ihrer numerischen Simulation Werte von  $a_{11} = 0.08$ ,  $a_{22} = 0.00$ ,  $a_{33} = -0.08$ ,  $a_{13} = -0.16$ . Für die Kreuzkorrelation  $a_{13}$  stimmt der Wert mit dem von Tavoularis & Karnik [55] für homogene Scherturbulenz gefundenen überein. Die anderen Reynoldsspannungen zeigen qualitativ gleiches Verhalten:  $a_{11} > a_{22} > a_{33}$ . Das Verhältnis von Dissipation zu Produktion geben Rogers & Moser mit  $1/1.4 = 0.71$  an, was mit dem Wert  $0.68 \pm 0.06$  von Tavoularis & Karnik gut übereinstimmt. Nach Vreman *et al.* [59] kann das Wachstum der Mischungsschicht als Analogon zum Wachstum der turbulenten kinetischen Energie gesehen werden: Die Zeitableitung der Impulsverlustdicke, definiert in Gl. (4.23), ist

$$\frac{d\delta_\theta}{dt} = -\frac{U_1 U_2}{\rho_0 \Delta U^2} \int \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dz + \frac{U_1 + U_2}{\rho_0 \Delta U^2} \int \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} dz - \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u})}{\partial t} dz. \quad (4.30)$$

Integriert man von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so werden, wegen Massen- und Impulserhaltung, die ersten beiden Terme in obiger Gleichung zu Null. Der letzte Term ist die zweifache gesamte Änderung der kinetischen Energie des mittleren Feldes. Unter Verwendung der Transportgleichung für die kinetische Energie des mittleren Feldes kann man schreiben

$$\frac{d\delta_\theta}{dt} = \frac{2}{\rho_0 \Delta U^2} \int \left( -\overline{\rho u'' w''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \overline{\tau_{xz}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) dz. \quad (4.31)$$

Der erste Term im Integral ist die Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie, der zweite die viskose Dissipation des mittleren Feldes. Letztere kann in turbulenten Strömungen vernachlässigt werden. Somit ist das Wachstum der Mischungsschicht proportional zur räumlich integrierten Produktion turbulenter kinetischer Energie. Im Gegensatz zu homogener Scherturbulenz, in der die turbulente kinetische Energie exponentiell wächst, wächst die gesamte turbulente kinetische Energie in der Mischungsschicht linear in der Zeit. Dies kann erklärt werden durch Diffusion der Energie vom Mittenbereich, in dem die Produktion maximal ist, in die Außenströmung. Das Maximum der turbulenten kinetischen Energie bleibt konstant, mit dem Wachstum der Schicht wächst nur das turbulente Gebiet und gleichzeitig sinkt der Gradient der mittleren Strömung. Dies verhindert den ‘‘Zinseszins’’-Mechanismus, wie er in homogener Scherturbulenz vorliegt. Dort steigt mit der erzeugten kinetischen Energie die Reynoldsspannung, die wiederum neue kinetische Energie produziert. Ein weiterer Unterschied zu homogener Scherturbulenz dürfte die Art der dominanten Strukturen sein. Während in der Mischungsschicht *rollers* dominieren, sind dies in homogener Scherturbulenz Hufeisen- bzw. Haarnadelwirbel (Rogers & Moin [42]).

Wesentlicher Kompressibilitätsparameter sind nicht die Machzahlen der einzelnen Ströme, sondern die Machzahl, mit der sich die kohärenten Strukturen relativ

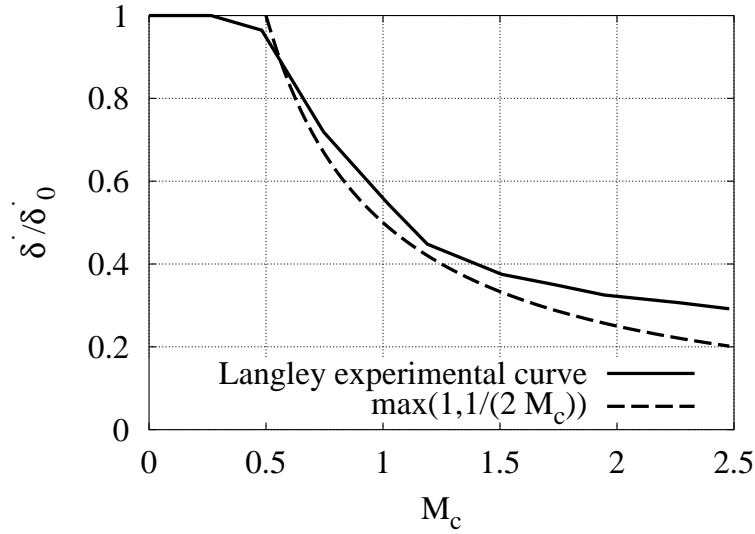


Abbildung 4.3: Langley experimental curve [58]

zur ungestörten Strömung bewegen, genannt konvektive Machzahl  $M_c$ . Sie ist für beide Ströme separat definiert:

$$M_{c1} = \frac{U_c - U_1}{c_1} \quad (4.32)$$

$$M_{c2} = \frac{U_2 - U_c}{c_2}$$

Haben die Gase in beiden Strömen den gleichen Isentropenexponenten, gilt (Brown & Roshko [9])

$$M_c = M_{c1} = M_{c2} = \frac{\Delta U}{c_1 + c_2}. \quad (4.33)$$

Der Haupteffekt von Kompressibilität ist ein starker Rückgang der Wachstumsrate. Die sogenannte “Langley experimental curve” [58] zeigt, als gesammeltes Resultat vieler Experimente, das Verhältnis der Wachstumsrate kompressibler Mischungsschichten zur Wachstumsrate der entsprechenden inkompressiblen Strömung  $\delta(M_c)/\delta(M_c = 0)$ , s. Abb. 4.3. Die Wachstumsrate fällt ab  $M_c = 0.3$  leicht, ab  $M_c = 0.5$  (d.h. im Falle von Strömen gleicher Gase mit gleicher Temperatur und Dichte ist  $\Delta U = c$ ) stark ab. Bei großen Machzahlen nähert sie sich einem Wert von ungefähr einem Viertel der Wachstumsrate der entsprechenden inkompressiblen Mischungsschicht an.

Papamoschou & Roshko [37] versuchten den Rückgang der Wachstumsrate mit einer Analogie zur linearen Instabilität der Wirbelschicht zu erklären. Dort geht die Wachstumsrate ebenfalls mit steigender Machzahl zurück. Die Instabilitätsmoden fallen von der Schicht weg exponentiell ab. Die Rate dieses Abfalls wird schwächer, wenn die Machzahl steigt, um schließlich bei der Machzahl, bei der die Wirbelschicht stabil wird, zu Null zu werden. Die Störung strahlt dann unverstärkt in die Umgebung ab. Eine Störung wirkt also auf einem immer größeren Gebiet und wird

damit weniger effektiv. Effekte von Stößen und Expansionswellen scheinen nicht die Ursache zu sein, da die Reduzierung der Wachstumsrate schon bei  $M_c = 0.3$  einsetzt.

Breidenthal [8] geht von einer turbulenten Mischungsschicht aus. Seine Annahme ist, dass Strukturen, die so groß sind, dass während einer Umdrehungszeit aufgrund der begrenzten Schallgeschwindigkeit keine Information mehr innerhalb der Struktur ausgetauscht werden kann, nicht effektiv zur Mischung und damit zum Wachstum der Mischungsschicht beitragen. Es wird ein *sonic eddy* definiert, der als größte wirksame Struktur betrachtet wird. Seine charakteristische Abmessung ist  $\lambda^* = c/\frac{\Delta U}{\delta} = \frac{1}{2M_c}\delta$ . Innerhalb seiner Abmessung ist also der Unterschied in der mittleren Geschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit. Aus dieser Annahme folgert Breidenthal, dass die Wachstumsrate für  $M_c < 0.5$  konstant ist, und für  $M_c > 0.5$  auf einen deutlich niedrigeren Wert springt, der bei weiter steigender Machzahl unverändert bleibt. Dies erscheint fraglich. Zwar zeigt die “Langley experimental curve” bei  $M_c = 0.5$  einen starken, jedoch keinen sprunghaften Abfall. Nach Breidenthals Modellannahme wird, bei  $M_c$  leicht über 0.5, die allergrößte Struktur, deren Längenmaß die Schichtdicke ist, ineffektiv. Nur unwesentlich kleinere Strukturen bleiben jedoch weiterhin effektiv. Warum dies die Wachstumsrate in einem Sprung und nicht kontinuierlich senken soll, ist nicht einleuchtend. Vielleicht muss man Breidenthals Idee anders weiterdenken: Die Wachstumsrate ist proportional zur integrierten Produktion von  $K$ . Nach dem Wirbelviskositätsmodell ist die Produktionsrate

$$P = C_\mu \cdot l \cdot \sqrt{2K} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 . \quad (4.34)$$

Nach Breidenthal haben die effektiven Strukturen die Abmessung  $\delta$ , falls  $M_c < 0.5$  und  $\delta/(2M_c)$ , falls  $M_c > 0.5$ . Somit wird das Modell für die Produktionsrate

$$P = C_\mu \cdot \delta \cdot \max\left(1, \frac{1}{2M_c}\right) \cdot \sqrt{2K} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 , \quad (4.35)$$

woraus folgen würde

$$\dot{\delta}/\dot{\delta}_0 = \max\left(1, \frac{1}{2M_c}\right) . \quad (4.36)$$

Diese Relation zeigt große Ähnlichkeit mit der “Langley experimental curve”, s. Abb. 4.3.

Die zeitliche Mischungsschicht eignet sich aufgrund der einfachen Randbedingungen – homogen in  $x$ - und  $y$ - Richtung, Fernfeld in  $z$ -Richtung – zur Untersuchung durch direkte numerische Simulationen. Rogers & Moser [43] simulierten eine inkompressible turbulente Mischungsschicht auf diese Weise. Untersuchungen zu kompressiblen Schichten wurden später von mehreren Autoren durchgeführt. Dabei wurde jeweils eine Simulation mit niedriger Machzahl ( $M_c = 0.1$  bis  $0.3$ ) durchgeführt, die als quasi inkompressibel angesehen wurde und Simulationen mit höherer Machzahl ( $M_c = 1.1$  bis  $1.8$ ). Durch einen Vergleich dieser Simulationen wurde nach Ursachen für einen Rückgang der Wachstumsrate gesucht.

Vreman *et al.* [59] untersuchten Mischungsschichten mit  $M_c = 0.2$  bis  $1.2$ . Bei der Machzahl  $M_c = 1.2$  traten *shocklets* auf. Jedoch sind die damit verbundene dilatationale Dissipation und die Druckdilatation nicht für die reduzierte Wachstumsrate verantwortlich. Die Autoren führten die reduzierte Wachstumsrate auf reduzierte Druckscherkorrelationen zurück. Ihr Modell für diesen Effekt beruht auf der Annahme reduzierter minimaler und maximaler mit  $\rho\Delta U^2$  normierter Drücke bei höherer Machzahl, zum einen durch die Bedingung  $p > 0$ , zum anderen durch den, im Vergleich zu inkompressiblen Strömungen, geringeren Staudruck.

Freund *et al.* [16] simulierten ringförmige Mischungsschichten mit Machzahlen  $M_c = 0.1$  bis  $1.8$ . Sie fanden ebenfalls die Hauptursache der reduzierten Wachstumsrate in reduzierten Druckfluktuationen, die wiederum zu reduzierten Druckscherkorrelationen führten. *Shocklets*, die ab  $M_c = 1.54$  auftraten, führten nicht zu dilatationalen Effekten, die den Energiehaushalt der Strömung maßgeblich beeinflussten. Außerdem wurde festgestellt, dass die großen spannweitig kohärenten Wirbel, die bei niedrigen Machzahlen dominant waren, bei höheren Machzahlen nicht mehr auftraten. Dort dominieren kleinere Strukturen, die in Strömungsrichtung ausgerichtet sind.

Pantano & Sarkar [36], die Mischungsschichten mit  $M_c = 0.3$  bis  $1.1$  untersuchten, stellten ebenfalls fest, dass die Druckscherkorrelationen verantwortlich für die reduzierte Wachstumsrate sind. Dies wurde mit einer geringeren Korrelation großer Strukturen, wie von Breidenthal angenommen, erklärt und mathematisch mit Hilfe der Wellengleichung für die Druckfluktuationen hergeleitet.

In allen drei Arbeiten wurde eine Reduktion der Wachstumsrate entsprechend der “Langley experimental curve” festgestellt. Jedoch sind die Zahlenwerte für die Wachstumsraten in allen drei Arbeiten fraglich, s. Kapitel 6.2.

Dem Autor ist keine Untersuchung bekannt, in der die Terme der Transportgleichung der Dissipationsrate in einer Mischungsschicht ausgewertet wurden.

### 4.3 Turbulente Kanalströmung

Dies ist der am einfachsten zu simulierende Fall wandgebundener turbulenter Strömung. Die Strömung ist homogen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. In  $z$ -Richtung wird sie durch feste isotherme Wände mit einem Abstand von  $2H$  begrenzt. In diesem Spalt strömt das Gas mit einer mittleren Geschwindigkeit  $\tilde{u}$  in  $x$ -Richtung, getrieben von einer



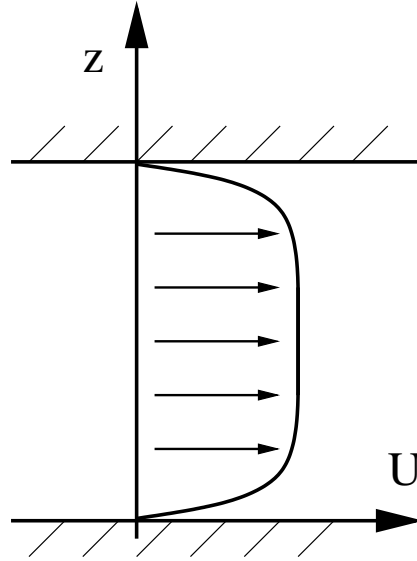


Abbildung 4.4: Kanalströmung

Volumenkraft  $V_x = konst.$ <sup>3</sup>, s. Abb. 4.4. Der dadurch zugeführte Impuls wird durch viskose und turbulente Diffusion an die Wände transportiert und abgegeben. Die zugeführte kinetische Energie dissipiert zu Wärme, die über die gekühlten Wände abgegeben wird. Somit stellt sich im Kanal ein Gleichgewicht ein, die Strömung ist statistisch stationär.

Einige Eigenschaften der Strömung lassen sich aus den integrierten Erhaltungssätzen herleiten. Aus der Massenbilanz folgt, außer der für geschlossene Systeme trivialen Tatsache, dass die Gesamtmasse sich nicht verändert,  $\tilde{w} = 0$ .  $\bar{w}$  hingegen kann von Null verschieden sein.

<sup>3</sup>Die Volumenkraft ist künstlich. Sie muss die Druckkraft ersetzen, die i.a. als Antrieb inkompressibler Kanalströmungen verwendet wird. Würde in kompressibler Strömung ein mittlerer Druckgradient benutzt, um die Strömung zu treiben, würden sich auch die mittleren thermodynamischen Größen in Strömungsrichtung ändern, somit wäre die Strömung in dieser Richtung nicht mehr homogen, periodische Randbedingungen könnten nicht mehr verwendet werden. Um einen Eindruck zu bekommen, ob diese Vorgehensweise realistisch ist, wurde die Druckdifferenz  $\Delta\bar{p}^*$  berechnet, die - theoretisch - über eine typische Gebietslänge von  $2\pi H$  notwendig wäre, um die Strömung zu treiben. Daraus läßt sich eine Veränderung der mittleren Dichte in Stromabrichtung abschätzen, die man mit dem Dichteunterschied normal zu den Wänden vergleichen kann:

$$\Delta\bar{p}^* = \frac{\partial\bar{p}^*}{\partial x} \cdot 2\pi H = \frac{\tau_w}{H} \cdot 2\pi H = 2\pi\tau_w \quad (4.37)$$

$$\Delta\bar{\rho}^*/\rho_w \approx \Delta\bar{p}^*/p_w/\gamma \quad (4.38)$$

Hier wurde adiabate Entspannung angenommen, im isothermen Fall wäre  $\gamma$  durch 1 zu ersetzen.

	$\tau_w$	$p_w$	$\Delta\bar{p}^*/\rho_w$	$\rho_w/\rho_{av}$
KM03	68.791	101685	0.0030361	1.0175
K3000	30.544	3334.9	0.041106	1.3697
K6000neu	109.07	6084.3	0.080460	2.5371

Es sind also die in realer Strömung entstehenden mittleren Dichtegradienten in  $x$ -Richtung wesentlich kleiner als die in  $z$ -Richtung. Somit ist der Ansatz mit der Volumenkraft gerechtfertigt.

Aus der Impulserhaltung in  $x$ -Richtung (Gl.(2.21)) folgt der Zusammenhang zwischen Volumenkraft und mittlerer Wandschubspannung  $\tau_w$

$$\tau_w = V_x \cdot H. \quad (4.39)$$

Integriert man in  $z$ -Richtung nicht über das gesamte Gebiet, sondern nur von der Wand bis zu einer Stelle  $z$ , erhält man

$$-\bar{\rho} \widetilde{u''w''} + \overline{\tau_{xz}} = (1 - z/H)\tau_w, \quad (4.40)$$

was an der Wand zu  $\tau_w = \mu_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  wird. Bis auf den Bereich direkt an der Wand sind die mittleren viskosen Spannungen klein gegenüber der Reynoldsspannung. Somit folgt aus Gl. 4.40, dass  $\sqrt{\tau_w/\bar{\rho}}$  ein Maß für Geschwindigkeitsfluktuationen ist.

Aus der über das gesamte Volumen integrierten Energiebilanz (Gl.(2.3)) lässt sich der Wandwärmestrom angeben:

$$q_w = u_{av} V_x H = u_{av} \tau_w \quad (4.41)$$

$u_{av}$  ist die über den Querschnitt gemittelte reynoldssche Geschwindigkeit  $\int_0^H \bar{u} dz / H$ . Damit lässt sich auch der Temperaturgradient an der Wand angeben:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_w = \frac{q_w}{\lambda_w} = \frac{u_{av} \tau_w Pr}{c_p \mu_w} = \frac{u_{av} Pr}{c_p} \cdot \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_w \quad (4.42)$$

Aus der Bilanz der inneren Energie folgt dann

$$u_{av} \tau_w = \int_0^H \left( -p \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \varepsilon + \overline{\tau_{xz}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{\tau_{zz}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dz \quad (4.43)$$

Da die Dissipation des mittleren Feldes und die Druckdilatation klein im Vergleich zur Dissipation sind, folgt

$$u_{av} \tau_w \approx \int_0^H (\bar{\rho} \varepsilon) dz. \quad (4.44)$$

Wandgebundene turbulente Strömungen lassen sich in zwei Bereiche aufteilen, den wandnahen und den äußeren Bereich, hier der Mittenbereich des Kanals.

Im wandnahen Bereich gilt das Wandgesetz unabhängig von der Reynoldszahl der Strömung. Oder, anders gesehen, das relevante Längenmaß ist der Wandabstand, nicht das Längenmaß der gesamten Strömung. In einer Strömung konstanter Dichte und Viskosität gilt für die viskose Unterschicht

$$\bar{u} = z \cdot \frac{\tau_w}{\mu}. \quad (4.45)$$

Normiert man  $\bar{u}$  mit  $\sqrt{\tau_w/\rho}$ , was dieselbe Größenordnung wie Geschwindigkeitsfluktuationen hat, erhält man

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = \frac{z}{\mu/\sqrt{\rho \tau_w}}. \quad (4.46)$$

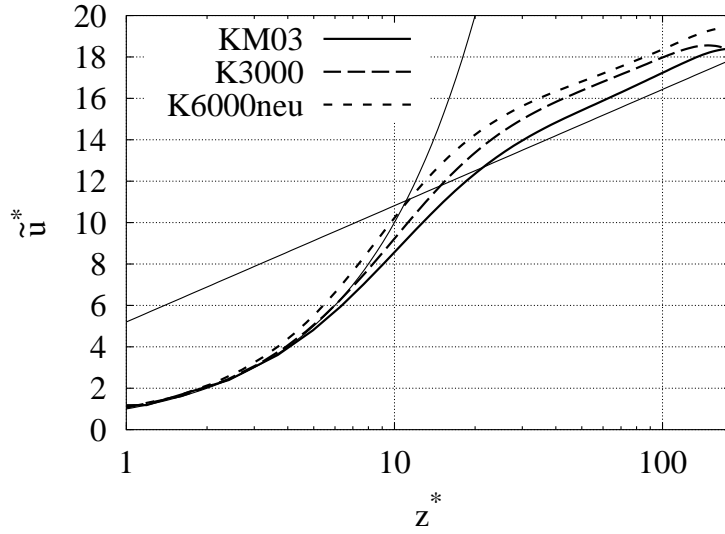


Abbildung 4.5:  $\tilde{u}^*$  in semilokaler Skalierung für Kanalströmungen mit  $M = 0.35$  (KM03),  $M = 1.5$  (K3000),  $M = 3.1$  (K6000neu). Die dünnen ausgezogenen Linien sind  $z^*$  und  $\frac{1}{\kappa} \ln(z^*) + B$ .

Dies motiviert die Definition normierter Größen in sogenannten plus-Einheiten. Die plus-Einheit für die Geschwindigkeit ist die Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ , die für die Länge  $\mu/\sqrt{\rho\tau_w}$ . Damit wird Gl. 4.46 zu

$$\bar{u}^+ = z^+. \quad (4.47)$$

Im logarithmischen Bereich gilt nach von Kármán

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + B. \quad (4.48)$$

Für die Kármán-Konstante  $\kappa$  und für  $B$  gelten empirische Werte von etwa 0.41 und 5.2 (Pope [39]). In Strömungen mit veränderlicher Dichte und Viskosität gelten diese Gesetze in veränderter Form. Huang *et al.* [23] schlagen eine semilokale Skalierung vor. Dabei werden anstelle der plus-Einheiten Sterneinheiten unter Berücksichtigung der  $z$ -Abhängigkeit von Dichte und Viskosität gebildet. Die Schubspannungsgeschwindigkeit wird zu  $u_\tau^*(z) = \sqrt{\tau_w/\bar{\rho}(z)}$ , die Längeneinheit zu  $\bar{\mu}(z)/\sqrt{\bar{\rho}(z)\tau_w}$ . In diesen Einheiten gelten die Beziehungen für die viskose Unterschicht und den logarithmischen Bereich weiterhin mit guter Genauigkeit, nur der Wert der Konstante  $B$  verändert sich, s. Abb. 4.5.

Gl. (4.44) legt nahe, dass im Mittenbereich des Kanals zusätzlich zum Geschwindigkeitsmaß für fluktuierende Geschwindigkeiten  $u_\tau^*$  die mittlere Geschwindigkeit  $u_{av}$  relevant ist. Auch ist  $H$  dort ein charakteristisches Längenmaß. Da es zweierlei Geschwindigkeitsmaße gibt, leuchtet unmittelbar ein, dass die Reynoldszahl, die ja immer auch das Verhältnis von Skalen in turbulenten Strömungen beschreibt, relevant ist. Üblicherweise werden für Kanalströmungen die Reynoldszahl der mittleren Strömung  $Re_{av} = \frac{\rho_{av} u_{av} H}{\mu_{av}}$  oder die Reynoldszahl, gebildet mit der Schubspannungs-

geschwindigkeit  $Re_\tau = \frac{\rho_w u_\tau H}{\mu_w}$ , angegeben. Letztere Größe ist in Strömungen konstanter Dichte und Viskosität gleich der Kanalhalbhöhe in plus-Einheiten  $H^+$ . Da Strömungen veränderlicher Dichte und Viskosität jedoch besser in Sterneinheiten zu beschreiben sind, liegt nahe, dass  $Re_\tau^* = \frac{\bar{\rho} u_\tau^* H}{\bar{\mu}} = H^*$ , ein Wert, der auch von Huang *et al.* [23] verwendet wurde, eine geeignetere Reynoldszahl ist.

Kim *et al.* [25] schufen mit ihren direkten numerischen Simulationen der inkompressiblen Kanalströmung bei einer Reynoldszahl  $Re_\tau = 180$  Referenzdaten, die in der Folge von vielen Autoren verwendet wurden. In späteren Arbeiten wurden in derselben Gruppe Strömungen mit höheren Reynoldszahlen  $Re_\tau = 395$  und  $Re_\tau = 590$  simuliert.

Die erste Untersuchung kompressibler Kanalströmung stammt von Coleman *et al.* [10]. Sie untersuchten Strömungen mit Machzahlen  $u_b/c_w = \int_0^H \tilde{u} dz/H/c_w$  von 1.5 und 3, bei Reynoldszahlen  $Re_\tau^*$  von 151 und 150. Diese Untersuchungen bestätigten Morkovins Hypothese, dass die wesentliche Dynamik von kompressiblen Grenzschichten analog der von inkompressiblen ist, solange die Turbulenzmachzahl  $M_t$  klein ist. Dies ist bei globalen Machzahlen kleiner 5 der Fall. Der Haupteffekt der Kompressibilität sind die entstehenden starken Gradienten mittlerer Dichte und Viskosität nahe der isothermen Wände. Effekte durch Fluktuationen der Geschwindigkeitsdivergenz beeinflussen die Strömung nicht wesentlich.

Lechner [28] wiederholte die Simulation bei  $M = 1.5$  von Coleman *et al.* . Er stellte eine im Vergleich zur inkompressiblen Strömung erhöhte Anisotropie der Reynoldsspannungen fest. Um dies zu untersuchen, wurden die Bilanzen der Reynoldsspannungskomponenten ausgewertet.

Foyi [15] simulierte mit dem von Lechner verwendeten Verfahren weitere Strömungen mit Machzahlen von 0.3 bis 3.5. Er konnte die Erhöhung der Anisotropien durch eine Veränderung der Druckscherkorrelationen erklären, die wiederum durch die Variation der mittleren Dichte verursacht wird (s. auch Foyi *et al.* [14]). Die von Foyi erzeugten Daten werden neben den eigenen Simulationen in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Die Transportgleichung der Dissipationsrate wurde bislang nur in inkompressiblen Kanalströmungen untersucht. Mansour *et al.* [34] und Rodi & Mansour [41] werteten die Simulationen mit den Reynoldszahlen  $Re_\tau = 180$  und 395 von Kim *et al.* aus und untersuchten Modellierungsansätze. Gilbert & Kleiser [21] führten eigene Simulationen bei  $Re_\tau = 180$  durch und berechneten ebenfalls die Terme der Transportgleichung der Dissipationsrate.

Sinha & Candler [53] untersuchten die Transportgleichung der Dissipationsrate für kompressible Strömungen. Sie betrachteten allerdings eine Grenzschicht an einer adiabalen Wand und keine Kanalströmung. Einer der Terme, die bei einer Formulierung der Gleichung für kompressible Strömungen mit veränderlichen Stoffeigenschaften zusätzlich auftreten, war von relevanter Größe. Ein Modell für diesen Term wurde nicht vorgeschlagen.

## 4.4 Zusammenfassung der verwendeten Skalierungen

Durch Verwendung der richtigen Skalierungen gelingt es, jeweils für eine spezielle Strömungskonfiguration den Effekt unterschiedlicher Mach- und Reynoldszahlen zu analysieren. Viele Größen verhalten sich – richtig skaliert – gleich oder ähnlich. Die bleibenden Unterschiede sind dann entweder wirkliche Mach- oder Reynoldszahleffekte oder verursacht durch unterschiedliche Randbedingungen.

In den folgenden Untersuchungen werden Skalierungen für die Reynoldsspannungen, Terme in deren Transportgleichungen und die Bilanz der Dissipationsrate benötigt. Grundlage der verwendeten Skalierung ist im Falle homogener Scherturbulenz und turbulenter Mischungsschicht die Annahme der Selbstähnlichkeit. Für die Kanalströmung werden zwei unterschiedliche Skalierungen verwendet: Die innere Skalierung, basierend auf der semilokalen Skalierung von Huang *et al.* [23] für den Wandbereich und die äußere, abgeleitet aus integrierten Erhaltungsgleichungen, für den Mittenbereich.

Die Referenzgrößen für Geschwindigkeitsfluktuationen, Länge und Zeit sind damit:

	$u_{ref}$	$l_{ref}$	$T_{ref}$
Homogene Scherturbulenz	$\sqrt{K}$	$u_{ref} \cdot T_{ref}$	$1/S$
Mischungsschicht	$\Delta U$	$\delta_\theta$	$l_{ref}/u_{ref}$
Kanal, Wandnähe	$u_\tau^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}}$	$u_{ref} \cdot T_{ref}$	$\frac{\bar{\mu}}{\tau_w}$
Kanal, Mitte	$u_\tau^*$ oder $u_{av}$	H	$\frac{H}{u_{av}}$

Verwendet man diese Referenzgrößen, ergeben sich folgende Skalierungen für die unterschiedlichen Terme:

	Scher- turbulenz	Mischungs- schicht	Kanal Wandnähe	Kanal Mitte
Koordinate	-	$\delta_\theta$	$\frac{\mu}{\bar{\rho}u_\tau^*}$	$H$
Reynoldsspannungen	$K$	$\Delta U^2$	$\tau_w/\bar{\rho}$	$\tau_w/\bar{\rho}$
Terme in den Transportgleichungen der Reynoldsspannungen	$K \cdot S$	$\Delta U^3/\delta_\theta$	$\tau_w^2/(\bar{\rho}\bar{\mu})$	$\frac{\tau_w}{\bar{\rho}} \cdot \frac{u_{av}^2}{H}$
Terme in der Transportgleichung der Dissipationsrate	$K \cdot S^2$	$\Delta U^4/\delta_\theta^2$	$\tau_w^3/(\bar{\rho}\bar{\mu}^2)$	$\frac{\tau_w}{\bar{\rho}} \cdot \frac{u_{av}^2}{H^2}$
Enstrophiebilanz	$\bar{\rho}K \cdot S^2/\bar{\mu}$	$\frac{\bar{\rho}\Delta U^4}{\bar{\mu}\delta_\theta^2}$	$\tau_w^3/\bar{\mu}^3$	$\frac{\tau_w u_{av}^2}{\bar{\mu}H^2}$

# Kapitel 5

## Asymptotisches Verhalten der Terme der $\epsilon_s$ -Bilanz und ihrer Modelle

In diesem Kapitel wird das Verhalten der Terme in der  $\epsilon_s$ -Bilanz und ihrer Modelle bei großen Reynoldszahlen und an einer festen Wand diskutiert. Diese Überlegungen sind hilfreich, um die Plausibilität simulierter Daten zu überprüfen, außerdem ergeben sich hieraus Bedingungen für neue Modelle (s. Kapitel 7).

### 5.1 Asymptotisches Verhalten bei großen Reynoldszahlen

Tennekes & Lumley schätzten die Größenordnung der Terme in der inkompressiblen Enstrophiebilanz ab ([57], S.88 ff). Diese Abschätzungen werden im Folgenden mit den bekannten Eigenschaften der untersuchten Strömungen verglichen. Es ist darauf zu achten, dass wegen  $\epsilon_s = \tilde{\nu} \overline{\omega'_i \omega'_i}$  die Skalierungen der Enstrophiebilanz sich von denen der Bilanz der Dissipationsrate um den Faktor  $\tilde{\nu}$  unterscheiden. Jeder Term in der Bilanz der Dissipationsrate hat seine Entsprechung in der Enstrophiebilanz, wie sie Tennekes & Lumley verwenden, z.B.  $T_\epsilon = \tilde{\nu} T_\omega$ . Für die beiden Terme, die mittlere Geschwindigkeitsgradienten enthalten, gilt dies nicht einzeln, sondern nur in der Summe:  $P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 = \tilde{\nu}(P_\omega^1 + P_\omega^2)$ .

**Homogene Scherturbulenz:** Wenn homogene Scherturbulenz ihren selbstähnlichen Zustand erreicht hat, gilt, da statistische Größen, normiert mit  $K$  und  $S$  konstant sind,

$$\epsilon = \frac{SK}{S^*} \quad (5.1)$$

$$\frac{dK}{dt} = \Lambda SK \quad (5.2)$$

und damit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \Lambda S \varepsilon = \frac{\Lambda S^2}{S^*} K = \Lambda S^* \frac{\varepsilon^2}{K}. \quad (5.3)$$

Das Wachstum der Dissipationsrate ist also proportional zur Dissipationsrate dividiert durch die turbulente Zeitskala. Diese Proportionalität kann man auch umschreiben:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \sim \frac{\varepsilon^2}{K} \sim \frac{q^6}{l^2 q^2} = \nu \frac{q^3}{\lambda^3} \frac{\lambda}{l} \quad (5.4)$$

Dies entspricht der Skalierung, die von Tennekes & Lumley für turbulenten Transport und mittlere Konvektion angegeben ist. Beide sind in der vorliegenden Strömung, bedingt durch die Homogenität, gleich Null. Jedoch entspricht die mittlere Konvektion einer räumlich sich entwickelnden Strömung der Zeitableitung einer zeitlich sich entwickelnden. Die anderen Terme – ausgenommen Terme, die explizit von Dilatation oder Dichtegradienten abhängen – der Bilanz der Dissipationsrate sind:  $P_\varepsilon^1$ ,  $P_\varepsilon^2$ ,  $P_\varepsilon^4$  und  $-\Upsilon$ . Hier lauten die Abschätzungen

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^3} \frac{\lambda^2}{l^2} \sim \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (5.5)$$

ausgehend von der Isotropie kleiner Skalen, und

$$P_\varepsilon^4 \sim \Upsilon \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^3} \sim \frac{d\varepsilon}{dt} \sqrt{Re}. \quad (5.6)$$

Bei hohen Reynoldszahlen müssten  $P_\varepsilon^1$  und  $P_\varepsilon^2$  bedeutungslos werden. Die Differenz  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  muss proportional zu  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  sein, da ansonsten die Bilanz nicht erfüllt ist. So wachsen zwar beide Terme  $P_\varepsilon^4$  und  $\Upsilon$  mit der Reynoldszahl, ihre Differenz jedoch nicht. Daher ist die gemeinsame Modellierung dieser beiden Terme sinnvoll, die am Ende dieses Abschnitts vorgestellt wird. Aus  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 \rightarrow 0$  und  $\frac{d\varepsilon}{dt} > 0$  folgt, dass für hohe Reynoldszahlen  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon > 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu üblichen Modellierungsannahmen. Die Daten des Falls S12 zeigen eine leichte Abnahme von  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  relativ zu  $KS^2$  mit steigender Reynoldszahl, s. Abb 6.12. Die Differenz  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  war stets kleiner Null, jedoch ebenfalls mit einer Tendenz Richtung Null. Mansour [33] leitet aus einer Abschätzung von Durbin & Speziale [11], die von nicht verschwindender Anisotropie kleiner Skalen ausgeht, eine andere Abschätzung für  $P_\varepsilon^1$  und  $P_\varepsilon^2$  her:

$$P_\varepsilon^1, P_\varepsilon^2 = O\left(S^{*2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{K}\right) \quad (5.7)$$

Damit wären diese Terme proportional zur Rate der zeitlichen Änderung, was konsistent mit den Daten der Simulation S12 ist. Es ist jedoch anzunehmen, dass die Daten bei zu niedrigen Reynoldszahlen gewonnen wurden, als dass die Skalierungen überprüft werden könnten.

**Mischungsschicht:** In der selbstähnlichen Mischungsschicht ist  $\varepsilon \sim \frac{\Delta U^3}{\delta_\theta}$ . Somit ist  $\frac{d\varepsilon}{dt} \sim -\frac{\Delta U^3}{\delta_\theta^2} \cdot \frac{d\delta_\theta}{dt}$ . Mit  $\frac{d\delta_\theta}{dt} \sim \Delta U$  und  $q \sim \Delta U$  und  $l \sim \delta_\theta$  gilt:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \sim \frac{\Delta U^4}{\delta_\theta^2} \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^3} \frac{\lambda}{l}, \quad (5.8)$$

was wiederum der Abschätzung für den konvektiven Term von Tennekes & Lumley entspricht.  $P_\varepsilon^3$  und  $D_\varepsilon$  werden mit  $\frac{q^3}{\lambda^3} \frac{\lambda}{l} \frac{1}{Re}$  abgeschätzt. Die Entwicklung von  $\varepsilon$  erlaubt noch eine weitere Aussage über die Terme: Da die Dissipationsrate reziprok zu  $\delta_\theta$  ist, der Raum, über den sie sich erstreckt aber proportional zu  $\delta_\theta$ , ist ihr Integral konstant<sup>1</sup>. Daher muss auch das Integral aller Terme in der Transportgleichung gleich Null sein. Für die Transportterme  $D_\varepsilon$ ,  $T_\varepsilon$  und Konvektion gilt dies in jedem Fall. Für die anderen Terme gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^3 + P_\varepsilon^4 - \Upsilon \right) dz = 0 \quad (5.9)$$

$P_\varepsilon^3$  skaliert mit  $\frac{d\varepsilon}{dt} \frac{1}{Re}$ , ist also vernachlässigbar, was auch die Simulationsergebnisse zeigen. Da  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  mit  $\frac{d\varepsilon}{dt} \frac{1}{\sqrt{Re}}$  skaliert, muss also auch  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  mit  $\frac{d\varepsilon}{dt} \frac{1}{\sqrt{Re}}$  skalieren, im Gegensatz zu homogener Scherturbulenz. Dass die obige Gleichung in den Simulationen gut erfüllt wird, zeigt sich daran, dass in allen betrachteten Fällen gilt  $T_\varepsilon \approx \frac{d\varepsilon}{dt}$ . Überraschenderweise gilt dies auch lokal, nicht nur in integraler Formulierung. Auch zeigt ein Vergleich der Simulationen M12 und M14 den Rückgang von  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  bei steigender Reynoldszahl. Eine Erhöhung der Reynoldszahl um  $1.65^2$  geht einher mit einem Rückgang von  $(P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2)/(\Delta U^4/\delta_\theta^2)$  um den Faktor 1.5. Dies unterstützt eher die Skalierung von Tennekes & Lumley als die auf der Basis der Annahmen von Durbin & Speziale.

**Kanalströmung:** In der Kanalströmung hängt die turbulente Reynoldszahl im Mittenbereich von der Reynoldszahl des Kanals ab, in Wandnähe vom Wandabstand. Der Effekt der Reynoldszahl wird jedoch überlagert von der Tatsache, dass der mittlere Geschwindigkeitsgradient in Wandnähe am höchsten ist. Somit sind  $P_\varepsilon^1, P_\varepsilon^2, P_\varepsilon^3$  nur in Wandnähe ( $z^* < 30$ ) relevant. Ebenfalls nur dort liefert die viskose Diffusion  $D_\varepsilon$  einen Beitrag. Im Mittenbereich herrscht ein Gleichgewicht zwischen dem turbulenten Transport von Dissipation aus dem Wandbereich in die Mitte  $T_\varepsilon$  und  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$ .  $T_\varepsilon$ , gewonnen aus den DNS-Daten, skalierte folgendermaßen:

$$T_\varepsilon \sim \frac{\tau_w u_{av}^2}{\rho H^2} = \frac{\tau_w u_{av}^2}{\rho H^2} \frac{q^2 \nu}{\lambda^2 \varepsilon} \sim \frac{\tau_w u_{av}^2}{H^2} \frac{q^2 \nu H}{\lambda^2 \tau_w u_{av}} = \nu \frac{q^2 u_{av}}{\lambda^2 H} \quad (5.10)$$

Bei höheren Reynoldszahlen ist  $u_{av} \approx u_{max}$ . In Pope [39], S.279 ist eine Näherung für das Verhältnis zwischen  $u_{max}$  und  $u_\tau \sim q$  gegeben:

$$\frac{u_{max}}{u_\tau} \approx 5 \log_{10}(Re) \quad (5.11)$$

---

<sup>1</sup>Somit kann  $\int \varepsilon dz = konst.$  auch als ein Kriterium für das Erreichen der Selbstähnlichkeit gesehen werden.



Zwischen  $Re = 3000$  und  $Re = 300\,000$  wächst dieses Verhältnis nur von 17.4 auf 27.4, d.h. es ist nur sehr schwach von der Reynoldszahl abhängig, man kann annehmen  $q \sim u_{av}$ . Das integrale Längenmaß wird durch die Abmessung der Strömung vorgegeben, somit ist  $l \sim H$ . Damit erhält man

$$T_\varepsilon \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^2 l}, \quad (5.12)$$

was die Abschätzung von Tennekes & Lumley bestätigt. Da  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  und  $T_\varepsilon$  im Gleichgewicht sind, muss  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  mit  $\nu \frac{q^3}{\lambda^2 l}$  skalieren.

**Modellierte Terme:** Folgende Modelle wurden betrachtet:

$$P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 = -C_\varepsilon^1 \frac{\varepsilon}{K} \widetilde{u_i'' u_j''} \tilde{U}_{i,j} \quad (5.13)$$

$$P_\varepsilon^4 - \Upsilon = -C_\varepsilon^2 \varepsilon^2 / K \quad (5.14)$$

$$P_\varepsilon^3 = -C_1^3 \cdot \tilde{\nu} C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \tilde{U}_{i,kk}^2 - C_2^3 \cdot \tilde{\nu} \frac{K}{\bar{\rho} \varepsilon} (\bar{\rho} K)_{,m} \tilde{U}_{i,m} \tilde{U}_{i,kk} \quad (5.15)$$

$$T_\varepsilon = f_t \cdot \left( \frac{C_\mu \bar{\rho}^2 K^2}{\sigma_\varepsilon \bar{\rho} \varepsilon} (\bar{\rho} \varepsilon)_{,i} \right) / \bar{\rho}^2 \quad (5.16)$$

Hier werden  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  Produktion,  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  Abklingterm,  $P_\varepsilon^3$  Produktion durch Gradienten des mittleren Wirbelvektors und  $T_\varepsilon$  turbulenter Transport genannt.

Die Modelle (5.13) und (5.14) wurden von Hanjalić & Launder [22] vorgeschlagen. Sie beruhen auf der Annahme der Analogie der Transportgleichungen für  $K$  und  $\varepsilon$  in homogener Scherturbulenz. Um Ausdrücke mit den richtigen Dimensionen zu erhalten, wurde die Transportgleichung für  $K$  mit  $\varepsilon/K$ , dem inversen turbulenten Zeitmaß, multipliziert. Das Modell für  $P_\varepsilon^3$  wurden von Rodi & Mansour [41] entwickelt. Der turbulente Transport  $T_\varepsilon$  wird mit einem Gradienten-Diffusions-Ansatz modelliert,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ .

Die Modelle wurden für inkompressible Strömungen entwickelt. Hier werden sie unter Berücksichtigung variabler Dichte verwendet, was bei Termen, die Ableitungen von Größen enthalten (Gl.(5.15) und Gl.(5.16)), relevant ist.

Mit  $K \sim q^2$ ,  $\varepsilon \sim \frac{q^3}{l} \sim \nu \frac{q^2}{\lambda^2}$ ,  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \sim 1/l$ ,  $\tilde{U} \sim q$  und der Vernachlässigung von Dichtegradienten gilt:

$$\text{Modell}(P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2) \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^2 l} \quad (5.17)$$

$$\text{Modell}(P_\varepsilon^4 - \Upsilon) \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^2 l} \quad (5.18)$$

$$\text{Modell}(P_\varepsilon^3) \sim \nu \frac{q^3}{l^3} \quad (5.19)$$

$$\text{Modell}(T_\varepsilon) \sim \nu \frac{q^3}{\lambda^2 l} \quad (5.20)$$

Die Modelle für  $T_\varepsilon$  und  $P_\varepsilon^3$  entsprechen den Annahmen von Tennekes & Lumley. Das Modell für  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  widerspricht diesen Annahmen. Seine Skalierung entspricht

den Annahmen nach Durbin & Speziale, dass  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  auch bei hohen Reynoldszahlen relevant ist. Für den Abklingterm  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  geben Tennekes & Lumley keine Abschätzung. Sie kann aber aus der Bilanzgleichung der Dissipationsrate gewonnen werden. Im Mittenbereich der Kanalströmung muss wegen des Gleichgewichts zwischen turbulentem Transport und Abklingterm die Skalierung dieser Terme bzw. ihrer Modelle gleich sein, was der Fall ist. In homogener Scherturbulenz befinden sich nach Tennekes & Lumley bei hoher Reynoldszahl das zeitliche Wachstum und der Abklingterm im Gleichgewicht. Das Modell des Abklingterms hat zwar dieselbe Größenordnung wie die zeitliche Änderung, jedoch das falsche Vorzeichen. Nach Durbin & Speziale umfasst das Gleichgewicht die Terme  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$ ,  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  und  $d\varepsilon/dt$ . Dies ist konsistent mit der Modellierung. In der Mischungsschicht herrscht Gleichgewicht zwischen Produktion und Abklingterm. Da die Modelle gleich skalieren, ist dies möglich. Jedoch müssten nach Tennekes & Lumley beide Modelle mit  $\nu \frac{q^3}{\lambda^2}$  skalieren, also mit steigender Reynoldszahl im Vergleich zu turbulentem Transport und zeitlicher Änderung bedeutungslos werden. Nach den Annahmen von Durbin & Speziale sind die Modelle hingegen von der richtigen Größenordnung.

Vielleicht ist die Aufteilung der Modelle nicht gerechtfertigt. Nagano & Shimada [35] betrachten  $-C_\varepsilon^1 \frac{\varepsilon}{K} \widetilde{u_i'' u_j''} \widetilde{U}_{i,j} - C_\varepsilon^2 \varepsilon^2 / K$  als Modell für die Summe  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + P_\varepsilon^4 - \Upsilon$ . Damit wäre der Widerspruch zwischen Modellierung und den Annahmen von Tennekes & Lumley aufgelöst.

## 5.2 Verhalten der Koeffizienten an der Wand

Die Modellkoeffizienten verhalten sich nahe der Wand teilweise singulär (s. Kapitel 7). Dies kann auch theoretisch begründet werden, wenn man die Geschwindigkeiten als Taylorreihen um den Wandpunkt ansetzt.

Zur Vereinfachung wurde nur inkompressible Strömung betrachtet. Somit gilt:

$$u'^+ = b_1 z^+ + c_1 (z^+)^2 + \dots \quad (5.21)$$

$$v'^+ = b_2 z^+ + c_2 (z^+)^2 + \dots \quad (5.22)$$

$$w'^+ = c_3 (z^+)^2 + \dots \quad (5.23)$$

Der Ausdruck für  $w^+$  enthält kein lineares Glied, da die Massenerhaltung an der Wand zur Bedingung  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  wird. Aus der integrierten Impulserhaltung Gl. (4.40) folgt für die gemittelte Geschwindigkeit

$$\bar{U}^+ = z^+ - (z^+)^2 / (2Re_\tau). \quad (5.24)$$

Behält man immer nur die Glieder mit der niedrigsten Ordnung in  $z^+$ , so gilt:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon^1 &= \frac{P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2}{-\varepsilon \widetilde{u_i u_j} / K \widetilde{U}_{i,j}} \\ &= \frac{[b_1 \cdot 2z^+ c_3 + b_1 b_{1,1} z^+ + b_2 b_{2,1} z^+]}{[b_1^2 + b_2^2] (b_1 z^+ c_3 (z^+)^2)} + O(z^+) \\ &= 2 + \frac{\overline{b_1 b_{1,1}}}{b_1 c_3} + \frac{\overline{b_2 b_{2,1}}}{b_1 c_3} + O(z^+) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon^2 &= -\frac{P_\varepsilon^4 - \Upsilon}{\varepsilon^2/K} \\
&= \frac{(\overline{b_{1,1}^2} + \overline{b_{1,2}^2} + \overline{c_1^2} + \overline{b_{2,1}^2} + \overline{b_{2,2}^2} + \overline{c_2^2} + \overline{c_3^2})(\overline{b_1^2}(z^+)^2 + \overline{b_2^2}(z^+)^2)}{(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2})^2} + O((z^+)^3) \\
&= \frac{(\overline{b_{1,1}^2} + \overline{b_{1,2}^2} + \overline{c_1^2} + \overline{b_{2,1}^2} + \overline{b_{2,2}^2} + \overline{c_2^2} + \overline{c_3^2})}{\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2}} \cdot (z^+)^2 + O((z^+)^3) \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1^3 &= \frac{-2\nu(\overline{u_{1,3}} - \overline{u_{3,1}})u_3\tilde{U}_{,33}\tilde{U}_{,3}}{\nu\overline{u_1}u_3\tilde{U}_{,33}^2} \\
&= \frac{2\overline{b_1}c_3(z^+)^2\overline{Re}_\tau}{\overline{b_1}z^+c_3z^+} = \frac{2\overline{Re}_\tau}{z^+} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^3 &= \frac{P_\varepsilon^3}{-K/(\overline{\rho\varepsilon})(\overline{\rho}K)_{,m}\tilde{U}_{i,m}\tilde{U}_{i,kk}} \\
&= \frac{\overline{b_1}c_3(z^+)^2(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2})}{(\overline{b_1^2}(z^+)^2 + \overline{b_2^2}(z^+)^2)(2\overline{b_1^2}z^+ + 2\overline{b_2^2}z^+) \cdot 1} + O(1) \\
&= \frac{\overline{b_1}c_3}{2(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2})} \cdot \frac{1}{z^+} + O(1) \tag{5.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t &= \frac{T_\varepsilon}{\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{K^2}{\varepsilon}(\varepsilon)_{,i}\right)_{,i}} \\
&= \frac{\overline{\sigma_\varepsilon(c_3(z^+)^2(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2}))}_{,3}}{-\overline{b_1}z^+c_3(z^+)^2/1 \cdot (\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + 4(\overline{b_1}c_1 + \overline{b_2}c_2)z^+ + 4c_3(z^+)^2)_{,3}} + O\left(\frac{1}{z^+}\right) \\
&= -\frac{\overline{\sigma_\varepsilon c_3(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2})}}{2\overline{c_3}\overline{b_1}(\overline{b_1}c_1 + \overline{b_2}c_2)} \cdot \frac{1}{(z^+)^2} + O\left(\frac{1}{z^+}\right) \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\mu &= -\frac{\overline{u_i}u_j\varepsilon}{K^2\tilde{U}_{i,j}} \\
&= \frac{4\overline{b_1}c_3(z^+)^3(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2})}{\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2}(z^+)^4} + O(1) \\
&= \frac{4\overline{b_1}c_3}{\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2}} \cdot \frac{1}{z^+} + O(1) \tag{5.30}
\end{aligned}$$

$C_\varepsilon^1$  hat einen definierten Grenzwert an der Wand.  $C_\varepsilon^2$  geht quadratisch gegen Null. Alle anderen Modellkoeffizienten werden an der Wand singularär.

# Kapitel 6

## Auswertung der Simulationen

In diesem Kapitel werden – für jeden Strömungstyp gesondert – die durchgeführten Simulationen beschrieben. Zuerst werden die physikalischen und numerischen Parameter aufgeführt. Die Genauigkeit der Simulationsergebnisse wird diskutiert anhand des Nachweises einer ausreichenden numerischen Auflösung großer und kleiner Skalen und des Vergleichs mit Experimenten oder Simulationen anderer Autoren. Charakteristische Eigenschaften der Strömungen, insbesondere Selbstähnlichkeit und Kompressibilitätseinflüsse auf die mittlere Strömung und die Reynoldsspannungen werden beschrieben und mit dem erwarteten Verhalten verglichen. Außerdem wird abgeschätzt, ob die Annahme eines Kontinuums bei den untersuchten Machzahlen noch gerechtfertigt ist.

Die Simulationen werden gekennzeichnet durch einen Buchstaben (S für homogene Scherturbulenz, M für Mischungsschicht und K für Kanalströmung) und eine zweistellige Zahl.

### 6.1 Homogene turbulente Scherströmung

#### 6.1.1 Parameter

Homogene Scherturbulenz wurde in quaderförmigen Rechengebieten mit Periodizität in  $x$ - und  $y$ -Richtung und Scherperiodizität in  $z$ -Richtung simuliert. Das Gebiet hat die Abmessungen  $x = 0 \dots L_x$ ,  $y = 0 \dots L_y$  und  $z = -L_z/2 \dots L_z/2$ . Die mittlere Geschwindigkeit ist  $\tilde{u} = S \cdot z^{-1}$ .

Für den Standardfall anfänglicher moderater Scherrate ( $S_0^* = 6.8$ ) wurden Simulationen mit unterschiedlichen Machzahlen, Gebietsgrößen und Gitterweiten durchgeführt. Zusätzlich wurden noch quasi inkompressible Strömungen mit einer höheren anfänglichen Scherrate von  $S_0^* = 16.6$  simuliert. Simulation S26 dient dem direkten Vergleich mit Sarkars quasi inkompressiblem Fall B1 [46] und hat deswegen dieselben physikalischen Parameter wie dieser. Eine Übersicht über die Simulationen gibt Tabelle 6.1.

---

<sup>1</sup>Die Werte von  $\tilde{u}$  sind überraschend hoch. Bei dem Standardfall S01 erreicht  $\tilde{u}$  das 5.5-fache der Schallgeschwindigkeit. Dennoch treten Kompressibilitätseffekte erst bei höheren Machzahlen auf, wie Vergleiche mit Simulationen niedrigerer und höherer Machzahl zeigen.

	$Re_{\lambda_0}$	$S_0^*$	$M_{t_0}$	$St_{fin}$	$\frac{(L_x, L_y, L_z)}{L_z}$	$k_0 \cdot \frac{L_z}{2\pi}$	Gitter	Numerik
S01	21.82	6.86	0.100	12	1, 1, 1	12	192,192,320	A
S08	21.82	16.75	0.041	17	3, 1, 1	12	384,192,320	A
S10	21.72	16.64	0.0137	21	3, 1, 1	12	384,192,320	A
S12	21.79	6.84	0.100	19	2, 0.9, 1	12	384,256,480	B
S13	21.71	16.64	0.041	16	3, 1, 1	12	480,240,400	B
S15	21.72	16.65	0.247	23	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S16	21.72	16.64	0.041	33	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S17	21.72	6.82	0.100	25	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S19	21.72	6.82	0.033	38	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S20	21.73	6.82	0.301	13	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S21	21.72	6.82	0.201	15	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S22	21.72	6.82	0.067	33	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S24	21.99	7.02	0.100	26	3, 1, 1	20	384,192,320	C
S25	21.89	6.94	0.100	26	3, 1, 1	16	384,192,320	C
S26	14.00	5.40	0.130	22	3, 1, 1	12	384,192,320	C
S28	21.73	6.82	0.301	8	3, 1, 1	12	512,256,512	D

Tabelle 6.1: Parameter der Simulationen homogener Scherturbulenz

Die Geschwindigkeitsfluktuationen der Anfangsfelder werden nach dem Algorithmus von Schumann [50] (s. Kapitel 3.8) erzeugt. Das vorgegebene Spektrum ist  $E(k) \sim k^4 \cdot e^{-2(k/k_0)^2}$ . Für die Simulation S28 wurde das Feld der Simulation S20 bei  $t \cdot S = 3$  auf das feinere Gitter von S28 interpoliert und als Startfeld verwendet.

Eingesetzte numerische Verfahren sind:

- (A) Das *upwind*-Verfahren, wie es in Abschnitt 3.6.1 beschrieben ist. In den periodischen Richtungen ( $x$  und  $y$ ) werden das Ableitungsverfahren CULD zur Berechnung der konvektiven Terme und die Verfahren LELETRI und LELETRI2 zur Berechnung der viskosen Terme eingesetzt. In der scherperiodischen Richtung  $z$  werden die Verfahren RAI für konvektive Terme und EXPLIZIT und EXPLIZIT2 für viskose Terme verwendet.
- (B) Dieses Verfahren entspricht im Wesentlichen dem Verfahren (A). Allerdings wurde die numerische Dissipation modifiziert. Sie ist, vernachlässigt man die durch den Zeitschritt verursachte Dissipation, proportional zu  $k_{xi}^*$ . Durch Mischung der mittels *upwind*-Schemata berechneten Ableitungen  $\frac{\partial \phi^+}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \phi^-}{\partial x}$  erhält man ein Ableitungsverfahren, das bei unverändertem Dispersionsverhalten eine modifizierte numerische Dissipation aufweist:

$$\widetilde{\frac{\partial \phi^+}{\partial x}} = \alpha \frac{\partial \phi^+}{\partial x} + (1 - \alpha) \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \quad (6.1)$$

$$\widetilde{k_{xr}^*} = k_{xr}^* \quad (6.2)$$

$$\widetilde{k_{xi}^*} = \alpha k_{xi}^* - (1 - \alpha) k_{xi}^* = (2\alpha - 1) k_{xi}^* \quad (6.3)$$

$$\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad (6.4)$$

Mit dem Parameter  $\alpha$  kann man die Stärke der numerischen Dissipation einstellen.  $\alpha = \frac{1}{2}$  ergibt ein zentrales Verfahren,  $\alpha = 1$  das reine *upwind*-Schema<sup>2</sup>. Im Verfahren (B) wurde  $\alpha = 0.75$  verwendet. Die numerische Dissipation durch das *upwind*-Verfahren ist also halbiert.

- (C) Auch dieses Verfahren ist im Wesentlichen gleich wie das *upwind*-Verfahren (A), bis auf eine andere *upwind*-Ableitung in  $x$ -Richtung. Da die numerische Dissipation in den Gebieten niedriger mittlerer Geschwindigkeit am geringsten ist, kommt es dort am ehesten zu Instabilitäten, die die Simulation explodieren lassen. Um dies zu vermeiden, soll die numerische Dissipation der höchsten Wellenzahlen durch Konvektion in  $x$ -Richtung im gesamten Strömungsgebiet gleich sein. Sie ist proportional  $c \cdot k_{xi}^*$  bzw.  $|u| \cdot k_{xi}^*$ , je nachdem ob Unter- oder Überschall vorliegt. Vernachlässigt man die fluktuierenden Größen, so bedeutet gleichmäßige numerische Dissipation in  $x$ -Richtung  $\tilde{k}_{xi} \cdot \max(|\tilde{u}|, \bar{c}) = konst..$  Als Konstante wird der Wert gewählt, der bei Verwendung des unmodifizierten Verfahrens (A) maximal auftrat:  $k_{xi}^*_{CULD} \cdot SL_z/2$ . Um diese höhere Dissipation auch in Gebieten niedriger mittlerer Geschwindigkeit erreichen zu können, wurde das Ableitungsverfahren CUHD verwendet. Somit ist der Koeffizient  $\alpha$ , abhängig von  $z$ , bestimmt durch

$$(2\alpha - 1) = \min \left( \frac{\max(k_{xi}^*_{CULD})}{\max(k_{xi}^*_{CUHD})} \frac{S \cdot L_z/2}{\max(|S \cdot z|, c)}, 1 \right). \quad (6.5)$$

Die Beschränkung auf Werte  $\alpha \leq 1$  bewirkt, dass die numerische Dämpfung im Bereich um  $z = 0$  etwas kleiner als im übrigen Gebiet sein kann, jedoch nicht um Größenordnungen, wie dies bei Verwendung des unmodifizierten Verfahrens vorkommt.

- (D) ist das zentrale Verfahren, wie in Abschnitt 3.6.2 beschrieben. In den periodischen Richtungen  $x$  und  $y$  werden die Ableitungsverfahren LELEPENTA und LELEPENTA2, zusammen mit dem Filter nach Gl. (3.44) verwendet, in der scherperiodischen Richtung die Verfahren EXPLIZIT und EXPLIZIT2, zusammen mit dem Filter nach Gl. (3.42).

Die Simulationen wurden durchgeführt bis zu dem Zeitpunkt, an dem sie instabil werden aufgrund fehlender Auflösung der kleinen Skalen. Dies geschieht wesentlich früher in der Simulation mit höherer Machzahl wegen des Auftretens von Stößen. Die Daten sind für die Auswertung von Nutzen, solange der Fehler in der Bilanz der Dissipationsrate klein genug ist, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

### 6.1.2 Genauigkeit der Simulationen

Die Validierung des Strömungscodes wurde in Abschnitt 3.10 besprochen. Das Verfahren (C) mit modifizierter *upwind*-Ableitung wird durch den Vergleich zweier Si-

---

<sup>2</sup>Werte  $\alpha < \frac{1}{2}$  ergeben ein *upwind*-Schema in umgekehrter Richtung. Auch Werte  $\alpha > 1$  sind denkbar. Sie ergeben eine über das ursprüngliche Verfahren hinaus gesteigerte numerische Dissipation. Werte größer eins wurden jedoch nicht verwendet.

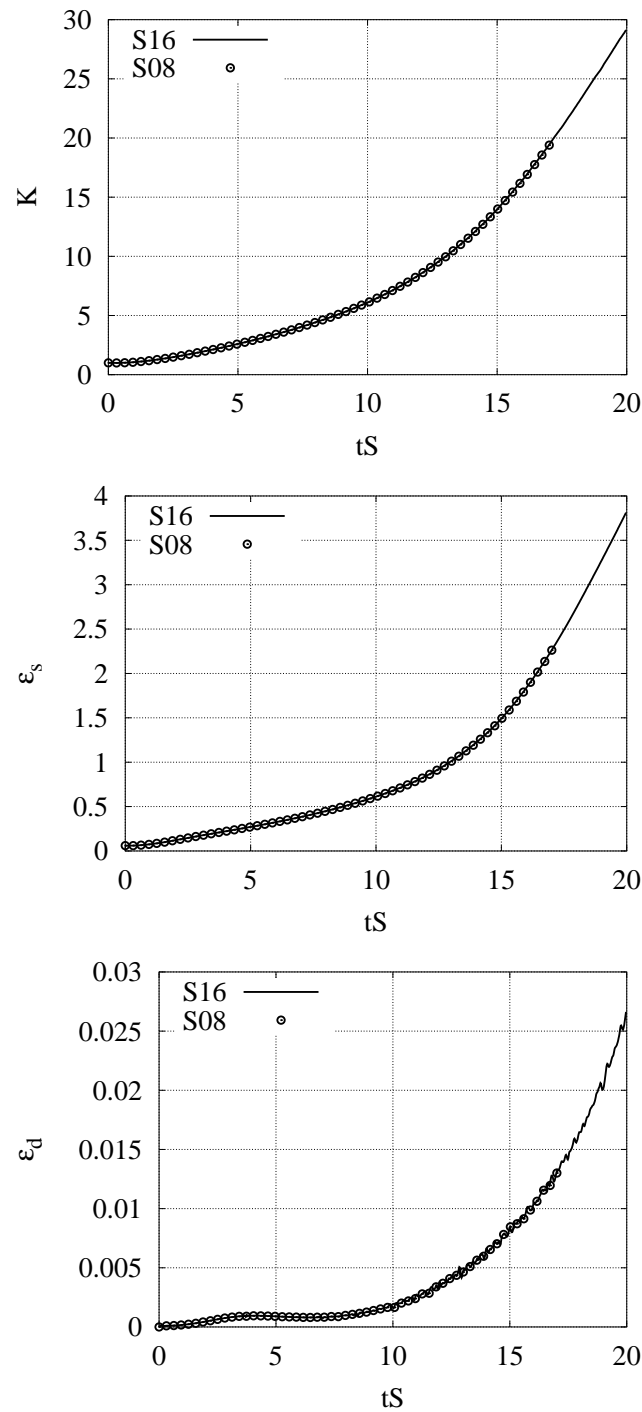


Abbildung 6.1: Vergleich der Verfahren (A) (S08) und (C) (S16); oben:  $K/K_0$ ; Mitte:  $\varepsilon_s/K_0S$ ; unten:  $\varepsilon_d/K_0S$

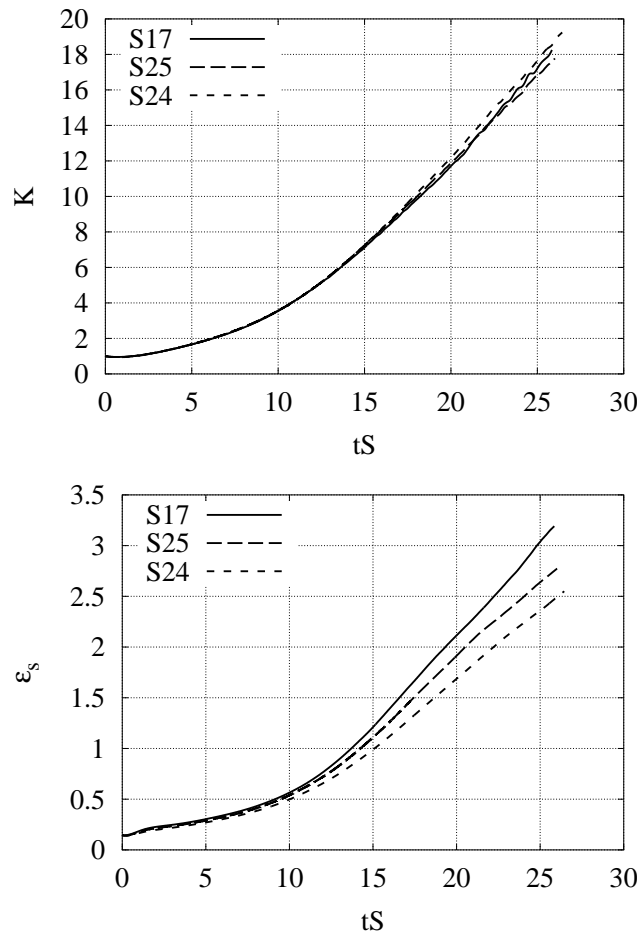


Abbildung 6.2: Vergleich unterschiedlicher Gebietsgrößen; oben:  $K/K_0$ , unten:  $\varepsilon_s/K_0S$

mulationen validiert. S08 wurde mit dem Standard-*upwind*-Verfahren (A) simuliert, S16 mit dem modifizierten Verfahren (C). Abb. 6.1 zeigt weder in der turbulenten kinetischen Energie noch in der solenoidalen und der dilatationalen Dissipationsrate Unterschiede im Ergebnis. Die Simulationsdauer hingegen konnte durch Verwendung des Verfahrens (C) von  $t \cdot S = 17$  auf  $t \cdot S = 33$  ausgedehnt werden.

Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt ab von der Auflösung großer und kleiner Skalen und der Anzahl statistischer Stichproben. Welche Genauigkeit ausreicht, hängt von der Fragestellung ab. Liegt der Schwerpunkt auf der Entwicklung großskaliger Strukturen, ist mehr Augenmerk auf eine ausreichende Boxgröße zu legen. Möchte man Statistiken hoher Ordnung berechnen, ist hingegen ein sehr feines Gitter notwendig.

Um zu zeigen, ob die verwendete Box ausreicht, wurden zusätzlich zur Simulation mit der Standardbox S17 Simulationen mit in jeder Richtung um  $4/3$  (S25) bzw.  $5/3$  (S24) größerer Box durchgeführt. Die Punktezah blieb unverändert, somit sind in den größeren Boxen die kleinen Skalen entsprechend schlechter aufgelöst. Das Wachstum der kinetischen Energie und die Anisotropie der Reynoldsspannungen



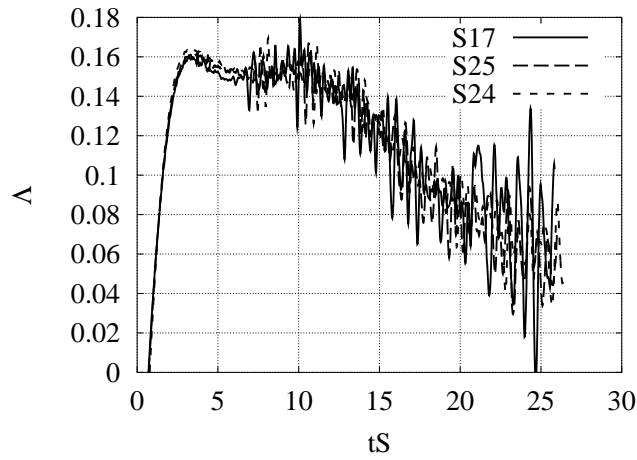


Abbildung 6.3: Vergleich unterschiedlicher Gebietsgrößen; Wachstumsrate  $\Lambda$

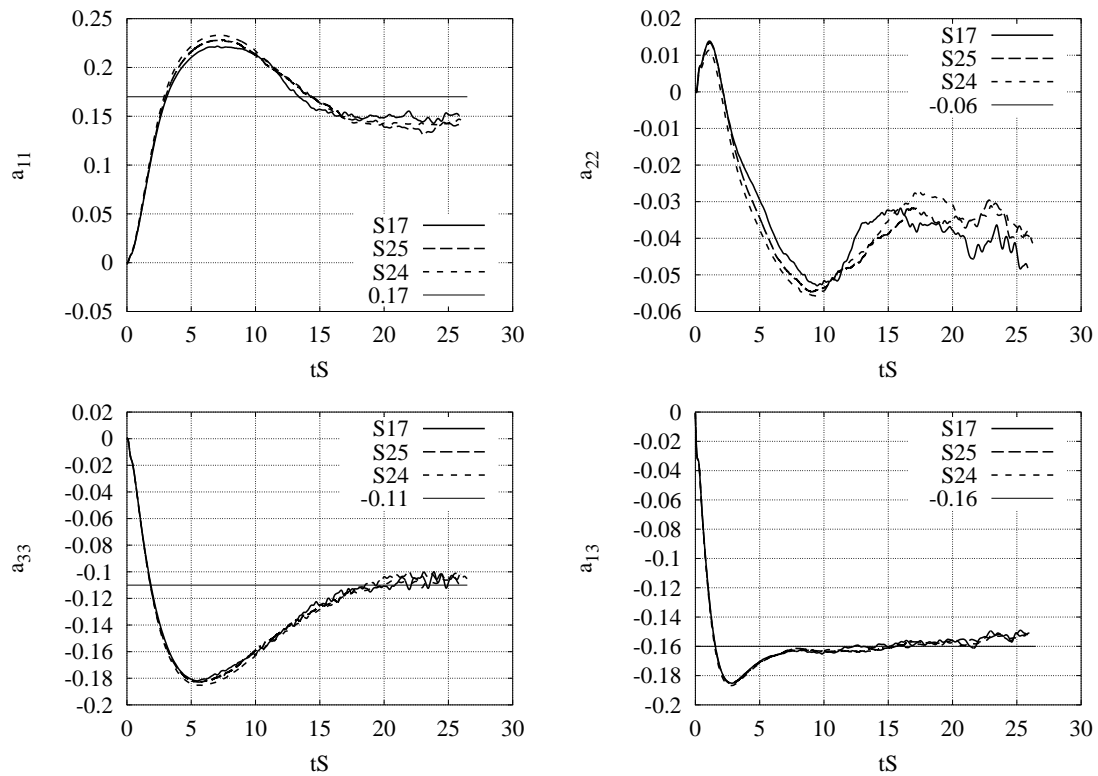


Abbildung 6.4: Vergleich unterschiedlicher Gebietsgrößen; Anisotropie der Reynoldsspannungen

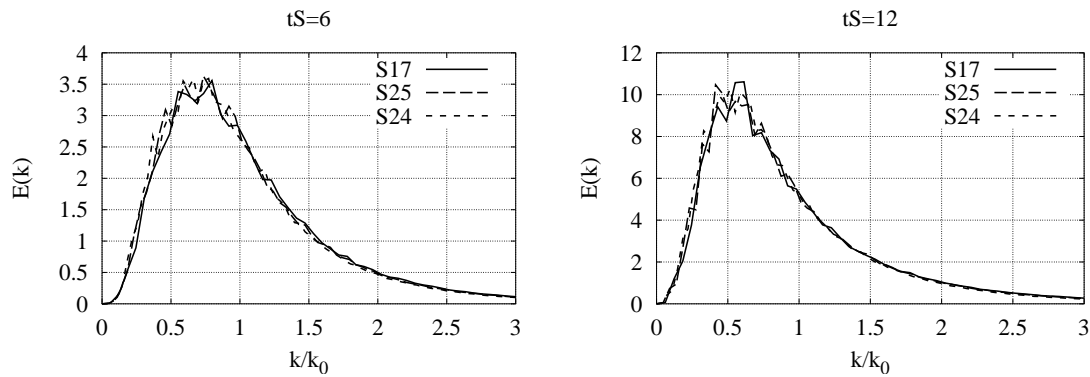


Abbildung 6.5: Vergleich unterschiedlicher Gebietsgrößen; Energiespektrum  $E(k)/\frac{K_0}{k_0}$

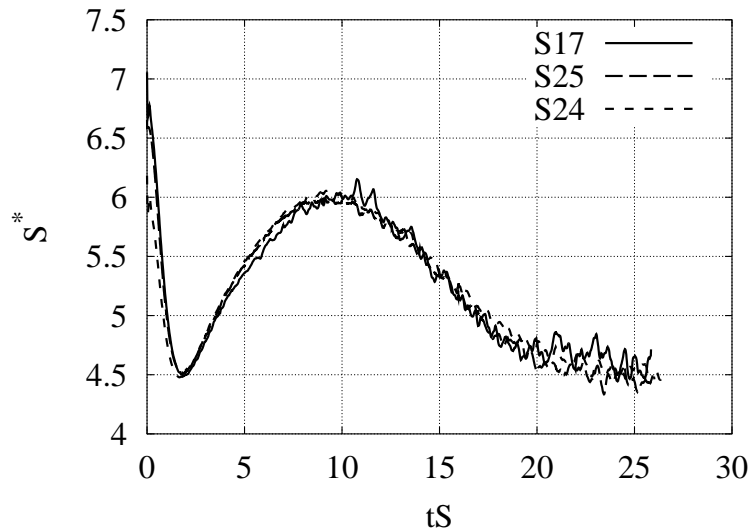


Abbildung 6.6: Vergleich unterschiedlicher Gebietsgrößen;  $S^*$

sind unabhängig von der Boxgröße, s. Abb.6.2 und 6.4. Die Spektren zeigen, dass auch die Verteilung der Energie im Spektralraum nicht beeinflusst wird, s. Abb. 6.5. Für  $tS > 15$  ist der Anisotropietensor mit allen Komponenten innerhalb des von Tavoularis angegebenen Bereiches (Für  $a_{13}$  gilt dies sogar ab  $tS = 5$ ). Dasselbe gilt für die Wachstumsrate  $\Lambda$ , allerdings nur bis zu  $tS = 21$ . Danach sinkt sie auf einen Wert unter 0.08. Um einen Effekt der Boxgröße kann es sich nicht handeln, da alle drei Simulationen denselben Effekt zeigen. Dieses Verhalten zeigt auch die Simulation mit sehr niedriger Machzahl S19. Also handelt es sich nicht um einen beginnenden Kompressibilitätseffekt.

Die Dissipationsrate ist jedoch umso kleiner, je größer das Gitter ist, s. Abb. 6.2. Da die Wachstumsrate  $\Lambda$  kaum beeinflusst ist, lässt das auf eine höhere numerische Dissipation schließen. Die numerische Dissipation der verwendeten *upwind*-Schemata ist umso größer, je größer  $k \cdot \Delta x$  ist. Ist das Gitter größer, ist für das gleiche  $k$  der Wert von  $k \cdot \Delta x$  höher. Man könnte hier auch von einer Art LES-Modell

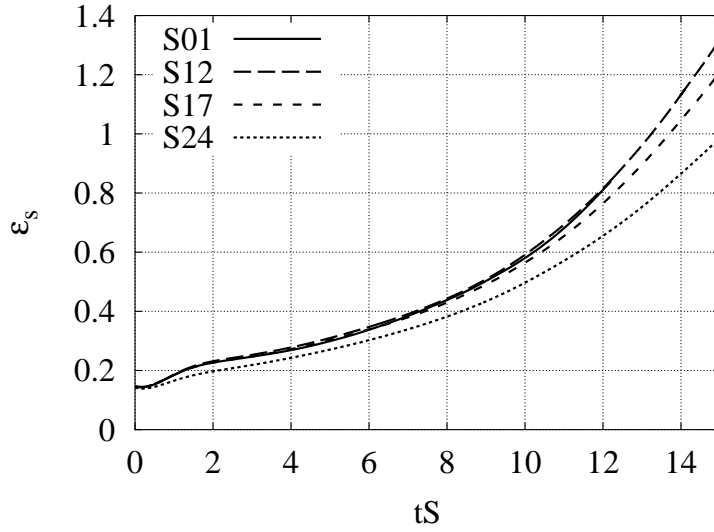


Abbildung 6.7: Vergleich unterschiedlicher Gitterweiten;  $\varepsilon_s/K_0S$

durch numerische Dissipation sprechen. Da die Entwicklung der Reynoldsspannungen unabhängig von der Auflösung ist, bietet es sich an, die Dissipationsrate indirekt aus der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie zu berechnen:

$$\varepsilon_{indirekt} = \frac{dK}{dt} - P - \overline{p'd'}/\bar{\rho} \quad (6.6)$$

Verwendet man den solcherart berechneten Wert, so ist auch die Scherrate  $S^*$  gleich für alle drei Simulationen S17, S25 und S24, s. Abb. 6.6. Im Folgenden wird  $S^*$  daher immer mit  $\varepsilon_{indirekt}$  berechnet.

Da im Endeffekt die Bilanz der Dissipationsrate betrachtet werden soll, ist eine Mindestanforderung die genaue Wiedergabe von  $\varepsilon_s$ . Die dazu notwendige Auflösung wird untersucht durch einen Vergleich der Simulationen S12, S01, S17 und S24. Da teilweise unterschiedliche Auflösungen in den unterschiedlichen Richtungen verwendet werden, wurde eine mittlere Auflösung definiert mit  $\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1.75\Delta z}$  und eine maximale Gitterweite  $\Delta_{max} = \max(\Delta x, \Delta y, 1.75\Delta z)$ . Der Faktor 1.75 berücksichtigt die schlechtere Übertragungsfunktion des expliziten Ableitungsverfahrens in  $z$ -Richtung. Die Gitterweiten der betrachteten Strömungen sind:

	$\bar{\Delta}$	$\Delta_{max}$
S12	1/247	1/192
S01	1/189	1/183
S17	1/165	1/128
S24	1/99	1/77

Abb. 6.7 zeigt, dass der Wert von  $\varepsilon_s$  bei der Auflösung von S01 bereits konvergiert ist, was gleichbedeutend ist mit einem geringen Fehler in der Bilanz für  $K$ .

Zuletzt ist zu untersuchen, ob auch die Terme der Transportgleichung für  $\varepsilon_s$

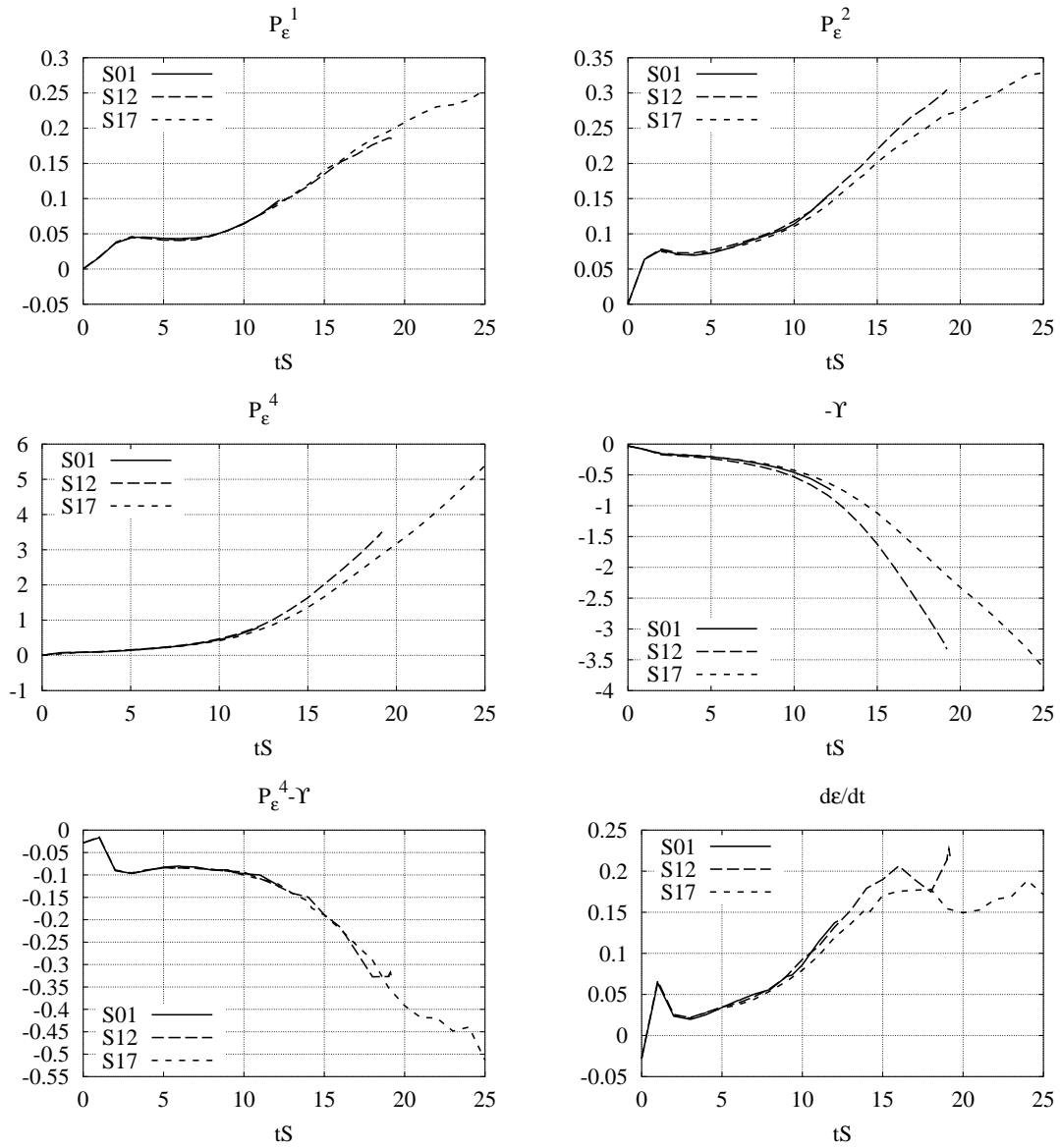


Abbildung 6.8: Vergleich unterschiedlicher Gitterweiten; Terme in der  $\epsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $K_0 S^2$

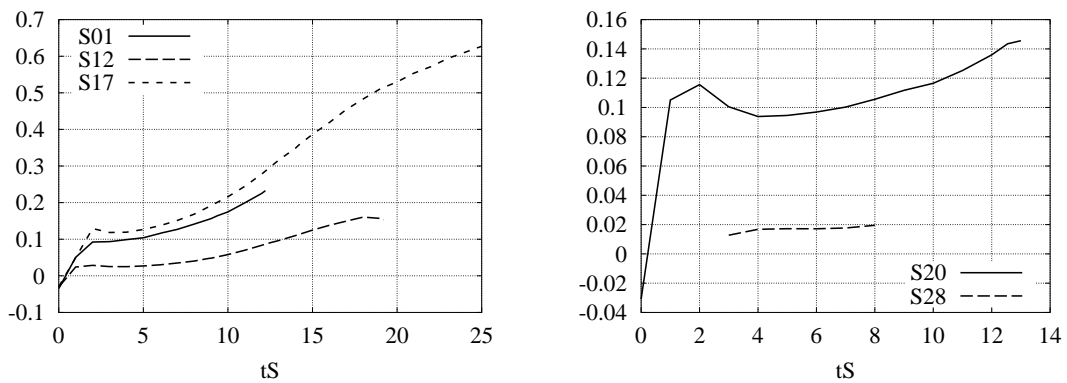


Abbildung 6.9: Fehler in der  $\epsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $-\Upsilon$

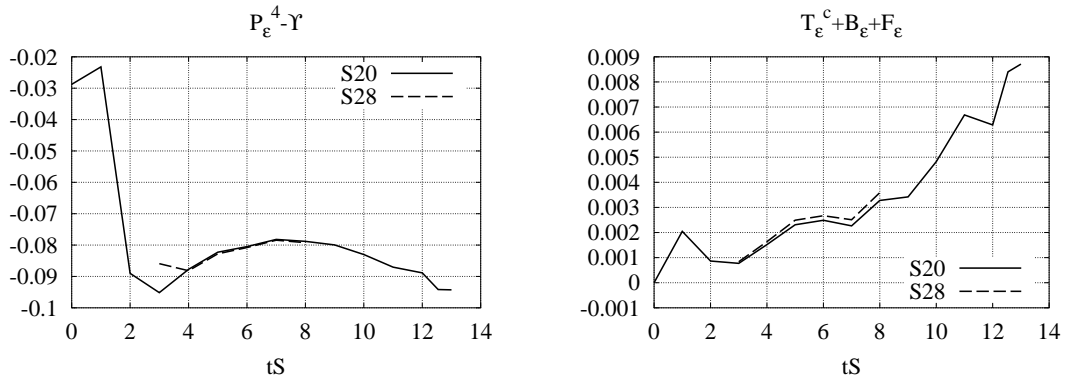


Abbildung 6.10: Simulationen mit höher Machzahl; links:  $P_\epsilon^4 - \Upsilon$ , rechts:  $T_\epsilon^c + B_\epsilon + F_\epsilon$ , normiert mit  $K_0 S^2$

konvergiert sind, vgl. Abb. 6.8. Es werden die Simulationen S12, S01 und S17 betrachtet.  $P_\epsilon^1$  ist in allen Simulationen gleich.  $P_\epsilon^2$  und  $P_\epsilon^4$  sind in den Simulationen S12 und S01 gleich, dasselbe gilt für die Summe der Terme, die explizit von der Divergenz bzw. dem Dichtegradienten abhängen, (nicht gezeigt) und die zeitliche Entwicklung  $\frac{d\varepsilon_s}{dt}$ . Die Gitter von S01 und S12 sind fein genug, um diese Terme zu berechnen. Der Term  $-\Upsilon$  ist offensichtlich der kritischste Term. Er beinhaltet Korrelationen zweiter Ableitungen der Geschwindigkeiten. Sein Betrag nimmt mit feinerem Gitter zu. Ob der Wert bei Simulation S12 bereits konvergiert ist, könnte nur durch eine wiederum besser aufgelöste Simulation untersucht werden. Benötigt für die Untersuchungen in den folgenden Kapiteln wird die Differenz  $P_\epsilon^4 - \Upsilon$ . Wird diese Größe mittels der Bilanzgleichung der solenoidalen Dissipationsrate (2.36) indirekt berechnet, ist ihr Wert in allen drei Simulationen gleich. Bei S17 handelt es sich hier um einen Zufall, die Fehler der anderen Terme gleichen sich aus, bei S01 und S12 hingegen werden nur Terme, die auf dem verwendeten numerischen Gitter bereits genau berechnet werden können, herangezogen.

Nun lässt sich für andere Strömungsfälle abschätzen, wie groß der Fehler in der Bilanz für  $\varepsilon_s$  maximal sein darf. Ab  $tS \approx 10$  werden  $P_\epsilon^2$  und  $P_\epsilon^4$  in S17 zu niedrig berechnet. Hier überschreitet der Fehler in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz 20% des Wertes der Destruktion  $-\Upsilon$ . Dieser relativ hohe Fehler ist jedoch akzeptabel, da er beinahe ausschließlich aus dem zu geringen Wert für  $\Upsilon$  herrührt.

Diese Schlussfolgerung gilt auch bei höherer Machzahl. Ein Vergleich der Simulationen S20 und S28 zeigt, dass aus Simulation S20 bereits sehr gute Werte für  $P_\epsilon^4 - \Upsilon$  gewonnen werden können, s. Abb. 6.10. Der Ausreißer bei  $tS = 3$  ist bedingt durch den zu hohen Wert der zeitlichen Änderung von  $\varepsilon_s$  unmittelbar nach der Interpolation auf das feinere Gitter von S28. Ebenfalls zufriedenstellend ist die Genauigkeit der Terme, die explizit von Divergenz bzw. Dichtegradient abhängen, vor allem, wenn man ihren Betrag mit dem von  $P_\epsilon^4 - \Upsilon$  vergleicht. Der Fehler in der  $\varepsilon_s$ -Gleichung ist im Fall S20 kleiner als 15% der Destruktion, im Fall S28 kleiner 2%, s. Abb. 6.9.

Unter den Simulationen mit hoher anfänglicher Scherrate erfüllt S13 die Bedingung, dass der Fehler kleiner als 20% von  $\Upsilon$  ist für Zeiten  $tS \leq 11$ .

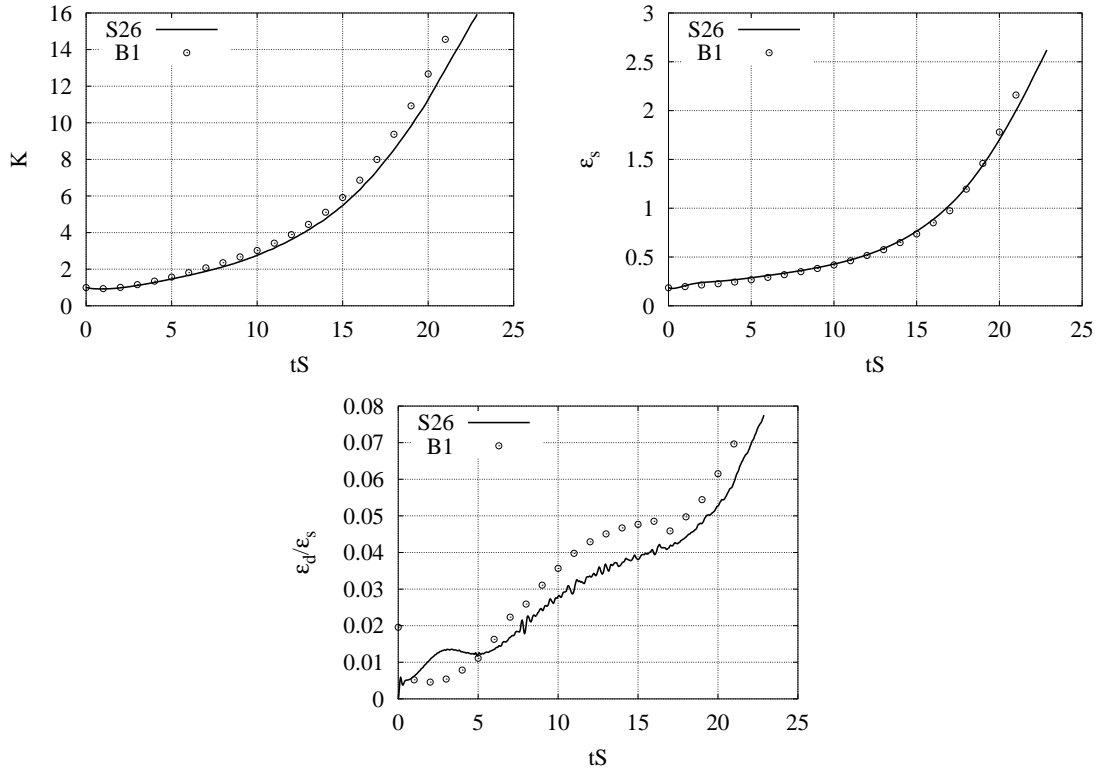


Abbildung 6.11: Vergleich der eigenen Simulation S26 mit B1 von Sarkar [46]; oben links:  $K/K_0$ ; oben rechts:  $\varepsilon_s/K_0S$ ; unten:  $\varepsilon_d/\varepsilon_s$

Die Frage, ob genügend statistisch unabhängige Stichproben zur Bildung der Statistik verwendet werden, wird hier nur qualitativ untersucht. Zu wenige Stichproben führen zu stark schwankenden Kurven. Die Zahl der Stichproben ist hier, da zeitlich nicht gemittelt werden kann, gleichbedeutend mit der Anzahl großer Strukturen, die in das Rechengebiet passen. Da die Strukturen wachsen, oszillieren die Kurven zu späteren Zeitpunkten immer mehr. Dies sieht man z.B. am Verlauf der Wachstumsrate (Abb. 6.3). Bei der Simulation mit der größten Box sind die Schwankungen am geringsten. Abgesehen von den starken Oszillationen entwickelt sich die Wachstumsrate unabhängig von der Boxgröße und damit der Zahl der Stichproben. Daher wird darauf verzichtet, zur Verbesserung der Statistik größere Rechengebiete zu verwenden oder Simulationen mehrmals mit zufällig veränderten Anfangsbedingungen durchzuführen.

Simulation S26 hat die gleichen Parameter wie der Fall B1 von Sarkar [46], auch wenn Auflösung und Gebietsgröße unterschiedlich sind:

	$(L_x, L_y, L_z)/\frac{12 \cdot 2\pi}{k_0}$	$(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)/\frac{12 \cdot 2\pi}{k_0}$
S26	3, 1, 1	1/128, 1/192, 1.75/320
B1	$(1, 1, 1) \cdot 1.5$	1/85, 1/85, 1/85

Der Vergleich von  $\bar{\rho}K$ ,  $\bar{\rho}\varepsilon_s$  und  $\chi_\varepsilon = \varepsilon_d/\varepsilon_s$  zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen beiden Simulationen, s. Abb. 6.11. In Sarkars Simulation ist das Turbulenz-

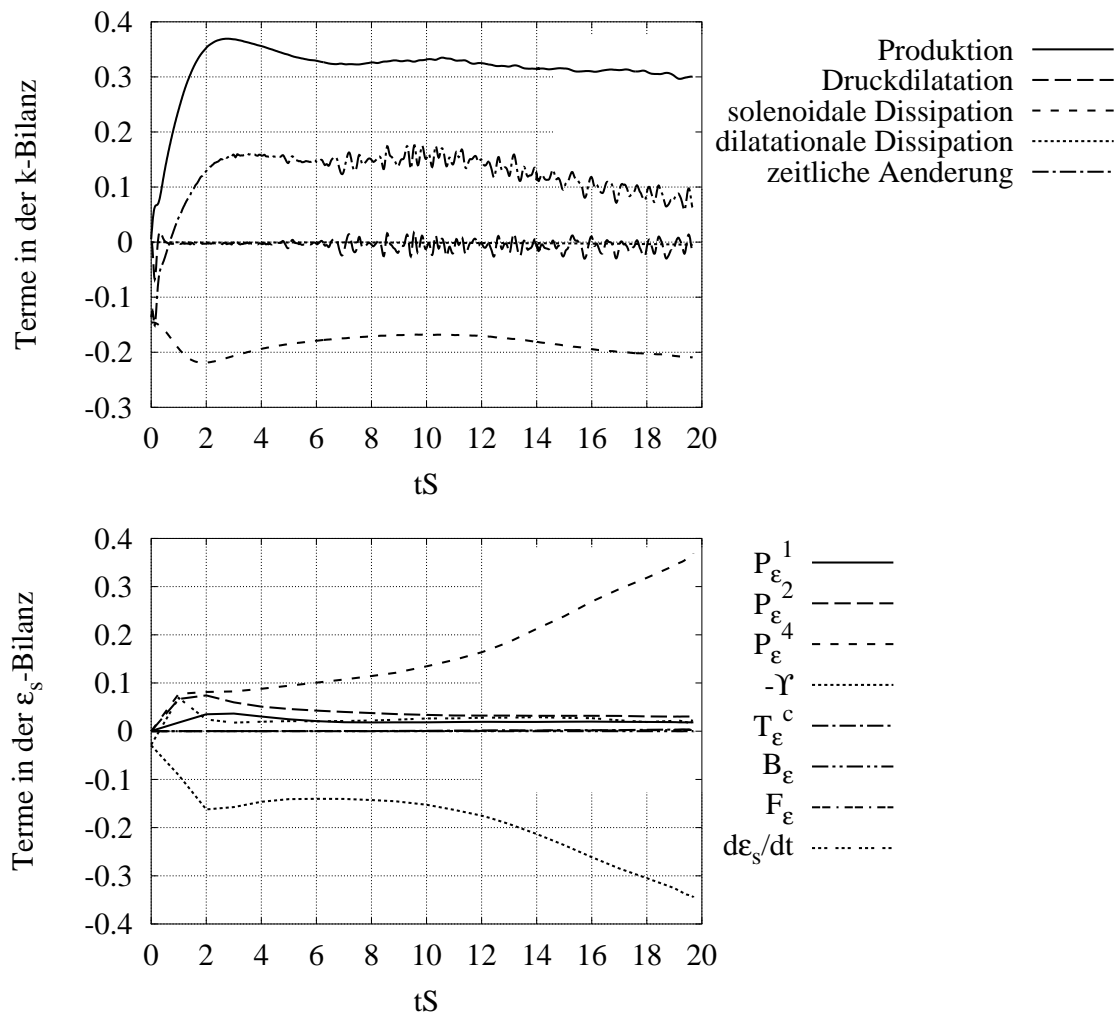


Abbildung 6.12: Simulation S12, Bilanzen von  $K$  und  $\varepsilon_s$ , selbstständig normiert mit  $KS$  bzw.  $KS^2$ . Maximale Fehler: 5% ( $K$ -Bilanz) und 16 % ( $\varepsilon_s$ -Bilanz)

wachstum leicht höher. Zwei mögliche Ursachen für diesen Unterschied sind: Zum einen hat S26 ein kleineres Rechengebiet in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Abb. 6.2 (links) zeigt, dass zumindest für Zeiten  $tS < 22$  die Turbulenz in einem größeren Gebiet etwas stärker wächst. Zum anderen ist bei Sarkar aufgrund des größeren Gitters die aufgelöste Dissipationsrate geringer. Bis zu  $tS = 18$  liegt sie unter der von S26. Dies wird, da von ihm zentrale Verfahren verwendet wurden, nicht durch numerische Dissipation ausgeglichen.

Die obigen Untersuchungen belegen, dass die Simulationen S12, S13 und S20 genau genug sind, um die Terme in der Transportgleichung der Dissipationsrate richtig zu berechnen. Im Fall S13 gilt dies nur für Zeiten  $tS \leq 11$ . Die Abbildungen 6.12 bis 6.14 zeigen die selbstständig normierten Terme in den Bilanzen von  $K$  und  $\varepsilon_s$  dieser Simulationen.

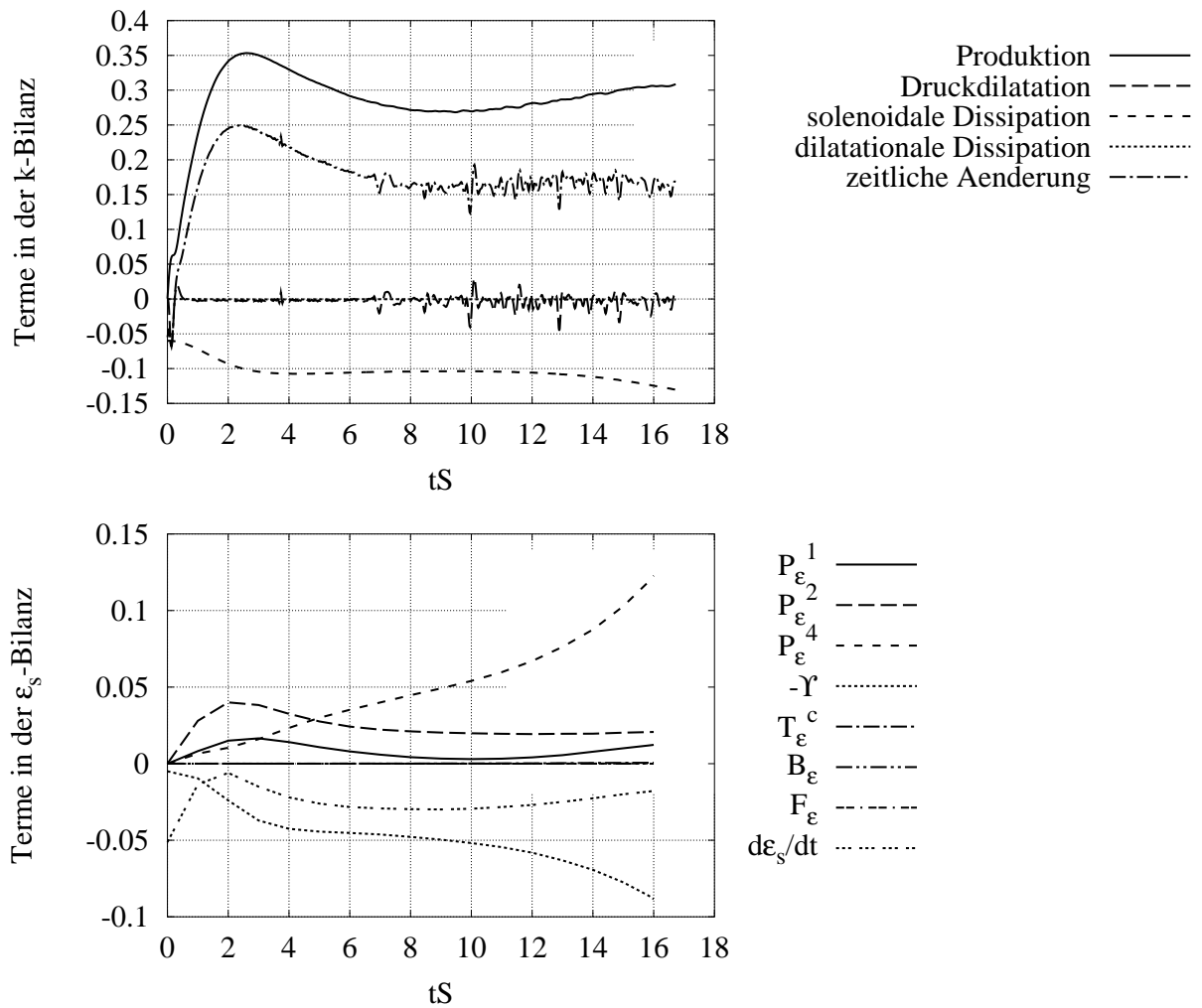


Abbildung 6.13: Simulation S13, Bilanzen von  $K$  und  $\varepsilon_s$ , selbständig normiert mit  $KS$  bzw.  $KS^2$ . Maximale Fehler für  $tS \leq 11$ : 4% ( $K$ -Bilanz) und 20 % ( $\varepsilon_s$ -Bilanz)



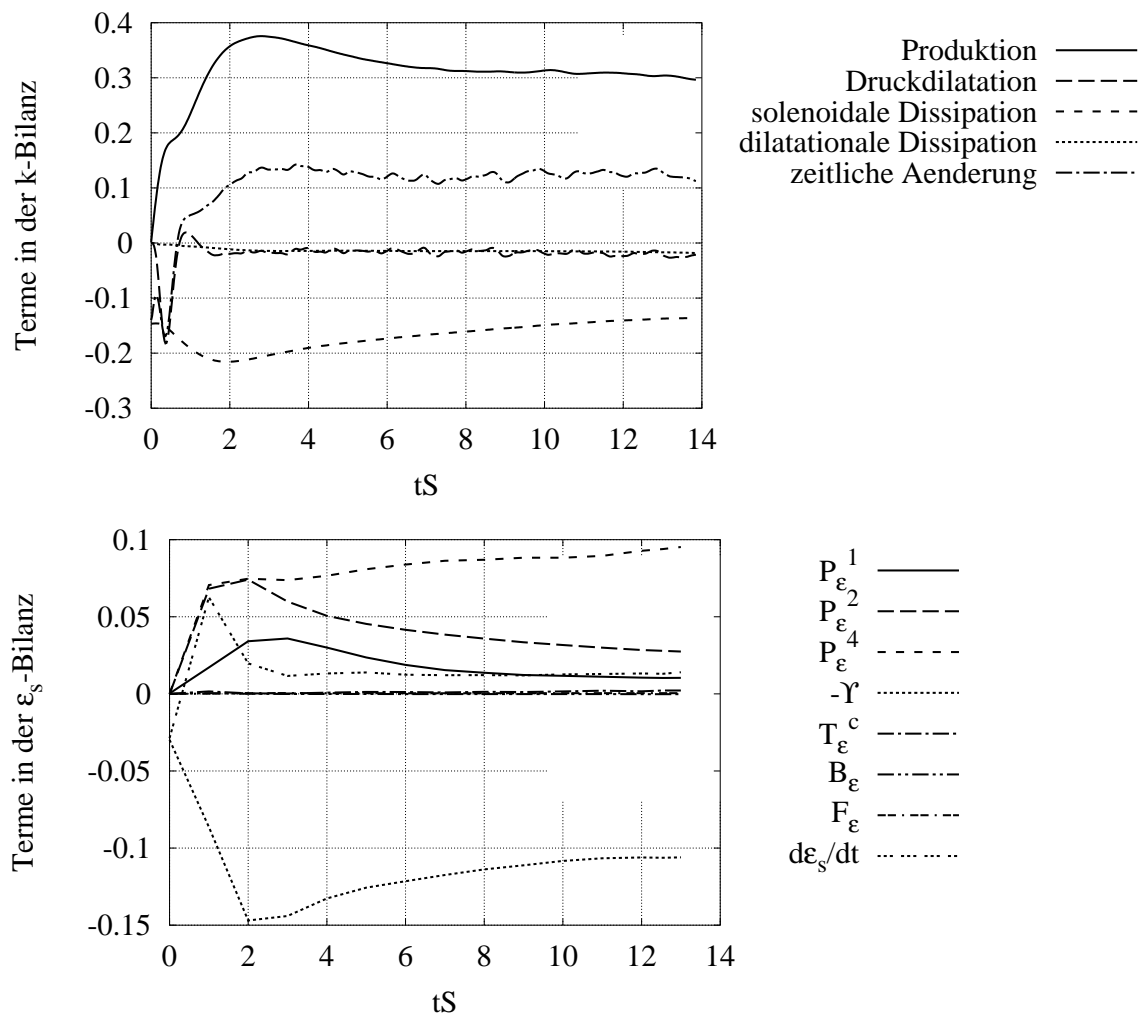


Abbildung 6.14: Simulation S20, Bilanzen von  $K$  und  $\varepsilon_s$ , selbständig normiert mit  $KS$  bzw.  $KS^2$ . Maximale Fehler: 7% ( $K$ -Bilanz) und 15 % ( $\varepsilon_s$ -Bilanz)

### 6.1.3 Selbstähnlicher Zustand

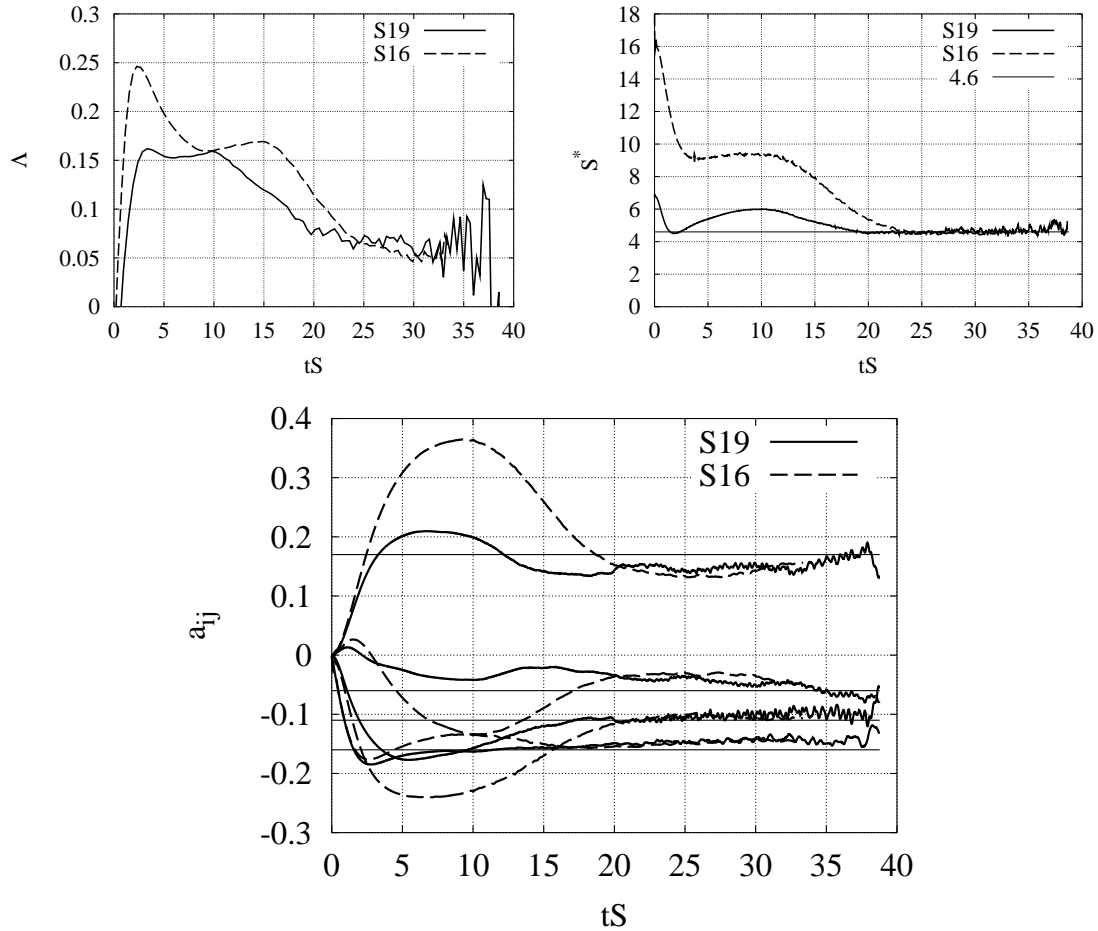


Abbildung 6.15: Simulationen mit unterschiedlicher anfänglicher Scherrate; oben links:  $\Delta$ , geglättete Kurven; oben rechts  $S^*$ ; unten:  $a_{ij}$ . Zusätzlich eingezeichnet sind Werte der Experimente von Tavoularis & Karnik [55]

Betrachtet man inkompressible Strömungen, gibt es keinen Grund zur Annahme, dass unterschiedliche selbstähnliche Zustände existieren. Also ist anzunehmen, dass der Fall hoher Scherrate nur ein transienter Vorgang ist. Die Simulationen S19 mit  $S_0^* = 6.8$  und S16 mit  $S_0^* = 16.6$  erreichen hohe dimensionslose Zeiten von 38 bzw. 33, was erlaubt, die vorherige Annahme zu überprüfen. In der Tat weisen die dimensionslosen Kennzahlen  $S^*$  und  $\Delta$  sowie die Komponenten des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen  $a_{ij}$  ab  $t \cdot S = 23$  gleiche Werte auf, s. Abb. 6.15. Der Wert für  $S^*$  ist mit 4.6 gleich dem von Tavoularis in Experimenten ermittelten, die Komponenten des Anisotropietensors sind ebenfalls sehr ähnlich den gemessenen Werten. Die Wachstumsrate liegt mit 0.05 bis 0.07 unter Tavoularis' Werten von  $0.1 \pm 0.02$ .

Obwohl sowohl die Auflösung der großen als auch der kleinen Skalen für diese hohen Scherzeiten kritisch ist, ist zumindest für den Fall moderater Scherung S19 die Entwicklung von  $K$  durch Vergleich mit den Simulationen S17, S25 und S24

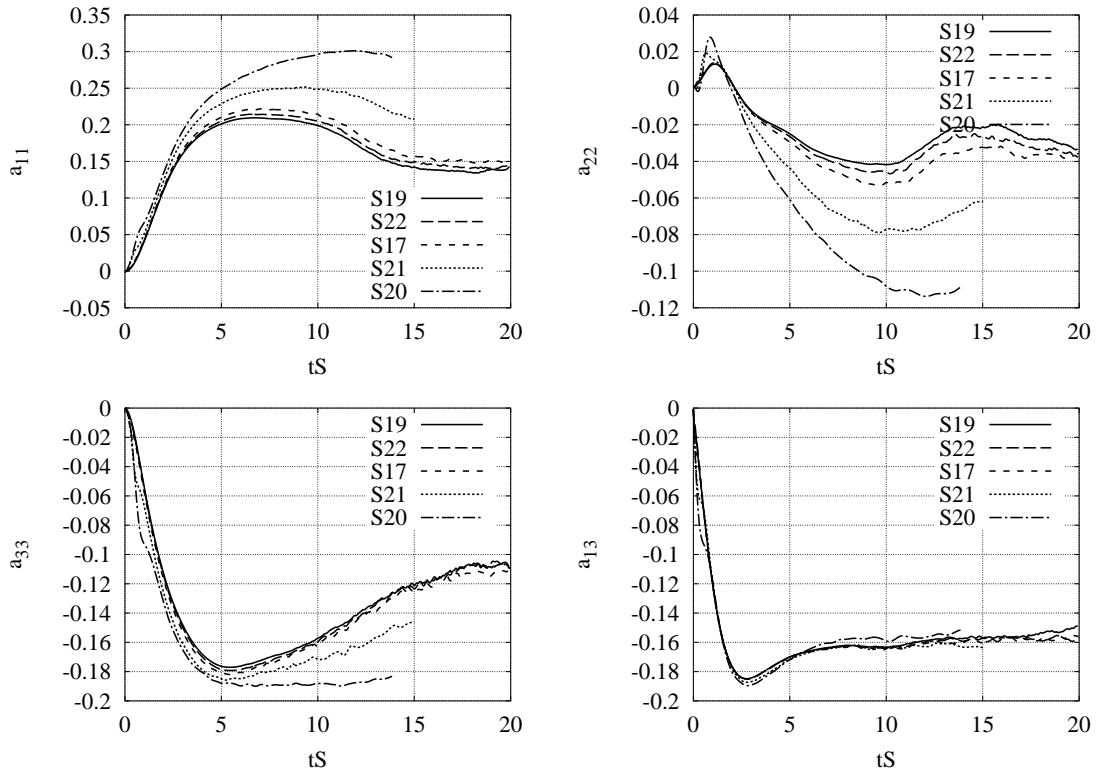


Abbildung 6.16: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher anfänglicher Machzahl, Komponenten des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen.

abgesichert. Berücksichtigt man die Übereinstimmung mit den Werten von Tavoularis, scheint es wahrscheinlich, dass es sich bei dem Fall hoher Scherrate nur um einen transienten Vorgang handelt.

Dass der transiente Vorgang erst relativ spät abgeschlossen ist, lässt sich erklären, wenn man die Zeit  $t \cdot S = 23$  umrechnet in *eddy-turn-over*-Zeiten:

$$t_{Eddy} = \int_0^t \frac{dt}{K/\varepsilon} = \int_0^{t \cdot S} \frac{d(tS)}{S^*} \quad (6.7)$$

Simulation S16 erreicht die erste *eddy-turn-over*-Zeiten bei  $t \cdot S = 9.92$ . Zum Zeitpunkt  $t \cdot S = 23$  sind erst 2.95 *eddy-turn-over*-Zeiten erreicht, im Fall S19 4.43.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen gehen selten über den transienten Bereich hinaus. Der Vorgang des Einpendelns ist bei moderater anfänglicher Scherrate wesentlich schwächer als im Fall hoher Scherrate. Daher erscheint es möglich, hier auch Schlussfolgerungen basierend auf Beobachtungen während des transienten Vorgangs zu ziehen.

### 6.1.4 Kompressibilitätseinflüsse

Es wurden folgende Simulationen mit unterschiedlichen anfänglichen Machzahlen bei ansonsten unveränderten Parametern durchgeführt:

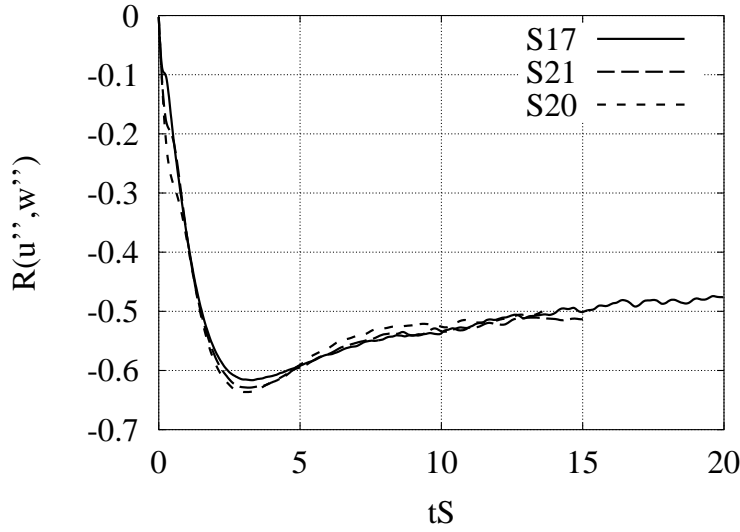


Abbildung 6.17: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher anfänglicher Machzahl, Korrelationskoeffizient zwischen  $u''$  und  $w''$

Fall	S19	S22	S17	S21	S20
$M_{t_0}$	0.033	0.067	0.100	0.201	0.301

Die wesentlichen Einflüsse von Kompressibilität sind ein Anstieg der Anisotropie der Reynoldsspannungen  $a_{ij}$  und eine Verringerung der Wachstumsrate turbulenter kinetischer Energie  $\Lambda$ . Beide Effekte treten in den hier simulierten Strömungen ab einer anfänglichen Machzahl  $M_{t_0} = 0.2$  (S21) auf. Die Fälle S19, S22 und S17 zeigen keine Unterschiede. Daher werden diese drei Fälle als quasi inkompressibel betrachtet. In den meisten Abbildungen werden nur S17, S21 und S20 gezeigt.

Die Anisotropie der Reynoldsspannungen ist in Abb. 6.16 dargestellt. Mit steigender Machzahl konzentriert sich die kinetische Energie in der Komponente in Hauptströmungsrichtung, die Fluktuationen in spannweitischer und normaler Richtung werden gedämpft. Ursache ist ein Rückgang der Druckscherkorrelationen, die Energie zwischen Reynoldsspannungskomponenten umverteilen, s. Abb. 6.18.

Die Kreuzkomponente  $a_{13}$ , die gleich der halben selbständig normierten Produktionsrate ist, ist kaum beeinflusst. Nur für die höchste Machzahl zeigt sich ein leichter Rückgang um 0.007, der gleichbedeutend mit dem Rückgang der Produktion  $P$  ist. Die Korrelation zwischen  $u''$  und  $w''$ , die neben  $\overline{u''u''}$  und  $\overline{w''w''}$  die Kreuzkomponente bestimmt, zeigt bei der höchsten Machzahl (S20,  $M_{t_0} = 0.301$ ) ebenfalls einen leichten Rückgang im Zeitbereich  $5 < t \cdot S < 10$ , s. Abb. 6.17.

Der Rückgang der Wachstumsrate

$$\Lambda = P/SK + \overline{p'd'}/SK - \varepsilon_s/SK - \varepsilon_d/SK \quad (6.8)$$

ist besonders ausgeprägt zwischen  $t \cdot S = 3$  und 12, s. Abb. 6.19. Danach nähern sich die Wachstumsraten wieder an. Es war nicht möglich, die Simulationen mit hoher Machzahl über längere Zeiten durchzuführen, so dass nicht gesagt werden kann, ob die Wachstumsraten wirklich für  $t \cdot S > 12$  wieder unabhängig von der Machzahl

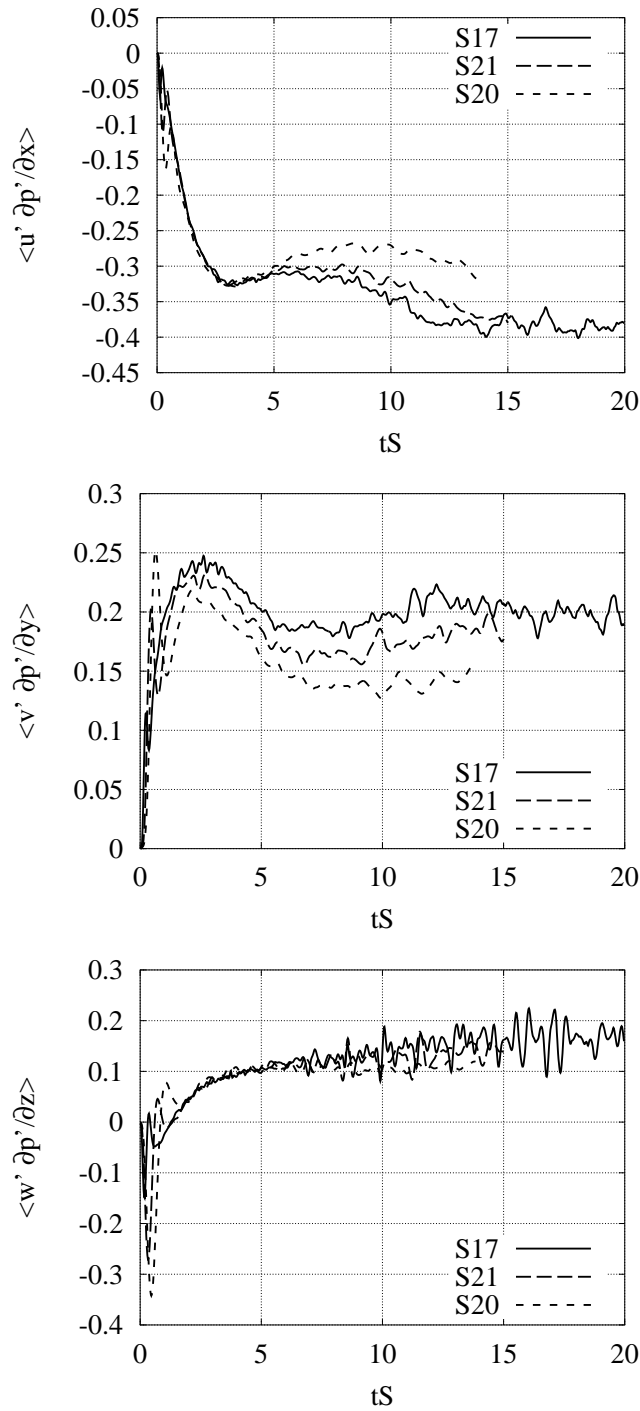


Abbildung 6.18: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher anfänglicher Machzahl, Diagonalelemente der Geschwindigkeits-Druckgradienten Korrelation; oben:  $\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}}$ ; mitte:  $\overline{v' \frac{\partial p'}{\partial y}}$ ; unten:  $\overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}}$ ; selbständig normiert

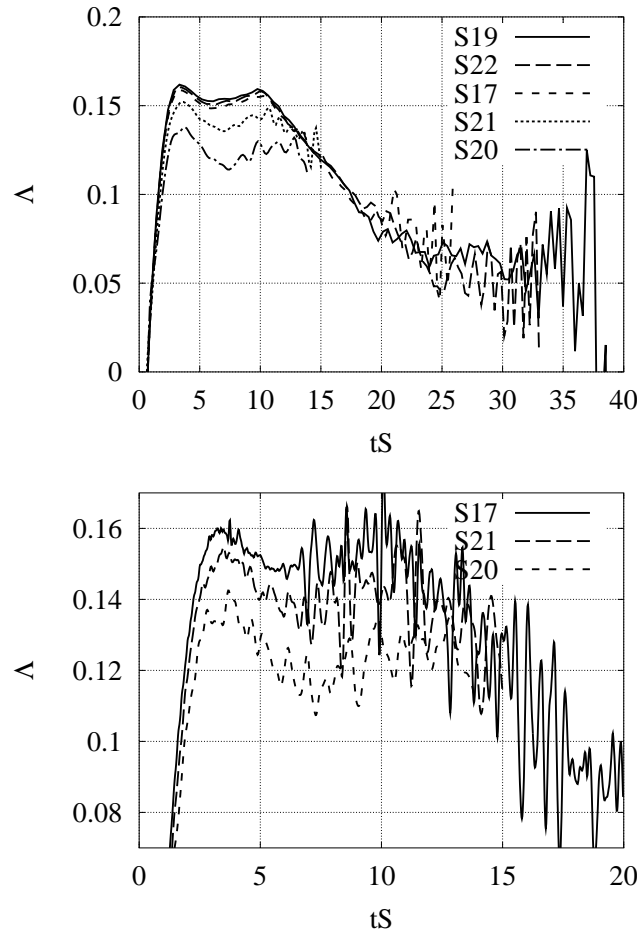


Abbildung 6.19: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher anfänglicher Machzahl, Wachstumsrate  $\Lambda$ ; oben: geglättete Kurven; unten: ungeglättete Kurven

sind, wie sich dies in Abb. 6.19 andeutet. Die Reduktion von  $\Lambda$  erreicht einen Maximalwert von 0.04 im Intervall  $7 < t \cdot S < 10$ . Die expliziten Kompressibilitätsterme  $\overline{p'd}/SK$  und  $\varepsilon_d/SK$  erreichen je -0.015, s. Abb. 6.20. Die Summe von  $P/SK$  und  $-\varepsilon_s/SK$  reduziert sich nur im Fall mit der höchsten Machzahl S20, und zwar um bis zu 0.01 im Bereich  $5 < t \cdot S < 10$ . Dies ist verursacht durch einen Rückgang der Produktion  $P$  in dieser Simulation. Somit ist der Rückgang der Wachstumsrate im Fall S21 ( $M_t0 = 0.201$ ) ausschließlich durch steigende explizite Kompressibilitätsterme bedingt. Im Fall S20 ( $M_t0 = 0.301$ ) ist der Großteil des Rückgangs - 0.03 von 0.04 - mit diesen Termen zu erklären. Dies ist im Gegensatz zur Erklärung von Sarkar [46], nach der ein Rückgang der Produktionsrate die wesentliche Ursache des geringeren Wachstums ist. Ursache für diesen Unterschied ist, dass Sarkar höhere Machzahlen untersuchte. Im Folgenden wird dieser Unterschied diskutiert:

In der vorliegenden Arbeit werden nur Simulationen mit gleicher anfänglicher Scherrate verglichen. In der Arbeit von Sarkar [46] finden sich ebenfalls zwei Simulationen mit gleicher Scherrate und unterschiedlicher Machzahl, B1 und A3. Die physikalischen Parameter dieser Simulationen sind:

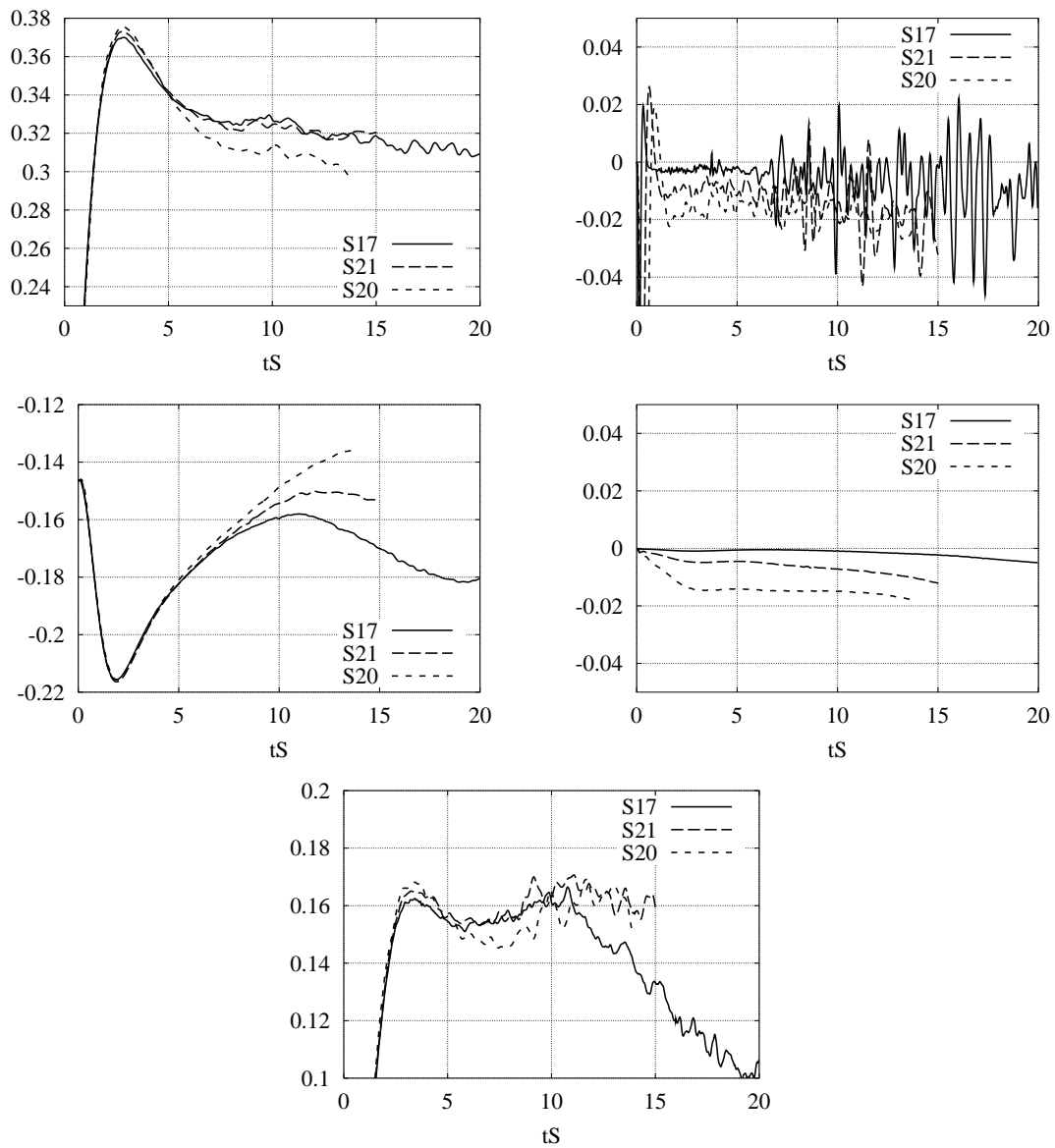


Abbildung 6.20: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher anfänglicher Machzahl, selbstständig mit  $KS$  normierte Terme in der  $K$ -Bilanz; oben links:  $u''w''S$ ; oben rechts:  $\frac{1}{\rho} p' \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i}$ ; Mitte links:  $-\varepsilon_s$ ; Mitte rechts:  $-\varepsilon_d$ ; unten:  $u''w''S - \varepsilon_s$ , indirekt berechnet

	$S_0^*$	$M_{t0}$	$Re_{\lambda 0} = \sqrt{q^4/\nu\varepsilon}$
B1	5.4	0.13	14
A3	5.4	0.40	14

Zum Zeitpunkt  $tS = 10$  weisen die Simulationen folgende dimensionslose Größen auf:

	$\Lambda$	$-\frac{\overline{p'd'}/\rho+\varepsilon_d}{SK}$	$-2a_{13}$	$\frac{\widetilde{u''w''}}{u_{rms}w_{rms}}$
B1	0.12	0.01	0.29	—
A3	0.06	0.02	0.24	-0.45

Der Wert des Korrelationsfaktors für B1 wird von Sarkar nicht angegeben. In Simulation S26 mit den gleichen physikalischen Parametern hat er zu diesem Zeitpunkt den Wert -0.53.

Der starke Rückgang der Wachstumsrate ist hier also im Wesentlichen durch einen Rückgang der Produktionsrate bedingt. Diese ist geringer, da zum einen die Anisotropie der Normalspannungen steigt, zum anderen aber auch die Korrelation zwischen  $u''$  und  $w''$  schwächer wird.

Diese von Sarkar beobachteten Effekte setzten scheinbar erst bei einer höheren Machzahl ein, als die in den vorliegenden Simulationen beschriebenen. So zeigt der hier simulierte Fall mit der höchsten Machzahl S20 bereits einen Rückgang der Produktion und eine leicht schwächere Korrelation. In Sarkars Fall A3 lag die anfängliche Machzahl mit 0.4 über der hier verwendeten maximalen anfänglichen Machzahl von 0.3 im Fall S20.

## 6.2 Turbulente Mischungsschicht

### 6.2.1 Parameter

Zeitlich sich entwickelnde ebene Mischungsschichten wurden in enger Anlehnung an die Arbeit von Pantano & Sarkar [36] simuliert. Neben Periodizität in  $x$ - und  $y$ -Richtung wurden nichtreflektierende Randbedingungen nach Gl. (3.87) an den Begrenzungsflächen in  $z$ -Richtung verwendet. Das numerische Gitter ist äquidistant in alle Richtungen. Es wurde das zentrale Verfahren mit den Ableitungen LELEPENTA und LELEPENTA2 verwendet. Das mittlere Anfangsfeld hat konstanten Druck, eine mittlere Geschwindigkeit  $\tilde{u} = \frac{\Delta U}{2} \tanh(\frac{z}{2\delta_{\theta 0}})$  mit  $\Delta U = M_c \cdot (c_1 + c_2)$  und eine Dichte von  $\rho = \rho_0(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \tanh(\frac{z}{2\delta_{\theta 0}}))$ . Dem wurden Geschwindigkeitsfluktuationen, die nach der in Abschnitt 3.8 beschriebenen Vorgehensweise erzeugt wurden, mit einer maximalen Amplitude von  $0.2\Delta U$  überlagert. Die Parameter der Simulationen sind in Tabelle 6.2 aufgeführt. Referenzzeit  $t_R$  ist das Verhältnis von anfänglicher Schichtdicke zu Geschwindigkeitsunterschied  $\delta_{\theta 0}/\Delta U$ . Für die Fälle M02, M10, und M11 wurden Felder gröber aufgelöster Simulationen auf das feinere Gitter interpoliert als Startfelder verwendet. Die folgende Tabelle zeigt, welche Felder jeweils verwendet wurden:



	$M_c$	$Re_{\theta 0}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$t/t_R$	$\frac{L_x, L_y, L_z}{172\delta_{\theta 0}}$	Gitter
M01	0.15	160	1	0...1038.2	2,0.5,1	384,96,192
M02	0.15	-	1	85.357...609.88	2,0.5,1	640,160,320
M03	0.15	160	1	0...1027.4	2,0.5,2	384,96,384
M04	0.186	395	2.7	0...1038.0	2,0.5,1	384,96,192
M05	0.3	160	1	0...924.32	2,0.5,1	384,96,192
M06	0.7	160	1	0...1037.4	2,0.5,1	384,96,192
M07	1.1	160	1	0...977.99	2,0.5,1	384,96,192
M09	1.5	160	1	0...2082.6	2,0.5,1	384,96,192
M10	0.15	-	1	335.92...587.13	2,0.5,1	1024,256,512
M11	1.1	-	1	252.17...620.25	2,0.5,1	1024,256,512
M13	0.186	395	2.7	0...475.29	2,0.5,1	1024,256,512
M14	0.186	160	2.7	0...435.01	2,0.5,1	1024,256,512

Tabelle 6.2: Parameter der Simulationen turbulenter Mischungsschicht

	Startfeld von	bei Zeitschritt	bei Zeit $\Delta Ut/\delta_{\theta 0}$
M02	M01	1000	85.357
M10	M02	5200	335.92
M11	M07	800	338.13

Die durchgeführten Simulationen erlauben es, Kompressibilitäts- und Dichtevariationseffekte zu untersuchen. Dabei entspricht der Dichteunterschied der Simulationen M04, M13 und M14 dem der Kanalströmung mit der höchsten im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Machzahl K6000\_128. Die Einflüsse auf die Bilanz der Dissipationsrate können anhand der hochaufgelösten Simulationen M10, M11, M13 und M14 untersucht werden.

## 6.2.2 Genauigkeit der Simulationen

Die verwendete Gebietsgröße entspricht der größeren Box, die Pantano & Sarkar [36] einsetzten. Deren kleinere Box ist in Hauptströmungsrichtung um die Hälfte und in normaler Richtung um ein Viertel kleiner. Sowohl für niedrige als auch für hohe Machzahlen stellten Pantano & Sarkar keinen Einfluss der Boxgröße auf die Wachstumsrate fest. Allerdings wurde im Fall niedrigerer Machzahl die Simulation mit der kleineren Box nur so lange durchgeführt, bis die Mischungsschicht auf das Achtfache ihrer anfänglichen Dicke angewachsen war. Die Simulation in der großen Box wurde bis  $\delta_{\theta}/\delta_{\theta 0} = 10$  durchgeführt. Daher wurde ein ähnlicher Test in der vorliegenden Arbeit nochmals durchgeführt. M03 hat dieselben Parameter wie M01, bis auf eine in Richtung normal zur Mischungsschicht verdoppelte Gebietsgröße. Abb. 6.21 zeigt, dass das Wachstum der Mischungsschicht bis zum Zeitpunkt an dem  $\delta_{\theta}/\delta_{\theta 0} = 11$  ist, bei beiden Simulationen gleich ist. Danach fällt die Wachstumsrate bei der kleineren Box ab. Hier beginnt also der Einfluss des oberen und unteren Randes. Die kleine Box von Pantano & Sarkar [36] war  $\frac{3}{4}$  mal so hoch wie die hier bei M01 verwendete. Daher ist zu erwarten, dass sich ab  $\delta_{\theta}/\delta_{\theta 0} = \frac{3}{4} \cdot 11 = 8.25$

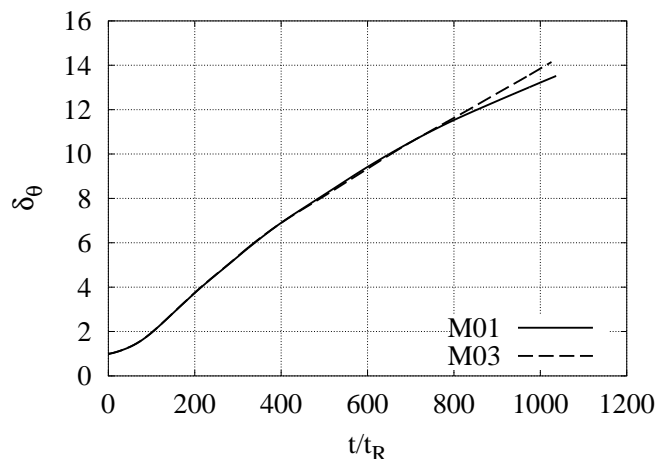


Abbildung 6.21: Vergleich von Simulationen unterschiedlicher Gebietsgröße,  $\delta_\theta/\delta_{\theta 0}$

der Einfluss der Gebietshöhe zeigt. Genau zu diesem Zeitpunkt wurde jedoch von Pantano & Sarkar die Simulation abgebrochen, so dass der Effekt nicht beobachtet werden kann.

In den periodischen Richtungen kann die Boxgröße anhand der Zweipunktkorrelationen untersucht werden. Betrachtet wird die Mitte der Mischungsschicht, definiert durch den Ort maximaler turbulenter kinetischer Energie, s. Abb. 6.22. Die Zweipunktkorrelationen fallen nicht auf Null ab, scheinen jedoch auch keine Korrelation über das ganze Gebiet anzuzeigen.

Die quasi inkompressible Mischungsschicht mit  $M_c = 0.15$  wurde mit unterschiedlichen Auflösungen simuliert. Dabei wurde das Gitter ausgehend von M01 um  $1\frac{2}{3}$  (M02) und  $2\frac{2}{3}$  (M14) verfeinert. Zum Vergleich: Die Simulation A3 von Pantano & Sarkar [36]  $1\frac{1}{3}$  mal so fein aufgelöst wie M01. Das Wachstum der Mischungsschicht war unabhängig von der Auflösung, Größen, die kleinskalige Effekte charakterisieren, jedoch nicht. So steigt die über das gesamte Gebiet gemittelte zweifache Enstrophie  $(\vec{\omega} \circ \vec{\omega})_{av}$  bei feinerer Auflösung, s. Abb. 6.23. Man kann also Effekte, die von großen Strukturen bestimmt sind, bereits mit einer Auflösung entsprechend M01 untersuchen. Werden jedoch kleine Strukturen betrachtet, so ist eine Auflösung wie in M02 oder gar M10 notwendig.

Die Fehler in den Bilanzen der hochaufgelösten Simulationen, normiert mit  $-\varepsilon$  bzw.  $-\Upsilon$ , waren:

	Fehler in der $K$ -Bilanz	Fehler in der $\varepsilon_s$ -Bilanz
M10	< 1%	< 4%
M11	< 0.5%	< 2%
M14	< 7%	< 5%

Damit sind die Fehler in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz deutlich kleiner als der noch akzeptable Wert vom 20%, s. Abschnitt 6.1.2. Überraschend ist der relativ hohe Fehler in der  $K$ -Bilanz bei Simulation M14. Hier ist ein Problem bei der Auflösung der Dichtefluktuationen denkbar.

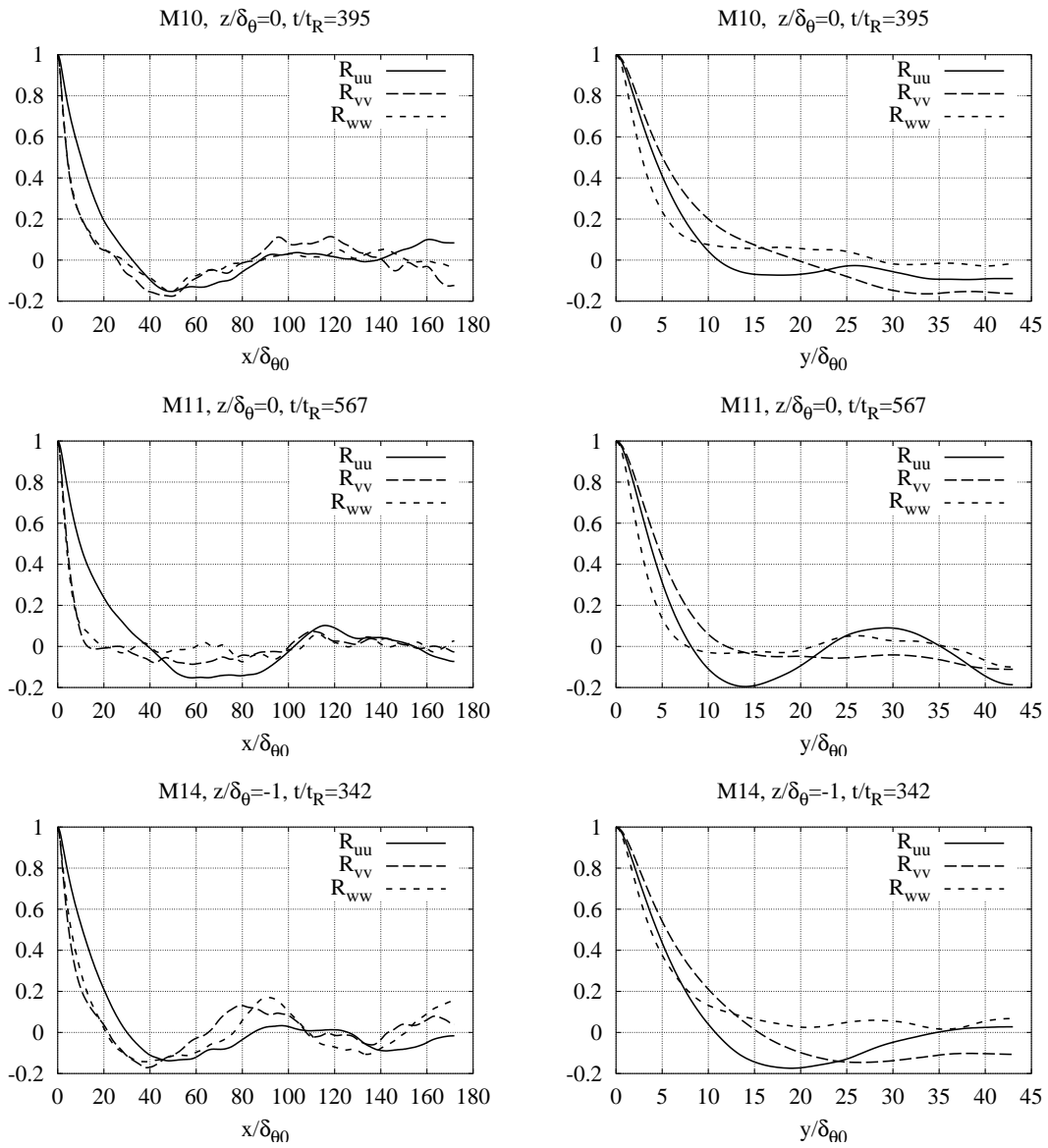


Abbildung 6.22: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten in  $x$ - und  $y$ -Richtung

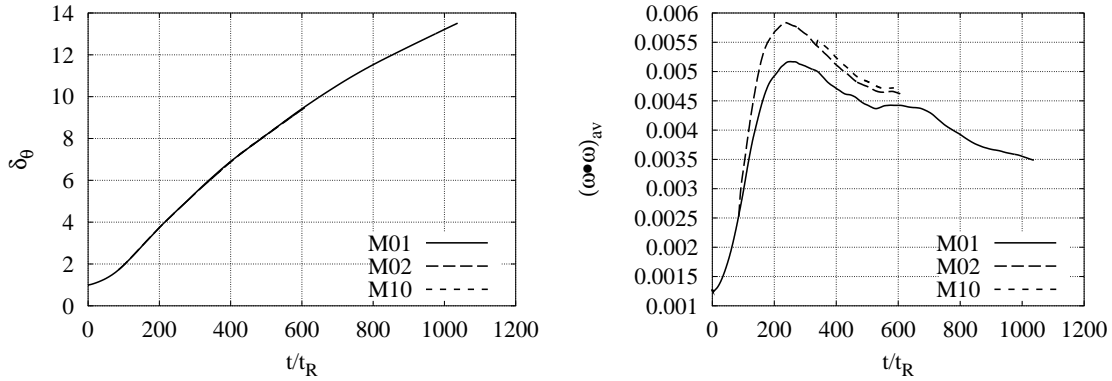


Abbildung 6.23: Vergleich unterschiedlicher Gitterweiten; links:  $\delta_\theta/\delta_{\theta 0}$ ; rechts:  $(\vec{\omega} \circ \vec{\omega})_{av}/(\Delta U/\delta_{\theta 0})^2$

### 6.2.3 Selbstähnlichkeit

Die selbstähnliche Normierung verwendet die Schichtdicke  $\delta$  und die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta U$ .

Die Wachstumsrate für den Fall M01 weist am Anfang eindeutig einen transienten Vorgang auf, s. Abb. 6.24. Danach bleibt sie immer für einige Zeit auf einem Plateau, um dann weiter abzufallen zum nächsten Plateau. Ab  $t/t_R = 750$  ist der Zahlwert verfälscht, hier beginnt der Einfluss der oberen und unteren Berandung des Gebietes. Somit wird in den Simulationen kein wirklich selbstähnlicher Bereich erreicht. Betrachtet man jedoch selbstähnlich normierte Größen, so stellt man fest, dass diese für bestimmte Zeitbereiche konstant bleiben. Dies gilt für alle in dieser Arbeit relevanten Größen, als da sind mittlere Werte, Reynoldsspannungen und Terme in den Transportgleichungen der turbulenten kinetischen Energie  $K$  und der solenoidalen Dissipationsrate  $\varepsilon_s$ . Zur Untersuchung der Modellierung der Dissipationsrate wurde in den Fällen M10, M11 und M14 ein solches Zeitintervall gewählt, jeweils um den Zeitpunkt herum, an dem die Mischungsschicht sich auf das etwa 6- bis 7-fache ihrer ursprünglichen Dicke aufgeweitet hat. In diesem Intervall wurden mehrere Strömungsfelder abgespeichert, die benötigten Größen berechnet und dann, selbstähnlich normiert, zeitlich gemittelt.

	$t/t_R$	$\delta_\theta/\delta_{\theta 0}$	$Re = \frac{\rho_{av}\Delta U\delta_\theta}{\mu_{av}}$
M10	365.91...411.96	6.39...7.00	1018...1126
M11	532.13...603.76	6.36...7.10	838...952
M14	312.58...370.60	5.22...6.27	843...1018

In den Fällen M10 und M11 wurden 32 Felder ausgewertet, im Fall M14 waren es 41.

Die Abbildungen 6.25 bis 6.30 zeigen die so erhaltenen selbstähnlich normierten Terme der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie und die Dissipationsrate.

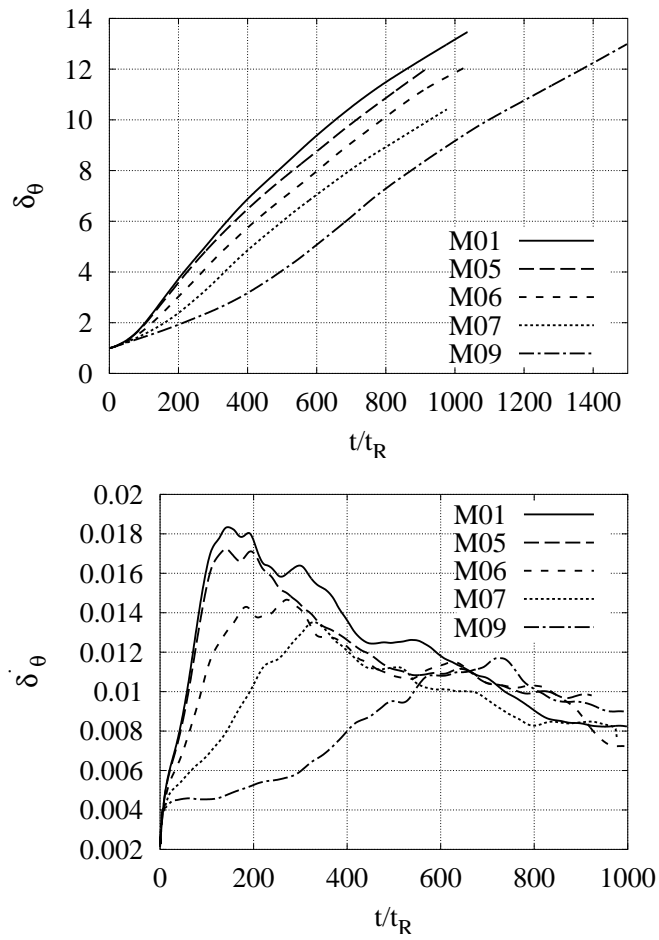


Abbildung 6.24: Wachstum bei unterschiedlichen Machzahlen; oben:  $\delta_\theta/\delta_{\theta 0}$ ; unten:  $\dot{\delta}_\theta$

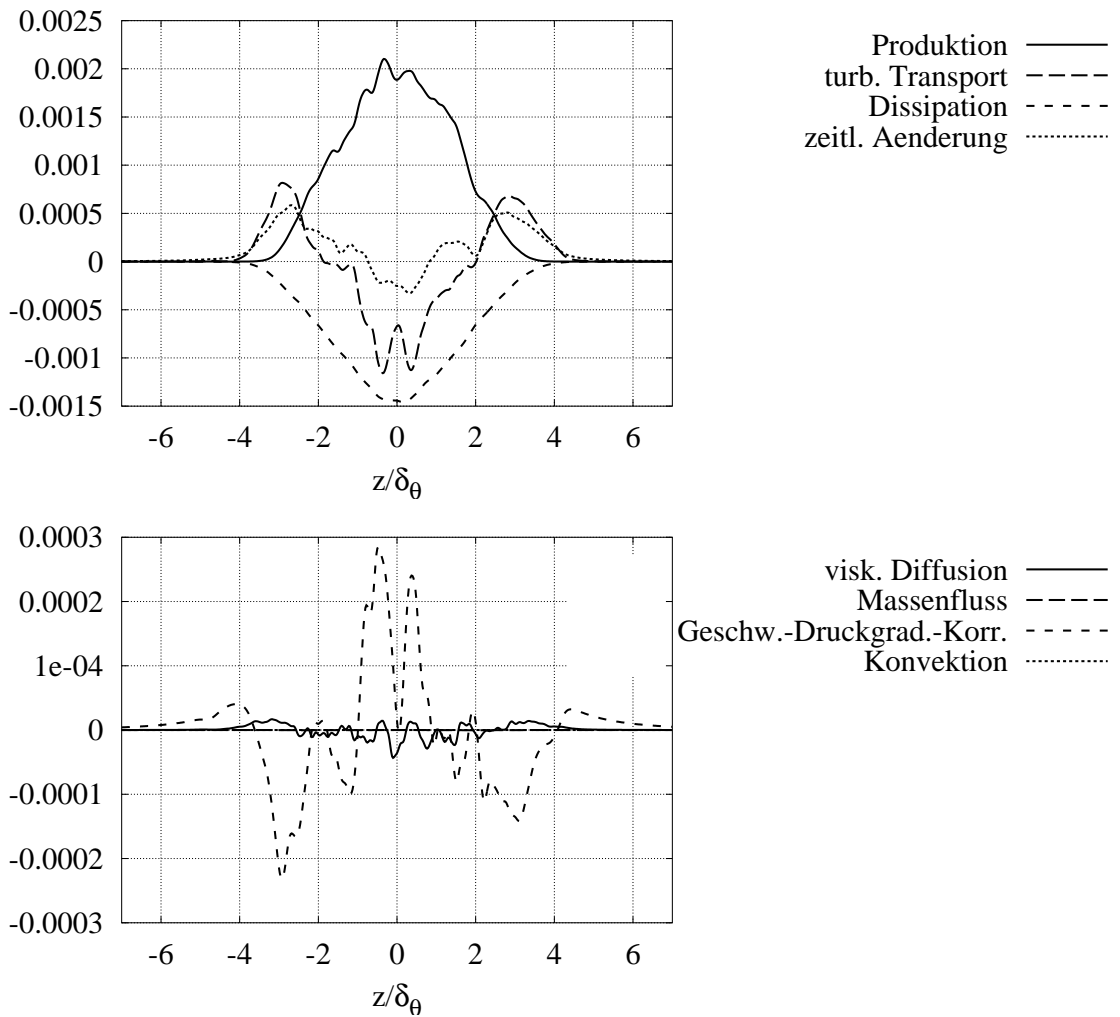


Abbildung 6.25: Simulation M10, Terme der  $K$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^3/\delta_\theta$

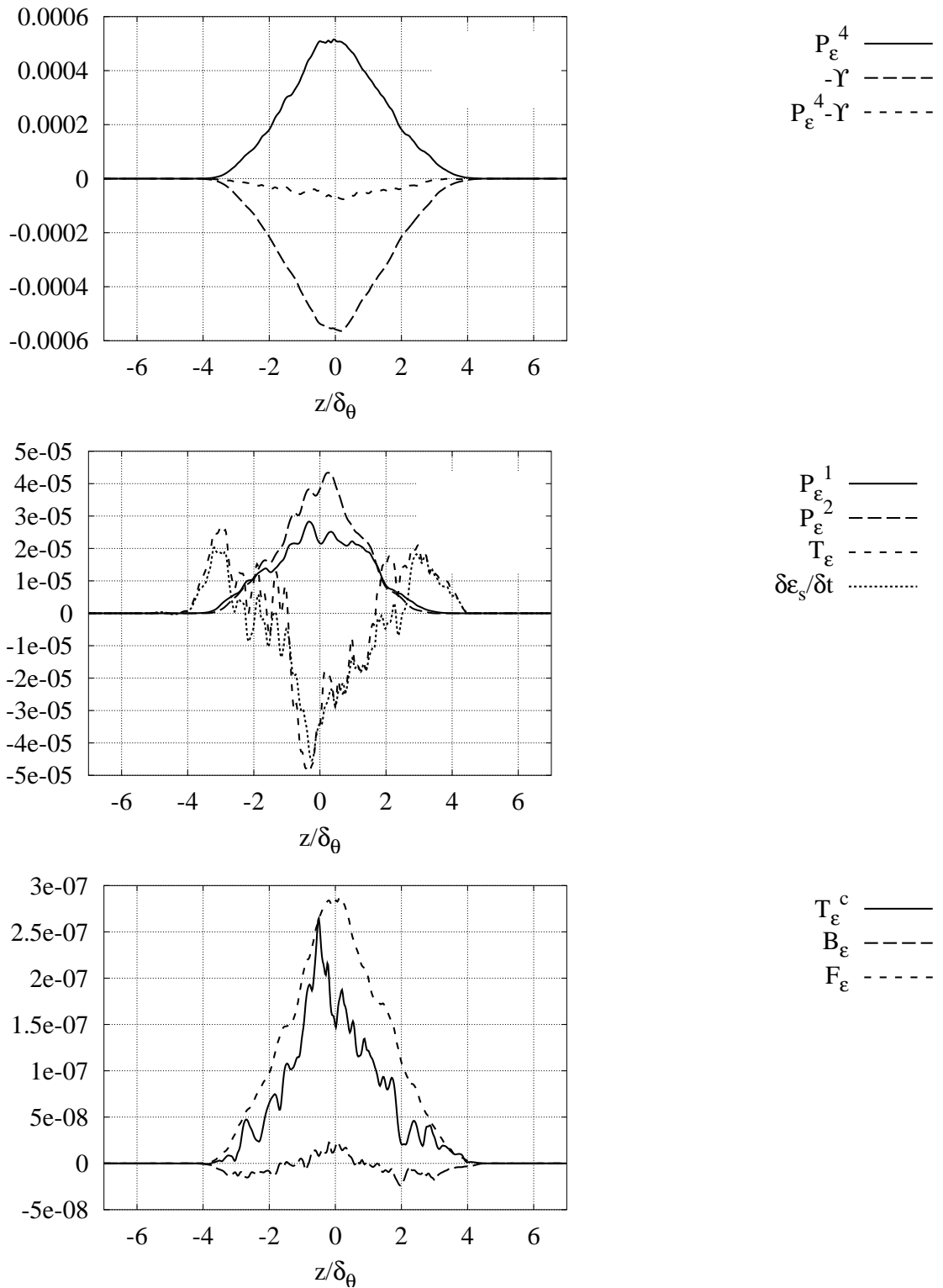


Abbildung 6.26: Simulation M10, Terme der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$ .  $P_\varepsilon^3$  und  $D_\varepsilon$  sind vernachlässigbar klein, sie werden nicht gezeigt.

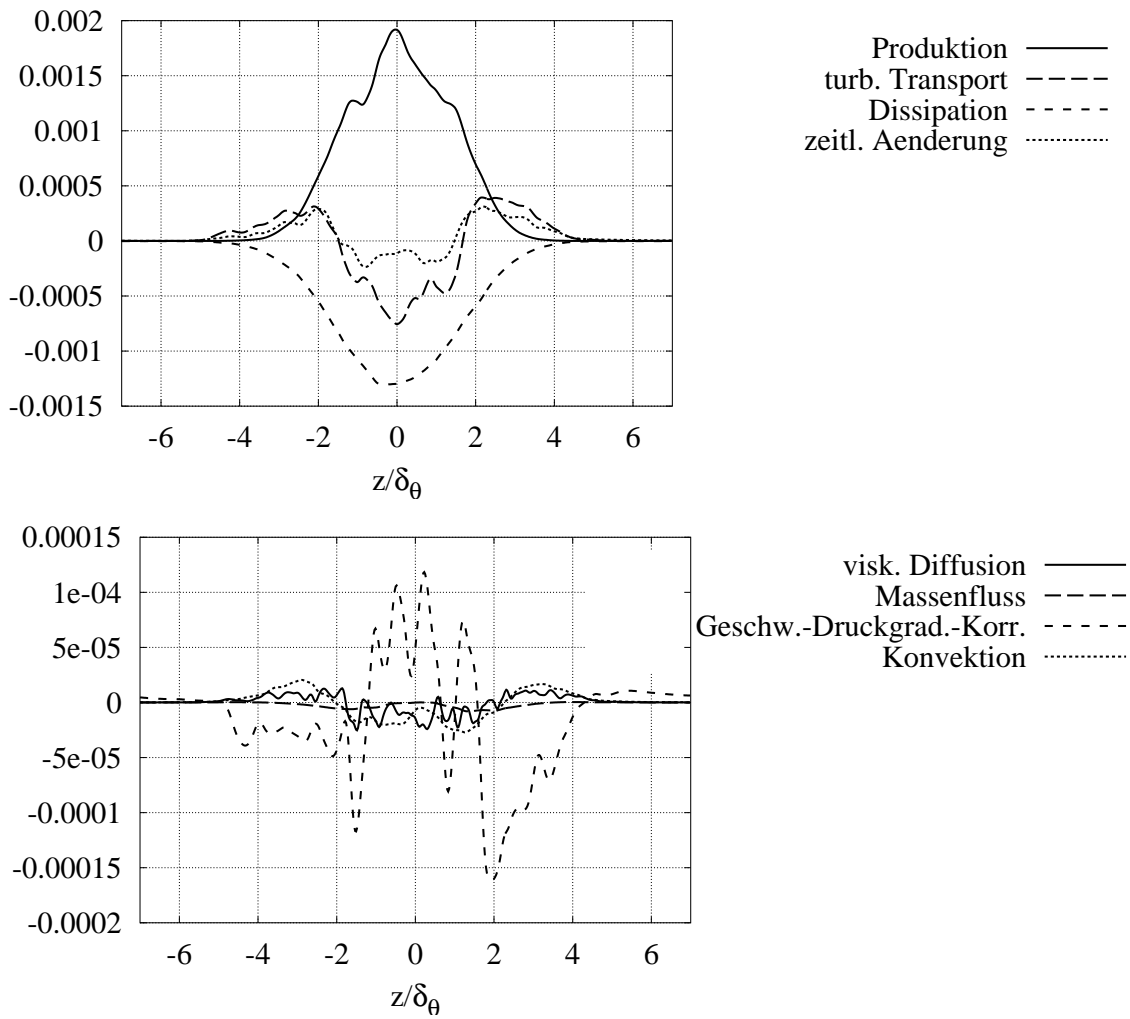


Abbildung 6.27: Simulation M11, Terme der  $K$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^3/\delta_\theta$



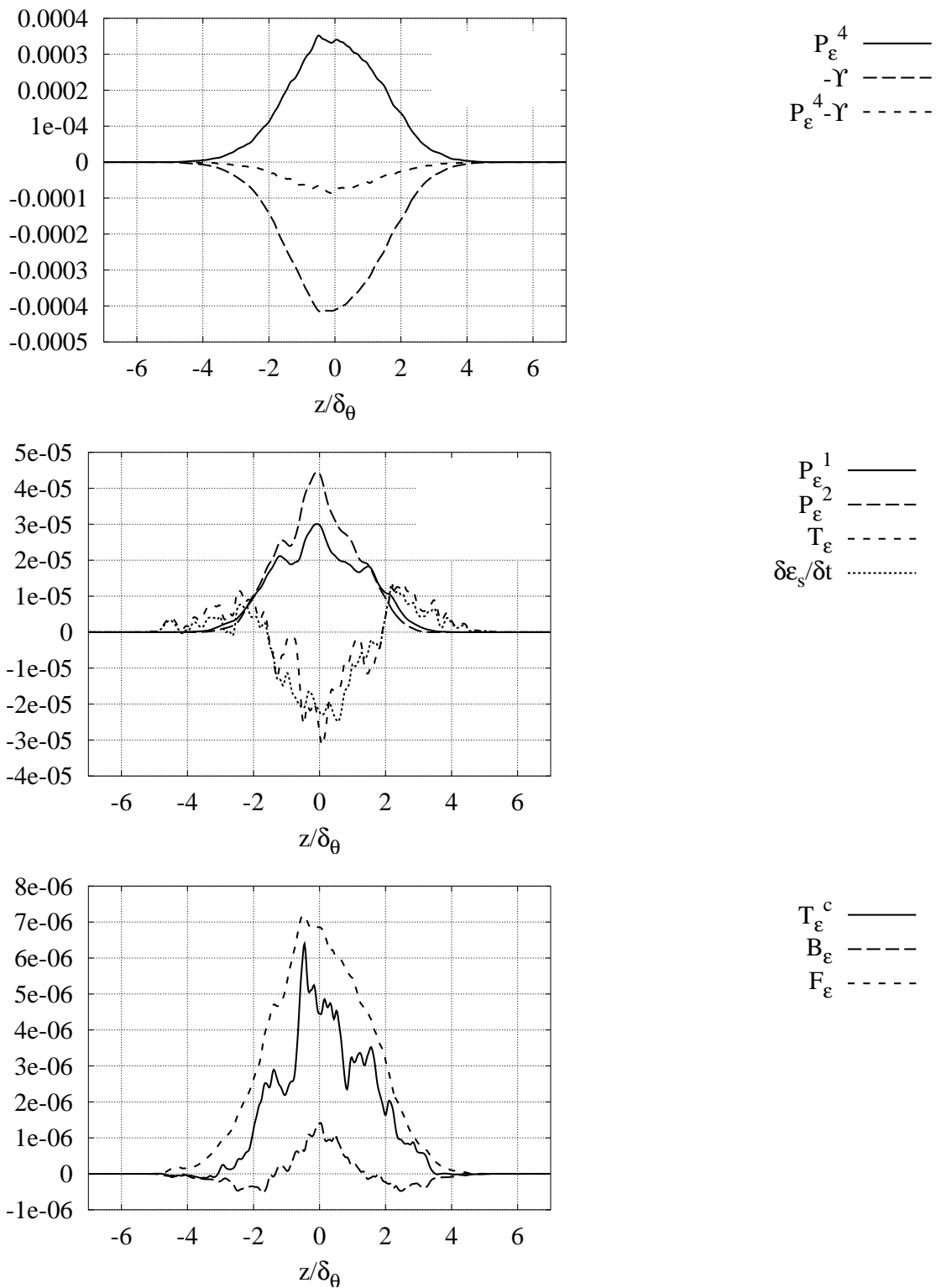


Abbildung 6.28: Simulation M11, Terme der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$ .  $P_\varepsilon^3$  und  $D_\varepsilon$  sind vernachlässigbar klein, sie werden nicht gezeigt.

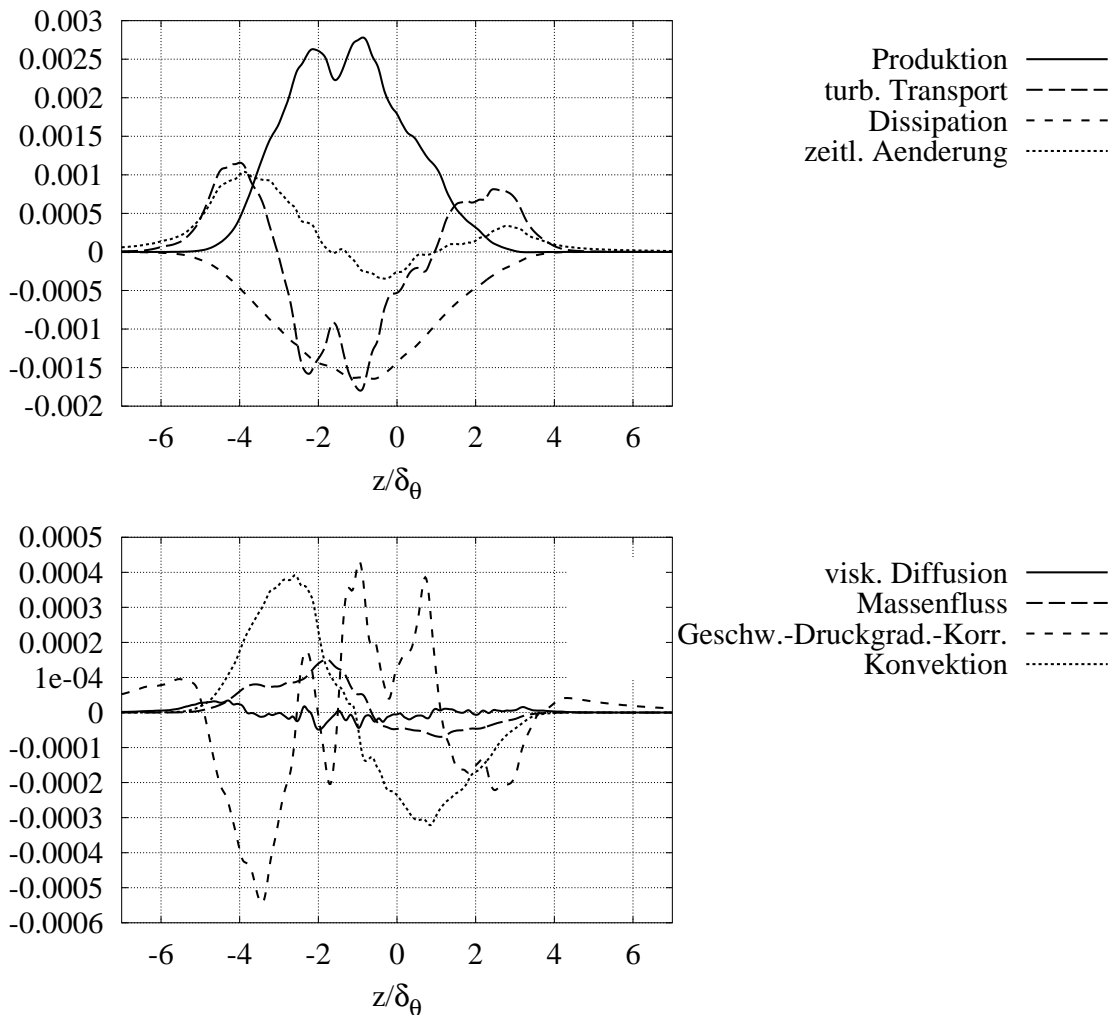


Abbildung 6.29: Simulation M14, Terme der  $K$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^3/\delta_\theta$

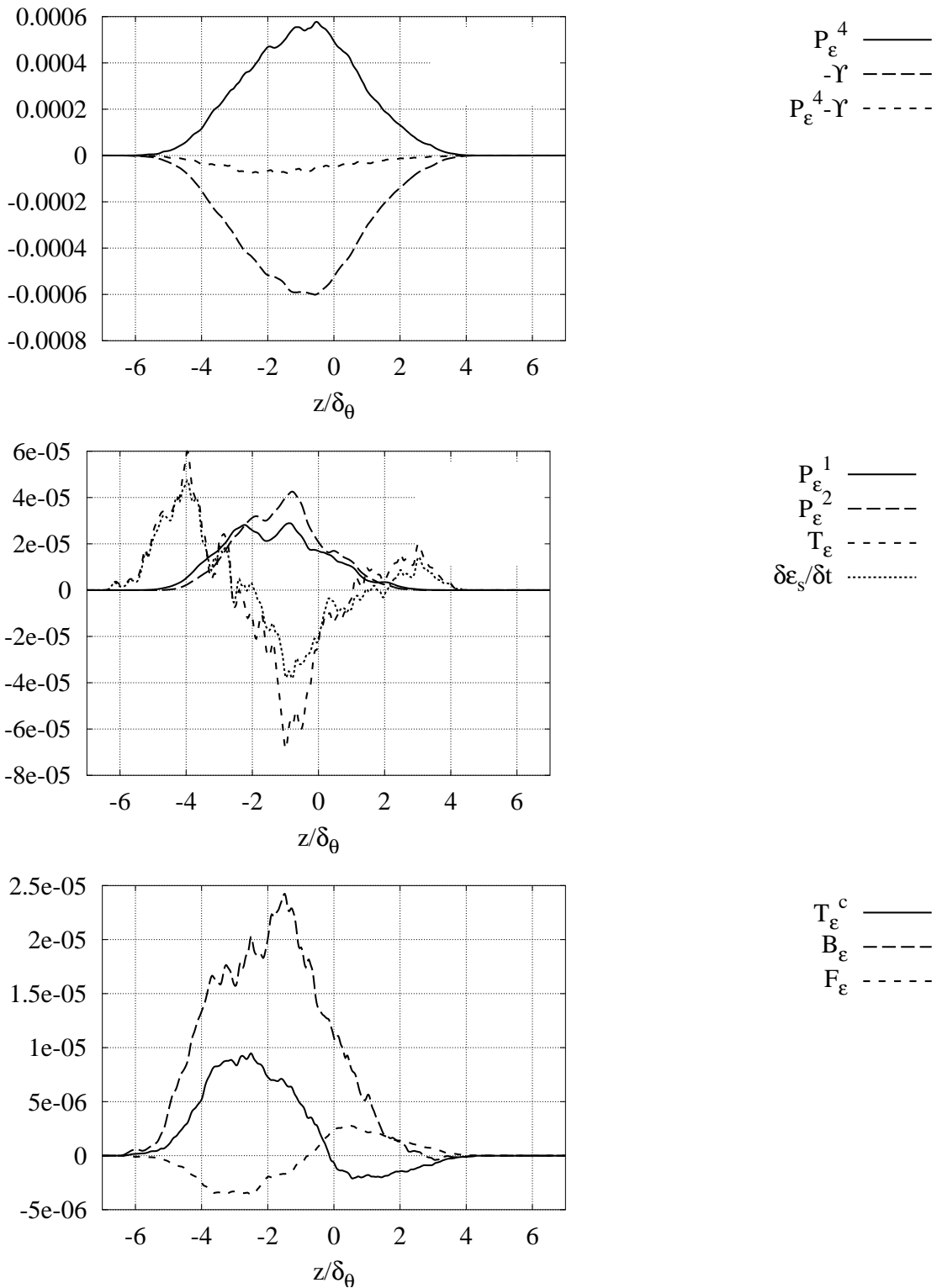


Abbildung 6.30: Simulation M14, Terme der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$ .  $P_\varepsilon^3$  und  $D_\varepsilon$  sind vernachlässigbar klein, sie werden nicht gezeigt.

	$M_c$	$\delta_\theta/\delta_{\theta 0} = 6.45 \dots 6.55$	$2.4 \dots 2.5$	$2 \dots 5$
M01	0.15	0.0146363	0.0178997	0.0171967
M05	0.3	0.0125954	0.0171185	0.0162711
M06	0.7	0.0111457	0.0135413	0.0138392
M07	1.1	0.0104773	0.010631	0.0119268
M09	1.5	0.0117032	0.00587618	0.00800418

Tabelle 6.3: Wachstumsrate  $\dot{\delta}_\theta$ , gemittelt über unterschiedliche Intervalle

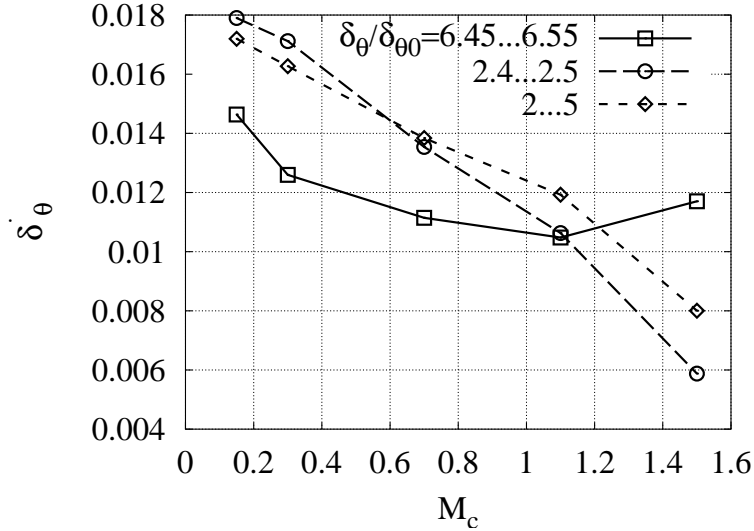


Abbildung 6.31: Wachstumsrate  $\dot{\delta}_\theta$ , gemittelt über unterschiedliche Intervalle, s. Tab. 6.3

## 6.2.4 Einflüsse von Kompressibilität und Dichteunterschieden

Im Folgenden werden zuerst Einflüsse von Kompressibilität auf die Wachstumsrate anhand der Simulationen M01, M05, M06, M07 und M09 und von Dichteunterschieden anhand von M01, M04 und M14 untersucht. Danach werden Unterschiede in selbstähnlich gemittelten Profilen der mittleren Größen, Reynoldsspannungen und Dissipationsrate der Simulationen M10 (quasi inkompressibel), M11 ( $M_c = 1.1$ ) und M14 ( $\rho_2/\rho_1 = 2.7$ ) erläutert. Zuletzt werden Korrelationen thermodynamischer Zustandsvariablen in den unterschiedlichen Strömungstypen M01 (quasi inkompressibel), M07 ( $M_c = 1.1$ ) und M04 ( $\rho_2/\rho_1 = 2.7$ ) diskutiert.

**Wachstumsrate:** Der markanteste Einfluss von Kompressibilität ist der starke Rückgang der Wachstumsrate bei steigender Machzahl, wie ihn die “Langley experimental curve” (Abb. 4.3) zeigt. Hier wird die in Gl. (4.23) definierte Impulsverlustdicke untersucht.

Bei der Auswertung der Simulationen kann das Integral in der Definition nicht von minus bis plus unendlich durchgeführt werden, man ist begrenzt auf das Re-

chengebiet  $z = -L_z/2 \dots L_z/2$ . Die Gebietsgrenzen sind weit genug von der Mischungsschicht entfernt, so dass dort keine turbulenten und viskosen Spannungen mehr auftreten. Verwendet man jedoch offene Randbedingungen, wie z.B. nichtreflektierende, stellt sich eine schwache nach außen gerichtete Strömung ein. Dies ist bedingt durch die Umwandlung kinetischer Energie in innere Energie im Inneren der Mischungsschicht, wodurch sich das Gas dort ausdehnt. Dieser Effekt ist umso stärker, je höher die Machzahl ist. Die zeitliche Ableitung von Gl. (4.23), unter Verwendung der Transportgleichungen für  $\bar{\rho}$  und  $\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u}$ , lautet nun, für den Spezialfall  $U_1 = -U_2 = \Delta U/2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \left( \frac{\Delta U}{2} \right)^2 dz - \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}^2}{\partial t} dz \\ &= -\frac{1}{4\rho_0} [\bar{\rho} \tilde{w}]_{-L_z/2}^{L_z/2} + \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} [\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w}]_{-L_z/2}^{L_z/2} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \left( 2\overline{\rho u'' w''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - 2\overline{\tau_{xz}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da an den Rändern  $\tilde{u} = \pm \Delta U/2$  gilt, wird dies zu

$$\frac{\partial \delta_\theta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \Delta U^2} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \left( 2\overline{\rho u'' w''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - 2\overline{\tau_{xz}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) dz, \quad (6.10)$$

was, da angenommen wird, dass an den Rändern die Spannungen Null sind, der Wachstumsrate bei Integration von minus bis plus unendlich (Gl.(4.31)) entspricht.

Die Wachstumsraten werden mit der Geschwindigkeitsdifferenz normiert, um unterschiedliche Strömungen vergleichen zu können.

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} / \Delta U \quad (6.11)$$

ist die dimensionslose Wachstumsrate. Vreman *et al.* [59], Freund *et al.* [16] und Pantano & Sarkar [36] zeigen in ihren numerischen Simulationen einen Rückgang der Wachstumsrate mit steigender Machzahl, der dem Verlauf der ‘‘Langley experimental curve’’ folgt.

Nahe dem ausgewerteten selbstähnlichen Bereich bei  $\delta_\theta/\delta_{\theta 0} \approx 6.5$  zeigen die eigenen Simulationen einen leichten Rückgang der Wachstumsrate um ein Viertel, mit Ausnahme der Simulation M09 mit  $M_c = 1.5$ , bei der sie wieder ansteigt, s. Tab. 6.3 und Abb. 6.31. Betrachtet man Zeitbereiche, die denen entsprechen, die Vreman *et al.* und Freund *et al.* betrachteten, ergibt sich ein starker monotoner Rückgang um zwei Drittel bzw. die Hälfte. Der Abfall folgt jedoch nicht dem Verlauf der ‘‘Langley experimental curve’’ (Abb. 4.3) mit dem starken Abfall bei  $M_c = 0.5$  und der folgenden Annäherung an einen asymptotischen Wert. Da die Wachstumsrate anscheinend stark von der Auswahl der Daten abhängt, werden im Folgenden die Ergebnisse der drei oben zitierten Arbeiten diskutiert.

Bei Vreman *et al.* [59] zeigen die Wachstumsraten unzweifelhaft einen Rückgang mit der Machzahl, s. deren Abb. 1. In den Fällen  $M_c = 0.2$  und  $M_c = 0.6$  wurden als Startbedingungen der instabilste Mode, eine zweidimensionale Störung, zusammen

mit der ersten und der zweiten Subharmonischen aufgeprägt. Dies wurde von drei Paaren von schrägen Moden mit zufälliger Phasenlage überlagert, um den Übergang zu dreidimensionaler Turbulenz zu ermöglichen. In den Simulationen mit höherer Machzahl ( $M_c = 0.8$  und  $M_c = 1.2$ ) wurde nur ein Paar von gleichen und entgegengesetzten Moden vorgegeben. Diese geringe Bandbreite an anfänglichen Störungen lässt es fraglich erscheinen, ob das entstehende fluktuierende Feld als entwickelte Turbulenz zu betrachten ist, oder ob vielmehr das nichtlineare Wachstum der primären Instabilität mit einer beginnenden Transition in Turbulenz dominant ist. Die geringe Anzahl turbulenter Strukturen in deren Abb. 2 weist auf Letzteres hin.

Freund *et al.* [16] werten ihre Mischungsschichten unterschiedlicher Machzahl zu einem Zeitpunkt aus, in dem eine bestimmte Schichtdicke erreicht ist ( $\frac{\delta_m}{r_0} = 0.2$ , siehe deren Abb. 32). An diesem definierten Punkt weisen die Wachstumsraten eine starke Abhängigkeit von der Machzahl auf. Betrachtet man spätere Zeitpunkte, bleibt die Wachstumsrate bei niedriger Machzahl konstant, wohingegen sie bei höherer Machzahl ansteigt und sich somit dem Wert für inkompressible Strömung annähert.

Pantano & Sarkar [36] geben kein Kriterium an, wie der Zeitbereich ausgewählt wurde, in dem die Wachstumsrate bestimmt wurde. Insbesondere ein Vergleich der Wachstumsraten für  $M_c = 0.7$  und  $M_c = 1.1$  in deren Abb. 2 ist aufschlussreich. Bis  $t/t_R = 600$  weisen beide Simulationen kaum Unterschiede auf. Die Simulation mit  $M_c = 0.7$  wird an diesem Zeitpunkt abgebrochen, die Wachstumsrate für den Zeitbereich  $t/t_R = 300 \dots 600$  bestimmt. In diesem Bereich sind die Wachstumsraten beider Simulationen offensichtlich gleich. Die Simulation mit der höheren Machzahl wird weiter fortgeführt, als Zeitbereich für die Bestimmung der Wachstumsrate wird  $t/t_R = 500 \dots 1000$  gewählt. Welche Wachstumsrate die Simulation mit  $M_c = 0.7$  in diesem Zeitbereich aufweist, bleibt unbekannt. Die Wachstumsrate für  $M_c = 1.1$  liegt nun genau auf der ‐Langley experimental curve‐. Diese Vorgehensweise zur Bestimmung der Wachstumsrate erscheint dem Autor mehr als fraglich.

Da also auch in diesen Arbeiten das Verhalten der Wachstumsrate durch die Wahl des betrachteten Zeitbereichs manipuliert werden kann, folgert der Autor, dass bisherige Simulationen, inklusive der eigenen, nicht in der Lage sind, den Einfluss der Machzahl auf die Wachstumsrate eindeutig zu quantifizieren.

Der Einfluss von Dichteunterschieden auf die Wachstumsrate der Simulationen M01, M04 und M14 ist uneinheitlich. In Simulation M04 ergibt sich bei einer Schichtdicke von  $\delta_\theta/\delta_{\theta 0} \approx 6.5$  eine um 10% niedrigere Wachstumsrate als in Simulation M01. M04 hat einen Dichteunterschied von 2.7 und eine höhere anfängliche Reynoldszahl als M01. Die Simulation M14 mit einem Dichteunterschied von ebenfalls 2.7 und derselben anfänglichen Reynoldszahl wie M01 weist hingegen eine um 11% höhere Wachstumsrate als M01 auf. Pantano & Sarkar [36] stellten in ihren direkten numerischen Simulationen einen deutlichen Rückgang der zeitlichen Wachstumsrate mit steigendem Dichteunterschied fest. Dies ist im Widerspruch zu dem Ergebnis von Papamoschou & Roshko [37], dass die zeitliche Wachstumsrate unabhängig vom Dichteunterschied ist.

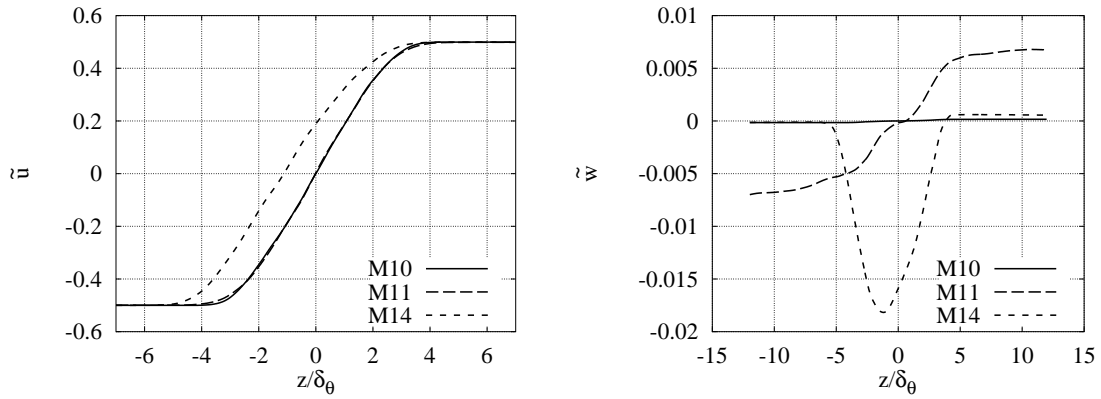


Abbildung 6.32: Geschwindigkeiten  $\tilde{u}$  (links) und  $\tilde{w}$  (rechts), normiert mit  $\Delta U$

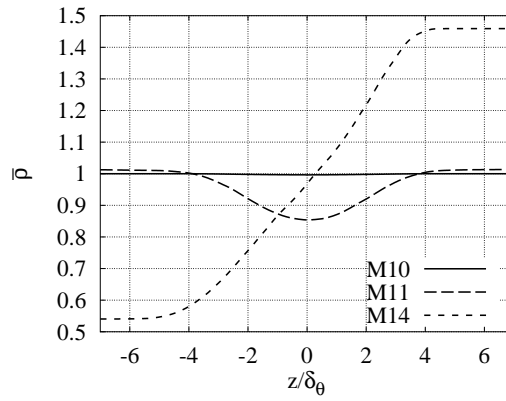


Abbildung 6.33: Dichte  $\bar{\rho}/\rho_0$

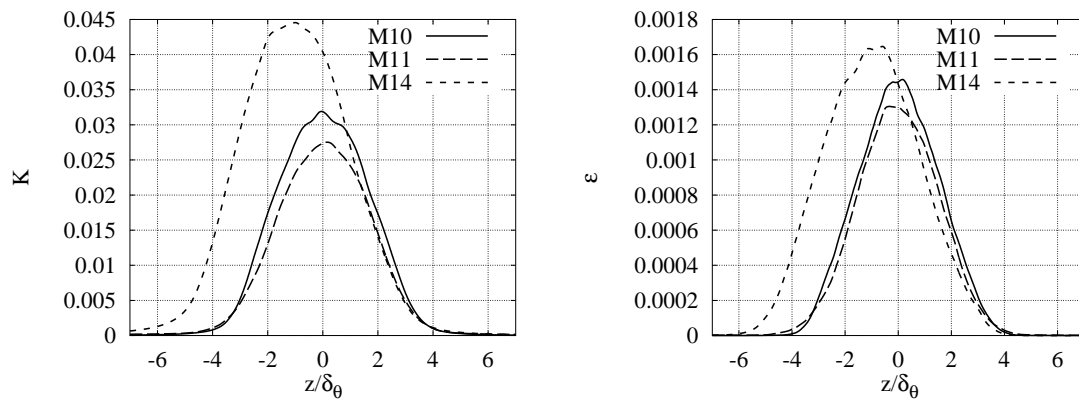


Abbildung 6.34: Turbulente kinetische Energie  $K/\Delta U^2$  (links) und ihre Dissipationsrate  $\varepsilon/(\Delta U^3/\delta_\theta)$  (rechts)

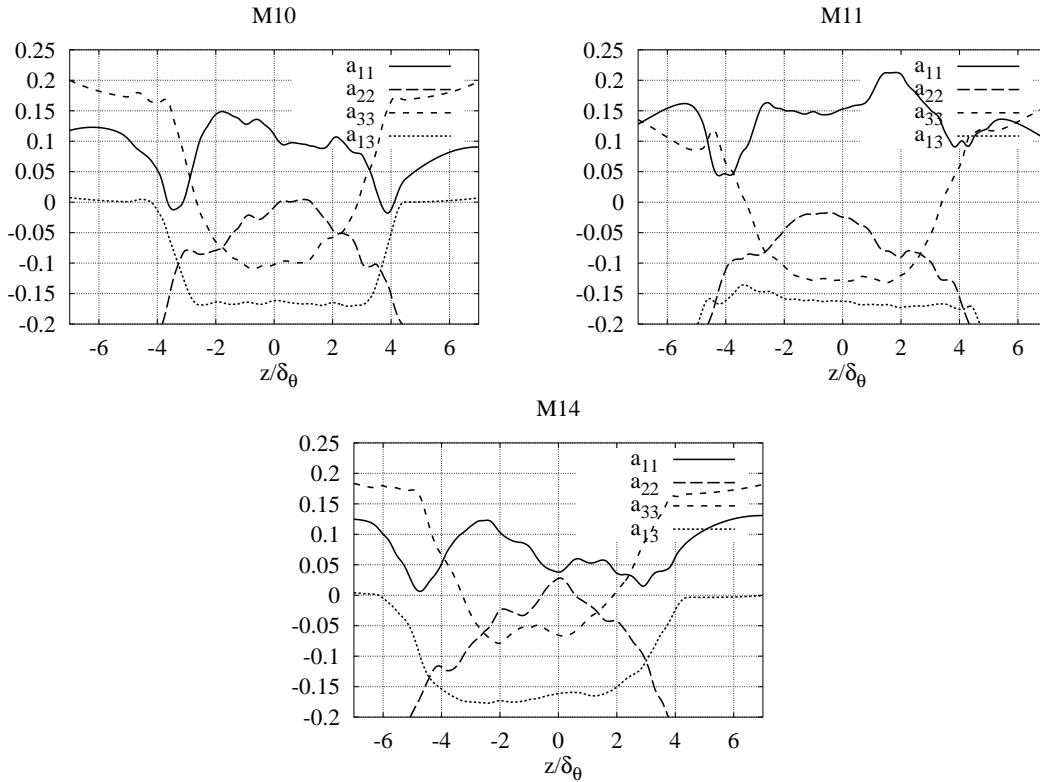


Abbildung 6.35: Anisotropietensor der Reynoldsspannungen  $a_{ij}$ ; oben links: Simulation M10; oben rechts: Simulation M11; unten: Simulation M14

**Mittlere Profile:** Die mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung, betrachtet in selbstähnlicher Skalierung, ist nahezu unabhängig von der Machzahl. Die Kurven für M10 und M11 liegen übereinander, s. Abb. 6.32. Ein Dichteunterschied zwischen den beiden Strömen verschiebt das Zentrum der Mischungsschicht in Richtung des leichteren Stromes, bedingt durch die Erhaltung des mittleren Impulses, bei dem hier eingestellten Dichteverhältnis von  $1/2.7$  (M14) um ungefähr eine Impulsverlustdicke. Darüberhinaus wird das Profil leicht asymmetrisch, der Gradient ist schwächer auf der Seite hoher Dichte. Je höher die Machzahl, desto mehr dehnt sich das Gas im Inneren der Mischungsschicht wegen der Zufuhr innerer Energie aus, daher die deutlich von Null verschiedene Geschwindigkeitskomponente  $\tilde{w}$ . Im Fall mit Dichtegradienten ergibt sich im Inneren der Schicht durch turbulente Vermischung ein mittlerer Massenstrom  $\bar{\rho}\tilde{w}$  in Richtung der Seite niedriger Dichte.

$D_\omega$ , das Verhältnis der Wirbelschichtdicke  $\delta_\omega$  zur Impulsverlustdicke  $\delta_\theta$  variiert leicht. Im Fall M10 ist  $D_\omega = 4.9$ , im Fall M11 4.6 und im Fall M14 5.3.

Die Dichte ist bei niedriger Machzahl (M10) überall gleich. Bei hoher Machzahl (M11) führt die Erwärmung aufgrund von Dissipation kinetischer Energie zu einer geringeren Dichte in der Schichtmitte. Hier sinkt der Wert um ca. 15%, s. Abb. 6.33. Das Dichteprofil im Falle der Strömung mit Dichteunterschieden (M14) verläuft qualitativ wie das von Brown & Roshko [9] für eine Mischungsschicht mit dem Dichteverhältnis  $1/7$  gemessene: Ausgehend von der Seite niedrigerer Dichte gibt es einen Bereich eines schwächeren Gradienten, der sich in Richtung Schichtmitte sogar



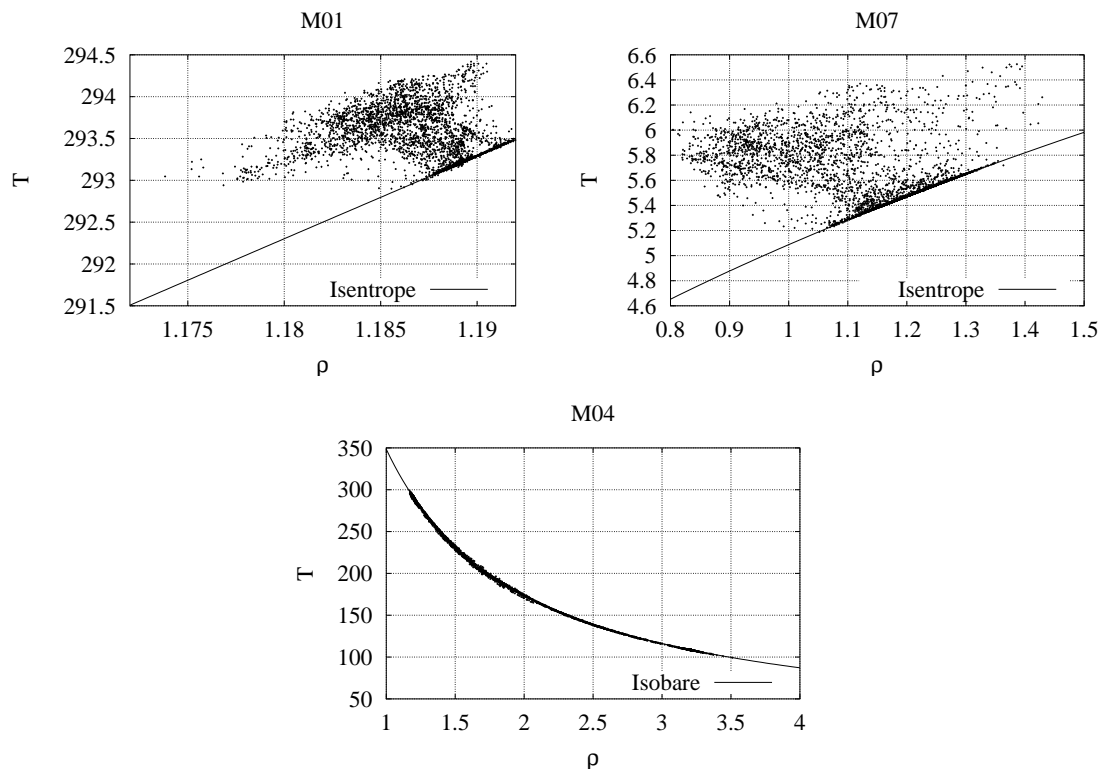


Abbildung 6.36: *Scatter plots* von  $T$  über  $\rho$ , Simulationen M01, M07 und M04

noch leicht abschwächt, um dann in einen steilen Gradienten auf der Seite höherer Dichte überzugehen. Diese Details sind bei Brown & Roshko stärker ausgeprägt, da das Dichteverhältnis mit  $1/7$  dort wesentlich größer ist als im Fall M14, wo es  $1/2.7$  beträgt. Der Gradientenverlauf kann damit erklärt werden, dass schweres Fluid, da es bei gleicher Geschwindigkeit einen höheren Impuls aufweist, wesentlich tiefer in den Bereich geringerer Dichte eindringt, als umgekehrt.

**Reynoldsspannungen und Dissipationsrate:** Die Diagonalelemente des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen steigen mit der Machzahl. Die Komponente  $a_{13}$  bleibt unbeeinflusst, s. Abb. 6.35. Der maximale Wert der turbulenten kinetischen Energie  $K$  geht um 14% zurück, der der Dissipationsrate  $\varepsilon$  um 10% (Abb. 6.34).

Der Gradient in der mittleren Dichte bewirkt eine Verringerung der Diagonalelemente des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen,  $a_{13}$  bleibt unbeeinflusst. Das Maximum der turbulenten kinetischen Energie  $K$  steigt stark um 40%, das der Dissipationsrate  $\varepsilon$  um 14%.

**Fluktuierende thermodynamische Variablen:** Die Abbildung 6.36 zeigt *scatter plots* von  $T$  über  $\rho$  für M01, den quasi inkompressiblen Fall, M07 mit  $M_c = 1.1$  und M04 mit einem Dichteunterschied  $\rho_2/\rho_1 = 2.7$ , jeweils zu einem Zeitpunkt  $t/t_R \approx 400$ . Die Mischungsschichten ohne Dichteunterschied zeigen qualitativ ähnliches Verhalten. Ein Teil der Punkte liegt dicht konzentriert auf der Isentro-

pe, die die Entropie des Start- bzw. Fernfelds kennzeichnet. Die anderen Punkte liegen in einem Band oberhalb dieser Isentrope in einem Bereich höherer Entropie, bedingt durch die Umwandlung von kinetischer in innere Energie durch molekulare Effekte. Der wesentliche Unterschied zwischen M01 und M07 ist, dass im Fall hoher Machzahl die relativen Änderungen von Dichte und Temperatur wesentlich höher sind. Da die Dichteunterschiede eine Folge der Zufuhr an innerer Energie sind, sind sie nicht mit einer hohen Divergenz der Geschwindigkeiten verbunden. Selbst im Fall M07 beträgt das Verhältnis von dilatationaler zu soleniodaler Dissipationsrate ( $\frac{4}{3}\tilde{\nu}\partial u'_i/\partial x_i \cdot \partial u'_j/\partial x_j / (\tilde{\nu}\omega'_k\omega'_k)$ ) nur 0.015. Im Fall M04 sind Temperaturunterschiede nicht Folge von Dissipation. Die beiden Ströme haben unterschiedliche Temperaturen umgekehrt proportional zur Dichte, bei einem gleichen Druck im Fernfeld. Diese Isobarenbeziehung bleibt bei der Durchmischung erhalten.

## 6.3 Ebene turbulente Kanalströmung

### 6.3.1 Parameter

	$M = \frac{u_{av}}{c_w}$	$Re$	$Re_{av}$	$Re_\tau$	$Re_\tau^*$	$\rho_w/\rho_{av}$
KM03	0.350	2842.3	2808.6	181.8	177.8	1.0175
K09	0.34816	2828.7	2792.8	184.40	180.1	1.0187
K3000	1.5327	3052.7	2452.2	220.7	147.8	1.3697
K6000neu	3.1399	6159.8	3204.0	563.2	175.2	2.5371
K6000_128	3.1106	6104.7	3186.8	557.31	174.3	2.5243
	Gebietsgröße/ $H$		Punkte			
KM03	$9.6 \times 6 \times 2$		$192 \times 160 \times 129$			
K09	$9.6 \times 6 \times 2$		$384 \times 288 \times 231$			
K3000	$4\pi \times \frac{4}{3}\pi \times 2$		$192 \times 128 \times 152$			
K6000neu	$2\pi \times \frac{4}{3}\pi \times 2$		$256 \times 128 \times 221$			
K6000_128	$4\pi \times \frac{4}{3}\pi \times 2$		$512 \times 256 \times 221$			
	Auflösung in Pluseinheiten				$l^*/l^+ _{(z=H)} = Re_\tau/Re_\tau^*$	
KM03	$9.0911 \times 6.8183 \times 1.1935 \dots 4.1858$				1.0224	
K09	$4.6101 \times 3.8417 \times 0.66872 \dots 2.3628$				1.0237	
K3000	$7.2212 \times 3.6106 \times 0.83916 \dots 4.9899$				1.4930	
K6000neu	$13.824 \times 9.2159 \times 0.88552 \dots 10.173$				3.2154	
K6000_128	$13.679 \times 9.1190 \times 0.87621 \dots 10.066$				3.1974	

Tabelle 6.4: Parameter der Simulationen turbulenter Kanalströmung. Die Simulationen KM03, K3000, K6000neu und K6000\_128 wurden von Foysi [15] durchgeführt. Dort werden sie mit M0.3, M1.5, M3.0a und M3.0b bezeichnet.

Die Strömung ist bestimmt durch die halbe Kanalhöhe  $H$ , die durchschnittliche Dichte  $\rho_{av}$ , die Wandtemperatur  $T_w$  und die Volumenkraft  $V_x$ . Es wurde das *upwind*-Verfahren mit den Ableitungen CULD, LELETRI und LELETRI2 verwendet. Nu-

merische Parameter sind zusätzlich die Gebietsgröße und die räumliche Auflösung. Die Strömung entwickelt sich unabhängig vom Startfeld. Um einen möglichst kurzen transienten Vorgang zu erreichen, wurden als Startfelder bereits existierende Strömungsfelder von Kanalsimulationen bei anderen Parametern verwendet und auf das jeweilige Gitter interpoliert.

Die ersten beiden Simulationen, KM03 und K09, sind quasi inkompressibel. Die physikalischen Parameter entsprechen der Simulation bei  $Re_\tau = 180$  von Kim *et al.* [25]. K09 ist bei gleichen physikalischen Parametern doppelt so fein aufgelöst. K13 hat eine höhere Reynoldszahl. K3000 und K6000neu weisen eine höhere Machzahl von 1.5 bzw. 3.1 auf. Hier zeigen sich Kompressibilitätseinflüsse. K6000\_128 entspricht dem Fall K6000neu bis auf das doppelt so große Gebiet in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Mit dieser Simulation kann überprüft werden, ob die Gebietsgröße der Simulation K6000neu ausreicht.

Aufgrund der in wandnormaler Richtung variierenden mittleren Dichte sind unterschiedliche Definitionen von Reynoldszahlen möglich:

$$Re = \frac{\rho_{av} u_{av} H}{\mu_w} \quad (6.12)$$

$$Re_{av} = \frac{\rho_{av} u_{av} H}{\mu_{av}} \quad (6.13)$$

$$Re_\tau = \frac{\rho_w \cdot \sqrt{\tau_w / \rho_w} H}{\mu_w} \quad (6.14)$$

$$Re_\tau^* = \frac{\bar{\rho} \cdot \sqrt{\tau_w / \bar{\rho}} H}{\bar{\mu}} \Big|_{(z=H)}. \quad (6.15)$$

All diese Definitionen beinhalten mindestens eine Größe, die Teil der Lösung ist ( $\rho_w$ ,  $\mu_{av}$ ,  $u_{av}$ ,  $\bar{\rho}(z=H)$  oder  $\bar{\mu}(z=H)$ ). Betrachtet man die Größen, die in den unterschiedlichen Definitionen verknüpft werden, kann man feststellen, welche dieser Reynoldszahlen die Strömung charakterisiert.  $\rho_{av}$ ,  $\mu_{av}$ ,  $u_{av}$ ,  $\bar{\rho}(z=H)$ ,  $\bar{\mu}(z=H)$  und  $H$  sind relevant in Kanalmitte,  $\rho_w$  und  $\mu_w$  an der Wand.  $\tau_w$  beschreibt an der Wand den mittleren Geschwindigkeitsgradienten und im gesamten Kanal die Intensität der Fluktuationen, ist also überall eine relevante Größe. Die Reynoldszahlen  $Re$  und  $Re_\tau$  verknüpfen also Größen, die nur wenig miteinander zu tun haben. Sie erscheinen ungeeignet, die Strömung zu beschreiben. Die Definitionen von  $Re_{av}$  und  $Re_\tau^*$  beinhalten nur in Kanalmitte relevante Größen, sind also in der Lage, die Situation dort zu beschreiben. Eine Reynoldszahl, die speziell den wandnahen Bereich beschreibt, ist überflüssig. Dort verhält sich die Strömung entsprechend von Wandgesetzen, die nur schwach reynoldszahlabhängig sind.

Die Reynoldszahlen  $Re_{av}$  und  $Re_\tau^*$  unterscheiden sich nicht wesentlich in den verschiedenen Simulationen, sie variieren zwischen 2450 und 3200 bzw. 148 und 180.

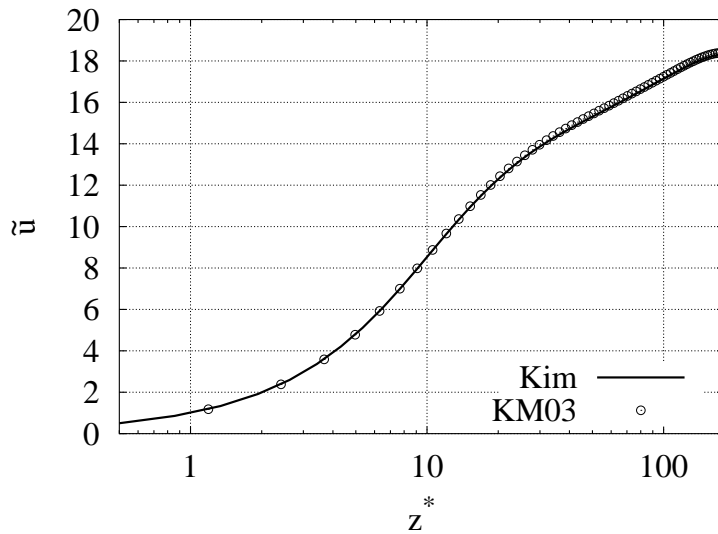


Abbildung 6.37: Vergleich der Simulation KM03 mit Kims Simulation bei  $Re_\tau = 180$ ,  $\tilde{u}^*$ ; —: Kim;  $\odot$ : KM03

### 6.3.2 Genauigkeit der Simulationen

Die Genauigkeit wird zum einen durch den Vergleich mit der Simulation von Kim *et al.* [25] nachgewiesen, die sich als Standard in der numerischen Simulation bewährt hat. Zum anderen werden Zweipunktkorrelationen und Bilanzen betrachtet.

Kim *et al.* [25] verwendeten Gitterweiten von  $\Delta x^+ = 12$ ,  $\Delta y^+ = 7$  und  $\Delta z^+ = 0.05 \dots 4.4$ . Abgesehen vom Wandpunkt, der bei Kim *et al.* nicht durch physikalische Notwendigkeit, sondern durch das verwendete Spektralverfahren bestimmt ist, sind alle hier ausgewerteten Simulationen genausogut aufgelöst, bis auf K6000neu und K6000\_128. Hier ist die Auflösung in Strömungs- und spannweitiger Richtung mit 13.8 und 9.2 leicht gröber als 12 und 7. In Kanalmitte ist die wandnormale Auflösung mit 10.1 deutlich gröber als die 4.4 von Kim *et al.*. Berücksichtigt man allerdings, dass das viskose Längenmaß wegen der höheren Temperatur in Kanalmitte ebenfalls deutlich wächst, beträgt die wandnormale Auflösung  $\Delta z^* = \Delta z^+ / 3.2 = 3.2$ , was etwas feiner als in den Simulationen von Kim *et al.* ist.

Ein Vergleich der Daten der Simulationen M03 und der von Kim *et al.* zeigt eine perfekte Übereinstimmung von mittlerem Feld, Reynoldsspannungen und Transportgleichungen für  $K$  und  $\overline{\rho u'' u''}$  (Abb. 6.37, 6.38 und 6.39). Die Übereinstimmung ist immer noch gut, aber nicht mehr perfekt in den Transportgleichungen der übrigen Reynoldsspannungen (Abb. 6.40).

Ebenfalls mit einem Spektralcode wie Kim *et al.* berechneten Gilbert & Kleiser [21] diese Strömung. Hier wurde auch die Transportgleichung für die Dissipationsrate ausgewertet. Die Ergebnisse sind in sehr guter Übereinstimmung mit denen der Simulation K09, s. Abb. 6.41. Auch zeigt Abb. 6.42 nur geringe Unterschiede zwischen den unterschiedlich gut aufgelösten Simulationen K09 und KM03.

Die Abbildungen 6.43 bis 6.46 zeigen die Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten zum einen in Wandnähe bei  $z^* = 9$ , zum anderen in Kanalmitte. Diese

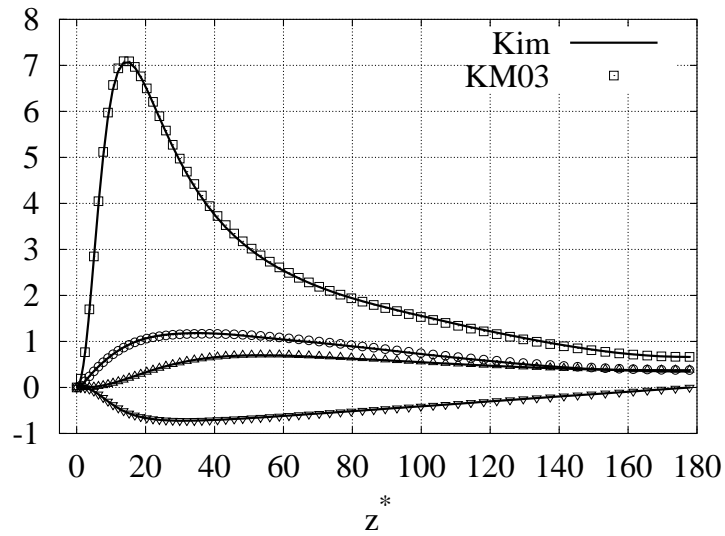


Abbildung 6.38: Vergleich der Simulation KM03 mit Kims Simulation bei  $Re_\tau = 180$ ,  $\overline{\rho u_i'' u_j''} / \tau_w$ ; Linien: Kim; Symbole: KM03;  $\square$ :  $\overline{\rho u'' u''}$ ;  $\odot$ :  $\overline{\rho v'' v''}$ ;  $\triangle$ :  $\overline{\rho w'' w''}$ ;  $\nabla$ :  $\overline{\rho u'' w''}$

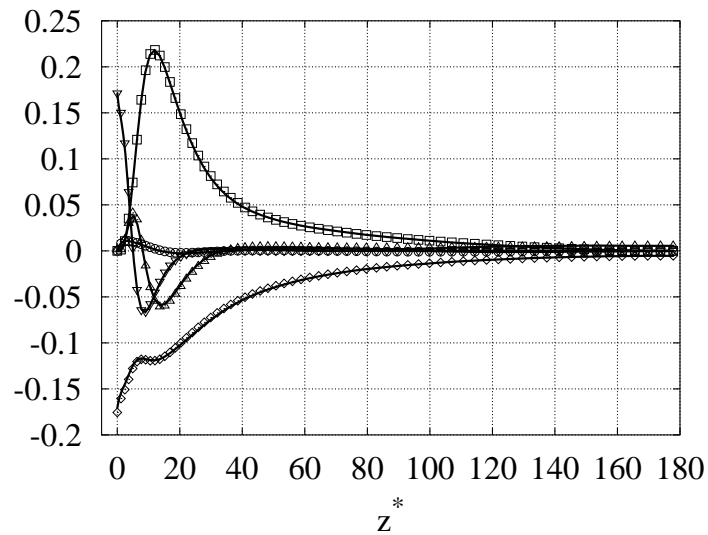


Abbildung 6.39: Vergleich der Simulation KM03 mit Kims Simulation bei  $Re_\tau = 180$ , Terme der  $K$ -Bilanz in semilokaler Skalierung bzw. Skalierung mit Wandseinheiten; Linien: Kim; Symbole: KM03;  $\square$ : Produktion;  $\odot$ : Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation;  $\triangle$ : turbulenter Transport;  $\nabla$ : Diffusion;  $\diamond$ : Dissipation

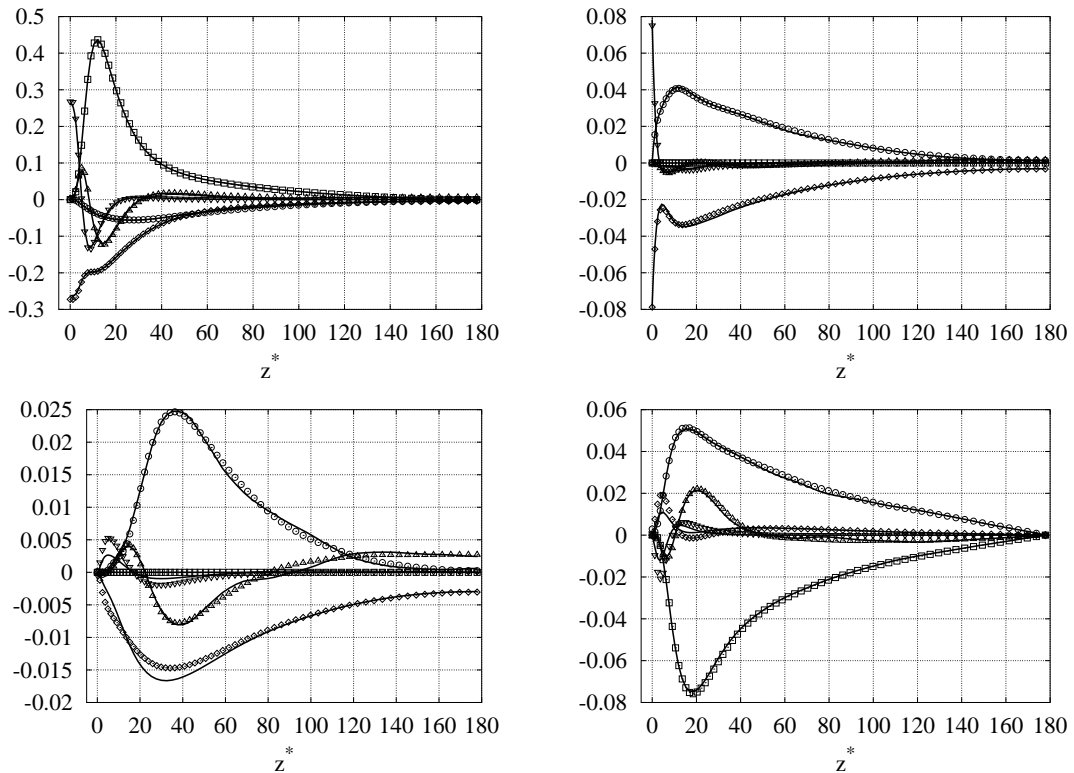


Abbildung 6.40: Vergleich der Simulation KM03 mit Kims Simulation bei  $Re_\tau = 180$ , Terme der Bilanzen der Reynoldsspannungen in semilokaler Skalierung bzw. Skalierung mit Wandeneinheiten; Linien: Kim; Symbole: KM03; oben links:  $\overline{\rho u u}$ ; oben rechts:  $\overline{\rho v v}$ ; unten links:  $\overline{\rho w w}$ ; unten rechts:  $\overline{\rho u w}$ ; □: Produktion; ⊙: Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation; △: turbulenter Transport; ▽: Diffusion; ◇: Dissipation

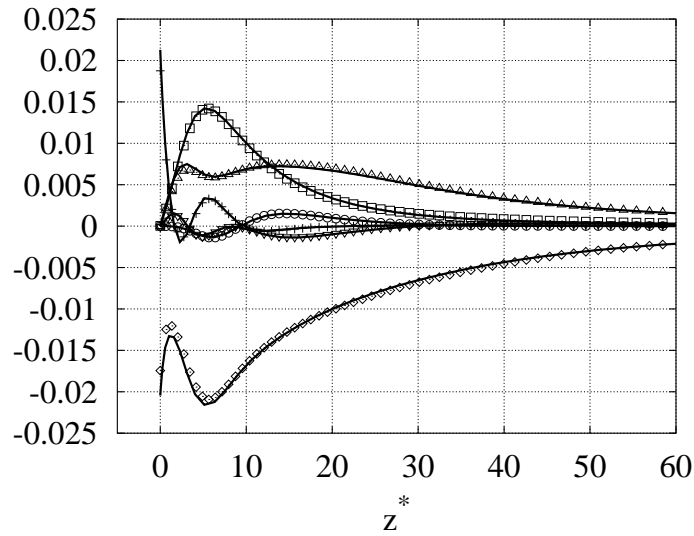


Abbildung 6.41: Vergleich der Simulation K09 mit der von Gilbert & Kleiser [21], Terme in der Bilanz der Dissipationsrate in semilokaler Skalierung bzw. Skalierung mit Wandeinheiten; Linien: Gilbert & Kleiser; Symbole: K09;  $\square$ :  $P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2$ ;  $\odot$ :  $P_\epsilon^3$ ;  $\triangle$ :  $P_\epsilon^4$ ;  $\nabla$ :  $T_\epsilon$ ;  $\diamond$ :  $-\Upsilon$ ;  $+$ :  $D_\epsilon$

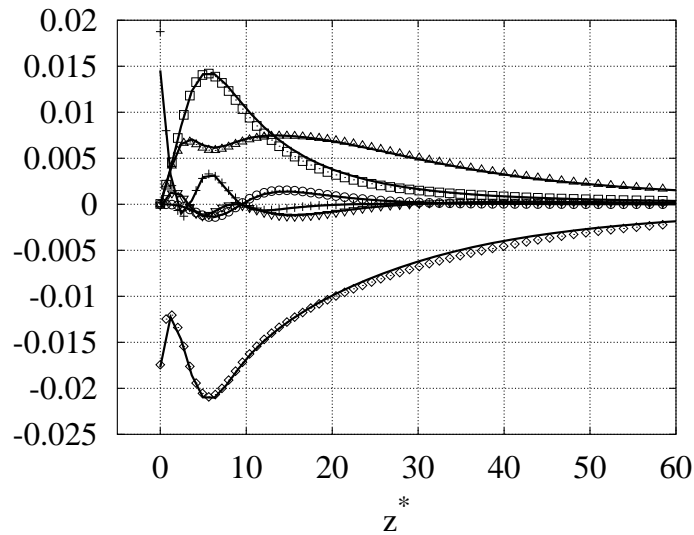


Abbildung 6.42: Vergleich der Simulationen mit unterschiedlicher Gitterweite K09 und KM03, Terme in der Bilanz der Dissipationsrate in semilokaler Skalierung; Linien: KM03; Symbole: K09;  $\square$ :  $P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2$ ;  $\odot$ :  $P_\epsilon^3$ ;  $\triangle$ :  $P_\epsilon^4$ ;  $\nabla$ :  $T_\epsilon$ ;  $\diamond$ :  $-\Upsilon$ ;  $+$ :  $D_\epsilon$

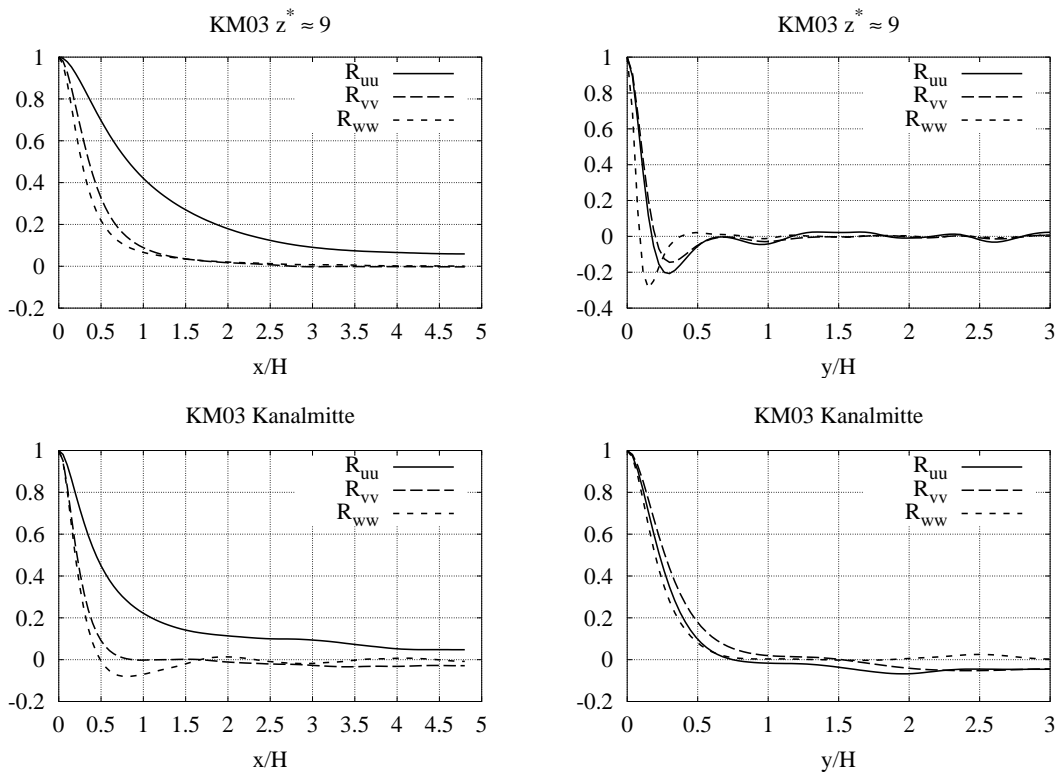


Abbildung 6.43: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten, Simulation KM03

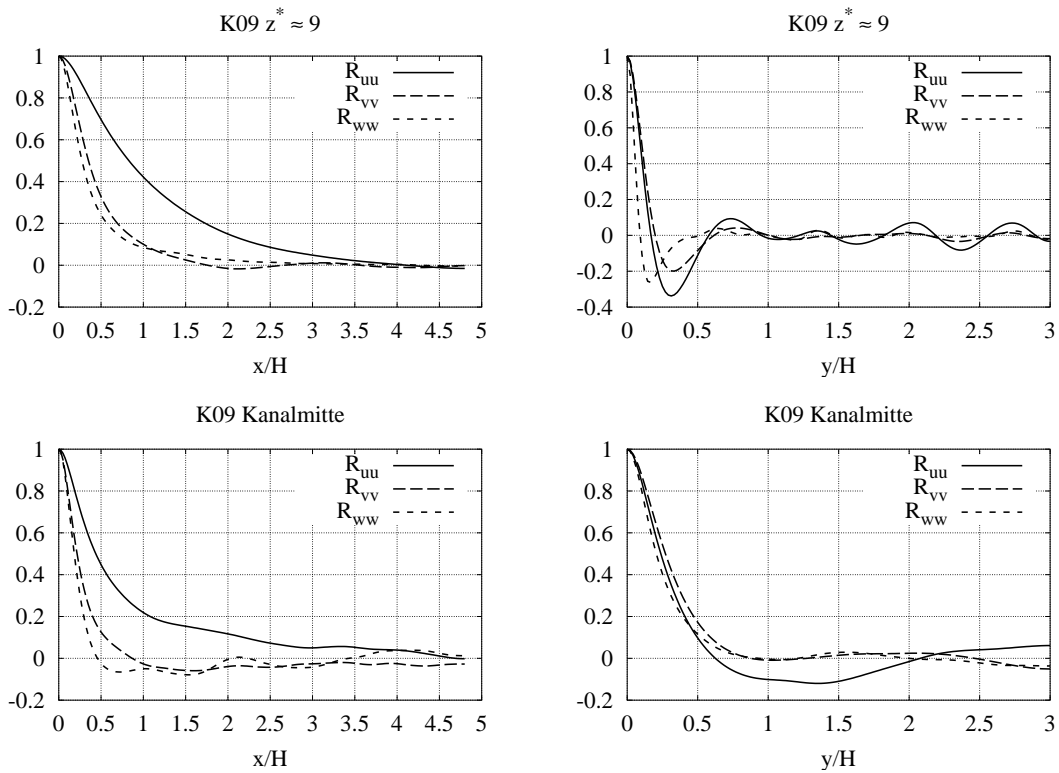


Abbildung 6.44: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten, Simulation K09



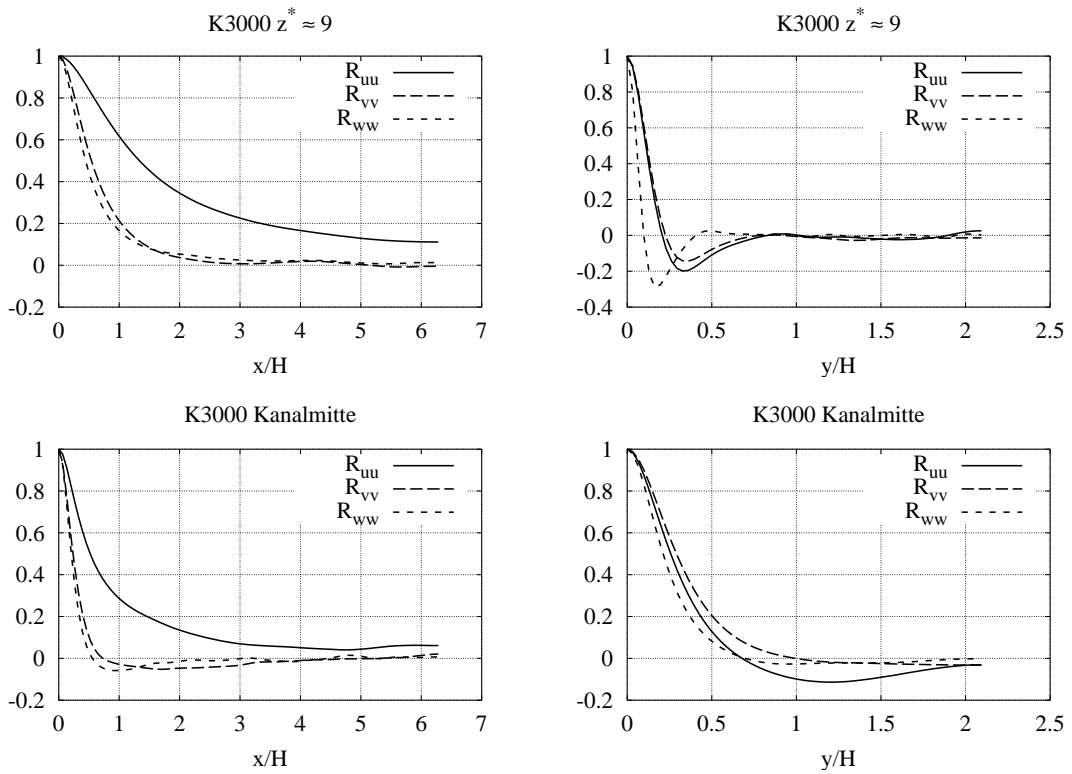


Abbildung 6.45: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten, Simulation K3000

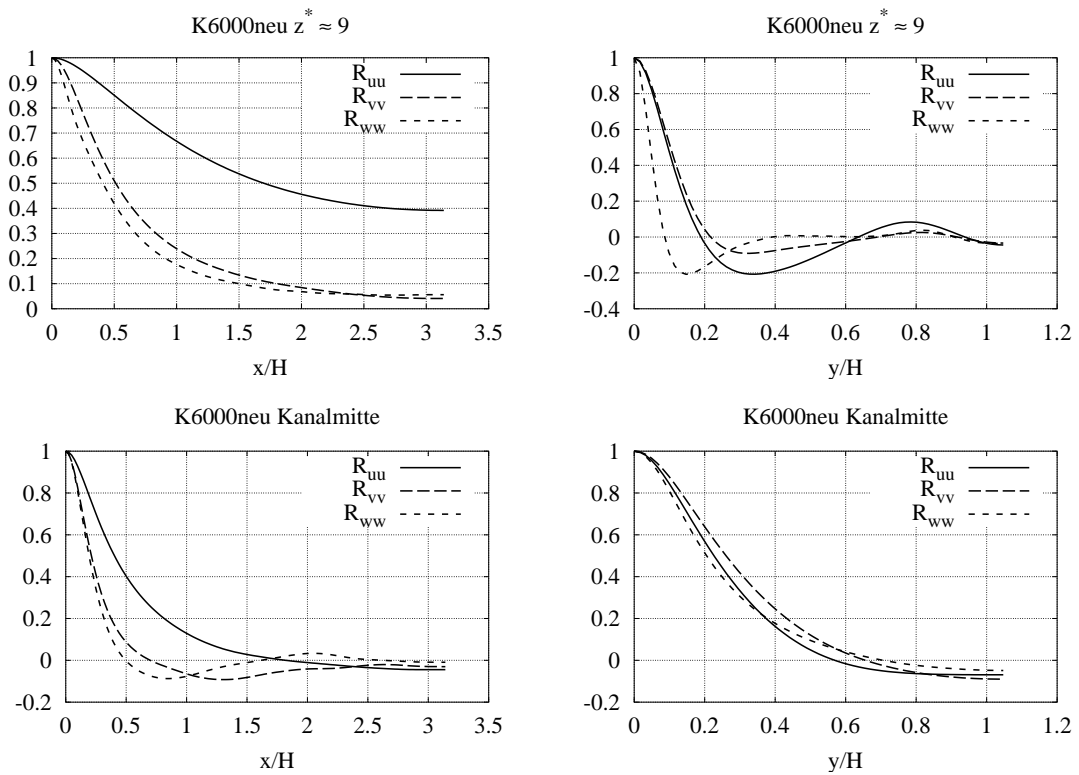


Abbildung 6.46: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeiten, Simulation K6000neu

fallen nach einer halben Gebietslänge auf Null ab. Ausnahme ist im Fall K6000neu die Korrelation der Fluktuation  $u'$  in Strömungsrichtung nahe der Wand. Um zu überprüfen, ob die aus dieser Simulation gewonnenen Daten gültig sind, wurden sie mit den aus Simulation K6000\_128 gewonnenen, die ein in  $x$ - und  $y$ -Richtung doppelt so großes Gebiet verwendete, verglichen. Dieser Vergleich (Abb. 6.47) zeigte keine Unterschiede in der mittleren Geschwindigkeit  $\tilde{u}$ , und den Reynoldsspannungen  $\overline{\rho v''v''}$ ,  $\overline{\rho w''w''}$  und  $\overline{\rho u''w''}$ . Für die Komponente  $\overline{\rho u''u''}$  liefert die Simulation auf dem kleineren Gebiet einen um 10% zu hohen Maximalwert. Dieser Fehler hat aber scheinbar nur geringen Einfluss auf weitere Korrelationen. So stellt man in den Bilanzen der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate nur geringe Unterschiede zwischen den Simulationen fest (Abb. 6.48).

Die maximalen Fehler in den Bilanzen der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate, normiert mit  $-\varepsilon$  bzw.  $-\Upsilon$ , betragen:

	$K$ -Bilanz	$\varepsilon_s$ -Bilanz an der Wand	$\varepsilon_s$ -Bilanz, übrige Punkte
KM03	4%	20%	14%
K09	6%	7%	6%
K3000	6%	3%	6%
K6000neu	5%	122%	18%
K6000_128	7%	100%	17%

Der Fehler in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz ist, abgesehen vom Wandpunkt, in allen Simulationen kleiner als 20% vom  $\Upsilon$ . Daher kann davon ausgegangen werden, dass richtige Werte der Terme in dieser Bilanz berechnet werden können. An der Wand verhält sich der Fehler anders als im Rest des Gebietes. Beispielhaft ist der normierte Fehler der Simulation M03 in Abb. 6.49 gezeigt. Fast im gesamten Gebiet hat der Fehler dasselbe Vorzeichen wie die Destruktion. Die Interpretation, dass der Fehler von einem zu niedrigen Betrag dieses Terms herrührt, ist also gerechtfertigt. Anders an der Wand, dort hat der Fehler das umgekehrte Vorzeichen. Der Autor nimmt an, dass der Fehler nun hauptsächlich den Diffusionsterm betrifft. Um diesen Term auszuwerten, müssen dritte Ableitungen der Geschwindigkeiten gebildet werden. An der Wand sind nur einseitige Differenzensterne möglich. Abb. 6.50 zeigt  $\tilde{k}_1^{3*}/k^3$ , die Analogie zur Übertragungsfunktion (s. Abschnitt 3.7.1) für den Randpunkt bei einer dreimaligen Differentiation mit LELETRI. Bereits bei kleinen Werten von  $k \cdot \Delta x$  weicht  $\tilde{k}_1^{3*}$  von  $k^3$  ab, es sind also am Gebietsrand große Fehler bei der Auswertung von Termen, die die dritte Ableitung enthalten, zu erwarten. Bei der Untersuchung der Terme in der Transportgleichung der Dissipationsrate werden diese daher folgendermaßen berechnet: Am Wandpunkt und seinem Nachbarn wird die Bilanz zur Berechnung von  $D_\varepsilon$  verwendet, an allen übrigen Punkten zur Berechnung von  $\Upsilon$ . Es werden die Daten aus den Simulationen KM03, K3000 und K6000\_128 verwendet, die, wie oben gezeigt, ausreichend genau sind. Der Vollständigkeit halber werden in den Abbildungen 6.51 und 6.52 die Bilanzterme für die Simulation K3000 gezeigt.

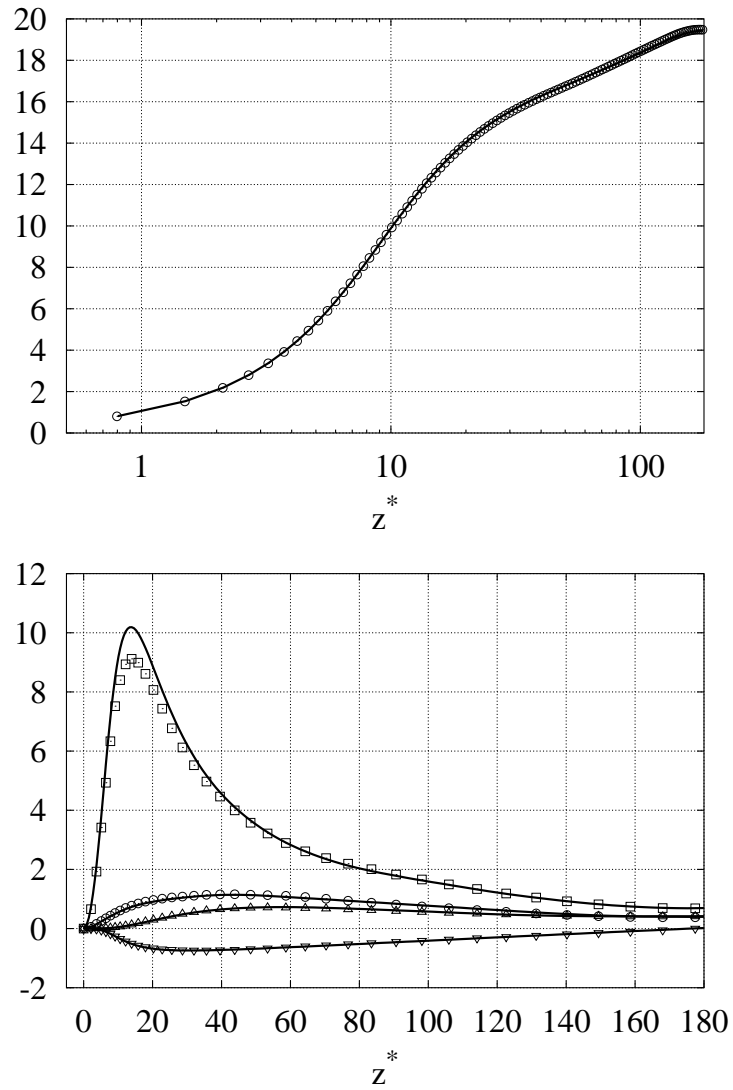


Abbildung 6.47: Vergleich der Simulationen mit unterschiedlicher Gebietsgröße K600neu und K6000\_128; Linien: K6000neu; Symbole: K6000\_128; oben:  $\tilde{u}^*$ ; unten: Reynoldsspannungskomponenten normiert mit  $\tau_w$ ,  $\square$ :  $\overline{\rho u''u''}$ ,  $\odot$ :  $\overline{\rho v''v''}$ ,  $\triangle$ :  $\overline{\rho w''w''}$ ,  $\nabla$ :  $\overline{\rho u''w''}$

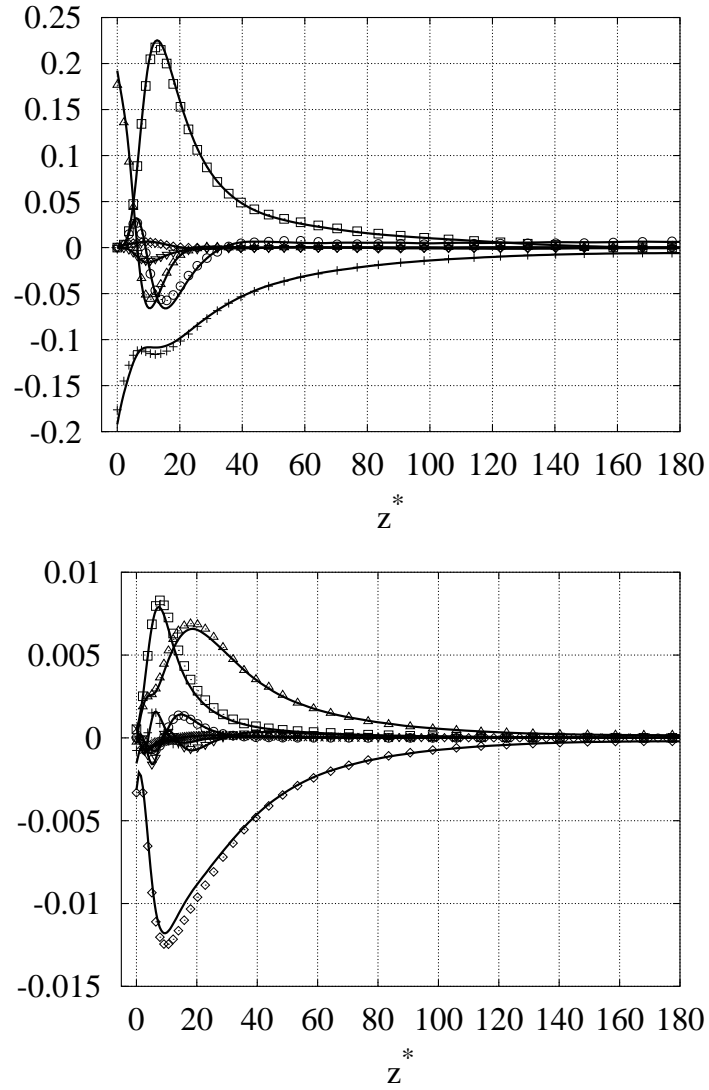


Abbildung 6.48: Vergleich der Simulationen mit unterschiedlicher Gebietsgröße K6000neu und K6000\_128; Linien: K6000neu; Symbole: K6000\_128; oben: Terme in der  $K$ -Bilanz in semilokaler Skalierung,  $\square$ : Produktion,  $\odot$ : turbulenter Transport,  $\triangle$ : Diffusion,  $\nabla$ : Massenfluss,  $\diamond$ : Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation,  $+$ : Dissipation; unten : Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz in semilokaler Skalierung,  $\square$ :  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$ ,  $\odot$ :  $P_\varepsilon^3$ ,  $\triangle$ :  $P_\varepsilon^4$ ;  $\nabla$ :  $T_\varepsilon$ ,  $\diamond$ :  $-\Upsilon$ ,  $+$ :  $D_\varepsilon$

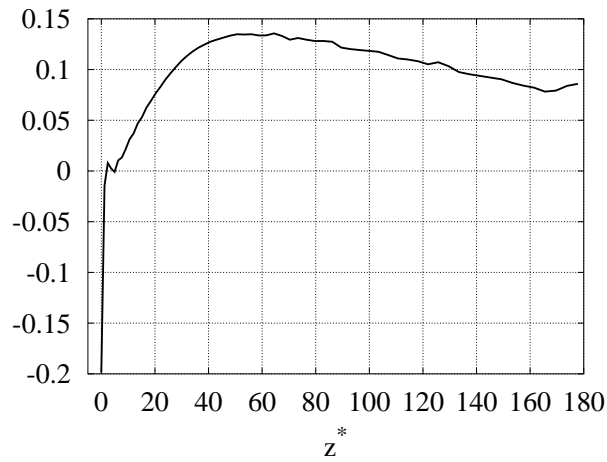


Abbildung 6.49: Simulation KM03, Fehler in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, normiert mit  $-\Upsilon$

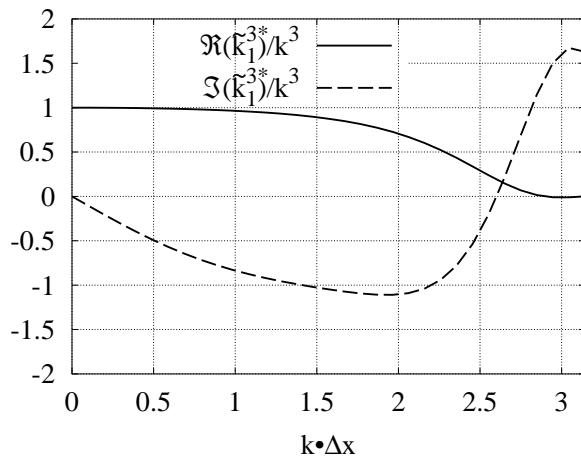


Abbildung 6.50:  $\tilde{k}_1^{3*}/k^3$  für den Randpunkt bei Verwendung von LELETRI

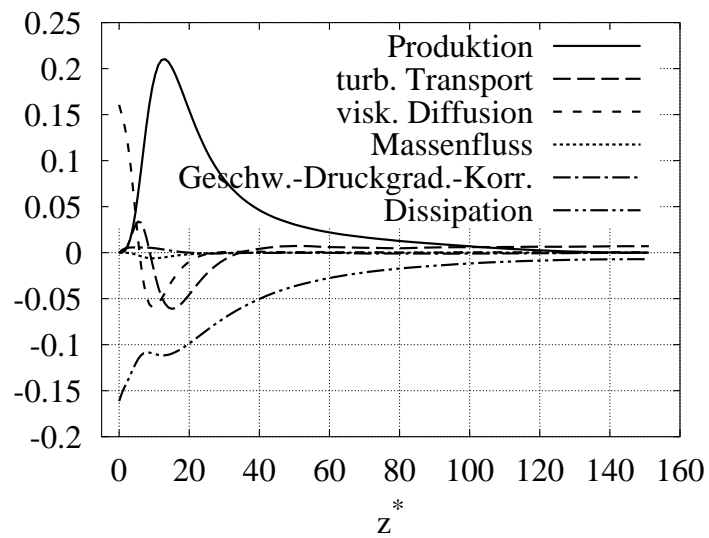


Abbildung 6.51: Simulation K3000, Terme in der Bilanz von  $K$ , semilokal normiert

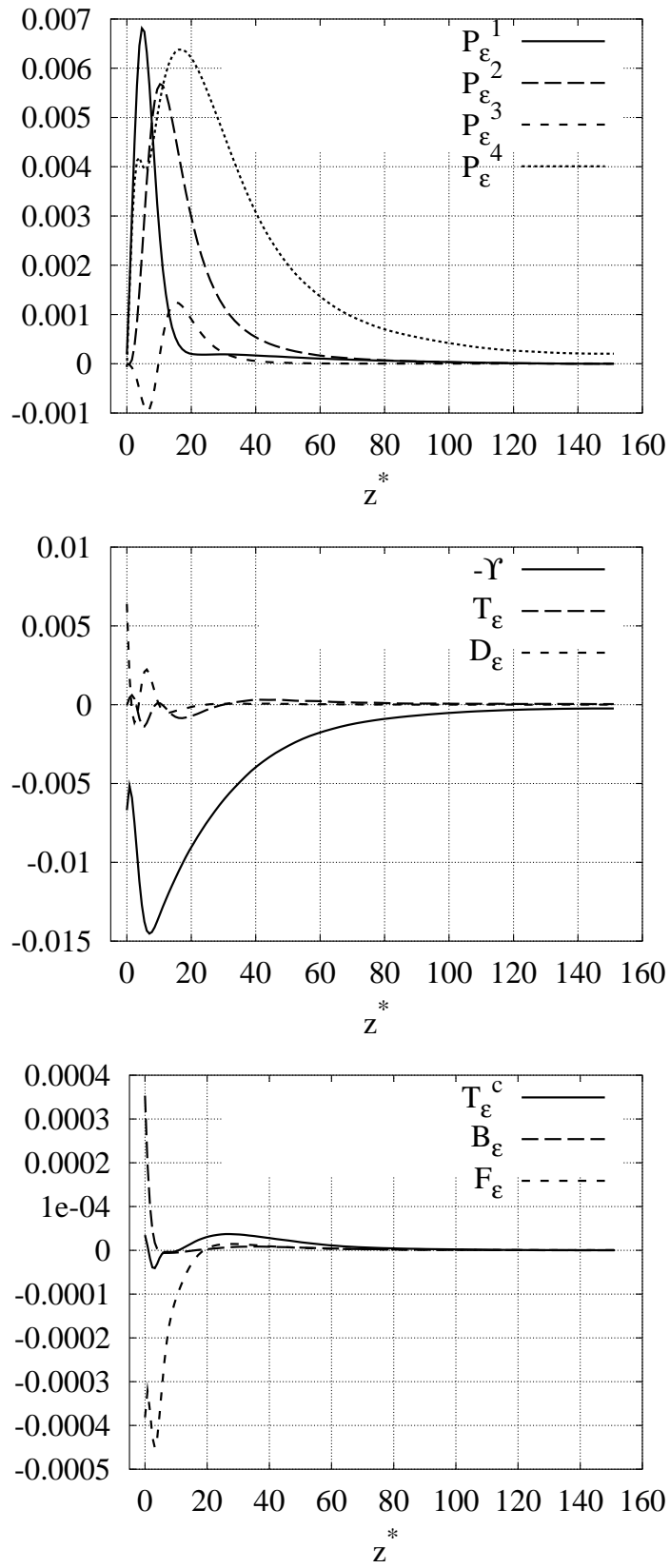


Abbildung 6.52: Simulation K3000, Terme in der Bilanz von  $\varepsilon_s$ , semilokal normiert

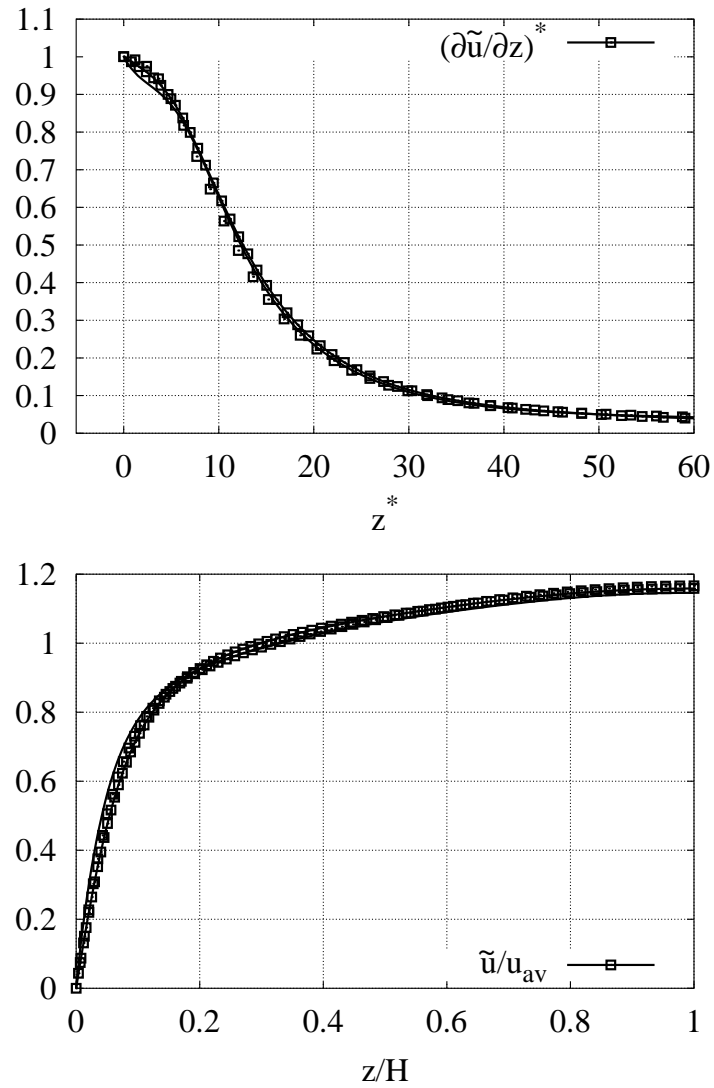


Abbildung 6.53: Oben: Mittlerer Geschwindigkeitsgradient  $\partial\tilde{u}/\partial z$  in innerer Skalierung; unten: Mittlere Geschwindigkeit  $\tilde{u}$ , in äußerer Skalierung. Symbole stehen für KM03, Symbole mit Linien für K3000, Linien alleine für K6000\_128.

### 6.3.3 Kompressibilitätseinflüsse

Die Einflüsse auf die mittlere Geschwindigkeit sind, betrachtet in der richtigen Normierung, gering. Abb. 6.53 zeigt den Geschwindigkeitsgradienten in Wandnähe in semilokaler Skalierung und die mittlere Geschwindigkeit in äußerer Skalierung. In beiden Skalierungen liegen die Kurven für Fälle unterschiedlicher Machzahl nahe beieinander. Für die äußere Skalierung ist dies der Fall, da die Reynoldszahlen der Strömungen ähnlich sind.

Der Haupteffekt steigender Machzahl ist eine Variation der gemittelten Stoffgrößen in Abhängigkeit vom Wandabstand. Dies ist Folge der Energieerhaltung. Die durch die Volumenkraft zugeführte kinetische Energie dissipiert zu innerer Energie, die an die gekühlten Wände abgegeben wird. Dieser Wärmetransport erfordert einen Temperaturgradienten, der wiederum Dichte- und Viskositätsunterschiede zur Folge hat. Das Verhältnis zwischen der Dichte an der Wand und der mittleren Dichte im gesamten Kanal hat bei den drei unterschiedlichen Machzahlen der Simulationen KM03, K3000 und K6000\_128 die Werte 1.02, 1.37 und 2.52 und ist damit proportional zu  $M^2$ . Die Variation der gemittelten Stoffgrößen ist beschränkt auf einen Bereich  $z^* < 40$ .

Die normalen Komponenten der Anisotropietensoren von Reynoldsspannungen und Dissipationrate  $a_{ij}$  und  $e_{ij}$  steigen mit der Machzahl, wohingegen die Kreuzkomponente sinkt, s. Abb. 6.54.

Das Verhältnis von dilatationaler zu solenoidaler Dissipationrate  $\varepsilon_d/\varepsilon_s = \frac{4}{3} \overline{u_{j,j} u'_{k,k}} / \overline{\omega'_i \omega'_i}$  ist stets sehr gering. Bei der Simulation mit der höchsten Machzahl K6000\_128 erreicht es nahe der Wand einen Wert von 0.0011. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von Coleman *et al.* [10].

## 6.4 Gültigkeit der Kontinuumsannahme

	$Kn_{max}$	$M_{t\ max}$	$Re_{\lambda\ max}$
S12	0.042	0.32	58
S13	0.021	0.17	61
S20	0.089	0.57	40
M10	0.010	0.075	56
M11	0.075	0.50	45
M14	0.014	0.12	72
KM03	0.014	0.063	25
K09	0.014	0.064	25
K3000	0.051	0.24	27
K6000neu	0.075	0.37	32
K6000_128	0.074	0.35	29

Tabelle 6.5: Maxima dimensionsloser Kennzahlen

Die Kontinuumsannahme, auf der die Navier-Stokes-Gleichungen beruhen, ist gültig, wenn die Längenmaße in der Strömung deutlich größer sind als die mittlere



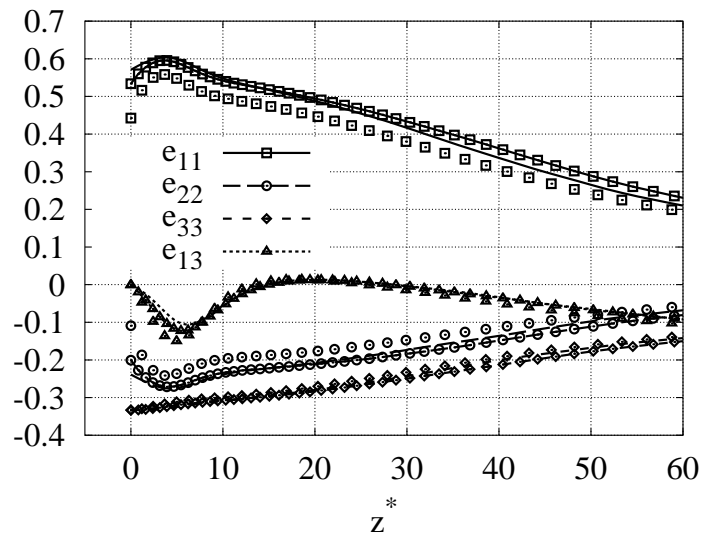
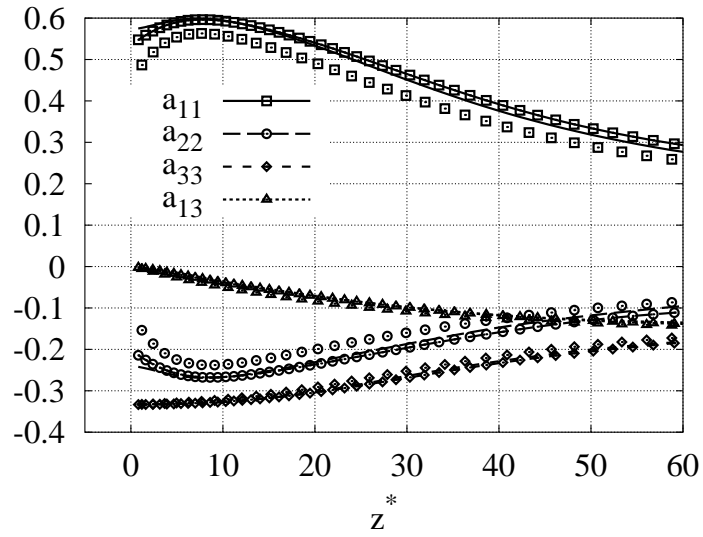


Abbildung 6.54: Komponenten der Anisotropietensoren der Reynoldsspannungen (oben) und des Dissipationstensors (unten). Symbole stehen für KM03, Symbole mit Linien für K3000, Linien alleine für K6000\_128.

freie Weglänge  $l_f$ . Nach Friedrich [18] gilt:

$$l_f \sim \frac{\mu}{\rho c} \quad (6.16)$$

Die kleinste in turbulenten Strömungen auftretende Struktur skaliert mit dem Kolmogorovmaß  $\eta_k$ . Das Verhältnis zwischen der mittleren freien Weglänge und dem Längenmaß der Strömung wird Knudsenzahl  $\tilde{Kn}$  genannt. Man kann nun eine für turbulente Strömungen relevante Knudsenzahl

$$\tilde{Kn}_t = \frac{l_f}{\eta_k} = \frac{M_t}{\sqrt{Re_\lambda}} = \frac{(\tilde{\nu}\varepsilon)^{1/4}}{\bar{c}} \quad (6.17)$$

definieren. Nach Friedrich, der allerdings nur laminare Strömungen diskutiert, muss die Knudsenzahl, gebildet mit einer Körperabmessung oder einem hydraulischen Durchmesser, kleiner als 0.01 sein, damit die Annahme eines Kontinuums im ganzen Strömungsfeld gerechtfertigt ist. Diese Bedingung wird bei allen untersuchten Strömungen verletzt, wie aus Tabelle 6.5 ersichtlich ist. Man kann nun spekulieren, wie klein die kleinsten Strukturen wirklich sind, da  $\eta_k$  nur eine Abschätzung für ihre Größe ist.

Im Fall der homogenen Scherströmung und der Kanalströmung zeigte ein Vergleich der Simulationen mit niedriger Machzahl mit Ergebnissen bei nochmals niedrigeren Machzahlen bzw. inkompressiblen Simulationen, dass die Daten bereits als inkompressibel zu betrachten sind. Da für den Grenzfall inkompressibler Gasströmung  $\tilde{Kn} = 0$  gilt, können also trotz Verletzung des Kriteriums  $\tilde{Kn}_t < 0.01$  richtige Daten erzeugt werden.

# Kapitel 7

## Kompressibilitätseinflüsse auf die $\epsilon_s$ -Bilanz

Kompressibilität kann die Bilanz der solenoidalen Dissipationsrate Gl. (2.36) auf unterschiedliche Weise beeinflussen: Sie kann die Struktur der Strömung, z.B. deren Stoffeigenschaften, mittlere Felder und Anisotropie, verändern. Die veränderte Strömung wird wiederum zu veränderten Prozessen in der Bilanz der Dissipationsrate führen. Dies wird im Folgenden als *indirekter* Effekt bezeichnet. Es ist auch denkbar, dass die Prozesse in der  $\epsilon_s$ -Bilanz selbst abhängig von Kompressibilität sind, sie also *direkt* beeinflusst werden. Darüberhinaus enthält die  $\epsilon_s$ -Bilanz in ihrer kompressiblen Form Terme, die *explizit* von der Divergenz der Geschwindigkeiten und von Dichtegradienten abhängen.

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert: Die Skalenbetrachtungen in Abschnitt 7.1 zeigen, welche Effekte zu erwarten sind. Im nächsten Abschnitt (7.2) wird anhand der DNS-Daten gezeigt, wie sich einzelne Terme der Bilanz durch Kompressibilität verändern und inwieweit die explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme relevant sind. Die Untersuchung, ob die beobachteten Effekte indirekter oder direkter Natur sind, ist Inhalt von Abschnitt 7.3. Abschnitt 7.4 schließlich beschreibt die notwendige Modellierung des baroklinen Terms.

### 7.1 Abschätzungen anhand von Skalenbetrachtungen

Ein Parameter für den Kompressibilitätseinfluss ist die turbulente Machzahl  $M_t = \frac{q}{c}$ . Dissipation findet hauptsächlich bei hohen Wellenzahlen statt. Dort skalieren die Strukturen mit den kolmogorovschen Mikromaßen. Somit lässt sich eine turbulente Machzahl für den Dissipationsbereich definieren:

$$M_{tD} = \frac{v_k}{c} \quad (7.1)$$

$$v_k = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (7.2)$$

$$Re_t = \frac{ql}{\nu} = \frac{q^4}{\nu\epsilon} \quad (7.3)$$

$$\Rightarrow M_{tD} = M_t \cdot Re_t^{-\frac{1}{4}} \quad (7.4)$$

$M_{tD}$  ist somit kleiner als die turbulente Machzahl, was erwarten lässt, dass Kompressibilitätseffekte auf die kleinen Skalen gering sind. Die Machzahl  $M_{tD}$  lässt sich auch noch anders interpretieren: Wenn man annimmt, dass der Schall in einer turbulenten Strömung durch eben diese Strömung erzeugt wird, sind die maximalen auftretenden Frequenzen der Turbulenz und des Schalls die der kleinsten Skalen, die sich mit dem kolmogorovschen Zeitmaß  $\tau_k = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}}$  abschätzen lassen. Somit ist die kleinste Schallwellenlänge  $\lambda = c \cdot \tau_k$ . Die Machzahl  $M_{tD}$  beschreibt das Verhältnis des kolmogorovschen Mikromaßes  $\eta_k$  zu dieser Wellenlänge:  $M_{tD} = \frac{\eta_k}{\lambda}$ . Da  $M_{tD}$  klein ist, ist aufgrund der unterschiedlichen Längenskalen keine starke Interaktion zwischen Turbulenz und Schall zu erwarten.

Für die Gradienten-Machzahl  $M_g = \frac{S \cdot l}{c}$ , den zweiten Kompressibilitätsparameter für Scherströmungen, kann man eine analoge Analyse nicht so einfach durchführen, da unklar ist, was der relevante Geschwindigkeitsgradient für Strukturen von der Größenordnung des kolmogorovschen Mikromaßes ist. Dennoch ist eine Abschätzung möglich: Aus der Annahme, dass die charakteristische Geschwindigkeit  $v$  für eine Struktur mit der Größe  $r$  im Inertialbereich allein durch die Länge  $r$  und die Dissipationsrate bestimmt ist<sup>1</sup>, kann man einen charakteristischen Gradienten bestimmen:  $v/r = (\epsilon/r^2)^{1/3}$ . Dieser Gradient ist minimal für die energietragenden Skalen  $l$  und maximal für die kolmogorovschen Skalen. Somit ergibt sich eine untere und eine obere Schranke für eine Gradienten-Machzahl des Dissipationsbereichs:

$$M_g \cdot Re_t^{-\frac{3}{4}} = \frac{S \cdot \eta_k}{c} < M_{gD} < \frac{\sqrt{\epsilon/\nu} \eta_k}{c} = M_{tD} = M_t \cdot Re_t^{-\frac{1}{4}} \quad (7.5)$$

Die Gradientenmachzahl im Dissipationsbereich ist also kleiner als die dortige turbulente Machzahl. Diese Abschätzung gilt natürlich nur, wenn  $S < \sqrt{\epsilon/\nu}$ , bzw. nach Erweiterung mit  $\frac{\eta_k^2}{\epsilon}$ :

$$2 \cdot S^* = 2 \cdot \frac{S \cdot k}{\epsilon} < \sqrt{Re_t} \quad (7.6)$$

Dies bedeutet, die Strömung darf nicht im Bereich der *rapid distortion* liegen, der bestimmt ist durch  $S^* \gg \sqrt{Re_t}$  (Batchelor & Proudman, [5]). In turbulenten freien Mischungsschichten stellt sich ein Wert von  $S^* \approx 4 \dots 5$  ein, so dass die erste Ungleichung erfüllt ist. Nicht erfüllt ist sie im Kanal nahe der Wand. Ist jedoch  $S > \sqrt{\epsilon/\nu}$ , also  $S$  der größte auftretende Gradient, so gilt

$$M_{gD} < \frac{S \cdot \eta_k}{c} \quad (7.7)$$

$$\frac{M_{gD}}{M_g} < \frac{\eta_k}{l}. \quad (7.8)$$

---

<sup>1</sup>Diese Annahme ist konsistent mit  $l = \frac{\eta_k^3}{\epsilon}$  und den kolmogorovschen Skalen. Außerdem kann man mit ihr die Form des Spektrums im Inertialbereich  $E(k) \sim k^{-\frac{5}{3}}$  herleiten, s. Tennekes & Lumley [57], S. 25.

In wandgebundenen Strömungen sind die auftretenden Gradientenmachzahlen, die hier eine obere Schranke der Gradientenmachzahl im Dissipationsbereich darstellen, klein (Sarkar [46]).

Somit sind die Machzahlen für den Dissipationsbereich klein und lassen keine Kompressibilitätseffekte erwarten. Über den Effekt von Veränderungen der Dichte und Viskosität, die Folge von Kompressibilität sein können, lässt sich mit diesen Abschätzungen jedoch keine Aussage treffen. Durch turbulente Mischung können lokal sehr hohe Gradienten auftreten. Daher kann z.B. der barokline Term  $B_\varepsilon$  in der Mischungsschicht mit hohem Dichtegradienten nicht vernachlässigt werden (s.u.).

## 7.2 Kompressibilitätseinflüsse auf einzelne Terme der $\varepsilon_s$ -Bilanz

### 7.2.1 Homogene turbulente Scherströmung

Die Abbildungen 7.1 bis 7.3 zeigen die Terme  $P_\varepsilon^1$ ,  $P_\varepsilon^2$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t}$  und die Summe der explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme  $T_\varepsilon^c + B_\varepsilon + F_\varepsilon$  für die drei Fälle S12, S13 und S20, in selbstähnlicher Normierung, das heißt dividiert durch  $K S^2$ .  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  ist nicht gezeigt, es ist jedoch indirekt abzulesen:  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon = -(P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2 + T_\varepsilon^c + B_\varepsilon + F_\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t})$ . Bei der Simulation mit höherer Machzahl S20 sinkt  $P_\varepsilon^1$  stärker ab als im Fall S12 mit niedriger Machzahl, die Wachstumsrate ist mit ca. 0.014 in etwa halbiert. Überraschenderweise gibt es keinen Unterschied im Betrag der explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme. Zum Ende der Simulation S12, die länger durchgeführt werden konnte, liegen diese sogar höher als die Werte, die im Fall S20 erreicht werden.

Die Unterschiede zwischen den Simulationen S12 und S13, die eine unterschiedliche anfängliche Scherrate haben, sind von derselben Größenordnung wie die Unterschiede der Simulationen mit unterschiedlicher Machzahl.

### 7.2.2 Turbulente Mischungsschicht

Ein Vergleich des Falles M11 mit M10 zeigt die Effekte einer höheren Machzahl, der Fall M14 zeigt die Effekte unterschiedlicher Dichte der sich mischenden Ströme. Im Fall M14 wird die Koordinate  $z$  in den folgenden Abbildungen um eine Impulsverlustdicke verschoben, um der Drift der Mischungsschicht in das Gebiet niedriger Dichte Rechnung zu tragen. Die Produktion durch den mittleren Geschwindigkeitsgradienten  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  wird durch die unterschiedlichen Bedingungen nicht verändert, s. Abb. 7.4. Der Abklingterm  $P_\varepsilon^4 - \Upsilon$  ist unabhängig von der Machzahl. Im Fall mit Dichteunterschied verschiebt sich der Term, zusätzlich zur Verschiebung der gesamten Schicht, um ungefähr eine halbe Impulsverlustdicke in Richtung der Seite geringerer Dichte. Der Betrag des Terms bleibt unverändert.  $P_\varepsilon^3$  und  $D_\varepsilon$  sind vernachlässigbar klein und werden hier nicht gezeigt. Der turbulente Transport  $T_\varepsilon$  geht mit steigender Machzahl zurück. In der Strömung mit Dichteunterschieden steigt er vor allem auf der Seite geringerer Dichte stark an (Abb. 7.5). Somit trägt er zur

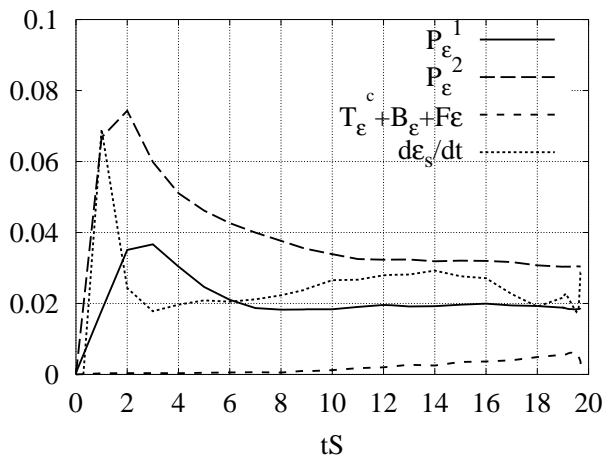


Abbildung 7.1: Simulation S12, Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, selbständig normiert mit  $KS^2$

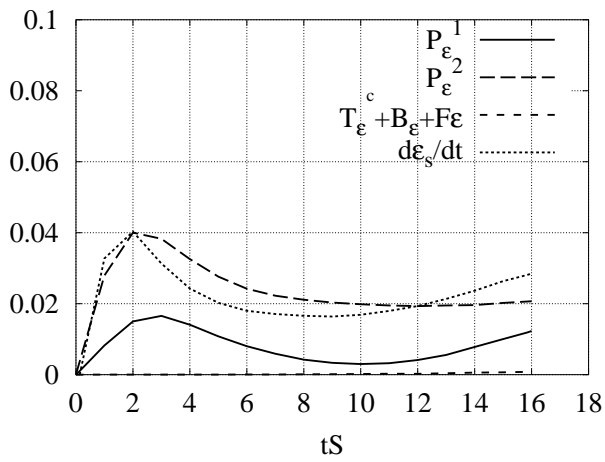


Abbildung 7.2: Simulation S13, Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, selbständig normiert mit  $KS^2$

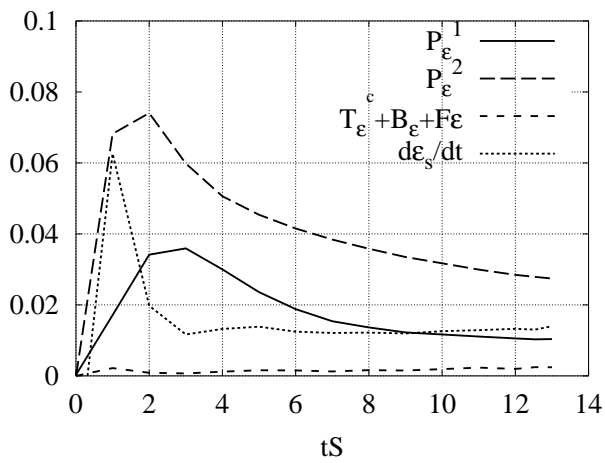


Abbildung 7.3: Simulation S20, Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz, selbständig normiert mit  $KS^2$

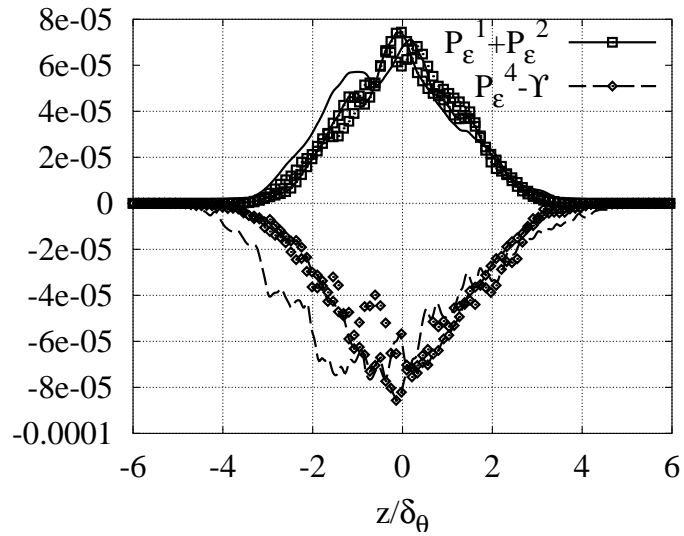


Abbildung 7.4: Simulationen M10, M11 und M14, Produktionsterme in der  $\epsilon_s$ -Bilanz, selbstständig normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$ ; nur Symbole: M10; Symbole und Linien: M11, nur Linien: M14

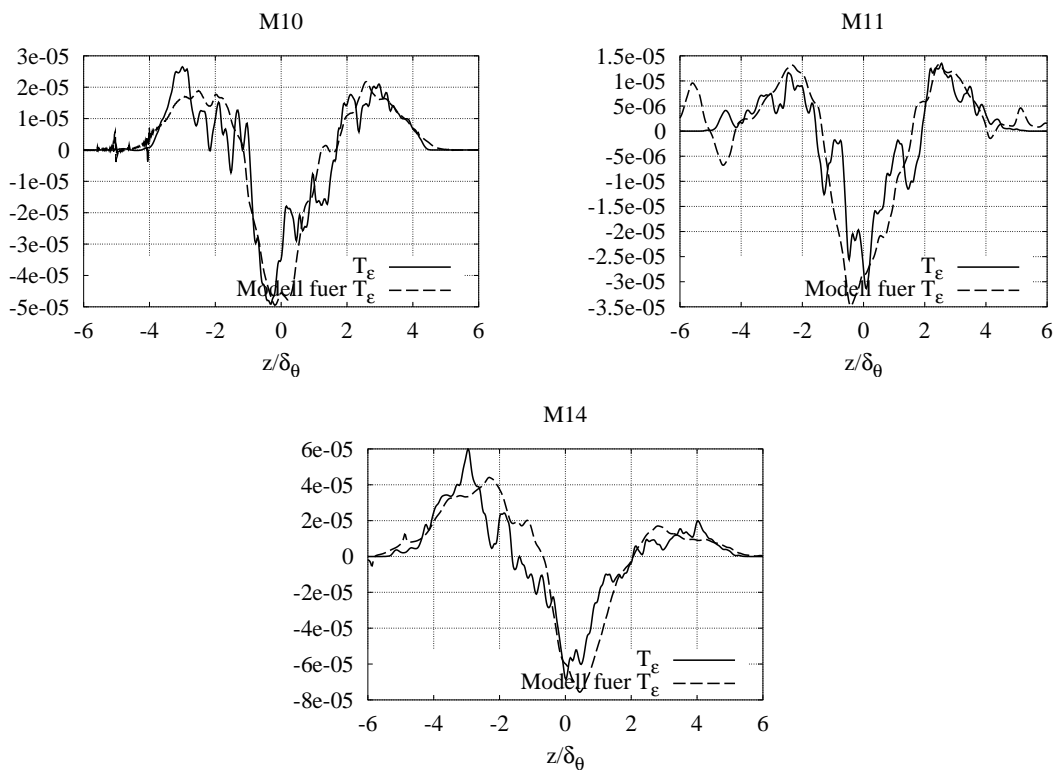


Abbildung 7.5: Turbulenter Transport von  $\epsilon_s$ , selbstständig normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$

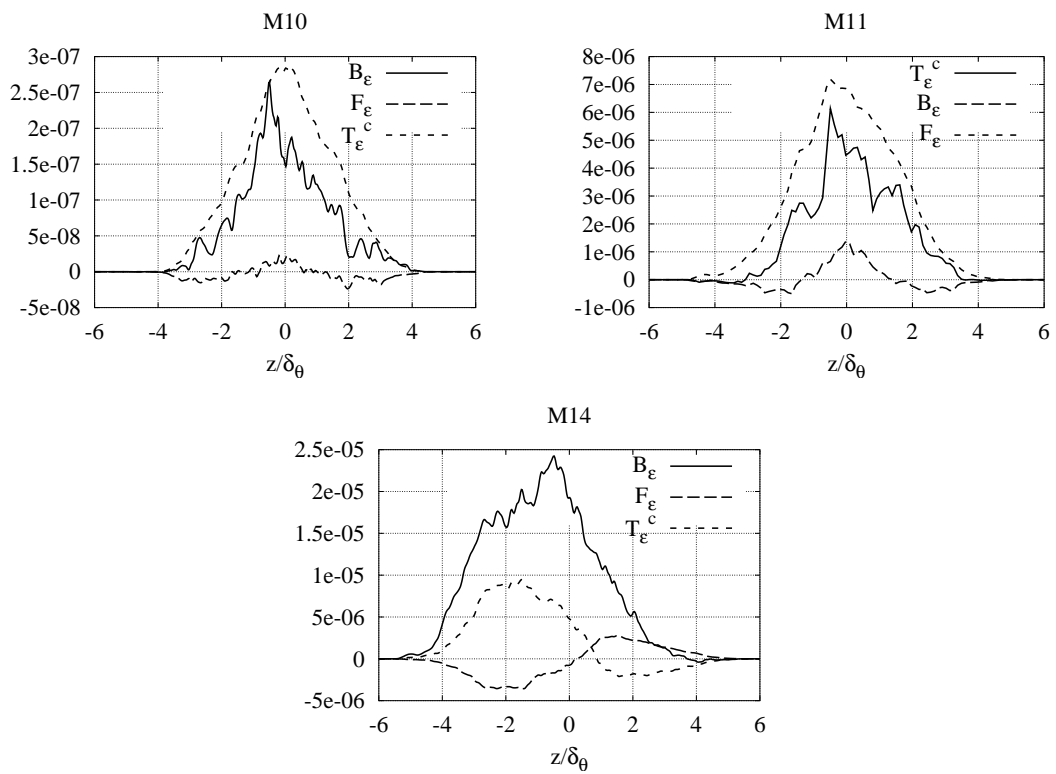


Abbildung 7.6: Explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängige Terme in der  $\epsilon_s$ -Bilanz, selbstständig normiert mit  $\Delta U^4/\delta_\theta^2$



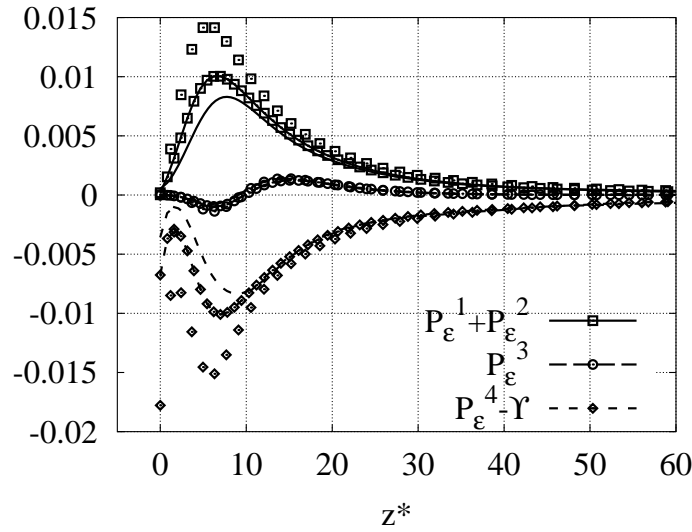


Abbildung 7.7: Produktionsterme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz in semilokaler Skalierung; nur Symbole: KM03; Linien und Symbole: K3000; nur Linien: K6000\_128

Verschiebung der Mischungsschicht in diese Richtung bei.

Die explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme steigen mit der Machzahl, s. Abb. 7.6.  $T_\varepsilon^c$  und  $F_\varepsilon$  sind im Inneren der Mischungsschicht positiv. Insgesamt bleiben sie jedoch klein, verglichen mit den anderen Termen. Der barokline Term hat einen noch niedrigeren Betrag. Bei der Mischung zweier Ströme unterschiedlicher Dichte (M14) sind diese Terme nicht länger vernachlässigbar. Der barokline Term  $B_\varepsilon$  ist nun ebenso groß wie  $P_\varepsilon^1$  und hat eine ähnliche Form. Der kompressible Transport  $T_\varepsilon^c$  transportiert Dissipationsrate von der Seite hoher zur Seite niedriger Dichte und produziert dort zusätzlich Dissipation. Der Term  $F_\varepsilon$  ist kleiner und wirkt umgekehrt. In der Modellierung, s. unten, muss der barokline Term nun berücksichtigt werden. Da die Terme  $T_\varepsilon^c$  und  $F_\varepsilon$  teilweise entgegengesetzt wirken, ist es möglich, ihre Summe zu vernachlässigen.

### 7.2.3 Turbulente Kanalströmung

In semilokaler Skalierung liegen die Maxima der Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz für unterschiedliche Machzahlen übereinander, s. Abb. 7.7 und 7.8. Im Bereich starker Variation der mittleren Stoffgrößen ( $z^* < 30$ ) weichen deren Amplituden jedoch voneinander ab. In allen Termen zeigt sich ein Rückgang der Amplituden mit steigender Machzahl. Eine Ausnahme sind die explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme (Abb. 7.9). Wie zu erwarten, steigen sie mit der Machzahl. Im Bereich der untersuchten Machzahlen bleiben sie jedoch vernachlässigbar.

Im Bereich  $z^* > 30$  ist kein Kompressibilitätseffekt festzustellen. Dies ist auch so, wenn man die äußere Skalierung verwendet (nicht gezeigt).

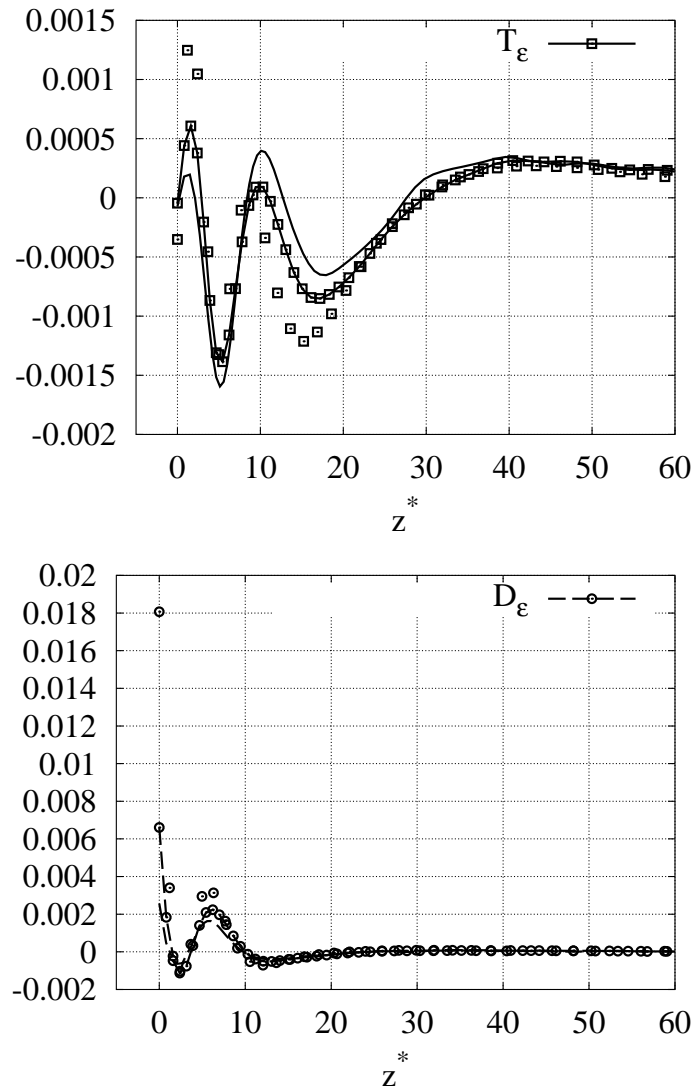


Abbildung 7.8: Turbulenter (oben) und viskoser (unten) Transport von  $\epsilon_s$ ; nur Symbole: KM03; Linien und Symbole: K3000; nur Linien: K6000\_128

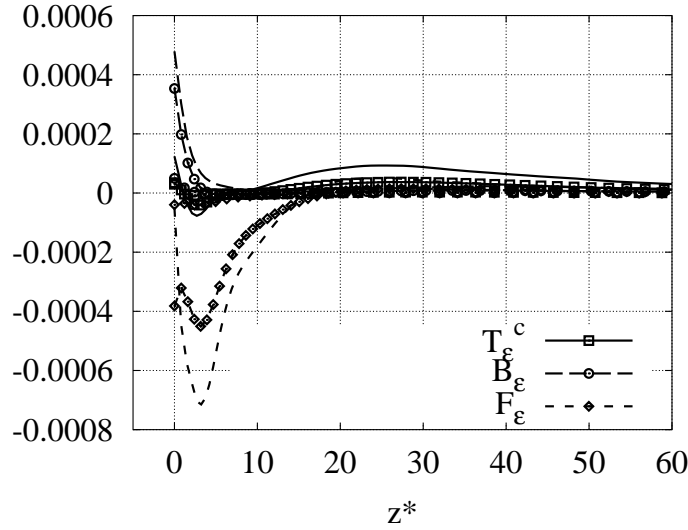


Abbildung 7.9: Explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängige Terme in der  $\varepsilon_s$ -Bilanz; nur Symbole: KM03; Linien und Symbole: K3000; nur Linien: K6000\_128

## 7.3 Unterscheidung zwischen direkten und indirekten Effekten

### 7.3.1 Gewählte Vorgehensweise

Um direkte von indirekten Effekten zu trennen, wird angenommen, dass die Prozesse in der Transportgleichung für die solenoidale Dissipationsrate  $\varepsilon_s$  von den verfügbaren Modellen qualitativ richtig beschrieben werden. Die Auswertung der DNS-Daten ermöglicht es, die Koeffizienten dieser Modelle *a priori* zu bestimmen. Sind diese Koeffizienten nun unabhängig von unterschiedlichen Kompressibilitätsbedingungen, treten nur indirekte Effekte auf. Allein eine Abhängigkeit der Koeffizienten von Kompressibilität stellt einen direkten Effekt dar, der modelliert werden muss.

Die verwendeten Modelle sind gegeben in den Gleichungen (5.13), (5.14), (5.15) und (5.16) in Kapitel 5.  $C_\mu$  in diesen Modellen ist definiert durch  $-\widetilde{u_i'' u_j''} = C_\mu (K^2/\varepsilon) \widetilde{U}_{i,j}$ . Die zu bestimmenden Koeffizienten in diesen Modellen sind  $C_\varepsilon^1$  im Modell des Produktionsterms,  $C_\varepsilon^2$  im Modell des Abklingterms,  $C_1^3$  und  $C_2^3$  im Modell für die Produktion aufgrund von Gradienten des mittleren Wirbelvektors und  $f_t$  im Modell des turbulenten Transports. Da die Koeffizienten auch abhängig von der Art der Strömung sind, müssen homogene Scherströmung, Mischungsschicht und Kanalströmung getrennt betrachtet werden.

### 7.3.2 Homogene turbulente Scherströmung

Bedingt durch die Homogenität verschwinden diffusive Terme und die Produktion durch Gradienten des gemittelten Wirbelvektors. Somit können nur die Modelle für

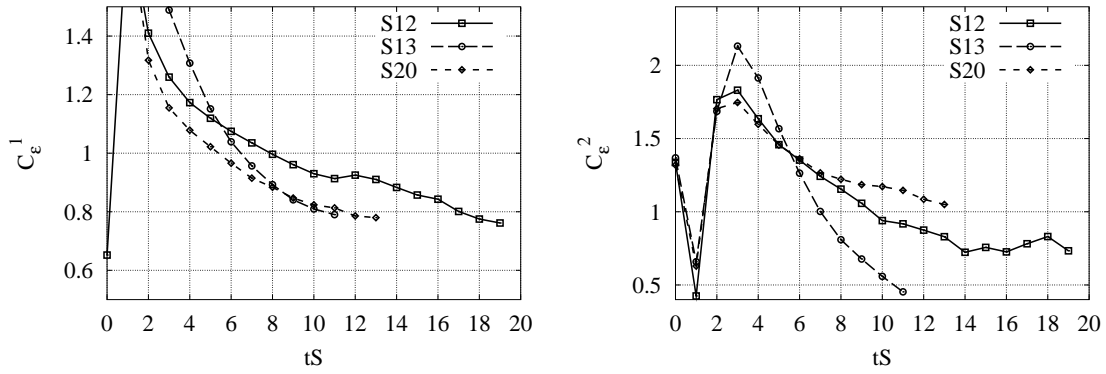


Abbildung 7.10: Zeitliche Entwicklung der Modellkoeffizienten  $C_\varepsilon^1$  (links) und  $C_\varepsilon^2$  (rechts) in homogener Scherströmung

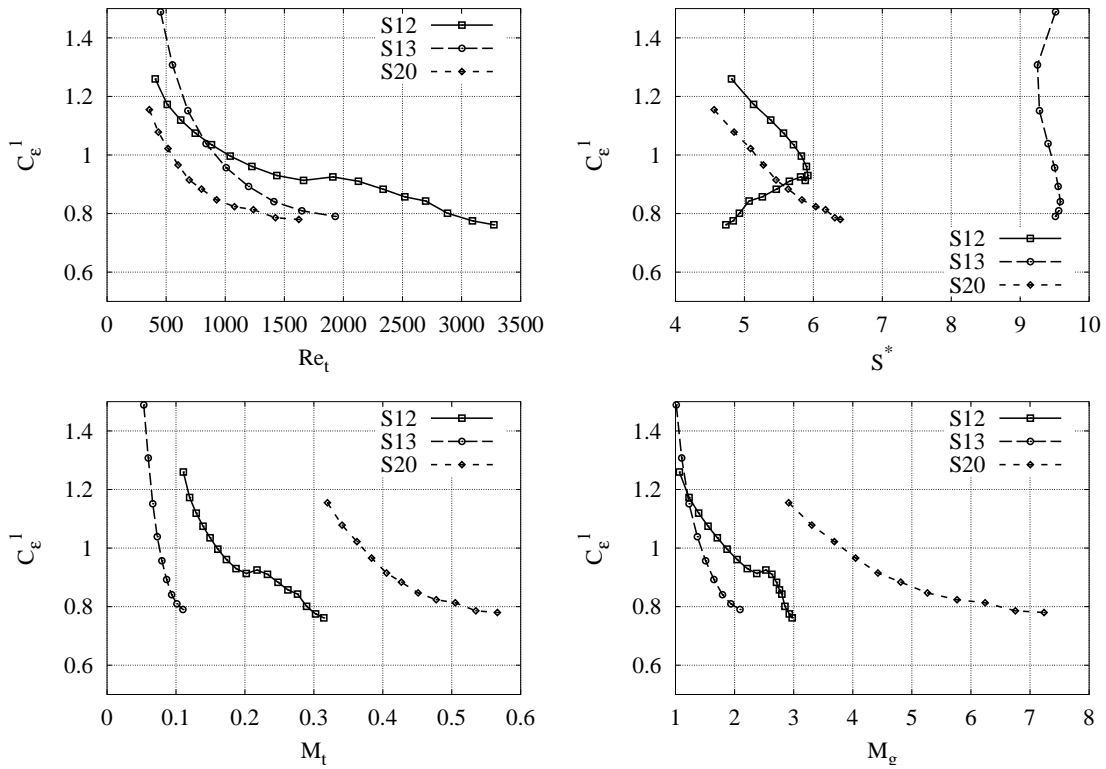


Abbildung 7.11: Abhängigkeiten des Modellkoeffizienten  $C_\varepsilon^1$  von  $Re_t$ ,  $S^*$ ,  $M_t$  und  $M_g$  in homogener Scherströmung

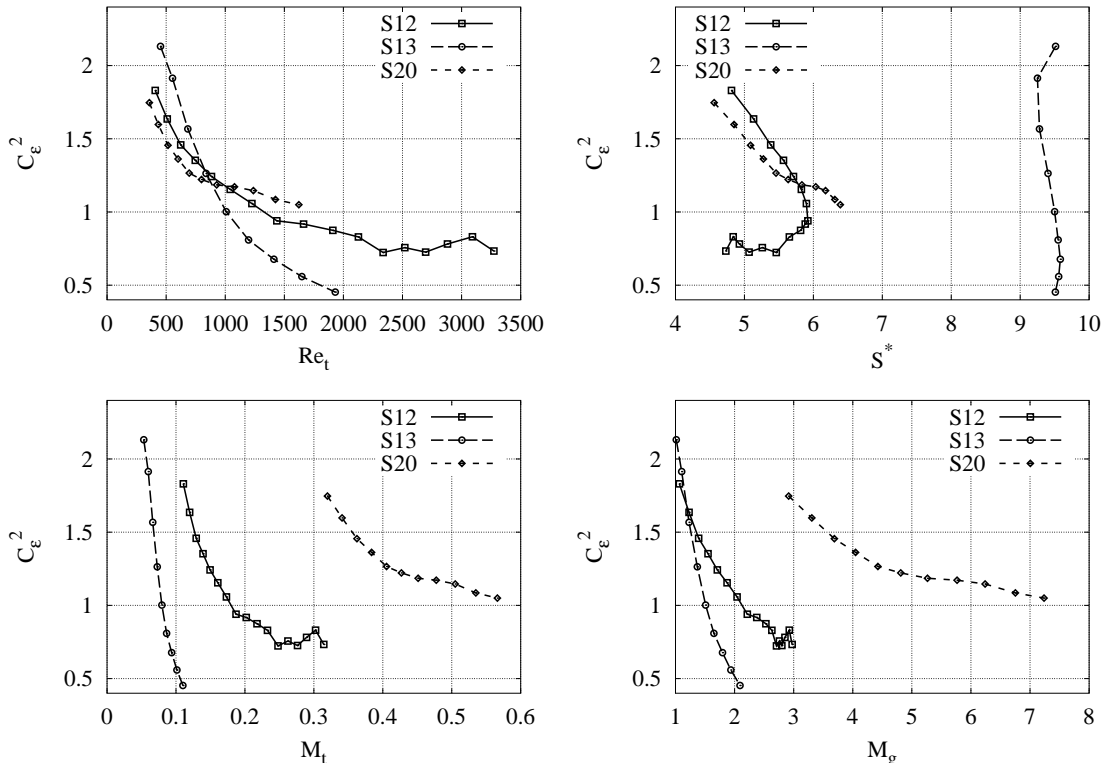


Abbildung 7.12: Abhängigkeiten des Modellkoeffizienten  $C_\varepsilon^2$  von  $Re_t$ ,  $S^*$ ,  $M_t$  und  $M_g$  in homogener Scherströmung

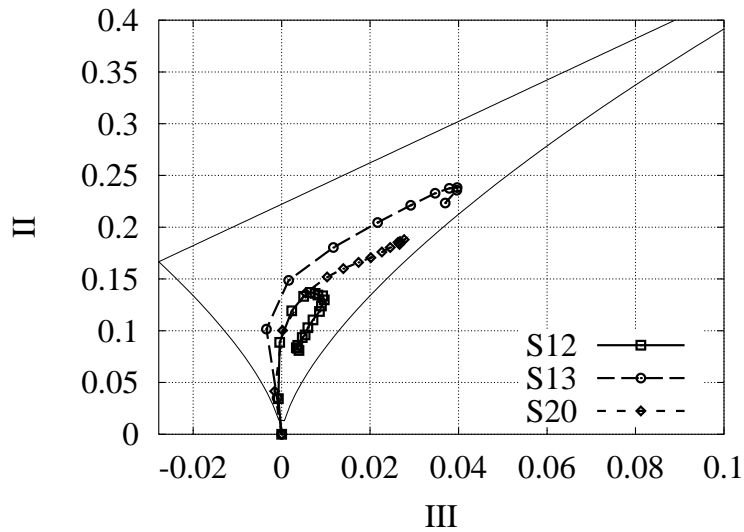


Abbildung 7.13: Homogene Scherströmung im Invariantendreieck, Simulationen S12, S13 und S20

die Produktion (Gl. (5.13)) und den Abklingterm (Gl. (5.14)) untersucht werden. Abb. 7.10 zeigt den Verlauf der beiden Koeffizienten dieser Modelle über der totalen Scherung  $t \cdot S$ . Nachdem sich aus dem künstlichen Startfeld Turbulenz entwickelt hat, fallen ab  $t \cdot S = 3$  beide Koeffizienten beinahe monoton ab. Daten während dieses Startvorgangs, also bei  $t \cdot S < 3$  werden im Folgenden nicht berücksichtigt. Die untersuchten Strömungen unterscheiden sich in der anfänglichen Scherrate (S12 und S13) und in der Machzahl (S12 und S20). Im Laufe der Simulation verändern sich alle Kennzahlen, ohne stationäre Werte oder ein wirklich selbstähnliches Wachstum zu erreichen. Wie der Vergleich der Koeffizienten der beiden quasi inkompressiblen Simulationen S12 und S13 zeigt, hängen die Koeffizienten vom Strömungszustand ab. Um hier Kompressibilitätseinflüsse von anderen Effekten zu trennen, wird die Abhängigkeit der Koeffizienten von den Kennzahlen Reynoldszahl  $Re$ , dimensionsloser Scherrate  $S^*$ , turbulenter Machzahl  $M_t$  und Gradienten-Machzahl  $M_g$  untersucht, um festzustellen, welche Kennzahl einen maßgeblichen Einfluss hat. Zur Berechnung von  $M_g$  wird hier das integrale Längenmaß  $l = q^3/\varepsilon$  verwendet.

Abb. 7.11 zeigt, dass allein eine Auftragung über der Reynoldszahl in der Lage ist, die Kurven für  $C_\varepsilon^1$  aus den unterschiedlichen Simulationen einander anzunähern. Die Abhängigkeiten des Koeffizienten in den einzelnen Simulationen von der Machzahl sind zwar qualitativ gleich: Der Koeffizient sinkt mit steigender Machzahl. Da im Laufe der Zeit sowohl Mach- als auch Reynoldszahl monoton steigen, weist dies noch nicht auf einen Kompressibilitätseffekt hin.

Dasselbe Bild ergibt sich für den Koeffizienten  $C_\varepsilon^2$ , s. Abb. 7.12.

Eine Abhängigkeit der Koeffizienten von Kompressibilität ist also nicht ausgeschlossen, jedoch ist klar, dass die Abhängigkeit von der Reynoldszahl viel stärker ist.

Eine Möglichkeit ist noch die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Position in der Invariantenkarte nach Lumley [32]. Abb. 7.13 zeigt die zeitliche Entwicklung der Strömungen in diesem Dreieck. Für den Koeffizienten  $C_\varepsilon^1$  könnte dies funktionieren, da gleiche Werte des Koeffizienten gleichen Orten in der Invariantenkarte entsprechen. So liegen bei kleiner totaler Scherung die Werte für S12 und S20 nahe beieinander. In der Invariantenkarte entwickeln sich beide Strömungen anfänglich ebenfalls gleich. Zu späteren Zeitpunkten nähern sich die Werte in den Fällen S13 und S20 einander an. Beide Strömungen sind zu diesem Zeitpunkt im Invariantendreieck in Richtung der rechten Ecke gelaufen. Für den Koeffizienten  $C_\varepsilon^2$  funktioniert dieses Konzept nicht. Gegen Ende der Simulation gilt  $C_\varepsilon^2(S13) < C_\varepsilon^2(S12) < C_\varepsilon^2(S20)$ . Im Invariantendreieck liegt jedoch S20 zwischen S12 und S13.

### 7.3.3 Turbulente Mischungsschicht

*A priori*-Tests der Koeffizienten anhand der DNS-Daten turbulenter Mischungsschicht können nur innerhalb der Schicht sinnvolle Werte liefern. An den Rändern gehen beide, die exakten Terme und ihre Modelle, gegen Null. Der Wert der Modellkoeffizienten kann dort also nicht mehr bestimmt werden. Daher wird nur der innere Bereich  $-3 < \zeta < 3$  betrachtet. Die Koordinate wurde im Fall M14 um eine Impulsverlustdicke verschoben, um die Verlagerung der Schicht hin zur Seite

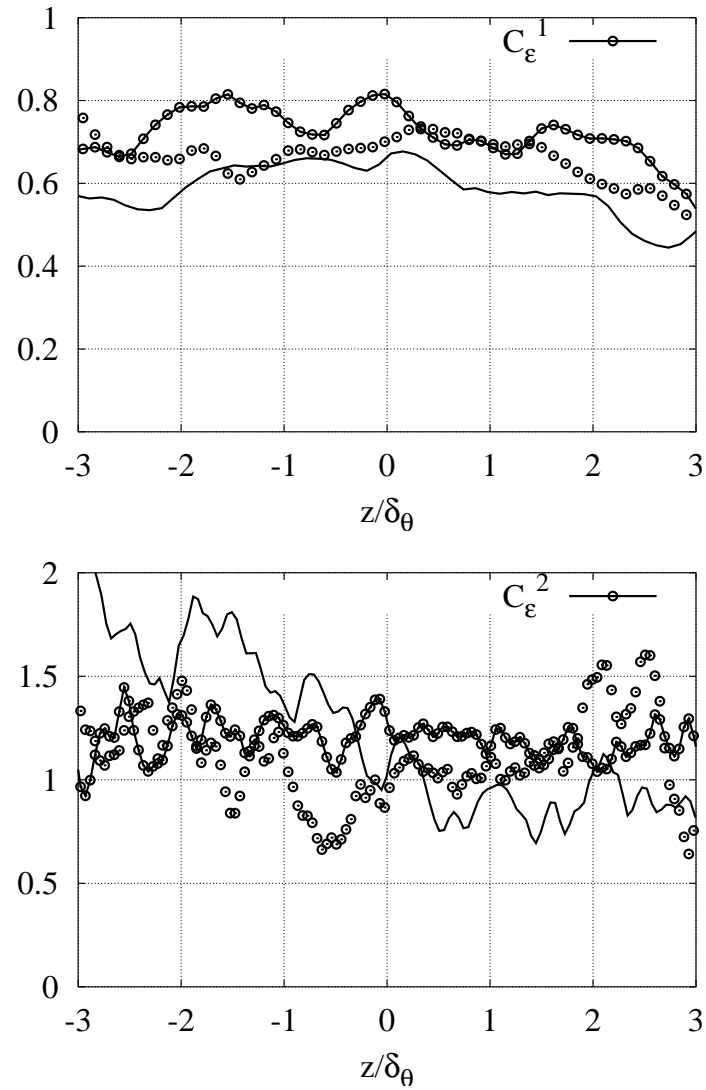


Abbildung 7.14: Modellkoeffizienten  $C_\varepsilon^1$  (oben) und  $C_\varepsilon^2$  (unten) in turbulenter Mischungsschicht; nur Symbole: M10; Symbole und Linien: M11; nur Linien: M14

geringerer Dichte auszugleichen.

Der Koeffizient  $C_\varepsilon^1$  ist in diesem Bereich beinahe unabhängig von Kompressibilitätseffekten, s. Abb. 7.14 (links). Die Mittelwerte und Standardabweichungen sind  $0.66 \pm 0.05$ ,  $0.72 \pm 0.06$  und  $0.59 \pm 0.06$  in den Fällen M10, M11 und M14.

Die Werte für  $C_\varepsilon^2$  schwanken stark, s. Abb. 7.14 (rechts). Wahrscheinlich ist die Anzahl statistisch unabhängiger Stichproben zu gering, um glatte Kurven zu erhalten. Dennoch sieht man, dass die Mittelwerte nahe beieinander liegen. Im Bereich  $-3 < \zeta < 3$  sind dies  $1.11 \pm 0.22$ ,  $1.20 \pm 0.09$  und  $1.23 \pm 0.39$  für M10, M11 und M14.

Im Fall des turbulenten Transports ergibt eine *a priori*-Berechnung des Koeffizienten  $f_t$  stark schwankende Werte mit vielen Singularitäten. Dies hat zwei Gründe: Zum einen wechselt der Transportterm innerhalb der Mischungsschicht zweimal das Vorzeichen. Zum anderen schwankt der Modellterm ohne den Koeffizienten  $\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{\rho}^2 K^2}{\bar{\rho} \varepsilon_s} (\bar{\rho} \varepsilon_s)_{,i} \right)_{,i} / \bar{\rho}^2$  stark. Die zweite Ableitung, die in diesem Term auftritt, führt zu einer starken Aufrauung der anfänglich glatten Kurven. Das Modell kann aber dennoch untersucht werden, wenn man eine andere Vorgehensweise wählt: Anstatt  $f_t$  zu berechnen, wird ein konstanter Wert verwendet, und dann das Modell mit dem exakten Term verglichen. Bei der Berechnung des Modellterms wird jede abgeleitete Größe mit einem Box-Filter mit Filterweite  $\delta_\theta$  geglättet. In allen untersuchten Strömungen ist die Übereinstimmung zwischen Modell und Term gut, wenn man einen Wert  $f_t = 0.5$  verwendet, wie Abb. 7.5 zeigt. Auch die Asymmetrie des Terms in der Mischungsschicht mit Dichteunterschieden M14 wird gut wiedergegeben.

Die Produktion durch Gradienten des mittleren Wirbelvektors  $P_\varepsilon^3$  und die viskose Diffusion  $D_\varepsilon$  in der turbulenten Mischungsschicht sind vernachlässigbar klein, wie die DNS-Daten in Übereinstimmung mit dem erwarteten asymptotischen Verhalten (Kapitel 5) zeigen. Daher werden diese Terme hier nicht untersucht.

### 7.3.4 Turbulente Kanalströmung

Dargestellt in innerer Skalierung, fallen die Kurven für  $C_\varepsilon^1$  und  $C_\varepsilon^2$  zusammen, trotz der unterschiedlichen Machzahlen. Wie Abb. 7.15 (links) zeigt, gibt es keinen direkten Kompressibilitätseffekt<sup>2</sup>. Der Wandwert von  $C_\varepsilon^1$  kann aus den Simulationsdaten nicht bestimmt werden, da sowohl die exakten Terme  $P_\varepsilon^1 + P_\varepsilon^2$  als auch der Modellterm  $\frac{\varepsilon}{K} \widetilde{u''_i u''_j} \widetilde{U}_{i,j}$  dort Null sind.

Die Ergebnisse für die Koeffizienten der Modelle von  $P_\varepsilon^3$  und  $T_\varepsilon$  sind schwieriger zu interpretieren, da Singularitäten auftreten, zum einen an der Wand (s. Kapitel 5), zum anderen aufgrund der Vorzeichenwechsel dieser Terme. Im Fall des Modells von  $P_\varepsilon^3$  kann man beide Terme, aus denen das Modell zusammengesetzt ist (Gl. (5.15)), getrennt betrachten und den jeweiligen Koeffizienten bestimmen. Die Werte für die Koeffizienten sind in Abb. 7.15 (rechts) dargestellt. Der zweite Term des Modells ist dominant in unmittelbarer Wandnähe ( $z^* < 10$ ). Weiter weg von der Wand geht der Wert gegen unendlich. Verwendet man in der Modellierung einen konstanten Wert,

---

<sup>2</sup>Der Wandwert von  $C_\varepsilon^1$  kann nicht mit DNS-Daten bestimmt werden, da sowohl Modell als auch exakter Term dort Null sind. Aus demselben Grund ist er irrelevant.



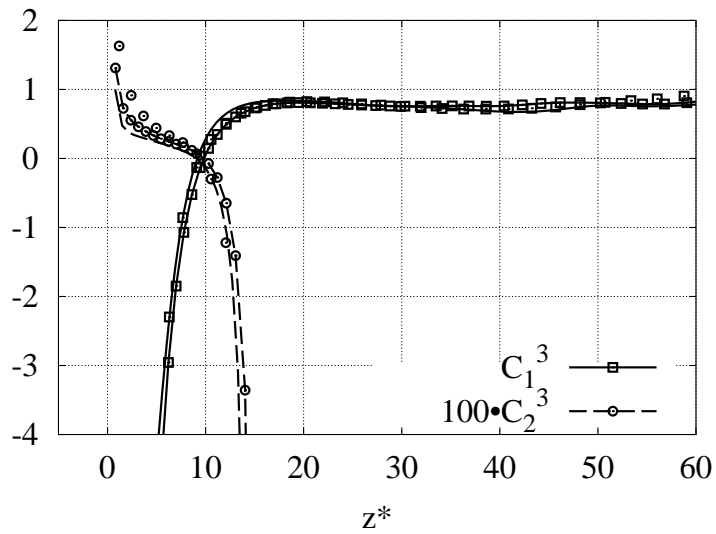
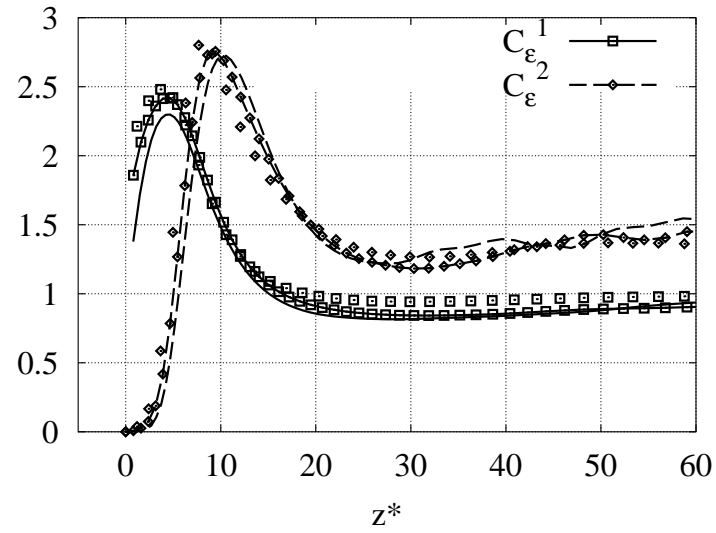


Abbildung 7.15: Modellkoeffizienten  $C_{\epsilon}^1$  und  $C_{\epsilon}^2$  (oben) und  $C_1^3$  und  $C_2^3$  (unten) in turbulenter Kanalströmung; nur Symbole: KM03; Symbole und Linien: K3000; nur Linien: K6000\_128

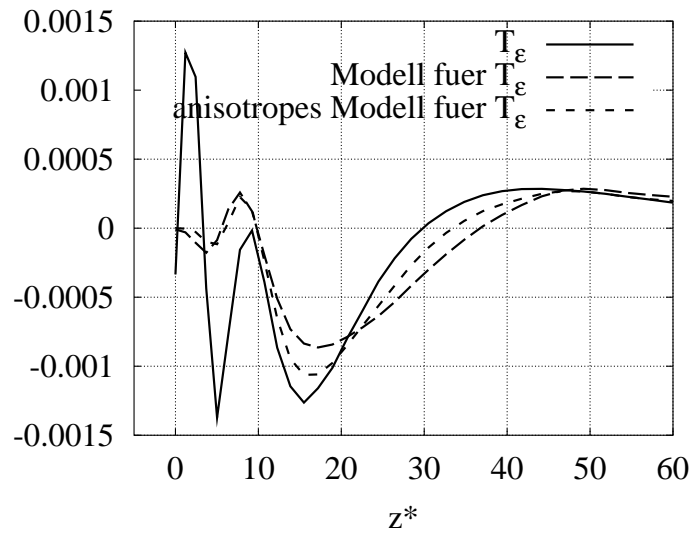
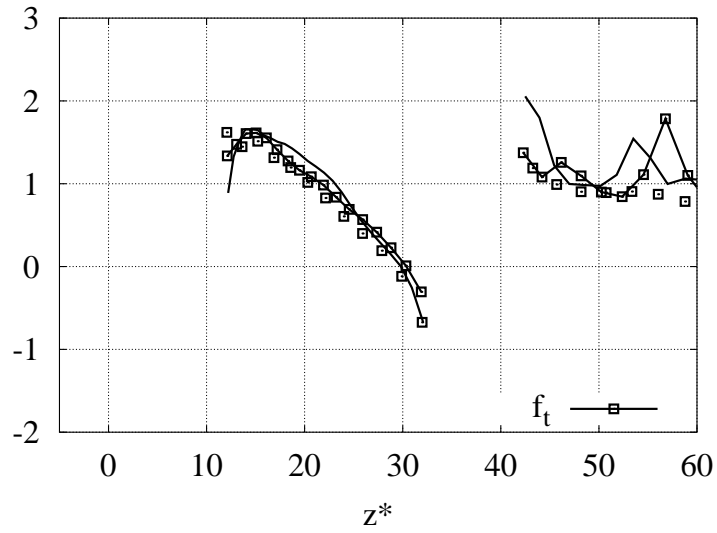


Abbildung 7.16: Oben: Modellkoeffizient  $f_t$  in turbulenter Kanalströmung; nur Symbole: KM03; Symbole und Linien: K3000; nur Linien: K6000\_128; unten: Vergleich des Terms  $T_\varepsilon$  mit Modellen, KM03

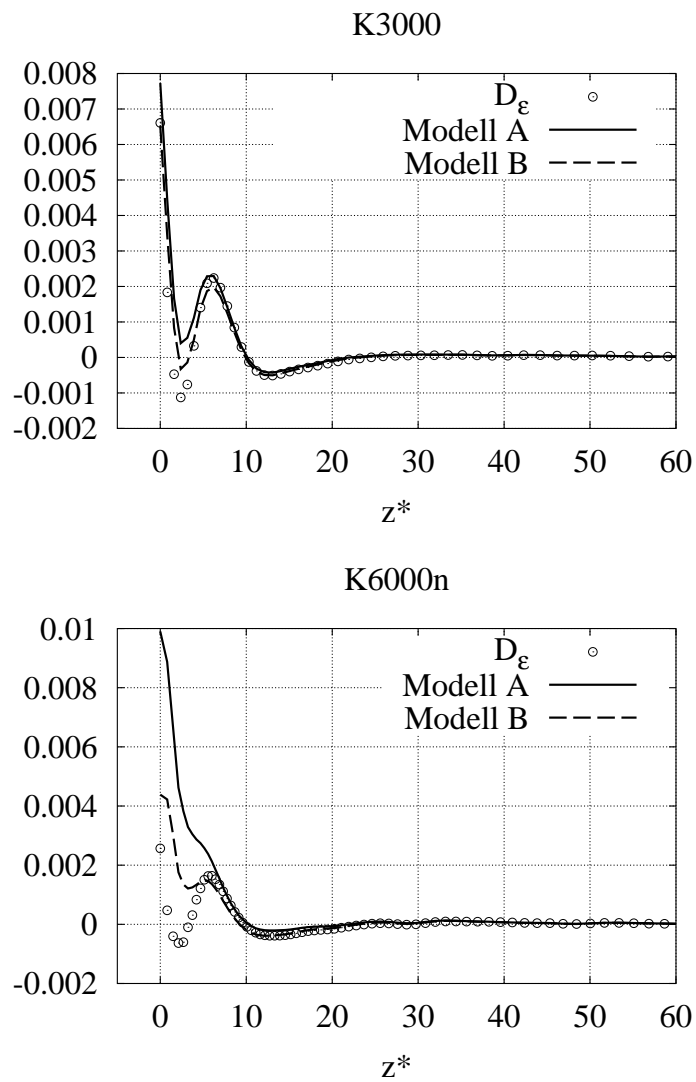


Abbildung 7.17: Vergleich des Terms  $D_\epsilon$  mit Modellen, turbulente Kanalströmung, K3000 (oben) und K6000\_128 (unten)

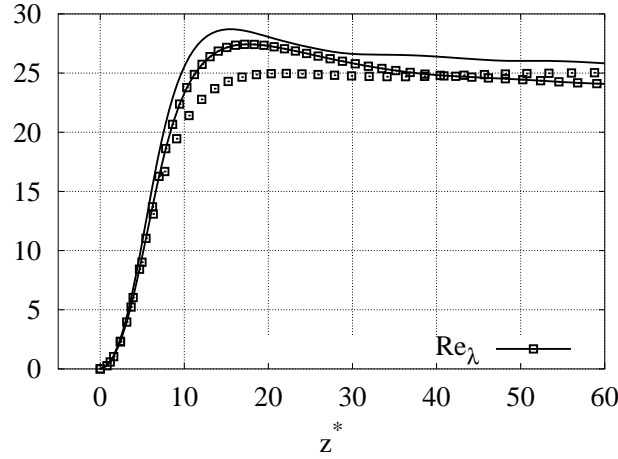


Abbildung 7.18:  $Re_\lambda$  in turbulenter Kanalströmung, nur Symbole: KM03; Symbole und Linien: K3000; nur Linien: K6000\_128

der für den Bereich  $z^* < 10$  geeignet ist, verschwindet der Einfluss des Modellteils für größere Wandabstände. Dasselbe gilt umgekehrt für den ersten Modellteil, der den Bereich  $z^* > 10$  beschreibt. In ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich ergeben sich relativ konstante Werte von  $\approx 0.7$  und  $0.007$  für  $C_1^3$  bzw.  $C_2^3$ .  $C_1^3$  ist unabhängig von der Machzahl,  $C_2^3$  nimmt mit steigender Machzahl leicht ab.

Im Fall des turbulenten Transports  $T_\varepsilon$  liegen die Werte des Koeffizienten  $f_t$  für unterschiedliche Machzahlen nahe beieinander in den Bereichen, die in Abb. 7.16 (links) gezeigt werden. Nahe der Wand ( $z^* < 12$ ) und im Bereich  $32 < z^* < 42$  wechselt  $T_\varepsilon$  das Vorzeichen, so dass der Koeffizient nicht bestimmt werden kann. Vergleicht man jedoch das Modell mit  $f_t = 1$  direkt mit dem exakten Term, zeigt sich eine gute Übereinstimmung, ausgenommen ein kleiner Bereich nahe der Wand. Beispielhaft ist dies für den Fall KM03 in Abb. 7.16 (rechts) gezeigt. Eine Verbesserung des Modells ist möglich, ersetzt man die Abhängigkeit von der turbulenten kinetischen Energie durch die einzelnen Reynoldsspannungskomponenten.

In inkompressiblen Strömungen ist die viskose Diffusion mit  $D_\varepsilon = (\nu \varepsilon_{s,i})_{,i}$  ein geschlossener Term. Dieser Ausdruck kann durch Einführung veränderlicher Dichte und Viskosität in ein Modell für kompressible Strömungen umgewandelt werden, das lautet  $D_\varepsilon \approx (\bar{\mu}(\bar{\rho} \varepsilon_s)_{,i})_{,i} / \bar{\rho}^2$  (Modell A). Eine allgemeinere, aber auch komplexere Formulierung erhält man aus  $D_\varepsilon \approx \partial^2 \varepsilon_s^* / \partial z^{*2}$ . Das resultierende Modell ist  $D_\varepsilon \approx [\bar{\mu}(\bar{\rho} \varepsilon_s \bar{\mu})_{,i} / \sqrt{\bar{\rho}}]_{,i} / (\bar{\mu} \bar{\rho}^{\frac{3}{2}})$  (Modell B). Abb. 7.17 zeigt beide Ansätze und den exakten Term für die beiden kompressiblen Fälle K3000 und K6000\_128. Die zweite Formulierung ist besser, speziell bei der höchsten Machzahl.

Alle Modellkoeffizienten hängen stark vom Wandabstand ab. In einem allgemeinen Modell sollten sie aber nur von lokalen Größen abhängen. Oft wird die Taylor-Reynoldszahl  $Re_\lambda$  verwendet, sie ist in Abb. 7.18 dargestellt. Dort sieht man, dass sie sich für alle Machzahlen ähnlich verhält. Jedoch ist sie kein geeigneter Parameter speziell für die Koeffizienten  $C_\varepsilon^1$  und  $C_\varepsilon^2$ , da eine Abhängigkeit nur von  $Re_\lambda$  nie die *peaks* dieser Koeffizienten wiedergeben kann. Dies ist möglich, verwendet man zusätzlich die Invarianten des Anisotropietensors der Reynoldsspannungen  $II$

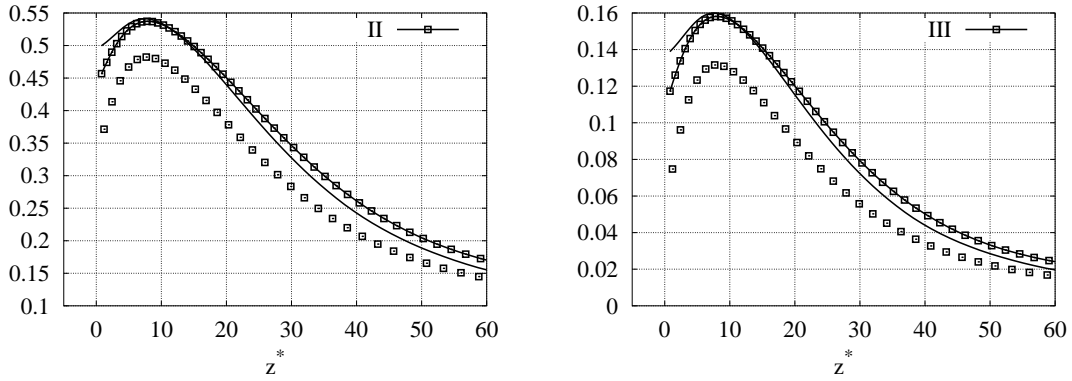


Abbildung 7.19: Zweite (links) und dritte (rechts) Invariante der Reynoldsspannungs-Anisotropietensors; nur Symbole: KM03; Symbole und Linien: K3000; nur Linien: K6000\_128

und *III*, wie es z.B. Jovanović [24] vorschlägt. Abb. 7.19 zeigt den Verlauf der Invarianten.

## 7.4 Modellierung des baroklinen Terms

Unter den explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Termen ist der barokline Term  $B_\varepsilon$  im Fall der Mischungsschicht mit Dichteunterschied der wichtigste. Für ihn wird in diesem Abschnitt ein Modell vorgeschlagen. Ein Modell für  $B_\varepsilon$  sollte folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) Es sollte ein positiver Quellterm sein. Die DNS-Daten zeigen, dass  $B_\varepsilon$  nur negativ ist, wenn der Term ohnehin vernachlässigbar ist.
- (ii) Da der Term nur in Situationen mit mittlerem Dichtegradienten relevante Werte aufweist, sollte das Modell vom Dichtegradienten abhängen.
- (iii) Im Grenzfall hoher Reynoldszahl sollte das Modell entweder wie die anderen dominanten Terme in der Bilanz skalieren oder gegen Null gehen. Ansonsten ist keine selbständige Lösung möglich.

Das Modell wird kalibriert mit Daten aus Simulation M14 bei  $t/t_R = 314$ . Zu diesem Zeitpunkt hat sich die Mischungsschicht auf das 5.25-fache ihrer ursprünglichen Dichte aufgeweitet. Die Reynoldszahl  $Re_\theta$  beträgt 848. Einzelne Modellannahmen wurden darüberhinaus mit Daten der Simulation M13 am Zeitpunkt  $t/t_R = 305$  überprüft. Die Reynoldszahl ist hier mit  $Re_\theta = 1839$  wesentlich höher, was es erlaubt, Reynoldszahlabhängigkeiten zu berücksichtigen. Die Schichtdicke ist auf das 4.60-fache des Startwerts angewachsen.

Zu Beginn ist zu bestimmen, welche der Korrelationen, aus denen der Term  $B_\varepsilon = 2\tilde{\nu} \overline{(u'_{i,j} - u'_{j,i})\rho_{,j}p_{,i}}/\rho^2 = -2\tilde{\nu} \vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho)/\rho^2$  besteht, modelliert werden soll. Die Division mit dem Quadrat der Dichte kann folgendermaßen vom Term

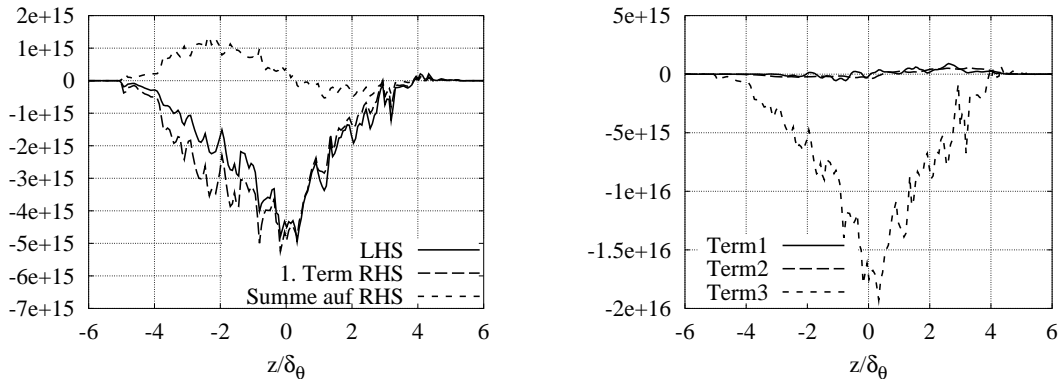


Abbildung 7.20: Links: Terme in Gleichung (7.9), M14; rechts: Terme in Gleichung (7.10), M14

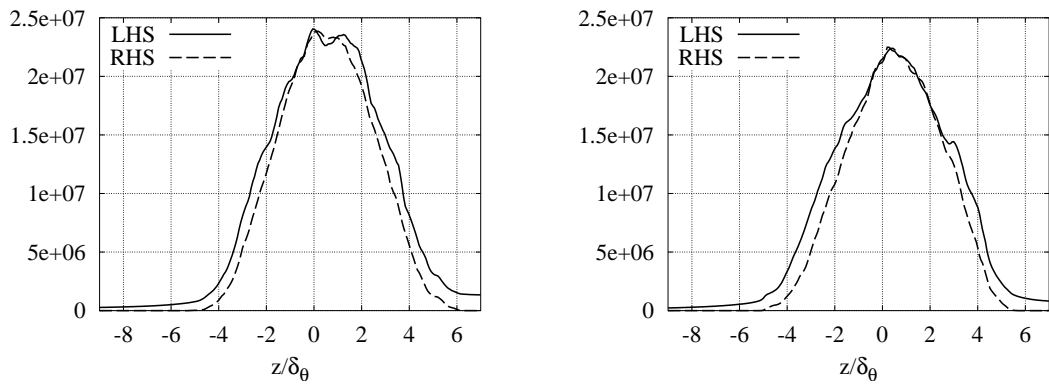


Abbildung 7.21: Teilmodell für  $\nabla p'_{rms}$ , Gl. (7.13),  $C_p = 3.1$ ; links: M13; rechts: M14

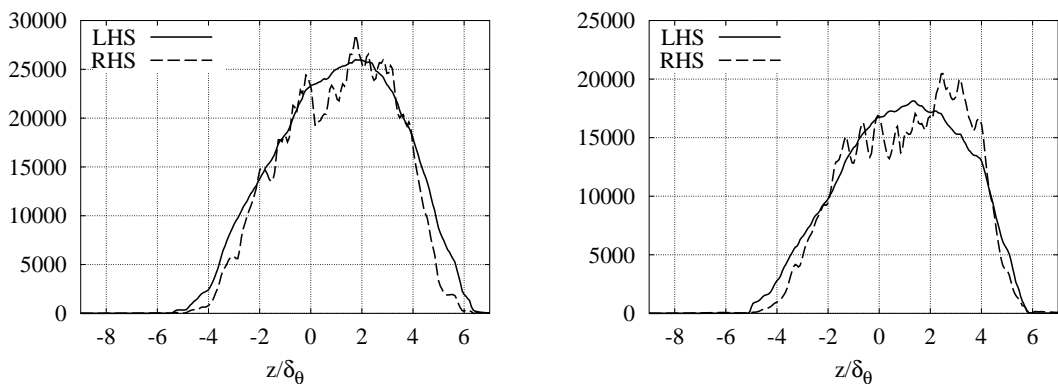


Abbildung 7.22: Teilmodell für  $\nabla \rho'_{rms}$ , Gl. (7.14),  $C_\rho = 1.2$ ; links: M13; rechts: M14

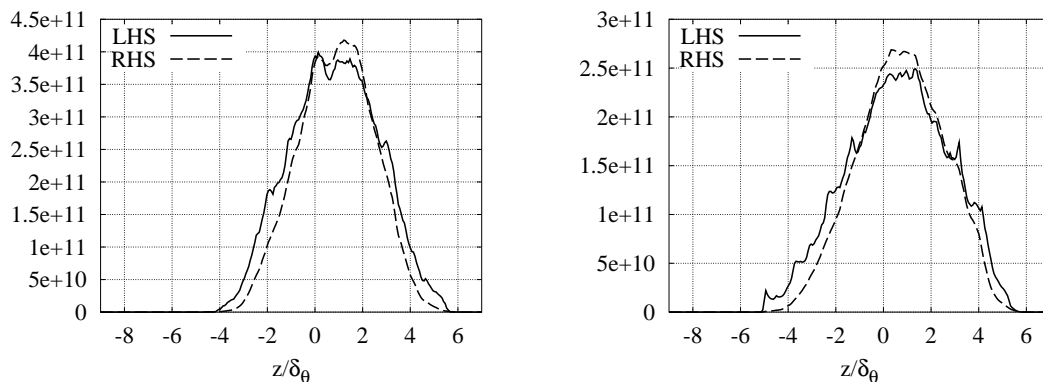


Abbildung 7.23: Teilmodell für das Kreuzprodukt von  $\nabla p'_{rms}$  und  $\nabla \rho'_{rms}$ , Gl. (7.12),  $C_{pp} = 0.7$ ; links: M13; rechts: M14

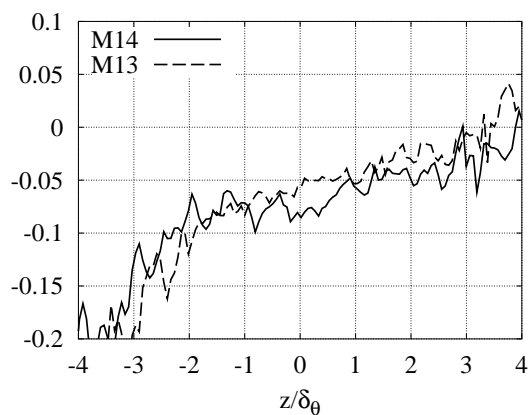


Abbildung 7.24: *A priori* ermittelte Werte von  $C$  in Gl. (7.11)

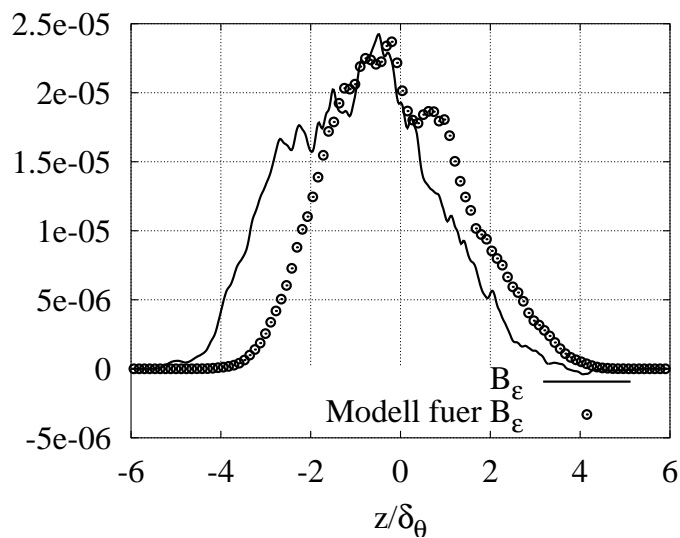


Abbildung 7.25: Vergleich von  $B_\epsilon$  mit dem Modell Gl. (7.15) mit  $C_{B_\epsilon} = 0.18$

abgetrennt werden:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho) / \rho^2} &= \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho) / \bar{\rho}^2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho) \cdot \left( -2 \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{\rho'^2}{\bar{\rho}^2} \right)^n} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Die Auswertung der DNS-Daten in Abb. 7.20 (links) zeigt, dass die Korrelationen mit den Dichtefluktuationen den Term nicht maßgeblich bestimmen.

Wie von Krishnamurty & Shyy [27] gezeigt, kann die Korrelation im ersten Term der rechten Seite von Gl.(7.9) aufgeteilt werden in

$$\begin{aligned} \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho)} &= \underbrace{\overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p' \times \nabla \bar{\rho})}}_{Term1} \\ &+ \underbrace{\overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla \bar{p} \times \nabla \rho')}}_{Term2} + \underbrace{\overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p' \times \nabla \rho')}}_{Term3}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Krishnamurty & Shyy folgerten aus einer Abschätzung der Größenordnungen, dass der zweite Term den Ausdruck dominiert. Allerdings sind einige ihrer Abschätzungen fraglich: Fluktuationen des Wirbelvektors wurden mit  $\varepsilon/K$  abgeschätzt, dabei gilt  $\omega'_{rms} = \sqrt{\varepsilon_s / \tilde{\nu}}$ . Nur eine Längenskala wurde verwendet, um sowohl fluktuierende Gradienten als auch solche gemittelter Größen abzuschätzen. Es wurde angenommen, dass fluktuierende Dichteunterschiede  $\Delta \rho'$  von derselben Größenordnung sind wie fluktuierende Druckschwankungen  $\Delta p'$ , ohne dass eine Motivation für diese Annahme genannt wurde. Sie kann gar nicht richtig sein, da Druck und Dichte unterschiedliche Einheiten haben. Somit hängt ihr Verhältnis davon ab, welche Einheiten verwendet werden. Aupoix [2] nahm an, dass der erste Term dominant ist. Die Auswertung der DNS-Daten (Abb. 7.20 (rechts)) zeigt, dass die Tripelkorrelation, der dritte Term, dominant ist. Daher ist es nicht möglich, vereinfachend nur Terme zweiter Ordnung zu modellieren.

Der verwendete Modellierungsansatz ist, Skalar- und Vektorprodukte anzunähern durch *rms*-Werte<sup>3</sup> und einen Korrelationskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho)} &= \overline{\vec{\omega}' \circ (\nabla p \times \nabla \rho)'} \\ &\approx C \cdot \omega'_{rms} \cdot (\nabla p \times \nabla \rho)'_{rms} \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$(\nabla p \times \nabla \rho)'_{rms} \approx C_{pp} \cdot \nabla p'_{rms} \cdot \nabla \rho'_{rms} \quad (7.12)$$

In diesem Ansatz ist allein  $\omega'_{rms} = \sqrt{\varepsilon_s / \tilde{\nu}}$  geschlossen. Die fluktuierenden Gradienten von Druck und Dichte  $\nabla p'_{rms}$  und  $\nabla \rho'_{rms}$  und die Koeffizienten  $C$  und  $C_{pp}$  müssen modelliert werden<sup>4</sup>.

Es wird angenommen, dass nur die hydrodynamischen Druckfluktuationen  $p'_{rms} \sim \bar{\rho} q^2$  relevant sind. Akustische Fluktuationen werden nicht berücksichtigt, da in einer

<sup>3</sup>Definition der *root-mean-square*-Werte:  $a_{rms} = \sqrt{\overline{a^2}}$ ,  $a'_{rms} = \sqrt{\overline{(a - \bar{a})^2}}$

<sup>4</sup>Beiträge von  $\nabla \bar{p}$  und  $\nabla \bar{\rho}$  zu  $\nabla p_{rms}$  bzw.  $\nabla \rho_{rms}$  sind in der hier ausgewerteten Strömung vernachlässigbar und werden nicht weiter betrachtet.



Schallwelle Dichte- und Druckgradient parallel sind und somit nicht zum baroklinen Term beitragen. Um den Gradienten abzuschätzen, benötigt man noch eine passende Längenskala. Taylor [56] wählte dazu eine Längenskala  $\lambda_\eta$  proportional zur Taylor-Mikroskala  $\lambda$ , die er “smallest size of eddy” nannte. Unter der Annahme eines Inertialbereichs nach den Ideen von Kolmogorov, gab Batchelor [4] für den fluktuierende Druckgradienten bei hohen Reynoldszahlen folgenden Ausdruck an:  $\nabla p_{rms} = 1.17 Re_t^{\frac{1}{4}} \rho q^2 / l = 1.17 \rho q^2 / \sqrt{l \lambda}$ . In einer späteren Arbeit teilten George *et al.* [19] den fluktuierenden Druckgradienten in einen Teil, erzeugt durch Interaktionen zwischen mittlerem Feld und turbulenten Fluktuationen, dominant bei niedriger Reynoldszahl, und einen, erzeugt durch Interaktion zwischen Fluktuationen. Der erste Teil wurde modelliert mit  $1.46 S^* \rho q^2 / l$ , der zweite mit  $\sqrt{1.30 Re_t^{1/2} - 50.83} \rho q^2 / l$ . Für sehr große Reynoldszahlen geht dieses Modell über in  $1.14 Re_t^{\frac{1}{4}} \rho q^2 / l$ , was der Annahme von Batchelor sehr ähnlich ist. Obwohl die untersuchten Strömungen moderate Reynoldszahlen von  $Re_t = 5400$  (M14) und  $Re_t = 10400$  (M13) haben, wird  $\sqrt{\lambda l}$  als Längenskala gewählt. Nur so hat das Modell bei unveränderter Modellkonstante Gültigkeit für beide Strömungen, s. unten. Das Modell für  $\nabla p'_{rms}$  lautet nun:

$$\nabla p'_{rms} \approx C_p \cdot \frac{\rho q^2}{\sqrt{\lambda l}} = C_p \cdot \frac{\rho \varepsilon_s^{3/4}}{\tilde{\nu}^{1/4}} \quad (7.13)$$

Dichtefluktuationen werden modelliert mit einem Mischungswegmodell. Da Mischung von großen und kleinen Strukturen beeinflusst ist, erscheint eine Längenskala zwischen der integralen Skala und der Taylor-Mikroskala geeignet. Als Längenskala für den fluktuierenden Gradienten wird, parallel zu den Geschwindigkeitsfluktuationen, die Taylor-Mikroskala gewählt. Das Modell für den fluktuierenden Dichtegradienten ist somit:

$$\nabla \rho'_{rms} \approx C_\rho \cdot \frac{|\nabla \bar{\rho}| \sqrt{\lambda l}}{\lambda} = C_\rho \cdot |\nabla \bar{\rho}| \cdot \left(\frac{q^4}{\tilde{\nu} \varepsilon_s}\right)^{1/4}. \quad (7.14)$$

Kombiniert man die Gleichungen (7.11) bis (7.14), erhält man das Modell

$$B_\varepsilon \approx 2 C_{B_\varepsilon} \left(\frac{|\nabla \bar{\rho}|}{\bar{\rho}}\right) q \varepsilon_s \quad (7.15)$$

mit

$$C_{B_\varepsilon} = -C \cdot C_{\rho p} \cdot C_p \cdot C_\rho. \quad (7.16)$$

Man sieht sofort, dass das Modell proportional zum mittleren Dichtegradienten ist, wie es die Bedingung (ii) verlangt. Da in einer Mischungsschicht  $\varepsilon_s \sim \Delta U^3 / \delta_\theta$ ,  $q \sim \Delta U$  und  $\nabla \bar{\rho} \sim \bar{\rho} / \delta_\theta$  gilt, skaliert das vollständige Modell mit  $\Delta U^4 / \delta_\theta^2$ . Dies ist die Skalierung der zeitlichen Änderung der Dissipationsrate und der Modelle für die Produktion durch mittleren Geschwindigkeitsgradienten, den Abklingterm und den turbulenten Transport, s. Kapitel 5. Bedingung (iii) ist somit erfüllt. Es bleibt

das Vorzeichen des Modellkoeffizienten  $C_{B_\varepsilon}$  zu bestimmen, um festzustellen, ob das Modell entsprechend Bedingung (i) positiv ist.

Die Annahmen in Gleichungen (7.11) bis (7.14) werden überprüft und gleichzeitig die Koeffizienten in diesen Gleichungen kalibriert anhand von DNS-Daten der Fälle M14 und M13. Die *a priori*-Untersuchung des Korrelationskoeffizienten in Gl. (7.11) ergibt einen Wert für  $C$ . Abb. 7.24 zeigt die Variation dieses Wertes innerhalb der Mischungsschicht. Im Bereich  $-3 < z^* < 3$  ist der mittlere Wert für  $C$  gleich  $-0.07$  in beiden Simulationen M14 und M13. Wählt man für  $C_\rho$  in Gl.(7.14) einen Wert von 1.2, ergibt sich, wieder für beide Fälle M14 und M13, ein gutes Teilmodell für den fluktuierenden Dichtegradienten, s. Abb. 7.22. Der geeignete Wert der Konstante  $C_p$  in Gleichung (7.13) ist, wie Abb. 7.21 zeigt, 3.1. Dieser Wert ist etwa 2.5-mal höher als der von Batchelor für isotrope Turbulenz bei hoher Reynoldszahl abgeschätzte.

Schreibt man das Vektorprodukt in Gl. (7.12) als Produkt aus den Beträgen der Vektoren und ihrem Zwischenwinkel, erhält man

$$(\nabla p \times \nabla \rho)'_{rms} = \overline{(|\nabla p'| |\nabla \rho'| \sin \phi)^2} \approx C_{pp}^2 \overline{|\nabla p'|^2} \overline{|\nabla \rho'|^2}. \quad (7.17)$$

Wenn angenommen wird, dass sowohl Richtung als auch Betrag der Gradienten von Druck und Dichte unabhängig verteilt sind, vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\overline{\sin^2 \phi} \approx C_{pp}^2. \quad (7.18)$$

Diese Annahme mag gerechtfertigt sein, da Dichteunterschiede das Ergebnis einer vergangenen Durchmischung sind, wohingegen hydrodynamische Druckfluktuationen vom momentanen Strömungsfeld abhängig sind. Unter diesen Annahmen ist die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f(\psi)$  von  $\phi$ , die benötigt wird, um den Wert von  $C_{pp}$  zu bestimmen, gleich  $\frac{1}{2} \sin \psi$ <sup>5</sup>. Somit ergeben theoretische Überlegungen ein Wert von

$$C_{pp} = \sqrt{\int_0^\pi 1/2 \cdot \sin(\psi) \sin^2(\psi) d\psi} \approx 0.816. \quad (7.19)$$

Dieser ist etwas höher als der Wert von 0.7, bestimmt durch eine *a priori* Untersuchung, s. Abb. 7.23. Die Gradienten sind also nicht vollständig unabhängig, aber diese Annahme ergibt eine gute Abschätzung.

---

<sup>5</sup>Nur die Richtungen der Gradienten, zwei unabhängige Einheitsvektoren werden betrachtet. Wenn der erste Vektor als Achse einer Kugel mit Radius  $R = 1$  betrachtet wird, zeigt der zweite vom Mittelpunkt der Kugel auf einen Punkt auf ihrer Oberfläche, und zwar auf jeden Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Nun ist die Wahrscheinlichkeit von  $\phi < \psi$  gleich dem Verhältnis des Segments der Oberfläche mit  $\phi < \psi$  zur gesamten Kugeloberfläche

$$F(\psi) = P\{\phi < \psi\} = \frac{\pi 2R^2(1 - \cos(\psi))}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos(\psi)).$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$f(\psi) = \frac{dF(\psi)}{d\psi} = \frac{1}{2} \sin(\psi).$$

Der Koeffizient des vollständigen Modells Gl. 7.15 ist somit  $C_{B_\varepsilon} = -(-0.07) \cdot 3.1 \cdot 1.2 = 0.18$ . Er ist positiv, somit ist Bedingung (i) erfüllt. Der Vergleich zwischen Modell und exaktem Term in Abb. 7.25 zeigt, dass das Modell gut funktioniert. Nur die Verschiebung des Terms in den Bereich niedriger Dichte, zusätzlich zum Versatz der gesamten Mischungsschicht wird nicht korrekt wiedergegeben. Dies liegt daran, dass für  $C$  ein konstanter Wert angenommen wurde, obwohl sein Betrag zur Seite niedriger Dichte hin ansteigt, s. Abb. 7.24.

Der Koeffizient kann mit dem von Aupoix [2] *a posteriori* kalibrierten Modell verglichen werden. Aupoix entwickelte folgendes Modell für  $B_\varepsilon$ :

$$\bar{\rho} B_\varepsilon \approx CK^{3/2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (7.20)$$

Obwohl das Modell auf der falschen Annahme beruht, dass der erste Term in Gleichung (7.10) dominant ist, kann man es in einer Form schreiben, die der hier vorgeschlagenen Modellierung (Gl. (7.15)) entspricht:

$$B_\varepsilon = \frac{C}{\sqrt{2}} S^* \left( \frac{|\nabla \bar{\rho}|}{\bar{\rho}} \right) q \varepsilon_s \quad (7.21)$$

In der untersuchten Mischungsschicht ist  $S^* \approx 5$ . Aupoix erhielt die besten Ergebnisse mit Werten von  $C$  zwischen 0.05 und 0.1. Ein Vergleich obiger Gleichung mit Gl. (7.15) zeigt, dass dies Werten von  $C_{B_\varepsilon}$  zwischen 0.09 und 0.18 entspricht. Der in der vorliegenden Arbeit bestimmte Wert von 0.18 liegt am Rand dieses Bereichs.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Einflüsse von Kompressibilität auf die Bilanzgleichung der solenoidalen Dissipationsrate turbulenter kinetischer Energie und die statistische Modellierung dieser Gleichung untersucht.

Eine neue Aufteilung der Terme in dieser Gleichung machte es einfacher, Kompressibilitätseffekte in Strömungen mit starken Dichte- und Viskositätsgradienten zu identifizieren und zwischen explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Termen und der Veränderung von Termen, die auch in inkompressiblen Strömungen auftreten, zu unterscheiden.

Die Untersuchung basierte auf der Verwendung von DNS-Daten freier und wandgebundener Strömungen bei unterschiedlichen Kompressibilitätsbedingungen. Zur Simulation wurde ein Finite-Differenzen-Verfahren für kompressible Strömungen verwendet. Quasi-inkompressible Strömungen erhält man hier durch die Wahl einer geringen Machzahl.

Die homogene Scherströmung erwies sich, was Kompressibilitätseffekte betrifft, als schwierige Strömungskonfiguration. Bei quasi inkompressibler Strömung stellte sich ein wirklich selbstähnlicher Zustand erst nach relativ langen Zeiten ein. Simulationen mit unterschiedlicher anfänglicher Scherrate erreichten zwar denselben selbstähnlichen Zustand. Nach Abschluss der transienten Phase waren die Simulationen jedoch aufgrund des wachsenden integralen und sinkenden kolmogorovschen Längenmaßes bereits unteraufgelöst. Bis zum Erreichen der Selbstähnlichkeit war es schwierig, transiente Effekte von den Effekten unterschiedlicher Kennzahlen zu trennen. Bei der Untersuchung kompressibler Strömungen trat ein grundsätzliches Problem auf: Die beiden Kompressibilitätsparameter  $M_t$  und  $M_g$  wachsen mit der Zeit. Somit wird, auch wenn man die Strömung in selbstähnlicher Skalierung betrachtet, kein stationärer Zustand erreicht, falls diese Parameter die Strömung beeinflussen.

Besser geeignet für die vorliegende Fragestellung war die zeitlich sich entwickelnde Mischungsschicht. Hier sind im selbstähnlichen Zustand alle Kennzahlen – mit Ausnahme der Reynoldszahl – konstant. Die Abhängigkeit der Wachstumsrate von der Machzahl konnte quantitativ nicht richtig wiedergegeben werden. Dies ist, wie die Diskussion der Ergebnisse anderer Autoren zeigte, ein grundsätzliches Problem der DNS dieser Strömung.

Wandgebundene Strömungen wurden anhand einer Kanalströmung mit gekühl-

ten Wänden untersucht.

Es wurde zwischen drei Arten von Effekten von Kompressibilität bzw. Dichteunterschieden auf die Transportgleichung der Dissipationsrate unterschieden:

- (i) Explizit von Geschwindigkeitsdivergenz oder Dichtegradienten abhängige Terme
- (ii) Indirekte Effekte. Dabei verändern Einflüsse der Kompressibilität auf große Skalen die Strömung und damit die Prozesse in der Transportgleichung für die Dissipationsrate.
- (iii) Direkte Effekte der Kompressibilität auf die Prozesse in der Transportgleichung der Dissipationsrate

Die explizit von Divergenz bzw. Dichtegradienten abhängigen Terme bleiben meist klein. In wandgebundenen Strömungen erreichen sie maximal ein Zehntel des Abklingterms, in freien ein Fünftel. Ausnahme ist der barokline Term in der Mischungsschicht zwischen zwei Strömen unterschiedlicher Dichte. Dort ist er ein Produktionsterm, vom Betrag her ein Drittel so groß wie der Abklingterm.

Um direkte und indirekte Effekte auf die übrigen Terme zu trennen, wurden *a-priori*-Tests von Modellen dieser Terme durchgeführt. Es wurde angenommen, dass die verfügbaren, für inkompressible Strömungen entwickelten Modelle, nach Einführung variabler Dichte die Prozesse in der Transportgleichung richtig beschreiben. Direkte Effekte zeigen sich somit an veränderten Modellkoeffizienten.

Die Untersuchungen zeigten, dass die Koeffizienten unabhängig von der Machzahl und der Veränderung der Stoffeigenschaften sind. Es kann also gefolgert werden, dass die Kompressibilitätseffekte auf die Transportgleichung der Dissipationsrate indirekter Natur sind. Diese Feststellung erscheint vernünftig, betrachtet man die für den Dissipationsbereich definierten Machzahlen  $M_{tD}$  und  $M_{gD}$ . Es wurde gezeigt, dass diese stets sehr gering sind. Somit ist davon auszugehen, dass gute Modelle für inkompressible Strömungen nach Einführung variabler Dichte und Viskosität ebenfalls zur Berechnung kompressibler Strömungen geeignet sind, und zwar für wandgebundene und freie Strömungen unterschiedlicher Machzahl als auch bei Dichteunterschieden.

Extra zu modellieren ist alleine der barokline Term  $B_\varepsilon$ . Ein Modell für diesen Term wurde vorgeschlagen. Die Modellierung wurde *a priori* untersucht.

Die vorliegende Arbeit kann keine Antwort auf die Frage geben, ob die inkompressiblen Modelle auch in Strömungen mit Stößen und relevanten Änderungen von Dichte oder Viskosität entlang von Stromlinien des mittleren Feldes gültig sind. In allen ausgewerteten Strömungen treten diese Effekte nicht auf.

# Anhang A

## Räumliche Strukturen der Terme der Enstrophiebilanz

In diesem Kapitel werden Momentanfelder einzelner Terme der Bilanz der Dissipationsrate gezeigt. Diese Bilder wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter ausgewertet, der Autor möchte sie dennoch dem Leser nicht vorenthalten, alleine weil sie sehenswert sind.

Es wurden die Mischungsschichten M10, M11 und M14 ausgewählt. Gezeigt werden Terme ohne Aufspaltung der Größen in Mittelwerte und Fluktuationen. Der momentane physikalische Prozess an einem Ort kennt diese Aufspaltung auch nicht. Anstelle der Dissipation wird die zweifache Enstrophie  $\omega_i \omega_i$  betrachtet.

Dargestellt sind jeweils:

Die doppelte Enstrophie  $\omega_i \omega_i$ ,

der Produktionsterm  $-2(u_{i,j} - u_{j,i})u_{i,k}u_{k,j}$  analog zu  $P_\varepsilon^4$ ,

die Destruktion  $-2((u_{i,j} - u_{j,i})/\rho)_{,k} \tau_{ik,j}$  analog zu  $-\Upsilon$

und der barokline Term  $2(u_{i,j} - u_{j,i})\rho_{,j}p_{,i}/\rho^2$  analog zu  $B_\varepsilon$ .

In den Abbildungen A.1 bis A.3 werden Schnitte normal zur spannweitigen Richtung  $y$  gezeigt. Gradienten werden durch Schattenwurf visualisiert. Positive Werte sind rot eingefärbt, negative blau. Für alle drei Simulationen wurde dieselbe Farbskala verwendet. Der Bereich umfasst ein Viertel des Gebiets in  $x$ - und die Hälfte in  $z$ -Richtung.

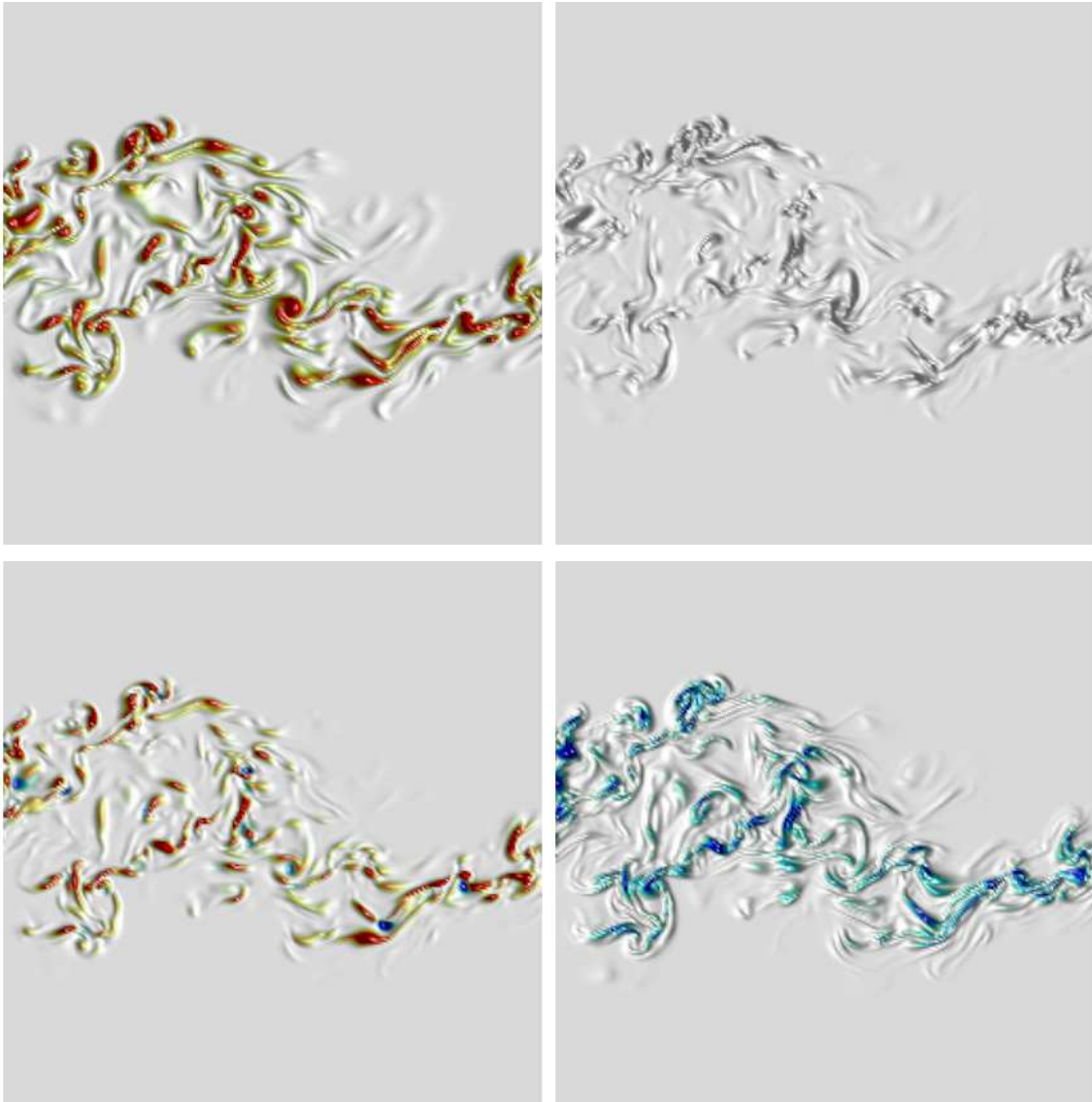


Abbildung A.1: Simulation M10; oben links:  $\omega_i\omega_i$ ; oben rechts: barokliner Term; unten links: Produktion; unten rechts: Destruktion

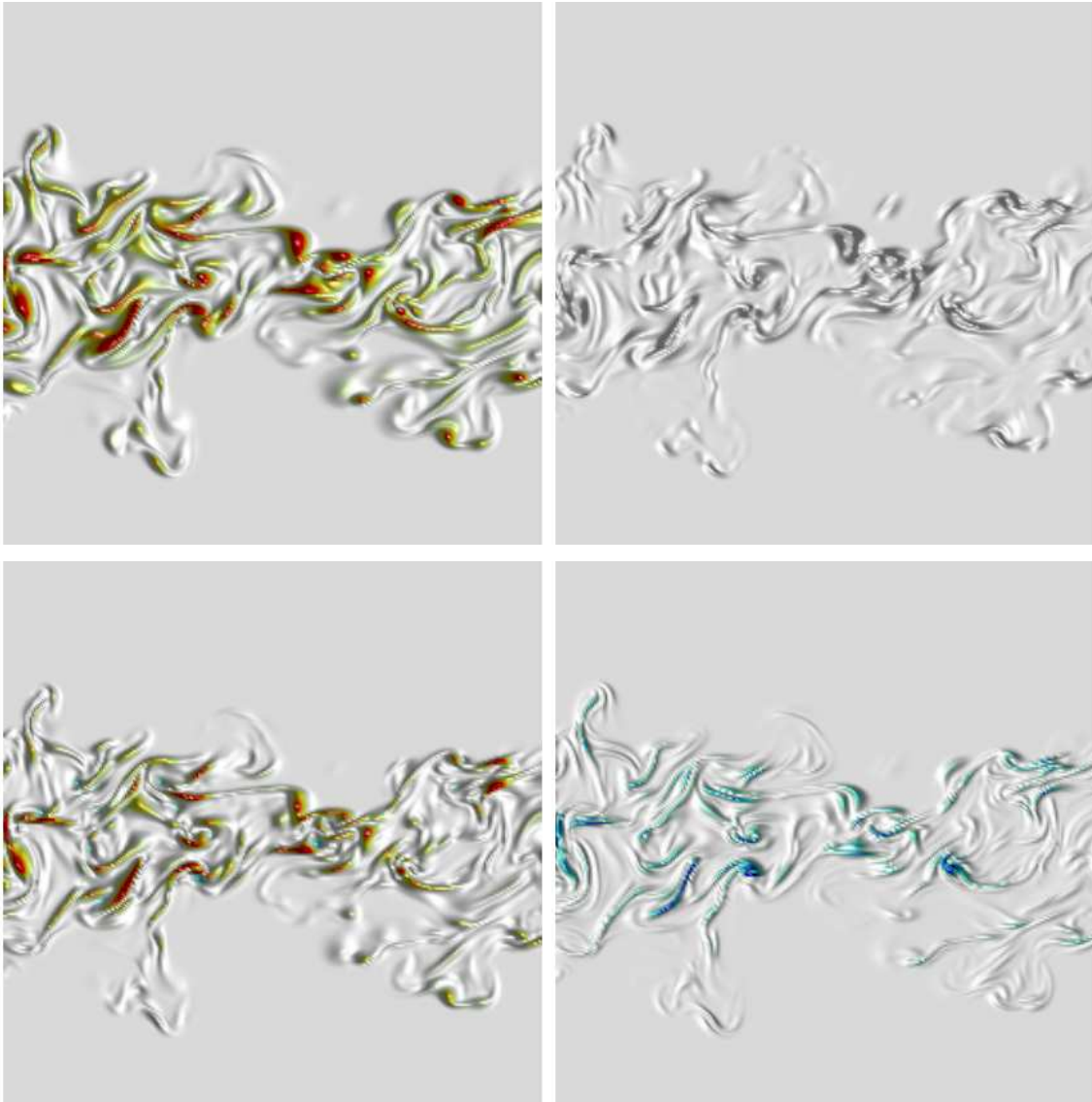


Abbildung A.2: Simulation M11; oben links:  $\omega_i \omega_i$ ; oben rechts: barokliner Term; unten links: Produktion; unten rechts: Destruktion



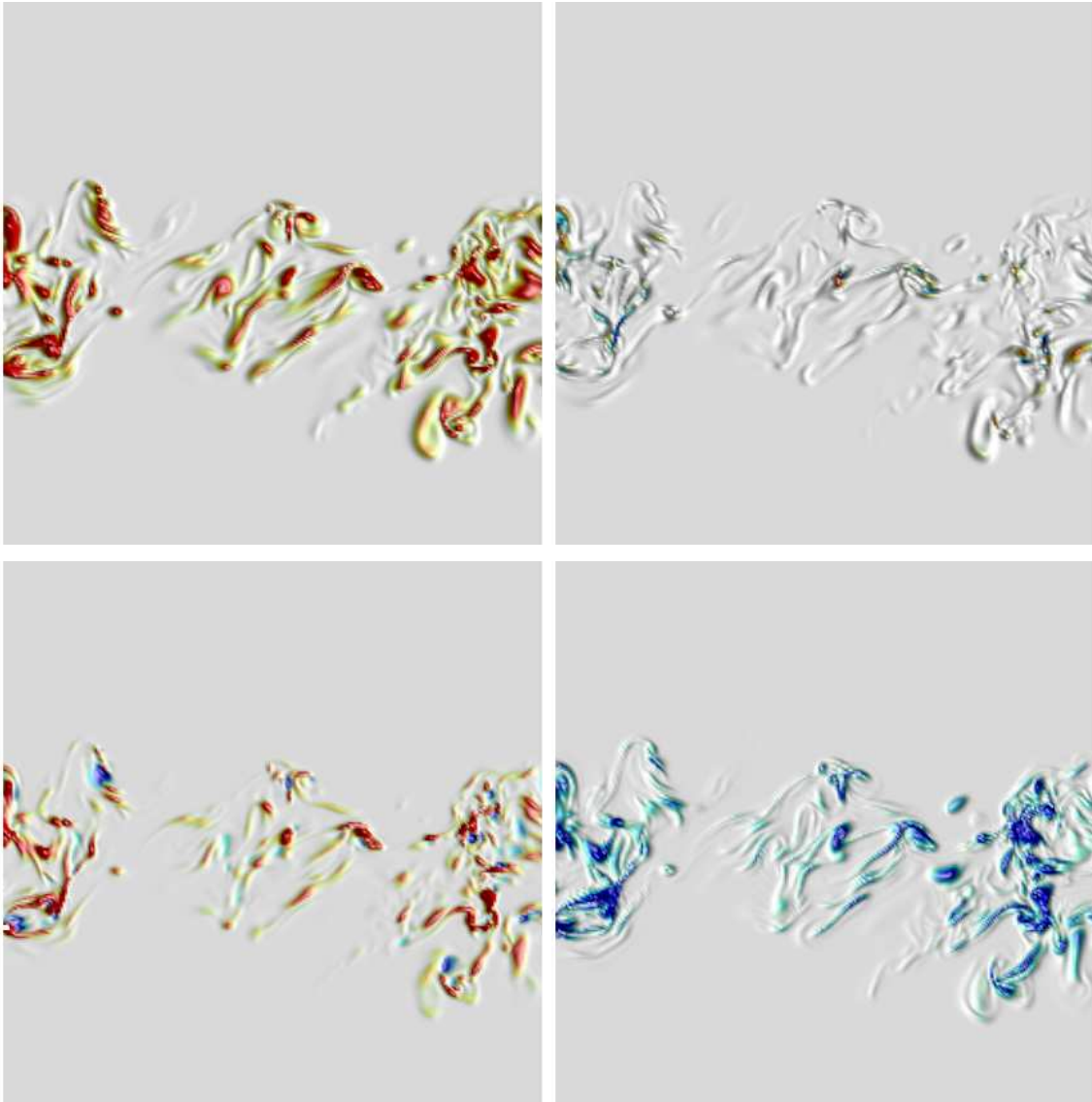


Abbildung A.3: Simulation M14; oben links:  $\omega_i\omega_i$ ; oben rechts: barokliner Term; unten links: Produktion; unten rechts: Destruktion

# Literaturverzeichnis

- [1] N.A. Adams and K. Shariff. A high-resolution hybrid compact-eno scheme for shock-turbulence interaction problems. *J. Comp. Phys.*, 127:27–51, 1996.
- [2] B. Aupoix. Modeling of compressibility effects in mixing layers. *J. Turb.*, 5:007, 2004.
- [3] F. Baron. *Macro-simulation tridimensionnelle d'écoulements turbulents cisailés*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [4] G. K. Batchelor. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47:359–374, 1951.
- [5] G.K. Batchelor and I. Proudman. The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, pages 121–152, 1954.
- [6] G.A. Blaisdell, N.N. Mansour, and W.C. Reynolds. Numerical simulations of compressible homogeneous turbulence. Technical Report TF-50, Stanford University, 1991.
- [7] G.A. Blaisdell, N.N. Mansour, and W.C. Reynolds. Compressibility effects on the growth and structure of homogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 256:443–485, 1993.
- [8] Robert E. Breidenthal. Sonic eddy - a model for compressible turbulence. *AIAA J.*, 30(1):101–104, 1992.
- [9] Gary L. Brown and Anatol Roshko. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 64:775–816, 1974.
- [10] G.N. Coleman, J. Kim, and R.D. Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *J. Fluid Mech.*, 305:159–183, 1995.
- [11] P.A. Durbin and C.G. Speziale. Local anisotropy in strained turbulence at high Reynolds number. *ASME j. Fluids Engrg.*, 113:707–709, 1991.
- [12] W.J. Feiereisen, E. Shirani, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Direct numerical simulation of homogeneous turbulent shear flows on the illiac iv computer: applications to compressible and incompressible modelling. In Bradbury, editor, *Turbulent Shear Flows 3*, pages 309–319. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

- [13] Joel H. Ferziger and Milovan Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, third, rev. edition, 2002.
- [14] H. Foysi, S. Sarkar, and R. Friedrich. Compressibility effects and turbulence scalings in supersonic channel flow. *J. Fluid Mech.*, 509:207–216, 2004.
- [15] Holger Foysi. *Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz*. PhD thesis, Technische Universität, München, 2005.
- [16] J.B. Freund, S.K. Lele, and P. Moin. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. Part 1. Turbulence and growth rate. *J. Fluid Mech.*, 421:229–267, 2000.
- [17] Rainer Friedrich. *Modelling turbulence in compressible flows*. in A. Hanifi, P.H. Alfredson, A.V. Johansson and D.S. Henningson, editors, *Transition, Turbulence and Combustion Modelling*, pages 243–348, Kluwer Academic Publishers 1999.
- [18] Rainer Friedrich. Strömungen verdünnter Gase, Vorlesung, TU München.
- [19] William K. George, Paul D. Beuther, and Roger E. A. Arndt. Pressure spectra in turbulent free shear flows. *J. Fluid Mech.*, 148:155–191, 1984.
- [20] T. Gerz, U. Schumann, and S.E. Elghobashi. Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 200:563–594, 1989.
- [21] N. Gilbert and L. Kleiser. Turbulence model testing with the aid of direct numerical simulation results. In *Proc. Eighth Symp. on Turbulent Shear Flows*, Munich, January 1991.
- [22] K. Hanjalić and B.E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52:609–638, 1972.
- [23] P.G. Huang, G.H. Coleman, and P. Bradshaw. Compressible turbulent channel flows: DNS results and modeling. *J. Fluid Mech.*, 305:185, 1995.
- [24] Jovan Jovanović. *The Statistical Dynamics of Turbulence*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [25] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- [26] Leslie S. G. Kovasznay. Turbulence in supersonic flow. *J. Aeronaut. Sciences*, 20(10):657–674, 1953.
- [27] V.S. Krishnamurty and W. Shyy. Study of compressibility modifications to the  $k - \varepsilon$  turbulence model. *Phys. Fluids*, 9(9):2769–2788, 1997.
- [28] Richard B. Lechner. *Kompressible turbulente Kanalströmungen*. PhD thesis, Technische Universität, München, 2001.

- [29] M.J. Lee, J. Kim, and P. Moin. Structure of turbulence at high shear rate. *J. Fluid Mech.*, 216:561–583, 1990.
- [30] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, 103:16–42, 1992.
- [31] S.K. Lele. Compressibility effects on turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:211–254, 1994.
- [32] J.L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18:123–176, 1978.
- [33] N.N. Mansour. The use of direct numerical simulation data in turbulence modeling. *AIAA paper*, (91-0221):1–16, 1991.
- [34] N.N. Mansour, J. Kim, and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194:15–44, 1988.
- [35] Y. Nagano and M. Shimada. Rigorous modeling of dissipation-rate equation using direct simulations. *JSME Int. J., Series B*, 38(1):51–59, 1995.
- [36] C. Pantano and S. Sarkar. A study of compressibility effects in the high-speed turbulent shear layer using direct simulation. *J. Fluid Mech.*, 451:329–271, 2002.
- [37] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *J. Fluid Mech.*, 197:453–477, 1988.
- [38] T.J. Poinso and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 101:104–129, 1992.
- [39] S.B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [40] M Rai and P. Moin. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *AIAA*, 1607:890–914, 1991.
- [41] W. Rodi and N.N. Mansour. Low Reynolds number  $k - \epsilon$  modeling with the aid of direct simulation data. *J. Fluid Mech.*, 250:509–529, 1993.
- [42] Michael M. Rogers and Parviz Moin. The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 176:33–66, 1987.
- [43] M.M. Rogers and R.D. Moser. Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer. *Phys. Fluids*, 6(2):903–923, February 1994.
- [44] Rogallo. R.S. Numerical experiments in homogeneous turbulence. Technical Memorandum 81315, NASA, 1981.
- [45] S. Sarkar. The pressure-dilatation correlation in compressible flows. *Phys. Fluids A*, 4(12):2674–2682, 1992.

- [46] S. Sarkar. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 282:163–186, 1995.
- [47] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Direct simulation of compressible turbulence in a shear flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2:291–305, 1991.
- [48] S. Sarkar, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, and H.O. Kreiss. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 227:473, 1991.
- [49] H. Schlichting. *Grenzschicht-Theorie*. G. Braun, Karlsruhe, 1982.
- [50] U. Schumann. Generation of random periodic velocity and temperature fields with prescribed correlation spectra. *DLR - IB*, 553(6/84):1–21, 1984.
- [51] U. Schumann. *Algorithms for direct numerical simulation of shear-periodic turbulence*. in *Lecture notes in Physics*, vol. 218, pages 492–496. Springer, 1985.
- [52] J. Sesterhenn. A characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes. *Computers & Fluids*, 30:37–67, 2001.
- [53] Krishenendu Sinha and Graham V. Candler. Turbulent dissipation-rate equation for compressible flows. *AIAA Journal*, 41(6):1017–1021, June 2003.
- [54] Steffen Stolz. *Large-Eddy Simulation of Complex Shear Flows Using an Approximate Deconvolution Model*. PhD thesis, ETH, Zürich, 2000.
- [55] S. Tavoularis and U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J. Fluid Mech.*, 204:457–478, 1989.
- [56] G. I. Taylor. Statistical theory of turbulence. Parts I-IV. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 151:421–478, 1935.
- [57] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- [58] Stanford University. The 1980-81 AFOSR-HTTM-STANFORD conference on complex turbulent flows: Comparison of computation and experiment. Technical report, Thermosciences Division, Mechanical Engineering Department, 1982.
- [59] A.W. Vreman, N.D. Sandham, and K.H. Luo. Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics. *J. Fluid Mech.*, 320:235–258, 1996.
- [60] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Cañada, California, second edition, 1998.
- [61] O. Zeman. Dilatation dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layers. *Phys. Fluids A*, 2:178, 1990.



# Lebenslauf

Johannes Kreuzinger

18. Januar 1975    Geboren in München
- 1981 - 1994        Schulbesuch  
Abschluss mit allgemeiner Hochschulreife
- 1994 - 1995        Zivildienst im Klinikum Großhadern, München
- 1995 - 2000        Studium des Maschinenbaus  
an der Technischen Universität München  
Abschluss mit Diplom
- 2001 - 2005        Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Fachgebiet Strömungsmechanik  
der Technischen Universität München