

Physik-Department
der Technischen Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Physik V - Univ.-Prof. Dr. F. Schwabl

Ordnung in zweidimensionalen, dipolaren Ferromagneten

Peter Georg Maier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. P. K. Böni

Prüfer der Dissertation:

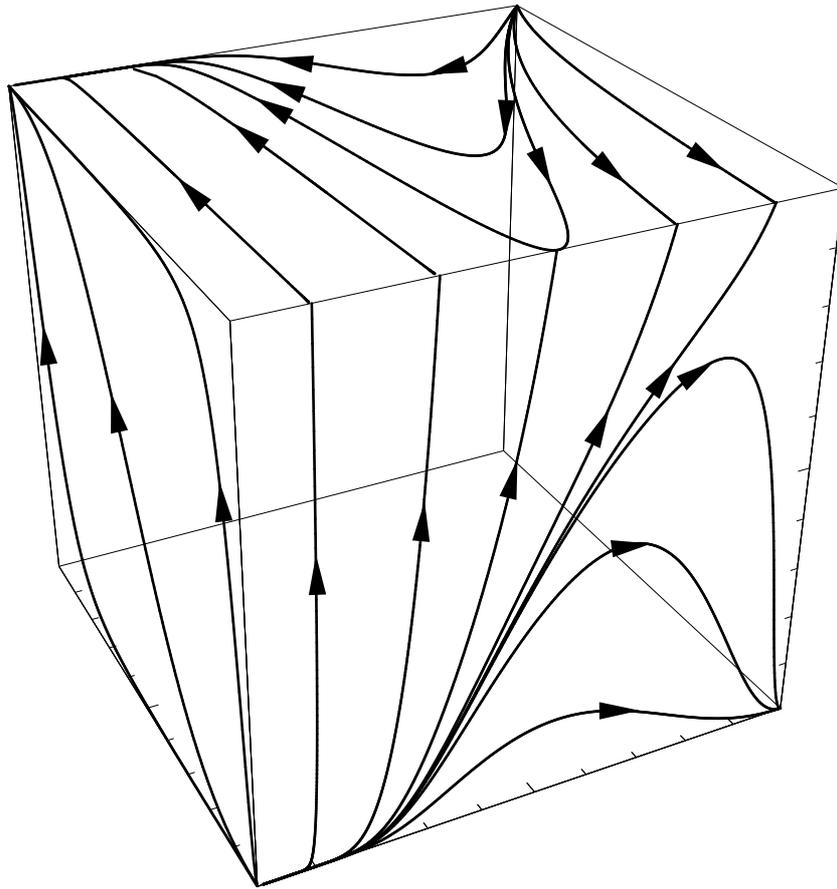
1. Univ.-Prof. Dr. F. Schwabl

2. Univ.-Prof. Dr. M. Kleber

Die Dissertation wurde am 5.12.2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 31.03.2003 angenommen.

Ordnung in zweidimensionalen, dipolaren Ferromagneten

Peter Georg Maier



Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. F. Schwabl für die interessante Themenstellung, das fortwährende Interesse an meiner Arbeit und die stetige Bereitschaft zur Diskussion der jeweils aktuellen Probleme. Beim Werdegang meiner Arbeit hat er mir viele Freiheiten zugebilligt und mich, gerade in den schwierigen Phasen, immer seiner Unterstützung versichert.

Die Professoren Erwin Frey und Uwe Täuber haben mir im Verlauf der Arbeit immer wieder wertvolle Anregungen gegeben und mein Vorgehen mit mir diskutiert. Auch bei meinen ehemaligen Kollegen Michael Bulenda, Bernhard Kaufmann, Markus Hummel, Jan Wilhelm, Klaus Kroy, Andrej Vilfan, Klaus Schenk, Jaime Santos und Chris Pownall, sowie den neu gewonnenen Kollegen Estelle Bauer, Alexander Jurisch, Inmaculada Rodriguez-Ponce und Natalie Pavlenko möchte ich mich für die Zusammenarbeit und das freundschaftliche Verhältnis bedanken. Speziell Klaus Schenk und Manfred Keller haben durch erfrischende Diskussionen beim Nachmittagskaffee zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Während der ganzen Zeit begleitet hat mich auch mein Kollege Wilmut Gasser. Sowohl bei politischen Erörterungen am Mittagstisch als auch beim Entwurf und der Lösung der Übungsaufgaben haben wir intensiv diskutiert und zusammengearbeitet.

Unsere Sekretärin Elisabeth Jörg-Müller hat mich in allen Belangen kompetent unterstützt. Meine Schwächen beim Ausfüllen von Formularen hat Sie freundlicherweise kompensiert, indem Sie mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich sowohl während meines Studiums, als auch während der Doktorarbeit in vielerlei Hinsicht unterstützt hat. Ganz besonderer Dank gilt natürlich meiner Ehefrau Beate, ohne die ich das Studium der Physik nie begonnen hätte.

* * *

*Für meinen Großvater,
Georg Strasser,
(4.3.1917 - 14.7.1996)*

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Einführung

Einführung	1
1.1 Zweidimensionale Modelle	1
1.2 Experimentelle Systeme	6
1.3 Ziel der Arbeit	8
1.4 Gliederung der Arbeit	10

KAPITEL II

Nichtlineares Sigma-Modell

Nichtlineares Sigma-Modell	13
2.1 Einführung in das nichtlineare Sigma-Modell	13
2.2 Renormierung	16
2.2.1 Skalenbetrachtungen und primitiver Divergenzgrad	16
2.2.2 Folgerungen aus der Rotationssymmetrie	17
2.2.3 Störungstheorie und Renormierungskonstanten	18
2.3 Renormierungsgruppe des NLS-Modells	19
2.3.1 CS-Gleichungen der nichtrenormierten Korrelationsfunktionen	21
2.3.2 Lösung der CS-Gleichungen	22
2.3.3 Grenzfall $d=2$	23
2.3.4 Folgerungen aus der RNG	24
2.4 Ausbau der bekannten Ergebnisse	26
2.4.1 Feldabhängige Korrelationsfunktionen	27
2.4.2 Skalenform der Korrelationsfunktionen	31
2.4.3 Grenzfälle der Korrelationsfunktionen	31
2.5 XY-Systeme	32
2.5.1 XY-Modell für $d > 2$	34
2.5.2 Zweidimensionales XY-Modell	34
2.5.3 Kosterlitz-Thouless-Übergang	36

KAPITEL III

Langreichweitiges XY-Modell

Langreichweitiges XY-Modell	41
3.1 Ginzburg-Landau-Funktional des LXY-Modells	42
3.2 Renormierung des LXY-Modells	44
3.2.1 Skalenbetrachtungen	44
3.2.2 Renormierungskonstanten	45
3.2.3 Renormierung des Zweipunkt-Vertex	45
3.2.4 Renormierung des Vierpunkt-Vertex	46
3.3 Renormierungsgruppe	47
3.3.1 Callan-Symanzik-Gleichungen	47
3.3.2 Fixpunkte	48
3.3.3 Charakteristiken der CS-Gleichungen	51
3.3.4 Korrelationslänge	52
3.3.5 Spontane Magnetisierung	55
3.3.6 Allgemeine Lösung der CS-Gleichung	56
3.4 Kritische Eigenschaften des LXY-Modells	58
3.4.1 Kritische Korrelationsfunktion	59
3.4.2 Abhängigkeit vom äußeren Feld	59
3.4.3 Kritische Suszeptibilität	60
3.4.4 Freie Energie und spezifische Wärme	60
3.4.5 Zusammenfassung	61
3.5 Störungstheorie im Koexistenzbereich	62
3.5.1 Suszeptibilitäten und Zustandsgleichung	63
3.5.2 Wellenvektorabhängigkeit der Korrelationsfunktionen	65
3.6 Der Crossover des planaren Systems	67
3.6.1 Renormierung des planaren, langreichweitigen NLS-Modells	69
3.6.2 Renormierungsgruppe und Wilson-Funktionen	71
3.6.3 Spezialisierung auf das dreikomponentige System	72

KAPITEL IV

Dipolares XY-Modell

Dipolares XY-Modell	77
4.1 Die Symmetrie des DXY-Modells	77
4.2 Ward-Takahashi-Identitäten	79
4.2.1 Invarianz des Ginzburg-Landau-Funktionals	79
4.2.2 Nichtlineare Darstellung	80
4.2.3 Lie-Algebra der gekoppelten Symmetrie	81
4.2.4 Konsequenzen für die erzeugenden Funktionale	82
4.3 Die Struktur der Korrelationsfunktionen	83
4.3.1 Auswertung der linearen Ward-Takahashi-Identitäten	83

4.3.2	Auswertung der nichtlinearen Identitäten	84
4.3.3	Folgerungen für die Korrelationsfunktionen	84
4.4	Renormierbarkeit des DXY-Modells	86
4.4.1	Lösung der nichtlinearen Ward-Takahashi-Identität	87
4.4.2	Lösung der Gleichungshierarchie	89
4.4.3	Ein alternativer Lösungsweg	92
4.4.4	Eine Verallgemeinerung	93
4.4.5	Ist das DXY-Modell renormierbar?	95
4.4.6	Analyse der Störungsreihe	97
4.5	Renormierung des DXY-Modells	98
4.5.1	Ausführung der Integrale	99
4.5.2	Berechnung der Renormierungskonstanten	101
4.6	Renormierungsgruppe des DXY-Modells	104
4.6.1	Flussfunktionen des DXY-Modells	104
4.6.2	Bestimmung der Korrelationslänge	107
4.6.3	Spontane Magnetisierung	108
4.6.4	Allgemeine Skalenform und exakte Exponenten	109
4.6.5	Vergleich mit den bekannten Ergebnissen	111
4.7	Störungstheorie im Koexistenzbereich	112
4.7.1	Zustandsgleichung und Suszeptibilitäten	113
4.7.2	Wellenvektorabhängigkeit der Korrelationsfunktionen	114
4.8	Einfluss von Vortizes	116
4.8.1	Qualitative Betrachtungen	117
4.8.2	Ein simples Modell	118
4.8.3	Anmerkung zur Dualitäts-Transformation	121

KAPITEL V

Zusammenfassung und Ergebnisse

Zusammenfassung und Ergebnisse	123
--	-----

ANHANG

Definitionen und Konventionen

A.1	Wechselwirkungen und Kontinuumsdarstellung	127
A.2	Zustandssumme und Freie Energie	129
A.3	Kumulantenfunktional und Vertexfunktional	130
A.4	Dimension von Feldern und Korrelationsfunktionen	132

Callan-Symanzik-Gleichungen des NLS-Modells

B.1	Lösung der CS-Gleichungen	133
B.2	Störungstheorie im Koexistenzbereich	134
B.2.1	Magnetisierung	135
B.2.2	Feldabhängige Korrelationsfunktionen	136

Eigenschaften des XY-Modells

C.1	Propagator in zwei Dimensionen	139
C.2	Feldabhängigkeit für $d = 2$	140
C.3	Störungstheorie im zweidimensionalen XY-Modell	141
C.3.1	Modifizierte Störungstheorie	141
C.3.2	Elementare Erwartungswerte	142

Langreichweitiges XY-Modell

D.1	Entwicklung des Ginzburg-Landau-Funktional	143
D.2	Transformation der CS-Gleichungen	144
D.3	Allgemeine Lösung der CS-Gleichung	144
D.3.1	Lösungsnachweis	144
D.3.2	Weitere Lösungen	145

Dipolares XY-Modell

E.1	Einige nützliche Identitäten	147
E.2	Eine Beweisskizze	148
E.3	Störungstheorie des DXY-Modells	149
E.3.1	Beiträge zum Zwei-Punkt-Vertex	149
E.4	Ergänzungen zum Vortex-Modell	150

KAPITEL I

Einführung

Verglichen mit den dreidimensionalen magnetischen Systemen zeichnet sich der Magnetismus in zwei Dimensionen durch die Anwesenheit starker thermischer Fluktuationen aus. Diese Fluktuationen wirken der Ausbildung einer spontanen Ordnung entgegen und können sie unter gewissen Umständen sogar unterbinden. Als einfachen Ausgangspunkt zur theoretischen Beschreibung eines Magneten mit lokalisierten Momenten, benutzt man üblicherweise das *Heisenberg-Modell*

$$H_E(\{\hat{\mathbf{S}}_i\}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j . \quad (1.1)$$

Von Mermin und Wagner wurde gezeigt [1], dass es in einem zweidimensionalen Heisenberg-Modell für endliche Temperaturen keine spontane Magnetisierung geben kann, falls das System unendlich ausgedehnt und die Austauschwechselwirkung kurzreichweitig und isotrop ist (*Mermin-Wagner-Theorem*). Um einen zweidimensionalen Ferromagneten zu beschreiben, muss man deshalb das isotrope, kurzreichweitige Heisenberg-Modell um einige Wechselwirkungen, welche in realen Systemen vorhanden sind, erweitern.

1.1 Zweidimensionale Modelle

Aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung besitzen die meisten realen Magnete eine magnetokristalline Anisotropie (*Kristallanisotropie*). Diese Wechselwirkung bevorzugt eine bestimmte räumliche Orientierung der Spins und verletzt damit die Voraussetzungen des Mermin-Wagner-Theorems. Bevorzugen die Spins eine spezielle Richtung, so spricht man von einem uniaxialen System. In einer zweidimensionalen Schicht magnetischer Atome ist dies im Allgemeinen die Richtung senkrecht zur Gitterebene [2], so dass es für die Spins energetisch günstiger ist, sich senkrecht zur Ebene auszurichten (out-of-plane). Das kritische Verhalten eines solchen Systems ist Ising-artig. Dies wurde von Nelson und Pelcovits [3] und später von Bander und Mills [4] im Rahmen des nichtlinearen σ -Modells gezeigt. Eine Verallgemeinerung bezüglich der Komponentenzahl und insbesondere bezüglich des Renormierungsverfahrens wurde von Amit und Goldschmidt durchgeführt [5].

Komplizierter wird die Situation, wenn die Kristallanisotropie planar ist, sich also die Momente bevorzugt in der Ebene ausrichten. In diesem Fall reicht die Anisotropie

nicht aus, um die Existenz einer spontanen Ordnung zu erzwingen. Nach Khokhlachev [6] verhält sich das planare System asymptotisch, also für große Längenskalen, wie ein XY-Modell. Das XY-Modell besitzt nach Berezinskiĭ für tiefe Temperaturen eine Eigenschaft, welche man als *transversale Steifigkeit* bezeichnet. In suprafluidem Helium, welches im Rahmen einer Feldtheorie ebenfalls durch ein XY-Modell beschrieben wird, entspricht dieser transversalen Steifigkeit des magnetischen Systems gerade die Dichte der suprafluiden Komponente von He^4 (siehe auch [7]). Gemäß den Überlegungen von Berezinskiĭ [8] existiert bei endlichen Temperaturen ein Übergang von einer Tieftemperaturphase mit transversaler Steifigkeit zu einer Hochtemperaturphase, in welcher diese Eigenschaft des Modells verschwindet. Bereits früher wurde gezeigt, dass die Tieftemperaturphase hierbei algebraische Korrelationen besitzt, während in der Hochtemperaturphase die Korrelationen exponentiell abfallen. Obwohl die Tieftemperaturphase kritisches Verhalten zeigt, kann man den Phasenübergang, aufgrund des Mermin-Wagner-Theorems, nicht mit der Ausbildung einer spontanen Magnetisierung assoziieren. Vielmehr wurde dieser Übergang von Kosterlitz und Thouless als Entbindungsübergang eines Vortexgases erklärt [9]. Im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen wurde dieses Szenario von Kawabata und Binder bestätigt [10].

Neben der Existenz von Kristallanisotropien begrenzt auch die endliche Ausdehnung realer Magnete die Gültigkeit des Mermin-Wagner-Theorems. Besitzt das System eine endliche Ausdehnung L , so werden die langreichweitigen Goldstone-Moden, welche für die Zerstörung des Magnetismus verantwortlich sind, unterdrückt, und das System kann eine spontane Magnetisierung besitzen. Im Rahmen einer harmonischen Näherung verschwindet diese Magnetisierung logarithmisch in der Systemausdehnung L . Für planare Systeme führen die finite-size Effekte zu einem interessanten Phänomen. Wie von Bramwell und Holdsworth [11] gezeigt wurde, findet in einem XY-System mit endlicher Ausdehnung bei einer kritischen Temperatur ein Übergang in eine ferromagnetische Phase statt. Dabei verschwindet die Magnetisierung mit einem universellen Exponenten $\beta \approx 0.23$. Dieser Phasenübergang wird getrieben durch das Auftreten der transversalen Steifigkeit unterhalb der Kosterlitz-Thouless-Übergangstemperatur. Im Tieftemperaturbereich besitzt das finite-size XY-Modell eine spontane Magnetisierung, verbunden mit dem Auftreten eng gebundener Vortexpaare. Bei Erreichen von T_c entbinden diese Paare und der Magnetismus wird zerstört. Dieser Mechanismus und auch das Verschwinden der ferromagnetischen Phase mit zunehmender Systemausdehnung wurden im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen überprüft [12, 13].

Eine Wechselwirkung welche naturgemäß alle magnetischen Systeme besitzen, ist die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Dipolmomenten. Die *Dipolwechselwirkung* ist einerseits langreichweitig und andererseits anisotrop, d.h. sie verletzt die Voraussetzungen des Mermin-Wagner-Theorems in zwei Punkten. Die Dipolwechselwirkung zweier magnetischer Momente $\boldsymbol{\mu}_1$ und $\boldsymbol{\mu}_2$ besitzt die Form

$$\frac{\boldsymbol{\mu}_1 \boldsymbol{\mu}_2}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\mu}_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2))(\boldsymbol{\mu}_2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2))}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^5} \quad (1.2)$$

und zeichnet damit den Verbindungsvektor zwischen den Momenten räumlich aus. Diese Wechselwirkung ist anisotrop, weil die $O(N)$ -Invarianz bezüglich des Spinraums gebrochen wird. Betrachtet man aber eine isotrope Verteilung von Dipolmomenten, so gibt

es keine ausgezeichneten Richtungen im Raum. Gerade im Kontinuumslimit, in dem die Gitterstruktur ja vernachlässigt wird, unterscheidet sich deshalb die Dipolwechselwirkung wesentlich von den Kristallanisotropien^{1,2}.

Sitzen die magnetischen Atome auf einer zweidimensionalen Ebene im Raum, so ist die Verteilung der magnetischen Momente offensichtlich nicht isotrop und die Dipolwechselwirkung zeichnet die Achse senkrecht zur Ebene aus. Wie von der Domänenverteilung eines Stabmagneten bekannt (Abb. 1.1), versucht die Dipolwechselwirkung immer, die Spins parallel zu den Oberflächen auszurichten. Dementsprechend kann man erwarten,

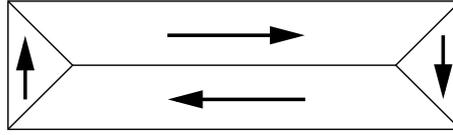


Abbildung 1.1: Ausrichtung der magnetischen Domänen in einem Stabmagneten

dass die Achse senkrecht zur Ebene eine schwere Achse ist, weil die Dipolwechselwirkung die Ausrichtung der Spins in der Ebene bevorzugt. Sitzen die Momente auf einem quadratischen Gitter, so bevorzugt die Dipolwechselwirkung im Kontinuumslimit keine speziellen Richtungen in der Ebene, so dass die Kombination aus Gitterstruktur und Dipolwechselwirkung zu einem planaren System führt³. Am Beitrag der Dipolwechselwirkung zur Hamilton-Funktion

$$H_D = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} - \frac{3(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^\alpha (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^\beta}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^5} \right) \mu_i^\alpha \mu_j^\beta. \quad (1.3)$$

ist der planare Charakter erkennbar, wenn man beachtet, dass der zweite Term nur für Spinkomponenten existiert, welche innerhalb der Ebene liegen. Sind alle Spins in der Ebene kollinear ausgerichtet, so lautet der Beitrag dieses Terms

$$H'_D = -3 \sum_i \frac{(\mathbf{R}_i \boldsymbol{\mu})^2}{|\mathbf{R}_i|^5}, \quad (1.4)$$

so dass offensichtlich eine homogene Phase in der Ebene energetisch günstig ist. Eine zweidimensionale magnetische Schicht verhält sich somit, bei Anwesenheit von Dipolkräften, asymptotisch wie ein dipolares XY-System. Dies wurde von Pokrovskii und Feigelman explizit gezeigt [14]. Im Gegensatz zu einer planaren Austauschwechselwirkung (verursacht durch eine planare Kristallanisotropie) ist die Dipolwechselwirkung jedoch in der

¹Gerade dieser Unterschied ist der Ausgangspunkt der Renormierbarkeitsbetrachtungen in Kap. 4.

²Natürlich besitzt ein kubisches Gitter keine wirklich isotrope Verteilung der Dipolmomente, aber die Symmetrie ist so hoch, dass im Kontinuumslimit der Beitrag der Dipolwechselwirkung isotrop ist (jedenfalls gilt dies für die relevanten Terme).

³Ein reales System wird nicht wirklich planar sein, sondern aufgrund der magnetokristallinen Anisotropie bestimmte Vorzugsrichtungen in der Ebene besitzen (siehe die weiter unten folgende Diskussion).

Lage, die Fluktuationen auf einen endlichen Wert zu begrenzen, so dass in einer dipolaren zweidimensionalen Schicht eine ferromagnetische Phase existieren kann [15, 16]. Wegen des asymptotischen XY-Verhaltens müssen auch Vortexanregungen berücksichtigt werden. Von Pelcovits und Halperin [16] sowie von Feigelman [17] wurden Versuche unternommen, den kombinierten Effekt von Dipolwechselwirkung und Vortexanregungen abzuschätzen. Feigelman hat dabei einige einfache Argumente gegeben, die erwarten lassen, dass die Dipolwechselwirkung den Kosterlitz-Thouless-Übergang zu höheren Temperaturen verschiebt. Leider sind seine Rechnungen in der Umgebung des kritischen Punkts unbrauchbar, da es einen systematischen Fehler in seinen Untersuchungen gibt [16, 17]. In dem Artikel von Pelcovits und Halperin werden einige interessante Skaleneigenschaften abgeleitet. Aber auch hier verbleibt die Rechnung außerhalb des kritischen Bereichs und ist nur im Limes kleiner Dipolwechselwirkung aussagekräftig. Gemeinsam ist den beiden Artikeln das Resultat, dass der Eigenwert der Dipolwechselwirkung unter Renormierung den Wert

$$\lambda_g = 1 - \eta(t, g) \quad (1.5)$$

annimmt^{4,5}. Nun wurde von Kosterlitz gezeigt [18], dass η bei Abwesenheit von Dipolkräften zwischen $t = 0$ und dem Punkt des Kosterlitz-Thouless-Übergangs seinen Wert von $\eta = 0$ auf $\eta = 1/4$ ändert. Das würde bedeuten, dass die Dipolwechselwirkung in der gesamten Tieftemperaturphase relevant ist. Dies ist im Wesentlichen das Fazit der Überlegungen in [16]. Wenn der Einfluss der Dipolwechselwirkung aber so stark ist, so wäre es auch denkbar, dass die anomale Dimension $\eta(t, g)$ am kritischen Punkt den Wert $\eta(t^*, g^*) = 1$ annimmt, da der Propagator eines rein dipolaren Systems wie $1/q$ skaliert. In diesem Fall würde der Eigenwert der Dipolwechselwirkung gerade verschwinden, so dass sich ein völlig neues Szenario ergibt. Dies ist eine der Fragen, welche in der vorliegenden Arbeit untersucht werden sollen.

Da für eine zweidimensionale Schicht von Atomen neben der Dipolwechselwirkung immer auch Kristallanisotropien existieren, muss man auch deren Einfluss berücksichtigen. Besitzt die Schicht eine leichte Ebene (in-plane Anisotropie), so bevorzugen sowohl Kristallanisotropie wie auch die Dipolwechselwirkung eine Ausrichtung der Spins in der Ebene, d.h. man erhält ein planares System. Aufgrund der Dipolwechselwirkung besitzt das System eine ferromagnetische Phase. Die Eigenschaften dieser Phase werden gemäß obigen Ausführungen durch den kombinierten Effekt von Dipolwechselwirkung und Vortexanregungen bestimmt. Aufgrund der Gitterstruktur ist die Kristallanisotropie im Allgemeinen aber nicht einfach planar, sondern besitzt gewisse Vorzugsrichtungen in der Ebene. Je nach Art des Gitters kann die magnetokristalline in-plane Anisotropie verschiedene Symmetrie besitzen. Für ein klassisches XY-Modell wurde von Jose, Kadanoff, Kirkpa-

⁴Hierbei sind t und g skalierte Werte für Temperatur bzw. Stärke der Dipolwechselwirkung.

⁵Diese Aussage lässt sich aus der Hamilton-Funktion (1.3) direkt ablesen, wenn man im Sinne der Wilson-Renormierung skaliert. Bezeichnet man mit b den üblichen Faktor, welcher die Größe der Impulschale mittels $\Lambda/b < q < \Lambda$ bestimmt, so liefern die Felder aufgrund der Feldrenormierung $\zeta = b^{(4-\eta)/2}$ einen Beitrag $b^{(4-\eta)}$ während die x -abhängigen Terme einen Faktor b^{-3} ergeben. Wenn man annimmt, dass die Dipolwechselwirkung trivial renormiert (dies gilt im ϕ^4 -Modell offensichtlich [16]; für das nichtlineare σ -Modell wird dies im Rahmen der vorliegenden Arbeit gezeigt), so ergibt sich für die Dipolwechselwirkung im Rahmen der Renormierungsgruppe der Eigenwert (1.5).

trick und Nelson gezeigt [19], dass eine zweizählige Anisotropie (Ising-Symmetrie), also eine leichte Achse in der Ebene, eine relevante Größe im Sinne der Renormierungsgruppe ist und somit das Verhalten des Systems entscheidend beeinflusst. Eine Anisotropie mit sechszähliger oder höherer Symmetrie ist hingegen in einem begrenzten Temperaturbereich unterhalb des Kosterlitz-Thouless-Übergangs irrelevant. In diesem Intervall verhält sich die in-plane Anisotropie echt planar, d.h. sie zeichnet keine Richtungen in der Ebene aus. Die Breite dieses Temperaturintervalls ist umso größer, je höher die Symmetrie ist. Für eine Anisotropie mit vierzähliger Symmetrie wird die Intervallbreite gerade null.

Favorisiert die Kristallanisotropie eine Ausrichtung der Spins senkrecht zur Substratebene, so treten Kristallanisotropie und Dipolwechselwirkung zueinander in Konkurrenz. Ein solches System kann sowohl als Funktion der Temperatur, wie auch in Abhängigkeit von der Schichtdicke, einen Reorientierungsübergang durchführen, wobei für tiefe Temperaturen (bzw. für wenige Lagen magnetischer Atome) typischerweise die Spins senkrecht zur Ebene magnetisiert sind und mit zunehmender Temperatur eine Reorientierung der Spins zu einer ferromagnetischen in-plane Phase stattfindet. Dieser Reorientierungsübergang, der nicht nur als Folge der Konkurrenz zwischen magnetokristalliner- und dipolarer Anisotropie, sondern auch durch die Konkurrenz verschiedener Kristallanisotropien auftreten kann, wurde mit Hilfe von Mean-Field Rechnungen [20–23], Spin-Wellen-Theorien [24–28], Renormierungsgruppenrechnungen [29–34] und Monte-Carlo-Simulationen [35, 36] untersucht. In der out-of-plane Phase dieser Systeme, in welcher die Spins senkrecht zum Gitter magnetisiert sind, richten sich die Spins im Gegensatz zur in-plane Phase nicht homogen aus, sondern formieren sich in einer Streifenphase. (Abb. 1.2). Diese Streifen sind in einer der beiden in-plane Richtungen unendlich ausgeht und besitzen bezüglich der zweiten Richtung eine endliche Modulation. Die Ursache dieser inhomogenen Phase liegt in der Kombination von Ising-Symmetrie und Dipolwechselwirkung. Die Minima der Spinkonfigurationen, sowie die theoretischen Eigenschaften der Streifenphase wurden ausführlich untersucht und diskutiert [37–45].

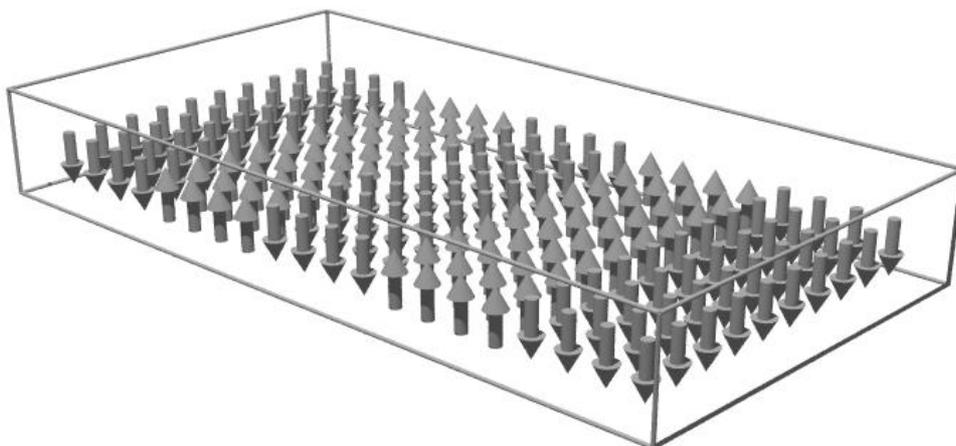


Abbildung 1.2: In einem zweidimensionalen magnetischen System mit out-of-plane Anisotropie und Dipolwechselwirkung existiert die sogenannte Streifenphase.

1.2 Experimentelle Systeme

Experimentell lassen sich zweidimensionale Magnete in Form von schwach wechselwirkenden Schichtstrukturen realisieren. Ein Beispiel hierfür ist etwa K_2CuF_4 , das bei 6.25K ferromagnetisch wird (siehe Abb. 1.3)⁶. Die Kupferebenen besitzen in der c -Richtung nur eine schwache magnetische Wechselwirkung, so dass ein quasizweidimensionales magnetisches System auf einem quadratischen Gitter vorliegt [48, 49]. Zudem besitzt das System eine leichte planare Anisotropie, d.h. die Spins befinden sich bevorzugt in der Ebene des magnetischen Gitters⁷. Auch wenn die Wechselwirkung mit den anderen magnetischen Ebe-

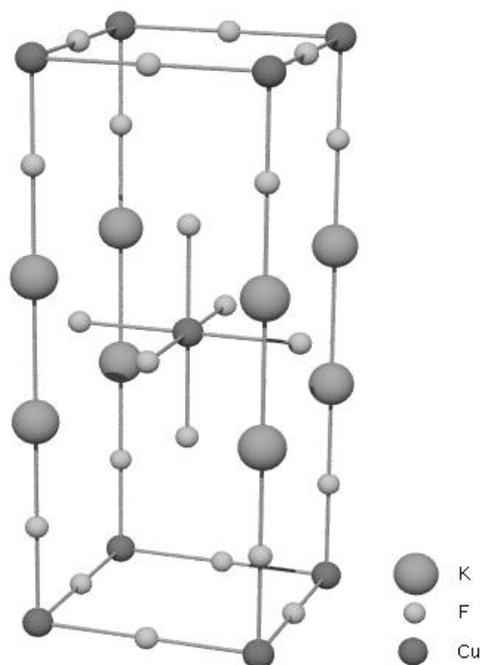


Abbildung 1.3: Gitterstruktur des quasizweidimensionalen Ferromagneten K_2CuF_4 . Der Magnetismus wird von den Cu^{2+} -Ionen getragen, welche Spin $1/2$ besitzen. Die magnetischen CuF Ebenen koppeln in c -Richtung nur relativ schwach (das Verhältnis von interplanarer zu intraplanarer Austauschwechselwirkung ist etwa 8×10^{-4}).

nen schwach ist, so hat sie doch für das kritische Verhalten einen wesentlichen Einfluss. Das typisch zweidimensionale Verhalten kann deshalb nur in gewissen Regimes beobachtet werden. Solche Übergangsphänomene wurden mit einfachen Methoden bereits von

⁶Die Struktur dieses Materials geht zurück auf den quasizweidimensionalen Antiferromagneten K_2NiF_4 . Dieses von Birgeneau, Guggenheim und Shirane untersuchte System war eines der ersten, an dem typische Eigenschaften des zweidimensionalen Magnetismus nachgewiesen wurden [46, 47]. Im Gegensatz zum ferromagnetischen K_2CuF_4 besitzt es jedoch eine uniaxiale Anisotropie (Ising-Symmetrie).

⁷Ein Sammlung verschiedener magnetischer Schichtstrukturen wird in dem Übersichtsartikel von de Jongh und Miedema [50] gegeben.

Pokrovskii und Uimin [51] sowie von Berezinskii und Blank [52] berechnet. Von Hikami und Tsuneto wurde die Theorie des Kosterlitz-Thouless-Übergangs auf die Situation in einem quasizweidimensionalen Magneten, also ein System schwach wechselwirkender magnetischer Ebenen, übertragen [53].

Als Modellsystem für einen dipolaren zweidimensionalen Magneten sind die Schichtstrukturen schlecht geeignet, weil die Dipolwechselwirkung zwischen den verschiedenen magnetischen Ebenen im Allgemeinen nur unbedeutend kleiner ist, als die Wechselwirkung in der Ebene. Mit Hilfe der Molekularstrahl-Epitaxie (MBE) ist es möglich geworden, wirklich zweidimensionale magnetische Systeme zu erzeugen, indem Monolagen magnetischer Atome auf ein nichtmagnetisches Substrat aufgedampft werden (siehe Abb. 1.4). Diese ultradünnen Filme stellen jedoch keineswegs ideale 2d Heisenberg-Systeme dar, sondern sind meist stark anisotrop. Wie bereits erwähnt, gibt es allein aufgrund der Symmetrie des Systems magnetokristalline Anisotropien. Desweiteren führt das pseudomorphe Wachstum ultradünner Schichten zu Anisotropien aufgrund von magnetoelastischen Effekten. Auch die Rauigkeit des Substrats, also die Existenz von Stufen und Löchern in der Oberfläche der nichtmagnetischen Schicht, äußert sich in Form von Anisotropiebeiträgen. In der theoretischen Beschreibung wird die Summe dieser Effekte in Form einer single-ion-Anisotropie modelliert, welche in Kombination mit der Dipolwechselwirkung die Ausrichtung der magnetischen Momente bestimmt⁸.

Typische Vertreter von ultradünnen magnetischen Schichten, welche aufgrund der verschiedenen Anisotropiebeiträge einen Reorientierungsübergang durchführen, sind etwa Fe/Cu(100) und Fe/Ag(100) [57, 58]. Wie in den theoretischen Vorüberlegungen erläutert, findet dieser Übergang von einer out-of-plane Orientierung zu einer in-plane Phase mit zunehmender Temperatur bzw. Schichtdicke statt. Das System Ni/Cu(100) zeigt hingegen den umgekehrten Übergang [59]. In diesem Fall ist die Ursache des Reorientierungsübergangs nicht die Konkurrenz zwischen Dipolwechselwirkung und Kristallanisotropien, sondern die Konkurrenz zwischen verschiedenen Beiträgen zur Kristallanisotropie [60, 61]. In dem System Fe/Cu(100) wurde von Allenspach und Bischof [62] auch die theoretisch vorhergesagte Streifenphase zweidimensionaler, dipolarer Filme mit out-of-plane Anisotropie gefunden. Weil die Breite der Streifen mit sinkender Temperatur sehr groß wird [43, 44] und die Systemabmessungen überschreitet, können die Streifendomänen nur in einer engen Umgebung unterhalb des Reorientierungsübergangs beobachtet werden.

Auch Systeme mit leichter Gitterebene lassen sich mit Hilfe der MBE erzeugen. Von Elmers et al. wurde die Doppelschicht Fe(100) auf W(100) untersucht [63]. Dieses System besitzt in der Ebene eine leichte Achse mit vierzähliger Symmetrie. Diese Anisotropie ist nach den Untersuchungen von Jose et al. [19] nicht irrelevant. Die von Elmers et al. gemessenen Ergebnisse stimmen aber gut mit den Rechnungen überein, welche von Bramwell und Holdsworth [11] für ein XY-Modell mit endlicher Ausdehnung angestellt wurden.

⁸Eine Übersicht über verschiedene magnetische Filme und ihre relevanten Wechselwirkungen gibt der Artikel von Gradmann [54]. Ein phänomenologischer Überblick wird von Allenspach gegeben [55] und eine mehr theoretisch motivierte Übersicht findet sich in dem Artikel von de’Bell, MacIsaac und Whitehead [56].

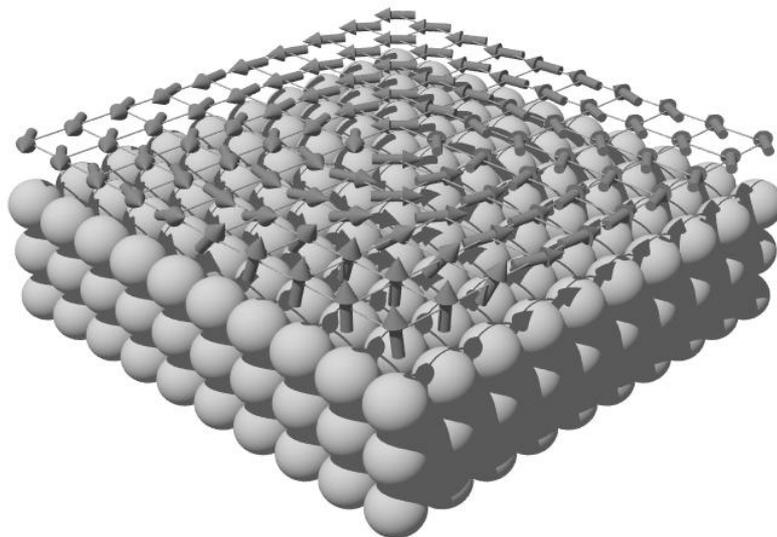


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung eines monoatomaren magnetischen Films. Mittels Molekularstrahl-Epitaxie wird eine Schicht magnetischer Atome (dargestellt als Pfeilchen) auf ein nichtmagnetisches Substrat aufgedampft. Ist die Anzahl der Atomlagen gering, so wachsen die aufgedampften Schichten pseudomorph, d.h. sie passen sich an die Gitterstruktur des Substrats an.

1.3 Ziel der Arbeit

Die Dipolwechselwirkung ist in der Lage, in einem zweidimensionalen magnetischen System die Fluktuationen zu begrenzen. Eine dipolare magnetische Schicht besitzt deshalb eine ferromagnetische Phase. Aufgrund des planaren Charakters der dipolaren Anisotropie verhält sich das System asymptotisch XY-artig. Deshalb ist es das Ziel der Arbeit, die Eigenschaften eines zweidimensionalen XY-Systems zu bestimmen, in dem neben der kurzreichweitigen, isotropen Austauschwechselwirkung auch die Dipolwechselwirkung berücksichtigt wird.

Diese Problemstellung wurde bisher nicht angemessen untersucht. Die Arbeiten von Pokrovskii und Feigelman [14] sowie von Pelcovits und Halperin [16] beschränken sich auf Teilaspekte. Die Eigenschaften des Systems werden nur für kleine Dipolwechselwirkung bestimmt, obwohl die Dipolwechselwirkung als relevante Größe erkannt wird. In einer Arbeit von de'Bell und Geldart [64] wurden kritische Exponenten mit Hilfe des ϕ^4 -Modells berechnet. Die Vorgehensweise in dieser Arbeit ist jedoch zweifelhaft. So ist einer der Hauptkritikpunkte, dass sich die ϵ -Entwicklung des ϕ^4 -Modells nicht sinnvoll auf zwei Dimensionen anwenden lässt, da hier die Eigenschaften des Systems in der Nähe von vier Dimensionen auf das völlig veränderte Verhalten an der unteren kritischen Dimension extrapoliert werden (siehe auch die Diskussion in Paragraph 2.3.4). In der Arbeit von Kasuba [65] wird dieses Problem vermieden, weil angenommen wird, dass die verschiedenen Komponenten des Wellenvektors unterschiedlich renormieren. Durch anisotropes Skalieren

ren erhält er eine obere kritische Dimension $d_c = 5/2$ für das dipolare XY-System (mit der dreidimensionalen Dipolwechselwirkung). Dieses Verfahren wurde von Kashuba, Abanov und Pokrovskii auch zur Bestimmung dynamischer Eigenschaften verwendet [66, 67]. Das anisotrope Skalieren widerspricht jedoch den exakten Ward-Takahashi-Identitäten, welche in Abschnitt 4.1 für das dipolare XY-Modell abgeleitet werden.

Das grundlegende System, das zunächst untersucht werden muss, ist der asymptotische Limes der planaren, dipolaren Systeme, nämlich das klassische XY-Modell, erweitert um die dipolare Wechselwirkung. Dazu wird die dreidimensionale Form der Dipolwechselwirkung⁹ verwendet. In diesem System spielen Vortexanregungen eine Rolle, d.h. sie müssen in die theoretischen Betrachtungen miteingebunden werden. Ungünstigerweise gibt es fundamentale Unterschiede zwischen den topologischen Anregungen in einem dipolaren XY-System und den Vortizes im klassischen XY-Modell (siehe Diskussion in Abschnitt 4.8). Aus diesem Grund erscheint es kaum möglich, eine Theorie zu entwickeln, welche sowohl die Dipolwechselwirkung wie auch die Existenz topologischer Anregungen adäquat berücksichtigt. Glücklicherweise ist, im Gegensatz zum finite-size XY-Modell von Bramwell und Holdsworth, die Existenz der ferromagnetischen Phase hier nicht mit der transversalen Steifigkeit verbunden, sondern sie ist ein Effekt der Langreichweitigkeit der Dipolwechselwirkung. Deshalb ist es möglich und auch sinnvoll das XY-Modell um die Dipolwechselwirkung zu erweitern, und eine Theorie der ferromagnetischen Phase aufzustellen, ohne dabei die topologischen Anregungen zu berücksichtigen. Das resultierende Modell wird als dipolares XY-Modell (*DXY-Modell*) bezeichnet.

Um zu einem generellen Verständnis des DXY-Modells zu gelangen, soll eine Renormierungsgruppenanalyse durchgeführt werden. Üblicherweise wird hierzu das ϕ^4 -Modell benutzt. Dabei zeigen sich jedoch zwei Probleme. Zum Ersten werden die Felder in zwei Dimensionen dimensionslos, so dass alle Vertizes (ϕ^4 , ϕ^6 , ...) marginal sind und man das Ginzburg-Landau-Funktional nicht einfach beim ϕ^4 -Term abbrechen kann. Zum Zweiten ist das übliche Vorgehen beim ϕ^4 -Modell eine ϵ -Entwicklung um die obere kritische Dimension. Wie bereits angesprochen, bedeutet dieses Vorgehen eine Extrapolation der Systemeigenschaften von der oberen kritischen Dimension auf die untere kritische Dimension, obwohl das System sich an den beiden Grenzdimensionen völlig unterschiedlich verhält¹⁰. Aus diesem Grund wird das nichtlineare σ -Modell (*NLS-Modell*) als Ausgangspunkt benutzt. Im NLS-Modell wird eine ϵ -Entwicklung um $d = 2$ durchgeführt. Das Problem der unendlich vielen Vertizes wird dabei mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen gelöst. Aus verschiedenen Gründen, die in Kapitel 4 erläutert werden, muss das Modell in fixer Dimension renormiert werden. Dazu wird ein spezielles Renormierungsverfahren verwendet, das in gewisser Weise die Vorteile von Wilson-Renormierung und feldtheoretischer Renormierung verbindet. Der Nachteil ist jedoch, dass dieses Verfahren nur für 1-loop Rechnungen praktikabel ist.

⁹Dies ist die Form der Dipolwechselwirkung, welche für eine zweidimensionale Schicht von Atomen im dreidimensionalen Raum zutreffend ist.

¹⁰Die Problematik zeigt sich z.B. darin, dass die ϵ -Entwicklung des üblichen ϕ^4 -Modells (ohne Dipolwechselwirkung) auch in zwei Dimensionen einen Phasenübergang signalisiert.

1.4 Gliederung der Arbeit

Nachdem in den ersten Abschnitten die Ziele der Arbeit definiert und eine Einführung in gewisse Fragestellungen des zweidimensionalen Magnetismus gegeben wurde, soll nun ein Überblick über die einzelnen Kapitel der Arbeit folgen.

Kapitel 2 dient als Einführung in das nichtlineare σ -Modell, da dieses Modell, im Gegensatz zum ϕ^4 -Modell, in der üblichen Lehrbuchliteratur zum Thema kritische Phänomene wenig behandelt wird. Dabei wird die Gelegenheit genutzt, das bereits erwähnte, spezielle Renormierungsverfahren einzuführen. So kann das Verfahren einerseits an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Zum anderen wird gezeigt, dass sich die bekannten Resultate des NLS-Modells mit dem neuen Verfahren reproduzieren lassen. In Abschnitt 2.4 werden die bekannten Ergebnisse erweitert, indem mit Hilfe eines Matchingverfahrens feld- und wellenvektorabhängige Korrelationsfunktionen abgeleitet werden, welche die bekannten Grenzfälle des isotropen Heisenberg-Modells beinhalten. Am Ende von Kapitel 2 folgt ein kurzer Überblick über das XY-Modell und den Kosterlitz-Thouless-Übergang, sowie den Zusammenhang zwischen der Renormierungsgruppe des zweikomponentigen NLS-Modells und des XY-Modells.

Da das DXY-Modell analytisch sehr kompliziert ist, wird in Kapitel 3 ein vereinfachtes Modell eingeführt, das die wesentlichen Eigenschaften des DXY-Modells beinhaltet. Dieses sogenannte langreichweitige XY-Modell (*LXY-Modell*) besitzt wie das XY-Modell eine $O(2)$ -Symmetrie, ist aber bereichert um einen isotropen, langreichweitigen Term, welcher einen Phasenübergang induziert. Das LXY-Modell dient als vereinfachtes Modell, um die Probleme die sich im Rahmen der Renormierungsgruppe des DXY-Modells ergeben, zu studieren. Es wird sich nämlich zeigen, dass die Renormierungsgruppe durch nichtlineare Fixpunkte bestimmt ist, deren Eigenschaften sich grundlegend von den üblicherweise betrachteten linearen Fixpunkten unterscheiden. Solche nichtlinearen Fixpunkte sind z.B. vom Kosterlitz-Thouless-Übergang bekannt. Jedoch werden dort nur die Eigenschaften in der Umgebung des kritischen Punkts betrachtet, während hier auch die Tieftemperaturphase untersucht werden soll. Dies ist in der Tat möglich. So kann man neben dem kritischen Verhalten unter Verwendung gewisser Näherungen auch Konsequenzen für die Übergangs-Phänomene im Tieftemperaturbereich ableiten.

Im Rahmen des isotropen, langreichweitigen Modells bietet sich auch die Möglichkeit, den Crossover vom dreikomponentigen zum zweikomponentigen System zu untersuchen. Dazu wird in Abschnitt 3.6 ein dreikomponentiges nichtlineares σ -Modell eingeführt, das sowohl eine isotrope, langreichweitige Wechselwirkung, wie auch eine planare Anisotropie besitzt. Mit Hilfe dieses Modells wird geklärt, welchen Einfluss die dritte Komponente auf die Eigenschaften des Systems besitzt und ob sich das LXY-Modell tatsächlich als asymptotischer Limes des betrachteten Modells ergibt. Da jedes reale Spinsystem drei Komponenten besitzt, dient diese Untersuchung auch einer weiteren Annäherung an die experimentelle Situation.

In Kapitel 4 wird schließlich die Renormierungsgruppe für das DXY-Modell vorgestellt. Im Gegensatz zum LXY-Modell kann der Renormierbarkeitsbeweis des nichtlinearen σ -Modells nicht ohne weiteres auf das DXY-Modell übertragen werden. Aus diesem Grund

beschäftigen sich die Abschnitte 4.1 bis 4.4 ausführlich mit der Symmetrie des DXY-Modells und den Folgerungen für die Renormierbarkeit. In den nächsten Abschnitten werden der für die Berechnung der Integrale notwendige mathematische Hintergrund und die Ergebnisse der Renormierungsgruppe zusammengetragen. Da die Methodik des Renormierungsverfahrens bereits in Kapitel 3 ausführlich dargestellt wurde, werden hier die entsprechenden Rechnungen etwas knapper gehalten. Abschnitt 4.8 macht den Versuch, den Einfluss von Vortexanregungen zu diskutieren. Leider bleibt dies meist auf einer qualitativen Ebene, weil die kombinierte Theorie eines XY-Modells mit Dipolwechselwirkung und Vortexanregungen analytisch außerordentlich kompliziert ist.

Um die in der Arbeit verwendeten Begriffe und Bezeichnungen zu klären, sind in Anhang A die relevanten Wechselwirkungen und ihre Darstellung in Kontinuumsform, sowie die Definitionen der erzeugenden Funktionale und der Korrelationsfunktionen ausführlich dargestellt. Insbesondere gilt es, einige Abwandlungen gegenüber den Definitionen im linearen σ -Modell zu beachten. Auch wurden einige T -Abhängigkeiten in den Potentialen explizit eingeführt. Die weiteren Anhänge dienen als Ergänzung zu den einzelnen Kapiteln und nehmen ausführlichere Rechnungen und weniger wichtige Ergebnisse auf.

KAPITEL II

Nichtlineares Sigma-Modell

2.1 Einführung in das nichtlineare Sigma-Modell

Im ϕ^4 -Modell, das auch als lineares σ -Modell bezeichnet wird, versucht man ein klassisches Heisenberg-Modell durch eine Zustandssumme der Form

$$Z = \int \mathcal{D}(\phi) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x \phi(\mathbf{x})(m - \nabla^2)\phi(\mathbf{x}) - u \int d^d x \phi^4(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.1)$$

zu beschreiben. Ausgangspunkt ist dabei der quantenmechanische Hamilton-Operator des Heisenberg-Modells. Im Rahmen der Quantenmechanik kann der Spin nur diskrete Werte annehmen und das Quadrat des Spin-Operators ist fixiert auf den Wert $s(s+1)$. Diese Einschränkung wird in der Ableitung des linearen σ -Modells berücksichtigt und ist die Ursache für den nichtlinearen ϕ^4 Term und höhere Nichtlinearitäten. Die N -komponentigen Gitterspins $\tilde{\mathbf{S}}_i$ werden hier durch sogenannte Softspins ϕ ersetzt, welche ebenfalls N -komponentig sind, aber keiner Einschränkung unterliegen.

Im nichtlinearen σ -Modell (*NLS-Modell*) wird die Mannigfaltigkeit¹ $\mathbf{S}^2 = 1$ durch ein unabhängiges Feld $\boldsymbol{\pi}$ mit $N-1$ Komponenten lokal parametrisiert

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \boldsymbol{\pi}_i \end{pmatrix} \quad (2.2a)$$

$$\sigma_i = \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}_i^2}. \quad (2.2b)$$

Die Nichtlinearität der Darstellung und des Transformationsverhaltens unter Symmetrioperationen, ist namensgebend für das Modell. Es ist auch möglich das NLS-Modell aus dem ϕ^4 -Modell abzuleiten [68], indem man substituiert

$$\phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) = M + \delta\rho(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

wobei M der Erwartungswert von ρ und damit die Magnetisierung ist. Vernachlässigt man die longitudinalen Fluktuationen, also die Abweichungen $\delta\rho$ vom Erwartungswert M , so

¹Zur Definition des normierten Spins \mathbf{S} siehe Anhang A.1.

erhält man aus dem linearen σ -Modell das nichtlineare σ -Modell. Man nimmt damit an, dass die Masse der longitudinalen Fluktuationen unendlich groß ist, und konzentriert sich ausschließlich auf die masselosen transversalen Anregungen. Diese transversalen Moden verkörpern die Richtungsfluktuationen des Magnetisierungsvektors. Sie sind für ein isotropes System masselos und verursachen die Goldstone-Singularitäten der Tieftemperaturphase.

Die Renormierung des NLS-Modells in der Nähe von zwei Dimensionen geht zurück auf eine von Polyakov verwendete Methode [69] zur Etablierung einer Renormierungsgruppe. Dazu wird das Feld \mathbf{S} aufgeteilt in ein langsam fluktuierendes Feld $\tilde{\mathbf{S}}$ (welches im Sinne von Polyakov das renormierte Feld verkörpert und deshalb nur auf größeren Längenskalen variiert) und in ein schnell fluktuierendes Feld φ

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x})\sqrt{1 - \varphi^2(\mathbf{x})} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \varphi^\alpha(\mathbf{x})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Die Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$ sind so gewählt, dass sie gemeinsam mit $\tilde{\mathbf{S}}$ eine Orthonormalbasis bilden. Durch Integration über die schnell fluktuierenden φ -Felder wird ähnlich wie in der Wilson-Renormierung eine Rekursionsrelation gewonnen. Als wichtigstes Ergebnis erhält man einen Tieftemperatur-Fixpunkt bei $T^* = 0$, welcher das Tieftemperaturverhalten des Systems kontrolliert und mit dessen Hilfe für $d > 2$ der kritische Punkt des Modells perturbativ erschlossen wird.

Brézin und Zinn-Justin haben dieses Modell in der Sprache der Feldtheorie formuliert und renormiert [70–72], sowie einen Renormierbarkeitsbeweis gegeben [73]. Nelson und Pelcovits haben das Modell mit Hilfe der Impulsschalenintegration von Wilson renormiert [74]. Einige weitergehende Fragen zum Problem der Goldstone-Singularitäten und der Struktur der Störungstheorie im Zusammenhang mit der sogenannten “Vermutung von Elitzur”² wurden von Amit und Kotliar beantwortet [76].

Mit Hilfe der Darstellung (2.2) kann in der Zustandssumme über das abhängige σ -Feld integriert werden. Dies liefert einen zusätzlichen Beitrag zum Funktionalintegral in Form einer Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} \int \prod_i \left(d^N S_i \cdot \delta(1 - \mathbf{S}_i^2) \right) \mathcal{P}(\{\mathbf{S}_j\}) &= \int \prod_i \left(\frac{d^{N-1} \pi_i}{2\sqrt{1 - \pi_i^2}} \right) \mathcal{P}(\{(\boldsymbol{\pi}_j, \sigma_j(\boldsymbol{\pi}_j))\}) \\ &= \int \prod_i \frac{d^N \pi_i}{2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_j \ln(1 - \pi_j^2) \right\} \mathcal{P}(\{(\boldsymbol{\pi}_j, \sigma_j(\boldsymbol{\pi}_j))\}). \end{aligned}$$

Nach dem Übergang zu unabhängigen Koordinaten muss dementsprechend das euklidische Integrationsmaß $\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})$ durch $\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})/\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}$ ersetzt werden, oder in der Exponentialfunktion ein Maßterm

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\pi}) = -\frac{1}{2v} \int d^d x \ln(1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})), \quad \frac{1}{v} = \int_q^\Lambda \quad (2.5)$$

²Diese Vermutung besagt, dass der Erwartungswert jeder $O(N)$ -invarianten Größe endlich ist. Sie wurde 1981 von F. David bewiesen [75]

addiert werden. Der Vorfaktor des Maßterms $1/v$ ist gleich dem inversen Volumen einer Gitterzelle. Im Kontinuumslimit $\Lambda \rightarrow \infty$ wird dieser Vorfaktor zu $\delta(0)$. In dimensionaler Regularisierung ist $\delta(0)$ aber null, so dass der Maßterm in diesem Fall keine Rolle spielt.

In zwei Dimensionen weist das NLS-Modell neben den artifiziellen UV-Divergenzen auch physikalische IR-Divergenzen auf. Diese Divergenzen werden durch die starken Fluktuationen in zwei Dimensionen verursacht und äußern sich unter anderem in einem divergierenden Fluktuationsbeitrag zur Magnetisierung (siehe die konkreten Rechnungen in Anhang B.2). Um die IR-Divergenzen zu regularisieren, wird ein äußeres Feld an die σ Komponente angekoppelt, so dass sich folgende Zustandssumme ergibt

$$Z(H) = \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2T} \int d^2x \left((\partial_\mu \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}))^2 + (\partial_\mu \sigma(\boldsymbol{\pi}))^2 \right) - \frac{H}{T} \int d^2x \sigma(\boldsymbol{\pi}) \right\}. \quad (2.6)$$

Um die Störungsreihe für das Modell aufzustellen, ist es notwendig, das σ -Feld als Potenzreihe in $\boldsymbol{\pi}^2$ darzustellen. Damit ergibt sich für die einfachsten Erwartungswerte

$$\langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad (2.7a)$$

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \int_q \frac{T}{q^2 + H} + \mathcal{O}(T^2). \quad (2.7b)$$

Offensichtlich beschreibt σ die longitudinale Komponente des Spins (auch für $H = 0$), während die $\boldsymbol{\pi}$ -Felder die transversalen Komponenten, also die Goldstone-Moden darstellen. An Gl. (2.7b) kann man auch die angesprochene Divergenz des Fluktuationsbeitrags zur Magnetisierung, für verschwindendes äußeres Feld und $d \leq 2$, erkennen. Um den kritischen Punkt des Systems zu erreichen, ist es notwendig, die Symmetrie zwischen longitudinalen und transversalen Feldern wiederherzustellen. Dies kann niemals im Rahmen einer Störungstheorie gelingen, sondern das Modell muss mit Hilfe der Renormierungsgruppe untersucht werden. Dabei darf man die Darstellung des abhängigen Feldes σ als Reihe in $\boldsymbol{\pi}$ nicht nach einer endlichen Zahl von Termen abbrechen, da ansonsten die verborgene $O(N)$ -Symmetrie zerstört wird. In der Behandlung dieser unendlichen Reihe liegt der eigentliche Kunstgriff des nichtlinearen σ -Modells und sie gelingt unter Ausnutzung der $O(N)$ -Symmetrie.

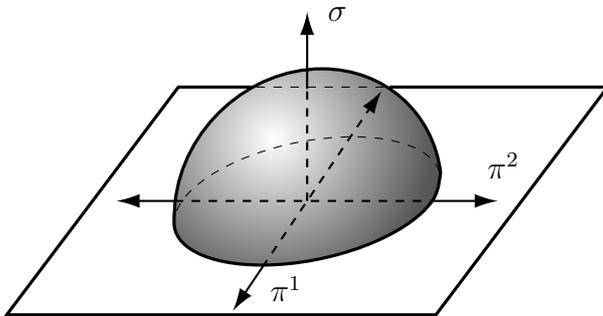


Abbildung 2.1:

Bei Vernachlässigung des Maßterms ist die Störungstheorie des nichtlinearen σ -Modells (Sphäre) nicht zu unterscheiden von der Störungstheorie in der Ebene.

Die Sphäre wird durch die Darstellung (2.2) nur lokal parametrisiert, der Bereich $\sigma < 0$ kann auf diese Weise nicht erreicht werden. Beim Phasenübergang wird aber die Symmetrie zwischen den Moden wiederhergestellt, so dass insbesondere $\langle \sigma \rangle = 0$, d.h.

die globalen Eigenschaften der Sphäre (es gibt auch einen Bereich $\sigma < 0$) spielen eine wichtige Rolle. Ein weiterer geometrischer Aspekt ist die Einschränkung der π -Felder auf den Bereich $\boldsymbol{\pi}^2 \leq 1$ (Kreis in Abb. 2.1). In der Störungstheorie wird diese Einschränkung nicht berücksichtigt und π über alle Werte integriert³. Bei den analytischen Rechnungen unterscheidet somit nur der Maßterm zwischen dem euklidischen Raum und der Riemannschen Fläche. Für $N = 2$ existiert eine Parametrisierung (Polarkoordinaten) welche den Maßterm global zum Verschwinden bringt. In diesen Koordinaten ist die Störungstheorie für den Kreis nicht von der Störungstheorie im euklidischen Raum zu unterscheiden. Wie von Brézin und Zinn-Justin vermutet, ist dies wohl die Ursache dafür, dass für $N = 2$ der kritische Punkt des NLS-Modells im Unendlichen liegt.

2.2 Renormierung

2.2.1 Skalenbetrachtungen und primitiver Divergenzgrad Wie man Gleichung (2.6) entnehmen kann, lautet das *Ginzburg-Landau-Funktional* für das isotrope, kurzreichweitige nichtlineare σ -Modell

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) = \frac{1}{2} \int d^d x \left\{ \left(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \right)^2 + \left(\partial_\mu \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} \right)^2 \right\} - H \int d^d x \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})}. \quad (2.8)$$

Zur Renormierung dieses Funktionals muss zunächst das σ -Feld durch π ausgedrückt werden. Aus (2.8) folgt dann

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) = \frac{1}{2} \int d^d x \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \left(H - \nabla^2 \right) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}(\boldsymbol{\pi}, H) \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\boldsymbol{\pi}, H) = & \frac{1}{2} \int d^d x \left(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \partial_\mu \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(-\boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x}) \right)^n \\ & - H \int d^d x \sum_{n=2}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(-\boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x}) \right)^n. \end{aligned} \quad (2.9b)$$

Der Propagator skaliert im UV-Bereich wie q^{-2} . Da im Rahmen der Störungstheorie jeweils zwei Felder zu einem Propagator kombiniert werden (*Wicksches Theorem*), wird dem Feld $\pi(\mathbf{q})$ die Skalendimension $-(d+2)/2$ zugewiesen⁴

$$\delta(\pi(\mathbf{q})) = -\frac{d+2}{2}, \quad \delta(\pi(\mathbf{x})) = \frac{d-2}{2}. \quad (2.10)$$

Kennzeichnet man die in Gl. (2.9b) auftretenden Vertizes gemäß der Anzahl der π -Felder, so sieht man

$$\delta(V^{2n}) = (d-2)(n-1). \quad (2.11)$$

³Dies führt zu exponentiell kleinen Fehlern, welche aber für den Fall $N = 2$ eine gewisse Bedeutung haben könnten.

⁴Der zusätzliche Term $-d/2$ erscheint aufgrund der δ -Funktion die als Vorfaktor des Propagators auftritt.

Die Beiträge vom Maßterm sind hier nicht von Interesse, da sie im Rahmen der Störungstheorie durch divergente Beiträge der eigentlichen Wechselwirkungen kompensiert werden. Wie im Renormierbarkeitsbeweis von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou [73] gezeigt wird, renormiert das Feld H trivial. D.h. für die Renormierbarkeitsbetrachtungen sind lediglich die Austauschvertizes relevant⁵. Gemäß der Formel für den primitiven Divergenzgrad eines Diagramms γ

$$\delta(\gamma) = d - E \cdot \frac{d-2}{2} + \sum_n v_{2n} \cdot \delta(V^{2n}), \quad (2.12)$$

wo E die Anzahl externer Linien und v die Anzahl der Vertizes bezeichnet, ist das NLS-Modell in $d = 2$ renormierbar, für $d < 2$ superrenormierbar und für $d > 2$ nicht renormierbar.

Leider zeigt Formel (2.12) auch, dass in $d = 2$ nicht nur ein spezieller Vertex dimensionslos wird, sondern alle. Würden alle diese Vertizes unterschiedlich renormieren, so wäre das NLS-Modell damit nicht renormierbar. Wie sich aber mit Hilfe der $O(N)$ -Symmetrie zeigen lässt, gibt es einen Zusammenhang zwischen der Renormierung der verschiedenen Vertizes.

2.2.2 Folgerungen aus der Rotationssymmetrie Da die Symmetrietransformationen und *Ward-Takahashi-Identitäten* auch im dipolaren Fall eine wichtige Rolle spielen, soll die Struktur des Renormierbarkeitsbeweises hier kurz skizziert werden. Wie üblich

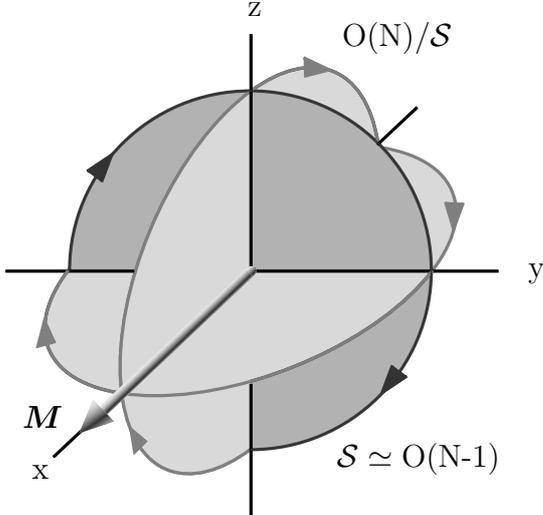


Abbildung 2.2:

Der Stabilisator \mathcal{S} der Magnetisierung ist die dunkel gezeichnete Gruppe. Hell gezeichnet sind die Transformationen der Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$. Die zugehörigen nichtlinearen Ward-Takahashi-Identitäten sind ausschlaggebend für die Renormierbarkeit des NLS-Modells.

wird das σ -Feld und damit die Magnetisierung in die x -Richtung gelegt. Der Stabilisator \mathcal{S} (Abb. 2.2), also die Gruppe der Symmetrietransformationen welche $(\sigma, 0, \dots, 0)$ invariant lassen, ist isomorph zu $O(N-1)$. Unter diesen Transformationen verhält sich die Darstellung (2.2) linear. Dies bedeutet für die Vertexfunktionen

$$0 = \int d^d x t_{ij}^b \varphi^i(\mathbf{x}) \frac{\delta \Gamma(\varphi, H)}{\delta \varphi^j(\mathbf{x})}, \quad (2.13)$$

⁵Das äußere Feld wird lediglich als IR-Regulator bei der Berechnung der Integrale benutzt. Die Renormierungskonstanten kann man jedoch vom Feld H unabhängig wählen.

wo die t^b , $b = 1, \dots, (N-1)(N-2)/2$ die Generatoren der $O(N-1)$ sind. Diese Beziehung beschreibt die Symmetrie des Funktionals bezüglich der π -Felder. Desweiteren existieren Symmetrietransformationen welche in der Darstellung (2.9) nicht offensichtlich sind und die π - und σ -Felder untereinander transformieren, nämlich die Elemente der Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$. Bezüglich der Darstellung in \mathcal{S} sind auch diese Transformationen linear $\delta S^i = \omega_a t_{ij}^a S^j$ (die t^a sind hier gerade jene Generatoren der $O(N)$, welche das Feld S^1 betreffen). In der Parametrisierung (2.2) bewirken die Elemente der Quotientengruppe jedoch die nichtlineare Transformation

$$\delta \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} \equiv \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi}) \quad (2.14a)$$

$$\Rightarrow \quad \delta \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi}) = -\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) . \quad (2.14b)$$

Die Invarianz des Ginzburg-Landau-Funktional⁶ (2.9) gegen die Transformation (2.14) führt zu der folgenden nichtlinearen Ward-Takahashi-Identität

$$0 = \int d^d x \left(H(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \frac{\delta \Gamma(\boldsymbol{\varphi}, H)}{\delta H(\mathbf{x})} \frac{\delta \Gamma(\boldsymbol{\varphi}, H)}{\delta \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})} \right) . \quad (2.15)$$

Das Vertexfunktional muss Gl. (2.15) erfüllen. Berechnet man $\Gamma(\boldsymbol{\varphi}, H)$ nun in Störungstheorie mit regularisierten Integralen, so müssen die verschiedenen Ordnungen, die über die Nichtlinearität in Gl. (2.15) gekoppelt sind, spezielle Bedingungen, welche aus (2.15) folgen, erfüllen. Daraus kann man Ordnung für Ordnung schließen, dass auch das renormierte Ginzburg-Landau-Funktion $\mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}, H)$ die Gleichung (2.15) erfüllt

$$0 = \int d^d x \left(H(\mathbf{x}) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \frac{\delta \mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}, H)}{\delta H(\mathbf{x})} \frac{\delta \mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}, H)}{\delta \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})} \right) . \quad (2.16)$$

Die Lösung von Gl. (2.16) zeigt nun, dass das renormierte Funktional ebenfalls $O(N)$ symmetrisch ist und damit renormiertes und nichtrenormiertes Funktional bis auf einen globalen Faktor (Temperaturrenormierung) und einer Änderung des Radius der Sphäre (Feldrenormierung) identisch sind. Insbesondere renormiert das äußere Feld H trivial, d.h. die entsprechenden Störungsbeiträge sind auf die Feldrenormierung zurückzuführen. Daraus folgt, dass alle in der Störungsreihe auftretenden Terme, welche unabhängig von den äußeren Impulsen sind, für $H=0$ verschwinden müssen. Wenn man mit einer Cutoff-Regularisierung arbeitet, dann werden diese Terme gerade von den Beiträgen des Maßterms eliminiert. Dies bietet einen einfachen Check für die Richtigkeit der Rechnungen.

2.2.3 Störungstheorie und Renormierungskonstanten Mit obigen Folgerungen aus der $O(N)$ -Symmetrie kann das Modell durch die folgenden Ersetzungen renormiert

⁶Das Funktional ist natürlich nur invariant für $H = 0$. Die Änderung des Funktionals bei endlichem H (hier wird H vorübergehend als nicht homogene Funktion $H(\mathbf{x})$ angenommen) führt gerade zu den Ableitungstermen in (2.15).

werden ($\epsilon = d - 2$)

$$\boldsymbol{\pi} = Z^{1/2} \boldsymbol{\pi}_R \quad (2.17a)$$

$$T = \mu^{-\epsilon} Z_t t_R \quad (2.17b)$$

$$H = Z_t Z^{-1/2} H_R. \quad (2.17c)$$

Damit gilt $\sigma = Z^{1/2} \sigma_R$ und $\boldsymbol{\pi}_R^2 + \sigma_R^2 = Z^{-1}$. Das Ginzburg-Landau-Funktional (2.8) ändert seine Form zu

$$\frac{1}{T} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) = \frac{\mu^\epsilon}{t_R} \mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}_R, H_R) \quad (2.18a)$$

$$\mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}_R, H_R) = \frac{Z}{2Z_t} \int d^d x \left\{ \left(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}_R(\mathbf{x}) \right)^2 + \left(\partial_\mu \sigma_R(\boldsymbol{\pi}_R) \right)^2 \right\} - H_R \int d^d x \sigma_R(\boldsymbol{\pi}_R). \quad (2.18b)$$

Aufgrund der Struktur des renormierten Funktionals, muss nicht für jeden Vertex die Renormierung getrennt betrachtet werden, sondern es ist ausreichend, die Renormierung für zwei verschiedene n -Punkt-Vertizes, etwa $\Gamma^{(2)}(\{\mathbf{q}_i\}, H = 0)$ und $\Gamma^{(4)}(\{\mathbf{q}_i\}, H = 0)$, zu berechnen. Aus diesen beiden Relationen kann dann die Feld- und Temperaturrenormierung abgeleitet werden. Noch einfacher ist es, bei endlichem äußeren Feld H , die Renormierung des Zweipunktvertex $\Gamma^{(2)}(\{\mathbf{q}_i\}, H)$ zu betrachten. Da H trivial renormiert, kann man aus der Renormierung des H -Terms und des q^2 -Terms die Konstanten Z und Z_t berechnen.

Um die Z -Faktoren aus (2.17) zu berechnen, führt man am Funktional (2.9) eine Fourier-Transformation durch. Es ist zu beachten, dass der Propagator der π -Felder proportional zur Temperatur ist. D.h. je mehr π -Felder kontrahiert werden, desto größer ist die Ordnung in T . Für die störungstheoretische Berechnung eines N -Punkt-Vertex sind deshalb eine endliche Zahl von Diagrammen ausreichend. Insbesondere ist z.B. der Beitrag des Sechspunkt-Vertex zur Propagatorrenormierung eine Ordnung höher als der Beitrag des Vierpunkt-Vertex, da zwei Felder mehr kontrahiert werden müssen. Für die Propagatorrenormierung reicht es deshalb aus, sich auf den Zweipunkt und den Vierpunkt-Vertex zu beschränken. Die entsprechenden Feynman-Regeln sind in Tab. 2.1 zusammengestellt. Die beiden letzten Zeilen in der Tabelle stammen vom Maßterm (2.5). Da der Maßterm von der Ordnung $\mathcal{O}(T^0)$ ist, wird er rein perturbativ behandelt.

2.3 Renormierungsgruppe des NLS-Modells

Die Durchführung der Renormierung im Rahmen der dimensional Regularisierung erweist sich in den später betrachteten Systemen als nicht praktikabel. Deshalb wird zur Ableitung der *Callan-Symanzik-Gleichungen* jetzt eine Methode benutzt, welche auch in den folgenden Kapiteln funktioniert. Damit wird einerseits die Methode vorgestellt und andererseits gezeigt, dass sie die bekannten Ergebnisse reproduziert. Bei dieser Vorgehensweise wird zur Regularisierung ein Cutoff verwendet und es erweist sich als zweckmäßig, die Temperaturvariable, entsprechend der renormierten Temperatur t_R , durch Extraktion

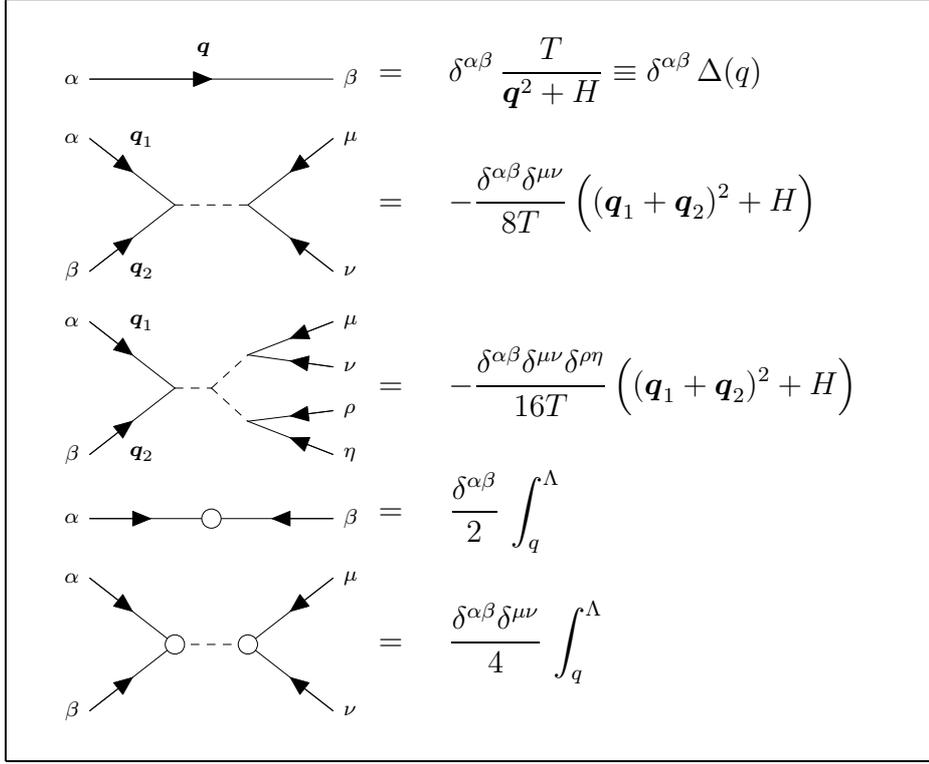


Tabelle 2.1: Feynman Regeln für das nichtlineare σ -Modell.

eines Faktors $\Lambda^{-\epsilon}$ als dimensionslose Größe zu schreiben. Gleichung (2.18a) wird dann ersetzt durch

$$\frac{\Lambda^\epsilon}{t} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) = \frac{\mu^\epsilon}{t_R} \mathcal{H}_R(\boldsymbol{\pi}_R, h). \quad (2.19)$$

Die renormierten Vertex-Funktionen hängen aufgrund der Cutoff-Regularisierung auch von Λ ab. Für diese Vertex-Funktionen werden jetzt folgende Renormierungsbedingungen⁷ aufgestellt

$$\Gamma_R^{(2),\text{H}}(t_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = \mu^\epsilon \quad (2.20a)$$

$$\Gamma_R^{(2),\text{Iso}}(t_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = \mu^\epsilon, \quad (2.20b)$$

wo $\Gamma^{(2),\text{H}}$ und $\Gamma^{(2),\text{Iso}}$ die Beiträge zum äußeren Feld bzw. zum isotropen Austauschterm sind. Die Renormierungskonstanten Z und Z_t können damit bestimmt werden zu

$$Z(t_R, \Lambda/\mu) = 1 - \frac{2t_R}{\mu^\epsilon} \Gamma_{R,1}^{(2),\text{H}}(H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) + \mathcal{O}(t_R^2) \quad (2.21a)$$

$$Z_t(t_R, \Lambda/\mu) = Z(t_R, \Lambda/\mu) \left(1 + \frac{t_R}{\mu^\epsilon} \Gamma_{R,1}^{(2),\text{Iso}}(H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) \right) + \mathcal{O}(t_R^2). \quad (2.21b)$$

⁷Wegen der $O(N)$ -Symmetrie ist $\Gamma^{(2),ij} = \delta^{ij}\Gamma^{(2)}$, deshalb wird im Weiteren immer nur $\Gamma^{(2)}$ betrachtet.

Dabei ist $\Gamma_{R,1}^{(2)}$ der Beitrag erster Ordnung zum Zweipunkt-Vertex

$$\begin{aligned}
\Gamma_{R,1}^{(2)}(q, H_R, \mu, \Lambda) &= -4 \cdot \text{---} \overset{q}{\rightarrow} \text{---} \overset{p}{\circlearrowleft} \text{---} \overset{-q}{\leftarrow} \text{---} - 8 \cdot \text{---} \overset{q}{\rightarrow} \text{---} \overset{p}{\curvearrowright} \text{---} \overset{-q}{\leftarrow} \text{---} - 2 \cdot \text{---} \overset{q}{\rightarrow} \text{---} \text{---} \overset{-q}{\leftarrow} \text{---} \\
&= \left(\mathbf{q}^2 + \frac{(N-1)}{2} H_R \right) \int_p^\Lambda \frac{1}{p^2 + H_R} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Würde man nun die Integrale zur Bestimmung der Z -Faktoren ausrechnen, so hätte man keinen Vorteil (lediglich eine andere Art der Regularisierung). Physikalisch interessant sind aber nicht die Renormierungskonstanten, sondern die Wilson-Funktionen und wie sich zeigen wird, muss zu deren Berechnung das Integral nicht ausgeführt werden.

2.3.1 Callan-Symanzik-Gleichungen der nichtrenormierten Korrelationsfunktionen Wie von Zinn-Justin beschrieben [68, 77] muss man die RNG-Gleichungen nicht notwendigerweise für die renormierten Korrelationsfunktionen ableiten, sondern es ist auch möglich, entsprechende CS-Gleichungen für die nichtrenormierten Größen zu bestimmen. Diese CS-Gleichungen drücken die Invarianz der renormierten Theorie gegen die Cutoff-Abhängigkeit der unrenormierten Theorie aus, d.h. sie folgen allein aus der Existenz der renormierten Theorie.

Zur Ableitung der Gleichungen muss man bedenken, dass die Renormierung gerade so durchgeführt wird, dass für die renormierten Größen der Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ existiert. D.h. die renormierten Größen sind für große Λ im Wesentlichen unabhängig vom Cutoff. Aufgrund von (2.17a) gilt für die Korrelationsfunktionen (A.13) die Beziehung

$$G_R^{(n)}(\{\mathbf{x}_i\}, t_R, H_R, \mu) = Z(t_R, \mu/\Lambda)^{-n/2} \cdot G^{(n)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, H, \Lambda). \quad (2.23)$$

Die linke Seite ist nicht exakt unabhängig vom Cutoff, sondern von der Ordnung $\mathcal{O}(1/\Lambda^2)$. In führender Ordnung kann man aber die Ableitung der linken Seite nach Λ , bei festgehaltenen renormierten Größen, null setzen

$$\Lambda \left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right|_R G_R^{(n)}(\{\mathbf{x}_i\}, t_R, H_R, \mu) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right|_R \equiv \left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right|_{t_R, H_R} \quad (2.24)$$

und es folgen die *Callan-Symanzik-Gleichungen* für das NLS-Modell

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} \zeta(t) + \rho(t) H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, H, \Lambda) = 0, \quad (2.25)$$

mit den Wilson-Funktionen

$$\beta(t) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial t}{\partial \Lambda} \right|_{\mathbb{R}} = t \left(\epsilon + \Lambda \left. \frac{\partial \ln Z_t}{\partial \Lambda} \right|_{\mathbb{R}} \right) \quad (2.26a)$$

$$\zeta(t) \equiv -\Lambda \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \Lambda} \right|_{\mathbb{R}} \quad (2.26b)$$

$$\rho(t) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial \ln H}{\partial \Lambda} \right|_{\mathbb{R}} = \frac{\zeta}{2} + \frac{\beta}{t} - \epsilon. \quad (2.26c)$$

Nun kommt der Vorteil der Cutoff-Regularisierung zum Tragen. Wie man an (2.26) sieht, müssen die Z-Faktoren nach Λ differenziert werden. Aufgrund der Renormierungsbedingungen (2.20) lassen sich die Z-Faktoren aber durch die renormierten Vertex-Funktionen ausdrücken und diese enthalten den Cutoff nur noch als UV-Regulator. Die Integration wird deshalb nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung durch das Auswerten des Integralkerns an der Stelle Λ ersetzt. Wendet man dieses Verfahren auf (2.21) und (2.22) an, so ergibt sich⁸

$$\beta(t) = t \left(\epsilon - \frac{(N-2)}{2\pi} t \right) \quad (2.27a)$$

$$\zeta(t) = \frac{(N-1)}{2\pi} t, \quad (2.27b)$$

wobei für den Oberflächenfaktor $K_d = S_d/(2\pi)^d$ der Wert $1/(2\pi)$ eingesetzt wurde.

Die Beta-Funktion (Abb. 2.3) besitzt einen Tieftemperatur-Fixpunkt bei $t = 0$. Dieser Fixpunkt ist für $d > 2$ IR-stabil und rechtfertigt damit die Anwendung der Störungstheorie um $t = 0$. Für $d > 2$ gibt es noch einen zweiten Fixpunkt bei

$$t_c = (2\pi\epsilon)/(N-2). \quad (2.28)$$

Dieser Fixpunkt ist IR-instabil und beschreibt den Phasenübergang in die Tieftemperaturphase. Für $d=2$ und $N > 2$ wird der Ursprung UV-stabil und die Theorie asymptotisch frei.

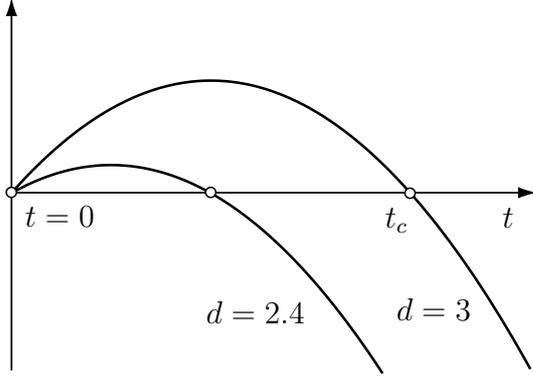
2.3.2 Lösung der CS-Gleichungen Die Lösung der CS-Gleichungen gelingt unter Einführung der fundamentalen Größen [68]

$$\xi(t, \Lambda) = \frac{t^{1/\epsilon}}{\Lambda} \exp \left\{ \int_0^t dt' \left(\frac{1}{\beta(t')} - \frac{1}{\epsilon t'} \right) \right\} = \frac{1}{\Lambda} t^{1/\epsilon} \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{-1/\epsilon} \quad (2.29a)$$

$$M_0(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \frac{\zeta(t')}{\beta(t')} \right\} = \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{2} \frac{N-1}{N-2}} \quad (2.29b)$$

$$K(t) = \frac{M_0(t)}{t} (\Lambda \xi(t, \Lambda))^\epsilon. \quad (2.29c)$$

⁸Bei der Ableitung treten dabei Korrekturen der Ordnung $(\mu/\Lambda)^2$ auf, welche vernachlässigt werden.

**Abbildung 2.3:**

Die Fixpunkte des NLS-Modells für $d=2.4$ und $d=3$. Bei $t=0$ liegt der IR-stabile Tieftemperatur-Fixpunkt, um den die Störungstheorie aufgebaut wird. Der kritische Punkt $t=t_c$ konvergiert für $d \rightarrow 2$ gegen den Tieftemperaturfixpunkt.

Dabei ist ξ die Korrelationslänge, welche den Crossover zwischen Tieftemperatur-Fixpunkt und kritischem Punkt beschreibt. Für $t \rightarrow 0$ verschwindet diese Korrelationslänge und für $t \rightarrow t_c$ divergiert sie. M_0 ist die spontane Magnetisierung des Systems und K eine Hilfsgröße, welche im Tieftemperaturbereich im Wesentlichen konstant wird.

Die Lösung der CS-Gleichungen mit Hilfe von Charakteristiken wird in Anhang B.1 dargestellt. Es ergibt sich

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = M_0^n (HK)^{-(n-1)d/2} g^{(n)}\left(\left\{\frac{\mathbf{q}_i}{\sqrt{HK}}\right\}, \frac{tK^{d/2}}{M_0} \left(\frac{H}{\Lambda^2}\right)^{\epsilon/2}\right). \quad (2.30)$$

Wie sich durch direktes Ausführen der Ableitungen verifizieren lässt, ist dies auch die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.25). Durch Umformung kann sie auch in die Form

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = M_0^n \xi^{d(n-1)} \tilde{g}^{(n)}(\{\mathbf{q}_i \xi\}, \frac{HM_0}{t} \xi^d \Lambda^\epsilon) \quad (2.31)$$

gebracht werden.

2.3.3 Grenzfall $d=2$ In zwei Dimensionen ($N \neq 2$) verschwindet der lineare Term der β -Funktion und der Tieftemperatur-Fixpunkt wechselt sein Verhalten von IR-stabil zu IR-instabil

$$\beta(t) = -\frac{N-2}{2\pi} t^2. \quad (2.32)$$

Der Fixpunkt ist dann UV-stabil, d.h. das nichtlineare σ -Modell in $d=2$ ist eine asymptotisch freie Theorie (für große q), wie etwa die QCD. Wie man unter anderem an den Fluktuationen der Magnetisierung (Anhang B.2.1) erkennen kann, verschwindet die spontane Magnetisierung in $d=2$. Das Integral im Exponenten von (2.29b) divergiert und M_0 wird null. Die Korrelationslänge kann in $d=2$ ($N \neq 2$) berechnet werden zu

$$\xi(t) = \exp\left\{\frac{2\pi}{N-2} \frac{1}{t}\right\}. \quad (2.33)$$

Die Korrelationslänge ist hier für alle Temperaturen endlich und divergiert nur am Tieftemperaturfixpunkt, wo das System ordnet.

2.3.4 Folgerungen aus der RNG Aus den Gleichungen (2.29a) und (2.29b) kann man die Exponenten der Korrelationslänge und der Magnetisierung ablesen. Die weiteren kritischen Exponenten ergeben sich durch Skalenrelationen oder durch direktes Auswerten von (2.30). Das $O(N)$ -symmetrische System besitzt aber nicht nur am kritischen Punkt divergierende Responsefunktionen, sondern auch in der Tieftemperaturphase. Die Ursache dafür sind die Goldstone-Moden des Systems. Da alle Richtungen gleichwertig sind, kostet es keine Energie die Magnetisierung zu drehen. Wird also die $O(N)$ -Symmetrie nicht durch ein äußeres Feld H gebrochen, so divergiert die transversale Korrelationsfunktion für $q \rightarrow 0$. Auch in der longitudinalen Korrelationsfunktion zeigen sich, aufgrund des Einflusses der Goldstone-Moden, diese Koexistenzanomalien.

Die transversale Korrelationsfunktion soll im Folgenden mit $G_T(q, T, H, \Lambda)$ bezeichnet werden. Ihr Integral im q -Raum bestimmt, wie stark die Fluktuationen in der Magnetisierung sind (siehe Anhang B.2)

$$G_T(q, T, H, \Lambda) \equiv \int d^d x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\pi}(0) \rangle . \quad (2.34)$$

Entsprechend gilt für die longitudinale Korrelationsfunktion

$$G_L(q, T, H, \Lambda) \equiv \int d^d x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} (\langle \sigma(\mathbf{x}) \sigma(0) \rangle - \langle \sigma \rangle^2) . \quad (2.35)$$

Die Korrelationsfunktionen sind mit den zugehörigen Suszeptibilitäten über das *Fluktuations-Response-Theorem* verbunden

$$\chi(T, H, \Lambda) = \frac{1}{T} G(\mathbf{q} = 0, T, H, \Lambda) , \quad (2.36)$$

zudem gilt für ein $O(N)$ -symmetrisches System die bekannte Ward-Takahashi-Identität [78]

$$\chi_T = \frac{M}{H} . \quad (2.37)$$

Wie man aus der Struktur der Renormierungsgruppe des nichtlinearen σ -Modells erkennt, wird das Tieftemperaturverhalten der Korrelationsfunktionen durch den Fixpunkt bei $t=0$ bestimmt und somit kann man die Goldstone-Singularitäten aus den niedrigsten Ordnungen der Störungstheorie berechnen. Für die Suszeptibilitäten ergibt sich

$$\chi_T \propto H^{-1} \quad (2.38a)$$

$$\chi_L \propto H^{(d-4)/2} . \quad (2.38b)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit [74, 79] sowie [80] und den darin zitierten Arbeiten. Bei verschwindendem äußeren Feld divergieren die Korrelationsfunktionen bei kleinen Wellenvektoren wie

$$G_T \propto q^{-2} \quad (2.39a)$$

$$G_L \propto q^{d-4} . \quad (2.39b)$$

Dies entspricht den Ergebnissen aus der dynamischen RNG [81] und älteren Rechnungen, wie etwa der Arbeit von Mazenko [82].

Die Singularitäten in den Suszeptibilitäten und den Korrelationsfunktionen, sowie der Fluss der Kopplungskonstante t sind nochmals in Abb 2.4 zusammengefasst. Für $t > t_c$ driftet das System in Richtung Hochtemperaturfixpunkt und für $t < t_c$ in Richtung Tieftemperaturfixpunkt. Bei $t = t_c$ beobachtet man die kritischen Singularitäten. Im Koexistenzbereich befindet sich das System im Einflussgebiet des Tieftemperaturfixpunkts. Hier muss zwischen transversalen und longitudinalen Moden unterschieden werden und es findet ein Crossover der jeweiligen Größen vom kritischen- zum Tieftemperaturverhalten statt.

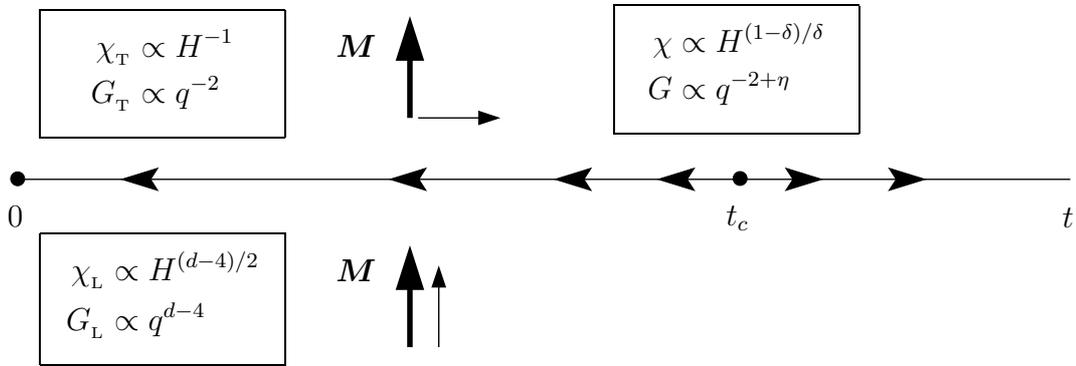


Abbildung 2.4: Singularitäten von Suszeptibilität und Korrelationsfunktion am Tieftemperaturfixpunkt und am kritischen Punkt.

Das nichtlineare σ -Modell ist als Entwicklung um die untere kritische Dimension des $O(N)$ -Heisenberg-Modells offensichtlich geeignet, um Berechnungen in der Nähe von $d=2$ durchzuführen. Insbesondere das Verschwinden des kritischen Punkts in $d=2$ gibt die erwartete Physik richtig wieder. Eine ϵ -Entwicklung des ϕ^4 -Modells ($\epsilon = 4-d$) ergibt hingegen fälschlicherweise auch in $d=2$ einen Phasenübergang. Da die ϵ -Entwicklung als eine Extrapolation des Verhaltens in $d=4$ auf $d < 4$ zu verstehen ist, kann dies auch nicht überraschen.

Auch in den Exponenten der Modelle zeigt sich, dass $d=2$ in der ϵ -Entwicklung des ϕ^4 -Modells keine besondere Rolle spielt (Tab. 2.2), während etwa der Exponent ν im NLS-Modell sogar divergiert für $d \rightarrow 2$. Allerdings darf man daraus nicht schließen, dass das ϕ^4 -Modell die Physik in $d=2$ falsch beschreibt, denn $d=2$ ist gerade die untere kritische Dimension des ϕ^4 -Modells, d.h. der Magnetismus verschwindet und die Fluktuationen divergieren in dieser Dimension. Es ist lediglich die Entwicklung um $d=4$, welche versagt. Wie sich gezeigt hat, sind die Exponenten welche man aus der $d-4$ Entwicklung für das dreidimensionale Heisenberg-Modell bestimmt, wesentlich besser, als die Resultate des nichtlinearen σ -Modells. Dies ist wohl einer der Hauptgründe, wegen denen das ϕ^4 -Modell im Allgemeinen bevorzugt wird. Als Vorteil des NLS-Modells erweist sich sowohl

Modell:	η	$1/\nu$	
NLS-Modell:	$\frac{\epsilon}{N-2} - \frac{(N-1)\epsilon^2}{(N-2)^2}$	$\epsilon + \frac{\epsilon^2}{(N-2)}$	$\epsilon = d - 2$
ϕ^4 -Modell:	$\frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2$	$2 - \frac{N+2}{N+8} \epsilon - \frac{13N^2 + 70N + 88}{2(N+8)^3} \epsilon^2$	$\epsilon = 4 - d$

Tabelle 2.2: Kritische Exponenten des nichtlinearen und des linearen σ -Modells bis zur zweiten Ordnung in ϵ .

in zwei wie auch in höheren Dimensionen, das einfachere und geschlossener Bild, mit dem die Physik der Tieftemperaturphase beschrieben werden kann. Berechnet man bestimmte Eigenschaften, wie etwa die Zustandsgleichung oder Korrelationsfunktionen im Rahmen des ϕ^4 -Modells, so ergeben sich im Allgemeinen komplizierte Ausdrücke, welche die verschiedenen Grenzfälle in Form von Logarithmen enthalten, die sich zu gewissen Potenzen aufsummieren. Im NLS-Modell ist es hingegen oft möglich, geschlossene Ausdrücke für diese Funktionen zu gewinnen (siehe auch Abschnitt 2.4), jedoch mit dem Nachteil, dass die Exponenten weniger gut mit den gemessenen Werten übereinstimmen.

2.4 Ausbau der bekannten Ergebnisse

Von Nelson und Pelcovits wurden mit Hilfe einer Integral Matching-Methode geschlossene Ausdrücke für die Suszeptibilitäten und die Zustandsgleichung des nichtlinearen σ -Modells angegeben [74]. Dazu wurden die interessierenden Größen im unkritischen Bereich mit gewöhnlicher Störungstheorie bestimmt und mit Hilfe der RNG Beziehungen in den kritischen Bereich integriert. Dieses Verfahren wurde mit Hilfe der Wilsonschen Form der Renormierung durchgeführt und ist analytisch sehr aufwendig. Die gleichen Ergebnisse lassen sich im Rahmen der hier vorliegenden feldtheoretischen Formulierung wesentlich leichter erzielen. Ausgangspunkt ist die RNG Beziehung

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = Z^{n/2}(s) (\Lambda s)^{-(n-1)d} \cdot G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i/(\Lambda s)\}, t(s), H(s)/(\Lambda s)^2, 1). \quad (2.40)$$

Die rechte Seite teilt sich auf in einen Vorfaktor, welcher zum einen die Änderungen in der Renormierungsskala s kompensiert und zum anderen die triviale Dimensionabhängigkeit beinhaltet, sowie die Funktion

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i/(\Lambda s)\}, t(s), H(s)/(\Lambda s)^2, 1)$$

die mit Hilfe der renormierten Störungstheorie berechnet werden muss⁹. Wird die Renormierungsskala s geeignet gewählt, so kann man sich auf den ersten Term der Störungsreihe beschränken.

Die in [74] berechneten Suszeptibilitäten kann man im Rahmen der angedeuteten Methode mit Hilfe des Matchings $H(s) = (\Lambda s)^2$ erhalten. Dieses Matching bewirkt, dass man sich bei der Störungstheorie der rechten Seite im unkritischen Bereich befindet (die Goldstone-Singularitäten ergeben sich ja im Limes $H \rightarrow 0$). Entsprechend kann die q -Abhängigkeit der Korrelationsfunktion durch das Matching $\Lambda s = q$ untersucht werden¹⁰. Optimal wäre es, das Matching so zu bestimmen, dass die Störungsreihe für $G^{(n)}$ weder divergiert noch verschwindet, sondern einen endlichen Wert annimmt, da in diesem Fall die wesentlichen Abhängigkeiten im Vorfaktor enthalten sind. Dieses Vorgehen wurde von Amit und Goldschmidt vorgeschlagen, um Crossover Phänomene effektiv zu beschreiben [83] und von Lawrie, im Rahmen des ϕ^4 -Modells, für Renormierungsgruppenrechnungen in der Tieftemperaturphase eines $O(N)$ -Systems verwendet [84, 85]. Da aber in der obigen Störungsreihe der Fixpunktwert des Entwicklungsparameters $t^* = 0$ ist, werden die Korrekturen für $s \rightarrow 0$ immer verschwinden und man muss, für ein festgelegtes Matching, die Abhängigkeiten in $Z(s)$ und $G^{(n)}(s)$ vergleichen, um die dominierenden Anteile zu bestimmen.

2.4.1 Feldabhängige Korrelationsfunktionen Um einen geschlossenen analytischen Ausdruck für die Korrelationsfunktionen bei Anwesenheit eines äußeren Feldes zu erhalten, erscheint es sinnvoll, die beiden im letzten Abschnitt angesprochenen Matchingbedingungen so zu verknüpfen, dass die Störungsreihe außerhalb der kritischen Bereiche $q \rightarrow 0$ und $H \rightarrow 0$ liegt. Dies kann man erreichen durch die Wahl

$$(\Lambda s)^2 = H(s) + q^2 . \quad (2.41)$$

Geht man wie oben beschrieben vor (Details der Rechnung befinden sich in Anhang B.2), so ergibt sich für die Korrelationsfunktionen

$$G_{L/T}(q, t, H, \Lambda) = M_0^2 \xi^d g_{L/T}(x, y) \quad (2.42)$$

mit den Skalenvariablen

$$x = \frac{1}{q\xi} \quad \text{und} \quad y = \frac{HM_0}{t} \Lambda^\epsilon \xi^d , \quad (2.43)$$

⁹Da die RNG-Gleichungen für die nichtrenormierten Korrelationsfunktionen abgeleitet wurden, handelt es sich eigentlich nicht um die renormierte Störungsreihe, sondern um die unrenormierte Störungsreihe, ausgewertet bei einer anderen Impulsskala. Da diese Störungsreihe jedoch die Aufgabe der renormierten Störungstheorie übernimmt, wird sie üblicherweise auch so bezeichnet.

¹⁰Diese Wahl des Matchings bewirkt, dass die Störungsreihe für $G^{(n)}$ frei ist von den Goldstone-Singularitäten für $q \rightarrow 0$ (bei verschwindendem äußeren Feld).

sowie den Skalenfunktionen

$$g_T(x, y) = \frac{\left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{\eta/\epsilon}}{x^{-2} + y \left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{\eta/\epsilon - 2/\delta\epsilon}} \quad (2.44a)$$

$$g_L(x, y) = \frac{(y + x^{-2})^{\epsilon/2}}{t_c \delta} \cdot \frac{\left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{\eta/\epsilon - 1}}{x^{-2} + y \left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{\eta/\epsilon - 2/\delta\epsilon}}, \quad (2.44b)$$

der kritischen Temperatur $t_c = 2\pi\epsilon/(N-2)$ und den kritischen Exponenten

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\epsilon}{4} \frac{N-1}{N-2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\epsilon}{N-2}. \quad (2.45)$$

Die Darstellung der Skalenfunktionen mit Hilfe der kritischen Exponenten ist im Rahmen der 1-loop Rechnung exakt. Für höhere Ordnungen ist sie lediglich antizipiert.

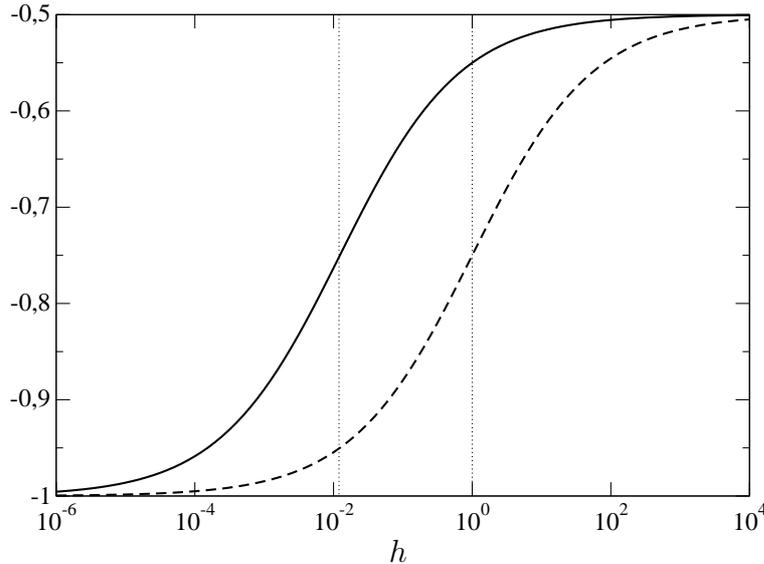


Abbildung 2.5: Der effektive Exponent $\psi_h^T(q=0, t, h, \Lambda=1)$, der transversalen Korrelationsfunktion, aufgetragen für $t=0.9 t_c$ (durchgezogene Linie) und $t=0.5 t_c$ (gestrichelte Linie), bei $n=3, d=3$. Eingezeichnet sind auch die Crossoverkalen $\bar{h}(t)$, gemäß Gl. (2.47).

Um den Crossover der Korrelationsfunktionen zwischen den verschiedenen Regimes darzustellen, ist es günstig den effektiven Exponenten

$$\psi_X^{T/L}(q, t, h, \Lambda) = X \frac{\partial}{\partial X} \ln G_{T/L}(q, t, h, \Lambda) \quad (2.46)$$

zu berechnen. Dabei ist X typischerweise $h = H/\Lambda^2$ oder q . In Abb. 2.5 ist der effektive Exponent bezüglich der h -Abhängigkeit der transversalen Korrelationsfunktion für zwei

verschiedene Temperaturen dargestellt. Für $h \rightarrow 0$, also im linken Teil des Graphen, zeigt sich die Goldstone-Singularität, während für größere Werte von h ein Crossover zum kritischen Verhalten stattfindet, wobei sich für die gezeigten Werte $n = 3$ und $d = 3$ im Rahmen der 1-loop Rechnung hier gerade der Wert -0.5 für den Exponenten ergibt. Ist die Temperatur weiter weg von t_c , so findet der Crossover zum kritischen Verhalten erst bei höheren Feldern statt. Für die in Abb. 2.5 verwendeten Werte, kann aus Gl. 2.44 abgelesen werden, dass der Crossover in etwa bei

$$\bar{h} = \left(\frac{t_c}{\bar{t}} - 1 \right)^2 \quad (2.47)$$

stattfindet. Im Allgemeinen bestimmt das Verhältnis $h/\tau^{\delta\beta}$ die Größe von y und damit die Crossoverskala (siehe Abschnitt 2.4.2). Der Übergang zwischen Goldstone- und kritischen Singularitäten als Funktion der Temperatur ist in Abb. 2.6 gezeigt. Auch hier ist klar zu beobachten, dass der Crossover zum kritischen Verhalten umso später stattfindet, je kleiner das angelegte Feld ist.

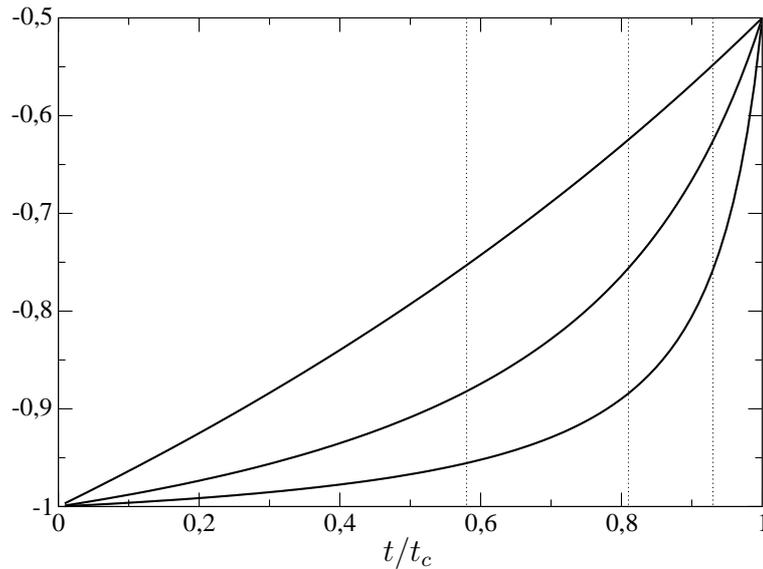


Abbildung 2.6: Effektiver Exponent $\psi_h^T(q=0, t, h, \Lambda=1)$ der transversalen Korrelationsfunktion in Abhängigkeit von der Temperatur, gezeichnet für die Werte $n = 3$ und $d = 3$. Die Kurven entsprechen (von oben nach unten) den Werten $h = 0.5$, $h = 0.05$ und $h = 0.005$. Desweiteren sind die Crossoverskalen $\bar{t}(h)$ gemäß Gl. (2.47) eingezeichnet.

Um die Abhängigkeit der transversalen Korrelationsfunktion vom Wellenvektor q zu untersuchen, kann man nun in Gl. (2.46) $X = q$ wählen. Für die üblicherweise interessierenden Werte $n = 3$ und $d = 3$ besitzt der kritische Exponent η den relativ großen Wert 1. Dies entspricht dem bereits erwähnten Befund, dass die kritischen Exponenten des NLS-Modells bezüglich der ϵ -Entwicklung wesentlich langsamer konvergieren als die Exponenten des ϕ^4 -Modells. Um den Vorteil der analytischen Einfachheit mit den besseren Exponenten des ϕ^4 -Modells zu verbinden, könnte man deshalb versuchen, in Gl. (2.44)

nicht die Exponenten des NLS-Modells zu verwenden, sondern andere Werte, welche etwa durch Resummation der $(4-d)$ -Entwicklung gewonnen wurden. In Abb. 2.7 ist die

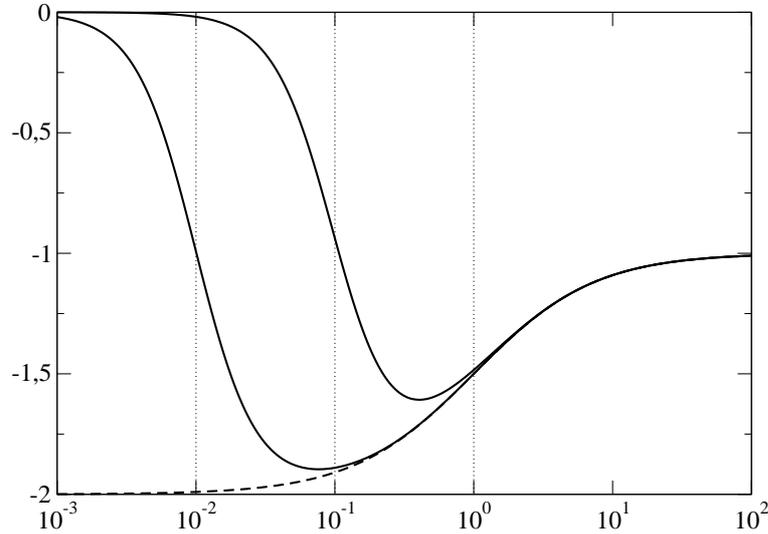


Abbildung 2.7: Effektiver Exponent $\psi_q^T(q, t, h, \Lambda = 1)$ der transversalen Korrelationsfunktion, als Funktion des Wellenvektors $\hat{q} = q/\Lambda$, gezeichnet für $n = 3$, $d = 3$ und eine Temperatur $t = 0.5 t_c$. Die gestrichelte Linie entspricht der Situation ohne äußerem Feld. Die durchgezogenen Linien entsprechen (von oben nach unten) den Werten $h = 10^{-2}$ und $h = 10^{-4}$. Desweiteren sind links die beiden Crossoverkalen $\hat{q} = \sqrt{h}$ und rechts die Skala $\bar{q}(t, H) \approx \bar{q}(t)$ gemäß Gl. (2.48) gezeichnet.

transversale Korrelationsfunktion mit den Exponenten des NLS-Modells gezeichnet. An der Kurve für $h = 0$ ist der Crossover zwischen Goldstone- und kritischer Singularität zu erkennen. Durch Einschalten eines kleinen äußeren Feldes wird die Goldstone-Singularität eliminiert und die Korrelationsfunktion wird endlich für kleine q . Trotzdem zeigt die Funktion für größere Werte von q wieder den Crossover zum kritischen Verhalten. Das System besitzt nun zwei Crossoverkalen. Die erste ist definiert durch $\hat{q}^2 = h$ und charakterisiert den Übergang zum Goldstone-Verhalten (die beiden in Abb. 2.7 links gezeichneten Linien). Die zweite Skala bestimmt wie vorher den Übergang zum kritischen Verhalten und ist definiert durch

$$\bar{q}^2 + \bar{h} = \left(\frac{t_c}{t} - 1 \right)^2. \quad (2.48)$$

Wenn, wie in Abb. 2.7, die Felder klein sind, kann der Beitrag von h in obiger Formel vernachlässigt werden. Aus diesem Grund fallen die beiden zweiten Crossoverkalen in Abb. 2.7 zu einer Linie (zur rechten Linie) zusammen.

Mit den Exponenten des nichtlinearen σ -Modells ergibt sich im Rahmen der 1-loop Theorie für die longitudinale Korrelationsfunktion kein interessanter Crossover, da Goldstone- und kritische Singularität für $n = 3$, $d = 3$ zufällig den gleichen Exponenten besitzen.

2.4.2 Skalenform der Korrelationsfunktionen Die Funktionen (2.42) besitzen exakt die Skalenform der allgemeinen Lösung (2.31). Für die Umgebung des kritischen Punkts kann man t durch t_c ersetzen und es gilt

$$y = t^{d\nu-1} \frac{h}{\tau^{\delta\beta}} \rightarrow t_c^{d\nu-1} \frac{h}{\tau^{\delta\beta}}, \quad \tau = 1 - \frac{t}{t_c}, \quad (2.49)$$

mit den Exponenten β und ν gemäß (2.29)

$$\beta = \frac{N-1}{2(N-2)} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.50)$$

Formt man den Vorfaktor in (2.42) ebenfalls um, so sieht man, dass die Korrelationsfunktionen im kritischen Bereich die übliche Skalenform besitzen

$$G_{L/T}(q, t, H, \Lambda) = \tau^{-\gamma} \cdot \bar{g}_{L/T} \left(\frac{1}{q\xi}, \frac{h}{\tau^{\delta\beta}} \right) \quad (2.51)$$

mit

$$\bar{g}_{L/T}(x_1, x_2) = \Lambda^{-d} t_c^{d\nu} g_{L/T}(x_1, t_c^{d\nu-1} x_2) \quad (2.52)$$

und dem kritischen Exponenten γ

$$\gamma = \frac{2}{\epsilon}. \quad (2.53)$$

Hierbei muss man beachten, dass aufgrund der Goldstone-Singularitäten die Skalenfunktion auf der rechten Seite von (2.51) nicht endlich ist für $q = 0$, $H = 0$. Im Gegensatz zur paramagnetischen Phase gibt γ deshalb nicht auf einfache Weise die Divergenz der Suszeptibilität bei Annäherung an den kritischen Punkt wieder.

2.4.3 Grenzfälle der Korrelationsfunktionen Für $q = 0$ erhält man aus (2.42) gemäß dem Fluktuations-Response-Theorem die Suszeptibilitäten ($h = H/\Lambda^2$)

$$\chi_T(t, h, \Lambda) = \frac{\Lambda^{-2}}{h} \left(1 + \frac{t}{t_c} (h^{\epsilon/2} - 1) \right)^{2/\delta\epsilon} \quad (2.54a)$$

$$\chi_L(t, h, \Lambda) = \frac{t}{t_c \delta} \frac{\Lambda^{-2}}{h^{(4-d)/2}} \left(1 + \frac{t}{t_c} (h^{\epsilon/2} - 1) \right)^{2/\delta\epsilon-1}. \quad (2.54b)$$

Gemäß der Identität (2.37) folgt weiter die Magnetisierung aus der transversalen Suszeptibilität

$$M(t, h) = \left(1 + \frac{t}{t_c} (h^{\epsilon/2} - 1) \right)^{2/\delta\epsilon}. \quad (2.55)$$

Wie man durch Umformung sieht, besitzt auch die Zustandsgleichung die von der allgemeinen Lösung (2.31) geforderte Skalenform

$$M(t, h) = M_0 \cdot f(y), \quad f(y) = y^{1/\delta} (t_c^{-1} + y^{-\epsilon/2})^{2/\delta\epsilon}. \quad (2.56)$$

Die Ergebnisse (2.54) und (2.55) stimmen mit den Resultaten von Nelson und Pelcovits [74] überein.

Für verschwindendes äußeres Feld reduzieren sich die Korrelationsfunktionen auf die Wellenvektorabhängigkeit ($\hat{q}=q/\Lambda$)

$$G_{\text{T}}(\hat{q}, t, \Lambda) = \Lambda^{-d} t \hat{q}^{-2} \left(1 + \frac{t}{t_c} (\hat{q}^\epsilon - 1) \right)^{\eta/\epsilon} \quad (2.57a)$$

$$G_{\text{L}}(\hat{q}, t, \Lambda) = \Lambda^{-d} \frac{t^2}{t_c \delta} \hat{q}^{d-4} \left(1 + \frac{t}{t_c} (\hat{q}^\epsilon - 1) \right)^{\eta/\epsilon-1} . \quad (2.57b)$$

Die Funktionen erfüllen die Grenzfälle, wie sie in Abb. 2.4 dargestellt sind.

2.5 XY-Systeme

Der Fall $N = 2$ unterscheidet sich qualitativ von den anderen Fällen. Obwohl für $d > 2$ eigentlich ein Phasenübergang bei einer endlichen Temperatur zu erwarten wäre, sieht man an (2.28), dass die kritische Temperatur divergiert. Es ist deshalb zu erwarten, dass im Rahmen des nichtlinearen σ -Modells lediglich das Tieftemperaturverhalten physikalisch zutreffend beschrieben wird. Die Ursache für die Divergenz der kritischen Temperatur, ist vermutlich das Verschwinden des Maßterms für $N = 2$. Benutzt man als Parametrisierung des Kreises Polarkoordinaten

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{x}) \\ \pi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{x}) \\ \sin \theta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} , \quad (2.58)$$

so verschwindet die Funktionaldeterminante. Die entsprechende Störungstheorie ist dann identisch mit der Störungstheorie im euklidischen Raum. Da es aber gerade die globalen Eigenschaften der Sphäre sind, welche analytisch den Phasenübergang bestimmen, sind die gemachten Näherungen hier etwas zu grob und der kritische Punkt rückt ins Unendliche.

Betrachtet man das Modell in den Koordinaten (2.58) und bei verschwindendem äußeren Feld, so geht die Zustandssumme (2.6) über in

$$Z = \int \mathcal{D}(\theta) \exp \left\{ -\frac{\Lambda^\epsilon}{2t} \int d^d x (\partial_\mu \theta(\mathbf{x}))^2 \right\} . \quad (2.59)$$

Dies ist offensichtlich eine freie Theorie. Es gibt keine Vertizes, welche die Parameter renormieren. Der Fluss in der Kopplungskonstante existiert nur aufgrund der Skalenabhängigkeit von $T = t\Lambda^{-\epsilon}$. Die β -Funktion ist in Übereinstimmung mit (2.27a) identisch $t\epsilon$.

Auch das Feld $\cos \theta$ (bzw. $\sin \theta$) muss renormiert werden, wie man an der Berechnung der Korrelationsfunktionen sieht. Alle Felderwartungswerte können mittels der Identität

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{und} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (2.60)$$

als Kombination von Korrelationsfunktionen obiger Exponentialfunktionen dargestellt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n,m} \kappa_n \kappa_m \Delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) \right\}, \quad \kappa_n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \kappa_n^2 \Delta(0) - \sum_{n < m} \kappa_n \kappa_m \Delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

wo $\Delta(\mathbf{x})$ der Propagator des XY-Modells für $H = 0$ ist.

$$\Delta(\mathbf{x}) = T \int_q \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{q^2} \quad (2.62)$$

Der Propagator ist für $\mathbf{x} = 0$ UV-divergent. Die daraus folgenden UV-Divergenzen in obigen Korrelationsfunktionen können durch eine Feldnormierung beseitigt werden

$$e^{i\theta(\mathbf{x})} \rightarrow Z e^{i\theta(\mathbf{x})}, \quad Z = e^{-\Delta(0)}. \quad (2.63)$$

Für $d = 2$ ist der Propagator auch IR-divergent und muss regularisiert werden. Dazu wird im XY-Modell meist die Systemausdehnung L verwendet (siehe Paragraph 2.5.2). Man kann aber analog zum NLS-Modell ein äußeres Feld als IR-Regulator benutzen. Die Feldnormierungskonstante lautet dann

$$Z = \exp \left\{ -T \int_q \frac{1}{q^2 + H} \right\}. \quad (2.64)$$

Für das NLS-Modell ergibt die Auswertung von (2.21a) hingegen

$$Z = 1 - t_R \int_q^\Lambda \frac{1}{q^2 + \mu^2}. \quad (2.65)$$

Wie man sieht, ist dies gerade die erste Ordnung des Ergebnisses (2.64)¹¹. Das exakte Resultat (2.64) wird also im Rahmen des nichtlinearen σ -Modells perturbativ richtig wiedergegeben¹². Solange man sich auf eine endliche Ordnung in der Störungstheorie konzentriert, sind NLS-Modell und die Polarkoordinatenparametrisierung des XY-Modells kompatibel. Berücksichtigt man kompliziertere Wechselwirkungen, wie etwa die Dipolwechselwirkung, so kann auch in Polarkoordinaten nicht mehr exakt gerechnet werden, so dass der Vorteil dieser Parametrisierung verloren geht. In dieser Situation kann es dann von Vorteil sein, wieder auf die Darstellung im Rahmen des NLS-Modells (mit $N = 2$) zu wechseln.

¹¹Die Unterschiede in den Bezeichnungen sind lediglich eine Folge des etwas unterschiedlichen formalen Vorgehens.

¹²Die β -Funktionen stimmen sogar exakt überein!

2.5.1 XY-Modell für $d > 2$ Für Dimensionen größer zwei befindet man sich, aufgrund der divergierenden kritischen Temperatur, immer im Tieftemperaturbereich des Modells. Korrelationslänge und spontane Magnetisierung verhalten sich nach (2.29) wie

$$\xi(t) = \frac{1}{\Lambda} t^{1/\epsilon} \quad (2.66a)$$

$$M_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{4\pi\epsilon}\right). \quad (2.66b)$$

Wie zu erwarten, divergiert die Korrelationslänge erst bei $t = \infty$ und ebenso verschwindet die Magnetisierung erst im Unendlichen.

2.5.2 Zweidimensionales XY-Modell In $d = 2$ wird $T \equiv t$ dimensionslos und die β -Funktion verschwindet exakt. D.h. jeder Punkt zwischen $t = 0$ und $t = \infty$ wird zum Fixpunkt. Der Propagator (2.62) ist in zwei Dimensionen nicht nur UV- sondern auch IR-divergent (siehe Anhang C.1). Die divergenten Anteile sind

$$\Delta(0) = \frac{t}{2\pi} \ln(\Lambda L) \quad (2.67a)$$

$$\Delta(\mathbf{x}) \approx \frac{t}{2\pi} \ln(L/|\mathbf{x}|), \quad \text{für } |\mathbf{x}| > a, \quad (2.67b)$$

mit der Gitterkonstanten a und der Systemausdehnung L , welche als IR-Regulator benutzt wird. Damit folgt für die Korrelationsfunktion (2.61)

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{t}{4\pi} \ln(\Lambda a_0) \sum_n \kappa_n^2 + \frac{t}{2\pi} \sum_{n < m} \kappa_n \kappa_m \ln\left(\frac{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|}{a_0}\right) \right. \\ \left. - \frac{t}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{a_0}\right) \left(\sum_n \kappa_n\right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

plus konstanter Anteile (die Länge a_0 ist willkürlich und wurde lediglich aus Dimensionsgründen eingeführt). Der erste Term ist UV-divergent und wird durch die Feldrenormierung kompensiert. Der dritte Term regularisiert die IR-Divergenz und wächst gegen negativ unendlich für $L \rightarrow \infty$. Deshalb verschwinden alle Korrelationsfunktionen für welche

$$\sum_n \kappa_n = 0 \quad (2.69)$$

nicht erfüllt ist. Dies ist gerade die Bedingung dafür, dass eine Korrelationsfunktion $O(N)$ -invariant ist¹³. Für $d = 2$ verschwinden somit alle nicht $O(N)$ -invarianten Korrelationsfunktionen in einem unendlich ausgedehnten System. Insbesondere gilt

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad \text{in } d = 2, \quad (2.70)$$

¹³ $O(N)$ -Invarianz bedeutet, dass sich die Korrelationsfunktion (2.61) nicht ändert, wenn zu allen $\theta(\mathbf{x}_i)$ ein Wert θ_0 addiert wird. Aus dieser Bedingung folgt (2.69)

d.h. die Bedingung (2.69) erzwingt die Einhaltung des Mermin-Wagner-Theorems.

Für alle $O(N)$ -invarianten Korrelationsfunktionen folgt nach Beseitigung der UV-Divergenzen

$$\left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle \rightarrow \prod_{n < m} \left(\frac{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|}{a_0} \right)^{\kappa_n \kappa_m t / 2\pi} \quad (2.71)$$

und insbesondere ergibt sich für $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle = \text{Re} \left\langle e^{i(\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}'))} \right\rangle \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-t/2\pi} . \quad (2.72)$$

Die Korrelationsfunktion des zweidimensionalen XY-Modells ist also für alle Temperaturen algebraisch, mit einem Exponenten

$$\eta = t/2\pi . \quad (2.73)$$

Dies war zu erwarten, da ja die β -Funktion für alle Temperaturen verschwindet. Das XY-Modell in zwei Dimensionen ist offensichtlich an der Schwelle eines Phasenübergangs. Das Ausbilden einer spontanen Magnetisierung wird aber durch die starken Fluktuationen verhindert. Überraschend wäre es, wenn diese Phase kritischen Verhaltens bis zu unendlich hohen Temperaturen fortbestehen würde. Wie sich aber zeigt, existiert für eine endliche Temperatur ein Übergang in eine Phase mit exponentiell abfallender Korrelationsfunktion (siehe Abschnitt 2.5.3).

Führt man ein äußeres Feld ein, so erhält man folgende Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}(\theta) \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \int d^2x (\partial_\mu \theta(\mathbf{x}))^2 + \frac{H}{t} \int d^2x \cos \theta(\mathbf{x}) \right\} . \quad (2.74)$$

Bei entsprechender Definition der Kopplungskonstanten entspricht dies dem *Sine-Gordon-Modell*. Die Feldabhängigkeit die man daraus für das XY-Modell gewinnt, ist algebraisch. Wie die RNG-Rechnungen in Anhang C.2 zeigen, gilt

$$M(h) = \langle e^{i\theta} \rangle \propto h^{t/(8\pi-t)} . \quad (2.75)$$

Dieses Resultat stimmt mit den Rechnungen von Berezinskiĭ [8] und den Ergebnissen der Näherungsmethode von Pokrovskii und Uimin [51] überein. Entsprechend folgt für die Divergenzen von Suszeptibilität und Korrelationsfunktion

$$\chi(h) \propto h^{-1+t/(8\pi-t)} \quad (2.76a)$$

$$G(q) \propto q^{-2+t/(2\pi)} . \quad (2.76b)$$

Für $t=0$ und im Limes $d \rightarrow 2$ ist dies in Übereinstimmung mit den Goldstone-Singularitäten (2.54), (2.57). In diesem Limes ist die Divergenz von longitudinalen und transversalen Moden identisch, da es keine spontane Magnetisierung gibt.

Die Ergebnisse (2.75), (2.76) werden offensichtlich sinnlos für $t \geq 8\pi$. Die Ursache ist, dass bei $t = 8\pi$ der Operator $\cos \theta$ marginal wird, so dass sich die Systemeigenschaften fundamental ändern. Dieses Verhalten der Theorie kann durch verschiedene Abbildungen

auf andere Modelle verstanden werden (siehe [68], Kap. 31 und 32). Desweiteren sind bislang die Vortexanregungen des Systems vernachlässigt worden (Paragraph 2.5.3). Das bedeutet einen Fehler, welcher umso größer wird, je mehr man sich der Übergangstemperatur t_c^v des Kosterlitz-Thouless-Übergangs annähert. Für $t > t_c^v$ ist das Verhalten des Systems schließlich qualitativ von den hier skizzierten Eigenschaften verschieden. Da im Rahmen der Näherungen von Kosterlitz und Thouless $t_c^v < \pi/2$ gilt, wird die Gültigkeit obiger Formeln vor allem durch den vernachlässigten Einfluss der Vortizes beschränkt.

2.5.3 Kosterlitz-Thouless-Übergang Wie Hochtemperaturentwicklungen zeigen [86–88], besitzt auch das 2d XY-Modell eine Hochtemperaturphase mit endlicher Korrelationslänge. Die Tieftemperaturphase besitzt hingegen algebraische Korrelationen [8, 89], wie auch die einfachen Betrachtungen des letzten Paragraphen gezeigt haben. Wie schon früh von Stanley und Kaplan vermutet [90], muss es also einen Phasenübergang im zweidimensionalen XY-Modell geben. Von Berezinskiĭ [8] wurde gezeigt, dass dieser Phasenübergang mit der Existenz einer *transversalen Steifigkeit* zusammenhängt. Beschreibt man mit dem XY-Modell den suprafluiden Phasenübergang in He^4 , so entspricht die transversale Steifigkeit gerade der Dichte der suprafluiden Phase. Die Existenz dieser transversalen Steifigkeit ist mit der globalen Struktur der Sphäre bzw. mit der Periodizität der Parametrisierung (2.58) verknüpft. In der Näherung des letzten Paragraphen wurde diese Periodizität und damit gewisse lokale Minima des Ginzburg-Landau-Funktional (2.59), welche man als Vortizes bezeichnet, vernachlässigt. Ein Vortex besitzt einen Kern \mathbf{x}_i und eine topologische Ladung q_i (Abb. 2.8).

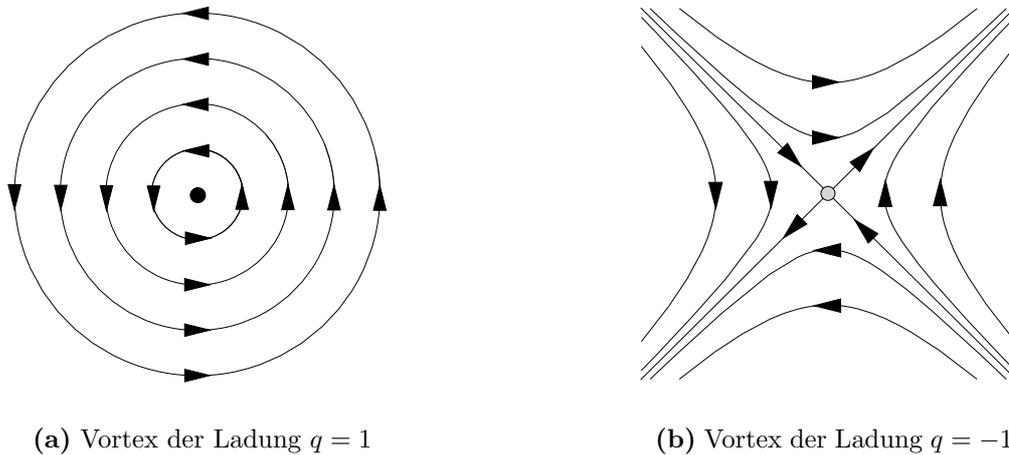


Abbildung 2.8: Vortizes verschiedener topologischer Ladung. Das Kreisintegral des Vektorfeldes um den Kern, ergibt gerade die topologische Ladung. Für ein kontinuierliches Vektorfeld, ist der Kern des Vortex ein singulärer Punkt.

Die Feldverteilung der Vortizes muss das Ginzburg-Landau-Funktional (2.59) minimieren und deshalb die zweidimensionale Laplace-Gleichung erfüllen. Eine Lösung dieser

Gleichung mit Vortizes an den Positionen \mathbf{x}_i ist

$$\theta(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \arctan \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right). \quad (2.77)$$

Die Energie eines isolierten Vortex divergiert für ein unendlich ausgedehntes System. Dies ist verständlich, wenn man beachtet, dass der Vortex das Feld im gesamten Raum verzerrt und insbesondere die langreichweitige Ordnung zerstört. Kombiniert man jedoch Vortizes derart, dass die Summe der Ladungen verschwindet, so ist die Energie dieser Anordnung endlich und das Feld wird nur lokal verzerrt (Abb. 2.9).

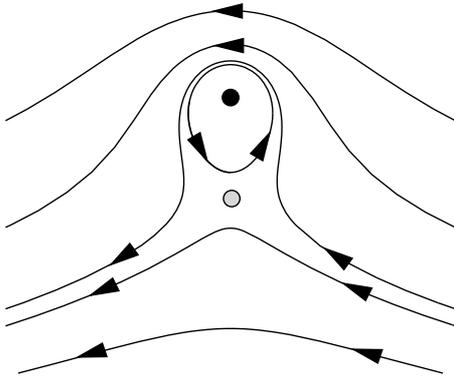


Abbildung 2.9:

Die Kombination eines Vortex mit $q = 1$ und $q = -1$ verzerrt das Feld nur lokal. Die Energie einer solchen Anordnung ist auch bei unendlich ausgedehnten Systemen endlich.

Wie von Kosterlitz und Thouless gezeigt wurde, besteht der Phasenübergang im 2d XY-Modell in einem Übergang von einer Tieftemperaturphase, in welcher die Vortizes in Paaren eng gebunden sind, zu einer Hochtemperaturphase in welcher die Abstände zwischen den einzelnen Vortizes groß werden und die Vortexpaare entbinden. Durch das Auftreten freier Vortexpaare wird die algebraische Ordnung der Tieftemperaturphase zerstört und die Korrelationsfunktion fällt exponentiell ab [9, 18, 19]. Im erweiterten Villain-Modell beschreibt man das System mit Hilfe des Ginzburg-Landau-Funktional

$$\mathcal{H}(\theta, \{q_i, \mathbf{x}_i\}) = \frac{1}{2t} \int d^2x (\partial_\mu \theta(\mathbf{x}))^2 - \frac{\pi}{t} \ln \left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{a_0} \right)^{q_i q_j} + \frac{\mu}{t} \sum_i q_i^2. \quad (2.78)$$

Dabei ist μ das chemische Potential für die Erzeugung eines Vortex und a_0 eine willkürliche Länge, die aus Dimensionsgründen eingeführt wird. Die Renormierungsgruppentheorie zeigt nun, dass die Parameter μ und t den RNG-Fluss von Abb. 2.10 besitzen. Die Separatrix, welche für $t = \pi/2$ die Linie $y = 0$ trifft, teilt den Graphen in drei Bereiche. Im Bereich I, also in der Tieftemperaturphase, renormiert das chemische Potential gegen unendlich, so dass Vortexanregungen irrelevant sind. Die Korrelationslänge ist unendlich und man beobachtet algebraische Korrelationen. Der Bereich II ist die Hochtemperaturphase. Hier verringert der RNG-Fluss das chemische Potential und es treten freie Vortizes auf. Die Korrelationslänge ist endlich und divergiert mit Annäherung an die kritische Temperatur. Diese Divergenz ist nicht algebraisch, sondern es gilt

$$\xi \propto \exp \left\{ \frac{b}{\sqrt{\tau}} \right\}, \quad \tau = \frac{t - t_c}{t_c}, \quad (2.79)$$

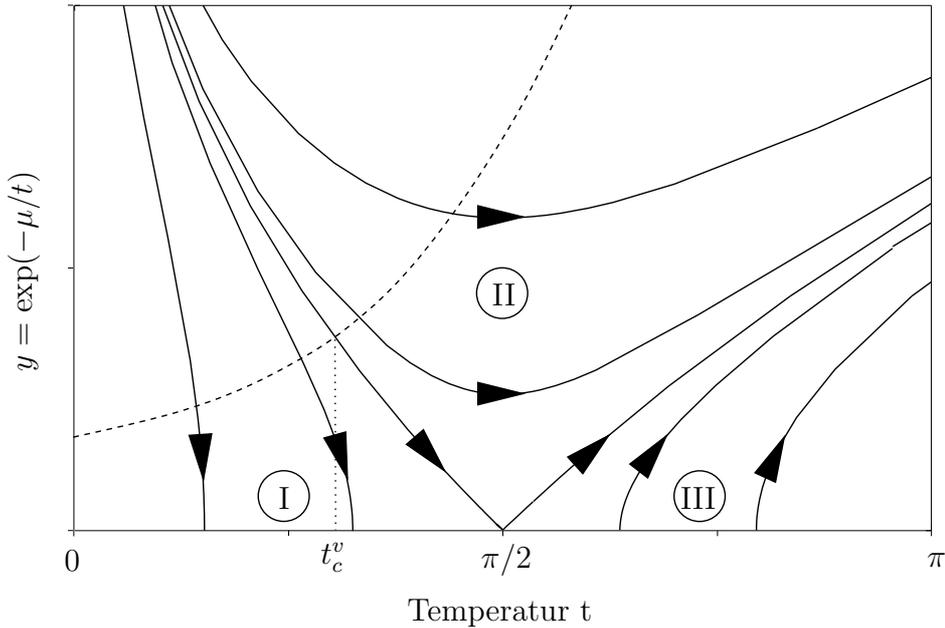


Abbildung 2.10: RNG-Fluss des Kosterlitz-Thouless-Übergangs. Für $t < \pi/2$ renormiert das chemische Potential μ gegen ∞ , d.h. in der Tieftemperaturphase sind Vortexanregungen nicht relevant. Für $t > \pi/2$ können die Vortexpaare jedoch entbinden, die algebraische Ordnung der Tieftemperaturphase wird zerstört und es existiert eine endliche Korrelationslänge.

mit einer nichtuniversellen Konstanten b . Der Bereich III ist physikalisch nicht realisiert.

Weil das chemische Potential nicht unabhängig ist, sondern als Funktion der Temperatur bestimmt werden kann, besitzt das System eigentlich nur einen freien Parameter. Die Anfangswerte des Systems liegen deshalb auf einer Kurve im Graphen (symbolisch als gestrichelte Kurve in Abb. 2.10 gezeichnet). Die tatsächliche Übergangstemperatur des Kosterlitz-Thouless-Übergangs ist dementsprechend t_c^v .

Da die Korrelationslänge nicht algebraisch divergiert, kann man keinen Exponenten ν definieren. Man kann aber alle Divergenzen durch die Korrelationslänge ausdrücken. Die entsprechenden Exponenten erfüllen die gewöhnlichen Skalenrelationen. Es ergibt sich

$$\eta = 1/4 \quad (2.80a)$$

$$\delta = 15. \quad (2.80b)$$

Die spezifische Wärme divergiert nicht am Phasenübergang, sondern verschwindet mit einem Exponenten $\alpha/\nu = -2$. Dieses Verhalten kann man experimentell natürlich nicht beobachten, da es von anderen Effekten überdeckt wird.

Interessanterweise kann man auch das System (2.78) wieder auf ein Sine-Gordon-Modell abbilden. Im Gegensatz zu (2.74) ist dann aber nicht das Tieftemperaturverhalten relevant, sondern die Eigenschaften des Modells am Punkt $t = 8\pi$, wo der Operator $\cos \theta$ marginal wird und die Tieftemperaturentwicklung vollständig zusammenbricht. Die Renormierung muss in der Umgebung dieses Punkts in einer zweifachen Entwicklung für

kleine H und $\delta = t - 8\pi$ durchgeführt werden [91]. Diese Vorgehensweise ist die Basis einer ausführlichen feldtheoretischen Untersuchung des Kosterlitz-Thouless-Übergangs im Rahmen des Sine-Gordon-Modells [91]. Eine wichtige Rolle spielt dabei auch die Abbildung des Sine-Gordon-Modells auf das massive Thirring Modell [92]. Mittels dieser Abbildung kann das Verhalten des Systems unter Renormierung im Rahmen des fermionischen Systems untersucht und z.B. die β -Funktion bestimmt werden.

KAPITEL III

Langreichweitiges XY-Modell

In diesem Kapitel wird die Erweiterung des zweikomponentigen nichtlinearen σ -Modells um eine langreichweitige Kraft betrachtet. Die Kraft soll dabei die Form der Dipolwechselwirkung besitzen, jedoch mit einfacheren Symmetrieeigenschaften. Der Grund für die Festlegung $N=2$ ist die Kopplung von Raumdimension und Spinkomponenten (siehe Kapitel 4) aufgrund der Dipolwechselwirkung zu $N=d$. Zwar wäre es für das in diesem Kapitel betrachtete isotrope System leicht möglich ein $N \neq 2$ zu verwenden, aber dies wäre dann nicht mehr als dipolartige Kraft interpretierbar.

Erweitert man das isotrope, kurzreichweitige XY-Modell um die Dipolwechselwirkung, so erhöht sich die Komplexität auf zweierlei Weise. Zum Ersten wird das Modell langreichweitig, aufgrund der nichtlokalen Struktur der Dipolwechselwirkung. Zum Zweiten zerstört die Dipolwechselwirkung die ursprünglich vorhandene Rotationssymmetrie im Spinraum. Wegen der analytischen Struktur der Dipolwechselwirkung ist fortan der Hamilton-Operator nur noch invariant bei gleichzeitiger Drehung der Spins und des unterliegenden Gitters. Die erste der beiden Modifikationen, nämlich die Einführung einer langreichweitigen Wechselwirkung, ist notwendig, wenn man ein XY-System mit dipolartigen Kräften und spontaner Magnetisierung untersuchen will. Der anisotrope Charakter der Dipolwechselwirkung stellt hingegen lediglich eine zusätzliche Komplikation dar. Begibt man sich auf die Suche nach einem Modellsystem, das die fundamentalen Eigenschaften, nicht aber die volle Komplexität besitzt, so liegt es deshalb nahe, die Dipolwechselwirkung in einer Weise abzuändern, welche die Langreichweitigkeit erhält, die Anisotropie jedoch außer Acht lässt. Das kann man durch die Ersetzung

$$\int d^2x d^2x' \frac{(\nabla \mathbf{S}(\mathbf{x}))(\nabla' \mathbf{S}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \rightarrow \quad \int d^2x d^2x' \frac{(\partial_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}))(\partial'_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

erreichen¹. Das dadurch beschriebene System wird im Weiteren als langreichweitiges XY-Modell (*LXY-Modell*) bezeichnet. Nimmt man den Austauschterm hinzu, so lautet das Ginzburg-Landau-Funktional

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}))^2 + \frac{G}{4\pi} \int d^2x d^2x' \frac{(\partial_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}))(\partial'_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.1)$$

¹Die Ausdrücke werden für $d = 2$ formuliert, weil entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.2.1 in fixer Dimension $d = 2$ gerechnet werden muss.

Bezüglich der kritischen Phänomene sollte sich das LXY-Modell sehr ähnlich wie das System mit der vollen Dipolwechselwirkung verhalten. Vernachlässigt wird aber die Kopplung von Spin- und Ortsfreiheitsgraden. Als Folge dieser Kopplung verhält sich ein System mit realer Dipolwechselwirkung nicht nur anisotrop bezüglich der Spinfelder, sondern auch bezüglich der Ortskoordinaten.

Ein NLS-Modell mit isotroper, langreichweitiger Wechselwirkung wurde bereits von J. Sak untersucht [93]. Das Ginzburg-Landau-Funktional war dabei von der Form

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} (a\mathbf{q}^2 + b|\mathbf{q}|^\rho) (\boldsymbol{\pi}(\mathbf{q})\boldsymbol{\pi}(-\mathbf{q}) + \sigma(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q})) . \quad (3.2)$$

Für $\rho = 1$ (LXY-Modell) sind die von Sak gemachten Näherungen etwas grob. Trotzdem stimmen die Ergebnisse qualitativ gut überein mit den hier gefundenen Resultaten. In seiner Arbeit ging Sak einigen offenen Fragen nach den Eigenschaften kritischer Exponenten in isotropen, langreichweitigen Systemen nach [94, 95]. Der immer speziell zu behandelnde Fall $N=2$ wurde in seinen Betrachtungen ausgeklammert. Auch von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou wurde das isotrop, langreichweitige System untersucht [96], jedoch ohne den \mathbf{q}^2 -Term in (3.2) zu berücksichtigen, so dass in dieser Arbeit keine Crossover-Effekte berechnet wurden, sondern lediglich die Eigenschaften am langreichweitigen Fixpunkt.

3.1 Ginzburg-Landau-Funktional des LXY-Modells

Das erweiterte XY-System soll im Rahmen des NLS-Modells untersucht werden. Man muss das *Ginzburg-Landau-Funktional* (3.1) somit entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 2.1 in der Parametrisierung (2.2) darstellen. Wie im isotropen System wird ein äußeres Feld entlang der x -Richtung angelegt. Im kurzreichweitigen NLS-Modell ist dies notwendig, um die IR-Divergenzen zu regularisieren. Aufgrund der langreichweitigen Wechselwirkung, welche hier zusätzlich betrachtet wird, existieren diese IR-Divergenzen im LXY-Modell (in $d = 2$) nicht mehr. Trotzdem ist es sinnvoll, ein äußeres Feld zu berücksichtigen. Zum einen renormiert es trivial (siehe Abschnitt 2.2.2), so dass man anhand der Renormierung von H eine zusätzliche, einfach abzuleitende Beziehung gewinnt, und zum anderen lassen sich damit natürlich Aussagen über die Abhängigkeit des Systems von einem äußeren Feld gewinnen. Die Zustandssumme lautet

$$Z(H) = \int \mathcal{D}(\pi) \exp \left\{ -\frac{1}{t} \mathcal{H}(\pi, H) + \mathcal{M}(\pi) \right\} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \mathcal{H}(\pi, H) = & \frac{1}{2t} \int d^2x \left((\partial_\mu \pi(\mathbf{x}))^2 + (\partial_\mu \sigma(\mathbf{x}))^2 \right) - \frac{H}{t} \int d^2x \sigma(\mathbf{x}) \\ & + \frac{G}{4\pi t} \int d^2x d^2x' \frac{\partial_\mu \partial'_\mu (\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}') + \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Bigg|_{\sigma=\sqrt{1-\pi^2}} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Da der Maßterm nur von der Parametrisierung der Sphäre abhängt, ist \mathcal{M} wieder durch (2.5) gegeben. In $d = 2$ ist die Temperatur dimensionslos, so dass $T \equiv t$ gilt. Die Stärke der langreichweitigen Kraft G besitzt die Dimension $[G] = 1$.

Für die Störungstheorie muss das σ -Feld, das die Richtung der spontanen Magnetisierung bestimmt, nach den transversalen Fluktuationen entwickelt werden. Diese Entwicklung und die anschließende Fouriertransformation sind in Anhang D.1 dargestellt. Es ergeben sich die Feynman-Regeln Tab. 3.1.

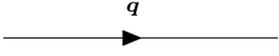
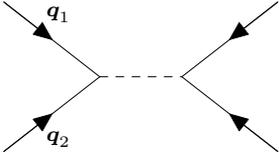
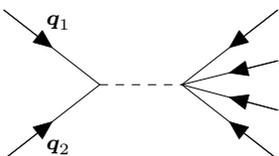
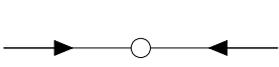
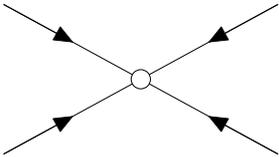
	$= \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G \mathbf{q} + H} \equiv \Delta(\mathbf{q})$
	$= -\frac{1}{8t} \left((\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + H \right)$
	$= -\frac{1}{16t} \left((\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + H \right)$
	$= \frac{1}{2} \int_q^\Lambda$
	$= \frac{1}{4} \int_q^\Lambda$

Tabelle 3.1: Feynman Regeln für das LXY-Modell

Gemäß den Betrachtungen in Anhang B.2 sind die thermischen Schwankungen der Magnetisierung in niedrigster Ordnung durch das Integral über den Propagator

$$\Delta(\mathbf{q}) = \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H} \quad (3.5)$$

gegeben. Deshalb gilt für $\Delta M \equiv M(0, g) - M(t, g)$ bei $H = 0$

$$\Delta M(t) = \frac{1}{2} \int_q \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}|} + \mathcal{O}(t^2) = \frac{t}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{g} \right) + \mathcal{O}(t^2), \quad g = G/\Lambda. \quad (3.6)$$

Wie man sieht, ist die dipolartige Wechselwirkung in der Lage, die Fluktuationen in zwei Dimensionen zu begrenzen. In der Tat verschwinden die Fluktuationen sogar für den Fall unendlich großer langreichweitiger Wechselwirkung.

3.2 Renormierung des LXY-Modells

3.2.1 Skalenbetrachtungen Das UV-Verhalten des Propagators ändert sich durch die Einführung der langreichweitigen Kraft nicht, so dass weiterhin die Betrachtungen von Paragraph 2.2.1 zutreffen. Jedoch entstehen neue Vertizes aufgrund der dipolartigen Wechselwirkung. Diese Vertizes besitzen den Divergenzgrad

$$\delta(V_D^{2n}) = (d-2)(n-1) - 1. \quad (3.7)$$

In $d = 2$ handelt es sich also um weiche Operatoren. Das bedeutet, dass das Modell weiterhin in $d = 2$ renormierbar ist. Da die $O(N)$ -Symmetrie durch die langreichweitige Kraft nicht zerstört wurde, ist der Renormierbarkeitsbeweis von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou auch für das LXY-Modell gültig. Allerdings existieren aufgrund der Langreichweitigkeit des Ginzburg-Landau-Funktional gewisse Störterme, welche im Rahmen der Renormierung erzeugt werden könnten. Die Diskussion dieser neuen Terme und ihr Auftreten im Rahmen der Störungstheorie wird auf Abschnitt 4.4 verschoben, wo die entsprechenden Probleme für das dipolare XY-Modell betrachtet werden. Das Ergebnis der Diskussion zeigt, dass die in Frage kommenden Terme störungstheoretisch nicht erzeugt werden und damit die Renormierung nicht beeinflussen.

Für den Fall eines dipolaren Fixpunkts² mit $g^* \rightarrow \infty$, wie dies in einem dreidimensionalen System der Fall ist [97, 98], skaliert der Propagator wie q^{-1} , so dass die Felder die Skalendimension $-(d+1)/2$ besitzen und die dipolaren Vertizes den Divergenzgrad

$$\delta(V_D^{2n}) \rightarrow (d-1)(n-1) \quad (3.8)$$

annehmen. Für einen solchen Fixpunkt wäre die kritische Dimension eins, was mit der erwarteten unteren kritischen Dimension eines dipolaren XY-Modells übereinstimmt [16]. Das NLS-Modell kann diesen Grenzfall aber nicht mehr richtig beschreiben, da aufgrund der Dipolwechselwirkung Raumdimension und Anzahl der Komponenten zu $N = d$ gekoppelt sind. Eine Renormierung in einer Dimension würde somit die Anzahl der Feldkomponenten auf eine reduzieren. In diesem Fall verbleiben aber keine transversalen Felder, so dass man sich letztlich mit einem System der Dimension null beschäftigt. Man muss also erkennen, dass das NLS-Modell mit einer dipolartigen Wechselwirkung, nicht im Rahmen einer ϵ -Entwicklung um die kritische Dimension $d=1$ des dipolaren Fixpunkts behandelt werden kann. Als Alternative bietet sich die Renormierung in fixer Dimension $d=2$ an. Damit die Ergebnisse der Störungstheorie gerechtfertigt sind, muss sich ein IR-attraktiver Fixpunkt bei $T=0$ ergeben, aus dem heraus man perturbativ einen eventuell vorhandenen kritischen Punkt erschließen kann.

Aus dem oben gesagten ergibt sich natürlich, dass das Modell nicht in dimensionaler Regularisierung gerechnet werden kann. Es bietet sich statt dessen an, Wilson-Renormierung zu benutzen. Konzeptionell bietet jedoch das feldtheoretische Verfahren einige Vorteile, insbesondere bei der physikalischen Auswertung der Renormierung. Deshalb wird im Rahmen der Feldtheorie mit Hilfe einer Cutoff-Regularisierung gearbeitet.

²Für die kritische Dimension ist es irrelevant, ob die volle Dipolwechselwirkung, oder nur die langreichweitige, isotrope Wechselwirkung des LXY-Modells verwendet wird.

beitragen³. Für den renormierten Zweipunkt-Vertex⁴ folgt damit bis zur Ordnung t_R

$$\Gamma_R^{(2)} = \frac{Z}{Z_t} \mathbf{q}^2 + Z_g \mu g_R |\mathbf{q}| + Z^{1/2} H_R + t_R \left(\mathbf{q}^2 \int_p^\Lambda \left(1 + \frac{G}{4|\mathbf{p}|} \right) \tilde{\Delta}(p) + \frac{H_R}{2} \int_p^\Lambda \tilde{\Delta}(p) \right), \quad (3.13)$$

wo der temperaturunabhängige Propagator $\tilde{\Delta}$ gegeben ist durch

$$\tilde{\Delta}(q) \equiv \frac{1}{t} \Delta(q) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H}. \quad (3.14)$$

Da die Störungstheorie auf Zweipunktniveau keine Terme mit der analytischen Struktur der langreichweitigen Wechselwirkung erzeugt, bedeutet die Wahl der Renormierungskonstanten und der Renormierungsbedingungen, dass $Z_g \equiv 1$ gilt. Insgesamt folgt

$$Z = 1 - \frac{t_R}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{p dp}{p^2 + \mu g_R p + \mu^2} \quad (3.15a)$$

$$Z_g = 1 \quad (3.15b)$$

$$Z_t = 1 + \frac{\mu g_R}{4} \frac{t_R}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dp}{p^2 + \mu g_R p + \mu^2}. \quad (3.15c)$$

3.2.4 Renormierung des Vierpunkt-Vertex Um die Konsistenz des Vorgehens zu überprüfen, kann man die Renormierungskonstanten auch aus dem Vierpunkt-Vertex bestimmen. Die zu (3.12) äquivalenten Renormierungsbedingungen lauten für den Vierpunkt-Vertex

$$\Gamma_R^{(4),H}(t_R, g_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8} \quad (3.16a)$$

$$\Gamma_R^{(4),Dip}(t_R, g_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8} \mu g_R \quad (3.16b)$$

$$\Gamma_R^{(4),Iso}(t_R, g_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8}. \quad (3.16c)$$

Zur konkreten Ausarbeitung der Störungsbeiträge ist es sinnvoll, nicht alle äußeren Impulse zu berücksichtigen. Vielmehr vereinfacht sich die Rechnung bedeutend, wenn man lediglich zwei der äußeren Impulse verschieden von null wählt, so etwa $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q} = -\mathbf{q}_3$. Damit diese Vorgehensweise sinnvoll ist, muss man alle Diagramme so zeichnen, dass sie

³Diese Entwicklung funktioniert nur bis zur Ordnung q^2 , denn die Beiträge, welche höheren Ordnungen von q entsprechen, sind nicht mehr UV-divergent und dementsprechend IR-divergent. Bei der hier verwendeten Methode stellen allerdings auch IR-divergente Integrale kein Problem dar, da die Integrale nur am Cutoff, also an der Obergrenze, ausgewertet werden. Dies entspricht in gewisser Weise der Impulsschalenintegration, wo ebenfalls keine Probleme mit IR-Divergenzen auftreten.

⁴Für die gegenüber der üblichen Darstellung etwas modifizierte Definition des Vertexfunktionals, siehe Anhang A.3.

\mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 als Eingangsimpulse und \mathbf{q}_3 und \mathbf{q}_4 als Ausgangsimpulse besitzen. Es folgt

$$\begin{aligned}
-\frac{\Gamma^{(4)}(\mathbf{q})}{4!t} = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 6 \text{Diagram 3} + 4 \text{Diagram 4} \\
& + 4 \text{Diagram 5} + 8 \text{Diagram 6} + 32 \text{Diagram 7} + 16 \text{Diagram 8} \\
& + 16 \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \mathcal{O}(t).
\end{aligned}$$

Die Auswertung der Integrale, also die Entwicklung nach den äußeren Impulsen bis zur Ordnung q^2 , liefert folgenden analytischen Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}(q) &= \frac{4!}{8} (\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H) \tag{3.17} \\
&+ t \frac{4!}{8} \left\{ \left(\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + \frac{3H}{2} \right) \int_p^\Lambda \tilde{\Delta}(p) + \mathbf{q}^2 \int_p^\Lambda \left(1 + \frac{G}{4|\mathbf{k}|} \right) \tilde{\Delta}(p) \right\} + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned}$$

Die in den Renormierungsbedingungen (3.16) verwendeten Beiträge zur renormierten Vierpunkt-Funktion lauten

$$\Gamma_{\text{R}}^{(4),H}(t_{\text{R}}, g_{\text{R}}, H_{\text{R}}, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8} \left(Z^{3/2} + t_{\text{R}} \frac{3}{2} \int_p^\Lambda \tilde{\Delta}(p) \right) + \mathcal{O}(t_{\text{R}}^2) \tag{3.18a}$$

$$\Gamma_{\text{R}}^{(4),\text{Dip}}(t_{\text{R}}, g_{\text{R}}, H_{\text{R}}, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8} \mu g_{\text{R}} \left(Z_g Z + t_{\text{R}} \int_p^\Lambda \tilde{\Delta}(p) \right) + \mathcal{O}(t_{\text{R}}^2) \tag{3.18b}$$

$$\Gamma_{\text{R}}^{(4),\text{Iso}}(t_{\text{R}}, g_{\text{R}}, H_{\text{R}}, \mu, \Lambda) = \frac{4!}{8} \left(\frac{Z^2}{Z_t} + t_{\text{R}} \int_p^\Lambda \left(2 + \frac{G}{4|\mathbf{k}|} \right) \tilde{\Delta}(p) \right) + \mathcal{O}(t_{\text{R}}^2). \tag{3.18c}$$

Offensichtlich existieren hier Störungsbeiträge zur Dipolwechselwirkung. Das sogenannte “triviale” Verhalten der Dipolwechselwirkung unter Renormierung bedeutet im ϕ^4 -Modell, dass ebene keine solchen Beiträge auftreten. Im NLS-Modell gilt dies nur für den Zweipunkt-Vertex. In den höheren Vertizes treten die Z-Faktoren der Feldrenormierung in anderen Potenzen auf, und um dies zu kompensieren, muss es Beiträge zur Dipolwechselwirkung geben. Die oben angegebenen Beiträge führen, wie man leicht nachprüfen kann, genau zu den in Paragraph 3.2.3 berechneten Renormierungskonstanten.

3.3 Renormierungsgruppe

3.3.1 Callan-Symanzik-Gleichungen Die CS-Gleichungen werden mit der Argumentation von Abschnitt 2.3 für die nichtrenormierten Korrelationsfunktionen abgeleitet.

Ausgangspunkt ist die für große Λ näherungsweise gültige Relation

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} G_{\mathbf{R}}^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t_{\mathbf{R}}, g_{\mathbf{R}}, H_{\mathbf{R}}, \mu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} \equiv \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{t_{\mathbf{R}}, g_{\mathbf{R}}, H_{\mathbf{R}}}. \quad (3.19)$$

Daraus folgen die *Callan-Symanzik-Gleichungen* für das langreichweitige XY-Modell

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} \zeta(t, g) + \rho(t, g) H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = 0, \quad (3.20)$$

mit den Wilson-Funktionen

$$\beta(t, g) \equiv \Lambda \frac{\partial t}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} = t \Lambda \frac{\partial \ln Z_t}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} \quad (3.21a)$$

$$\beta_g(t, g) \equiv \Lambda \frac{\partial g}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} = -g \left(1 - \frac{\beta}{t} - \zeta - \Lambda \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} \right) \quad (3.21b)$$

$$\zeta(t, g) \equiv -\Lambda \frac{\partial \ln Z}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} \quad (3.21c)$$

$$\rho(t, g) \equiv \Lambda \frac{\partial \ln H}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} = \frac{\zeta}{2} + \frac{\beta}{t}, \quad (3.21d)$$

wobei die jeweils zweiten Beziehungen trivial aus den Definitionen der RNG-Konstanten (3.9) folgen. Exemplarisch wird nun mit Hilfe von (3.21c) und (3.15a) die Feldrenormierung berechnet

$$\begin{aligned} \zeta(t, g) &= -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\mathbf{R}} \ln \left(1 - \frac{t_{\mathbf{R}}}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{p dp}{p^2 + \mu g_{\mathbf{R}} p + \mu^2} \right) \\ &= \frac{t_{\mathbf{R}}}{2\pi} \frac{1}{1 + \mu g_{\mathbf{R}}/\Lambda + \mu^2/\Lambda^2} + \mathcal{O}(t_{\mathbf{R}}^2) = \frac{t}{2\pi} \frac{1}{1 + g} + \mathcal{O}((\mu/\Lambda)^2, t^2). \end{aligned}$$

Entsprechend kann man für die anderen Flussfunktionen vorgehen und erhält

$$\beta(t, g) = \frac{t^2}{8\pi} \frac{g}{1 + g} \quad (3.22a)$$

$$\beta_g(t, g) = -g \left(1 - \frac{t}{8\pi} \frac{4 + g}{1 + g} \right) \quad (3.22b)$$

$$\zeta(t, g) = \frac{t}{2\pi} \frac{1}{1 + g} \quad (3.22c)$$

$$\rho(t, g) = \frac{t}{8\pi} \frac{2 + g}{1 + g}. \quad (3.22d)$$

3.3.2 Fixpunkte Die Gleichung (3.20) wird mit Hilfe von Charakteristiken gelöst (siehe Paragraph 3.3.3). Der Fluss der Kopplungskonstanten $t(s)$ und $g(s)$ wird im Rah-

men dieses Ansatzes durch das folgende gekoppelte System bestimmt

$$s \frac{dt(s)}{ds} = \beta(t(s), g(s)), \quad t(s=1) = t \quad (3.23a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} = \beta_g(t(s), g(s)), \quad g(s=1) = g. \quad (3.23b)$$

Die explizite Darstellung dieser Kurvenschaar lässt sich leicht angeben, wenn man die beiden Differentialgleichungen (3.23) zu einer DGL für die Funktion $g_e(t)$ kombiniert und diese löst⁵

$$g_e(t, \tau) = g_c(t) + \tau \frac{t}{2\pi} e^{8\pi/t-4}, \quad \text{mit} \quad g_c(t) = \frac{3t}{8\pi} - 1 + \frac{t}{8\pi} e^{8\pi/t-4}. \quad (3.24)$$

Der Schaarparameter τ ist dabei so gewählt, dass $g_e(2\pi, \tau) = \tau$. Die Funktion $g_c(t)$ berührt die Achse $g=0$ gerade für $t_c=2\pi$. Skaliert man alle Temperaturen relativ zu diesem Wert, so ergibt sich das Flussdiagramm von Abb. 3.1. In dem Diagramm lassen sich die folgenden Fixpunkte ablesen.

- a) Die Fixpunktlinie $g=0$ des kurzreichweitigen XY-Modells. Jeder Punkt auf dieser Linie ist Fixpunkt. Da Vortizes in der Rechnung nicht berücksichtigt wurden, endet die Linie nicht beim KT-Übergang, sondern erstreckt sich bis ins Unendliche. Im Bereich I ist die XY-Linie instabil gegen die Störung durch die langreichweitige Kraft, während sie im Bereich III stabil ist.
- b) Der Tieftemperaturfixpunkt ($t=0, g=\infty$). Dieser Punkt ist attraktiv für die Bereiche I und II des Flussdiagramms. Während der Polyakov-Fixpunkt ($t=0, g=0$) instabil ist gegen die langreichweitige Wechselwirkung, verhält sich der neue Fixpunkt ($t=0, g=\infty$) stabil. Dieser Fixpunkt ist für die Störungstheorie sehr wichtig. Er löst den Polyakov-Fixpunkt des kurzreichweitigen nichtlinearen σ -Modells ab und bildet die Basis für die perturbative Betrachtung des LXY-Modells.
- c) Im Rahmen der Störungstheorie um den Tieftemperaturfixpunkt ergibt sich der kritische Punkt des Systems. Er liegt auf der XY-Linie mit den Koordinaten ($t_c=2\pi, g=0$). Wie sich zeigen wird, beschreibt dieser Punkt einen ferromagnetischen Phasenübergang.

Die verschiedenen Gebiete des Flussdiagramms sind getrennt durch die Separatrix $g_c(t)$, welche für $t=t_c$ den kritischen Punkt erreicht. Die Analogie zum KT-Übergang (siehe Abb. 2.10) ist offensichtlich. Beim KT-Übergang sind es die Vortexanregungen, welche in der Hochtemperaturphase eine endliche Korrelationslänge erzeugen. Im LXY-Modell ist es die Dipolwechselwirkung, welche in der Tieftemperaturphase eine endliche Korrelationslänge bewirkt. Im LXY-Modell beschreibt diese Korrelationslänge den Crossover

⁵Der Index e soll darauf hinweisen, dass es sich um die explizite Darstellung der Lösung handelt, im Gegensatz zur fließenden Kopplungskonstante $g(s)$. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei auch darauf hingewiesen, dass die Größe t in der Funktion $g_e(t, \tau)$ nicht als Anfangswert im Sinne von Gl. (3.23a) zu verstehen ist, sondern lediglich als Argument der Funktion g_e .

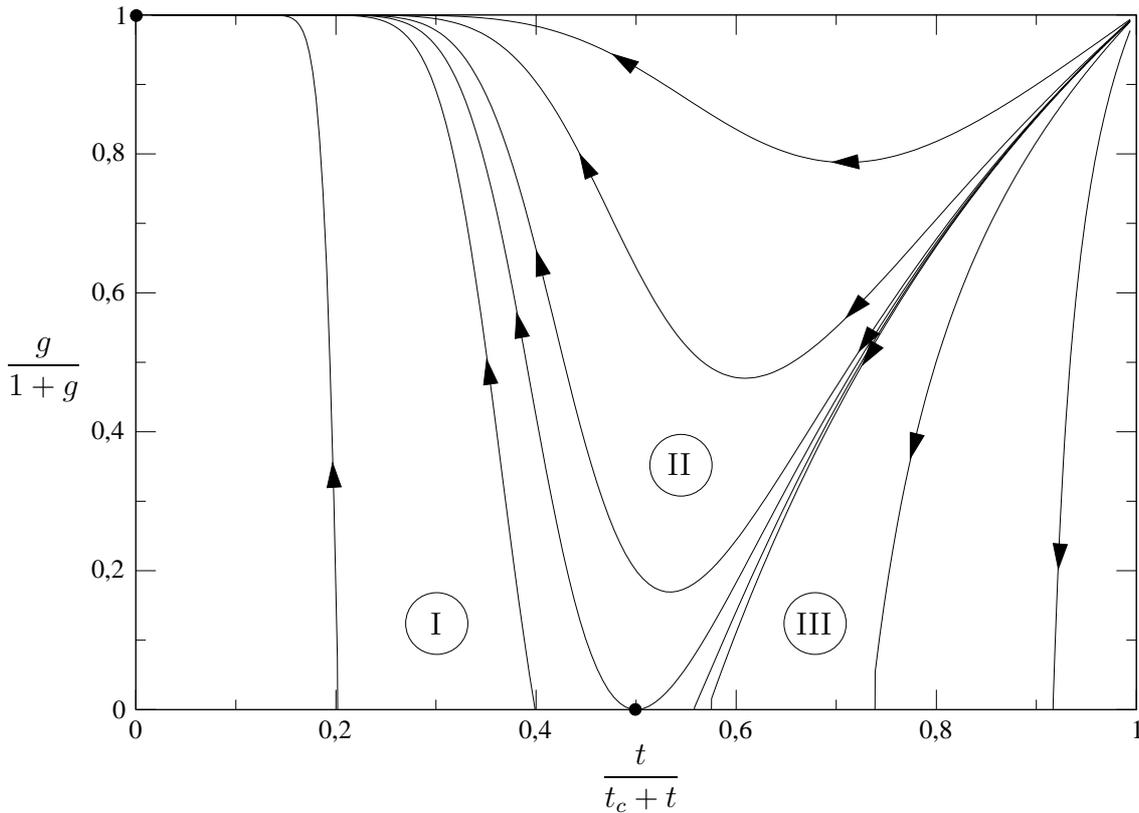


Abbildung 3.1: RNG-Fluss des LXY-Modells. Im linken Bereich des Graphen zeigt der Fluss zum Tieftemperaturfixpunkt. Im rechten Bereich renormiert die langreichweitige Wechselwirkung gegen null.

zwischen Tieftemperaturfixpunkt und kritischem Punkt. Während aber beim KT-Übergang die Entwicklung um den kritischen Punkt stattfindet, stellt das vorliegende Modell eine Tieftemperaturentwicklung dar, welche die Umgebung des kritischen Punkts perturbativ von $t=0$ aus erschließt. Je weiter man sich vom Tieftemperaturfixpunkt entfernt, desto unzuverlässiger wird deshalb das Ergebnis der Rechnungen.

Im Gegensatz zum Heisenberg-Fixpunkt eines dreidimensionalen Systems ist der kritische Punkt des LXY-Modells kein linearer Fixpunkt. Betrachtet man die Entwicklung von (3.23) um $(t_0, 0)$, mit $\vartheta = t - t_0$, so ergibt sich

$$s \frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{t_0^2}{8\pi} g + \mathcal{O}(\vartheta^2, g^2, \vartheta g) \quad (3.25a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} = \left(\frac{t_0}{2\pi} - 1 \right) g + \mathcal{O}(\vartheta^2, g^2, \vartheta g), \quad (3.25b)$$

so dass offensichtlich am kritischen Punkt ($t_0=2\pi$) die Flussgleichung für g durch Terme zweiter Ordnung bestimmt wird.

Indem man den Schaarparameter als Funktion der Anfangswerte t und g des DGL-Systems (3.23) bestimmt

$$\tau(t, g) = \frac{2\pi}{t} (g - g_c(t)) e^{-8\pi/t+4}, \quad (3.26)$$

kann man im Prinzip aus der expliziten Lösung die Form der fließenden Kopplungskonstanten $t(s)$ und $g(s)$ berechnen⁶

$$g(s) = \frac{3t(s)}{8\pi} - 1 + \left(1 + g - \frac{3t}{8\pi}\right) \frac{t(s)}{t} \exp \left\{ 8\pi \left(\frac{1}{t(s)} - \frac{1}{t} \right) \right\} \quad (3.27a)$$

$$s \frac{dt(s)}{ds} = \frac{t^2(s)}{8\pi} \frac{g(s)}{1 + g(s)}. \quad (3.27b)$$

Für die Betrachtungen am Tieftemperaturfixpunkt ist das Variablenpaar (t, g) sinnvoll. In der Umgebung des kritischen Punkts ist es aber günstiger (t, τ) als Variablen zu verwenden. Im zweiten Fall kann die Variable g zugunsten von τ mittels der Beziehung (3.26) eliminiert werden. In der Umgebung des kritischen Punkts ergibt sich damit für die Wilson-Funktionen das Verhalten

$$\beta(t, \tau) \rightarrow \frac{(t - 2\pi)^2}{4\pi} + \frac{\pi}{2} \tau - \frac{t - 2\pi}{4} \tau \quad (3.28a)$$

$$\zeta(t, \tau) \rightarrow 1 - \tau + \frac{t - 2\pi}{2\pi}. \quad (3.28b)$$

Für die Rechnungen im Tieftemperaturbereich ist es eine sehr gute Näherung, den temperaturabhängigen zweiten Term in (3.22b) zu vernachlässigen. Damit ergibt sich

$$g(s) = \frac{g}{s} \quad (3.29a)$$

$$t(s) = \frac{t}{1 - \frac{t}{8\pi} \ln \left(\frac{s(1+g)}{s+g} \right)}. \quad (3.29b)$$

3.3.3 Charakteristiken der CS-Gleichungen Zur Lösung der CS-Gleichungen bietet es sich an, die explizite Lösung der Flussgleichungen (3.24) zu verwenden. Durch Transformation von den Koordinaten (t, g) zu (t, τ) fällt eine Ableitung weg (siehe Anhang D.2) und die CS-Gleichungen lauten⁷

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} \zeta(t, \tau) + \rho(t, \tau) H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) = 0. \quad (3.30)$$

Die Lösung erfolgt mit Hilfe von Charakteristiken

$$G^{(n)}(s) \equiv G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t(s), \tau(s), H(s), \Lambda(s)). \quad (3.31)$$

⁶Genauer müsste man schreiben $t(s, t, g)$ und $g(s, t, g)$.

⁷Natürlich sind die hier auftretenden Flussfunktionen nicht identisch mit (3.22), sondern sie müssen auf das neue Koordinatenpaar (t, τ) transformiert werden.

Daraus folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$s \frac{d\Lambda(s)}{ds} = \Lambda(s), \quad \Lambda(s=1) = \Lambda \quad (3.32a)$$

$$s \frac{d\tau(s)}{ds} = 0, \quad \tau(s=1) = \tau \quad (3.32b)$$

$$s \frac{dt(s)}{ds} = \beta(t(s), \tau(s)), \quad t(s=1) = t \quad (3.32c)$$

$$s \frac{dH(s)}{ds} = \rho(t(s), \tau(s))H(s), \quad H(s=1) = H \quad (3.32d)$$

$$s \frac{dG^{(n)}(s)}{ds} = -\frac{n}{2} \zeta(t(s), \tau(s)) \cdot G^{(n)}(s), \quad G^{(n)}(s=1) = G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) \quad (3.32e)$$

mit den Lösungen

$$\Lambda(s) = \Lambda s \quad (3.33a)$$

$$\tau(s) = \tau \quad (3.33b)$$

$$\ln s = \int_t^{t(s)} \frac{d\theta}{\beta(\theta, \tau)} \quad (3.33c)$$

$$H(s) = H \exp \left\{ \int_t^{t(s)} d\theta \frac{\rho(\theta, \tau)}{\beta(\theta, \tau)} \right\} \quad (3.33d)$$

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) = Z^{n/2}(s) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t(s), \tau, H(s), \Lambda s) \quad (3.33e)$$

$$Z(s) \equiv \exp \left\{ \int_t^{t(s)} d\theta \frac{\zeta(\theta, \tau)}{\beta(\theta, \tau)} \right\}. \quad (3.33f)$$

3.3.4 Korrelationslänge Die Korrelationslänge ist eine invariante Ladung, d.h. sie ist unabhängig von Z-Faktoren. Die zugehörige CS-Gleichung ($H \equiv 0$) lautet deshalb

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi(t, \tau, \Lambda) = 0. \quad (3.34)$$

Da die Korrelationslänge naturgemäß die Dimension einer Länge besitzt, gilt $\xi(t, \tau, \Lambda) = \xi(t, g)/\Lambda$. Damit folgt als Lösung der CS-Gleichung

$$\xi(t, \tau) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{d\theta}{\beta(\theta, \tau)} \right\} \xi(t_0, \tau). \quad (3.35)$$

Als Randwertbedingung kann man benutzen, dass die Korrelationslänge, analog zum kurzreichweitigen System, für $t \rightarrow 0$ verschwindet. Der Limes $t_0 \rightarrow 0$ ist aber nicht einfach

durchzuführen, weil das Integral an der Untergrenze divergiert. Man findet eine definierte Lösung der CS-Gleichung, welche die obige Randbedingung erfüllt, indem man die IR-Divergenz des Integrals subtrahiert

$$\int_0^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, \tau)} - \frac{8\pi}{\theta^2} \right) + \int_0^t d\theta \frac{8\pi}{\theta^2} \rightarrow \int_0^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, \tau)} - \frac{8\pi}{\theta^2} \right) - \frac{8\pi}{t}. \quad (3.36)$$

Ignoriert wird somit eine zwar unendlich große, aber konstante Größe. Damit wird die Korrelationslänge zu

$$\xi(t, \tau, \Lambda) = \frac{e^{-8\pi/t}}{\Lambda} \exp \left\{ \int_0^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, \tau)} - \frac{8\pi}{\theta^2} \right) \right\}. \quad (3.37)$$

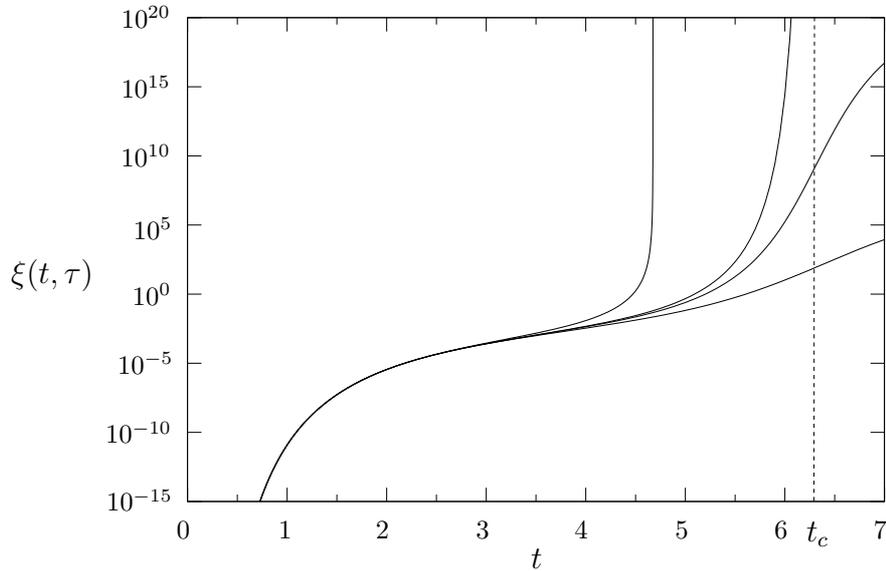


Abbildung 3.2: Numerische Auswertung der Korrelationslänge (3.37) für $\tau = -0.1, 0.0, 0.02, 0.1$ (von links nach rechts). Die kritische Kurve ($\tau = 0$) divergiert bei $t = t_c$, während für $\tau < 0$ die Korrelationslänge bereits bei $t < 2\pi$ singularär wird.

In Abb. 3.2 ist die Korrelationslänge nach Formel (3.37) numerisch berechnet. Die kritische Kurve ($\tau = 0$) divergiert bei $t_c = 2\pi$. Für $\tau > 0$ divergieren die Kurven nicht, sondern sättigen für große t (außerhalb des gezeichneten Bereichs) auf einem endlichen Niveau. Man kann deshalb annehmen, dass in der Umgebung des kritischen Punkts ($t = 2\pi, \tau = 0$) gilt

$$\tau \propto \frac{T_c^{\text{Phys.}} - T^{\text{Phys.}}}{T_c^{\text{Phys.}}}, \quad (3.38)$$

dass also τ den Abstand der physikalischen Temperatur ($T^{\text{Phys.}}$) vom Phasenübergang angibt. Im Bereich $\tau < 0$ divergiert die Korrelationslänge bereits für $t < 2\pi$ und zwar an dem Schnittpunkt der entsprechenden Trajektorie (Bereich I von Abb. 3.1) mit der Achse $g = 0$. An diesem Punkt befindet man sich wieder im klassischen XY-System mit

algebraischen Korrelationen, so dass die Korrelationslänge divergieren muss. Für $\tau < 0$ beschreiben die Trajektorien in Abb. 3.1 somit den Crossover vom klassischen XY-System zum dipolaren Tieftemperaturfixpunkt.

Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich folgende Interpretation des RNG-Flusses. Bereich II und III werden separiert durch die Kurve $g_c(t)$, $t > 2\pi$. Diese Kurve ist die kritische Trajektorie des Systems. Der mit III bezeichnete Teil des Graphen ist der Hochtemperaturbereich. In dieser Phase renormiert die langreichweitige Wechselwirkung gegen null und der Fluss endet auf der XY-Linie. Dies ist natürlich physikalisch unzutreffend, weil in der Hochtemperaturphase die Korrelationen exponentiell abfallen sollten. Die Dipolwechselwirkung ist im Rahmen des Modells offensichtlich nicht ausreichend, um ein solches Verhalten der Korrelationsfunktionen zu produzieren. Um zu einem befriedigendem Ergebnis für die Hochtemperaturphase zu gelangen, müsste man deshalb Vortexanregungen berücksichtigen.

Durch Invertieren der Funktion $g_c(t)$, $t > 2\pi$, erhält man die kritische Temperatur $t_c(g)$. Wählt man als Startwert einer Trajektorie bei vorgegebenem g die Temperatur $t = t_c(g)$, so entspricht dies physikalisch der Situation $T^{\text{Phys.}} = T_c^{\text{Phys.}}$. Ist hingegen $t < t_c(g)$, so befindet man sich in der Tieftemperaturphase und die Parameter des Systems renormieren gegen ihre Werte am Tieftemperaturfixpunkt. Für tiefe Temperaturen wird angenommen, dass physikalische Temperatur $T^{\text{Phys.}}$ und Modelltemperatur t wieder übereinstimmen. Dies ist gerechtfertigt, da für den Bereich kleiner Temperaturen die RNG-Ergebnisse in die naive Störungstheorie übergehen.

Es ist zunächst überraschend, dass die Größe τ , welche ja für $t = 2\pi$ identisch zur Stärke der langreichweitigen Wechselwirkung g ist, die physikalische Temperatur darstellt. Man muss aber bedenken, dass es gerade die Existenz eines von null verschiedenen Wertes von g ist, welche eine spontane Magnetisierung und damit eine Tieftemperaturphase erlaubt. Offensichtlich ist also die effektive Stärke $g(s)$ die relevante Größe, welche den Phasenübergang bestimmt.

In der Umgebung der Fixpunkte kann Gl. (3.37) auch analytisch ausgewertet werden. Für tiefe Temperaturen ist es sinnvoll die Größe τ wieder durch die Stärke der langreichweitigen Kraft g zu ersetzen. Das Integral im Exponenten von (3.37) besitzt dann folgende Struktur

$$\int_0^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, g_e(\theta, \tau))} - \frac{8\pi}{\theta^2} \right) = \int_0^1 \frac{ds}{s} \left(1 - \frac{8\pi}{t^2(s)} \beta(t(s), g(s)) \right). \quad (3.39)$$

Die Divergenz an der unteren Integralgrenze ist hier bereits eliminiert, aber das Integral divergiert wegen $g_e(t, \tau(t, g)) = g$ auch an der oberen Integralgrenze falls $g = 0$ wird. Diese Divergenz entspricht physikalisch dem Crossover zum XY-Modell. Führt man das Integral mit den Approximationen (3.29) aus, so erhält man

$$\xi(t, g) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{g} \right) e^{-8\pi/t}, \text{ für kleine } t. \quad (3.40)$$

Die Divergenz am kritischen Punkt $t = 2\pi$, $\tau \rightarrow 0$ besitzt die Struktur

$$\int_{t_0}^{2\pi} \frac{dt'}{\beta(t', \tau)} \approx 4\pi \int_{t_0}^{2\pi} \frac{dt'}{2\pi^2\tau + (t' - 2\pi)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\tau}} \operatorname{atan} \left(\frac{t' - 2\pi}{\pi\sqrt{2\tau}} \right) \Big|_{t_0}^{2\pi}, \quad (3.41)$$

wo die wesentlichen Terme der Näherung (3.28a) verwendet wurden. Der Punkt t_0 muss dabei im Gültigkeitsbereich der Näherung liegen⁸ und es gilt $t_0 < 2\pi$, so dass die Divergenz der Korrelationslänge von der Form

$$\xi \propto e^{\pi\sqrt{\frac{2}{\tau}}}, \quad \text{für } \tau \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

ist. Bestimmt man die Korrelationslänge nicht über die entsprechende CS-Gleichung, sondern in der Art und Weise wie dies von Kosterlitz [18] durchgeführt wurde, also durch Bestimmung des RNG-Parameters ab dem die Trajektorien den kritischen Bereich verlassen, so kommt man im Wesentlichen zum gleichen Ergebnis.

Die exponentielle Divergenz der Korrelationslänge ist ungewöhnlich. Es zeigt sich aber bereits im klassischen NLS-Modell ($\nu = 1/\epsilon$), dass die Divergenz der Korrelationslänge mit Annäherung an $d = 2$ stärker wird und in zwei Dimensionen schließlich exponentiell ist (siehe Gl. (2.33)).

3.3.5 Spontane Magnetisierung Die spontane Magnetisierung des Systems kann als Mittelwert von σ für $H = 0$ berechnet werden

$$M_0(t, \tau) = \langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle \Big|_{H=0}. \quad (3.43)$$

Dementsprechend ist die spontane Magnetisierung dimensionslos und von Λ unabhängig. Entsprechend der Konvention (A.20) ist M_0 eine Korrelationsfunktion $G^{(0,1)}$ und erfüllt die CS-Gleichung

$$\left(\beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \zeta(t, \tau) \right) M_0(t, \tau) = 0. \quad (3.44)$$

Mit der Randbedingung $M_0(t = 0, \tau) = 1$ ergibt sich als Lösung der CS-Gleichung

$$M_0(t, \tau) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \frac{\zeta(t', \tau)}{\beta(t', \tau)} \right\}. \quad (3.45)$$

Entsprechend dem Vorgehen für die Korrelationslänge kann die spontane Magnetisierung numerisch berechnet werden (Abb. 3.3). Die Ergebnisse stützen die Interpretation am Ende des letzten Abschnitts. Während für $\tau = 0$ die Magnetisierung bei t_c verschwindet, sättigt sie für $\tau > 0$ auf einem endlichen Wert (für $\tau = 0.1$ ist dieser Wert sehr klein, so dass die Magnetisierung scheinbar verschwindet). Ist $\tau < 0$, so wird die klassische XY-Linie bei einem $t < t_c$ erreicht und die Magnetisierung verschwindet dementsprechend.

Zur Berechnung der analytischen Struktur für tiefe Temperaturen können wieder die Näherungen (3.29) benutzt werden

$$M_0(t, g) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \frac{t(s)}{s(1+g(s))} \right\}. \quad (3.46)$$

⁸Die Beiträge für $t \in [0, t_0]$ sind endlich und in diesem Zusammenhang unwichtig.

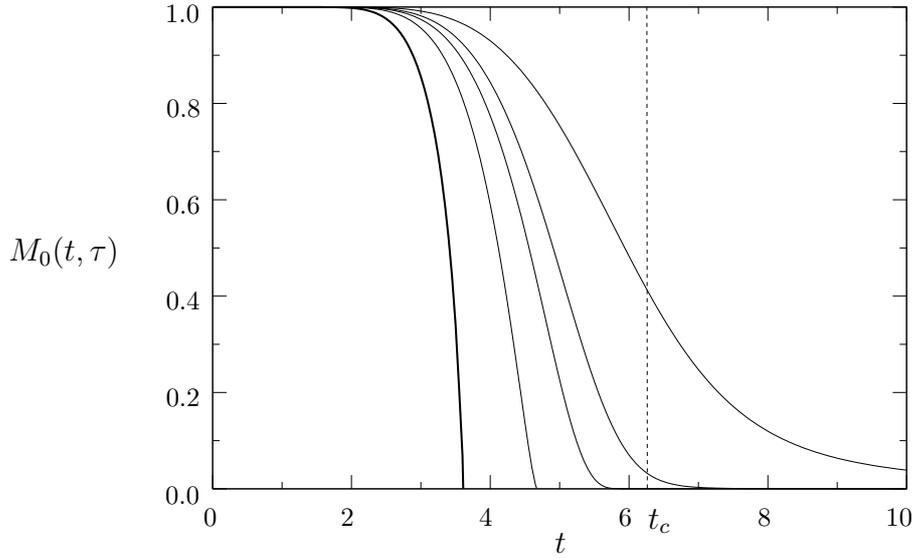


Abbildung 3.3: Numerische Auswertung der spontanen Magnetisierung (3.45) für $\tau = -0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 0.5$ (von links nach rechts). Für $\tau = 0$ verschwindet die Magnetisierung bei t_c , für $\tau < 0$ wird der Wert $M_0 = 0$ bereits für kleinere t erreicht.

Wenn man die kleinen logarithmischen Korrekturen in $t(s)$ vernachlässigt, so erhält man hieraus

$$M_0(t, g) = \left(1 + \frac{1}{g}\right)^{-t/(4\pi)} \quad \text{für kleine } t. \quad (3.47)$$

Im kritischen Bereich lässt sich das Verschwinden der Magnetisierung durch die Divergenz der Korrelationslänge ausdrücken. Für $\zeta(t, \tau)$ kann der Fixpunktwert $\zeta^* = 1$ eingesetzt werden und es folgt

$$M_0(t, \tau) \propto \exp \left\{ -\frac{\zeta^*}{2} \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{\beta(t', \tau)} \right\} \propto \xi(t, \tau)^{-\zeta^*/2} \quad \text{für } t \rightarrow t_c, \tau \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Üblicherweise wird das Verschwinden der Magnetisierung mit einem Exponenten β charakterisiert $M_0 \propto t^\beta$. Gleichzeitig gilt $\xi \propto \tau^{-\nu}$, so dass $M_0 \propto \xi^{-\beta/\nu}$. Zwar kann man im vorliegenden System den Exponenten β nicht bestimmen, weil die Magnetisierung nicht algebraisch verschwindet sondern exponentiell, aber man kann das Verhältnis der Exponenten β und ν bestimmen

$$M_0 \propto \xi^{-\zeta^*/2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\beta} \equiv \frac{\beta}{\nu} = \frac{\zeta^*}{2}. \quad (3.49)$$

3.3.6 Allgemeine Lösung der CS-Gleichung In diesem Abschnitt sollen die CS-Gleichungen (3.30) allgemein gelöst werden. Das Ziel ist es, die Skalenform der Lösungen für alle Temperaturen und auch für nichtverschwindendes äußeres Feld zu bestimmen. Aufgrund der Dimensionsüberlegungen in Anhang A.4 folgt aus Gl. (3.33e)

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = Z^{n/2}(s) (\Lambda s)^{-(n-1)2} G^{(n)}\left(\left\{\frac{\mathbf{q}_i}{\Lambda s}\right\}, t(s), g(s), \frac{H(s)}{(\Lambda s)^2}, 1\right), \quad (3.50)$$

wo nun wieder g statt τ als Parameter verwendet wurde. Als Matching-Bedingung wird benutzt

$$H(s)/(\Lambda s)^2 = g(s) . \quad (3.51)$$

Wie sich im Weiteren zeigen wird, bedeutet dies, dass sowohl renormiertes Feld wie auch die Stärke der langreichweitigen Wechselwirkung im Limes $s \rightarrow 0$ divergieren, d.h. die Störungstheorie wird zu einer Entwicklung in $1/g(s)$, mit einem effektiven Propagator $t(s)/(g(s)(|\mathbf{q}| + 1))$. Dieser Propagator ist im IR-Bereich wohldefiniert und die zugehörige Störungstheorie ist frei von den problematischen Divergenzen des Koexistenzbereichs (siehe auch Abschnitt 3.5).

Die Funktionen $t(s)$, $g(s)$, $H(s)$ und $Z(s)$ werden durch die Anfangswerte t , g und H bestimmt. Durch die Bedingung (3.51) kann der Parameter s aus den Anfangswerten bestimmt werden $s = \bar{s}(t, g, H)$. Die Lösung der CS-Gleichung erhält man nun, indem man die Abhängigkeiten $t(\bar{s})$, $g(\bar{s})$, $H(\bar{s})$ und $Z(\bar{s})$ in die Gl. (3.50) einsetzt. Natürlich können die Berechnungen nicht exakt durchgeführt werden. Da man aber lediglich die richtige Kombination der Parameter finden muss, kann man bestimmte Näherungen verwenden und intuitiv schließen. Das Ergebnis kann in jedem Fall durch direktes Ausführen der Ableitungen in den CS-Gleichungen überprüft werden.

Um das angegebene Verfahren durchzuführen, wird zunächst $H(s)$ aus Gleichung (3.33d) exakt bestimmt

$$H(s) = H Z^{1/2}(s) \frac{t(s)}{t} . \quad (3.52)$$

Für $t(s)$ wird die Tieftemperaturform (3.29b) angenommen. Nach Umformung wird antizipiert

$$t(s, t, g) \approx \frac{t}{1 - \frac{t}{8\pi} \ln(s(1 + 1/g))} \rightarrow -\frac{8\pi}{\ln(\Lambda \xi s)} . \quad (3.53)$$

Mit Hilfe von (3.27a) kann damit $g(s, t, g)$ bestimmt werden. Im Limes kleiner s ist der folgende Anteil dominant

$$g(s, t, g) \rightarrow \kappa(t, g) \frac{t(s)}{\Lambda \xi s} , \quad (3.54)$$

mit der von den Anfangswerten abhängigen Konstanten

$$\kappa(t, g) = \left(\frac{1+g}{t} - \frac{3}{8\pi} \right) e^{-8\pi/t} . \quad (3.55)$$

Im Limes $s \rightarrow 0$ kann die s -Abhängigkeit in $Z(s)$ vernachlässigt werden und $Z^{1/2}(s)$ geht über in die spontane Magnetisierung M_0 . Die Korrekturen zu dieser Näherung liefern keine neuen Abhängigkeiten und werden deshalb nicht beachtet. Mit den berechneten Größen ergibt nun das Matching (3.51) folgende Bedingung

$$H Z^{1/2}(s) \frac{t(s)}{t} = (\Lambda s)^2 \frac{\kappa t(s)}{\Lambda \xi s} \quad \Rightarrow \quad \Lambda s \rightarrow H K(t, g, \Lambda) \quad (3.56)$$

mit der Hilfsgröße

$$K(t, g, \Lambda) \equiv \frac{M_0(t, g) \xi(t, g, \Lambda)}{t \kappa(t, g)} \rightarrow \frac{1}{g\Lambda} \quad \text{für } t \rightarrow 0 . \quad (3.57)$$

Diese Ergebnisse können nun in Gl. (3.50) eingesetzt werden. Fasst man die Parameter geeignet zusammen, so sieht man, dass die allgemeine Lösung der CS-Gleichung (3.30) folgende Skalenform besitzt

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = M_0^n (HK)^{-2(n-1)} g^{(n)}\left(\left\{\frac{\mathbf{q}_i}{HK}\right\}, \xi HK, \kappa\right). \quad (3.58)$$

Der Nachweis, dass (3.58) die PDE (3.30) wirklich löst, wird in Anhang D.3 geführt. Desweiteren werden dort die Lösungen für die verallgemeinerten Korrelationsfunktionen angegeben. Betrachtet man das Skalenverhalten von (3.58) und beachtet die Definition von $K(t, g)$ so sieht man, dass die Lösung auch in der Form

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = M_0^n \xi^{2(n-1)} \bar{g}^{(n)}\left(\{\mathbf{q}_i \xi\}, H \frac{M_0 \xi^2}{t}, \kappa\right) \quad (3.59)$$

geschrieben werden kann. Diese Skalenform kann man auch direkt erhalten, indem man ein Matching verwendet, welches für den kritischen Bereich geeignet ist. Es wird $t(s)=1$ ⁹ gesetzt und angenommen, dass t nahe t_c ist. Dann folgt

$$\ln s = \int_t^1 \frac{dt'}{\beta(t', \tau)} \propto -\ln(\Lambda \xi) \quad \text{für } \tau \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

also $s \propto 1/\Lambda \xi$. Dann gilt weiter im Limes $s \rightarrow 0$

$$H(s)/(\Lambda s)^2 \rightarrow \frac{H M_0 \xi^2}{t} \quad (3.61a)$$

$$g(s) \rightarrow e^{8\pi} \kappa + \text{const.} \quad (3.61b)$$

Setzt man diese Abhängigkeiten in (3.50) ein, so ergibt sich die Form der Lösung (3.59).

3.4 Kritische Eigenschaften des LXY-Modells

Wie sich bereits gezeigt hat, divergieren Korrelationslänge und spontane Magnetisierung nicht algebraisch, sondern exponentiell

$$\xi \propto \exp\left(\frac{b}{\sqrt{\tau}}\right) \quad \text{und} \quad M_0 \propto \exp\left(-\frac{\zeta^*}{2} \frac{b}{\sqrt{\tau}}\right). \quad (3.62)$$

Die verbleibenden Exponenten und Skalenrelationen sollen im Weiteren bestimmt werden.

Im kritischen Bereich kann man eine Vereinfachung der allgemeinen Skalenform (3.59) vornehmen. Da der Abstand vom kritischen Punkt durch die Größe τ gemessen wird, und $\kappa(t, g)$ am kritischen Punkt einen endlichen konstanten Wert annimmt, kann man vermuten, dass κ für die kritischen Divergenzen keine Rolle spielt. Bezüglich der wesentlichen kritischen Abhängigkeiten reduziert sich die Skalenform (3.59) dann auf

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) = M_0^n \xi^{2(n-1)} \bar{g}^{(n)}\left(\{\mathbf{q}_i \xi\}, H \frac{M_0 \xi^2}{t}\right). \quad (3.63)$$

⁹Der genaue Wert von $t(s)$ ist unwichtig und wird deshalb als eins gewählt. Er sollte eigentlich so nahe an t_c sein, dass die Näherungen (3.28) für den kritischen Punkt zutreffen.

3.4.1 Kritische Korrelationsfunktion Die CS-Gleichung für die kritische Zweipunkt-Korrelationsfunktion $G_c(q, \Lambda) \equiv G^{(2)}(q, t_c, \tau = 0, H = 0, \Lambda)$ lautet

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \zeta^* \right) G_c(q, \Lambda) = 0. \quad (3.64)$$

Entsprechend der Dimensionsbetrachtungen in Anhang A.4 gilt

$$G_c(q, \Lambda) = q^{-2} f(x), \quad x = \frac{q}{\Lambda}. \quad (3.65)$$

Formuliert man die CS-Gleichung mit Hilfe der Skalenvariablen x und löst die resultierende gewöhnliche DGL, so sieht man $f(x) = \exp(\zeta^* \ln x)$ und somit

$$G_c(q, \Lambda) \propto q^{-2+\zeta^*} \quad \Rightarrow \quad \eta = \zeta^*. \quad (3.66)$$

Bei der Ableitung von (3.66) ging lediglich das Verschwinden der Flussfunktion $\beta(t, \tau)$ ein. Dies trifft sowohl für den Tieftemperaturfixpunkt, den kritischen Punkt, wie die gesamte XY-Linie zu. Trotzdem kann man aus (3.66) nur das Verhalten der Korrelationsfunktionen für $t \neq 0$ bestimmen, denn für $t = 0$ verschwinden die Korrelationsfunktionen identisch, so dass (3.64) automatisch erfüllt ist. Um das Verhalten am Tieftemperaturfixpunkt zu erkunden, muss man deshalb die Störungstheorie in Kombination mit den RNG Ergebnissen benutzen (Abschnitt 3.5). Für den kritischen Punkt und die XY-Linie kann man hingegen folgern

$$\eta = 1 \quad \text{kritischer Punkt } (t = 2\pi, g = 0) \quad (3.67a)$$

$$\eta = t/(2\pi) \quad \text{XY-Linie } (t, g = 0). \quad (3.67b)$$

Am kritischen Punkt divergiert die Korrelationsfunktion gerade wie $1/q$. Dies ist charakteristisch für ein System mit einer dipolartigen langreichweitigen Wechselwirkung.

3.4.2 Abhängigkeit vom äußeren Feld Um die Abhängigkeit der Magnetisierung vom äußeren Feld am kritischen Punkt zu betrachten, wird Gl. (3.33d) am kritischen Punkt $t = t_c$ und $\tau = 0$ ausgewertet

$$H(s) = H \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} \zeta(t_c, 0) \right\} = H s^{\zeta^*/2}, \quad (3.68)$$

wegen $t(\sigma) \equiv t_c$. Für $t = t_c$ und $\tau = 0$ verschwindet β_g und es folgt $g(s) = g = 0$, so dass die Bedingung (3.51) sinnlos ist. In dieser Situation kann aber wieder das Matching

$$H(s) = (\Lambda s)^2 \quad (3.69)$$

des klassischen NLS-Modells verwendet werden, da $g(s)$ nicht divergiert und die Fixierung des renormierten äußeren Feldes auf eine wohldefinierte Störungstheorie garantiert. Aus (3.69) folgt dann

$$s = \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\frac{2}{4-\zeta^*}}. \quad (3.70)$$

Für die Magnetisierung $M = \langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle$ gilt aufgrund der CS-Gleichung

$$M(t_c, 0, H, \Lambda) = \exp \left\{ \frac{\zeta^*}{2} \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} \right\} M(t_c, 0, H(s)/(\Lambda s)^2, 1) = s^{\zeta^*/2} M(t_c, 0, 1, 1) \quad (3.71)$$

und somit

$$M \propto H^{\frac{\zeta^*}{4-\zeta^*}}, \quad \delta = \frac{4-\zeta^*}{\zeta^*} = 3. \quad (3.72)$$

Dieses Ergebnis entspricht, wie zu erwarten, dem Wert des XY-Modells $\delta = (8\pi - t)/t$ für $t = 2\pi$ (siehe (2.75)).

3.4.3 Kritische Suszeptibilität Wie in der Tieftemperaturphase des NLS-Modells wird der Exponent γ über die Skalenform der Suszeptibilität definiert, d.h. man sucht nach einer Beziehung der Form

$$G(q, t, g, H, \Lambda) = \tau^{-\gamma} g(q\xi, H/\tau^{\delta\beta}). \quad (3.73)$$

Wenn man berücksichtigt, dass sich in der Umgebung des kritischen Punkts die spontane Magnetisierung wie $\xi^{-\zeta^*/2}$ verhält und den bereits berechneten Wert von $\delta\tilde{\beta} = 2 - \zeta^*/2$ verwendet, so entspricht obige Formel gerade Gl. (3.63)

$$G^{(2)}(q, g, \tau, H, \Lambda) \propto \xi^{2-\zeta^*} \bar{g}^{(2)}(q\xi, H \xi^{2-\zeta^*/2}), \quad (3.74)$$

wo die Divergenzen durch die Korrelationslänge ausgedrückt sind. Der kritische Exponent γ ergibt sich also zu

$$\tilde{\gamma} \equiv \frac{\gamma}{\nu} = 2 - \zeta^*. \quad (3.75)$$

3.4.4 Freie Energie und spezifische Wärme Gemäß Anhang A ist die Freie Energie gerade $W^{(0)}$ und besitzt die Skalenform (3.63) mit $n=0$. Nach der Argumentation im letzten Paragraphen ergibt sich hieraus

$$F(t, \tau, H, \Lambda) = \xi^{-2} f(H \xi^{2-\zeta^*/2}). \quad (3.76)$$

Dies ist wegen $\tilde{\beta}(1+\delta) = 2$ und $\delta\tilde{\beta} = 2 - \zeta^*/2$ in Übereinstimmung mit der üblichen Skalenform

$$F(\tau, H) = \tau^{\beta(1+\delta)} f(H/\tau^{\delta\beta}) \propto \xi^{-\tilde{\beta}(1+\delta)} f(H \xi^{\delta\tilde{\beta}}). \quad (3.77)$$

Um die Divergenz der spezifische Wärme zu bestimmen, kann man die Differentiation nach τ

$$C_H \propto -\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \quad (3.78)$$

mittels (3.42) in eine Differentiation nach der Korrelationslänge umschreiben

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \propto \xi \cdot (\ln \Lambda \xi)^3 \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.79)$$

Daraus erkennt man, dass der naive Divergenzfaktor, bei Vernachlässigung der Logarithmen, gleich -2 ist

$$C_H \propto \xi^{-2} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\nu} = -2, \quad (3.80)$$

in Übereinstimmung mit dem Exponenten des Kosterlitz-Thouless-Übergangs. Dieses Verhalten ist natürlich kaum beobachtbar, weil endliche Beiträge zur spezifischen Wärme existieren.

3.4.5 Zusammenfassung Die Renormierungsgruppe zeigt, dass im LXY-Modell ein ungewöhnlicher Phasenübergang stattfindet. Da jede Ableitung der Freien Energie existiert, ist dieser Phasenübergang von unendlich hoher Ordnung. Die Renormierungsgruppe besitzt am kritischen Punkt die Eigenschaften eines Kosterlitz-Thouless-Übergangs. Dies zeigt sich in der Ähnlichkeit des RNG-Flusses Abb. 3.1 und 2.10, aber auch in der exponentiell divergierenden Korrelationslänge. Im LXY-Modell führt dies zu dem Phänomen einer exponentiell verschwindenden spontanen Magnetisierung.

	ν	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\gamma}$	$\tilde{\alpha}$	δ	η
LXY-Modell:	∞	1/2	1	-2	3	1
KT-Übergang:	∞		7/4	-2	15	1/4

Tabelle 3.2: Kritische Exponenten des LXY-Modells und des Kosterlitz-Thouless-Übergangs. Da im 2d XY-Modell keine spontane Magnetisierung vorhanden ist, kann man für den KT-Übergang keinen Exponenten β definieren. Der Exponent γ wurde in [18] für die Hochtemperaturphase berechnet. Für die Tieftemperaturphase gilt er lediglich im Sinne von Gl. (3.73).

Die gefundenen Exponenten sind in Tab. 3.2 aufgelistet und mit den Ergebnissen des Kosterlitz-Thouless-Übergangs verglichen [18]. Für die Exponenten β , γ und δ ergeben sich klassische Mean-Field Resultate. Der Wert $\eta = 1$ entspricht einer dominanten langreichweitigen Wechselwirkung. Dies würde man einerseits erwarten, da erst durch die langreichweitige Kraft der Phasenübergang ermöglicht wird. Andererseits liegt der kritische Punkt gerade bei $g = 0$, so dass die Stärke der langreichweitigen Wechselwirkung am kritischen Punkt verschwindet. Letztlich wird aber die Lage des nichtlinearen Fixpunkts durch den RNG-Fluss im (t, g) -Diagramm bestimmt und dieser Fluss beruht auf den Eigenschaften der langreichweitigen Kraft.

Motiviert durch die Diskussion am Ende von Paragraph 3.3.4 wurde in Tab. 3.2 für ν der Wert ∞ eingetragen. Mit dieser Festlegung gelten für die Exponenten die üblichen Skalenrelationen

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \frac{d-2+\eta}{2}, & \delta &= \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}, \\ \tilde{\alpha} &= -d, & \tilde{\gamma} &= 2-\eta. \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.5 Störungstheorie im Koexistenzbereich

Im Weiteren wird mit Hilfe der renormierten Störungstheorie das Tieftemperaturverhalten des LXY-Modells untersucht. Leider gestaltet sich das Vorgehen wesentlich komplizierter als im NLS-Modell. Die Ursachen liegen zum einen in den komplizierteren Formeln für die Wilson-Funktionen, wie auch in der Tatsache, dass nun ein System mit zwei Kopplungskonstanten betrachtet wird. So ist es im LXY-Modell nicht möglich die Funktionen $t(s)$, $g(s)$ und $Z(s)$ exakt aus den Wilson-Funktionen zu bestimmen, und es muss bereits hier genähert werden. Ein weiteres Problem ist die fehlende ϵ -Entwicklung, welche die Komplexität der analytischen Ausdrücke ebenfalls reduzieren würde. Ausgangspunkt für die Rechnungen ist die Beziehung

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = Z^{(n+l)/2}(s) (\Lambda s)^{-(n+l-1)2} G^{(n,l)}\left(\left\{\frac{\mathbf{q}_i}{\Lambda s}\right\}, t(s), g(s), \frac{H(s)}{(\Lambda s)^2}, 1\right) \quad (3.82)$$

und die für tiefe Temperaturen gültige Form der Kopplungskonstanten (3.29). Berechnet man alle notwendigen Größen in der gleichen Näherung, so ergibt sich

$$t(s) = t s^{t/8\pi} \left(\frac{g+s}{g+1}\right)^{-t/8\pi} \quad (3.83a)$$

$$g(s) = \frac{g}{s} \quad (3.83b)$$

$$H(s) = H s^{t/8\pi} \left(\frac{g+s}{g+1}\right)^{t/8\pi} \quad (3.83c)$$

$$Z(s) = \left(\frac{g+s}{g+1}\right)^{t/2\pi} = M_0^2 \left(1 + \frac{s}{g}\right)^{t/2\pi} . \quad (3.83d)$$

Wie in Abschnitt 2.4 ist es das Ziel, durch ein geeignetes Matching zu erreichen, dass man sich auf der rechten Seite von (3.82) auf die triviale Skalenabhängigkeit, den Renormierungsfaktor und den niedrigsten Term der Störungstheorie beschränken kann. Das zunächst naheliegende Matching $H(s) = (\Lambda s)^2$ ist nicht geeignet, um das Verhalten für $H \rightarrow 0$ zu untersuchen. Wie sich nämlich zeigt, kompensieren sich in diesem Fall der führende Term des Vorfaktors und die Korrektur aus der Störungsreihe, so dass der Vorfaktor allein nicht die richtige Abhängigkeit wiedergibt. Mittels der Bedingung $H(s)/(\Lambda s)^2 = g(s)$ wird dieses Problem gelöst und man erhält wieder eine Situation in welcher Vorfaktor und erste Korrektur zur Störungsreihe die gleiche Abhängigkeit aufweisen (jedoch diesmal ohne sich zu kompensieren). Ein Nachteil dieses Matchings ist, dass sich damit nicht der Crossover zum isotropen XY-System beschreiben lässt, da im Limes $g \rightarrow 0$ folgen würde: $H(s)/(\Lambda s)^2 = 0$. In dieser Situation wäre nun wieder das ursprüngliche Matching $H(s) = (\Lambda s)^2$ günstiger. Deshalb werden beide kombiniert zu

$$H(s) = (\Lambda s)^2(1 + g(s)) . \quad (3.84)$$

Günstigerweise heben sich bei diesem Matching die komplizierten temperaturabhängigen Potenzen in einer Weise auf, dass eine quadratische Gleichung für s entsteht. Die Lösung

dieser Gleichung lautet ($h = H/\Lambda^2$)

$$s = \bar{s}(t, g, h) = -\frac{1}{2} \left(g - \sqrt{g^2 + 4\bar{h}^\phi} \right), \quad \bar{h} = \frac{h}{(1+g)^{t/8\pi}} \quad (3.85)$$

mit dem Exponenten

$$\phi = \frac{8\pi}{8\pi - t} = 1 + \mathcal{O}(t). \quad (3.86)$$

Für die im Weiteren interessierenden Grenzfälle ist die Lösung dieser Gleichung

$$\bar{s}(t, g, h) \rightarrow \frac{\bar{h}^\phi}{g} \left(1 - \frac{\bar{h}^\phi}{g^2} + \mathcal{O}((h/g^2)^2) \right) \quad g^2 \gg h \quad (3.87a)$$

$$\bar{s}(t, g, h) \rightarrow \bar{h}^{\phi/2} \left(1 - \frac{g}{2\bar{h}^{\phi/2}} + \mathcal{O}(g^2/h) \right) \quad g^2 \ll h. \quad (3.87b)$$

3.5.1 Suszeptibilitäten und Zustandsgleichung Zunächst soll die transversale Suszeptibilität berechnet werden. Mit Hilfe von (3.82) und den Ergebnissen der Störungstheorie ergibt sich

$$\chi_{\text{T}}(t, g, h, \Lambda) = \frac{Z(\bar{s})}{(\Lambda s)^2} \frac{t(\bar{s})}{th(\bar{s})} \left(1 - \frac{t(\bar{s})}{4\pi} \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + g(\bar{s})x + 1 + g(\bar{s})} + \mathcal{O}(t(\bar{s})) \right), \quad (3.88)$$

mit $h(s) = H(s)/(\Lambda s)^2$. Die angegebene Struktur der rechten Seite als Entwicklung in $t(\bar{s})$ ist eigentlich sinnlos, da $t(\bar{s})$ zumindest im Tieftemperaturbereich im Wesentlichen konstant wird. Trotzdem ist es sinnvoll, obige Störungsreihe wie angegeben abzurechnen, und zwar aus folgenden Gründen. Im Limes $h \rightarrow 0$ ist der effektive Entwicklungsparameter in obiger Störungsreihe die Größe $1/g(\bar{s}) \propto \bar{h}^\phi/g^2$. Die ganze Störungsreihe kann in diesem Fall von einer Entwicklung in $t(\bar{s})$ zu einer Entwicklung in $1/g(\bar{s})$ umformuliert werden und die Klammer auf der rechten Seite wird zu

$$\left(1 - \frac{t(\bar{s})}{4\pi g(\bar{s})} \int_0^1 \frac{xdx}{x+1} + \mathcal{O}((1/g(\bar{s}))^2) \right), \quad (3.89)$$

so dass die Korrekturen höheren Potenzen in h entsprechen. Für den Crossover zum kurzreichweitigen XY-Modell $g \rightarrow 0$ gilt: $g(\bar{s}) \propto g/\bar{h}^{\phi/2} \ll 0$. Die Störungsreihe reduziert sich dann auf die Struktur im kurzreichweitigen System und die Klammer wird im Wesentlichen konstant, so dass auch hier die interessanten Anteile im Vorfaktor zu erwarten sind.

Unter den genannten Bedingungen ergibt sich für die transversale Suszeptibilität

$$\chi_{\text{T}}(t, g, h, \Lambda) = \frac{M_0 \Lambda^{-2}}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\bar{h}^\phi/g^2} \right)^{\frac{t}{4\pi}}. \quad (3.90)$$

In den interessantesten Grenzfällen folgt hieraus

$$\chi_{\text{T}}(t, g, h, \Lambda) \rightarrow \frac{M_0 \Lambda^{-2}}{h} \left(1 + \frac{h^\phi}{g^2(1+g)^{t/(8\pi-t)}} \right)^{\frac{t}{4\pi}} \quad h \ll g^2 \quad (3.91a)$$

$$\chi_{\text{T}}(t, g, h, \Lambda) \rightarrow \Lambda^{-2} h^{-1 + \frac{t}{8\pi-t}} \left(1 + \frac{g}{2\bar{h}^{\phi/2}} \right)^{\frac{t}{4\pi}} \quad h \gg g^2, \quad (3.91b)$$

wobei der zweite Limes erwartungsgemäß mit den Resultaten aus Paragraph 2.5.2 übereinstimmt (bei dem entsprechenden Ergebnis wurde auch $g \ll 1$ benutzt). Das Übergangsverhalten des Systems lässt sich sehr gut durch die Berechnung des effektiven Exponenten darstellen. Dieser ist wie in Paragraph 2.4 definiert als

$$\psi_h^{L/T}(t, g, h, \Lambda) = h \frac{\partial}{\partial h} \ln \chi_{L/T}(t, g, h, \Lambda) \quad (3.92)$$

und in Abb. 3.4 für die transversale Suszeptibilität aufgetragen. Im linken Bereich des

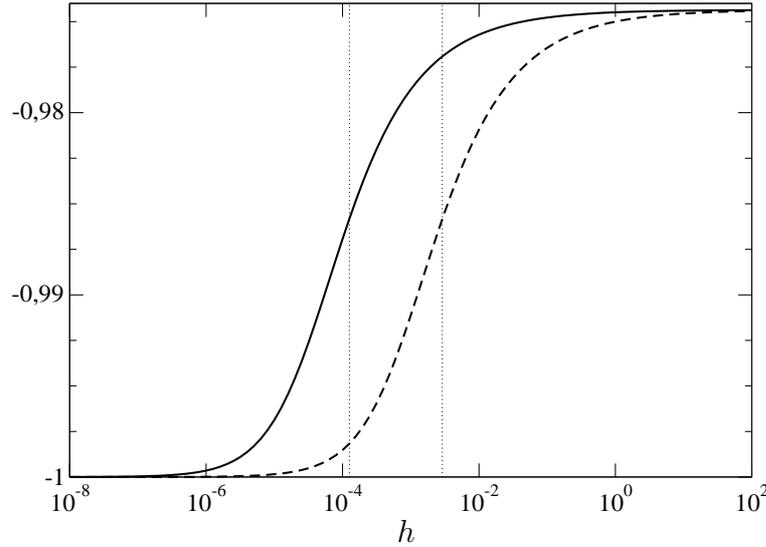


Abbildung 3.4: Effektiver Exponent $\psi_h^T(0.1 t_c, g, h, \Lambda = 1)$ der transversalen Suszeptibilität für $g = 0.01$ (durchgezogene Linie) und $g = 0.05$ (gestrichelte Linie). Punktiert sind die Crossoverskalen gemäß Gl. (3.93) eingezeichnet.

Graphen zeigt das System $1/h$ Verhalten. Für größere Werte von h macht das System einen Übergang zu typischem XY-Verhalten, d.h. der Exponent sättigt bei einem Wert $-1 + t/(8\pi - t)$. Nach Gl. (3.85) ist die Crossoverskala in etwa gegeben durch

$$\bar{h}^\phi = g^2 \quad \Rightarrow \quad h = g^{\frac{8\pi-t}{4\pi}} (1+g)^{\frac{t}{8\pi}}. \quad (3.93)$$

Da das System auch nach Einführung der langreichweitigen Kraft rotationssymmetrisch ist, gilt nach wie vor die Ward-Takahashi-Identität (2.37), so dass die Zustandsgleichung direkt aus Gl. (3.90) folgt

$$M(t, g, h) = M_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\bar{h}^\phi/g^2} \right)^{\frac{t}{4\pi}}. \quad (3.94)$$

Die entsprechenden Grenzfälle erhält man aus (3.91) durch Multiplikation mit $h\Lambda^2$.

Die longitudinale Suszeptibilität ergibt sich durch differenzieren der Magnetisierung nach dem äußeren Feld

$$\chi_L(t, g, h, \Lambda) = \frac{2t M_0 \Lambda^{-2} \left(\frac{h}{1+g} \right)^{\frac{t}{8\pi-t}}}{(8\pi - t) g^2 \sqrt{1 + 4\bar{h}^\phi/g^2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\bar{h}^\phi/g^2} \right)^{-1 + \frac{t}{4\pi}}. \quad (3.95)$$

In den Limiten des Übergangs wird dies zu

$$\chi_L(t, g, h, \Lambda) \rightarrow \frac{2t M_0 \Lambda^{-2}}{(8\pi - t)g^2} \left(\frac{h}{1+g} \right)^{\frac{t}{8\pi-t}} \quad h \ll g^2 \quad (3.96a)$$

$$\chi_L(t, g, h, \Lambda) \rightarrow \frac{\Lambda^{-2}t}{8\pi - t} h^{-1+\frac{t}{8\pi-t}} \quad h \gg g^2. \quad (3.96b)$$

Aus den in Paragraph 2.5.2 genannten Gründen tritt auch hier wieder der spezielle Wert $t=8\pi$ auf. Der Übergang zwischen den verschiedenen Regimes ist in Abb. 3.5 veranschaulicht. Der Exponent variiert zwischen $t/(8\pi-t)$ und $-1+t/(8\pi-t)$. D.h. die Suszeptibilität

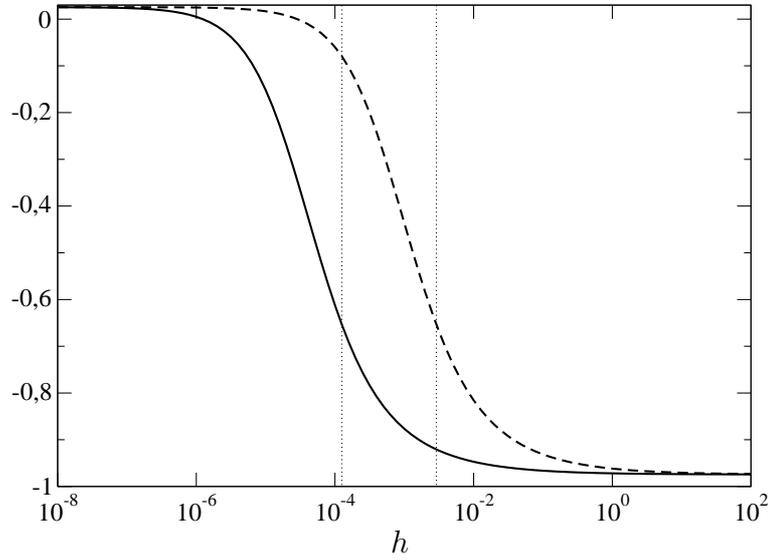


Abbildung 3.5: Effektiver Exponent $\psi_h^L(t=0.1 t_c, g, h, \Lambda=1)$ der longitudinalen Suszeptibilität für $g = 0.01$ (durchgezogene Linie) und $g = 0.05$ (gestrichelte Linie). Punktiert sind die Crossoverstufen gemäß Gl. (3.93) eingezeichnet.

divergiert lediglich im kritischen Bereich. Für kleine h , also dort wo üblicherweise die Goldstone-Singularitäten zu beobachten sind, wird die Suszeptibilität konstant (für $t=0$) bzw. verschwindet mit dem kleinen Exponenten $t/(8\pi-t)$.

3.5.2 Wellenvektorabhängigkeit der Korrelationsfunktionen Um das Verhalten der Korrelationsfunktionen im Limes kleiner Wellenvektoren zu untersuchen (ohne äußeres Feld) wählt man das Matching $\Lambda_s = q$. Das Vorgehen ist dann analog zu der im letzten Abschnitt verwendeten Methode. Für die transversale Korrelationsfunktion ergibt sich dabei ($\hat{q} = q/\Lambda$)

$$G_T(q, t, g, h=0, \Lambda) = t\Lambda^{-2} \hat{q}^{-1+t/(8\pi)} \frac{(g + \hat{q})^{-1+3t/(8\pi)}}{(g + 1)^{3t/8\pi}}, \quad (3.97)$$

mit den Grenzfällen

$$G_{\text{T}}(q, t, g, h=0, \Lambda) \rightarrow t\Lambda^{-2} \hat{q}^{-1+t/(8\pi)} \frac{1}{g} \left(\frac{g}{1+g} \right)^{3t/8\pi} \quad \hat{q} \ll g \quad (3.98a)$$

$$G_{\text{T}}(q, t, g, h=0, \Lambda) \rightarrow t\Lambda^{-2} \hat{q}^{-2+t/(2\pi)} (g+1)^{-3t/(8\pi)} \quad \hat{q} \gg g. \quad (3.98b)$$

Der effektive Exponent

$$\psi_q^T(q, t, g, \Lambda) = q \frac{\partial}{\partial q} \ln G_{\text{T}}(q, t, g, h=0, \Lambda) \quad (3.99)$$

dieses Crossovers ist in Abb. 3.6 dargestellt. Wie aus Gl. (3.97) ersichtlich ist, findet der

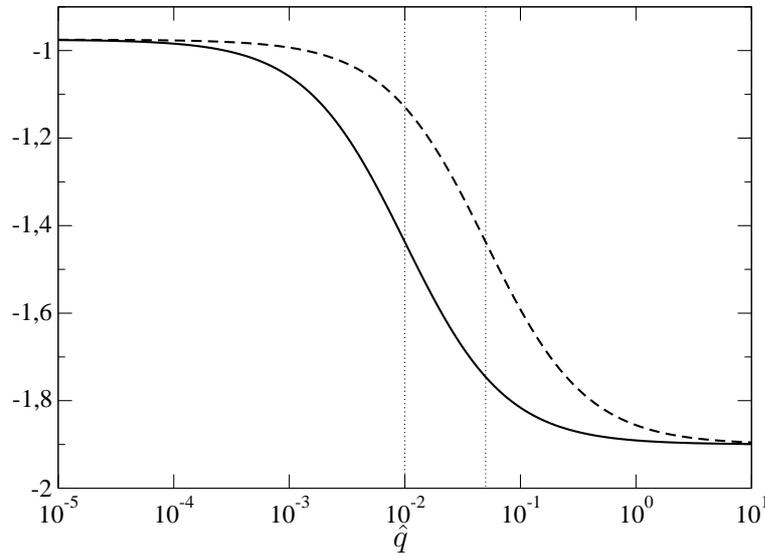


Abbildung 3.6: Effektiver Exponent $\psi_q^T(q, t = 0.1 t_c, g, \Lambda = 1)$ der transversalen Korrelationsfunktion für $g = 0.01$ (durchgezogene Linie) und $g = 0.05$ (gestrichelte Linie). Punktiert sind die Crossoverskalen $\hat{q} = g$ eingezeichnet.

Übergang etwa bei $\hat{q} = g$ statt. Für die longitudinale Korrelationsfunktion wird die Rechnung komplizierter, da sich hier die klare Trennung von Vorfaktor und Störungstermen nicht mehr durchführen lässt. Für die Grenzfälle kann man aber das führende Verhalten bestimmen zu

$$G_{\text{L}}(q, t, g, h=0, \Lambda) \propto \hat{q}^{t/4\pi} \quad \hat{q} \ll g \quad (3.100a)$$

$$G_{\text{L}}(q, t, g, h=0, \Lambda) \propto \hat{q}^{-2+t/2\pi} \quad \hat{q} \gg g. \quad (3.100b)$$

Wie bereits beim Übergangsverhalten in den Suszeptibilitäten fällt bei den Korrelationsfunktionen der späte Übergang zum LXY-Verhalten auf. Eine Messung an einem Modellsystem würde sich deshalb meist im Crossoverbereich zwischen LXY- und XY-Verhalten befinden. Um klare Signaturen des LXY-Modells zu finden, müsste eine Messung bei sehr kleinen Wellenvektoren durchgeführt werden. Aber auch wenn dies gelingen

würde, müsste man noch ein weiteres Problem beachten. So wurde von Bramwell und Holdsworth gezeigt, dass für realistische Probenabmessungen finite-size Effekte einen wesentlichen Einfluss auf das System besitzen. Zwar ist zu erwarten, dass dieser Einfluss im LXY-Modell nicht so stark sein wird, wie im klassischen XY-Modell. Trotzdem wird das Verhalten des langreichweitigen XY-Systems für entsprechend kleine Wellenvektoren durch die finite-size Effekte modifiziert werden. Somit erscheint es unwahrscheinlich, dass man im Tieftemperaturverhalten eines Modellsystems die Kennzeichen des langreichweitigen Tieftemperaturfixpunkts messen kann. Aufgrund der vereinfachten Wechselwirkung, die dem LXY-Modell zugrunde liegt, wird man sowieso kein experimentelles Modellsystem finden. Wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird, ist aber die Situation im DXY-Modell analog zur hier geschilderten, so dass die oben genannten Folgerungen auch für das DXY-Modell zutreffen.

3.6 Der Crossover des planaren Systems

Bisher wurde der asymptotische Grenzfall des XY-Systems betrachtet. In einem realen System sind die Spins jedoch dreikomponentig. Um den Crossover zum zweikomponentigen System zu untersuchen, wird nun das Ginzburg-Landau-Funktional um eine dritte Komponente erweitert. Desweiteren wird ein Anisotropiebeitrag hinzugefügt, welcher eine Ausrichtung der Spins in der Ebene bevorzugt. Ein solcher Beitrag resultiert entweder als Folge der Dipolwechselwirkung oder aufgrund der Existenz magnetokristalliner in-plane Anisotropien.

Wie bereits in der Einführung erläutert, ist eine magnetokristalline Anisotropie im Allgemeinen nicht einfach planar, sondern bevorzugt gewisse Richtungen in der Ebene. Die Relevanz dieser ausgezeichneten Richtungen hängt von der Vielzähligkeit der Achse ab. Im klassischen XY-Modell wäre eine Achse mit sechszähliger oder höherer Symmetrie irrelevant¹⁰. Im Rahmen des LXY-Modells müsste die Frage nach der Relevanz solcher in-plane Anisotropien eigentlich neu beantwortet werden. Im Gegensatz zum XY-Modell gibt es aber keinen einfachen Weg zur Untersuchung dieser Frage. Dies ist zurückzuführen auf die komplizierte analytische Struktur der langreichweitigen Wechselwirkung. Während nämlich das klassische XY-Modell durch die Darstellung in Polarkoordinaten zu einer freien Theorie wird¹¹, gilt dies nicht für das LXY-Modell. Dies war auch der Grund für die Untersuchung des LXY-Modells im Formalismus des NLS-Modells. Für die Renormierung des NLS-Modells ist aber die Rotationssymmetrie von wesentlicher Bedeutung. Durch die Einführung ausgezeichneter Achsen wird diese Symmetrie zerstört¹². Die Frage nach dem Effekt symmetriebrechender Anisotropien lässt sich deshalb im Rahmen der verwendeten Methode nicht einfach beantworten. Wegen dieser Komplikationen beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf die einfachste Form einer Kristallanisotropie, nämlich die,

¹⁰Zumindest in einem gewissen Temperaturintervall (siehe Abschnitt 1.1).

¹¹Dies gilt natürlich nur, solange die angesprochenen in-plane Anisotropien nicht berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 2.5).

¹²Die Frage inwieweit das Ausgangsfunktional erweitert werden muss, um solche symmetriebrechenden Terme zu beschreiben, wurde von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou in [73] beantwortet.

einer rein planaren Anisotropie

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2} K \int d^2x (S^z(\mathbf{x}))^2, \quad K > 0. \quad (3.101)$$

Eine solche Form der Anisotropie kann man auch aus der Dipolwechselwirkung eines dreikomponentigen Systems ableiten. Betrachtet man das Resultat der Ewald-Summation Gl. (A.6), so lauten die Anisotropiebeiträge für die out-of-plane Komponente

$$\frac{s(s+1)g_L^2\mu_B^2}{2N} \sum_{\mathbf{q}} (a_0 - a_1|\mathbf{q}|) S_{\mathbf{q}}^z S_{-\mathbf{q}}^z. \quad (3.102)$$

Der erste Term der Klammer favorisiert eine Ausrichtung der Spins in der Ebene und besitzt die Form (3.101). Der zweite Term hingegen bevorzugt eine modulierte Ausrichtung der Spins senkrecht zur Ebene. Solange jedoch keine uniaxialen Kristallanisotropien mit bevorzugter out-of-plane Richtung vorhanden sind, dominiert der erste Term (siehe etwa [99])¹³ und das System ordnet in der Ebene. In diesem Fall kann man sich auf den ersten Beitrag beschränken¹⁴.

Die Symmetrie eines dreikomponentigen NLS-Modells wird durch den Beitrag (3.101) quadratisch gebrochen. Diese Situation wurde von Amit, Goldschmidt und Peliti untersucht [5]. Die Fragen betreffend der Symmetrie und Renormierbarkeit eines NLS-Modells mit quadratischer Symmetriebrechung werden in diesem Artikel beantwortet. In Analogie zu dieser Arbeit wird nun die Komponentenzahl nicht mehr fixiert, sondern als Parameter betrachtet. Das erleichtert später den Vergleich mit den Resultaten in [5] und stellt nur eine unwesentliche Komplikation dar. Erweitert man das Modell von Amit, Goldschmidt und Peliti um die isotrope, langreichweitige Wechselwirkung, welche zwischen den in-plane Komponenten wirkt, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}) = & \frac{1}{2} \int d^2x \left((\partial_\mu \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}))^2 + (\partial_\mu \sigma(\boldsymbol{\pi}))^2 + K \boldsymbol{\pi}_h^2 \right) - H \int d^2x \sigma(\boldsymbol{\pi}) \\ & + \frac{G}{4\pi} \int d^2x d^2x' \frac{\partial_\mu \partial'_\mu (\boldsymbol{\pi}_s(\mathbf{x}) \boldsymbol{\pi}_s(\mathbf{x}') + \sigma(\boldsymbol{\pi}) \sigma(\boldsymbol{\pi}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Dabei wird das unabhängige Feld $\boldsymbol{\pi}$ aufgeteilt gemäß

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_s, \boldsymbol{\pi}_h), \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\pi}_s = (\pi_1, \dots, \pi_{M-1}) \\ \boldsymbol{\pi}_h = (\pi_M, \dots, \pi_{N-1}) \end{cases}. \quad (3.104)$$

Die $M-1$ Komponenten $\boldsymbol{\pi}_s$ verkörpern hierbei die weichen Moden in der Ebene. Die verbleibenden $N-M$ Komponenten $\boldsymbol{\pi}_h$ stellen die out-of-plane Richtungen dar. Die physikalisch relevante Situation ergibt sich für $M=2$ und $N=3$. Die Feynman Regeln, welche sich aus dem Funktional (3.103) ergeben sind in Tab. 3.3 zusammengefasst. Dabei besitzt

¹³Die Konkurrenz zwischen Beiträgen dieser Art ist gerade die Ursache für die Streifenphase ultradünner magnetischer Filme.

¹⁴Der zweite Term ist auch im Sinne der Renormierungsgruppe weniger relevant als der erste.

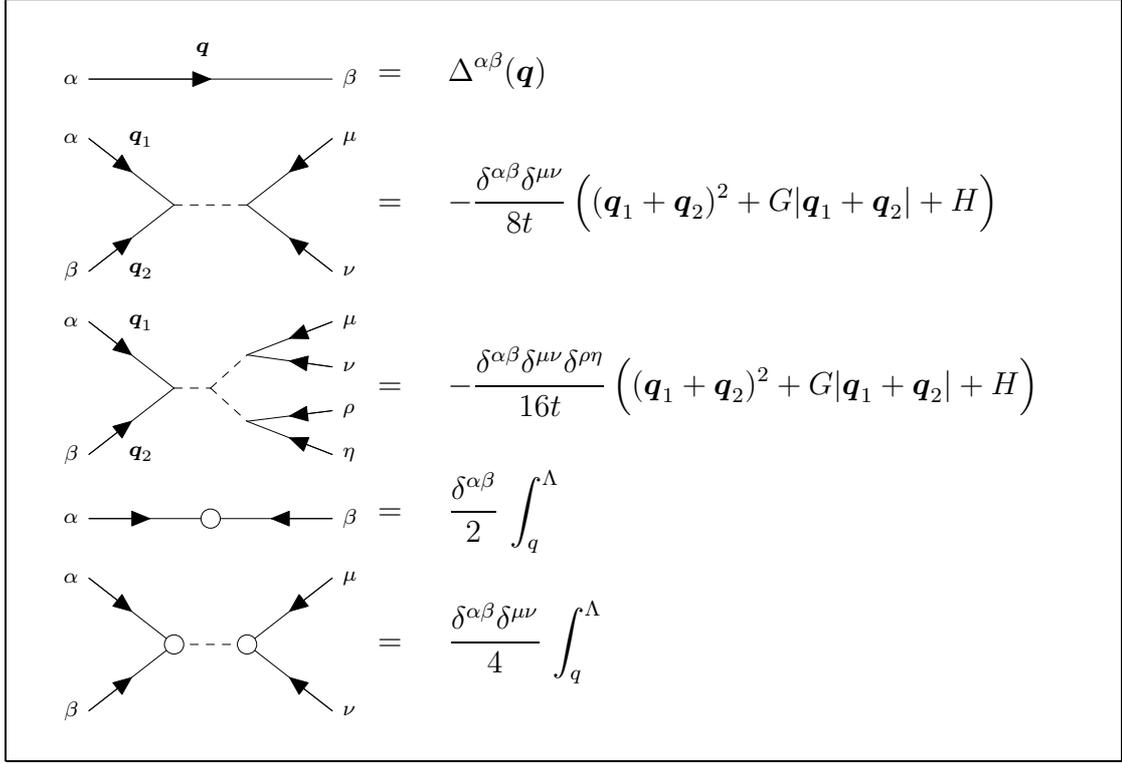


Tabelle 3.3: Feynman Regeln für das planare, langreichweitige nichtlineare σ -Modell.

der Propagator die Form

$$\Delta^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) = \Delta_s(\mathbf{q})\mathbb{P}^{\alpha\beta} + \Delta_h(\mathbf{q})\mathbb{L}^{\alpha\beta} \equiv \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H} \mathbb{P}^{\alpha\beta} + \frac{t}{\mathbf{q}^2 + K + H} \mathbb{L}^{\alpha\beta} \quad (3.105)$$

und die Projektoren \mathbb{P} und \mathbb{L} sind definiert als

$$\mathbb{L}^{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=M}^{N-1} \delta^{\alpha i} \delta^{\beta i}, \quad \mathbb{P} = \mathbf{1} - \mathbb{L}. \quad (3.106)$$

Das durch (3.103) spezifizierte Modell wird im Weiteren als planares, langreichweitiges NLS-Modell bezeichnet. Für $M=2$ und $N=3$ reduziert es sich auf ein planares Heisenberg-Modell in zwei Dimensionen, das um eine langreichweitige Wechselwirkung bereichert wurde und in der Darstellung des nichtlinearen σ -Modells formuliert wird.

3.6.1 Renormierung des planaren, langreichweitigen NLS-Modells Die Renormierung des Modells orientiert sich an dem Vorgehen in [5]. Für die zu den harten bzw. weichen Moden gehörenden Felder wird eine unterschiedliche Feldrenormierungskonstante

eingeführt. Ansonsten ist das Vorgehen analog zu Abschnitt 3.2

$$t = Z_t t_R \quad (3.107a)$$

$$\boldsymbol{\pi}_s = Z_s^{1/2} \boldsymbol{\pi}_{s,R} \quad (3.107b)$$

$$\boldsymbol{\pi}_h = Z_h^{1/2} \boldsymbol{\pi}_{h,R} \quad (3.107c)$$

$$g = Z_g Z_t Z_s^{-1} \frac{\mu}{\Lambda} g_R, \quad g \equiv G/\Lambda \quad (3.107d)$$

$$\varkappa = Z_\varkappa Z_t Z_h^{-1} \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \varkappa_R, \quad \varkappa \equiv K/\Lambda^2 \quad (3.107e)$$

$$H = Z_t Z_s^{-1/2} H_R. \quad (3.107f)$$

Die Renormierungsbedingungen werden erweitert zu

$$\Gamma_{s,R}^{(2),H}(t_R, g_R, \varkappa_R, H_R = 0, \mu, \Lambda) = 1 \quad (3.108a)$$

$$\Gamma_{s,R}^{(2),\text{Iso}}(t_R, g_R, \varkappa_R, H_R = 0, \mu, \Lambda) = 1 \quad (3.108b)$$

$$\Gamma_{s,R}^{(2),\text{Dip}}(t_R, g_R, \varkappa_R, H_R = 0, \mu, \Lambda) = \mu g_R \quad (3.108c)$$

$$\Gamma_{h,R}^{(2),\text{Iso}}(t_R, g_R, \varkappa_R, H_R = 0, \mu, \Lambda) = 1 \quad (3.108d)$$

$$\Gamma_{h,R}^{(2),A}(t_R, g_R, \varkappa_R, H_R = 0, \mu, \Lambda) = \mu^2 \varkappa_R^2. \quad (3.108e)$$

Dabei ist $\Gamma_s \equiv \mathbb{P}\Gamma$, $\Gamma_h \equiv \mathbb{L}\Gamma$ und $\Gamma^{(2),A}$ der Anisotropiebeitrag zum Vertex. Die Störungsreihe ergibt für den Zweipunktvertex

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(\mathbf{q}) &= (\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H) \cdot \mathbb{P} + (\mathbf{q}^2 + K + H) \cdot \mathbb{L} \\ &+ \frac{H}{2} \int_p^\Lambda \left((M-1)\Delta_s(\mathbf{p}) + (N-M)\Delta_h(\mathbf{p}) \right) \cdot \mathbf{1} \\ &+ \int_p^\Lambda \left((\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + G|\mathbf{p} + \mathbf{q}| + H \right) \left(\Delta_s(\mathbf{p}) \cdot \mathbb{P} + \Delta_h(\mathbf{p}) \cdot \mathbb{L} \right) - t\rho \cdot \mathbf{1} + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den Rechnungen in [5] überein. Die Wilson-Funktionen, welche später abgeleitet werden, unterscheiden sich jedoch von den Resultaten in [5]. Dies ist eine Folge des unterschiedlichen Renormierungsverfahrens. Stellt man die Vertexfunktion durch die renormierten Parameter dar und benutzt die Beziehung (A.30) für den Zusammenhang zwischen renormierten und nichtrenormierten Vertexfunktionen, so kann man aus Gl. (3.109) und den Renormierungsbedingungen (3.108) die Z-Faktoren bestimmen

$$Z_s = 1 - t_R \int_p^\Lambda \left((M-1)\Delta_s(\mathbf{p}) + (N-M)\Delta_h(\mathbf{p}) \right) \quad (3.110a)$$

$$Z_h = 1 - t_R \int_p^\Lambda \left(\left(M - 2 - \frac{\mu g_R}{4|\mathbf{p}|} \right) \Delta_s(\mathbf{p}) + \left(N + 1 - M + \frac{\mu g_R}{4|\mathbf{p}|} \right) \Delta_h(\mathbf{p}) \right) \quad (3.110b)$$

$$Z_t = 1 - t_R \int_p^\Lambda \left(\left(M - 2 - \frac{\mu g_R}{4|\mathbf{p}|} \right) \Delta_s(\mathbf{p}) + (N-M)\Delta_h(\mathbf{p}) \right) \quad (3.110c)$$

$$Z_g = 1 \quad (3.110d)$$

$$Z_{\varkappa} = 1 + t_{\text{R}} \int_p^\Lambda \left(1 - \frac{g_{\text{R}} |\mathbf{p}|}{\mu \varkappa_{\text{R}}} \right) \Delta_h(\mathbf{p}) . \quad (3.110e)$$

3.6.2 Renormierungsgruppe und Wilson-Funktionen Die Callan-Symanzik-Gleichungen werden wieder für die nichtrenormierten Korrelationsfunktionen abgeleitet. Sie lauten

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \varkappa} + \frac{n}{2} \zeta + \rho H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, \varkappa, H, \Lambda) = 0 . \quad (3.111)$$

Die Wilson-Funktionen sind dabei gegeben durch

$$\beta(t, g, \varkappa) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial t}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} = t \Lambda \left. \frac{\partial \ln Z_t}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} \quad (3.112a)$$

$$\beta_g(t, g, \varkappa) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial g}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} = -g \left(1 - \frac{\beta}{t} - \zeta_s - \Lambda \left. \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} \right) \quad (3.112b)$$

$$\beta_{\varkappa}(t, g, \varkappa) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial \varkappa}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} = -\varkappa \left(2 - \frac{\beta}{t} - \zeta_h - \Lambda \left. \frac{\partial \ln Z_{\varkappa}}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} \right) \quad (3.112c)$$

$$\zeta_{s/h}(t, g, \varkappa) \equiv -\Lambda \left. \frac{\partial \ln Z_{s/h}}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} \quad (3.112d)$$

$$\rho(t, g, \varkappa) \equiv \Lambda \left. \frac{\partial \ln H}{\partial \Lambda} \right|_{\text{R}} = \frac{\zeta_s}{2} + \frac{\beta}{t} . \quad (3.112e)$$

Verwendet man die Ergebnisse (3.110) für die Z-Faktoren so ergibt sich im Rahmen der 1-loop Rechnung

$$\beta(t, g, \varkappa) = -\frac{t^2}{8\pi} \left(\frac{4(M-2) - g}{1+g} + \frac{4(N-M)}{1+\varkappa} \right) \quad (3.113a)$$

$$\beta_g(t, g, \varkappa) = -g \left(1 - \frac{t}{8\pi} \frac{4+g}{1+g} \right) \quad (3.113b)$$

$$\beta_{\varkappa}(t, g, \varkappa) = -\varkappa \left(2 - \frac{t}{8\pi} \frac{8+g}{1+\varkappa} \right) - \frac{tg}{2\pi} \frac{1}{1+\varkappa} \quad (3.113c)$$

$$\zeta_s(t, g, \varkappa) = \frac{t}{2\pi} \left(\frac{M-1}{1+g} + \frac{N-M}{1+\varkappa} \right) \quad (3.113d)$$

$$\zeta_h(t, g, \varkappa) = \frac{t}{8\pi} \left(\frac{4(M-2) - g}{1+g} + \frac{4(N+1-M) + g}{1+\varkappa} \right) . \quad (3.113e)$$

3.6.3 Spezialisierung auf das dreikomponentige System Spezialisiert man die Flussfunktionen auf den physikalisch relevanten Fall $N=3$ und $M=2$, so ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem für die fließenden Kopplungskonstanten

$$s \frac{dt(s)}{ds} = -\frac{t^2(s)}{8\pi} \left(\frac{4}{1+\varkappa(s)} - \frac{g(s)}{1+g(s)} \right), \quad t(s=1) = t \quad (3.114a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} = -g(s) \left(1 - \frac{t(s)}{8\pi} \frac{4+g(s)}{1+g(s)} \right), \quad g(s=1) = g \quad (3.114b)$$

$$s \frac{d\varkappa(s)}{ds} = -\varkappa(s) \left(2 - \frac{t(s)}{8\pi} \frac{8+g(s)}{1+\varkappa(s)} \right) - \frac{t(s)g(s)}{2\pi} \frac{1}{1+\varkappa(s)}, \quad \varkappa(s=1) = \varkappa. \quad (3.114c)$$

Ist g und damit $g(s)$ identisch null, so erhält man hieraus die Flussgleichungen des planaren, kurzreichweitigen Ferromagneten, welche auch von Nelson und Pelcovits abgeleitet wurden (siehe [74], Formeln (3.5) und (3.6)). Wird die Stärke der planaren Anisotropie $\varkappa(s)$ sehr groß, so ist die out-of-plane Komponente der Spins irrelevant und das DGL-System (3.114) reduziert sich auf das System der Flussgleichungen des LXY-Modells Gl. (3.23). Interessant ist auch die Situation, in welcher das Ausgangssystem keine planare Anisotropie besitzt, also $\varkappa = 0$ gilt. Wie man an Gl. (3.114c) sieht, erzeugt dann die langreichweitige Wechselwirkung im Rahmen der Renormierung eine planare Anisotropie. Dies lässt sich zurückführen auf die Kombination von Dipolwechselwirkung und anisotroper Verteilung der magnetischen Atome im Raum (siehe Abschnitt 1.1). Die Anordnung der Atome auf einer zweidimensionalen Schicht führt dazu, dass die Beiträge der Dipolwechselwirkung zu den out-of-plane und in-plane Komponenten verschieden sind. Das ist offensichtlich, wenn man das Ginzburg-Landau-Funktional (3.103) oder auch das Ergebnis der Ewald-Summation (A.6) betrachtet¹⁵. Die Beiträge zur out-of-plane Komponente favorisieren eine Ausrichtung der Spins in der Ebene. Aber auch wenn diese Terme vernachlässigt werden, also $\varkappa=0$ gesetzt wird, reduziert die langreichweitige Wechselwirkung, welche zwischen den in-plane Komponenten wirkt, die Energie der in-plane Moden, so dass effektiv eine planare Anisotropie vorhanden ist.

Obwohl es nicht das Ziel obiger Rechnungen war, kann man aus den Gleichungen (3.114) auch die Ursachen für den temperaturabhängigen Reorientierungsübergang in einem System mit uniaxialer Anisotropie ablesen. Zwar gelten die Gleichungen (3.114) nicht in dieser Form, falls die Anisotropie eine Ausrichtung senkrecht zur Ebene bevorzugt, also $\varkappa < 0$ gilt. Zumindest für kleine Temperaturen bestimmen aber die naiven Skalendimensionen das Verhalten der Kopplungskonstanten. Die naive Skalendimension ist für die langreichweitige Wechselwirkung identisch eins und für die Kristallanisotropie zwei. Die Kristallanisotropie renormiert deshalb für $s \rightarrow 0$ bzw. $t(s) \rightarrow 0$ wesentlich schneller gegen große Werte, als die langreichweitige Wechselwirkung. Dominiert für eine endliche Temperatur die langreichweitige Wechselwirkung, so dass das System eine homogene Ausrichtung

¹⁵Diese Anisotropie ist nicht zu verwechseln mit der im Rahmen des LXY-Modells vernachlässigten Anisotropie bezüglich der in-plane Komponenten. Sie ist auch von einer anderen Symmetrie. Wie nämlich in Abschnitt 4.1 gezeigt wird, ist die Dipolwechselwirkung für die in-plane Moden invariant bei gleichzeitiger Rotation der Orts- und Spinvektoren. Dies gilt nicht für die Anisotropie bezüglich in-plane und out-of-plane Komponenten.

in der Ebene besitzt, so ist es möglich, dass bei Erniedrigung der Temperatur, aufgrund des unterschiedlichen Renormierungsverhaltens, die uniaxiale Anisotropie dominant wird und ein Reorientierungsübergang in eine Phase mit out-of-plane Magnetisierung stattfindet.

Im Grenzfall verschwindender langreichweitiger Wechselwirkung reduziert sich das System (3.114) auf die Flussgleichungen eines dreikomponentigen, planaren NLS-Modells. Der entsprechende Fluss ist in Abb. 3.7 dargestellt. Besitzt das System keinerlei Aniso-

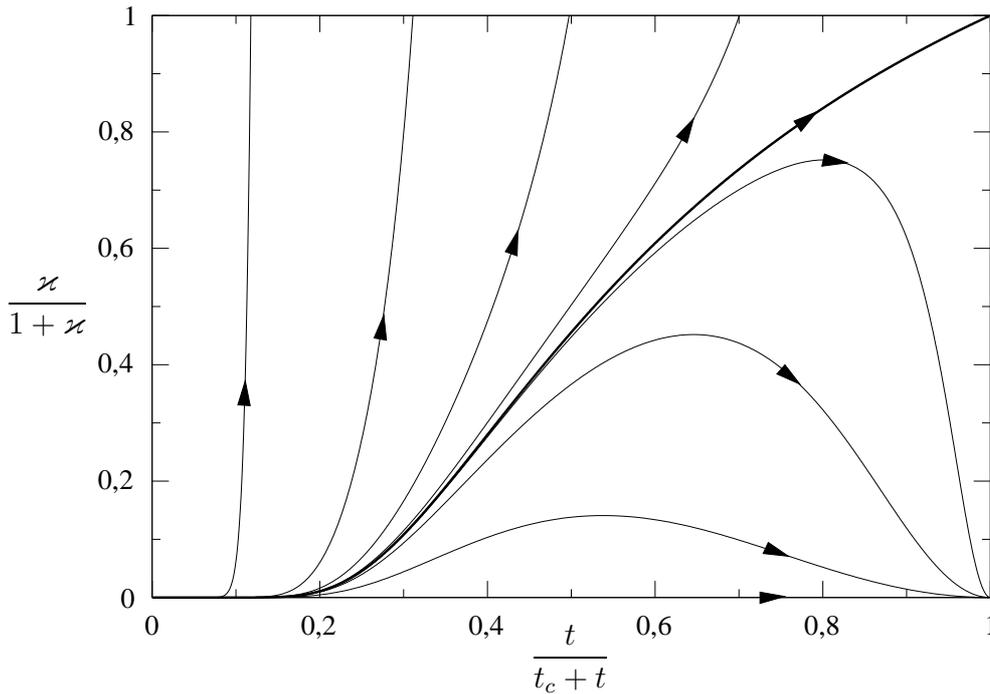


Abbildung 3.7: RNG-Fluss des planaren NLS-Modells mit $N = 3$ und $M = 2$. Die Größe t_c bezeichnet die kritische Temperatur des LXY-Modells. Dick gezeichnet ist die Separatrix, welche die Hochtemperaturphase im rechten Teil des Diagramms vom Tieftemperaturbereich des Systems abgrenzt.

tropie, so weist der Fluss von $t(s)$, aufgrund des fehlenden ferromagnetischen Übergangs im zweidimensionalen, kurzreichweitigen Heisenberg-Modell, gegen den Hochtemperaturfixpunkt bei $(t = \infty, \kappa = 0)$. Ist der Wert der Anisotropie κ von null verschieden, so existieren zwei unterschiedliche Bereiche im Flussdiagramm. Ist die Temperatur t klein genug, so dass sich der Punkt (t, κ) links von der dick gezeichneten Separatrix befindet, so dominiert die Anisotropie das Verhalten des Systems. Der Fluss lässt in diesem Fall die planare Anisotropie unbeschränkt anwachsen, so dass das System effektiv zweikomponentig wird. Die obere Begrenzungslinie des Flussdiagramms entspricht in diesem Sinne der XY-Fixpunktlinie¹⁶. Ist die Anfangstemperatur hingegen so groß, dass sich der

¹⁶Wobei natürlich keine Vortexanregungen berücksichtigt wurden, so dass sich die XY-Linie bis zu unendlich hohen Temperaturen erstreckt.

Punkt (t, \varkappa) rechts von der Separatrix befindet, so dominieren die thermischen Fluktuationen das Verhalten. Die Anisotropie wird irrelevant und die Parameter fließen gegen den Hochtemperaturfixpunkt des isotropen Heisenberg-Modells.

Berücksichtigt man alle drei Kopplungskonstanten, so ergeben sich die Flussdiagramme Abb. 3.8 und Abb. 3.9. Auf den Randflächen dieser Abbildungen ist das Verhalten in den jeweiligen Grenzfällen zu erkennen. Insbesondere ergibt sich für $\varkappa = \infty$ das Flussdiagramm 3.1 des LXY-Modells und auf der Fläche $g = 0$ das Diagramm 3.7 des planaren NLS-Modells. Die Ergebnisse der Renormierungsgruppe lassen drei Bereiche unterschei-

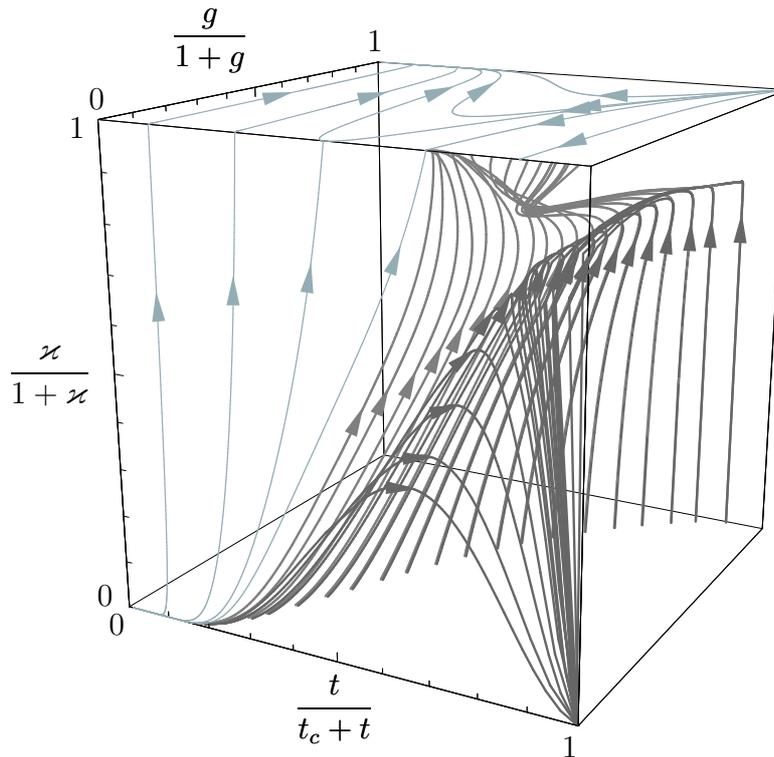


Abbildung 3.8: RNG-Fluss des planaren, langreichweitigen NLS-Modells mit $N=3$ und $M=2$. Die vorderen Trajektorien liegen im Einflussbereich des Heisenberg-Hochtemperaturfixpunkts. Die weiter hinten gezeichneten Trajektorien enden hingegen in der Hochtemperaturphase des LXY-Modells. Auf den Randflächen sind die Grenzfälle des RNG-Flusses für $\varkappa = \infty$ bzw. $g=0$ zu erkennen.

den, in denen sich das System qualitativ unterschiedlich verhält. Für sehr hohe Werte der Temperatur ist der Hochtemperaturfixpunkt des dreikomponentigen, kurzreichweitigen Heisenberg-Modells attraktiv (siehe Abb. 3.8). Die thermischen Fluktuationen dominieren in diesem Fall das Geschehen und sowohl die langreichweitige Wechselwirkung wie auch die planare Anisotropie sind irrelevant. Unterschreitet die Temperatur hingegen eine kritische Grenzfläche $t_h(g, \varkappa)$, so führt der Fluss in den Hochtemperaturbereich des LXY-Modells. In diesem Fall ist die planare Anisotropie relevant und renormiert gegen unendlich hohe Werte. Die langreichweitige Wechselwirkung ist hingegen irrelevant und renormiert gegen null, so dass der Fluss auf der XY-Linie endet. Wie schon im reinen LXY-Modell zeigt

sich auch hier die Vernachlässigung der Vortexanregungen. Bei Berücksichtigung topologischer Anregungen wäre der Hochtemperaturbereich der XY-Linie instabil, so dass sich ein Fluss zu einem neuen Hochtemperaturfixpunkt ergeben würde.

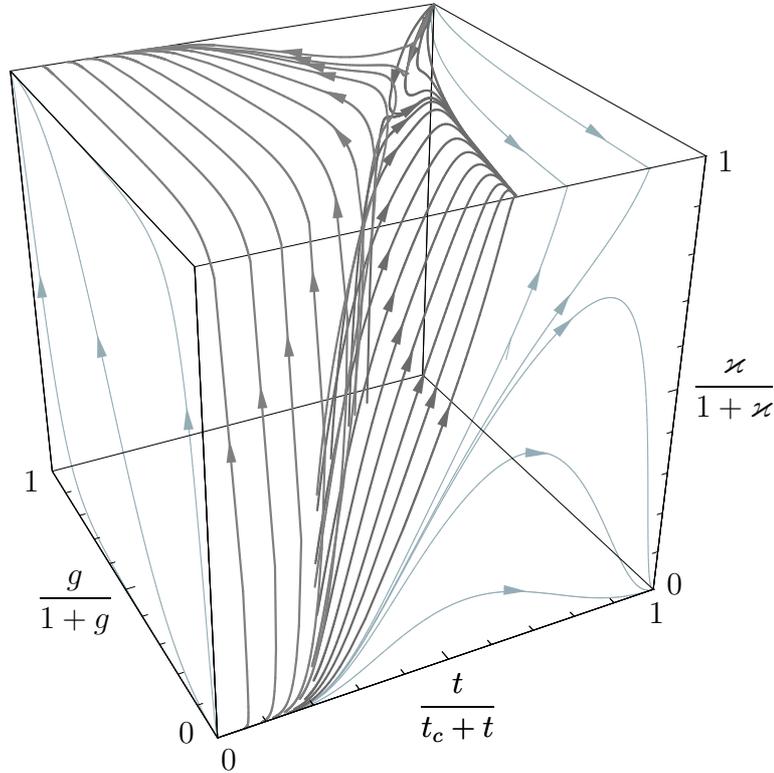


Abbildung 3.9: RNG-Fluss des planaren, langreichweitigen NLS-Modells mit $N=3$ und $M=2$. Die links dargestellten Trajektorien führen zum Tieftemperaturfixpunkt des LXY-Modells, während für die rechts liegenden Trajektorien der Hochtemperaturbereich des LXY-Modells attraktiv ist. An den Randflächen sind die Grenzfälle für $t=0$, $g=0$ und $\varkappa=\infty$ dargestellt.

Neben $t_h(g, \varkappa)$ gibt es noch eine weitere wichtige Grenzfläche im RNG-Fluss. Diese Grenzfläche $t_c(g, \varkappa)$ reduziert sich in der Ebene $\varkappa = \infty$ auf die kritische Trajektorie des LXY-Modells. Sie trennt Hoch- und Tieftemperaturphase des planaren, langreichweitigen Modells. Während für $t_c(g, \varkappa) < t < t_h(g, \varkappa)$ die Hochtemperaturphase des LXY-Modells attraktiv ist, bestimmt für $t < t_c(g, \varkappa)$ der Tieftemperaturfixpunkt des LXY-Modells das Verhalten. Im Tieftemperaturbereich beginnt das dreikomponentigen System somit zu ordnen und wird ferromagnetisch. Aufgrund der Lage des Fixpunkts bei $\varkappa = \infty$ orientieren sich dabei die Spins innerhalb der Ebene der magnetischen Atome. Das unterschiedliche Flussverhalten in der Umgebung der kritischen Grenzfläche $t_c(g, \varkappa)$ ist in Abb. 3.9 dargestellt.

Durch die Berücksichtigung der dritten Komponente ändert sich das Bild des ferromagnetischen Phasenübergangs qualitativ nicht ab. Aufgrund der dritten Kopplungs-

konstante wird lediglich die kritischen Trajektorie $t_c(g)$ des LXY-Modells erweitert zu einer kritischen Fläche $t_c(g, \varkappa)$. Die kritische Temperatur $\tau(t, g)$ hängt nun auch von der Anisotropie ab, und wird zu $\tau(t, g, \varkappa)$. Da der kritische Punkt bei $\varkappa = \infty$ liegt, verliert sich der Einfluss der dritten Komponente bei Annäherung an den Phasenübergang, sowie bei Betrachtung des Systems auf großen Längenskalen. Auch der nichtlineare Charakter des kritischen Fixpunkts ändert sich durch die Berücksichtigung der dritten Komponente nicht. Dies zeigt sich auch analytisch, wenn man die Flussgleichungen in der Umgebung des kritischen Punkts ($t = 2\pi, g = 0, \varkappa = \infty$) entwickelt. Die Terme niedrigster Ordnung lauten

$$s \frac{d\vartheta(s)}{ds} = -\frac{2\pi}{\varkappa(s)} + \frac{\pi g(s)}{2} \quad (3.115a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} = -\frac{3}{4} g^2(s) + \frac{g(s)\vartheta(s)}{2\pi} \quad (3.115b)$$

$$s \frac{d\varkappa(s)}{ds} = -2\varkappa(s), \quad (3.115c)$$

wobei wieder $\vartheta = t - 2\pi$. Die spezielle nichtlineare Form der Flussgleichung für $g(s)$ wurde durch die Einführung der dritten Komponente nicht verändert. Lediglich die Flussgleichung für $\vartheta(s)$ ist gegenüber dem LXY-Modell abgewandelt. Die Anisotropie liefert hier einen zusätzlichen linearen Beitrag¹⁷. Wie man aber an Gl. (3.115c) erkennt, wächst die planare Anisotropie extrem schnell an, so dass sich das System (3.115) wieder auf die Flussgleichungen des LXY-Modells reduziert.

Somit wird der ungewöhnliche Charakter des Phasenübergangs im LXY-Modell, mit exponentiell divergierender Korrelationslänge und Magnetisierung, durch die Existenz einer dritten Komponente nicht verändert. Wie sich zeigen wird, sind die kritischen Eigenschaften des DXY-Modells denen des LXY-Modells sehr ähnlich. Da die Wechselwirkungen, welche in dem hier betrachteten planaren, langreichweitigen NLS-Modell berücksichtigt wurden, so gewählt waren, dass sie ein dreikomponentiges dipolares System modellieren¹⁸, ist zu erwarten, dass auch die kritischen Eigenschaften des DXY-Modells stabil sind gegen den Einfluss einer dritten Komponente.

¹⁷Dieser Beitrag ist als linear anzusehen, da die Entwicklung des Systems asymptotisch um $\varkappa = \infty$ stattfindet. Bezüglich der kleinen Größe $1/\varkappa$ handelt es sich somit um einen linearen Beitrag.

¹⁸Bis auf die vernachlässigte Anisotropie der Dipolwechselwirkung.

KAPITEL IV

Dipolares XY-Modell

In diesem Kapitel wird die Erweiterung des isotropen, kurzreichweitigen nichtlinearen σ -Modells um die Dipolwechselwirkung durchgeführt. Im Gegensatz zu Kapitel 3 wird nicht nur die Langreichweitigkeit, sondern auch die Anisotropie der Dipolwechselwirkung berücksichtigt. Der von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou [73] gegebene Renormierbarkeitsbeweis des NLS-Modells gründet vor allem auf der $O(N)$ -Invarianz des Modells. Weil die Dipolwechselwirkung durch ihre Kopplung von Spin und Gitter die $O(N)$ -Invarianz im Spinraum zerstört, ist zunächst unklar, ob das erweiterte Modell immer noch renormierbar ist. Um diese Frage zu klären, muss man untersuchen, wie sich die Symmetrieeigenschaften durch die Einführung der Dipolwechselwirkung verändern.

4.1 Die Symmetrie des DXY-Modells

Lässt man vorerst äußere Felder außer acht, so lautet das Ginzburg-Landau-Funktional des um die Dipolwechselwirkung erweiterten isotropen, kurzreichweitigen NLS-Modells

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}))^2 + \frac{G}{4\pi} \int d^2x d^2x' \frac{(\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}))(\partial' \mathbf{S}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.1)$$

Wie man sieht, ist der dipolare Term nicht invariant gegen Drehungen im Spinraum. Führt man jedoch gleichzeitig eine Rotation im Spinraum und im Ortsraum durch, so bleibt das Funktional unverändert. Die Ursache dieser Symmetrie ist im diskreten Modell leicht verständlich (Abb. 4.1). Einer Rotation der Spins im kontinuierlichen Modell (4.1) entspricht im diskreten System eine Drehung von \mathbf{S} bezüglich der Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Da die Dipolwechselwirkung von der Ausrichtung des Spinvektors, relativ zum Gittervektor abhängt, bedeutet eine solche Drehung eine Änderung der physikalischen Situation. Gleiches gilt für eine Rotation der Ortsvektoren \mathbf{x} . Eine solche Rotation entspricht im Gitter einer Drehung der Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ gegenüber $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Natürlich bleibt die physikalische Situation aber unverändert, wenn man die Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ rotiert. Analytisch sieht man dies sofort, wenn man die Spinvektoren durch die Gittervektoren ausdrückt

$$\mathbf{R}_i = i_1 \mathbf{a}_1 + i_2 \mathbf{a}_2 \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{S}_i = s_i^1 \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} + s_i^2 \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|}. \quad (4.2b)$$

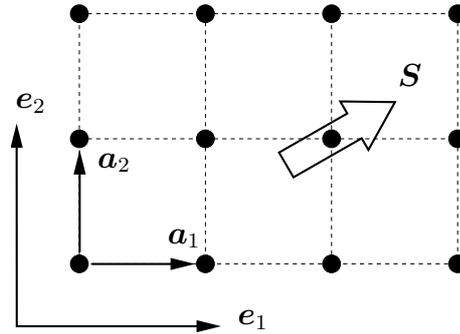


Abbildung 4.1: Ausrichtung von Spinvektoren und Gittervektoren bezüglich der im Raum feststehenden Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Aufgrund der Isotropie des Raumes ändert sich die physikalische Situation nicht, bei einer gemeinsamen Rotation von Gitter- und Spinvektoren. Eine solche Transformation ist äquivalent zu einer Rotation der Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Die in der diskreten Dipolwechselwirkung auftretenden Skalarprodukte (siehe Gl. (A.1))

$$\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i = |\mathbf{a}_1| i_1 s_i^1 + |\mathbf{a}_2| i_2 s_i^2 \quad (4.3)$$

sind offensichtlich unabhängig von der Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ¹. Bezüglich einer Darstellung wie sie in der Kontinuumsform (4.1) verwendet wird

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{e}_1 + y_i \mathbf{e}_2 \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{S}_i = S_i^1 \mathbf{e}_1 + S_i^2 \mathbf{e}_2 \quad (4.4b)$$

führt eine Drehung der Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ hingegen zu einer Transformation der Koordinaten von Gittervektor und Spinvektor.

Die für das Ginzburg-Landau-Funktional gefundene Invarianz gegen gleichzeitige Drehung von Spin- und Ortskoordinaten beruht somit auf einer trivialen Symmetrie des diskreten Systems und ist vergleichbar mit der Translationsinvarianz im phononischen System. Trotzdem ist diese Invarianz hilfreich, um bestimmte Anisotropiebeiträge zu unterscheiden. Betrachtet man etwa eine magnetokristalline Anisotropie in der single-site-Näherung

$$\left(\frac{\mathbf{S}_i \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} \right)^2 = (s_i^1)^2, \quad (4.5)$$

so ist auch dieser Beitrag invariant gegen eine Transformation der Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. In der Kontinuumsnäherung muss man aber wegen der fehlenden Gitterbasis die Spins in der Form (4.4b) darstellen und die mathematische Beschreibung des Anisotropiebeitrags lautet in Kontinuumsnäherung

$$(\mathbf{S}_i \mathbf{e}_1)^2 = (S_i^1)^2 \rightarrow (S^1(\mathbf{x}))^2. \quad (4.6)$$

¹Dabei wurde o.B.d.A. angenommen, dass die Gitterbasis orthogonal ist.

Dieser Term ist aber nicht mehr invariant unter gleichzeitiger Transformation von Orts- und Spinvektoren. In der Kontinuumsdarstellung verletzt diese Form der Anisotropie somit die gekoppelte Symmetrie.

4.2 Ward-Takahashi-Identitäten

Die in Abschnitt 4.1 gefundene gekoppelte Symmetrie kann man benutzen, um gewisse analytische Beziehungen für die erzeugenden Funktionale abzuleiten. Die Ableitung dieser Identitäten kann man ohne Einschränkung an die Anzahl der Spinkomponenten durchführen. Es ist lediglich zu beachten, dass aufgrund der Dipolwechselwirkung (Skalarprodukt zwischen \mathbf{S} und \mathbf{x}) für die Anzahl der Komponenten $N = d$ gelten muss. In einer Situation mit $N \neq d$ wäre auch die gekoppelte Symmetrie nicht mehr vorhanden, was einer weiteren Komplikation entsprechen würde.

4.2.1 Invarianz des Ginzburg-Landau-Funktional Die Symmetrie des Funktionals (4.1) zeigt sich besonders klar, wenn man die Skalarprodukte durch eckige Klammern $\langle | \rangle$ symbolisiert

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}) = -\frac{1}{2} \int d^2x \langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) | \partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle + \frac{G}{4\pi} \int d^2x d^2x' \frac{\langle \partial | \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle \langle \partial' | \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.7)$$

mit dem rotationsinvarianten Laplace-Operator $\partial^2 \equiv \langle \partial | \partial \rangle$. Ist $D_\epsilon O(N)$ eine beliebige Drehmatrix, so gilt für das Funktional

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}(\mathbf{x})) = \mathcal{H}(D\mathbf{S}(D^T\mathbf{x})), \quad (4.8)$$

wie man mit Hilfe der Substitution $\mathbf{y} = D^T\mathbf{x}$ leicht sieht. Zur Ableitung analytischer Beziehungen konzentriert man sich üblicherweise auf die Gruppenelemente, welche nur infinitesimal von der Identität abweichen

$$D = \mathbb{1} + \omega^m t^m, \quad m = 1, \dots, N(N-1)/2. \quad (4.9)$$

Dabei sind die Matrizen t^m die Generatoren der $O(N)$ und die ω^m frei wählbare infinitesimale Parameter. Die Invarianz des Ginzburg-Landau-Funktional drückt sich dann aus durch die Gleichung

$$\Delta\mathcal{H}(\mathbf{S}) = \int d^d x \frac{\delta\mathcal{H}(\mathbf{S})}{\delta\mathbf{S}(\mathbf{x})} \Delta\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.10)$$

Die Größe $\Delta\mathcal{H}$ symbolisiert hier die Änderung des Funktionals, wenn das Feld gemäß

$$\mathbf{S}'(\mathbf{x}') = D\mathbf{S}(D^T\mathbf{x}) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

transformiert wird. Ähnlich wie sich hier sowohl die Spinfelder als auch die Ortsvektoren unter den Rotationsmatrizen transformieren, wirken die Lorentz-Transformationen in der relativistischen Quantenmechanik sowohl auf Spinoren wie auch auf die Ortskoordinaten

und geben Anlass zur Definition von Spin und Drehimpuls. Während aber in der Quantenmechanik diese Freiheitsgrade zunächst unabhängig sind, wirken hier auf Spin- und Ortskoordinaten immer die gleichen Drehmatrizen. Definiert man die Ableitungsoperatoren

$$\mathcal{D}^m(\mathbf{x}) = x^i t_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (4.12)$$

so lässt sich die Änderung des Spinfeldes unter den Elementen der Symmetriegruppe schreiben als

$$\Delta \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \omega^m (t^m + \mathbf{1} \cdot \mathcal{D}^m) \mathbf{S}(\mathbf{x}). \quad (4.13)$$

4.2.2 Nichtlineare Darstellung Wie dies in Paragraph 2.2.2 beschrieben wurde, können die Drehungen aufgeteilt werden in den Stabilisator \mathcal{S} von $(\sigma, 0, \dots, 0)$, welcher isomorph zur $O(N-1)$ ist, und die Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$. In der nichtlinearen Darstellung der Felder (2.2) entsprechen die Elemente aus \mathcal{S} gerade jenen Drehungen, welche lediglich die $\boldsymbol{\pi}$ -Felder untereinander transformieren, während durch die Elemente der Quotientengruppe $\boldsymbol{\pi}$ - und σ -Felder vermischt werden. Eine Darstellung der Generatoren der $O(N)$ in Form von $N \times N$ -Matrizen ist

$$t_{ij}^m \equiv t_{ij}^{(r,s)} = \delta_{rj} \delta_{si} - \delta_{ri} \delta_{sj}, \quad 1 \leq r < s \leq N. \quad (4.14)$$

Die $N-1$ Matrizen, für welche $r=1$ gilt, sind gerade die Generatoren der Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$ und werden im Weiteren mit

$$\hat{t}^\alpha \equiv t^{(1,\alpha+1)}, \quad \alpha = 1, \dots, N-1 \quad (4.15)$$

bezeichnet. Die verbleibenden $(N-1)(N-2)/2$ Matrizen $t^{(\mu+1,\nu+1)}$, $1 \leq \mu < \nu \leq N-1$ sind die Generatoren des Stabilisators \mathcal{S} . Durch Streichen der ersten Zeile und Spalte werden aus diesen Matrizen die Generatoren τ^b der $O(N-1)$

$$\tau_{ij}^b \equiv \tau_{ij}^{(\mu,\nu)} = \delta_{\mu j} \delta_{\nu i} - \delta_{\mu i} \delta_{\nu j}, \quad 1 \leq \mu < \nu \leq N-1. \quad (4.16)$$

Aus der Struktur der Generatoren \hat{t}^α ergibt sich das Transformationsverhalten unter den Elementen der Quotientengruppe zu

$$\Delta \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = \omega \sigma(\boldsymbol{\pi}) + (\omega \hat{\mathcal{D}}) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \quad (4.17a)$$

wo ω^α und $\hat{\mathcal{D}}^\alpha$ die zu den Generatoren \hat{t}^α gehörenden infinitesimalen Parameter bzw. Ableitungsoperatoren sind. Da ihre Zahl gerade $N-1$, also gleich der Zahl der $\boldsymbol{\pi}$ -Komponenten ist, bilden sie einen $N-1$ -dimensionalen Tupel. In der nichtlinearen Darstellung ist σ eine Funktion von $\boldsymbol{\pi}$ und die Änderung von σ muss aus dem Transformationsverhalten von $\boldsymbol{\pi}$ bestimmt werden

$$\Delta \sigma(\mathbf{x}) = \int d^d x' \frac{\delta \sigma(\boldsymbol{\pi})}{\delta \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}')} \Delta \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}') = -\omega \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + (\omega \hat{\mathcal{D}}) \sigma(\boldsymbol{\pi}). \quad (4.17b)$$

Die Aussage der Invarianz eines Funktionals gegen die Elemente der Quotientengruppe nimmt in der nichtlinearen Parametrisierung die Form an

$$\Delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}) = \int d^d x \frac{\delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi})}{\delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})} \Delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.18)$$

mit $\Delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (4.17a). Neben diesen Transformationen ist das Ginzburg-Landau-Funktional natürlich weiterhin invariant gegen die Drehungen, welche dem Stabilisator angehören

$$\Delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}) = \int d^d x \frac{\delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi})}{\delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})} (\tau^b + \mathbb{1} \cdot \Delta^b) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.19)$$

Dabei sind entsprechend (4.16) Generatoren für den Stabilisator definiert worden, mittels

$$\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{D}^{(\mu+1,\nu+1)}(\mathbf{x}) = x^{\nu+1} \frac{\partial}{\partial x_{\mu+1}} - x^{\mu+1} \frac{\partial}{\partial x_{\nu+1}}. \quad (4.20)$$

Die Operatoren $\Delta^b \equiv \Delta^{(\mu,\nu)}$ sind nicht zu verwechseln mit dem Symbol Δ , das etwa auf der linken Seite von (4.18) oder (4.19) auftritt und das lediglich die Änderung einer Größe unter einer Transformation symbolisieren soll.

4.2.3 Lie-Algebra der gekoppelten Symmetrie Das Ginzburg-Landau-Funktional bildet eine Darstellung der gekoppelten Symmetrie. Bezüglich der Quotientengruppe sind die Generatoren dieser Darstellung die kombinierten Ableitungs- und Funktionalableitungsoperatoren

$$\mathcal{L}^\alpha = \int d^d x \left(\delta^{\alpha\beta} \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{x})} + \left(\hat{\mathcal{D}}^\alpha(\mathbf{x}) \pi^\beta(\mathbf{x}) \right) \right) \frac{\delta}{\delta\pi^\beta(\mathbf{x})}. \quad (4.21)$$

Sie wirken auf Funktionale des Feldes $\boldsymbol{\pi}$ und transformieren diese gemäß (4.17a). Für die zugehörige Lie-Algebra ergibt sich wegen

$$[\hat{t}^\alpha, \hat{t}^\beta] = t^{(1+\alpha, 1+\beta)} \quad \text{und} \quad [\hat{\mathcal{D}}^\alpha, \hat{\mathcal{D}}^\beta] = \Delta^{(\alpha,\beta)} \quad (4.22)$$

das Resultat

$$[\mathcal{L}^\alpha, \mathcal{L}^\beta] = \int d^d x \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) (\tau^{(\alpha,\beta)} + \mathbb{1} \cdot \Delta^{(\alpha,\beta)}) \frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})}. \quad (4.23)$$

Wie man durch Vergleich mit (4.19) sieht, ist der entstehende Operator ein Generator des Stabilisators². Damit die Algebra abgeschlossen ist, muss die Anwendung dieses Operators auf das Funktional null ergeben. Ein Funktional, wie etwa das Ginzburg-Landau-Funktional, das invariant unter der gekoppelten Symmetrie der Quotientengruppe ist, muss notwendigerweise das Differentialgleichungssystem (4.18) erfüllen. Da die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems mit der Abgeschlossenheit der Lie-Algebra zusammenfallen, bedeutet dies, dass ein invariantes Funktional notwendigerweise auch invariant gegen die Transformationen des Stabilisators sein muss³.

²Bis auf partielle Integration und Transposition.

³Diese Bedingung ist nur natürlich, denn die Basis einer Darstellung der $O(N)/\mathcal{S}$ muss selbstverständlich invariant gegen die Elemente von \mathcal{S} sein. Dies ist ja gerade die Definition einer Quotientengruppe.

4.2.4 Konsequenzen für die erzeugenden Funktionale Aufgrund der Orthogonalität der betrachteten Transformationen ist das Maß der Funktionalintegrale invariant gegen eine Umparametrisierung $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \Delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$. Erweitert man das Funktional um Quellen für die $\boldsymbol{\pi}$ - und σ -Felder

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H, \mathbf{J}) \equiv \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}) - \int d^d x \mathbf{J}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) - \int d^d x H(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

so gilt deshalb

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{J}, H) &\equiv \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) \right\} \\ &= \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) + \Delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

wo

$$\Delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) = \int d^d x \mathbf{J}(\mathbf{x})\Delta\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \int d^d x H(\mathbf{x})\Delta\sigma(\mathbf{x}). \quad (4.26)$$

Subtrahiert man in (4.25) die erste Zeile von der zweiten und betrachtet die lineare Ordnung in den infinitesimalen Parametern ω , so ergibt sich

$$0 = \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}} \Delta\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) \exp \left\{ -\frac{1}{T} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{J}, H) \right\}. \quad (4.27)$$

Indem man die in $\Delta\mathcal{H}$ auftretenden Felder $\boldsymbol{\pi}$ und $\sigma = \sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}$ durch funktionale Ableitungen nach \mathbf{J} bzw. H ersetzt, kann man $\Delta\mathcal{H}$ vor das Funktionalintegral setzen und es resultiert eine Identität für das verbleibende Pfadintegral, das gerade der Zustandssumme entspricht. Berücksichtigt man die Unabhängigkeit der infinitesimalen Parameter ω und die Definition des Funktionals $W(\mathbf{J}, H) = -T \ln Z(\mathbf{J}, H)$, so folgt daraus

$$0 = \int d^d x \left(J^\alpha(\mathbf{x}) \frac{\delta W}{\delta H(\mathbf{x})} - H(\mathbf{x}) \frac{\delta W}{\delta J^\alpha(\mathbf{x})} + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \hat{D}^\alpha \frac{\delta W}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{x})} + H(\mathbf{x}) \hat{D}^\alpha \frac{\delta W}{\delta H(\mathbf{x})} \right). \quad (4.28)$$

Für die Renormierung ist es wichtig die Eigenschaften des Vertexfunktionals zu bestimmen, deshalb muss obige Beziehung in eine Identität für das Vertexfunktional $\Gamma(\boldsymbol{\varphi}, H)$ übersetzt werden. Dies gelingt mit Hilfe der Standardrelationen für die Legendre-Transformation (Anhang A.3, Gleichungen (A.24), (A.25) und (A.26)). Mit Hilfe dieser Beziehungen ist es einfach, aus Gl. (4.28) eine Identität für das Vertexfunktional zu gewinnen

$$0 = \int d^d x \left(H(\mathbf{x})\boldsymbol{\varphi}^\alpha(\mathbf{x}) + \frac{\delta\Gamma}{\delta\boldsymbol{\varphi}^\alpha(\mathbf{x})} \frac{\delta\Gamma}{\delta H(\mathbf{x})} + H(\mathbf{x})\hat{D}^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta H(\mathbf{x})} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})} \hat{D}^\alpha \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.29)$$

Im Gegensatz zu den üblichen *Ward-Takahashi-Identitäten* im ϕ^4 -Modell sind obige Identitäten nichtlinear in $\Gamma(\boldsymbol{\varphi}, H)$. Diese Nichtlinearität entsteht als Folge der nur für die transversalen Quellen durchgeführten Legendre-Transformation.

Betrachtet man neben den Generatoren \hat{t}^α der Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$ auch die Generatoren τ^b des Stabilisators, so erhält man neben den obigen nichtlinearen Beziehungen auch lineare Ward-Takahashi-Identitäten. Diese Identitäten spiegeln die gekoppelte

Symmetrie des Modells bei gemeinsamer Rotation der $\boldsymbol{\pi}$ -Felder und der zugehörigen Ortskoordinaten wieder. Die Ableitung dieser Beziehungen ist analog zur obigen Vorgehensweise. Für das Kumulanten-Funktional lauten die Identitäten

$$0 = \int d^d x \mathbf{J}(\mathbf{x}) (\tau^b + \mathbf{1} \cdot \Delta^b(\mathbf{x})) \frac{\delta W(\mathbf{J}, H)}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{x})}. \quad (4.30)$$

Die hieraus resultierenden Gleichungen für das Vertexfunktional, lassen sich durch die Eigenschaften (A.24) und (A.25) der Legendre-Transformation gewinnen.

4.3 Die Struktur der Korrelationsfunktionen

4.3.1 Auswertung der linearen Ward-Takahashi-Identitäten Aus den abgeleiteten Ward-Takahashi-Identitäten kann man bestimmte Eigenschaften der Korrelationsfunktionen ablesen. Gilt für die Anzahl der Komponenten des Systems $N \geq 3$, so kann die Beziehungen (4.30) benutzt werden. Durch Differenzieren nach $J^\alpha(\mathbf{x}')$ folgt

$$0 = (\tau_{\alpha\rho}^a + \delta_{\alpha\rho} \Delta^a(\mathbf{x}')) \frac{\delta W}{\delta J^\rho(\mathbf{x}')} + \int d^d x J^\gamma(\mathbf{x}) (\tau_{\gamma\rho}^a + \delta_{\gamma\rho} \Delta^a(\mathbf{x})) \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(\mathbf{x}) \delta J^\alpha(\mathbf{x}')} . \quad (4.31)$$

Die griechischen Indizes laufen hierbei immer von $1, \dots, N-1$. Indem man in (4.31) die physikalisch relevanten Werte $\mathbf{J}(\mathbf{x})=0$, $H(\mathbf{x})=H$ und die Darstellung der Generatoren (4.16) einsetzt, sieht man, dass die Erwartungswerte der $\boldsymbol{\pi}$ -Felder verschwinden

$$0 = \delta_{\nu\alpha} \langle \pi^\mu \rangle - \delta_{\mu\alpha} \langle \pi^\nu \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{\pi} \rangle = 0 . \quad (4.32)$$

Differenziert man (4.31) ein weiteres mal nach $J^\beta(\mathbf{x})$, bevor die Werte $\mathbf{J}(\mathbf{x})=0$ und $H(\mathbf{x})=H$ eingesetzt werden, so ergeben sich für die Korrelationsfunktionen

$$G^{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle \pi^\alpha(\mathbf{x}) \pi^\beta(\mathbf{x}') \rangle \quad (4.33)$$

die folgenden Identitäten ($1 \leq \mu < \nu \leq N-1$)

$$0 = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \text{ und } \beta \neq \mu, \nu \quad (4.34a)$$

$$G^{\nu\alpha}(\mathbf{x}) = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\mu\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \quad (4.34b)$$

$$G^{\mu\alpha}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\nu\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \quad (4.34c)$$

$$G^{\alpha\nu}(\mathbf{x}) = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\alpha\mu}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \quad (4.34d)$$

$$G^{\alpha\mu}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\alpha\nu}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \quad (4.34e)$$

$$G^{\nu\mu}(\mathbf{x}) + G^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\mu\mu}(\mathbf{x}) \quad (4.34f)$$

$$G^{\nu\mu}(\mathbf{x}) + G^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\nu\nu}(\mathbf{x}) \quad (4.34g)$$

$$G^{\mu\mu}(\mathbf{x}) - G^{\nu\nu}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (4.34h)$$

$$G^{\mu\mu}(\mathbf{x}) - G^{\nu\nu}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\nu\mu}(\mathbf{x}) . \quad (4.34i)$$

Indem man Gleichung (4.31) nicht nach J sondern nach H differenziert, können auch Beziehungen für die gemischten Korrelationsfunktionen

$$G^{\alpha\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \langle \pi^\alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}') \rangle \quad (4.35)$$

abgeleitet werden

$$0 = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\alpha\sigma}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \alpha \neq \mu, \nu \quad (4.36a)$$

$$G^{\nu\sigma}(\mathbf{x}) = \Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\mu\sigma}(\mathbf{x}) \quad (4.36b)$$

$$G^{\mu\sigma}(\mathbf{x}) = -\Delta^{(\mu,\nu)}(\mathbf{x}) G^{\nu\sigma}(\mathbf{x}) . \quad (4.36c)$$

4.3.2 Auswertung der nichtlinearen Identitäten Wertet man Gl. (4.28) für $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$, $H(\mathbf{x}) = H$ aus, so bestätigt sich erneut, dass der Erwartungswert von $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$ verschwindet. Differenziert man die Gleichung erst nach H , bevor man obige Werte einsetzt, so ergibt sich zwischen longitudinaler Korrelationsfunktion $G^{\sigma\sigma}$ und der gemischten Suszeptibilität die Beziehung

$$\chi^{\alpha\sigma} = \frac{1}{T} \int d^d x \hat{\mathcal{D}}^\alpha(\mathbf{x}) G^{\sigma\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (4.37)$$

Indem Gl. (4.28) nach J^β differenziert wird, folgt die wichtigste der Ward-Takahashi-Identitäten, nämlich die Zustandsgleichung

$$\chi^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} M/H + \frac{1}{T} \int d^d x \hat{\mathcal{D}}^\alpha(\mathbf{x}) G^{\beta\sigma}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) . \quad (4.38)$$

Wie in den anderen Ward-Takahashi-Identitäten existiert neben dem isotropen Term (siehe Kap. 2, Gl. (2.37)) ein zusätzlicher Beitrag in Form eines Ableitungsterms, welcher durch die Kopplung von Spin- und Ortsfreiheitsgraden entsteht.

4.3.3 Folgerungen für die Korrelationsfunktionen Zunächst sei die Situation ohne Dipolwechselwirkung betrachtet, d.h. alle Terme welche die Rotationsoperatoren Δ^b oder $\hat{\mathcal{D}}^\alpha$ enthalten, werden vernachlässigt. Für ein dreikomponentiges System existieren von den Gleichungen (4.34) dann nur die letzten vier, da die angegebenen Bedingungen für die ersten fünf Gleichungen nicht erfüllbar sind⁴. Von den vier gültigen Gleichungen sind zwei redundant, so dass als Aussage verbleibt, dass die Diagonalelemente der Korrelationsmatrix $G^{\alpha\beta}$ identisch sind und die Matrix ansonsten antisymmetrisch ist. Interessanterweise erzwingen die ersten fünf Bedingungen für $N > 3$ die Diagonalität der Korrelationsmatrix. Hier kommt es offensichtlich zu einer Unterscheidung zwischen einer Situation, in welcher der Stabilisator abelsch ist ($N = 3$), oder nicht ($N > 3$). Ist das System jedoch inversionssymmetrisch $G^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = G^{\mu\nu}(-\mathbf{x})$, dann folgt aus den letzten vier

⁴ $b \equiv (\mu, \nu)$ besteht nur aus dem Wertepaar (1, 2). Die ersten fünf Gleichungen werden erst für $N > 3$ relevant.

Gleichungen von (4.34) auch im abelschen Fall trivial das Verschwinden der Außerdiagonalelemente, wegen $G^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = G^{\nu\mu}(-\mathbf{x})$. Aus den Beziehungen (4.36b) und (4.36c) folgt das Verschwinden der gemischten Korrelationsfunktionen $G^{\alpha\sigma}$ und aus (4.38) die bekannte Relation zwischen transversaler Suszeptibilität und Magnetisierung, die für ein isotropes, kurzreichweitiges Heisenberg-System gültig ist.

Wenn man nun die Dipolwechselwirkung berücksichtigt, so ändern sich die Ward-Takahashi-Identitäten in der angegebenen Weise ab und aus den linearen Identitäten können keine trivialen Schlüsse mehr gezogen werden. Bezüglich der Gleichungen (4.37) und (4.38) gilt es aber zu bemerken, dass aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} \int d^d x \hat{\mathcal{D}}^\alpha(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= - \int d^d x x^\gamma t_{\gamma\beta}^\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\beta} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= -t_{\gamma\beta}^\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \int d^d y (y^\gamma + x'^\gamma) f(\mathbf{y}) \\ &= -t_{\gamma\beta}^\alpha \delta^{\beta\gamma} \int d^d y f(\mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

die Terme mit den Rotationsoperatoren wegfallen. Dies setzt allerdings voraus, dass die Integrale über den ganzen Raum ausgeführt werden und auch ausführbar sind⁵. Für die dreidimensionale Dipolwechselwirkung kann man dies aber nicht garantieren, da in diesem Fall Oberflächenabhängigkeiten auftreten. Diese äußern sich im Propagator durch Terme der Form

$$\frac{q^\alpha q^\beta}{q^2},$$

welche für $q \rightarrow 0$ nicht eindeutig sind. Aus diesem Grund gilt die Beziehung (4.39) nicht notwendigerweise für eine dreidimensionale Dipolwechselwirkung.

Die Dipolwechselwirkung welche hier betrachtet wird, also die Dipolwechselwirkung welche für einen zweidimensionalen Film zutreffend ist, verhält sich im Limes $q \rightarrow 0$ eindeutig

$$\frac{q^\alpha q^\beta}{|\mathbf{q}|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad q \rightarrow 0.$$

Deshalb kann man von der Gültigkeit der Beziehung (4.39) ausgehen. In dieser Situation kann man aus den Gleichungen (4.37) und (4.38) folgern

$$\chi^{\alpha\sigma} = 0 \quad (4.40)$$

und für die Zustandsgleichung

$$\chi^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} M/H, \quad (4.41)$$

also die identischen Beziehungen wie im isotropen, kurzreichweitigen System. Die Gültigkeit von (4.41) auch bei Anwesenheit von Dipolwechselwirkung, ist eigentlich zu erwarten, da die Dipolwechselwirkung in der Kontinuumsnäherung keine Richtung auszeichnet und die Identität (4.41) eine reine Folge der Rotationsinvarianz ist.

⁵Im q -Raum bedeutet dies, dass der Limes $q \rightarrow 0$ der Integranden klar definiert sein muss.

Allgemein kann man sagen, dass die globalen Responsegrößen, also die Suszeptibilitäten, bezüglich der Symmetrie identische Eigenschaften wie im kurzreichweitigen Modell besitzen. Denn die Suszeptibilitäten ergeben sich aus den orts- bzw. wellenvektorabhängigen Responsefunktionen gerade im Limes $q \rightarrow 0$ und in diesem Limes verschwinden die dipolaren Beiträge. Für die dreidimensionale Dipolwechselwirkung ist diese Argumentation aufgrund des uneindeutigen Verhaltens der Dipolterme im Limes $q \rightarrow 0$, bzw. der Oberflächenabhängigkeit der Dipolfelder, unzutreffend.

4.4 Renormierbarkeit des DXY-Modells

Nachdem die einfachen Konsequenzen der Ward-Takahashi-Identitäten für die Struktur der Korrelationsfunktionen geklärt sind, muss die Aufgabe bewältigt werden, aus Gl. (4.29) Aussagen über die Renormierbarkeit des Modells zu gewinnen. Auch hier wird die Komponentenzahl zunächst nicht weiter festgelegt, sondern allgemein $N = d$ verwendet. Damit die für die Lösung der Ward-Takahashi-Identitäten verwendeten Skalenargumente gültig sind, muss aber die Abweichung der Dimension von zwei klein sein. Entsprechend der Loop-Entwicklung in der Störungstheorie wird das Vertexfunktional als Reihe in der Kopplungskonstanten T dargestellt.

$$\Gamma(\varphi, H) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \Gamma_n(\varphi, H). \quad (4.42)$$

Diese Darstellung wird nun in die Ward-Takahashi-Identität (4.29) eingesetzt und für die unterschiedlichen Ordnungen in T ausgewertet. In niedrigster Ordnung folgt

$$0 = \int_x \left(H \varphi^\alpha + \frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha} \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} + H \hat{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} - \frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi} \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi \right), \quad (4.43)$$

also eine Gleichung, welche identisch zur Ausgangsgleichung ist (die Ortsabhängigkeiten werden im Weiteren, soweit keine Verwechslungen möglich sind, unterdrückt und zur Verkürzung der Formeln wird öfter die Schreibweise

$$\int_x \equiv \int d^d x \quad (4.44)$$

benutzt). Für die höheren Ordnungen ändert sich jedoch die Struktur, weil die verschiedenen Beiträge mischen. So folgt für die erste Ordnung in T

$$0 = \int_x \left(\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha} \frac{\delta \Gamma_1}{\delta H} + \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} \frac{\delta \Gamma_1}{\delta \varphi^\alpha} + H \hat{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\delta \Gamma_1}{\delta H} - \frac{\delta \Gamma_1}{\delta \varphi} \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi \right). \quad (4.45)$$

Für die weiteren Ordnungen gibt es jeweils einen Beitrag von der Struktur (4.45), wo allerdings der Index 1 durch die aktuelle Ordnung l ersetzt wird, sowie Beiträge von der Art der ersten zwei Terme in (4.45) mit Indizes n, m , so dass $n + m = l$. Um diesen Gleichungen eine übersichtliche Struktur zu verleihen, wird der Operator \mathcal{X}^α definiert

$$\mathcal{X}^\alpha \equiv \int_x \left\{ \left(\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha} - (\hat{\mathcal{D}}^\alpha H) \right) \frac{\delta}{\delta H} + \left(\frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} \delta^{\alpha\beta} - (\hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\beta) \right) \frac{\delta}{\delta \varphi^\beta} \right\}. \quad (4.46)$$

Dabei wurde im Vergleich zu (4.45) noch eine partielle Integration des Differentialoperators $\hat{\mathcal{D}}^\alpha$ durchgeführt. Zudem wird definiert

$$\Gamma_n * \Gamma_m \equiv \int_x \left(\frac{\delta \Gamma_n}{\delta \varphi} \frac{\delta \Gamma_m}{\delta H} + \frac{\delta \Gamma_m}{\delta H} \frac{\delta \Gamma_n}{\delta \varphi} \right). \quad (4.47)$$

Damit lässt sich die Gleichung l -ter Ordnung symbolisch relativ einfach darstellen

$$\mathcal{X}\Gamma_l = \sum_{n=1}^{l-1} \Gamma_n * \Gamma_{l-n}. \quad (4.48)$$

4.4.1 Lösung der nichtlinearen Ward-Takahashi-Identität In diesem Paragraphen soll die Bedeutung der Gleichung niedrigster Ordnung, nämlich Gl. (4.43) geklärt werden. Wie bekannt ist, gilt für die niedrigste Ordnung des Vertexfunktionals

$$\Gamma_0(\varphi, H) = \mathcal{H}(\varphi, H). \quad (4.49)$$

Wie man durch Differenzieren verifizieren kann, erfüllt das in Gl. (4.24) definierte Ginzburg-Landau-Funktional $\mathcal{H}(\varphi, H, \mathbf{J}=0) \equiv \mathcal{H}(\varphi, H)$ die Gleichung

$$0 = \int_x \left(H\varphi^\alpha + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^\alpha} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta H} + H\hat{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta H} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi \right). \quad (4.50)$$

Allerdings ist dies keine zusätzliche Eigenschaft von \mathcal{H} , sondern die Identität (4.50) muss notwendigerweise von \mathcal{H} erfüllt werden. Um dies zu sehen, muss man zunächst noch einmal zu Gl. (4.18) zurückgehen. Nach dieser Gleichung bedeutet die Invarianz eines Funktionals $F(\varphi)$ gegen die Transformationen der Quotientengruppe $O(N)/\mathcal{S}$ analytisch

$$\Delta F(\phi) = \int_x \frac{\delta F}{\delta \varphi^\beta(\mathbf{x})} \left(\delta^{\alpha\beta} \sqrt{1 - \varphi^2(\mathbf{x})} + \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\beta(\mathbf{x}) \right) = 0. \quad (4.51)$$

Nun kann man wie in $\mathcal{H}(\varphi, H)$ das abhängige Feld $\sigma(\varphi) \equiv \sqrt{1 - \varphi^2}$ linear an ein symmetriebrechendes Feld H ankoppeln

$$F(\varphi, H) = F(\varphi) - \int_x \sigma(\varphi) H(\mathbf{x}). \quad (4.52)$$

In diesem Fall ist das gesamte Funktional nicht mehr invariant, sondern transformiert sich gemäß (siehe Gl. 4.17b)

$$\Delta F(\varphi, H) = - \int_x H(\mathbf{x}) \left(-\varphi^\alpha(\mathbf{x}) + \hat{\mathcal{D}}^\alpha \sigma(\varphi) \right). \quad (4.53)$$

Diese Gleichung ist aber noch nicht in ihrer allgemeinsten Form, den sie schreibt für die abhängige Variable die Form $\sigma = (1 - \varphi^2)^{1/2}$ vor. Neben dieser Parametrisierung sind natürlich noch andere nichtlineare Darstellungen denkbar. Um also eine Gleichung zu finden, welche die Parametrisierung nicht starr vorschreibt, kann man das abhängige Feld

σ durch die Funktionalableitung nach dem symmetriebrechenden Feld H ausdrücken. Aus der Kombination von (4.51) und (4.53) erhält man dann

$$\int_x \frac{\delta F}{\delta \varphi^\beta(\mathbf{x})} \left(-\delta^{\alpha\beta} \frac{\delta F}{\delta H(\mathbf{x})} + \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\beta(\mathbf{x}) \right) = - \int_x H(\mathbf{x}) \left(-\varphi^\alpha(\mathbf{x}) - \hat{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\delta F}{\delta H(\mathbf{x})} \right). \quad (4.54)$$

Dies ist aber gerade die betrachtete Identität (4.50). Die Forderung (4.50) bedeutet also, dass \mathcal{H} aus einem invarianten Anteil bestehen muss und einem Term, in dem das symmetriebrechende Feld H linear an die abhängige Variable koppelt

$$\mathcal{H}(\varphi, H) = \mathcal{H}^{\text{sym}}(\varphi) - \int_x f(\varphi) H(\mathbf{x}), \quad (4.55)$$

wobei f eine einfache Funktion von φ ist.

Um die allgemeine Struktur der Lösung zu finden, kann man (4.55) in die Ward-Takahashi-Identität (4.50) einsetzen⁶. Da das Feld $H(\mathbf{x})$ unabhängig ist, kann man das Feld variieren und die verschiedenen Koeffizienten der Potenzen in H vergleichen. Dies liefert die folgenden Bedingungen

$$0 = \varphi^\alpha(\mathbf{x}) + f(\varphi) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi^\alpha(\mathbf{x})} \quad (4.56a)$$

$$0 = \int_x \frac{\delta \mathcal{H}^{\text{sym}}(\varphi)}{\delta \varphi^\beta(\mathbf{x})} \left(\delta^{\alpha\beta} f(\varphi) + \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\beta(\mathbf{x}) \right). \quad (4.56b)$$

Die erste Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion f und kann gelöst werden, mit dem Ergebnis

$$f(\varphi) = \pm \sqrt{R^2 - \varphi^2}, \quad (4.57)$$

wobei R eine Integrationskonstante ist. Einsetzen dieser Lösung in (4.56b) zeigt (vgl. (4.51)), dass die allgemeine Lösung der Ward-Takahashi-Identität (4.50) für $H = 0$ invariant ist unter der gekoppelten Transformation in Orts- und Spinraum, wobei jedoch der Radius der Sphäre nicht notwendigerweise eins sein muss, sondern einen beliebigen positiven Wert R annehmen kann.

Da auch $\Gamma(\varphi, H)$ die Gleichung (4.50) erfüllt, kann man schließen, dass das vollständige Vertexfunktional aus einem symmetrischen Term besteht und einem Beitrag in dem das äußere Feld linear an die abhängige Variable koppelt. Sind also im Ausgangsfunktional $\mathcal{H}(\varphi, H)$ alle invarianten Terme enthalten, so entsteht durch die Summation der Störungsbeiträge nichts neues. Es können sich lediglich der Radius der Sphäre und die globalen Faktoren vor den verschiedenen symmetrischen Termen ändern. Die Renormierbarkeit des Modells ist damit noch nicht bewiesen, denn es bleibt zu zeigen, dass die Gleichung (4.50) Ordnung für Ordnung stabil unter Renormierung ist. Bei Rechnung bis zu einer bestimmten Loop-Ordnung müssen ja die divergenten Beiträge eliminiert werden, indem im

⁶Diese Form der Lösung lässt sich auch aus Dimensionsüberlegungen ableiten, siehe [68] und die Diskussion in Paragraph 4.4.3.

ursprünglichen Funktional bestimmte Terme addiert werden. Um die Renormierbarkeit zu beweisen, muss man zeigen, dass es möglich ist, dem Ausgangsfunktional \mathcal{H}_0 Counterterme so beizufügen, dass einerseits die Divergenzen beseitigt werden und andererseits das renormierte Funktional \mathcal{H}_R weiterhin der Gleichung (4.50) genügt. Dies ist der Weg wie etwa die Renormierbarkeit nichtabelscher Eichtheorien [100] und des kurzreichweitigen, isotropen nichtlinearen σ -Modells gezeigt wurde [68]. Im Weiteren soll der Renormierbarkeitsbeweis hingegen durch die Auswertung der Hierarchie (4.48) und explizites Lösen der Gleichungen erbracht werden.

4.4.2 Lösung der Gleichungshierarchie Wie im letzten Paragraphen gezeigt wurde, liefert die Gleichung niedrigster Ordnung des Systems (4.48) keine auswertbaren Informationen, sondern ist lediglich eine Identität welche aus der Invarianz des Ginzburg-Landau-Funktional \mathcal{H} folgt. In der Ordnung T^1 ergibt (4.48)

$$\mathcal{X}^\alpha \Gamma_1(\varphi, H) = 0. \quad (4.58)$$

Da Γ_1 aus störungstheoretischen Beiträgen besteht, gibt es bestimmte Anteile in Γ_1 , welche divergieren, wenn der Cutoff gegen Unendlich geht. Diese Anteile müssen bei der Renormierung absorbiert werden. Aufgrund der Unabhängigkeit des Cutoffs gilt obige Gleichung auch für den angesprochenen divergierenden Anteil $\Gamma_1^{\text{div}} \equiv \bar{\Gamma}_1$ von Γ_1

$$\mathcal{X}^\alpha \bar{\Gamma}_1(\varphi, H) = 0. \quad (4.59)$$

Um die Bedeutung von (4.59) für das Funktional $\bar{\Gamma}_1$ zu klären, wird zunächst der Kommutator der Operatoren \mathcal{X}^α bestimmt. Für die abschließende Form des Kommutators ist es wesentlich, dass Γ_0 die Identität (4.43) erfüllt. Denn erst mit Hilfe zweier Beziehungen welche in Anhang E.1, Gl. (E.4) dargestellt werden und die aus (4.43) durch Differenzieren nach H bzw. φ folgen, kann man zeigen

$$[\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{X}^\beta] = \int_x \left(\varphi \tau^{(\alpha, \beta)} \frac{\delta}{\delta \varphi} + \varphi \Delta^{(\alpha, \beta)} \frac{\delta}{\delta \varphi} + H \Delta^{(\alpha, \beta)} \frac{\delta}{\delta H} \right). \quad (4.60)$$

Durch Vergleich mit der Lie-Algebra der gekoppelten Symmetrie (4.23) wird die Bedeutung des Operators \mathcal{X}^α klar. Der Operator \mathcal{X}^α ist ein Generator der Quotientengruppe der gekoppelten Symmetrie. Im Gegensatz zu (4.21) wirken die \mathcal{X}^α aber nicht auf Funktionale $F(\varphi)$, sondern auf Funktionale $F(\varphi, H)$. Jedes unter \mathcal{X} invariante Funktional $F(\varphi, H)$ muss auch die Gleichung

$$[\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{X}^\beta] F(\varphi, H) = 0. \quad (4.61)$$

erfüllen. Wie sich weiter unten zeigen wird, besitzt das relevante Funktional $\bar{\Gamma}_1(\varphi, H)$ die Struktur (4.55). Für ein solches Funktional resultiert Gleichung (4.61) in der Forderung, dass der symmetrische Anteil invariant unter den Transformationen des Stabilisators ist, sowie der Bedingung, dass die im Quellterm auftretende Funktion $f(\varphi)$ invariant unter Rotation der Felder φ ist.

Um das Verhalten explizit zu untersuchen, wird im Weiteren angenommen, dass Γ_0 und damit das Ginzburg-Landau-Funktional die Form

$$\Gamma_0(\varphi, H) = \frac{1}{2} \int_x ((\partial_i \varphi)^2 + (\partial_i \sigma)^2) - \int_x H \sigma + \frac{G}{4\pi} \int_{x, x'} \frac{(\partial \sigma + \nabla \varphi) (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.62)$$

besitzt⁷. Dabei wurde für die Abhängigkeit von den gestrichenen Ortskoordinaten die Abkürzung $f' \equiv f(\mathbf{x}')$ eingeführt und der volle Gradientenoperator wurde aufgeteilt in

$$\partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right) \equiv (\partial, \nabla), \quad (\nabla^\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right). \quad (4.63)$$

Der \mathcal{X} -Operator erhält dann die Form

$$\mathcal{X}^\alpha = \int_x \left(-\partial^2 \varphi^\alpha + \varphi^\alpha w - \left(\hat{\mathcal{D}}^\alpha H \right) - \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\nabla'^\alpha (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\delta}{\delta H} - \mathcal{L}^\alpha, \quad (4.64)$$

wo \mathcal{L}^α der Generator (4.21) ist (allerdings wirkt er hier auf Funktionale von φ und nicht von π) und das Feld $w(\mathbf{x})$ definiert ist durch

$$w(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})} \left(\partial^2 \sigma(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x}) + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\partial' (\partial' \sigma(\mathbf{x}') + \nabla' \varphi(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (4.65)$$

Ersetzt man die Abhängigkeit des Potentials $\bar{\Gamma}_1$ von φ und H durch die Abhängigkeit von φ und dem affinen Feld w , so erhält man ein Potential

$$\gamma_1(\varphi, w) \equiv \bar{\Gamma}_1(\varphi, H(\varphi, w)). \quad (4.66)$$

Mit Hilfe der für $\bar{\Gamma}_1$ gültigen Beziehung $\mathcal{X}\bar{\Gamma}_1 = 0$, lässt sich nun zeigen, dass für das Funktional γ_1 die folgende Identität gilt

$$\mathcal{L}^\alpha \gamma_1(\varphi, w) \Big|_w \equiv \int_x \left(\sigma(\mathbf{x}) \delta^{\alpha\beta} + \left(\hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\beta(\mathbf{x}) \right) \right) \frac{\delta \gamma_1(\varphi, w)}{\delta \varphi^\beta(\mathbf{x})} \Big|_w = 0. \quad (4.67)$$

Der Beweis dieser Beziehung ist etwas langwierig und wird in Anhang E.2 skizziert.

Die Identität (4.67) bedeutet, dass das Funktional γ_1 bei festgehaltenem Feld w invariant ist, gegen die gekoppelte Transformation. Da γ_1 in $d=2$ dimensionslos ist und das affine Feld w wie H die Dimension 2 besitzt, kann, unter der Voraussetzung, dass neben der Dipolwechselwirkung keine weiteren nichtlokalen Terme auftreten⁸, die Lösung von Gl. (4.67) das Feld w nur in nullter und erster Potenz enthalten. Damit lautet die Lösung der Gleichung

$$\gamma_1(\varphi, w) = \gamma_1^{\text{sym}}(\varphi) + \frac{c_1}{2} \int_x w(\mathbf{x}), \quad (4.68)$$

wo γ_1^{sym} invariant unter der gekoppelten Transformation ist. Somit besitzt der divergente Anteil von Γ_1 die Form

$$\bar{\Gamma}_1(\varphi, H) = \bar{\Gamma}_1^{\text{sym}}(\varphi) + \frac{c_1}{2} \int_x \frac{1}{\sigma} \left(\partial^2 \sigma + H + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\partial' (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (4.69)$$

⁷Für eine Verallgemeinerung der folgenden Betrachtungen siehe Paragraph 4.4.4

⁸Vgl. dazu auch die Diskussion in Paragraph 4.4.3.

Wenn im Ausgangsfunktional (4.62) alle relevanten symmetrischen Terme enthalten waren (siehe dazu Paragraph 4.4.5), dann ist $\bar{\Gamma}_1^{\text{sym}}$ bis auf irrelevante Beiträge wieder von der Form⁹

$$\bar{\Gamma}_1^{\text{sym}}(\varphi) = \frac{a_1}{2} \int_x ((\partial_i \varphi)^2 + (\partial_i \sigma)^2) + b_1 \frac{G}{4\pi} \int_{x,x'} \frac{(\partial\sigma + \nabla\varphi)(\partial'\sigma' + \nabla'\varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.70)$$

d.h. die Beiträge können durch eine Renormierung von G und T berücksichtigt werden. Den letzten Term von (4.69) kann man jedoch nicht auf diese Weise absorbieren. Wenn man aber betrachtet, wie sich das Funktional unter einer Renormierung des Radius der Sphäre

$$\Delta\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{Z^{-1} + \varphi^2} - \sqrt{1 + \varphi^2} = -\frac{\delta Z}{2\sigma(\mathbf{x})} + \mathcal{O}(\delta Z^2), \quad Z = 1 + \delta Z \quad (4.71)$$

verhält, so sieht man

$$\Delta\mathcal{H} = \int_x \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma(\mathbf{x})} \Big|_{\varphi} \Delta\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\delta Z}{2} \int_x w(\mathbf{x}). \quad (4.72)$$

Der letzte Term von (4.69) kann also durch eine Feldrenormierung absorbiert werden. Zusammenfassend zeigen die Rechnungen zu den 1-loop Korrekturen, dass alle divergenten Beiträge welche im Rahmen der Störungstheorie auftreten, durch eine Renormierung des Feldes und der Kopplungskonstanten eliminiert werden können. Da sich für die symmetrischen Beiträge keine Einschränkungen ergeben, kann jeder invariante Term mit einem beliebigen Vorfaktor auftreten, d.h. die Kopplungskonstante jedes invarianten Terms renormiert unabhängig. Das äußere Feld hingegen renormiert trivial, so dass alle auftretenden Störungsbeiträge auf die Feldrenormierung zurückzuführen sind.

Im Rahmen der 1-loop Rechnung ist damit die Renormierbarkeit gezeigt. Für die höheren Ordnungen kann man nun induktiv vorgehen und annehmen, dass das Vertexfunktional bis zur Ordnung $l-1$ renormiert wurde. In Gleichung (4.48)

$$\mathcal{X}\Gamma_l = \Gamma_1 * \Gamma_{l-1} + \Gamma_2 * \Gamma_{l-2} + \dots + \Gamma_{l-1} * \Gamma_1$$

ist dann die rechte Seite für große Cutoff-Werte endlich. Wegen der Unabhängigkeit des Cutoff gilt also für $\Gamma_l^{\text{div}} \equiv \bar{\Gamma}_l$ ebenso wie für $\bar{\Gamma}_1$ die Gleichung

$$\mathcal{X}\bar{\Gamma}_l = 0 \quad (4.73)$$

und es kann analog gefolgert werden

$$\bar{\Gamma}_l(\varphi, H) = \bar{\Gamma}_l^{\text{sym}}(\varphi) + \frac{c_l}{2} \int_x \frac{1}{\sigma} \left(\partial^2 \sigma + H + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\partial'(\partial'\sigma' + \nabla'\varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (4.74)$$

Dieser Teil der Renormierbarkeitsbetrachtungen ist völlig identisch zum ursprünglichen Beweis von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou [73]. Dies gilt auch für die Betrachtungen zum Maßterm.

⁹Dabei ist zu beachten, dass $\bar{\Gamma}_1^{\text{sym}}$ nicht nur invariant unter der Quotientengruppe sein muss, sondern aufgrund der Kommutatorbeziehungen (4.60) auch unter den Transformationen des Stabilisators (wo auch die Koordinaten des H -Feldes mitrotiert werden).

4.4.3 Ein alternativer Lösungsweg In diesem Paragraphen soll ein alternativer Weg zur Lösung von Gl.(4.73) (wo \mathcal{X}^α durch (4.64) gegeben ist) aufgezeigt werden. Wie bereits bei der Lösung von (4.67) angesprochen, ist $\bar{\Gamma}_l$ dimensionslos, während H die Dimension 2 besitzt. $\bar{\Gamma}_l$ ist deshalb ein Funktional der Form

$$\bar{\Gamma}_l(\varphi, H) = \gamma_l(\varphi) + \int_x f(\varphi)H(\mathbf{x}), \quad (4.75)$$

wo γ_l ein dimensionsloses Funktional von φ und f eine gewöhnliche Funktion von φ ist. Um diese Form des Funktionals zu erläutern, sei darauf hingewiesen, dass lediglich divergente Beiträge betrachtet werden. Wäre f keine gewöhnliche Funktion von φ sondern würde auch Ableitungsoperatoren enthalten, so wäre der entsprechende Term irrelevant. Nimmt man beispielsweise die Form

$$f(\varphi) = (\partial_i \varphi)^2,$$

an, so würde der ganze Integralterm die Dimension 2 besitzen. Wenn man, wie dies in den expliziten Rechnungen auch gemacht wird, alle Kopplungskonstanten durch Skalierung mit dem Cutoff Λ als dimensionslose Größen schreibt, so muss sich die Kopplungskonstante eines Terms der Dimension 2 (also der Koeffizient vor dem Integral) wie Λ^{-2} verhalten, d.h. der Term divergiert nicht, sondern ist irrelevant für $\Lambda \rightarrow \infty$. Aus diesem Grund sind nur Beiträge relevant, für welche f eine gewöhnliche Funktion von φ ist.

Eine weitere Frage richtet sich nach der Relevanz von Termen, welche höhere Potenzen in H enthalten. Im isotropen, kurzreichweitigen System, wo keine nichtlokalen Terme auftreten, ist ganz klar, dass jede weitere Potenz von H die Dimension des Terms um 2 erhöht und somit nur irrelevante Beiträge entstehen. Da durch die Anwesenheit der Dipolwechselwirkung nun auch nichtlokale Terme denkbar sind, muss man erneut untersuchen, ob relevante Beiträge mit höheren Potenzen in H existieren können. Ein quadratischer Term in H könnte etwa von der Form sein¹⁰

$$\int d^2x d^2x' g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) H(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}').$$

Je schneller die Funktion g mit der Distanz abfällt, desto weniger relevant ist der Beitrag. Damit obiger Term wenigstens marginal ist, muss $g(x) \propto x^0$ gelten. Ein solcher Term wäre völlig unphysikalisch. Insbesondere wäre das Verhalten aber wesentlich singulärer (im Sinne der Langreichweitigkeit) als das Verhalten der Dipolwechselwirkung, welche ja mit der dritten Potenz der Entfernung abfällt. Da man im Rahmen der Störungstheorie sehen kann, dass keine Terme entstehen, welche im obengenannten Sinne singulärer sind als die Dipolwechselwirkung, kann man einen solchen Beitrag ausschließen¹¹. Gleiches gilt für Beiträge, welche noch höhere Potenzen in H enthalten. Somit kann man folgern, dass (4.75) wirklich die allgemeinste Form der Lösung ist.

¹⁰Zur Konstruktion solcher Beiträge muss man beachten, dass jede Integration die Dimension um 2 erniedrigt, was wiederum die Relevanz erhöht.

¹¹Siehe dazu auch Paragraph 4.4.5

Damit nun zur Lösung der Gleichung. Setzt man die Form (4.75) für $\bar{\Gamma}^l$ in Gleichung (4.73) ein, so ergeben sich nach Koeffizientenvergleich in Potenzen des äußeren Feldes zwei Bestimmungsgleichungen. Die Gleichung welche in der Ordnung H folgt, lautet

$$\sigma(\varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi^\alpha} = \frac{\varphi^\alpha}{\sigma(\varphi)}. \quad (4.76)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion f mit der Lösung

$$f(\varphi) = \frac{K}{\sigma(\varphi)}, \quad (4.77)$$

wo K eine Integrationskonstante ist. Die Gleichung welche in der Ordnung H^0 folgt, kann unter Benutzung des Ergebnisses (4.77) formuliert werden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha \gamma_l(\varphi) = \int_x \frac{K}{\sigma} \left\{ -\partial^2 \varphi^\alpha - \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\nabla'^\alpha (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right. \\ \left. + \frac{\varphi^\alpha}{\sigma} \left(\partial^2 \sigma + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\partial' (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Die Lösung dieser Gleichung besitzt offensichtlich zwei Anteile. Für jedes unter der gekoppelten Transformation invariante Funktional verschwindet die linke Seite. Die allgemeine Lösung der Gleichung besteht deshalb aus der homogenen Lösung plus einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung kann mit Hilfe der Ergebnisse des letzten Paragraphen antizipiert werden und die vollständige Lösung lautet¹²

$$\gamma_l(\varphi) = \gamma_l^{\text{sym}}(\varphi) + K \int_x \frac{1}{\sigma} \left(\partial^2 \sigma + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\partial' (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (4.79)$$

Setzt man die gefundenen Lösungen in (4.75) ein und benennt die Integrationskonstante K in c_l um, so sieht man die Übereinstimmung der Lösung mit (4.74).

4.4.4 Eine Verallgemeinerung Ein offensichtliche Einschränkung der gezeigten Renormierbarkeitsbetrachtungen liegt in der expliziten Form, welche für Γ_0 verwendet wurde. Dieser Nachteil haftet auch dem ursprünglichen Beweis von Brézin, Zinn-Justin und Le Guillou an. Insbesondere wird sich im Weiteren zeigen (Paragraph 4.4.5), dass das Funktional (4.62) nicht alle möglichen Terme enthält, sondern, dass im Gegenteil eine unendliche große Zahl von Termen existiert, welche prinzipiell in dem Funktional Γ_0 stehen könnten. Es ist deshalb notwendig, den Beweis ohne eine explizite Form für Γ_0 zu führen.

Der wesentliche Gedanke bei der Lösung von Gl. (4.59) bzw. allgemeiner Gl. (4.73) lag darin, das affine Feld w einzuführen, das gerade so gewählt war, dass es die Änderung des Ausgangsfunktionals Γ_0 bei einer Variation des Radius der Sphäre wiedergibt. Um dies

¹²Der Nachweis, dass der zweite Term in (4.79) tatsächlich die inhomogenen Gleichung erfüllt, ist wiederum relativ langwierig und wird nicht weiter angegeben.

in allgemeiner Form durchführen, wird die Funktionalableitung nach φ aufgeteilt in eine partielle Funktionalableitung nach φ und σ . Dazu werden die Funktionale wieder formal in Abhängigkeit von φ und σ betrachtet

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} F(\varphi, \sigma(\varphi)) = \left(\frac{\delta}{\delta\varphi} \Big|_{\sigma} - \frac{\varphi}{\sigma} \frac{\delta}{\delta\sigma} \Big|_{\varphi} \right) F(\varphi, \sigma(\varphi)) . \quad (4.80)$$

Für das Ginzburg-Landau-Funktional und damit Γ_0 wird lediglich die Abhängigkeit vom äußeren Feld explizit vorgegeben

$$\Gamma_0(\varphi, H) = \mathcal{A}(\varphi, \sigma(\varphi)) - \int_x H(\mathbf{x}) \sigma(\varphi) . \quad (4.81)$$

Aufgrund der Argumentation in Paragraph 4.4.3 ist diese Form keine Beschränkung der Allgemeinheit. In (4.81) ist \mathcal{A} ein Funktional, welches lediglich der Einschränkung unterliegt, dass es invariant unter der gekoppelten Symmetrie ist. Die Gleichung $\mathcal{X}^\alpha \bar{\Gamma}_l = 0$ nimmt damit die Form

$$\mathcal{L}^\alpha \bar{\Gamma}_l = \int_x \left(\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varphi^\alpha} \Big|_{\sigma} + \varphi^\alpha w - \mathcal{D}^\alpha H \right) \frac{\delta \bar{\Gamma}_l}{\delta H} \quad (4.82)$$

an, wo das Feld $w(\mathbf{x})$ nun gegeben ist durch

$$w = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \sigma} \Big|_{\varphi} - H \right) . \quad (4.83)$$

Dieses Feld ist gerade so definiert, dass es die Änderungen des Ausgangsfunktionals (4.81) unter Feldrenormierung wiedergibt. Hält man diesen Anteil konstant, so sollte das verbleibende Funktional invariant unter der Symmetrietransformation sein. Um dies nachzuweisen wird analog zu (4.66) ein Funktional $\gamma_l(\varphi, w)$ definiert

$$\gamma_l(\varphi, w) \equiv \bar{\Gamma}_l(\varphi, H(\varphi, w)) . \quad (4.84)$$

Gemäß obigen Überlegungen wird nun die Änderung dieses Funktionals unter der gekoppelten Transformation, bei festgehaltenem Feld w , betrachtet

$$\mathcal{L}^\alpha \gamma_l(\varphi, w) \Big|_w = \mathcal{L}^\alpha \bar{\Gamma}_l \Big|_H + \int_{x'} \frac{\delta \bar{\Gamma}_l}{\delta H(\mathbf{x}')} \Big|_{\varphi} \cdot \mathcal{L}^\alpha H(\mathbf{x}') \Big|_w . \quad (4.85)$$

Der erste Term kann mit Hilfe der Beziehung (4.82) umgeformt werden. Den zweiten Term kann man berechnen, indem man mit Hilfe der Definition (4.84) H durch das affine Feld w ersetzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha \gamma_l(\varphi, w) \Big|_w &= \int_x \left[\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varphi^\alpha} - \hat{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \sigma} + \int_{x'} \left(\sigma' \delta^{\alpha\beta} + \hat{\mathcal{D}}'^\alpha \varphi'^\beta \right) \left(\frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \sigma \delta \varphi'^\beta} - \frac{\varphi'^\beta}{\sigma'} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta \sigma \delta \sigma'} \right) \right] \frac{\delta \bar{\Gamma}_l}{\delta H} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die in (4.86) auftretenden Ableitungen nach φ und σ sind dabei immer als partielle Ableitungen aufzufassen, d.h. bei konstantem σ bzw. φ . Die Gültigkeit der zweiten Zeile folgt hierbei aus der Invarianz des Funktionals \mathcal{A} unter der gekoppelten Transformation. Um dies zu zeigen geht man günstigerweise wieder auf die Darstellung der Spinfelder durch \mathbf{S} zurück. Unabhängig von der Einschränkung $\mathbf{S}^2 = 1$ besitzt das Ausgangsfunktional in der Darstellung durch \mathbf{S} die Symmetrie (4.10), es gilt also

$$0 = \int_{x'} \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta S^{hi}} (t_{ij}^m + \delta_{ij} \mathcal{D}^m) S^{hj} . \quad (4.87)$$

Indem man diese Identität nach $S^r(\mathbf{x})$ differenziert, ergibt sich

$$0 = \int_{x'} \frac{\delta^2 \mathcal{A}}{\delta S^{hi} \delta S^r} (t_{ij}^m + \delta_{ij} \mathcal{D}^m) S^{hj} + \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta S^i} t_{ir}^m - \mathcal{D}^m \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta S^r} . \quad (4.88)$$

Wertet man die rechte Seite aus, indem man die Werte $r=1$ und $m=(1, 1+\alpha)$ benutzt, sowie die Darstellung in \mathbf{S} wieder durch die Darstellung in φ und $\sigma(\varphi)$ ersetzt, so folgt gerade die rechte Seite von (4.86).

In Analogie zu Paragraph 4.4.2 kann man aus Gl. (4.86) für das Funktional $\bar{\Gamma}_l$ folgern

$$\bar{\Gamma}_l(\varphi, H) = \bar{\Gamma}_l^{\text{sym}}(\varphi) + \frac{c_l}{2} \int_x w(\varphi, H) . \quad (4.89)$$

Nach der Durchführung obigen Beweises ist auch klar, dass der zweite Term in dieser Gleichung durch Feldrenormierung kompensiert werden kann¹³.

4.4.5 Ist das DXY-Modell renormierbar? Zusammenfassend haben die bisherigen Rechnungen folgendes gezeigt:

- Jeder unter der gekoppelten Symmetrie invariante Term des Ausgangsfunktionals \mathcal{H} benötigt nur eine Kopplungskonstante. Die Kopplungskonstanten renormieren unabhängig voneinander¹⁴.
- Neben den Kopplungskonstanten muss das Feld renormiert werden. Dadurch ändert sich die Beziehung zwischen dem abhängigen Feld und den unabhängigen Feldern zu

$$\sigma_{\text{R}}^2 = \frac{1}{Z} - \pi_{\text{R}}^2 .$$

- Das äußere Feld H renormiert trivial. Alle in der Störungsreihe auftretenden Beiträge zum äußeren Feld, sind auf die Feldrenormierung zurückzuführen.

¹³Die Gleichungen (4.71) und (4.72) können hier identisch übernommen werden.

¹⁴Jedenfalls folgt aus den durchgeführten Überlegungen kein Zusammenhang.

Da die Symmetriebetrachtungen jeden unter der gekoppelten Symmetrie invarianten Term erlauben, bleibt die Frage zu klären, welche Beiträge das Ausgangsfunktional enthalten muss. Um die möglichen invarianten Terme zu überprüfen, bietet es sich an, die verschiedenen Terme wieder in \mathbf{S} zu parametrisieren, da in diesen Koordinaten die Symmetrie offensichtlich ist. Im ursprünglichen Modell ohne die Dipolwechselwirkung sind diese Betrachtungen relativ einfach, da das Modell lokal und $O(N)$ -symmetrisch ist. Die möglichen Beiträge beschränken sich wegen der Einschränkung $\mathbf{S}^2 = 1$ auf die Form

$$\int_x \langle \partial_\mu \mathbf{S} | \partial^\mu \mathbf{S} \rangle, \int_x (\langle \partial_\mu \mathbf{S} | \partial^\mu \mathbf{S} \rangle)^2, \int_x \langle \partial^2 \mathbf{S} | \partial^2 \mathbf{S} \rangle, \int_x \langle \partial_\mu \mathbf{S} | \partial_\nu \mathbf{S} \rangle \langle \partial_\mu \mathbf{S} | \partial_\nu \mathbf{S} \rangle, \dots$$

Der einzige in $d = 2$ relevante (eigentlich marginale) Operator ist der erste. Alle weiteren Terme besitzen positive Dimensionen und damit Kopplungskonstanten mit negativer Dimension.

Die Situation wird wesentlich komplizierter durch die Anwesenheit der Dipolwechselwirkung, denn zum einen ist die Forderung der Invarianz gegen die gekoppelte Symmetrie nicht so restriktiv wie die $O(N)$ -Invarianz im Spinraum, und zum anderen sind nun im Prinzip auch nichtlokale Terme erlaubt. Mögliche Terme die auftreten könnten sind

$$\int_{x,x'} \frac{\langle \partial | \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle \langle \partial' | \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) | \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle)^n \quad (4.90a)$$

$$\int_{x,x'} \frac{\langle \partial_\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}) | \partial'^\mu \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) | \mathbf{S}(\mathbf{x}') \rangle)^n, \quad (4.90b)$$

und Terme von ähnlicher Struktur, welche höhere Ableitungen besitzen oder mit der Entfernung langsamer oder schneller abfallen. Eine Analyse der Störungstheorie zeigt aber, dass durch die Renormierung keine Terme entstehen, welche relevanter sind als die Dipolwechselwirkung. Dies ist einfach einzusehen, denn die typische Struktur des dipolaren Vertex ist

$$\frac{q^\alpha q^\beta}{|\mathbf{q}|}.$$

Dieser Ausdruck besitzt die Dimension Λ . Im Rahmen der Störungstheorie können solche Vertizes kombiniert werden. Dadurch ergeben sich Terme mit einer Dimension, die größer ist als die des ursprünglichen Ausdrucks. Auch aus den auftretenden Integralen können keine Beiträge folgen, die eine niedrigere Dimension besitzen, da die Integrale im Limes $q \rightarrow 0$ wohldefiniert sind und deshalb keine singulären Anteile in q enthalten. Aus der Störungstheorie können somit maximal Beiträge entstehen, welche genauso relevant sind wie die Dipolwechselwirkung.

Das Problem der Existenz der Störterme (4.90) betrifft nicht nur das DXY-Modell, sondern auch das LXY-Modell, da die Beiträge der Form (4.90b) $O(N)$ -symmetrisch sind und eine ähnliche Struktur wie der langreichweitige Term im Ausgangsfunktional besitzen¹⁵. Deshalb ist es wichtig zu klären, ob Terme dieser Art (mit $n > 1$) im Rahmen der Störungstheorie erzeugt werden. Um diese Frage genauer zu untersuchen, muss man die Struktur der Störungstheorie analysieren.

¹⁵Der im LXY-Modell auftretende Beitrag ist gerade der Term (4.90b) für $n=0$.

4.4.6 Analyse der Störungsreihe Die Betrachtungen zu den störungstheoretischen Beiträgen sind für das LXY-Modell und das DXY-Modell im Wesentlichen identisch. Deshalb wird im weiteren die Störungsreihe des DXY-Modells analysiert. Ausgangspunkt ist das Ginzburg-Landau-Funktional des DXY-Modells. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Austauschterm für die weiteren Betrachtungen vernachlässigt. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da der Austauschterm bei der folgenden Argumentation keine wesentliche Rolle spielt¹⁶. Das Funktional lautet dann

$$\mathcal{H}(\pi) = \frac{G}{2} \int_q \left(\frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} \pi(-\mathbf{q})\pi(\mathbf{q}) + 2 \frac{q_x q_y}{|\mathbf{q}|} \pi(-\mathbf{q})\sigma(\mathbf{q}) + \frac{q_x^2}{|\mathbf{q}|} \sigma(-\mathbf{q})\sigma(\mathbf{q}) \right). \quad (4.91)$$

Durch Entwicklung des abhängigen Feldes σ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\pi) &= \frac{G}{2} \int_q \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} \pi(-\mathbf{q})\pi(\mathbf{q}) \\ &+ G \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{q, q_1, \dots, q_{2n}} (2\pi)^d \delta \left(q + \sum q_i \right) \frac{q_x q_y}{|\mathbf{q}|} \pi(\mathbf{q}) \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_{2n}) \\ &+ \frac{G}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \alpha_n \alpha_{m-n} \int_{q_1, \dots, q_{2m}} (2\pi)^d \delta \left(\sum q_i \right) \frac{(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_{2n})_x^2}{|\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_{2n}|} \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_{2m}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

mit den Faktoren

$$\alpha_n \equiv (-1)^n \binom{1/2}{n}, \quad (4.93)$$

welche sich aus der Entwicklung der Wurzelfunktion ergeben. Diesen Vertizes werden die folgenden Diagramme zugewiesen

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= -G \alpha_n \frac{q_x q_y}{|\mathbf{q}|}, \\ \text{Diagram 2} &= -\frac{G \alpha_n \alpha_{m-n}}{2} \frac{(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_{2n})_x^2}{|\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_{2n}|} \end{aligned}$$

Die mit den Querstrichen gekennzeichneten Linien gehören zu den Impulsen, welche im analytischen Ausdruck für den Vertex explizit auftreten. Die Integrale, welche im Rahmen der Störungstheorie entstehen, sind im Limes verschwindender äußerer Impulse wohldefiniert und besitzen deshalb keine singuläre Entwicklung. Nichtanalytische Beiträge können deshalb nur auftreten, wenn über einen Vertexbeitrag nicht integriert wird. Ist etwa einer der gestrichenen Beine mit einem inneren Impuls verbunden, so wird über den gesamten Vertex integriert und er liefert nur analytische Terme. Die Konstruktion nichtanalytischer Beiträge gelingt im Rahmen der Störungstheorie also nur dann, wenn alle gestrichenen Beine eines Vertex nur mit äußeren Impulsen verbunden sind. Sind die gestrichenen Linien zweier Vertizes nur mit äußeren Impulsen verbunden, so ergibt sich ein Term mit einer

¹⁶Gleiches gilt für die Anzahl der Komponenten N , welche nicht notwendigerweise auf zwei beschränkt sein muss.

“quadrierten” Dipolwechselwirkung, welcher weniger relevant ist, da der Term nicht mehr wie Λ , sondern wie Λ^2 skaliert. Aus diesen Überlegungen folgt, dass die Störungstheorie nur dipolare Terme erzeugt, welche exakt die analytische Struktur der vorhandenen Vertizes besitzen. Betrachtet man nun etwa die Fouriertransformation des Störterms (4.90a)

$$-2\pi \int_{q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}} (2\pi)^d \delta \left(\sum \mathbf{q}_i + \sum \mathbf{p}_i \right) \frac{q_1^\alpha p_1^\beta}{|\sum_i \mathbf{q}_i|} S^\alpha(\mathbf{q}_1) S^\beta(\mathbf{p}_1) \quad (4.94)$$

$$\times (\mathbf{S}(\mathbf{q}_2) \mathbf{S}(\mathbf{p}_2)) \dots (\mathbf{S}(\mathbf{q}_{n+1}) \mathbf{S}(\mathbf{p}_{n+1})) \ ,$$

so sieht man, dass sich die analytischen Strukturen für verschiedene n wesentlich unterscheiden. Insbesondere beinhaltet der Nenner des Bruchterms gerade n Impulse. Auch nach Transformation auf die unabhängigen Koordinaten unterscheiden sich die analytischen Strukturen, so dass nach obiger Argumentation ein derartiger Term im Rahmen der Störungstheorie nicht erzeugt werden kann. Dies gilt auch für die weiteren Störterme der Skalendimension eins.

Da man obige Betrachtungen problemlos auf das LXY-Modell übertragen kann, ist für das LXY-Modell die Renormierbarkeit damit gezeigt. Für das DXY-Modell existiert aber zumindest noch ein marginaler Operator, den man beachten muss, nämlich

$$\int d^d x (\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}))^2 = \int_q (\mathbf{q} \mathbf{S}(\mathbf{q})) (\mathbf{q} \mathbf{S}(-\mathbf{q})) \quad (4.95)$$

und eventuell auch noch Operatoren, welche die Spinfelder in höheren Potenzen beinhalten. Diese marginalen Operatoren, welche in der Störungsreihe erzeugt werden könnten¹⁷, kann man nicht grundsätzlich ausschließen. Da der dominante Term aber der dipolare Beitrag ist, kann man sie in einer ersten Näherung vernachlässigen. Im Rahmen dieser Näherung, also der Vernachlässigung gewisser marginaler Operatoren, kann man somit sagen, dass das DXY-Modell, oder allgemeiner das nichtlineare σ -Modell mit einer Dipolwechselwirkung für die $N=d$ gilt, renormierbar ist.

4.5 Renormierung des DXY-Modells

Im Weiteren wird nun die Anzahl der Komponenten auf zwei fixiert. Grundsätzlich wäre es natürlich möglich, mit der Komponentenzahl N zu rechnen. Da hier aber zweidimensionale Systeme untersucht werden, muss man sich letztlich, wegen der Bedingung $N=d$, doch auf ein zweikomponentiges System beschränken. Die Renormierung wird mit der in Abschnitt 2.3 vorgestellten und auch für das LXY-Modell verwendeten Methode durchgeführt. Im DXY-Modell zeigt sich der große Vorteil dieser Methode, da die in der Störungstheorie auftretenden Integrale analytisch nicht berechenbar wären¹⁸. Durch die

¹⁷Wie sich später an den konkreten Rechnungen zeigt, wird der Operator (4.95) tatsächlich in Rahmen der Störungstheorie erzeugt.

¹⁸Außer in gewissen Grenzfällen.

Differentiation nach dem Cutoff Λ , wird aber die Zahl der Integrationen von zwei auf eine reduziert und es bleibt lediglich ein Winkelintegral auszuführen.

Zunächst muss das Ginzburg-Landau-Funktional (4.1) um ein äußeres Feld erweitert und in den unabhängigen Koordinaten (2.2) formuliert werden

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\pi, H) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{q}^2 + G \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + H \right) \pi(\mathbf{q}) \pi(-\mathbf{q}) \\
&\quad - \frac{G}{2} \int_{q_1, \dots, q_3} (2\pi)^2 \delta \left(\sum \mathbf{q}_i \right) \frac{q_1^x q_1^y}{|\mathbf{q}_1|} \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_3) \\
&\quad + \frac{1}{8} \int_{q_1, \dots, q_4} (2\pi)^2 \delta \left(\sum \mathbf{q}_i \right) \left\{ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \frac{(q_1^x + q_2^x)^2}{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} + H \right\} \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_4) \\
&\quad - \frac{G}{8} \int_{q_1, \dots, q_5} (2\pi)^2 \delta \left(\sum \mathbf{q}_i \right) \frac{q_1^x q_1^y}{|\mathbf{q}_1|} \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_5) \\
&\quad + \frac{1}{16} \int_{q_1, \dots, q_6} (2\pi)^2 \delta \left(\sum \mathbf{q}_i \right) \left\{ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \frac{(q_1^x + q_2^x)^2}{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|} + H \right\} \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_6) \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Diesen Termen müssen noch die Beiträge des Maßterms hinzugefügt werden. Da die Parametrisierung unverändert ist, unterscheidet sich der Maßterm nicht von der Form (2.5). Fügt man alles zusammen, so ergeben sich die Feynman-Regeln von Tab. 4.1

Mit Hilfe der Entwicklung von σ nach den π -Feldern und den oben abgeleiteten Feynman-Regeln, kann man analog zum LXY-Modell (Abschnitt 3.1) die Schwankungen der Magnetisierung berechnen. In niedrigster Ordnung ergeben sich diese Schwankungen aus dem Integral über den Propagator. Für ein reines Austauschsystem divergiert dieses Integral. Nimmt man jedoch die Dipolwechselwirkung hinzu, so gilt

$$\Delta M(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|}} + \mathcal{O}(t^2) = \frac{t}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+g}}{\sqrt{g}} \right) + \mathcal{O}(t^2), \quad g = G/\Lambda. \tag{4.97}$$

Die Dipolwechselwirkung ist in der Lage, die Fluktuationen auf einen endlichen Beitrag zu begrenzen. Dementsprechend kann man erwarten, dass ein zweidimensionales XY-System mit dipolarer Wechselwirkung eine Phase mit spontaner Magnetisierung besitzt.

4.5.1 Ausführung der Integrale Wegen der Anisotropie im Propagator und in den Vertizes, sind die Integrale, welche im Rahmen der Störungstheorie entstehen, nicht nur vom Absolutbetrag der Integrationsvariable abhängig, sondern auch vom Winkel. Die typische Struktur der Integrale lautet

$$\int_{\mathbf{k}} \frac{k_x^m k_y^n}{|\mathbf{k}|^l} (\tilde{\Delta}(\mathbf{k}))^\rho = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\Lambda k^{n+m+1-l-2\rho} dk \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos^n \phi \sin^m \phi}{(1 + \tilde{g} \sin^2 \phi + \tilde{h})^\rho}, \tag{4.98}$$

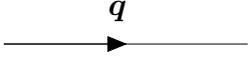
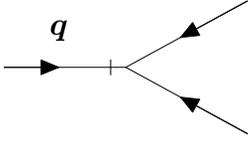
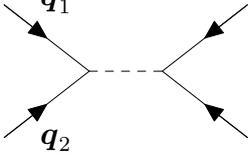
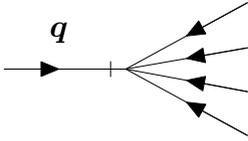
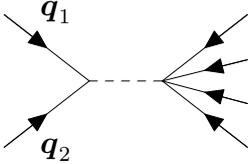
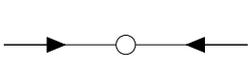
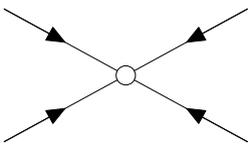
	$= \frac{t}{\mathbf{q}^2 + G \frac{q_y^2}{ \mathbf{q} } + H} \equiv \Delta(\mathbf{q})$
	$= \frac{G}{2t} \frac{q_x q_y}{ \mathbf{q} }$
	$= -\frac{1}{8t} \left((\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \frac{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)_x^2}{ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 } + H \right)$
	$= \frac{G}{8t} \frac{q_x q_y}{ \mathbf{q} }$
	$= -\frac{1}{16t} \left((\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G \frac{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)_x^2}{ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 } + H \right)$
	$= \frac{1}{2} \int_q^\Lambda$
	$= \frac{1}{4} \int_q^\Lambda$

Tabelle 4.1: Feynman Regeln für das DXY-Modell

mit dem temperaturunabhängigen Propagator $\tilde{\Delta} \equiv \Delta/t$ und den dimensionslosen Größen $\tilde{g} \equiv G/k$ und $\tilde{h} \equiv H/k^2$. Wegen der späteren Differentiation nach Λ muss das Integral über k nicht ausgeführt werden. Das Winkelintegral

$$\Theta_\rho^{(n,m)}(g, h) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos^n \phi \sin^m \phi}{(1 + g \sin^2 \phi + h)^\rho} \quad (4.99)$$

muss man aber berechnen. Glücklicherweise kann man dieses Integral allgemein lösen und auf die *Hypergeometrische Funktion* $F \equiv {}_2F_1$ zurückführen. Nach Gradshteyn und Ryzhik [101], Nummer (3.682) gilt nämlich für das Integral

$$\Theta_\rho^{(n,m)}(g, h) = \frac{1}{\pi(1 + g + h)^\rho} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) F\left(\frac{n+1}{2}, \rho, \frac{n+m+2}{2}, \frac{g}{1+g+h}\right), \quad (4.100)$$

dabei ist $B(x, y)$ die Beta-Funktion. Die Funktion $\Theta_1^{(0,0)}$ lässt sich durch Summation der hypergeometrischen Reihe auf einen algebraischen Ausdruck zurückführen

$$\Theta_1^{(0,0)}(g, h) = \frac{1}{\sqrt{1+h} \sqrt{1+g+h}}. \quad (4.101)$$

Für ganzzahlige n , m und ρ lassen sich alle weiteren benötigten hypergeometrischen Funktionen mittels der Differentiations-Rekursionsrelation [102]

$$F(\alpha+n, \beta, \gamma+n, z) = (-1)^n (1-z)^{(1-\alpha)} \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n (\gamma-\beta)_n} \frac{d^n}{dz^n} ((1-z)^{(\alpha+n-1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z))$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \quad (4.102)$$

berechnen, oder mit den Gauss-Rekursionsrelationen aus den berechenbaren Funktionen ableiten. Aus den Gauss-Rekursionsrelationen folgt eine große Zahl an Beziehungen, welche die Winkelintegrale verknüpfen. Eine Relation soll dabei herausgestellt werden, da sie an mehreren Stellen benötigt wird. Sie folgt aus der Rekursionsrelation ([101], (9.137))

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, z) - \gamma F(\alpha+1, \beta, \gamma, z) + \beta z F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z) = 0. \quad (4.103)$$

Setzt man hier $\gamma = (m+n)/2+1$, $m = n+2$ so kann man folgern

$$\Theta_\rho^{(n+2,n)}(g, h) - \Theta_\rho^{(n,n+2)}(g, h) = \frac{2\rho g}{n+1} \Theta_{\rho+1}^{(n+2,n+2)}(g, h). \quad (4.104)$$

Mit diesen Betrachtungen ist das Problem der Integration gelöst, da man alle benötigten Integrale auf hypergeometrische Funktionen, welche sich durch algebraische Ausdrücke darstellen lassen, zurückgeführt hat. Insbesondere sieht man auch, dass es grundsätzlich möglich wäre, den marginalen Störoperator (4.95) im Ausgangsfunktional zu berücksichtigen, ohne neue Probleme mit der Integration zu erhalten. Dieser Operator würde im Propagator lediglich den Vorfaktor des Sinus-Terms verändern und dies wäre unproblematisch. Trotzdem soll im Weiteren auf diesen Term verzichtet werden.

4.5.2 Berechnung der Renormierungskonstanten Für die Renormierung können die Beziehungen (3.9) des LXY-Modells zwischen den renormierten und nichtrenormierten Größen exakt übernommen werden. Gleiches gilt für die Renormierungsbedingungen (3.12). Der dipolare Anteil $\Gamma^{(2),\text{Dip}}$ ist nun im Gegensatz zum LXY-Modell durch die Impulsstruktur $q_y^2/|\mathbf{q}|$ gekennzeichnet. Die diagrammatische Struktur der Störungstheorie ist gegenüber dem LXY-Modell und dem NLS-Modell verändert, da die Dreipunktvertices

in der Ordnung t ebenfalls zur Propagatorrenormierung beitragen. Es ergibt sich

$$\Gamma^{(2)} = \mathbf{q}^2 + G \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + H - t \left(\begin{array}{l} 4 \text{ [Diagram 1]} + 8 \text{ [Diagram 2]} + 2 \text{ [Diagram 3]} \\ + 4 \text{ [Diagram 4]} + 16 \text{ [Diagram 5]} + 8 \text{ [Diagram 6]} + 8 \text{ [Diagram 7]} \\ + 4 \text{ [Diagram 8]} + 16 \text{ [Diagram 9]} + 8 \text{ [Diagram 10]} + 8 \text{ [Diagram 11]} \end{array} \right) + \mathcal{O}(t^2) .$$

Die vier Diagramme der letzten Zeile sind identisch null. Erstes und zweites Diagramm der zweiten Zeile geben keine Beiträge zur Renormierung des Austauschterms, der Dipolwechselwirkung oder zur Feldrenormierung. Die verbleibenden Diagramme muss man nach den äußeren Impulsen entwickeln und die Winkelintegration durchführen. Dies gibt eine relativ große Zahl an Termen, die in Anhang E.3.1 zusammengestellt ist. Dabei zeigt sich, dass die Störungsbeiträge nicht isotrop sind. Dies ist eine Folge des Störoperators (4.95). Formuliert man diesen Operator in den unabhängigen Koordinaten des NLS-Modells, so ergibt sich

$$\int_q^\Lambda (q_y^2 \pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) + q_x^2 \sigma(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q}) + 2q_x q_y \pi(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q})) . \quad (4.105)$$

Offensichtlich existieren hier anisotrope Beiträge zum Propagator. Da der Austauschterm isotrop ist, kann man die Renormierung des Austauschterms bestimmen, indem man sich auf die Beiträge konzentriert, welche proportional zu q_x^2 sind, bzw. man ersetzt q_x^2 durch $\mathbf{q}^2 - q_y^2$. Die zu q_y^2 proportionalen Terme sind dann auf den Störterm (4.95), der im Rahmen der Renormierung erzeugt wird, zurückzuführen. Geht man in diesem Sinne vor, so erhält man für die Beiträge erster Ordnung zur Zweipunkt-Vertex-Funktion

$$\Gamma_1^{(2),\text{H}}(g, h) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \Theta_1^{(0,0)}(\tilde{g}, \tilde{h}) \quad (4.106a)$$

$$\Gamma_1^{(2),\text{Iso}}(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} f(\tilde{g}, \tilde{h}) . \quad (4.106b)$$

mit den dimensionslosen Größen $g = G/\Lambda$, $\tilde{g} = G/k$, $h = H/\Lambda^2$ und $\tilde{h} = H/k^2$. Dies ergibt sich aus der Kombination der Ergebnisse (E.9) und (E.11). Dipolare Beiträge werden im Rahmen der Störungstheorie für den Zweipunkt-Vertex nicht erzeugt. Dies gilt auch für die höheren Ordnungen in t , wie eine Analyse der Störungsreihe zeigt. Die in der

zweiten Zeile auftretende Funktion f ist eine komplizierte Funktion, welche sich durch Kombination der hypergeometrischen Funktionen ergibt. Für $h=0$ nimmt sie die Form

$$f(g) \equiv f(g, h=0) = \frac{-28 - 34g + 3g^3 + 28(1+g)^{3/2}}{8g(1+g)^{3/2}} \quad (4.107)$$

an. Dieses Ergebnis ist für die konkreten Rechnungen bereits ausreichend, da bei der Auswertung der Flussfunktionen die verbliebene Abhängigkeit vom äußeren Feld vernachlässigt wird (siehe etwa die Herleitung von Gl. (3.22c))¹⁹. Ein wichtiger Check der Störungstheorie ergibt sich aus der speziellen Eigenschaft des nichtlinearen σ -Modells, dass alle q -unabhängigen Beiträge der Störungstheorie für $H=0$ verschwinden müssen. Im LXY-Modell ist dieser Check nicht sehr aussagekräftig, da sich die Struktur der Störungstheorie gegenüber dem kurzreichweitigen NLS-Modell nicht sehr verändert. Im DXY-Modell ist die Störungstheorie hingegen wesentlich komplizierter und erst durch die Einbeziehung der Dreipunkt-Vertizes wird die oben genannte Forderung erfüllt. Analytisch sieht man dies an den q -unabhängigen Beiträgen in (E.11), welche sich mit Hilfe der Relation (4.104) zu null addieren.

Mit Hilfe der Ergebnisse (4.106) und den Renormierungsbedingungen (3.12) kann man nun die Z-Faktoren bestimmen

$$Z = 1 - \frac{t_R}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \Theta_1^{(0,0)}\left(\frac{\mu g_R}{k}, \frac{H_R}{k^2}\right) \quad (4.108a)$$

$$Z_g = 1 \quad (4.108b)$$

$$Z_t = 1 - \frac{t_R}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \Theta_1^{(0,0)}\left(\frac{\mu g_R}{k}, \frac{H_R}{k^2}\right) + \frac{t_R}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} f\left(\frac{\mu g_R}{k}, \frac{H_R}{k^2}\right). \quad (4.108c)$$

Während es beim LXY-Modell noch möglich war, die Ergebnisse durch eine Berechnung des renormierten Vierpunkt-Vertex zu überprüfen, gestaltet sich dies beim DXY-Modell sehr schwierig. Relativ einfach kann man aber das triviale Verhalten der Dipolwechselwirkung nachprüfen, indem man die dipolaren Beiträge zum Dreipunkt-Vertex berechnet. Das triviale Renormierungsverhalten der Dipolwechselwirkung bedeutet, dass die störungstheoretischen Beiträge zum Dreipunkt-Vertex gerade die zusätzlichen Z-Faktoren kompensieren müssen, welche bei der Renormierung des Dreipunkt-Vertex, verglichen mit dem Zweipunkt-Vertex, auftreten. Die Renormierungsbedingung, welche der für den Zweipunkt-Vertex geforderten Bedingung (3.12b) äquivalent ist, lautet

$$\Gamma_R^{(3),\text{Dip}}(t_R, g_R, H_R = \mu^2, \mu, \Lambda) = -3\mu g_R. \quad (4.109)$$

¹⁹Dies könnte man bereits in den Renormierungsbedingungen verankern, indem man in der Bedingungen (3.9) $H = \mu^2$ durch $H = 0$ ersetzt. Dies führt an sich zu keinen IR-Divergenzen, da die Dipolwechselwirkung als IR-Regulator ausreichend ist. Bei der Entwicklung der dipolaren Terme nach den äußeren Impulsen treten jedoch UV-konvergente und deshalb IR-divergente Beiträge auf, welche nur durch das äußere Feld zu regularisieren sind. Aber diese zusätzlichen Divergenzen stellen kein Problem dar, da die Integrale nicht ausgeführt, sondern lediglich an der Obergrenze ausgewertet werden. Dies ist analog zur Impulsschalenintegration, wo aufgrund des eingeschränkten Integrationsgebiets ebenfalls keine Probleme mit IR-Divergenzen auftreten. Die Ergebnisse der beiden Verfahren, also Formulierung der Renormierungsbedingungen mit $H = \mu^2$ oder $H = 0$, sind somit identisch. Es handelt sich lediglich um einen formalen Unterschied.

Die Diagramme welche zur Renormierung der Dipolwechselwirkung im Dreipunkt-Vertex beitragen, lauten bis zur Ordnung t

$$(4.110)$$

Die konstanten Anteile der zugehörigen Integrale fallen wiederum aufgrund der Beziehung (4.104) weg. Für den dipolaren Beitrag zum Dreipunkt-Vertex bleibt dann

$$\Gamma^{(3),\text{Dip}}(G, H, \Lambda) = -3G \left(1 + \frac{t}{4\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \Theta_1^{(0,0)}(\tilde{g}, \tilde{h}) \right). \quad (4.111)$$

Wertet man dieses Resultat mit Hilfe der Renormierungsbedingung (4.109) und dem Ergebnis (4.108a) für die Feldnormierung aus, so ergibt sich wieder die Aussage der trivialen Renormierung $Z_g = 1$.

4.6 Renormierungsgruppe des DXY-Modells

4.6.1 Flussfunktionen des DXY-Modells Die Vorgehensweise in diesem Paragraphen und den folgenden ist analog zum LXY-Modell. Deshalb sind die Untersuchungen relativ kompakt zusammengefasst. Für die genauere Vorgehensweise kann man sich auf die ausführliche Darstellung im Rahmen des LXY-Modells beziehen. Insbesondere gelten die Callan-Symanzik-Gleichungen und die Definition der Flussfunktionen entsprechend den Formeln (3.20) und (3.21). Für die Flussfunktionen ergibt dies folgende Resultate

$$\beta(t, g) = -\frac{t^2}{16\pi} \frac{28(1 - (1+g)^{3/2}) + 42g + 8g^2 - 3g^3}{g(1+g)^{3/2}} \quad (4.112a)$$

$$\beta_g(t, g) = -g \left(1 + \frac{t}{16\pi} \frac{28(1 - (1+g)^{3/2}) + 34g - 3g^3}{g(1+g)^{3/2}} \right) \quad (4.112b)$$

$$\zeta(t, g) = \frac{t}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+g}} \quad (4.112c)$$

$$\rho(t, g) = -\frac{t}{16\pi} \frac{28(1 - (1+g)^{3/2}) + 38g + 4g^2 - 3g^3}{g(1+g)^{3/2}}. \quad (4.112d)$$

Beide β -Funktionen sind für $g=0$ identisch null. Man findet somit wieder die Fixpunktlinie des klassischen XY-Modells. Auf dieser Fixpunktlinie zeichnet sich der Punkt $t = 2\pi$ in

spezieller Weise aus, denn für diesen Wert ist nicht nur der Vorfaktor von β_g null, sondern es verschwindet die ganze Klammer in (4.112b) (nichtlinearer Fixpunkt). Wie im LXY-Modell existiert auch im DXY-Modell ein stabiler Tieftemperaturfixpunkt bei $t=0$ und unendlich starker Dipolwechselwirkung. Zusammenfassend erhält man folgende Fixpunkte

$$\begin{aligned} (t^* = 0, g^* = \infty) & \quad \text{Tieftemperaturfixpunkt} \\ (t^*, g^* = 0) & \quad \text{XY Fixpunktlinie} \\ (t^* = 2\pi, g^* = 0) & \quad \text{Kritischer Fixpunkt .} \end{aligned}$$

Die Topologie des Flussdiagramms (Abb. 4.2) ist dem Flussdiagramm des LXY-Modells sehr ähnlich. Der Bereich III verkörpert die Hochtemperaturphase des Modells. Aufgrund der vernachlässigten Vortexanregungen ist die XY-Linie in diesem Gebiet stabil und das System ist skaleninvariant in der Hochtemperaturphase. Die Bereiche I und II bilden die Tieftemperaturphase. Hier ist der Tieftemperaturfixpunkt attraktiv und bestimmt das Verhalten des Systems. Bereich I beschreibt zusätzlich den Crossover zwischen dem kurzreichweitigen XY-Modell und dem dipolaren System. Die kritische Trajektorie ist gerade jene Linie, welche die Bereiche III und II trennt und im kritischen Punkt endet.

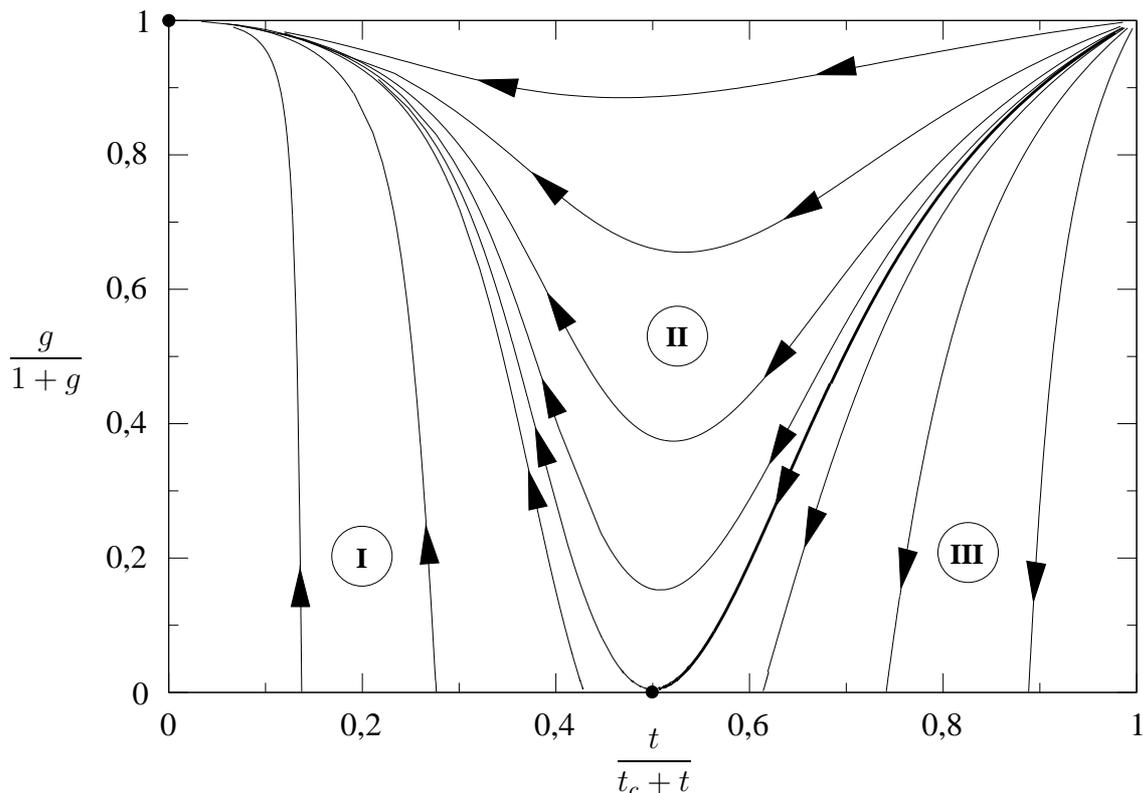


Abbildung 4.2: Renormierungsgruppenfluss der Kopplungskonstanten im DXY-Modell.

Um die Eigenschaften des Systems im Einzugsgebiet der Fixpunkte zu untersuchen, muss man das DGL-System (3.23), welches den Fluss der Kopplungskonstanten bestimmt,

näherungsweise lösen. In der Umgebung des kritischen Punkts ist die Näherung unproblematisch und ergibt

$$s \frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{5\pi}{8} g(s) + \mathcal{O}(\vartheta^2, g^2, \vartheta g) \quad (4.113a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} = \frac{\vartheta(s)g(s)}{2\pi} - \frac{3g^2(s)}{16} + \mathcal{O}(\vartheta^3, g^3, \vartheta g^2), \quad (4.113b)$$

mit $\vartheta(s) = t(s) - 2\pi$. Die DGL für die Dipolstarke ist nichtlinear und wird von den Termen zweiter Ordnung bestimmt. Diese Eigenschaft des Fixpunkts, führt zu einem physikalischen Verhalten, dass sich qualitativ sehr stark von den Eigenschaften eines Systems, welches durch einen linearen Fixpunkt beschrieben wird, unterscheidet. Die explizite Form der Losungsschaar von (4.113) lautet

$$g_e(t, \tau) = g_c(t) + \tau \exp \left\{ -\frac{3(t-2\pi)}{10\pi} \right\} \quad (4.114a)$$

$$g_c(t) = \frac{80}{9} \exp \left\{ -\frac{3(t-2\pi)}{10\pi} \right\} + \frac{8(t-2\pi)}{3\pi} - \frac{80}{9}. \quad (4.114b)$$

Dabei ist $g_c(t)$ gerade jene Trajektorie, welche den kritischen Punkt berührt. Die Integrationskonstante τ hängt von den Anfangswerten $t \equiv t(s=1)$ und $g \equiv g(s=1)$ über die Beziehung

$$\tau(t, g) = \left(g - \frac{8(t-2\pi)}{3\pi} + \frac{80}{9} \right) \exp \left\{ \frac{3(t-2\pi)}{10\pi} \right\} - \frac{80}{9} \quad (4.115)$$

ab und ist gerade so gewählt, dass $g(t_c, \tau) = \tau$.

Für den Bereich kleiner Temperaturen ist die Entwicklung problematisch, da einerseits typische Anfangswerte für die dipolare Wechselwirkung klein sind, andererseits die effektive Dipolwechselwirkung $g(s)$ sehr schnell gegen unendlich renormiert. Im LXY-Modell war es möglich, eine gute Näherung zu finden, da der zweite Term in der Klammer der β_g -Funktion beschränkt war für die beiden Grenzfälle $g \rightarrow 0$ und $g \rightarrow \infty$. Im DXY-Modell ist jedoch dieser Beitrag für $g \rightarrow \infty$ nicht mehr beschränkt (zu den Ursachen dieses Unterschieds siehe Diskussion in Paragraph 4.6.2). Man kann deshalb keine Näherung finden, welche sowohl am Tieftemperaturfixpunkt wie auch am instabilen Polyakov-Fixpunkt gültig ist. Solange man sich auf die asymptotischen Eigenschaften am Tieftemperaturfixpunkt beschränkt, ist dies kein Problem. Wenn man aber bestimmte Crossover-Effekte, welche mit dem Erreichen der XY-Linie verknüpft sind, beschreiben will, so muss man das Verhalten in beiden Grenzfällen richtig wiedergeben. Die numerische Überprüfung zeigt, dass die im Folgenden verwendeten Näherungen, welche eigentlich für die Umgebung des Tieftemperaturfixpunkts abgeleitet werden, die Crossover-Phänomene sehr gut beschreiben

$$s \frac{dt(s)}{ds} \approx \frac{3t^2(s)}{16\pi} \sqrt{g(s)} \quad (4.116a)$$

$$s \frac{dg(s)}{ds} \approx -g(s) \left(1 - \frac{3t(s)}{16\pi} \sqrt{g(s)} \right). \quad (4.116b)$$

Die DGL kann auf eine Bernoulli Differentialgleichung zurückgeführt werden und besitzt die Lösung

$$t(s) \equiv t(s, t, g) = t \left(1 - \frac{9t}{16\pi} \sqrt{g} (1 - s^{-1/2}) \right)^{-2/3} \quad (4.117a)$$

$$g(s) \equiv g(s, t, g) = g \frac{t(s)}{t} \frac{1}{s}. \quad (4.117b)$$

Die explizite Kurvenform die sich hieraus ergibt, lautet

$$g_e(\theta, t, g) = \left(\frac{16\pi}{9\theta} + \left(\sqrt{\frac{g}{t}} - \frac{16\pi}{9t^{3/2}} \right) \sqrt{\theta} \right)^2. \quad (4.118)$$

4.6.2 Bestimmung der Korrelationslänge Die Korrelationslänge kann wie im LXY-Modell durch Lösung der CS-Gleichung (3.34) bestimmt werden. Dies ergibt

$$\xi(t, g) = \xi(t_0, g_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{d\theta}{\beta(\theta, g_e(\theta, t, g))} \right\}. \quad (4.119)$$

Dabei ist $g_e(\theta, t, g)$ die explizite Darstellung der Trajektorien des RNG-Flusses, welche der Anfangswertbedingung $g_e(t, t, g) = g$ genügen. Will man nun die Randbedingung, dass die Korrelationslänge für $t_0 \rightarrow 0$ verschwindet einbringen, so muss man die Divergenz des Integrals bei $t_0 = 0$ subtrahieren, um eine definierte Lösung zu erhalten. Hier zeigt sich ein Unterschied zum LXY-Modell. Während im LXY-Modell für die β -Funktion gilt

$$\beta(t, g) \rightarrow \frac{t^2}{8\pi} \quad \text{für } g \rightarrow \infty, \quad \text{LXY-Modell} \quad (4.120)$$

folgt im DXY-Modell im gleichen Grenzfall

$$\beta(t, g) \rightarrow \frac{3t^2}{16\pi} \sqrt{g} \quad \text{für } g \rightarrow \infty, \quad \text{DXY-Modell.} \quad (4.121)$$

Dieser Unterschied im Verhalten der β -Funktion lässt sich auf die Beiträge der Dreipunktvertizes und damit in gewisser Weise auf die Anisotropie der Dipolwechselwirkung zurückführen. Berechnet man die β -Funktion ohne die Beiträge der Dreipunktvertizes, so ergibt sich wie im LXY-Modell ein Resultat, in dem die β -Funktion am Tieftemperaturfixpunkt unabhängig von g wird. Hier zeigt sich in der Tat ein gewisser Unterschied in den Vorhersagen von LXY- und DXY-Modell.

Der zusätzliche Faktor $g^{1/2}$ in (4.121) induziert mittels (4.118) eine direkte Proportionalität $\beta \propto t$ entlang der Trajektorie. Subtrahiert man im Integral diese Form der Divergenz

$$\int_{t_0}^t \frac{d\theta}{\beta(\theta, g_e(\theta, t, g))} \rightarrow \int_{t_0}^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, g_e(\theta, t, g))} - \frac{3}{\theta} \right) + 3 \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \quad (4.122)$$

und vernachlässigt die Konstante $3 \ln t_0$, so kann man den Grenzübergang $t_0 \rightarrow 0$ durchführen und erhält

$$\xi(t, g, \Lambda) = \frac{t^3}{\Lambda} \exp \left\{ \int_0^t d\theta \left(\frac{1}{\beta(\theta, g_e(\theta, t, g))} - \frac{3}{\theta} \right) \right\}. \quad (4.123)$$

Die numerische Berechnung dieser Korrelationsfunktion (Abb.4.3) liefert ein ähnliches Bild wie für das LXY-Modell. Die Interpretation und die Folgerungen für den RNG-Fluss können deshalb vollständig übernommen werden.

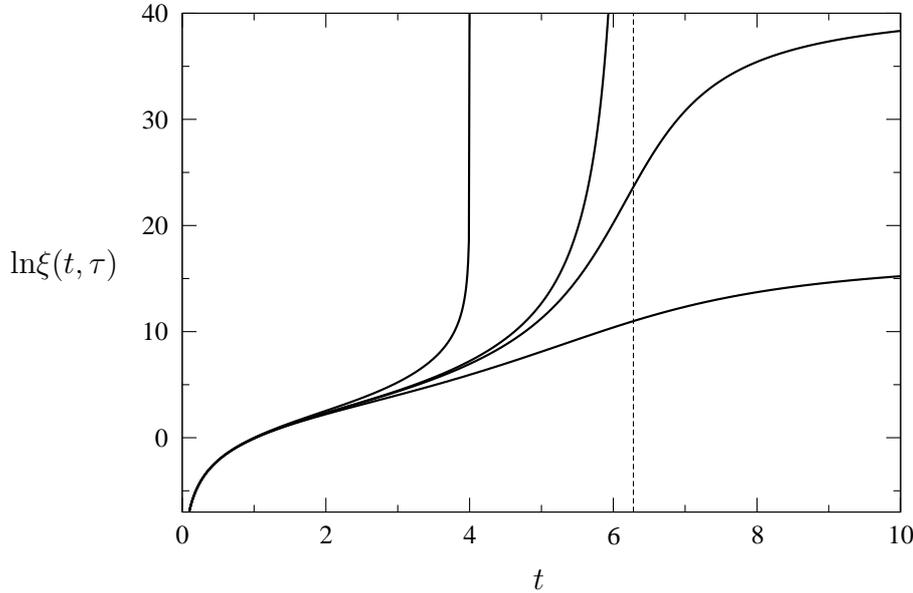


Abbildung 4.3: Numerische Auswertung der Korrelationslänge (4.123) für $\tau < 0$, $\tau = 0$ und zweimal $\tau > 0$ (von links nach rechts). Die kritische Kurve ($\tau = 0$) divergiert bei $t = t_c$ (gestrichelte Linie). Für $\tau < 0$ divergiert die Korrelationslänge bereits bei kleineren Temperaturen, nämlich bei Erreichen der XY-Linie.

Mit Hilfe der Näherungen (4.117) kann man die Korrelationslänge in der Umgebung des Tieftemperaturfixpunkts berechnen mit dem Ergebnis

$$\xi(t, g, \Lambda) = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{16\pi}{9} \right)^2 \frac{t}{g}. \quad (4.124)$$

Die Singularität für kleine g , welche sich hier widerspiegelt, ist eine Folge der Divergenz der Korrelationslänge auf der XY-Linie. In der Umgebung des kritischen Punkts kann die Korrelationslänge analog zum LXY-Modell berechnet werden. Entwickelt man das Ergebnis (4.114) in der Umgebung des Fixpunkts, so ergibt sich für die Korrelationslänge exponentielles Verhalten

$$\xi(t, \tau, \Lambda) \propto e^{b/\sqrt{\tau}}, \quad \text{für } \tau \rightarrow 0. \quad (4.125)$$

Der Faktor b ist nicht universell und daher nicht von besonderem Interesse. Die Rechnung ergibt einen Wert von $b = 2\pi\sqrt{2/5}$.

4.6.3 Spontane Magnetisierung Die spontane Magnetisierung ergibt sich analog zu Paragraph 3.3.5 als

$$M_0(t, g) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{s} \zeta(t(s), g(s)) \right\}. \quad (4.126)$$

Dabei unterliegen die Funktionen $t(s)$ und $g(s)$ den Anfangswertbedingungen $t(1) = t$ und $g(1) = g$. Zur Berechnung des Tieftemperaturlimites der Magnetisierung kann man die Näherungen (4.117) benutzen. Aber auch mit diesen Näherungen kann die Rechnung nicht exakt durchgeführt werden. Es zeigt sich, dass das Integral gut approximiert wird, wenn man die parameterabhängige Kopplungskonstante $t(s)$ durch t ersetzt²⁰. Insbesondere für kleine g (und für physikalische Systeme ist g ein kleiner Parameter) ist diese Näherung gut. Als Resultat folgt für die Magnetisierung

$$M_0(t, g) = \left(\frac{\sqrt{g}}{1 + \sqrt{1+g}} \right)^{\frac{t}{2\pi}}. \quad (4.127)$$

Wie man durch Vergleich mit der einfachen Rechnung (4.97) sieht, resummiert die Renormierungsgruppe die Ergebnisse der naiven Störungstheorie.

Im kritischen Limes zeigt sich wie im LXY-Modell, dass die spontane Magnetisierung exponentiell verschwindet. Das Verhalten der Magnetisierung lässt sich durch die Divergenz der Korrelationslänge ausdrücken

$$M_0(t, \tau) \propto \xi^{-\zeta^*/2}, \quad \tilde{\beta} \equiv \frac{\beta}{\nu} = \frac{\zeta^*}{2}. \quad (4.128)$$

4.6.4 Allgemeine Skalenform und exakte Exponenten Die kritischen Exponenten des DXY-Modells sind identisch mit den Exponenten des LXY-Modells. Die Berechnung ist analog zum Vorgehen in den Paragraphen 3.4.1 bis 3.4.4. Die allgemeine Skalenform der Korrelationsfunktionen für das LXY-Modell ist auch für das DXY-Modell gültig, da die CS-Gleichungen identisch sind. Es sind lediglich die Funktionen ξ , M_0 und κ des LXY-Modells durch die entsprechenden Funktionen des DXY-Modells zu ersetzen

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = M_0^n \xi^{2(n-1)} \bar{g}^{(n)}\left(\{\mathbf{q}_i, \xi\}, H \frac{M_0 \xi^2}{t}, \kappa\right). \quad (4.129)$$

Da es für das DXY-Modell nicht möglich ist, eine globale Lösung der Flussgleichungen anzugeben, kann man auch keine globale Definition für den Parameter κ angeben. Es ist jedoch möglich eine Darstellung von κ in der Umgebung der Fixpunkte zu finden. Die einzige Forderung welcher κ genügen muss, folgt aus dem Lösungsbeweis in Anhang D.3 und lautet

$$\left(\beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \kappa(t, g) = 0. \quad (4.130)$$

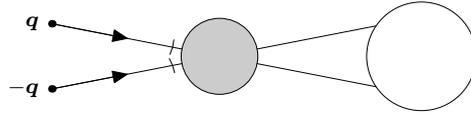
Für die weiteren Betrachtungen ist es aber nicht notwendig, die spezielle Form von κ zu kennen. Im Tieftemperaturbereich sind die Rechnungen zu kompliziert, um sie mit der Skalenform (4.129) in Verbindung zu bringen, und im kritischen Bereich kann man wie im LXY-Modell davon ausgehen, dass κ keine wesentlichen Abhängigkeiten trägt.

Die Lokalisierung des kritischen Punkts bei $t_c = 2\pi$ ist bestimmt durch die Skaleneigenschaften der Dipolwechselwirkung. Der Wert $t_c = 2\pi$ erzwingt am kritischen Punkt für

²⁰Dieser Ansatz liegt für kleine Temperaturen nahe, wenn man die verschiedenen Beiträge im Integral abwägt.

den Exponenten η den Wert eins, d.h. die Korrelationsfunktion skaliert wie $1/q$ und somit typisch dipolar. Es stellt sich die Frage, ob die Dipolwechselwirkung nur im Rahmen der 1-loop Rechnung in der Lage ist die Skaleneigenschaften des Systems am kritischen Punkt zu dominieren, oder ob dies auch in höherer Ordnung gilt. Hier kann man in der Tat zu einer exakten Aussage gelangen, nämlich, dass der kritische Fixpunkt in jeder Ordnung der Störungstheorie bei $(t_c = 2\pi, g_c = 0)$ liegt. Dies bedeutet, dass die Korrelationsfunktion sowohl des LXY-, wie auch des DXY-Modells am kritischen Punkt exakt wie $1/q$ skaliert.

Um dies zu sehen, wird zunächst gezeigt, dass die Dipolwechselwirkung trivial renormiert, d.h. es gilt in jeder Loop-Ordnung $Z_g = 1$. Im ϕ^4 -Modell ist diese Aussage trivial. Im DXY-Modell ist es grundsätzlich möglich, dass nichtanalytische Terme in Rahmen der Störungstheorie erzeugt werden²¹. Allerdings gibt es keine nichtanalytischen Beiträge zum Zweipunkt-Vertex. Zur Begründung kann man sich erneut auf die dipolaren Vertizes von Paragraph 4.4.6 beziehen. Zunächst kann man leicht erkennen, dass es keine dipolaren Beiträge gibt, wenn ein Vertex mit mehr als zwei gestrichenen Beinen mit den äußeren Impulsen verbunden wird, da in diesem Fall immer gestrichene Beine auch mit inneren Impulsen verbunden werden und deshalb über den Vertex integriert wird. Man muss also wie unten gezeichnet einen Vierpunkt-Vertex, der zwei gestrichene Beine besitzt²² mit den äußeren Impulsen verbinden.



Der Kreis auf der rechten Seite stellt eine beliebige Kombination von Vertizes dar. Damit in diesem Diagramm kein gestrichenes Bein mit inneren Impulsen verbunden ist müssen die äußeren Impulse so wie oben gezeigt angeschlossen werden. Aufgrund der Impulserhaltung addieren sich aber die äußeren Impulse zu null und der dipolare Zweipunkt-Vertex verschwindet. Somit gibt es kein Diagramm welches den Zweipunkt-Vertex renormiert.

Da die Dipolwechselwirkung trivial renormiert und somit $Z_g = 1$ exakt gilt, folgt aus Gleichung (3.21b)

$$\beta_g(t, g) = -g \left(1 - \frac{\beta}{t} - \zeta \right). \quad (4.131)$$

Fordert man $\beta = \beta_g = 0$, so ergeben sich Fixpunkte für $g = 0$, sowie für $\zeta = 1$. Aus der ersten Lösung resultiert die XY-Fixpunktlinie, während die zweite Lösung den nichtlinearen Fixpunkt beinhaltet. Da für ζ im Limes verschwindender dipolarer Wechselwirkung gilt $\zeta = t/(2\pi)$, ist somit der Punkt $(t_c = 2\pi, g_c = 0)$ in jeder Loop-Ordnung ein nichtlinearer Fixpunkt.

²¹Dies ist ja auch notwendig, denn wie bereits gezeigt wurde, folgt aus dem trivialen Verhalten der Dipolwechselwirkung im Rahmen der Propagatorrenormierung, dass es für den Dreipunktvertex gewisse Beiträge zur Dipolwechselwirkung gibt.

²²Der gezeichnete ist der einzige Vertex, welcher zwei oder weniger gestrichene Beine und die richtige analytische Struktur besitzt.

Obige Betrachtungen lassen sich noch ein wenig allgemeiner formulieren. Ersetzt man die Dipolwechselwirkung durch eine nichtanalytische Wechselwirkung²³ der Skalendimension σ , wie etwa die von Fisher, Ma und Nickel [94] betrachtete Wechselwirkung

$$g\Lambda^{2-\sigma} \int_{\mathbf{q}} |\mathbf{q}|^\sigma \mathbf{S}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(-\mathbf{q}) , \quad (4.132)$$

so muss die Skalendimension eins in der Klammer von (4.131) durch $2-\sigma$ ersetzt werden. Nach den obigen Erläuterungen ist dann klar, dass für den kritischen Punkt gilt ($t_c = 2\pi(2-\sigma)$, $g_c = 0$). Dieser erstmals von Sak [93] im Rahmen einer 1-loop Rechnung bestimmte Fixpunkt ist also exakt.

Sowohl beim DXY-Modell wie auch bei dem langreichweitigen Modell (4.132) ist nicht nur die Lage des kritischen Punkts exakt, sondern es bleibt auch die Form der Flussgleichungen (4.113) in der Umgebung des kritischen Punkts in höheren Loop-Ordnungen unverändert. Dies erkennt man, wenn man die Flussfunktionen entwickelt und die bekannten Eigenschaften des XY-Modells benutzt

$$\beta(t, g) = -\lambda t^2 g + \dots \quad (4.133a)$$

$$\zeta(t, g) = \frac{t}{2\pi} + g \cdot \left. \frac{\partial \zeta}{\partial g} \right|_{g=0} + \dots , \quad (4.133b)$$

wo λ eine Konstante ist. Setzt man dies in (4.131) ein, so sieht man, dass die Flussgleichungen allgemein die Struktur (4.113) besitzen²⁴. Dies hat zur Folge, dass die exponentielle Divergenz der Korrelationslänge (4.125) und die kritischen Exponenten in jeder Loop-Ordnung exakt sind. Dies gilt sowohl für das DXY- und das LXY-Modell, wie auch für das verallgemeinerte langreichweitige Modell (4.132). Wie am LXY-Modell gezeigt wurde, lassen sich die kritischen Exponenten durch den Fixpunktwert der Flussfunktion $\zeta(t, g)$ parametrisieren. Für das langreichweitige Modell (4.132) ist der Fixpunktwert gegeben durch $\zeta^* = 2 - \sigma$. Die resultierenden Exponenten sind in Tab. 4.2 zusammengefasst. Wie man an der Tabelle sieht, fallen die Exponenten des Kosterlitz-Thouless Übergangs mit den Exponenten des σ -LXY-Modells zusammen, falls man $\zeta^* = 1/4$ benutzt. Dieser Fixpunktwert stimmt gemäß $\zeta = t/2\pi$ mit der kritischen Temperatur $t_c = \pi/2$ des Kosterlitz-Thouless Modells überein. Der Vortexübergang verhält sich in diesem Sinne äquivalent zu einem σ -LXY-Modell mit $\sigma = 7/4$.

4.6.5 Vergleich mit den bekannten Ergebnissen Die in der Einführung angesprochenen Skalenrelationen für die spontane Magnetisierung, welche von Pelcovits und Halperin [16] und teilweise auch von Pokrovskii und Feigelman [14] berechnet wurden, lassen sich im Rahmen der hier durchgeführten Renormierungsgruppenanalyse leicht ableiten. Die genannten Autoren führen Ihre Rechnungen im Wesentlichen auf der XY-Linie durch. D.h. die Temperatur wird als fix angenommen und dementsprechend die

²³Genauer muss gefordert werden, dass die Wechselwirkung auf Propagatorebene nicht renormiert.

²⁴Für das verallgemeinerte Modell (4.132) kann man dies auch aus den Flussfunktionen welche von Sak berechnet wurden [93] erkennen. Zwar verschwindet hier der quadratische Term in g von Gleichung (4.113b), dies führt aber zu keinen wesentlichen Änderungen.

	ν	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\gamma}$	$\tilde{\alpha}$	δ	η
σ-LXY-Modell:	∞	$\zeta^*/2$	$2 - \zeta^*$	-2	$(4 - \zeta^*)/\zeta^*$	ζ^*
DXY-Modell:	∞	1/2	1	-2	3	1
KT-Modell:	∞		7/4	-2	15	1/4

Tabelle 4.2: Kritische Exponenten des verallgemeinerten Modells (4.132) (σ -LXY-Modell), des DXY-Modells und des Kosterlitz-Thouless Übergangs. Die mit einem Tilde versehenen Exponenten beziehen sich nicht auf ein Potenzgesetz bezüglich der relativen Temperatur, sondern bezüglich der Korrelationslänge (siehe etwa Gl. (4.128))

β -Funktion als null. Für die ζ -Funktion wird der Wert

$$\zeta \equiv \zeta(t, g=0) = \frac{t}{2\pi} \quad (4.134)$$

verwendet. Beachtet man die Definition der Wilson-Funktionen (3.21), so erkennt man, dass sich die Flussgleichungen vereinfachen zu

$$s \frac{dg(s)}{ds} = (\zeta - 1)g(s) \Rightarrow g(s) = gs^{\zeta-1} \quad (4.135a)$$

$$s \frac{dH(s)}{ds} = \frac{\zeta}{2} H(s) \Rightarrow H(s) = Hs^{\zeta/2}. \quad (4.135b)$$

In Kombination mit der RNG-Beziehung (4.137) folgt hieraus die Skalenrelation

$$M(t, g, h) = s^{\zeta/2} M\left(t, gs^{-1+\zeta}, hs^{-2+\zeta/2}\right), \quad (4.136)$$

wo $h = H/\Lambda^2$. Dies stimmt bis auf die vernachlässigte Abhängigkeit von der Systemausdehnung mit der Relation (4.2) von Pelcovits und Halperin überein. Durch das Matching $s = g^{1/(1-\zeta)}$ folgt hieraus bei verschwindendem äußeren Feld die Abhängigkeit (9) von Pokrovskii und Feigelman.

4.7 Störungstheorie im Koexistenzbereich

Die Störungstheorie im Koexistenzbereich wird mit der in Abschnitt 3.5 vorgestellten Methode durchgeführt, d.h. die Störungsreihe wird durch ein geeignetes Matching partiell aufsummiert. Ausgangspunkt ist die RNG-Beziehung

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = Z^{(n+l)/2}(s) (\Lambda s)^{-(n+l-1)2} G^{(n,l)}\left(\left\{\frac{\mathbf{q}_i}{\Lambda s}\right\}, t(s), g(s), \frac{H(s)}{(\Lambda s)^2}, 1\right) \quad (4.137)$$

mit den folgenden Größen

$$Z(s) = \exp \left\{ \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} \zeta(t(\sigma), g(\sigma)) \right\} \approx \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{g+s}}{1 + \sqrt{1+g}} \right)^{\frac{t}{\pi}} \quad (4.138a)$$

$$H(s) = H Z^{1/2}(s) \frac{t(s)}{t} \quad (4.138b)$$

und den Flussfunktionen $t(s)$ und $g(s)$ gemäß der Näherung (4.117).

4.7.1 Zustandsgleichung und Suszeptibilitäten Wegen der komplizierten analytischen Struktur des DXY-Modells konnte im Gegensatz zum LXY-Modell kein einfaches auflösbares Matching (in Analogie zu (3.84)) gefunden werden, welches zwischen dem kurzreichweitigen XY-Limes und dem DXY-Limes interpoliert. Deshalb werden im weiteren nur die asymptotischen Grenzfälle wiedergegeben. Da die Limiten für das kurzreichweitige XY-Modell bekannt sind, reicht es aus die dipolaren Limiten zu bestimmen²⁵. Als Matching wird im dipolaren Limes die Forderung

$$\frac{H(s)}{(\Lambda s)^2} = g(s) \quad (4.139)$$

verwendet, mit der genäherten Lösung

$$\bar{s} \approx \frac{h}{g} Z^{1/2}(h/g), \quad \text{für } g^3 \gg h. \quad (4.140)$$

Die RNG-Beziehung (4.137) ausgewertet für die Magnetisierung ergibt

$$M(t, g, h) = Z^{1/2}(\bar{s}) \left(1 - \frac{t(\bar{s})}{2} \int_{|\mathbf{u}| < 1} \frac{d^2 u}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{u}^2 + g(\bar{s}) \frac{u_y^2}{|\mathbf{u}|} + g(\bar{s})} + \mathcal{O}(t^2(\bar{s})) \right). \quad (4.141)$$

Die Vernachlässigung der höheren Beiträge in der rechten Seite lässt sich wie im LXY-Modell durch die Divergenz in $g(\bar{s})$ im Limes $\bar{s} \rightarrow 0$ begründen. Wertet man das Integral im Limes großer $g(\bar{s})$ aus, so erhält man einen Korrekturterm der Ordnung $h^{4/3}$. Dieser Beitrag kann gegen den Vorfaktor vernachlässigt werden, und man erhält die genäherte Zustandsgleichung

$$M(t, g, h) = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{h} + \sqrt{g^2 + h}}{1 + \sqrt{g+1}} \right)^{\frac{t}{2\pi}}, \quad \text{für } g^3 \gg h. \quad (4.142)$$

Wie die Rechnungen in Abschnitt 4.3 gezeigt haben, gilt trotz der Anwesenheit der Dipolwechselwirkung die einfache Ward-Takahashi-Identität (4.41). Die transversale Suszeptibilität lautet somit

$$\chi_T(t, g, h, \Lambda) = \frac{1}{h\Lambda^2} M(t, g, h). \quad (4.143)$$

²⁵Der XY-Limes lässt sich mit Hilfe des Matchings $H(s) = (\Lambda s)^2$ gewinnen.

Die longitudinale Suszeptibilität erhält man einfach durch Ableiten der Magnetisierung. Im dipolaren Limes resultiert

$$\chi_L(t, g, h, \Lambda) = \frac{t}{4\pi\Lambda^2} \frac{M(t, g, h)}{\sqrt{h}\sqrt{g^2 + h}}, \quad \text{für } g^3 \gg h. \quad (4.144)$$

Sowohl in der transversalen wie auch in der longitudinalen Suszeptibilität treten somit Goldstone-Singularitäten auf. Die Exponenten dieser Divergenzen stimmen im Rahmen der Näherungen zufällig mit den Ergebnissen des dreidimensionalen, isotropen, kurzreichweitigen Heisenberg-Modells überein.

4.7.2 Wellenvektorabhängigkeit der Korrelationsfunktionen Geht man analog zu Paragraph 3.5.2 vor, so ergibt sich für die transversale Korrelationsfunktion bei verschwindendem äußeren Feld die folgende Abhängigkeit

$$G_T(\mathbf{q}, t, g, \Lambda) = \Lambda^{-2} Z(\hat{q}) \frac{t}{\hat{q}^2 \frac{t}{t(\hat{q})} + g\hat{q} \sin^2 \alpha}. \quad (4.145)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen der Magnetisierung und dem Vektor $\hat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}/\Lambda$. Das Verhalten der Korrelationsfunktion ist relativ kompliziert und geprägt durch mehrere Übergänge. So verhält sich der Faktor $Z(\hat{q})$ für große \hat{q} wie $\hat{q}^{t/(2\pi)}$ und wird für kleine \hat{q} im Wesentlichen konstant. Umgekehrt ist $t(\hat{q})/t$ für große q nahe eins und verschwindet im Limes $\hat{q} \rightarrow 0$ wie $\hat{q}^{1/3}$. Im Nenner des Bruchs dominiert für kleine \hat{q} der winkelabhängige Term (falls nicht $\alpha=0$), während für größere \hat{q} der \hat{q}^2 Term das Verhalten bestimmt. Der effektive Exponent der transversalen Korrelationsfunktion

$$\psi_T(q, \alpha, t, g, \Lambda) \equiv q \frac{\partial}{\partial q} \ln G_T(q, \alpha, t, g, \Lambda) \quad (4.146)$$

ist in Abb. 4.4 wiedergegeben. Asymptotisch, im Limes kleiner q , nimmt er folgende Werte an

$$\psi_T = \begin{cases} -5/3 & \text{für } \mathbf{q} \parallel \mathbf{M}_0 \\ -1 & \text{für } \mathbf{q} \perp \mathbf{M}_0 \end{cases}. \quad (4.147)$$

Wie man in Abb. 4.4 sieht, nimmt für niedrige Temperaturen die Korrelationsfunktion dieses Verhalten erst für sehr kleine Werte von \hat{q} an. Erhöht man die Temperatur so verschiebt sich der Übergang zu größeren q -Werten. Gleichzeitig wird aber die Gültigkeit der verwendeten Näherungen reduziert. Im Limes großer \hat{q}/g bestimmt die XY-Fixpunktlinie das Verhalten des Systems und der effektive Exponent nimmt den bekannten Wert $-2 + t/(2\pi)$ an. In Abb. 4.4 muss man natürlich beachten, dass die Brillouin-Zone bei $\hat{q} \approx 1$ endet. Betrachtet man aber kleinere Werte von g , so verschiebt sich die Kurve im Wesentlichen einfach nach links, so dass man bei geeigneter Stärke der Dipolwechselwirkung durchaus den XY-Bereich erreichen kann. Leider sind die typischen Werte von g derart, dass eine experimentelle Messung sich wohl im Crossoverbereich befinden würde, so dass die asymptotischen Eigenschaften vermutlich kaum zu messen sind.

Charakteristisch für die Dipolwechselwirkung ist die Änderung des effektiven Exponenten in Abhängigkeit vom Winkel α zwischen Magnetisierung und Wellenvektor. Diese

Abhängigkeit ist in Abb.4.5 für verschiedene Wellenvektoren dargestellt. Aufgrund der XY-Asymptotik für große \hat{q} ist die Änderung des Exponenten mit dem Winkel nur für kleine \hat{q} groß und verschwindet mit zunehmendem Wellenvektor.

Für die longitudinale Korrelationsfunktion erhält man mit dem Matching $\Lambda s = q$ und der üblichen Vorgehensweise die folgende Näherung

$$G_L = \frac{Z(\hat{q})}{2\Lambda^2} t^2(\hat{q}) \hat{q}^{-2} \int_{|\mathbf{u}| < 1} \frac{d^2 u}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left(\mathbf{u}^2 + g(\hat{q}) \frac{u_y^2}{|\mathbf{u}|}\right) \left((\mathbf{u} + \hat{\mathbf{e}})^2 + g(\hat{q}) \frac{(u_y + \hat{e}_y)^2}{|\mathbf{u} + \hat{\mathbf{e}}|}\right)}, \quad (4.148)$$

wo $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$. Für große Werte von q ergibt sich hier wieder das klassische XY-Verhalten mit der anomalen Dimension $\eta = t/(2\pi)$. Im Limes kleiner q wird die Flussfunktion $g(\hat{q})$ groß und das Integral muss für diesen Grenzfall ausgewertet werden. Die wesentlichen Beiträge des Integrals stammen von den Singularitäten bei $\mathbf{u} = 0$ und bei $\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{e}}$. Eine grobe Abschätzung ergibt damit

$$G_L(q, t, g, \Lambda) \propto \Lambda^{-2} \frac{t^2(\hat{q}) \hat{q}^{-2}}{\sqrt{g(\hat{q})}} \frac{1}{1 + g(\hat{q}) \sin^2 \alpha}. \quad (4.149)$$

Wie bei der transversalen Korrelationsfunktion treten hier verschiedene Skalen und Übergänge auf. Das asymptotische Verhalten im Limes kleiner Wellenvektoren ergibt

$$G_L \rightarrow q^{-1} \quad \text{für } \mathbf{q} \parallel \mathbf{M}_0 \quad (4.150a)$$

$$G_L \rightarrow q^{-1/3} \quad \text{für } \mathbf{q} \perp \mathbf{M}_0. \quad (4.150b)$$

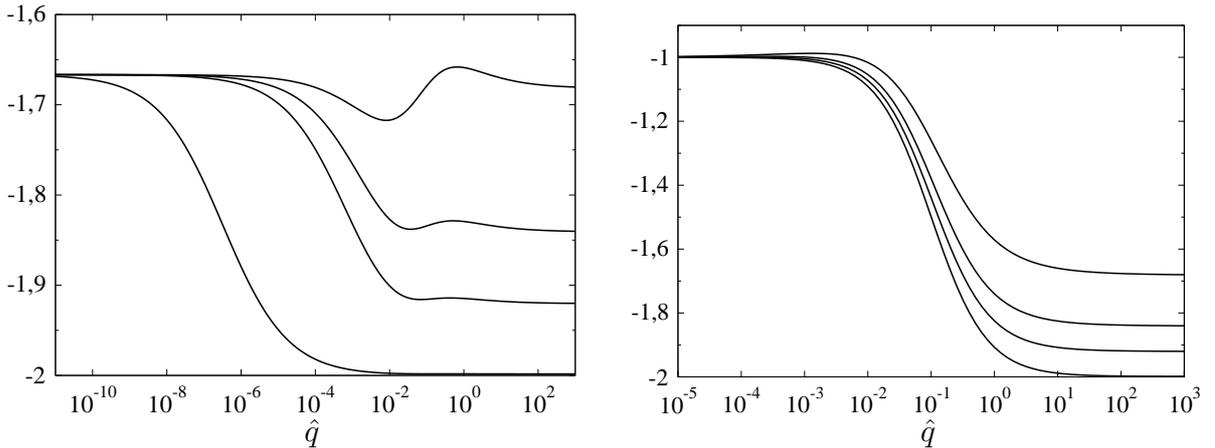


Abbildung 4.4: Effektiver Exponent der transversalen Korrelationsfunktion für $\hat{\mathbf{q}} \parallel \mathbf{M}_0$ (linkes Bild) und für $\hat{\mathbf{q}} \perp \mathbf{M}_0$ (rechtes Bild). Die relative Stärke der Dipolwechselwirkung ist $g=0.1$ und als Temperatur wurden die Werte $t=0.01, 0.5, 1, 2$ (von unten nach oben) gewählt. Der effektive Exponent vollzieht einen Übergang von $\psi_T = -2 + t/(2\pi)$ nach $\psi_T = -5/3$ für $\hat{\mathbf{q}} \parallel \mathbf{M}_0$ bzw. $\psi_T = -1$ für $\hat{\mathbf{q}} \perp \mathbf{M}_0$.

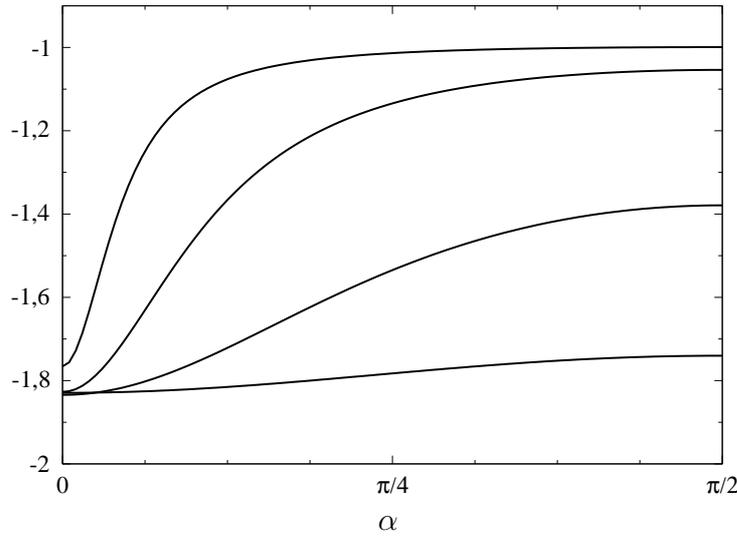


Abbildung 4.5: Effektiver Exponent der transversalen Korrelationsfunktion in Abhängigkeit vom Winkel α zwischen \mathbf{M}_0 und \mathbf{q} . Die Parameter sind $g = 0.1$, $t = 1.0$ und $\hat{q} = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ (von unten nach oben).

4.8 Einfluss von Vortizes

In den bisherigen Rechnungen wurde der Einfluss der Vortizes vernachlässigt. Dies zeigt sich ganz klar in der Hochtemperaturphase der berechneten Renormierungsgruppe. So ist für $t > t_c$ die XY-Linie stabil, weil die Dipolwechselwirkung gegen null renormiert. Somit verbleiben nur die Vortexanregungen, um eine endliche Korrelationslänge in der Hochtemperaturphase zu erzeugen. Zudem bleibt auch die Frage zu klären, welchen Einfluss die Vortizes auf die Tieftemperaturphase besitzen. Um dieses Problem in angemessener Form zu untersuchen, muss man den kombinierten Effekt von Dipolwechselwirkung und Vortexanregungen untersuchen. Dazu ist zunächst zu klären, welche metastabilen Anregungen in dem System mit endlicher Dipolwechselwirkung existieren. Ausgangspunkt ist das Ginzburg-Landau-Funktional (4.1) formuliert in Polarkoordinaten (siehe Gl. (2.58))

$$\mathcal{H}(\Theta) = \frac{J}{2} \int d^2x (\nabla\Theta)^2 + \frac{G}{2} \int d^2x d^2x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \sin(\Theta + \Theta') \partial_1\Theta \partial_2'\Theta' \right. \\ \left. \cos\Theta \cos\Theta' \partial_2\Theta \partial_2'\Theta' + \sin\Theta \sin\Theta' \partial_1\Theta \partial_1'\Theta' \right\}. \quad (4.151)$$

Dabei wurde die Kopplungskonstante der Austauschwechselwirkung wieder explizit aufgeführt, so dass G nun die Stärke der Dipolwechselwirkung und keine relative Größe mehr ist²⁶. Die metastabilen Zustände müssen das Ginzburg-Landau-Funktional minimieren, d.h. es muss gelten

$$0 = \frac{\delta\mathcal{H}(\Theta)}{\delta\Theta(\mathbf{x})}. \quad (4.152)$$

²⁶Für die weiteren Untersuchungen sind die mikroskopischen Definitionen der Größen nicht von Belang.

Das Ausführen der Funktionalableitung ergibt eine komplizierte partielle Integro-Differentialgleichung, welche im Prinzip gelöst werden müsste, um die *dipolaren Vortizes*, d.h. die metastabilen Zustände, welche bei Anwesenheit von Dipolwechselwirkung existieren, zu bestimmen. Dies erscheint hoffnungslos, deshalb wird das Ergebnis der Funktionalableitung gar nicht erst angegeben. Neben der Schwierigkeit die Minimierungsgleichung zu lösen, zeigt sich noch ein weiteres Problem. Die Minimierungsgleichung ist nämlich nichtlinear. Ohne Dipolwechselwirkung ist die Minimierungsgleichung gerade die Laplacegleichung, deren Lösung unter bestimmten Nebenbedingungen die Vortizes ergibt. Die Laplacegleichung ist aber linear, d.h. kennt man die Konfiguration eines einzelnen Vortex, so kann man damit durch Superposition eine Konfiguration mit vielen Vortizes beschreiben. Dies ist bei Anwesenheit von Dipolwechselwirkung nicht mehr der Fall.

Die Nichtlinearität der Winkelfunktionen im dipolaren Anteil des Ginzburg-Landau-Funktional produziert noch ein weiteres Problem. So ist einer der wesentlichen Gründe für die Berechenbarkeit des Kosterlitz-Thouless-Modells, die Entkopplung von Spinwellen und Vortexanregungen. Schreibt man den Polarwinkel als

$$\Theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) , \quad \nabla^2 \theta(\mathbf{x}) = 0 , \quad (4.153)$$

wo θ die Konfiguration im lokalen Minimum, also die Vortexkonfiguration, beschreibt und ψ die Auslenkungen aus diesem Minimum, also die Spinwellen, so entkoppelt das Ginzburg-Landau-Funktional in einen Vortexanteil, welcher nur θ enthält, und einen Spinwellenanteil, der nur von ψ abhängt. Ist jedoch eine endliche Dipolwechselwirkung vorhanden, so entkoppeln diese Komponenten nicht mehr.

4.8.1 Qualitative Betrachtungen Aus den oben genannten Gründen erscheint es sehr schwierig eine kombinierte Theorie von Vortexanregungen und Dipolwechselwirkung zu finden. Man kann aber zumindest qualitativ den Einfluss der Vortexanregungen untersuchen. Dazu ist der RNG-Fluss im DXY-Modell und im Kosterlitz-Thouless-Modell qualitativ in Abb. 4.6 zusammengefasst. Dabei ist lediglich angedeutet ob der Fluss die XY-Linie stabilisiert oder destabilisiert. Bei vollständiger Entkopplung der beiden Modelle liegt der Vortexübergang tiefer als der magnetische Übergang. Wenn man die Situation

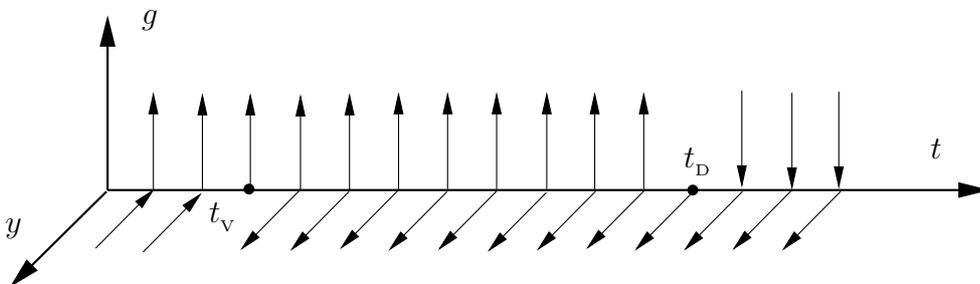


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung des RNG-Flusses von DXY-Modell (g -Achse) mit Übergangstemperatur bei $t_D = 2\pi$ und Kosterlitz-Thouless-Übergang (y -Achse) mit dem kritischen Punkt bei $t_V = \pi/2$. Zur Erklärung des Parameters y siehe Paragraph 2.5.3.

für kleine Dipolwechselwirkung betrachtet, so kann man näherungsweise die Vortizes als die topologischen Anregungen des Systems betrachten. Die Anwesenheit der Dipolwechselwirkung, welche ja wie die Austauschwechselwirkung eine homogene Ausrichtung der Spins bevorzugt, wird die anziehenden Kraft zwischen den Vortizes verstärken²⁷. Da der Kosterlitz-Thouless-Übergang ein Entbindungsübergang ist, wird also die Dipolwechselwirkung die kritische Temperatur dieses Übergangs erhöhen. Nun sind grundsätzlich drei Szenarien möglich.

- $t_v < t_D$: Dies entspricht einer Situation wie sie in dem völlig entkoppelten System (Abb. 4.6) vorliegt. Physikalisch erscheint dies jedoch unplausibel. Denn unterhalb der kritischen Temperatur t_D ist das System ferromagnetisch geordnet. Die freien Vortizes, welche für $t > t_v$ vorhanden sind, würden aber die langreichweitige Ordnung zerstören²⁸.
- $t_v > t_D$: Auch dieser Fall erscheint unwahrscheinlich, da es einen Zwischenbereich $t_D < t < t_v$ geben würde, in dem die Dipolwechselwirkung irrelevant ist, aber die Vortexanregungen immer noch relevant sind. Da aber gerade die Dipolwechselwirkung für die Verschiebung des Kosterlitz-Thouless-Übergangs zu höheren Temperaturen verantwortlich ist, erscheint dies unplausibel.
- $t_v = t_D$: Dies erscheint am wahrscheinlichsten. Für kleine Temperaturen besitzt das System eine spontane Magnetisierung. Die Vortizes existieren nur in eng gebundenen Paaren und besitzen nur geringen Einfluss auf das Verhalten des Systems. Überhalb der kritischen Temperatur renormiert die Dipolwechselwirkung gegen null und gibt damit den Vortexpaaren die Möglichkeit zu entbinden. Dadurch wird in der Hochtemperaturphase die Skaleninvarianz zerstört und es gibt eine endliche Korrelationslänge.

4.8.2 Ein simples Modell Obige Überlegungen kann man unterstützen durch einige analytische Betrachtungen, die jedoch auf groben Näherungen aufbauen. Für die Situation mit einer sehr kleinen Dipolwechselwirkung werden die Vortizes als die relevanten topologischen Anregungen betrachtet. Diese Beschreibung ist für kleine Längenskalen sicher zutreffend. Jedoch wird auch bei einer sehr kleinen Dipolwechselwirkung die Struktur der topologischen Anregungen auf entsprechend großen Skalen durch die langreichweitige Wechselwirkung verändert. Wenn in der Tieftemperaturphase die Vortizes in engen Paaren gebunden sind, so kann man aber hoffen, dass die Beschreibung der Anregungen in Form von Vortizes die wesentlichen Eigenschaften richtig wiedergibt. Es beschreibe θ nun eine solche Vortexkonfiguration. Dann erfüllt θ die Laplacegleichung. Dem Vorgehen von Kosterlitz [18] folgend, kann man deshalb eine holomorphe Funktion

$$F(z) = \theta(\mathbf{x}) + i\phi(\mathbf{x}), \quad z = x_1 + ix_2, \quad (4.154)$$

²⁷Je mehr sich das Vortexpaar zusammenzieht, desto geringer ist die Verzerrung der Umgebung.

²⁸Dieses Argument gilt natürlich nur unter dem Vorbehalt, dass die realen, *dipolaren Vortizes* ebenso wie die ursprünglichen Vortizes, die langreichweitige Ordnung zerstören.

definieren, so dass θ und ϕ den Cauchy-Riemann Beziehungen genügen. Wie von Kosterlitz gezeigt, genügt die konjugierte Funktion ϕ der inhomogenen Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \equiv -2\pi \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (4.155)$$

wo \mathbf{x}_i die Position des i -ten Vortex mit der topologischen Ladung q_i bezeichnet. Die inhomogene Laplace-Gleichung wird mit Hilfe der Greenschen Funktion²⁹

$$G(\mathbf{x}) = - \int_p \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2}. \quad (4.156)$$

gelöst. Damit ergibt sich die konjugierte Funktion $\phi(\mathbf{x})$ zu

$$\phi(\mathbf{x}) = 2\pi \sum_i q_i \int_p \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}}{\mathbf{p}^2}. \quad (4.157)$$

Um das Ginzburg-Landau-Funktional (4.151) analytisch zu vereinfachen, werden nun im dipolaren Anteil die Winkelfunktionen durch Konstanten ersetzt. Die Hoffnung dabei ist, dass für die verschiedenen Vortexkonfigurationen der Einfluss der Winkelfunktionen im Wesentlichen in einer Art Mittelung besteht. Dies ist natürlich eine sehr grobe Näherung, jedoch stimmt sie gut mit der numerischen Überprüfung überein (siehe unten). Der dipolare Anteil wird dann zu

$$\mathcal{H}_D(\theta) = \frac{G}{2} C^{\alpha\beta} \int d^2x d^2x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \partial_\alpha \theta(\mathbf{x}) \partial'_\beta \theta(\mathbf{x}'), \quad (4.158)$$

wo die Konstanten $C^{\alpha\beta}$ das Ergebnis aus der ‘‘gedachten’’ Mittelung sind. Mit Hilfe der Cauchy-Riemann Beziehungen kann man nun das Feld θ im Funktional durch das konjugierte Feld ϕ ersetzen

$$\mathcal{H}(\phi) = \frac{J}{2} \int d^2x (\nabla \phi(\mathbf{x}))^2 + \frac{G}{2} \bar{C}^{\alpha\beta} \int d^2x d^2x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \partial_\alpha \phi(\mathbf{x}) \partial'_\beta \phi(\mathbf{x}'). \quad (4.159)$$

Der neue Tensor \bar{C} lässt sich auf einfache Weise aus dem Tensor C gewinnen. Da aber die Konstanten $C^{\alpha\beta}$ nicht weiter bekannt sind, ist dies letztlich unwichtig. Hier ist es nun sinnvoll in die Fourierdarstellung zu wechseln. Dann ergibt sich mit Hilfe von (4.157)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_i, \mathbf{x}_i) &= (2\pi)^2 \frac{J}{2} \sum_{i,j} q_i q_j \int_p \frac{e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}}{\mathbf{p}^2} \\ &+ (2\pi)^3 \frac{G}{2} \bar{C}^{\alpha\beta} \sum_{i,j} q_i q_j \int_p e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \frac{p^\alpha p^\beta}{|\mathbf{p}|^5}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

²⁹Dies ist die Kontinuumsform der Greenschen Funktion. Um gewissen Feinheiten zu erhalten (vergleiche mit der Greenschen Funktion von Kosterlitz), muss man die Kontinuumsform durch die Darstellung auf dem Gitter ersetzen. Für die wesentlichen Abhängigkeiten ist aber obige Form ausreichend.

Mit Hilfe der in Anhang E.4 dargestellten Umformungen resultiert schließlich als effektive Hamilton-Funktion für das Vortessystem

$$\mathcal{H}(q_i, \mathbf{x}_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} q_i q_j \left(2\pi J \ln \left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{a} \right) + G\alpha |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \right) + \mu \sum_i q_i^2. \quad (4.161)$$

Dabei muss wie im ursprünglichen Modell Ladungsneutralität herrschen, also $\sum q_i = 0$ erfüllt sein. Der Parameter α ist eine Konstante, die numerisch bestimmt werden muss.

Um zu überprüfen, ob die Anziehung zwischen zwei Vortizes aufgrund der Dipolwechselwirkung tatsächlich durch eine lineare Abstandsabhängigkeit gegeben ist, wird nun für eine Konfiguration von zwei Vortizes entgegengesetzter Ladung, welche durch einen Abstand r separiert sind³⁰, die Dipolsumme

$$E_D(r) = \frac{1}{2} \sum_{l,l'}^{l \neq l'} \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos(\theta_l - \theta_{l'})}{|\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}|} - \frac{3}{2} \cos(\theta_l + \theta_{l'}) \frac{(R_l^1 - R_{l'}^1)^2 - (R_l^2 - R_{l'}^2)^2}{|\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}|^5} \right. \\ \left. - 3 \sin(\theta_l + \theta_{l'}) \frac{(R_l^1 - R_{l'}^1)(R_l^2 - R_{l'}^2)}{|\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}|^5} \right) \quad (4.162)$$

auf einem Quadratgitter ausgewertet. Das Ergebnis der Numerik ist in Abb. 4.7 dargestellt. Wie man sieht, ist die Abstandsabhängigkeit eindeutig linear. Lediglich bei sehr

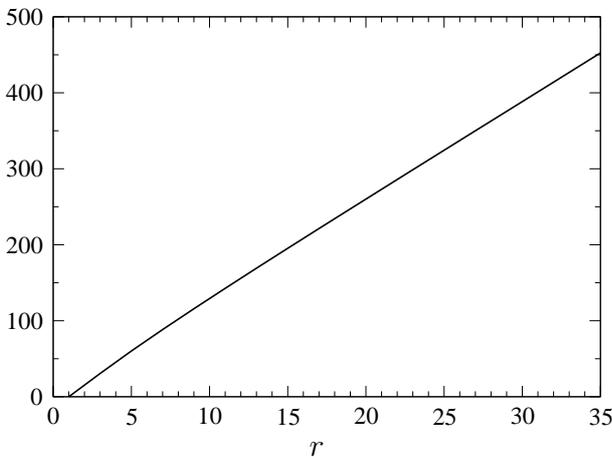


Abbildung 4.7:

Potentielle Energie zweier Vortizes mit Ladungen $q_1 = 1$, $q_2 = -1$ und Abstand r , aufgrund der Dipolwechselwirkung.

kleinen Abständen lässt sich ein gewisses Abweichen von der Linearität erahnen. Für das Verhalten in der Umgebung des Entbindungsübergangs sind aber die Eigenschaften auf großen Längenskalen relevant, so dass die minimalen Abweichungen vom linearen Verhalten nicht ins Gewicht fallen. Für α ergibt sich aus der Rechnung ein Wert von etwa 12.8. Die gezeichnete Kurve ist so normiert, dass sie bei $r = 1$, also einfachem Gitterabstand, null wird. Der konstante Anteil in der Geraden, der an dieser Stelle abgezogen wurde, trägt lediglich zum chemischen Potential bei.

³⁰Die zugehörige Konfiguration $\theta(\mathbf{R}_l)$ ergibt sich etwa aus (2.77), wobei man aber in der Gitterversion beachten muss, dass die Vortizes auf dem dualen Gitter lokalisiert sind.

Die lineare Anziehung zwischen den Vortizes führt zu einer dramatischen Veränderung im Verhalten der Vortizes. Orientiert man sich an dem simplen Bild des Entbindungsübergangs, wie es in der Kosterlitz-Thouless Arbeit gezeichnet wurde, so ergibt sich das mittlere Abstandsquadrat eines Vortexpaares (im Rahmen der in [9] verwendeten Näherungen) zu

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int_a^\infty r dr \rho(r) r^2 \quad (4.163)$$

mit der Normierung Z und der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r)$ für den Abstand r eines Vortexpaares mit Ladung q

$$\rho(r) = \exp \left\{ -2\pi\beta J q^2 \ln \frac{r}{a} - \beta\alpha g q^2 \frac{r}{a} - 2\beta\mu q^2 \right\}. \quad (4.164)$$

Dabei ist $g = aG$ die dimensionslose Kopplungskonstante der Dipolwechselwirkung und $\beta = 1/(k_B t)$. Auch ohne Rechnung sieht man sofort, dass aufgrund der Dipolwechselwirkung der Integrand in (4.163) für große r exponentiell abfällt und damit kein wirklicher Entbindungsübergang mehr stattfinden kann. Exakte Auswertung von (4.163) ergibt

$$\langle r^2 \rangle = a^2 \frac{(\beta\alpha g q^2)^{2\pi\beta J q^2 - 4} \Gamma(4 - 2\pi\beta J q^2, \beta\alpha g q^2)}{(\beta\alpha g q^2)^{2\pi\beta J q^2 - 2} \Gamma(2 - 2\pi\beta J q^2, \beta\alpha g q^2)}, \quad (4.165)$$

wobei $\Gamma(x, y)$ die unvollständige Gammafunktion ist. Interessant sind die Eigenschaften im Limes $g \rightarrow 0$, also für verschwindende Dipolwechselwirkung. Für kleine Temperaturen folgt

$$\langle r^2 \rangle \rightarrow \frac{q^2}{2} \frac{\pi q^2 - k_B t/J}{\pi q^2/2 - k_B t/J}, \quad \text{falls } k_B t/J < q^2 \pi/2 \quad (4.166)$$

und für Temperaturen mit $k_B t/J \geq q^2 \pi/2$ divergiert das Abstandsquadrat, d.h die Vortizes entbinden. Ist aber die Dipolstärke g endlich, so bleibt auch der Abstand endlich und es findet kein Entbindungsübergang statt. In Kombination mit den RNG-Ergebnissen kann man damit folgendes Bild gewinnen. Für Temperaturen unterhalb des magnetischen Phasenübergangs ist die Dipolwechselwirkung eine relevante Größe. Die Vortizes können deshalb nicht entbinden. In der Hochtemperaturphase ist die Dipolwechselwirkung irrelevant und renormiert gegen null, so dass die Vortizes entbinden können und ein freies Vortexgas mit endlicher Korrelationslänge bilden.

4.8.3 Anmerkung zur Dualitäts-Transformation Ein zunächst aussichtsreicher Weg zur Gewinnung einer effektiven Modell-Hamiltonfunktion, ist die von Jose et. al. [19] verwendete Transformation auf das duale Gitter. Der Vorteil dieses Weges liegt darin, dass die Minimierungsgleichung für das Ginzburg-Landau-Funktional nicht direkt gelöst werden muss. Berücksichtigt man für ein quadratisches Gitter nur nächste Nachbar-Wechselwirkung, so wie dies bei der Austauschwechselwirkung der Fall ist, so ist das duale Gitter wieder ein quadratisches Gitter. Ist aber die Wechselwirkung langreichweitig, so ist das duale Gitter nicht einfach quadratisch, sondern besitzt eine kompliziertere Struktur, so dass für das langreichweitige Modell auch dieser Weg keine einfache Lösung bietet.

KAPITEL V

Zusammenfassung und Ergebnisse

Mit Hilfe einer Erweiterung des nichtlinearen σ -Modells ist es gelungen, die Tieftemperaturphase eines zweidimensionalen XY-Modells mit langreichweitiger Wechselwirkung und daraus resultierender spontaner Magnetisierung zu untersuchen. Das XY-Modell ist dabei als asymptotischer Grenzfall eines planaren Systems von Interesse.

Im LXY-Modell wird das klassische XY-Modell um eine isotrope, langreichweitige Kraft erweitert, welche sich bezüglich ihrer Langreichweitigkeit analog zur Dipolwechselwirkung verhält. Die Renormierungsgruppe des LXY-Modells unterscheidet zwischen einem Hoch- und einem Tieftemperaturbereich. Für hohe Temperaturen ist die langreichweitige Wechselwirkung irrelevant und besitzt keinen wesentlichen Einfluss auf das System. Aufgrund der vernachlässigten Vortexanregungen ist die XY-Linie hier stabil. Im Tieftemperaturbereich ergibt die Renormierungsgruppe einen stabilen Fixpunkt, welcher das Tieftemperaturverhalten kontrolliert. Dieser Fixpunkt löst den Polyakov-Fixpunkt des kurzreichweitigen Systems ab und bildet den Ausgangspunkt für die Störungstheorie.

Neben dem Tieftemperaturfixpunkt existiert im Flussdiagramm die Fixpunktlinie des klassischen XY-Modells. Auf dieser Linie zeichnet sich ein spezieller Punkt durch sein nichtlineares Verhalten aus. Durch Aufstellen und lösen der Callan-Symanzik-Gleichungen für die Korrelationslänge und die spontane Magnetisierung, konnte gezeigt werden, dass dieser Fixpunkt der kritische Punkt des Systems ist. Dies erscheint auch plausibel bei Betrachtung des Flussdiagramms. So endet die kritische Trajektorie, welche Hochtemperatur- und Tieftemperaturbereich trennt, gerade in jenem nichtlinearen Fixpunkt. Es ist zunächst überraschend, dass der kritische Punkt auf der XY-Linie liegt und somit der Fixpunktwert der langreichweitigen Wechselwirkung verschwindet, obwohl gerade diese Wechselwirkung den Phasenübergang induziert. Man muss aber bedenken, dass der kritische Punkt das Verschwinden der spontanen Magnetisierung markiert. Da die starken Fluktuationen, welche im kurzreichweitigen System die spontane Magnetisierung zerstören, gerade durch einen endlichen Wert der langreichweitigen Wechselwirkung beschränkt werden, ist es also nur konsistent, dass am Phasenübergang der Fluss der Renormierungsgruppe die Stärke der langreichweitigen Kraft verschwinden lässt.

Durch geeignetes Matching ist es gelungen, die allgemeine Skalenform der Korrelationsfunktionen zu berechnen. Im Rahmen gewisser Näherungen war es außerdem möglich, das Verhalten von Korrelationslänge und spontaner Magnetisierung analytisch zu bestimmen. Hier zeigt sich, dass die Nichtlinearität des Fixpunkts zu einem Verhalten führt,

das sich von den üblichen Potenzgesetzen im kritischen Bereich unterscheidet. So divergieren Korrelationslänge, spontane Magnetisierung und andere Größen exponentiell in Abhängigkeit von der relativen Temperatur. Dieses Verhalten, wie auch die Topologie des Flussdiagramms, ist ähnlich zum Kosterlitz-Thouless-Übergang. Entsprechend kann man auch im LXY-Modell kritische Exponenten definieren, indem man die Divergenzen durch die Korrelationslänge ausdrückt. Die so definierten Exponenten erfüllen die üblichen Skalenrelationen. Der kritische Exponent für die spezifische Wärme nimmt wie beim Kosterlitz-Thouless-Übergang den Wert $\alpha = -2$ an. Da die spezifische Wärme und auch die höheren Ableitungen der freien Energie nicht divergieren, spricht man auch von einem Phasenübergang unendlich hoher Ordnung.

Mit Hilfe eines Matchingverfahrens konnten auch Aussagen über das Verhalten in der Tieftemperaturphase gewonnen werden. Dieses Verfahren wurde bereits in Kapitel 2 am klassischen NLS-Modell erprobt und war dort in der Lage, gewisse analytische Vorhersagen von Nelson und Pelcovits auf einem neuen, einfacheren Weg zu reproduzieren. Darüber hinaus ist es gelungen, eine geschlossene analytische Form für die Abhängigkeit der Korrelationsfunktionen vom äußeren Feld und dem Wellenvektor anzugeben. Die Korrelationsfunktionen besitzen die erwartete Skalenform und weisen in den jeweiligen Grenzfällen die bekannten Goldstoneanomalien und kritischen Singularitäten auf, allerdings mit den schlechten kritischen Exponenten des NLS-Modells. Im Rahmen des LXY-Modells wurde das angesprochene Verfahren verwendet, um die Übergänge der Responsefunktionen im Tieftemperaturlimit zu berechnen. Dabei hat sich gezeigt, dass die Übergänge zum typischen LXY-Verhalten erst für sehr kleine Werte des Wellenvektors bzw. äußeren Feldes stattfinden. Bei einer Messung an einem Modellsystem würde man deshalb nicht die Potenzgesetze des LXY-Limes finden, sondern klassisches XY-Verhalten und Übergangsphänomene zwischen diesen Limiten.

In Abschnitt 3.6 wurde gezeigt, dass sich das LXY-Modell tatsächlich als asymptotischer Limes eines dreikomponentigen System ergibt. Dazu wurde zunächst das dreikomponentige nichtlineare σ -Modell um eine planare Anisotropie erweitert, sowie eine isotrope, langreichweitige Kraft hinzugefügt, welche sich bis auf die fehlende Anisotropie analog zur Dipolwechselwirkung verhält. Für dieses erweiterte NLS-Modell sind die Fixpunkte des LXY-Modells stabil, d.h die dritte Komponente ist irrelevant. Wie die Ergebnisse der Renormierungsgruppe zeigen, verhält sich das System sogar dann XY-artig, wenn im Ausgangsfunktional keine planare Anisotropie berücksichtigt wird. Dies ist eine Folge der langreichweitigen Wechselwirkung, welche offensichtlich die Energie der in-plane Moden erniedrigt. Neben den attraktiven Fixpunkten des LXY-Modells gibt es in dem erweiterten NLS-Modell einen Hochtemperaturbereich, in dem weder die langreichweitige Wechselwirkung noch die planare Anisotropie relevant sind. Hier dominieren die thermischen Fluktuationen das Verhalten des Systems und der Fluss der Kopplungskonstanten konvergiert gegen den Hochtemperaturfixpunkt des zweidimensionalen Heisenberg-Modells. Insbesondere für den ferromagnetischen Übergang bleibt die dritte Komponente aber irrelevant, so dass die Eigenschaften des ungewöhnlichen Phasenübergangs im LXY-Modell asymptotisch erhalten bleiben.

Die Erweiterung des klassischen XY-Modells um die Dipolwechselwirkung ist ein nicht-trivialer Schritt, weil durch diese Veränderung die Symmetrie des ursprünglichen Modells

verändert wird. Die Renormierbarkeitsbetrachtungen von Brézin und Zinn-Justin sind deshalb für das DXY-Modell nicht gültig. Um Aussagen über die Renormierbarkeit des DXY-Modells zu gewinnen, müssen die Symmetrieeigenschaften des neuen Modells untersucht werden. In der Kontinuumsdarstellung zeigt sich hier, dass ein dipolares XY-Modell, im Gegensatz zu einem System mit magnetokristallinen Anisotropien, invariant ist, bei einer gleichzeitigen Rotation der Orts- und Spinkoordinaten. Mit Hilfe dieser Symmetrieoperation war es möglich, analog zum klassischen NLS-Modell, nichtlineare Ward-Takahashi-Identitäten abzuleiten. In Abschnitt 4.4 wurden diese Identitäten genau analysiert und die zugehörige Gleichungshierarchie induktiv gelöst. In Kombination mit einer Analyse der Störungsreihe ist es damit gelungen, die Renormierbarkeit eines d -komponentigen Heisenberg-Systems mit d -dimensionaler Dipolwechselwirkung zu zeigen. Dabei wurde ein spezieller marginaler Operator aus den Betrachtungen ausgeklammert. Zumindest im kritischen Bereich ist aber nicht zu erwarten, dass dieser Operator wesentlichen Einfluss auf das Verhalten des Systems besitzt.

Neben der Renormierbarkeit ist auch die Frage nach dem konkreten Renormierungsverfahren im DXY-Modell problematisch. Wie gezeigt wurde, ist es nicht möglich das DXY-Modell entsprechend dem klassischen NLS-Modell an der unteren kritischen Dimension zu renormieren. Desweiteren können die auftretenden Integrale analytisch nur in gewissen Grenzfällen ausgewertet werden. Diese Probleme konnten durch ein spezielles Renormierungsverfahren gelöst werden, das gewisse Vorteile von feldtheoretischer Renormierung und der Wilsonschen Impulsschalenintegration verbindet. Dabei wird in fixer Dimension renormiert und ein Cutoff zur Regularisierung verwendet. Überlegungen von Zinn-Justin folgend, werden dann die Callan-Symanzik-Gleichungen nicht für die renormierten, sondern für die nichtrenormierten Korrelationsfunktionen abgeleitet.

Die Renormierungsgruppe des DXY-Modells liefert relativ komplizierte analytische Ausdrücke. Die Topologie des Flussdiagramms ist aber dem LXY-Modell sehr ähnlich. Insbesondere im kritischen Bereich stimmen die Vorhersagen des DXY-Modells mit denen des wesentlich einfacheren LXY-Modells überein. So divergieren Korrelationslänge und spontane Magnetisierung im kritischen Bereich exponentiell. Parametrisiert man die Divergenzen durch die Korrelationslänge, so sind die resultierenden kritischen Exponenten identisch zum LXY-Modell. Bezüglich der Tieftemperatureigenschaften differieren die beiden Modelle hingegen. Dies ist nur natürlich, denn der Unterschied zwischen den beiden Systemen besteht in der dipolaren Anisotropie des DXY-Modells. Die Dipolwechselwirkung verschwindet aber am kritischen Punkt und renormiert am Tieftemperaturfixpunkt gegen unendlich. Dementsprechend zeigen sich die Unterschiede zwischen den beiden Modellen vor allem in der Tieftemperaturphase. Eine klare Signatur des DXY-Modells ist etwa die berechnete Abhängigkeit der Korrelationsfunktionen vom Winkel zwischen Magnetisierung und Streuvektor. Wie im LXY-Modell finden aber die Übergänge zum typisch langreichweitigen Verhalten erst relativ spät statt. Auch hier würde man sich deshalb bei der Beobachtung eines Modellsystems meist im Übergangsbereich zwischen klassischem XY-Limes und DXY-Limes befinden.

Wie eine genaue Analyse der Störungsreihe zeigt, renormieren sowohl die Dipolwechselwirkung wie auch die langreichweitige Wechselwirkung des LXY-Modells trivial. Dies bedeutet im Rahmen des NLS-Modells nicht, dass es keine Beiträge aus der Störungsreihe

zur entsprechenden Wechselwirkung gibt. Lediglich auf Zweipunktniveau, also bei der Propagatorrenormierung, existieren solche Beiträge nicht. Die Lage des kritischen Punkts bei $t = 2\pi$ wird bestimmt durch das Skalenverhalten der Dipolwechselwirkung. Wie gezeigt wurde, folgt aus dem trivialen Renormierungsverhalten der Dipolwechselwirkung, dass sich die Lage des kritischen Punkts auch in höheren Loop-Ordnungen nicht verändert. Aus diesem Grund sind die Exponenten η , $\tilde{\beta}$ und δ im Rahmen des Modells exakt. Mit den in Paragraph 4.6.4 erwähnten Annahmen, gilt dies auch für die Exponenten $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\gamma}$.

Abschließend wurde in Abschnitt 4.8 der Versuch unternommen, den Einfluss von Vortizes zu untersuchen. Wie sich gezeigt hat, ist eine analytische Behandlung des Problems aus mehreren Gründen kaum möglich. Die qualitativen Überlegungen dieses Abschnitts favorisieren ein Bild, bei dem Vortexübergang und Übergang in die ferromagnetische Phase gemeinsam stattfinden. Dies entspricht einer Situation ähnlich wie im finite-size XY-Modell von Bramwell und Holdsworth. Für tiefe Temperaturen besitzt das System eine spontane Magnetisierung und es existieren nur wenige Vortizes, welche in Paaren eng gebunden sind. Am kritischen Punkt entbinden diese Paare und zerstören die langreichweitige Ordnung. Dieses Szenario wird von einigen analytischen Überlegungen in Paragraph 4.8.2 gestützt. Jedoch besitzt das dort verwendete Modell keinerlei Beweiskraft, das es auf zuvielen Näherungen und Annahmen beruht. Letztlich wäre wohl eine Monte-Carlo-Simulation das geeignete Instrument um Aussagen über die tatsächliche Abfolge von Vortexübergang und ferromagnetischem Übergang zu gewinnen.

Wie gezeigt wurde, ist es im Rahmen der durchgeführten Renormierungsgruppenanalyse einfach, die aus den Publikationen von Pelcovits, Halperin, Pokrovskii und Feigelman bekannten Skalenrelationen zu reproduzieren. Bezugnehmend auf die Ergebnisse des Kosterlitz-Thouless-Modells wurde von Pelcovits und Halperin ein Bild entworfen, worin der in der Einführung erwähnte Eigenwert der Dipolwechselwirkung λ_g in der gesamten Tieftemperaturphase positiv ist. Die Renormierungsgruppenanalyse des DXY-Modells zeigt aber den fundamentalen Einfluss, welche die Dipolwechselwirkung in der Tieftemperaturphase besitzt. Es ist deshalb fraglich, ob die Verwendung der Kosterlitz-Thouless Ergebnisse in diesem Zusammenhang sinnvoll ist. Vielmehr entwerfen die Überlegungen dieser Arbeit ein Szenario, in dem der Eigenwert λ_g am kritischen Punkt des Systems verschwindet. Dieses Verschwinden ist eine Signatur des nichtlinearen Fixpunkts, welcher den ferromagnetischen Phasenübergang im DXY-Modell beschreibt. Zwar lässt sich die Frage nach dem Einfluss der Vortizes nicht wirklich klären. Zumindest in der ferromagnetischen Phase kann man aber erwarten, dass die topologischen Anregungen nur eine untergeordnete Rolle spielen. Der dominierende und interessante Effekt ist dann das Auftreten eines Phasenübergangs, welcher wie der Kosterlitz-Thouless-Übergang durch einen nichtlinearen Fixpunkt bestimmt wird, und durch exponentielle Divergenzen von Korrelationslänge, spontaner Magnetisierung und anderer Größen gekennzeichnet ist.

ANHANG A

Definitionen und Konventionen

A.1 Wechselwirkungen und Kontinuumsdarstellung

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen Beiträge zur Hamilton-Funktion zusammengestellt und der Übergang von der diskreten Darstellung zu der später verwendeten Kontinuumsdarstellung vorgeführt werden. Ausgangspunkt ist eine Hamilton-Funktion mit isotroper Austauschwechselwirkung, einer Dipolwechselwirkung (wie sie für einen zweidimensionalen Film im dreidimensionalen Raum zutreffend ist) sowie einem äußeren Feld h , welches linear an die Spins koppelt

$$\begin{aligned}
 H(\{\hat{\mathbf{S}}_i\}) = & -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j - g_L \mu_B h \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i \\
 & + \frac{g_L^2 \mu_B^2}{2} \sum_{ij}^{i \neq j} \left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} - \frac{3(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^\alpha (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^\beta}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^5} \right) \hat{S}_i^\alpha \hat{S}_j^\beta .
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die zweite Zeile der Gleichung gibt den Beitrag der Dipolwechselwirkung wieder. Die Stärke dieser Wechselwirkung wird bestimmt durch den Betrag des Spins s und den Landé-Faktor g_L ; μ_B ist das Bohrsche Magneton. Typischerweise ist die Dipolwechselwirkung 10 bis 100 mal kleiner als die Austausch-Wechselwirkung. Trotzdem spielt sie bei der Betrachtung kritischer Phänomene eine wichtige Rolle und führt in der Umgebung des Phasenübergangs zu Crossover-Phänomenen, welche nicht zu vernachlässigen sind [103].

Aufgrund des quantenmechanischen Ursprungs der Hamilton-Funktion (A.1) gilt für die Spins die Einschränkung

$$\hat{\mathbf{S}}_i^2 = s(s+1) . \tag{A.2}$$

Um den Vergleich mit den verwendeten nichtlinearen σ -Modellen zu erleichtern, wird durch Einführung neuer Variablen der Absolutbetrag des Spins auf eins normiert

$$\hat{\mathbf{S}}_i \equiv \sqrt{s(s+1)} \mathbf{S}_i , \quad \mathbf{S}_i^2 = 1 \tag{A.3}$$

und die Hamilton-Funktion (A.1) durch die neuen Variablen ausgedrückt.

Mit Hilfe der Fouriertransformation lässt sich der isotrope Austauschterm für ein quadratisches Gitter mit der Gitterkonstanten a umformen zu

$$H_E(\{\mathbf{S}_q\}) = -\frac{Js(s+1)}{N} \sum_q \left(2 - \frac{1}{2} a^2 \mathbf{q}^2\right) \mathbf{S}_q \mathbf{S}_{-\mathbf{q}}, \quad (\text{A.4})$$

wo

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{N} \sum_q e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_i} \mathbf{S}_q. \quad (\text{A.5})$$

Dies gilt im Kontinuumslimites unter der Annahme, dass die Austauschmatrix J_{ij} für nächste Nachbarn den Wert J annimmt und ansonsten verschwindet. Wegen der Invarianz der Länge der Spins (Gl. (A.2)), gibt der erste Term lediglich einen additiven konstanten Beitrag und wird im Weiteren nicht mehr berücksichtigt.

Die Dipolwechselwirkung kann mit Hilfe der Ewald-Summation [104–106] effektiv aufsummiert werden. Für ein quadratisches Gitter ergibt sich [15] (siehe auch [99, 107])

$$H_D(\{\mathbf{S}_q\}) = \frac{s(s+1)g_L^2\mu_B^2}{2N} \sum_q \left(-a_0 \left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{3} - \hat{z}^\alpha \hat{z}^\beta \right) - a_1 \left(\hat{z}^\alpha \hat{z}^\beta - \frac{q^\alpha q^\beta}{\mathbf{q}^2} \right) |\mathbf{q}| \right) S_q^\alpha S_{-\mathbf{q}}^\beta, \quad (\text{A.6})$$

wo der Vektor $\hat{\mathbf{z}}$ der Einheitsvektor der zur Ebene senkrechten Richtung ist und die Größen a_0 und a_1 gegeben sind durch

$$a_0 = \frac{3C_0}{a^3}, \quad C_0 \approx 4.517 \quad (\text{A.7a})$$

$$a_1 = \frac{2\pi}{a^2}. \quad (\text{A.7b})$$

Für ein XY-System, also ein System in dem die Spins nur Komponenten innerhalb der Ebene besitzen, reduziert sich mit obigen Überlegungen und der Annahme, dass das äußere Feld entlang der x -Richtung wirkt, die Hamilton-Funktion (A.1) auf

$$\begin{aligned} H(\{\mathbf{S}_q\}) &= \frac{s(s+1)Ja^2}{2N} \sum_q \mathbf{q}^2 \mathbf{S}_q \mathbf{S}_{-\mathbf{q}} - g_L\mu_B h \sqrt{s(s+1)} S_{\mathbf{q}=0}^1 \\ &+ \frac{2\pi s(s+1)g_L^2\mu_B^2}{2a^2N} \sum_q \frac{q^\alpha q^\beta}{|\mathbf{q}|} S_q^\alpha S_{-\mathbf{q}}^\beta. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Führt man nun den Übergang von der Summation zur Integration durch

$$\frac{1}{N} \sum_q \rightarrow a^2 \int_q, \quad \text{mit} \quad \int_q \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad (\text{A.9})$$

so ergibt sich mit den Definitionen

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = a^2 \mathbf{S}_q \quad (\text{A.10a})$$

$$T^{-1} = \beta J s(s+1) \quad (\text{A.10b})$$

$$G = \frac{2\pi g_L^2 \mu_B^2}{J a^4} \quad (\text{A.10c})$$

$$H = \frac{g_L \mu_B \hbar}{J \sqrt{s(s+1)} a^2} \quad (\text{A.10d})$$

für das in der Zustandssumme auftretende Funktional βH , $\beta = 1/(k_B t)$ die Form

$$\beta H(\mathbf{S}) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} \int_q \mathbf{q}^2 \mathbf{S}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(-\mathbf{q}) + \frac{G}{2} \int_q \frac{q^\alpha q^\beta}{|\mathbf{q}|} S^\alpha(\mathbf{q}) S^\beta(-\mathbf{q}) - H S^1(\mathbf{q}=0) \right). \quad (\text{A.11})$$

Die Temperaturvariable T des nichtlinearen σ -Modells entspricht, gemäß dieser Ableitung, dem Verhältnis von thermischer Energie $k_B t$ zur Austauschenergie. Der klassische Tieftemperaturfixpunkt $T^* = 0$ des nichtlinearen σ -Modells beschreibt deshalb eine Situation mit unendlich großer Kopplungskonstante J und damit einer perfekten Ausrichtung.

A.2 Zustandssumme und Freie Energie

Bei Anwesenheit eines äußeren Feldes in Richtung von σ , lautet das erzeugende Funktional für die Korrelationsfunktionen

$$Z(\mathbf{J}, H) = \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left(\mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) - \int d^d x \mathbf{J}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \right) \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Wegen der expliziten Berücksichtigung des Temperaturfaktors in der äußeren Quelle, ergeben sich die Korrelationsfunktionen zu

$$\langle \pi^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \pi^{i_n}(\mathbf{x}_n) \rangle \equiv G^{(n), i_1, \dots, i_n}(\{\mathbf{x}_i\}; T, H, \Lambda) = \frac{T^n}{Z} \frac{\delta^n Z(\mathbf{J}, H)}{\delta J^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta J^{i_n}(\mathbf{x}_n)} \Big|_{\mathbf{J}=0} \quad (\text{A.13})$$

Die Abhängigkeit vom Cutoff Λ ist eine Folge der Cutoff-Regularisierung der Integrale. Im weiteren werden jedoch nicht immer alle Abhängigkeiten explizit aufgeführt, sondern nur die in der jeweiligen Situation relevanten. Da die transversalen Quellen J lediglich zur Erzeugung von Korrelationsfunktionen dienen, ergibt sich die Zustandssumme zu

$$Z \equiv Z(\mathbf{J}=0, H) = \int \frac{\mathcal{D}(\boldsymbol{\pi})}{\sqrt{1-\boldsymbol{\pi}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}, H) \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Die Freie Energie erhält man wie üblich aus dem Logarithmus der Zustandssumme

$$F(H) = -T \ln Z(\mathbf{J}=0, H). \quad (\text{A.15})$$

Zur Abkürzung der Formeln wird für die Integration im q -Raum folgende Schreibweise vereinbart

$$\int_q = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad \text{sowie} \quad \int_q^\Lambda = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega \int_0^\Lambda q^{d-1} dq, \quad (\text{A.16})$$

wobei die rechte Seite die Cutoff regularisierte Version des Integrals darstellt. Bei Rotationssymmetrie geht dies über in

$$K_d \int_0^\Lambda q^{d-1} dq \quad \text{mit} \quad K_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}. \quad (\text{A.17})$$

Die Fouriertransformierten $G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\})$ der Korrelationsfunktionen werden so definiert, dass die impulserhaltende δ -Funktion bereits extrahiert ist

$$G^{(n) i_1, \dots, i_n}(\{\mathbf{x}_i\}) = \int_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} e^{i \sum \mathbf{q}_j \mathbf{x}_j} \langle \pi^{i_1}(\mathbf{q}_1) \dots \pi^{i_n}(\mathbf{q}_n) \rangle \quad (\text{A.18a})$$

$$\equiv \int_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} e^{i \sum \mathbf{q}_j \mathbf{x}_j} (2\pi)^d \delta\left(\sum \mathbf{q}_j\right) G^{(n) i_1, \dots, i_n}(\{\mathbf{q}_i\}). \quad (\text{A.18b})$$

Diese Konvention gilt auch für alle weiteren verwendeten n -Punkt-Funktionen, also insbesondere auch für die Vertexfunktionen $\Gamma^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\})$.

Neben den Korrelationsfunktionen $G^{(n)}$ werden auch Korrelationsfunktionen benötigt, welche die σ -Felder enthalten, so etwa die Magnetisierung

$$M(T, H, \Lambda) = \langle \sigma \rangle. \quad (\text{A.19})$$

Die Korrelationsfunktionen welche n π -Felder und l σ -Felder enthalten, werden mit

$$G^{(n,l) i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+l}) = \langle \pi^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \pi^{i_n}(\mathbf{x}_n) \sigma(\mathbf{x}_{n+1}) \dots \sigma(\mathbf{x}_{n+l}) \rangle \quad (\text{A.20})$$

bezeichnet.

A.3 Kumulantenfunktional und Vertexfunktional

Für von null verschiedene transversale Quellen ergibt die Verallgemeinerung der Freien Energie (A.15) das Kumulantenfunktional

$$W(\mathbf{J}, H) = -T \ln Z(\mathbf{J}, H). \quad (\text{A.21})$$

Bis auf die Normierung¹ entspricht dies dem erzeugenden Funktional der verbundenen Korrelationsfunktionen, d.h. es gilt

$$\langle \pi^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \pi^{i_n}(\mathbf{x}_n) \rangle_c \equiv W^{(n), i_1, \dots, i_n}(\{\mathbf{x}_i\}) = -T^{n-1} \frac{\delta^n W(\mathbf{J}, H)}{\delta J^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta J^{i_n}(\mathbf{x}_n)} \Big|_{\mathbf{J}=0}. \quad (\text{A.22})$$

Die Normierung ist dabei gerade so gewählt, dass der Term nullter Ordnung in der Entwicklung von W nach den transversalen Quellen die Freie Energie ergibt

$$F(T, H) = W^{(0)}(T, H). \quad (\text{A.23})$$

¹Die Normierung auf $W(\mathbf{J}=0, H) = F(H)$ betrifft allerdings nur den konstanten Term der Entwicklung und ändert deshalb nicht die Darstellung von $W(\mathbf{J}, H)$ als Reihe über die Kumulanten.

Wie üblich gewinnt man das Vertexfunktional aus dem Kumulantenfunktional mittels einer Legendre-Transformation. Im nichtlinearen σ -Modell wird diese Legendre-Transformation aber nur bezüglich der transversalen Quellen durchgeführt

$$\Gamma(\varphi, H) = \int d^d x \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}) + W(\mathbf{J}, H), \quad \varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\delta W(\mathbf{J}, H)}{\delta \mathbf{J}(\mathbf{x})} = \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rangle. \quad (\text{A.24})$$

Das Vertexfunktional entspricht deshalb nicht, wie im linearen σ -Modell, der Gibbsschen Freien Energie. Insbesondere kann man also nicht durch Ableitung des Vertexfunktionals nach der Magnetisierung das äußere Feld bestimmen. Für die transversalen Quellen gilt dieser Zusammenhang jedoch wie gewohnt

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\delta \Gamma(\varphi, H)}{\delta \varphi(\mathbf{x})}. \quad (\text{A.25})$$

Für die Abhängigkeit vom äußeren Feld gilt zudem die durch einfaches Nachrechnen zu verifizierende Beziehung

$$\frac{\delta W(\mathbf{J}, H)}{\delta H(\mathbf{x})} = -\frac{\delta \Gamma(\varphi, H)}{\delta H(\mathbf{x})}. \quad (\text{A.26})$$

Die Definition (A.24) des Vertexfunktionals unterscheidet sich wegen (A.21) um einen Faktor T von der üblichen Darstellung. Das Vertexfunktional ergibt sich deshalb durch Summation der 1PI-Diagramme und Multiplikation mit einem Faktor T , so dass in niedrigster Ordnung folgt

$$\Gamma_0(\varphi) = \mathcal{H}(\varphi). \quad (\text{A.27})$$

Mit der Definition

$$\phi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x}) \equiv \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rangle \Big|_{\mathbf{J}} - \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rangle \Big|_{\mathbf{J}=0} \quad (\text{A.28})$$

vermitteln die Vertexfunktionen $\Gamma^{(n)}$ die Entwicklung des Vertexfunktionals $\Gamma(\varphi, H)$ um den Erwartungswert von $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$ für $\mathbf{J} = 0$

$$\Gamma(\varphi, H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma^{(n), i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, H) \phi^{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \phi^{i_n}(\mathbf{x}_n). \quad (\text{A.29})$$

Auch hier ergibt der Term mit $n = 0$ gerade die Freie Energie $\Gamma^0(T, H) = F(T, H)$, wie man an (A.24) (für $\mathbf{J} = 0$) erkennt.

Da die Temperaturvariable T renormiert wird und in der Definition der Zustandssumme explizite T -Faktoren auftreten, wird die übliche Beziehung zwischen nichtrenormierten und renormierten Vertexfunktionen verändert. Aufgrund des zusätzlichen T -Faktors in der Definition des Kumulantenfunktionals, ist die Abwandlung aber nur geringfügig, da die zusätzlichen T -Faktoren wieder kompensiert werden und es ergibt sich

$$\Gamma_{\text{R}}^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, \mu_{\text{R}}) = \frac{Z^{n/2}}{Z_t} \Gamma^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, \mu(\mu_{\text{R}})), \quad (\text{A.30})$$

wobei μ_{R} und μ hier für die Gesamtheit aller renormierten bzw. nichtrenormierten Parameter stehen.

A.4 Dimension von Feldern und Korrelationsfunktionen

Im Gegensatz zu Abschnitt 2.2.1 soll hier nicht die Frage nach dem UV-Verhalten und dem primitiven Divergenzgrad beantwortet werden, sondern lediglich die natürlichen Dimensionen der verschiedenen Größen in Einheiten des Cutoffs zusammengestellt werden.

$$[\pi(\boldsymbol{x})] = 0 \quad (\text{A.31a})$$

$$[\pi(\boldsymbol{q})] = -d \quad (\text{A.31b})$$

$$[T] = 2 - d \quad (\text{A.31c})$$

$$[H] = 2 \quad (\text{A.31d})$$

Zur Lösung der CS-Gleichungen wird die Dimension der Korrelationsfunktionen benötigt. Diese folgt aus (A.31)

$$[G^{(n,l)}(\{\boldsymbol{x}_i\}, T, H, \Lambda)] = 0 \quad (\text{A.32a})$$

$$[G^{(n,l)}(\{\boldsymbol{q}_i\}, T, H, \Lambda)] = -(n+l-1)d . \quad (\text{A.32b})$$

Da das Feld φ nach (A.24) dimensionslos ist, besitzt wegen (A.29) eine n -Punkt Vertexfunktion die Dimension nd

$$[\Gamma^{(n)}(\{\boldsymbol{x}_i\}, T, H, \Lambda)] = nd \quad (\text{A.33a})$$

$$[\Gamma^{(n)}(\{\boldsymbol{q}_i\}, T, H, \Lambda)] = d . \quad (\text{A.33b})$$

ANHANG B

Callan-Symanzik-Gleichungen des NLS-Modells

B.1 Lösung der CS-Gleichungen

In Verallgemeinerung von (2.23) gilt für die Korrelationsfunktionen welche auch σ -Felder enthalten

$$G_{\mathbf{R}}^{(n,l)}(\{\mathbf{x}_i\}, t_{\mathbf{R}}, H_{\mathbf{R}}, \mu) = Z(t_{\mathbf{R}}, \mu/\Lambda)^{-(n+l)/2} \cdot G^{(n,l)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, H, \Lambda). \quad (\text{B.1})$$

Mit der Argumentation von Paragraph 2.3.1 folgen daraus die CS-Gleichungen

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(n+l)}{2} \zeta(t) + \rho(t) H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n,l)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, H, \Lambda) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Die CS-Gleichungen für die entsprechenden Kumulanten sind natürlich identisch, da lediglich die Potenz des Z-Faktors und damit die Anzahl der Felder, für die Ableitung der Gleichungen relevant ist.

Die CS-Gleichung (B.2) kann mit Hilfe der Methode der Charakteristiken gelöst werden. Im folgenden wird dies für den Fall $l = 0$ skizziert. Der Ansatz

$$G^{(n)}(s) \equiv G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t(s), H(s), \Lambda(s)) \quad (\text{B.3})$$

liefert die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche die Funktionen $t(s)$, $H(s)$ und $\Lambda(s)$ erfüllen müssen

$$s \frac{d\Lambda(s)}{ds} = \Lambda(s), \quad \Lambda(s=1) = \Lambda \quad (\text{B.4a})$$

$$s \frac{dt(s)}{ds} = \beta(t(s)), \quad t(s=1) = t \quad (\text{B.4b})$$

$$s \frac{dH(s)}{ds} = \rho(t(s))H(s), \quad H(s=1) = H \quad (\text{B.4c})$$

$$s \frac{dG^{(n)}(s)}{ds} = -\frac{n}{2} \zeta(t(s)) \cdot G^{(n)}(s), \quad G^{(n)}(s=1) = G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) \quad (\text{B.4d})$$

mit den zugehörigen Lösungen

$$\Lambda(s) = \Lambda s \quad (\text{B.5a})$$

$$\ln s = \int_t^{t(s)} \frac{dt'}{\beta(t')} \quad (\text{B.5b})$$

$$H(s) = H \exp \left\{ \int_t^{t(s)} dt' \frac{\rho(t')}{\beta(t')} \right\} = H Z^{1/2}(s) \frac{t(s)s^{-\epsilon}}{t} \quad (\text{B.5c})$$

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = Z^{n/2}(s) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t(s), H(s), \Lambda s) \quad (\text{B.5d})$$

$$Z(s) = \exp \left\{ \int_t^{t(s)} dt' \frac{\zeta(t')}{\beta(t')} \right\}. \quad (\text{B.5e})$$

Im IR-Limes, d.h. im Grenzfall $s \rightarrow 0$, ergibt sich für $t(s)$ und $Z(s)$ (zur Definition von M_0 , ξ und K siehe (2.29))

$$t(s)s^{-\epsilon} \rightarrow (\Lambda\xi)^\epsilon \quad \text{und} \quad Z(s) \rightarrow M_0^2(t). \quad (\text{B.6})$$

Aufgrund der Dimensionsbetrachtungen (A.32) folgt für die Korrelationsfunktion

$$G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = Z^{n/2}(s)(\Lambda s)^{-(n-1)d} \cdot G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i/(\Lambda s)\}, t(s), H(s)/(\Lambda s)^2, 1). \quad (\text{B.7})$$

Um die allgemeine Skalenform obiger Korrelationsfunktionen zu finden, wird die Kombination $H(s)/(\Lambda s)^2$ auf der rechten Seite eliminiert. Man muss also die Matching-Bedingung

$$H(s) = (\Lambda s)^2 \quad (\text{B.8})$$

auswerten. Aus den Gleichungen (B.5c) und (B.6) folgt damit

$$t(s) \rightarrow \frac{tK^{d/2}(t)}{M_0(t)} \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\epsilon/2} \quad (\text{B.9a})$$

$$\Lambda s \rightarrow \sqrt{HK}(t). \quad (\text{B.9b})$$

Die Lösung der CS-Gleichung besitzt deshalb die Struktur von Gl. (2.30), bzw. verallgemeinert

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = M_0^{n+l} (HK)^{-\frac{(n+l-1)d}{2}} g^{(n,l)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{\sqrt{HK}} \right\}, \frac{tK^{d/2}}{M_0} \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\epsilon/2} \right). \quad (\text{B.10})$$

B.2 Störungstheorie im Koexistenzbereich

In diesem Anhang soll die Störungstheorie, mit welcher die Ergebnisse von Abschnitt 2.4 gewonnen wurden, etwas ausführlicher dargestellt werden. In B.2.1 werden die Ergebnisse von Nelson und Pelcovits [74] im Rahmen der Feldtheorie reproduziert. Anschließend wird

diese Vorgehensweise verallgemeinert, um geschlossene Ausdrücke für die feldabhängige Korrelationsfunktion zu gewinnen. Zunächst werden aber einige für die Störungstheorie notwendige Formeln angegeben.

Zur konkreten Berechnung von Mittelwerten, welche σ enthalten, muss man die Entwicklung von σ nach π benutzen

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \langle \pi^2(\mathbf{x}) \rangle - \frac{1}{8} \langle \pi^4(\mathbf{x}) \rangle + \mathcal{O}(T^3) \quad (\text{B.11a})$$

$$\langle \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}') \rangle = 1 - \langle \pi^2(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{4} (\langle \pi^2(\mathbf{x})\pi^2(\mathbf{x}') \rangle - \langle \pi^4(\mathbf{x}) \rangle) + \mathcal{O}(T^3). \quad (\text{B.11b})$$

Nun kann die übliche Störungstheorie verwendet werden

$$\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \int_q^\Lambda e^{iq(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{T}{\mathbf{q}^2 + H} \quad (\text{B.12a})$$

$$\langle \pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}') \rangle = (N-1) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathcal{O}(T^2) \quad (\text{B.12b})$$

$$\langle \pi^2(\mathbf{x})\pi^2(\mathbf{x}') \rangle = (N-1)^2 \Delta^2(0) + 2(N-1)\Delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathcal{O}(T^3). \quad (\text{B.12c})$$

Mit Hilfe der Definitionen (2.34) und (2.35) können longitudinale und transversale Korrelationsfunktion berechnet werden. Die niedrigsten Ordnungen sind

$$G_T(q, T, H, \Lambda) = \int d^d x e^{-iq\mathbf{x}} \langle \pi(\mathbf{x})\pi(0) \rangle = (N-1) \frac{T}{\mathbf{q}^2 + H} + \mathcal{O}(T^2) \quad (\text{B.13})$$

und für die longitudinale Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} G_L(q, T, H, \Lambda) &= \frac{1}{4} \int d^d x e^{-iq\mathbf{x}} \left(\langle \pi^2(\mathbf{x})\pi^2(0) \rangle - \langle \pi^2 \rangle^2 \right) + \mathcal{O}(T^3) \\ &= \frac{N-1}{2} \int_p^\Lambda \frac{T^2}{(\mathbf{p}^2 + H)((\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + H)} + \mathcal{O}(T^3). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.2.1 Magnetisierung Die Magnetisierung des Systems ist gleich dem Mittelwert von σ . Mit Hilfe von (B.11a) ergibt sich dafür

$$M(T, H, \Lambda) = \langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \frac{N-1}{2} \int_q^\Lambda \frac{T}{\mathbf{q}^2 + H} + \mathcal{O}(T^2) \quad (\text{B.15})$$

$$\approx 1 - \frac{N-1}{2} \frac{T}{2\pi\epsilon} (\Lambda^\epsilon - H^{\epsilon/2}) \quad (\text{B.16})$$

für kleine H , ϵ mit $\epsilon > 0$. Der zweite Term ist proportional T und gibt den Einfluss der statistischen Schwankungen für $T \neq 0$ an. Ist $H = 0$, so divergieren diese Fluktuationen für $d \leq 2$ in Übereinstimmung mit dem Mermin-Wagner-Theorem. Die Ursache dieser starken Fluktuationen sind offensichtlich die transversalen Moden.

Die Störungsreihe (B.15) lässt im Prinzip keine Aussagen darüber zu, welche Abhängigkeit von H die höheren Störungsterme erzeugen. Diese Frage kann mit Hilfe der Renormierungsgruppe beantwortet werden. Dazu werden zunächst die Funktionen $t(s)$ und $Z(s)$

berechnet

$$t(s) = \frac{ts^\epsilon}{1 + \frac{t}{t_c}(s^\epsilon - 1)} \quad (\text{B.17})$$

$$Z(s) = \left(\frac{t_c - t}{t_c - t(s)} \right)^{\frac{N-1}{N-2}} = \left(1 + \frac{t}{t_c}(s^\epsilon - 1) \right)^{\frac{N-1}{N-2}}. \quad (\text{B.18})$$

Ausgangspunkt für die Berechnung der Magnetisierung ist die RNG Beziehung (B.7) für $n=1$ (mit $h = H/\Lambda^2$)

$$M(t, h) = Z^{1/2}(s) M(t(s), H(s)/(\Lambda s)^2). \quad (\text{B.19})$$

Das Matching (B.8) bewirkt zum einen, dass die Störungstheorie für $M(t(s), H(s)/(\Lambda s)^2)$ frei ist von den Divergenzen der Störungsreihe bei $H=0$. Zum anderen wird die Entwicklung in $t(s)$ effektiv zu einer Entwicklung in $h^{\epsilon/2}$, so dass man sich auf die ersten Terme beschränken kann, wenn man sich für das Verhalten im Limes $h \rightarrow 0$ interessiert. Aus der Matchingbedingung folgt

$$s^2 = h Z^{1/2}(s) \frac{t(s)s^{-\epsilon}}{t} \Rightarrow s^2 = h Z^{1/2}(h^{1/2}) \frac{t(h^{1/2})h^{-\epsilon/2}}{t} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{B.20})$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} M(t, h) &= Z^{1/2}(h^{1/2}) \cdot M(t(h^{1/2}), 1, 1) \\ &= Z^{1/2}(h^{1/2}) \cdot \left(1 - \frac{N-1}{4\pi} t(h^{1/2}) \int_0^1 \frac{x^{d-1} dx}{x^2 + 1} + \mathcal{O}(h^\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Genauere Betrachtung zeigt, dass für kleine Temperaturen der Vorfaktor und der erste Störungsterm die gleich h Abhängigkeit besitzen. Der Vorfaktor beinhaltet aber im Gegensatz zum Störungsterm auch den Crossover zu höheren Temperaturen und insbesondere den kritischen Bereich. Da ohnehin nicht zu erwarten ist, dass absolute Werte im Rahmen einer solchen Rechnung zuverlässig berechenbar sind, erscheint es sinnvoll sich auf den Vorfaktor zu konzentrieren. Damit ergibt sich in führender Ordnung

$$M(t, h) = \left(1 + \frac{t}{t_c} (h^{\epsilon/2} - 1) \right)^{\frac{N-1}{2(N-2)}}. \quad (\text{B.22})$$

Mit Hilfe der Ward-Takahashi-Identität (2.37) ergibt sich daraus die transversale Suszeptibilität (2.54a) und durch einfaches Differenzieren die longitudinale Suszeptibilität (2.54b).

B.2.2 Feldabhängige Korrelationsfunktionen Ausgangspunkt der Rechnung ist wiederum die RNG Beziehung (B.7) angewendet auf die Zweipunktfunktionen, d.h. $n = 2$, $l = 0$ für die transversale und $n = 0$, $l = 2$ für die longitudinale Korrelationsfunktion

$$G_{L/T}(q, t, H, \Lambda) = Z(s)(\Lambda s)^{-d} \cdot G_{L/T}(q/(\Lambda s), t(s), H(s)/(\Lambda s)^2, 1). \quad (\text{B.23})$$

Ein Matching welches in den kritischen Grenzfällen ($H=0, q \rightarrow 0$) und ($H \rightarrow 0, q=0$) gut funktioniert ist gegeben durch die Kombination

$$(\Lambda s)^2 = H(s) + q^2 . \quad (\text{B.24})$$

Benutzt man für $H(s)$ die Darstellung

$$H(s) = H \left(1 + \frac{t}{t_c} (s^\epsilon - 1) \right)^{-(N-3)/2(N-2)} , \quad (\text{B.25})$$

so folgt aus obigem Matching für die Renormierungsskala

$$\begin{aligned} \Lambda s &= \sqrt{\frac{HM_0}{t} (\Lambda \xi)^\epsilon (1 + t_c^{-1} (\xi \Lambda s)^\epsilon)^{-(N-3)/2(N-2)} + q^2} \\ &= \sqrt{\frac{HM_0}{t} (\Lambda \xi)^\epsilon + q^2 + \mathcal{O}(\epsilon)} . \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Beschränkt man sich wie in Abschnitt B.2.1 vorgeführt, auf den führenden Term in der Störungsreihe der rechten Seite, so ergibt sich für die transversale Korrelationsfunktion

$$G_{\text{T}}(q, t, H, \Lambda) = Z(s) (\Lambda s)^{-d} \left(\frac{t(s)}{\frac{q^2}{(\Lambda s)^2} + \frac{H(s)}{(\Lambda s)^2}} + \mathcal{O}(t^2(s)) \right) . \quad (\text{B.27})$$

In obiger Formel genügt es, sich bei den Abhängigkeiten der Form $(\Lambda s)^\epsilon$ auf die zweite Zeile von (B.26) zu beschränken. Mit einigen Umformungen ergibt sich dann

$$G_{\text{T}}(q, t, H, \Lambda) = M_0^2 \xi^d \frac{\left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2} \right)^{\frac{1}{N-2}}}{x^{-2} + y \left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2} \right)^{-\frac{N-3}{2(N-2)}}} , \quad (\text{B.28})$$

wo x und y die in (2.43) definierten Skalenvariablen sind.

Für die longitudinale Korrelationsfunktion gestaltet sich die Berechnung etwas schwieriger. Will man konsistent mit dem Vorgehen für die transversale Korrelationsfunktion rechnen, so muss man bis auf die t Abhängigkeit den ersten Term als unbekannte Konstante auffassen

$$G_{\text{L}}(q, t, H, \Lambda) = Z(s) (\Lambda s)^{-d} (C t^2(s) + \mathcal{O}(t^3(s))) . \quad (\text{B.29})$$

Entsprechend dem Vorgehen bei der transversalen Korrelationsfunktion kann man aus obiger Beziehung die longitudinale Korrelationsfunktion berechnen. Die Konstante kann aus der resultierenden Formel auf einfache Weise bestimmt werden, indem man mittels des Fluktuations-Response-Theorems die zugehörige Suszeptibilität berechnet. Diese Suszeptibilität kann man nun vergleichen mit dem Ergebnis, das man durch differenzieren von (B.22) erhält. Aus dieser Prozedur folgt die Konstante C zu

$$C = \frac{\epsilon}{4} \frac{N-1}{N-2} \cdot \frac{1}{t_c} = \frac{N-1}{8\pi} , \quad (\text{B.30})$$

so dass sich insgesamt für die longitudinale Korrelationsfunktion ergibt

$$G_L(q, t, H, \Lambda) = M_0^2 \xi^d \frac{N-1}{8\pi} \frac{(y + x^{-2})^{\epsilon/2} \left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{-\frac{N-3}{N-2}}}{x^{-2} + y \left(1 + t_c^{-1} (y + x^{-2})^{\epsilon/2}\right)^{-\frac{N-3}{2(N-2)}}}. \quad (\text{B.31})$$

ANHANG C

Eigenschaften des XY-Modells

C.1 Propagator in zwei Dimensionen

Der Propagator des XY-Modells ist in $d=2$ IR-divergent und für $\mathbf{x}=0$ auch UV-divergent. Zur Berechnung des Integrals wird deshalb als IR-Regulator die inverse Längenausdehnung des Systems und als UV-Regulator wie üblich der Gittercutoff Λ benutzt

$$\Delta(r) = t \int_q^\Lambda \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{q^2} \rightarrow \frac{t}{(2\pi)} \int_{1/L}^\Lambda \frac{dq}{q} J_0(qr), \quad (\text{C.1})$$

mit $r = |\mathbf{x}|$. Für $r = 0$ ist das Integral trivial

$$\Delta(0) = \frac{t}{2\pi} \ln(\Lambda L) = \frac{t}{2\pi} (\ln(\Lambda a_0) + \ln(L/a_0)), \quad (\text{C.2})$$

wo a_0 eine willkürliche Längeneinheit ist und in der zweiten Darstellung nach IR- und UV-Divergenzen aufgespalten wird. Im allgemeinen Fall gilt

$$\begin{aligned} \Delta(r) &= (\Delta(r) - \Delta(0)) + \Delta(0) \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_{1/L}^{\Lambda r} \frac{du}{u} (J_0(u) - 1) + \Delta(0) \\ &= \frac{t}{2\pi} \left(\int_{1/L}^1 \frac{du}{u} (J_0(u) - 1) + \int_1^{\Lambda r} \frac{du}{u} J_0(u) - \int_1^{\Lambda r} \frac{du}{u} \right) + \Delta(0) \\ &\approx \text{const.} - \frac{t}{2\pi} \ln \Lambda r + \Delta(0). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die ersten zwei Integrale der dritten Zeile sind im Wesentlichen konstant. Für die divergenten Anteile des Propagators ergibt sich

$$\Delta(r) = \frac{t}{2\pi} \ln(L/r) = \frac{t}{2\pi} (\ln(L/a_0) - \ln(r/a_0)). \quad (\text{C.4})$$

Untersucht man Korrelationsfunktionen bei endlichem äußeren Feld, so kann man das Feld als IR-Regulator benutzen

$$\Delta(r) = t \int_q^\Lambda \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{q^2 + H} = \frac{t}{(2\pi)} \int_0^{\Lambda r} \frac{u du}{u^2 + Hr^2} J_0(u). \quad (\text{C.5})$$

Die Berechnung der dominierenden Anteile des Integrals funktioniert im Wesentlichen wie in (C.3)

$$\Delta(0) = \frac{t}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{H} \right) \quad (\text{C.6a})$$

$$\Delta(r) - \Delta(0) \rightarrow -\frac{t}{4\pi} \ln \left(\frac{1 + \Lambda^2/H}{1 + 1/(Hr^2)} \right). \quad (\text{C.6b})$$

Somit ergibt sich als wesentliche Abhängigkeit

$$\Delta(r) = \frac{t}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{Hr^2} \right). \quad (\text{C.7})$$

C.2 Feldabhängigkeit für $d = 2$

Die Renormierungsgruppengleichungen des nichtlinearen σ -Modells (B.2) lauten für $N = 2$ und $d = 2$

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \frac{(n+l)}{2} \zeta(t) + \frac{\zeta(t)}{2} H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Die Temperatur spielt in den CS-Gleichungen nur noch die Rolle eines Parameters und es ist $t(s) \equiv t$. Entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt B.1 werden die Gleichungen mit Hilfe von Charakteristiken gelöst

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = \exp \left\{ \frac{(n+l)}{2} \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} \zeta(t) \right\} G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H(s), \Lambda s). \quad (\text{C.9})$$

Da $\zeta(t)$ nur über t von σ abhängt und t hier unabhängig von σ ist, gilt unter Berücksichtigung der Skalendimension von G^n

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = s^{\frac{(n+l)}{2} \zeta(t)} (\Lambda s)^{-(n+l-1)2} G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i/(\Lambda s)\}, t, H(s)/(\Lambda s)^2, 1). \quad (\text{C.10})$$

Die Lösung der RNG-Gleichung für $H(s)$ lautet

$$H(s) = H \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_1^s \frac{d\sigma}{\sigma} \zeta(t) \right\} = H s^{\zeta(t)/2}. \quad (\text{C.11})$$

Unter Verwendung des Matchings (B.8) und $\zeta(t) = t/2\pi$ folgt

$$s = \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\frac{4\pi}{8\pi-t}} \quad (\text{C.12})$$

und damit als Lösung der CS-Gleichung (C.8)

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, H, \Lambda) = \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{1-n-l+\frac{t}{8\pi-t}} \Lambda^{-(n+l-1)2} G^{(n,l)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{\Lambda} \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{-\frac{4\pi}{8\pi-t}} \right\}, t, 1, 1 \right) \quad (\text{C.13})$$

und entsprechend für die Ortsraumfunktionen

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, H, \Lambda) = \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\frac{(n+l)t}{8\pi-t}} G^{(n,l)} \left(\left\{ \Lambda \mathbf{x}_i \left(\frac{H}{\Lambda^2} \right)^{\frac{4\pi}{8\pi-t}} \right\}, t, 1, 1 \right). \quad (\text{C.14})$$

C.3 Störungstheorie im zweidimensionalen XY-Modell

C.3.1 Modifizierte Störungstheorie Berechnet man Korrelationsfunktionen im XY-Modell ausgehend von der Zustandssumme (2.59), so erhält man für $H=0$ die Formeln (2.61). Für $H \neq 0$ kann man entweder in der üblichen Form der Störungstheorie die Winkelfunktionen nach dem Feld θ entwickeln, oder man formuliert die Störungsreihe um. Es gilt Mittelwerte der folgenden Struktur zu berechnen

$$\left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}(\theta) \exp \left\{ -\frac{\Lambda^\epsilon}{t} \left(\mathcal{H}_0(\theta, H) + \mathcal{H}_I(\theta, H) \right) + \sum_n i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n) \right\} \quad (\text{C.15a})$$

$$\mathcal{H}_0(\theta, H) = \frac{1}{2} \int d^2x \left(H\theta^2(\mathbf{x}) + (\partial_\mu \theta(\mathbf{x}))^2 \right) \quad (\text{C.15b})$$

$$\mathcal{H}_I(\theta, H) = H \int d^2x \left(\cos \theta(\mathbf{x}) - \theta^2(\mathbf{x}) \right) . \quad (\text{C.15c})$$

Der Quellterm lässt sich als Integral schreiben

$$\sum_n i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n) = \int d^d x j(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad j(\mathbf{x}) = i \sum_n \kappa_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) . \quad (\text{C.16})$$

Betrachtet man die Terme im Fourierraum und benutzt die Transformation $\theta(\mathbf{q}) = \Delta(\mathbf{q})j(\mathbf{q}) + \vartheta(\mathbf{q})$, so wird der Erwartungswert zu

$$\left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}(\vartheta) \exp \left\{ -\frac{\Lambda^\epsilon}{2t} \int_q (\mathbf{q}^2 + H) \vartheta(\mathbf{q}) \vartheta(-\mathbf{q}) - \frac{\Lambda^\epsilon}{t} \mathcal{H}_I \left(\Delta(\mathbf{q})j(\mathbf{q}) + \vartheta(\mathbf{q}) \right) + \frac{1}{2} \int_q j(\mathbf{q}) \Delta(\mathbf{q}) j(-\mathbf{q}) \right\} . \quad (\text{C.17})$$

Die Korrelationsfunktion wird auf diese Weise aufgespalten in zwei Anteile

$$\left\langle \prod_n e^{i\kappa_n \theta(\mathbf{x}_n)} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n,m} \kappa_n \kappa_m \Delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) \right\} \cdot \mathcal{C} \quad (\text{C.18a})$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}(\vartheta) \exp \left\{ -\frac{\Lambda^\epsilon}{2t} \int_q (\mathbf{q}^2 + H) \vartheta(\mathbf{q}) \vartheta(-\mathbf{q}) - \frac{\Lambda^\epsilon}{t} \mathcal{H}_I \left(\Delta(\mathbf{q})j(\mathbf{q}) + \vartheta(\mathbf{q}) \right) \right\} \quad (\text{C.18b})$$

Der erste Term in (C.18a) entspricht dem Ergebnis für $H=0$ (2.61) und in der Tat ist $\mathcal{C} \equiv 1$ für $H=0$. Weil Δ proportional zu t ist, sind die Terme niedrigster Ordnung in (C.18b) gerade diejenigen, für welche $j=0$ ist. Setzt man $j=0$ in (C.18b), so ergibt das Funktionalintegral Z und \mathcal{C} wird Eins. Der Term niedrigster Ordnung mit $j \neq 0$ entsteht durch Kontraktion des Vierpunkt-Vertex, wo zwei Beine durch $j\Delta$ ersetzt werden. Dieser Beitrag ist von der Ordnung $\mathcal{O}(t^2)$, so dass

$$\mathcal{C} = 1 + \mathcal{O}(t^2) . \quad (\text{C.19})$$

In obiger Formulierung der Störungstheorie wird ein Teil der Reihe zur Exponentialfunktion (C.18a) aufsummiert, während in gewöhnlicher Störungstheorie nur die Terme niedrigster Ordnung der Exponentialfunktion zu sehen sind.

C.3.2 Elementare Erwartungswerte Im Rahmen der modifizierten Störungstheorie ergibt sich für die Magnetisierung und die Korrelationsfunktion

$$M(t, h) = e^{-\frac{1}{2}\Delta(0)}(1 + \mathcal{O}(t^2)) = \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{-t/8\pi} \quad (\text{C.20a})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{S}(0) \rangle = e^{\Delta(|\mathbf{x}|) - \Delta(0)}(1 + \mathcal{O}(t^2)) = |\mathbf{x}|^{-t/(2\pi)} \left(\frac{1 + h^2}{\Lambda^{-2} + h^2|\mathbf{x}|^2} \right)^{-t/(4\pi)}. \quad (\text{C.20b})$$

Wie man sieht, liefert die modifizierte Störungstheorie bereits das richtige Skalenverhalten. Im Rahmen einer gewöhnlichen Störungstheorie könnte man dieses Verhalten erst nach einer RNG Analyse ablesen.

ANHANG D

Langreichweitiges XY-Modell

D.1 Entwicklung des Ginzburg-Landau-Funktional

Ausgangspunkt der Entwicklung ist das Funktional (3.4). Im Rahmen der Kontinuumsdarstellung ist es einfach, den langreichweitigen Term zu transformieren

$$\begin{aligned} \int d^2x d^2x' \frac{\partial_\mu \partial'_\mu (\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}') + \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \int_q^\Lambda \mathbf{q}^2 (\pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) + \sigma(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q})) \int d^2x \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \\ &= \int_q^\Lambda 2\pi|\mathbf{q}| (\pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) + \sigma(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q})) . \end{aligned}$$

Das GL-Funktional (3.4) lautet somit im Fourierraum

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_q^\Lambda (\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}|) (\pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) + \sigma(\mathbf{q})\sigma(-\mathbf{q})) - H\sigma(\mathbf{q} = 0) , \quad (\text{D.1})$$

mit dem transformierten Feld

$$\sigma(\mathbf{q}) = \int d^d x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \sigma(\mathbf{x}) = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{q}) - \frac{1}{8} \pi^4(\mathbf{q}) - \frac{1}{16} \pi^6(\mathbf{q}) - \dots . \quad (\text{D.2})$$

Auswertung der obigen Formeln liefert für das Ginzburg-Landau-Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2T} \int_q^\Lambda (\mathbf{q}^2 + G|\mathbf{q}| + H) \pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) \\ &+ \frac{1}{8T} \int_{q_1, \dots, q_4}^\Lambda (2\pi)^2 \delta\left(\sum q_i\right) \left[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2| + H \right] \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_4) \quad (\text{D.3a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{16T} \int_{q_1, \dots, q_6}^\Lambda (2\pi)^2 \delta\left(\sum q_i\right) \left[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + G|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2| + H \right] \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_6) \quad (\text{D.3b}) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

und für den Maßterm

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \int_q^\Lambda \pi(\mathbf{q})\pi(-\mathbf{q}) + \frac{1}{4} \int_{q_1, \dots, q_4}^\Lambda (2\pi)^2 \delta\left(\sum q_i\right) \pi(\mathbf{q}_1) \dots \pi(\mathbf{q}_4) + \dots . \quad (\text{D.3c})$$

D.2 Transformation der CS-Gleichungen

Durch das Auffinden der expliziten Abhängigkeit zwischen t und g

$$\tau(t, g) = \frac{2\pi}{t} (g - g_c(t)) e^{-8\pi/t+4} \quad (\text{D.4})$$

hat man eine Stammfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{dg}{\beta_g(t, g)} = \frac{dt}{\beta(t, g)} \quad (\text{D.5})$$

gefunden (vergleiche (3.24)), d.h. es gilt

$$0 = d\tau = \frac{\partial\tau}{\partial t} dt + \frac{\partial\tau}{\partial g} dg = -\beta_g dt + \beta dg . \quad (\text{D.6})$$

Durch die Transformation auf t und τ transformieren sich die Ableitungen gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \beta_g \frac{\partial}{\partial\tau} \quad (\text{D.7a})$$

$$\frac{\partial}{\partial g} \rightarrow \frac{\partial\tau}{\partial g} \frac{\partial}{\partial\tau} = \beta \frac{\partial}{\partial\tau} . \quad (\text{D.7b})$$

Für die Kombination von Ableitungen welche in den CS-Gleichungen auftritt, bedeutet dies

$$\beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} \rightarrow \beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{D.8})$$

und dementsprechend lauten die CS-Gleichungen

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial\Lambda} + \beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} \zeta(t, \tau) + \rho(t, \tau) H \frac{\partial}{\partial H} \right) G^{(n)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) = 0 . \quad (\text{D.9})$$

D.3 Allgemeine Lösung der CS-Gleichung

D.3.1 Lösungsnachweis Die mittels Charakteristiken gewonnene Lösung (3.58) der CS-Gleichungen ist für alle Temperaturen eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.30). Um dies zu zeigen, wird der CS-Operator

$$\mathcal{D} = \Lambda \frac{\partial}{\partial\Lambda} + \beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} + \rho(t, \tau) H \frac{\partial}{\partial H} \quad (\text{D.10})$$

zunächst auf die Kombination HK angewendet. Unter Berücksichtigung der CS-Gleichungen für die Korrelationslänge

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial\Lambda} + \beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \xi(t, g, \Lambda) = 0 \quad (\text{D.11})$$

und die spontane Magnetisierung

$$\left(\beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} \right) M_0(t, g) = -\frac{\zeta(t, g)}{2} M_0(t, g), \quad (\text{D.12})$$

sowie der einfach nachzuprüfenden Beziehung

$$\left(\beta(t, g) \frac{\partial}{\partial t} + \beta_g(t, g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \kappa(t, g) = 0 \quad (\text{D.13})$$

folgt

$$\mathcal{D}HK(t, g) = \rho HK(t, g) + H\mathcal{D} \left(\frac{M_0(t, g) \xi(t, g)}{t \kappa(t, g)} \right) = 0. \quad (\text{D.14})$$

Damit kann man die Richtigkeit der Lösung einfach überprüfen

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}M_0^n (HK)^{2(1-n)} g^{(n)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{HK} \right\}, \xi HK, \kappa \right) \\ &= -\frac{n}{2} \zeta M_0^n (HK)^{2(1-n)} g^{(n)} + M_0^n g^{(n)} 2(1-n) (HK)^{2(1-n)-1} \mathcal{D}HK \\ & \quad + M_0^n (HK)^{2(1-n)} \left(\sum_i \frac{\partial g^{(n)}}{\partial x_i} q_i \mathcal{D} \frac{1}{HK} + \frac{\partial g^{(n)}}{\partial y} \mathcal{D} \xi HK + \frac{\partial g^{(n)}}{\partial \kappa} \mathcal{D} \kappa \right) \\ &= -\frac{n}{2} \zeta M_0^n (HK)^{2(1-n)} g^{(n)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{HK} \right\}, \xi HK, \kappa, \right), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

wo zur vereinfachten Darstellung die Größen

$$x_i = \frac{q_i}{\sqrt{HK}} \quad (\text{D.16a})$$

$$y = \xi HK \quad (\text{D.16b})$$

definiert wurden. Zusammenfassend gilt also

$$\left(\mathcal{D} + \frac{n}{2} \zeta \right) M_0^n (HK)^{2(1-n)} g^{(n)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{HK} \right\}, \xi HK, \kappa \right) = 0. \quad (\text{D.17})$$

D.3.2 Weitere Lösungen Für die gemischten Korrelationsfunktionen (A.20) ergibt sich als Lösung

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = M_0^{n+l} (HK)^{-2(n+l-1)} g^{(n,l)} \left(\left\{ \frac{\mathbf{q}_i}{HK} \right\}, \xi HK, \kappa \right) \quad (\text{D.18a})$$

bzw.

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{q}_i\}, t, g, H, \Lambda) = M_0^{n+l} \xi^{2(n+l-1)} g^{(n,l)} \left(\{\mathbf{q}_i \xi\}, H \frac{M_0 \xi^2}{t}, \kappa \right) \quad (\text{D.18b})$$

und entsprechend der Dimension (A.32a) der Korrelationsfunktion ergibt sich im Ortsraum

$$G^{(n,l)}(\{\mathbf{x}_i\}, t, \tau, H, \Lambda) = M_0^{n+l} g^{(n,l)} \left(\{\mathbf{x}_i / \xi\}, H \frac{M_0 \xi^2}{t}, \kappa \right). \quad (\text{D.19})$$

ANHANG E

Dipolares XY-Modell

E.1 Einige nützliche Identitäten

In diesem Anhang sollen einige Identitäten zusammengestellt werden, welche für die Rechnungen in Abschnitt 4.2 hilfreich sind. Zunächst einige Eigenschaften der Rotationsoperatoren $\mathcal{D}^m(\mathbf{x})$ welche in (4.12) definiert wurden

$$\int d^d x f(\mathbf{x}) \mathcal{D}^m(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = - \int d^d x g(\mathbf{x}) \mathcal{D}^m(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (\text{E.1a})$$

$$\sigma(\boldsymbol{\pi}) \mathcal{D}^m(\mathbf{x}) \sigma(\boldsymbol{\pi}) = -\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \mathcal{D}^m(\mathbf{x}) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \quad (\text{E.1b})$$

$$\int d^d x' f(\mathbf{x}') \mathcal{D}^m(\mathbf{x}) g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \int d^d x' g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \mathcal{D}^m(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') \quad (\text{E.1c})$$

$$\int d^d x (\boldsymbol{\partial}^2 f(\mathbf{x})) \mathcal{D}^m f(\mathbf{x}) = 0 . \quad (\text{E.1d})$$

Desweiteren werden die Kommutatoren der Rotationsoperatoren $\hat{\mathcal{D}}^\alpha$ (welche nur eine Untermenge der \mathcal{D}^m bilden, siehe Paragraph 4.2.2) mit den gewöhnlichen Ableitungen (Definition (4.63)) benötigt

$$[\partial, \mathcal{D}^\alpha(\mathbf{x})] = -\partial^\alpha \quad (\text{E.2a})$$

$$[\partial^\beta, \mathcal{D}^\alpha(\mathbf{x})] = \delta^{\alpha\beta} \partial \quad (\text{E.2b})$$

$$[\boldsymbol{\partial}^2, \mathcal{D}^\alpha(\mathbf{x})] = 0 \quad (\text{E.2c})$$

$$[\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta] = \Delta^{(\alpha,\beta)} . \quad (\text{E.2d})$$

Für die Berechnung der Funktionalableitung verschiedener Terme ist es sinnvoll, die Ableitung nach $\boldsymbol{\pi}$ in eine Ableitung nach σ umzuwandeln

$$\frac{\delta}{\delta \pi^\alpha(\mathbf{x})} = - \frac{\pi^\alpha(\mathbf{x})}{\sigma(\boldsymbol{\pi})} \frac{\delta}{\delta \sigma(\mathbf{x})} . \quad (\text{E.3})$$

An dieser Stelle werden auch noch zwei Formeln angegeben, welche in Paragraph 4.4.2 benötigt werden. Die erste dieser Formeln folgt aus Gleichung (4.43) durch Funktionalab-

leitung nach $\varphi^\beta(\mathbf{x}') \equiv \varphi'^\beta$ und die zweite durch Ableitung nach $H(\mathbf{x}') \equiv H'$

$$\int_x \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha \delta \varphi'^\beta} \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} + \left(\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha} - (\hat{\mathcal{D}}^\alpha H) \right) \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta H \delta \varphi'^\beta} - \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta \varphi'^\beta \delta \varphi^\mu} \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\mu \right\} = -H' \delta^{\alpha\beta} - \hat{\mathcal{D}}'^\alpha \frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi'^\beta} \quad (\text{E.4a})$$

$$\int_x \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha \delta H'} \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H} + \left(\frac{\delta \Gamma_0}{\delta \varphi^\alpha} - (\hat{\mathcal{D}}^\alpha H) \right) \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta H \delta H'} - \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\delta H' \delta \varphi^\mu} \hat{\mathcal{D}}^\alpha \varphi^\mu \right\} = -\mathcal{D}'^\alpha \frac{\delta \Gamma_0}{\delta H'} - \varphi'^\alpha. \quad (\text{E.4b})$$

E.2 Eine Beweisskizze

Im weiteren wird die Ableitung von Gl. (4.67) skizziert. Die Rechnungen werden nicht ausführlich dargestellt, sondern nur die wesentlichen Schritte angegeben. Zunächst gilt für die Änderung des Funktionals γ_1 bei festgehaltenem Feld w

$$\left. \frac{\delta \gamma_1(\boldsymbol{\varphi}, w)}{\delta \varphi^\alpha(\mathbf{x})} \right|_w = \left. \frac{\delta \bar{\Gamma}_1(\boldsymbol{\varphi}, H)}{\delta \varphi^\alpha(\mathbf{x})} \right|_H + \int_{x'} \frac{\delta \bar{\Gamma}_1(\boldsymbol{\varphi}, H)}{\delta H(\mathbf{x}')} \cdot \left. \frac{\delta H(\mathbf{x}')}{\delta \varphi^\alpha(\mathbf{x})} \right|_w. \quad (\text{E.5})$$

Für die Ableitung des äußeren Feldes nach φ^α bei festgehaltenem w ergibt sich

$$\left. \frac{\delta H(\mathbf{x}')}{\delta \varphi^\alpha(\mathbf{x})} \right|_w = -\frac{\varphi^\alpha(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} (w(\mathbf{x}') - \partial'^2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{G}{2\pi} \left(\frac{\varphi^\alpha(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \partial^2 - \partial \partial^\alpha \right) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{E.6})$$

Betrachtet man nun die Änderung von γ_1 unter der gekoppelten Transformation

$$\Delta \gamma_1(\boldsymbol{\varphi}, w) \Big|_w \equiv \mathcal{L}^\alpha \gamma_1(\boldsymbol{\varphi}, w) \Big|_w$$

so ergibt der erste Term der rechten Seite von Gl. (E.5) gerade die linke Seite der aus $\mathcal{X}^\alpha \bar{\Gamma}_1 = 0$ folgenden Gleichung

$$\mathcal{L}^\alpha \bar{\Gamma}_1 = \int_x \left(-\partial^2 \varphi^\alpha + \varphi^\alpha w - (\mathcal{D}^\alpha H) - \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{\nabla'^\alpha (\partial' \sigma' + \nabla' \varphi')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\delta \bar{\Gamma}_1}{\delta H} \quad (\text{E.7})$$

Es verbleibt die Wirkung des Generators der gekoppelten Symmetrie auf den zweiten Term der rechten Seite von (E.5) zu berechnen

$$\begin{aligned} \int_{x'} \frac{\delta \bar{\Gamma}_1}{\delta H(\mathbf{x}')} \mathcal{L}^\alpha H(\mathbf{x}') \Big|_w &= \int_x \frac{\delta \bar{\Gamma}_1}{\delta H(\mathbf{x})} \left\{ (-w + \partial^2) (\varphi^\alpha - (\mathcal{D}^\alpha \sigma)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{G}{2\pi} \int_{x'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\partial'^2 \varphi'^\alpha - \partial'^2 (\mathcal{D}'^\alpha \sigma') - \partial' \partial'^\alpha \sigma' - \partial' \partial'^\beta (\mathcal{D}'^\alpha \varphi'^\beta) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Dieser Term kann mit Hilfe der in Abschnitt E.1 angegebenen Kommutatorbeziehungen umgeformt werden. Addiert man anschließend (E.7) und (E.8), so sieht man die Gültigkeit von Gl. (4.67).

E.3 Störungstheorie des DXY-Modells

E.3.1 Beiträge zum Zwei-Punkt-Vertex An dieser Stelle sollen die Beiträge der Diagramme zur Zwei-Punkt-Renormierung in Paragraph 4.5.2 aufgelistet werden. Die für die Renormierung wesentlichen Beiträge sind

$$\Gamma^{(2)}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{q}^2 + G \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + H + t \left(\frac{H}{2} \int_k^\Lambda \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) - \int_k^\Lambda +I_a(\mathbf{q}) - I_c(\mathbf{q}) - I_d(\mathbf{q}) \right), \quad (\text{E.9})$$

mit den folgenden Integralen

$$I_a(\mathbf{q}, G, H, \Lambda) \equiv \int_k^\Lambda \left((\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + G \frac{(k_x + q_x)^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|} + H \right) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \quad (\text{E.10a})$$

$$I_b(\mathbf{q}, G, H, \Lambda) \equiv G^2 \int_k^\Lambda \frac{k_x^2 k_y^2}{|\mathbf{k}|} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad (\text{E.10b})$$

$$I_c(\mathbf{q}, G, H, \Lambda) \equiv G^2 \int_k^\Lambda \frac{k_x k_y (k_x + q_x)(k_y + q_y)}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}| |\mathbf{q}|} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (\text{E.10c})$$

Diese Integrale müssen nun nach den äußeren Impulsen bis zur zweiten Ordnung in q entwickelt werden. Anschließend muss man die Winkelintegration mit den Formeln (4.100) durchführen. Da die Dipolwechselwirkung im Zweipunkt-Vertex nicht renormiert, ist das Ergebnis eine Funktion mit Anteilen proportional zu q_x^2 und q_y^2 , sowie konstanten Anteilen.

$$I_a = \int_k^\Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \left\{ -\tilde{g} k^2 \Theta_1^{(0,2)} + \tilde{g} k^2 \Theta_1^{(2,0)} + q_x^2 \left((1 + \tilde{g}) \Theta_1^{(0,0)} - \frac{5\tilde{g}}{2} \Theta_1^{(2,0)} + \frac{3\tilde{g}}{2} \Theta_1^{(4,0)} \right) + q_y^2 \left(\Theta_1^{(0,0)} - \frac{\tilde{g}}{2} \Theta_1^{(2,0)} + \frac{3\tilde{g}}{2} \Theta_1^{(2,2)} \right) \right\} \quad (\text{E.11a})$$

$$I_b = \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{\tilde{g}^2 dk}{k} \left\{ k^2 \Theta_2^{(2,2)} + q_x^2 \left(-\Theta_3^{(2,2)} + \frac{\tilde{g}}{2} \Theta_3^{(2,4)} - \frac{3\tilde{g}}{2} \Theta_3^{(4,4)} + 4\Theta_4^{(4,2)} - 4\tilde{g}\Theta_4^{(4,4)} + \tilde{g}^2 \Theta_4^{(4,6)} \right) + q_y^2 \left(-(1 + \tilde{g}) \Theta_3^{(2,2)} + \frac{5\tilde{g}}{2} \Theta_3^{(2,4)} - \frac{3\tilde{g}}{2} \Theta_3^{(2,6)} + 4(1 + \tilde{g})^2 \Theta_4^{(2,4)} - 4\tilde{g}(1 + \tilde{g}) \Theta_4^{(2,6)} + \tilde{g}^2 \Theta_4^{(2,8)} \right) \right\} \quad (\text{E.11b})$$

$$I_c = I_b + \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{\tilde{g}^2 dk}{k} \left\{ q_x^2 \left(-\frac{3}{2} \Theta_2^{(2,2)} - 2\Theta_3^{(2,2)} + 2\Theta_3^{(4,2)} + \tilde{g}\Theta_3^{(2,4)} - \tilde{g}\Theta_3^{(4,4)} + \frac{3}{2} \Theta_2^{(4,2)} \right) + q_y^2 \left(-\frac{3}{2} \Theta_2^{(2,2)} - 2(1 + \tilde{g}) \Theta_3^{(2,2)} + (2 + 3\tilde{g}) \Theta_3^{(2,4)} - \tilde{g}\Theta_3^{(2,6)} + \frac{3}{2} \Theta_2^{(2,4)} \right) \right\} \quad (\text{E.11c})$$

Alle Winkelintegrale sind an der Stelle $\Theta_\rho^{(n,m)}(\tilde{g}, \tilde{h})$ auszuwerten, wo $\tilde{g} = G/k$ und $\tilde{h} = H/k^2$. Die Auswertung der Ergebnisse kann man aufgrund der Länge¹ nur mit einem Programm für symbolische Mathematik auswerten. Der Grenzfall $G \rightarrow 0$ der Integrale kann aber analytisch überprüft werden.

E.4 Ergänzungen zum Vortex-Modell

Im weiteren wird skizziert wie man in Abschnitt 4.8 von Gl. (4.160) zu Gl. (4.161) gelangt. Für den Anteil der Austauschwechselwirkung muss das folgende Integral berechnet werden

$$I_E(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{1/L}^\Lambda p dp \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{-ipr \cos \varphi}}{p^2} \equiv \bar{I}_E(r) + I_E(0), \quad (\text{E.12})$$

wo r der Abstand zwischen den Vortizes ist und $\bar{I}_E(r) = I_E(r) - I_E(0)$. Da das Integral IR-divergent ist und für $r = 0$ auch UV-divergent, wird der Cutoff Λ als UV-Regulator und die inverse Gitterausdehnung als IR-Regulator benutzt. Das Integral wurde bereits in Anhang C.1 berechnet, mit dem Ergebnis

$$\bar{I}_E(r) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln(\Lambda r) + \text{const} \quad (\text{E.13a})$$

$$I_E(0) = \frac{1}{2\pi} \ln(\Lambda L). \quad (\text{E.13b})$$

Für den dipolaren Anteil muss folgendes Integral betrachtet werden

$$I_D^{\alpha\beta}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{1/L}^\infty p dp \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ipr \cos \varphi} \frac{v^\alpha(\varphi)v^\beta(\varphi)}{p^3} \equiv \bar{I}_D^{\alpha\beta}(r) + I_D^{\alpha\beta}(0), \quad (\text{E.14})$$

wo die Winkelfunktionen \cos und \sin zur Vereinfachung der Schreibweise als v^1 und v^2 bezeichnet wurden. Da das Integral UV-konvergent ist braucht man hier keinen UV-Regulator. Zunächst wird das Verhalten bei $r=0$ untersucht

$$I_D^{\alpha\beta}(0) = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{4\pi} \int_{1/L}^\infty \frac{dp}{p^2} = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{4\pi} L. \quad (\text{E.15})$$

Es verbleibt

$$\bar{I}_D^{\alpha\beta}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p dp \int_0^{2\pi} d\varphi (e^{-ipr \cos \varphi} - 1) \frac{v^\alpha(\varphi)v^\beta(\varphi)}{p^3} \quad (\text{E.16})$$

zu bestimmen. Wie man durch Entwicklung der Exponentialfunktion und Integration über die Winkelfunktionen sieht, ist dieses Integral auch im IR-Bereich konvergent. Deshalb

¹Jedes Winkelintegral $\Theta_\rho^{(n,m)}$ stellt bereits für sich eine komplizierte Funktion dar (außer in den einfachsten Fällen).

wird auch der IR-Regulator $1/L$ nicht mehr benötigt. Führt man nun die Substitution $u=pr$ durch so folgt

$$\bar{I}_D^{\alpha\beta}(r) = r \bar{I}_0^{\alpha\beta}, \quad \bar{I}_0^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \int_0^{2\pi} d\varphi (e^{-iu \cos \varphi} - 1) v^\alpha(\varphi) v^\beta(\varphi). \quad (\text{E.17})$$

Mit Hilfe der berechneten Integrale kann nun (4.160) ausgewertet werden. Im dipolaren Anteil werden die konstanten Tensoren $C^{\alpha\beta}$ und $\bar{I}_0^{\alpha\beta}$ kontrahiert und mit anderen Konstanten zum Wert α zusammengefasst. Entsprechend wird eine Konstante α' für den Anteil $I_D^{\alpha\beta}(0)$ definiert. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_i, \mathbf{x}_i) = & -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} q_i q_j \left(2\pi J \ln \left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{a} \right) + G\alpha |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \right) + \mu \sum_i q_i^2 \\ & + \left(\sum_i q_i \right) \left(J\pi \ln \frac{L}{a} + \alpha' GL \right). \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Aus Stabilitätsgründen ist klar, dass die Konstante α' positiv ist. Wie beim reinen Austauschsystem muss deshalb für ein unbegrenzt ausgedehntes System die Ladungsneutralität

$$\sum_i q_i = 0 \quad (\text{E.19})$$

erfüllt sein. Das chemische Potential in Gl. (E.18) ergibt sich aus den endlichen Beiträgen zum Integral \bar{I} , welche im Rahmen einer genaueren Analyse bestimmt werden müssten.

Literaturverzeichnis

- [1] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [2] L. Néel, J. Phys. Rad. **15**, 376 (1954).
- [3] R. A. Pelcovits and D. R. Nelson, Phys. Lett. A **57**, 23 (1976).
- [4] M. Bander and D. L. Mills, Phys. Rev. B **38**, 12015 (1988).
- [5] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and L. Peliti, Annals of Physics **116**, 1 (1978).
- [6] S. B. Khokhlachev, Sov. Phys. JETP **43**, 137 (1976).
- [7] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
- [8] V. L. Berezinskiĭ, Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1971).
- [9] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
- [10] C. Kawabata and K. Binder, Solid State Commun. **22**, 705 (1977).
- [11] S. T. Bramwell and P. C. W. Holdsworth, J. Phys.: Condensed Matter **5**, L53 (1993).
- [12] J. Tobochnik and G. V. Chester, Phys. Rev. B **20**, 3761 (1979).
- [13] S. T. Bramwell and P. C. W. Holdsworth, Phys. Rev. B **49**, 8811 (1994).
- [14] V. L. Pokrovskiĭ and M. V. Feĭgelman, Sov. Phys. JETP **45**, 291 (1977).
- [15] S. V. Maleev, Sov. Phys. JETP **43**, 1240 (1976).
- [16] R. A. Pelcovits and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **19**, 4614 (1979).
- [17] M. V. Feĭgelman, Sov. Phys. JETP **49**, 395 (1979).
- [18] J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **7**, 1046 (1974).
- [19] J. V. Jose, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, and D. R. Nelson, Phys. Rev. B **16**, 1217 (1977).
- [20] P. J. Jensen and K. H. Bennemann, Phys. Rev. B **42**, 849 (1990).
- [21] A. Moschel and K. D. Usadel, Phys. Rev. B **49**, 12868 (1994).

-
- [22] A. Moschel and K. D. Usadel, *Phys. Rev. B* **51**, 16111 (1995).
- [23] Y. Millev and J. Kirschner, *Phys. Rev. B* **54**, 4137 (1996).
- [24] R. P. Erickson and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **44**, 11825 (1991).
- [25] R. P. Erickson and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **46**, 861 (1992).
- [26] A. P. Levanyuk and N. Garcia, *J. Phys.: Condensed Matter* **4**, 10277 (1992).
- [27] P. Fröbrich, P. J. Jensen, and P. J. Kuntz, *Eur. Phys. J. B* **13**, 477 (2000).
- [28] P. Fröbrich, P. J. Jensen, P. J. Kuntz, and A. Ecker, *Eur. Phys. J. B* **18**, 579 (2000).
- [29] M. G. Tetel'man, *Sov. Phys. JETP* **71**, 558 (1990).
- [30] D. Pescia and V. L. Pokrovskii, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2599 (1990).
- [31] P. Politi, A. Rettori, and M. G. Pini, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1183 (1993).
- [32] A. P. Levanyuk and N. Garcia, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1184 (1993).
- [33] P. Politi, A. Rettori, M. Pini, and D. Pescia, *J. Magn. Magn. Mat.* **140-144**, 647 (1995).
- [34] S. T. Chui, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3896 (1995).
- [35] A. B. MacIsaac, J. P. Whitehead, K. De'Bell, and P. H. Poole, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 739 (1996).
- [36] A. B. MacIsaac, K. De'Bell, and J. P. Whitehead, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 616 (1998).
- [37] T. Garel and S. Doniach, *Phys. Rev. B* **26**, 325 (1982).
- [38] Y. Yafet and E. M. Gyorgy, *Phys. Rev. B* **38**, 9145 (1988).
- [39] R. Czech and J. Villain, *J. Phys.: Condensed Matter* **1**, 619 (1989).
- [40] B. Kaplan and G. A. Gehring, *J. Magn. Magn. Mat.* **128**, 111 (1993).
- [41] M. B. Taylor and B. L. Gyoffry, *J. Phys.: Condensed Matter* **5**, 4527 (1993).
- [42] A. B. MacIsaac, J. P. Whitehead, M. C. Robinson, and K. De'Bell, *Phys. Rev. B* **51**, 16033 (1995).
- [43] A. B. Kashuba and V. L. Pokrovskii, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3155 (1993).
- [44] A. B. Kashuba and V. Pokrovskii, *Phys. Rev. B* **48**, 10335 (1993).
- [45] A. Abanov, V. Kalatsky, V. L. Pokrovskii, and W. M. Saslow, *Phys. Rev. B* **51**, 1023 (1995).
- [46] R. J. Birgeneau, H. J. Guggenheim, and G. Shirane, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 720 (1969).

- [47] R. J. Birgeneau, H. J. Guggenheim, and G. Shirane, *Phys. Rev. B* **1**, 2211 (1970).
- [48] I. Yamada, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 979 (1972).
- [49] K. Hirakawa and H. Ikeda, *J. Phys. Soc. Japan* **35**, 1328 (1973).
- [50] L. J. de Jongh and A. R. Miedema, *Advances in Physics* **23**, 1 (1974).
- [51] V. L. Pokrovskii and G. V. Uimin, *Sov. Phys. JETP* **38**, 847 (1974).
- [52] V. L. Berezinskii and A. Y. Blank, *Sov. Phys. JETP* **37**, 369 (1973).
- [53] S. Hikami and T. Tsuneto, *Prog. Theor. Phys.* **63**, 387 (1980).
- [54] U. Gradmann, in *Magnetism in ultrathin transition metal films*, Vol. 7 of *Handbook of Magnetic Materials*, edited by K. H. J. Buschow (North-Holland, Amsterdam, 1993), Chap. 1, p. 2.
- [55] R. Allenspach, *J. Magn. Magn. Mat.* **129**, 160 (1994).
- [56] K. De'Bell, A. B. MacIsaac, and J. P. Whitehead, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 225 (2000).
- [57] D. P. Pappas, C. R. Brundle, and H. Hopster, *Phys. Rev. B* **45**, 8169 (1992).
- [58] Z. Q. Qiu, J. Pearson, and S. D. Bader, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1006 (1993).
- [59] M. Farle, W. Platow, A. N. Anisimov, P. Pouloupoulos, and K. Baberschke, *Phys. Rev. B* **56**, 5100 (1997).
- [60] A. Hucht and K. D. Usadel, *Phys. Rev. B* **55**, 12309 (1997).
- [61] T. Herrmann, M. Potthoff, and W. Nolting, *Phys. Rev. B* **58**, 831 (1998).
- [62] R. Allenspach and A. Bischof, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3385 (1992).
- [63] H. J. Elmers, J. Hausschild, G. H. Liu, and U. Gradmann, *J. Appl. Phys.* **79**, 4984 (1996).
- [64] K. De'Bell and D. J. W. Geldart, *Phys. Rev. B* **39**, 743 (1989).
- [65] A. B. Kashuba, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2264 (1994).
- [66] A. Kashuba, A. Abanov, and V. L. Pokrovskii, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2554 (1996).
- [67] A. Abanov, A. Kashuba, and V. L. Pokrovskii, *Phys. Rev. B* **56**, 3181 (1997).
- [68] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena, second edition* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
- [69] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **59**, 79 (1975).
- [70] E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 691 (1976).

-
- [71] E. Brézin and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **14**, 3110 (1976).
- [72] E. Brézin, J. Zinn-Justin, and J. C. L. Guillou, Phys. Rev. B **14**, 4976 (1976).
- [73] E. Brézin, J. Zinn-Justin, and J. C. L. Guillou, Phys. Rev. D **14**, 2615 (1976).
- [74] D. R. Nelson and R. A. Pelcovits, Phys. Rev. B **16**, 2191 (1977).
- [75] F. David, Commun. Math. Phys. **81**, 149 (1981).
- [76] D. J. Amit and G. B. Kotliar, Nucl. Phys. B **170**, 187 (1980).
- [77] E. Brezin, J. C. L. Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Field Theoretical Approach to Critical Phenomena*, Vol. 6 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic Press, London, 1976), Chap. 3, pp. 127–247.
- [78] E. Brézin, D. J. Wallace, and K. G. Wilson, Phys. Rev. B **7**, 232 (1973).
- [79] D. J. Wallace and R. K. P. Zia, Phys. Rev. B **12**, 5340 (1975).
- [80] D. R. Nelson, Phys. Rev. B **13**, 2222 (1976).
- [81] U. C. Täuber, Doktorarbeit, Technische Universität München, 1992.
- [82] G. F. Mazenko, Phys. Rev. B **14**, 3933 (1976).
- [83] D. J. Amit and Y. Y. Goldschmidt, Annals of Physics **114**, 356 (1977).
- [84] I. D. Lawrie, J. Phys. A: Math. Gen. **14**, 2489 (1981).
- [85] I. D. Lawrie, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 1141 (1985).
- [86] R. G. Bowers and G. S. Joyce, Phys. Rev. Lett. **19**, 630 (1967).
- [87] H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **20**, 589 (1968).
- [88] M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **23**, 861 (1969).
- [89] F. Wegner, Z. Physik **206**, 465 (1967).
- [90] H. E. Stanley and T. A. Kaplan, Phys. Rev. Lett. **17**, 913 (1966).
- [91] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and G. Grinstein, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 585 (1980).
- [92] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [93] J. Sak, Phys. Rev. B **15**, 4344 (1977).
- [94] M. E. Fisher, S. Ma, and B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett. **29**, 917 (1972).
- [95] J. Sak, Phys. Rev. B **8**, 281 (1973).

-
- [96] E. Brézin, J. Zinn-Justin, and J. C. L. Guillou, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, L119 (1976).
- [97] A. Aharony and M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **8**, 3323 (1973).
- [98] A. Aharony and M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **8**, 3342 (1973).
- [99] P. G. Maier, Diplomarbeit, Technische Universität München, 1998.
- [100] J. Zinn-Justin, in *Renormalization of Gauge Theories*, Vol. 37 of *Lecture Notes in Physics*, edited by H. Rollnik and K. Dietz (Springer Verlag, Berlin, 1975), pp. 2–39.
- [101] L. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 6 ed. (Academic Press, London, 2000).
- [102] Y. L. Luke, *Mathematical functions and their approximations* (Academic Press, London, 1975).
- [103] E. Frey and F. Schwabl, *Advances in Physics* **43**, 577 (1994).
- [104] I. D. Lawrie, *Phys. Rev. B* **8**, 3323 (1973).
- [105] J. M. Ziman, *Principles of the theory of solids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1964).
- [106] M. Born and K. Huang, *Dynamical theory of crystal lattices* (Clarendon Press, Oxford, 1954).
- [107] C. Pich, Doktorarbeit, Technische Universität München, 1994.