



Technische Universität München  
Zentrum Mathematik  
Graduiertenkolleg Angewandte Algorithmische Mathematik

# Wavelet-Methoden in der SAR-Bildverarbeitung

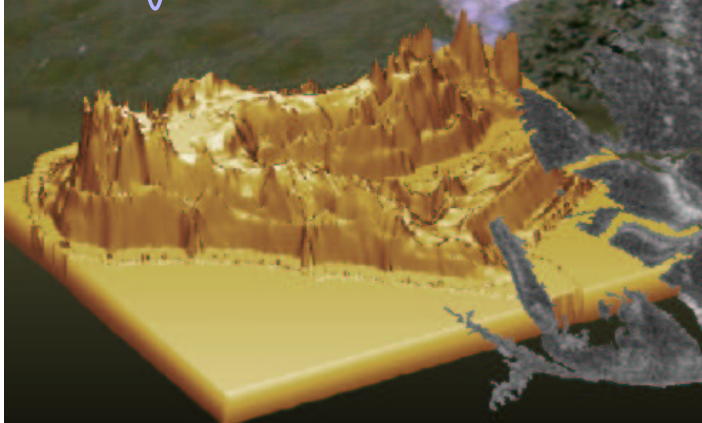
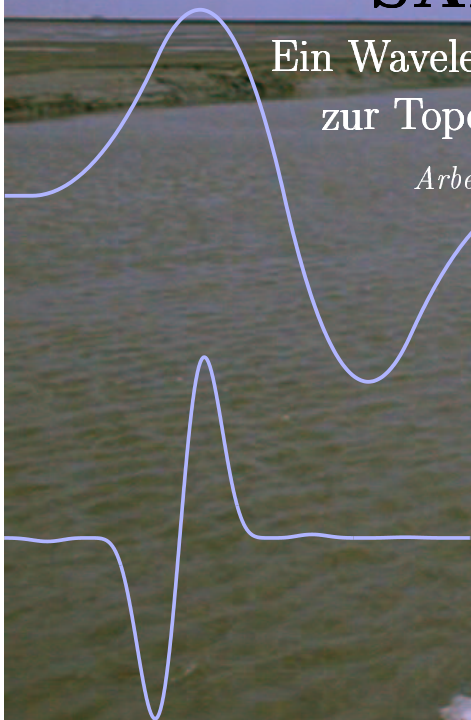
Ein Wavelet-basiertes Wasserstandslinienverfahren  
zur Topographiebestimmung im Wattenmeer

*Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades  
"Doktor der Naturwissenschaften"*

Andreas Georg Niedermeier

$$\sum_{j=0}^{L-1} \frac{L}{j! \mu^j} e^{-\frac{L}{\mu} j^{\alpha^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^4 \left( \frac{\pi \omega g_j (4 + \omega^2 g_j^2) (16 + \omega^2 g_j^2)}{128 \sinh\left(\frac{\pi}{2} \omega g_j\right)} \right)^2$$





Institut für Mathematik

# Wavelet-Methoden in der SAR-Bildverarbeitung

Ein Wavelet-basiertes Wasserstandslinienverfahren zur  
Topographiebestimmung im Wattenmeer

Andreas Georg Niedermeier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen  
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Martin Brokate

Prüfer der Dissertation 1. Univ.-Prof. Dr. Karl-Heinz Hoffmann  
2. apl. Prof. Dr. Günter Schlichting

Die Dissertation wurde am 24. April 2001 bei der Technischen Univer-  
sität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am  
13. Mai 2002 angenommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
Zusammenfassung . . . . .	9
Danksagung . . . . .	10
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>12</b>
1.1 Zur Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	12
1.2 Zur Wavelet-Theorie . . . . .	17
1.2.1 Die FOURIER-Transformation . . . . .	17
1.2.2 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation . . . . .	18
1.2.3 Die dyadische Wavelet-Transformation . . . . .	20
1.2.4 Die diskrete Wavelet-Transformation . . . . .	21
1.2.5 Wavelet-Transformation und Singularitäten . . . . .	24
1.3 Spezielle Funktionen . . . . .	26
1.3.1 Die EULERSche Gammafunktion . . . . .	26
1.3.2 Die RIEMANNsche Zetafunktion . . . . .	27
<b>2 SAR — Synthetic Aperture Radar</b>	<b>29</b>
2.1 Der SAR-Abbildungsmechanismus . . . . .	29
2.2 Die stochastische Verteilung des Speckle-Rauschens . . . . .	37
2.2.1 Mehrere Looks . . . . .	40
2.2.2 Dichtebilder . . . . .	42
2.3 Beispiele für SAR-Sensoren im Einsatz . . . . .	43
2.3.1 AMI auf ERS-1/2 . . . . .	44
2.3.2 ASAR auf ENVISAT . . . . .	47
2.3.3 SAR-Sensoren auf anderen Satelliten . . . . .	48
2.3.4 SAR-Sensoren bei Space Shuttle-Missionen . . . . .	48
2.3.5 SAR in Flugzeugen bei DLR und AeroSensing . . . . .	53
2.3.6 Weitere Einsatzmöglichkeiten von SAR-Sensoren . . . . .	53
<b>3 Ein Algorithmus zur Extraktion von Wasserstandslinien aus SAR-Bildern für die Bestimmung der Bodentopographie</b>	<b>54</b>
3.1 Überblick über den Küstenlinienextraktionsalgorithmus . . . . .	55
3.2 Wavelet-Zerlegung . . . . .	55
3.3 Schwellwertbildung . . . . .	58

3.4	Blocktracing . . . . .	58
3.5	Lokale Kantenauswahl . . . . .	59
3.6	Aktive Konturierung . . . . .	60
3.7	Anwendungsmöglichkeiten . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Qualitätskontrolle des Extraktionsalgorithmus</b>	<b>62</b>
4.1	Die Musterlösung . . . . .	62
4.2	Beurteilung der Ergebnisse . . . . .	63
4.3	Zur LIPSCHITZ-Regularität . . . . .	67
4.4	Grenzen des Algorithmus . . . . .	68
4.5	Topographie . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Mathematische Überlegungen zur Anwendbarkeit der Wavelet-basierten Kantenextraktion im Algorithmus</b>	<b>71</b>
5.1	Kantentrennwahrscheinlichkeit von einzelnen Rauschpeaks . .	72
5.2	Kantentrennwahrscheinlichkeit im simulierten Rauschen . . .	73
5.3	Kantentrennwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Filter der dyadischen Wavelet-Transformation . . . . .	82
5.3.1	Filter-Koeffizienten . . . . .	82
5.3.2	Stochastische Verteilung des Rauschens . . . . .	85
5.4	Kantentrennwahrscheinlichkeit in der kontinuierlichen Wavelet-Transformierten . . . . .	89
5.5	Vergleich der Berechnungsmöglichkeiten . . . . .	91
5.6	Interpretation von Filterungen auf Dichtebildern . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Problempunkte und Auswege</b>	<b>96</b>
6.1	Experimente im Wattenmeer . . . . .	96
6.1.1	Abbildungstreuung der Wasserstandslinie im SAR-Bild .	96
6.1.2	Größe eines Auflösungspixels im SAR-Bild . . . . .	98
6.2	Verbesserung des Blocktracing . . . . .	100
6.2.1	Textursegmentierung . . . . .	101
6.2.2	Halbautomatischer Algorithmus . . . . .	101
6.3	Gezeitenbedingte Probleme bei Wasserstandslinienverfahren .	102
6.3.1	Gradient des Gezeitenstromes . . . . .	103
6.3.2	Morphodynamik des Wattenmeers . . . . .	103
6.3.3	Ausblick . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Weitere Verfahren zur Bestimmung der Bodentopographie im Wattenmeer</b>	<b>105</b>
7.1	Messverfahren . . . . .	105
7.1.1	Sonar-Messung mit Schiffen . . . . .	106
7.1.2	Direkte Vermessung im Watt . . . . .	106
7.2	Weitere Wasserstandslinienverfahren . . . . .	107
7.2.1	Auf ERS-SAR-Bildern . . . . .	107
7.2.2	Mit anderen Sensoren . . . . .	113

7.3	Sonstige SAR-basierte Verfahren . . . . .	114
7.3.1	Interferometrie . . . . .	114
7.3.2	Analyse von inhomogenen Seegangsfeldern . . . . .	118
7.4	Vergleich der Verfahren . . . . .	120
7.4.1	Wavelet-basierte Kantenfindung versus Fuzzy-Kantenfindung . . . . .	120
7.4.2	Vergleich am <i>Mackenzie</i> . . . . .	125
7.4.3	Vergleich mit der BAW-Topographie . . . . .	129
7.4.4	Weitere Vergleiche . . . . .	131
<b>A</b>	<b>Herleitung verwendeter Formeln; Beispiele</b>	<b>135</b>
A.1	Verteilungen aus Tabelle 1.1 . . . . .	135
A.1.1	Normalverteilung . . . . .	135
A.1.2	Exponential-Verteilung . . . . .	136
A.1.3	RAYLEIGH-Verteilung . . . . .	136
A.1.4	FISHER-TIPPETT-Verteilung . . . . .	138
A.2	Beweise zur Verteilung spezieller SAR-Bilder . . . . .	139
A.2.1	Intensitätsverteilung beim Multilook-Bild . . . . .	139
A.2.2	Amplitudenverteilung beim Multilook-Bild . . . . .	140
A.2.3	Verteilung beim Multilook-Intensitätsdichte- und Amplitudendichtebild . . . . .	142
A.3	FOURIER-Transformation der Radargleichung . . . . .	143
A.4	Wavelet-Transformierte der charakteristischen Funktion eines glatt berandeten Gebietes . . . . .	145
A.4.1	Gerader Rand auf dem Träger des Wavelets . . . . .	145
A.4.2	Überlegungen zum beliebigen $C^k$ -Rand . . . . .	146
A.5	Maxima beim Spline-Wavelet . . . . .	149
A.6	Zahlenbeispiele zum direkten dyadischen Filter $\mathbf{G}^{[j],\kappa}$ . . . . .	151
<b>B</b>	<b>Weitere Anwendung: Erkennen von Wellengruppen</b>	<b>152</b>
<b>C</b>	<b>Quellcodes ausgewählter Routinen</b>	<b>155</b>
C.1	Routinen des Kantenextraktionsalgorithmus . . . . .	155
C.2	Routinen zu mathematischen Überlegungen . . . . .	160
<b>D</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>163</b>
D.1	Bildquellennachweis . . . . .	166
D.2	ERS-SAR-Bildarchiv <i>Elb-Ästuar</i> . . . . .	167
<b>E</b>	<b>Algorithmenverzeichnis</b>	<b>172</b>
<b>F</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>173</b>
<b>G</b>	<b>Personenverzeichnis</b>	<b>182</b>

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	7
<b>H Softwareverzeichnis</b>	<b>183</b>
<b>I Stichwortverzeichnis (Index)</b>	<b>184</b>
<b>J Tabellenverzeichnis</b>	<b>191</b>
<b>K Verzeichnis beteiligter Organisationen und Projekte</b>	<b>192</b>
<b>L Verzeichnis mathematischer Symbole</b>	<b>194</b>

67	Abbildungen
117	Abschnitte
7	Algorithmen
12	Anhänge
22	Definitionen
81	Fußnoten
238	Gleichungen
394	Indexeinträge
4741	Indexstellen
14	Lemmata/Sätze
121	Literaturhinweise
7	Kapitel
195	Seiten
19	Tabellen
123	Textseiten
10	Verzeichnisse

# Einleitung

SEIT ihrer Einführung Mitte der 80er Jahre des 20. Jahrhunderts [Db, Ma, LMR] erfreuen sich Wavelets stetig wachsender Beliebtheit, sowohl als mathematisches Hilfsmittel als auch in verschiedensten Anwendungen. Genannt seien hier numerische Probleme, wie partielle Differentialgleichungen [Da, NZ], sowie algorithmische wie Datenkompression [TBW, HK] und Signalanalyse [MH, Rd, Ww]. Grund genug, spezielle Einsatzgebiete genauer zu untersuchen und Wavelet-Methoden mit konventionellen zu vergleichen.

Synthetisches Apertur Radar (SAR) [BaS] ist ein in den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickeltes, hochauflösendes abbildendes Verfahren, das stark verrauschte Bilder — zumeist von der Erdoberfläche — erzeugt. Die Möglichkeit, bei allen Tageszeiten und Wetterbedingungen Bilder vom Weltall aus aufzunehmen, ist der entscheidende Vorteil gegenüber optischen Abbildungsverfahren. Der gravierende Nachteil, das bereits erwähnte Rauschen (sog. Speckle) [FSSH, Lee2], stellt an den Bildverarbeiter hohe Anforderungen. Bildanalysealgorithmen müssen den Eigenheiten des Speckle gerecht werden [TLB, KSSC, Lee1, LTN, WD]. Auch Wavelet-Verfahren wurden bereits in verschiedenen Bereichen bei der SAR-Bildverarbeitung wie Datenkompression oder Speckle-Filterung [OGL<sup>+</sup>, AAB, HFML, Gg, PVP<sup>+</sup>] verwendet.

SAR-Bilder haben ein breites Einsatzgebiet in der angewandten Fernerkundung. Neben vielfachen Vermessungsinteressen z.B. aus der Kartographie und Landnutzung sind auch Küsten- und Wasserstandslinien von großem Interesse [SLW, LJ]. Unter anderem können sie zur Beobachtung von Küstenveränderungen [LWH<sup>+</sup>] und topographischen Veränderungen im Bereich des Tidenhubes [MD] verwendet werden.

Diese Arbeit stellt einen Wavelet-basierten Algorithmus zur Wasserstandslinienextraktion vor. Seine Einsatzmöglichkeiten und Qualität werden überprüft. Teile dieser Arbeit wurden bereits vorab veröffentlicht [NRL].



## Zusammenfassung

Gegeben sei ein SAR-Bild der Erdoberfläche, das eine große Wasserfläche, ein (oder mehrere) Gebiet(e)  $A \subset \mathbb{R}^2$ , sowie Land ( $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ) abbildet. Das Bild wird im einfachsten Fall als

$$I = \mu_A \cdot \mathbb{1}_A \cdot N + \mu_B (1 - \mathbb{1}_A) N \quad (1)$$

modelliert, wobei  $N$  das (multiplikative) Speckle-Rauschen darstellt;  $\mu_A$  und  $\mu_B$  sind die Intensitätserwartungen von Wasser und Land.

Gesucht ist der Rand  $\partial A$  von  $A$  (in möglichst guter Näherung). Durch Verwendung des Dichtebildes

$$\ln I = \ln \mu_A \cdot \mathbb{1}_A + \ln \mu_B (1 - \mathbb{1}_A) + \ln N \quad (2)$$

wird das Rauschen additiv.  $\ln N$  wird als iid-Prozess modelliert. Um  $\partial A$  in der Gegenwart von Speckle zu bestimmen, werden Wavelets verwendet, wobei die Speckle-Modellierung berücksichtigt wird. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit in folgenden Schritten:

Zunächst werden die benötigten mathematischen Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Wavelet-Theorie eingeführt (Kapitel 1). Es wird eine detaillierte Einführung in die Theorie des Synthetischen Apertur Radars und die stochastischen Eigenschaften des Speckle-Rauschens gegeben (Kapitel 2), wobei auch Beispiele für den Einsatz von SAR-Sensoren aufgezeigt werden.

Im Anschluss wird der entwickelte Wasserstandslinienextraktionsalgorithmus vorgestellt (Kapitel 3) und die Ergebnisse seiner einzelnen Schritte für ein Beispielbild untersucht und bewertet (Kapitel 4). Generelle Untersuchungen bzgl. stochastischer Eigenschaften der Wavelet-Transformierten von Speckle-Rauschen dienen zur theoretischen Beurteilung der Verwendbarkeit von Wavelet-basierter Kantenextraktion auf SAR-Bildern (Kapitel 5). Die Validierung der Küstenlinie am Boden, aber auch Probleme und mögliche Auswege im Algorithmus, werden aufgezeigt (Kapitel 6).

Abschließend werden noch andere Algorithmen zur Wasserstandslinienextraktion und Topographiegewinnung vorgestellt und mit dem hier beschriebenen verglichen (Kapitel 7).

Im Anhang werden einige mathematische Herleitungen und Beispiele gegeben (Anhang A), eine weitere Anwendung der Kantenextraktion aufgezeigt (Anhang B) und einige der Quellcodes abgedruckt (Anhang C). Eine Reihe von Tabellen und Verzeichnissen gibt weitere Informationen und Hilfen (Anhang D–L).

Die folgende Graphik gibt die Abhängigkeiten der einzelnen Abschnitte an. Punktierete Linien zeigen zusätzliche Informationen an, die zum Verständnis nicht unbedingt notwendig sind.



- den Mitgliedern des Graduiertenkollegs  $A^2M$  für gute fachliche und organisatorische Zusammenarbeit, speziell auch für fachliche Diskussionen Herrn Volker Betz, Frau Brigitte Forster, Herrn Peter Heinlein, Frau Prof. Dr. Claudia Klüppelberg, Herrn Christoph Kühn, Herrn Andreas Kunz und Frau Tanja Vocke
- allen Kollegen am DLR für viele, oft gegenseitige Anregungen und gemeinsame Arbeiten, namentlich Frau Danielle Hoja, Herrn Dr. Thomas König, Herrn Johannes Schulz-Stellenfleth, Frau Prof. Dr. Ilona Weinreich
- Herrn Dr. Richard Bamler für Denkanstöße, die zur Interpretation von Filterungen auf Dichtebildern führten
- Herrn Alexandros Dimou von der Technischen Universität Athen (NTUA) für die gemeinsamen Arbeiten zum Vergleich von Wavelet- und Fuzzy-Kantenfindung
- Herrn Joost van der Sanden und Herrn Anton Vrieling am Canada Centre for Remote Sensing (CCRS) für die Zusammenarbeit beim Vergleich der Küstenlinienextraktionsalgorithmen sowie die Überlassung des RADARSAT-1-Bildes vom *Mackenzie-Delta*
- Herrn Marcus Boehlich von der BAW, der den Zugang zu den Pegeldaten (vgl. Anhang D.2) ermöglichte
- Herrn Helko Breit von der SRTM-Gruppe am DLR-MF für die Vorabprozessierung einer SRTM-SAR-Aufnahme des *Elb-Ästuars*<sup>2</sup>
- all denjenigen, die auf Konferenzen und Seminaren Denkanstöße durch ihre Vorträge und Diskussionen geliefert haben
- allen Professoren und Assistenten der TU-München und allen Lehrern des Gymnasiums Gilching, die durch ihre didaktischen Fähigkeiten den Grundstein für diese Arbeit gelegt haben, speziell Herrn Franz Heimerl und Herrn Helmward Mörsch sowie neben einigen der bereits oben genannten Prof. Dr. Armin Leutbecher, Dr. Matthias Mayer, Prof. Dr. Rupert Lasser und Stefan Zimmer
- allen, die Teile dieser Arbeit gelesen haben, um ungeschickte Formulierungen und (Tipp-)Fehler zu vermeiden, namentlich Frau Nicole Gänßlen, Frau Jutta Göbber sowie einige der bereits oben genannten
- allen Freunden, Bekannten und Verwandten, die mich durch aufmunternde Worte unterstützt haben
- meinen Eltern für ihre seelische und finanzielle Unterstützung.

Vielen Dank Euch/Ihnen allen!!!

*Anderl Niedermeier, März 2001*

---

<sup>2</sup> Ästuar=Gezeitenaktiver Bereich einer Flußmündung.

# Kapitel 1

## Mathematische Grundlagen

**I**N diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Sätze aus der Mathematik — stellenweise mit leichten Verallgemeinerungen oder kurzen Folgerungen — zitiert, die im weiteren Verlauf der Arbeit von Interesse sind. Hier eingeführte Normierungen der jeweiligen Operatoren sind für die späteren Kapitel verbindlich. Weitergehende Definitionen und Sätze zu den jeweiligen Teilgebieten sind der einschlägigen Literatur [ScS, Ri, Ba, Woo, Rn, Ma, LMR, PI] zu entnehmen.

Abschnitt 1.1 gibt eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Abschnitt 1.2 erläutert Grundlagen der Wavelet-Theorie und in 1.3 werden einige spezielle Funktionen eingeführt.

### 1.1 Zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Die hier aufgeführten Definitionen und Folgerungen finden Anwendung in der stochastischen Beschreibung der SAR-Bilder (Abschnitt 2.2) und den Überlegungen zur Anwendbarkeit des Algorithmus in Kapitel 5.

**Definition 1:** Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , falls

$$(i) \quad \Omega \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \quad \text{und}$$

$$(iii) \quad A_j \in \mathcal{A} \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Das Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  heißt dann Messraum.

**Definition 2:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum. Ein Maß auf  $\mathcal{A}$  ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit

$$(i) \quad \mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{und}$$

(iii)  $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad \forall A_j \in \mathcal{A}$  paarweise disjunkt,  $j \in \mathbb{N}$ .

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt Maßraum. Ein Maßraum mit  $\mu(\Omega) = 1$  wird auch Wahrscheinlichkeitsraum genannt.

**Definition 3:** Eine Abbildung  $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  zwischen zwei Messräumen  $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$  heißt  $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{A}_2$ -messbar, falls  $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_2$ .

**Lemma 1 (Bildmaß)**

Sei  $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$   $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{A}_2$ -messbar zwischen dem Maßraum  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und dem Messraum  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ , so ist  $\mu_2(A) := \mu_1(X^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{A}_2$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_2$ , genannt Bildmaß von  $\mu_1$  unter  $X$ , kurz  $\mu_2 = X(\mu_1)$ .

**Beweis:** siehe [ScS]

**Definition 4:** Eine  $\mathcal{A}$ - $\tilde{\mathcal{A}}$ -messbare Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{X}$  zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und einem Messraum  $(\mathbf{X}, \tilde{\mathcal{A}})$  heißt Zufallsvariable. Das Bildmaß  $P_X$  von  $X$  heißt auch Verteilung von  $X$ .

**Beispiel:**  $\Omega = \overline{\mathbb{R}}$  wird durch die BOREL- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  (Menge der abzählbaren Vereinigungen von Intervallen) sowie das LEBESQUE-Maß  $\lambda$  mit  $\lambda([a, b]) = b - a$  zum Maßraum. Diese Konstruktion ist die Grundlage für die Definition des LEBESQUE-Integrales von  $(\Omega, \mathcal{A})$ - $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ -messbaren Funktionen sowie die Räume  $L^p(\Omega)$  (vgl. [Rn, ScS]).

**Definition 5:** Gilt in einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  für ein Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$  und ein  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbares  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für alle  $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \int_A f d\mu, \quad (1.1)$$

so heißt  $f$  Wahrscheinlichkeitsdichte (oder kurz Dichte) von  $P$  bzgl.  $\mu$ . Unter der Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen versteht man diejenige ihrer Verteilung.

**Bemerkungen:**  $f$  ist eindeutig bis auf  $\mu$ -Nullmengen. Im folgenden werden meist reellwertige Zufallsvariablen und Dichten bzgl.  $\lambda$  betrachtet.

**Hilfssatz 1 (Transformationsformel für Wahrscheinlichkeitsdichten)**

Sei  $f_X \in \mathbf{X}$  die Wahrscheinlichkeitsdichte einer reellen Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}$  im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kurz  $X \sim f_X$  und  $g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $g \circ X$  gegeben durch

$$f_{g \circ X}(y) = f_X(g^{-1}(y)) (g^{-1})'(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}. \quad (1.2)$$

**Beweis:** Für messbare  $B \subseteq \mathbf{Y}$  gilt (mit  $P(X \in B) := P_X(B)$ )

$$\begin{aligned} P(g(X) \in B) &= P(X \in g^{-1}(B)) \\ &= \int_{g^{-1}(B)} f_X(x) dP(x) = \int_B \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} dP(y) \quad (1.3) \end{aligned}$$

□

### Beispiele und Verallgemeinerungen:

- ① Für  $X \sim f_X(x)$ ,  $X > 0$  f.s.<sup>1</sup> gilt  $Y = \ln X \sim e^y f_X(e^y)$   
 $P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_0^{e^y} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^y e^u f_X(e^u) du.$
- ② Für  $X \sim f_X(x)$  gilt  $Y = X^2 \sim \frac{f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$   
 $\forall y > 0: \int_{-\infty}^y f_{X^2}(x) dx = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx$   
 $= \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_0^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx.$
- ③ Für  $X \sim f_X(x)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $Y = cX \sim \frac{1}{|c|} f_X\left(\frac{\bullet}{c}\right)$
- ④ Für  $n$ -dimensionale Zufallsvariablen und  $n$ -dimensionale Diffeomorphismen  $g: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ( $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ ) gilt gemäß der  $n$ -dimensionalen Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale:

$$f_{g \circ X}(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|\det(Dg(g^{-1}(y)))|} \quad (1.4)$$

**Definition 6:** Für zwei integrierbare, komplexwertige Funktionen  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathbb{R}^n$  heißt die Funktion

$$f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) d^n t \quad (1.5)$$

Faltung von  $f$  mit  $g$ .

**Bemerkungen:** (siehe auch [Rn])

- Die Faltung ist eine assoziative und kommutative Operation.
- $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

**Definition 7:** Ein System von Zufallsvariablen  $X_j: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ ,  $j \in I$  heißt (stochastisch) unabhängig, wenn für jede Wahl von  $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ ,  $A_j \in \sigma(X_j)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq \#I$  gilt:  $P\left(\bigcap_{l=1}^k A_{j_l}\right) = \prod_{l=1}^k P(A_{j_l})$ .  
 Dabei ist  $\sigma(X_j) := \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathbb{X}} \mathcal{C}$ ,  $\mathbb{X} = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } X_j \text{ } \mathcal{C}\text{-B-messbar}\}$  die von  $X_j$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

<sup>1</sup> Fast sicher, also  $P(X > 0) = 1$ .

**Hilfssatz 2 (Dichte von Summen von Zufallsvariablen)**

Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten  $f_X$  und  $f_Y \in L^1(\mathbb{R})$  bzgl.  $\lambda$ . Dann ist die Dichte von  $X + Y$  bzgl.  $\lambda$  gegeben durch

$$f_{X+Y}(t) = \sqrt{2\pi} (f_X * f_Y)(t) \quad (1.6)$$

**Beweis:** Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt mit  $A_t := \{\vec{x} = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2, x + y \leq t\}$

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq t) &= \int_{A_t} f_X(x) f_Y(y) d^2 \vec{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t-x} f_X(x) f_Y(y) dy dx \end{aligned} \quad (1.7)$$

□

**Definition 8:** Für eine Zufallsvariable  $X \in L^1(\Omega, P)$  im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt

$$E(X) := \int_{\Omega} X dP \quad (1.8)$$

Erwartungswert von  $X$ . Ist ferner  $X \in L^2(\Omega, P)$ , so heißt

$$\text{Var}(X) := E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{\Omega} X^2 dP - \left( \int_{\Omega} X dP \right)^2 \quad (1.9)$$

Varianz von  $X$ .

**Definition 9:** Für eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Dichte  $f_X \in L^1(\mathbb{R})$  heißt

$$\hat{f}_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_X e^{-iXt} dP \quad (1.10)$$

die charakteristische Funktion von  $X$ .

**Bezeichnungen:**

- Die HEAVYSIDE-Funktion ist  $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$ .
- Der Sinus Cardinalis ist die Funktion  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\text{sinc}(0) := 1$ .

**Bemerkungen:**

- Im Falle der Existenz (siehe Def. 8) gilt  $E(X) = \sqrt{2\pi} i \hat{f}'_X(0)$  und  $\text{Var}(X) = 2\pi (\hat{f}'_X(0))^2 - \sqrt{2\pi} \hat{f}''_X(0)$ .
- Beispiele für Verteilungen mit Erwartungswert, Varianz und charakteristische Funktion sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt. Siehe dazu auch [Cv] und Anhang A.1.

Verteilung	Par.	$f_X$	$\hat{f}_X$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Normal GAUSS	$\mu, \sigma$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2} - i\omega\mu}$	$\mu$	$\sigma^2$
Exponential	$\mu$	$\frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} H(x)$	$\frac{1}{(i\omega\mu+1)\sqrt{2\pi}}$	$\mu$	$\mu^2$
RAYLEIGH	$\mu$	$\frac{2x}{\mu} e^{-\frac{x^2}{\mu}} H(x)$	$\frac{1 - \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} (i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{-\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau)}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{\pi\mu}}{2}$	$\mu - \frac{\pi\mu}{4}$
FISHER-TIPPETT	$\mu$	$\frac{1}{\mu} e^x e^{-\frac{1}{\mu} e^x}$	$\frac{\Gamma(1-i\omega)}{\mu^{i\omega} \sqrt{2\pi}}$	$\ln \mu - \gamma_E$	$\frac{\pi^2}{6}$

Tabelle 1.1: Einige bekannte Verteilungen.

**Satz 1 (Zentraler Grenzwertsatz (CLT))**

Sei  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von stochastisch unabhängigen, identisch verteilten  $(P_{X_j} = P_{X_i})$ , reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit  $0 < \text{Var}(X_j) < \infty$ . Dann konvergiert mit  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{j=1}^k (X_j - E(X_j))}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{j=1}^k X_j)}} \quad (1.11)$$

schwach gegen eine standardnormalverteilte (d.h.  $\mu = 0, \sigma = 1$ ) Zufallsvariable.

**Beweis:** siehe [ScS]

**Bemerkung:** Nach LINDBERG und FELLER gilt (1.11) auch, falls anstelle der identischen Verteilung  $\text{Var}(X_j) > 0$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\text{Var}(X_k)}{\sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)} = 0 \quad (1.12)$$

gelten [Ri]. Hinreichende Bedingung für diese Verallgemeinerung ist die Existenz einer echt positiven unteren und einer oberen Schranke für die Menge  $\{\text{Var}(X_j), j \in \mathbb{N}\}$ .

**Definition 10:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Zufallsvariablen  $X_t = X(t, \bullet)$  heißt  $n$ -dimensionaler stochastischer Prozess. Für feste  $\omega$  nennt man  $t \mapsto X_t(\omega)$  einen Pfad von  $X$ .

Konvergieren die zeitlichen Mittel  $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X(t_j, \omega)$  ( $\omega$  fest) mit  $k \rightarrow \infty$  gegen die Erwartung  $E(X_t)$  ( $t$  fest, sog. Ensemblemittel), so heißt  $X$  ergodisch.

Weitere Details zur Theorie der stochastischen Prozesse sind beispielsweise in [Ri, Øk] zu finden.



## 1.2 Zur Wavelet-Theorie

Neben verschiedenen Diskretisierungsstufen der Wavelet-Transformierten soll hier als grundlegende Integraltransformation auch die FOURIER-Transformation angegeben werden.

### 1.2.1 Die FOURIER-Transformation

**Definition 11:** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $b, \nu \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißen die Operatoren

$$\mathcal{D}_a f = \frac{1}{\sqrt{|a|^n}} f\left(\frac{\bullet}{a}\right) \quad (1.13)$$

$$\mathcal{T}_b f = f(\bullet - b) \quad (1.14)$$

$$\mathcal{M}_\nu f = e^{-i\langle \nu, \bullet \rangle} f \quad (1.15)$$

$$\mathcal{S} f = f(-\bullet) \quad (1.16)$$

*Dilatation, Translation, Modulation und Spiegelung.*

**Definition 12:** Für Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  heißt

$$\mathcal{F} f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} d^n t \quad (1.17)$$

die FOURIER-Transformierte von  $f$ .

**Bemerkung:** Häufig schreibt man eleganterweise an Stelle von  $\frac{d^n t}{\sqrt{2\pi}^n}$  kurz  $d^n t$ . Dies soll hier vermieden werden, um die Lesbarkeit zu erhöhen.

### **Lemma 2 (Eigenschaften der FOURIER-Transformation)**

Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b, \nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  und Multiindizes  $k \in \mathbb{N}^n$  gilt

(i)  $\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda \hat{f}(\omega) + \mu \hat{g}(\omega)$ , also  $\mathcal{F}$  ist  $\mathbb{C}$ -linear.

(ii)  $\widehat{\mathcal{D}_a f}(\omega) = \mathcal{D}_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \mathcal{D}_a = \mathcal{D}_{\frac{1}{a}} \mathcal{F}$

(iii)  $\widehat{\mathcal{T}_b f}(\omega) = \mathcal{M}_b \hat{f}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \mathcal{T}_b = \mathcal{M}_b \mathcal{F}$

(iv)  $\widehat{\mathcal{M}_\nu f}(\omega) = \mathcal{T}_{-\nu} \hat{f}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \mathcal{M}_\nu = \mathcal{T}_{-\nu} \mathcal{F}$

(v)  $\widehat{\mathcal{S} f}(\omega) = \mathcal{S} \hat{f}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathcal{F}$

(vi)  $\hat{\hat{f}}(\omega) = \mathcal{S} \bar{\hat{f}}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \mathcal{K} = \mathcal{S} \mathcal{K} \mathcal{F}$  (mit  $\mathcal{K} f := \bar{f}$ )

(vii)  $\widehat{f^{(k)}}(\omega) = i^{|k|} \omega^k \hat{f}(\omega)$ , also  $\mathcal{F} \frac{d^k}{d\bullet^k} = i^{|k|} \bullet^k \mathcal{F}$ , sofern  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(viii)  $(-i)^{|k|} t^k \widehat{f}(\omega) = \hat{f}^{(k)}(\omega)$ , also  $(-i)^{|k|} \mathcal{F} \bullet^k = \frac{d^k}{d\bullet^k} \mathcal{F}$  für  $\bullet^k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(ix) \widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

$$(x) \hat{f} \in C(\mathbb{R}) \text{ und verschwindet bei } \pm\infty, \text{ sowie } \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

$$(xi) \mathcal{F}\mathcal{S}\mathcal{F}|_{\mathcal{F}^{-1}(L^1)} = \mathbb{1}, \text{ also } \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\langle \omega, t \rangle} d^n \omega.$$

(xii)  $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$  ist eindeutig zu einem isometrischen  $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Isomorphismus  $\hat{\mathcal{F}}$  erweiterbar (PLANCHEREL-Transformation).

(xiii) Für Zufallsvariablen  $X, Y$  mit  $f_X = |\varphi|^2, f_Y = |\hat{\varphi}|^2$  für ein  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$  gilt  $\text{Var}(X) \text{Var}(Y) \geq \frac{1}{4}$ .

**Beweis:** siehe z.B. [Rn, Ma]

**Bemerkungen:**

- Bei der HEISENBERG'schen Unschärfe-Relation (xiii) gilt Gleichheit genau für normalverteilte  $X, Y$ .

Allgemeiner gilt [PI]:  $\|tf(t)\|_{L^2} \|\omega \hat{f}(\omega)\|_{L^2} \geq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2} \|\hat{f}\|_{L^2}$  falls  $f, f', (1 + |\bullet|)f \in L^2(\mathbb{R})$ .

- Die FOURIER-Umkehrformel (xi) liefert eine Interpretation der FOURIER-Transformation als Zerlegung eines Signals in seine enthaltenen Frequenzen. Eine Aussage darüber, zu welchem Zeitpunkt die einzelnen Frequenzen im Signal auftreten ist jedoch direkt nicht möglich. Für allgemeine  $f \in L^1(\mathbb{R})$  lautet die Umkehrformel nach [PI]  $L^1$ - $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}\mathcal{S} e^{-\bullet^2 t} \mathcal{F} = \mathbb{1}$ .

Um eine zeitliche Lokalisierung der in einem Signal auftretenden Frequenzen zu ermöglichen, wurden die Fenster-FOURIER-Transformation (siehe [Ma]) und die Wavelet-Transformation entwickelt.

### 1.2.2 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation

**Definition 13:** Eine (komplexwertige) Funktion  $\psi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  mit verschwindendem Mittel

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) d^n t = 0 \quad (1.18)$$

heißt Wavelet. O.E. sei  $\psi$  weiter normiert ( $\|\psi\|_{L^2} = 1$ ) und in 0 zentriert ( $\int_{\mathbb{R}^n} t |\psi(t)|^2 d^n t = 0$ ).

Eine (komplexwertige) Funktion  $\psi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$  mit

$$0 < c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (1.19)$$

heißt zulässiges Wavelet.

**Bemerkungen und Beispiele:**

① (1.19)  $\Rightarrow$  (1.18)

②  $\hat{\psi}_l(\omega) = \frac{\kappa_l i \omega}{\sqrt{(l+2)\pi}} \left( \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega}{(l+2)\pi} \right) \right)^{l+2}$  liefert für  $l \in \mathbb{N}_0$  das Spline-Wavelet  $\psi_l$  der Ordnung  $l$  (mit Träger  $[-1, 1]$  und Normierungskonstante<sup>2</sup>  $\kappa_l$ ).

③  $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{[0,1]} - \mathbb{1}_{[-1,0]})$  ist das HAAR-Wavelet ( $\hat{\psi}_0 = \frac{i\omega}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)$ ).

**Definition 14:** Für ein (zulässiges) Wavelet  $\psi$  heißt

$$\mathcal{W}_\psi f : \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (a, b) \mapsto \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi \left( \frac{x-b}{a} \right)} dx \quad (1.20)$$

kontinuierliche Wavelet-Transformierte von  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

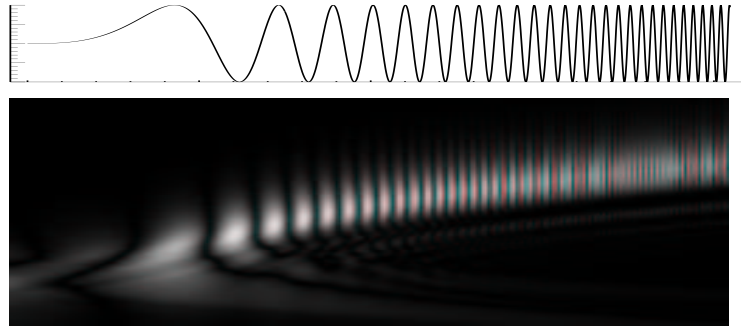
**Bemerkungen:**

- Aus der Zulässigkeitsbedingung folgt die Isometrieeigenschaft (modulo Normierung)  $\|\mathcal{W}_\psi f\|_{L^2 \left( \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}, \frac{da db}{a^2} \right)} = 4\pi c_\psi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .
- Für  $f, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  definiert man  $\mathcal{W}_\psi f$  analog.
- Wegen  $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \langle f, \mathcal{T}_b \mathcal{D}_a \psi \rangle$  lässt sich die Wavelet-Transformation für hinreichend glatte  $\psi$  z.B. auch auf Distributionen erweitern.
- Die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{4\pi c_\psi} \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \frac{da db}{a^2 \sqrt{|a|}} \quad (1.21)$$

erlaubt erneut eine Interpretation als Zerlegung in Skalen  $a$  zu bestimmten Zeitpunkten  $b$ . Die Skalen entsprechen im groben Modell (d.h. abhängig von Umskalierungen durch das Aussehen von  $\hat{\psi}$ ) dem Kehrwert der Frequenzen  $\omega$  bei der FOURIER-Transformation (vergleiche Abbildung 1.1). Die Auflösung der Zeit-Frequenz-Fenster gehorcht der Unschärferelation (Lemma 2 (xiii)) mit  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left( \frac{\bullet - b}{a} \right)$ .

<sup>2</sup> Für  $\|\psi_l\|_{L^2} = 1$  ist  $\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\kappa_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\kappa_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}$ ,  $\kappa_3 = \frac{12}{5} \sqrt{\frac{2}{35}}$ , ...



**Abbildung 1.1:** Kontinuierliche Wavelet-Transformierte von Signalen verschiedener Frequenz (Skala  $a$  logarithmisch von oben nach unten angetragen).

### 1.2.3 Die dyadische Wavelet-Transformation

**Definition 15:** Eine Funktion  $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  mit

- $x^k D^\nu \phi(x) \rightarrow 0$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  und alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $|\nu| \in \{0, 1, 2\}$  und
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d^n x = 1$

heißt Glättungsfunktion.

Ein  $\psi = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  mit Glättungsfunktion  $\phi$  und

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j x) \right|^2 \leq B \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad A, B > 0 \text{ konst.} \quad (1.22)$$

heißt dyadisches Wavelet. Dann nennt man  $\phi$  auch Skalierungsfunktion.

**Bemerkungen:**

- Dyadische Wavelets sind Wavelets im Sinne von (1.18) (folgt mit dem schnellen Abfall von  $\phi$  direkt aus dem HDI).
- Die Spline-Wavelets  $\psi_l$  aus Beispiel ② auf Seite 19 entstehen durch die ‘Glättungsfunktion’  $\phi_l$ , gegeben durch ihre FOURIER-Transformierte  $\hat{\phi}_l = \frac{\kappa_l}{\sqrt{(l+2)\pi}} \left( \text{sinc} \left( \frac{\omega}{(l+2)\pi} \right) \right)^{l+2}$ . Dabei gilt  $\phi_l \in \mathcal{C}^l([-1, 1])$  und  $0 < \sigma_l := \int_{-1}^1 \phi(x) dx < \infty$ , für  $l \geq 2$  und geeignete Umnormierung genügen diese also Definition 15.

**Definition 16:** Die Funktionenfolge  $(\mathcal{W}_\psi f(2^j, \bullet))_{j \in \mathbb{Z}}$  heißt die dyadische Wavelet-Transformierte von  $f$ .

**Bemerkung:** Aus (1.22) folgt (siehe z.B. [PI]) die Umkehrformel

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{W}_\psi)(2^j, \bullet) * D_{2^j} \tilde{\psi} \quad \text{mit} \quad \hat{\tilde{\psi}}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}^n \overline{\hat{\psi}(x)}}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j x) \right|^2}. \quad (1.23)$$

### 1.2.4 Die diskrete Wavelet-Transformation

Betrachtet werden hier zwei Formen der Diskretisierung der dyadischen Wavelet-Transformation, die Multiskalenanalyse und der dyadische Ansatz aus [MZ]. Daneben existieren noch eine Reihe von weiteren, z.B. der in [He] gewählte Ansatz.

#### Multiskalenanalyse

Die Multiskalenanalyse stellt die wohl bekannteste Diskretisierung der Wavelet-Transformation auf dyadischen Skalen  $a \in 2^{\mathbb{Z}}$  und skalenabhängigen Dilatationen  $b \in a\mathbb{Z}$  dar.<sup>3</sup>

**Definition 17:** Eine Folge  $(\phi_k)_{k \in \Gamma}$  in einem HILBERTraum  $\mathbf{H}$  heißt Frame, falls Konstanten  $A, B > 0$  existieren mit

$$A \|f\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \|\langle f, \phi_k \rangle_{\mathbf{H}}\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 = \sum_{k \in \Gamma} |\langle f, \phi_k \rangle_{\mathbf{H}}|^2 \leq B \|f\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall f \in \mathbf{H}. \quad (1.24)$$

Ist  $A = B$ , so spricht man von einem straffen Frame. Gilt statt (1.24)

$$A \|f\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 \leq \|\sum_{k \in \Gamma} f_k \phi_k\|_{\mathbf{H}}^2 \leq B \|f\|_{\ell^2(\Gamma)}^2 \quad \forall f \in \ell^2(\Gamma). \quad (1.25)$$

und  $\mathbf{H} = \overline{\langle \phi_k, k \in \Gamma \rangle}$ , so heißt  $(\phi_k)$  eine RIESZ-Basis.<sup>4</sup>

**Lemma 3** Zu jedem Frame  $(\phi_k)$  existiert ein dualer Frame  $(\tilde{\phi}_k)$  mit Frame-Konstanten  $\frac{1}{B}$  und  $\frac{1}{A}$  und es gilt

$$f = \sum_{k \in \Gamma} \langle f, \phi_k \rangle_{\mathbf{H}} \tilde{\phi}_k = \sum_{k \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_k \rangle_{\mathbf{H}} \phi_k. \quad (1.26)$$

Für straffe Frames ist  $\tilde{\phi}_k = \frac{1}{A} \phi_k$ . Straffe Frames mit  $A = B = 1$  und  $\|\phi_k\| = 1$  sind Orthonormalbasen. Duale RIESZ-Basen  $(\phi_k)$  und  $(\tilde{\phi}_k)$  bilden biorthogonale Vektorenfamilien, d.h.  $\langle \phi_j, \tilde{\phi}_k \rangle_{\mathbf{H}} = \delta_{jk}$ .

Für Wavelet-Frames  $(\mathcal{T}_{kb_0 a^j} \mathcal{D}_a^j \psi)_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  gilt<sup>5</sup>  $A \leq \frac{2\pi c_\psi}{b_0 \ln a} \leq B$ .

**Beweis:** siehe z.B. [Ma, LMR]

**Definition 18:** Eine Folge  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  abgeschlossener  $L^2(\mathbb{R})$ -Teilräume mit

$$(i) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \subseteq \dots \subseteq V_j \subseteq V_{j-1} \subseteq \dots \subseteq L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}^{L^2(\mathbb{R})}$$

<sup>3</sup> In  $n > 1$  Dimensionen geschieht die Diskretisierung längs  $2^n - 1$  Gittern der Form  $a\mathbb{Z}^n$  bezüglich partieller Ableitungen von  $\phi$ . Der zugehörige Pyramidenalgorithmus ist in [Ma2] zu finden.

<sup>4</sup> Die Definition einer RIESZ-Basis variiert in der Literatur (z.B. [Ma]). Gemäß [Og] sind RIESZ-Basen spezielle Frames.

<sup>5</sup> Also falls o.g. durch ein zulässiges Wavelet  $\psi$  erzeugte Folge ein Frame in  $L^2(\mathbb{R})$  ist.

$$(ii) f \in V_j \iff \mathcal{D}_2 f \in V_{j+1} \quad \text{und} \quad f \in V_0 \Rightarrow \mathcal{T}_k f \in V_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(iii)  $\exists \phi \in V_0 : (\mathcal{T}_k \phi)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist eine RIESZ-Basis von  $V_0$

heißt Multiskalenanalyse.

O.E. ist  $V_j = \overline{\langle \mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \phi \rangle}^{L^2(\mathbb{R})}$ . Wegen (1.26) und  $\mathcal{D}_2 \phi \in V_1 \subseteq V_0$  folgt die Existenz von  $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$  mit<sup>6</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(x - k) \quad (1.27)$$

und dual von  $\tilde{h} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  zu  $\tilde{\phi}$ , wobei  $h = \tilde{h}$  für straffe RIESZ-Basen. Es gilt [PI]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \tilde{h}_{n+2m} = \delta_{0m}. \quad (1.28)$$

Setzt man

$$g_n := (-1)^{n+1} \overline{\tilde{h}_{1-n}} \quad (1.29)$$

$$\psi(x) := \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k) \quad (1.30)$$

$$W_j := \overline{\langle \mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \psi \rangle}^{L^2(\mathbb{R})} \quad (1.31)$$

und dual  $\tilde{g}_n, \tilde{\psi}, \tilde{W}_j$  und sind  $(\mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \psi)_{j,k \in \mathbb{Z}}$  und  $(\mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \tilde{\psi})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  biorthogonale RIESZ-Basen, so gilt weiter  $V_{j-1} = V_j + W_j$ ,  $V_j \perp \tilde{W}_j$  sowie die dualen Aussagen. Speziell für Orthonormalbasen  $(\mathcal{T}_k \phi)$  von  $V_0$  ist  $(\mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \psi)_{k,j \in \mathbb{Z}}$  eine Orthonormalbasis<sup>7</sup> von  $L^2(\mathbb{R})$  und  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ .

Für den (diskreten) *Wavelet-Zerlegungs- und -Rekonstruktionsalgorithmus* für ein  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{[j]} \mathcal{T}_k \phi \in V_J$  betrachtet man für  $j \geq J$

$$c^{[j]} = \left( c_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \left( \langle f, \mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \tilde{\phi} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1.32)$$

$$d^{[j]} = \left( d_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \left( \langle f, \mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \tilde{\psi} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (1.33)$$

Dann folgt mit (1.27), (1.30) und der Biorthogonalität von  $\phi, \tilde{\phi}$

$$c_k^{[j]} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-2k}} c_l^{[j-1]} \quad (1.34)$$

$$d_k^{[j]} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g_{l-2k}} c_l^{[j-1]} \quad (1.35)$$

$$c_k^{[j-1]} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2l} c_l^{[j]} + \tilde{g}_{k-2l} d_l^{[j]} \quad (1.36)$$

<sup>6</sup>  $h_k = \langle \mathcal{D}_2 \phi, \mathcal{T}_k \tilde{\phi} \rangle$ .

<sup>7</sup> Dann entfällt auch die biorthogonale RIESZ-Basis-Bedingung an  $\psi$  (und  $\tilde{\psi}$ ).

also die diskreten Faltungsformeln für die schnelle Wavelet-Zerlegung und -Rekonstruktion.

Zur Bestimmung von  $h$  verwendet man oft auch die FOURIER-Transformierte von (1.27), also von  $\mathcal{D}_2\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \mathcal{T}_k \phi = h *_Z \phi$

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (1.37)$$

kurz  $\mathcal{D}_1 \hat{\phi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \mathcal{M}_k \hat{\phi} = \hat{h} \hat{\phi}$  bzw. für  $g$ :  $\mathcal{D}_1 \hat{\psi} = \hat{g} \hat{\phi}$  aus (1.30).

**Beispiel:** Das *Spline-Wavelet*.

Mit der Glättungsfunktion<sup>8</sup>  $\hat{\phi}_l(\omega) = C \operatorname{sinc}^{l+2} \frac{\omega}{2\pi}$  folgt  $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \cos^{l+2} \frac{\omega}{2}$  und damit<sup>9</sup>  $h_k = \frac{\sqrt{2}}{2^{l+2}} \binom{l+2}{k + \lfloor \frac{l+2}{2} \rfloor}$ .

**Bemerkungen:**

- Die Multiskalenanalyse liefert einen schnellen Algorithmus,

$$d_k^{[j]} = \mathcal{W}_\psi(2^j, 2^j k) f \quad \text{für } 0 \leq j \leq \log_2 N, 0 \leq k < 2^{-j} N \quad (1.38)$$

zu berechnen (Berechnungsaufwand  $\mathcal{O}(N)$  bei Signallänge  $N$ , d.h. bei gegebenem  $f(\{0, \dots, N-1\})$  bzw.  $(\langle f, \mathcal{T}_k \tilde{\phi} \rangle)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$ ).

- Für  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  (z.B.  $\phi_l \geq 0$  beim Spline-Wavelet) folgt aus (1.18) und der FOURIER-Transformierten von (1.30)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0 \quad (1.39)$$

- Alternativ zu (1.29) bestehen weitere Möglichkeiten der Filterwahl, siehe z.B. Anhang A von [MZ], wo  $h = \tilde{h}$ ,  $g \neq \tilde{g}$  (spezielle Wahl dort:  $h = \sqrt{2} \cdot [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$  zur Spline-Glättungsfunktion  $\phi_1$ ,  $g = [-\lambda, \lambda]$  entsprechend einem  $\tilde{h}$  zu  $\phi_{-1}$ . Dies liefert eine Wavelet-Zerlegung zu  $\hat{\phi}(\omega) = \operatorname{sinc}^3(\frac{\omega}{2\pi})$ ,  $\hat{\psi}(\omega) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} i \omega \operatorname{sinc}^4(\frac{\omega}{4\pi})$ ).
- In  $L^2(\mathbb{R}^n)$  verwendet man die Zerlegung von  $\bigotimes_{\nu=1}^n V_{j-1}$  in die  $2^n$  Teilräume  $\bigotimes_{\nu=1}^n U_j$  mit  $U_j \in \{V_j, W_j\}$ . Entsprechende Koeffizientenfolgen  $c_k^{[j]}$  und  $d_{k,m}^{[j]}$ ,  $1 \leq m < 2^n$  können durch dimensionsweise Faltung mit  $h$  und  $g$  aus  $c_k^{[j-1]}$  berechnet werden (siehe z.B. für  $n=2$  in [PI, Ma], Aufwand jetzt  $\mathcal{O}(N^n)$ , also linear in der Datengröße  $N^n$ ).
- Die Multiskalenanalyse ist nicht translationsinvariant, d.h. i.A. gilt  $d_{k-2^{-j}l}^{[j]} \neq \langle \mathcal{T}_l f, \mathcal{D}_{2^j} \mathcal{T}_k \tilde{\psi} \rangle$ , speziell ist schon das Diskretisierungsgitter wegen  $2^{-j}l \notin \mathbb{Z}$  nicht translationsinvariant.

<sup>8</sup> So umskaliert, daß Translationen von  $\mathcal{D}_{l+2} \phi_l$  mit  $\phi_l$  aus der zweiten Bemerkung auf Seite 20  $V_0$  erzeugen.

<sup>9</sup> Für ungerade  $l$  betrachten wir  $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}} \phi$  an Stelle von  $\phi$ .

### Diskrete dyadische Wavelet-Transformation

Auf Kosten der Erhöhung der Redundanz und des Berechnungsaufwandes (jetzt  $\mathcal{O}(N \log N)$ ) kann eine translationsinvariante Berechnung erfolgen. Dazu wird als Diskretisierungsgitter  $d_k^{[j]} = \mathcal{W}_{\tilde{\psi}}(2^j, k)f = \langle f, \mathcal{T}_k \mathcal{D}_{2^j} \tilde{\psi} \rangle$  mit  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  gewählt (analog für  $\check{c}^{[j]}$ ). An Stelle der Rekursionsformeln (1.34)–(1.36) tritt jetzt

$$\check{c}_k^{[j]} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l \check{c}_{k+2^{j-1}l}^{[j-1]} \quad (1.40)$$

$$d_k^{[j]} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_l \check{c}_{k+2^{j-1}l}^{[j-1]} \quad (1.41)$$

$$\check{c}_k^{[j-1]} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l \check{c}_{k-2^{j-1}l}^{[j]} + \tilde{g}_l d_{k-2^{j-1}l}^{[j]} \quad (1.42)$$

Bei mehreren Dimensionen genügt die Betrachtung von Teilräumen mit höchstens einem  $U_j = W_j$ . Die Berechnung erfolgt getrennt nach Dimensionen, der Aufwand beträgt  $\mathcal{O}(N^n \log N)$ .

### 1.2.5 Wavelet-Transformation und Singularitäten

**Definition 19:** Man sagt, eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\int_{\mathbb{R}} t^k f(t) dt = 0 \quad \forall 0 \leq k < n \quad (1.43)$$

hat *n verschwindende Momente*.

**Bemerkung:** Das Spline-Wavelet  $\psi_k$  hat ein verschwindendes Moment.

**Definition 20:** Eine Funktion  $f(x)$  mit

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq A \|h\|^\alpha \quad (1.44)$$

für alle  $\|h\| < h_0$ , für Konstanten  $A, h_0 > 0$  und ein Polynom  $P_n$  vom Grad  $n$  mit  $n \leq \alpha \leq n + 1$  heißt LIPSCHITZ  $\alpha$  in  $x_0$ , kurz  $f \in \text{Lip}_\alpha(x_0)$ .

$\sup\{\alpha, f \text{ ist LIPSCHITZ } \alpha \text{ in } x_0\}$  heißt LIPSCHITZ-Regularität von  $f$  in  $x_0$ .

Weiter heißt  $f(x)$  gleichmäßig LIPSCHITZ  $\alpha$  auf  $I = ]x_1, x_2[$ , wenn (1.44) für alle  $x_0 + h \in I$  bei festen  $\alpha, A$  und  $P_n$  gilt.

**Bemerkungen:**

- Ist  $f \in \text{Lip}_{\alpha_1}(x_0)$  und  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ , so gilt auch  $f \in \text{Lip}_{\alpha_2}(x_0)$ .
- $f \in C^n(x_0) \Rightarrow f \in \text{Lip}_n(x_0)$ .  
 $f \in \text{Lip}_\alpha(x_0)$ ,  $\alpha > n \Rightarrow f$  ist  $n$ -fach differenzierbar.



- Eine temperierte Distribution endlicher Ordnung heißt LIPSCHITZ  $\alpha$ , wenn ihre Stammfunktion LIPSCHITZ  $\alpha + 1$  ist, z.B.  $\delta^{\mathbb{R}^n} \in \text{Lip}_{-n}(0)$ .

Eine Charakterisierung der LIPSCHITZ-Regularität mittels der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten liefert der folgende Satz:

**Satz 2 (MALLAT, 1991)**

Sei  $f(x)$  eine temperierte Distribution mit auf  $I = ]x_1, x_2[$  wohldefinierter Wavelet-Transformierter zu  $\psi \in C^n(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger und  $n$  verschwindenden Momenten. Seien weiter alle Betragsmaxima von  $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$  auf  $]0, a_0[ \times I$  im gleichseitigen Dreieck  $D$  mit  $|b - x_0| \leq Ca$  für ein  $C > 0$  und alle  $a \in ]0, a_0[$ . Für  $\alpha < n$  gilt dann die folgende Äquivalenz:

$$f \in \text{Lip}_\alpha(x_0) \iff \exists C > 0 : |\mathcal{W}_\psi f(a, b(a))| \leq Ca^{\alpha + \frac{1}{2}} \text{ längs Betragsmaxima-Linien } (a, b(a)) \text{ in } D. \quad (1.45)$$

**Beweis:** siehe Anhang B von [MH]

**Bemerkungen:**

- Die Bedingung an die Betragsmaxima von  $\mathcal{W}_\psi f$  ist hinreichend dafür, dass  $f$  gleichmäßig LIPSCHITZ  $n$  in einer Umgebung jedes  $x_* \in I \setminus \{x_0\}$  ist. Sie ist notwendig für  $f$  ohne schnell oszillierende Singularitäten.<sup>10</sup>
- Die Zahl der Betragsmaxima-Linien innerhalb von  $D$  wächst mit der Zahl der verschwindenden Momente des Wavelets. Deshalb sollten Wavelets mit gerade sovielen verschwindenden Momenten verwendet werden, wie benötigt.

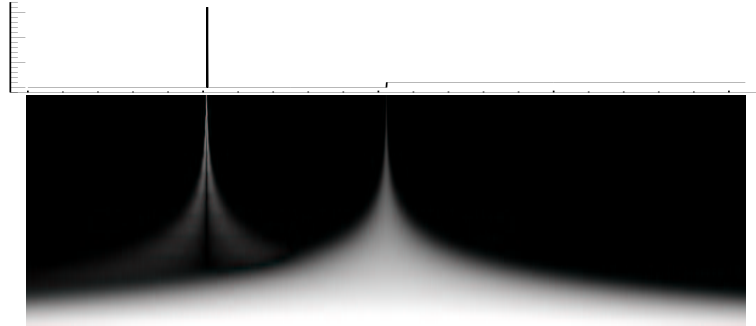
Als Beispiel für eine Kante in einer Dimension betrachten wir die HEAVY-SIDE-Funktion  $H$ . Die einfachste Art, Rauschen zu interpretieren ist punktweise als DIRAC-Distributionen  $\delta$  (vgl. Abschnitt 5.1). Während  $H$  LIPSCHITZ 0 ist, ist  $\delta$  LIPSCHITZ  $-1$ . Nach (1.45) wächst also  $|\mathcal{W}_\psi H|$  für kleine  $a$  wie  $\sqrt{a}$ , während  $|\mathcal{W}_\psi \delta|$  wie  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  fällt. Dies wird in Abbildung 1.2 verdeutlicht.

In zwei Dimensionen (mit dem Ziel der Bildverarbeitung) verwendet man, wie von MALLAT *et al.* [MH, MZ] vorgeschlagen, die Wavelet-Transformierten bzgl.  $\Psi_1 = \psi \otimes \phi$  und  $\Psi_2 = \phi \otimes \psi$ , z.B. für das Spline-Wavelet  $\psi_1$  und die zugehörige Skalierungsfunktion  $\phi_1$ . Die Abfallbedingung in Satz 2 lautet dann

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{\Psi_1} f(a, b) \\ \mathcal{W}_{\Psi_2} f(a, b) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq Ca^{\alpha+1}. \quad (1.46)$$

Weitere Details sind z.B. in [Ma, MH, MZ, Wol] zu finden.

<sup>10</sup> Vgl. ebenfalls [MH].



**Abbildung 1.2:** Rauschen und Kante in der kontinuierlichen Wavelet-Transformation zum Spline-Wavelet  $\psi_1$  für Skalen  $a \in [1, 2^{11}[$  (logarithmisch von oben nach unten angetragen).

### 1.3 Spezielle Funktionen

Die hier eingeführten Funktionen werden bei der geschlossenen Darstellung einiger stochastischer Verteilungen von SAR-Bildern verwendet (Abschnitte 2.2, 5.3 und 5.4 sowie Anhänge A.1 und A.2).

#### 1.3.1 Die EULERSche Gammafunktion

**Definition 21:** Die Funktion

$$\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}, \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1.47)$$

heißt EULERSche Gammfunktion. Die Zahl

$$\gamma_E := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.5772156649 \quad (1.48)$$

nennt man EULER-MASCHERONI-Konstante.

**Lemma 4 (Eigenschaften der Gammfunktion)**

- (i)  $\Gamma$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  mit einfachen Polen auf  $-\mathbb{N}_0$ .
- (ii)  $\lim_{x \searrow 0} \Gamma(x) = +\infty$
- (iii)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  und  $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}_0$
- (iv)  $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$
- (v)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- (vi)  $\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma_E z}} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{e^{z/r}}{1 + \frac{z}{r}}$

(vii)  $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \exp\left(-\gamma_E z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k} z^k\right)$

(viii)  $\left. \frac{d^k}{dz^k} \ln(\Gamma(z)) \right|_{z=1} = \begin{cases} -\gamma_E & k = 1 \\ (-1)^k (k-1)! \zeta(k) & k \geq 2 \end{cases}$

(ix)  $\Gamma'(z) = -\Gamma(z) \left( \frac{1}{z} + \gamma_E + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k+z} - \frac{1}{k} \right) \right)$ , speziell für  $n \in \mathbb{N}$  ist  
 $\Gamma'(n) = -\Gamma(n) \left( \gamma_E - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right)$ .

(x) *Einige Ableitungswerte:*

$z$	1	2	3
$\Gamma'(z)$	$-\gamma_E$	$1 - \gamma_E$	$3 - 2\gamma_E$
$\Gamma''(z)$	$\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6}$	$(1 - \gamma_E)^2 + \frac{\pi^2}{6} - 1$	$\frac{1}{2} \left( (3 - 2\gamma_E)^2 + \frac{(2\pi)^2}{6} - 5 \right)$
$z$	4	5	
$\Gamma'(z)$	$11 - 6\gamma_E$	$50 - 24\gamma_E$	
$\Gamma''(z)$	$\frac{1}{6} \left( (11 - 6\gamma_E)^2 + \frac{(6\pi)^2}{6} - 49 \right)$	$\frac{1}{24} \left( (50 - 24\gamma_E)^2 + \frac{(24\pi)^2}{6} - 820 \right)$	

(xi)  $|\Gamma(n + iy)| = \sqrt{\frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}} \prod_{s=1}^{n-1} \sqrt{s^2 + y^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dabei ist  $\zeta(\bullet)$  die RIEMANNsche Zetafunktion (siehe Abschnitt 1.3.2).

**Beweis:** (Auszüge)

(iii),(ix) Siehe z.B. [Wei].

(iv) Direkt durch Einsetzen in (1.47) mit  $t^{\bar{z}} = e^{\bar{z} \ln t} = \overline{e^z \ln t} = \overline{t^z}$ .

(vi)  $\Leftrightarrow$  (vii) Formell mit Stammfunktion der unendlichen geometrischen Reihe, Lemma 5 (ii) und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

(vii)  $\Rightarrow$  (viii) Sieht man direkt, eine Herleitung für  $k = 1$  aus (1.47) findet sich in Anhang A.1.4.

Weitere Eigenschaften sind bei [Wei, MsG, HoG] zu finden.

### 1.3.2 Die RIEMANNsche Zetafunktion

**Definition 22:** Die Funktion

$$\zeta : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (1.49)$$

heißt RIEMANNsche Zetafunktion.

**Lemma 5 (Eigenschaften der Zetafunktion)**

(i)  $\zeta(z)$  ist wohldefiniert für alle  $z \in ]1, \infty[$  und kann (in geeigneter Darstellung) auf  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  erweitert werden.

(ii)  $\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^z}$

(iii) Einige Werte:

$z$	-1	0	1	2	3	4	6	8	10
$\zeta(z)$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\infty$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\approx 1.202$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

**Beweis:**

(i) Mittels  $0 \leq \zeta(z) - \frac{1}{s-1} \leq 1$  für  $z \in ]1, \infty[$  in der Darstellung (ii) siehe z.B. [Ltb].

(ii) Für  $z \in \mathbb{N}$  siehe z.B. [Wei].

## Kapitel 2

# SAR — Synthetic Aperture Radar

DIESES Kapitel gibt eine Einführung in die Theorie des Synthetischen Apertur Radars<sup>1</sup> (SAR). Abschnitt 2.1 erklärt, basierend auf [BaS], den Abbildungsmechanismus des Synthetischen Apertur Radars und die Grundzüge der SAR-Prozessierung. Im Abschnitt 2.2 wird das Speckle-Rauschen hergeleitet und für verschiedene Bildtypen angegeben. Beispiele für SAR-Sensoren in Luft- und Raumfahrt sind in Abschnitt 2.3 zusammengestellt.

### 2.1 Der SAR-Abbildungsmechanismus

Zunächst soll die Funktionsweise von SAR-Sensoren erklärt werden. Weiter werden die grundlegenden Ideen der SAR-Prozessierung beschrieben. Beides geschieht in starker Anlehnung an [BaS] und gibt Hintergrundinformationen für die beiden folgenden Abschnitte dieses Kapitels, die zu deren Verständnis jedoch nicht unbedingt notwendig sind.

Eine SAR-Antenne der Länge  $l_A$  (in Flugrichtung) und Breite  $b_A$  bewegt sich in Höhe  $h_S$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_S$  über die Erdoberfläche. Sie ist um einen Winkel von  $\theta_0$  gegenüber der Senkrechten geneigt. Dabei ‘beleuchtet’ sie am Boden einen Bereich der Größe  $d_A \times d_R$  in Azimuth (parallel zur Flugrichtung) und Range (senkrecht zur Flugrichtung), der sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_G$  über den Boden bewegt. Die Größe dieses Bereiches steht bei optimaler Antennenform in direkter Relation zur Antennengröße in der jeweiligen Richtung. Je größer  $l_A$ , desto kleiner  $d_A$  und je größer  $b_A$ , desto kleiner ist  $d_R$ . Die Mitte dieses Bereiches ist um  $D_R \approx h_S \tan \theta_0$  in Range-Richtung gegenüber der senkrechten Projektion der Flugbahn auf die Erdoberfläche, der Grundlinie, verschoben. Diese Verschiebung bzw. die Neigung des Sensors ist notwendig, da die Auflösung in Range-Richtung allein durch unter-

---

<sup>1</sup> Radar steht für den englischen Ausdruck ‘*ratio detection and ranging*’.

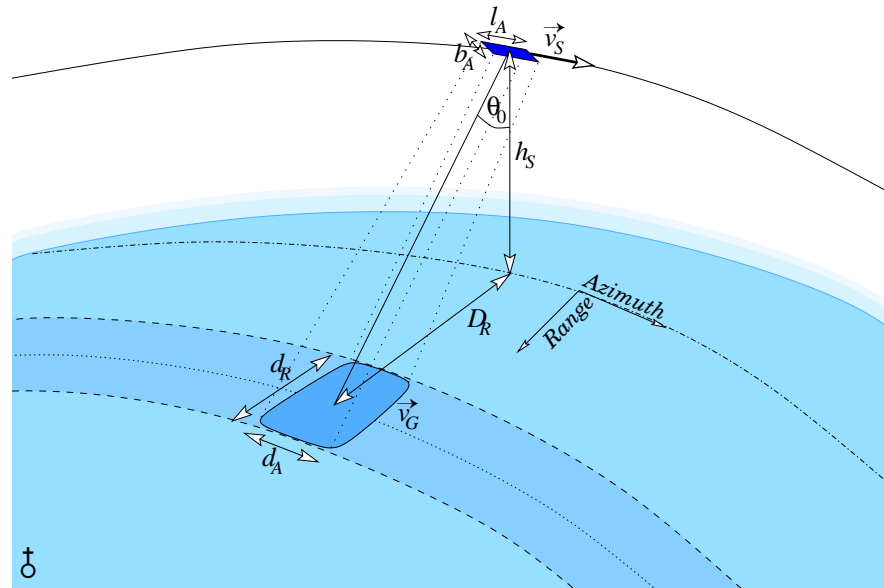


Abbildung 2.1: Wichtige Größen der SAR-Abbildungsgeometrie.

schiedliche Signallaufzeiten geschieht. Bei einem senkrechten Sensor würde das dieselbe Signallaufzeit für zwei Punkte mit gleichem Abstand von der Grundlinie bedeuten. Da es nicht möglich ist, die Antenne (Apertur) in Azimuth-Richtung so groß zu machen, dass eine genügend hohe Bodenauflösung entsteht, müssen die Informationen mehrerer, in Azimuth-Richtung aufeinander folgender, großteils überlappender Range-Zellen betrachtet werden, um aus der Veränderung die Informationen in der gewünschten Auflösung zu gewinnen. Ein Punkt am Boden ist für die Zeit  $t_I = \frac{d_A}{\|\vec{v}_G\|}$  innerhalb des beleuchteten  $d_A \times d_R$ -Bereiches. Die Apertur wird also künstlich in Flugrichtung erweitert. Die so entstehende synthetische Apertur (künstliche Antennengröße) hat formell die Ausdehnung  $\|\vec{v}_S\|t_I$ . Abbildung 2.1 zeigt die genannten Größen der SAR-Abbildungsgeometrie. In Tabelle 2.4 sind die entsprechenden Werte am Beispiel des ERS-1/2-Satelliten zusammengestellt.

Im Modell des SAR-Abbildungsprozesses werden hier die folgenden Vereinfachungen angenommen:

- Start-Stop-Näherung. Die Sensorbewegung während des Signallaufes wird vernachlässigt. Aus der Bewegung folgt auch, dass der Einfallswinkel des Signales gegenüber der Lotrechten der Antenne im Allgemeinen nicht verschwindet. Dies bewirkt eine Dopplerverschiebung (Winkel) sowie eine Verschiebung der Azimuth-Richtung (Bewegung) um  $\frac{2h_S}{c \cos \theta_0} \vec{v}_G$ .
- Oberflächen-Linearisierung. Die Erdoberfläche wird lokal als Ebene angenommen, Erdkrümmung und Berge werden vernachlässigt. Dies

führt zu einer leichten (in bergigen Regionen zu einer deutlichen) Bildverzerrung.

- **Szenenkohärenz.** Das Bild wird als zeitlich konstant während des Überfluges bzw. der Beleuchtungszeit  $t_I$  angenommen. Dies ist gerade bei Ozeanwellen nicht immer gegeben, was jedoch mittels Multilooking zum Teil auch für Geschwindigkeitsmessungen verwendet werden kann.
- **Ideale Wellenausbreitung.** Keine variablen Streuungs- und Brechungseffekte durch die Erdatmosphäre, also kein atmosphärischer Einfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- **Erddrehung.** Die Effekte der Erddrehung werden vollständig durch geeignete kleine Drehbewegungen (wenige Grad) des Sensors kompensiert (siehe [BaS]).

Der Sensor sendet mit der Frequenz  $\nu_P$  kurze Pulse auf die Erdoberfläche. Um eine gute Azimuth-Auflösung zu erhalten, sind stets mehrere Pulse ( $N_P \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ ) auf dem Weg zwischen Sensor und Erdoberfläche oder zurück. Der Summand  $\frac{1}{2}$  kommt dadurch zustande, dass die Antenne nicht zugleich senden und empfangen kann. Es steht die maximale Zeit für den Empfang zur Verfügung, wenn die Zeit nach dem Senden eines Pulses  $i$  zum mittleren Eintreffen des Signalarücklaufes von  $i - N_P + \frac{1}{2}$  und nach diesem bis zum Senden des Pulses  $i + 1$  gleich groß ist (siehe auch Abbildung 2.3). Am Boden treffen die Pulse in Azimuth-Richtung in der Entfernung  $\frac{|\vec{v}_G|}{\nu_P}$  auf. Sie breiten sich in Range-Richtung mit der Geschwindigkeit  $\frac{c}{\sin \theta_0}$  aus. Zu beachten ist, dass die Range-Laufzeit  $\frac{d_R \sin \theta_0}{c}$  kürzer als die Hälfte des zeitlichen Pulsabstands  $\frac{1}{\nu_P}$  sein muss, damit sich die Pulse nicht überschneiden. Die Hälfte ist deshalb notwendig, da der Laufzeitunterschied  $\frac{d_R \sin \theta_0}{c}$  zwischen Near-Range und Far-Range sowohl für den Lauf vom Sensor zur Erdoberfläche als auch auf dem Rückweg auftritt.

Das Pulssignal  $g$  selbst ist amplitudenmoduliert über einer Radarwelle der Trägerfrequenz  $\nu_0$  bzw. Wellenlänge  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ . Abgestrahlt wird also

$$g(t) \cdot e^{2\pi i \nu_0 t}. \quad (2.1)$$

Abbildung 2.2 zeigt typische Radarfrequenzbereiche [Kra, Cv]. Beispiele für Pulssignale  $g$  sind

- $g(t) = \text{sinc}(t \cdot \nu_B)$  (idealer Puls). Dieser bewirkt eine Range-Auflösung von  $\frac{c \sin \theta_0}{\nu_B}$ . Ein Problem ist jedoch die benötigte kurzzeitig hohe Energie, um das Signal nach dem Weg zur Erdoberfläche und zurück noch empfangen zu können.
- $g(t) = e^{k\pi i t^2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left( \frac{kt}{\nu_B} \right)$  (chirp-Puls). Physikalisch realisierbares Pulssignal. Durch geeignete Nachprozessierung (Faltung mit einem

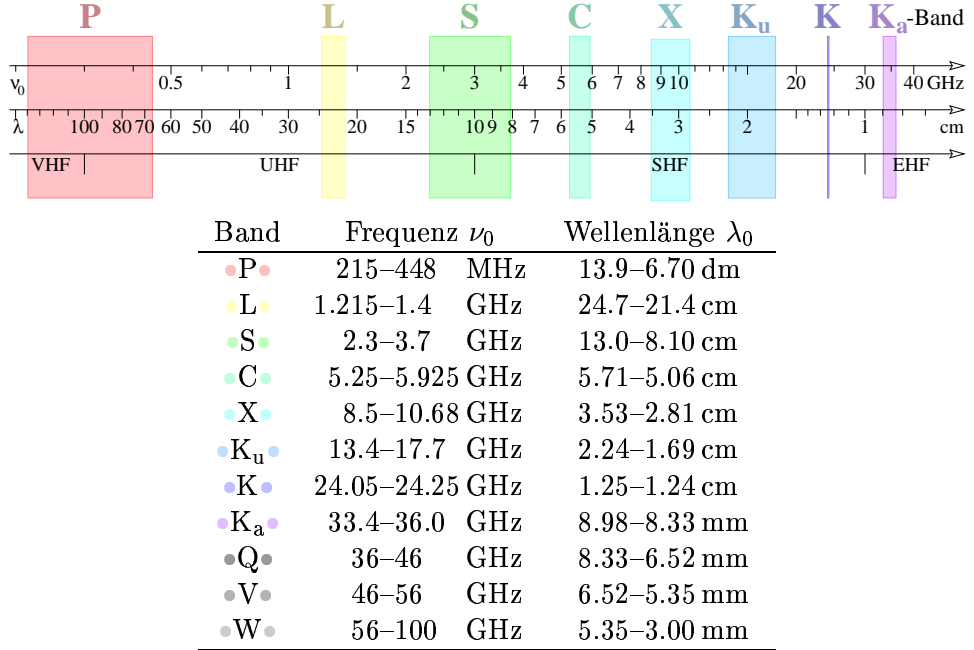


Abbildung 2.2: Radar-Frequenzbänder.

entsprechenden Chirp) kann im Wesentlichen die gleiche Range-Auflösung von  $\frac{c \sin \theta_0}{\nu_B}$  erreicht werden [BaS].

Die von der SAR-Antenne abgestrahlte Energie bzw. Leistung zum Zeitpunkt  $t$  berechnet sich (modulo konstanter Vorfaktoren) als

$$P_T = |g(t)|^2. \quad (2.2)$$

Nicht genau senkrecht von der Antenne abgestrahlte Signale sind etwas schwächer. Sind  $\beta$  und  $\theta$  die Winkel in Azimuth- und Range-Richtung, um die die beobachtete Ausbreitungsrichtung von der Antennennormalen abweicht, so verhält sich die Energie in etwa (Messung) wie

$$a_\beta(\beta) = \text{sinc}^2 \left( \frac{\beta l_A}{\lambda_0} \right) \quad (2.3)$$

$$\text{bzw. } a_\theta(\theta) = \text{sinc}^2 \left( \frac{\theta b_A}{\lambda_0} \right). \quad (2.4)$$

Der Term

$$A(\theta, \beta) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} |a_\theta(\theta)| |a_\beta(\beta)| \quad (2.5)$$

wird als effektive Antennenfläche bezeichnet. Er gibt das analoge Verhalten für den Empfangsmodus der Antenne wieder.

Die Wellenfront breitet sich kugelförmig aus und nimmt daher mit dem Abstand  $R$  zum Sensor quadratisch ab. Insgesamt kommt also bei einem



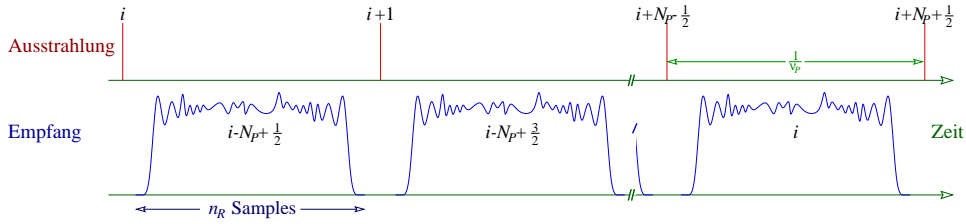


Abbildung 2.3: Signalausstrahlung und -empfang an der SAR-Antenne.

Punkt auf der Erdoberfläche im Abstand  $R$  zur SAR-Antenne die Energie

$$P_{S,\text{in}}(t) = \frac{P_T \left(t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R^2} |a_\theta(\theta)| |a_\beta(\beta)| \quad (2.6)$$

an. Abhängig von der Rauigkeit der Oberfläche wird nun in unterschiedliche Richtungen ein unterschiedlicher Anteil des Signales gestreut. Bei einer völlig glatten Oberfläche (z.B. windstilles, wellenfreies Meer) wird das gesamte Signal vom Satelliten weggestreut, da dieser ja unter dem Winkel  $\theta_0 \pm \theta$  gegenüber der Senkrechten auf die Erdoberfläche blickt. Je nach Oberflächenstruktur (surface cross section  $S$ , siehe auch Abschnitt 2.2) wird ein unterschiedlicher Anteil der Energie zurückgestreut:

$$P_{S,\text{out}}(t) = P_{S,\text{in}}(t) S \quad (2.7)$$

Die Radar-Antenne empfängt nun ein erneut gemäß Laufentfernung und Empfangsrichtung abgeschwächtes Signal:

$$\begin{aligned} P_R(t) &= \frac{P_{S,\text{out}} \left(t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R^2} A(\theta, \beta) \\ &= P_T \left(t - \frac{2R}{c}\right) S \frac{\lambda_0^2 |a_\theta(\theta)|^2 |a_\beta(\beta)|^2}{(4\pi)^3 R^4} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Rechnet man mit dem Signal selbst anstelle von Energien (Betragsquadrate), so erhält man die Radar-Gleichung, die das Echo-Signal beschreibt:

$$h_a = \sqrt{S} C(R) a_\beta(\beta) g \left(t - \frac{2R}{c}\right) e^{-4\pi i \frac{R}{\lambda_0}} \quad (2.9)$$

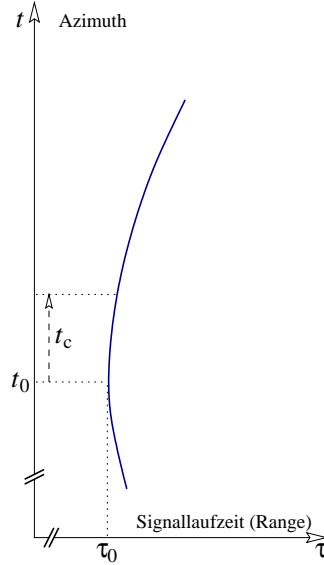
wobei

$$C(R) = \frac{\lambda_0 a_\theta(\theta) a_{\text{rec}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} R^2}, \quad (2.10)$$

mit der effektiven Amplitudenverstärkung  $a_{\text{rec}}$  durch die gesamte Empfangseinheit.

Die Signalausstrahlung und der Signalempfang erfolgt zeitversetzt. Das gesamte ausgestrahlte Signal setzt sich zusammen als

$$\sum_i g \left(t - \frac{i}{\nu_P}\right) e^{2\pi i \nu_0 \left(t - \frac{i}{\nu_P}\right)} \quad (2.11)$$



**Abbildung 2.4:** Range-Verschiebung. Bedingt durch leichte Schrägstellung der Antenne ist die max. Energie bei  $t_0 + t_c$  und nicht beim Range-Minimum  $t_0$ . Die minimale Rückkehrzeit  $\tau_0 = 2\frac{r_0}{c}$  entspricht dem Range-Minimum.

mit chirp-Pulsen  $g(t)$ . In der Zeit, während der zwischen Senden des  $i$ -ten und des  $i + 1$ -ten Pulses  $g(t)$  aufgrund der überlagerten Zeitcharakteristik  $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left( \frac{kt}{\nu_B} \right)$  verschwindet, steht die Antenne auf Empfang. Es werden  $n_R$  Samples des rückgestreuten Signales abgetastet (siehe auch Abbildung 2.3). Dies ermöglicht — zusammen mit einer geeigneten Puls-Eigenfrequenz — die Auflösung in Range-Richtung. Die abgetasteten Samples mehrerer Pulse hintereinander bilden die Rohdaten (RAW-Bild).

Als Nächstes soll das Bild eines einzelnen Rückstreuers der Stärke  $|S| = 1$  in den Rohdaten betrachtet werden, der zur (Azimuth-) Zeit  $t_0$  eine minimale Range-Entfernung  $r_0$  vom Sensor hat. Das ergibt eine Range-Entfernung von

$$R(t - t_0, r_0) \stackrel{\text{PYTHAGORAS}}{=} \sqrt{r_0^2 - \|\vec{v}_S\|^2 (t - t_0)^2} \\ \stackrel{\text{TAYLOR [BS]}}{\approx} r_0 + \underbrace{\frac{\|\vec{v}_S\|^2 (t - t_0)^2}{2r_0}}_{\Delta R} \quad (2.12)$$

$\Delta R$  heißt Range-Verschiebung. Abbildung 2.4 zeigt diese symbolisch als Kurve innerhalb der Rohdaten. Für das Echo-Signal (2.9) erhält man als grobe Näherung

$$h_a(\tau, t, r_0) \approx C(r_0) a_\beta \left( \|\vec{v}_S\| \frac{t - t_0}{r_0} \right) g(\tau) e^{\pi i C_{\text{FM}} t^2} \quad (2.13)$$

mit  $C_{\text{FM}} \approx -\frac{2\vec{v}_S^2}{\lambda r_0}$ . Angenommen wird:

- $C(R) \approx C(r_0)$ , also kaum Amplituden-Abhängigkeit vom Range wegen  $\Delta R \ll r_0$ .
- $\beta \approx \|\vec{v}_S\| \frac{t-t_0}{r_0}$ , d.h. nur kleine Azimuth-Auslenkungen.
- $g\left(\tau - \frac{2R}{c}\right) \approx g\left(\tau - \underbrace{\frac{2r_0}{c}}_{=: \tau_0}\right)$  also keine Puls-Verschiebung mit der Range-Verschiebung.
- $S$  wird aus Normierungszwecken mit einer Phase von  $\frac{8\pi r_0}{\lambda}$  angenommen.

FOURIER-Transformation in den beiden ersten Komponenten liefert (siehe Anhang A.3)

$$\hat{h}_a(\nu, f, r_0) \approx C(r_0) \sqrt{\frac{i}{C_{\text{FM}}}} a_\beta \left( -\lambda \frac{f - f_0}{2 \|\vec{v}_S\|} \right) \hat{g}(\nu) e^{-\frac{\pi i}{C_{\text{FM}}} t^2}. \quad (2.14)$$

$\hat{h}_a$  verhält sich also für typische SAR-Antennen in der Azimuth-Frequenz  $f$  wie ein um  $f_0 \approx C_{\text{FM}} t_0$  zentrierter  $\text{sinc}^2$ . Für den idealen Puls ( $g = \text{sinc}(t \cdot \nu_B)$ ) ist  $\hat{g} = \mathbb{1}_{[-a, a]}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .

Betrachtet man nun das Bodensignal  $\gamma(r, t)$ , das im Allgemeinen nicht einem einzelnen Rückstreuer (DIRAC-Peak) entspricht, so erhält man für die SAR-Rohdaten

$$\begin{aligned} d(\tau, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(r, \tilde{t}) h_a\left(\tau - \frac{2r}{c}, t - \tilde{t}, r\right) dr d\tilde{t} \\ &\stackrel{h_a(\bullet, \bullet, r) \approx h_a(\bullet, \bullet, r_0)}{\approx} \int_{\mathbb{R}} \left( \gamma(r, \bullet) * h_a\left(\tau - \frac{2r}{c}, \bullet, r_0\right) \right) (t) dr \\ &\stackrel{u := \frac{2r}{c}}{=} \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \gamma\left(\frac{cu}{2}, \bullet\right) * h_a(\tau - u, \bullet, r_0) \right) (t) du \\ &= \frac{c}{2} \left( \gamma\left(\frac{c\star}{2}, \bullet\right) * h_a(\star, \bullet, r_0) \right) (\tau, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

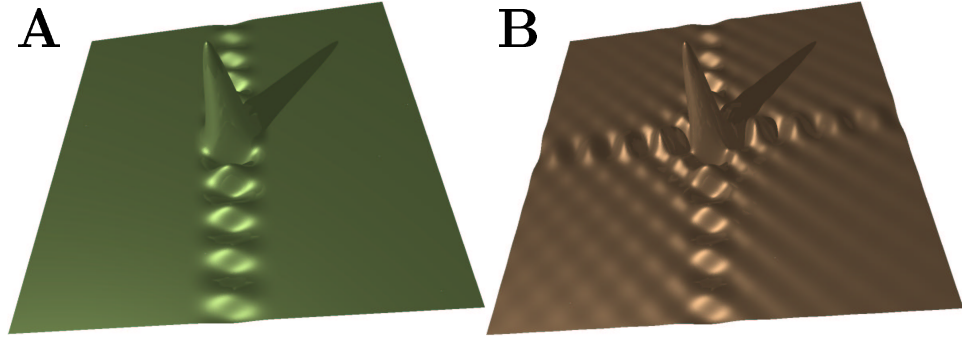
und nach dem Faltungssatz (Lemma 2 (ix)) in 2 Dimensionen

$$\hat{d}(\nu, f) \approx \hat{\gamma}\left(\frac{2\nu}{c}, f\right) \hat{h}_a(\nu, f, r_0). \quad (2.16)$$

Das Bodensignal wird also im Wesentlichen längs  $\nu$  (Range) low-pass gefiltert und längs  $f$  (Azimuth) band-pass gefiltert um  $f_0$ . Zur Rekonstruktion des SAR-Bildes muss nun ein geeigneter Filter  $h_r$  gefunden werden, der die enthaltenen Informationen von  $\gamma$  möglichst gut rekonstruiert. Das SAR-Bild ist dann

$$u(r, t) = (d(\star, \bullet) * h_r(\star, \bullet, r_0))\left(\frac{2r}{c}, t\right). \quad (2.17)$$

Realisiert wird diese Faltung als ein phasenkorrigiertes Aufsummieren der entsprechenden Rohdaten-Werte. Dabei ergeben sich folgende Probleme:



**Abbildung 2.5:** Idealer (A) und realer (B) point spread (um die Effekte in B ausserhalb der Range bzw. Azimuth-Achse sichtbar zu machen, wurden die ‘Wurzeln’  $s(r, t)$  anstelle des wahren point spreads  $|s(r, t)|^2$  angetragen).

- $h_r$  hat einen sehr großen Träger. So müssen für einen Bildpunkt in  $u$  etwa 100 Punkte in Range und einige tausend Punkte in Azimuth in Betracht gezogen werden.
- die beiden Richtungen bzw. Dimensionen (Range und Azimuth) sind nicht separabel, da die Spur eines Punktstreuers in den Rohdaten gekrümmt ist. Die Zentrumslinie eines Punktstreuers ist in Abbildung 2.4 schematisiert.
- Eine Produktbildung im FOURIER-Bereich ist nur für Bildausschnitte mit sehr kleinem Range-Bereich möglich, da sich  $h_r$  wie auch  $h_a$  im Range ändert (siehe Näherung in (2.15)). Andererseits werden häufig Algorithmen mit Range-unabhängigen Filtern verwendet. Es gilt dann

$$\hat{u}(\nu, f) \approx \frac{c}{2} \hat{\gamma}(\nu, f) \hat{h}_a\left(\frac{\nu c}{2}, f, r_0\right) \hat{h}_r\left(\frac{\nu c}{2}, f, r_0\right) = \hat{\gamma}(\nu, f) \hat{s}(\nu, f). \quad (2.18)$$

Im Idealfall ist  $\hat{s}(\nu, f)$  von Typ  $\text{sinc}^4\left(\frac{\lambda}{2\|\vec{v}_S\|}(f - f_0)\right) \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}\left(\frac{c\nu}{2\nu_B}\right)$ , also  $s$  das Produkt aus einem Spline in  $t$  (Azimuth) und einem sinc in Range  $r$ . Die sog. *point spread function*  $|s(r, t)|^2$  ist in Abbildung 2.5 zu finden.

- Durch das Sampling in Azimuth-Richtung entsteht auch dort eine sinc-Charakteristik anstelle des Splines. Ein Punktstreuer wird also im SAR-Bild  $u$  auf den Tensor zweier sinc-Funktionen fokussiert. Auch dieser reale point spread wird in Abbildung 2.5 gezeigt.

Weitere Informationen zur Funktionsweise von SAR-Sensoren am speziellen Beispiel des ERS-1-Satelliten können [BaS] entnommen werden.

## 2.2 Die stochastische Verteilung des Speckle-Rauschens

Im folgenden Abschnitt wird das Speckle-Rauschen hergeleitet<sup>2</sup> und für verschiedene Bildtypen angegeben, was als Grundlage für die stochastische Beurteilung des Algorithmus in Kapitel 5 dient. Dazu wird zunächst eine einzelne Auflösungszelle betrachtet, also der Bereich am Boden, der einem Bildpixel entspricht.

Die Rückstreuer am Boden sind meist in der Größenordnung der Radarwellenlänge. Da diese jedoch wesentlich kürzer ist als die Auflösungszelle im gesamten Abbildungssystem, werden in der Regel die Signale vieler Rückstreuer überlagert. Elektromagnetische Wellen unterschiedlicher Amplitude und Phase überlagern sich entsprechend der Addition komplexer Zahlen.

Die Phase eines rückgestreuten Signals verändert sich mit der Laufzeit des Signals (d.h. mit der Entfernung zur Radarantenne). Auf homogenen Flächen, also bei gleichmäßig verteilten Rückstreuern, sind die Laufzeiten modulo der Radarfrequenz  $\nu_R$  (bzw. die Antennenabstände modulo der Wellenlänge  $\lambda_R = \frac{c}{\nu_R}$ ) zufällig verteilt und man kann von einer gleichverteilten, von der Amplitude unabhängigen Phase  $\Phi$  ausgehen. Die Dichte der Verteilung von  $\Phi$  ist also

$$f_{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi[}. \quad (2.19)$$

In einer Auflösungszelle werden die Signale aller  $n$  Rückstreuer überlagert. Bei Amplitude  $a_k$  und Phase  $\Phi_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) ergibt das ein Signal

$$S = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\Phi_k} \quad (2.20)$$

mit verschwindendem Erwartungswert des Real- und Imaginärteils:<sup>3</sup>

$$E(\Re S) = \sum_{k=1}^n E(a_k) E(\cos \Phi_k) = 0 \quad (2.21)$$

$$E(\Im S) = \sum_{k=1}^n E(a_k) E(\sin \Phi_k) = 0 \quad (2.22)$$

<sup>2</sup> Herleitungen auf z.T. anderem Wege für einige dieser Bildtypen finden sich z.B. in [Cv, Hoe].

<sup>3</sup> Bei gleichverteiltem Winkel verschwindet der Erwartungswert von Sinus und Cosinus, d.h.  $E(\sin x) = E(\cos x) = 0$  für  $x \sim \mathbb{1}_{[0, 2\pi[}$ .

Ihre Varianzen stimmen überein und beide Komponenten sind unkorreliert<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Re S) &= E((\Re S)^2) - \underbrace{(E(\Re S))^2}_{\stackrel{(2.21)}{=} 0} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E(a_k a_l) E(\cos \Phi_k \cos \Phi_l) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n E(a_k^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Im S) &= E((\Im S)^2) - \underbrace{(E(\Im S))^2}_{\stackrel{(2.22)}{=} 0} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E(a_k a_l) E(\sin \Phi_k \sin \Phi_l) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n E(a_k^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Re S, \Im S) &= E((\Re S)(\Im S)) - \underbrace{E(\Re S)}_{\stackrel{(2.21)}{=} 0} \underbrace{E(\Im S)}_{\stackrel{(2.22)}{=} 0} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E(a_k a_l) E(\cos \Phi_k \sin \Phi_l) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes (Satz 1) können  $\Re S$  und  $\Im S$  als normalverteilt angenommen werden (die Zahl  $n$  der Rückstreuer in einer Auflösungszelle kann als ausreichend groß angenommen werden), d.h. mit Wahrscheinlichkeitsdichten<sup>5</sup>

$$f_{\Re S}(x) = f_{\Im S}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.26)$$

Nach Beispiel ② zu Hilfssatz 1 sind die Dichtefunktionen der Quadrate von Real- und Imaginärteil

$$f_{(\Re S)^2}(y) = f_{(\Im S)^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} H(y). \quad (2.27)$$

Das ergibt eine exponentialverteilte Intensität  $I = |S|^2 = (\Re S)^2 + (\Im S)^2$

$$f_I(t) = (f_{(\Re S)^2} * f_{(\Im S)^2})(t)$$

---


$$\begin{aligned} \forall x, y \sim \mathbb{1}_{[0, 2\pi[} : E(\cos x \cos y) &= \begin{cases} E(\cos x)E(\cos y) = 0 & x \neq y \text{ unabh.} \\ E(\cos^2 x) = E\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) = \frac{1}{2} & x = y \end{cases} \\ E(\sin x \sin y) &= \begin{cases} E(\sin x)E(\sin y) = 0 & x \neq y \text{ unabh.} \\ E(\sin^2 x) = E\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) = \frac{1}{2} & x = y \end{cases} \\ E(\sin x \cos y) &= \begin{cases} E(\sin x)E(\cos y) = 0 & x \neq y \text{ unabh.} \\ E(\sin x \cos x) = E\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) = 0 & x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeitsannahme an die Rückgestreuten Signale treten jeweils nur diese beiden Fälle auf.

<sup>5</sup> Hier gilt:  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \sum E(a_k^2)}$ .

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{y(t-y)}} e^{-\frac{t-y}{2\sigma^2} - \frac{y}{2\sigma^2}} dy H(t) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} H(t) \int_0^t \frac{dy}{\sqrt{ty-y^2}} \\
&\stackrel{f\#241}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} H(t) \left( -\arcsin \left( 1 - \frac{2y}{t} \right) \right) \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} H(t) \\
&\stackrel{\mu:=2\sigma^2}{=} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} H(t) \tag{2.28}
\end{aligned}$$

und eine RAYLEIGH-verteilte Amplitude  $A = \sqrt{I}$

$$f_A(t) \stackrel{(1.2)}{=} 2t f_I(t^2) H(t) = \frac{2t}{\mu} e^{-\frac{t^2}{\mu}} H(t). \tag{2.29}$$

### Bemerkungen:

- Auf diese Verteilung kommt man auch direkt aus der zweidimensionalen Normalverteilung mit Hilfe der zweidimensionalen Transformationsformel (siehe auch Beispiel ③ zu Hilfssatz 1), denn mit Polarkoordinaten ( $0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0$ ) gilt

$$\frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} d\theta \cdot \frac{2}{2\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \stackrel{\mu=2\sigma^2}{=} f_\Phi(\theta) d\theta \cdot f_A(r) dr, \tag{2.30}$$

was auch zugleich eine gleichverteilte Phase  $\Phi$  ergibt.

- Erwartungswert, Varianz und charakteristische Funktion der Exponentialverteilung und der RAYLEIGH-Verteilung sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.
- Physikalisch betrachtet handelt es sich bei Speckle-Rauschen gar nicht um ein Rauschen im strengen Sinn. Es handelt sich eher um ein Phänomen der kohärenten Rückstreuung und der Interferenz der örtlichen Lage der einzelnen Reflektoren. Nimmt man die gleiche Szene mit derselben Aufnahmegeometrie (Flugbahn) mehrmals auf, so entsteht ein identisches Bild, nicht ein anderer Pfad desselben stochastischen Prozesses.

Nimmt man die Ergodizität des Rauschprozesses an, so erhält man für die Verteilungen eines homogenen SAR-Bildes (mit konstanter Intensitätserwartung  $E(I) = \mu$ ) eben die in (2.28) bzw. (2.29) gegebenen. Als typisches homogenes SAR-Bild wird üblicherweise ein Bild des tropischen Regenwaldes genannt [Cv]. Durch die unterschiedlichen Eindringtiefen durch das Blätterdach sowie die gleichmäßig verteilte Existenz von Rückstreuern in einem

näherungsweise quaderförmigen Volumen zwischen Baumkronen und Urwaldboden ist eine gleichverteilte Phase gewährleistet.

Nicht-homogene Bilder zeigen eine ortsabhängige Intensitätserwartung  $\mu$ , eine Oberflächenstruktur  $S = \mu$  der abgebildeten Region der Erdoberfläche (engl. *surface cross section*, kurz SCS). Nach (1.2) mit  $g(x) = \mu \cdot x$  und normiertem Rauschen  $f_N(x) = e^{-x}$  gilt

$$f_{S \cdot N}(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}. \quad (2.31)$$

Das gemessene Intensitäts-Signal  $I$  entspricht also einer multiplikativen Überlagerung von normiertem, exponentialverteiltem Rauschen  $N$  und einem ortsabhängigen, aber in verschiedenen Pfaden konstantem Oberflächen-signal  $S$

$$I = S \cdot N. \quad (2.32)$$

Dieses Rauschen nennt man ein vollständig entwickeltes Speckle-Rauschen.

### 2.2.1 Mehrere Looks

Um das Rauschen zu reduzieren gibt es verschiedene Techniken:

1. Bei der SAR-Prozessierung kann vor der Fokussierung der Frequenzbereich (FOURIER-seitig) in Azimuth- und/oder Range-Richtung in verschiedene Teilbänder aufgeteilt werden. Diese Bänder können getrennt zu SAR-Bildern (mit geringerer Auflösung), sog. Looks, fokussiert werden. Waren die Teilbänder disjunkt, so sind die entstehenden Bilder unkorreliert. Zur Reduzierung des Speckle-Rauschens werden die einzelnen Bilder aufsummiert. Die Stärke der Reduzierung hängt von der Anzahl  $L$  der Looks ab.
2. Das fokussierte SAR-Bild wird im Ortsbereich in Azimuth- und/oder Range-Richtung (mittels einer Faltungsoperation) geglättet und in der Auflösung reduziert (low-pass gefiltert). Die Stärke der Reduzierung hängt vom verwendeten Filter-Kern ab.

In beiden Fällen spricht man von der effektiven Zahl an Looks  $L$ , die stochastisch einer Mittellung von  $L$  unkorrelierten Punkten eines (homogenen) SAR-Bildes entspricht. Auch die Auflösung wird um den Faktor  $L$  reduziert. Oft sind auch Prozessierungsziele der Grund für mehrere Looks, beispielsweise die Erzeugung von geokodierten Bildern oder von Bildern mit gleicher Azimuth- und Range-Auflösung (vergleiche dazu auch Tabelle 2.2 in Abschnitt 2.3).

Um die punktweise Verteilung eines Multilook-Bildes zu untersuchen, betrachten wir zunächst ein zugrunde liegendes homogenes Singlelook Bild. Die Intensitäten von  $L$  Pixeln ( $k \in \{1, \dots, L\}$ ) der Verteilung

$$f_{I_k}(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} H(t) \quad (2.33)$$



sollen gemäß

$$I = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k \quad (2.34)$$

gemittelt werden. Nach Hilfssatz 2 folgt für die Dichte der ungemittelten Intensität  $L \cdot I$

$$f_{L \cdot I} = f_{\sum_{k=1}^L I_k} = \sqrt{2\pi}^{L-1} f_{I_1} * f_{I_2} * \dots * f_{I_L} \quad (2.35)$$

und damit nach Hilfssatz 1 mit  $g(t) = \frac{t}{L}$  für die der Intensität  $I$

$$f_I = f_{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k} = \sqrt{2\pi}^{L-1} \sqrt{L} \mathcal{D}_{\frac{1}{L}} f_{I_1} * f_{I_2} * \dots * f_{I_L}. \quad (2.36)$$

Mittels vollständiger Induktion nach  $L$  (siehe Anhang A.2.1) zeigt man

$$f_I(t) = \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L t^{L-1} e^{-L\frac{t}{\mu}} H(t). \quad (2.37)$$

Das Rauschen ist weiterhin multiplikativ, denn auch für diese Verteilung lässt sich aus  $g(x) = \mu \cdot x$  und normiertem Rauschen  $f_N(t) = \frac{1}{(L-1)!} L^L t^{L-1} e^{-Lt}$  die Verteilung aus (2.37) gewinnen. Damit ist (2.32) auch für  $L \neq 1$  gültig. Die charakteristische Funktion dieser Verteilung ist

$$\hat{f}_I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{i\omega\mu}{L}\right)^L}; \quad (2.38)$$

das ergibt einen unveränderten Erwartungswert  $E(I) = \mu$  und eine mit  $L$  fallende Varianz  $\text{Var}(X) = \frac{\mu}{L}$  (siehe ebenfalls Anhang A.2.1; dort ist auch die kumulative Verteilung zu finden.).

Amplitudenbilder mit mehreren Looks haben demnach eine Dichte der Form

$$f_A(t) \stackrel{(1.2)}{=} 2t f_I(t^2) H(t) \stackrel{(2.37)}{=} \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L t^{2L-1} e^{-L\frac{t^2}{\mu}} H(t). \quad (2.39)$$

In Anhang A.2.2 wird gezeigt, dass die charakteristische Funktion

$$\hat{f}_A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(L-1)!} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{\omega}{2i} \sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^{2L-1-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \quad (2.40)$$

ist. Das liefert einen Erwartungswert von  $E(A) = \frac{2L-1}{4^{L-1}} \binom{2L-3}{L-1} \sqrt{\frac{\pi\mu}{L}}$  und eine Varianz von  $\text{Var}(A) = \left(1 - \frac{(2L-1)^2}{16^{L-1}} \binom{2L-3}{L-1}^2 \frac{\pi}{L}\right) \mu$ ; auch die kumulative Verteilung findet sich in Anhang A.2.2.

### 2.2.2 Dichtebilder

Für viele Anwendungen sind Bilder mit additivem Rauschen wünschenswert. Betrachtet man statt des Bildes den punktweisen Logarithmus (von Intensität oder Amplitude), so ist das Rauschen additiv, denn aus (2.32) folgt

$$\ln I = \ln S + \ln N. \quad (2.41)$$

$(\ln I)$  heißt Intensitätsdichte-Bild,  $(\ln A)$  Amplitudendichte-Bild. Die Verteilung eines Singlelook Intensitätsdichte-Bildes erhält man, indem man Beispiel ① zu Hilfssatz 1 auf die Exponentialverteilung (2.28) anwendet. Man erhält eine FISHER-TIPPETT-verteilte Intensitätsdichte

$$f_{\ln I}(t) = \frac{1}{\mu} e^t e^{-\frac{1}{\mu} e^t}. \quad (2.42)$$

Diese Verteilung hat nicht, wie man vermuten könnte, einen Erwartungswert von  $\ln \mu$ , sondern von  $\ln \mu - \gamma_E$ . Dies wird in Anhang A.1, Gleichungen (A.15) und (A.16) gezeigt. Für die Varianz ergibt sich ein konstanter Wert von  $\frac{\pi^2}{6}$ , unabhängig von der Intensitätserwartung  $\mu$ , was ebenfalls die Additivität des Rauschens bei der Intensitätsdichte zeigt.

Für Multilook-Bilder erhält man analog (mit Beispiel ① zu Hilfssatz 1) aus (2.37) und (2.39)

$$f_{\ln I}(t) = \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{Lt} e^{-\frac{L}{\mu} e^t} \quad (2.43)$$

$$f_{\ln A}(t) = \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{2Lt} e^{-\frac{L}{\mu} e^{2t}}. \quad (2.44)$$

In Anhang A.2.3 wird die charakteristische Funktion

$$\hat{f}_{\ln I}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(L - i\omega)}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{i\omega} \quad (2.45)$$

$$\hat{f}_{\ln A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(L - \frac{i\omega}{2})}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{i\omega}{2}} \quad (2.46)$$

hergeleitet. Diese liefert Erwartungswerte von  $\frac{\Gamma'(L)}{\Gamma(L)} + \ln \frac{\mu}{L}$  bzw.  $\frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{L}$  und (in  $\mu$ ) konstante Varianzen von  $\frac{\Gamma''(L)}{\Gamma(L)} - \frac{(\Gamma'(L))^2}{(\Gamma(L))^2}$  bzw.  $\frac{\Gamma''(L)}{4\Gamma(L)} - \frac{(\Gamma'(L))^2}{4(\Gamma(L))^2}$ , also weiterhin additives Rauschen. Die kumulative Verteilung ist hier

$$P(\ln I \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{jt} e^{-\frac{L}{\mu} e^t} \quad (2.47)$$

$$P(\ln A \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{2jt} e^{-\frac{L}{\mu} e^{2t}}. \quad (2.48)$$

Bild $X$	Dichte $f_X$	charakterist. Ftn. $\hat{f}_X$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
$\Re Y$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} e^{-\frac{x^2}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\mu}}$	0	$\frac{\mu}{2}$
$\Im Y$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} e^{-\frac{x^2}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\mu}}$	0	$\frac{\mu}{2}$
$\arg Y$	$\frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega)$	0	$\frac{\pi^2}{3}$
$ Y ^2$	$\left(\frac{L}{\mu}\right)^L \frac{x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-L\frac{x}{\mu}} H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\frac{i\omega\mu}{L})^L}$	$\mu$	$\frac{\mu^2}{L}$
$ Y $	$\left(\frac{L}{\mu}\right)^L \frac{2x^{2L-1}}{(L-1)!} e^{-L\frac{x^2}{\mu}} H(x)$		$\frac{2L-1}{4^{L-1}} \frac{(2L-3)}{(L-1)} \sqrt{\frac{\pi\mu}{L}}$	
$\ln  Y ^2$	$\frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{Lx} e^{-\frac{L}{\mu}e^x}$	$\frac{\Gamma(L-i\omega)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{i\omega}$	$\mu - \frac{(2L-1)^2}{16^{L-1}} \frac{(2L-3)^2}{(L-1)^2} \frac{\pi\mu}{L}$	
$\ln  Y $	$\frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{2Lx} e^{-\frac{L}{\mu}e^{2x}}$	$\frac{\Gamma(L-\frac{i\omega}{2})}{\sqrt{2\pi}\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{i\omega}{2}}$	$\frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{L}$	$\frac{\Gamma''(L)}{4\Gamma(L)} - \frac{(\Gamma'(L))^2}{4(\Gamma(L))^2}$

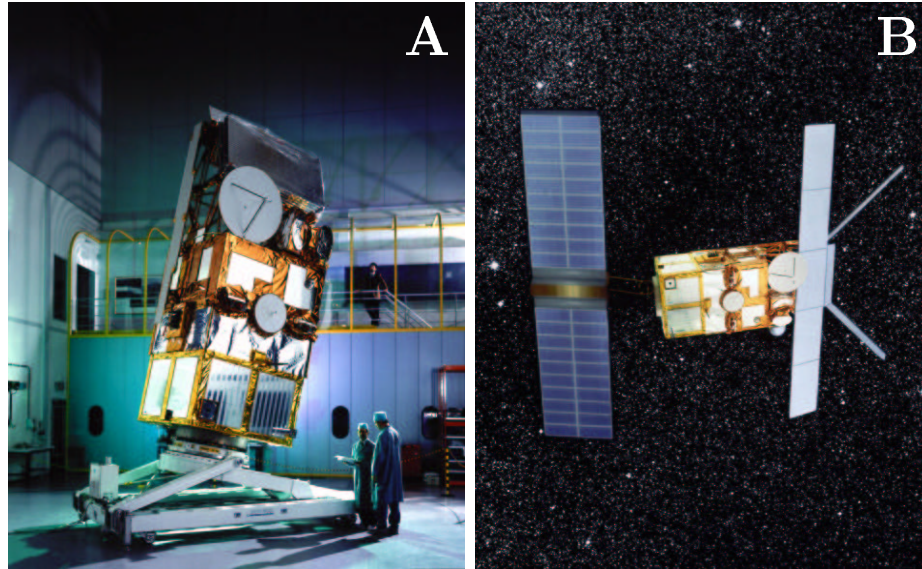
Name	Bild $X$	Verteilung $P(X \leq x)$
Phase	$\arg Y$	$\frac{x}{2\pi} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$
Intensität	$ Y ^2$	$1 - \sum_{k=0}^{L-1} \left(\frac{L}{\mu}\right)^k \frac{x^k e^{-L\frac{x}{\mu}}}{k!}$
Amplitude	$ Y $	$1 - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^k x^{2k} e^{-\frac{L}{\mu}x^2}$
Intensitätsdichte	$\ln  Y ^2$	$1 - \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{jx} e^{-\frac{L}{\mu}e^x}$
Amplitudendichte	$\ln  Y $	$1 - \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{2jx} e^{-\frac{L}{\mu}e^{2x}}$

**Tabelle 2.1:** Überblick über wichtige Verteilungen bei  $L$ -Look SAR-Bildern der Intensitätserwartung  $\mu$ . Für  $\Re Y$ ,  $\Im Y$ ,  $\arg Y$  ist nur  $L = 1$  möglich, da die Look-Generierung auf Intensitätsbildern  $|Y|^2$  geschieht. Bei  $|Y|$  tritt für  $L = 1$  für  $E(X)$  und  $\text{Var}(X)$  der Wert  $\frac{1}{2}$  an die Stelle von  $\binom{-1}{0}$ .

In Tabelle 2.1 sind abschließend noch einmal alle Verteilungen aus Abschnitt 2.2 zusammengestellt. Für die normalverteilten Real- und Imaginärteile ist bekanntlich keine geschlossene Darstellung der kumulativen Verteilung möglich.

### 2.3 Beispiele für SAR-Sensoren im Einsatz

Hier werden einige SAR-Sensoren vorgestellt. Diese Beispiele führen die Datenquellen für den Algorithmus in Kapitel 3 und für einige der Verfahren im Vergleich in Kapitel 7 auf. Die Bilder und einige der Informationen stammen von den Internetseiten von ESA (European Space Agency) und NASA



**Abbildung 2.6:** Der ERS-2-Satellit bei der Fertigung (A) und schematisch im Einsatz (B).

(National Aeronautics & Space Administration, USA).

### 2.3.1 AMI auf ERS-1/2

ERS-1 (European Remote Sensing Satellite) und ERS-2 sind zwei von der ESA betriebene Fernerkundungs-Satelliten. Beide tragen neben einem wetter- und tageszeitunabhängigen abbildenden SAR-Sensor — genannt AMI (Active Microwave Instrument) — weitere Radar-Sensoren zur Windgeschwindigkeits- und Höhenmessung. ERS-2 hat zusätzlich Instrumente zur Beobachtung der Ozonschicht und der Meeresoberflächentemperatur.

ERS-1 war in der ersten Hälfte der neunziger Jahre im Einsatz, ERS-2 in der zweiten Hälfte. Einige Monate waren sie im Parallelbetrieb (ca. 1 Tag versetzte Bahn) um Experimente zur SAR-Interferometrie (siehe Abschnitt 7.3.1) durchzuführen. Starttermine waren am 17. Juli 1991 (ERS-1) und am 21. April 1995 (ERS-2).

Abbildung 2.6 zeigt den ERS-2-Satelliten in der Fertigungshalle und auf einer schematischen Zeichnung die Einsatzweise. Die SAR-Antenne ist als fünfteiliges lang gestrecktes Rechteck im rechten Teil der Zeichnung zu erkennen. Auf ihr sitzt das in drei Richtungen blickende Radar-Scatterometer zur Windmessung.

Tabellen 2.2 und 2.3 stellen die von der ESA angebotenen Bildprodukte [VB] der ERS-1/2-Satelliten zusammen. Die für unseren Algorithmus verwendeten Bilder sind stets Ausschnitte von Bildern des Typs GEC.

Typ (Kurzbezeichnung)	Größe (km <sup>2</sup> )	Looks	Richtung	Topo
Raw Image (RAW)	100 × 110	—	R/A	—
Fast Image (FDC)	100 × 100	3	R/A	—
Single Look Complex (SLC)	4 · 50 × 59.7	1	R/A	—
Precision Image (PRI)	100 × 102.5	3 <sup>no</sup>	R/A	—
Ellipsoid Geocoded (GEC)	≈ 100 × 100	3 <sup>no</sup>	N/E	—
Terrain Geocoded (GTC)	≈ 100 × 100	3 <sup>no</sup>	N/E	*

Looks:           <sup>no</sup>=Nicht überlappend  
Ausrichtung:   R/A=Range-Azimuth, N/E=Nord-Ost

**Tabelle 2.2:** Übersicht der ERS-1/2 Bildprodukte.

Typ	Pixelzahl	Pixelgröße	Bits/Pixel	Dateigröße
RAW	5615 × 27000	7.9 × 3.9 m <sup>2</sup>	5+5	≈ 289 MB
FDC	5000 × 6300	20 × 15.8 m <sup>2</sup>	16	≈ 60.1 MB
SLC	4 · 2500 × 15000	7.9 × 3.9 m <sup>2</sup>	16+16	4 · ≈ 143 MB
PRI	8000 × 8200	12.5 × 12.5 m <sup>2</sup>	16	≈ 125 MB
GEC	$s \times s$ (9100 ≤ $s$ ≤ 12000)	12.5 × 12.5 m <sup>2</sup>	16	158–275 MB
GTC	$s \times s$ (9100 ≤ $s$ ≤ 12000)	12.5 × 12.5 m <sup>2</sup>	16	158–275 MB

**Tabelle 2.3:** Übersicht Pixeldaten der ERS-1/2 Bildprodukte.

In Tabelle 2.4 sind die Werte der Abbildungsgeometrie und die verwendeten Frequenzen des ERS-1/2-Satelliten zusammengestellt (siehe auch [BaS, Gu]).

Die ERS-1/2-Satelliten haben verschiedene Umlaufmodi. Sie erlauben eine Wiederholung des Umlaufes nach 3, 35 oder 168 Tagen. Dabei werden unterschiedlich große Teile der Erdoberfläche abgebildet<sup>6</sup>. Dazu muss die Umlaufbahn durch Kurskorrekturen geeignet umgestellt werden, was entsprechend der gewünschten Anwendungen der Bordinstrumente realisiert wird. Während der ERS-1 mehrmals zwischen 3 und 35 Tage Orbit umgestellt wurde, fliegt der ERS-2-Satellit nur im 35 Tage Orbit.

Das SAR auf ERS-1/2 bietet 2 Abbildungsmodi:

- Über Land bzw. in Reichweite einer Empfangsstation am Boden zeichnet der Satellit im Image-Mode SAR-Bilder auf (kontinuierlich aneinander gereichte 100 × 100 km<sup>2</sup>-Bilder), die wegen der großen Datenmenge (Die Abtastung geschieht in Realteil und Imaginärteil mit je 5

<sup>6</sup> Der 3-Tage-Modus deckt nur ein sehr grobes Gitter ab, kann jedoch wegen der häufigen Überflüge über spezielle Orte gut zu Kalibrierungszwecken und für spezielle Meeresanwendungen verwendet werden. Der 35-Tage-Orbit deckt bei genügend hohem Breitengrad ein Gebiet sogar mehrfach ab. Der 176-Tage-Modus ermöglicht es, auch bei anderen Sensoren mit kleineren Abbildungsflächen am Boden (z.B. Radar-Altimeter) eine gute Dichte des Gitters zu erhalten. Näheres dazu ist in [Gu] zu finden.

Bezeichnung	Formel	Wert
Antennenlänge	$l_A$	10 m
Antennenbreite	$b_A$	1 m
Azimuth-Ausleuchtung	$d_A$	4.3 km
Range-Ausleuchtung	$d_R$	$\approx 100$ km
Bahnhöhe	$h_S$	785 km
Bahngeschwindigkeit	$\ \vec{v}_S\ $	7456 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Bodengeschwindigkeit	$\ \vec{v}_G\ $	$\approx 6650 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Antennenneigung	$\theta_0$	$23^\circ$
mittlere Range-Entfernung	$\frac{h_S}{\cos \theta_0}$	853 km
max. Neigungsunterschied	$\Delta \theta$	$\pm 3.5^\circ$
Range-Offset	$D_R$	$\approx 300$ km
Abbildungszeit	$t_I$	0.5–1 s
synthetische Apertur	$\ \vec{v}_S\ t_0$	3–7.5 km
Azimuth-Start-Stop-Verschiebung	$\left\  \frac{2h_S}{c \cos \theta_0} \vec{v}_G \right\ $	$\approx 40$ m
Pulswiederholfrequenz	$\nu_P$	1640–1720 Hz
Pulse auf dem Weg	$N_P$	9.5
Azimuth-Bodenpulsabstand	$\frac{\ \vec{v}_G\ }{\nu_P}$	$\approx 4$ m
Range-Puls geschwindigkeit	$\frac{c}{\sin \theta_0}$	$\approx 1.2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Range-Laufzeit	$\frac{d_R \sin \theta_0}{c}$	$\approx 0.85 \cdot 10^{-3}$ s
Radar-Trägerfrequenz	$\nu_0$	5.3 GHz
Radar-Wellenlänge	$\lambda_0$	5.657 cm
Puls-Eigenfrequenz	$\nu_B$	$\approx 15.5$ MHz
Range-Auflösung	$\frac{c \sin \theta_0}{\nu_B}$	$\approx 8.56$ m
Abtastrate Pulsrücklauf	$n_R$	5616
Frequenz-Modulations-Rate	$C_{\text{FM}}$	$-2100 \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$ †
Doppler-Zentroid	$ C_{\text{FM}} t_c $	$\approx 900$ Hz † $\approx 8000$ Hz ‡
Polarisation		VV
Datenrate		max. 105 MBd

**Tabelle 2.4:** Abbildungsgeometrie und Frequenzen der ERS-1/2 Satelliten.

† Im yaw-steering Mode in Antennenmitte.

‡ Je nach Satellitenmode (yaw-steering/roll-tilt: zwei verschiedene Modes, die Antennenblickrichtung einzustellen).

Bezeichnung	Formel	Wert
Antennenlänge	$l_A$	10 m
Antennenbreite	$b_A$	1.3 m
Bahnhöhe	$h_S$	824 km
Antennenneigung	$\theta_0$	15–45°
mittlere Range-Entfernung	$\frac{h_S}{\cos \theta_0}$	853–1165 km
Range-Offset	$D_R$	≈ 230–820 km
Range-Puls-geschwindigkeit	$\frac{c}{\sin \theta_0}$	≈ 0.7–2.1 · 10 <sup>8</sup> $\frac{m}{s}$
Radar-Trägerfrequenz	$\nu_0$	5.331 GHz
Radar-Wellenlänge	$\lambda_0$	5.624 cm
Puls-Eigenfrequenz	$\nu_B$	≈ 124 MHz
Range-Auflösung	$\frac{c \sin \theta_0}{\nu_B}$	≈ 0.63–1.71 m

**Tabelle 2.5:** Parameter von ENVISAT (laut Planung).

Bit/Pixel, das ergibt einen Datenstrom von ≈ 105MBd.<sup>7</sup>) sofort zur Bodenstation gesendet wird.

- Auf hoher See bzw. außerhalb der Reichweite der Empfangsstationen wird der Satellit in den sog. Wave-Mode geschaltet. Er zeichnet alle 200 km ein 10 × 5 km<sup>2</sup>großes Bild auf. Diese sog. Imagettes können über einen ganzen Orbit im 800 MB-Speicher des Satelliten gehalten werden, bis wieder eine Bodenstation in Reichweite ist. Parallel dazu wird das Scatterometer (ein weiterer Radar-Sensor, der aus den rückgestreuten Signalen anhand der Rauigkeit der Meeresoberfläche Rückschlüsse auf die Windgeschwindigkeit und -richtung zulässt) betrieben.

### 2.3.2 ASAR auf ENVISAT

ENVISAT ist der Nachfolger der ERS-1/2-Satelliten. Er wird auf einem polaren Orbit Messungen von Atmosphäre, Ozeanen, Land-Oberflächen und Eis durchführen. ENVISAT wird der mit den meisten Sensoren ausgestattete Erdbeobachtungssatellit werden. Er wird den ‘Advanced Synthetic Aperture Radar’ (ASAR) tragen.

Der ASAR-Sensor wird im C-Band Daten in verschiedenen Bildformaten liefern [Ha, SBG<sup>+</sup>]. Neben den von ERS-1/2 bekannten Image- und Wave-Mode (Imagettes/Vignettes bei ENVISAT im Abstand 100 km anstelle von 200 km bei den ERS-1/2-Satelliten und in zwei alternierenden Antennenneigungen) wird es ScanSar-Modes und einen Mode für zweifache Polarisation geben. In den Standardbildprodukten werden die Bildpunkte erneut einen Abstand von 12.5 m bei nomineller Auflösung von etwa 30 × 30 m<sup>2</sup> haben. In einem Medium-Resolution-Bild ist der Pixelabstand 75 m (Auflösung

<sup>7</sup> 1 Megabaud = 2<sup>20</sup> Bits/Sekunde.

150 m), im Browse-Bild 225 m oder ca. 1000 m (je nach Abbildungsmoden). Tabelle 2.5 gibt einen Überblick über Parameter von ENVISAT, in Tabelle 2.6 sind die Abbildungsmoden zusammengestellt. Fotos und Zeichnungen von ENVISAT sind in Abbildung 2.7 zu finden.

Nach mehrfachen Startverschiebungen ist der Start von ENVISAT derzeit für Anfang Oktober 2001 geplant.

### 2.3.3 SAR-Sensoren auf anderen Satelliten

Neben den ERS-1/2-Satelliten und ENVISAT sind eine ganze Reihe weiterer Satelliten mit SAR-Sensoren ausgestattet. In Tabelle 2.7 ist eine Auswahl dieser Satelliten<sup>8</sup> mit einigen weiteren Informationen zusammengestellt. Einige von ihnen sind bereits nicht mehr im Betrieb (z.B. SEASAT und ERS-1), andere sind noch gar nicht gestartet.

Beim Cartwheel [RPTM] handelt es sich um eine Reihe von (mind. 3 gemeinsam zu startenden) Kleinstsatelliten, die mit passiver SAR-Antenne (nur Empfang) auf annähernd gleichem Orbit hinter einem SAR-Satelliten (ENVISAT, RADARSAT-2 oder ALOS) herfliegen und dessen Signal auffangen. Ihr Orbit ist so gewählt, dass sie, bei gleicher Umlaufzeit wie der große Satellit und geringfügig anderer Bahnexzentrizität, etwa 50–100 km hinter diesem relativ zu dessen Bahn auf einer kleinen Ellipse (Halbachsen von einigen Kilometern Länge) kreisen. Dadurch soll besonders kostengünstig Interferometrie betrieben werden.

Auch zur Planetenforschung wurden und werden SAR-Satelliten eingesetzt. So wurde beispielsweise die komplette Venusoberfläche mittels einer SAR-Antenne auf dem Satelliten Magellan<sup>9</sup> in Venusumlaufbahn abgebildet. Auch der Saturnmond Titan soll von einer Sonde namens Cassini<sup>10</sup>, die sich derzeit auf dem Weg dorthin befindet, mittels SAR und Radar-Altimeter untersucht werden (vergleiche Abbildung 2.8). Weiter sind für unseren Nachbarn Mars entsprechende Missionen geplant.

### 2.3.4 SAR-Sensoren bei Space Shuttle-Missionen

In den beiden letzten Jahrzehnten wurden mehrere Missionen des amerikanischen Space Shuttles dem Thema SAR gewidmet. Dazu wurden ein oder mehrere SAR-Sensoren in der Ladebucht des Space Shuttles untergebracht. Mehrere dieser Missionen liefen unter deutscher Beteiligung ab (in Deutschland hergestellte SAR-Sensoren, deutsche Wissenschaftsastronauten an Bord und Prozessierung der Radardaten am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)). Tabelle 2.8 gibt einen Überblick über die Missionen

<sup>8</sup> Weitere Informationen zu den Satelliten finden sich z.B. in [Kra, Wi, Ep18, Nmql, Nmse, Dim, Enet, Sref]. Zur Namensgebung: JERS=Japanese Earth Resource Satellite, LightSAR=Lightweight Synthetic Aperture Radar.

<sup>9</sup> USA, Start: 5.5.1989, Ankunft: 10.8.1990.

<sup>10</sup> NASA/ESA, Start: 15.10.1997, Ankunft: 2004.



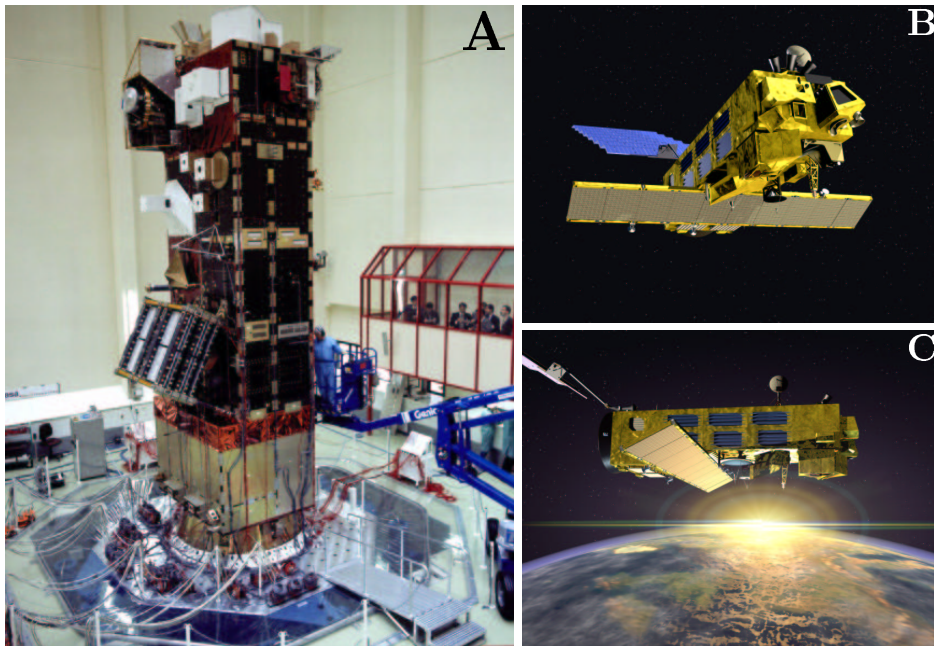


Abbildung 2.7: ENVISAT bei der Fertigung (A) und schematisch im Einsatz (B, C).

Mode	Größe/ Breite	Auflösung	Polarisat.	Antennen- neigungen	Looks
Wave	$5 \times 5 \text{ km}^2$	$10 \times 10 \text{ m}^2$	VV od. HH	$\binom{7}{2}$	1
Image	56–105 km	$28 \times 28 \text{ m}^2$	VV od. HH	7	$> 3.9$ (1–80)
Alternating Polarisation	56–105 km	$29 \times 30 \text{ m}^2$	VV/HH, HH/HV od. VV/VH	7	$> 1.9$ (1–75)
Wide Swath	405 km	$150 \times 150 \text{ m}^2$	VV od. HH	1	$\approx 11.5$
Global Monitoring	405 km	$950 \times 980 \text{ m}^2$	VV od. HH	1	$\approx 7-9$

**Tabelle 2.6:** Abbildungsmoden von ENVISAT. Insgesamt werden 16 verschiedene Bildprodukte mit verschiedenen Auflösungen, Pixelabständen und Looks realisiert (Je 5 in Image und Alternating Polarisation, je 2 in den anderen Modes. In jedem Mode gibt es ein niedrig aufgelöstes ‘Browse’-Format zur Schnellübersicht, in Image und Alternating Polarisation des weiteren Precision-, Single-Look-Complex-, Geocoded- und Medium-Resolution- Bilder. Die Geometrien der Bildprodukte sind z.B. in [Ha] zusammengestellt).

aus diesem Zeitraum, Abbildung 2.9 stellt die dazugehörigen Missionslogos zusammen.

SIR-A und SIR-B waren Experimente, die als Teil der Payloads OSTA-1 und OSTA-3 an Bord der Missionen 2 (STS-2) und 13 (STS-41-g) durch-

Satellit	Radar-Band	Behörde/Land	Masse	Mission
SEASAT	L	NASA/USA	2300 Kg	27. 6.1978–10.10.1978
COSMOS 1870	S	GUS	18550 Kg	25. 7.1987–30. 7.1989
ALMAZ-1	S	GUS	18550 Kg	31. 3.1991–17.10.1992
ERS-1	C	ESA/EU	2384 Kg	17. 7.1991–10. 3.2000
JERS-1	L	NASDA/Japan	1340 Kg	11. 2.1992–12.10.1998
ERS-2	C	ESA/EU	2516 Kg	21. 4.1995– ≈2001
RADARSAT-1	C	Canada	2713 Kg	4.11.1995– ≈2002
(ALMAZ-1B	P,S,X	GUS	18550 Kg	Start 1998 geplant)
ENVISAT	C	ESA/EU	8211 Kg	6'2001– ≈2006
RADAR-1	?	NASA/USA		≈2001?
ALOS	L	Japan	≈ 3900 Kg	2'2002– ≈2006
RADARSAT-2	C	Canada		2002– ≈2009
LightSAR	L,(C od. X)	NASA/USA		≈2002 (5 Jahre)
TerraSAR	L,C	DLR/Deutschl.		≈2004
Cartwheel	(L, C od. X)	Frankreich		≈2004 (1½ Jahre)
BIOSAR	P	ESA/NASA		?? (2 Jahre)
SIDUSS	(L od. C) 2 Sat. Interferom.	Japan		??

Tabelle 2.7: Einige Satelliten mit SAR-Sensoren.



Abbildung 2.8: Der Satellit Cassini und sein SAR-Sensor.

geführt wurden. Dabei wurden SAR-Bilder der Erdoberfläche aufgenommen. Bemerkenswert ist, dass SAR bereits bei der zweiten Space Shuttle Mission als Experiment Verwendung fand (die allererste Mission diente lediglich dem Systemtest des Space Shuttles).

Die SRL-1-Mission hatte neben dem amerikanischen SIR-C-Sensor (L- und C-Band) auch eine deutsch-italienische X-Band SAR-Antenne (X-SAR) an Bord, die von DARA (Deutsche Agentur für Raumfahrtangelegenheiten) und ASI (Agenzia Spaziale Italiana, engl. *Italian Space Agency*) entwickelt worden war. Dadurch wurden erstmals multispektrale (‘dreifarbig’) SAR-

Mission/ Experiment	Shuttle (Flug)	Radar-Band	Flug
2 SIR-A	Columbia (2)	L	12.11., 10 <sup>09</sup> –14.11.1981, 13 <sup>23</sup>
13 SIR-B	Challenger (6)	L	5.10., 7 <sup>03</sup> –13.10.1984, 12 <sup>26</sup>
62 SRL-1	Endeavour (6)	L,C,X	9.4, 7 <sup>05</sup> –20. 4.1994, 9 <sup>54</sup>
65 SRL-2	Endeavour (7)	L,C,X	30.9, 7 <sup>16</sup> –11.10.1994, 10 <sup>02</sup>
97 SRTM	Endeavour (14)	C,X	11.2., 12 <sup>43</sup> –22. 2.2000, 6 <sup>22</sup>

**Tabelle 2.8:** Space Shuttle Missionen mit SAR-Sensoren. Die Zeitangaben beziehen sich auf die Zeitzone des jeweiligen Start-/Landeortes.



**Abbildung 2.9:** Logos der Space Shuttle Missionen mit SAR-Sensoren: SIR-A (B), SIR-B (C), SRL-1 (D), SRL-2 (E) und SRTM (F).

Bilder ermöglicht. Es wurden etwa 20% der Erdoberfläche auf ca. 400 Bildern aufgenommen. Die SRL-2-Mission erlaubte einen Vergleich der Vegetation zu einer anderen Jahreszeit. Tabelle 2.9 gibt Parameter der einzelnen Bänder wieder. Näheres zu diesen beiden Missionen kann auch [Xsar] entnommen werden.

SAR-Interferometrie, eine Technik, die im All bereits während der Tandemflugphase der beiden ERS-1/2-Satelliten (1995–2000) erprobt wurde, war das Thema der SRTM-Mission. Interferometrie erlaubt es, durch die der Laufzeit-Differenz entsprechenden Phasenverschiebung des SAR-Signals zwischen 2 versetzt fliegenden SAR-Sensoren eine Höheninformation der aufgezeichneten ‘Stereo’-SAR-Bilder zu gewinnen (vgl. auch Logo in Abb. 2.9 F, näheres dazu in Abschnitt 7.3.1). Aus der Ladebucht des Space Shuttle wurde während der SRTM-Mission ein 60 Meter langer Mast mit einem zweiten SAR-Empfänger ausgefahren. In der Ladebucht befand sich die umgerüstete Antenne der SRL-1/2-Missionen. Die L-Band Antenne war entfernt worden und an ihre Stelle trat ein Lagemeßgerät für Shuttle und Mast. Bei der SRTM-Mission wurden in einer Zusammenarbeit von NASA, DLR, NIMA (National Image and Mapping Agency, USA) und ASI ein Großteil<sup>11</sup> der Landmassen der Erde im Bereich zwischen den Breitengraden 56° S und 60° N aufgezeichnet. Die Daten entsprechen nahezu 1 Billion Messungen der

<sup>11</sup> Im C-Band wurden etwa 99.94 % der Landmasse zwischen den Breitengraden 56° S und 60° N vermessen, weit über 90 % sogar zwei- oder mehrfach. Im X-Band etwa 50 % (zum Teil mehrfach). Die wegen geringfügiger Verkürzung der Mission nicht vermessenen 0.6 % sind alles terrestrisch gut vermessene Gegenden der Vereinigten Staaten.

Bezeichnung	Formel	Wert		
		X-Band	C-Band	L-Band
Antennenlänge	$l_A$	12 m	12 m	12 m
Antennenbreite	$b_A$	0.4 m	0.7 m	2.95 m
Range-Ausleuchtung	$d_R$	15–45 km	10–70 km	10–70 km
Bahnhöhe	$h_S$	225 km	225 km	225 km
Antennenneigung	$\theta_0$	15–55°	15–55°	15–55°
mittl. Range-Entfern.	$\frac{h_S}{\cos \theta_0}$	233–392 km	233–392 km	233–392 km
Range-Offset	$D_R$	60–321 km	60–321 km	60–321 km
Range-Pulsgehw.	$\frac{c}{\sin \theta_0}$	$0.8\text{--}2.5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$0.8\text{--}2.5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$0.8\text{--}2.5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Radar-Trägerfrequenz	$\nu_0$	9.6 GHz	5.3 GHz	1.25 GHz
Radar-Wellenlänge	$\lambda_0$	3.1 cm	5.65 cm	24 cm
Polarisation		VV	alle	alle
Datenrate		45 MBd	45 MBd	45 MBd

**Tabelle 2.9:** Parameter der SRL-1/2 Mission.

Bezeichnung	Formel	Wert	
		X-Band	C-Band
Antennenlänge	$l_A$	12 m	12 m
Antennenbreite	$b_A$	40 cm	70 cm
Bahnhöhe	$h_S$	233 km	233 km
Antennenneigung	$\theta_0$	45°	45°
Radar-Trägerfrequenz	$\nu_0$	9.6 GHz	5.3 GHz
Radar-Wellenlänge	$\lambda_0$	3.1 cm	5.65 cm
Aufzeichnungs-Datenrate		90 MBd	180 MBd
Downlink Datenrate		45 MBd	45 MBd
Antennenmasse		336 kg	13 t
Szenen		367	764
Bänderzahl		122	208
Datenmenge		3.6TB	8.6TB
Landabdeckung		$64 \cdot 10^6 \text{ km}^2$	$119 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

**Tabelle 2.10:** Parameter der SRTM Mission.

Topographie. Insgesamt wurden über 12 TB<sup>12</sup> an Daten gesammelt.

Einige Parameter der SRTM-Mission sind in Tabelle 2.10 zusammengestellt. Weitere Informationen können [Wer, RMK<sup>+</sup>] sowie den jeweiligen Internetseiten der beteiligten Organisationen entnommen werden [Nasa, Dlr]. Bereits wenige Monate nach der SRTM-Mission wurde diese als wohl eine der erfolgreichsten Missionen des gesamten Space Shuttle-Programms bezeichnet.

<sup>12</sup> TeraByte, 1 TB = 2<sup>40</sup> Bytes = 1 099 511 627 776 Bytes = 1024 GB.



**Abbildung 2.10:** Flugzeuggestützter SAR-Sensor der Firma AeroSensing (X- oder P-Band, interferometrisch). **A:** Zwei der drei SAR-Antennen; die dritte ist Backbordseitig angebracht. **B:** Die aus dem Flugzeuggestell ausgebaute Steuer- und Aufnahmeelektronik.

### 2.3.5 SAR in Flugzeugen bei DLR und AeroSensing

Die DLR betreibt zu Forschungszwecken einen multispektralen und multipolarisierten SAR-Sensor (E-SAR, 'experimentelles' SAR) an Bord eines Flugzeuges vom Typ Dornier DO 228 [HMBS]. Je nach Aufgabenstellung können Sensoren aus P-, L-, S-, C- oder X-Band, teilweise in mehrfacher Polarisation geflogen werden. Nominale Flughöhe ist 3600 m.

Auch die Firma AeroSensing Radarsysteme GmbH, eine Ausgründung des DLR mit Sitz in Oberpfaffenhofen, betreibt einen flugzeuggestützten SAR-Sensor im X- und P-Band bei unterschiedlichen Flughöhen. Verfolgung der Flugbahn mittels GPS<sup>13</sup>-Empfängern und INS<sup>14</sup>-Sensoren erlaubt die Erstellung von SAR-Bildern auch bei Abweichungen von der geplanten Flugbahn. Abbildung 2.10 zeigt diesen Flugzeug-SAR-Sensor.

AeroSensing ist spezialisiert auf die Erstellung von hochaufgelösten Höhenmodellen durch SAR-Interferometrie (vgl. dazu auch Tabelle 7.3.1).

### 2.3.6 Weitere Einsatzmöglichkeiten von SAR-Sensoren

Auch in Labors und auf Fahrzeugen werden SAR-Sensoren eingesetzt. Dies kann z.B. der Materialuntersuchung oder auch der Modellierung der SAR-Abbildungsmechanismen dienen [MBB<sup>+</sup>]. Ferner stellt ROSAR [KsW] eine Möglichkeit in Entwicklung dar, Helikopterpiloten bei schlechten Sichtverhältnissen sichere Navigation zu ermöglichen.

<sup>13</sup> Global Positioning System, ein satellitenbasiertes Navigationssystem des amerikanischen Militärs.

<sup>14</sup> Inertial Navigation System, vermisst Flugzeug-Drehwinkel.

## Kapitel 3

# Ein Algorithmus zur Extraktion von Wasserstandslinien aus SAR-Bildern für die Bestimmung der Bodentopographie

**Z**ENTRALES Resultat der vorliegenden Arbeit ist der in diesem Abschnitt erklärte Wavelet-basierte Algorithmus, der eine vollautomatische Extraktion von Wasserstandslinien aus SAR-Bildern einer Küstenregion ermöglicht. Benötigte Parameter der einzelnen Schritte wurden heuristisch bestimmt. Der wissenschaftlichen Öffentlichkeit wurde dieser Algorithmus sowie einige der in Kapitel 4 und Abschnitt 5.1 befindlichen Tests und Interpretationen bereits in einer Publikation in den IEEE-GRS transactions vorgestellt [NRL]. Teile des Algorithmus (Snake und die an die Extraktion anschließende Anwendung der Topographieinterpolation) wurden in Zusammenarbeit mit Kollegen am DLR entwickelt.

Im Folgenden wird zunächst ein kurzer Überblick über die einzelnen Schritte des Extraktionsalgorithmus gegeben (Abschnitt 3.1). Darauf werden die einzelnen Schritte im Detail erklärt (Abschnitte 3.2–3.6). Abschließend werden in Abschnitt 3.7 Anwendungen wie die Topographieinterpolation aufgezeigt. Weitere Anwendungsmöglichkeiten sind in [NLS] zu finden.

### 3.1 Überblick über den Küstenlinienextraktionsalgorithmus

Einen Überblick der einzelnen Schritte des in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmus gibt Abbildung 3.1. Dort werden auch die Zwischenergebnisse anhand von Ausschnitten eines ERS-2-SAR-Bildes vom 14. März 1996 (Orbit 04700, Frame 2511, siehe auch Tabelle D.2) des *Elb*-Ästuars gezeigt. Auch die heuristisch bestimmten Parameter sind jeweils angegeben.

*Eingabe* in den Algorithmus ist ein SAR-Amplitudendichtebild (oder ein Intensitätsdichtebild). Aus den bei ERS-1/2 ausgelieferten Amplitudenbildern muss also zunächst der punktweise Logarithmus gezogen werden, was das Speckle-Rauschen in ein additives Rauschen transformiert, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben wurde.

*Ausgabe* ist eine Folge von Kurven, die die Wasserstandslinie entlang der Küste und der vorgelagerten Inseln beschreiben. Diese werden in Form von Koordinatenlisten in Bildpunktkoordinaten ausgegeben, die bei geocodierten SAR-Bildern (z.B. ERS-1/2-GEC-Produkt, vgl. Abschnitt 2.3) leicht in geographische Koordinaten umgerechnet werden können.

Die einzelnen *Schritte* sind zunächst eine (diskrete) dyadische Wavelet-Zerlegung des Bildes (Abschnitt 3.2), anschließend eine Schwellwertbildung zur Kantenfindung (Abschnitt 3.3) und ein Postprocessing bestehend aus Blocktracing (Absch. 3.4), lokaler Kantenauswahl (3.5) und aktiver Konturierung (kurz ‘Snake’, Abschnitt 3.6).

### 3.2 Wavelet-Zerlegung

Entsprechend der diskreten dyadischen Wavelet-Transformation (siehe Abschnitt 1.2.4) werden die Wavelet-Koeffizienten auf den Skalen  $a = 2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  berechnet. Der Translationsparameter  $b$  nimmt also auf allen Skalen sämtliche Werte des Definitionsbereiches  $\mathbb{D}$  des zugrunde liegenden SAR-Amplitudendichtebildes an ( $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}^2$  Rechteck).

Streng genommen ist zu beachten, dass die Wavelet-Filter zum Spline-Wavelet  $\psi_1$  und der zugehörigen Skalierungsfunktion  $\phi_1$  von gerader Länge sind. Da diese also bei jeder Filterung gegenüber der Symmetrie des kontinuierlichen Splines um einen halben Bildpunkt verschoben sind,<sup>1</sup> muss dies bei der Wavelet-Transformierten korrigiert werden. Die Wavelet-Koeffizientenbilder sind also genau genommen um eine Zeile und eine Spalte größer als das SAR-Bild und dabei um je einen halben Pixel versetzt ( $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D} + \{(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})^\top\}$ ).<sup>2</sup> Wichtig ist das vor allem bei der genauen Lagebestimmung der gefundenen Küstenlinie und deren Qualitätsbeurteilung,

<sup>1</sup> Vergleiche dazu auch Fußnote 9 auf Seite 23.

<sup>2</sup> Eine Kante entsteht ja streng genommen auch zwischen zwei Punkten unterschiedlicher Intensität.

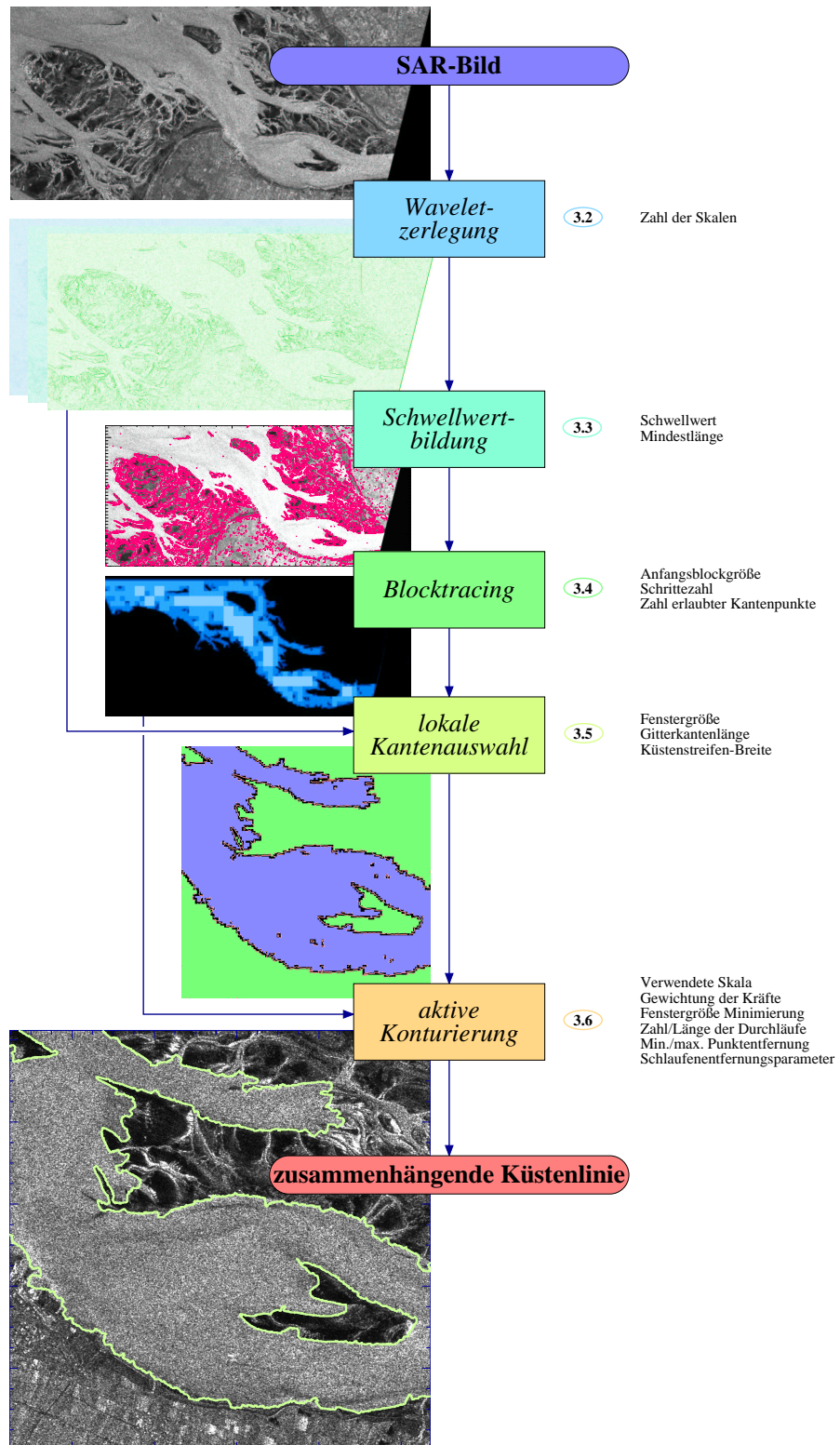


Abbildung 3.1: Die Schritte des Küstenlinienextraktionsalgorithmus.



wie sie in Kapitel 4 geschieht.

Die Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten werden nun entsprechend des Vorschlages in [MH] längs der (nicht orientierten) Richtung<sup>3</sup>

$$\beta_{a,b} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathcal{W}_{\Psi_2}f(a,b)}{\mathcal{W}_{\Psi_1}f(a,b)}\right) & \forall \mathcal{W}_{\Psi_1}f(a,b) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \mathcal{W}_{\Psi_1}f(a,b) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

von

$$w_{a,b} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{\Psi_1}f(a,b) \\ \mathcal{W}_{\Psi_2}f(a,b) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

berechnet (vgl. dazu auch (1.46)). Ist also  $|\beta_{a,b}| < \frac{\pi}{4}$ , so wird horizontal maximiert, ansonsten vertikal. Ein Punkt gilt als Betragsmaximum, wenn

- mindestens auf einer Seite der Minimierungsrichtung ein Punkt niedrigeren Betrages ( $\|w_{a,b}\|_2$ ) liegt *und*
- auf keiner Seite sofort oder nach endlich vielen Punkten gleichen Betrages ein Punkt höheren Betrages liegt.

Aus den Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten kann entsprechend Satz 2 die LIPSCHITZ-Regularität von  $f$  bei  $b = x_0$  geschätzt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Ungleichung (1.46) eine Abfallbedingung für  $|a| \rightarrow 0$  liefert: Die Gleichungen (5.1) und (5.2) sowie Anhang A.4 zeigen verschiedene Fälle, die es — z.T. nur für kleine  $a$  — erlauben, in der Ungleichung (1.46) das ‘ $\leq$ ’ durch ‘ $=$ ’ oder ‘ $\approx$ ’ zu ersetzen.

Für kleine  $|a|$  lässt sich also unter der Annahme der scharfen Ungleichung

$$\|\mathcal{W}_{\Psi}f\| \approx Ca^{\alpha+\frac{d}{2}} \quad (3.3)$$

für  $f, \phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  längs der Maxima-Linie  $b(a)$  nähern als

$$\frac{\|w_{a_1, b(a_1)}\|_2}{\|w_{a_2, b(a_2)}\|_2} \approx \frac{Ca_1^{\alpha+1}}{Ca_2^{\alpha+1}} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\alpha+1}. \quad (3.4)$$

Im diskreten Fall ist hierbei noch zu beachten, dass zum einen  $w_{a,b}$  nur auf einigen  $a = 2^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  berechnet wurde (vgl. (1.41)), zum anderen die eindeutige Zuordnung der Maxima über die Skalen hinweg wegen der für  $j \rightarrow 0$  stark steigenden Zahl der Maxima schwierig ist. Betrachtet man daher für alle  $j$ , auf denen ein Betragsmaximum bekannt ist

$$\log_2 \|w_{2^j, b(2^j)}\|_2 \approx (\alpha+1)j + \log_2 C, \quad (3.5)$$

so erhält man eine Abschätzung für die LIPSCHITZ-Regularität  $\alpha$  als um 1 verminderte Steigung einer Ausgleichsgeraden durch die Punkte  $(j, \log_2 \|w_{2^j, b(2^j)}\|_2)$ . Entsprechende Routinen finden sich im Anhang C.1.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Zur Interpretation von  $w_{a,b}$  als Normalenvektor auf die Kante vergleiche Anhang A.4.

<sup>4</sup> Die dort abgedruckten IDL-Routinen `lipcalc` (Algorithmus 4) und `lipregression` (Algorithmus 5) erledigen die Berechnungen gemäß (3.4) und (3.5).

### 3.3 Schwellwertbildung

Es existieren zwei Varianten des Algorithmus in Bezug auf die Schwellwertbildung. In beiden Fällen ist das Resultat ein Bild mit den stärksten (gefundenen) Kanten des zugrunde liegenden SAR-Bildes.

Entsprechend der Wavelet-Theorie betrachtet man diejenigen Orte als Kanten, bei denen die Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten eine gemäß (3.5) genügend hohe LIPSCHITZ-Regularität ergeben. Aus Speicherplatz und Rechenzeitgründen ist es jedoch bei vielen Bildern ausreichend, eine Schwellwertbildung direkt in den Wavelet-Koeffizienten einer höheren Skala (z.B.  $a = 2^2$ ) vorzunehmen. Die Ergebnisse sind qualitativ im Wesentlichen vergleichbar, wie Kapitel 4 zeigen wird.

Der Betrag des Schwellwertes kann heuristisch oder gemäß den in Kapitel 5 geführten Überlegungen bestimmt werden.

### 3.4 Blocktracing

In der Struktur des aus der Schwellwertbildung resultierenden Kantenbildes lässt sich Folgendes erkennen: Wegen der Homogenität des Wassers sind auf den meisten SAR-Bildern dort kaum Strukturen zu finden. Die meisten Kanten finden sich also auf dem Land und an der (zu findenden) Land-Wasser-Grenze.

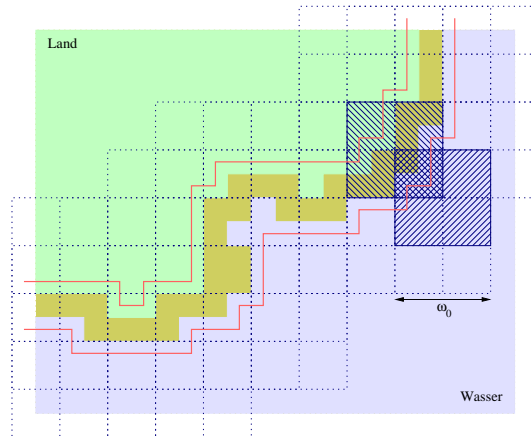
Das Blocktracing ist nun ein speziell für diesen Algorithmus entwickeltes Segmentierungsverfahren in homogene Wasserregionen, einen schmalen Küstenstreifen und kantenreiches Land. Der Ansatz ist eine 'region growing'-Variante, die auf der Ausschöpfungstechnik beruht, die in einigen topologischen Beweisen auftaucht.

Die Wasserregionen werden beginnend mit großen (kantenfreien) Quadraten ( $\rho_0 \times \rho_0$  Bildpunkte, z.B.  $\rho_0 \in \{128, 192\}$ ) markiert. Die Ausschöpfung markiert nun für die nächst kleinere Quadratgröße  $\rho_{k+1} = \frac{\rho_k}{2}$  alle Quadrate, die

- nur wenige (z.B.  $\nu = 20$ ) Kantenpunkte enthalten *und*
- direkt (horizontal oder vertikal) an ein bereits markiertes (größeres oder gleich großes) Quadrat anschließen.

Das geschieht solange, bis alle Quadrate markiert sind, die diese beiden Bedingungen erfüllen. Danach wird das Quadrat erneut verkleinert ( $k \rightarrow k+1$ ). Die Quadratgitter sind parallel und enthalten stets alle Eckpunkte der vorhergehenden Gitter. Die nicht markierten Quadrate werden also geviertelt, was in der Bildverarbeitung oft als Quadtree-Segmentierung bezeichnet wird.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Es werden aber keine aus der Informatik bekannten Quadtree-Datenstrukturen verwendet, vgl. [Icaen].



**Abbildung 3.2:** Lokale Kantenauswahl: Das  $\xi_0 \times \xi_0$ -Gitter für die Kantenauswahl, gezeichnet auf ein gegebenes Blocktracing-Ergebnis (Küstenregion in gelb). Es werden nur Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten berücksichtigt, die innerhalb der beiden roten Linien liegen. Zwei der  $\omega_0 \times \omega_0$ -Fenster wurden schraffiert.

Die Iteration wird mit einer geeigneten Quadratgröße (z.B.  $\rho_K \times \rho_K = 8 \times 8$ ) beendet, die mit der dem Kantenbild zugrunde liegenden Wavelet-Skala zusammenhängt. Dies verhindert, dass das Blocktracing durch schmale Lücken in der Küstenlinie (entstanden durch zu schwachen Kontrast oder zu schmale Priele, die den Glättungseigenschaften des Wavelets oder der Bildauflösung zum Opfer fallen) in die Landregionen vordringt (vgl. auch Abschnitt 6.2.2).

Abschließend werden noch auf der feinsten verwendeten Quadratgröße all diejenigen Quadrate als Land markiert, die nicht horizontal, vertikal oder diagonal an das Wasser angrenzen. So entsteht ein mindestens  $\rho_K$  Pixel großer Streifen, der als grobe Lage der Wasserstandslinie („Küstenregion“) interpretiert wird.

Die Quellcodes zum Blocktracing in der Programmiersprache IDL sind im Anhang C.1 als Algorithmen 1 bis 3 zu finden.

### 3.5 Lokale Kantenauswahl

Basierend auf dem Ergebnis des Blocktracing-Algorithmus werden nun Kanten innerhalb der groben „Küstenregion“ ausgewählt. Dies geschieht erneut unter Heranziehung der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten. Dazu werden bei diesen zunächst alle Kanten gelöscht, die mehr als  $\frac{\rho_K}{2}$  Bildpunkte von der ‚Küstenregion‘ entfernt sind. Anschließend wird — entsprechend ihrer Stärke und Länge — die beste Kante ausgewählt, je eine Kante pro Fenster längs überlappender Fenster (z.B.  $\omega_0 \times \omega_0 = 32 \times 32$ -Fenster längs eines  $\xi_0 \times \xi_0 = 16 \times 16$  Gitters). Diese Vorgehensweise wird in Abbildung 3.2 verdeutlicht.

Die Entscheidung für die ‚beste‘ Kante geschieht nun erneut nach zwei

unterschiedlichen Strategien, abhängig davon, ob für die Schwellwertbildung die LIPSCHITZ-Regularität berechnet wurde (vgl. Abschnitt 3.3). Ist dies der Fall, so gilt als beste Kante diejenige mit höchster mittlerer LIPSCHITZ-Regularität längs all ihrer Punkte innerhalb des  $\omega_0 \times \omega_0$ -Fensters.

Wurde die Schwellwertbildung hingegen auf einer einzelnen Skala  $a$  durchgeführt, so wird diese auch zur lokalen Kantenauswahl verwendet. Als Maß zählt hier die Gesamtenergie in den Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten auf dieser Skala längs der Kante (mit Kantepunkten  $b_1, \dots, b_k$  innerhalb des  $\omega_0 \times \omega_0$ -Fensters)

$$\nu = \sum_{j=1}^k \|w_{a,b_k}\|_2. \quad (3.6)$$

Gewählt wird die Kante mit maximalem  $\nu$  je Fenster. Neben der Kantenstärke gemäß Skala  $a$  geht hier auch ihre Länge mit ein.

### 3.6 Aktive Konturierung

Die bisher erhaltenen Kanten bilden noch keine zusammenhängende Wasserstandslinie. Deswegen wird abschließend noch eine aktive Konturierung (kurz ‘Snake’) durchgeführt. Sie folgt Ideen aus [WS] und [MD]. Neu ist hier, dass die wasserseitige Blocktracing-Grenze der “Küstenregion” zur Initialisierung der Snake verwendet und diese so beschleunigt wird.

Die Snake wird durch eine geschlossene<sup>6</sup> Kurve  $v : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dargestellt. Innere Energien der Kurve (Kurvenstärke oder Krümmung) und äußere Energien aus Zwangskräften (Fixierung an und Anziehung durch gefundene Kanten sowie eine Tendenz zur Flächenminimierung im Inneren) werden in ihrer (gewichteten) Summe über die Länge der Kurve integriert (bzw. im diskreten summiert). Die Kurve wird nun iterativ so verändert, dass sich eine Minimierung der Energie ergibt. Sie schließt stets eine Insel oder ein Landgebiet (mit den entsprechenden Bildrändern) ein.

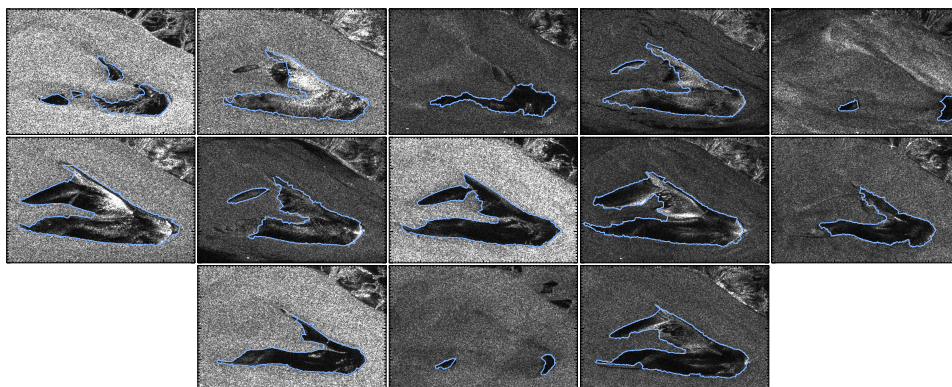
Zwischendurch ist es nach einer gewissen Zahl von Iterationen notwendig,

- zu weite bzw. zu geringe Entfernungen von Kurvenpunkten durch Auffüllen bzw. Löschen von Punkten zu vermeiden *und*
- kleine Schleifen, die bei fehlerhaft gefundenen Kanten außerhalb entstehen, zu entfernen.

Ergebnis ist, wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, eine Folge von Kurven in Koordinatendarstellung ihrer Kurvenpunkte, die die Wasserstandslinie entlang der Küste und der vorgelagerten Inseln beschreiben. Näheres zur aktiven Konturierung ist in [NRL] zu finden.

---

<sup>6</sup> Landstücke, die an den Bildrand anstoßen, werden mit diesem geschlossen.



**Abbildung 3.3:** Die Sandbank *Medemgrund* mit der gefundenen Wasserstandsline für verschiedene SAR-Bilder aus dem Zeitraum 19.12.1996–25.7.1998.

### 3.7 Anwendungsmöglichkeiten

Eine einfache Einsatzmöglichkeit der gefundenen Wasserstandsline ist beispielsweise das Monitoring von Küstenabschnitten und ihrer Morphodynamik über Jahre hinweg. Im Wattenmeer müssen dazu SAR-Bilder herangezogen werden, die zu Zeitpunkten mit ähnlichem Wasserstand aufgenommen wurden. Ein derartiges Vorgehen zeigt Abbildung 6.7.

Verwendet man umgekehrt Bilder zu möglichst vielen, unterschiedlichen Wasserständen (vgl. Abbildung 3.3), die in einem engen Zeitintervall aufgenommen wurden, so kann mittels der Informationen eines nahegelegenen Pegels und der Annahme, es handle sich in einer geringen Umgebung des Pegels um topographische Isolinien, ein dreidimensionales Profil, eine sogenannte (Unterwasser-)Topographie des Wattenmeers interpoliert werden.<sup>7</sup> Dies stellt die Hauptanwendung und eigentliche Intention bei der Entwicklung des oben genannten Algorithmus dar.

Die Interpolation wurde hier durch gewichtete Mittelung durchgeführt [RLNH], wobei eine GAUSS-Glocke der Halbwertsbreite 100 m und Einflussbereich 200 m verwendet wurde. Das entspricht bei 12.5 m Auflösung

$$\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{8^2} \left(\ln \frac{1}{2}\right)^2\right) \mathbb{1}_{[0,16]}(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (3.7)$$

**Bemerkung:** Ist nicht zu jedem Zeitpunkt ein Pegelstand bekannt (sondern z.B. nur zu Hoch- und Niedrigwasser wie beim Pegel *Cuxhaven*<sup>8</sup>), so kann durch geeignete Modelle des Tidenverlaufs aus diesen der Pegelstand zur Überflugszeit des Satelliten genähert werden [RLNH]. Zu beachten ist, dass der Tidezyklus nur in gröbster Näherung einem Sinusverlauf entspricht. Tatsächlich läuft die Flut bedeutend schneller ein als die Ebbe abläuft.

<sup>7</sup> Zur generellen Problematik dieser Vorgehensweise vergleiche auch Abschnitt 6.3.

<sup>8</sup> vgl. Anhang D.2.

## Kapitel 4

# Qualitätskontrolle des Extraktionsalgorithmus

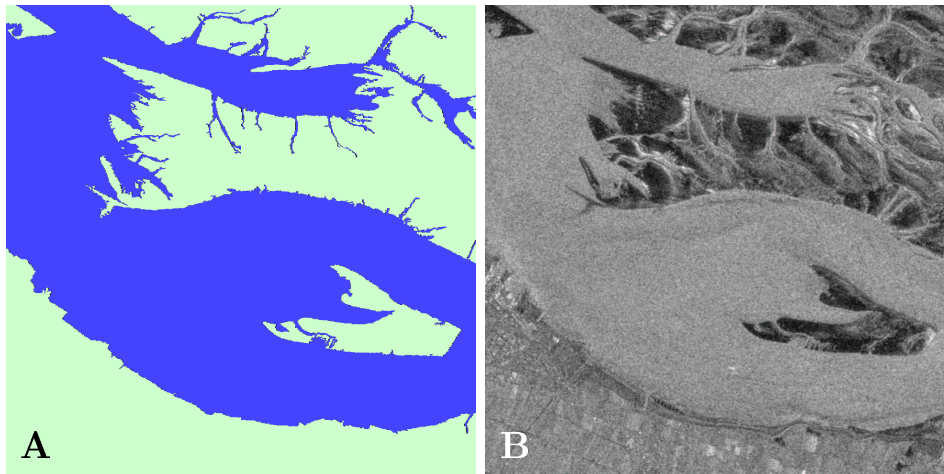
UNTERSUCHUNGEN zur Qualität des in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus werden hier durchgeführt. Ergebnisse der einzelnen Schritte werden — unter anderem — mit einer speziell für diesen Zweck unabhängig manuell erstellten ‘Musterlösung’ (vgl. Abschnitt 4.1) verglichen (Qualitätsbeurteilung in Abschnitt 4.2. Dort findet sich auch eine kurze Anmerkung zur Geschwindigkeit des Algorithmus). Weiter wird aus dem Vergleich der Ergebnisse beider Varianten sowie geeigneten Korrelationsüberlegungen gezeigt, warum bei vielen Bildern auf die Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität verzichtet werden kann und das Heranziehen einer Skala zur Schwellwertbildung genügt (Abschnitt 4.3). Auch die Grenzen des Algorithmus werden aufgezeigt (Abschnitt 4.4). Als Anwendungsergebnis wird eine interpolierte Topographie auf einem kleinen Bildausschnitt gezeigt (Abschnitt 4.5).

Teile dieses Kapitels sind die entsprechenden Ergebnisse aus dem bereits erwähnten Artikel [NRL] aus den IEEE-GRS transactions.

### 4.1 Die Musterlösung

Für Tests des Algorithmus wurde (durch visuelle Begutachtung einzelner Bildpunkte) manuell eine Musterlösung erstellt. Diese klassifiziert einen  $1024 \times 1024$  Pixel großen Bildausschnitt der geokodierten ERS-2-SAR-Szene vom 14. März 1996, 10<sup>26</sup> Uhr UTC des *Elb*-Ästuars (Orbit 04700, Frame 2511, GEC,  $L = 3$  Looks, vergleiche Tabelle D.2) in die Klassen ‘Wasser’ und ‘Land’ (Festland und trockenengefallene Wattflächen).

Im folgenden Abschnitt werden die einzelnen Schritte des Algorithmus mit dieser Musterlösung, die in Abbildung 4.1 gezeigt wird, verglichen. Dabei muss berücksichtigt werden, dass es selbst dem geschulten Auge und mit Vorwissen über die entsprechende Region in manchen Fällen schwierig ist, die genaue Wasserstandslinie zu lokalisieren. Solche Fälle sind beispielswei-



**Abbildung 4.1:** Die Musterlösung (A) und der zugrundeliegende Ausschnitt des SAR-Amplitudendichte-Bildes vom 14.3.1996 (B).

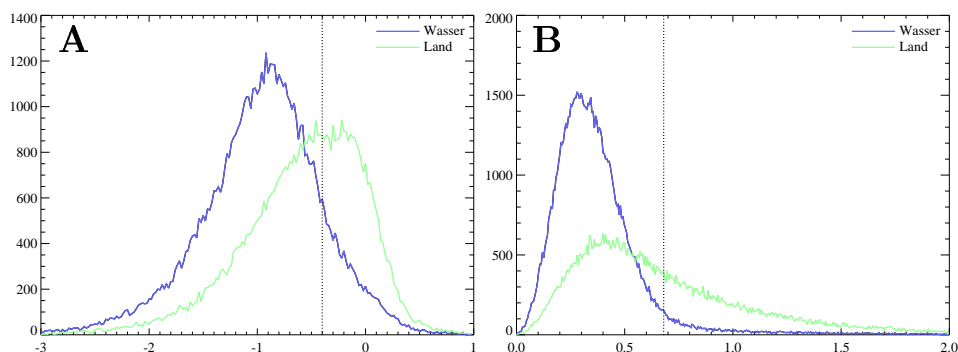
se festzustellen, ob schmale Priele (Wasserabflussrinnen) bereits trockengefallen sind oder ob vorgelagerte Streifen Sandbänke oder Strömungskanten wegen geringer Wassertiefe sind. Die Tests sind also im Rahmen dieser Ungenauigkeiten zu verstehen.

## 4.2 Beurteilung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der einzelnen Schritte des Algorithmus werden bereits in den Einzelbildern von Abbildung 3.1 gezeigt. Ihre Qualität im Bezug auf die Musterlösung wird hier überprüft.

In beiden Varianten des Algorithmus (mit und ohne Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität) erhält man ein Bild, das in gewisser Weise die Stärke der auftretenden Kanten und des Rauschens wiedergibt (eben die Regularität bzw. den Wavelet-Koeffizienten auf einer höheren Skala). Betrachtet man die (absoluten) Häufigkeiten einzelner Werte im Histogramm (Abbildung 4.2) für die in der Musterlösung als Land und Wasser markierten Bereiche, so ergibt sich eine Konzentration der höheren Werte auf dem Land. Dort sind also stärkere Strukturen als auf dem Wasser vorhanden.

Nutzt man aus, dass die Werte auf homogenen Wasserflächen wie in Abbildung 4.1 B vorwiegend vom Rauschen kommen, sieht man, dass eine einfache **Schwelwertbildung** eine Trennung der entsprechenden Werte von Rauschen und Kanten erlaubt. Mit Rücksicht auf die Qualität der anschließenden Schritte muss möglichst viel vom entsprechenden Rauschen ausgefiltert werden. Als geeignete Schwellwerte haben sich eine LIPSCHITZ-Regularität von  $t_\alpha = -0.4$  und ein Wert von  $t_w = 0.68$  auf Skala  $a = 2^2$



**Abbildung 4.2:** Histogramme von LIPSCHITZ-Regularitäten (A) und Wavelet-Betragsmaxima der Skala  $a = 2^2$  (B) auf den Regionen der Musterlösung (Wasser bzw. Land).

ergeben, also nicht die Abszissen der Schnittpunkte der Histogramme.<sup>1</sup>

Grund dafür ist das Verhalten des Blocktracing, das bei zu vielen Werten vom Rauschen durch einen zu niedrigen Schwellwert zusätzliche Inseln, zum Teil nahe an der tatsächlichen Küste markiert und diese so aufs Wasser verschiebt. Eine zu hohe Schwellwertwahl hingegen bringt mit dem ‘Durchbrechen’ (s.u.) einen weiteren unerwünschten Nebeneffekt.

Theoretische Überlegungen zur Wahl des Schwellwertes anhand der stochastischen Verteilungen des Speckle-Rauschens sind in Kapitel 5 zu finden.

Vergleicht man das Ergebnis des **Blocktracings** mit der Musterlösung, so gibt sich eine gute Übereinstimmung der Klassifizierung: Was visuell bereits an der Überlagerung sichtbar wird (Abbildung 4.3), verdeutlichen die Fehlerwerte in Tabelle 4.1. Lediglich auf 0.6% (0.1%)<sup>2</sup> der Bildpunkte wird Land fehlerhaft als Wasser interpretiert, 2.6% (2.3%) der Bildpunkte sind Wasser, das vom Blocktracing als Land gesehen wird. Letzteres liegt an schmalen Prielen, die vom Blocktracing nicht verfolgt werden können.<sup>3</sup> 1.0% (0.7%) bzw. 2.6% (1.1%) der Blocks werden als Küstenlinie gefunden, obwohl sie (bzgl. der Musterlösung) nur aus Landpunkten bzw. Wasserpunkten bestehen.

Bei schwachem Kontrast kann es trotz angepasster Schwellwertwahl<sup>4</sup> dazu kommen, dass längere Lücken in den gefundenen Kanten der Küstenlinie vorhanden sind. Das kann dazu führen, dass das Blocktracing auf das Land ‘durchbricht’ und Teile des Landes von hinten her auffüllt. Näheres hierzu ist in den Abschnitten 4.4 und 6.2.2 zu finden.

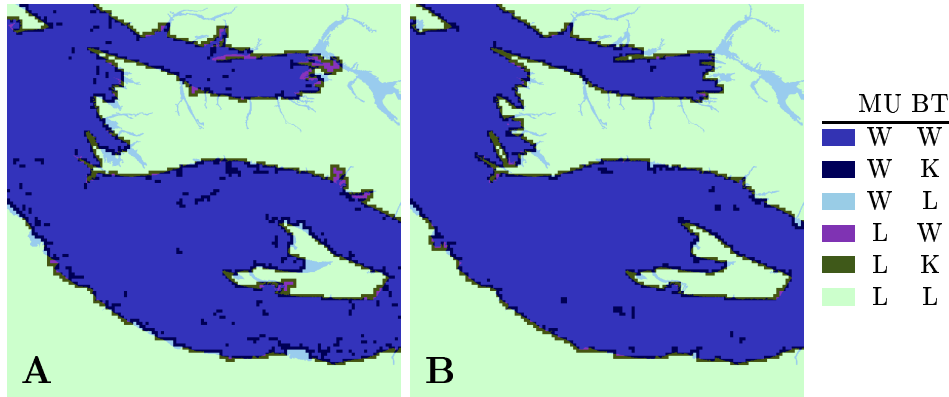
<sup>1</sup> In Abb. 4.2 sind die Schwellwerte als senkrechte, punktierte Linien eingezeichnet.

<sup>2</sup> Die in Klammern angegebenen Werte entsprechen jeweils der Variante ohne Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität.

<sup>3</sup> Dies ist für die Anwendung der Topographiebestimmung in gewissem Rahmen sogar erwünscht, wenn man von einer horizontalen Wasserstandslinie ausgeht, jedoch um die Existenz von Prielen mit starker Steigung wie in Abbildung 6.4 C weiß.

<sup>4</sup> Ein höherer Schwellwert verstärkt dies.





**Abbildung 4.3:** Vergleich des Blocktracing-Ergebnisses (BT) mit der Musterlösung (MU) für die Varianten mit (A) und ohne (B) Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität. W=Wasser, K=Küste, L=Land.

LIPSCHITZ-Regularität berechnet	Blocktracing	Musterlösung				
		in Pixeln		in $8 \times 8$ -Blocks		
		Wasser	Land	Wasser	Land	beides
Ja	Wasser	45.8%	0.6%	44.9%	0.2%	1.2%
	Land	2.6%	43.2%	0.7%	40.3%	4.8%
	Küste	4.7%	3.2%	2.6%	1.0%	4.3%
Nein	Wasser	47.3%	0.1%	46.7%	0.0%	0.7%
	Land	2.3%	43.7%	0.5%	40.8%	4.7%
	Küste	3.5%	3.1%	1.1%	0.7%	4.8%
Summe/Anteil		53.1%	46.9%	48.3%	41.4%	10.3%

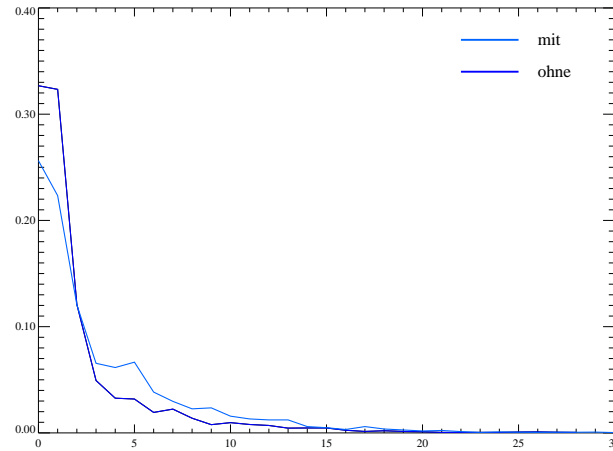
**Tabelle 4.1:** Numerischer Vergleich des Blocktracing-Ergebnisses mit der Musterlösung. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf den Anteil am Gesamtbild. Der tatsächliche Anteil gemäß der Musterlösung ist in der letzten Zeile zu finden. Erläuterungen siehe Text.

Die **lokale Kantenauswahl** wird mit der Musterlösungs-Wasserstandslinie verglichen, die man erhält, wenn man den Differenzenfilter  $[-1, 1]$  auf das Musterlösungs-Bild anwendet.<sup>5</sup> Für jeden bei der lokalen Kantenauswahl gefundenen Punkt  $(x, y)^\top \in \mathbb{Z}^2$  auf einem Wasserstandslinienfragment wird der EUKLIDISCHE Abstand  $d_{(x,y)} = \min_{p \in E} \|p - (x, y)^\top\|_2$  zum nächstgelegenen Punkt der Musterlösungs-Wasserstandslinie  $E \subset \mathbb{Z}^2$  berechnet.<sup>6</sup>

Aus dem Histogramm (hier nicht abgebildet) von  $d$  kann man ersehen, dass die meisten Kantenpunkte einen geringen Fehler von nur wenigen Pixeln haben. Der mittlere Fehler beträgt  $\langle d \rangle = 5.1$  Pixel ( $\langle d \rangle = 6.1$ ). Auf dem Boden entspricht das also 63.7 m bzw. 76.2 m. Vernachlässigt man Ef-

<sup>5</sup> Wegen des rauschfreien Bildes (nur 2 Werte) genügt diese Vorgehensweise. Sie entspricht im übrigen einer Wavelet-Zerlegung bzgl. des HAAR-Wavelets auf Skala  $a = 1$ .

<sup>6</sup> Tatsächlich sind, wie bereits erwähnt, beide Wasserstandslinien um  $\frac{1}{2}$  Pixel verschoben.



**Abbildung 4.4:** Qualität der endgültigen Küstenlinie: Relative Häufigkeit der Fehler in Bildpunkten mit und ohne Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität.

fekte von Schiffen bzw. dem Bildrand ( $d \geq 40$ ), so erhält man den deutlich realistischeren Wert von  $\langle \widetilde{d} \rangle = 3.4$  Pixel ( $\langle \widetilde{d} \rangle = 3.7$ ), d.h. 42.5 m bzw. 46.2 m.

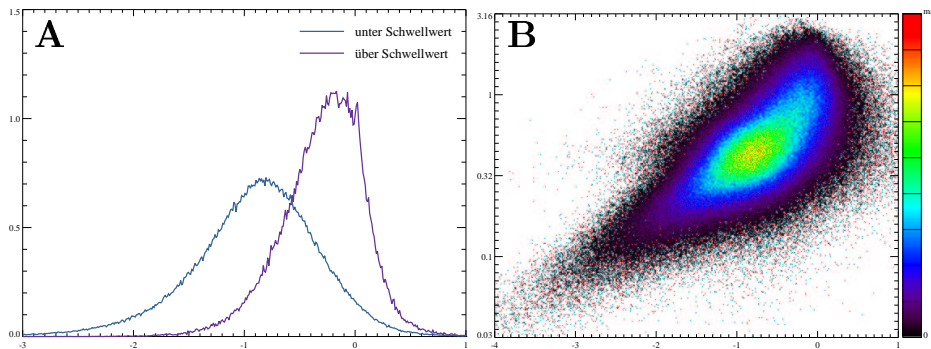
Auch die endgültige Wasserstandslinie als Ausgabe der **aktiven Konturierung** wird mit der Musterlösungs-Wasserstandslinie überprüft. Zuvor werden diejenigen Inseln als Rauscheffekte bzw. von Schiffen bedingt aussortiert, die weniger als 100 Randpunkte auf der gefundenen Küstenlinie besitzen. Verwendet man für die einzelnen Durchläufe der aktiven Konturierung nach und nach über die Skalen verfeinerte Kantenpositionen (vergleiche folgender Abschnitt), so beträgt der mittlere Fehler nun  $\langle d \rangle = 3.7$  Pixel ( $\langle d \rangle = 2.3$ ), also 46.2 m bzw. 28.7 m. Die relative Häufigkeit einzelner Fehlerwerte (auf ganze Pixel gerundet) wird in Abbildung 4.4 gezeigt.

Für die **Topographieinterpolation** überträgt sich dieser Fehler z.B. bei einer Küstensteigung von 1% auf einen mittleren Höhenfehler von 30–50 cm.

Typische **Laufzeiten** für den gesamten Algorithmus auf einer SUN Ultra Enterprise 450 Workstation bei Verwendung eines der Prozessoren liegen im Bereich von einer halben bis einer Stunde<sup>7</sup> für einen typischen Bildausschnitt (ca.  $7 \cdot 10^6$  Bildpunkte also ca.  $\frac{1}{10}$  ERS-1/2-SAR-Vollszene) ohne Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität (Mit dieser ist in etwa mit einer Verdoppelung der Laufzeit zu rechnen). Zu beachten ist, dass die Programme bei weitem nicht auf Rechenzeit optimiert sind, da Zwischenergebnisse zum Teil über den Umweg der Speicherung auf Datenträgern zwischen den einzelnen Programmteilen ausgetauscht werden und diese nicht auf Vermeidung von Mehrfachberechnungen optimiert sind.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Reale Zeiten bei Prozessorauslastungen von 20–25% (knapp Vollast 1 von 4 Prozessoren), ausreichend (4 GB) Arbeitsspeicher.

<sup>8</sup> Durch optimierte Programmierung könnten möglicherweise noch 30–50% gespart wer-



**Abbildung 4.5:** LIPSCHITZ-Regularität und Wavelet-Betragsmaxima im Vergleich. **A:** LIPSCHITZ-Regularitäten für Kanten unterhalb/oberhalb des Schwellwertes im Betragsmaxima-Bild auf Skala  $a = 2^2$ , **B:** Korrelation zwischen LIPSCHITZ-Regularität und Betragsmaxima.

### 4.3 Zur LIPSCHITZ-Regularität

Hier wird noch ein kurzer Vergleich der beiden Varianten des Algorithmus angeführt. Damit kann begründet werden, warum in vielen Fällen die Verwendung von nur einer Skala ausreicht.

Wie die Tests im vorangegangenen Abschnitt gezeigt haben, ist — zumindest auf dem dort verwendeten SAR-Bild — die Verwendung nur einer Skala in einigen Punkten qualitativ besser als die LIPSCHITZ-Regularität. Andererseits widerspricht die Aussage von Satz 2 auf den ersten Blick dieser Vorgehensweise, da ja nur das Abfallverhalten, jedoch nicht ein konstanter Vorfaktor abgeschätzt wird.

Betrachtet man jedoch die LIPSCHITZ-Regularität der Kantenpunkte auf Skala  $a = 2^2$ , je nachdem, ob sie oberhalb oder unterhalb des Schwellwertes  $t_w = 0.68$  bei Verwendung einer einzelnen Skala liegen, so sieht man (vgl. Abbildung 4.5 A), dass durchaus ein Zusammenhang zwischen den Werten auf dieser Skala und den Regularitäten besteht. Die höheren Werte haben tatsächlich auch höhere Regularitäten. Noch deutlicher ist das auf dem Korrelationsplot (Abbildung 4.5 B) zu sehen: Die gemeinsamen relativen Häufigkeiten schmiegen sich gut an eine stetige, monoton wachsende Funktion an. Dies bedeutet (beim Übergang zu einer der gemeinsamen Dichtefunktion) eine starke Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen (vgl. Kapitel 2.2 von [Mk]). Ein Maß für die Stärke der Abhängigkeit ist die Korrelation (vgl. (7.22)), die hier einen Wert von etwa 0.665 annimmt (0 bedeutet unkorreliert, 1 vollständig korreliert, d.h. die gemeinsame Verteilung hat nur auf dem Graphen einer stetigen monotonen Funktion nichtverschwindende Werte).

Zur Verbesserung der Lokalisierung der Kanten (gemäß der möglichen Verschiebung der Betragsmaxima nach Satz 2 innerhalb eines Kegels für steigende Skalen) können in den späteren Schleifendurchläufen der aktiven

---

den. Oben genannte Zahlen sind eher zur groben Einordnung gedacht.

Konturierung auch Betragsmaxima niedrigerer Skala herangezogen werden. Wegen des Rauschens sind diese einander jedoch möglicherweise schwer zuzuordnen (über die Skalen hinweg) und verschlechtern das Ergebnis eher, wie Experimente gezeigt haben (vgl. [NRL]).

#### 4.4 Grenzen des Algorithmus

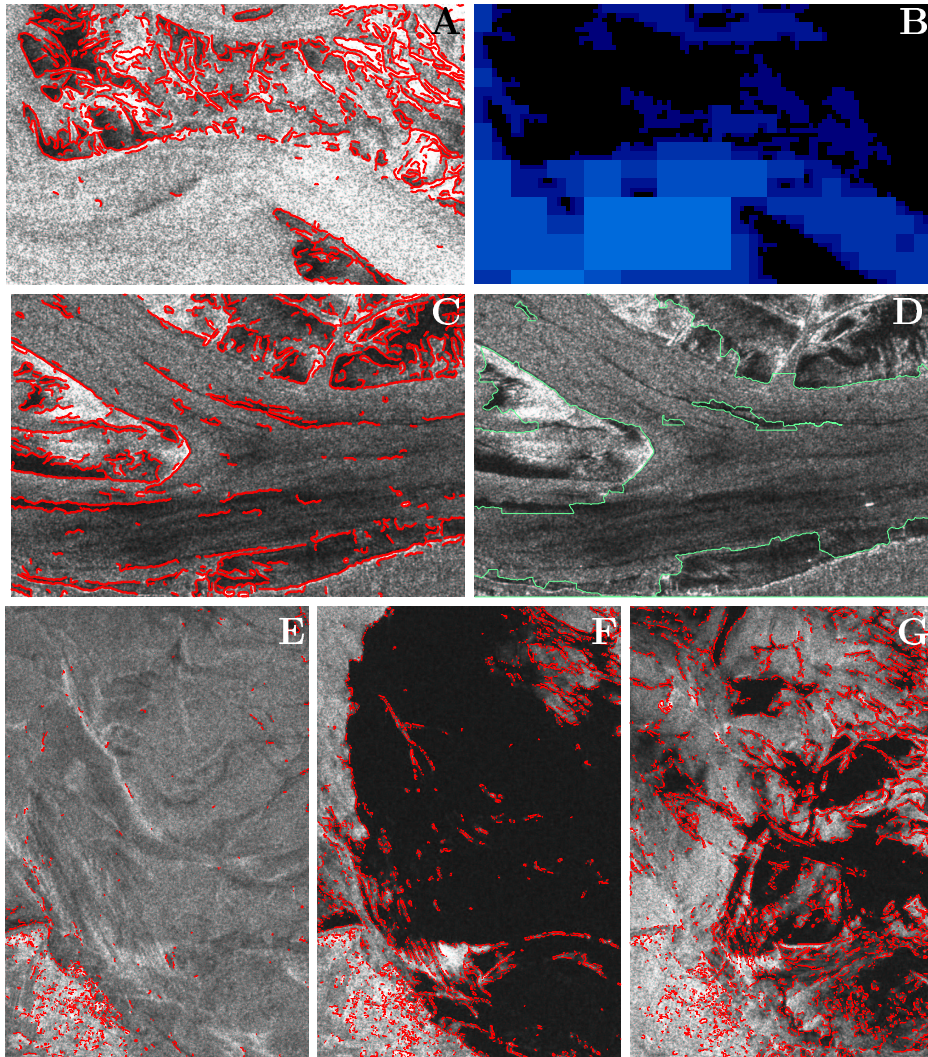
Während der in Kapitel 3 vorgestellte Algorithmus auf einer ganzen Reihe von SAR-Bildern gut verwendbare Resultate liefert (vgl. Abbildung 3.3 und viele weitere Bilder z.B. in [NRL]), sollen hier noch einige Bildausschnitte gezeigt werden, die veranschaulichen, wo seine Grenzen liegen.

Zunächst ein Beispiel für das bereits angesprochene ‘Durchbrechen’ des Blocktracings auf das Land. Durch hohe Windgeschwindigkeiten [Sch] ist das Wasser in der Aufnahme vom 5. September 1996,  $10^{26}$  (bei niedrigem Wasserstand) an der Oberfläche stark aufgeraut, was eine erhöhte Rückstreuung des Radarsignals bewirkt. Dadurch ist die rückgestreute Intensität von Wasser und Land in Teilen der Südküste der Sandbank *Medemsand* kaum unterscheidbar. Die Kanten sind zu schwach für die Schwellwertbildung und das Blocktracing läuft durch die entstehenden Lücken auf das Land und füllt dieses (zum Teil) von hinten her auf (vgl. Abbildung 4.6 A und B).

Ein weiteres Hindernis können Strömungskanten in der *Elbrinne* darstellen, wie sie z.B. in der Aufnahme vom 9. August 1997,  $21^{27}$  (Abbildung 4.6 C) — hier bei ablaufendem Wasser — in den beiden *Elbarmen* um die Sandbank *Medemgrund* zu sehen sind. Treten sie vereinzelt auf, so läuft das Blocktracing um sie herum und es entstehen kleine Inseln, die bei der aktiven Konturierung automatisch (oder im Zweifelsfall auch manuell) entfernt werden können (vgl. Abbildung 4.6 D). Sind jedoch zu viele Strömungskanten vorhanden, so kann das Blocktracing empfindlich gestört werden.

Als Drittes sollen noch Wettereinflüsse bei Hochwassersituationen untersucht werden (Bilder 4.6 E–G vom 2. August 1997,  $10^{23}$ , 10. Oktober und 18. April 1996, je  $10^{26}$ ). Mit wachsender Windgeschwindigkeit steigt, wie gesagt, die Zahl der (kleinen) Braggwellen und die Rückstreuintensität. Unterhalb einer Grenze von etwa  $0.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  brechen diese zusammen<sup>9</sup> und die See wird zu einer ‘ebenen Fläche’, die das Radarsignal wie ein Spiegel vom Sensor wegreflektiert (vgl. SAR-Aufnahmegeometrie Abb. 2.1). Auch Niederschläge können die Meeresoberfläche aufrauen. Während schwache Variationen im Wind kaum störend wirken (Abb. 4.6 E), so führt der Windschatten einer (Halb-)Insel oder eine Wetterfront zu einer starken Kante (Abb. 4.6 F), die jedoch wegen beidseitiger Wasserklassifizierung durch das Blocktracing zumindest großskalig erkannt werden kann. Problematisch sind hier küsten-

<sup>9</sup> vgl. [DKKS]. Diesen Effekt kann man auch bei einer Fahrt auf unseren oberbayerischen Seen beobachten.



**Abbildung 4.6:** Einige problematische Bildausschnitte. Meist sind die Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten auf Skala  $a = 2^2$  nach Schwellwertbildung eingezeichnet. **B** zeigt das Blocktracing-Ergebnis von **A**, **D** die endgültige Küstenlinie zu **C**. **E–G** zeigen denselben Bildausschnitt zu unterschiedlichen Wetterverhältnissen. Nur die südwestliche Ecke ist Land (Der nördlichste Punkt der Landzunge zwischen *Elb-* und *Weser-Ästuar*, auf der *Cuxhaven* liegt). Weitere Erklärungen im Text.

nahe Phänomene wie die Windhose bei *Cuxhaven* auf demselben Bild. Bei extremen Wettersituationen wie in Abbildung 4.6 G versagt der Algorithmus jedoch ganz.

Insgesamt müssen nur wenige Bilder wegen zu schlechter Kontraste oder zu vieler Wind- oder Strömungskanten ganz aussortiert werden. Eine ganze Reihe von Bildern ist jedoch wegen eines zu hohen Wasserstandes (vgl. Tabelle D.2) und damit nahezu vollständiger Bedeckung des Wattenmeers

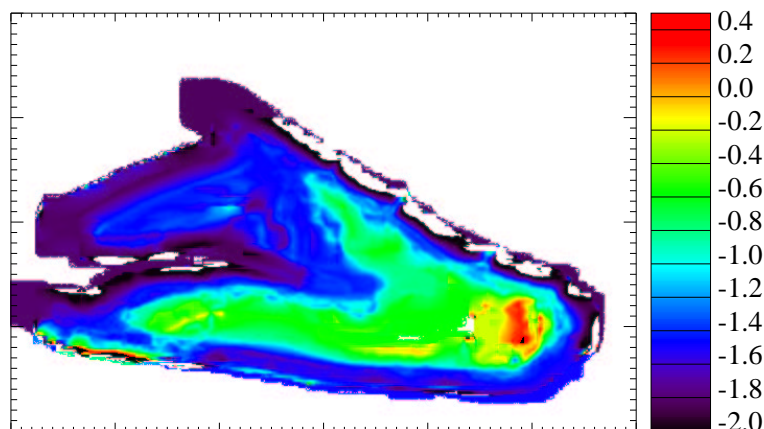


Abbildung 4.7: Interpolierte Topographie aus SAR-Wasserstandslinien.

weniger interessant. Für sie gibt es jedoch andere Ozeanographische Anwendungsbereiche (vgl. z.B. Abschnitt 7.3.2).

## 4.5 Topographie

Abschließend soll noch ein Beispiel aus der Anwendung dieses Algorithmus gezeigt werden. Verwendet man die Küstenlinien von Abbildung 3.3 sowie die zugehörigen interpolierten Wasserstände des Pegels *Cuxhaven*, so lässt sich die in Abbildung 4.7 gezeigte Topographie der Sandbank *Medemgrund* interpolieren. Dazu wurde gewichtete Mittelung mit der Wichtungsfunktion aus (3.7) verwendet. Eine dreidimensionale Darstellung dieser Topographie findet sich links unten auf dem Titelbild dieser Arbeit, Vergleiche mit der gemessenen Topographie in Abschnitt 7.4.3.

## Kapitel 5

# Mathematische Überlegungen zur Anwendbarkeit der Wavelet-basierten Kantenextraktion im Algorithmus

**B**ETRACHTUNGEN, die auf verschiedene Weise die Wirkung des Speck-  
lerauschens in der Wavelet-Transformierten eines Amplitudendichte-  
SAR-Bildes abschätzen, werden hier angeführt. Eine Schwellwertbildung  
kann nun als Rauschfilterung interpretiert werden. Dabei ist auch die ‘Ant-  
wort’ einer Kante auf die Rauschfilterung zu berücksichtigen, da durch die  
Schwellwertbildung die schwächsten Kanten, die ja auch die niedrigsten Ko-  
effizienten in der Wavelet-Transformierten erhalten, mit ausgefiltert werden.  
Um sowohl fehlerhafte Interpretation von Rauschen als Kante (durch stark-  
streuende Werte oberhalb des gewählten Schwellwertes) als auch fehlerhafte  
Interpretation von Kanten als Rauschen (durch Werte schwacher Kanten un-  
terhalb des Schwellwertes) zu vermeiden, ist eine geeignete Schwellwertwahl  
nötig. Um also Fehler erster und zweiter Art möglichst gering zu halten und  
dadurch die meist heuristische, auf Erfahrungswerte des verwendeten SAR-  
Sensors beruhende Schwellwertwahl im Algorithmus zu verbessern, sind hier  
verschiedene Vorgehensweisen zur Berechnung dieser Fehler vorgestellt. Dies  
geschieht in den Abschnitten 5.1 bis 5.4. Abschnitt 5.5 vergleicht diese Be-  
rechnungsmöglichkeiten miteinander.

Im Anschluss (Abschnitt 5.6) wird noch eine Interpretation für lineare  
Filterungen und Transformationen von Dichtebildern gegeben, wie sie bei  
dem vorgestellten Algorithmus auftreten.

## 5.1 Kantentrennwahrscheinlichkeit von einzelnen Rauschpeaks

Der Begriff ‘‘Kantentrennwahrscheinlichkeit’’ in diesem und den folgenden Abschnitten beruht auf der Idee, eine Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der durch eine Schwellwertbildung auf einer Wavelet-Skala  $a$  die Filterantworten von Rauschen und Kanten voneinander getrennt werden können.

Im einfachsten Fall wird das Rauschen durch eine Summe von DIRAC-Peaks modelliert, die Kante durch einen HEAVYSIDE-Sprung. Dazu werden die Wavelet-Transformierte eines einzelnen DIRAC-Stoßes  $\delta$  mit der der Modellkante  $(H \otimes C)(x, y)$  ( $C(y) = \text{konst.}$ ) verglichen. Für Wavelets  $\Psi_1 = \psi \otimes \phi$ ,  $\Psi_2 = \phi \otimes \psi$  mit  $\psi = \theta'$ ,  $\theta(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und Skalierungsfunktion  $\phi \geq 0$ ,  $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  folgt durch einfaches Ausintegrieren

$$\mathcal{W}_{\Psi_j} \delta(a, b) = \frac{1}{|a|} \overline{\Psi_j \left( -\frac{b}{a} \right)} \quad j \in \{1, 2\} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{W}_{\Psi_j} H \otimes \mathbb{1}(a, b) = \begin{cases} -|a| \|\phi\|_{L^1} \overline{\theta \left( -\frac{b_1}{a} \right)} & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{für } j = 2 \end{cases}, \quad (5.2)$$

wobei  $b = (b_1, b_2)^\top$ . Tatsächlich sind die LIPSCHITZ-Regularitäten der eingesetzten Signale  $-2$  und  $0$ , woraus man sieht, dass die Abschätzung in Satz 2 auf Seite 25 für geeignete  $C$  streng erfüllt ist.<sup>1</sup>

Um die Betragsmaxima gemäß der linken Seite von (1.46) zu berechnen, werden die Maxima von  $\phi$ ,  $\psi$  und  $\theta$  benötigt. Wir verwenden den modifizierten Spline-Ansatz aus der dritten Bemerkung auf Seite 23 mit  $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , also  $\hat{\phi}(\omega) = \text{sinc}^3 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)$  und  $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{8} i \omega \text{sinc}^4 \left( \frac{\omega}{4\pi} \right)$ , d.h.  $\hat{\theta}(\omega) = \frac{1}{8} \text{sinc}^4 \left( \frac{\omega}{4\pi} \right)$ . Durch einfache Rechnung (siehe Anhang A.5) folgt:

- $\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}$ ,  $\phi \geq 0$  ist gerade und hat ein Maximum in  $(0, \frac{3}{4}\sqrt{2\pi})$
- $\theta \geq 0$  ist gerade und hat ein Maximum in  $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{3})$
- $\psi$  ist ungerade und hat Extrema bei  $(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\sqrt{\pi})$

Die Betragsmaxima (längs der Richtung des Arguments) haben also den Wert  $\frac{1}{|a|} \frac{3}{4} \sqrt{2\pi} \frac{2}{3} \sqrt{\pi} = \frac{\pi}{|a|\sqrt{2}}$  für Rauschen (auf einem Kreis mit Radius  $\frac{|a|}{3}$  um  $b$ ) und  $|a| \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{3} = \frac{2\pi|a|}{3\sqrt{2}}$  für Kanten (in  $b$ ). Sie verhalten sich also wie  $\frac{2a^2}{3}$  zueinander. Durch andere Normierung ergibt sich in der diskreten Version in etwa ein Quotient von  $\frac{4a^2}{3}$ . Dieser soll im Weiteren verwendet werden.

<sup>1</sup> Die LIPSCHITZ-Regularität  $\alpha = -2$  erhält man im übrigen auch mittels des Algorithmus aus Kapitel 3, angewendet auf ein Bild mit lediglich einem Bildpunkt  $\neq 0$ .



Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeit, mit der das Rauschen im Amplitudendichtebild auf einer homogenen Region  $\rho \in \{1, 2\}$  mit Intensitätserwartung  $\mu_\rho$  die Werte einer Kante der Stärke  $\kappa$  auf Skala  $a$  überschreitet, so erhält man aus (2.48) mit  $e^{\alpha \ln \sqrt{\kappa}} = \kappa^{\frac{\alpha}{2}}$

$$P\left(\ln \sqrt{I_\rho} > \frac{4a^2}{3} \ln \sqrt{\kappa}\right) = \sum_{j=0}^{L-1} \frac{L^j}{j! \mu_\rho^j} \kappa^{\frac{4}{3}a^2 j} \exp\left(-\frac{L}{\mu_\rho} \kappa^{\frac{4}{3}a^2}\right). \quad (5.3)$$

Dabei ist  $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  der Quotient der Intensitätserwartungen zwischen den beiden homogenen Regionen im Intensitätsbild. Die Sprunghöhe als Vorfaktor von  $H$  in (5.2) ist also nach Tabelle 2.1

$$E\left(\ln \sqrt{I_1} - \ln \sqrt{I_2}\right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\mu_1}{L} - \ln \frac{\mu_2}{L}\right) = \ln \sqrt{\kappa}, \quad (5.4)$$

wenn man, wie schon in Abschnitt 2.2, von der Ergodizität des Rauschprozesses ausgeht. Weiter ist die Zufallsvariable  $I_\rho$  die Intensität des Rauschens an einem Punkt der Region  $\rho$ .

Für typische SAR-Bilder des *Elb*-Ästuars liegt  $\mu$  in den meisten Regionen im Intervall  $[2^{17}, 2^{19}]$ , über 85% der Kanten, die durch visuelle Begutachtung (vgl. Musterlösung, Kapitel 4) gefunden wurden, haben eine Stärke  $\kappa > 1.9$ . SAR-GEC-Bilder der ERS-1/2-Satelliten werden mit  $L = 3$  Looks prozessiert (siehe Tabelle 2.2). Eingesetzt in (5.3) ergibt sich für Skala  $a = 2^2$

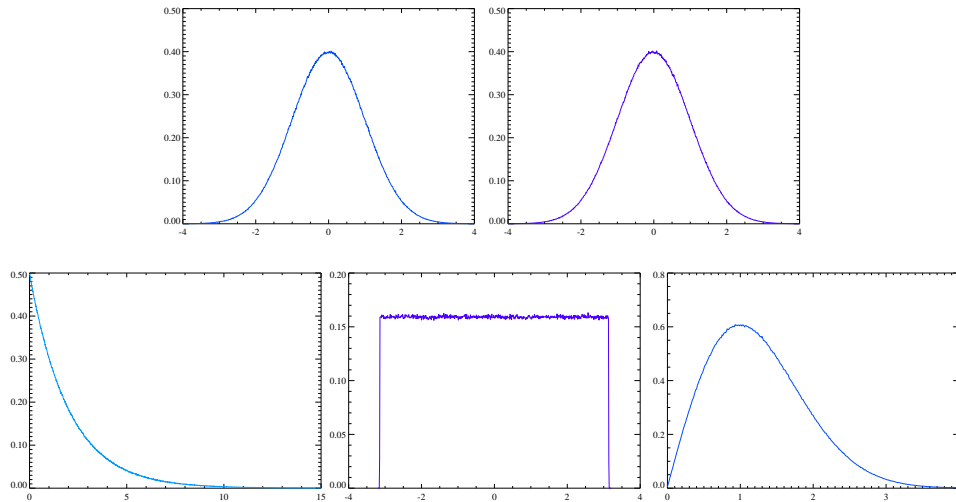
$$P\left(\ln \sqrt{I} > \frac{4}{3}a^2 \ln \sqrt{\kappa}\right) < 12\%, \quad (5.5)$$

also lässt sich dort ein theoretisch optimaler Schwellwert finden, der 88% des Rauschens unterdrückt und lediglich die schwächsten 15% der Kanten nicht findet.

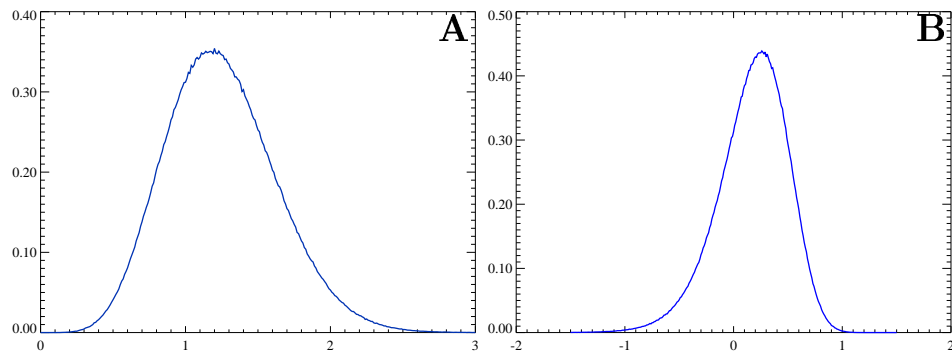
## 5.2 Kantentrennwahrscheinlichkeit im simulierten Rauschen

Mittels Monte-Carlo (MC) Ansätzen kann das Rauschen eines SAR-Bildes simuliert werden. Damit können Trennwahrscheinlichkeiten zu bestimmten Kantenstärken und Rauschintensitäten simuliert werden.

Zunächst soll ein homogenes SAR-Bild der Intensitätserwartung  $\mu = 1$  erstellt werden. Verwendet man für Real- und Imaginärteil unabhängige, normalverteilte stationäre stochastische Prozesse mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sqrt{\frac{\mu}{2}}$  auf einem (endlichen, rechteckigen, achsenparallelen) Parameterraum in  $\mathbb{N}^2$  (in unserem Beispiel  $\{1, \dots, 6000\} \times \{1, \dots, 2000\}$ ), so kann man ein komplexes Single-Look-Bild simulieren. Abbildung 5.1 zeigt Histogramme eines derartigen Bildes  $X$  für Real- und Imaginärteil ( $\Re X$ ,  $\Im X$ ),



**Abbildung 5.1:** Histogramme eines simulierten Single-Look-Complex-Bildes  $X$  für  $\Re X$ ,  $\Im X$ ,  $|X|^2$ ,  $\arg X$  und  $|X|$ .

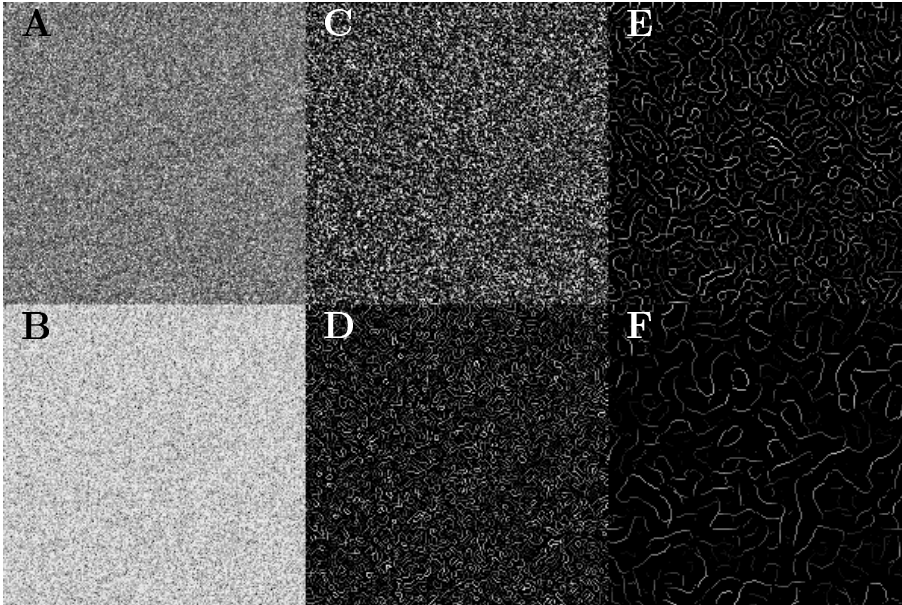


**Abbildung 5.2:** Histogramm eines simulierten 3-Look Amplitudenbildes  $A$  (A) und Amplitudendichtebildes  $\ln A$  (B).

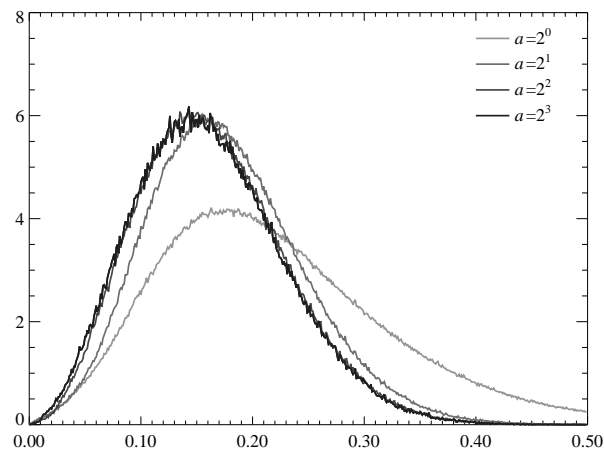
Intensität ( $|X|^2$ ), Phase ( $\arg X$ ) und Amplitude ( $|X|$ ). Gut zu sehen ist die Struktur der Verteilungen, die sich bereits aus der theoretischen Herleitung in Kapitel 2.2 ergab: Die Intensität ist exponentialverteilt, das Argument ist gleichverteilt und die Amplitude gehorcht der RAYLEIGH-Verteilung.<sup>2</sup>

Als Nächstes werden je 3 Pixel in  $t_1$ -Richtung in der Intensität gemittelt, was ein simuliertes 3-Look-Bild  $I$  mit Parameterraum  $\{1, \dots, 2000\}^2$  ergibt. Das Histogramm für die Amplitudendichte  $\ln A = \ln \sqrt{I}$  ist in Abbildung 5.2 zu finden, ebenso für die Amplitude  $A$  selbst. Nach (2.44) verhält sich erstere gemäß einer Verteilung zur Dichte  $f_{\ln A}(t) \stackrel{\mu=1}{=} 27e^{6t}e^{-3e^{2t}}$ , letztere nach der in (2.39) gegebenen Verteilung. Abbildung 5.3 zeigt jeweils einen kleinen Bildausschnitt des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes  $A$ , des zugehörigen Amplitudendichtebildes  $\ln A$ , sowie der ersten 4 Skalen ( $2^0, \dots, 2^3$ ) der dya-

<sup>2</sup> Diese wurden hier aus zwei simulierten, normalverteilten Bildern für  $\Re X$  und  $\Im X$  berechnet, vgl. Algorithmus 6 in Anhang C.2.



**Abbildung 5.3:** Ausschnitt des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes  $A$  (**A**), des Amplitudendichtebildes  $\ln A$  (**B**), sowie dessen dyadischer Wavelet-Transformierter (Betragsmaxima) der Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$  (**C**, **D**, **E**, **F**).

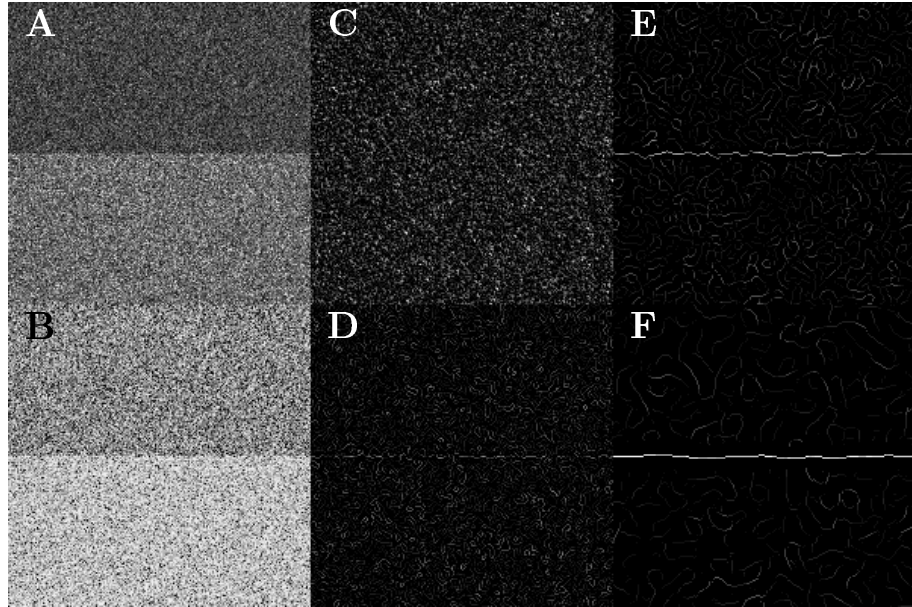


**Abbildung 5.4:** Betragsmaxima-Histogramme der dyadischen Wavelet-Transformierten.

dischen Wavelet-Transformation von  $\ln A$ .

Betrachtet man die Verteilungen der Betragsmaxima der dyadischen Wavelet-Transformierten auf den Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$  (Histogramme in Abbildung 5.4), so bemerkt man, dass die Betragsmaxima nicht linear in  $a$  abfallen. Dies hat folgende Gründe:

- Die lineare Abfallbedingung in  $a$  gilt nach Satz 2 nur asymptotisch für  $a \rightarrow 0$ . Der stärkste Abfall herrscht auch in der Simulation zwischen



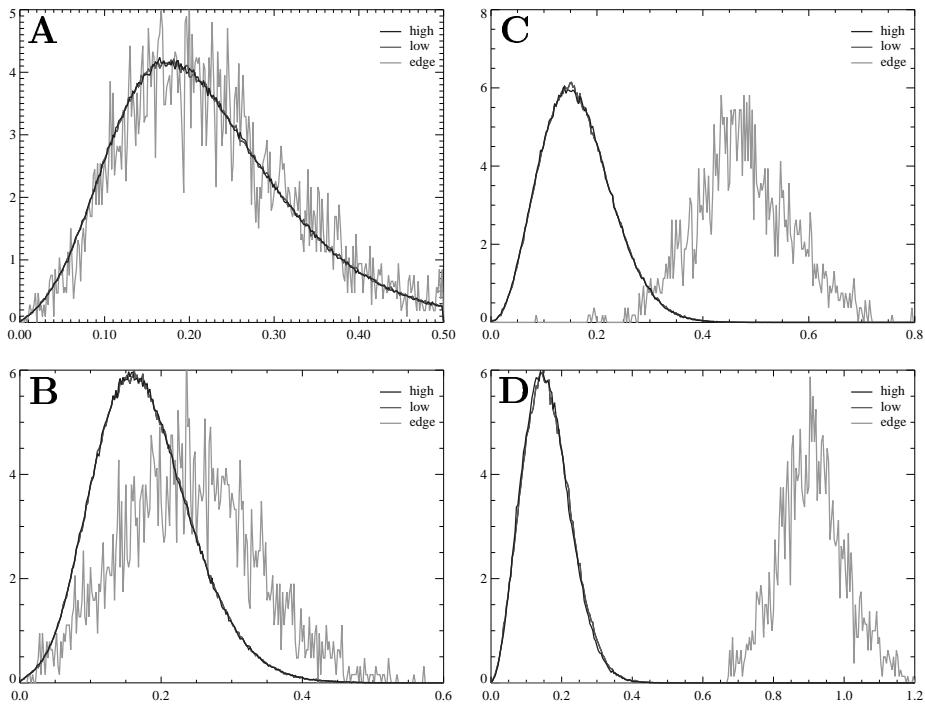
**Abbildung 5.5:** Ausschnitt des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes  $A$  (**A**) mit zwei homogenen Gebieten, des Amplitudendichtebildes  $\ln A$  (**B**) und dessen dyadischer Wavelet-Transformierter der Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$  (**C**, ..., **F**) mit Kantenstärke  $\kappa = 1.4$ .

$$a = 2^0 \text{ und } a = 2^1.$$

- Die einzelnen Rauschpeaks entsprechen nicht den modellierten DIRAC-Pulsen. Sie haben eine Breite und Länge von einem Pixel, sind also nicht punktförmig.

Im Weiteren soll erneut ein Bild aus zwei homogenen, rechteckigen Flächen einheitlicher Intensitätserwartungen  $\mu_0$  und  $\mu_1$  mit einem scharfen Übergang betrachtet werden. Abbildung 5.5 zeigt einen Ausschnitt aus einem simulierten Amplituden-Bild  $A$  mit typischen  $\mu_0, \mu_1$  und Kantenstärke  $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_0} = 1.4$  und  $L = 3$  Looks, das zugehörige Amplitudendichtebild  $\ln A$  und erneut die ersten 4 Wavelet-Skalen. Die Dichten der Verteilungen (Histogramme) der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten im Bereich von  $\mu_0$  (Bildbereich<sup>3</sup>  $\{0.5, \dots, 2000.5\} \times \{1003.5, \dots, 2000.5\}$ ),  $\mu_1$  ( $\{0.5, \dots, 2000.5\} \times \{0.5, \dots, 997.5\}$ ) und der Kante ( $\{0.5, \dots, 2000.5\} \times \{998.5, \dots, 1002.5\}$ ) sind in Abbildung 5.6 zusammengestellt. Man sieht, dass die Betragsmaxima in den beiden homogenen Bereichen praktisch gleich verteilt sind. Das resultiert aus der folgenden Überlegung:

<sup>3</sup> Die Skalen der dyadischen Wavelet-Transformierten haben aufgrund der halbzahligen Zentrierung des Filters auf der ersten Skala einen halbzahligen Definitionsbereich. So hat in einer Dimension ein auf  $\{a, \dots, b\}$  definiertes Signal eine dyadische Wavelet-Transformierte definiert auf  $\{a - \frac{1}{2}, \dots, b + \frac{1}{2}\}$ .



**Abbildung 5.6:** Histogramme der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten auf den homogenen Teilbereichen (high/low) und in der Kantenumgebung (edge) für verschiedene Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$  (**A**, **B**, **C**, **D**) bei Kantenstärke  $\kappa = 1.4$ .

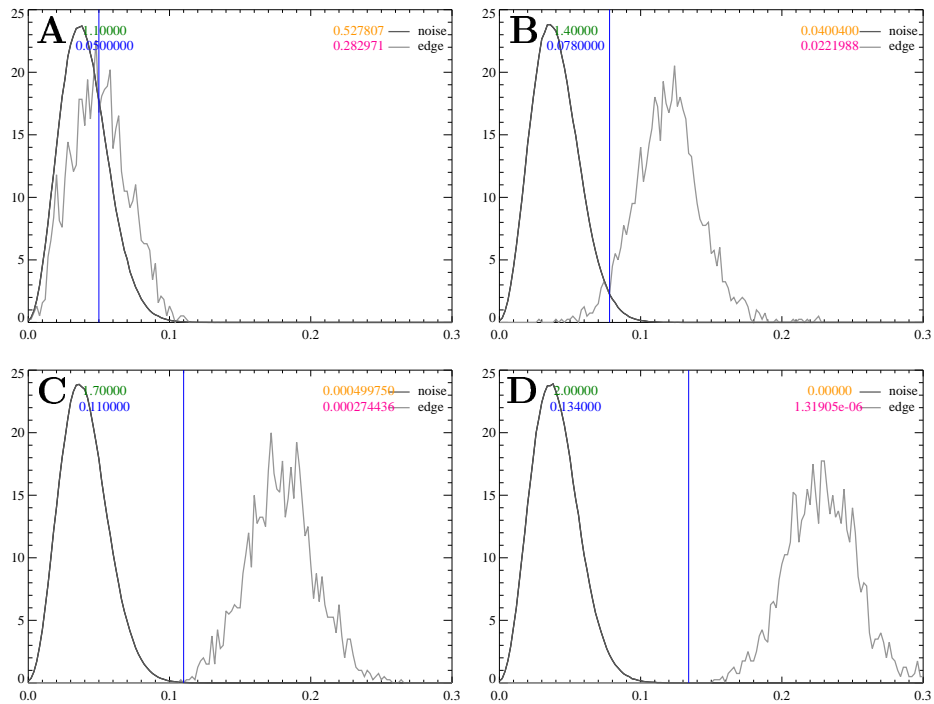
Der unterschiedliche Intensitäts-Mittelwert ( $\mu_0 < \mu_1$ ) wirkt sich in der Verteilung der Amplitudendichte als additiver Term zum Rauschen aus. Dieser verschwindet durch die differenzierende Wirkung der Wavelet-Transformation.

Bereits auf Skala  $a = 2^2$  lässt sich — wie man sieht — eine Kante der Stärke  $\kappa = 1.4$  mit geringen Fehlern erster und zweiter Art als solche identifizieren, indem man einen geeigneten Schwellwert wählt.

Automatisch kann ein derartiger Schwellwert a posteriori (also bei gegebener Kantenstärke, speziell in unserer Simulation) z.B. durch folgende beiden Methoden gewählt werden:

- Man bestimmt den (bzw. einen geeigneten) Schnittpunkt der Dichte (Histogramme) der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten auf der gewünschten Skala  $a$  im Bildbereich Kante und Rauschen (beide Rauschbereiche können nach obiger Überlegung zusammengelegt werden). Die Abszisse ist der gesuchte Schwellwert.
- Man bestimmt den Schnittpunkt der kumulativen Verteilungen für Kante und Rauschen. Die Abszisse ist der gesuchte Schwellwert.

Letztere Methode erlaubt eine eindeutige Auswahl und ergibt einen gleich großen Fehler erster und zweiter Art auf Kosten zusätzlicher Integrationen



**Abbildung 5.7:** Histogramme der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten für homogene Teilbereiche und eine Kante bei verschiedenen Kantenstärken  $\kappa = 1.1, \dots, 2.0$  (A, ..., D) auf der Skala  $a = 2^2$ . Angegeben sind auch der automatische Schwellwert und die Fehler erster und zweiter Art.

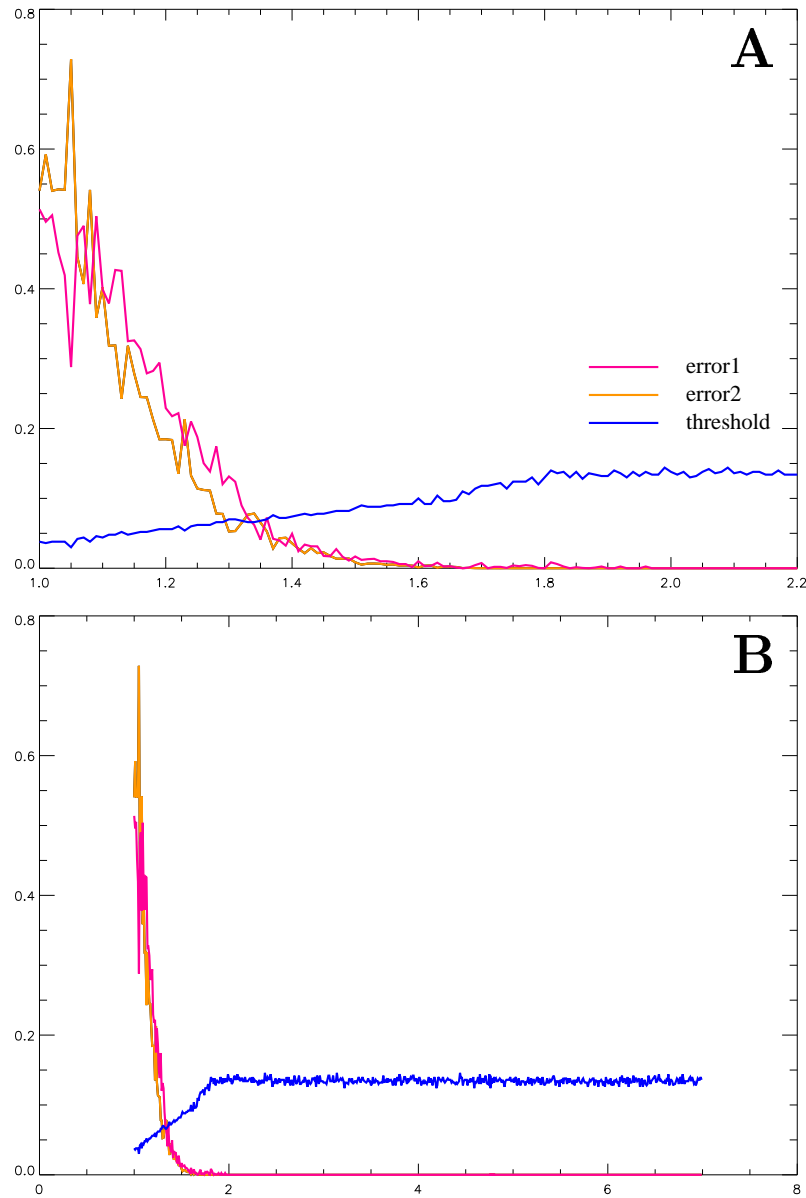
bzw. Summationen. Da jedoch auch bei der ersteren Methode die Fehlertendenz zu erkennen ist und die Fehler meist bis auf einen kleinen Differenzbetrag übereinstimmen, wurde aus Rechenzeitgründen im Folgenden diese verwendet.

Weiter sollen nun für verschiedene Kantenstärken in Skala  $a = 2^2$  automatisch Schwellwerte gefunden und die Fehler erster und zweiter Art bestimmt werden. Abbildung 5.7 zeigt für  $\kappa \in \{1.1, 1.4, 1.7, 2.0\}$  die Histogramme der Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten auf Skala  $a = 2^2$  für die Kante und homogene Bereiche sowie den automatischen Schwellwert und die Fehler erster und zweiter Art.

Macht man diese Überlegungen für viele verschiedene Kantenstärken  $\kappa$ , so kann man die Veränderungen des automatischen Schwellwertes sowie der beiden Fehler betrachten. In Abbildung 5.8 sind diese für  $\kappa \in [1, 7] \cap \frac{\mathbb{N}}{100}$  angetragen.

Insgesamt sind auch mit dieser Methode genaue Werte für die beiden Fehlertypen zu gegebener Kantenstärke berechenbar.

Ähnliche Überlegungen können natürlich auch für die LIPSCHITZ-Regularität gemacht werden. Bestimmt man diese mit der Methode aus Abschnitt 3.2, so erhält man beispielsweise für das den Abbildungen 5.1 bis



**Abbildung 5.8:** Automatischer **Schwellwert**, Fehler **erster** und **zweiter** Art für Kantenstärken  $\kappa \in [1, 2.2]$  (**A**) bzw.  $\kappa \in [1, 7]$  (**B**).

5.3 zugrunde liegende Bild mit dem simulierten Rauschen eine Verteilung der LIPSCHITZ-Regularitäten gemäß dem Histogramm in Abbildung 5.9. Das Maximum liegt in etwa bei einer Regularität von  $\alpha_N = -1.2$ . Die Modellierung als einzelne DIRAC-Stöße ist also eine sehr grobe Näherung. Schon deshalb liegt der im Algorithmus gewählte Schwellwert bei  $-0.4$  und nicht beispielsweise bei  $-1$ , was der Mitte der Werte  $-2$  und  $0$  aus der DIRAC-HEAVYSIDE-Modellierung aus Abschnitt 5.1 entspräche.

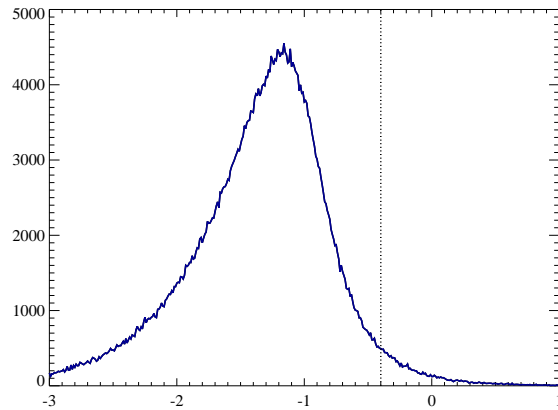


Abbildung 5.9: LIPSCHITZ-Regularitäten des simulierten Rauschens.

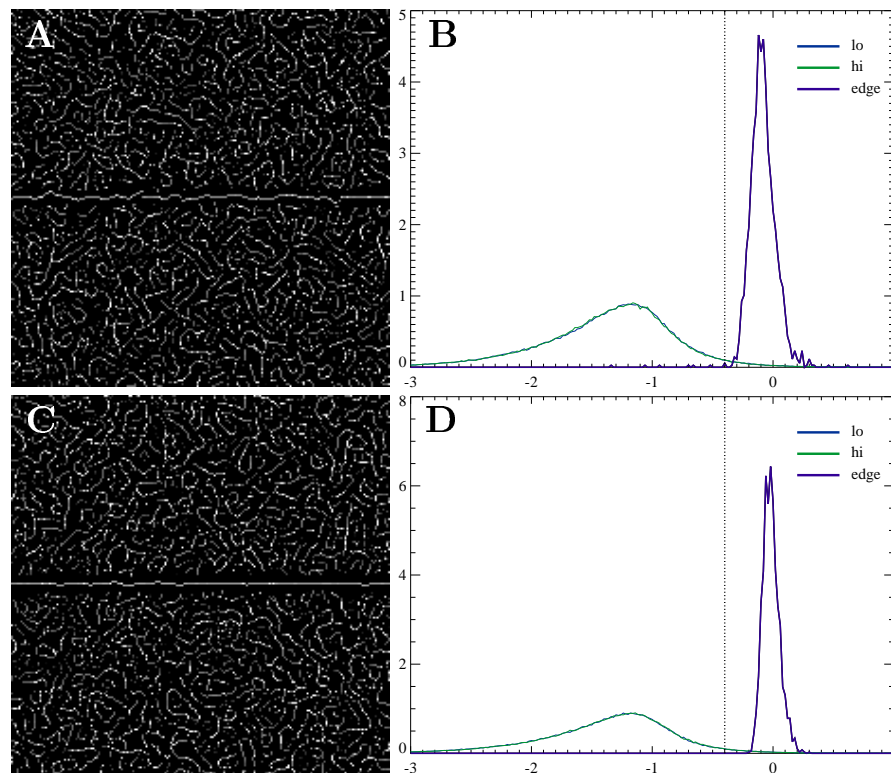
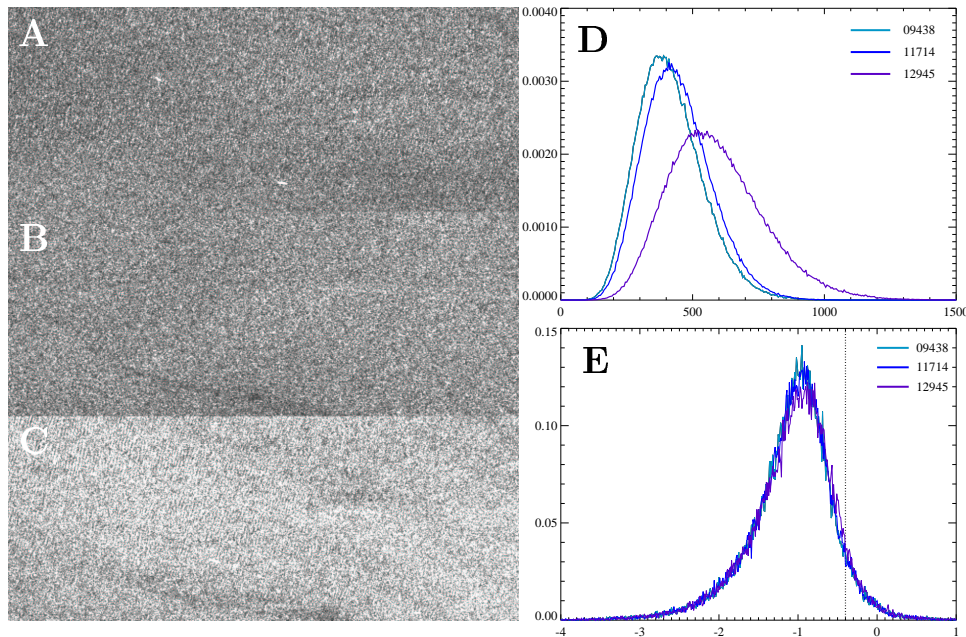


Abbildung 5.10: LIPSCHITZ-Regularitäten (A,C) und ihre relativen Häufigkeiten (B,D) bei einer simulierten Kante für Kantenstärken  $\kappa = 1.4$  (A,B) und  $\kappa = 2.0$  (C,D).

Dass der angegebene Schwellwert — unabhängig von der Kantenstärke  $\kappa$  eine gute Wahl ist, sieht man an den Histogrammen in Abbildung 5.10, die nochmals für die simulierte Kante aus Abbildung 5.5 ( $\kappa = 1.4$ ) und ein analoges Bild mit  $\kappa = 2.0$  die LIPSCHITZ-Regularität und ihre Häufigkeiten in den einzelnen Bildregionen zeigt.



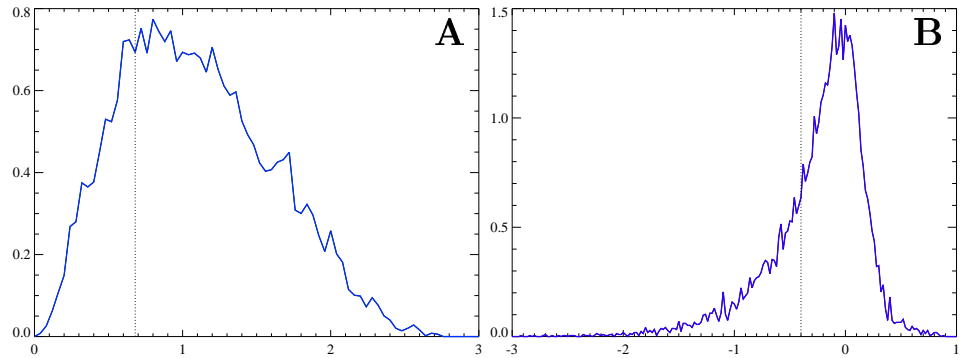


**Abbildung 5.11:** Bildausschnitte ‘homogener’ Wasseroberfläche im SAR (A)–(C), Histogramme der Amplituden (D) und der berechneten LIPSCHITZ-Regularitäten (E).

Abschließend sollen die simulierten Ergebnisse noch mit dem Rauschen auf ‘homogenen’ ERS-2-SAR-Bildausschnitten untersucht werden. Abbildung 5.11 A–C zeigt drei derartige Ausschnitte, die — abgesehen von dem zum Teil sichtbaren Seegang und geringen Windstrukturen — eine homogene Wasseroberfläche ( $1000 \times 400$  Pixel, d.h.  $12.5 \times 5$  km) nördlich bis nordwestlich von Scharhörn zeigen. Die bei hohem Wasserstand aufgenommenen Bilder sind vom 8. Februar 1997 (Orbit 09438 in A), 17. Juli 1997 (Orbit 11714 in B) und 11. Oktober 1997 (Orbit 12945 in C).

Abbildung 5.11 D zeigt die Histogramme gemäß der auftretenden Bildamplituden. Es zeigt sich, was schon in den Bildern selbst sichtbar ist: Die windbedingt unterschiedlich hohe Intensität der Bilder. Abgesehen von der unterschiedlichen Intensitätserwartung (dort als  $\mu = 1$  simuliert, also mit anders skaliertem Plot) entspricht dies dem Histogramm des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes in Abbildung 5.2 A.

Auch die auftretenden LIPSCHITZ-Regularitäten wurden berechnet (vgl. Abbildung 5.11 E). Es zeigt sich, dass die am häufigsten auftretende Regularität  $-1$  leicht über dem theoretisch berechneten Wert von  $-1.2$  (vgl. Abbildung 5.9) liegt. Grund hierfür ist zum einen die in der Realität vorhandene leichte Korrelation benachbarter SAR-Bildpunkte, die im Modell vernachlässigt wurde und zu einer geringfügigen Glättung des Bildes führt. Zum anderen handelt es sich nicht um vollständig homogene Bilder. Die erwähnten leichten Strukturen liefern Beiträge positiver Regularität.



**Abbildung 5.12:** Histogramme von Wavelet-Koeffizienten der Skala  $2^2$  (**A**) und der LIPSCHITZ-Regularität (**B**) im Bereich der Musterlösungs-Wasserstandslinie.

Schließlich wird noch die Kante, die sich in einem 5 Pixel breiten Streifen um die Musterlösungs-Wasserstandslinie des zugehörigen SAR-Bildes befindet, betrachtet. Auch sie zeigt die typischen Histogramme für Wavelet-Koeffizienten der Skala  $2^2$  und der berechneten LIPSCHITZ-Regularität. Diese sind zusammen mit dem jeweils gewählten Schwellwert in Abbildung 5.12 zu finden.

Wie diese letzten Untersuchungen zeigen, gibt die Monte-Carlo-Simulation die realen Verhältnisse auf aufgenommenen SAR-Bildern gut wieder. Sie können also bei der Entscheidung für einen Schwellwert herangezogen werden.

### 5.3 Kantentrennwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Filter der dyadischen Wavelet-Transformation

Im Algorithmus wird die dyadische Wavelet-Transformierte diskret durch Faltung mit Filtern berechnet. In diesem Abschnitt sollen Aussagen über die stochastischen Verteilungen des Rauschens eines derart gefilterten SAR-Amplitudendichte-Bildes gemacht werden. Zunächst werden die direkten Filter für das verwendete Spline-Wavelet berechnet (siehe Abschnitt 5.3.1). Anschließend (Abschnitt 5.3.2) werden die zugehörigen Verteilungen betrachtet.

#### 5.3.1 Filter-Koeffizienten

Schreibt man die Rekursion (1.40) in Faltungsform

$$\tilde{c}^{[j]} = \tilde{S}\tilde{D}_j\bar{h} *_z \tilde{c}^{[j-1]} = H^{[j]} *_z \tilde{c}^{[0]} \quad (5.6)$$

mit  $(\tilde{\mathcal{D}}_j \bar{h})_l = \begin{cases} \overline{h_{\frac{1}{2}-2^{1-j}l}} & l \equiv [2^{j-2}] \pmod{2^{j-1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ , so ergibt sich der direkte Filter  $H^{[j]}$  als

$$H^{[j]} = \bigotimes_{k=1}^j \tilde{\mathcal{D}}_j \bar{h}, \quad (5.7)$$

also  $H^{[j]} = \tilde{\mathcal{D}}_j \bar{h} *_z H^{[j-1]}$ . Entsprechend folgt mit (1.41)

$$\check{d}^{[j]} = G^{[j]} *_z \check{c}^{[0]} \quad (5.8)$$

wobei  $G^{[j]} = \tilde{\mathcal{D}}_j \bar{g} *_z H^{[j-1]} = \tilde{\mathcal{D}}_j \bar{g} *_z \bigotimes_{k=1}^{j-1} \tilde{\mathcal{D}}_j \bar{h}$ .

Im Folgenden sollen die direkten Filter für die diskrete dyadische Wavelet-Transformation zum Spline-Wavelet mit Glättungsfunktion  $\phi_1$  berechnet werden. Die Filter-Koeffizienten  $h_k$  ergeben sich als  $h_{-1} = h_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}$ ,  $h_0 = h_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$  und  $h_k = 0 \forall k \notin \{-1, 0, 1, 2\}$  (Beispiel auf Seite 23).

**Lemma 6** Die direkten Filter  $H^{[j]}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  zu  $\phi_1$  lauten

$$H_k^{[j]} = \begin{cases} \lambda^j \sum_{l=1}^{k-1+3 \cdot 2^{j-1}} l & 2 - 3 \cdot 2^{j-1} \leq k \leq 1 - 2^{j-1} \\ \lambda^j \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{k-1+2^{j-1}} (2^j - 2l) \right) & 1 - 2^{j-1} < k \leq 0 \\ H_{1-k}^{[j]} & 0 < k \leq 3 \cdot 2^{j-1} - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.9)$$

mit  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Bemerkungen:**

① Für  $1 \leq k < 2^{j-1}$  ist  $\lambda^j \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{k-1+2^{j-1}} (2^j - 2l) \right) = \lambda^j \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{2^{j-1}-k} (2^j - 2l) + \sum_{l=2^{j-1}-k+1}^{2^{j-1}-1} (2^j - 2l) + 0 + \sum_{l=2^{j-1}+1}^{k-1+2^{j-1}} (2^j - 2l) \right) = H_{1-k}^{[j]} + \lambda^j \left( \sum_{m=1}^{k-1} 2m + \sum_{m=1}^{k-1} (-2m) \right) = H_k^{[j]}$ .

Mit  $\sum_{l=1}^0 a_l = 0$  gilt der 2. Fall in (5.9) also für  $1 - 2^{j-1} \leq k \leq 2^{j-1}$ .

② Die summenfreie Darstellung von (5.9) lautet<sup>4</sup>

$$H_k^{[j]} = \begin{cases} \frac{(k-1+3 \cdot 2^{j-1})(k+3 \cdot 2^{j-1})\sqrt{2^j}}{2 \cdot 8^j} & 2 - 3 \cdot 2^{j-1} \leq k \leq 1 - 2^{j-1} \\ \frac{(2^{j-1}(2^j+1) + (k+2^{j-1}-1)(2^{j-1}-k))\sqrt{2^j}}{8^j} & 1 - 2^{j-1} \leq k \leq 2^{j-1} \\ \frac{(3 \cdot 2^{j-1}-k)(1-k+3 \cdot 2^{j-1})\sqrt{2^j}}{2 \cdot 8^j} & 2^{j-1} \leq k \leq 3 \cdot 2^{j-1} - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.10)$$

<sup>4</sup> Wie man durch einfaches Nachrechnen mittels  $\sum_{l=1}^k l = \frac{k(k+1)}{2}$  erhält.

**Beweis:** von Lemma 6 mit vollständiger Induktion nach  $j$ . Der Induktionsanfang ( $j=1$ ) folgt direkt aus  $H^{[1]} = \tilde{\mathcal{S}}h = h = \sqrt{2} \cdot [\frac{1}{8}, \frac{1+2}{8}, \frac{1+2}{8}, \frac{1}{8}]$ .

Induktionsschritt ( $j \rightarrow j+1$ ):

Bei der Faltung werden jeweils um  $(k - \frac{1}{2}) \cdot 2^j$  versetzte Kopien von  $H^{[j]}$  mit  $h_k$  multipliziert und anschließend punktweise (indexweise) aufaddiert, also

$$H_k^{[j+1]} = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{cases} H_{k+3 \cdot 2^{j-1}}^{[j]} & 2 - 3 \cdot 2^j \leq k \leq 1 - 2^{j+1} \\ H_{k+3 \cdot 2^{j-1}}^{[j]} + 3H_{k+2^j}^{[j]} & 1 - 2^{j+1} < k \leq 1 - 2^j \\ H_{k+3 \cdot 2^{j-1}}^{[j]} + 3H_{k+2^j}^{[j]} + 3H_{k-2^j}^{[j]} & 1 - 2^j < k < 0 \\ 3H_{k+2^j}^{[j]} + 3H_{k-2^j}^{[j]} & k = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Für die vier Fälle in (5.11) folgt weiter mit  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}$  und der Induktionsvoraussetzung jeweils  $H_k^{[j+1]} =$

1.  $= \lambda \cdot \lambda^j \sum_{l=1}^{k+3 \cdot 2^{j-1} - 1 + 3 \cdot 2^{j-1}} l = \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^{k-1+3 \cdot 2^j} l$
2. Für  $1 - 2^{j+1} < k < 1 - 2^j$  gilt nach Bemerkung ①:  
 $= \lambda \lambda^j \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{k+3 \cdot 2^{j-1} - 1 + 2^{j-1}} (2^j - 2l) + \sum_{j=1}^{k+2^{j-1} - 1 + 3 \cdot 2^{j-1}} 3l \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{k+2^{j+1} - 1} (2^j - 2l + 3l) \right) = \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^{k-1+3 \cdot 2^j} l$   
sowie  $H_{1-2^j}^{[j+1]} = \lambda \left( H_{1+2^j-1}^{[j]} + 3H_{1-2^j-1}^{[j]} \right) = \lambda \left( H_{-2^j-1}^{[j]} + 3H_{1-2^j-1}^{[j]} \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{2^j-1} l + 3 \sum_{l=1}^{2^j} l \right) = 4\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{2^j-1} l + 3 \cdot 2^j \right) =$   
 $4\lambda^{j+1} \cdot \frac{(2^j-1)2^j}{2} + 3 \cdot 2^j \lambda^{j+1} = \lambda^{j+1} \left( \frac{(2^{j+1}-2)2^{j+1}}{2} + \frac{3 \cdot 2^{j+1}}{2} \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \frac{(2^{j+1}+1)2^{j+1}}{2} = \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^{2^{j+1}} l = \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^{1-2^j-1+3 \cdot 2^j} l$
3.  $= \lambda \left( H_{1-3 \cdot 2^{j-1}-k}^{[j]} + 3H_{k+2^j-1}^{[j]} + 3H_{k-2^j-1}^{[j]} \right) = \left( \sum_{l=1}^{1-k-3 \cdot 2^{j-1} - 1 + 3 \cdot 2^{j-1}} l + \right.$   
 $3 \sum_{l=1}^{2^j} l + 3 \sum_{l=1}^{k+2^{j-1} - 1 + 2^{j-1}} (2^j - 2l) + 3 \sum_{l=1}^{k+2^{j-1} - 1 + 3 \cdot 2^{j-1}} l \left. \right) \lambda^{j+1} =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{-k} l + 3 \sum_{l=1}^{2^j} l + 3 \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^j - 2l) + 3 \sum_{l=1}^{k+2^j-1} l \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \frac{(-k)(1-k)+3 \cdot 2^j (2^j+1)}{2} + 3 \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^j - l) \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \frac{k(k-1)+3 \cdot 2^j (2^j+1)}{2} + \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^j - l) + \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^{j+1} - 2l) \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \frac{k(k-1)+3 \cdot 2^j (2^j+1)+2^{j+1}(k+2^j-1)-(k+2^j-1)(2^j+k)}{2} + \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^{j+1} - 2l) \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \frac{k^2 - k + 3 \cdot 2^{2j} + 3 \cdot 2^j + 2^{j+1} k + 2^{2j+1} - 2^{j+1} k^2 - 2^j k + k - 2^j k - 2^{2j} + 2^j}{2} + \right.$   
 $\left. \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^{j+1} - 2l) \right) = \lambda^{j+1} \left( \frac{2^{j+1}(2^{j+1}+1)}{2} + \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^{j+1} - 2l) \right) =$   
 $\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{2^{j+1}} l + \sum_{l=1}^{k+2^j-1} (2^{j+1} - 2l) \right)$
4.  $= 3\lambda^{j+1} \left( \sum_{l=1}^{2^j} l + \sum_{l=1}^{2^j-1} l \right) = 3\lambda^{j+1} \left( \frac{2^j(2^j+1)}{2} + \frac{(2^j-1)2^j}{2} \right) =$

$$\begin{aligned} 3\lambda^{j+1}2^{2j} &= \lambda^{j+1}(2^{2j+1} + 2^{j+1} + 2^{2j} - 2^{j+1}) = \\ &= \lambda^{j+1}\left(\frac{2^{j+1}(2^{j+1}+1)}{2} + 2\frac{2^j(2^j-1)}{2}\right) = \lambda^{j+1}\left(\sum_{l=1}^{2^{j+1}} l + \sum_{l=1}^{2^j-1} (2^{j+1} - 2l)\right) \end{aligned}$$

Der dritte Fall in (5.9) folgt aus der Symmetrie der gefalteten Filter  $h_k$  und  $H_k^{[j-1]}$  bei  $k = \frac{1}{2}$ .  $\square$

Als Zahlenbeispiel seien hier  $H^{[2]} = \frac{1}{32}[1, 3, 6, 10, 12, 12, 10, 6, 3, 1]$  und  $H^{[3]} = \frac{\sqrt{2}}{256}[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 42, 46, 48, 48, 46, 42, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1]$  genannt, in blau hinterlegt ist jeweils  $H_0^{[j]}$ .

Die Filter  $g_k$  seien gemäß der dritten Bemerkung auf Seite 23 gewählt ( $\lambda = \frac{1}{2}$ , d.h.  $g_1 = \frac{1}{2} = -g_0$ ). Mit  $H_k^{[0]} = \delta_{0k}$  folgt

$$G_k^{[j+1]} = \frac{1}{2} \left( H_{k+2^j}^{[j]} - H_k^{[j]} \right) \quad (5.12)$$

für  $j \in \mathbb{N}_0$ , also in Zahlen  $G^{[1]} = \frac{1}{2}[1, -1]$ ,  $G^{[2]} = \frac{\sqrt{2}}{16}[1, 3, 2, -2, -3, -1]$  und  $G^{[3]} = \frac{1}{64}[1, 3, 6, 10, 11, 9, 4, -4, -9, -11, -10, -6, -3, -1]$ .

Im mehrdimensionalen (Dimension  $n$ ) werden  $n$  Wavelets der Form

$$\Psi_\kappa = \bigotimes_{\nu=1}^{\kappa-1} \phi \otimes \psi \otimes \bigotimes_{\nu=\kappa+1}^n \phi, \quad (5.13)$$

$1 \leq \kappa \leq n$ , das entspricht Filtern der Form

$$\mathbf{G}^{[j],\kappa} = \bigotimes_{\nu=1}^{\kappa-1} H^{[j-1]} \otimes G^{[j]} \otimes \bigotimes_{\nu=\kappa+1}^n H^{[j-1]}. \quad (5.14)$$

Für  $n = 2$  gilt also

$$\mathbf{G}^{[1],1} = \left( \mathbf{G}^{[1],2} \right)^\top = \frac{1}{2} [1, -1] \quad \text{und} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{G}^{[2],1} = \left( \mathbf{G}^{[2],2} \right)^\top = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & -6 & -9 & -3 \\ 3 & 9 & 6 & -6 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Weitere Zahlenbeispiele ( $n = 2, j = 3, 4$ ) finden sich in Anhang A.6.

### 5.3.2 Stochastische Verteilung des Rauschens

Ein gemäß (2.44) verteiltes Amplitudendichtebild wird durch Faltung mit einem Filter  $g_\iota, \iota \in I \subset \mathbb{Z}$  bearbeitet. O.E. sei  $J = \{1, \dots, k\}$ . Ein Pixel des neuen Bildes wird modelliert durch

$$X = \sum_{j=1}^k g_j X_j \quad (5.17)$$

mit unabhängigen, gemäß (2.44) verteilten Zufallsvariablen  $X_j$ . Nach Beispiel ③ auf Seite 14 folgt für die Verteilung von  $g_j X_j$

$$f_{g_j X_j} = \frac{1}{|g_j|} f_{X_j} \left( \frac{\bullet}{g_j} \right) \quad (5.18)$$

$$\hat{f}_{g_j X_j} = \hat{f}_{X_j}(g_j \bullet) \quad (5.19)$$

und weiter mit Hilfssatz 2

$$f_X = \sqrt{2\pi}^{k-1} \prod_{j=1}^k \frac{1}{|g_j|} f_{X_j} \left( \frac{\bullet}{g_j} \right). \quad (5.20)$$

Für Wavelet-Filter gilt damit nach dem Faltungssatz (Lemma 2 (ix))

$$\begin{aligned} \hat{f}_X(\omega) &= \sqrt{2\pi}^{k-1} \prod_{j=1}^k \hat{f}_{X_j}(g_j \omega) \\ &\stackrel{(2.46)}{=} \sqrt{2\pi}^{k-1} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma\left(L - \frac{i\omega g_j}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}^k (\Gamma(L))^k} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{i\omega}{2} \sum_{j=1}^k g_j} \\ &\stackrel{(1.39)}{=} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma\left(L - \frac{i\omega g_j}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} (\Gamma(L))^k}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die Erwartung und Varianz von  $X$  ergibt sich als

$$E(X) \stackrel{\text{Bem. S.15}}{=} \sqrt{2\pi} i \hat{f}'_X(0) = \frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)} \sum_{j=1}^k g_j \stackrel{(1.39)}{=} 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &\stackrel{\text{Bem. S.15}}{=} -\sqrt{2\pi} \hat{f}''_X(0) - (E(X))^2 \\ &= \left(\frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)}\right)^2 \sum_{j=1}^k \sum_{\iota \neq j} g_j g_\iota + \frac{\Gamma''(L)}{4\Gamma(L)} \sum_{j=1}^k g_j^2 \\ &\stackrel{(1.39)}{=} \frac{\Gamma''(L)\Gamma(L) - (\Gamma'(L))^2}{4(\Gamma(L))^2} \sum_{j=1}^k g_j^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Speziell für ERS-1/2 SAR-Bilder vom Typ FDC, PRI, GEC und GTC (siehe Tabelle 2.2), also für  $L = 3$ , gilt nach Lemma 4 (x)

$$\text{Var}(X) = \frac{\frac{1}{2} \left( (3 - 2\gamma_E)^2 + \frac{4\pi^2}{6} - 5 \right) \cdot 2 - (3 - 2\gamma_E)^2}{4 \cdot 2^2} \sum_{j=1}^k g_j^2 = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \sum_{j=1}^k g_j^2. \quad (5.24)$$

Verwendet man beispielsweise im Zweidimensionalen die Skalen  $a = 2^0, 2^1, 2^2$  und  $2^3$ , also die  $k = 2, 24, 140$  bzw. 660 Filterkoeffizienten von  $\mathbf{G}^{[j], \kappa}$

(für  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , siehe (5.15),(5.16),(A.60) und (A.61)), so erhält man

$$\text{Var}(X) = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \cdot \frac{2}{2^2} = \frac{2\pi^2 - 15}{3 \cdot 2^5} \approx 0.049367 \quad (5.25)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \cdot \frac{560}{64^2} = \frac{35(2\pi^2 - 15)}{3 \cdot 2^{12}} \approx 0.013499 \quad (5.26)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \cdot \frac{422240}{2048^2} = \frac{13195(2\pi^2 - 15)}{3 \cdot 2^{21}} \approx 0.0099395 \quad (5.27)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \cdot \frac{401812672}{65536^2} = \frac{6278323(2\pi^2 - 15)}{3 \cdot 2^{30}} \approx 0.0092369 \quad (5.28)$$

Dies zeigt erneut die starke Reduktion des Einflusses des Speckle-Rauschens mit wachsender Skala  $a = 2^{j-1}$ , die sich jedoch, wie auch schon im vorigen Abschnitt in der Simulation betrachtet, mit wachsender Skala abschwächt (Die Varianz der Wavelet-Koeffizienten steht in direktem Zusammenhang mit der Erwartung ihrer Beträge bzw. Betragsmaxima).

Um  $\hat{f}_X(\omega)$  und damit  $f_X$  numerisch zu berechnen, sind noch einige Feststellungen notwendig, damit direkte Auswertungen von  $\Gamma\left(L - \frac{i\omega g_j}{2}\right)$  vermieden werden.<sup>5</sup> Mit der Symmetrie des Filters  $\mathbf{G}^{[j],\kappa}$  (zu jedem  $k$  existiert wegen  $G_{1-k}^{[j]} = -G_k^{[j]}$  ein  $\sigma(k)$  mit  $g_{\sigma(k)} = -g_k$  und  $\sigma^2 = \text{Id}$ ) betrachten wir

$$\Gamma(L + iy)\Gamma(L - iy) \stackrel{\text{Lem 4(iv)}}{=} \Gamma(L + iy)\overline{\Gamma(L + iy)} \in \mathbb{R}_+ \quad (5.29)$$

$$\stackrel{(5.29)}{=} |\Gamma(L + iy)\Gamma(L - iy)|$$

$$\stackrel{\text{Lem 4(xi)}}{=} \sqrt{\frac{\pi y \pi(-y)}{\sinh(\pi y) \sinh(-\pi y)}} \prod_{s=1}^{L-1} \sqrt{s^2 + y^2} \sqrt{s^2 + (-y)^2}$$

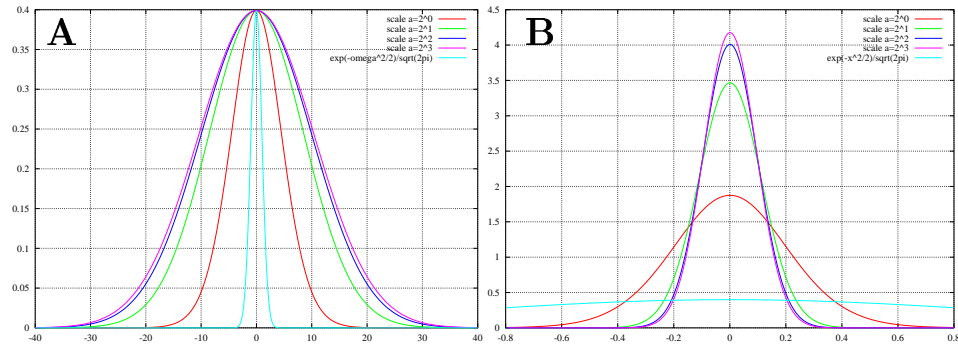
$$= \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)} \prod_{s=1}^{L-1} (s^2 + y^2), \quad (5.30)$$

wobei die letzte Gleichheit aus  $\text{sign}(x) = \text{sign}(\sinh(x))$ <sup>6</sup> und der Symmetrie des  $\sinh$  folgt. Also berechnet sich unter weiterer Ausnutzung der zweiten Symmetrie in  $\mathbf{G}^{[j],\kappa}$  die charakteristische Funktion als

$$\hat{f}_X(\omega) = \frac{\prod_{j=1}^{\frac{k}{4}} \left( \frac{\pi \omega g_j}{2 \sinh(\frac{\pi}{2} \omega g_j)} \prod_{s=1}^{L-1} \left( s^2 + \left( \frac{\omega g_j}{2} \right)^2 \right) \right)^2}{\sqrt{2\pi} (\Gamma(L))^k} \quad (5.31)$$

<sup>5</sup> Mit  $k = 140$  Funktionsauswertungen bei  $\mathbf{G}^{[3],\kappa}$  mit einer Rechenzeit von je ca. 6 Minuten (in der Produktdarstellung von  $\Gamma$  auf etwa 6 Dezimalen genau, was grob  $1.5 \cdot 10^8$  Faktoren benötigt, gerechnet in C++ auf einem Pentium II-400 PC) wären das für beispielsweise 4096 Funktionswerte von  $\hat{f}_X$  in etwa  $6\frac{1}{2}$  Jahre Gesamtrechenzeit!

<sup>6</sup> Signumfunktion  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \mathbb{R} \ni \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0. \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



**Abbildung 5.13:** Numerisch berechnete charakteristische Funktion  $\hat{f}_X(\omega)$  (A) und Dichtefunktion  $f_X(x)$  (B) von Wavelet-gefiltertem Speckle zu verschiedenen Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$ . Als Vergleich ist eine Standardnormalverteilung eingezeichnet.

$$\stackrel{L=3}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\frac{k}{4}} \left( \frac{\pi\omega g_j (4 + \omega^2 g_j^2) (16 + \omega^2 g_j^2)}{128 \sinh\left(\frac{\pi}{2}\omega g_j\right)} \right)^2, \quad (5.32)$$

wobei  $g_j$  für  $1 \leq j \leq \frac{k}{4}$  einen ‘Quadranten’ von  $\mathbf{G}^{[j],\kappa}$  durchläuft.

Zeichnet man die numerisch berechneten  $\hat{f}_X(\omega)$ , so sieht man eine große Ähnlichkeit mit der Normalverteilung (vgl. Abbildung 5.13 A), was nach genauerem Studium des zentralen Grenzwertsatzes in der verallgemeinerten Version (Bemerkung nach Satz 1) nicht weiter verwunderlich erscheint. Auch  $f_X(x)$  ist mittels FFT numerisch berechenbar (siehe Abbildung 5.13 B). Der Quellcode für die numerische Berechnung mit Octave/Matlab findet sich in Anhang C.2 (Algorithmus 7).

Die Betragsbildung bewirkt nun lediglich ein Umskalieren der rechten Hälfte der Dichtefunktion um den Faktor 2. Durch die Betragsmaximierung werden noch die Häufigkeiten der niedrigeren Werte zugunsten der höheren verschoben, so dass tatsächlich Verteilungen wie in Abbildung 5.4 erreicht werden. Das kann im hier vorgestellten Modell jedoch nicht simuliert werden. Deshalb muss für die Schwellwertberechnung oder -beurteilung die Schwellwertbildung vor die Maximierung gezogen werden. Dies bewirkt keine Veränderung im Endresultat, wie man sich leicht überlegt, Maximierung und Schwellwertbildung kommutieren. Dies gilt jedoch nicht für die Berechnung des Fehlers zweiter Art, für den durch die fehlende Maximierung nur eine obere Schranke berechnet wird. Es gehen in jedem Fall weniger Kanten verloren, als dieser angibt.

Die Erwartungen der Beträge und damit der Betragsmaxima verhalten sich über die Skalen hinweg zueinander wie die Streuungen der Wavelet-Koeffizienten. Damit kann aus den Quotienten der Wurzeln der rechten Seiten von (5.25)–(5.28) die LIPSCHITZ-Regularität geschätzt werden. Sie hat in etwa den Wert  $\alpha_{\text{Rausch}} = -1.1368$  (wobei dieser sich bei Hinzuziehung weiterer



Skalen noch leicht erhöhen dürfte).

Für Kanten modelliert man zwei Regionen mit homogenem Rauschen der Intensitätserwartungen  $\mu_1 > \mu_2$  mit Kantenstärke  $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ . Einige der Vereinfachungen sind nun nicht mehr möglich (z.B. der letzte Schritt in (5.21)). Ist also (was der maximalen Filterantwort entspricht) der Wavelet-Filter zentriert über der Kantenposition, so muss  $\hat{f}_X$  noch mit  $\kappa^{\frac{i\omega}{2} \sum_{j=1}^{k/2} g_j}$  multipliziert werden, wobei je nach Orientierung nur die positiven bzw. nur die negativen  $g_j$  aufsummiert werden. Für  $f_X$  entspricht diese Modulation einer Translation um  $\frac{1}{2} \ln \kappa \sum_{j=1}^{k/2} g_j$ .<sup>7</sup> Dieser Wert ist also der Erwartungswert für die Wavelet-Koeffizienten und für hinreichend große  $\kappa$  in guter Näherung auch für ihre Beträge. Dies liefert wiederum eine LIPSCHITZ-Regularität von  $\alpha_{\text{Kante}} = -0.083555$ .

## 5.4 Kantentrennwahrscheinlichkeit in der kontinuierlichen Wavelet-Transformierten

Hier sollen noch Ideen zu einer weiteren Berechnungsmöglichkeit vorgestellt werden. Details wurden hierzu nicht ausgeführt, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen. Auch die verwendeten mathematischen Grundlagen werden nur aus der Literatur zitiert und sind nicht in Kapitel 1 angegeben.

Man betrachte ein geeignet (s.u.) kontinuierlich fortgesetztes SAR-Bild, im einfachsten Fall homogenen Speckle. Dieser stellt einen stochastischen Prozess in stetiger Zeit mit zweidimensionalem Zeitparameter  $t$  dar. Zur Vereinfachung soll jedoch hier nur von einem eindimensionalen Bild ausgegangen werden. Die in der Faltung des Rauschens  $N(t)$  mit einem Wavelet  $\psi(t)$  enthaltene Integration ist nun als stochastisches Integral (z.B. im Sinne von ITÔ, vgl. [Øk, Ba, Gä]) mit dem integrierten Rauschprozess  $B(t)$  zu verstehen:

$$J = \int \Psi(t)N(t)dt = \int \Psi(t)dB(t) \quad (5.33)$$

Dabei ist  $\Psi$  die geeignet transformierte (d.h. gestreckte, verschobene und gespiegelte) Version von  $\psi$ .  $N$  muss also in gewissem Sinne die ‘Ableitung’ des Prozesses  $B$  sein. Damit kann  $N$  nicht einfach als punktweise DIRAC-Stöße mit zufälligen Gewichten gemäß der Verteilung des Speckle, also als beliebige Funktion in  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  angesehen werden. Es bieten sich zwei Varianten an:

1. Die DIRAC-Stöße sind weiterhin ohne Häufungspunkt und abzählbar, jedoch an zufälligen Positionen in der Zeit. Dies führt für  $B$  zu einem POISSON-Prozess [Ri].

---

<sup>7</sup> Die Summe auf der rechten Seite nimmt für  $g = \mathbf{G}^{[s],\kappa}$ ,  $s = 1, \dots, 4$  (Skala  $a = 2^0, \dots, 2^3$ ) die Werte  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{2816}{2048} = \frac{11}{8}$  und  $\frac{175104}{65536} = \frac{171}{64}$  an.

2.  $N$  wird als stückweise konstant (Treppenfunktion) mit zufälligen Ordinatenwerten angesehen.  $B$  ist dann im Grenzfall für die Treppbreite  $b \rightarrow 0$  eine BROWNSche Bewegung [Ri].

Wir wollen uns für den zweiten Fall entscheiden. Nach [Ri] ist  $N(t)$  ein weißes Rauschen bei beliebiger identisch-unabhängiger Verteilung und entspricht den Zuwächsen von  $B$ . Gemäß Lemma 48.2 in [Ba] ist ein Integral  $\int f(t)dB(t)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0, sofern auch die Zuwächse von  $B$  Erwartungswert 0 haben und  $f$  stetig differenzierbar ist. Durch getrennte Betrachtung der Driftterme von  $B$  gilt allgemeiner (ohne die Voraussetzung an die Zuwächse von  $B$ ), daß dieses Integral normalverteilt ist.

Damit ist  $J$  eine normalverteilte Zufallsvariable. Dies gilt wegen der Translationsinvarianz des Rauschprozesses  $N$  für alle Werte seiner Wavelet-Transformierten (Diese ist also erneut 'Ableitung' einer BROWNSchen Bewegung). Um die Verteilung von  $J$  zu bestimmen, genügt es, Erwartungswert und Varianz zu kennen.

Diese können für stochastische Prozesse zweiter Ordnung (mit existierenden zweiten Momenten von  $X_t$ ) analog zu den Vorgehensweisen in [CH, Pa] berechnet werden. Es gilt also für das Rauschen eines Amplitudendichtebildes mit Intensitätserwartung  $\mu$

$$E(J) = \int E(N(t))\Psi(t)dt = A \int \Psi(t)dt = 0 \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(J) &\stackrel{(5.34)}{=} E(J^2) = \iint E(N(t)N(s))\Psi(t)\Psi(s)dtds \\ &= \iint E((N(t))^2)\delta(t-s)\Psi(t)\Psi(s)dtds = B \int (\Psi(t))^2 dt, \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei nach Abschnitt 2.2.2 bzw. (A.31) und (A.32)  $A = \frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{L}$  und  $B = \frac{\Gamma''(L)}{4\Gamma(L)} + \frac{\Gamma'(L)}{2\Gamma(L)} \ln \frac{\mu}{L} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\mu}{L}\right)^2 \stackrel{L=3}{=} \frac{1+\gamma_E^2-3\gamma_E+\frac{\pi^2}{6}}{8} + \frac{3-2\gamma_E}{8} \ln \frac{\mu}{3} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\mu}{3}\right)^2$ .

Gemäß (1.20) ist  $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ , also mit  $\psi(t) \in \mathbb{R}$

$$\int (\Psi(t))^2 dt = \frac{1}{a} \int \left(\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 dt = \int (\psi(u))^2 du = \|\psi\|_{L^2}^2 = 1 \quad (5.36)$$

Demnach ist  $J$  normalverteilt mit verschwindendem Erwartungswert und Varianz  $B$ . Die Dichtefunktion der Beträge der Wavelet-Koeffizienten  $|J|$  ist also  $f_{|J|}(x) = \sqrt{\frac{2}{B\pi}} e^{-\frac{x^2}{2B}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ . Der Erwartungswert von  $|J|$  ergibt sich damit als

$$E(|J|) = \sqrt{\frac{2}{B\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2B}} dx = \sqrt{\frac{2B}{\pi}} \quad (5.37)$$

Das Rauschen ist damit konstant auf den Wavelet-Koeffizienten, was einer LIPSCHITZ-Regularität von  $\alpha_{\text{Rausch}} = -\frac{1}{2}$  entspricht, wenn man davon ausgeht, dass sich dies auch auf die Maximierung in  $|J_t|$  überträgt.

Wie man sich leicht überlegt, gilt (5.34)–(5.37) entsprechend auch für den zweidimensionalen Fall, allerdings folgt hier  $\alpha_{\text{Rausch}} = -1$ . Für die Kante kann man erneut die Modellierung als HEAVYSIDE-Stufe (unverrauscht) mit Regularität  $\alpha_{\text{Kante}} = 0$  verwenden (vgl. Abschnitt 5.1). Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn man in (5.34) die Integration getrennt betrachtet:

$$\begin{aligned} E(\tilde{J}) &= A_1 \int_{\mathbb{R}_+} \Psi(t) dt + A_2 \int_{\mathbb{R}_-} \Psi(t) dt = (A_1 - A_2) \int_{\mathbb{R}_+} \Psi(t) dt \\ &= \frac{\ln \sqrt{\kappa}}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}_+} \psi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{2} \sqrt{|a|} \ln \sqrt{\kappa} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad (5.38)$$

und analog in zwei Dimensionen

$$E(\tilde{J}) = \frac{1}{2} |a| \ln \sqrt{\kappa} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad (5.39)$$

also in beiden Fällen eine LIPSCHITZ-Regularität von  $\alpha_{\text{Kante}} = 0$ . Die Varianz kann ebenfalls durch getrennte Integrale berechnet werden.

Auch mit dieser Variante kann die Schwellwertwahl beurteilt bzw. verbessert werden.

## 5.5 Vergleich der Berechnungsmöglichkeiten

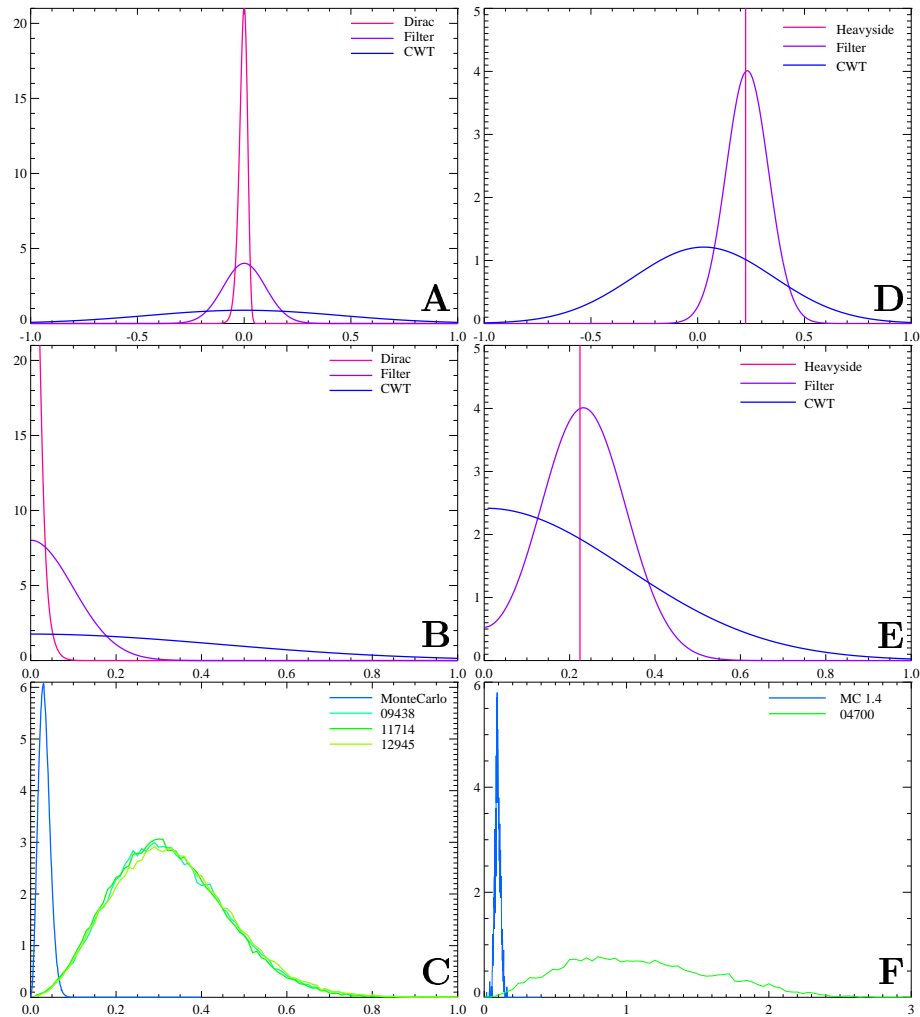
Zusammenfassend sollen hier die vier in den letzten Abschnitten vorgestellten Varianten zur Berechnung von stochastischen Eigenschaften und Verteilungen der Wavelet-Transformierten (bzw. ihrer Betragsmaxima) von Rauschen und Kante verglichen werden.

Abbildung 5.14 zeigt für die einzelnen Verfahren (soweit möglich) die Histogramme bzw. Verteilungen der Wavelet-Koeffizienten, ihrer Beträge sowie ihrer Betragsmaxima für homogenes Speckle-Rauschen (Intensitätserwartung  $\mu = 1$ ) und für eine Kante der Stärke  $\kappa = 1.4$  auf Skala  $a = 2^2$ .

Zunächst zu den Wavelet-Koeffizienten selbst (Abb. 5.14 A und D). Durch die Verwendung der Werte aus dem Algorithmus (geeignete Normierung) stimmen die Erwartungswerte der einfachen Peak-Modellierung mit denen der Filterberechnung gut überein. Lediglich die Varianzen sind geringer, da sich die komplette Information auf einen einzelnen Peak, also eine Realisierung der SAR-Bild-Verteilung beschränkt. Bei der stetigen Transformation ergeben sich deutliche Unterschiede. Dies liegt vor allem an der anderen Normierung des Wavelets. Soll dieses Verfahren also zur Schwellwertbeurteilung herangezogen werden, müssen die Normierungen aus dem Algorithmus verwendet werden.

Diese Beobachtungen übertragen sich auch auf die Beträge der Koeffizienten (Abb. 5.14 B und E).

Die Betragsmaxima (Abb. 5.14 C und F) wurden zum bereits in Abschnitt 5.2 begonnenen Vergleich der simulierten Bilder mit realen SAR-Bildern herangezogen. Der Vergleich zeigt, dass in der Realität deutlich



**Abbildung 5.14:** Histogramme bzw. Verteilungen der Wavelet-Koeffizienten (A,D), ihrer Beträge (B,E) und ihrer Betragsmaxima (C,F) auf Skala  $a = 2^2$  für Rauschen (A–C) und Kante (D–F).

höhere Intensitätserwartungen als  $\mu = 1$  und auch deutlich höhere Kantenstärken als  $\kappa = 1.4$  auftreten.

Bei den meisten der vorgestellten Berechnungsvarianten war es auch möglich, theoretische oder berechnete Werte für LIPSCHITZ-Regularitäten von Rauschen oder Kanten zu modellieren oder zu bestimmen. Wurden diese aus dem Histogramm abgelesen, so handelt es sich um die am häufigsten auftretenden Regularitäten (*Maximum Likelihood*). Die einzelnen Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Die Werte des zweiten bis vierten der sechs dort aufgeführten Modelle verwenden zur Berechnung Teile des Algorithmus aus Kapitel 3.

Bezüglich der LIPSCHITZ-Regularität zeigt sich die gute Übereinstimmung der einzelnen Modellierungen wesentlich deutlicher als in den Verteil-

Modell	Abschnitt	LIPSCHITZ-Regularität	
		Rauschen	Kante
DIRAC-Peaks/HEAVYSIDE-Kante	5.1	-2	0
Punktbild	5.1	-2	—
Monte-Carlo-Simulation	5.2	$\approx -1.2$	$-0.1 \dots 0$
Homog./Musterlsg.-Kanten SAR-Bild	5.2	$-1 \dots -0.9$	$-0.05 \dots 0$
Filter-Koeffizienten	5.3.2	-1.1	-0.08
Stetige Transformation	5.4	-1	0

**Tabelle 5.1:** LIPSCHITZ-Regularitäten aus verschiedenen Modellierungen.

lungen der Waveletkoeffizienten, da erstere von der Wahl von Normierungskonstanten oder Bildintensitäten unabhängig ist.

## 5.6 Interpretation von Filterungen auf Dichtebildern

Will man ein SAR-Bild  $B : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $B \in \{A, I\}$ , d.h. Amplitude oder Intensität,  $A = \sqrt{I}$ ) in verringerter Auflösung betrachten, so verwendet man an Stelle der Gitterwerte  $B|_{(kN)^2}$  oft die (arithmetisch) gemittelten Intensitäten längs des  $k \times k$  Gitters

$$\bar{I}(x, y) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=kx}^{kx+k-1} \sum_{j=ky}^{ky+k-1} I(i, j). \quad (5.40)$$

Aus physikalischen Gründen (die Intensität ist — abgesehen vom Speckle — proportional zur rückgestreuten Energie von der im Bildpunkt abgebildeten Region) verwendet man auch bei Amplitudenbildern gemittelte Intensitätswerte ( $\bar{A} = \sqrt{\bar{I}}$ ). Weitere Verwendung findet die Mittlung z.B. bei SAR-spezifischen Kantenfindungsverfahren wie dem von TOUZI *et al.* [TLB] (vgl. Abschnitt 7.2.1), der Quotienten von gemittelten Regionen betrachtet. Allgemeiner ist beispielsweise eine einfache (Rausch-)Filterung mittels Faltung mit einer GAUSS- oder Splinefunktion  $\phi$

$$(\phi * I)(x, y) = \iint \phi(i, j) I(x - i, y - j) di dj \quad (5.41)$$

diskret betrachtet eine gewichtete Mittelung der Form

$$\tilde{I}(x, y) = \sum_{i=-\delta}^{\delta} \sum_{j=-\delta}^{\delta} \mu_{i,j} I(x - i, y - j), \quad (5.42)$$

also normiert mit  $\sum_{i=-\delta}^{\delta} \sum_{j=-\delta}^{\delta} \mu_{i,j} = 1$  eine gewichtete arithmetische Mittlung. In allen obigen Fällen handelt es sich jedoch um lineare Operatoren von  $L^2(\mathbb{R}^2)$  bzw.  $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ .

Betrachtet werden nun lineare Abbildungen  $\Phi$  auf Intensitäts- oder Amplitudendichtebildern. Diese treten neben dem in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus z.B. auch in Wavelet-basierten Specklefiltern (siehe Abschnitt 7.2.1, Seite 112) auf. Wie schon in [BTE] festgestellt wurde, handelt es sich — bezogen auf das Intensitätsbild — bei der Kette

$$I \xrightarrow{\ln} \ln I \xrightarrow{\Phi} \Phi(\ln I) \xrightarrow{\exp} e^{\Phi(\ln I)} \quad (5.43)$$

im diskreten um eine (gewichtete) geometrische Mittellung der Form

$$J(x, y) = \prod_{i=-\delta}^{\delta} \prod_{j=-\delta}^{\delta} I(x-i, y-j)^{\mu_{i,j}}. \quad (5.44)$$

Eine Wavelet-Filterung von Amplitudendichtebildern wie in (5.8) entspricht (bis auf die Normierung) der Differenz zweier gewichtet arithmetisch gemittelter Regionen. Im Intensitätsbild kann sie also als Quotient zweier gewichtet geometrisch gemittelter Regionen interpretiert werden. Nach [BTE] ist jedoch für homogene SAR-Bilder der Quotient zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gleich  $e^{\ln L - \frac{\Gamma'(L)}{\Gamma(L)}}$  (aus Tabelle 2.1 entnimmt man das direkt mit  $\frac{E(I)}{e^{E(\ln I)}}$ ,  $I = |X|^2$ ), also nur abhängig von der Zahl der Looks  $L$ . Der Quotient von (nicht gewichteten) arithmetischen Mitteln bei TOUZI *et al.* entspricht in diesem Spezialfall und bei geeigneter Wahl der Regionen also (bis auf Normierungskonstanten) einer Wavelet-Filterung des Amplitudendichtebildes mit dem HAAR-Wavelet.

Gleichung (5.44) legt den Schluß nahe, auf positiv-reellwertigen Funktionenräumen eine Art von ‘logarithmisch linearen’ Abbildungen  $\Psi$  zu definieren mit

$$\Psi(f^\lambda g^\mu) = \Psi(f)^\lambda \Psi(g)^\mu \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (5.45)$$

Die bekannte Theorie über lineare Abbildungen und Vektorräume müsste dann geeignet übersetzt werden, um eine Interpretation für die Verwendung von Wavelets auf Dichtebildern zu erhalten. In endlicher Dimension “ $(\mathbb{R}_+^\times)^n = e^{(\mathbb{R}^n)}$ ” wird z.B. aus der Standardbasis die ‘log-Basis’  $(e, 1, 1, \dots, 1)^\top, (1, e, 1, \dots, 1)^\top, \dots, (1, 1, \dots, 1, e)^\top$ .

Einfacher ist jedoch die folgende Interpretation:

**Lemma 7** Die positiv-reellwertigen Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxminus)$  bezüglich der Addition ( $m \in M$ )

$$(f_1 \boxplus f_2)(m) = f_1(m) f_2(m) \quad (5.46)$$

und der Skalarmultiplikation ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$(\lambda \boxminus f)(m) = (f(m))^\lambda. \quad (5.47)$$

Nullvektor ist die konstante Funktion  $f_0 \equiv 1$ , Inverses von  $f$  die Funktion  $\boxminus f : m \mapsto (f(m))^{-1}$ , also  $\boxminus f = -1 \boxminus f$ .

**Beweis:** Die ABELSche Gruppenstruktur bzgl.  $\boxplus$  entspricht derjenigen von  $(\mathbb{R}_+^\times, \cdot)$ . Die Eigenschaften zur skalaren Multiplikation  $\boxtimes$  (neutrales Element und Assoziativität) wie auch die Distributivgesetze bzgl.  $\boxtimes$  und  $\boxplus$  folgen direkt aus den Potenzgesetzen in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Eine Erweiterung für komplexwertige Funktionen z.B. auf  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C}, \Re z > -|z|\}$  ist nicht möglich, da die für die Definition von  $\boxtimes$  über den Logarithmus notwendige Einschränkung auf eine geschlitzte komplexe Ebene der Abgeschlossenheit von  $\boxplus$  widerspricht.

**Lemma 8** Weiter ist  $\tilde{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{V}, \ln f \in L^2(M)\}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\tilde{\mathcal{V}}} = \int_M \ln(f_1(m)) \ln(f_2(m)) d\mu(m) \quad (5.48)$$

ein HILBERT-Raum.

**Beweis:** Die  $(\boxplus, \boxtimes)$ -Bilinearität folgt aus einfachem Einsetzen mit den Logarithmusgesetzen und der Linearität des Integrals. Symmetrie und positive Definitheit sieht man direkt. Die  $\|\bullet\|_{\tilde{\mathcal{V}}}$ -Vollständigkeit von  $\tilde{\mathcal{V}}$  folgt direkt aus der Vollständigkeit von  $L^2(M)$  und  $\ln(\mathbb{R}_+^\times) = \ln(]0, \infty[) = \mathbb{R}$ .  $\square$

Dies liefert eine Interpretation der Wavelet-Transformation eines Intensitäts- oder Amplitudendichtebildes als  $(\boxplus, \boxtimes)$ -lineare Abbildung eines Intensitätsbildes  $I \in \tilde{\mathcal{V}}$  für  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  bzw.  $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi(\ln f)(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_M \ln(f(m)) \psi\left(\frac{m-b}{a}\right) d\mu(m) = 2\pi(\mathcal{D}_a \psi * \ln f)(b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_M \ln\left((f(m))^\psi\left(\frac{m-b}{a}\right)\right) d\mu(m) =: 2\pi(\ln(\mathcal{D}_a \psi \otimes f))(b) \end{aligned} \quad (5.49)$$

**Bemerkung und Warnung:** Die in (5.49) eingeführte ‘gemischte  $\tilde{\mathcal{V}}$ -Faltung’  $\otimes : L^2(M) \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}, (\psi, f) \mapsto e^{\psi * \ln f}$  ist *nicht* kommutativ, anders als die ‘reine  $\tilde{\mathcal{V}}$ -Faltung’  $\boxtimes : \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}, (f_1, f_2) \mapsto e^{\ln f_1 * \ln f_2}$ .

## Kapitel 6

# Problempunkte und Auswege

**H**IER werden Hintergründe erklärt, warum der in Kapitel 3 beschriebene Algorithmus (wie auch ähnliche Verfahren) generelle Probleme in sich birgt. Interpretationen und Validierungen der Ergebnisse werden angegeben, Verbesserungsvorschläge gemacht und Ausblicke geliefert.

Abschnitt 6.1 beschreibt Versuche, die vor Ort im Wattenmeer durchgeführt wurden, um die im SAR-Bild sichtbare Wasserstandslinie zu validieren und die topographische Höhendefinition zu interpretieren. In Abschnitt 6.2 wird Verbesserungsvorschlägen für den genannten Algorithmus nachgegangen. Die generelle gezeitenbedingte Problematik von Gezeitenstrom und Morphodynamik bei der Anwendung von Wasserstandslinienverfahren erklärt Abschnitt 6.3.

### 6.1 Experimente im Wattenmeer

Zu Validierungs- und Interpretationszwecken wurden vom DFD/DLR Oberpfaffenhofen mehrere Versuche vor Ort im Wattenmeer durchgeführt. Dies geschah zum Teil in Zusammenarbeit mit mehreren Forschungszentren im norddeutschen Raum.

#### 6.1.1 Abbildungstreue der Wasserstandslinie im SAR-Bild

Nachdem vorangegangene Untersuchungen [Me] gezeigt haben, dass unterschiedliche Radarfrequenzen (L-, C- und X-Band bei SIR-C/X-SAR Daten) von trocken gefallenem Wattgebieten unterschiedlich reflektiert werden, soll die Übereinstimmung der auf den ERS-1/2-SAR-Bildern sichtbaren mit der tatsächlichen Wasserstandslinie überprüft werden. Am 4. April 1998 wurden verschiedene Geräte auf ihre Eignung für den Einsatz im Wattenmeer getestet. 70 Tage (2 Perioden des ERS-2, also 1002 Orbits) später, am 13. Juni 1998, wurde dann das endgültige Überprüfungsexperiment durchgeführt.

Mit Hilfe des Forschungsschiffes 'Südfall' des Forschungs- und Technologie-Zentrums (FTZ) Westküste der Universität Kiel wurden (neben anderen



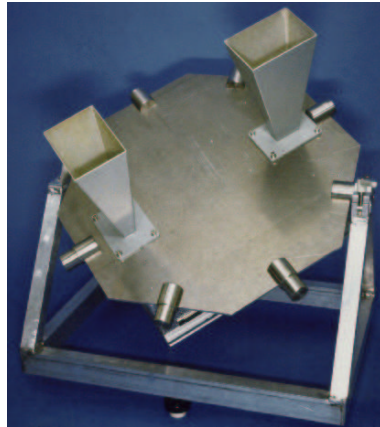
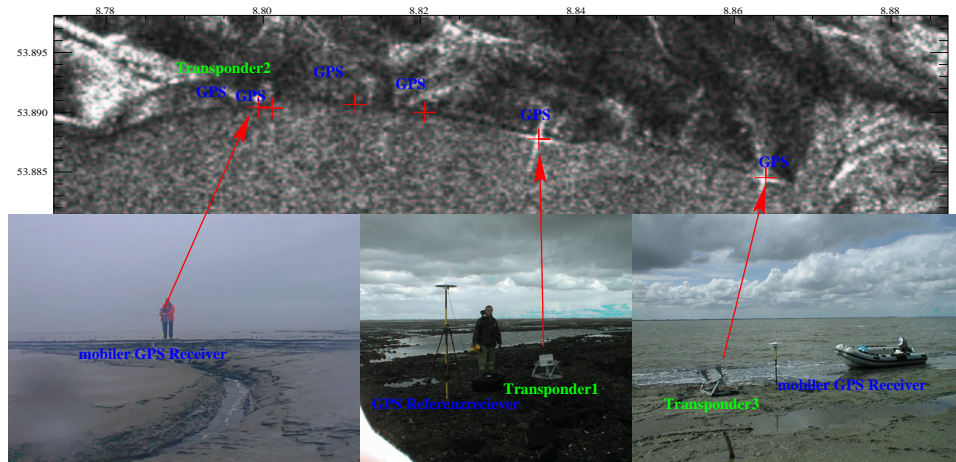


Abbildung 6.1: ERS-2 C-Band Transponder.

Experimenten, z.B. zur Messung der Meeresströmung und um Strömungskanten im SAR-Bild zu identifizieren) DLR-Mitarbeiter an unterschiedlichen Stellen am Süden des Wattengebietes 'Medemsand' im *Elb*-Ästuar abgesetzt. Zur Ortsbestimmung wurden zwei Instrumententypen verwendet:

- Zur Markierung der Land-Wasser-Grenze im ERS-2 SAR-Bild während des Überfluges wurden drei aktive C-Band-Transponder verwendet. Diese verstärken und reflektieren das vom ERS-2 ausgestrahlte Radarsignal quasi verzögerungsfrei zurück zur SAR-Antenne. Die Verzögerung ist so gering, dass im Rahmen der Bildauflösung das verstärkte Signal sich im prozessierten SAR-Bild genau an der Stelle des Transponders befindet. Abbildung 6.1 zeigt einen derartigen Transponder. Er muss entsprechend der Überfluggeometrie des Satelliten ausgerichtet aufgestellt werden. Leider hatte der Versuch vom 4. April gezeigt, dass die Verwendung von wesentlich handlicheren, faltbaren Cornerreflektoren (eine Art Katzenauge für Radar) mit  $\approx 1$  m Kantenlänge keine sichtbaren Markierungen im SAR-Bild des Wattenmeers ergibt.
- Mittels GPS-Empfänger wurden Ortsbestimmungen einzelner Punkte entlang der Wasserstandslinie durchgeführt. Diese können in geocoordierte SAR-Bilder (GEC/GTC) eingezeichnet werden.

Zwei der verwendeten Transponder (Nummer 1 und 3) wurden bis auf 10 m genau an die Wassergrenze auf der Sandbank 'Medemsand' platziert, also weniger als einen Pixel Abstand im ERS-2-SAR-Bild. Ein dritter (Nummer 2) war etwas weiter entfernt, da die geringe Neigung der entsprechenden Region und die einlaufende Tide keine nähere Positionierung zuließ, ohne dass der Transponder nass geworden wäre. Ein GPS-Messpunkt in der Nähe markiert die genaue Wasserstandslinie.



**Abbildung 6.2:** Vermessung der Land-Wassergrenze mit GPS und Transpondern.

Der Versuch ergab: Die im ERS-2 C-Band SAR-Bild erkennbare Wasserlinie entspricht genau der tatsächlichen Land-Wasser-Grenze. Dies haben sowohl die Positionen der vom Transponder reflektierten Signale im SAR-Bild als auch die GPS-Messungen ergeben. Zudem liegen die GPS-Messungen bei den Transpondern direkt auf der Position der Transpondersignale im Bild. Das Ergebnisbild (ERS-2 Orbit 16452 Frame 2511<sup>1</sup>) wird mit entsprechenden Photographien der Transponder-Standplätze in Abbildung 6.2 gezeigt.

Des Weiteren wurden im April und Juni Wetterbeobachtungen gemacht, um die Rückstreuintensitäten auf den beiden SAR-Bildern interpretieren zu können (helle oder dunkle Wattflächen). Weiter wurden Wattgebiete verschiedener Oberflächenbeschaffenheit fotografiert und ihre Position mittels GPS festgestellt.

### 6.1.2 Größe eines Auflösungspixels im SAR-Bild

Bei weiteren Exkursionen ins Watt am 26. und 28. April 1999 wurden von einigen DLR-Mitarbeitern und mir die Beschaffenheit des Watts untersucht. Es sollte festgestellt werden, inwieweit eine genaue Höhenaussage in der Auflösung eines SAR-Bildes sinnvoll ist. Symbolisch wurden Quadrate von der ungefähren Größe eines SAR-Pixels ins Watt 'gezeichnet' und fotografiert. Die Bilder in Abbildung 6.3 zeigen die Pixel eines ERS-1/2- und eines AeroSensing-SAR-Bildes. Die Eckpunkte werden jeweils durch 4 der an der Exkursion beteiligten Personen 'gestellt'.

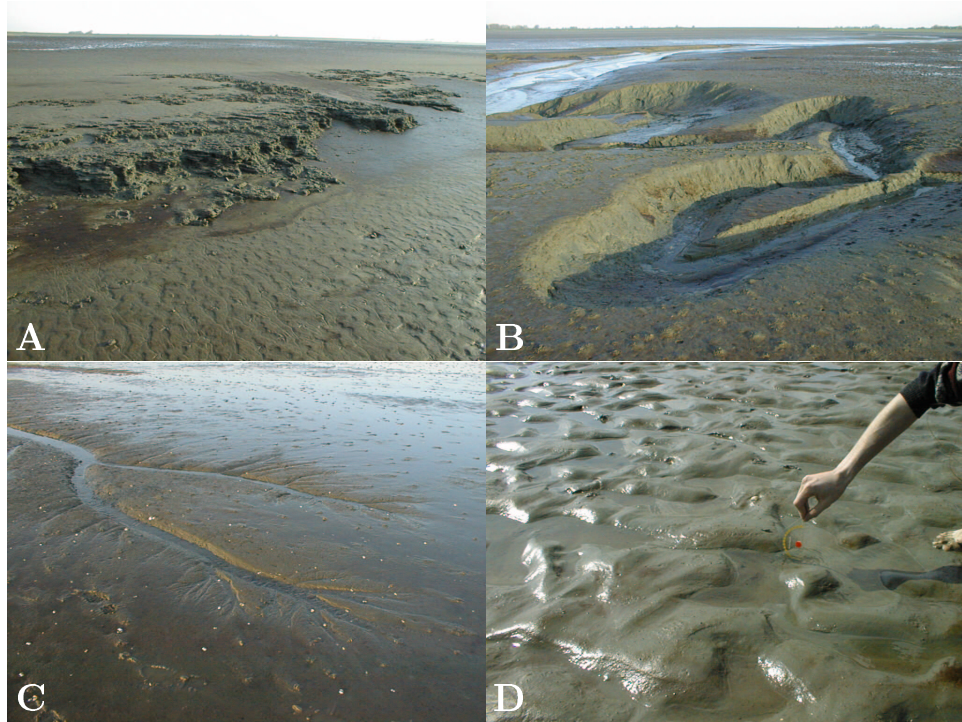
Wie man gut aus den Bildern sieht, ist es bei großräumig flachen Wattgebieten möglich, eine einheitliche Pixelhöhe bis auf wenige Zentimeter zu bestimmen. Dies ist jedoch nicht immer so. Rippel im Watt oder kleine Priele (Wasser-Abflußrinnen) ergeben an einigen Stellen kompliziertere Struktu-

<sup>1</sup> Siehe auch Tabelle D.2.



**Abbildung 6.3:** Pixelgrößen von SAR-Bildern übertragen auf Gebiete im Wattenmeer. **A:**  $12.5 \times 12.5 \text{ m}^2$  ERS-1/2-Pixel, **B:**  $2.5 \times 2.5 \text{ m}^2$  AeroSensing-Pixel.

ren, wie Abbildung 6.4 zeigt. In diesen Fällen ist eine genaue Höhendefinition oft nicht sinnvoll. Für die Anwendung in Strömungsmodellen ist hier die Verwendung einer mittleren Höhe sinnvoll. Nicht auflösbare Feinstrukturen können jedoch auch eine genaue Verfolgung der Wasserstandslinie



**Abbildung 6.4:** Struktur der Wattoberfläche. **A:** Watt-Schichtung, **B/C:** Priele, **D:** Rippelstruktur.

behindern. Allerdings kommt es eher selten vor, dass sich schmale Priele ‘flussaufwärts’ erneut weiten. Auch aufgrund ihrer Höhendifferenzen ist eine Verfolgung der Wasserstandslinien in die Priele hinein meist nicht sinnvoll.

Ferner wurden bei den oben genannten Exkursionen verschiedene Watt-Typen lokalisiert, um sie mit Klassifizierungsergebnissen von optischen Satellitendaten (siehe [Hoj]) zu vergleichen.

## 6.2 Verbesserung des Blocktracing

Gerade auf kontrastarmen SAR-Bildern werden bisweilen in einigen Abschnitten Teile der Küstenlinie durch die Schwellwertbildung im vorgestellten Algorithmus (Kapitel 3) übersehen. Sind die entstehenden Lücken zu groß, so kann es vorkommen, dass das Blocktracing durch die Küste hindurch aufs Land läuft und dieses von hinten her ‘auffüllt’ (und damit als Wasser markiert). Ein niedriger Schwellwert kann hier nur bedingt helfen, da durch die erhöhte Zahl von rauschbedingten Artefakten die Qualität der Küstenlinie leidet oder gar bei zu vielen Artefakten das Blocktracing nicht mehr startet.

Aus diesem Grund wurden Versuche unternommen, die — mit möglicher Interaktion eines Endnutzers — eine Verbesserung des Blocktracinglaufes

ermöglichen sollen. Beschrieben wird hier die Textursegmentierung (Abschnitt 6.2.1) und die im halbautomatischen Algorithmus verwendete manuelle Nachbearbeitung des Schwellwterergebnisses (Abschnitt 6.2.2).

### 6.2.1 Textursegmentierung

Einige Versuche zu einer Textursegmentierung mittels überwachter Nächste-Nachbarn-Klassifizierung [Ww] wurden unternommen. Als Texturklassen dienten Teilmengen des von Wavelet-Koeffizienten aufgespannten Raumes [Ww, Rd]. Referenzklassen (Wasser und Watt) werden durch den Benutzer markiert. Sichtbare Ergebnisse konnten jedoch nur bei Verwendung des nicht normierten Wavelet-Koeffizientenvektors erzielt werden, die Ergebnisse beim normierten Fall waren schlecht geeignet.

Wegen der Linearität der Wavelet-Transformation lässt sich jedoch zeigen, dass ohne die Normierung das dominante Texturmaß stets die Intensität (bzw. Intensitätsdichte) der entsprechenden Region ist, also eine Schwellwertbildung meist bessere Resultate liefert. Zudem ist der Rechenaufwand der Texturklassifizierung relativ hoch.

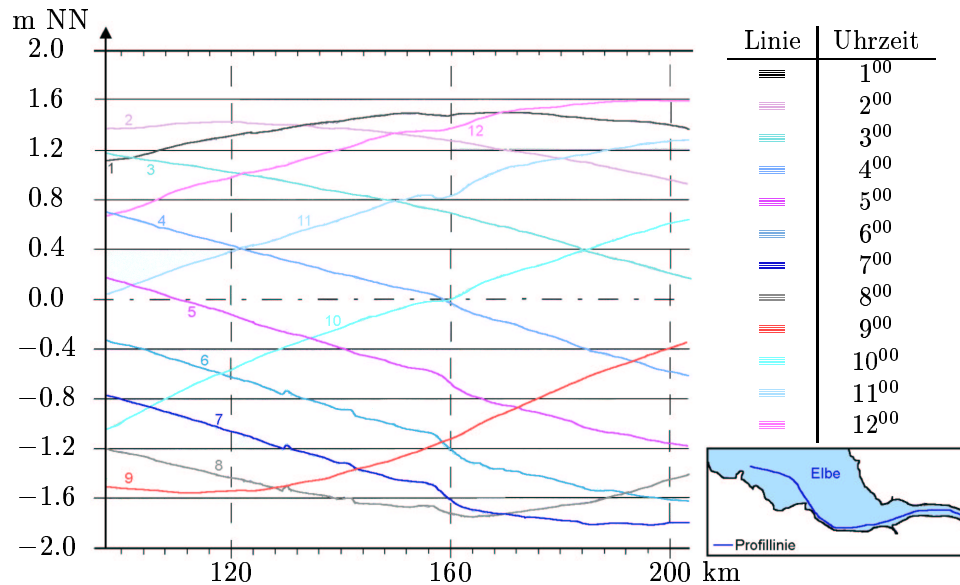
Das Texturmaß 'Kantendichte', das beim Blocktracing-Algorithmus indirekt gemessen wird, ist also zumindest durch die Klassifizierung nicht zu verbessern. Eine Möglichkeit, durch ebenfalls geringe manuelle Eingriffe des Benutzers bessere Ergebnisse zu erhalten, wird im Folgenden beschrieben.

### 6.2.2 Halbautomatischer Algorithmus

Ein weiterer Weg, Eingriffe des Benutzers im Algorithmus zuzulassen, ist die hier vorgestellte und als Variante des Algorithmus aus Kapitel 3 implementierte halbautomatische Version. Dabei hat der Benutzer die Möglichkeit, das Kantenbild, das als Eingabe des Blocktracing dient, leicht zu verändern. Dabei können

- offensichtliche Lücken im gefundenen Küstenverlauf (Aufgrund zu ähnlicher Intensität von Wasser- und Landflächen, die z.B. bei bestimmten wetterbedingten Rauigkeiten des Wassers entstehen) durch Einzeichnen von Linien geschlossen werden, die nur grob den tatsächlichen Küstenverlauf wiedergeben müssen.
- offensichtliche fehlerhafte Kanten (bedingt durch extrem starkes Rauschen aber auch von Schiffen oder unerwünschten Strömungskanten herrührend) entfernt werden.

Dabei hilft oft der gesunde Menschenverstand (Küstenverläufe müssen eine geschlossene Linie bilden), wo kein Bildverarbeitungstrick vernünftige Ergebnisse liefern kann. Erfahrungsgemäß können die nötigen Änderungen



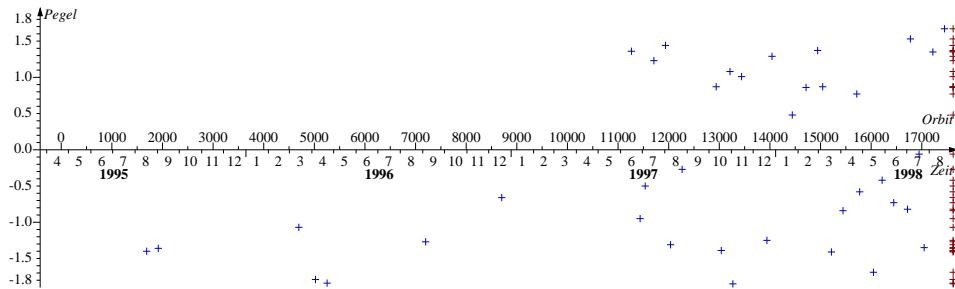
**Abbildung 6.5:** Wasserstandsentwicklung entlang eines Längsprofils in der *Elbe* für unterschiedliche Gezeiten-situationen am 1.7.1992 nach Simulationen des hydro-numerischen Strömungsmodells der BAW.

von einem im Blick auf SAR-Bilder geschulten Anwender in wenigen Minuten für einen großen Bildausschnitt (z.B.  $4000 \times 2000$  Bildpunkte) vorgenommen werden (tatsächlich ist ja auch nur ein geringer Anteil der Bilder stärker betroffen, oft helfen 1–3 zusätzliche Linien).

Die endgültige Feinlage der Küstenlinie wird durch die Veränderungen nicht gestört. Lediglich der grobe Verlauf der Küstenlinie wird verbessert. Für den endgültigen Verlauf werden bei der lokalen Kantenauswahl erneut die Betragsmaxima der Wavelet-Transformierten herangezogen, um die lokal stärkste Kante (wie schwach diese auch immer sein mag) zu bestimmen, die grobe 'Hilfslinie' wird verworfen.

### 6.3 Gezeitenbedingte Probleme bei Wasserstandslinienverfahren

Abgesehen von der generellen Einschränkung von Wasserstandslinienverfahren, dass Topographien generell nur im Höhenintervall zwischen den Wasserständen bei Springtide bestimmt werden können, sind hier zwei weitere, durch die Gezeitenaktivität bedingte Probleme aufgeführt. Während die verschiedenen Wasserstände für diese Verfahren an sich wünschenswert sind, birgt ihr Wechsel und der damit verbundene Wasserstrom auch Nachteile in sich. Wir wollen uns hier namentlich auf den durch den Gezeitenstrom bedingten Gradienten (Abschnitt 6.3.1) sowie die durch ihn verursachte Morphodynamik im Wattenmeer (Abschnitt 6.3.2) beschränken. Abschnitt 6.3.3



**Abbildung 6.6:** Tidehöhen des Pegels *Otterndorf* für einige SAR-Bilder (soweit bekannt, vgl. Tabelle D.2). Am rechten Rand sind noch einmal alle auftretenden Tidehöhen zusammengefaßt.

bietet einen Vorschlag, diese Problematik zu verringern.

### 6.3.1 Gradient des Gezeitenstromes

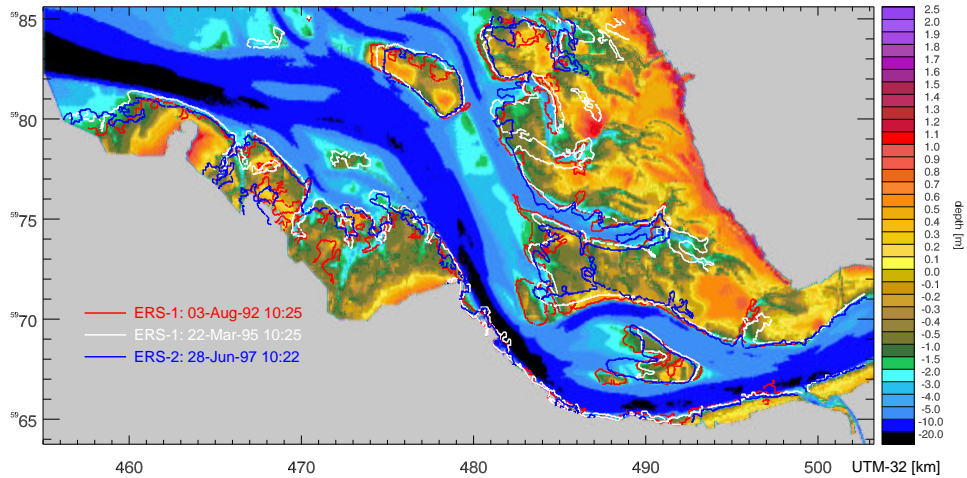
In Kapitel 3 wird lediglich eine Methode zur Extraktion von Wasserstandslinien, nicht jedoch von Höhenlinien vorgestellt. Es wird bei der Interpolation einer Topographie von einer ebenen Wasseroberfläche ausgegangen. Dies kann in der Realität jedoch nur angenommen werden, wenn

1. Wasserstandslinien eines sehr kleinen Ausschnittes des Wattenmeers betrachtet werden *und*
2. dieser Ausschnitt in unmittelbarer Nähe eines Pegels liegt, von dessen Hoch- und Niedrigwasserständen die Wasserstände beim Satellitenüberflug interpoliert werden.

Im Allgemeinen gilt jedoch: Im Wattenmeer — insbesondere in Flussästuaren — läuft die Tide zeitverzögert ein und aus, was zu festen Zeitpunkten einen Gradienten längs der Flussrichtung ergibt (siehe dazu auch Abbildung 6.5). Weiter erreichen Flut und Ebbe an unterschiedlichen Orten auch unterschiedliche Höchst- und Tiefststände bezüglich Normal-Null (NN).

### 6.3.2 Morphodynamik des Wattenmeers

Zur Erstellung eines digitalen Höhenmodells (engl. *digital elevation model*, kurz DHM bzw. DEM) des Wattenmeers ist es notwendig, möglichst viele SAR-Bilder von unterschiedlichen Tidehöhen des ‘interessanten’ Wasserstandsgebietes aus einer möglichst kurzen Zeitspanne zu erhalten. Dies ist jedoch oft sehr schwierig. Abbildung 6.6 zeigt Tidehöhen des Pegels *Otterndorf* für eine Auswahl von SAR-Bildern (vgl. dazu auch Tabelle D.2). Es ist leicht erkennbar, daß nur schwerlich ein feines Höhengitter an Vertretern von



**Abbildung 6.7:** Morphodynamische Veränderungen im *Elb*-Ästuar zwischen 1992 und 1997. Der BAW-Topographie von 1992 sind Wasserstandslinien von ERS-1/2-SAR-Bildern vergleichbarer Wasserstandshöhen der Jahre 1992, 1995 und 1997 überlagert. Beispielsweise am Südufer des Wattengebietes ‘*Medemsand*’ zeigt sich eine starke Abnagungserscheinung.

SAR-Bildern mit der entsprechenden Pegelhöhe in einem engen Zeitintervall gefunden werden kann.

Andererseits ist es ja gerade die Morphodynamik des Wattenmeers und die dadurch bedingten Veränderungen der Wassertiefe, die eine regelmäßige Überprüfung der Topographie nötig macht. Abbildung 6.7 zeigt morphodynamische Veränderungen im *Elb*-Ästuar. Die Morphodynamik selbst verhindert aber, dass — besonders in Gebieten mit starken morphodynamischen Aktivitäten — zeitlich weiter auseinander liegende Bilder für die Erstellung eines DEM’s herangezogen werden können.

Dies ist eine starke Einschränkung für alle Wasserstandslinienverfahren.

### 6.3.3 Ausblick

Eine — hier nicht implementierte — Verbesserungsmöglichkeit in Bezug auf die in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 beschriebenen Problematik kann man durch alternative Vorgehensweisen erreichen, wie der folgende Vorschlag [MD] zeigt:

Ausgehend von einer existierenden Topographie berechnet man mittels eines numerisch simulierten Strömungsmodells (wie dem Modell der BAW) die Wasserstände zum Zeitpunkt des Satellitenüberfluges. Dies ergibt automatisch Wasserstandslinien des Modells. Nun existieren Wasserstandshöhen und -linien in einer Umgebung jedes gefundenen Wasserstandsliniensegments aus dem SAR-Bild. Damit kann die Topographie entsprechend der neuen Ergebnisse — möglicherweise in mehreren Modifikations- und Simulations-schritten — verändert und auf neuesten Stand gebracht werden.



## Kapitel 7

# Weitere Verfahren zur Bestimmung der Bodentopographie im Wattenmeer

**N**EBEN dem in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus, gibt es viele weitere Verfahren, die Bodentopographie des Wattenmeers zu bestimmen. Einige von diesen sollen hier vorgestellt und mit dem neuen Algorithmus verglichen werden. Speziell seien hier genannt: Verfahren, die die Bodentopographie direkt messen (siehe Abschnitt 7.1), Wasserstandslinienverfahren (siehe Abschnitt 7.2) auf SAR-<sup>1</sup> und optischen Bildern sowie andere auf SAR-Bildern basierende Verfahren (vorgestellt in Abschnitt 7.3). Abschnitt 7.4 vergleicht die vorgestellten Verfahren.

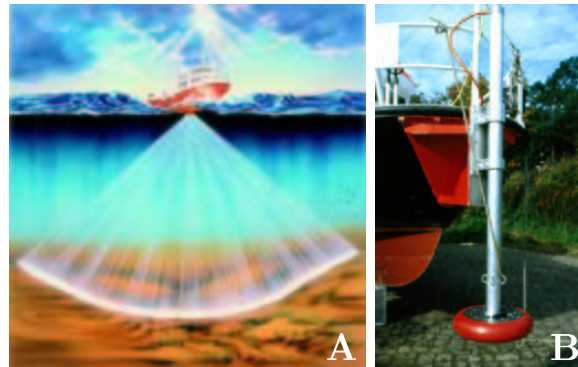
### 7.1 Messverfahren

Als Messverfahren sollen hier die Sonar-Messung mit Schiffen (siehe Abschnitt 7.1.1) und die direkte Vermessung im Watt (siehe Abschnitt 7.1.2) vorgestellt werden, die sich für die Topographiebestimmung von unterschiedlichen Gebieten des Wattenmeers eignen. Sie stellen 'traditionelle' Methoden dar, die regelmäßig von den zuständigen Behörden durchgeführt werden. Sie liefern Vergleichstopographien, an denen die Qualität neuer Methoden seit jeher gemessen wird.

Ziel neuerer Methoden ist vor allen Dingen die Kostenreduzierung, da beide Methoden im operationellen Einsatz sehr kostspielig sind.

---

<sup>1</sup> Hierzu ist auch der in Kapitel 3 vorgestellte Algorithmus zu rechnen. Andere Verfahren unterscheiden sich u.a. in der Art der Kantenfindung und des Postprocessing (hier Blocktracing und Snake).



**Abbildung 7.1:** Schematisches Bild der Funktionsweise eines Multibeam-Echolots (A) und sein Einsatz auf dem Meßboot ‘Storch’ (B).

### 7.1.1 Sonar-Messung mit Schiffen

Einige küstennahe Forschungsinstitute betreiben mit speziellem Echolot ausgerüstete Forschungsschiffe, um die Bodentopographie direkt zu vermessen. So ist beispielsweise das Messboot ‘Storch’ beim GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH mit einem Echolot-System (Kongsberg Simrad EM 3000, [Ksmu]) ausgestattet, das durch 127 Echolotstrahlen der Frequenz 300 kHz die Wassertiefen  $t$  im Bereich 0.5–200 m während der Schiffsbewegung entlang einem  $b = \min\{200 \text{ m}, 4t\}$  breiten Streifen messen kann [Gmul]. Abbildung 7.1 zeigt diesen Sensor am Bug der ‘Storch’ sowie ein schematisches Bild seiner Funktionsweise.

Zeitgleich wird mit differenziellem GPS, Bewegungssensor und Kreiselkompaß die genaue Position des Schiffs bestimmt. Durch mehrfaches Befahren kann die Topographie einer Region des Wattenmeers Streifen für Streifen bestimmt werden, in der das Wasser tief genug für eine Befahrung ist.

Ein Beispiel für eine so erzeugte Topographie ist die in Abbildung 6.7 hinterlegte BAW-Topographie von 1992. Einige Regionen des *Elb*-Ästuars — vor allem diejenigen mit besonders hoher morphodynamischer Aktivität — werden jährlich, andere seltener neu vermessen.

### 7.1.2 Direkte Vermessung im Watt

Im Gegensatz zur Messung mit Sonar kann das Watt auch direkt vermessen werden. Dies geschieht vor allem in den Gebieten des Wattenmeers, die aufgrund zu geringer Wassertiefe nicht mit Schiffen wie der ‘Storch’ befahren werden können. Auch erfordert der Echolot-Sensor eine Mindestwassertiefe von 50 cm.

Bei der direkten Vermessung läuft eine Person mit genauer Kenntnis der entsprechenden Watt-Region zu Fuß über das zu vermessende Gebiet. Sie trägt ein differentielles GPS-System sowie ein Gerät zur Datenaufzeichnung in einem Rucksack. Dadurch wird der gelaufene Weg mit der zugehörigen

Höheninformation gespeichert.

Diese Art der Vermessung ist jedoch sehr zeitaufwändig, da

- Priele — kleine und große Wasserablaufriren — das Wattengebiet zerfurchen. Diese müssen überquert oder umgangen werden.
- je nach Beschaffenheit des Watts der Begeher bei jedem Schritt einige Zentimeter oder gar Dezimeter in den Schlick einsinkt. Dies vermindert an sich schon die Laufgeschwindigkeit.

Auch das Gewicht der Meßgeräte darf nicht vernachlässigt werden. Es können also nur vergleichbar kurze Wegstrecken während einer Ebbe zurückgelegt werden. Deshalb müssen auch weiter vom Land entfernte Wattgebiete mit Booten angefahren werden, bevor sie auf diese Weise vermessen werden können (Das Wasser entfernt sich immerhin in manchen Gebieten um bis zu 20 Kilometer vom Ufer).

## 7.2 Weitere Wasserstandslinienverfahren

Neben dem von uns vorgestellten Algorithmus existieren eine ganze Reihe weiterer Verfahren, die aus Satellitenbildern die Wasserstandslinie extrahieren. Sie können als Grundlage für eine Topographiebestimmung oder -verbesserung herangezogen werden.

### 7.2.1 Auf ERS-SAR-Bildern

Am ähnlichsten dem in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus sind bekannte Wasserstandslinienverfahren, die ebenfalls auf Kantenerkennung in SAR-Bildern basierend eine Topographie bestimmen. Sie werden im Folgenden erläutert. Zum Teil dienen Ideen aus diesen Verfahren als Grundlage für die Entwicklung des oben genannten Algorithmus.

**Nach TOUZI *et al.***

R. TOUZI, A. LOPES und P. BOUSQUET entwickelten einen Kantenfinder mit speziellen Eigenschaften für SAR-Bilder [TLB]. Dieser soll hier vorgestellt werden.

Aufgrund des (multiplikativen) Speckle-Rauschens ist bei den meisten in der Literatur vorgestellten Kantenfindern die irrtümliche Interpretation von Rauschen als Kante abhängig von der Intensitätserwartung  $\mu$  der zugrunde liegenden (homogenen) Region. Speziell nennt TOUZI *et al.* hier Differenzenverfahren, die die Intensität auf kleinen Umgebungen eines vermuteten Kantenpunktes mitteln und ihre Differenz berechnen. Der Betrag der erhaltenen Werte geben einen Anhaltspunkt für die gewünschte Kantenstärke.

Im einfachsten Fall entspricht das einer Filterung mit rotierten Versionen eines Filters wie

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Die Idee von TOUZI *et al.* ist nun, die gemittelten Intensitätsregionen (diese entsprechen den Gebieten, auf denen der Filter aus (7.1) konstant  $-1$  bzw.  $1$  ist, vergleiche auch Abbildung 7.2) nicht unter einer Differenz sondern unter einem Quotienten zu betrachten:

$$R = \frac{\frac{1}{\#U_1} \sum_{j \in U_1} I_j}{\frac{1}{\#U_2} \sum_{j \in U_2} I_j} \in \mathbb{R}_+ \quad (7.2)$$

$$r = \min\{R, R^{-1}\} \in [0, 1]. \quad (7.3)$$

In [TLB] wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $r$  auf einer Kante zwischen zwei homogenen Regionen der Intensitätserwartungen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gleich

$$f(r) = \frac{(2m-1)!}{((m-1)!)^2} \left( \frac{\kappa^m}{(r+\kappa)^{2m}} + \frac{\kappa^{-m}}{(r+\kappa^{-1})^{2m}} \right) r^{m-1} \quad (7.4)$$

ist, also nur von der Kantenstärke  $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  abhängt. Dabei gilt auf  $n \times n$ -Filtern entsprechenden Umgebungen in  $L$ -Look-Bildern  $m = \frac{n(n-1)L}{2}$ , bzw. allgemein  $m = NL$  für Umgebungen  $U_1, U_2$  der (gleichen) Größe  $N = \#U_i$ .

Verwendet man Amplitudenbilder, so muss die Mittlung in (7.2) der Form  $\sqrt{\frac{1}{\#U_i} \sum_{j \in U_i} A_j^2}$ , also erneut in Intensität geschehen. Es gilt dann  $r_A = \sqrt{r_I}$  und weiter

$$f(\sqrt{r}) = \frac{2(2m-1)!}{((m-1)!)^2} \left( \frac{\kappa^m}{(r^2+\kappa)^{2m}} + \frac{\kappa^{-m}}{(r^2+\kappa^{-1})^{2m}} \right) r^{2m-1}. \quad (7.5)$$

Die Fehler zweiter Art bei einem Schwellwert  $T \in ]0, 1[$  sind jetzt gleich

$$\frac{2\xi(2m-1)!}{((m-1)!)^2} \int_0^T \frac{r^{\xi m-1}}{(r^\xi+1)^{2m}} dr \quad (7.6)$$

mit

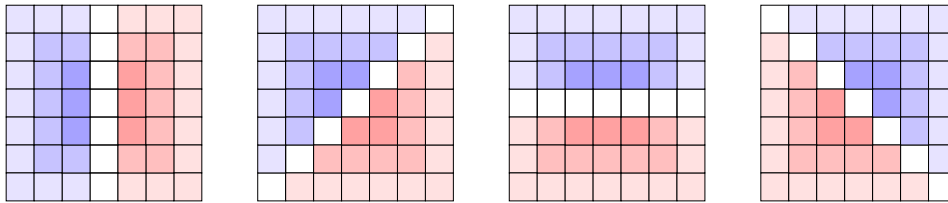
$$\xi = \xi(X) = \begin{cases} 1 & \text{für Intensitätsbilder} \\ 2 & \text{für Amplitudenbilder} \end{cases}, \quad (7.7)$$

also unabhängig von  $\mu_1$  und  $\mu_2$ .

Um alle Kanten zu erhalten, werden die Quotienten  $R$  in allen vier Kantenrichtungen (siehe Abbildung 7.2) berechnet. Als Kantenstärke verwendet man dann

$$r = \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}. \quad (7.8)$$

Weiter werden verschiedene Umgebungsgrößen  $n \times n$  verwendet, um



**Abbildung 7.2:** Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$  der Größen  $n \times n$  für  $n = 3, 5, 7$  für verschiedene Kantenrichtungen des Kantendetektors von TOUZI *et al.*

- schwache Kanten zwischen größeren homogenen Gebieten (bei größeren Umgebungen kann bei gleichem Fehler der Schwellwert  $T_n$  näher bei 1 gewählt werden) *und*
- starke Mikrokanten

zu erkennen. Die — gerade bei von größeren  $n \times n$ -Umgebungen herrührenden Kanten auftretende — Verschmierung der Kanten (Breite  $\mathcal{O}(n) > 1$ ) macht eine lokale Minimierung der  $r$ -Werte und Verwendung der Minima notwendig.<sup>2</sup>

Im Vergleich mit anderen Kantendetektoren hat der von TOUZI *et al.* überdurchschnittlich gut abgeschnitten [TLB]. Er ist besonders gut zur Segmentierung von SAR-Bildern geeignet.

Wie sich herausgestellt hat (vgl. Abschnitt 5.6), liefert die TOUZI-Filterung für leicht veränderte Umgebungen  $U_i$  auf einem homogenen SAR-Bild (reinem Speckle) dasselbe Ergebnis wie eine HAAR-Wavelet-Filterung des entsprechenden Dichtebildes zu geeigneter Skala  $a$ .

Basierend auf Kantenerkennung nach TOUZI *et al.* kann ein ähnliches Wasserstandslinienverfahren wie in Kapitel 3 entwickelt werden. Ein solcher Ansatz wird im Anschluss erläutert.

#### Nach MASON *et al.*

D. C. MASON und I. J. DAVENPORT haben ein auf der Kantenerkennung nach TOUZI *et al.* basierendes Wasserstandslinienverfahren für SAR-Bilder entwickelt [MD]. Seine Funktionsweise soll hier grob vorgestellt werden.

In einem ersten Schritt wird eine grobe Zerlegung des SAR-Bildes in kleine, rechteckige Ausschnitte entlang einer groben, berechneten Küstenlinie, sowie einen nicht weiter zu untersuchenden Rest (sicher Wasser bzw. Land) vorgenommen. Aus Rechenzeitgründen werden dann im zweiten Schritt die genauen Wasserstandslinien nur auf den erhaltenen Ausschnitten gesucht.

Der erste Schritt, angewendet auf eine komplette ERS-1-PRI-SAR-Szene ( $8000 \times 8200$  Amplituden-Pixel, 12.5 m Pixelgröße, 3 Looks, siehe Tabellen 2.2 und 2.3) unterteilt sich wie folgt:

<sup>2</sup> Dies entspricht der Betrachtung der Betragsmaxima bei der Wavelet-Transformierten, siehe Abschnitt 1.2.5.

1.  $4 \times 4$  Intensitäts-Mittellung des SAR-Bildes. *Ergebnis:*  $2000 \times 2050$  Bild mit 50 m Pixelgröße, 48 Looks und entsprechend verringertem Speckle-Rauschen.
2.  $3 \times 3$  TOUZI-Kantensuche. *Ergebnis:*  $2000 \times 2050$  Kantenbild.
3.  $8 \times 8$  Mittellung. *Ergebnis:*  $250 \times 257$  Texturbild mit Texturinformation, Kantenstärke und -dichte in  $400 \times 400 \text{ m}^2$  Bereichen des ursprünglichen SAR-Bildes.
4.  $5 \times 5$  TOUZI-Kantensuche. *Ergebnis:*  $250 \times 257$  Bild der Texturkanten.
5. Ausdünnung, zweifach Schwellwertbildung (Kantenpunkte zwischen den Schwellwerten werden nur dann akzeptiert, wenn sie mit Punkten oberhalb beider Schwellwerte verbunden sind) und Verbindung der Kantenabschnitts-Endpunkte. *Ergebnis:* Textursegmente-Bild.
6. Auswahl des ‘Wassers’ (geringste Kantenstärke im Texturbild, größtes Segment) sowie verbundener Segmente mit ähnlicher Textur. *Ergebnis:* Grobe Land-Wasser-Linie in 400 m Auflösung.
7. Zerlegung einer Umgebung der Land-Wasserlinie in kleine, rechteckige Teilbilder. *Ergebnis:* Rechteckliste von ca. 15–20 Rechtecken mit Abbildung von ca. 10–20 km Seitenlänge im Bodensegment (entspricht Rechtecken unterschiedlicher Größe von  $x \times y$  Pixel im SAR-Bildes mit  $x, y \in \{800, \dots, 1600\}$ ).

Auf jedem der  $x \times y$  Rechtecke wird nun im zweiten Schritt die genaue Wasserstandslinie bestimmt. Dieser ist in folgende Teilschritte aufgeteilt:

1.  $2 \times 2$  Intensitäts-Mittellung des SAR-Bildes. *Ergebnis:*  $\frac{x}{2} \times \frac{y}{2}$  Bild mit 25 m Pixelabstand, 12 Looks und verringertem Speckle-Rauschen.
2.  $11 \times 11$  TOUZI-Kantensuche. *Ergebnis:*  $\frac{x}{2} \times \frac{y}{2}$  Kantenbild.
3. Ausdünnung und zweifache Schwellwertbildung sowie Ausmaskierung der (leicht verkleinerten) bekannten Wasserregion (Schiffe etc. entfernen). *Ergebnis:* Verbessertes  $\frac{x}{2} \times \frac{y}{2}$  Kantenbild.
4. Aktive Konturierung mit Ballooning-Force (einer zusätzlichen Kraft, damit die Kurve sich aufbläht, also verlängert bzw. die eingeschlossene Fläche vergrößert) zur Land/Wasser-Segmentierung und Auswahl der dem Wasser nächsten Land-Kanten. Start ist ein kleines Quadrat weit außen im Meer (anhand der Grob-Segmentierung). *Ergebnis:* Zusammenhängende Linie über den dem Meer nächstgelegenen Kanten des  $\frac{x}{2} \times \frac{y}{2}$  Kantenbildes.
5. Auswahl der unter der Konturierung liegenden, zuverlässigen Kanten des  $\frac{x}{2} \times \frac{y}{2}$  Kantenbildes.

6. Verfeinerung der Küstenlinienposition auf volle Bildauflösung mit  $7 \times 7$  TOUZI-Kantenfinder in Richtung der lokalen Küstenlinie.

Insgesamt stellt die Methode von D. C. MASON *et al.* also ein relativ kompliziertes Verfahren dar, das zum Teil mehrfach Techniken wie Mittellung, TOUZI-Kantensuche und aktive Konturierung verwendet. Es werden keine zusammenhängenden Küstenlinien, sondern nur Linienfragmente erstellt, die mit hoher Sicherheit Land-Wassergrenzen sind. Eine stetige Information stellt erst das aus mehreren Bildern gewonnene digitale Höhenmodell zur Verfügung, für dessen Erzeugung hier hydrodynamische Modellierung und ein numerisches Tide-Modell empfohlen werden.

### Fuzzy-Kantenfindung

Die sogenannte Fuzzy-Kantenfindung [DUF<sup>+</sup>] stellt eine Klasse von Kantenfindern als Verallgemeinerung des Verfahrens von TOUZI *et al.* dar. Sie erlaubt im allgemeinen:

- eine freiere Wahl der Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$ , die für die Bestimmung eines Kantenmaßes herangezogen werden (vgl. Abbildung 7.2) und
- unterschiedliche Fuzzy-Unterscheidungsmaße  $D^{[k]} = 1 - r^{[k]}$  für diese Regionen (vgl. (7.2)).

Während die Umgebungen sowohl in ihrer Form als ihrer Lage verändert werden (stets in gleicher Größe und symmetrisch zum Kantentestpunkt), werden die folgenden vier Unterscheidungsmaße vorgeschlagen:

$$D^{[1,\kappa]}(\alpha, \beta) = 1 - \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|}{nM}\right)^\kappa, \quad \kappa \in [1, \infty[ \quad (7.9)$$

$$D^{[2]}(\alpha, \beta) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\alpha_i, \beta_i\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\alpha_i, \beta_i\}} \quad (7.10)$$

$$D^{[3]}(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|}{\sum_{i=1}^n \alpha_i + \beta_i} \quad (7.11)$$

$$D^{[4]}(\alpha, \beta) = 1 - \frac{\min(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i)}{\max(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i)} \quad (\text{TOUZI}). \quad (7.12)$$

Dabei werden die Featurevektoren  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top$  und  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^\top$  aus den Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$  sortiert nach ihren Komponenten aufgestellt, i.e.  $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}, \beta_i \geq \beta_{i+1}$ .  $M$  (in (7.9)) ist der höchste im Gesamtbild auftretende Wert. Der Grad dafür, dass ein bestimmter Bildpunkt ein Kantentestpunkt ist, ist wieder (analog zu (7.8)) das Maximum über die einzelnen Kantenrichtungen:

$$e = \max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\} \in [0, 1] \quad (7.13)$$

wobei  $\nu_j$  das gewählte Unterscheidungsmaß  $D^{[k]}(\alpha, \beta)$  für die der Kantenrichtung  $j \cdot 45^\circ$  entsprechenden Umgebungen ist.

Anschließend wird durch lokale Maximierung von  $e$  die genaue Lage der vorhandenen Kanten bestimmt, die anderen Werte werden entfernt. Zur Weiterbearbeitung wird noch ein Kantenverfolgungsschritt vorgeschlagen, um zusammenhängende Kanten zu erhalten, sowie mögliche Verfeinerungsschritte. Weitere Details sind [DUF<sup>+</sup>, DJ] zu entnehmen.

### ‘Konventionelle’ Kantenfindung

Für die allgemeine Bildverarbeitung (nicht speziell für SAR-Bilder) sind eine Reihe von Kantenerkennungsverfahren im Umlauf, die häufig auf Differenzbildung zweier an die vermutete Kante angrenzender Regionen (siehe (7.1)) oder einer Schwellwertbildung beruht. Diese haben jedoch meist eine starke Empfindlichkeit auf Speckle-Rauschen, die in der Regel nicht wie bei der TOUZI-Kantensuche unabhängig von der mittleren Intensität der angrenzenden Regionen ist.

Abhilfe (natürlich auf Kosten der Auflösung bzw. Lokalisierung der Kante) schafft eine vorangehende Rauschfilterung. Speziell für das Speckle-Rauschen seien hier als Filterverfahren genannt:

- Filteransätze, die lokal von der Homogenität abhängige Filter verwenden. Im Wesentlichen wird stärker geglättet, je weniger Struktur in der Umgebung vorhanden ist. Es werden jeweils geeignete Texturmaße entwickelt. Beispiele: FROST *et al.* [FSSH], LEE-Sigma.
- Maximum Likelihood/Maximum a Posteriori-Schätzer für Speckle. Beispiele: Gamma MAP [LNTL], Minimum Mean Square Error Ansätze von KUAN *et al.* [KSSC] (additiver Filter via  $I = SN = S + (N-1)S$ ) und LEE [Lee1] (multiplikative Version des KUAN-Filters).
- Multiskalenansätze. Verfahren, die nach einer Multiskalenanalyse das Rauschen auf unterschiedlichen Skalen filtern und anschließend das gefilterte Bild rekonstruieren. Zum Teil werden wegen des multiplikativen Rauschens Quotienten anstatt Differenzen der geglätteten Bilder aufeinander folgender Skalen betrachtet, andere Verfahren werden auf logarithmierte Bilder (vgl. Abschnitt 2.2.2) angewendet. Beispiele: AIAZZI *et al.* [AAB], ODEGARD *et al.* [OGL<sup>+</sup>, GLO<sup>+</sup>], GAGNON [Gg], HERVET *et al.* [HFML].

In zahlreichen Publikationen wurden Übersichten und Vergleiche einiger der oben genannten Verfahren durchgeführt, so z.B. in [LTN, GJ, OQ].

Als bekanntes Küstenliniendetektionsverfahren sei beispielsweise das von J. S. LEE und I. JURKEVICH entwickelte genannt, das auf LEE's Sigma-Specklefilterung, Sobel-Kantensuche und anschließend weiteren Glättungs-



Schwellwert-, Kantendetektions- und Kantenverfolgungsschritten beruht [LJ]. Ähnlich dem Verfahren von MASON *et al.* ist die Zahl der Schritte im Algorithmus relativ hoch. Der angegebene visuelle Fehler von 8–10 Pixeln in einem 4-Look SEASAT-Bild kann durch weitere Verfeinerungsschritte noch verbessert werden, was jedoch für die meisten der in [LJ] genannten Anwendungen (anders als bei der Topographiebestimmung) nicht notwendig ist.

Ein ähnliches Verfahren schlagen auch J. A. RÓDENAS und R. GARELLO vor [RG] (etwa 10 Schritte). Sie verwenden die Land-Wasser-Segmentierung, um anschließend mit Wavelet-basierter Kantenfindung auf dem Wasser sogenannte interne Wellen aufzuspüren. In diesem Fall ist es wegen der homogenen Intensität auf dem Wasser nicht notwendig, Dichtebilder zu betrachten (i.E. den punktweisen Logarithmus aus dem SAR-Bild). Die Schwellwertwahl geschieht gemäß Histogrammbetrachtungen.

Eine einfache Schwellwertbildung mit (manuell bestimmten) lokal unterschiedlichen Schwellwerten verwendet A. VRIELING [Vr] auf 3 optischen und einem Speckle-gefilterten SAR-Bild, um morphologische Veränderungen im Mackenzie-Delta im letzten Vierteljahrhundert zu beobachten.

### 7.2.2 Mit anderen Sensoren

Prinzipiell sind der Algorithmus aus Kapitel 3 sowie die in Abschnitt 7.2.1 genannten Verfahren auch auf SAR-Bilder von anderen Satelliten<sup>3</sup> oder Flugzeugen mit vergleichbaren Resultaten anwendbar. Auf andere SAR-Sensoren soll deshalb hier nicht eingegangen werden.

Neben den (aktiven) Sensoren aus dem Radar-Frequenzbereich sind auf Satelliten oft auch passive Sensoren aus dem optischen Bereich vertreten. Sie zeichnen einen gewissen Frequenzbereich<sup>4</sup> des sichtbaren Lichtes ( $\lambda \approx 370\text{--}750\text{ nm} \Leftrightarrow \nu \approx 400\text{--}825\text{ THz}$ ), Infrarots ( $\lambda \approx 0.75\text{--}100\ \mu\text{m} \Leftrightarrow \nu \approx 3.3\text{--}400\text{ THz}$ ) oder ultravioletten Lichtes ( $\lambda \approx 3\text{--}370\text{ nm} \Leftrightarrow \nu \approx 0.83\text{--}100\text{ PHz}$ ) auf, das — in der Regel — ausgestrahlt von der Sonne nach einigen Reflexionen das abzubildende Gebiet auf der Erde und schließlich den Sensor auf dem Satelliten erreicht. Es handelt sich also um wesentlich kürzere bzw. hochfrequenzere elektromagnetische Wellen als beim Radar.

Da weder Polarisierung noch monochromatische oder gar phasengleiche Beleuchtung auftreten, enthalten optische Bilder auch kein Speckle-Rauschen. Ein weiterer Vorteil ist, dass häufig mehrere Kanäle (Frequenzbänder) zugleich aufgezeichnet werden und dies in einer meist um einiges höheren Auflösung (Pixelgröße am Boden nur wenige Meter) als beim SAR. Die gesuchte Wasserstandslinie ist also mit einfachsten Kantendetektoren (Schwellwertbildung etc.) und wegen des Vorwissens aus unterschiedlichen Frequenz-

---

<sup>3</sup> Eine Übersicht über SAR-Satelliten ist in Tabelle 2.7 zu finden.

<sup>4</sup> Zur Einteilung elektromagnetischer Wellen in Spektralbereiche siehe z.B. [Lü, GKV, Kra].

kanälen sehr leicht und sehr genau zu finden. Bei aktiven Sensoren wie bei SAR scheitern sowohl die multiplen Spektren als auch die hohe Auflösung an der benötigten Energiemenge für die Signalausstrahlung. Lediglich einige Space Shuttle-Missionen haben einige wenige multispektrale (zwei bzw. drei Frequenzbänder) SAR-Bilder erzeugt (siehe Abschnitt 2.3.4), jedoch nicht genügend, um daraus eine Topographie abzulesen.

Ein entscheidender Nachteil jedoch ist, dass zur Beleuchtung die Sonne notwendig ist und dass die genannten Frequenzen durch Wolken reflektiert werden, also eine Abbildung nur bei klarem (vollständig wolkenfreiem) Himmel und bei Tag möglich ist. Dies heißt jedoch in unseren Breiten, dass von einem Satelliten in der üblichen Umlaufbahn lediglich ein oder zwei verwertbare Bilder pro Jahr aufgenommen werden können. Diese können also lediglich zur Überprüfung der anderweitig gefundenen Topographie oder als zusätzliche Informationsquelle genutzt werden, nicht zur Erstellung einer eigenständigen Topographie, da diese über die langen Zeitabstände sich morphologisch stark verändern kann (siehe Abschnitt 6.3.2).

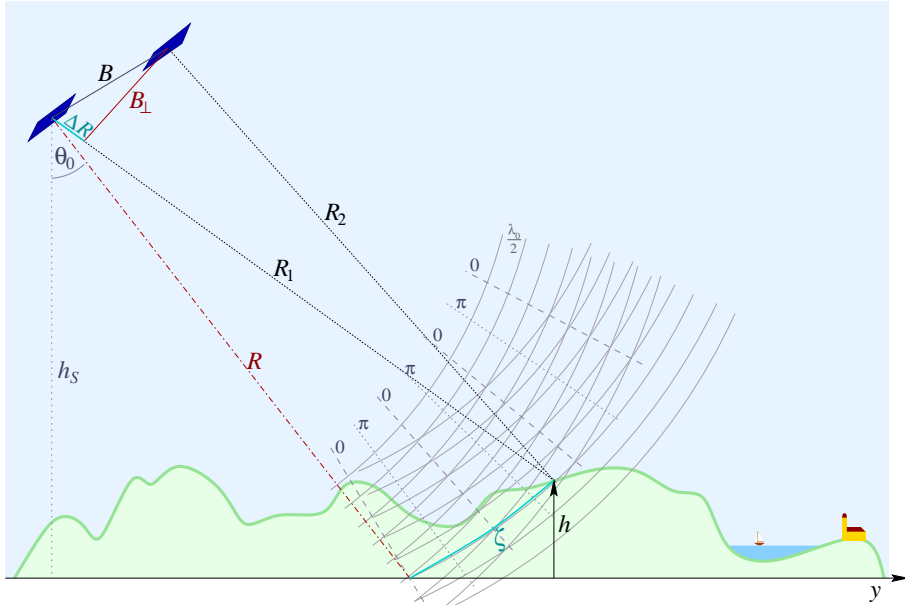
Ferner ist zu beachten, dass optische Szenen relativ teuer sind (eine Vollszene mit vier Spektralbereichen vom indischen Satelliten IRS-1C kostet z.B. 6000.– DM).

### 7.3 Sonstige SAR-basierte Verfahren

Abschließend sollen noch weitere Verfahren, die auf SAR-Bildern basieren, vorgestellt werden. Während bei SAR-Interferometrie (kurz InSAR, vorgestellt basierend auf [BH, RMK<sup>+</sup>] in Abschnitt 7.3.1) eine spezielle duale Aufnahmekonstellation zur Erzeugung von zwei (oder mehr) Bildern aus unterschiedlichen Blickwinkeln notwendig ist (mehrere Satelliten, mehrfacher Überflug oder spezielle Konstruktionen für mehrere SAR-Antennen), bedient sich die Analyse von Seegangsfeldern (Abschnitt 7.3.2) gewöhnlicher SAR-Bilder (Einzelaufnahmen).

#### 7.3.1 Interferometrie

Für across-track-Interferometrie werden entweder mindestens 2 Empfangsantennen, die orthogonal zur Flugrichtung versetzt sind (single-pass-Interferometrie), oder mindestens 2 Überflüge des selben oder eines ähnlichen SAR-Sensors mit genau bestimmter örtlicher und möglichst geringer zeitlicher Verschiebung (multiple-pass-Interferometrie) verwendet. Den Abstand der beiden Antennen (orthogonal zur Flugrichtung) nennt man Baseline  $B_{\perp}$ . Durch die verschiedenen Blickwinkel entstehen abhängig von der räumlichen Lage des Rückstreuers Laufzeitunterschiede zu den beiden Sensoren. Diese bedingt eine Phasenverschiebung des rückgestreuten Signals und damit der jeweiligen Bildpunkte in den beiden (komplexen) SAR-Bildern. Speckle —



**Abbildung 7.3:** Die Acros-track-InSAR Abbildungsgeometrie. Antennenflugrichtung senkrecht zur Bildebene.

entstanden durch das kohärente Abbildungsverfahren beim SAR — tritt also bei starker Korrelation<sup>5</sup> zweier Bilder in beiden Bildern gleichermaßen auf.

In Abbildung 7.3 sind Linien gleicher Phase im Phasenabstand  $2\pi$  (wegen des hin- und rücklaufenden Signals also im Abstand  $\frac{\lambda_0}{2}$ , d.h.  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta R} = \frac{4\pi}{\lambda_0}$ ) für die beiden SAR-Antennen eingezeichnet. Die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  längs  $\zeta$  ist für einige  $\Delta\varphi \in \{0, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$  angegeben. Wegen Ähnlichkeitsbetrachtungen (viele der Winkel können wegen  $R \gg B, \zeta$  als rechte Winkel angenommen werden) gelten

$$\frac{\Delta R}{\zeta} = \frac{B_{\perp}}{R} \quad (7.14)$$

$$\text{und} \quad \frac{dh}{d\zeta} = \sin\theta_0. \quad (7.15)$$

Zusammen folgt also

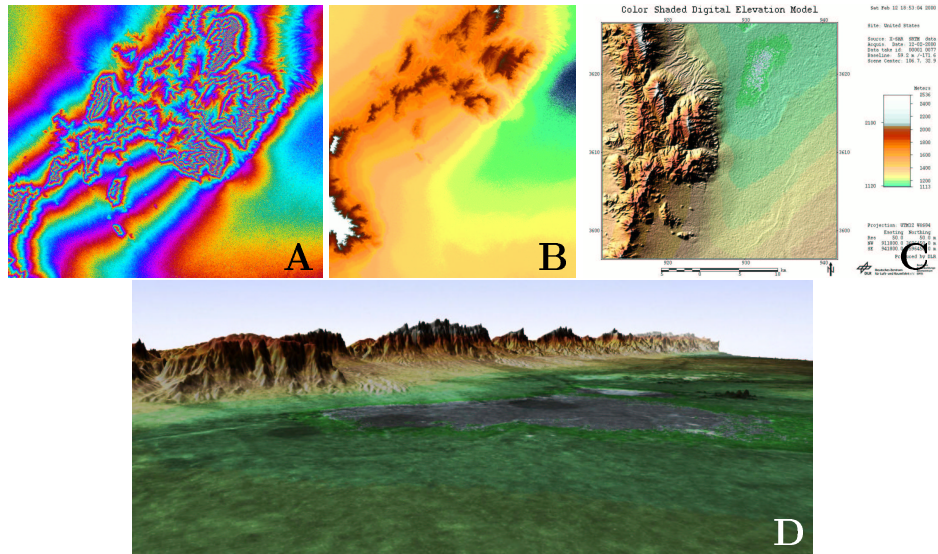
$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{4\pi B_{\perp}}{\lambda_0 R \sin\theta_0} \quad (7.16)$$

und für die Ambiguity-Höhe

$$h_{2\pi} = \frac{\lambda_0 R \sin\theta_0}{2B_{\perp}} = \frac{\lambda_0 h_S \tan\theta_0}{2B_{\perp}}. \quad (7.17)$$

Aus der Phasenverschiebung lässt sich also eine relative Höhe modulo  $h_{2\pi}$  berechnen. Subtrahiert man vom Phasendifferenzbild ein Bild, das einer ebenen

<sup>5</sup> Die beiden Bilder werden meist manuell entsprechend geeigneter Passpunkte auf Pixelbruchteile genau übereinandergelegt.



**Abbildung 7.4:** Digitales Höhenmodell aus InSAR (SRTM): Interferogramm (A), Höhenmodell (B), Visualisierung als Karte (C) und als Animation (D: Einzelbild aus der Animation).

Fläche entspricht (linearer Anstieg in  $y$ -Richtung), so entspricht die Phase direkt der ‘Modulohöhe’ (das resultierende Bild heißt Interferogramm, siehe Abbildung 7.4 A).

Kennt man nun die Absoluthöhe eines Bildpunktes, so kann man schrittweise die Höhe der Umgebung bestimmen, indem man bei jedem überschrittenen Phasensprung  $\pm h_{2\pi}$  addiert. Diese Vorgehensweise nennt man Phase-Unwrapping. Probleme können dabei auftreten, wenn bei schnell ändernder Phase sog. Residuen<sup>6</sup> auftreten. Geeignete Theorien und Algorithmen sind vorhanden. Als Ergebnis erhält man ein digitales Höhenmodell (DEM) wie in Abbildung 7.4 B.

Weitere Details und Informationen zur SAR-Interferometrie sind z.B. in [BH, Wer, RMK<sup>+</sup>, SBL<sup>+</sup>, Srtm, Aes1, Aes2, Nsrt, Th, Bri] zu finden.

SAR-Interferometrie wird bzw. wurde betrieben bei

- aufeinander folgenden Überflügen (repeat pass) des ERS-1 oder des ERS-2 (35 Tage Abstand),
- der Tandemflugphase von ERS-1 und ERS-2 (4’1995–3’2000, 1 Tag Abstand),
- der Space Shuttle-SRTM-Mission (vgl. Abschnitt 2.3.4) *sowie*

<sup>6</sup> Hier: Ein Quadrat aus  $2 \times 2$  Bildpunkten, deren Phase bei einem Umlauf um ihren Mittelpunkt um  $\pm 2\pi$  variiert (vgl. auch die ähnliche Definition in der Funktionentheorie!).

Parameter	Formel	ERS-1/ERS-2 repeat pass	ERS-1/2 Tandem	SRTM 2'2000	Aero- Sensing
SAR-Band		C	C	X/C	X/P
Wellenlänge	$\lambda_0$	5.657 cm	5.657 cm	3.1 cm/ 5.65 cm	3.15 cm/ 72 cm
Antennenneigung	$\theta_0$	$23^\circ \pm 3.5^\circ$	$23^\circ \pm 3.5^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$
Baseline	$B_\perp$	0 m	80–300 m	60 m	0.6 m, 2.4 m
Flughöhe	$h_S$	853 km	853 km	233 km	0.5–9 km
Ambiguity-Höhe	$h_{2\pi}$	—	30–120 m	60 m/ 110 m	3.3–236 m/ 75 m–5.4 km
Höhengenauigkeit	$\Delta h$	—	10 m	6 m/ 16 m	5–50 cm/ 0.5–2 m
Pixelauflösung		12.5 m	12.5 m	12.5 m/ $\approx 30$ m	0.5–2 m/ 1–5 m
Rangeausleuchtung	$d_R$	100 km	100 km	47.5 km/ 225 km	1–15 km/ 1–28 km
Zeitl. Bildabstand	$\Delta t$	35 d	1 d	—	—

**Tabelle 7.1:** Parameter verschiedener SAR-Interferometrie-Experimente.

- bei Firma AeroSensing (flugzeuggestützt, vgl. Abschnitt 2.3.5 und Abbildung 2.10) und anderen Firmen (E-SAR, vgl. Abschnitt 2.3.5).

Tabelle 7.3.1 zeigt wichtige Parameter der einzelnen Fälle. Während sich flugzeuggestützte Interferometrie wie bei AeroSensing gut zur Topographiebestimmung im Wattenmeer eignet (gute Pixel- und Höhenauflösung), sind SRTM-Bilder kaum geeignet (zu geringe Höhenauflösung, um trockenengefallene Sandbänke aufzulösen; der Tidenhub in der deutschen Bucht beträgt nur wenige Meter). Sowohl repeat-pass- als auch Tandemflug-Interferometrie der ERS-1/2-Satelliten ist wegen mangelnder Szenenkohärenz für Untersuchungen im Wattenmeer ungeeignet: Zum einen ist die Tide-Situation zwar zur selben Uhrzeit, aber an unterschiedlichen Tagen eine unterschiedliche. Weiter verändern unterschiedliche Wetterverhältnisse und morphodynamische Prozesse während der dazwischenliegenden Hochwasserperioden die Rückstreuereigenschaften des Watts, was eine kohärente Überlagerung der Bilder unmöglich macht. Des Weiteren ist auch hier die Höhenauflösung zu gering.

Eben wegen dieser Tideeffekte sind auch multitemporale/Kohärenzansätze [Ba1, Ba2, HLS<sup>+</sup>] zur Kantenerkennung im Wattenmeer nicht einsetzbar. Diese sind besser zur Beobachtung von langsam veränderlichen (Steil-)Küsten bei geringem Tidenhub (z.B. im *Mackenzie-Delta*) geeignet. Die Verwendung von SRTM-Kohärenzbildern kann in den meisten Regionen<sup>7</sup> nur zu einem einzelnen Überflug (bzw. Wasserstand) eine Land/Wasser-Klassifizierung und damit nur eine Wasserstandslinie liefern.

<sup>7</sup> Vergleiche dazu auch die Landabdeckung von SRTM, Abschnitt 2.3.4.

**Bemerkungen:**

- Bei lediglich einem zeitlichen Offset (ERS-1/2 repeat-pass) können Veränderungen an der Erdoberfläche, wie z.B. lokale Verschiebungen um wenige Zentimeter als Folge von Erdbeben oder Kontinentaldrift (Plattentektonik) untersucht werden.
- Bei der along-track-Interferometrie versetzt man zwei Antennen im single-pass- Fall parallel zur Flugrichtung (Baseline  $B_{||}$ ). Dadurch können Geschwindigkeiten von bewegten Rückstreuern bestimmt werden.
- Weiter können auch mit optischen Sensoren Stereobilder aufgenommen und dadurch Höhenmodelle gewonnen werden. Ein Beispiel ist die vom DLR auf dem Fernerkundungsmodul PRIRODA der (ehem.) russischen Raumstation MIR installierte MOMS-Kamera (Modular Optoelectronic Multispectral Stereo-Scanner) [Moms]. Auch hier ist jedoch die Höhenauflösung zu gering, und es stehen nur sehr begrenzt Daten zur Verfügung.

**7.3.2 Analyse von inhomogenen Seegangsfeldern**

Es ist bekannt, dass ein SAR-Sensor Ozeanwellen abbilden kann [ARR]. Nach der Theorie [HsH] kann der SAR-Abbildungsmechanismus (vgl. auch Abschnitt 2.1) für lange Ozeanwellen in Range-Richtung als linear betrachtet werden. Lediglich Wellen, die zu kurz für die SAR-Auflösung sind, werden nicht abgebildet.<sup>8</sup> Insgesamt jedoch können mittels gefensterter FOURIER-Transformationen (FFT auf kleinen Bildausschnitten) Aussagen über die lokalen Ozeanwellen gemacht werden, und zwar über Seegangshöhe, Ausbreitungsrichtung und Wellenlänge.<sup>9</sup>

Entsprechend der Theorie der Oberflächenwellen<sup>10</sup> [DKKS] gilt die sogenannte Dispersionsrelation

$$\tanh(kh) = \frac{\omega^2}{gk}. \quad (7.18)$$

Diese stellt einen Zusammenhang zwischen Wassertiefe  $h$ , Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  der Ozeanwelle her ( $\lambda$ : Wellenlänge,  $\nu$ : Frequenz,  $T$ : Schwingungsperiode,  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ : Erdbeschleunigung). Die Wellenlänge und damit auch die Phasengeschwindigkeit  $c = \frac{\omega}{k}$  verringert sich

<sup>8</sup> In Azimuth-Richtung verschmiert die Eigenbewegung der Wellen diese aufgrund SAR-eigener Abbildungsphänomäne.

<sup>9</sup> Derartige Informationen mit Wavelet-Verfahren zu extrahieren, ist ein weiteres vielversprechendes Anwendungsgebiet für Wavelets in der SAR-Bildverarbeitung.

<sup>10</sup> Für lange Wellenlängen  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  können die Effekte der Oberflächenspannung (Terme von  $\mathcal{O}(k^3)$ ) vernachlässigt werden.

also bei sinkender Wassertiefe,  $\omega$  und damit  $T$  werden dabei als konstant für eine Wellengruppe angenommen. Man kann nun die lokale Wellenlänge  $\lambda$  und damit  $k$  aus dem SAR-Bild bestimmen und berechnet bei großer Wassertiefe ( $kh \gg 1$ )  $\omega \approx \sqrt{gk}$ . Damit berechnet sich die Wassertiefe aus den in das Flachwasser einlaufenden Wellen als

$$h = \frac{1}{k} \operatorname{Artanh} \left( \frac{\omega^2}{gk} \right). \quad (7.19)$$

Untersuchungen [IG] mit diesem Verfahren haben ergeben, dass aus SAR-Vollszenen — zum Teil mit Zusatzwissen — grobskalige Rekonstruktionen der Wassertiefe und damit der Bodentopographie möglich sind. So zeigt J. SCHULZ-STELLENFLETH in Abschnitt 7.3 von [LWH<sup>+</sup>], dass grobe Tendenzen der Wassertiefe bei auf die Küste auflaufenden Wellen aus einzelnen SAR-Bildern bestimmbar sind. Abgesehen von Speckle-Degradierungen wurde auf einem 1.25 km-Gitter in Azimuth-Richtung eine genäherte Wassertiefe bestimmt (überlappende  $5 \times 5 \text{ km}^2$  FOURIER-Fenster). Aus einer geschätzten Wassertiefe von ca. 50 m südlich von *Helgoland* konnte 40 km östlich der durchaus realistische Tiefenwert von ca. 13 m bestimmt werden (näher am Land unterschreitet die Wellenlänge die Auflösungsgrenze des SAR-Sensors).

Dieses Verfahren eignet sich also vor allem für die grobskalige Vermessung mittlerer Wassertiefen (5–50 m), also als Ergänzung zu den Wasserstandlinienverfahren (0–5 m).

U. WOLFF [Wol] verwendet Wavelet-Kantendetektion nach MALLAT *et al.* (vgl. Abschnitt 1.2.5), um aus gemittelten<sup>11</sup> Bildern eines stationären (Turm-)Radars<sup>12</sup> Signaturen der Meeresoberfläche zu untersuchen. Verwendet werden Bilder zu unterschiedlichen Tidephasen aus den Jahren 1997 und 1999 von der Nordspitze von *Sylt*. Veränderungen der Kanten lassen ebenfalls morphodynamische Veränderungen der Unterwassertopographie vermuten. Beobachtbar ist ein an die Küste angrenzender Kreissektor<sup>13</sup> mit Radius  $\approx 2 \text{ km}$ , sofern in dessen Mittelpunkt eine nautische Radarantenne steht, die mit der entsprechenden Bildaufzeichnungshardware versehen ist.

Betrachtet man im entsprechenden Sektor-Bereich die Ausbreitung von Wellensignaturen auf einzelnen (ungemittelten, wenn auch stark verrauschten) Bildern, so ist unter Verwendung der Dispersionsrelation (7.18) an eine ähnliche Vorgehensweise wie bei der Analyse von Seegangsfeldern bei SAR-Bildern zu denken.

<sup>11</sup> 32 Bilder im 2.2- bzw. 1.45-Sekunden-Abstand aufgenommen.

<sup>12</sup> Diese Real-Apertur-Bilder sind ebenfalls mit Speckle-Rauschen degradiert.

<sup>13</sup> Der Öffnungswinkel des Sektors ist abhängig von der Gestalt der Küste.

Name	Abschn.	Genau.	Aufwand	Kosten	Eignung
Sonar	7.1.1	++	○	--	+
Messung	7.1.2	○	---	-	○
Wasserstand SAR	3, 7.2.1	○	+	+	+
Wasserstand optisch	7.2.2	+	++	-	○
Space InSAR	7.3.1	-	○	○	--
Flugzeug InSAR	7.3.1	+++	-	--	++
MOMS	7.3.1	-	○	+	--
Seegangsfeld-Analyse	7.3.2	--	+	+	--

**Tabelle 7.2:** Verfahrenüberblick mit grober qualitativer Bewertung (+++= positiv, ..., --- = negativ) bei Verwendung zur Topographiebestimmung.

## 7.4 Vergleich der Verfahren

Tabelle 7.2 gibt einen groben Überblick über — teilweise bereits angesprochene — Stärken und Schwächen der aufgeführten Verfahren. Es wird auch jeweils der Abschnitt bzw. das Kapitel angegeben, in dem das jeweilige Verfahren vorgestellt wird. Wünschenswert ('++') sind hierbei möglichst hohe Genauigkeit, geringer Aufwand und geringe Kosten. Auch die generelle Eignung für das Einsatzgebiet 'Wattenmeer' ist angegeben. Im Folgenden werden noch einige detaillierte Vergleiche durchgeführt. Sie zeigen, dass der vorgestellte Algorithmus ein durchaus konkurrenzfähiges Verfahren liefert, Informationen zur Topographie im Wattenmeer zu gewinnen.

### 7.4.1 Wavelet-basierte Kantenfindung versus Fuzzy-Kantenfindung

Durch die Zusammenarbeit mit Herrn Alexandros Dimou wurde es möglich, einen Vertreter der Fuzzy-Kantenfindung (siehe Abschnitt 7.2.1) gegen die in Abschnitt 3 vorgestellte Wavelet-Kantenfindung zu testen. Dabei wurde der Filter<sup>14</sup>  $D^{[3]}$  aus (7.11) herangezogen. Es ist geplant, die in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse gemeinsam mit Herrn Dimou in einer geowissenschaftlichen Zeitschrift zu publizieren [NDJL].

Die im Anschluss folgenden Vergleiche bestehen aus zwei Teilen. Zum einen werden die Ergebnisse der Kantenfinder-Transformationen an sich verglichen. Anschließend werden noch einzelne Schritte des Postprocessing im Hinblick auf die Küstenlinienextraktion vorgenommen (Blocktracing und lokale Kantenauswahl, nicht jedoch aktive Konturierung, da diese die Lage der Kante zu sehr beeinflusst). Dabei wurde aus zwei Gründen in beiden Fällen dasselbe Postprocessing verwendet: Zum einen können so die direkten Aus-

<sup>14</sup> Unter einer Filterung wollen wir in diesem Abschnitt nicht die streng mathematische lineare Filterung ( $\ell^2$ -Faltung) sondern die gesamte Transformation des Kantenfindungsprozesses (z.B. incl. der Betragsmaximierung bei der Wavelet-Kantenfindung) verstehen.



wirkungen des gewählten Kantenfinders auf die Qualität der Küstenlinie überprüft werden, zum anderen war die Implementierung z.B. des von MASON *et al.* für  $D^{[2]}$  vorgeschlagenen Postprocessings (vgl. Abschnitt 7.2.1) sehr kompliziert und die Begründung der Schrittabfolge und ihre Auswirkungen aus [MD] nicht immer klar ersichtlich. Die Vergleiche werden sowohl untereinander wie auch mit der in Abschnitt 4.1 vorgestellten Musterlösung durchgeführt.

### Vergleich der direkten Ergebnisse

Als erstes betrachten wir ein rauschfreies Bild mit Kantenstärke  $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$  mit ‘mittleren’ Intensitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  beiderseits der Kante (da kein Rauschen vorhanden ist, sind das also einfach die Bildwerte auf beiden Seiten). Die Filterantwort auf Skala  $a$  der diskreten Wavelet-Transformation des Amplitudendichtebildes ist dann an Kantenposition  $b_0$

$$(\mathcal{W}_\psi f)(a, b_0) \approx \frac{|a|}{6} \ln \kappa \in [0, \infty[, \quad (7.20)$$

während für die Fuzzy-Formel bei Anwendung auf das Amplitudenbild

$$D_3 = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \in [0, 1] \quad (7.21)$$

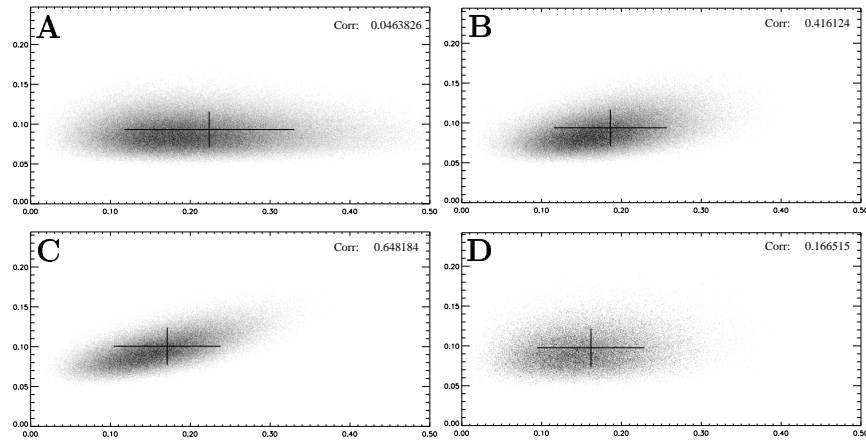
folgt. Die algorithmische Transformation eines simulierten Amplitudenbildes  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \forall y < 0 \\ x & \forall y \geq 0 \end{cases}$ ,  $1 \leq x \leq 8$  bestätigte die theoretischen Werte.

Weiter wurde ein simuliertes Speckle-Rauschen mittlerer Intensität  $\mu = 1$  benutzt ( $4 \cdot 10^6$  unkorrelierte Bildpunkte analog zu Abbildung 5.3). Abbildung 7.5 zeigt Korrelationsgraphen der Filterantworten eine  $7 \times 7$  Fuzzy-Fensters<sup>15</sup> im Vergleich zu den Wavelet-Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^3$ . Die Korrelation

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \left( X_i - \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{N} \right) \left( Y_i - \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{N} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left( X_i - \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{N} \right)^2 \sum_{i=1}^N \left( Y_i - \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{N} \right)^2}} \quad (7.22) \end{aligned}$$

ist besonders hoch bei den Skalen  $2^1$  und  $2^2$ , die eine vergleichbare Größe wie das Fuzzy-Fenster haben. Dass die vergleichbare Größe in der Tat die Hauptursache für die Korrelation ist, sieht man besonders deutlich an Tabelle 7.3, wo weitere Korrelationswerte angegeben sind.

<sup>15</sup> Als Fuzzy-Fenster werden in diesem Vergleich stets zwei direkt an den zu überprüfenen Kantenpunkt angrenzende Quadrate ungerader Seitenlänge gewählt, deren Mittelpunkte mit diesem auf einer  $k \cdot 45^\circ$  orientierten Geraden liegen.



**Abbildung 7.5:** Filterantworten von simuliertem Speckle-Rauschen bzgl. des  $7 \times 7$  Fuzzy-Filters ( $y$ -Achse) im Vergleich zu den Wavelet-Betragsmaxima ( $x$ -Achse) der Skalen  $a = 2^0, \dots, a = 2^3$  (A ... D).<sup>16</sup>

	$3 \times 3$	$7 \times 7$	$15 \times 15$
$a = 2^0$	0.290	0.046	0.009
$a = 2^1$	<b>0.545</b>	0.416	0.095
$a = 2^2$	0.121	<b>0.646</b>	0.425
$a = 2^3$	0.012	0.167	<b>0.671</b>

**Tabelle 7.3:** Korrelationswerte für verschiedene Wavelet-Skalen und Fuzzy-Filtergrößen.

Für die nachfolgenden Tests in diesem und im folgenden Abschnitt verwenden wir erneut den  $1024 \times 1024$  Teilausschnitt der ERS-2 SAR-Szene, auf der die Musterlösung erstellt wurde (siehe Abschnitt 4.1).

Betrachtet man die Filterantwort von Kanten und Rauschen innerhalb des Bildes in bezug auf die Wavelet- und die Fuzzy-Filterung, kann man erneut die Korrelation überprüfen. Abbildung 7.6 zeigt dies für die Wavelet-Koeffizienten (Betragsmaxima) auf Skala  $a = 2^2$  im Vergleich zu Standard- und verbessertem<sup>17</sup>  $7 \times 7$  Fuzzy-Filter. Die eingezeichneten Linien zeigen die theoretische Beziehung für rauschfreie Bilder bezüglich verschiedener Kantenstärken  $\kappa$ . Sie folgen direkt aus (7.20) und (7.21).

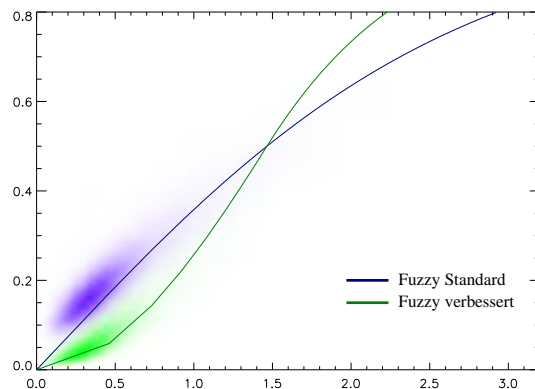
Alle drei Untersuchungen weisen eine starke Korrelation der Koeffizien-

<sup>16</sup> Die Kreuze zeigen  $E(U) \pm \sqrt{\text{Var}(U)}$  von beiden Variablen  $U = X, Y$ . Die Wavelet-Betragsmaxima wurden mit  $|a|$  multipliziert, um eine konstante Impulsantwort auf DIRAC-Peaks zu erhalten.

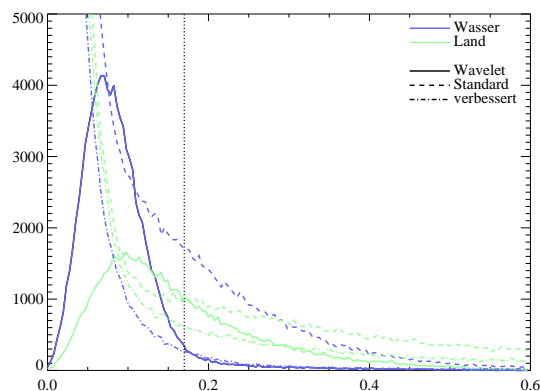
<sup>17</sup> Die Werte des verbesserten Fuzzy-Verfahrens entstehen durch die stetige Bijektion

$$[0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq m \\ \frac{x^2 - 2x + m}{m - 1} & \text{für } m < x \leq 1 \end{cases}$$

mit Fixpunkten 0,  $m$  und 1 aus denen des Standard-Verfahrens (hier  $m = \frac{1}{2}$ ). Dies bewirkt eine Verstärkung des Kontrasts.



**Abbildung 7.6:** Korrelation der Filterantwort eines SAR-Bildes: Wavelet-Betragsmaxima im Vergleich mit  $7 \times 7$  Fuzzy (Standard/verbessert). Die Linien entsprechen der Beziehung für rauschfreie Kanten (vgl. Text).

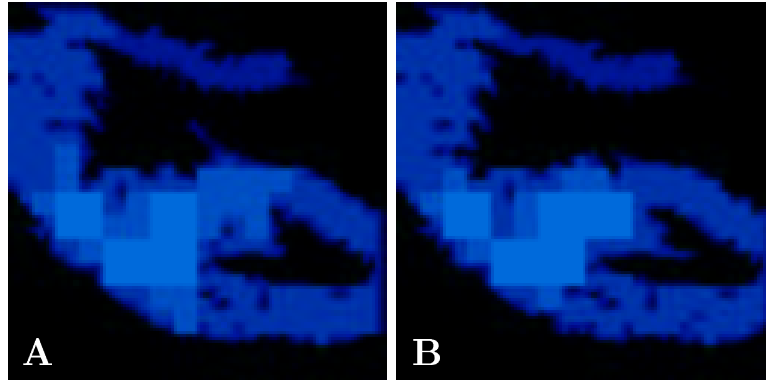


**Abbildung 7.7:** Histogramm der Wavelet-Betragsmaxima auf Skala  $2^2$  und der  $7 \times 7$  Fuzzy-Filterwerte eines SAR-Bildes auf Land und Wasser.

ten beider Verfahren auf. Die Betragsmaxima der Wavelet-Transformation und die Fuzzy-Filterantworten ergeben ähnliche Maße (Bewertungen) für die Kantenstärke. Dies erlaubt z.B. auch die Wahl abhängiger Schwellwerte für Anwendungen (wie Rauschfilterung, Kantenextraktion, etc.).

Vergleicht man die Verteilungen der Filterantworten über Wasser und Land (bzg. der Musterlösung), so bemerkt man in allen Fällen (Wavelet-, Standard- und verbessert Fuzzy-Verfahren) die stärkeren Strukturen über dem Land, die sich durch höhere Werte ausdrücken. (siehe Abbildung 7.7, die vertikale Linie gibt erneut den Schwellwert  $0.68 = 0.17 |a|$  bei Verwendung von Skala  $a = 2^2$  an.)

Der erste Schwellwert ( $\approx 0.265$  für Standard,  $\approx 0.125$  für verbessert) wurde aus den Korrelationsgraphen geschätzt (grobes Maximum in  $y$ -Richtung bei festem  $x$ -Wert in Höhe des Wavelet-Schwellwertes). Die Schwellwertbildung wurde erneut auf die mittlere Filterantwort entlang einer Kante vorgenommen, wobei Kanten mit weniger als 5 Pixeln entfernt



**Abbildung 7.8:** Blocktracing-Ergebnisse bei Standard (A) und verbesserter (B) Fuzzy-Kantenfindung im Vergleich zur Musterlösung.

Fuzzy- verfahren	Blocktracing	Musterlösung				
		in Pixeln		in $8 \times 8$ -Blocks		
		Wasser	Land	Wasser	Land	beides
Standard	Wasser	45.9%	0.8%	45.3%	0.5%	1.0%
	Land	3.4%	42.9%	1.1%	39.6%	5.6%
	Küste	3.7%	3.2%	1.9%	1.4%	3.7%
verbessert	Wasser	45.4%	0.2%	45.0%	0.1%	0.6%
	Land	3.3%	44.1%	0.9%	40.6%	5.8%
	Küste	4.3%	2.6%	2.2%	0.8%	3.9%

**Tabelle 7.4:** Blocktracing-Ergebnisse bei Fuzzy-Kantenfindung im Vergleich zur Musterlösung.

wurden. Tests mit verschiedenen Schwellwerten (aus  $\frac{1}{200}\mathbb{N}$ ) wurden unternommen, um den Fehler zu minimieren. Die besten Ergebnisse für das verwendete Bild lieferten Schwellwerte von 0.245 für Standard- und 0.13 für verbesserte Fuzzy-Kantenfindung.

### Vergleich der Ergebnisse des Postprocessing

Während die Ergebnisse des Blocktracing für Wavelet und verbessertes Fuzzy gut aussehen, zeigt sich der Standard-Fuzzy-Fall als sehr instabil gegenüber Durchbruch aufs Land (vgl. erstes Beispiel in Abschnitt 4.4). Nachdem die beiden Fuzzy-Verfahren durch eine monotone Transformation ineinander überführt werden können, würde eine punktweise Schwellwertbildung mit gemäß dieser transformierten Schwellwerten in beiden Fällen dieselben Kanten und dieselben Postprocessing-Ergebnisse liefern. Bei Schwellwertbildung entlang ganzer Kanten werden die nichtlinear transformierten Werte jedoch unterschiedlich stark gewichtet, was zu unterschiedlichen Ergebnissen führt.

Die Ergebnisse des Blocktracing nach Fuzzy-Kantenfindung sind in Ab-

bildung 7.8 und im Vergleich zur Musterlösung in Tabelle 7.4 zusammengestellt. Die Entsprechungen im Wavelet-Fall sind in Abbildung 3.1 und Tabelle 4.1 zu finden.

Im Allgemeinen liefert der Wavelet-basierte Algorithmus geringfügig bessere Ergebnisse als der verbesserte fuzzybasierte: Nur im pixelbasierten Vergleich liegt die verbesserte Fuzzy-Variante leicht vor der Wavelet-basierten im Bezug auf die Zahl der Landpunkte, die fälschlicherweise als Küste klassifiziert wurden. Die Standard-fuzzybasierte Variante liefert weitaus schlechtere Ergebnisse.

Dies überträgt sich direkt auf die Qualität der lokal gewählten Kanten. Der mittlere Fehler dieser — im Vergleich zur Musterlösung — liegt nun bei  $\langle d \rangle = 7.1$  für Fuzzy Standard und  $\langle d \rangle = 6.3$  für Fuzzy verbessert. Dies entspricht ca. 88.7 m bzw. 78.7 m in der Natur. Vernachlässigt man erneut Effekte durch Schiffe bzw. Bildrand ( $d > 40$ ) so erhält man  $\langle d \rangle = 5.8$  bzw.  $\langle d \rangle = 4.7$  (72.5 m bzw. 58.7 m). Erneut liegt der Wavelet-basierte Algorithmus leicht vor dem verbesserten fuzzybasierten.

Abschließend werden noch die Ergebnisse der lokalen Kantenauswahl der einzelnen Algorithmen untereinander verglichen. Beim Vergleich zweier Ergebnisse liefern der mittlere Abstand  $\delta_{\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{B}}$  eines Wasserstandslinienpixels des Algorithmus  $\mathfrak{A}$  zum nächstgelegenen Wasserstandslinienpixels von Algorithmus  $\mathfrak{B}$  sowie der symmetrische Abstand  $\delta_{\mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{A}}$  (desgl. mit vertauschten Rollen) den mittleren Küstenabstand  $\delta_{\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{B}} = \frac{1}{2} (\delta_{\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{B}} + \delta_{\mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{A}})$ . Als Werte erhält man 6.6, 5.1 und 4.0 Pixel (82.5 m, 63.2 m und 50.4 m), wenn man Wavelet<sup>18</sup> mit Standard Fuzzy, Wavelet<sup>18</sup> mit verbessertem Fuzzy und die beiden Fuzzy-Varianten miteinander vergleicht. Vernachlässigt man Kanten mit einem Abstand von mehr als 40 Pixeln als solche, die vom anderen Algorithmus nicht gefunden wurden, so ändern sich die Abstände zu 5.0, 4.2 und 2.3 Pixeln (62.4 m, 52.4 m und 35.0 m). Die beiden Fuzzy-Verfahren sind also auch bezüglich ihrer Resultate enger miteinander als mit dem Wavelet-Verfahren verwandt.

Alles in allem zeigt sich ein geringer Vorsprung des Wavelet-basierten gegenüber dem besseren der fuzzybasierten Algorithmen.

#### 7.4.2 Vergleich am Mackenzie

Die Zusammenarbeit mit Herrn Anton Vrieling und Herrn Joost van der Sanden vom Canada Centre for Remote Sensing (CCRS) ergab die Möglichkeit eines weiteren Vergleichs mit einem Küstenlinienextraktionsalgorithmus. Vergleichsgebiet ist das Mündungsgebiet des kanadischen Flusses *Mackenzie*. Auch diese Küstenregion ist morphodynamisch hoch aktiv, weist jedoch einige Besonderheiten auf [Vr]:

- Es handelt sich um eine Permafrostregion, d.h. der Boden ist bis in ei-

<sup>18</sup> Hier wurde die Variante ohne Berechnung der LIPSCHITZ-Regularität verwendet.

ne Tiefe von etwa 700 m gefroren, ebenso das Meer die meisten Monate des Jahres bei Wassertiefen unter 2 m bis zum Grund. Die Sandablagerungen bestehen bis zu 70% aus Eis, die Durchschnittstemperaturen liegen zwischen  $-9^{\circ}\text{C}$  und  $-8^{\circ}\text{C}$  (an der Erdoberfläche).

- Es existiert kaum Tidenhub ( $< 0.5$  m), bei Sommerstürmen schlagen jedoch Wellen mit bis zu 4 m Höhe gegen die Sandklippen.
- Es herrscht eine starke Erosion von durchschnittlich 1–8 m pro Jahr, durch schwere Stürme bis max.  $30 \frac{\text{m}}{\text{a}}$ .
- Auch die Sedimentablagerungen des *Mackenzie* bestehen aus leicht erodierbaren Materialien.
- Diese Region ist besonders gefährdet durch die globale Erwärmung. Die Verlängerung der eisfreien Zeit erhöht die Erosion. Der Abbau des See-Eises ist bereits beobachtbar, nicht jedoch der vermutete Anstieg des Meeresspiegels ( $< 2.5 \frac{\text{mm}}{\text{a}}$ ).

Das *Mackenzie*-Delta ist Teil der GEWEX-Studie (Global Energy and Water Cycle Experiment), einem internationalen Forschungsprogramm für Beobachtungen und wissenschaftliche Aktivitäten, die zu einer Vorhersage der globalen und regionalen Klimaveränderung führen. Untersucht werden der hydrologische Zyklus und der Energiefluß in der Atmosphäre, der Landoberfläche und den oberen Ozeanschichten.

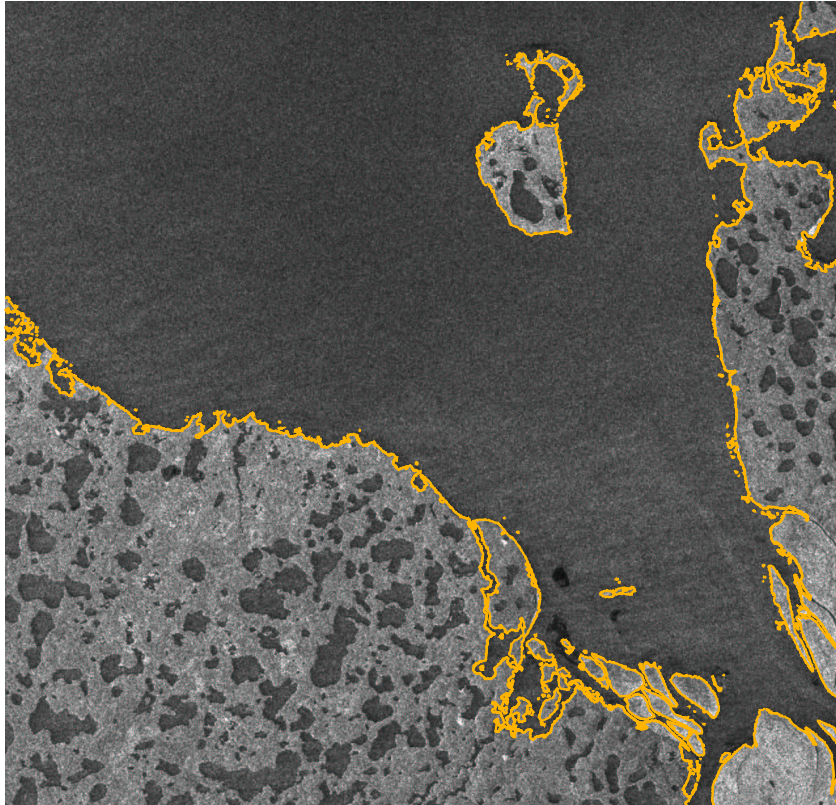
Grundlage des folgenden Vergleiches ist eine RADARSAT-1-Szene (C-Band) der *Mackenzie*-Mündungsregion vom 9. August 1999. Da für diese Studie keine Musterlösung vorhanden ist,<sup>19</sup> können die Vergleiche nur durch optische Begutachtung erfolgen.

Wie bereits erwähnt (am Ende von Abschnitt 7.2.1) verwendet das Schwellwertverfahren von VRIELING eine Speckle-gefilterte Version der o.g. Szene. Diese wird dabei zugleich geokodiert. Weiterhin sind starke manuelle Eingriffe notwendig, um einen geeigneten Schwellwert für den jeweils betrachteten Küstenabschnitt des Bildes zu wählen. Dadurch kann der Algorithmus auf für optische Begutachtung sehr gute Resultate gebracht werden. (vgl. Abb. 7.9)

Der hohe manuelle Zeitaufwand bei dem Verfahren von VRIELING darf bei einem Vergleich nicht außer Acht gelassen werden. Dieser erlaubt derartige Resultate nur für einzelne Bilder, z.B. bei zeitlich großskaligen Untersuchungen (in [Vr] geht es um Veränderungen während mehrerer Jahrzehnte).

Die Frage ist nun, wie nahe ein automatischer Algorithmus wie der in Kapitel 3 vorgestellte ohne oder mit nur sehr geringen manuellen Eingriffen (vgl. Abschnitt 6.2.2) dieser Vorgabe kommen kann. Dazu wurden die Küstenlinien für Bildausschnitte der *Mackenzie*-Mündung sowohl des

<sup>19</sup> Auch genaue (aktuelle), georeferenzierte Karten oder ausreichende GPS-Meßwerte sind nicht vorhanden.

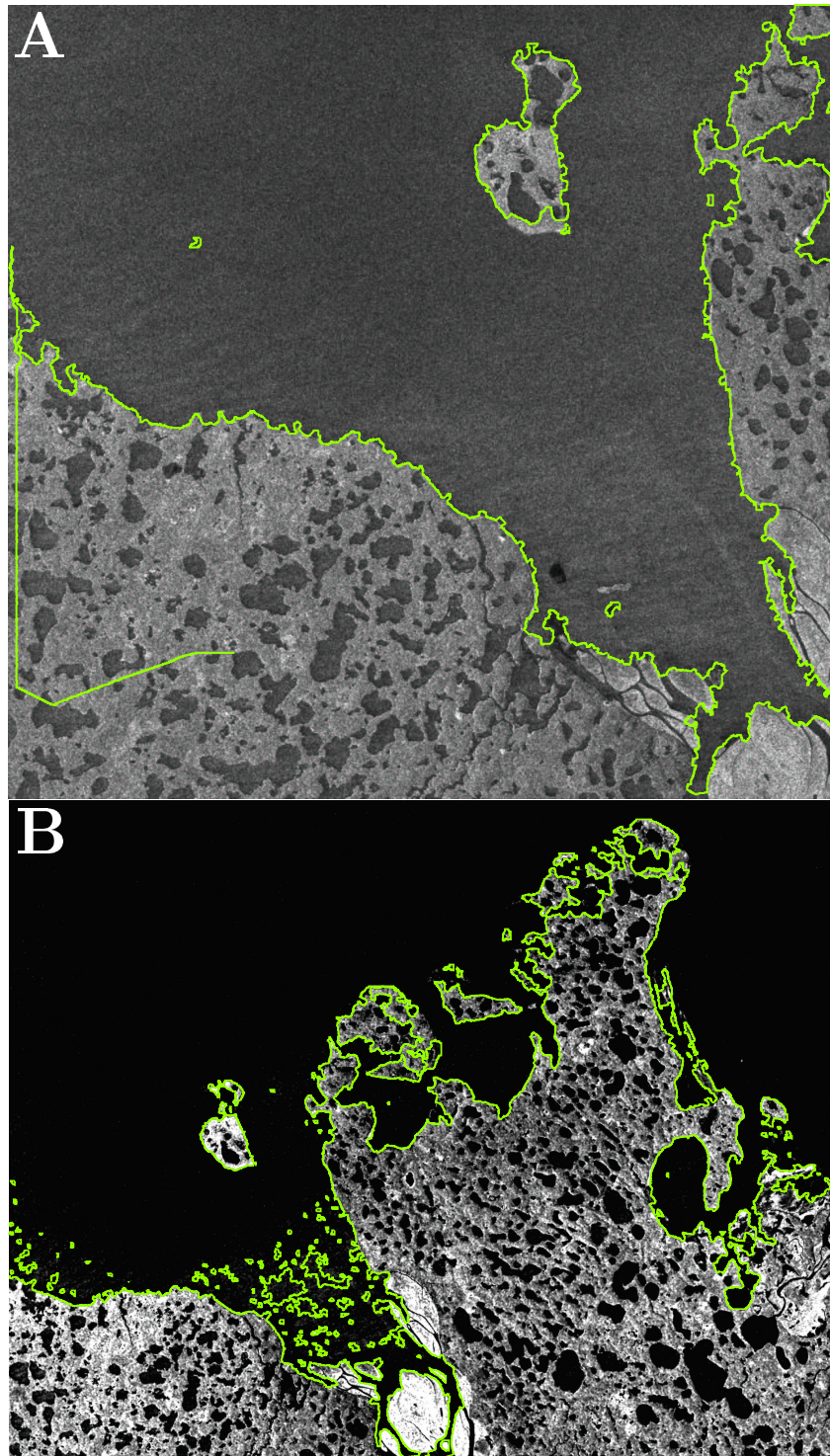


**Abbildung 7.9:** RADARSAT-1-Bild des *Mackenzie-Deltas* vom 9. August 1999 mit Küstenlinie aus dem Schwellwert-Verfahren.

ursprünglichen RADARSAT-1-Bildes, als auch der geocodierten und gefilterten Version als Eingabe für den Wavelet-basierten Algorithmus verwendet.

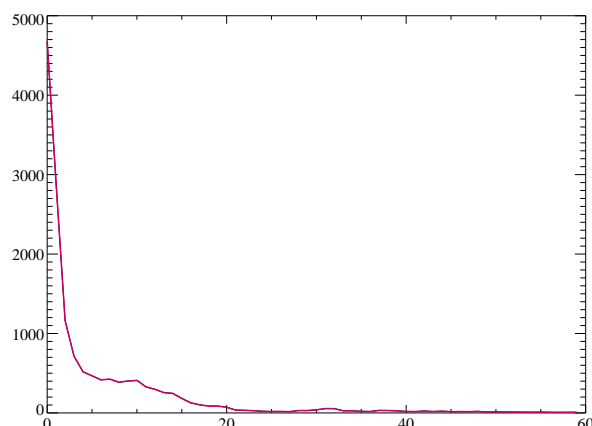
Abbildung 7.10 zeigt die beiden Ergebnisse. Auffallende Fehler sind:

- Durch schmale Kanäle abgetrennte Inseln werden vom Blocktracing dem Land zugeschlagen.
- Es treten vereinzelt Mißinterpretationen der Küstenlinie bei der aktiven Konturierung auf, vor allem bei schmalen Landgebieten mit Seen, vgl. Insel im ungefilterten Bild.
- Beim gefilterten Bild treten Strukturen der Wasseroberfläche im Mündungsgebiet — möglicherweise hervorgerufen durch Strömungen — verstärkt auf und werden nicht mehr vom Speckle überdeckt. Diese werden vom Algorithmus als kleine Inseln missinterpretiert (eine Anpassung der Schranke für die minimale Inselgröße bei der aktiven Konturierung kann hier Abhilfe schaffen).



**Abbildung 7.10:** Original (A) sowie geokodiertes und Speckle-gefiltertes (B) RADARSAT-1-Bild des *Mackenzie-Deltas* vom 9. August 1999 mit Küstenlinie aus dem Wavelet-basierten Verfahren (Die Bildausschnitte sind unterschiedlich groß).





**Abbildung 7.11:** Abstand der Wavelet-Kanten von den Kanten mit lokaler, manueller Schwellwertfestlegung.

Numerisch ergibt sich ein mittlerer Fehler von 10.4 Bildpunkten als Abstand<sup>20</sup> des Wavelet-basierten Ergebnisses (Abb. 7.10 A) von dem des Schwellwert-Verfahrens (Abb. 7.9). Vernachlässigt man fehlerhaft gefundene kleine Inseln und die falsche Kante auf der großen Insel (Fehler > 25 Pixel), so liegt der mittlere Fehler noch bei 4.4 Bildpunkten. Die (abs.) Häufigkeiten der auftretenden Fehler sind in Abbildung 7.11 dargestellt.

Wegen des operationell jedoch bedeutend geringeren Zeitaufwandes ist der Wavelet-basierte Algorithmus trotz dieser Fehler ein ernst zu nehmender Konkurrent. Durch entsprechende manuelle Korrekturen sind auch hier weitreichende Verbesserungen möglich.

### 7.4.3 Vergleich mit der BAW-Topographie

In diesem Abschnitt soll sowohl die gefundene Küstenlinie eines SAR-Bildes als auch die interpolierte Topographie der Sandbank *Medemgrund* mit der Topographie verglichen werden, die jährlich von der BAW durch Messverfahren (vgl. Abschnitt 7.1) erneuert wird. Dabei werden nicht alle Gebiete des Wattenmeers in jedem Jahr vermessen, sondern vor allem die als morphodynamisch besonders aktiv bekannten Regionen bzw. die Schifffahrtsrouten.

Zunächst betrachten wir die (ohne Verwendung der LIPSCHITZ-Regularität) im ERS-2-SAR-Bild vom 14. März 1996 gefundene Küstenlinie im Vergleich zur BAW-Topographie von 1996. Die Wasserstände der Pegel *Otterndorf* und *Osteriff* zum Überflugszeitpunkt des Satelliten wurden als  $-1.07$  m und  $-0.55$  m festgestellt, der Pegel *Cuxhaven* wurde auf  $-0.95$  m Normal-Null (NN) interpoliert. Abbildung 7.12 zeigt nun die gefundene Wasserstandslinie, eingezeichnet in eine Grobtopographie, die lediglich die 4 Höhenbereiche  $]-\infty, -1.07]$ ,  $]-1.07, -0.95]$ ,  $]-0.95, -0.55]$  und  $]-0.55, \infty]$

<sup>20</sup> ohne Berücksichtigung des Bildrand-Effektes links unten in Abb. 7.10 A.

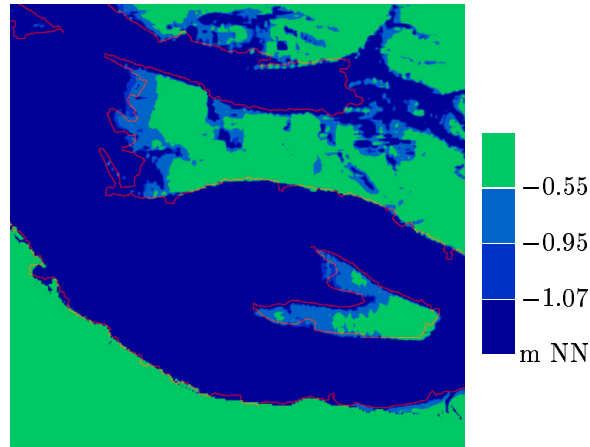


Abbildung 7.12: Wasserstandslinie im Vergleich mit der BAW-Topographie.

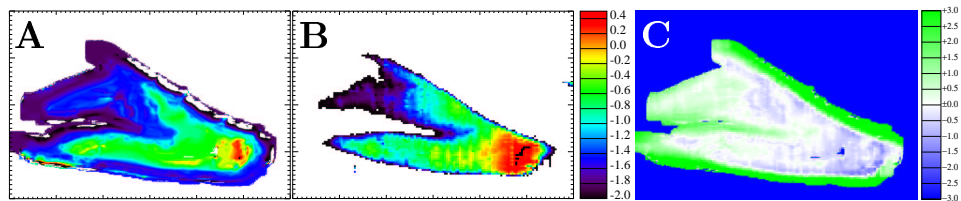


Abbildung 7.13: Die aus SAR-Bildern interpolierte Topographie (A) mit der von der BAW gemessenen (B) im Vergleich (C “= A – B”).

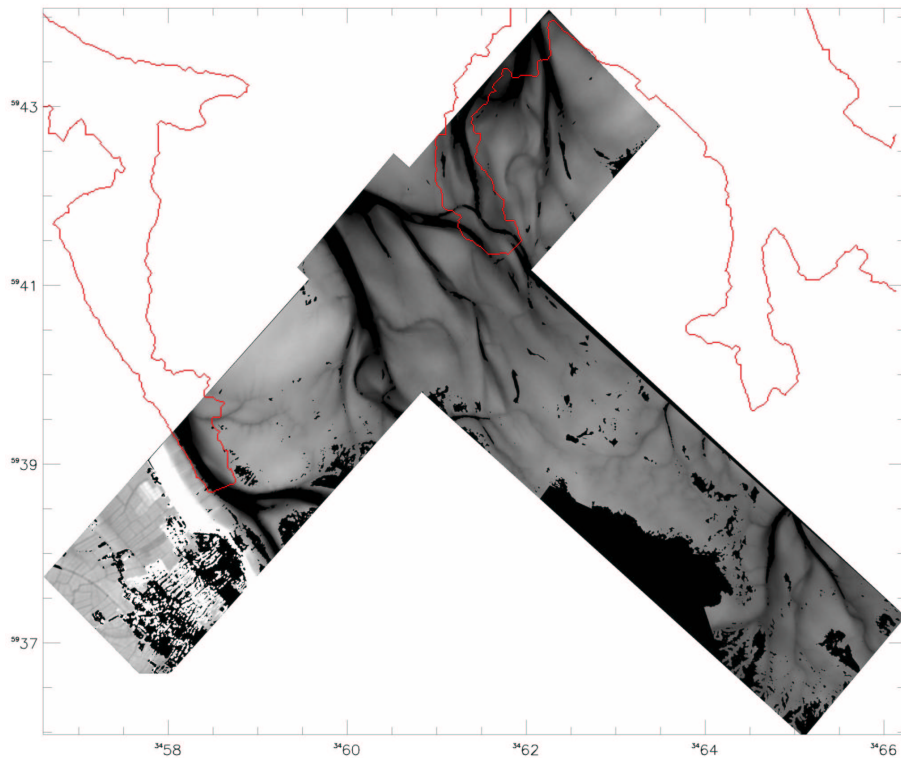
abdeckt.

Im Bereich des Pegels *Otterndorf* (südliche *Elbküste*, horizontal in Bildmitte, vgl. auch Abbildung D.1) zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Geht man von den gemessenen Pegeln aus, so handelt es sich wahrscheinlich um auslaufende Tide, es ist also kaum verwunderlich, dass in den flussabwärts gelegenen Bereichen die Wasserstandslinie eher wasserseitig liegt, da dort das Niedrigwasser bereits eher einsetzt (vgl. auch Abbildung 6.5).

Auch beim mittleren Fehler ist die beste Übereinstimmung mit dem Pegel *Otterndorf* zu erkennen.  $\langle d \rangle$  nimmt auf dem dargestellten Bildausschnitt die Werte 7.6, 6.8 und 31.3 Pixel im Vergleich zur Isolinie der Pegelhöhen von *Cuxhaven*, *Otterndorf* und *Osteriff* ein.

Auch die aus SAR-Bildern interpolierte Topographie zeigt eine recht gute Übereinstimmung mit der von der BAW gemessenen. Dies liegt vor allem an der Beschränkung auf ein Gebiet, das nur eine geringe räumliche Ausdehnung und somit nicht sehr starke Höhenunterschiede der Wasserstandslinie durch den Tide-Gradienten aufzuweisen hat. Abbildung 7.13 zeigt die beiden Topographien sowie ihre Höhendifferenz in Metern.

Im Innenbereich der Sandbank ist der Fehler relativ gering, die interpolierte Sandbank liegt zumeist wenige Dezimeter unterhalb der vermessenen (bläulich gefärbt), in manchen Bereichen auch leicht oberhalb. In den



**Abbildung 7.14:** AeroSensing-Flugzeuggestützte InSAR-Topographie mit überlagerter Wasserstandslinie aus dem Wavelet-basierten Algorithmus. Die schwarzen Bereiche im Watt geben Datenlücken an.

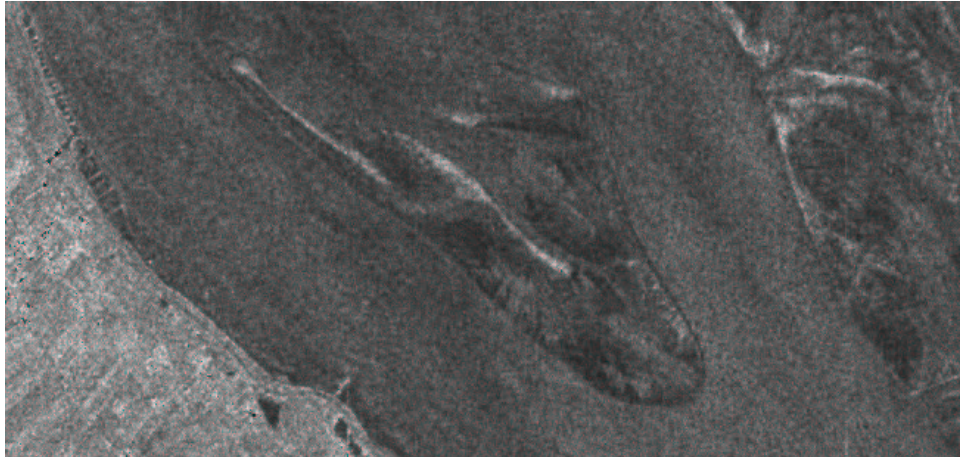
Randbereichen, in denen die Interpolation noch Werte liefert, liegt der interpolierte Wert weit oberhalb dem gemessenen. Dies liegt an der geringen Datenlage für niedrigere Wasserstände, da die Ebbe maximal etwa 2 Meter unter NN abläuft. Die beiden *Elbarme* um die Sandbank fallen steil ab und sind bis zu 20 Meter tief.

Die gesamte interpolierte Sandbank liegt im Mittel um  $\langle \Delta h \rangle = 92.4$  cm oberhalb der vermessenen, der mittlere Höhenfehler beträgt  $\langle |\Delta h| \rangle = 1.19$  m. Diese starke Abweichung liegt vor allem an den Interpolationsfehlern im Randbereich. Betrachtet man nur den Innenbereich (Höhendifferenz zwischen  $-2$  und  $+1$  m), so liegen die interpolierten Werte im Mittel noch  $\langle \widetilde{\Delta h} \rangle = 2.9$  cm oberhalb den vermessenen bei einem mittleren Höhenfehler von  $\langle |\widetilde{\Delta h}| \rangle = 36.1$  cm.

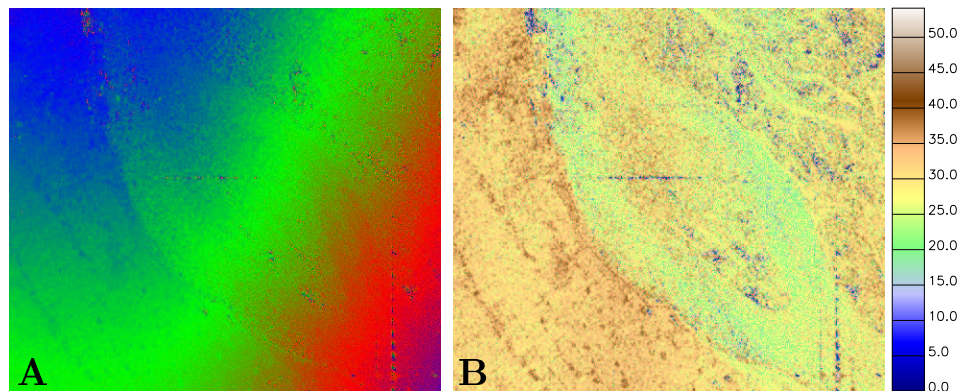
#### 7.4.4 Weitere Vergleiche

##### AeroSensing-Topographie

Bereits in [Hoj2] wurde zu Vergleichszwecken eine mit dem Wavelet-basierten Verfahren aus Kapitel 3 gefundene Wasserstandslinie über die von



**Abbildung 7.15:** SAR-Bild der Sandbank *Medemgrund* von der SRTM-Mission.



**Abbildung 7.16:** **A:** InSAR-Phasenbild ( $L = 4$  Looks) der Sandbank *Medemgrund* von der SRTM-Mission. Ein Regenbogen-Farbdurchlauf entspricht einer  $2\pi$ -Phasenverschiebung bzw. 170 m Höhendifferenz.

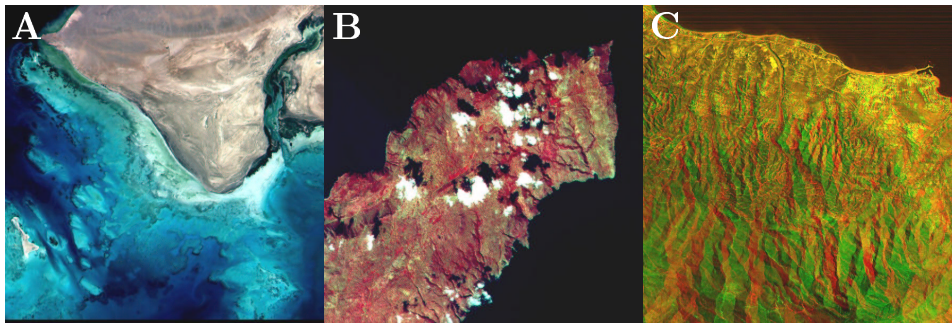
**B:** Daraus durch manuelle Änderungen gewonnene 'Grobtopographie'. Die Höhenangaben sind in Metern relativ zum tiefsten auftretenden Punkt.

AeroSensing durch Befliegung bei Ebbe mittels InSAR gewonnene Topographie gelegt (vgl. Abb. 7.14). Abgebildet wurde hier ein Teil des *Weser-Ästuars*. Die Übereinstimmung der Lage der Priele ist deutlich sichtbar. Der unvergleichbar hohen Genauigkeit der AeroSensing-Topographie sowohl in Höhen- wie auch in Ortskoordinaten stehen das kleine Abbildungsgebiet und die hohen Kosten der Flugzeit gegenüber.

### Shuttle Radar Topography Mission (SRTM)

Während der SRTM-Mission im Februar 2000 wurde das *Elb-Ästuar* bei zwei Überflügen von X-Band-Sensoren aufgenommen (Data-Take<sup>21</sup> 46.40

<sup>21</sup> Die erste Zahl gibt jeweils den Orbit des Space Shuttle an, also 46 bzw. 97.



**Abbildung 7.17:** Beispielbilder von MOMS: Korallenriffe im Flachwasserbereich des Roten Meeres (**A**, Quasi-Echtfarbenbild), *Kap Spatha* auf *Kreta* (**B**, Falschfarbenbild mit Wolken), *Sierra Bermeja* an der *Costa del Sol* (**C**, 3D-Ansicht für Rot-Grün-Brille, rechtes Auge grün).

Frame 150 und Data-Take 97.80 Frame 110). Leider ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt eine Bild- oder Topographiegenerierung nur auf vereinzelt Szenen möglich. Grund hierfür ist eine noch nicht abgeschlossene Bestimmung der Schwingung des Space Shuttle-Armes, die unkomponiert im digitalen Geländemodell zu einem Fehler in Form einer überlagerten Schwingung mit einer Wellenlänge im Bereich von etwa 50 km und einer Amplitude von einigen hundert Metern führt.

Einzelbilder der SAR-Antennen können jedoch bereits erzeugt werden. Abbildung 7.15 zeigt den Ausschnitt um die Sandbank *Medemgrund* aus einem der beiden Bilder von Take 46.40 in Azimuth-Range-Geometrie (nicht geokodiert, also nicht eingenordet). Der Überflug fand am 14. Februar 2000 um 12<sup>43</sup> UTC statt.

Werden die Schwingungen des Shuttle-Armes nicht kompensiert, so ergibt sich im Bereich der Sandbank *Medemgrund* ein Phasenbild wie in Abbildung 7.16 A gezeigt. Durch manuelle Kompensation (in Form einer heuristischen Subtraktion geeigneter Ebenen und Sinusverläufe) kann man auch ohne Kenntnis der exakten Aufnahmegeometrie Bilder wie in der Abbildung 7.16 B als ‘Grobtopographie’ gewinnen.

Die Topographischen Daten bisher nicht für einen Vergleich verwendbar. Es ist auch zu erwarten, dass sie bei einer endgültigen Höhengenaugigkeit von 6 m und Speckleartefakten im Bereich von ca. 3 m beim Single-Look-Bild (höchste Auflösung) nicht genau genug für die flachen Wattgebiete sind.

### Modular Optoelectronic Multispectral Stereo-Scanner (MOMS)

Aufgrund der geringen Neigung der russischen Raumstation MIR<sup>22</sup> war es dem Sensor MOMS nicht möglich, Bilder von der deutschen Bucht zu ma-

<sup>22</sup> Mit dieser Fußnote wollen wir der MIR und aller mit ihr am 23. März 2001, 6 Uhr UTC (22. März, 20 Uhr Ortszeit bei 160° W, 40° S) abgestürzten, Milliarden teuren wissenschaftlichen Instrumente gedenken.

chen. Abbildungsgrenze war in ca. der 52. Breitengrad, also eine Linie etwa durch *Münster*, *Bielefeld* und *Magdeburg*. Ein direkter Vergleich ist also auf den hier untersuchten Daten nicht möglich. Die Leistungsfähigkeit der MOMS-Kamera zeigt Abbildung 7.17 anhand dreier Bilder von der Küste des Roten Meeres in Eritrea, von Kreta und der Südspanischen Atlantikküste.

Letzteres zeigt zumindest, dass die Höhenauflösung der MOMS-Kamera sich eher für Aufnahmen von Mittel- oder Hochgebirgslandschaften eignet. Auf dem zweiten ist die generelle Wolken-Problematik bei der Verwendung von optischen Sensoren zu erkennen.

Wie sich herausgestellt hat, ist die Wasserstandslinien-basierte Topographiegewinnung mit Linien aus dem Wavelet-basierten Algorithmus aus Kapitel 3 durchaus konkurrenzfähig (vgl. erneut Beurteilung in Tabelle 7.2). Es existieren auch bereits Anfragen seitens der BAW für eine operationelle Implementierung des vorgestellten Wasserstandslinienextraktionsalgorithmus.

# Anhang A

## Herleitung verwendeter Formeln; Beispiele

### A.1 Verteilungen aus Tabelle 1.1

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise in Abschnitt A.2 werden hier charakteristische Funktionen, Verteilungen, Erwartungswerte und Varianzen für einige wohlbekannte Verteilungen nochmals ausgerechnet. Die Ergebnisse (und zum Teil auch Herleitungen) finden sich beispielsweise in [ScS, Cv, Ba].

#### A.1.1 Normalverteilung

Die charakteristische Funktion der Normalverteilung berechnet man als

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \stackrel{(1.13),(1.14)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sigma|}} \mathcal{T}_\mu \mathcal{D}_\sigma e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sigma|}} \mathcal{F} \mathcal{T}_\mu \mathcal{D}_\sigma e^{-\frac{x^2}{2}}(\omega) \\ &\stackrel{\text{Lem.2(ii)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sigma|}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{D}_{\frac{1}{\sigma}} \mathcal{F} e^{-\frac{x^2}{2}}(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\sigma|}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{D}_{\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\sigma|}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{D}_{\frac{1}{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+2ix\omega-\omega^2}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\sigma|}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{D}_{\frac{1}{\sigma}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-i\omega)^2}{2}} dx \\ &\stackrel{\text{f.}\#25}{=} \frac{1}{2\pi\sqrt{|\sigma|}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{D}_{\frac{1}{\sigma}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\omega} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) = i(-i\mu - \sigma^2\omega) e^{-i\mu\omega} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \Big|_{\omega=0} = \mu \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\ &= -\left(-\sigma^2 + (-i\mu - \sigma^2\omega)^2\right) e^{-i\mu\omega} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \Big|_{\omega=0} - \mu^2 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Für die kumulative Verteilung ist kein geschlossener Ausdruck möglich. Sie wird als Wahrscheinlichkeitsintegral oder Errorfunktion bezeichnet und ist z.B. in [BS] tabelliert.

### A.1.2 Exponential-Verteilung

Für die charakteristische Funktion der Exponentialverteilung erhält man

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x\frac{1+i\omega\mu}{\mu}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\omega\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

für Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) = i \frac{-i\mu}{(1+i\omega\mu)^2} \Big|_{\omega=0} = \mu \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\ &= -\frac{-2(1+i\omega\mu)i\mu(-i\mu)}{(1+i\omega\mu)^4} \Big|_{\omega=0} - \mu^2 = 2\mu^2 - \mu^2 = \mu^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die kumulative Verteilung berechnet sich als

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\xi}{\mu}} d\xi = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

### A.1.3 RAYLEIGH-Verteilung

Die charakteristische Funktion der RAYLEIGH-Verteilung ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2x}{\mu} e^{-\frac{x^2}{\mu}} e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2x}{\mu} e^{-\frac{4x^2+4ix\mu\omega-\mu^2\omega^2+\mu^2\omega^2}{4\mu}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \int_0^\infty \frac{2x}{\mu} e^{-\frac{(x+\frac{i}{2}\mu\omega)^2}{\mu}} dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
u: &= x + \frac{i}{2}\mu\omega & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \int_{\frac{i}{2}\mu\omega}^{\infty + \frac{i}{2}\mu\omega} \left( \frac{2u}{\mu} - i\omega \right) e^{-\frac{u^2}{\mu}} du \\
\stackrel{\text{CIF}^1}{=} & & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{2u}{\mu} - i\omega \right) e^{-\frac{u^2}{\mu}} du \right. \\
& & \left. + \int_{\frac{i}{2}\mu\omega}^0 \left( \frac{2u}{\mu} - i\omega \right) e^{-\frac{u^2}{\mu}} du \right) \\
t: &= \frac{u^2}{\mu}, \tau: = \frac{2iu}{\mu} & \frac{e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\infty e^{-t} dt - i\omega \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{\mu}} du + \frac{\mu}{2} \int_0^{-\omega} (\tau - \omega) e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \\
\stackrel{\text{Z.25}}{=} & & \frac{e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - i\omega \frac{\sqrt{\pi\mu}}{2} - \frac{\mu\omega}{2} \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau + \int_0^{\frac{\omega^2}{2}} \frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu x}{2}} dx \right) \\
& & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( 1 - i\omega \frac{\sqrt{\pi\mu}}{2} - \frac{\mu\omega}{2} \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau + e^{\frac{\mu\omega^2}{4}} - 1 \right) \\
& & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \right). \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Damit erhält man für Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) = i \frac{d}{d\omega} \left( 1 - \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \right) \Big|_{\omega=0} \\
&= -i \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu\omega^2}{4} \right) e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \frac{d}{d\omega} \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \Big|_{\omega=0} \\
&= -i \left( \frac{1}{2} i\sqrt{\pi\mu} \right) = \frac{\sqrt{\pi\mu}}{2} \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\
&= \frac{d}{d\omega} \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu\omega^2}{4} \right) e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) + \frac{\mu\omega}{2} \right) \Big|_{\omega=0} - \frac{\pi\mu}{4} \\
&= \left( \left( \frac{\mu^2\omega^3}{8} - \frac{\mu\omega}{4} - \frac{\mu\omega}{2} \right) e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \left( i\sqrt{\pi\mu} + \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu\omega^2}{4} \right) e^{-\frac{\mu\omega^2}{4}} \frac{d}{d\omega} \mu \int_0^\omega e^{\frac{\mu\tau^2}{4}} d\tau + \frac{\mu}{2} \right) \Big|_{\omega=0} - \frac{\pi\mu}{4} \\
&= \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{\pi\mu}{4} = \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \mu \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> CAUCHY-Integralformel, der Term  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t - \frac{i}{2}\mu\omega} \dots dt$  verschwindet aufgrund des schnell fallenden Integranden.

und für die kumulative Verteilung (für  $x > 0$ ;  $P(X \leq 0) = 0$ )

$$P(X \leq x) = \int_0^x \frac{2t}{\mu} e^{-\frac{t^2}{\mu}} dt \stackrel{u:=\frac{t^2}{\mu}}{=} \int_0^{\frac{x^2}{\mu}} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^{\frac{x^2}{\mu}} = 1 - e^{-\frac{x^2}{\mu}}. \quad (\text{A.12})$$

#### A.1.4 FISHER-TIPPETT-Verteilung

Als charakteristische Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu} e^x e^{-\frac{1}{\mu}e^x} e^{-i\omega x} dx \stackrel{u:=\frac{e^x}{\mu}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u(\mu u)^{-i\omega} e^{-u} \frac{du}{u} \\ &= \frac{\mu^{-i\omega}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u^{-i\omega} e^{-u} du = \frac{\Gamma(1-i\omega)}{\mu^{i\omega} \sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Erwartungswert und Varianz haben hier den Wert

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) = \frac{\Gamma'(1)}{\mu^0} + \frac{\Gamma(1)}{\mu^0} \ln \mu = \ln \mu + \Gamma'(1) \quad (\text{A.14}) \\ \text{Var}(X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\ &= \Gamma''(1) + 2\Gamma'(1) \ln \mu + (\ln \mu)^2 - (\ln \mu + \Gamma'(1))^2 \\ &= \Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \\ &\stackrel{\Gamma(1)=1}{=} \frac{\Gamma''(z)\Gamma(z) - (\Gamma'(z))^2}{(\Gamma(z))^2} \Big|_{z=1} \\ &= \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right)' \Big|_{z=1} = (\ln(\Gamma(z)))'' \Big|_{z=1} \\ &\stackrel{\text{Lem.4(viii)}}{=} (-1)^2 (2-1)! \zeta(2) \stackrel{\text{Lem.5(iii)}}{=} \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

wobei

$$\begin{aligned} \Gamma'(1) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \Big|_{x=1} \stackrel{\text{maj. Kvgz.}}{=} \int_0^\infty \ln u \, u^{x-1} e^{-u} du \Big|_{x=1} \\ &= \int_0^\infty \ln u \, e^{-u} du \\ &\stackrel{\text{f. #9}}{=} -\gamma_E \approx -0.57722 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

gilt; die kumulative Verteilung ist

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\mu} e^\xi e^{-\frac{1}{\mu}e^\xi} d\xi \stackrel{u:=\frac{e^\xi}{\mu}}{=} \int_0^{\frac{e^x}{\mu}} u e^{-u} \frac{du}{u} \\ &= -e^{-u} \Big|_0^{\frac{e^x}{\mu}} = 1 - e^{-\frac{e^x}{\mu}}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Beweise zur Verteilung spezieller SAR-Bilder

### A.2.1 Intensitätsverteilung beim Multilook-Bild

Für die Intensität  $I = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k$  eines Multilook-Bildes gilt für homogene Singlelook-Bilder ( $f_{I_k}(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}$ ) und  $t \geq 0$

$$f_I(t) = \sqrt{2\pi}^{L-1} f_{I_1} * f_{I_2} * \dots * f_{I_L} = \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L t^{L-1} e^{-L\frac{t}{\mu}} \quad (\text{A.18})$$

**Beweis:** (mittels vollständiger Induktion nach  $L$ )

Für  $L = 1$  entspricht (A.18) der Exponentialverteilung  $f_I(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}$  eines Singlelook-Bildes. Für  $L \geq 2$  erhält man

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k}(t) &= L f_{\sum_{k=1}^L I_k}(Lt) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} L \int_0^{Lt} f_{\sum_{k=1}^{L-1} I_k}(\tau) f_{I_L}(Lt - \tau) d\tau \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \int_0^{Lt} \frac{L}{L-1} \frac{1}{(L-2)!} \left(\frac{L-1}{\mu}\right)^{L-1} \left(\frac{\tau}{L-1}\right)^{L-2} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{Lt-\tau}{\mu}} d\tau \\ &= \frac{L}{(L-1)!} \frac{1}{\mu^L} e^{-L\frac{t}{\mu}} \int_0^{Lt} (L-1) \tau^{L-2} d\tau \\ &= \frac{1}{(L-1)!} \frac{L}{\mu^L} (Lt)^{L-1} e^{-L\frac{t}{\mu}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Das ist die behauptete Verteilung.  $\square$

Die charakteristische Funktion berechnet sich als

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \sqrt{2\pi}^{L-1} \sqrt{L} \mathcal{F} \mathcal{D}_{\frac{1}{L}} (f_{\text{exp}} * \dots * f_{\text{exp}}) \\ &\stackrel{\text{Lem.2(ii)}}{=} \sqrt{2\pi}^{L-1} \sqrt{L} \mathcal{D}_L \mathcal{F} (f_{\text{exp}} * \dots * f_{\text{exp}}) \\ &\stackrel{\text{Lem.2(ix)}}{=} \sqrt{2\pi}^{L-1} \sqrt{L} \mathcal{D}_L \hat{f}_{\text{exp}} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{\text{exp}} \\ &\stackrel{(A.5)}{=} \sqrt{2\pi}^{L-1} \sqrt{L} \mathcal{D}_L \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} (1 + i\omega\mu)} \right)^L \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{i\omega\mu}{L}\right)^L}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

woraus man für Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) \\ &= i \frac{d}{d\omega} \left(1 + \frac{i\omega\mu}{L}\right)^{-L} \Big|_{\omega=0} \end{aligned}$$

$$= -iL \left(1 + \frac{i\omega\mu}{L}\right)^{-L-1} \frac{i\mu}{L} \Big|_{\omega=0} = \mu \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\ &= -(-L)(-L-1) \left(1 + \frac{i\omega\mu}{L}\right)^{-L-2} \frac{-\mu^2}{L^2} \Big|_{\omega=0} - \mu^2 \\ &= \frac{L+1}{L} \mu^2 - \mu^2 = \frac{\mu^2}{L} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

erhält. Die kumulative Verteilung ist jetzt (für  $x > 0$ ;  $P(X \leq 0) = 0$ )

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L t^{L-1} e^{-L\frac{t}{\mu}} dt \\ &\stackrel{f\#450}{=} \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L \left( \frac{-\mu}{L} x^{L-1} e^{-L\frac{x}{\mu}} + \frac{\mu(L-1)}{L} \int_0^x t^{L-2} e^{-L\frac{t}{\mu}} dt \right) \\ &= -\left(\frac{L}{\mu}\right)^{L-1} \frac{x^{L-1} e^{-L\frac{x}{\mu}}}{(L-1)!} + \int_0^x \frac{1}{(L-2)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{L-1} t^{L-2} e^{-L\frac{t}{\mu}} dt \\ &\stackrel{f\#450}{=} \dots = -\sum_{k=1}^{L-1} \left(\frac{L}{\mu}\right)^k \frac{x^k e^{-L\frac{x}{\mu}}}{k!} + \int_0^x \frac{L}{\mu} e^{-L\frac{t}{\mu}} dt \\ &= -\sum_{k=1}^{L-1} \left(\frac{L}{\mu}\right)^k \frac{x^k e^{-L\frac{x}{\mu}}}{k!} + 1 - e^{-L\frac{x}{\mu}} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{L-1} \left(\frac{L}{\mu}\right)^k \frac{x^k e^{-L\frac{x}{\mu}}}{k!}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

### A.2.2 Amplitudenverteilung beim Multilook-Bild

Für die Amplitude  $A = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k}$  eines Multilookbildes ergibt sich die charakteristische Funktion als

$$\begin{aligned} \hat{f}_A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L t^{2L-1} e^{-L\frac{t^2}{\mu}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L \int_0^\infty t^{2L-1} e^{-\left(L\frac{t^2}{\mu} + i\omega t - \frac{\mu\omega^2}{4L}\right)} dt e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \int_0^\infty t^{2L-1} e^{-\frac{t}{\mu} \left(t + \frac{i\mu\omega}{2L}\right)^2} dt \\ &\stackrel{u:=t+\frac{i\mu\omega}{2L}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \int_0^\infty \left(u - \frac{i\mu\omega}{2L}\right)^{2L-1} e^{-\frac{Lu^2}{\mu}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{\mu\omega}{2Li}\right)^{2L-1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \int_0^\infty u^k e^{-\frac{Lu^2}{\mu}} du \\
 \stackrel{f.\#2}{=} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{\mu\omega}{2Li}\right)^{2L-1-k} \\
 & \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sqrt{\frac{\mu}{L}}^{k+1} \\
 = & \frac{e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}}}{\sqrt{2\pi}(L-1)!} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{\omega}{2i}\sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^{2L-1-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

das liefert für Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}
 E(A) &= \sqrt{2\pi} i \hat{f}'_A(0) \\
 &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{ie^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}}}{(L-1)!} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{\omega}{2i}\sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^{2L-1-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \right) \Big|_{\omega=0} \\
 &= \frac{i}{(L-1)!} \left( e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(\frac{\omega}{2i}\sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^{2L-1-k} \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left( \underbrace{-\frac{\mu}{2L}\omega^{2L-k}}_{=0, \text{ da } k < 2L} + \underbrace{(2L-1-k)\omega^{2L-2-k}}_{\neq 0 \text{ f\"ur } k=2L-2} \right) \right) \Big|_{\omega=0} \\
 &= \frac{i}{(L-1)!} \binom{2L-1}{2L-2} \Gamma\left(\frac{2L-1}{2}\right) \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\mu}{L}} \\
 & \stackrel{\text{Lem.4}}{=} \frac{(2L-1)!}{2(L-1)!(2L-2)!} \sqrt{\frac{\mu}{L}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2L-3}} \frac{(2L-3)!}{(L-2)!} \\
 &= \frac{2L-1}{4^{L-1}} \binom{2L-3}{L-1} \sqrt{\frac{\pi\mu}{L}} \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(A) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''_A(0) - (E(A))^2 \\
 &= -\frac{1}{(L-1)!} \left( e^{-\frac{\mu\omega^2}{4L}} \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^{2L-1-k} \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left( \underbrace{\frac{\mu^2}{4L^2}\omega^{2L+1-k}}_{=0, \text{ da } k < 2L} - \underbrace{\frac{\mu}{2L}(4L-1-2k)\omega^{2L-1-k}}_{\neq 0 \text{ f\"ur } k=2L-1} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \underbrace{(2L-1-k)(2L-2-k)\omega^{2L-3-k}}_{\neq 0 \text{ f\"ur } k=2L-3} \right) \right) \Big|_{\omega=0} - (E(A))^2 \\
 &= \frac{1}{(L-1)!} \Gamma(L) \frac{\mu}{2L} + \frac{1}{(L-1)!} \binom{2L-1}{2L-3} \Gamma(L-1) \frac{\mu}{4L} \cdot 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (E(A))^2 \\
= & \frac{1}{(L-1)!} \frac{\mu}{2L} ((L-1)! + (2L-1)(L-1)(L-2)!) - (E(A))^2 \\
= & \frac{\mu}{2L} (1 + 2L - 1) - (E(A))^2 \\
= & \mu - \frac{(2L-1)^2}{16^{L-1}} \left( \frac{2L-3}{L-1} \right)^2 \frac{\pi\mu}{L} \\
= & \left( 1 - \frac{(2L-1)^2}{16^{L-1}} \left( \frac{2L-3}{L-1} \right)^2 \frac{\pi}{L} \right) \mu. \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Die kumulative Verteilung ist (erneut für  $x > 0$  und  $P(X \leq 0) = 0$ )

$$\begin{aligned}
P(A \leq a) &= \int_0^a f_A(t) dt = \frac{2}{(L-1)!} \left( \frac{L}{\mu} \right)^L \int_0^a t^{2L-1} e^{-\frac{L}{\mu} t^2} dt \\
&\stackrel{u: = \frac{L}{\mu} t^2}{=} \frac{1}{(L-1)!} \int_0^{\frac{L}{\mu} a^2} u^{L-1} e^{-u} du \\
&\stackrel{f\#450}{=} - \frac{1}{(L-1)!} u^{L-1} e^{-u} \Big|_0^{\frac{L}{\mu} a^2} + \frac{1}{(L-2)!} \int_0^{\frac{L}{\mu} a^2} u^{L-2} e^{-u} du \\
&= \dots = - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} u^k e^{-u} \Big|_0^{\frac{L}{\mu} a^2} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{L}{\mu} \right)^k a^{2k} e^{-\frac{L}{\mu} a^2}. \tag{A.27}
\end{aligned}$$

### A.2.3 Verteilung beim Multilook-Intensitätsdichte- und Amplitudendichtebild

Ein Multilook-Dichtebild  $\ln X$  ( $X \in \{I, A\}$ ) hat nach (2.43) und (2.44) die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{\ln X}(t) = \frac{\xi}{(L-1)!} \left( \frac{L}{\mu} \right)^L e^{\xi L t} e^{-\frac{L}{\mu} e^{\xi t}}, \tag{A.28}$$

wobei

$$\xi = \xi(X) = \begin{cases} 1 & \text{für } X = I \\ 2 & \text{für } X = A \end{cases}. \tag{A.29}$$

Damit erhält man für die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} \hat{f}_{\ln X}(\omega) &= \frac{\xi}{(L-1)!} \left( \frac{L}{\mu} \right)^L \int_{\mathbb{R}} e^{\xi L t} e^{-\frac{L}{\mu} e^{\xi t}} e^{-i\omega t} dt \\
&\stackrel{u: = \frac{L}{\mu} e^{\xi t}}{=} \frac{\xi}{\Gamma(L)} \left( \frac{L}{\mu} \right)^L \int_0^\infty \left( \frac{\mu}{L} u \right)^{L-\frac{i\omega}{\xi}} e^{-u} \frac{du}{\xi u} \\
&= \frac{1}{\Gamma(L)} \left( \frac{L}{\mu} \right)^{\frac{i\omega}{\xi}} \int_0^\infty u^{L-\frac{i\omega}{\xi}-1} e^{-u} du
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(L - \frac{i\omega}{\xi})}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{\frac{i\omega}{\xi}}, \quad (\text{A.30})$$

für Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned} E(\ln X) &= \sqrt{2\pi} i \hat{f}'(0) \\ &= i \frac{\Gamma'(L)}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^0 \frac{-i}{\xi} + i \frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^0 \frac{i}{\xi} \ln \frac{L}{\mu} \\ &= \frac{\Gamma'(L)}{\xi \Gamma(L)} + \frac{1}{\xi} \ln \frac{\mu}{L} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\ln X) &= -\sqrt{2\pi} \hat{f}''(0) - (E(X))^2 \\ &= \frac{\Gamma''(L)}{\xi^2 \Gamma(L)} + \frac{2\Gamma'(L)}{\xi^2 \Gamma(L)} \ln \frac{\mu}{L} + \frac{1}{\xi^2} \left(\ln \frac{\mu}{L}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma'(L)}{\xi \Gamma(L)} + \frac{1}{\xi} \ln \frac{\mu}{L}\right)^2 \\ &= \frac{\Gamma''(L)}{\xi^2 \Gamma(L)} - \frac{(\Gamma'(L))^2}{\xi^2 (\Gamma(L))^2} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

und die kumulative Verteilung mittels  $(L - 1)$ -facher partieller Integration

$$\begin{aligned} P(\ln X \leq t) &= \int_{-\infty}^t f_{\ln X}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{\xi}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L \int_{-\infty}^t e^{\xi(L-1)\tau} \frac{\mu}{\xi L} \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi\tau}}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{L-1} e^{\xi(L-1)t} e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi t}} \\ &\quad + \frac{\xi}{(L-2)!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^{L-1} \int_{-\infty}^t e^{\xi(L-1)\tau} e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi\tau}} d\tau \\ &= \dots = -\sum_{j=1}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{\xi j t} e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi t}} + \frac{\xi L}{\mu} \int_{-\infty}^t e^{\xi\tau} e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi\tau}} d\tau \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{L}{\mu}\right)^j e^{\xi j t} e^{-\frac{L}{\mu}e^{\xi t}}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

### A.3 FOURIER-Transformation der Radargleichung

Es soll die FOURIER-Transformation der normierten Radargleichung (2.13) berechnet werden. Dazu dient eine vereinfachte Fassung der Methode der stationären Phase, die in [Pa] zu finden ist:

Zunächst wird die Schar

$$\delta_c(t) = \frac{1}{c\sqrt{i\pi}} e^{i\frac{t^2}{c^2}} \quad (\text{A.34})$$

betrachtet. Für  $\rho = c\sqrt{i} \in \mathbb{R}_+$  gilt nun  $\delta_c(t) = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{c^2}} > 0$  und

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_c(t) dt \stackrel{f. \#3}{=} \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{\rho}}} = 1 \quad (\text{A.35})$$

und für alle  $\eta, \varepsilon > 0$  kann  $c$  bzw.  $\rho$  so klein gewählt werden, daß

$$\int_{-\infty}^{-\eta} \delta_c(t) dt + \int_{\eta}^{\infty} \delta_c(t) dt \stackrel{u := \frac{t\sqrt{2}}{\rho}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\eta\sqrt{2}}{\rho}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du < \varepsilon, \quad (\text{A.36})$$

denn die Errorfunktion liegt für große  $\frac{\eta\sqrt{2}}{\rho}$  beliebig nahe an ihrem Grenzwert 1. Nach elementarer Analysis [Ltb2] ist also  $\delta_c$  für  $\rho \rightarrow 0$  eine DIRAC-Folge, d.h.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta_c(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (\text{A.37})$$

für  $f$  stetig in  $\tau$ . bzw.  $\delta_c$  konvergiert gegen die Delta-Distribution.<sup>2</sup> Für kleine  $c$  folgt damit näherungsweise

$$\frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{\mathbb{R}} r(t) e^{i\frac{(t-t_0)^2}{c^2}} dt \approx r(t_0) \quad (\text{A.38})$$

Die FOURIER-Transformierte von

$$\varphi(t) = r(t) e^{i\beta t^2} \quad (\text{A.39})$$

ergibt sich damit durch die Rechnung ( $t_0 = \frac{\omega}{2\beta}$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ )

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r(t) e^{i\beta t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r(t) e^{i(\beta t^2 - \omega t + \frac{\omega^2}{4\beta})} e^{-i\frac{\omega^2}{4\beta}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\omega^2}{4\beta}} \int_{\mathbb{R}} r(t) e^{i\beta(t - \frac{\omega}{2\beta})^2} dt \\ &\approx \sqrt{\frac{i}{2\beta}} e^{-i\frac{\omega^2}{4\beta}} r\left(\frac{\omega}{2\beta}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Speziell für die Radargleichung (2.13) mit  $r(t) = a_\beta \left( \|\vec{v}_S\| \frac{t-t_0}{r_0} \right)$  und  $\beta = \pi C_{\text{FM}}$  folgt nun die Näherung

$$\hat{\varphi}(\omega) \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi C_{\text{FM}}}} e^{-i\frac{\omega^2}{4\pi C_{\text{FM}}}} a_\beta \left( \|\vec{v}_S\| \frac{\omega - 2\pi C_{\text{FM}} t_0}{2\pi C_{\text{FM}} r_0} \right), \quad (\text{A.41})$$

also mit  $f \approx \frac{\omega}{2\pi}$ ,  $f_0 = C_{\text{FM}} t_0$  und  $C_{\text{FM}} = -\frac{2\|\vec{v}_S\|^2}{\lambda r_0}$

$$\hat{\varphi}(f) \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi C_{\text{FM}}}} e^{-i\frac{\pi f^2}{C_{\text{FM}}}} a_\beta \left( -\lambda \frac{f - f_0}{2\|\vec{v}_S\|} \right). \quad (\text{A.42})$$

<sup>2</sup> Nach [Pa] gilt dies auch für  $c \rightarrow 0, c > 0$ .



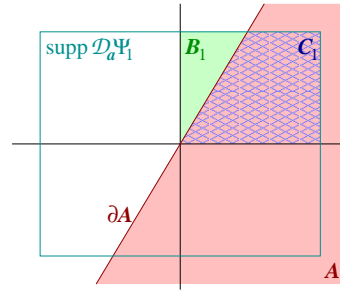


Abbildung A.1: Lage der Regionen  $A$ ,  $B$  und  $C$  (siehe Text).

## A.4 Wavelet-Transformierte der charakteristischen Funktion eines glatt berandeten Gebietes

In Abschnitt 3.2 wird die Abschätzung aus Satz 2 bzw. der zweidimensionalen Variante (1.46) als ‘Abfallbedingung’ betrachtet, also das ‘ $\leq$ ’ durch ein ‘ $\approx$ ’ ersetzt. Daß dies für eine HEAVYSIDE-Modellkante parallel zu einer der Koordinatenachsen bzw. für als DIRAC-Peaks modelliertes Rauschen erlaubt ist, wurde bereits in (5.2) bzw. (5.1) gezeigt. Auch bei der Modellierung des Rauschens als Rauschprozess (Zuwächse einer BROWNSchen Bewegung) kann dies angenommen werden (5.39). In diesen drei Fällen gilt sogar ‘=’.

Allgemeiner soll nun in Anlehnung an die Einleitung dieser Arbeit die Wavelet-Transformation der charakteristischen Funktion  $\mathbb{1}_A$  eines glatt berandeten Gebietes  $A \subset \mathbb{R}^2$  betrachtet werden, d.h. mit Rand  $\partial A$  als  $C^\infty$ -Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

### A.4.1 Gerader Rand auf dem Träger des Wavelets

Zunächst wollen wir  $\partial A$  (lokal, also in kleiner Skala) als Gerade betrachten. O.E. sei dies eine Ursprungsgerade, nicht jedoch die beiden Koordinatenachsen (diese beiden Fälle liefert wie gesagt (5.2)). Weiterhin sei o.E. (aus Symmetriegründen des Wavelets) die Steigung  $m > 0$  und  $A$  rechts von der Geraden gelegen. Wir bezeichnen mit  $C_j$  den Teil von  $A$ , der im 1. Quadranten und dem Träger des dilatierten Wavelets  $\mathcal{D}_a \Psi_j$  liegt ( $j = 1, 2$ ). Ebenso sei  $B_j$  der entsprechende Teil von  $A^c$ , also  $B_j = A^c \cap \text{supp } \mathcal{D}_a \Psi_j \cap [0, \infty[^2$  (vgl. Abbildung A.1).

Für symmetrische  $\Psi_j$  gilt also ( $\Psi_1 = \psi \otimes \phi$ ,  $\Psi_2 = \phi \otimes \psi$ ,  $\phi$  gerade,  $\theta' = \psi$  ungerade,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta(x) = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A(a, 0) &= \frac{1}{|a|} \iint_A \overline{\Psi_1\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)} dx dy = \frac{2}{|a|} \iint_{C_1} \overline{\Psi_1\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)} dx dy \\ &= \frac{2}{|a|} \int_0^\infty \int_{\frac{y}{m}}^\infty \psi\left(\frac{x}{a}\right) \phi\left(\frac{y}{a}\right) dx dy = -2 \int_0^\infty \theta\left(\frac{y}{am}\right) \phi\left(\frac{y}{am}\right) dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{u:=\frac{y}{a}}{=} -2|a| \int_0^\infty \theta\left(\frac{u}{m}\right) \phi(u) du \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\Psi_2} \mathbb{1}_A(a, 0) &= -\frac{2}{|a|} \iint_{B_1} \overline{\Psi_2\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)} dx dy \stackrel{(5.2)}{=} -\frac{2}{|a|} \int_0^\infty \int_{\frac{x}{m}}^\infty \overline{\phi\left(\frac{x}{a}\right) \psi\left(\frac{y}{a}\right)} dy dx \\ &= 2|a| \int_0^\infty \overline{\phi(x) \theta\left(\frac{x}{m}\right)} dx \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

und damit auch in diesem Fall das ‘=’ in (1.46).

Weicht  $\partial A$  für wachsende Skala  $a$ , also auch für wachsende Träger von  $\mathcal{D}_a \Psi_j$ , von der Geraden ab, so ändert sich  $\mathcal{W}_{\Psi_j} \mathbb{1}_A$  als Integral stetig mit der Abweichung (die ja einer Veränderung des Integrationsgebietes entspricht). Dies begründet das ‘ $\approx$ ’ für kleine  $|a|$  in (3.3). Überlegungen hierzu sind im nächsten Abschnitt A.4.2 zu finden.

Betrachtet man weiter die Richtung von  $\left(\frac{\mathcal{W}_{\Psi_2} \mathbb{1}_A(a, b)}{\mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A(a, b)}\right)$ , so zeigt sich, daß sie in folgendem Sinne nur geringfügig vom Normalenvektor auf  $\partial A$  abweicht: Sie ist eine stetige Funktion von  $m$ . Für auf  $\mathbb{R}_+$  monotonen  $\theta$  mit kompaktem Träger (wie bei den Spline-Wavelets) ist auch die Richtung monoton von  $m$  abhängig (mittels Differentiation unter dem Integral nach  $m$ ). Ferner steht sie bei zu den Koordinatenachsen parallelem  $\partial A$  senkrecht auf  $\partial A$  nach außen (weg von  $A$ ), wie (5.2) zeigt. Aus Symmetriegründen der obigen Monotonieüberlegungen muß dies auch für  $m = \pm 1$ , also für zu den Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen parallelem Rand  $\partial A$ , gelten. Der Betrag des Fehlers ist damit stets  $< 45^\circ$ .

#### A.4.2 Überlegungen zum beliebigen $\mathcal{C}^k$ -Rand

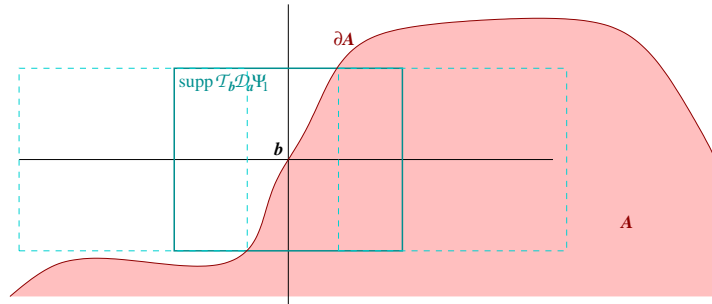
Im Folgenden werden Ideen aufgezeigt, die eine Erweiterung der soeben für einen geraden Rand geführten Überlegungen auf eine allgemeinere Gestalt des Gebietes  $A$  ermöglichen. Im Rahmen dieser Arbeit bleiben dabei jedoch einige Schritte offen oder werden nicht bis ins Detail formuliert, speziell was die Stärke der Verallgemeinerung bezogen auf die Gestalt des Randes  $\partial A$  angeht.

Verläuft der Rand  $\partial A$  (bzw. die Rand-Tangente) in einem seiner Punkte  $b \in \partial A \cap \text{supp } \mathcal{T}_b \mathcal{D}_a \Psi_j$  nicht gerade parallel zu den Koordinatenachsen, so läßt sich dieser nach dem Satz für implizite Funktionen nach den Koordinaten auflösen, d.h. es existieren lokale  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen  $u, \tilde{u}$  mit

$$b \in \partial A|_{]t_1, t_2[} = \{(u(y), y)^\top, y \in ]y_1, y_2[\} = \{(x, \tilde{u}(x))^\top, x \in ]x_1, x_2[\}. \quad (\text{A.45})$$

O.E. sei die Skala  $a$  so klein gewählt, daß das auf dem gesamten Träger von  $\mathcal{T}_{(b_1+\mu, b_2)^\top} \mathcal{D}_a \Psi_1$  und  $\mathcal{T}_{(b_1, b_2+\nu)^\top} \mathcal{D}_a \Psi_2$  möglich ist, für alle  $\mu, \nu$ , für die sich der Träger lokal mit dem Gebiet  $A$  überschneidet, vergleiche dazu Abbildung A.2 für  $\Psi_1$  (ab hier ist ein kompakter Träger der  $\Psi_j$  notwendig).

Nach der TAYLOR-Entwicklung in  $b$  (o.E.  $b = 0$ ) gilt für  $k \geq 3$  nun  $u(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \mathcal{O}(y^3)$  mit  $\alpha_0 = 0$ . Für die Wavelet-Transformierte



**Abbildung A.2:**  $\mu$ -Verschiebung des Trägers von  $\mathcal{T}_{(b_1+\mu, b_2)} \tau D_a \Psi_1$ . (siehe Text)

gilt damit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A \left( a, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{|a|} \iint_A \overline{\Psi_1 \left( \frac{x-\mu}{a}, \frac{y}{a} \right)} dx dy \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} \int_{u(y)}^{\infty} \overline{\psi \left( \frac{x-\mu}{a} \right)} \overline{\phi \left( \frac{y}{a} \right)} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta \left( \frac{u(y)-\mu}{a} \right)} \phi \left( \frac{y}{a} \right) dy \\
 &= |a| \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta \left( \frac{u(ay)-\mu}{a} \right)} \phi(y) dy \\
 &= |a| \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta \left( -\frac{\mu}{a} + \alpha_1 y + \alpha_2 a y^2 + \mathcal{O}(a^2 y^3) \right)} \phi(y) dy \quad (\text{A.46})
 \end{aligned}$$

Im folgenden soll nun  $\mu = \mu(a)$  so gewählt werden, daß das Integral seinen maximalen Betrag annimmt.

**Lemma 9** Die Funktion  $a \mapsto \mu(a)$  ist gerade, i.e.  $\mu(-a) = \mu(a)$ .

**Beweis:** Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A \left( -a, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= | -a | \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta \left( \frac{u(-ay)-\mu}{-a} \right)} \phi(y) dy \\
 &\stackrel{t \equiv y}{=} |a| \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta \left( \frac{u(at)-\mu}{-a} \right)} \phi(-t) dt \\
 &\stackrel{\theta, \phi \text{ gerade}}{=} \mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A \left( a, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (\text{A.47})
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 10**  $\frac{\mu(a)}{a}$  ist beschränkt für hinreichend kleine  $a$ .

**Beweis:** Für  $\text{supp } \mathcal{T}_{(\mu,0)^\top} \mathcal{D}_a \Psi_1 \subseteq A$  bzw.  $\text{supp } \mathcal{T}_{(\mu,0)^\top} \mathcal{D}_a \Psi_1 \subseteq A^c$  verschwindet das Integral in (A.46).

Damit muß  $|\mu(a)| \leq \beta a + \max_{y \in \text{supp } \mathcal{D}_a \phi} |u(y)|$  für eine Konstante  $\beta_i$  mit  $\text{supp } \theta \subseteq ]-\beta, \beta[$  sein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \max_{y \in \text{supp } \mathcal{D}_a \phi} |u(y)| &= \max_{y \in \text{supp } \phi} |u(ay)| \leq \max_{|y| \leq \delta} |\alpha_1 ay + \mathcal{O}(a^2)| \\ &\stackrel{\tilde{\beta} := 2\alpha_1 \delta}{\leq} \tilde{\beta} a \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

für  $a$  klein genug, also zusammen

$$\left| \frac{\mu(a)}{a} \right| \leq \beta + \tilde{\beta}. \quad (\text{A.49})$$

□

Im folgenden werden zunächst einige Spezialfälle für den Rand  $\partial A$  und die daraus resultierende Gestalt von  $u(y)$  betrachtet:

- ① Für  $u(y) = \alpha_1 y$  läßt sich mit der Monotonie von  $\phi$  auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  sowie geometrischer Überlegungen unter Einbeziehung der Symmetrien von  $\theta$  und  $\phi$  zeigen, daß  $\mu(a) \equiv 0$ . Dies wurde bereits im vorigen Abschnitt A.4.1 verwendet.
- ② Für  $u(y) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2$  mit hinreichend kleinem  $|\alpha_1|$  sowie in einer Umgebung des Maximums bei 0 konkavem  $\theta$  läßt sich für  $\mu(a) \neq 0$  zeigen, dass  $\text{sign } \mu(a) = \text{sign } \alpha_2$  für kleine  $|a| \neq 0$ . Aus geometrischen Überlegungen und den Monotonien von  $\theta$  und  $\phi$  auf  $\mathbb{R}_\pm$  folgt damit die Monotonie von  $\mu(a)$  für hinreichend kleine  $a \geq 0$ .
- ③ Entsprechendes folgt auch für hinreichend großes  $|\alpha_1|$  und in einer Umgebung des Randes des Trägers von  $\theta$  konvexem  $\theta$  mittels  $\text{sign } \mu(a) = -\text{sign } \alpha_2$  (für  $|\alpha_1|$  aus dem ‘mittleren’ Bereich lassen sich solche Schlüsse nicht führen).

Allgemein wollen wir also von einer Gestalt des Randes  $\partial A$  ausgehen, für die aufgrund der resultierenden Eigenschaften von  $u(y)$  die Funktion  $\frac{\mu(a)}{a}$  für  $0 < a < a_*$  monoton ist, also mit Lemma 10  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\mu(a)}{a} = C \in \mathbb{R}$  konst. gilt. TAYLOR-Entwicklung der Funktion  $\theta$  um  $D := \alpha_1 y - C$  liefert weiter (mit  $\varepsilon = C - \frac{\mu(a)}{a}$ )

$$\left| \mathcal{W}_{\Psi_1} \mathbb{1}_A \left( a, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right) - |a| \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta(D)\phi(y)} dy \right| = |a| \int_{\mathbb{R}} \overline{(\varepsilon + \mathcal{O}(a)) \theta'(\eta) \phi(y)} dy. \quad (\text{A.50})$$

Da das Integral auf der rechten Seite mit  $a$  verschwindet, geht also die Differenz auf der linken Seite schneller als  $|a|$  gegen 0. Damit kann der Subtrahend wie schon in Abschnitt A.4.1 auch im Fall, dass  $\partial A$  keine Gerade ist, als Näherung für den Minuenden (also die Wavelettransformierte am betragsmaximalen Ort) verwendet werden. Voraussetzung ist lediglich, daß  $\partial A$  eine  $C^2$ -Kurve ist und die Monotoniebedingungen für  $\mu(a)$  erfüllt.

Analog zeigt man die entsprechenden Näherungen für  $\mathcal{W}_{\Psi_2} \mathbb{1}_A$ , indem man  $\tilde{u}$  anstelle von  $u$  verwendet.

**Bemerkung:** In den obigen Überlegungen geschieht die Maximierung zwar wie im Algorithmus nur in einer der Koordinatenrichtungen, jedoch nur bezüglich einer der Komponenten  $\mathcal{W}_{\Psi_j} \mathbb{1}_A$  anstelle der EUKLIDischen Norm von  $(\mathcal{W}_{\Psi_j} \mathbb{1}_A)_j$ . Da jedoch beispielsweise in ② und ③ die Gestalt des Randes nahe an der Koordinatenrichtung liegt, dominiert auch im Vektor eine der Koordinaten.

## A.5 Maxima beim Spline-Wavelet

In Abschnitt 5.1 werden Zahlwerte für die Extrema des Spline-Wavelets verwendet. Eine Herleitung findet sich hier.

Zunächst betrachten wir die FOURIER-Transformierte der Boxfunktion (Tiefpassfilter)  $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}$ : Es gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\omega} dx = \frac{e^{i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} = \text{sinc}(\omega) \quad (\text{A.51})$$

Und damit für alle Splinefunktionen  $f$  mit  $\hat{f}(\omega) = \lambda \text{sinc}^k(\mu\omega)$ ,  $\lambda, \mu > 0$ ,  $k \geq 2$  wegen des Faltungssatzes  $f \geq 0$ ,  $\text{supp } f = [-k\pi\mu, k\pi\mu]$ , das Maximum und einzige Extremum von  $f$  ist bei  $x = 0$ ,  $f$  ist symmetrisch zur  $y$ -Achse und monoton auf Intervallen, die die Null nicht enthalten. Weiter ist

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \stackrel{f \geq 0}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix0} dx = \sqrt{2\pi} \hat{f}(0) = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} \lambda. \quad (\text{A.52})$$

Als Beispiel betrachten wir zunächst  $\phi$  mit  $\hat{\phi}(\omega) = \text{sinc}^3\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow \|\phi\|_{L^1} = \sqrt{2\pi}$

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega) e^{-i\omega 0} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^3} d\omega \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{3 \sin \frac{\omega}{2} - \sin \frac{3\omega}{2}}{4\omega^3} d\omega \\ &\stackrel{f\#285}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\left. \frac{\sin \frac{3\omega}{2} - 3 \sin \frac{\omega}{2}}{2\omega^2} \right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{3 \cos \frac{\omega}{2} - 3 \cos \frac{3\omega}{2}}{\omega^2} d\omega \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{f\#324}{=} \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\frac{\cos \frac{3\omega}{2} - \cos \frac{\omega}{2}}{2\omega^2}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \frac{\omega}{2} - 3 \sin \frac{3\omega}{2}}{\omega^2} d\omega \right) \\
& \stackrel{f\#11}{=} \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \pi (3 - 1) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{4} \tag{A.53}
\end{aligned}$$

weiter  $\theta$  mit  $\hat{\theta}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{sinc}^4 \left( \frac{\omega}{4\pi} \right)$

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 \left( \frac{\omega}{2} \right)}{\left( \frac{\omega}{2} \right)^4} d\omega = \frac{256}{8\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \omega - 4 \cos \frac{\omega}{2} + 3}{8\omega^4} d\omega \\
& \stackrel{f\#324}{=} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( 0 - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \omega - 2 \sin \frac{\omega}{2}}{\omega^3} d\omega \right) \\
& \stackrel{f\#285}{=} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( 0 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \omega - \cos \frac{\omega}{2}}{\omega^2} d\omega \right) \\
& \stackrel{f\#324}{=} \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( 0 + \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \omega - \frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2}}{\omega} d\omega \right) \\
& \stackrel{f\#11}{=} \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \pi \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \tag{A.54}
\end{aligned}$$

und schließlich  $\psi = \theta'$ , also

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\sqrt{2}}{8} i\omega \operatorname{sinc}^4 \left( \frac{\omega}{4\pi} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} i\omega \frac{\sin^4 \frac{\omega}{4}}{\left( \frac{\omega}{4} \right)^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sin^3 \frac{\omega}{4}}{\left( \frac{\omega}{4} \right)^3} \left( e^{\frac{i\omega}{4}} - e^{-\frac{i\omega}{4}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \mathcal{M}_{-\frac{1}{4}} - \mathcal{M}_{\frac{1}{4}} \right) \operatorname{sinc}^3 \left( \frac{\omega}{4\pi} \right) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{M}_{-\frac{1}{4}} - \mathcal{M}_{\frac{1}{4}} \right) \mathcal{D}_2 \hat{\phi}(\omega) \tag{A.55}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Lem.2}}{\Rightarrow} \psi = \frac{1}{2} \left( \mathcal{T}_{-\frac{1}{4}} - \mathcal{T}_{\frac{1}{4}} \right) \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi \left( 2 \bullet + \frac{1}{2} \right) - \phi \left( 2 \bullet - \frac{1}{2} \right) \right). \tag{A.56}$$

Für die Bestimmung der Extrema von  $\psi$  muß also zunächst  $\phi$  geschlossen dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \left( \mathcal{F}^{-1} \sqrt{2\pi} \mathcal{D}_{2\pi} \operatorname{sinc}^3 \right) (x) \stackrel{(A.51)}{=} \mathcal{D}_{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]} * \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]} * \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x) \\
&= \mathcal{D}_{\frac{1}{2\pi}} \frac{2\pi - |\bullet|}{\sqrt{2\pi}^3} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]} * \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x) \\
&= \mathcal{D}_{\frac{1}{2\pi}} \left( \frac{(3\pi - |x|)^2}{8\pi^2} \mathbb{1}_{\{t, \pi < |t| \leq 3\pi\}}(x) + \left( \frac{3}{4} - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x) \right) \\
&= \sqrt{2\pi} \left( \frac{\left( \frac{3}{2} - |x| \right)^2}{2} \mathbb{1}_{\{t, \frac{1}{2} < |t| \leq \frac{3}{2}\}}(x) + \left( \frac{3}{4} - x^2 \right) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \right) \tag{A.57} \\
\Rightarrow \psi(x) &= 2\sqrt{\pi} \left( (1 - |x|)^2 \left( \mathbb{1}_{[-1, -\frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \right) \right)
\end{aligned}$$



## Anhang B

# Weitere Anwendung: Erkennen von Wellengruppen

**N**EBEN der beschriebenen Küstenlinienextraktion [NRL, NLS] kann der erste Teil des in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus auch zum Erkennen von Wellengruppen verwendet werden. Im Rahmen des Projektes MAXWAVE wurde und wird ein auf Wavelet-Kantenfindung und Blocktracing basierender Algorithmus entwickelt, um Wellengruppen auf hoher See zu erkennen. Dabei müssen die Parameter des Algorithmus geeignet angepasst werden (geringerer Wavelet-Schwellwert dafür höhere Mindestkantenlänge, kleinere Blocks beim Blocktracing).

Entfernt vom Land zeichnen die ERS-1/2-Satelliten meist im Wavemode auf, d.h. es werden alle 200 km kleine SAR-Bilder ( $5 \times 10$  km groß, sog. Imagettes) anstelle eines kontinuierlichen, 100 km breiten SAR-Bildes aufgenommen. Ursprünglich waren diese nur zur Weiterverarbeitung zu Seegangsspektren und der Verwendung an Wetterzentren vorgesehen. Diese beinhalten jedoch — wie sich erst kürzlich herausgestellt hat — häufig interessante Strukturen.

Ziel des Projektes MAXWAVE ist es, sog. Extremwellen (hohe Wellen von besonderer Zerstörungskraft für Schifffahrt und Ölplattformen) in SAR-Bildern zu erkennen. Ein Schritt dazu ist die Extraktion von Wellengruppen (ein Band von im Vergleich zur Umgebung höheren Wellen). Mittels der etwa 1200 Imagettes, die jeden Tag vom ERS-2 verstreut über die Ozeanoberfläche der Erde aufgenommen werden, können solche speziellen Wellenphänomäne studiert werden.

Abbildung B.1 zeigt schematisch den Algorithmus, um automatisch Wellengruppen aus Imagettes zu extrahieren, sowie die Ergebnisse der einzelnen Schritte für ein Imagette vom 7.10.1996, 7:31:48 UTC ( $61^\circ 11'$  südlicher Breite,  $22^\circ 47'$  östlicher Länge).



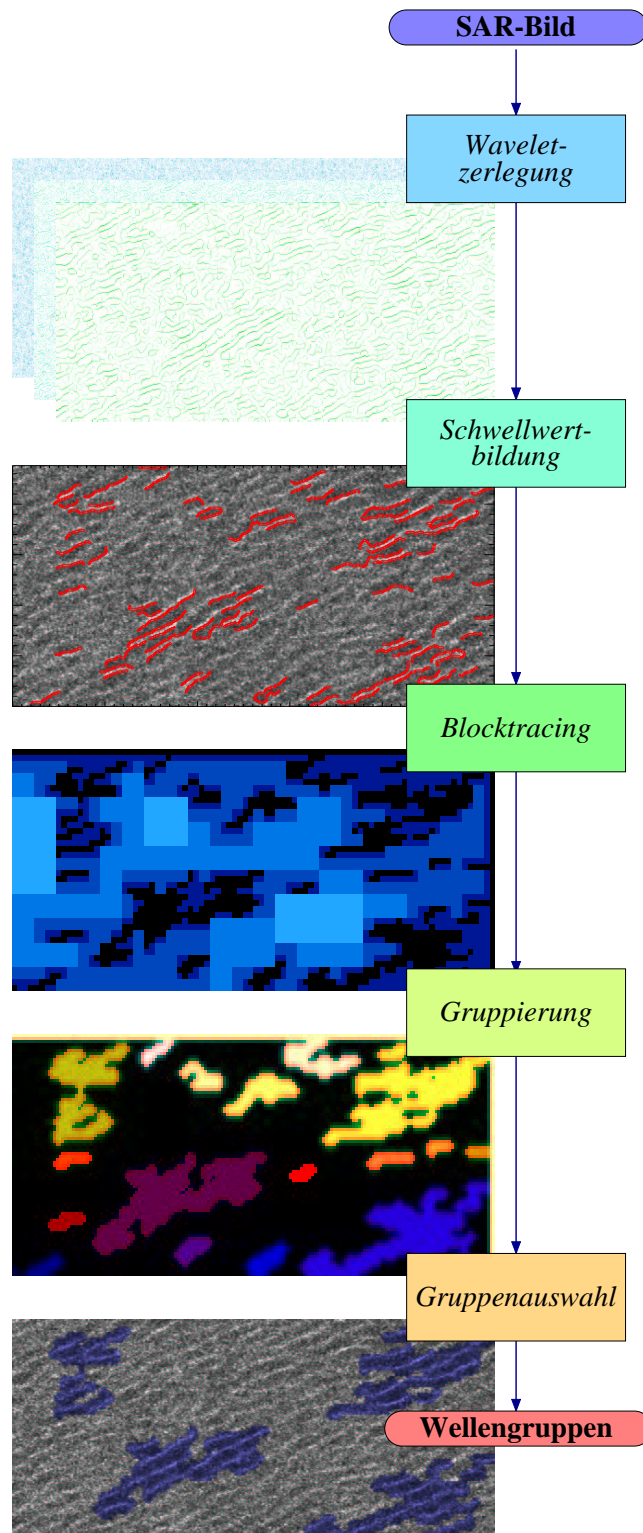


Abbildung B.1: Die Schritte des Wellengruppenextraktionsalgorithmus.

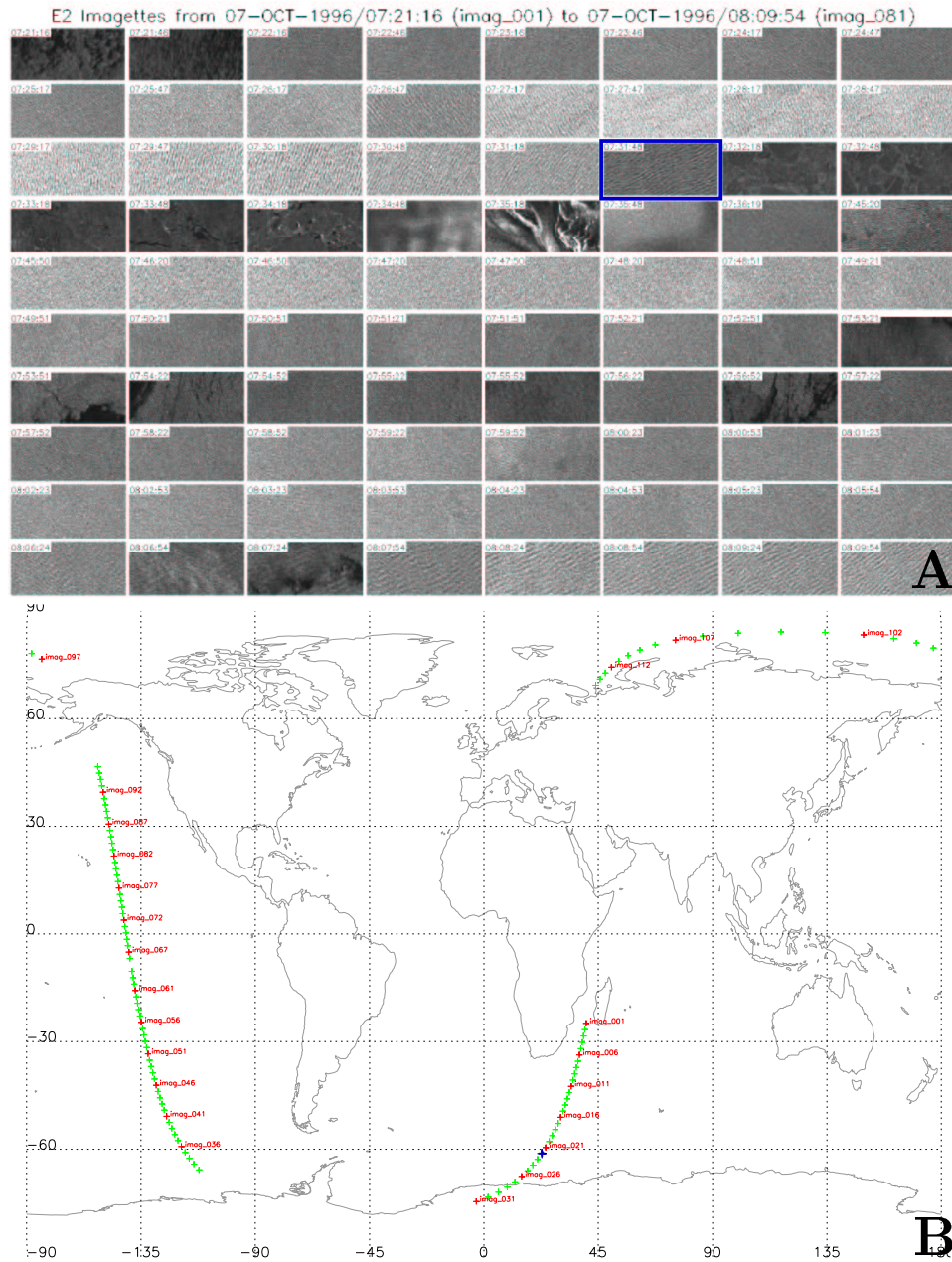


Abbildung B.2: Imagettes eines ERS-2 Orbits (A) und ihre geographische Lage (B).

In Abbildung B.2 sind einige der 115 Imagettes des ERS-2 Orbits 07662 vom 7.10.1996, 7<sup>h</sup>21<sup>m</sup>8<sup>s</sup> UTC sowie ihre geographische Lage dargestellt. Das in Abbildung B.1 verwendete Imagettes ist **blau** hervorgehoben.

**Bemerkung:** Die höchsten Intensitäten im SAR-Bild sind um  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge ( $\frac{\pi}{2}$  Phasen) vom Wellenkamm zum Sensor hin verschoben, da die dem Sensor zugewandte Flanke der Welle die Rückstreuung bewirkt.

## Anhang C

# Quellcodes ausgewählter Routinen

ANSCHLIESSEND sind einige Quellcodes von Algorithmen aufgeführt, die in dieser Arbeit eine wesentliche Rolle spielen. Programmiersprache ist meist IDL. Einzelne Befehle, die zu Testzwecken aufgenommen worden waren, wurden entfernt, soweit die Funktionalität dadurch nicht wesentlich verändert ist. Dabei handelt es sich z.B. um `print`-Ausgaben des aktuellen Programmstatus zur Kontrolle und Information.

### C.1 Routinen des Kantenextraktionsalgorithmus

Als Beispiel soll hier das bereits in Abschnitt 3.4 erklärte Blocktracing abgedruckt werden. Im Einzelnen sind das die Routinen `blocktrace` (Alg. 1), `findblocks` (Alg. 2) und `nextblocks` (Alg. 3). Nicht abgedruckt ist die (relativ einfach aufgebaute) Routine `invers.blocktrace`, die im Anschluss die Markierung der Landregionen vornimmt.

Ein weiteres Beispiel seien die Routinen, die die LIPSCHITZ-Regularität aus den Werten der Wavelet-Transformierten berechnen. Eingabeparameter sind dabei sowohl die Koeffizienten der Wavelet-Transformation, gespeichert als 4-dimensionales Fließkomma-Feld  $w(x, y, k, l)$ <sup>1</sup>, als auch die Informationen, wie die Betragsmaxima über die Skalen hinweg zusammenhängen. Letztere sind aus  $w$  nach dem Vorschlag von MALLAT *et al.* bestimmbar, indem zu einem Betragsmaximum auf Skala  $a = 2^k$  das zugehörige möglichst hohen Betrages auf Skala  $a = 2^{k-1}$  gesucht wird, und zwar möglichst<sup>2</sup> senkrecht zur Kantenrichtung in einer  $C \cdot a$ -Umgebung ( $C = \text{Konst.}$ ). Die zugehörigen Routinen `propagate` und `propagate_one` sind hier aus Platzgründen nicht abgedruckt. Gespeichert wird diese Information in einem 5-dimensionalen

---

<sup>1</sup> Die beiden ersten Dimensionen sind die Bildebene, die dritte Dimension die Skala  $a = 2^k$ , und die vierte speichert Betrag ( $l = 0$ ) und Argument ( $l = 1$ ).

<sup>2</sup> Die beste Wahl aus horizontaler und vertikaler Suchrichtung im Bild.

```

FUNCTION blocktrace, IMG=img, STARTRES=startres, STEPS=steps, $
    PIXWERTE=pixwerte, NODISPLAY=nodisplay, SUM=sum
    IF not(keyword_set(img)) THEN img=default_testimage()
    IF not(keyword_set(startres)) THEN startres=8
    IF not(keyword_set(steps)) THEN steps=3
    IF not(keyword_set(pixwerte)) THEN pixwerte=indgen(steps)*0
    xx=(size(img))[1]+startres-1)/startres
    yy=(size(img))[2]+startres-1)/startres
    fak=exp(alog(2)*floor(alog(512.0/startres/max([xx,yy]))/alog(2)))
    IF not(keyword_set(nodisplay)) THEN $
        | tv,congrid(img,(size(img))[1]*fak,(size(img))[2]*fak)*100+20,0
    blocks=findblocks(startres,img,pixwerte[0])
    blocksum=blocks
    xb=2*(size(blocks))[1]
    yb=2*(size(blocks))[2]
    rr=startres
    IF not(keyword_set(nodisplay)) THEN BEGIN
        | blx=congrid(blocksum,startres*xx*fak,startres*yy*fak)
        | tv,(blx+4*(blx<1))*90/steps
    ENDIF
    FOR k=2,steps DO BEGIN
        | rr=rr/2
        | blocks=nextblocks(blocks,img,pixwerte[k-1],RES=rr)
        | blocksum=rebin(blocksum,xb,yb,/SAMPLE)
        | blocksum=blocksum+blocks
        | xb=xb*2
        | yb=yb*2
        | IF not(keyword_set(nodisplay)) THEN BEGIN
            | blx=congrid(blocksum,startres*xx*fak,startres*yy*fak)
            | tv,(blx+4*(blx<1))*90/steps
        | ENDIF
    ENDFOR
    IF keyword_set(sum) $
        THEN return,blocksum $
        ELSE return,blocks
END

```

**Eingabe:** *img* Kantenbild  
*startres* Blocklänge/Höhe zu Beginn  
*steps* Schrittzahl  
*pixwerte* max. Kantenpunktzahl je Schritt

**Schalter:** /NODISPLAY Keine Bildanzeige  
/SUM Ergebnis aufsummieren

**Ausgabe:** Blocktracing-Endergebnis

**Algorithmus 1:** Die Haupt-Routine *blocktrace* im Blocktracing-Algorithmus.

```

FUNCTION findblocks, res, img, wert
  sz=size(img)  xx=(sz[1]+res-1)/res
  yy=(sz[2]+res-1)/res
  blocks=bytarr(xx, yy)
  FOR y=0,yy-1 DO $
    FOR x=0,xx-1 DO BEGIN
      i=total(img[x*res:(x+1)*res<sz[1]-1, $
              y*res:(y+1)*res<sz[2]-1])
      IF i LE wert THEN $
        [ blocks[x,y]=1
    ENDFOR
  RETURN, blocks

```

END

**Eingabe:** res Blocklänge/höhe  
img Kantenbild  
wert max. Kantenpunktzahl

**Ausgabe:** Erste Blocktracing-Iteration (Startblocks)

**Algorithmus 2:** Die Routine `findblocks` im Blocktracing-Algorithmus.

Integer-Feld  $p(x, y, k, d, m)$ <sup>3</sup>.

**Warnung:** Diese Methode ist nicht besonders speichersparend, jedoch so leichter für IDL zu handhaben als Pointer-Listen wie in C++ üblich. So benötigt man beispielsweise für ein Bild des  $3863 \times 1752$  Pixel großen *Elbausschnittes*, der der BAW-Modellregion entspricht, je ca. 310 MB für  $p$  und  $w$ , falls die Skalen  $a = 2^0, \dots, 2^K$ ,  $K = 5$  betrachtet werden, eine volle ERS-1/2 SAR-Szene (GEC-Bildtyp) zwischen 3.7 und 6.4 GB.

Hier angegeben sind zwei Routinen. `lipcalc` (Alg. 4), berechnet den Quotienten der Betragsmaxima auf der linken Seite von (3.4) für jeweils zwei aufeinander folgende Skalen beginnend mit den Betragsmaxima auf Skala  $a_0$  nach oben und nach unten.<sup>4</sup>

Im resultierenden Feld  $l(x, y, k)$  sind die Quotienten zwischen den Skalen  $2^{k+1}$  und  $2^k$  gespeichert, und zwar jeweils an der Stelle  $(x, y)$  der Betragsmaxima auf Skala  $a_0$ . Es werden nur Betragsmaxima betrachtet, die via  $p$  in Zusammenhang mit denen der Skala  $a_0$  stehen.  $\log_2 l(x, y, k)$  gibt eine erste Abschätzung der LIPSCHITZ-Regularität bei der jedoch jeweils nur die benachbarten Skalen  $2^k$  und  $2^{k+1}$  herangezogen werden.

Die Routine `lipregression` (Alg. 5) berechnet daraus nun mit Hilfe des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Verfahrens (vgl. (3.5)) die LIPSCHITZ-Regularität.

<sup>3</sup> Die ersten 3 Koordinaten entsprechen denjenigen von  $w$ ,  $d$  gibt an, ob Bildkoordinaten des zugehörigen Maximums von Skala  $2^{k-1}$  ( $d = 0$ ) oder  $2^{k+1}$  ( $d = 1$ ) gespeichert sind und  $m$  zeigt die Art der Bildkoordinate an ( $m = 0$  für die  $x$ -Koordinate,  $m = 1$  für die  $y$ -Koordinate).

<sup>4</sup> Abgedruckt ist nur die verkürzte Version ohne Fehlerkontrollen, Statusausgaben und Möglichkeiten zur teilweisen Berechnung (nur Nachbarskalen).

```

FUNCTION nextblocks, blk, img, wert, RES=res
  xb=2*(size(blk))[1]
  yb=2*(size(blk))[2]
  blocks=rebin(blk,xb,yb,/SAMPLE)
  sz=size(img)
  IF not(keyword_set(res)) THEN $
    [ res=ceil(exp(alog(2)*ceil((alog(sz[1])-alog(xb))/alog[2])))
  xx=(sz(1)+res-1)/res
  yy=(sz(2)+res-1)/res
  FOR y=0,yy-1 DO $
    FOR x=0,xx-1 DO BEGIN
      IF blocks[x,y] EQ 0 THEN BEGIN
        k=0
        IF blocks[x-1>0,y] EQ 1 THEN k=k+1
        IF blocks[x,y-1>0] EQ 1 THEN k=k+1
        IF blocks[(x+1)<(xb-1),y] EQ 1 THEN k=k+1
        IF blocks[x,(y+1)<(yb-1)] EQ 1 THEN k=k+1
        IF k GT 0 THEN BEGIN
          i=total(img[x*res:(x+1)*res<sz[1]-1,$
                  y*res:(y+1)*res<sz[2]-1])
          IF (i EQ 0)OR((i LE wert)AND(l EQ 8)) THEN BEGIN
            blocks[x,y]=1
            y=y-1>0
            IF x LE 1 THEN $
              IF y NE 0 THEN BEGIN
                x=x+32000
                y=y-1
              [ ENDIF
            ELSE x=x-2
          ENDIF ELSE $
            [ IF (i GT wert)OR(1 LT 4) THEN blocks[x,y]=2
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF
    ENDFOR
  ENDFOR
  blocks=blocks mod 2
  RETURN, blocks
END

```

**Eingabe:** blk Ergebnis der letzten Blocktracing-Iteration

img Kantenbild

wert max. Kantenpunktzahl

res falls vorausberechnet: Blockgröße

**Ausgabe:** Nächste Blocktracing-Iteration

**Algorithmus 3:** Die Routine nextblocks im Blocktracing-Algorithmus.

```

FUNCTION lipcalc, p, w, level
  xres=(size(w))[1]
  yres=(size(w))[2]
  scales=(size(w))[3]
  l=FLTARR(xres, yres, scales-1)
  l2=FLTARR(xres, yres)
  ll=level
  ppp=LINDGEN(xres*yres)
  WHILE ll GT 0 DO BEGIN
    ww=w[*,*, ll, 0]
    wl=w[*,*, ll-1, 0]
    pp=p[*,*, ll, 0, 0]+xres*p[*,*, ll, 0, 1]
    x=WHERE(pp[ppp] NE -(xres+1))
    ppa=ppp
    ppp=pp[ppa]
    l2[x]=ww[ppa[x]]/wl[ppp[x]]
    l[*,*, ll-1]=l2[*,*]
    l2[*,*]=0
    ll=ll-1
  ENDWHILE
  ll=level
  ppp=LINDGEN(xres*yres)
  WHILE ll LT scales-1 DO BEGIN
    ww=w[*,*, ll, 0]
    wh=w[*,*, ll+1, 0]
    pp=p[*,*, ll, 1, 0]+xres*p[*,*, ll, 1, 1]
    x=WHERE(pp[ppp] NE -(xres+1))
    ppa=ppp
    ppp=pp[ppa]
    l2[x]=wh[ppp[x]]/ww[ppa[x]]
    l[*,*, ll]=l2[*,*]
    l2[*,*]=0
    ll=ll+1
  ENDWHILE
  return, l
END
Eingabe: w      Wavelet-Koeffizienten (0: kein Betragsmaximum)
           p      Skalenzusammenhang der Koeffizienten (-1: kein Betr.max.)
           level  Skala  $a = 2^{\text{level}}$ , bei der begonnen wird
Ausgabe: Feld mit LIPSCHITZ-Quotienten

```

**Algorithmus 4:** Die Routine lipcalc zur Berechnung der LIPSCHITZ-Regulartäten.

```

FUNCTION lipregression, lip
  xres=(size(lip))[1]
  yres=(size(lip))[2]
  scales=(size(lip))[3]+1
  erg=FLTARR(xres,yres)+1001
  l2=lip
  FOR s=1,scales-2 DO l2[*,* ,s]=lip[*,* ,s]*l2[*,* ,s-1]
  ll=alog(l2)/alog(2)
  z=FINDGEN(scales-1)
  FOR x=0,xres-1 DO $
    FOR y=0,yres-1 DO BEGIN
      p=WHERE(lip[x,y,*] NE 0)
      IF (size(p))[0] NE 0 THEN BEGIN
        ft=LINFIT(z[p], ll[x,y,p])
        erg[x,y]=ft[1]-1
      ENDIF
    ENDFOR
  ENDFOR
  return, erg
END

```

**Eingabe:** lip Feld mit LIPSCHITZ-Quotienten (von lipcalc)

**Ausgabe:** Feld mit LIPSCHITZ-Regularitäten. Je nach der Normierung des Eingabeparameters w bei lipcalc können diese um eine additive Konstante gegenüber den tatsächlichen Regularitäten verschoben sein.

**Algorithmus 5:** Die Routine lipregression zur Berechnung der LIPSCHITZ-Regularitäten.

## C.2 Routinen zu mathematischen Überlegungen

Hier sind noch zwei Routinen abgedruckt, die mathematische Überlegungen aus dieser Arbeit (numerisch) stützen.

Als erstes sei eine IDL-Routine angeführt, die das simulierte Speckle-Rauschen in Abschnitt 5.2 (vgl. Abbildung 5.3 A und B) erzeugt hat. Auch die Kommandos zur Erzeugung der Graphen in Abbildung 5.1 und Abbildung 5.2 sind in Algorithmus 6 mit angegeben.

Weiter wird noch eine Oktave/Matlab-Routine angegeben, mit der die stochastische Verteilung des Wavelet-gefilterten Rauschens gemäß (5.32) berechnet wurde. Die benötigten Kommandos, um Abbildung 5.13 A und 5.13 B zu erstellen, finden sich in Algorithmus 7.



```

samples=float(2000.0*2000.0*3)    ;;3 Looks
re=RANDOMN(SEED, samples)        ;;Standard Normal Distribution
im=RANDOMN(SEED, samples)
I=re^2+im^2
A=sqrt(I)
w=atan(im, re)
  resolution=0.01
  normation=samples*resolution
h=HISTOGRAM(w, MIN=-3.2, MAX=3.2, BINSIZE=resolution)
ind=INDGEN((size(h)) [1])*resolution-3.2
h2=HISTOGRAM(I, MIN=0, MAX=15, BINSIZE=resolution)
ind2=INDGEN((size(h2)) [1])*resolution
h3=HISTOGRAM(A, MIN=0, MAX=4, BINSIZE=resolution)
ind3=INDGEN((size(h3)) [1])*resolution
h4=HISTOGRAM(re, MIN=-4, MAX=4, BINSIZE=resolution)
ind4=INDGEN((size(h4)) [1])*resolution-4
h5=HISTOGRAM(im, MIN=-4, MAX=4, BINSIZE=resolution)
ind5=INDGEN((size(h5)) [1])*resolution-4
pic=(A[0:samples/3-1]+A[samples/3:2*samples/3-1]+$
  A[2*samples/3-1:samples-1])/3
result=WHERE(pic EQ 0, nr)
pic2=ALOG(pic)
h6=HISTOGRAM(pic2, MIN=-1.5, MAX=1.5, BINSIZE=resolution)
ind6=INDGEN((size(h6)) [1])*resolution-1.5
h7=HISTOGRAM(pic, MIN=-0, MAX=3, BINSIZE=resolution)
ind7=INDGEN((size(h7)) [1])*resolution
SET_PLOT, 'ps'
  DEVICE, FILE='MC_arg.ps', /COLOR, /LANDSCAPE, /ENCAPSULATED, /TIMES
  PLOT, ind, h/normation, COLOR=0, CHARSIZE=1.5, FONT=0, THICK=6
  DEVICE, /CLOSE
  DEVICE, FILE='MC_I.ps', /COLOR, /LANDSCAPE, /ENCAPSULATED, /TIMES
  PLOT, ind2, h2/normation, COLOR=0, CHARSIZE=1.5, FONT=0, THICK=6
  DEVICE, /CLOSE
  ;; Analog für h3 bis h7 (MC_A.ps, MC_Re.ps, MC_Im.ps, MC_logA.ps,
  ;;                               MC_A_L=3.ps)
SET_PLOT, 'x'
IF nr NE 0 THEN pic2(result)=0
OPENW, 1, 'noise/pic.ln'
WRITEU, 1, pic2
CLOSE, 1

```

**Algorithmus 6:** IDL-Kommandos zur Erstellung des simulierten Speckle-Rauschens und der Histogramme der zugehörigen Bilder.

```

g1=[1]/2;
g2=reshape([1,3,2]'*[1,3])/64,1,6);
g3=reshape([1,3,6,10,11,9,4]'*[1,3,6,10,12])/2048,1,35);
g4=reshape([1,3,6,10,15,21,28,36,41,43,42,38,31,21,6]'*\
           [1,3,6,15,21,28,36,42,46,48])/65536,1,150);
omega=(-1638.35:0.1:1638.35);
y1=g1'*omega;
y2=g2'*omega;
y3=g3'*omega;
y4=g4'*omega;
yy1=y1.^2;
yy2=y2.^2;
yy3=y3.^2;
yy4=y4.^2;
Z1=pi*y1.*(4+yy1).(16+yy1);
Z2=pi*y2.*(4+yy2).(16+yy2);
Z3=pi*y3.*(4+yy3).(16+yy3);
Z4=pi*y4.*(4+yy4).(16+yy4);
N1=(128*sinh(pi*y1/2));
N2=(128*sinh(pi*y2/2));
N3=(128*sinh(pi*y3/2));
N4=(128*sinh(pi*y4/2));
faktor1=(Z1./N1);
faktor2=(Z2./N2).^2;
faktor3=(Z3./N3).^2;
faktor4=(Z4./N4).^2;
cf1=faktor1/sqrt(2*pi);
cf2=prod(faktor2)/sqrt(2*pi);
cf3=prod(faktor3)/sqrt(2*pi);
cf4=prod(faktor4)/sqrt(2*pi);
pl=[16384-399:16384+400];
nf=exp(-(omega.^2)/2)/sqrt(2*pi);
plot(omega(pl),[cf1(pl)',cf2(pl)',cf3(pl)',cf4(pl)',nf(pl)'])
fa=1638.35*2/sqrt(2*pi); %% Normierung
pdf1=shift(iffshift(cf1,16384),16384)*fa;
pdf2=shift(iffshift(cf2,16384),16384)*fa;
pdf3=shift(iffshift(cf3,16384),16384)*fa;
pdf4=shift(iffshift(cf4,16384),16384)*fa;
norm=shift(iffshift(nf,16384),16384)*fa;
xx=omega/53.5; %% Normierung mit nf und norm
ql=[16384-427:16384+428];
plot(xx(ql),[real(pdf1(ql))',real(pdf2(ql))',real(pdf3(ql))',\
            real(pdf4(ql))',real(norm(ql))'])

```

**Algorithmus 7:** Octave/Matlab-Kommandos für die numerische Berechnung der Verteilung von Wavelet-gefiltertem Rauschen (vgl. Abbildung 5.13).

## Anhang D

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kontinuierliche Wavelet-Transformierte von Signalen verschiedener Frequenz. . . . .	20
1.2	Rauschen und Kante in der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. . . . .	26
2.1	Wichtige Größen der SAR-Abbildungsgeometrie. . . . .	30
2.2	Radar-Frequenzbänder. . . . .	32
2.3	Signalausstrahlung und -empfang an der SAR-Antenne. . . . .	33
2.4	Range-Verschiebung. . . . .	34
2.5	Idealer und realer point spread. . . . .	36
2.6	Der ERS-2-Satellit bei der Fertigung und schematisch im Einsatz. . . . .	44
2.7	ENVISAT bei der Fertigung und schematisch im Einsatz. . . . .	49
2.8	Der Satellit Cassini und sein SAR-Sensor. . . . .	50
2.9	Logos der Space Shuttle Missionen mit SAR-Sensoren. . . . .	51
2.10	Flugzeuggestützter SAR-Sensor der Firma AeroSensing. . . . .	53
3.1	Die Schritte des Küstenlinienextraktionsalgorithmus. . . . .	56
3.2	Lokale Kantenauswahl. . . . .	59
3.3	Die Sandbank Medemgrund mit der gefundenen Wasserstandslinie für verschiedene SAR-Bilder. . . . .	61
4.1	Die Musterlösung und der zugrundeliegende Ausschnitt des SAR-Bildes vom 14.3.1996. . . . .	63
4.2	Histogramme von LIPSCHITZ-Regularitäten und Wavelet-Betragsmaxima auf den Regionen der Musterlösung. . . . .	64
4.3	Vergleich des Blocktracing-Ergebnisses mit der Musterlösung. . . . .	65
4.4	Qualität der endgültigen Küstenlinie: Relative Häufigkeit der Fehler. . . . .	66
4.5	LIPSCHITZ-Regularität und Wavelet-Betragsmaxima im Vergleich. . . . .	67

4.6	Einige problematische Bildausschnitte. . . . .	69
4.7	Interpolierte Topographie aus SAR-Wasserstandslinien. . . . .	70
5.1	Histogramme eines simulierten Single-Look-Complex-Bildes $X$ . . . . .	74
5.2	Histogramm eines simulierten 3-Look Amplitudendichtebildes $\ln A$ . . . . .	74
5.3	Ausschnitt des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes $A$ , des Amplitudendichtebildes $\ln A$ sowie dessen dyadischer Wavelet-Transformierter (Betragmaxima) der Skalen $a = 2^0, \dots, 2^3$ . . . . .	75
5.4	Betragmaxima-Histogramme der dyadischen Wavelet-Transformierten. . . . .	75
5.5	Ausschnitt des simulierten 3-Look-Amplitudenbildes $A$ mit zwei homogenen Gebieten, des Amplitudendichtebildes $\ln A$ und dessen dyadischer Wavelet-Transformierter der Skalen $a = 2^0, \dots, 2^3$ mit Kantenstärke $\kappa = 1.4$ . . . . .	76
5.6	Histogramme der Betragmaxima der Wavelet-Transformierten auf den homogenen Teilbereichen und in der Kantenumgebung für verschiedene Skalen $a$ . . . . .	77
5.7	Histogramme der Betragmaxima der Wavelet-Transformierten für homogene Teilbereiche und Kante bei verschiedene Kantenstärken $\kappa$ . . . . .	78
5.8	Automatischer Schwellwert, Fehler erster und zweiter Art für Kantenstärken $\kappa \in [1, 7]$ . . . . .	79
5.9	LIPSCHITZ-Regularitäten des simulierten Rauschens. . . . .	80
5.10	LIPSCHITZ-Regularitäten einer simulierten Kante. . . . .	80
5.11	Bildausschnitte 'homogener' Wasseroberfläche im SAR, Histogramme der Amplitude und der berechneten LIPSCHITZ-Regularitäten. . . . .	81
5.12	Histogramme von Wavelet-Koeffizienten und LIPSCHITZ-Regularitäten im Bereich der Musterlösungs-Wasserstandslinie. . . . .	82
5.13	Numerisch berechnete charakteristische Funktion $\hat{f}_X(\omega)$ und Dichtefunktion $f_X(x)$ von Wavelet-gefiltertem Speckle. . . . .	88
5.14	Histogramme/Verteilungen der Wavelet-Koeffizienten, ihrer Beträge und ihrer Betragmaxima für Rauschen und Kante. . . . .	92
6.1	ERS-2 C-Band Transponder. . . . .	97
6.2	Vermessung der Land-Wassergrenze mit GPS und Transpondern. . . . .	98
6.3	Pixelgrößen von SAR-Bildern übertragen auf Gebiete im Wattenmeer. . . . .	99
6.4	Struktur der Wattoberfläche. . . . .	100

6.5	Wasserstandsentwicklung entlang eines Längsprofils in der <i>Elbe</i> für unterschiedliche Gezeitsituationen am 1.7.1992 nach Simulationen des hydronumerischen Strömungsmodells der BAW. . . . .	102
6.6	Tidehöhen des Pegels <i>Otterndorf</i> für einige SAR-Bilder. . . . .	103
6.7	Morphodynamische Veränderungen im <i>Elbästuar</i> zwischen 1992 und 1997. . . . .	104
7.1	Schematisches Bild der Funktionsweise eines Multibeam-Echolots und sein Einsatz auf dem Meßboot 'Storch'. . . . .	106
7.2	Umgebungen $U_1$ und $U_2$ der Größen $n \times n$ für verschiedene Kantenrichtungen des Kantendetektors von TOUZI <i>et al.</i> . . . . .	109
7.3	Die Acrosstrack-InSAR Abbildungsgeometrie. . . . .	115
7.4	Digitales Höhenmodell durch InSAR. . . . .	116
7.5	Filterantworten von simuliertem Speckle-Rauschen bzgl. des $7 \times 7$ Fuzzy Filters im Vergleich zu den Wavelet-Betragsmaxima der Skalen $a = 2^0, \dots, a = 2^3$ . . . . .	122
7.6	Korrelation der Filterantwort eines SAR-Bildes: Wavelet-Betragsmaxima im Vergleich mit $7 \times 7$ Fuzzy. . . . .	123
7.7	Histogramm der Wavelet-Betragsmaxima auf Skala $2^2$ und der $7 \times 7$ Fuzzy-Filterwerte eines SAR-Bildes auf Land und Wasser. . . . .	123
7.8	Blocktracing-Ergebnisse bei Standard und verbesserter Fuzzy-Kantenfindung. . . . .	124
7.9	RADARSAT-1-Bild mit Küstenlinie aus dem Schwellwert-Verfahren. . . . .	127
7.10	Original sowie geocodiertes und specklegefiltertes RADARSAT-1-Bild mit Küstenlinie aus dem Wavelet-basierten Verfahren. . . . .	128
7.11	Abstand der Wavelet-Kanten von den Kanten mit lokaler, manueller Schwellwertfestlegung. . . . .	129
7.12	Wasserstandslinie im Vergleich mit der BAW-Topographie. . . . .	130
7.13	Die aus SAR-Bildern interpolierte Topographie im Vergleich mit der von der BAW gemessenen. . . . .	130
7.14	AeroSensing Flugzeuggestützte InSAR-Topographie mit überlagerter Wasserstandslinie aus dem Wavelet-basierten Algorithmus. . . . .	131
7.15	SAR-Bild der Sandbank <i>Medemgrund</i> von der SRTM-Mission. . . . .	132
7.16	InSAR-Phasenbild und 'Grobtopographie' der Sandbank <i>Medemgrund</i> von der SRTM-Mission. . . . .	132
7.17	Beispielbilder von MOMS. . . . .	133
A.1	Lage der Regionen <i>A</i> , <i>B</i> und <i>C</i> . . . . .	145
A.2	$\mu$ -Verschiebung des Trägers von $\mathcal{T}_{(b_1+\mu, b_2)}^\top \mathcal{D}_a \Psi_1$ . . . . .	147

- B.1 Die Schritte des Wellengruppenextraktionsalgorithmus. . . . . 153
- B.2 Imagettes eines ERS-2 Orbits und ihre geographische Lage. . 154
- D.1 Pegel an der *Elbfahrrinne*. . . . . 168

## D.1 Bildquellennachweis

Einige der Abbildungen sind Zeichnungen aus [BaS] nachempfunden. Weitere Bilder und Photographien stammen aus dem World Wide Web sowie aus Publikationen der Ozeanographiegruppe des DLR-MF:

- 2.1 Nachempfunden Abb. wie 3-1 in [BaS] bzw. Bildern in [VB]
- 2.3 Nachempfunden der Abb. 3-5 in [BaS]
- 2.4 Nachempfunden der Abb. 3-6 in [BaS]
- 2.6-A [http://www.esa.int/gallery/pc\\_zip/ers002.jpg](http://www.esa.int/gallery/pc_zip/ers002.jpg)
- 2.6-B [http://www.esa.int/gallery/pc\\_zip/ers005.jpg](http://www.esa.int/gallery/pc_zip/ers005.jpg)
- 2.7-A [http://www.esa.int/gallery/pc\\_zip/envisat002.jpg](http://www.esa.int/gallery/pc_zip/envisat002.jpg)
- 2.7-B [http://www.esa.int/gallery/pc\\_zip/envisat3.jpg](http://www.esa.int/gallery/pc_zip/envisat3.jpg)
- 2.7-C [http://www.esa.int/gallery/pc\\_zip/envisat6.jpg](http://www.esa.int/gallery/pc_zip/envisat6.jpg)
- 2.8 <http://www.jpl.nasa.gov/cassini/english/pic/images/slide/image14.jpg>
- 2.9-A <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/french/chron/shuttle.jpg>
- 2.9-B <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/chron/sts-2.gif>
- 2.9-C <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/chron/sts-41-g.gif>
- 2.9-D <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/chron/sts-59.gif>
- 2.9-E <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/chron/sts-68.gif>
- 2.9-F <http://www-pao.ksc.nasa.gov/kscpao/chron/sts-99-patch-small.gif>
- 2.10 AeroSensing, [Aes2]
- 6.1 [LWH<sup>+</sup>]
- 6.2 [LWH<sup>+</sup>]
- 6.5 BAW, [LWH<sup>+</sup>]
- 6.7 [LR], [LWH<sup>+</sup>]
- 7.1-A [http://www.kongsberg-simrad.com/Products/Hydrographic\\_Survey/bilder/multibeam/multibeam.jpg](http://www.kongsberg-simrad.com/Products/Hydrographic_Survey/bilder/multibeam/multibeam.jpg)
- 7.1-B <http://w3g.gkss.de/G/GUM/instruments/multibeam/storch2.jpg>

Tabelle D.1: Bildquellennachweis.

- 7.3 Nachempfunden Abb. 4, 6 und 7 in [BH]
- 7.4 Bilder von [Srtm]
- 7.9 SAR-Bild und Küstenlinie durch dankenswerte Überlassung des CCRS
- 7.10 SAR-Bild durch dankenswerte Überlassung des CCRS
- 7.14 Abbildung 4.8 in [Hoj2]
- 7.15 Bild von SRTM, zur Verfügung gestellt durch das SRTM-Team am DLR-MF
- 7.17 Bilder von [Moms]
- D.1 Bild erstellt durch [WeS]-Software und manuell nachbearbeitet, Pegelkoordinaten von der BAW.
- K Die Logos in der Tabelle in Anhang K stammen von der jeweils dort angegebenen Homepage oder wurden nach dort veröffentlichten Logos nachgezeichnet.

Titel Das Titelbild "*Tidal games underneath the moon*" besteht aus (von links oben nach rechts unten):

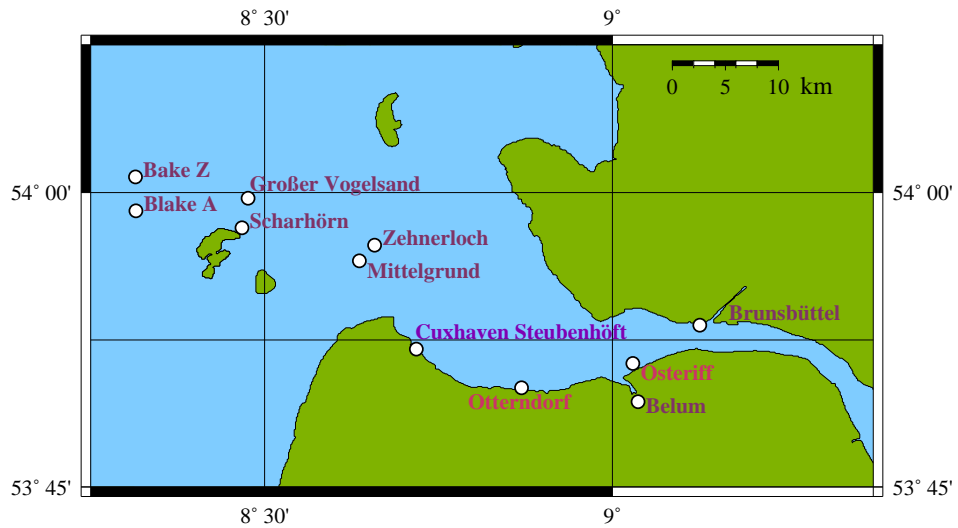
Bild vom ERS-2 (aus Abb. 2.6-B);  
 Mond aus dem Programm Xephem, Mondphase 28.2.2001 mittags;  
 Ausschnitt des Sternenhimmels um die Mondposition über Hamburg  
 am Nachmittag des 2.5.2001, schematisch nachgezeichnet;  
 Ausgestrahlte Chirps im C-Band (Farbgebung gemäß Abb. 2.2);  
 Foto des Wattenmeers westlich von *Friedrichskoog* vom 26.4.1999;  
 Spline-Wavelet  $\psi_1$  und seine FOURIER-Transformierte  $\hat{\psi}_1$ ;  
 In den Sand 'ingeritzt' die rechten Seiten von (5.3) und (5.32)  
 Interpolierte Topographie von *Medemgrund*, 3D-Ansicht;  
 ERS-2-SAR-Aufnahme von *Medemsand* vom 14.3.1996.  
 Zusammengestellt mit Gimp (vgl. Abschnitt H)

Tabelle D.1: Bildquellennachweis (*Fortsetzung*).

## D.2 ERS-SAR-Bildarchiv *Elb*-Ästuar

In Tabelle D.2 sind die in der Ozeanographiegruppe des Instituts für Methodik der Fernerkundung (MF) am DLR archivierten ERS-1/2-SAR-Szenen zusammengestellt. Einige der Bilder, die in dieser Arbeit eine besondere Rolle spielen, sind farblich hervorgehoben nach folgendem Schema:

- Satellitenüberflüge während Experimenten im Wattenmeer (siehe Abschnitt 6.1): Orbit in grün.
- Bilder, die zur Interpolation der Topographie von *Medemgrund* herangezogen wurden: Wasserstand in blau.
- Testbild, auf dem die Musterlösung erstellt wurde: Orbit in rot



**Abbildung D.1:** Pegel an der *Elbfahrinne*. Die in Tabelle D.2 mit Werten **aufgeführten** bzw. **interpolierten** Pegel sind farblich hervorgehoben.

- Bilder, die als Beispiel für homogenes Speckle-Rauschen auf der Meeresoberfläche verwendet wurden (vergleiche Abschnitt 5.2): Orbit in **braun**

Die Wasserstände sind (soweit bekannt/berechnet) die Pegel *Cuxhaven* (interpolierte Hoch- und Niedrigwasser-Werte), Pegel *Otterndorf* (OD, minütlich gemessen) und Pegel *Osteriff* (OI, minütlich gemessen).<sup>1</sup> '—' bedeutet, der Pegelstand existiert nicht, z.B. weil der Schreiber außer Betrieb war. Die Lage der Pegel im *Elb*-Ästuar veranschaulicht Abbildung D.1. Die Zeitangaben (UTC) sind ein bzw. zwei Stunden vor Ortszeit (MEZ/MESZ).<sup>2</sup>

Alle Höhenangaben der Pegel sind in Metern Normal-Null.

ERS	Orbit Frame	Zeit (UTC)	Wasserstand	
			interpol. Pegel OD	Pegel OI
1	03631 2511	26. 3.1992, 10 <sup>25</sup>		
1	05492 2511	3. 8.1992, 10 <sup>25</sup>	-1.52	-1.48
1	14025 2511	22. 3.1994, 10 <sup>25</sup>		
1	20093 2511	19. 5.1995, 10 <sup>23</sup>		

**Tabelle D.2:** Überblick über die ERS-1/2-SAR-Szenen des *Elb*-Ästuars am MF.

<sup>1</sup> Pegeldata ohne Gewähr, die — unter dankenswerter Vermittlung durch die BAW — vom Wasser und Schiffsamt Cuxhaven (WSA) erhaltenen (dort nachgeschlagenen) Daten stimmen nicht in allen Fällen mit den selbst nachgeschlagenen Daten aus der elektronischen Aufzeichnung der BAW (soweit vorhanden) überein.

<sup>2</sup> Zu den Terminen der Sommerzeitumstellung vgl. z.B. [Som].



ERS	Orbit Frame		Zeit (UTC)	Wasserstand		
				interpol.	Pegel OD	Pegel OI
2	01193	2511	13. 7.1995, $10^{26}$			
2	01694	2511	17. 8.1995, $10^{26}$	-1.53	-1.40	-1.22
2	01923	2511	2. 9.1995, $10^{23}$	-1.40		
2	02195	2511	21. 9.1995, $10^{26}$		-1.36	-1.15
2	02424	2511	7.10.1995, $10^{23}$			
1	22870	2511	29.11.1995, $10^{26}$			
2	03698	2511	4. 1.1996, $10^{26}$			
2	04263	1071	12. 2.1996, $21^{24}$	-0.92	—*	—*
2	04428	2511	24. 2.1996, $10^{23}$			
2	04700	2511	14. 3.1996, $10^{26}$	-0.95	-1.07	-0.55
2	04929	2511	30. 3.1996, $10^{23}$			
2	05036	1071	6. 4.1996, $10^{27}$	-1.62	-1.79	-1.80
2	05201	2511	18. 4.1996, $10^{26}$			
2	05265	1071	22. 4.1996, $21^{24}$	-1.93	-1.84	—†
2	07205	2511	5. 9.1996, $10^{26}$		-1.27	-1.08
2	07706	2511	10.10.1996, $10^{26}$			
2	07935	2511	26.10.1996, $10^{23}$			
2	08708	2511	19.12.1996, $10^{26}$	-0.58	-0.66	-0.36
2	09273	1071	27. 1.1997, $21^{24}$	-1.49	—*	—*
2	09438	2511	8. 2.1997, $10^{23}$		—	
2	11277	1071	16. 6.1997, $21^{24}$		1.36↓	
2	11442	2511	28. 6.1997, $10^{23}$		-0.95↓	-0.64
2	11549	1071	5. 7.1997, $21^{27}$	-0.55	-0.50↑	-0.94
2	11714	2511	17. 7.1997, $10^{26}$		1.23↓	
2	11943	2511	2. 8.1997, $10^{23}$		1.44↑	
2	12050	1071	9. 8.1997, $21^{27}$	-1.48	-1.31↓	-1.00
2	12279	1071	25. 8.1997, $21^{24}$	-0.21	-0.27↓	0.08
2	12945	2511	11.10.1997, $10^{23}$		0.87↓	
2	13052	1071	18.10.1997, $21^{27}$	-1.24	-1.39↑	-1.46
2	13217	2511	30.10.1997, $10^{25}$		1.08↑	
2	13281	1071	3.11.1997, $21^{24}$	-1.82	-1.85↑	—‡
2	13446	2511	15.11.1997, $10^{23}$		1.01↑	—‡
2	13947	2511	20.12.1997, $10^{23}$	-1.32	-1.25↓	—‡
2	14054	1071	27.12.1997, $21^{27}$		1.29↑	—‡
2	14448	2511	24. 1.1998, $10^{23}$		0.48↓	—‡

**Tabelle D.2:** Überblick über die ERS-1/2-SAR-Szenen des *Elb-*Ästuars am MF (*Fortsetzung*).

↓ Auslaufende Tide (soweit bekannt).

↑ Einlaufende Tide (soweit bekannt).

\* Wegen Eis keine Werte/kein Pegelbogen.

† Wegen Schreibfehler keine Werte.

‡ Pegel ausgefallen, keine Werte.

ERS	Orbit Frame		Zeit (UTC)	Wasserstand	
				interpol. Pegel OD	Pegel OI
2	14720	2511	12. 2.1998, 10 <sup>25</sup>	0.86↓	—‡
2	14949	2511	28. 2.1998, 10 <sup>23</sup>	1.37↓	—‡
2	15056	1071	7. 3.1998, 21 <sup>27</sup>	0.87↓	—‡
2	15221	2511	19. 3.1998, 10 <sup>26</sup>	-1.47	-1.41↓
2	15450	2511	4. 4.1998, 10 <sup>23</sup>	-1.00	-0.84↓
2	15722	2511	23. 4.1998, 10 <sup>26</sup>	0.77↓	—‡
2	15786	1071	27. 4.1998, 21 <sup>24</sup>	-0.58↓	—‡
2	16058	1071	16. 5.1998, 21 <sup>27</sup>	-1.79	-1.69↓
2	16223	2511	28. 5.1998, 10 <sup>25</sup>	-0.42↓	—‡
2	16452	2511	13. 6.1998, 10 <sup>23</sup>	-0.86	-0.73↓
2	16724	2511	2. 7.1998, 10 <sup>26</sup>	-0.80	-0.82↓
2	16788	1071	6. 7.1998, 21 <sup>24</sup>	1.53↓	1.49↓
2	16953	2511	18. 7.1998, 10 <sup>23</sup>	0.24	-0.06↓
2	17060	1071	25. 7.1998, 21 <sup>27</sup>	-1.26	-1.35↓
2	17225	2511	6. 8.1998, 10 <sup>26</sup>	1.35↓	1.32↓
2	17454	2511	22. 8.1998, 10 <sup>23</sup>	1.67↓	1.54↓
2	17955	2511	26. 9.1998, 10 <sup>23</sup>	-1.58↓	-1.49↓
2	19062	1071	3.10.1998, 21 <sup>27</sup>	0.93↓	0.87↓
2	18728	2511	19.11.1998, 10 <sup>25</sup>	—	—
2	18957	2511	5.12.1998, 10 <sup>23</sup>	0.94↓	—
2	19064	1071	12.12.1998, 21 <sup>26</sup>	0.65↓	—
2	19229	2511	24.12.1998, 10 <sup>25</sup>	-1.39↓	—
2	19458	2511	9. 1.1999, 10 <sup>23</sup>	-0.98↓	—
2	19730	2511	28. 1.1999, 10 <sup>25</sup>	0.99↓	—
2	19794	1071	1. 2.1999, 21 <sup>24</sup>	-0.67↓	-1.01↓
2	19959	2511	13. 2.1999, 10 <sup>23</sup>	1.25▲	1.31↓
2	20066	1071	20. 2.1999, 21 <sup>27</sup>	-1.24↓	-0.82↓
2	20460	2511	20. 3.1999, 10 <sup>23</sup>	-0.82↓	-1.19↓
2	20732	2511	8. 4.1999, 10 <sup>26</sup>	-1.22↓	-0.88↓
2	20796	1071	12. 4.1999, 21 <sup>24</sup>	1.62▲	1.69↓
2	20961	2511	24. 4.1999, 10 <sup>23</sup>	-0.45↓	-0.10↓
2	21233	2511	13. 5.1999, 10 <sup>26</sup>	1.52▲	1.60↓
2	21462	2511	29. 5.1999, 10 <sup>23</sup>	1.05↓	1.00↓
2	21734	2511	17. 6.1999, 10 <sup>26</sup>	-1.28↓	-1.41↓
2	21963	2511	3. 7.1999, 10 <sup>23</sup>	-1.49↓	-1.45↓

**Tabelle D.2:** Überblick über die ERS-1/2-SAR-Szenen des *Elb-*Ästuars am MF (*Fortsetzung*).

- 
- ↓ Auslaufende Tide (soweit bekannt).
  - ↑ Einlaufende Tide (soweit bekannt).
  - ▲ Hochwasserstand erreicht.
  - ▼ Niedrigwasserstand erreicht.
  - ‡ Pegel ausgefallen, keine Werte.

ERS	Orbit Frame		Zeit (UTC)	Wasserstand	
				interpol. Pegel OD	Pegel OI
2	22070	1071	10. 7.1999, 21 <sup>27</sup>	1.28†	1.33‡
2	22235	2511	22. 7.1999, 10 <sup>26</sup>	0.43‡	0.79‡
2	22464	2511	7. 8.1999, 10 <sup>23</sup>	0.10‡	0.41‡
2	22736	2511	26. 8.1999, 10 <sup>26</sup>	1.19†	1.11†
2	22800	1071	30. 8.1999, 21 <sup>24</sup>	-1.39‡	-1.03‡
2	22965	2511	11. 9.1999, 10 <sup>23</sup>	0.36†	0.11†
2	23072	1071	18. 9.1999, 21 <sup>27</sup>	-0.52‡	-0.20‡
2	23237	2511	30. 9.1999, 10 <sup>26</sup>	-1.16†	-1.00‡
2	23466	2511	16.10.1999, 10 <sup>23</sup>	-1.51‡	-1.26‡
2	23967	2511	20.11.1999, 10 <sup>23</sup>	0.60‡	0.74‡
2	24239	2511	9.12.1999, 10 <sup>26</sup>	1.04†	0.86†

**Tabelle D.2:** Überblick über die ERS-1/2-SAR-Szenen des *Elb-*Ästuars am MF (*Fortsetzung*).

‡ Auslaufende Tide (soweit bekannt).

† Einlaufende Tide (soweit bekannt).

Des weiteren befinden sich etwa 34000 Imagettes von ERS-2 (u.a. zusammenhängende 3 Wochen) entsprechend Abbildung B.2 prozessiert am DLR-MF.

## Anhang E

# Algorithmenverzeichnis

1	Die Haupt-Routine <code>bloctrace</code> im Blocktracing-Algorithmus.	156
2	Die Routine <code>findblocks</code> im Blocktracing-Algorithmus. . . . .	157
3	Die Routine <code>nextblocks</code> im Blocktracing-Algorithmus. . . . .	158
4	Die Routine <code>lipcalc</code> zur Berechnung der LIPSCHITZ-Regularitäten. . . . .	159
5	Die Routine <code>lipregression</code> zur Berechnung der LIPSCHITZ-Regularitäten. . . . .	160
6	IDL-Kommandos zur Erstellung des simulierten Speckle-Rauschens und der Histogramme der zugehörigen Bilder. . . . .	161
7	Octave/Matlab-Kommandos für die numerische Berechnung der Verteilung von Wavelet-gefiltertem Rauschen. . . . .	162

# Anhang F

## Literaturverzeichnis

- [Aes1] *High resolution interferometric synthetic aperture radar system AeS-1*, technical description, Aero-Sensing Radarsysteme GmbH, Oberpfaffenhofen, 1997.
- [Aes2] (*Firmenkatalog*), Aero-Sensing Radarsysteme GmbH, Oberpfaffenhofen, 1999.
- [AAB] B. AIAZZI, L. ALPARONE UND S. BARONTI: *Multiresolution local-statistics speckle filtering based on a ratio laplacian pyramid*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 36, Nr. 5, Sep. 1998.
- [ARR] W. R. ALPERS, D. B. ROSS UND C. L. RUFENACH: *On the detectability of ocean surface waves by real and synthetic aperture radar*, Journal of Geophysical Research, Bd. 86, 1981, S. 6481–6498.
- [BH] R. BAMLER UND P. HARTL: *Synthetic Aperture Radar Interferometry*, Inverse Problems, Bd. 14, 1998, S. R1–R54.
- [BaS] R. BAMLER UND B. SCHÄTTLER: *SAR Data Acquisition and Image Formation*, in G. SCHREIER, Hrsg.: *SAR Geocoding: Data and Systems*, Wichmann-Verlag, Hüthig, 1993, Kap. 3, S. 53–102.
- [Ba1] M. BAO: *Backscattering change detection in SAR images using wavelet techniques*, in Proceedings of IGARSS'99, Hamburg, Juni 1999.
- [Ba2] ———: *Classification of multi-temporal SAR images and InSAR coherence images using adaptive neighborhood model and simulated annealing approach*, in Proceedings of ERS-ENVISAT conference, Göteborg, Schweden, Okt. 2000.
- [Ba] H. BAUER: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Berlin, New York, 4. Aufl., 1991.
- [BTE] M. BEAUCHEMIN, K. P. B. THOMSON UND G. EDWARDS: *The Ratio of the Arithmetic to the Geometric Mean: A First-Order Statistical Test for Multilook SAR Image Homogeneity*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 34, Nr. 2, März 1996, S. 604–606.
- [Bio] School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>.

- [Bio2] <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/lebensdaten.html>.
- [Bri] A. BRIDGES: *The ABCs of interferometry*. [http://www.space.businessstechnology/technology/sts99\\_interfer.html](http://www.space.businessstechnology/technology/sts99_interfer.html), Feb. 2000.
- [Br] *Der große Brockhaus, 12 Bände*, Eberhard Brockhaus, Wiesbaden, 16. Aufl., 1952.
- [BS] I. N. BRONSTEIN UND K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch Verlag, Thun, 1957.
- [CH] S. CAMBANIS UND C. HOUDRÉ: *On the Continuous Wavelet Transform of Second-Order Random Processes*, IEEE Transactions on Information Theory, Bd. 41, Nr. 3, Mai 1995, S. 628–642.
- [Cv] R. G. CAVES: *Automatic matching of features in Synthetic Aperture Radar data to digital map data*, Doktorarbeit Department of Applied and Computational Mathematics, University of Sheffield, Juni 1993.
- [Da] W. DAHMEN: *Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations*, Acta Numerica, Bd. 7, 1998.
- [Db] I. DAUBECHIES: *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1992.
- [DKKS] G. DIETRICH, K. KALLE, W. KRAUSS UND G. SIEDLER: *Allgemeine Meereskunde — Eine Einführung in die Ozeanographie*, Gebrüder Borntraeger, Berlin, Stuttgart, 1975.
- [DJ] A. DIMOU UND G. JÄGER: *A family of fuzzy edge detectors for SAR images*, Techn. Ber. 551-4/2000, Institut für Hochfrequenztechnik, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Oberpfaffenhofen, Juni 2000.
- [DUF<sup>+</sup>] A. DIMOU, N. UZUNOĞLU, P. FRANGOS, G. JÄGER UND U. BENZ: *Near features' detection in SAR images using Fuzzy Edge Detector (FED)*, Proceedings of NATO RTO SET Symposium on 'Space-Based Observation Technology', Island of Samos, Greece, Bd. RTO MP-61, Okt. 2000, S. 49/1–49/12.
- [Dim] DLR: *ISIS — Missions*. <http://www.spaceref.com/>.
- [Dlr] ———: *Homepage*. <http://www.dlr.de/>.
- [Enet] ESA: *Earthnet online*. <http://earth.esa.int/>.
- [Ep18] ———: *Press Release N<sup>o</sup> 18*. <http://sobs.esa.int/pressows/documents/news/1/2000/press18.html>, März 2000.
- [FSSH] V. S. FROST, J. A. STILES, K. S. SHANMUGAN UND J. C. HOLTZMAN: *A Model for Radar Images and Its Application to Adaptive Digital Filtering of Multiplicative Noise*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. PAMI-4, Nr. 2, März 1982.
- [GJ] L. GAGNON UND A. JOUAN: *Speckle Filtering of SAR Images — A comparative study between complex-wavelet-based and standard filters*, in Proceedings of "Wavelet Applications in Signal and Image Processing V", Bd. SPIE 3169, San Diego, 1997.

- [Gg] L. GAGNON: *Wavelet filtering of speckle noise — some numerical results*, Preprint, März 1999.
- [Gä] N. GÄNSSLEN: *Restringierte globale Optimierung mit numerischen Gradientenabschätzungen*, Diplomarbeit Technische Universität München, 2000.
- [GKV] C. GERTHSEN, H. O. KNESER UND H. VOGEL: *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 13. Aufl., 1977.
- [Gmul] GKSS: *Multibeam Echo Sounder — Portable Shallow Water Mapping System*. <http://w3g.gkss.de/G/GUM/instruments/multibeam/multibeam.htm>.
- [GLO<sup>+</sup>] H. GUO, M. LANG, J. E. ODEGARD, C. S. BURRUS UND J. R. O. WELLS: *Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform*, IEEE Signal Processing Letters, Bd. 3, Nr. 1, Jan. 1996, S. 10–12.
- [Gu] D. GUYENNE, Hrsg.: *ERS-1 — A new tool for global environmental monitoring in the 1990's*, ESA Publications Division, ESTEC, Noordwijk, 1989.
- [HmH] A. HAMMER UND K. HAMMER: *Physikalische Formeln und Tabellen*, München, 1988.
- [Ha] R. A. HARRIS, Hrsg.: *ENVISAT-1 ASAR Science and Applications*, ESA Publications Division, Noordwijk, 1998.
- [HsH] K. HASSELMANN UND S. HASSELMANN: *On the nonlinear mapping of an ocean wave spectrum into a synthetic aperture radar image spectrum*, Journal of Geophysical Research, Bd. 96, 1991, S. 10713–10729.
- [He] P. HEINLEIN: *Wavelet-Methoden zur Analyse mammographischer Bilddaten*, Doktorarbeit Technische Universität München, Dez. 2000.
- [HFML] E. HERVET, R. FJØRTOFT, P. MARTHON UND A. LOPES: *Comparison of wavelet-based and statistical speckle filters*, in Proceedings of “SAR Image Analysis, Modelling, and Techniques III”, Bd. SPIE 3497, Barcelona, Sep. 1998.
- [HK] S. HIYAMA UND M. KOBAYASHI: *Wavelet-Based Multiresolution Display of Coastline Data*, in M. KOBAYASHI, Hrsg.: *Wavelets and their applications — Case studies*, Siam, Philadelphia.
- [Hoe] D. H. HOEKMAN: *Speckle Ensemble Statistics of Logarithmically Scaled Data*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 29, Nr. 1, Jan. 1991, S. 180–182.
- [HLS<sup>+</sup>] D. HOJA, S. LEHNER, M. SCHWÄBISCH, N. WINKEL UND M. F. BUCHROITHNER: *Analysis of ERS tandem mode coherence maps in the German wadden sea*, submitted to International Journal of Remote Sensing, Juli 2000.
- [Hoj] D. HOJA: *Extraktion von Wasserstandslinien aus IRS-1C Szenen*. Studienarbeit, Institut für Kartographie, Technische Universität Dresden, Mai 1999.

- [Hoj2] —: *InSAR-Höhenmodell und Wasserstandslinienverfahren im Vergleich*, Diplomarbeit Institut für Kartographie, Technische Universität Dresden, Jan. 2000.
- [HMBS] R. HORN, A. MOREIRA, S. BUCKREUSS UND R. SCHEIBER: *Recent Development of the Airborne SAR System E-SAR of DLR*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 703–705.
- [HoG] Hoxie High School, Mathematics Department: *Gamma Function*. <http://www.hoxie.org/math/integrals/more/gammafun.htm>.
- [Icaen] Iowa Computer Aided Engineering Network: *Digital Image Processing*. <http://www.icaen.uiowa.edu/~dip/LECTURE/contents.html>. Lecture Materials.
- [IG] J. INGLADA UND R. GARELLO: *Depth Estimation and 3D Topography Reconstruction from SAR Images Showing Underwater Bottom Topography Signatures*, in Proceedings of IGARSS'99, IEEE, Bd. 2, 1999, S. 956–958.
- [Ksmu] Kongsberg Simrad: *Multibeam Echo Sounder Systems*. [http://www.kongsberg-simrad.com/Products/Hydrographic\\_Survey/multibeam/](http://www.kongsberg-simrad.com/Products/Hydrographic_Survey/multibeam/).
- [Kra] H. J. KRAMER: *Observation of the Earth and Its Environment — Survey of Missions and Sensors*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 3. Aufl., 1996.
- [KsW] W. KREITMAIR-STECK UND A. WOLFRAMM: *Heliradar 2000+: Helicopter Allweather Operations for the Next Millenium*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 343.
- [KSSC] D. T. KUAN, A. A. SAWCHUK, T. C. STRAND UND P. CHAVEL: *Adaptive noise Smoothing Filter for Images with Signal-Dependent Noise*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. PAMI-7, Nr. 2, März 1985.
- [LJ] J.-S. LEE UND I. JURKEVICH: *Coastline detection and tracing in SAR images*, IEEE Transactions on Geoscience an Remote Sensing, Bd. 28, Nr. 4, Juli 1990, S. 662–668.
- [Lee1] J.-S. LEE: *Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. PAMI-2, Nr. 2, März 1980, S. 165–168.
- [Lee2] —: *Speckle analysis and smoothing of Synthetic Aperture Radar images*, Computer Graphics and Image Processing, Bd. 17, 1981, S. 24–32.
- [LR] S. LEHNER UND E. ROMANEESSEN: *Morphodynamik des Wattenmeers*. Petermanns Geographische Mitteilungen, Pilotheft, 2000.
- [LSNH] S. LEHNER, J. SCHULZ-STELLENFLETH, A. NIEDERMEIER UND J. HORSTMANN: *Global distribution of sea surface features from SAR wave mode data*, in to appear in Proceedings of IGARSS'01 (Sydney, July 9<sup>th</sup>–14<sup>th</sup> 2001), IEEE, 3 S., 2001.



- [LWH<sup>+</sup>] S. LEHNER, N. WINKEL, D. HOJA, J. HORSTMANN, A. NIEDERMEIER, K. RICKLEFS, E. ROMANEESSEN, E. RUDOLPH, J. SCHULZ-STELLENFLETH UND R. SIEGMUND: *Synergie von Fernerkundung und mathematischen Tidemodellen zur Optimierung divergierender Nutzungsansprüche in Ästuaren*, Forschungsbericht, Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Oberpfaffenhofen, Feb. 2001.
- [Ltb] A. LEUTBECHER: *Zahlentheorie — Eine Einführung in die Algebra*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [Ltb2] ———: *Skriptum zur Vorlesung Analysis I–IV*, 1998.
- [LNTL] A. LOPES, E. NEZRY, R. TOUZI UND H. LAUR: *Maximum a posteriori speckle filtering and first order texture models in SAR images*, S. 2409–2412.
- [LTN] A. LOPES, R. TOUZI UND E. NEZRY: *Adaptive speckle filters and scene heterogeneity*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 28, Nr. 6, Nov. 1990, S. 992–1000.
- [LMR] A. K. LOUIS, P. MAASS UND A. RIEDER: *Wavelets*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Lü] E. LÜSCHER: *Experimentalphysik II — Elektromagnetische Vorgänge*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1966.
- [MH] S. G. MALLAT UND W. L. HWANG: *Singularity Detection and Processing with Wavelets*, IEEE Transactions on Information Theory, Bd. 38, Nr. 6, März 1992, S. 617–643.
- [MZ] S. G. MALLAT UND S. ZHONG: *Characterisation of Signals from Multiscale Edges*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. 14, Nr. 7, Juli 1992, S. 710–732.
- [Ma] S. G. MALLAT: *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1997.
- [Ma2] ———: *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. 11, Nr. 7, Juli 1989, S. 674–693.
- [MD] D. C. MASON UND I. J. DAVENPORT: *Accurate and Efficient Determination of the Shoreline in ERS-1 SAR Images*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 34, Nr. 5, Sep. 1996, S. 1243–1253.
- [MsG] *Mathsoft — Euler Gamma Function Constants*. <http://www.mathsoft.com/asolve/constant/gamma/gamma.html>.
- [Me] C. MELSHEIMER: *Wattkartierung mit X-SAR/SIR-C-Daten, 1994, im Rahmen des XEP-Projektes*, in Proceedings of Watt-Workshop TIDE, 5.11.1997, Oberpfaffenhofen, Nov. 1997, DLR-DFD.
- [Mk] W. MENKE: *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Bd. 45 of International Geophysics Series, Academic Press, San Diego, New York, überarbeitete. Aufl., 1989.
- [Moms] DLR: *Best of MOMS-2P, Vol. 1 & 2*. 2 CD-ROMs, 1997 and 1998.

- [MBB<sup>+</sup>] K. MORRISON, J. C. BENNETT, S. C. M. BROWN, G. COOKMARTIN, A. J. McDONALD, S. QUEGAN UND P. DAMPNEY: *3D Polarimetric SAR Measurements of a Wheat Canopy*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 691–694.
- [Nmql] NASA: *Mission Quicklooks*. <http://leonardo.jpl.nasa.gov/msl/browse/quicklook/indexA.html>.
- [Nmse] ———: *Mission Sensors*. [http://ranier.hq.nasa.gov/Sensors\\_page/Missionlinks.html](http://ranier.hq.nasa.gov/Sensors_page/Missionlinks.html).
- [Nsrt] ———: *SRTM*. <http://www.jpl.nasa.gov/srtm/>.
- [Nasa] ———: *Homepage*. <http://www.nasa.gov/>.
- [NDJL] A. NIEDERMEIER, A. DIMOU, G. JÄGER UND S. LEHNER: *A comparison of a wavelet and a fuzzy based edge detector for SAR images with application to waterline extraction*. in preparation, 2002.
- [NLS] A. NIEDERMEIER, S. LEHNER UND J. VAN DER SANDEN: *Monitoring big river estuaries using SAR images*, in to appear in Proceedings of IGARSS'01 (Sydney, July 9<sup>th</sup>–14<sup>th</sup> 2001), IEEE, 3 S., 2001.
- [NRL] A. NIEDERMEIER, E. ROMANEESSEN UND S. LEHNER: *Detection of Coastlines in SAR Images using Wavelet Methods*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 38, Nr. 5, Sep. 2000, S. 2270–2281.
- [NRL2] ———: *Using Wavelet Methods for Coastline-Extraction from SAR-Images*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 703–705.
- [NZ] A. NIEDERMEIER UND S. ZIMMER: *Implementational Aspects of Prewavelet Sparse Grid Methods*, in C.-H. LAI, P. BJOERSTAD, M. CROSS UND O. WIDLUND, Hrsg.: *Proceedings of Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods, London, 20.–24. Juli 1998*, S. 310–317. <http://www.ddm.org/DD11/index.html>.
- [OGL<sup>+</sup>] J. E. ODEGARD, H. GUO, M. LANG, C. S. BURRUS UND J. R. O. WELLS: *Wavelet based SAR speckle reduction and image compression*, in Proceedings of “Symposium on OE/Aerospace Sensing and Dual Use Photonics — Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery II”, Orlando, Apr. 1995.
- [Og] R. T. OGDEN: *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
- [Øk] B. ØKSENDAL: *Stochastic Differential Equations — An Introduction with Applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 5.. Aufl., 1998.
- [OQ] C. OLIVER UND S. QUEGAN: *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*, Artech House, 1998. ISBN 0-89-006-850-X.
- [Pa] A. PAPOULIS: *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.

- [PVP<sup>+</sup>] A. PIZURICA, N. E. C. VERHOEST, W. PHILIPS, F. P. DE TROCH, I. DUSKUNOVIC UND M. ACHEROY: *An Application of a Wavelet-Based Denoising Method to Temporal Radar Imagery*, in Proceedings of Advanced concepts for Intelligent Vision Systems (ACIVS 2000), Baden-Baden, Aug. 2000.
- [PI] L. PRASAD UND S. S. IYENGAR: *Wavelet analysis with Applications to Image Processing*, CRC Press, Boca Raton, New York, 1997.
- [RPTM] S. RAMONGASSIÉ, L. PHALIPPOU, E. THOUVENOT UND D. MASSONNET: *Preliminary design of the payload for the interferometric cartwheel*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 29–32.
- [Rd] T. RANDEN: *Filter and Filter Bank Design for Image Texture Recognition*, Doktorarbeit Norwegian University of Science and Technology, Nov. 1997.
- [Ri] H. RINNE: *Taschenbuch der Statistik*, Harri Deutsch Verlag, Thun, 2. Aufl., 1997.
- [RG] J. A. RÓDENAS UND R. GARELLO: *Internal Wave Detection and Location in SAR Images using Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 36, Nr. 5, Sep. 1998, S. 1494–1507.
- [RLNH] E. ROMANEESSEN, S. LEHNER, A. NIEDERMEIER UND J. HORSTMANN: *Morphodynamic in the Elbe estuary as seen by ERS Synthetic Aperture Radar*, in Proceedings of Sixth International Conference on Remote Sensing for Marine and Coastal Environments, Charleston, South Carolina, Mai 2000.
- [RNWL] E. ROMANEESSEN, A. NIEDERMEIER, N. WINKEL UND S. LEHNER: *Improved Bottom Topography in the Elbe Estuary using Wavelet and Active Contour Methods on SAR images*, in Proceedings of IGARSS'99, IEEE, Bd. 3, 1999, S. 1674–1676.
- [RMK<sup>+</sup>] A. ROTH, U. MARSCHALK, W. KNÖPFLE, B. RABUS, D. SCALES, A. BENJES UND D. KOSMANN: *SRTM — X-SAR Products and Quality*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 237–240.
- [Rn] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [ScS] S. SCHÄFFLER UND T. F. STURM: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik I*, Prof. Dr. K. Ritter, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München, 1994.
- [Sch] (nach) R. SCHERHAG: *Berliner Wetterkarte*. ISSN 0177-3984, erscheint täglich, mehrere Termine 1996 und 1997. Amtsblatt des Instituts für Meteorologie, FU Berlin.
- [SLW] M. SCHWÄBISCH, S. LEHNER UND N. WINKEL: *Coastline Extraction Using ERS SAR Interferometry*, in Proceedings of 3<sup>rd</sup> ERS Symposium on 'Space at the service of our Environment', Florenz, Italien, März 1997.

- [Srtm] *Shuttle Radar Topography Mission (X-SAR/SRTM)*. CD-ROM image of DLR-SRTM Homepage, 2000.
- [SBL<sup>+</sup>] R. SIEGMUND, M. BAO, S. LEHNER, A. NIEDERMEIER UND R. MAYERLE: *Surface Currents Imaged with Hybrid Along and Cross Track Interferometry*, in to appear in Proceedings of IGARSS'01 (Sydney, July 9<sup>th</sup>–14<sup>th</sup> 2001), IEEE, 3 S., 2001.
- [Som] [http://www.brockhaus.bifab.de/werkstatt/10-98/bit\\_sommerzeit.html](http://www.brockhaus.bifab.de/werkstatt/10-98/bit_sommerzeit.html).
- [Sref] *Spaceref*. <http://www.spaceref.com/>.
- [SBG<sup>+</sup>] J.-L. SUCHAIL, C. BUCK, J. GUIJARRO, A. SCHÖNENBERG UND R. TORRES: *The ENVISAT ASAR instrument*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 33–36.
- [Th] C. THÖNE: *SAR Interferometrie*. Handout zum Vortrag, Kurs 3 der Ferienakademie der TU-München, Sarntal, Südtirol, Sep. 2000.
- [TLB] R. TOUZI, A. LOPES UND P. BOUSQUET: *A Statistical and Geometrical Edge Detector for SAR Images*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Bd. 26, Nr. 6, Nov. 1988, S. 764–773.
- [TBW] B. TRIEBFÜRST, K. BRAUN UND I. WERB: *Waveletbasierte Bildverarbeitung und Kompression als Tools bei der Ableitung von Karten städtischer Bebauungsstrukturen aus Landsat-TM-Aufnahmen*, ZPF - Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung, Bd. 3/98, Mai 1998, S. 79–88.
- [VB] P. VASS UND B. BALTRICK, Hrsg.: *ESA ERS-1 Product Specification*, ESA Publications Division, Noordwijk, 1992.
- [Vr] A. VRIELING: *Satellite Remote Sensing for Monitoring Coastline Dynamics of the Canadian Beaufort Sea Coast*, Diplomarbeit Geo-information Science, Wageningen University, Nov. 2000.
- [WD] M. WALESSA UND M. DATCU: *Texture reconstruction in noisy images*, 1999.
- [Wei] E. WEISENSTEIN: *Mathworld — Internet mathematics encyclopedia*. <http://mathworld.wolfram.com/>.
- [Wer] M. WERNER: *Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) — Mission Overview*, in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Munich, Germany, 23<sup>rd</sup>–25<sup>th</sup> May 2000, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, Mai 2000, S. 209–212.
- [WeS] P. WESSEL UND W. H. F. SMITH: *Generic Mapping Tools (GMT)*. hosted by NKW digital cartography, [http://www.aquarius.geomar.de/omc/about\\_gmt.html](http://www.aquarius.geomar.de/omc/about_gmt.html).
- [WS] D. J. WILLIAMS UND M. SHAH: *A fast algorithm for active contours and curvature estimation*, CVGIP: Image Understanding, Bd. 55, Nr. 1, Jan. 1992, S. 14–26.

- [Wi] R. S. WINOKULAR: *SAR Symposium Keynote Address*, in Technical Digest, Bd. 21, Nr. 1, John Hopkins University Applied Physics Laboratory, Laurel, Jan. –März 2000, S. 5–11.
- [Wol] U. WOLFF: *Analyse von Radarsignaturen der Meeresoberfläche mittels auf Wavelets basierender Kantenerkennung und Regularitätsbestimmung*, Diplomarbeit Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg, Juli 2000.
- [Woo] P. M. WOODWARD: *Probability and information theory, with applications to radar*, Pergamon science series — Electronic and waves, Pergamon Press Ltd, London, 1953.
- [Ww] G. VAN DE WOUWER: *Wavelets for Multiscale Texture Analysis*, Doktorarbeit Departement Naturkunde, Universiteit Antwerpen, 1998.
- [Xsar] *Projekt X-SAR — SIR-C/X-SAR, ein Raumfahrtexperiment zur Erdbeobachtung*, Oberpfaffenhofen, Aug. 1994.

## Anhang G

# Personenverzeichnis

**H**IER sind einige der Wissenschaftler aufgeführt, zu deren Ehren Formeln, Sätze, Definitionen oder Algorithmen benannt wurden, die in dieser Arbeit erwähnt werden. Zum Teil sind die Benennungen auch Quellenangaben für die erstmalige Formulierung oder den erstmaligen Beweis eines Satzes. Die jeweiligen Seitenangaben der Verwendung sind dem Index (Anhang I) zu entnehmen. Näheres zu den Lebensdaten der Personen kann unter [Br, Bio, Bio2] nachgeschlagen werden.

ABEL, Niels Henrik	5.8.1802– 6.4.1829
BOREL, Félix Édouard Justin Émile	7.1.1871– 3.2.1956
BROWN, Robert	21.12.1773– 10.6.1858
CAUCHY, Augustin Louis	21.8.1789– 23.5.1857
DIRAC, Paul Adrien Maurice	8.8.1902–20.10.1984
EUKLID von Alexandria	≈ 325–≈ 265 v.C.
EULER, Leonhard	15.4.1707– 18.9.1783
FELLER, William	7.7.1906– 14.1.1970
FOURIER, Jean Baptiste Joseph	21.3.1768– 16.5.1830
FROST, Victor S.	6.3.1954–
GAUSS, Carl Friedrich	30.4.1777– 23.2.1855
HAAR, Alfréd	11.10.1885– 16.3.1933
HEAVYSIDE, Oliver	18.5.1850– 3.2.1925
HEISENBERG, Werner	5.12.1901– 1.2.1976
HILBERT, David	23.1.1862– 14.2.1943
LEBESGUE, Henri	28.6.1875– 26.7.1941
LIPSCHITZ, Rudolf Otto Sigismund	14.5.1832– 7.10.1903
MASCHERONI, Lorenzo	13.5.1750– 14.7.1800
PLANCHEREL, Michael	1885– 1967
POISSON, Siméon Denis	21.6.1781– 25.4.1840
PYTHAGORAS	† ≈ 496 v. Chr.
RAYLEIGH, John William Bürgerl.: J. W. STRUTT, Lord Rayleigh	12.11.1842– 30.6.1919
RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard	17.9.1826– 20.7.1866
RIESZ, Frigyes	22.1.1880– 28.2.1956
SCHWARZ, Hermann Amandus	25.1.1843–30.11.1921
TAYLOR, Brook	18.8.1685–29.12.1731
TOUZI, Ridha	1959–

## Anhang H

# Softwareverzeichnis

IM folgenden sind Programme aufgeführt, die für die Erstellung dieser Arbeit verwendet wurden. Bei kommerziellen Programmen sind die Lizenznehmer in Klammern angegeben.

Bash (div)	Programmierung
Bc 1.04	Kontrolle von Ergebnissen
Bib $\TeX$ 0.99c	Literaturverzeichnis erstellen
Dvips 5.86	Formatkonvertierung zum Ausdruck/Preview
G++ 2.91.66	Erstellung von Abbildungen (Funktionenplots)
Ghostscript 5.10	Ausdruck und Preview
Ghostview 1.5	Preview
Gimp 1.1.24	Titelbild (Zusammenstellen und Zeichnen)
Gnuplot 3.7pl0.1	Kontrolle von Ergebnissen
IDL 5.0	Programmierung (Lizenzen bei DLR und Lehrstuhl ZENGER, TU-München)
Joe 2.8	Texte und Programme editieren
KGhostview 0.7	Preview
$\LaTeX$ 2 $\epsilon$	Textsatz ( $\TeX$ 3.14159)
Less 340	Texte lesen
Makeindex 2.13	Index erstellen
Netscape (div)	Informationen (Literatur, Bilder) aus dem World Wide Web beschaffen
Octave 2.0.14	Kontrolle von Ergebnissen
Povray 3.01	Erstellung von Abbildungen (Funktionenplots)
Xdvi 22.05d-k	Preview
Xephem 3.2.2	Titelbild (Mond, Lage der Sterne)
Xfig 3.2pl2	Erstellung von Abbildungen (Diagramme)
Xv 3.10a	Bildbearbeitung, Formatkonvertierung
Xwave2	dyadische Wavelet-Transformation

# Anhang I

## Stichwortverzeichnis (Index)

**D**IE Seitenangaben in **Fett-**druck zeigen Definitionen an, Seitenangaben in *Schrägdruck* entsprechen Zahlwerten bzw. speziellen Beispielen. Griechische Buchstaben sind gemäß ihres Namens im Alphabeth einsortiert (z.B. 'α' unter 'Alpha').

### Zeichen

- ⊗ 95
- \* 14, 14, 15, 18, 20, 35, 38, 41, 86, 93, 95, 139, 194
- \*<sub>z</sub> 23, 82, 83
- ⊠ 95
- ⊞ 94, 94, 95
- ⊟ 94, 94
- ⊠ 94, 94, 95
- ↔ 125
- ↔↔ 125
- ~ 13, 14, 37, 38, 194
- ^ 15–17, 17, 18, 35, 36, 41–43, 86–89, 135–144

### Ziffern

0.5772156... 26

### A

- ABEL, NIELS HENRIK 95, 182
- AeroSensing 53, 53, 98, 99, 117, 131, 132, 166
- Agenzia Spaziale Italiana 50
- AIAZZI, BRUNO 112
- Aktive Konturierung 10, 54, 55, 60, 60, 66, 68, 105, 110, 111, 120, 127

- Algorithmus 8–11, 22, 23, 36, 44, 54, 55, 57–59, 61–63, 66–72, 79, 82, 88, 91, 92, 94, 96, 100, 101, 105, 107, 113, 116, 120, 125–127, 129, 131, 134, 149, 152, 155–158, 160, 182, 192, 193, 195

ALMAZ-1 50

ALMAZ-1B 50

ALOS 48, 50

Ambiguity Höhe 115, 115, 116, 117

AMI 44, 44

Amplitudendichte 42, 43, 55, 63, 71, 73–77, 82, 85, 90, 94, 95, 121, 142

ASAR 47, 47

ASI 50, 51

Ästuar 11, 55, 62, 69, 73, 97, 103, 104, 106, 132, 167–171, 193

Azimuth 29, 30–32, 34–36, 40, 45, 46, 118, 119, 133

### B

B 13, 13, 195

$b_A$  29, 29, 32, 46, 47, 52

$B_{\perp}$  114, 117

$B_{\parallel}$  118

Baseline 114, 117, 118

BAW 11, 102, 104, 106, 129, 130, 134, 157, 166–168, 192

Bildmaß 13, 13

Blocktracing 55, 58, 58, 59, 60, 64, 65, 68, 69, 100, 101, 105, 120, 124, 127, 152, 155–158

BOREL, FÉLIX ÉDOUARD JUSTIN ÉMILE 13, 182, 195

BOUSQUET, PIERRE 107



BROWN, ROBERT 90, 145, **182**  
 Bundesanstalt für Wasserbau **192**

**C**

$\mathcal{C}^1$  13  
 $\mathcal{C}^2$  149  
 $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  20  
 $\mathcal{C}^\infty$  145  
 $C_{\text{FM}}$  34, **34**, 35, 46, *46*, 144  
 $c^{[j]}$  22, **22**, 23  
 $\check{c}^{[j]}$  24, **24**, 82, 83  
 $\mathcal{C}^k$  146  
 $\mathcal{C}^l([-1, 1])$  20  
 $\mathcal{C}^n(x_0)$  24  
 $\mathcal{C}^n(\mathbb{M})$  195  
 $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  25  
 $c_\psi$  **18**, 19, 21  
 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  18  
 Cartwheel 48, 50  
 Cassini 48  
 CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS 137, **182**  
 CCRS 11, **125**, 167, **192**  
 charakteristische Funktion 15, **15**,  
 39, 41–43, 87, 135, 136, 138–  
 140, 142, 145  
 Corr 121  
 COSMOS 1870 50  
 Cov 38, 121  
 Cuxhaven 69, 130  
 Pegel 61, 70, 129, 168

**D**

$\mathcal{D}$  17, **17**, 19, 21–24, 41, 82, 83, 95,  
 135, 139, 145–148, 150  
 $d_A$  29, **29**, 30, *46*  
 $d^{[j]}$  22, **22**, 23  
 $\check{d}^{[j]}$  24, **24**, 83  
 $D_R$  29, *46*, *47*, *52*  
 $d_R$  29, **29**, 30, 31, 46, *46*, *52*, *117*  
 DARA 50  
 DAVENPORT, IAN J. 109  
 DEM **103**, 104  
 Deutsche Agentur für Raumfahrtan-  
 gelegenheiten 50  
 DFD **192**  
 DFG 10, **192**  
 Dilatation **17**, 21  
 DIRAC, PAUL ADRIEN MAURICE  
 25, 35, 72, 76, 79, 89, 93,

122, 144, 145, **182**  
 direkter Filter 82, 83, **83**, 151  
 Dispersionsrelation **118**, 119  
 DLR 10, 11, 48, **48**, 50, 51, 53, 54,  
 96–98, 118, 166, 167, 171,  
 183, 192, **192**, 193

**E**

$E$  15, **15**, 16, 37–39, 41, 43, 73, 86,  
 90, 91, 94, 122, 136–143  
 E-SAR 53, 117  
 ECE **192**  
 Echosignal **33**, 34–36  
 Elbe 11, 55, 62, 68, 69, 73, 97, 102,  
 104, 106, 130–132, 157, 167–  
 171  
 ENVISAT 47, **47**, 48–50, 192  
 ENVOG 10, 192, **192**, 193  
 Ergodizität **16**, 39, 73  
 ERS-1 30, 36, 44, **44**, 45–48, 50, 51,  
 55, 66, 73, 86, 96, 98, 99,  
 104, 109, 116–118, 152, 157,  
 167–171, 192  
 ERS-2 30, 44, **44**, 45–48, 50, 51, 55,  
 62, 66, 73, 81, 86, 96–99,  
 104, 116–118, 122, 129, 152,  
 154, 157, 167–171, 192  
 Erwartungswert 15, **15**, 37, 39, 41,  
 42, 73, 86–91, 135–139, 141,  
 143  
 ESA **43**, 44, 48, 50, **192**  
 EUKLID 65, 149, **182**  
 EULER, LEONHARD 26, **182**  
 Gammafunktion **26**  
 Konstante 16, 26, **26**, 27, 42,  
 86, 90, 138  
 EULER-MASCHERONI-Konstante  
 16, 26, **26**, 27, 42, 86, 90,  
 138  
 European Space Agency **43**, **192**  
 Exponentialverteilung **16**, 39, 74,  
 136, 139

**F**

$\mathcal{F}$  17, 18, 135, 139, 150, 195  
 $f$  13, **13**, 14–16, 37–43, 74, 86–89,  
 108, 135, 139, 142  
 $\hat{f}$  15, **15**, 16, 41–43, 86–89, 135–141,  
 143

- Faltung 14, **14**, 23, 31, 35, 40, 82, 84–86, 89, 93, 95, 120, 149, 194
- FDC 45, 86
- FELLER, WILLIAM 16, **182**
- Filter 8, 11, 23, 35, 36, 40, 55, 63, 65, 71, 72, 76, 82, 83, 85–89, 91, 93, 94, 108, 109, 112, 113, 120–123, 126–128, 149, 151, 160, 162  
 direkt 82, 83, **83**, 151  
 Wavelet 55, 86, 89, 94
- FISHER 16, 42
- FISHER-TIPPETT-Verteilung **16**, 42, 138
- FOURIER, JEAN BAPTISTE JOSEPH 17, 18, 36, 40, 119, 143, **182**
- FOURIER-Transformation 17, **17**, 18–20, 23, 35, 118, 143, 144, 149, 167, 195
- Frame 21, **21**, 55, 62, 98, 133, 168–171
- Friedrichskoog* 167
- FROST, VICTOR S. 112, **182**
- Funktion  
 charakteristische 15, **15**, 39, 41–43, 87, 135, 136, 138–140, 142, 145  
 Gamma~ 16, 26, **26**, 27, 41–43, 86, 87, 90, 138, 141–143  
 HEAVYSIDE- **15**, 25, 38–41, 43, 72, 73  
 Zeta~ 27, 28, 138
- Fuzzy 11, 111, **111**, 120–125
- G**  
 $G^{[j]}$  83, **83**, 85, 85, 87  
 $G^{[j],\kappa}$  **85**, 85, 86–89, 151, 151
- GAGNON, LANGIS 112
- $\Gamma$  16, 26, **26**, 27, 41–43, 86, 87, 90, 138, 141–143
- $\gamma_E$  16, 26, **26**, 27, 42, 86, 90, 138
- Gammafunktion 16, 26, **26**, 27, 41–43, 86, 87, 90, 138, 141–143
- GARELLO, RENÉ 113
- GAUSS, CARL FRIEDRICH 16, 61, **93**, **182**  
 Verteilung 16, **16**, 18, 38, 39, 43, 73, 74, 88, 90, 135
- GEC 44, 45, 55, 62, 73, 86, 97, 157
- GEWEX 126, **193**
- GK  $A^2M$  1, 10, 11, 192, **193**
- GKSS 106, 193, **193**
- Glättungsfunktion 20, **20**, 23, 83
- GPS **53**, 97, 98, 106, 126
- GTC 45, 86, 97
- H**  
 $H$  **15**, 25, 38–41, 43, 72, 73  
 $h_{2\pi}$  115, **115**, 116, 117  
 $h_a$  **33**, 34–36  
 $\Delta h$  117  
 $H^{[j]}$  **82**, 83–85, 85  
 $h_S$  29, **29**, 30, 46, 46, 47, 47, 52, 52, 115, 117
- HAAR, ALFRÉD 19, 65, 94, 109, **182**
- HAAR-Waveket 19, 65, 94, 109
- HEAVYSIDE, OLIVER 25
- HEAVYSIDE, OLIVER 15, 72, 79, 91, 93, 145, **182**  
 Funktion **15**, 25, 38–41, 43, 72, 73
- HEISENBERG, WERNER 18, **182**
- Helgoland* 119
- HERVET, E. 112
- HGF 192, **193**
- HILBERT, DAVID 21, 95, **182**
- I**  
 Image-Mode **45**, 47  
 Imagette 47, **47**, 152  
 INS **53**  
 InSAR **114**, 115, 116, 120, 131, 132  
 Intensitätsdichte 42, **42**, 43, 55, 142  
 Interferometrie 44, 48, 51, 53, 114, 116–118
- IRS-1C 114
- ITÔ, KIYOSHI 89
- Italian Space Agency 50
- J**  
 JERS-1 50  
 JURKEVICH, IGOR 112
- K**  
 $\mathcal{K}$  17, 195
- Kantenauswahl  
 lokale 55, 59, 60, 65, 102, 120, 125
- Kantenstärke 60, 73, 76–80, 89, 91, 92, 107, 108, 110, 121–123

$\kappa$  73, 76–80, 89, 91, 92, 108, 121, 122  
 Kohärenz 115, 117  
 Kohärenz **31**  
 KUAN, DARWIN T. 112

**L**

$L^1$  18, 20, 72, 149  
 $L^1(M)$  195  
 $L^1(\Omega, P)$  15  
 $L^1(\mathbb{R})$  15, 18, 72, 91, 149  
 $L^1(\mathbb{R}^n)$  14, 17, 18  
 $L^2$  18, 19, 90  
 $\ell^2$  120  
 $\ell^2(\Gamma)$  21  
 $L^2(M)$  195  
 $\ell^2(M)$  195  
 $L^2(\mathbb{M})$  95  
 $L^2(\Omega, P)$  15  
 $L^2(\mathbb{R})$  18–22, 72  
 $L^2(\mathbb{R}^2)$  93  
 $L^2(\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R})$  19  
 $L^2(\mathbb{R}^d)$  57  
 $L^2(\mathbb{R}^n)$  18, 19, 23  
 $\ell^2(\mathbb{Z})$  22  
 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$  93  
 $l_A$  29, **29**, 32, 46, 47, 52  
 $L^p(\Omega)$  13  
 $\lambda_0$  **31**, 32, 33, 46, 47, 52, 115, 117  
 LEBESGUE, HENRI **182**, 195  
 LEBESQUE, HENRI 13  
 LEE, JONG-SEN 112  
 LightSAR 48, 50  
 LINDBERG 16  
 $\text{Lip}_\alpha$  24, **24**, 25  
 LIPSCHITZ, RUDOLF OTTO SIGISMUND 24, 25, 57, 58, 60, 62–67, 72, 78–82, 88–93, 125, 129, 155, 157, 159, 160, **182**  
   Regularität **24**, 25, 57, 58, 60, 62–67, 72, 78–82, 88–93, 125, 129, 155, 157, 160  
 Look 31, 40, **40**, 41–43, 45, 49, 62, 73–76, 81, 94, 108–110, 113, 132, 133, 139, 140, 142, 161  
 LOPES, ARMAND 107

**M**

$\mathcal{M}$  17, **17**, 23, 135, 150, 195  
 Maß **12**, 13

Maßraum 13, **13**  
 Mackenzie 11, 113, 117, 125–128  
 Magellan 48  
 MAGS **193**  
 MALLAT, STÉPHANE G. 25, 119, 155  
 MASCHERONI, LORENZO 26, **182**  
 MASON, DAVID C. 109, 111, 113, 121  
 Maximum Likelihood 92, 112  
 MAXWAVE 152, 193, **193**  
 MC **73**  
 Medemgrund 61, 68, 70, 129, 132, 133, 167  
 Medemsand 68, 97, 104, 167  
 messbar 13, **13**, 14  
 Messraum 12, **12**, 13  
 MESZ 168  
 MEZ 168  
 MF 11, 166, 167, **167**, 168–171, **193**  
 MIR 118, 133  
 Modulation **17**  
 Momente  
   verschwindend 24, **24**, 25  
 MOMS 118, 120, 133, 134  
 Monte-Carlo 73, **73**, 82, 93  
 Multiskalenanalyse 21, **22**, 23  
 Musterlösung 62, **62**, 63–66, 73, 82, 93, 121–126, 167

**N**

$N_P$  31, **31**, 46  
 $n_R$  **34**, 46  
 NASA **43**, 48, 50, 51  
 NASDA 50  
 National Aeronautics & Space Administration **44**  
 National Image and Mapping Agency 51  
 NIMA 51  
 NN **129**, 130, 131, 168  
 Normal-Null **129**, 130, 131, 168  
 Normalverteilung 16, **16**, 18, 38, 39, 43, 73, 74, 88, 90, 135  
 NTUA 11, 192, **193**  
 $\nu_0$  31, **31**, 32, 33, 46, 47, 52  
 $\nu_B$  31, **31**, 32, 34–36, 46, 46, 47, 47  
 $\nu_P$  31, **31**, 33, 46, 46

**O**

- ODEGARD, J. E. 112  
 Orbit 45, 47, 48, 55, 62, 81, 96, 98,  
 132, 167–171  
*Osteriff* 130  
 Pegel 129, 168  
*Otterndorf* 130  
 Pegel 103, 129, 130, 168

**P**

- Pegel 11, 61, 103, 104, 130, 167–171  
*Cuxhaven* 61, 70, 129, 168  
*Osteriff* 129, 168  
*Otterndorf* 103, 129, 130, 168  
 Pfad **16**, 39, 40  
 $\Phi$  37, 38  
 PLANCHEREL, MICHAEL 18, **182**  
 PLANCHEREL-Transformation 18  
 POISSON, SIMÉON DENIS 89, **182**  
 PRI 45, 86, 109  
 Priel 59, 63, 64, 98, 100, 107, 132  
 PRIRODA 118  
 PYTHAGORAS 34, **182**

**R**

- $r_0$  34, **34**, 35, 36, 144  
 $\Delta R$  34, **34**, 35  
 RÓDENAS, JOSEPH A. 113  
 Radar 8, 9, 29, **29**, 31–33, 37, 44–48,  
 50–53, 68, 96, 97, 113, 119,  
 132, 143, 144  
 RADARSAT-1 11, 50, 126–128  
 RADARSAT-2 48, 50  
 Range 29, **29**, 30–32, 34–36, 40, 45–  
 47, 52, 117, 118, 133  
 Rauschen 8, 9, 25, 26, 29, 37, 39–  
 42, 55, 63, 64, 66, 68, 71–  
 73, 77, 79–82, 85, 87, 89–93,  
 101, 107, 110, 112, 113, 119,  
 121–123, 145, 160–162, 168  
 RAW **34**, 45  
 RAYLEIGH, JOHN WILLIAM 16, 39,  
 74, 136, **182**  
 Verteilung **16**, 39, 74, 136  
 Regularität  
 LIPSCHITZ~ **24**, 25, 57, 58,  
 60, 62–67, 72, 78–82, 88–93,  
 125, 129, 155, 157, 160  
 RIEMANN, GEORG FRIEDRICH  
 BERNHARD 27, **182**

Zetafunktion **27**RIESZ, FRIGYES **182**Basis 21, **21**, 22**S**

- $S$  37, **37**, 38  
 $S$  17, **17**, 18, 82–84, 195  
 SAR 1, 3, 8, 9, 11, 26, 29, **29**, 30,  
 32, 33, 35, 36, 39, 40, 43–45,  
 48, 50, 51, 53–55, 58, 61–63,  
 66–68, 70, 71, 73, 81, 82, 86,  
 89, 91, 93, 94, 96–100, 102–  
 105, 107, 109, 110, 112–120,  
 122, 123, 129, 130, 132, 133,  
 139, 152, 154, 157, 167–171,  
 192  
 SAR-Bild  
 Ellipsoid Geocoded 44, 45, 55,  
 62, 73, 86, 97, 157  
 Fast Image 45, 86  
 Image-Mode **45**, 47  
 Imagette 47, **47**, 152  
 Precision Image 45, 86, 109  
 Raw Image **34**, 45  
 Single Look Complex 45  
 Terrain Geocoded 45, 86, 97  
 Wave-Mode 47, **47**  
 SCHULZ-STELLENFLETH, JOHANNES  
 119  
 SCHWARZ, HERMANN AMANDUS  
**182**  
 Schwellwertbildung 55, 58, 60, 62,  
 63, 68, 69, 71, 72, 88, 100,  
 101, 110, 112, 113, 123, 124  
 SCS **33**, **40**  
 SEASAT 48, 50, 113  
 $\sigma$ -Algebra **12**, 13, 14, 195  
 sign 87, **87**, 148  
 sinc 15, **15**, 19, 20, 23, 31, 32, 35,  
 36, 43, 72, 149, 150  
 SIR-A 49, 51  
 SIR-B 49, 51  
 SIR-C 50, 96  
 Skala 19–21, 26, 55, 57–60, 62–65,  
 67–69, 72–78, 82, 86–89, 91,  
 92, 109, 112, 121–123, 145,  
 146, 155, 157, 159  
 Skalierungsfunktion **20**, 25, 55, 72  
 SLC 45

- Snake 10, 54, 55, 60, **60**, 66, 68, 105,  
110, 111, 120, 127
- Sonar 105, 106, 120
- Space Shuttle 48, 50–52, 114, 116,  
132, 133
- Speckle 8, 9, 29, 37, 39, 40, **40**, 55,  
64, 71, 87–89, 91, 93, 94,  
107, 109, 110, 112–114, 119,  
121, 122, 126–128, 160, 161,  
168
- Spiegelung **17**, 195
- Spline 23, 36, 55, 72, 93, 146, 149  
Wavelet 19, 20, 23–26, 55, 82,  
83, 149, 167
- SRL-1 50, 51
- SRL-2 51
- SRTM 11, 51, 52, 116, 117, 132, 167
- stochastisch unabhängig **14**, 15, 16
- stochastischer Prozess 9, 16, **16**, 39,  
73, 89, 90, 145
- surface cross section **40**
- Sylt 119
- Synthetisches Apertur Radar 8, 9,  
29, **29**, 47, 48
- T**
- $\mathcal{T}$  17, **17**, 19, 21–24, 135, 146–148,  
150, 195
- $t_0$  34, **34**, 35, 144
- $t_I$  30, **30**, 31, 46
- TAYLOR, BROOK 34, 146, 148, **182**
- $\theta_0$  29, **29**, 30–33, 46, 46, 47, 47, 52,  
52, 115, 117
- $\Delta\theta$  46
- TIDE 10, 192, 193
- TIPPETT 16, 42
- Topographie 1, 3, 8, 9, 52, 54, 61, 62,  
64, 66, 70, 96, 102–107, 113,  
114, 117, 119, 120, 129–134,  
167
- TOUZI, RIDHA 93, 94, 107–112, **182**
- Transformation  
FOURIER~ 17, **17**, 18–20, 23,  
35, 118, 143, 144, 149, 167,  
195  
PLANCHEREL~ 18  
Wavelet- 9, 17–19, 21, 25, 55,  
57–60, 69, 71, 72, 76–78, 90,  
91, 95, 101, 102, 109, 121,  
123, 145, 146, 155, 195
- diskrete 21
- dyadische 20, 55, 75, 76, 82,  
83, 183
- kontinuierliche 18, **19**, 20, 89
- Translation **17**, 23, 55, 89, 195
- translationsinvariant 23, 24, 90
- TUM 1, 3, 10, 193, **193**
- U**
- unabhängig  
stochastisch **14**, 15, 16
- UTC 62, 133, 168, **168**, 169–171
- V**
- $\mathcal{V}$  94, 95
- $\vec{v}_G$  29–31, 46, 46
- $\vec{v}_S$  29, 30, 34–36, 46, 46, 144
- $\tilde{\mathcal{V}}$  95
- Var 15, **15**, 16, 18, 38, 41, 43, 86, 87,  
90, 121, 122, 136–138, 140,  
141, 143
- Varianz 15, **15**, 38, 39, 41, 42, 73,  
86, 87, 90, 91, 135–139, 141,  
143
- Verfahren 8, 58, 91, 93, 96, 102, 105,  
107, 111–115, 118–120, 122–  
129, 131, 157  
Wasserstandslinie 1, 3, 96, 102,  
104, 105, 107, 109, 119
- verschwindende Momente 24, **24**, 25
- Verteilung 13, **13**, 15, 16, **16**, 26, 37,  
39–43, 64, 67, 74–77, 79, 82,  
85, 86, 88–93, 135, 136, 138–  
140, 142, 143, 160, 162, 194
- exponential **16**, 38, 39, 74, 136,  
139
- FISHER-TIPPETT **16**, 42, 138
- GAUSS 16, **16**, 18, 38, 39, 43,  
73, 74, 88, 90, 135
- normal 16, **16**, 18, 38, 39, 43,  
73, 74, 88, 90, 135
- RAYLEIGH **16**, 39, 74, 136
- VRIELING, ANTON 113, 125, 126
- W**
- $\mathcal{W}$  19, 20, 23–25, 57, 72, 95, 121,  
145–149, 195
- Wahrscheinlichkeitsdichte 13, **13**,  
15, 37, 38, 41, 43, 67, 74,  
76, 77, 88, 108, 142

- Summenformel **15**, 41, 139  
 Transformationsformel **13**, 38,  
 39, 41, 42  
 Wahrscheinlichkeitsraum 13, **13**,  
 15, 16  
 Wasserstand 61, 68–70, 81, 102–104,  
 117, 129, 131, 167–171  
 Entwicklung 102  
 Wasserstandslinie 8, 54, 55, 59–62,  
 64–66, 70, 82, 96, 97, 99,  
 100, 103, 104, 107, 109, 110,  
 113, 117, 125, 129–131, 134  
 Extraktion 8–10, 54, 134  
 Verfahren 1, 3, 96, 102, 104,  
 105, 107, 109, 119  
 Wave-Mode 47, **47**  
 Wavelet 1, 3, 8, 9, 11, 12, 17, **18**,  
 19–25, 54, 55, 58, 59, 64, 65,  
 67, 71, 72, 76, 85, 87–89, 94,  
 113, 118–125, 127, 129, 131,  
 134, 146, 152, 160, 162  
 Filter 55, 86, 89, 94  
 HAAR~ 19, 65, 94, 109  
 Koeffizienten 55, 58, 63, 82, 88–  
 92, 101, 122, 159  
 Spline- 19, 20, 23–26, 55, 82,  
 83, 149, 167  
 Transformation 9, 17–19, 21,  
 25, 55, 57–60, 69, 71, 72, 76–  
 78, 90, 91, 95, 101, 102, 109,  
 121, 123, 145, 146, 155, 195  
 diskrete 21  
 dyadische 20, 55, 75, 76, 82,  
 83, 183  
 kontinuierliche 18, **19**, 20,  
 26, 89  
 zulässig **18**, 21  
 WCRP 193, **193**  
 Wellengruppe 152  
 Weser 69, 132  
 WOLFF, ULRIKE 119  
 WSA 168
- X**
- X-SAR 50, 96
- Z**
- zentraler Grenzwertsatz 38, 88  
 $\zeta$  27, **27**, 28, 138  
 Zetafunktion 27, **27**, 28, 138

# Anhang J




## Tabellenverzeichnis

1.1	Einige bekannte Verteilungen. . . . .	16
2.1	Überblick über wichtige Verteilungen bei SAR-Bildern. . . . .	43
2.2	Übersicht der ERS-1/2 Bildprodukte. . . . .	45
2.3	Übersicht Pixeldaten der ERS-1/2 Bildprodukte. . . . .	45
2.4	Abbildungsgeometrie und Frequenzen der ERS-1/2 Satelliten. . . . .	46
2.5	Parameter von ENVISAT. . . . .	47
2.6	Abbildungsmodes von ENVISAT. . . . .	49
2.7	Einige Satelliten mit SAR-Sensoren. . . . .	50
2.8	Space Shuttle Missionen mit SAR-Sensoren. . . . .	51
2.9	Parameter der SRL-1/2 Mission. . . . .	52
2.10	Parameter der SRTM Mission. . . . .	52
4.1	Numerischer Vergleich des Blocktracing-Ergebnisses mit der Musterlösung. . . . .	65
5.1	LIPSCHITZ-Regularitäten aus verschiedenen Modellierungen. . . . .	93
7.1	Parameter verschiedener SAR-Interferometrie Experimente. . . . .	117
7.2	Verfahrensüberblick mit grober qualitativer Bewertung. . . . .	120
7.3	Korrelationswerte für verschiedene Wavelet-Skalen und Fuzzy-Filtergrößen. . . . .	122
7.4	Blocktracing-Ergebnisse bei Fuzzy-Kantenfindung im Ver- gleich zur Musterlösung. . . . .	124
D.1	Bildquellennachweis. . . . .	166
D.2	Überblick über die ERS-1/2-SAR-Szenen des <i>Elb</i> -Ästuars am MF. . . . .	168


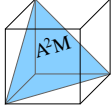






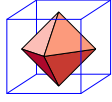
## Anhang K

# Verzeichnis beteiligter Organisationen und Projekte

**W**EITERHIN sollen hier all diejenigen Organisationen und Projekte aufgeführt werden, die durch finanzielle, wissenschaftliche, organisatorische oder datenbezogene Kooperation oder Unterstützung — direkt oder indirekt — ihren Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben.

Kürzel	Titel und Beschreibung	Logo
BAW	Bundesanstalt für Wasserbau, Außenstelle Küste in Hamburg, Zusammenarbeit im Projekt TIDE <a href="http://www.hamburg.baw.de/">http://www.hamburg.baw.de/</a>	
CCRS	Canada Centre for Remote Sensing in Ottawa, Vergleich von Algorithmen <a href="http://www.ccrs.nrcan.gc.ca/">http://www.ccrs.nrcan.gc.ca/</a>	
DFD	Deutsches Fernerkundungs-Datenzentrum Institut am DLR, Projekte wie TIDE und ENVOC waren dort bis zum 31.12.1999 beheimatet, archiviert ERS-1/2-SAR-Daten. <a href="http://www.dfd.dlr.de/">http://www.dfd.dlr.de/</a>	
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft Finanziert das GK $A^2M$ <a href="http://www.dfg.de/">http://www.dfg.de/</a>	
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. Forschungszentrum Oberpfaffenhofen <a href="http://www.dlr.de/">http://www.dlr.de/</a>	
ECE	Department of Electrical and Computer Engineering (Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών), Institut an der NTUA <a href="http://www.ece.ntua.gr/">http://www.ece.ntua.gr/</a>	
ENVOC	HGF-Projekt 'ENVISAT Oceanography — A new perspective of the Ocean' <a href="http://www.dfd.dlr.de/projects/ENVOC/">http://www.dfd.dlr.de/projects/ENVOC/</a>	
ESA	European Space Agency Betreiber der ERS-1/2-Satelliten <a href="http://www.esa.int/">http://www.esa.int/</a>	



Kürzel	Titel und Beschreibung	Logo
GEWEX	Global Energy and Water Cycle Experiment Iniziert 1988 vom WCRP <a href="http://www.gewex.com/">http://www.gewex.com/</a>	
GK A <sup>2</sup> M	Graduiertenkolleg Angewandte Algorithmen Mathematik, Technische Universität München <a href="http://www.ma.tum.de/gkaam/">http://www.ma.tum.de/gkaam/</a>	
GKSS	GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH Zusammenarbeit im Projekt MAXWAVE <a href="http://www.gkss.de/">http://www.gkss.de/</a>	
HGF	Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft Deutscher Forschungszentren, <a href="http://www.helmholtz.com/">http://www.helmholtz.com/</a>	
MAGS	Mackenzie Gewex Study <a href="http://www.msc-smc.ec.gc.ca/GEWEX/MAGS.html">http://www.msc-smc.ec.gc.ca/GEWEX/MAGS.html</a>	
MAXWAVE	Rouge waves — Forecast and impact on offshore structures.EU-Projekt, Partner u.a. GKSS, DLR und Metereologische Institute in Norwegen, Großbritannien und Frankreich, KU Leuven und TU Berlin. <a href="http://w3g.gkss.de/projects/maxwave/">http://w3g.gkss.de/projects/maxwave/</a>	
MF	Institut für Methodik der Fernerkundung Institut am DLR, gegründet 1.1.2000, Projekte wie TIDE und ENVOC sind dort beheimatet.	
NTUA	National Technical University of Athens (Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο) <a href="http://www.ntua.gr/">http://www.ntua.gr/</a>	
TIDE	Projekt 'Synergie von Fernerkundung und mathe- matischen Tidemodellen zur Optimierung divergie- render Nutzungsansprüche in Ästuaren', 1997–2000 <a href="http://www.dfd.dlr.de/projects/TIDE/">http://www.dfd.dlr.de/projects/TIDE/</a>	
TUM	Technische Universität München <a href="http://www.tum.de/">http://www.tum.de/</a>	
WCRP	World Climate Research Programme gegründet 1980 <a href="http://www.wmo.ch/web/wcrp/wcrp-home.html">http://www.wmo.ch/web/wcrp/wcrp-home.html</a>	
•	Zentrum Mathematik Institut an der TUM <a href="http://www.ma.tum.de/">http://www.ma.tum.de/</a>	

Die Logos in obiger Tabelle stammen von der jeweils angegebenen Ho-  
mepage oder wurden nach dort veröffentlichten Logos nachgezeichnet.

## Anhang L

# Verzeichnis mathematischer Symbole

**A**BSCHLIESSEND hier noch ein Überblick über wichtige mathematische Symbole, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Die meisten sind mit den entsprechenden Seitenangaben auch im Stichwortverzeichnis (Anhang I) aufgeführt, soweit vorhanden mit Verweis auf die genaue Definition.

- \* Faltungsoperator
- $\times$  Kartesisches Produkt von Mengen
- $\otimes$  Tensorprodukt von Funktionen  $(f \otimes g)(a, b) = f(a)g(b)$
- $\sim$  ist stochastisch verteilt wie
- $|\bullet|$  Betrag
- $\|\bullet\|$  Norm
- $\langle \bullet, \bullet \rangle$  Skalarprodukt
- $\int$  Integration
- $\int\#N$  Verweis auf unbestimmtes Integral Nummer  $N$  in der Tabelle von [BS]
- $\int\bullet\#N$  Verweis auf bestimmtes Integral Nummer  $N$  in der Tabelle von [BS]
- $\rightarrow$  Abbildung (zwischen Mengen)
- $\mapsto$  wird abgebildet auf (Element)
- $:=$  Definition oder Substitution
- $\Rightarrow$  Logische Implikation, ist hinreichende Bedingung für
- $\Leftrightarrow$  Logische Äquivalenz
- $\Leftarrow$  ist notwendige Bedingung für
- $\setminus$  Differenz von Mengen
- $\cap$  Durchschnitt von Mengen
- $\cup$  Vereinigung von Mengen
- $\oslash$  Vereinigung disjunkter Mengen
- $\in$  Element von
- $\subseteq$  Teilmenge von

$\subsetneq$	echte Teilmenge von
$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{1}_M$	Charakteristische Funktion der Menge $M$
$\infty$	Unendlich
$[a, b[$	Reelles Intervall $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
$\mathcal{B}$	BOREL- $\sigma$ -Algebra
$\mathbb{C}$	Körper/Menge der komplexen Zahlen
$\complement$	Mengentheoretisches Komplement $M^c = \Omega \setminus M$
$\mathcal{C}^n(\mathbb{M})$	$n$ -fach stetig differenzierbare Funktionen auf $M$
$\mathcal{F}$	FOURIER-Transformationsoperator
$\hat{f}$	FOURIER-Transformierte der Funktion $f$
$i$	Imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$\Im z$	Imaginärteil von $z$
$\mathcal{K}$	Konjugationsoperator
$L^1(M)$	LEBESGUE-integrierbare Funktionen auf $M$
$L^2(M)$	Quadratintegrierbare Funktionen auf $M$
$\ell^2(M)$	Quadratsummierbare Funktionen auf $M$
$\mathcal{M}$	Modulationsoperator
$\overline{M}^\Omega$	Abschluß von $M$ bzgl. $\ \bullet\ _\Omega$
$\langle M \rangle$	von $M$ aufgespannter Untervektorraum
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathcal{O}(N^\alpha)$	Algorithmen von Ordnung $N^\alpha$ , $\frac{\text{Aufwand}}{N^\alpha} = \text{Konst.}$ ( $N \rightarrow \infty$ )
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von $M$
$\prod$	Produktbildung
$\mathbb{R}$	Körper/Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $[0, \infty[$
$\mathbb{R}_+^\times$	Multiplikative Gruppe in den nichtnegativen reellen Zahlen/ Menge $]0, \infty[$
$\Re z$	Realteil von $z$
$\mathcal{S}$	Spiegelungsoperator
$\sum$	Summenbildung
$\mathcal{T}$	Translationsoperator
$\mathcal{W}$	Wavelet-Transformationsoperator
$\mathbb{Z}$	Ring/Menge der ganzen Zahlen $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\bar{z}$	Komplex-Konjugierte von $z$ ( $\Re z - i\Im z$ )