

Technische Universität München

Max-Planck-Institut für Physik
(Werner-Heisenberg-Institut)

Zweischleifen-Beiträge zum elektroschwachen Mischungswinkel

Ulrich Meier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik
der Technischen Universität München
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender : Univ.-Prof. Dr. L. Oberauer

Prüfer der Dissertation : 1. Hon.-Prof. Dr. W. F. L. Hollik
2. Univ.-Prof. Dr. A. J. Buras

Die Dissertation wurde am 28. 09. 2006
bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Physik am 16. 11. 2006 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Das elektroschwache Standardmodell	9
2.1	Klassische Lagrangedichte	9
2.1.1	Eichfelder	10
2.1.2	Fermionen	10
2.1.3	Higgsfeld	11
2.1.4	Yukawakopplungen	11
2.1.5	Elektroschwacher Mischungswinkel	12
2.2	Lagrangedichte der Quantentheorie	13
2.3	Regularisierung	14
2.3.1	Definition von γ_5 in dimensionaler Regularisierung	15
2.3.2	Infrarot Divergenzen	16
2.4	On-Shell-Renormierung des Standardmodells	17
2.4.1	Einschleifen-Renormierung	20
2.4.2	Zweischleifen-Renormierung	22
2.4.3	Komplexe Polmasse und experimentell gemessene Masse	25
3	Myon-Zerfall und W-Masse	27

4	Z-Resonanz und effektiver leptonischer Mischungswinkel	29
4.1	Bornnäherung	29
4.2	Z-Pol Approximation	30
4.3	Effektiver leptonischer Mischungswinkel	30
4.4	Experimenteller und theoretischer Status	31
4.5	Elektroschwache Zweischleifen-Beiträge	31
5	Der renormierte $Z\bar{l}l$-Vertex bei verschwindendem äußeren Impuls	35
5.1	Rechenmethoden	35
5.2	Besonderheiten bei der Berechnung von $\hat{\Gamma}_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0)$	37
5.2.1	Lepton-Feldrenormierungskonstanten	37
5.2.2	Dreiecksdiagramm mit zwei Photonen	37
5.2.3	IR -divergente Diagramme	37
6	IR-endliche Zweischleifen-Vertices	39
6.1	V^{141} -Diagramme	40
6.2	V^{221} -, V^{231} -, V^{222} -, und V^{131} -Diagramme	42
6.2.1	Berechnung von V^{221}	43
6.2.2	Berechnung von V^{231}	45
6.2.3	Berechnung von V^{222}	47
6.2.4	Berechnung von V^{131}	48
7	IR-divergente Zweischleifen-Vertices	51
7.1	Fermionische Beiträge	51
7.2	Bosonische Beiträge	53
7.2.1	Kollineare Divergenzen	53
7.2.2	Überlappende Divergenzen	63

8	Ergebnisse	71
8.1	Fermionische Beiträge	71
8.2	Bosonische Beiträge	79
8.2.1	Higgs-Massen-Abhängigkeit	79
8.2.2	Vollständige bosonische Korrekturen	81
8.3	Gesamtergebnis	82
9	Zusammenfassung	87
A	Zweischleifen-Diagramme	89
A.1	VV -Selbstenergie	90
A.2	ee -Selbstenergie	95
A.3	$Z\bar{e}e$ -Vertex	96
B	Vertex- und Selbstenergiefamilien	99

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Einleitung

Ziel der Elementarteilchenphysik ist die Beschreibung der grundlegenden Bausteine der Natur und ihrer Wechselwirkungen. Das Standardmodell der Teilchenphysik [1–4] beschreibt die elektroschwache und die starke Wechselwirkung im Rahmen einer relativistischen Quantenfeldtheorie. Es steht im Einklang mit allen bisherigen Ergebnissen von Beschleunigerexperimenten und beinhaltet neben den bisher direkt nachgewiesenen Teilchen nur einen weiteren Baustein, das sogenannte Higgs-Boson. So steht an zukünftigen Beschleunigerexperimenten die direkte Suche nach dem Higgs-Boson sowie nach neuen Teilchen, deren Entdeckung ein Beweis für Physik jenseits des Standardmodells wäre, im Vordergrund.

Ein weiteres wichtiges Werkzeug bei der Suche nach bisher unbekanntem Teilchen stellt die Analyse von Präzisionsobservablen dar. Die theoretischen Vorhersagen für diese Größen hängen über Quantenkorrekturen von allen Parametern der zugrundeliegenden Theorie ab, insbesondere also auch von den bisher experimentell nicht direkt zugänglichen. Ein Vergleich der theoretischen Vorhersagen mit den experimentellen Ergebnissen liefert somit Einschränkungen an die Masse des Higgs-Bosons sowie an die Eigenschaften von eventuell vorhandenen weiteren Teilchen, wie sie typischerweise in Erweiterungen des Standardmodells auftreten. Ein Beispiel für den Erfolg dieses Verfahrens war die Entdeckung des top-Quarks [5], dessen Masse mit der indirekten Vorhersage aus Präzisionsobservablen übereinstimmt.

Der effektive leptonische Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$, der eng mit der Physik der Z -Resonanz verknüpft ist, stellt eine Schlüsselobservable bei dieser indirekten Suche nach neuen Teilchen dar. An Elektron-Positron-Beschleunigern kann der Prozess der Lepton-Paarproduktion auf der Z -Resonanz sehr gut durch das Konzept der effektiven Kopplungen beschrieben werden. Dabei bewirken die Quantenkorrekturen zu diesem Prozess eine Änderung der Kopplungskonstanten des Vektor- und des Axialvektorstroms. Der effektive Mischungswinkel wird über das Verhältnis dieser Kopplungen definiert. Er kann experimentell aus Messungen der Asymmetrien der Z -Resonanz bestimmt werden.

Die theoretische Vorhersage des Standardmodells für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ hängt sensitiv von der Masse des Higgs-Bosons ab. Eine genauere theoretische Vorhersage für diese Größe liefert also bessere indirekte Schranken an die Higgs-Masse. Insbesondere an LEP1 wurde $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ experimentell sehr genau bestimmt. Der aktuelle Wert beträgt $\sin^2 \theta_{\text{eff}} = 0.23153 \pm 0.00016$ [6]. Von zukünftigen Beschleunigerexperimenten werden weitere Verbesserungen in der Präzision erwartet. So könnte am ILC im GigaZ-Modus eine Genauigkeit von 1.3×10^{-5} erreicht werden [7,8]. Für eine vergleichbare theoretische Genauigkeit werden mindestens die vollständigen elektroschwachen Zweischleifen-Korrekturen benötigt.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung dieser Korrekturen. In Kapitel 2 wird daher zunächst das elektroschwache Standardmodell vorgestellt, die Begriffe der Regularisierung und der Renormierung erläutert sowie die in dieser Rechnung benötigten Renormierungskonstanten auf Ein- und Zweischleifen-Niveau abgeleitet.

Da die Masse des W -Bosons in $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ eingeht, wird in Kapitel 3 der Myonzerfall beschrieben und daraus die W - Z -Massenrelation abgeleitet. Diese erlaubt es die W -Masse aus der Fermikonstante und den Quantenkorrekturen zum Myonzerfall zu bestimmen.

In Kapitel 4 wird das Konzept der effektiven Kopplungen zur Beschreibung der Z -Resonanz eingeführt und der effektive Mischungswinkel definiert. Des Weiteren wird ein Überblick über den experimentellen und theoretischen Status dieser Größe gegeben.

Die Kapitel 5, 6 und 7 werden die in dieser Arbeit verwendeten Rechenmethoden beschrieben. Bei der Berechnung von $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ tritt neben der Zweischleifen-Renormierung noch die technische Schwierigkeit der Berechnung von Zweischleifen-Vertexfunktionen auf. In Kapitel 5 werden die Methoden zur Berechnung der Renormierungskonstanten auf Zweischleifen-Niveau erläutert, während sich Kapitel 6 mit der Berechnung Infrarot-endlicher und Kapitel 7 mit der Berechnung Infrarot-divergenter Zweischleifen-Vertexfunktionen befasst.

In Kapitel 8 werden die mit diesen Methoden erhaltenen Ergebnisse für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ diskutiert.

Anhang A enthält die in dieser Arbeit benötigten Zweischleifen-Feynmandiagramme und Anhang B erklärt die verwendete Terminologie für die Topologien von Zweischleifen-Vertices.

Kapitel 2

Das elektroschwache Standardmodell

2.1 Klassische Lagrangedichte

Das Standardmodell beschreibt die elektroschwache Wechselwirkung im Rahmen einer spontan gebrochenen Eichsymmetrie. Hierbei werden die fermionischen Elementarteilchen in der fundamentalen Darstellung der Gruppe $SU(2) \times U(1)$ angeordnet,

$$L_i^L = \begin{pmatrix} \nu_i^L \\ l_i^L \end{pmatrix}, \quad Q_i^L = \begin{pmatrix} u_i^L \\ d_i^L \end{pmatrix}, \quad l_i^R, \quad u_i^R, \quad d_i^R. \quad (2.1)$$

Der Familienindex i läuft von 1 bis 3. L_i^L , Q_i^L , l_i^R , u_i^R und d_i^R bezeichnen die links- bzw. rechtshändigen Leptonen und Quarks.

Die obigen Teilchen können durch die Quantenzahlen des schwachen Isospins I und I^3 , sowie der schwachen Hyperladung Y klassifiziert werden. Die Hyperladung wird so gewählt, dass sich für jedes Teilchen die korrekte elektrische Ladung Q aus der Gell-Mann-Nishijima-Relation,

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} \quad (2.2)$$

ergibt.

Indem man $SU(2) \times U(1)$ als Gruppe der Eichtransformationen auffasst, unter der die Lagrangedichte invariant ist, kann diese Struktur in eine eichinvariante Feldtheorie eingebettet werden. Um Massen für die Eichbosonen zu generieren, muss diese Symmetrie spontan gebrochen werden. Dies geschieht im Standardmodell durch den Higgs-Mechanismus [9]. Des Weiteren werden Fermionmassen durch Kopplungen des Higgs-Feldes an die Fermionen, den Yukawa-Kopplungen, erzeugt.

Damit setzt sich die klassische Lagrangedichte aus dem Yang-Mills-, dem Fermion-, dem Higgs- sowie dem Yukawaanteil zusammen,

$$\mathcal{L}_{\text{Klass}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{Ferm}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}, \quad (2.3)$$

die in den folgenden Abschnitten 2.1.1 - 2.1.4 beschrieben werden.

2.1.1 Eichfelder

Den Generatoren der $SU(2)$, I^1 , I^2 und I^3 , werden die Eichfelder W_μ^1 , W_μ^2 und W_μ^3 zugeordnet. Die $SU(2)$ -Kopplungskonstante wird mit g_2 , das Eichfeld und die Kopplungskonstante der $U(1)$ mit B_μ und g_1 bezeichnet.

Mit den Feldstärketensoren

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.4)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2.5)$$

ergibt sich der Yang-Mills-Anteil der klassischen Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Fermionen

Mit den fermionischen Quantenzahlen I^a und Y aus (2.1) und (2.2) lautet die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \left(\partial_\mu - i g_2 I^a W_\mu^a + i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right), \quad (2.7)$$

und der fermionische Teil der Lagrangedichte ergibt sich zu

$$\mathcal{L}_{\text{Ferm}} = \bar{L}_L i \gamma_\mu D^\mu L_L + \bar{Q}_L i \gamma_\mu D^\mu Q_L + \bar{l}_R i \gamma_\mu D^\mu l_R + \bar{u}_R i \gamma_\mu D^\mu u_R + \bar{d}_R i \gamma_\mu D^\mu d_R. \quad (2.8)$$

Neben den kinetischen Termen der Fermionen enthält er Wechselwirkungsterme zwischen Fermionen und Eichbosonen.

2.1.3 Higgsfeld

Um Massen für das W - und das Z -Boson, aber nicht für das Photon zu generieren, muss die $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie derart gebrochen werden, dass die elektromagnetische $U(1)$ -Untergruppe ungebrochen bleibt. Dazu wird im Standardmodell ein skalares $SU(2)$ -Dublett mit Hyperladung $Y = 1$ eingeführt,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Im Higgs-Anteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.10)$$

wird die Higgs-Selbstwechselwirkung als

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \mu^2, \lambda > 0, \quad (2.11)$$

gewählt, wobei der Massenparameter μ^2 und die Kopplungskonstante λ eingeführt werden. Damit erhält das Feld Φ einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEW)

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v = \frac{2\mu}{\lambda}. \quad (2.12)$$

Das Feld (2.9) kann folgendermassen parametrisiert werden,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix}, \quad \phi^-(x) := [\phi^+(x)]^\dagger, \quad (2.13)$$

so dass die Komponentenfelder Φ^+ , H und χ verschwindende VEW haben. H und χ sind dabei reelle Felder. Die Felder Φ^+ und χ können durch eine Eichtransformation beseitigt werden und sind damit unphysikalisch. Dagegen beschreibt das Feld $H(x)$ ein physikalisches, neutrales skalares Teilchen der Masse

$$M_H = \sqrt{2}\mu. \quad (2.14)$$

2.1.4 Yukawakopplungen

Die Massen der geladenen Fermionen werden durch Yukawa-Kopplungen des Higgs-Felds an die Fermion-Felder erzeugt,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{\text{Familien}} \left(g_l \bar{L}^L l^R \Phi + g_u \bar{Q}^L u^R \tilde{\Phi} + g_d \bar{Q}^L d^R \Phi + \text{h.k.} \right). \quad (2.15)$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\Phi} = ((\Phi^0)^*, -\Phi^-)^T$ das ladungskonjugierte Higgsdublett. g_l , g_u und g_d sind die Yukawa-Kopplungskonstanten für Leptonen, up-artige Quarks und down-artige Quarks. Effekte der Quarkmischung, die durch die CKM-Matrix beschrieben werden, spielen in dieser Arbeit keine Rolle und wurden deshalb in (2.15) nicht berücksichtigt.

Damit ergeben sich die Fermionmassen zu

$$m_f = g_f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.16)$$

Die Kopplung zwischen Fermionen und Higgsfeld ist also proportional zur Teilchenmasse.

2.1.5 Elektroschwacher Mischungswinkel

Aus den Eichfeldern W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) und B_μ erhält man die folgenden Massen- und Ladungseigenzustände,

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [W_\mu^1 \mp i W_\mu^2], \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Der elektroschwache Mischungswinkel θ_W ist über die Relationen

$$\begin{aligned} \cos \theta_W &=: c_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{M_W}{M_Z}, \\ \sin^2 \theta_W &=: s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

mit den Massen des Z - und des W -Bosons verknüpft. Letztere ist gegeben durch

$$M_W = \frac{g_2}{2} v. \quad (2.20)$$

Die Kopplung des Z -Bosons an Fermionen in (2.8) lautet

$$\Gamma_{Z\bar{f}f}^\mu = \gamma^\mu [g_v^f - g_a^f \gamma_5]. \quad (2.21)$$

mit der Vektor- und der Axialvektorkopplung

$$g_v^f = \frac{I^3 - 2Q s_W^2}{2 s_W c_W}, \quad g_a^f = \frac{I^3}{2 s_W c_W}. \quad (2.22)$$

Für Leptonen folgt aus (2.22) die Relation

$$\sin^2 \theta_W = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{g_v^l}{g_a^l} \right), \quad (2.23)$$

über die der elektroschwache Mischungswinkel auch in höheren Ordnungen Störungstheorie definiert werden kann (siehe Kapitel 4).

Während die Eichbosonen W_μ^\pm und Z_μ massiv sind, bleibt das A_μ masselos und kann daher mit dem Photon identifiziert werden, das über die elektrische Ladung e an das Elektron koppelt. Daraus folgen die Relationen

$$e = g_2 s_W = g_1 c_W, \quad (2.24)$$

die es zusammen mit (2.12), (2.14), (2.16) und (2.20) erlauben, den ursprünglichen Satz von Parametern g_1 , g_2 , λ , μ^2 und g_f durch den äquivalenten Satz e , M_W , M_Z , M_H und m_f zu ersetzen, wobei jede der letzteren Größen prinzipiell direkt messbar ist. Anstelle der W -Masse wird oft die Fermikonstante G_μ verwendet, die die effektive 4-Fermion-Kopplung im Fermimodell [10] beschreibt und in niedrigster Ordnung Störungstheorie durch die Korrelation

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) M_W^2} \quad (2.25)$$

mit M_W und M_Z verknüpft ist (siehe Kapitel 3).

2.2 Lagrangedichte der Quantentheorie

Die Invarianz der klassischen Lagrangedichte unter Eichtransformationen führt zu unphysikalischen Freiheitsgraden der Eichbosonen, die bei der Quantisierung der Theorie zu Schwierigkeiten führen. Daher wird der Lagrangedichte ein Eichfixierungsterm hinzugefügt. Oft wählt man die 't Hooft- oder R_ξ -Eichung [11], in der der Eichfixierungsterm folgende Form hat,

$$\mathcal{L}_{\text{Fix}} = -\frac{1}{2} (F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2 F_+ F_-) \quad (2.26)$$

mit

$$\begin{aligned} F_\pm &= \frac{1}{\sqrt{\xi^W}} (\partial^\mu W_\mu^\pm \mp i M_W \xi^W \phi^\pm), \\ F_Z &= \frac{1}{\sqrt{\xi^Z}} (\partial^\mu Z_\mu - M_Z \xi^Z \chi), \\ F_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\xi^\gamma}} \partial^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (2.27)$$

In dieser Arbeit wird ein Spezialfall der R_ξ -Eichung, die Feynmaneichung $\xi^{Z,W,\gamma} = 1$, verwendet, in der die Propagatoren der Vektorboson proportional zur Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu}$ sind.

Um die unphysikalischen Beiträge aus den Eichfeldern in \mathcal{L}_{Fix} zu kompensieren, muss zur Lagrangedichte noch der Fadeev-Popov-Term [12]

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \bar{u}^a(x) \frac{\partial F^a(x)}{\partial \theta^b(y)} u^b(y) \quad (2.28)$$

addiert werden. Dabei sind u^γ , u^Z und u^\pm Geisterfelder sowie $\frac{\partial F^a(x)}{\partial \theta^b(y)}$ die Änderungen der Eichfixierungsterme (2.27) unter infinitesimalen Eichtransformationen.

Die gesamte Lagrangedichte der quantisierten Theorie lautet damit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Klass}} + \mathcal{L}_{\text{Fix}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}. \quad (2.29)$$

2.3 Regularisierung

In höheren Ordnungen der Störungstheorie treten Diagramme mit geschlossenen Schleifen auf, die Integrale über die Schleifenimpulse enthalten. Diese Integrale sind im Allgemeinen divergent für große Integrationsimpulse (*UV*-divergent). Daher benötigt man eine Vorschrift, die diese Integrale in endliche und mathematisch wohldefinierte überführt. Eine solche Vorschrift nennt man ein Regularisierungsschema. Bei Berechnungen innerhalb von Eichtheorien benutzt man häufig das Verfahren der dimensionale Regularisierung [13], das gleichzeitig Lorentz- und eichinvariant ist. Die Idee besteht darin, dass man die Raum-Zeit-Dimension 4 durch eine kleinere Dimension D ersetzt, in der die auftretenden Integrale konvergent sind,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^4}. \quad (2.30)$$

μ ist ein beliebiger Massenparameter, der bewirkt, dass die Massendimension des Integrals erhalten bleibt. Nach der Regularisierung erhält man das endliche Ergebnis für physikalische Größen durch den Grenzübergang $D \rightarrow 4$.

Der D -dimensionale metrische Tensor hat die Eigenschaft

$$g_\mu^\mu = \text{Tr}[\mathbb{1}] = D, \quad (2.31)$$

und die Dirac Algebra verallgemeinert sich in D -Dimensionen zu

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (2.32)$$

Die Definition von γ_5 in D -Dimensionen wird im folgenden Abschnitt 2.3.1 behandelt.

2.3.1 Definition von γ_5 in dimensionaler Regularisierung

Die Algebra der γ_5 -Matrix ist in vier Dimensionen definiert durch die Relationen

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (2.33)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.34)$$

Diese beiden Relationen lassen sich nicht gleichzeitig konsistent auf beliebige Dimensionen D verallgemeinern [13].

Falls eine Vorschrift zur Behandlung von γ_5 Symmetrien bricht, also die Slavnov-Taylor(ST)-Identitäten der Theorie verletzt, kann diese eventuell durch die Einführung von zusätzlichen Countertermen wiederhergestellt werden. Falls dies nicht möglich ist spricht man von anomaler Symmetriebrechung und bezeichnet die Terme, die die Symmetrien brechen, als Anomalien. Aber auch wenn die Symmetrie durch zusätzliche Counterterme restauriert werden kann, können zwei verschiedenen Vorschriften nach dieser Prozedur unterschiedliche Ergebnisse liefern.

In Einschleifen-Rechnungen wird häufig das naiv antikommutierende Schema angewendet, das die Gleichung (2.33) auf D -Dimensionen verallgemeinert, aber (2.34) abändert,

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, D, \quad (2.35)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 0. \quad (2.36)$$

Diese Vorgehen liefert zwar eindeutige Ergebnisse, reproduziert aber nicht den physikalischen Grenzfall $D \rightarrow 4$.

Ein konsistentes Schema zur Behandlung von γ_5 wurde von 't Hooft und Veltmann [13] vorgeschlagen und von Breitenlohner und Maison [14] formalisiert (HVBM-Schema). Die Idee besteht in einer unterschiedlichen Behandlung der ersten vier Dimensionen der γ -Matrizen und der restlichen $D - 4$ Dimensionen. Das Standardmodell mit HVBM-Regularisierung ist anomaliefrei und renormierbar [15].

Im sogenannten gemischten Schema werden die beiden widersprüchlichen Relationen (2.33) und (2.34) simultan in D Dimensionen verwendet. Wegen der mathematischen Inkonsistenz dieses Vorgehens sind Spuren über mindestens vier γ -Matrizen und γ_5 in diesem Schema nur bis auf Terme der Ordnung $(D - 4)$ festgelegt.

Im Standardmodell tritt das γ_5 -Problem vor allem im Zusammenhang mit Dreiecksdiagrammen (siehe Abbildung 2.1a)) auf, die chirale Kopplungen enthalten. Die ST-Identitäten, die Dreiecksdiagramme beinhalten, sind im HVBM-Schema verletzt. Dies erfordert die Einführung zusätzlicher Counterterme, und erschwert somit die Rechnung. Im naiv antikommutierenden Schema sind zwar alle ST-Identitäten direkt erfüllt, jedoch unterscheidet sich das Ergebnis von dem des HVBM-Schemas unter Berücksichtigung der zusätzlichen Counterterme um endliche Terme [16–18]. Das bedeutet, dass das naiv antikommutierende Schema in diesem Fall nicht anwendbar ist. Im gemischten Schema sind ebenfalls alle

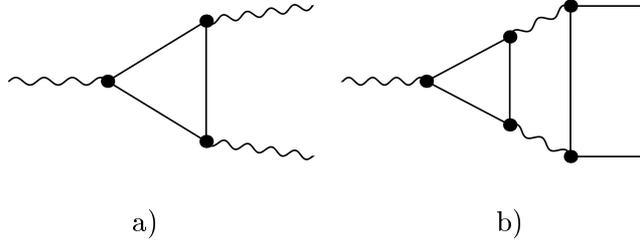


Abbildung 2.1: a) Dreiecksdiagramm b) Dreiecksdiagramm als Unterschleife

ST-Identitäten direkt erfüllt, aber die Unterschiede zwischen diesem Schema und dem HVBM-Schema sind von der Ordnung $(D - 4)$,

$$\Gamma_{2.1a}^{\text{HVBM}} = \Gamma_{2.1a}^{\text{gemischt}} + \mathcal{O}(D - 4), \quad (2.37)$$

und verschwinden somit im Grenzfall $D - 4$. Diese Terme bezeichnet man deshalb als schwindende Terme.

Bei der Berechnung des effektiven leptonischen Mischungswinkel auf Zweischleifen-Niveau treten Dreiecksdiagramme als Unterschleifen in den generischen Diagrammen aus Abbildung 2.1b) auf. Würde ein schwindender Term aus diesen Unterschleifen mit einem $1/(D-4)$ -Pol aus der Schleifenintegration multipliziert, würde dies zu unterschiedlichen Ergebnissen im HVBM- und im gemischten Schema führen. Es wurde jedoch gezeigt [16–18], dass dies für die Diagramme 2.1b) nicht der Fall ist, so dass auch hier die Unterschiede zwischen beiden Schemata von der Ordnung $(D - 4)$ sind,

$$\Gamma_{2.1b}^{\text{HVBM}} = \Gamma_{2.1b}^{\text{gemischt}} + \mathcal{O}(D - 4), \quad (2.38)$$

und damit im physikalischen Grenzfall verschwinden. Damit ergibt sich die Möglichkeit durch das Verwenden des gemischten Schemas mit erheblich geringerem Aufwand dasselbe Ergebnis wie im HVBM-Schema zu erhalten.

2.3.2 Infrarot Divergenzen

Nach Kinoshita [19] gibt es zwei verschiedene Konfigurationen von Infrarot(*IR*)- oder Massen-Singularitäten. *Kollineare* Divergenzen treten demnach auf, wenn sich ein masseloses äußeres Teilchen eines Schleifen-Diagramms in zwei masselose innere Teilchen aufspaltet, während *soft*-Singularitäten sich daraus ergeben, dass zwei äußere (On-Shell) Teilchen ein masseloses Teilchen austauschen. Schließlich können soft- und kollineare Divergenzen überlappen. In Abb. 2.2 findet sich zu diesen drei Fällen jeweils ein Einschleifen-Beispiel.

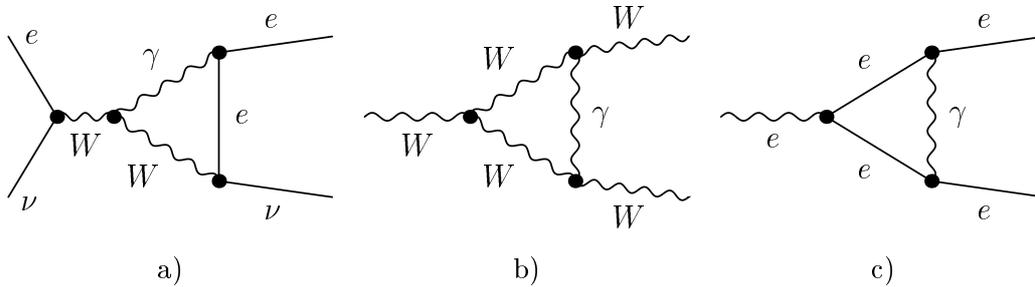


Abbildung 2.2: a) kollineare, b) soft- und c) überlappende Divergenz

Wenn die Teilchen, wie z.B. das Elektron, nicht exakt masselos sind, so treten Logarithmen dieser kleinen Massen auf. Somit können IR -Divergenzen auch für exakt masselose Teilchen dadurch regularisiert werden, dass man eine künstliche Masse für diese Teilchen einführt.

2.4 On-Shell-Renormierung des Standardmodells

Die Lagrangedichte des Standardmodells enthält eine gewisse Anzahl freier Parameter, die nicht von der Theorie festgelegt sind. Die Definition dieser Parameter und ihre Relation zu Messgrößen definieren ein Renormierungsschema. Sie können aus experimentellen Ergebnissen durch den Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen bestimmt werden. Damit können dann theoretische Vorhersagen für weitere Messgrößen gemacht werden, die wiederum durch den Vergleich mit dem Experiment eine Verifikation oder Falsifikation der Theorie ermöglichen.

Die Relationen zwischen den freien Parametern der Theorie und den Meßgrößen unterscheiden sich in unterschiedlichen Ordnungen der Störungstheorie. Da es in höheren Ordnungen, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, nötig ist, ein Regularisierungsverfahren, wie z.B. dimensionale Regularisierung, einzuführen, werden diese Relationen darüber hinaus cutoff-abhängig. Daher haben die ursprünglichen („nackten“) Parameter der Lagrangedichte keine physikalische Bedeutung. Deshalb ersetzt man normalerweise diese nackten Parameter, die im Folgenden mit einem Index „0“ bezeichnet werden, durch endliche renormierte Parameter.

In dieser Arbeit wird das On-Shell-Renormierungsschema [20] mit den Konventionen aus [21] verwendet, das als Parametersatz die Größen e , M_W , M_Z , M_H und m_f verwendet. Die re-

normierten Parameter werden definiert über

$$\begin{aligned}
 M_{W,0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2, \\
 M_{Z,0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2, \\
 M_{H,0}^2 &= M_H^2 + \delta M_H^2, \\
 m_{f_i,0} &= m_{f_i} + \delta m_{f_i}, \\
 e_0 &= (1 + \delta e) e.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Darüber hinaus ist es nützlich, Renormierungskonstanten für die physikalischen Felder zu definieren, da dadurch die Wellenfunktionsrenormierung der externen Teilchen kompensiert werden kann. Feldrenormierungen von inneren Teilchen entfallen zwar in Ergebnissen für physikalische Observablen, sie erlauben es aber, endliche Bausteine der Amplitude, wie zum Beispiel Selbstenergien, zu bilden.

Im Standardmodell definiert man die folgenden Feldrenormierungskonstanten für die physikalischen Felder,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{Z^{ZZ}} & \sqrt{Z^{Z\gamma}} \\ \sqrt{Z^{\gamma Z}} & \sqrt{Z^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \delta Z^{ZZ}} & \sqrt{\delta Z^{Z\gamma}} \\ \sqrt{\delta Z^{\gamma Z}} & \sqrt{1 + \delta Z^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}, \\
 W_0^\pm &= \sqrt{Z^W} W^\pm = \sqrt{1 + \delta Z^W} W^\pm, \\
 H_0 &= \sqrt{Z^H} H = \sqrt{1 + \delta Z^H} H, \\
 f_0^L &= \sqrt{Z_L^f} f^L = \sqrt{1 + \delta Z_L^f} f^L, \\
 f_0^R &= \sqrt{Z_R^f} f^R = \sqrt{1 + \delta Z_R^f} f^R.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Außerdem erweist es sich als günstig auch für die unphysikalischen Felder Renormierungskonstanten einzuführen. Im Geist-Sektor geschieht dies folgendermaßen,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u_0^Z \\ u_0^A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{Z^{ZZ}} & \sqrt{Z^{Z\gamma}} \\ \sqrt{Z^{\gamma Z}} & \sqrt{Z^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^Z \\ u^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \delta Z^{ZZ}} & \sqrt{\delta Z^{Z\gamma}} \\ \sqrt{\delta Z^{\gamma Z}} & \sqrt{1 + \delta Z^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^Z \\ u^A \end{pmatrix}, \\
 u_0^\pm &= \sqrt{Z^W} u^\pm = \sqrt{1 + \delta Z^W} u^\pm,
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

während man im Higgs-Sektor die folgenden Renormierungskonstanten einführt,

$$\begin{aligned}
 \phi_0^\pm &= \sqrt{Z^\phi} \phi^\pm = \sqrt{1 + \delta Z^\phi} \phi^\pm, \\
 \chi_0 &= \sqrt{Z^\chi} \chi = \sqrt{1 + \delta Z^\chi} \chi.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Die Aufteilung (2.39), (2.40) der nackten Parameter in einen endlichen und einen divergenten Anteil ist nicht eindeutig. Eine genaue Fixierung des Renormierungskonstanten legt ein Renormierungsschema fest. Im On-Shell-Renormierungsschema werden die Renormierungskonstanten durch die folgenden Forderungen bestimmt:

- Die Massen-Renormierungskonstanten werden durch die Bedingung festgelegt, dass die Massen der Teilchen gleich den Realteilen der Pole der entsprechenden Propagatoren sein sollen.
- δe wird dadurch festgelegt, dass die Elektronladung mit der des Niederenergiebereiches der klassischen Elektrodynamik (Thomson-Limit) übereinstimmen soll.
- Die Wellenfunktions-Renormierungskonstanten werden durch die Forderungen fixiert, dass die Realteile der Residuen der Propagatoren Eins sein sollen sowie dass die γ - Z -Mischung bei 0 und M_Z^2 verschwinden soll.

Die Propagatoren $D(k^2)$ hängen mit dem Inversen der renormierten einteilchen-irreduziblen Zweipunkt-Funktionen (1PI) $\hat{\Gamma}(k^2)$ zusammen,

$$\begin{aligned}
 D_T^W(k^2) &= - \left(\hat{\Gamma}_T^W(k^2) \right)^{-1}, & D^H(k^2) &= - \left(\hat{\Gamma}^H(k^2) \right)^{-1}, \\
 \begin{pmatrix} D_T^{ZZ}(k^2) & D_T^{Z\gamma}(k^2) \\ D_T^{\gamma Z}(k^2) & D_T^{\gamma\gamma}(k^2) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_T^{ZZ}(k^2) & \hat{\Gamma}_T^{Z\gamma}(k^2) \\ \hat{\Gamma}_T^{\gamma Z}(k^2) & \hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma}(k^2) \end{pmatrix}^{-1}, \\
 D^f(k^2) &= - \left(\hat{\Gamma}^f(k^2) \right)^{-1} =: - \left(\not{k} \omega_- \hat{\Gamma}_L^f(k^2) + \not{k} \omega_+ \hat{\Gamma}_R^f(k^2) + m_f \hat{\Gamma}_S^f(k^2) \right)^{-1}, \\
 \omega_{\pm} &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Der Index T bezeichnet dabei den Transversalteil der Vektorpropagatoren bzw. Zweipunkt-funktionen, der durch die Zerlegung

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k^2) = \Gamma_T^{ab} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \Gamma_L^{ab} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad a, b = \gamma, Z, W, \tag{2.44}$$

definiert ist. Γ_L^{ab} bezeichnet den Longitudinalteil, der für die Ableitung der Renormierungskonstanten nicht benötigt wird. Die 1PI bestehen wiederum aus einem Bornanteil und einem Anteil der Schleifenkorrekturen in den Selbstenergien $\hat{\Sigma}$,

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_T^{ab}(k^2) &= -i \left((k^2 - M_a^2) \delta_{ab} + \hat{\Sigma}_T^{ab}(k^2) \right), & a, b &= \gamma, Z, W, \\
 \hat{\Gamma}_{L,R}^f(k^2) &= i \left(1 + \hat{\Sigma}_{L,R}^f(k^2) \right), \\
 \hat{\Gamma}_S^f(k^2) &= i \left(-1 + \hat{\Sigma}_S^f(k^2) \right), \\
 \hat{\Gamma}^H(k^2) &= -i \left((k^2 - M_H^2) + \hat{\Sigma}^H(k^2) \right).
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

2.4.1 Einschleifen-Renormierung

Auf Einschleifen-Niveau werden die Renormierungskonstanten bis zur 1. Ordnung entwickelt. Damit erhält man für die renormierten Selbstenergien die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{T(1)}^W(k^2) &= \Sigma_{T(1)}^W(k^2) - \delta M_{W(1)}^2 + \delta Z_{(1)}^W (k^2 - M_W^2), \\
 \hat{\Sigma}_{T(1)}^{ZZ}(k^2) &= \Sigma_{T(1)}^{ZZ}(k^2) - \delta M_{Z(1)}^2 + \delta Z_{(1)}^{ZZ} (k^2 - M_Z^2), \\
 \hat{\Sigma}_{T(1)}^{\gamma\gamma}(k^2) &= \Sigma_{T(1)}^{\gamma\gamma}(k^2) + \delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma} k^2, \\
 \hat{\Sigma}_{T(1)}^{\gamma Z}(k^2) &= \Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(k^2) + \frac{1}{2} \delta Z_{(1)}^{Z\gamma} (k^2 - M_Z^2) + \frac{1}{2} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} k^2, \\
 \hat{\Sigma}_{(1)}^H(k^2) &= \Sigma_{(1)}^H(k^2) - \delta M_{H(1)}^2 + \delta Z_{(1)}^H (k^2 - M_H^2), \\
 \hat{\Sigma}_{L(1)}^f(k^2) &= \Sigma_{L(1)}^f(k^2) + \delta Z_{L(1)}^f, \\
 \hat{\Sigma}_{R(1)}^f(k^2) &= \Sigma_{R(1)}^f(k^2) + \delta Z_{R(1)}^f, \\
 \hat{\Sigma}_{S(1)}^f(k^2) &= \Sigma_{S(1)}^f(k^2) - \frac{1}{2} \left(\delta Z_{L(1)}^f + \delta Z_{R(1)}^f \right) - \frac{\delta m_{f(1)}}{m_f}. \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Σ bezeichnet die unrenormierten Selbstenergien und die Zahlen in Klammern geben die Schleifenordnung an.

Mit den On-Shell-Renormierungsbedingungen aus Abschnitt 2.4 erhält man damit für die Einschleifen-Renormierungskonstanten

$$\begin{aligned}
 \delta M_{W(1)}^2 &= \mathcal{R}e \left(\Sigma_T^W(M_W^2) \right), & \delta Z_{(1)}^W &= -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{T(1)}^{W'}(M_W^2) \right), \\
 \delta M_{Z(1)}^2 &= \mathcal{R}e \left(\Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2) \right), & \delta Z_{(1)}^{ZZ} &= -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{T(1)}^{ZZ'}(M_Z^2) \right), \\
 \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} &= -2 \mathcal{R}e \left(\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right), & \delta Z_{(1)}^{Z\gamma} &= 2 \frac{\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}, \\
 \delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma} &= -\Sigma_{T(1)}^{\gamma\gamma'}(0), \\
 \delta M_{H(1)}^2 &= \mathcal{R}e \left(\Sigma^H(M_H^2) \right), & \delta Z_{(1)}^H &= -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{(1)}^{H'}(M_H^2) \right), \\
 \delta m_{f(1)} &= \frac{m_f}{2} \mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(1)}^f(m_f^2) + \Sigma_{R(1)}^f(m_f^2) + 2 \Sigma_{S(1)}^f(m_f^2) \right), \\
 \delta Z_{L(1)}^f &= -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(1)}^f(m_f^2) \right) - m_f^2 \mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(1)}^{f'}(m_f^2) + \Sigma_{R(1)}^{f'}(m_f^2) + 2 \Sigma_{S(1)}^{f'}(m_f^2) \right), \\
 \delta Z_{R(1)}^f &= -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{R(1)}^f(m_f^2) \right) - m_f^2 \mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(1)}^{f'}(m_f^2) + \Sigma_{R(1)}^{f'}(m_f^2) + 2 \Sigma_{S(1)}^{f'}(m_f^2) \right). \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

$\Sigma'(k^2)$ bezeichnet die Ableitung der unrenormierten Selbstenergie nach dem Impulsquadrat k^2 . Für die Ladungsrenormierungskonstante findet man unter Berücksichtigung einer Ward-Identität [21]

$$\delta Z_{e(1)} = -\frac{1}{2} \delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma} - \frac{s_W}{2c_W} \delta Z_{(1)}^{Z\gamma}. \tag{2.48}$$

Der schwache Mischungswinkel ist keine unabhängige Größe, sondern über (2.19) mit der W - und der Z -Masse verknüpft. Definiert man die Renormierungskonstante δs_W durch

$$s_{W,0} = s_W + \delta s_W, \quad (2.49)$$

so gilt die Beziehung

$$\delta s_{W(1)} = \frac{c_W^2}{2 s_W} \left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} \right). \quad (2.50)$$

Des Weiteren enthält das Higgspotential (2.11) den Tadpole-Term

$$t H(x) := v \left(\mu^2 - \frac{\lambda}{4} v^2 \right) H(x), \quad (2.51)$$

der auf Bornniveau identisch verschwindet. In höheren Ordnungen erhält er jedoch nicht-verschwindende Korrekturen. Diese kompensiert man durch einen Counterterm δt ,

$$t_0 = t + \delta t, \quad (2.52)$$

der so gewählt wird, dass auch in höheren Ordnungen keine Tadpolebeiträge auftreten.

Bei der Berechnung von $\delta Z^{\gamma\gamma}$,

$$\delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma} = -\Pi^{\gamma\gamma}(0), \quad \Pi^{\gamma\gamma}(p^2) = \frac{\Sigma_T^{\gamma\gamma}(p^2)}{p^2}, \quad (2.53)$$

tritt das Problem auf, dass die Massen der leichten Quarks bei niedrigen Energien aufgrund von QCD-Effekten nicht wohldefiniert sind. Zur Berechnung dieser Renormierungskonstante spaltet man den Beitrag der Photon-Vakuumpolarisation bei einer ausreichend hohen Energie ab, so dass die Quarks dort als freie, masselose Teilchen betrachtet werden können [22]. Für diese Energie wählt man oft $p^2 = M_Z^2$, da dies eine natürliche Skala für elektroschwache Prozesse darstellt,

$$\Pi^{\gamma\gamma}(0) = -\mathcal{R}e \left(\Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) + \Pi^{\gamma\gamma}(0) + \mathcal{R}e \left(\Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) \quad (2.54)$$

$$= -\mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) + \mathcal{R}e \left(\Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right). \quad (2.55)$$

Der Anteil $\mathcal{R}e \left(\Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right)$ kann perturbativ berechnet werden.

Der Realteil der renormierten Vakuumpolarisation,

$$\mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) = \mathcal{R}e \left(\Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) - \Pi^{\gamma\gamma}(0), \quad (2.56)$$

lässt sich in einen bosonischen Anteil, einen leptonischen Anteil, einen Anteil der die leichten Quarks und einen Anteil, der das top-Quark enthält, aufspalten.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right) &= \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{bos}}(M_Z^2) \right) + \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{lept}}(M_Z^2) \right) \\ &+ \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{had}}(M_Z^2) \right) + \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{top}}(M_Z^2) \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Der bosonische Anteil und der Anteil, der das top-Quark enthält, können problemlos perturbativ berechnet werden. Die verbleibende Größe

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_{\text{lept}} + \Delta\alpha_{\text{had}} = -\mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{lept}}(M_Z^2) \right) - \mathcal{R}e \left(\hat{\Pi}^{\text{had}}(M_Z^2) \right) \quad (2.58)$$

entspricht einer Verschiebung der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante

$$\alpha(M_Z^2) = \alpha(1 + \Delta\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (2.59)$$

Während der leptonische Anteil direkt perturbativ berechnet werden kann, kann der hadronische Anteil mittels einer Dispersionsrelation gewonnen werden,

$$\Delta\alpha_{\text{had}} = -\frac{\alpha}{3\pi} M_Z^2 \mathcal{R}e \left(\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{R^\gamma(s')}{s'(s' - M_Z^2 - i\epsilon)} \right) \quad (2.60)$$

mit

$$R^\gamma(s') = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)}. \quad (2.61)$$

Dabei werden die Beiträge bei hohen Energien im Rahmen der perturbativen QCD berechnet, während die Beiträge bei niedrigen Energien aus experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitten bestimmt werden können [23].

2.4.2 Zweischleifen-Renormierung

In dieser Arbeit wird der Zweischleifen-Counterterm zum $Z\bar{f}f$ -Vertex benötigt. Die Feynmanregel zu diesem Vertex lautet allgemein

$$\begin{aligned} Z^{Z\bar{f}f} &= ie\gamma_\mu\omega_+ Z_e Z_R^f \left((Z_{g_v} g_v - Z_{g_a} g_a) \sqrt{Z^{ZZ}} - Q \sqrt{Z^{\gamma Z}} \right) \\ &+ ie\gamma_\mu\omega_- Z_e Z_L^f \left((Z_{g_v} g_v + Z_{g_a} g_a) \sqrt{Z^{ZZ}} - Q \sqrt{Z^{\gamma Z}} \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

mit der Vektor- und der Axialvektorkopplung

$$\begin{aligned} g_v &= \frac{I^3 - 2Q s_W^2}{2 s_W c_W}, & Z_{g_v} g_v &= \frac{I^3 - 2Q (s_W + \delta s_W)^2}{2 (s_W + \delta s_W) (c_W + \delta c_W)}, \\ g_a &= \frac{I^3}{2 s_W c_W}, & Z_{g_a} g_a &= \frac{I^3}{2 (s_W + \delta s_W) (c_W + \delta c_W)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Q bezeichnet die Ladung des Fermions in Einheiten der Elementarladung. δs_W ist in (2.49) definiert und δc_W ist gegeben durch

$$\delta c_W = -\frac{s_W}{c_W} \delta s_W. \quad (2.64)$$

Entwickelt man in (2.62) die Renormierungskonstanten bis zur 2. Ordnung, ergibt sich in Übereinstimmung mit [18] der Zweischleifen-Counterterm

$$\begin{aligned} \delta Z_{(2)}^{Z\bar{f}f} &\equiv ie\gamma_\mu \left(\delta g_{V(2)}^f - \gamma_5 \delta g_{A(2)}^f \right) = \\ &ie\gamma_\mu \left[g_v \delta Z_{e(2)} + g_v \delta Z_{g_v(2)} + \frac{g_v}{2} \delta Z_{(2)}^{ZZ} + \frac{g_v - g_a}{2} \delta Z_{R(2)}^f \right. \\ &+ \frac{g_a + g_v}{2} \delta Z_{L(2)}^f - \frac{Q}{2} \delta Z_{(2)}^{\gamma Z} + \frac{g_v}{2} \delta Z_{g_v(1)} \delta Z_{(1)}^{ZZ} - \frac{g_v}{8} (\delta Z_{(1)}^{ZZ})^2 \\ &+ \delta Z_{e(1)} \left(\delta Z_{g_v(1)} g_v + \frac{g_v}{2} \delta Z_{(1)}^{ZZ} + \frac{g_v - g_a}{2} \delta Z_{R(1)}^f + \frac{g_v + g_a}{2} \delta Z_{L(1)}^f - \frac{Q}{2} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \right) \\ &+ \delta Z_{R(1)}^f \left(-\frac{g_a}{2} \delta Z_{g_a(1)} + \frac{g_v}{2} \delta Z_{g_v(1)} + \frac{g_v - g_a}{4} \delta Z_{(1)}^{ZZ} - \frac{Q}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \right) \\ &+ \left. \delta Z_{L(1)}^f \left(\frac{g_a}{2} \delta Z_{g_a(1)} + \frac{g_v}{2} \delta Z_{g_v(1)} + \frac{g_v + g_a}{4} \delta Z_{(1)}^{ZZ} - \frac{Q}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \right) \right] \\ &- ie\gamma_\mu \gamma_5 \left[g_a \delta Z_{e(2)} + g_a \delta Z_{g_a(2)} + \frac{g_a}{2} \delta Z_{(2)}^{ZZ} + \frac{g_a - g_v}{2} \delta Z_{R(2)}^f \right. \\ &+ \frac{g_v + g_a}{2} \delta Z_{L(2)}^f + \frac{g_a}{2} \delta Z_{g_a(1)} \delta Z_{(1)}^{ZZ} - \frac{g_a}{8} (\delta Z_{(1)}^{ZZ})^2 \\ &+ \delta Z_{R(1)}^f \left(\frac{Q}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} + \frac{g_a}{2} \delta Z_{g_a(1)} + \frac{g_a - g_v}{4} \delta Z_{(1)}^{ZZ} - \frac{g_v}{2} \delta Z_{g_v(1)} \right) \\ &+ \delta Z_{e(1)} \left(g_a \delta Z_{g_a(1)} + \frac{g_a}{2} \delta Z_{(1)}^{ZZ} + \frac{g_a - g_v}{2} \delta Z_{R(1)}^f + \frac{g_a + g_v}{2} \delta Z_{L(1)}^f \right) \\ &+ \left. \delta Z_{L(1)}^f \left(-\frac{Q}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} + \frac{g_a}{2} \delta Z_{g_a(1)} + \frac{g_v}{2} \delta Z_{g_v(1)} + \frac{g_v + g_a}{4} \delta Z_{(1)}^{ZZ} \right) \right]. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $\delta g_{V(2)}$ und $\delta g_{A(2)}$ den Vektor- und den Axialvektoranteil des Counterterms.

Der Counterterm (2.65) enthält die Zweischleifen-Renormierungskonstanten $\delta Z_{e(2)}$, $\delta Z_{(2)}^{ZZ}$, $\delta Z_{(2)}^{f,R}$, $\delta Z_{(2)}^{f,L}$, $\delta Z_{(2)}^{\gamma Z}$, $\delta Z_{g_v(2)}$ und $\delta Z_{g_a(2)}$. Die beiden letzteren berechnen sich via (2.63) und (2.64) aus $\delta s_{W(2)}$. Diese Renormierungskonstante ist wiederum durch die Massenrenormierungskonstanten $\delta M_{W(1,2)}^2$ und $\delta M_{Z(1,2)}^2$ gegeben,

$$\begin{aligned} \delta s_{W(2)}^2 &= \frac{M_W^2}{M_Z^2} \left(\frac{\delta M_{Z(2)}^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{W(2)}^2}{M_W^2} \right) - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2} \left(\frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{W(1)}^2}{M_W^2} \right), \\ s_W^2 &= (s_{W,0} + \delta s_W)^2 = s_{W,0}^2 + \delta s_W^2. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Counterterms für den effektiven leptonischen Mischungswinkels benötigt man die Differenz (siehe Kapitel 4)

$$\begin{aligned}
 \delta \sin^2 \theta_{\text{eff}} &= -\frac{g_v}{4 g_a} \left(\frac{\delta g_{V(2)}^l}{g_v} - \frac{\delta g_{A(2)}^l}{g_a} \right) \\
 &= \delta s_{W(2)}^2 + \frac{1}{2} s_W c_W \delta Z_{(2)}^{\gamma Z} + s_W^2 (s_W^2 - c_W^2) \delta Z_{L(2)}^l - s_W^2 (s_W^2 - c_W^2) \delta Z_{R(2)}^l \\
 &\quad + \text{Produkte von Einschleifen-Countertermen,} \tag{2.67}
 \end{aligned}$$

die $\delta Z_{e(2)}$ und $\delta Z_{(2)}^{ZZ}$ nicht mehr enthält. Zur Berechnung der verbleibenden Zweischleifen-Renormierungskonstanten werden die Zweischleifen-Selbstenergien zu den Übergängen $W \rightarrow W$, $Z \rightarrow Z$, $\gamma \rightarrow Z$ und $l \rightarrow l$ gebraucht (siehe auch [24]),

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{T(2)}^W(k^2) &= \Sigma_{T(2)}^W(k^2) + \delta Z_{(2)}^W (k^2 - M_W^2) - \delta M_{W(2)}^2 - \delta Z_{(1)}^W \delta M_{W(1)}^2, \\
 \hat{\Sigma}_{T(2)}^{ZZ}(k^2) &= \Sigma_{T(2)}^{ZZ}(k^2) + \delta Z_{(2)}^{ZZ} (k^2 - M_Z^2) - \delta M_{Z(2)}^2 - \delta Z_{(1)}^{ZZ} \delta M_{Z(1)}^2 + \frac{k^2}{4} (\delta Z_{(1)}^{\gamma Z})^2, \\
 \hat{\Sigma}_{T(2)}^{\gamma Z}(k^2) &= \Sigma_{T(2)}^{\gamma Z}(k^2) + \left(\frac{1}{2} \delta Z_{(2)}^{\gamma Z} + \frac{1}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \delta Z_{(1)}^{ZZ} \right) (k^2 - M_Z^2) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} \delta Z_{(2)}^{\gamma Z} + \frac{1}{4} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \delta Z_{(1)}^{\gamma \gamma} \right) k^2 - \frac{1}{2} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \delta M_{Z(1)}^2, \\
 \hat{\Sigma}_{L(2)}^l(k^2) &= \Sigma_{L(2)}^l(k^2) + \delta Z_{L(2)}^l, \quad \hat{\Sigma}_{R(2)}^l(k^2) = \Sigma_{R(2)}^l(k^2) + \delta Z_{R(2)}^l, \\
 \hat{\Sigma}_{S(2)}^l(k^2) &= \Sigma_{S(2)}^l(k^2) - \frac{\delta Z_{L(2)}^l + \delta Z_{R(2)}^l}{2} + \frac{\delta m_{l(1)}}{m_l} \frac{\delta Z_{L(1)}^l + \delta Z_{R(1)}^l}{2} \\
 &\quad - \frac{(\delta Z_{L(1)}^l + \delta Z_{R(1)}^l)^2}{8} - \frac{\delta m_{l(2)}}{m_l}. \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

Mit den Renormierungsbedingungen aus Abschnitt 2.4 ergeben sich die benötigten Renormierungskonstanten in Übereinstimmung mit [17] zu

$$\delta M_{W(2)}^2 = \mathcal{R}e \left(\Sigma_{T(2)}^W(M_W^2) \right) - \delta Z_{(1)}^W \delta M_{W(1)}^2 + \mathcal{I}m \left(\Sigma_{(1)}^{W'}(M_W^2) \right) \mathcal{I}m \left(\Sigma_{(1)}^{WW}(M_W^2) \right), \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
 \delta M_{Z(2)}^2 &= \mathcal{R}e \left(\Sigma_{T(2)}^{ZZ}(M_Z^2) \right) - \delta Z_{(1)}^{ZZ} \delta M_{Z(1)}^2 + \mathcal{I}m \left(\Sigma_{(1)}^{ZZ'}(M_Z^2) \right) \mathcal{I}m \left(\Sigma_{(1)}^{ZZ}(M_Z^2) \right) \\
 &\quad + \frac{M_Z^2}{4} (\delta Z_{(1)}^{\gamma Z})^2 + \frac{\mathcal{I}m \left(\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(M_Z^2) \right)^2}{M_Z^2}, \tag{2.70}
 \end{aligned}$$

$$\delta Z_{(2)}^{\gamma Z} = -2 \frac{\mathcal{R}e \left(\Sigma_{T(2)}^{\gamma Z}(M_Z^2) \right)}{M_Z^2} + \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2} - \frac{1}{2} \delta Z_{(1)}^{\gamma Z} \delta Z_{(1)}^{\gamma \gamma}, \tag{2.71}$$

$$\delta Z_{L(2)}^l = -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(2)}^l(m_l^2) \right) - m_l^2 \mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(2)}^l(m_l^2) + \Sigma_{R(2)}^l(m_l^2) + 2 \Sigma_{S(2)}^l(m_l^2) \right), \tag{2.72}$$

$$\delta Z_{R(2)}^l = -\mathcal{R}e \left(\Sigma_{R(2)}^l(m_l^2) \right) - m_l^2 \mathcal{R}e \left(\Sigma_{L(2)}^l(m_l^2) + \Sigma_{R(2)}^l(m_l^2) + 2 \Sigma_{S(1)}^l(m_l^2) \right). \tag{2.73}$$

$M_{W,Z}^2$ ist dabei der Realteil des komplexen Pols $\mathcal{M}_{W,Z}^2$ des entsprechenden Propagators

$$\mathcal{M}_{W,Z}^2 = M_{W,Z}^2 - i M_{W,Z} \Gamma_{W,Z}, \quad (2.74)$$

der allerdings im Gegensatz zum Einschleifen-Niveau nicht direkt mit der physikalischen Masse identifiziert werden kann, wie im folgenden Abschnitt 2.4.3 erklärt wird.

Oft wird der Massenparameter auch als Pol des Realteils des Propagators angegeben [20, 21], der direkt mit der physikalischen Masse identifiziert werden kann. Die beiden Definitionen unterscheiden sich jedoch in ihrer Eichabhängigkeit [25]. In [26] wurde gezeigt, dass die Definition als Realteil des komplexen Pols eine eichunabhängige Definition der Masse darstellt. Dies wurde in [16, 17] explizit auf Zweischleifen-Niveau bestätigt. Dagegen ergab sich für die Definition der Masse als Pol des Realteils des Propagators ein eichabhängiges Ergebnis für den renormierten schwachen Mischungswinkel. Daher ist letztere Definition der Masse physikalisch nicht sinnvoll.

2.4.3 Komplexe Polmasse und experimentell gemessene Masse

Experimentell bestimmt man die Masse M_{exp} und die Breite Γ_{exp} der Eichbosonen durch den Fit einer Breit-Wigner-Funktion mit energieabhängiger Breite an die Messdaten [27],

$$\sigma(s) \sim \frac{s}{(s - M_{exp}^2)^2 + \frac{s^2 \Gamma_{exp}^2}{M_{exp}^2}}. \quad (2.75)$$

Theoretisch berechnet man den Wirkungsquerschnitt für die Produktion einer Vektorboson-Resonanz aus dem Betragsquadrat des einteilchen-reduziblen Propagators $D_T^{(1PR)}$,

$$\sigma(s) \sim s \left| D_T^{(1PR)}(s) \right|^2, \quad (2.76)$$

wobei der zusätzliche Faktor s aus der Phasenraumintegration stammt. Unter Ausnutzung der Definition des komplexen Propagatorpols,

$$\hat{\Gamma}_T(\mathcal{M}^2) = -i \left(\mathcal{M}^2 - M^2 + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2) \right) = 0, \quad (2.77)$$

und (2.74) findet man durch Entwicklung der renormierten Zweipunktfunktion um den komplexen Propagatorpol,

$$\begin{aligned} i \hat{\Gamma}_T(s) &= s - M^2 + \hat{\Sigma}_T(s) \\ &= s - \mathcal{M}^2 + \left(\mathcal{M}^2 - M^2 + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2) \right) + \hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) (s - \mathcal{M}^2) + \mathcal{O}((s - \mathcal{M}^2)^2) \\ &= (s - M^2 + i M \Gamma) \left(1 + \hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right) \\ &= (s - M^2 + i M \Gamma) \left(1 + \mathcal{R}e \left(\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right) \right) \left[1 + \frac{i}{1 + \mathcal{R}e \left(\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right)} \mathcal{I}m \left(\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Feldnormierung Z erfüllt die folgenden Gleichungen,

$$Z = 1 + \mathcal{R}e \left(\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right), \quad (2.78)$$

$$\mathcal{I}m \left(\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2) \right) = Z M \Gamma. \quad (2.79)$$

Damit erhält man für den Propagator

$$D_T^{(1PR)}(s) \approx \frac{-i Z^{-1} (1 + i \Gamma M)^{-1}}{s - M^2 + i M \Gamma}. \quad (2.80)$$

Daraus ergibt sich im Gegensatz zu (2.75) eine Breit-Wigner-Funktion mit konstanter Breite,

$$\sigma(s) \sim \frac{s}{(s - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2}. \quad (2.81)$$

Die beiden Gleichungen (2.75) und (2.81) lassen sich jedoch durch die folgende Parametertransformation ineinander überführen [28],

$$M = M_{exp} \left(1 + \frac{\Gamma_{exp}^2}{M_{exp}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \Gamma = \Gamma_{exp} \left(1 + \frac{\Gamma_{exp}^2}{M_{exp}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.82)$$

Aus den Gleichungen (2.82) können damit die komplexe Polmasse und -breite direkt aus den entsprechenden experimentellen Werten gewonnen werden.

Kapitel 3

Myon-Zerfall und W -Masse

Myonen zerfallen fast ausschließlich über den schwachen Prozess $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$. Dieser wird im Fermi-Modell [10] durch einen lokalen Vierpunkt-Vertex der beteiligten Fermionen beschrieben (siehe Abbildung 3.1a)). Das entsprechende Matrixelement lautet

$$\mathcal{M}_{\text{Fermi}} = \frac{4G_\mu}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\mu\nu} \gamma^\lambda \omega_- u_\mu) (\bar{u}_e \gamma^\lambda \omega_- v_{\nu_e}) \quad (3.1)$$

mit der Fermikonstante G_μ als effektiver Kopplungskonstante.

Daraus berechnet sich die Myon-Zerfallsbreite zu

$$\Gamma_\mu = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} F\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) (1 + \Delta q),$$

mit

$$F(x) = 1 - 8x - 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln(x). \quad (3.2)$$

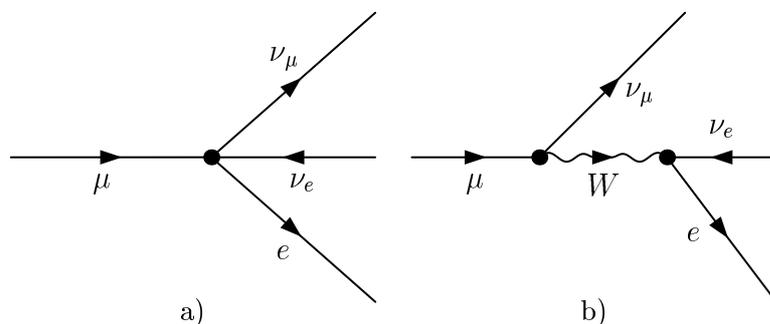


Abbildung 3.1: Myon-Zerfall im a) Fermi-Modell und b) Standardmodell

Δq enthält die elektromagnetischen Strahlungskorrekturen zum Vierpunkt-Vertex im Fermi-Modell. Diese sind auf Ein- [29] und Zweischleifen-Niveau [30] bekannt,

$$\Delta q = 1.810 \frac{\alpha}{4\pi} + (6.701 \pm 0.002) \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (3.3)$$

Aus dem aktuellen Wert der Myon-Lebensdauer $\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = (2.19703 \pm 0.00004) \mu s$ [31] berechnet sich damit die Fermikonstante zu $G_\mu = (1.16637 \pm 0.00001) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

Vernachlässigt man die Myon-Masse gegen die W -Masse, so wird der Myon-Zerfall im Standardmodell auf Born-Niveau durch das Diagramm 3.1b) beschrieben. Das entsprechende Matrixelement lautet

$$\mathcal{M}_{\text{SM}} = \frac{e^2}{2 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \right) M_W^2} (\bar{u}_{\mu\nu} \gamma^\lambda \omega_- u_\mu) (\bar{u}_e \gamma^\lambda \omega_- v_{\nu e}). \quad (3.4)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (3.1) so erhält man die W - Z -Massenrelation,

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \right) M_W^2}. \quad (3.5)$$

Während die QED-Korrekturen zum Myon-Zerfall bereits in der Definition der Fermikonstante (3.2) enthalten sind, können die restlichen Quantenkorrekturen in die Größe Δr absorbiert werden, die von allen Parametern des Standardmodells abhängt,

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \right) M_W^2} [1 + \Delta r(M_W, M_Z, M_H, m_t, \Delta\alpha, \dots)]. \quad (3.6)$$

Neben den Einschleifen-Korrekturen sind zu Δr auch die QCD-Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ [32] und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [33], universelle Beiträge durch ρ - [34, 35] und S -Parameter [36] sowie die vollständigen fermionischen [16, 37] und bosonischen elektroschwachen Zweischleifen-Korrekturen [38] bekannt.

Für einen festen Satz von Eingabeparametern wird Gleichung (3.6) durch genau einen Wert für die W -Masse gelöst. Betrachtet man diese theoretische Vorhersage für M_W als Funktion der Higgs-Masse, so erhält man durch Vergleich mit dem experimentellen Wert strikte Schranken für M_H .

Kapitel 4

Z-Resonanz und effektiver leptonischer Mischungswinkel

Zur Beschreibung des Prozesses

$$e^+e^- \rightarrow (\gamma, Z) \rightarrow f\bar{f}, \quad f \neq e, \quad (4.1)$$

in der Nähe der Z -Resonanz führt man üblicherweise das Konzept der effektiven Kopplungen ein. Der effektive leptonische Mischungswinkel wird über diese effektiven Kopplungen definiert.

4.1 Bornnäherung

Das Matrixelement zum Prozess (4.1) lautet in niedrigster Ordnung Störungstheorie,

$$\mathcal{M}^{Born} \sim \frac{1}{s} [Q_e Q_f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha + \chi (g_v^e g_v^f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha - g_v^e g_a^f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha \gamma_5 - g_a^e g_v^f \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha + g_a^e g_a^f \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha \gamma_5)]. \quad (4.2)$$

Hierbei wird die abkürzende Schreibweise

$$A_\alpha \otimes B^\alpha = [\bar{v}_e A_\beta u_e] \times [\bar{u}_f B^\beta v_f] \quad (4.3)$$

verwendet. χ bezeichnet den Z -Propagator,

$$\chi = \frac{s}{s - M_Z^2 + \frac{is\Gamma_Z}{M_Z}}, \quad (4.4)$$

und Q^f ist die elektrische Ladung des Fermions in Einheiten der Elementarladung. g_a^f und g_v^f sind in (2.22) definiert. Speziell für Leptonen l gilt die Relation (2.23).

4.2 Z-Pol Approximation

Die QED-Korrekturen zum Prozess (4.1) bilden eine eichinvariante Teilmenge der elektroschwachen Korrekturen. Sie sind UV -endlich aber IR -divergent. Diese IR -Divergenzen werden durch die Beiträge der Photon-Bremsstrahlung kompensiert, die den Streuprozess begleitet. Da diese Beiträge von der experimentellen Anordnung abhängen, werden sie getrennt betrachtet. Die verbleibenden Beiträge sind die schwachen Korrekturen höherer Ordnung.

Vernachlässigt man die Massen der äußeren Fermionen, so lassen sich die schwachen Korrekturen in elektroschwache Formfaktoren \mathcal{F}_{ij}^{ef} absorbieren,

$$\mathcal{M}^{eff} \sim \frac{1}{s} \left[\alpha(s) \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha + \chi \left(\mathcal{F}_{vv}^{ef} \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha - \mathcal{F}_{va}^{ef} \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha \gamma_5 - \mathcal{F}_{av}^{ef} \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha + \mathcal{F}_{aa}^{ef} \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha \gamma_5 \right) \right]. \quad (4.5)$$

Diese Formfaktoren hängen von den Mandelstamvariablen s und t ab. Die t -Abhängigkeit stammt von Boxdiagrammen, die als nichtresonante Beiträge an der Z-Resonanz vernachlässigbar sind. So tragen die Einschleifen-Boxdiagramme nur einen relativen Beitrag von 10^{-4} bei [39]. Vernachlässigt man auch alle anderen nicht resonanten Beiträge, wie bosonische Einsetzungen in den Photonpropagator oder Photon-Fermion-Vertexkorrekturen, so faktorisieren die Formfaktoren vollständig,

$$\mathcal{F}_{ij}^{ef}(s) = \mathcal{G}_i^e(s) \mathcal{G}_j^f(s). \quad (4.6)$$

Die Z-Pol Approximation besteht darin, dass man darüberhinaus in den Formfaktoren $s = M_Z^2$ setzt.

4.3 Effektiver leptonischer Mischungswinkel

Mit den im letzten Abschnitt dargestellten Näherungen erhält man den Z-Anteil der Amplitude (4.5) aus dem der Bornamplitude (4.2), in dem man die Ersetzungen

$$g_i^f \rightarrow \mathcal{G}_i^f(M_Z^2) \quad (4.7)$$

durchführt. Die effektiven Kopplungen $g_{A,V}^f$ sind definiert als

$$g_{A,V}^f := \mathcal{G}_{a,v}^f(M_Z^2), \quad (4.8)$$

und werden durch Indizes in Großbuchstaben A und V von den entsprechenden Borngrößen $g_{a,v}$ unterschieden.

Auch das Matrixelement des Zerfallsprozesses $Z \rightarrow \bar{f}f$ wird durch die effektiven Kopplungen beschrieben,

$$\mathcal{M}_{Z\bar{f}f}^{eff} = \bar{u} \gamma_\alpha \left[g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right] v_f \epsilon_Z^\alpha, \quad (4.9)$$

wobei \bar{u}_f , v_f und ϵ_Z^α die Wellenfunktionen des Fermions f , des Antifermions \bar{f} und des Z -Bosons sind. Der effektive leptonische Mischungswinkel wird in Analogie zur Bornrelation (2.23) über das Verhältnis der effektiven Kopplungen definiert,

$$\sin^2 \theta_{\text{eff}} := \frac{1}{4} \left(1 - \mathcal{R}e \frac{g_V^{\text{lept}}}{g_A^{\text{lept}}} \right). \quad (4.10)$$

Die Beiträge aus höheren Ordnungen Störungstheorie zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ können in der Größe $\Delta\kappa$ zusammengefasst werden, die folgendermaßen definiert ist,

$$\sin^2 \theta_{\text{eff}} = \kappa s_W^2 = \kappa \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \right), \quad \kappa = 1 + \Delta\kappa. \quad (4.11)$$

4.4 Experimenteller und theoretischer Status

Die im letzten Abschnitt 4.3 definierte Größe $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ stellt eine Schlüsselobservable bei der indirekten Bestimmung der Higgsmasse aus Präzisionsobservablen dar. Zum Einen ist sie sehr sensitiv auf die Higgsmasse, zum Anderen kann sie experimentell sehr genau aus verschiedenen Asymmetrien der Z -Resonanz bestimmt werden. Der aktuelle experimentelle Wert beträgt $\sin^2 \theta_{\text{eff}} = 0.23153 \pm 0.00016$ [6] und weitere Verbesserungen werden von zukünftigen Beschleuniger-Experimenten erwartet. So könnte am ILC im GigaZ-Modus eine Genauigkeit von 1.3×10^{-5} erreicht werden [7, 8]. Daher wird eine sehr genaue theoretische Vorhersage für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ benötigt.

Neben den vollständigen Einschleifen-Korrekturen [40], sind auch die QCD-Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ [32] und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [33] sowie universelle Beiträge durch ρ - [34, 35] und S -Parameter [36] zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ bekannt. Von den elektroschwachen Zweischleifen-Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ kannte man zu Beginn dieser Arbeit nur die beiden führenden Terme einer Entwicklung in der top-Masse [41]. Da die verbleibende theoretische Unsicherheit aufgrund der fehlenden Zweischleifen-Beiträge noch sehr groß ist, ist die vollständige Berechnung dieser Korrekturen notwendig.

4.5 Elektroschwache Zweischleifen-Beiträge

Entwickelt man die effektiven Kopplungen in Gleichung (4.10) in α ,

$$g_{V,A} = g_{v,a} \left(1 + g_{V,A(1)} + g_{V,A(2)} + \dots \right), \quad (4.12)$$

so erhält man für den elektroschwachen Mischungswinkel

$$\sin^2 \theta_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{g_v}{g_a} \mathcal{R}e \left[1 + \delta g_{V(1)} - \delta g_{A(1)} + \delta g_{V(2)} - \delta g_{A(2)} + \delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}) \right] \right\} + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (4.13)$$

$\delta g_{V(1)} - \delta g_{A(1)}$ ist der Einschleifen-Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$. Zum Zweischleifen-Ergebnis trägt neben dem analogen Beitrag $\delta g_{V(2)} - \delta g_{A(2)}$ noch das Produkt aus Einschleifen-Beiträgen $\delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)})$ bei. Dieser Term kompensiert die *IR*-Divergenzen, die in $\delta g_{V(2)} - \delta g_{A(2)}$ auftreten (siehe Abschnitte 5.2.3 und 8.2.2).

Die echten Zweischleifen-Diagramme, die zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ beitragen, lassen sich in vier Klassen aufteilen (Abb. 4.1). Die Kreise symbolisieren renormierte Zwei- bzw. Dreipunktfunktionen, in Abb. 4.1a) und 4.1b) auf Einschleifen- und in Abb. 4.1c) und 4.1d) auf Zweischleifen-Niveau. Im On-Shell-Renormierungsschema (siehe Abschnitt 2.4) verschwindet der Realteil des Diagramms in Abb. 4.1c). Die reduzierbaren Diagramme Abb. 4.1a) und 4.1b) tragen nur Produkte vom Imaginärteilen von Einschleifen-Funktionen bei und können leicht berechnet werden. Die wesentliche Schwierigkeit auf Zweischleifen-Niveau besteht also in der Berechnung des irreduziblen $Z\bar{l}l$ -Vertex Abb. 4.1d).

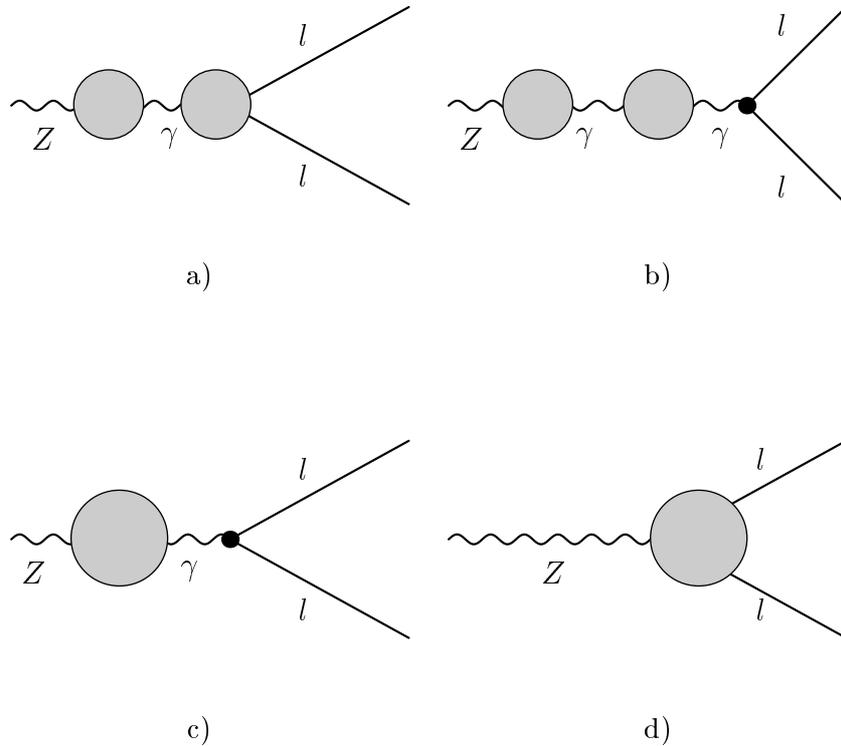


Abbildung 4.1: Klassen von Zweischleifen-Diagrammen

Hierbei treten zwei Probleme auf:

- Die On-Shell-Renormierung des $Z\bar{l}l$ -Vertex.
- Die Berechnung irreduzibler Zweischleifen-Vertexkorrekturen bei äußerem Impuls ungleich Null.

Diese beiden Aspekte lassen sich getrennt voneinander behandeln, wenn man die folgende Aufteilung des renormierten $Z\bar{l}l$ -Vertex in zwei UV -endliche Anteile vornimmt,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{(2)}^{Z\bar{l}l}(M_Z^2) &= \Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(M_Z^2) + \delta Z_{(2)}^{Z\bar{l}l} \\ &= \left(\Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0) + \delta Z_{(2)}^{Z\bar{l}l} \right) + \left(\Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(M_Z^2) - \Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0) \right).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Der erste Teilbeitrag $\left(\Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0) + \delta Z_{(2)}^{Z\bar{l}l} \right)$ enthält die gesamte On-Shell-Renormierung. Die Methoden, die zu seiner Berechnung verwendet wurden, sind im folgenden Kapitel 5 erläutert. Der zweite Teilbeitrag $\left(\Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(M_Z^2) - \Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0) \right)$ enthält die Zweischleifen-Vertex-Korrekturen bei äußerem Impuls ungleich Null. Als zusätzliche Schwierigkeit treten hierbei IR -Singularitäten auf. Die Methoden zur Berechnung von IR -endlichen Funktionen sind in Kapitel 6, die zur Berechnung der IR -divergenten Beiträge in Kapitel 7 dargestellt.

Kapitel 5

Der renormierte $Z\bar{l}l$ -Vertex bei verschwindendem äußeren Impuls

Zum effektiven leptonischen Mischungswinkel trägt von der $Z\bar{l}l$ -Vertexrenormierung nur die Differenz aus vektoriellem Anteil und axialem Anteil (4.13) bei. Nach Gleichung (2.67) werden somit die folgenden Zweischleifen-Renormierungskonstanten benötigt: $\delta Z_{(2)}^Z$, $\delta Z_{L(2)}^l$, $\delta Z_{R(2)}^l$ und $\delta s_{W(2)}^2$. $\delta s_{W(2)}^2$ ist durch die Massenrenormierungskonstanten des W - und des Z -Bosons $\delta M_{W(2)}^2$ und $\delta M_{Z(2)}^2$ gegeben (siehe Gleichung (2.66)). Diese Renormierungskonstanten enthalten nach (2.69)-(2.73) höchstens Zweischleifen-Selbstenergien bei nichtverschwindendem äußeren Impuls, aber keine Zweischleifen-Vertices.

Neben der Vertexrenormierung besteht der erste Teilbeitrag aus Gleichung (4.14) noch aus dem $Z\bar{l}l$ -Vertex bei äußerem Impuls Null. In Abwesenheit äußerer Impulse reduzieren sich die auftretenden Zweischleifen-Dreipunkt-Funktionen zu einfacheren Vakuumintegralen. Der erste Teilbeitrag zum effektiven leptonischen Mischungswinkel aus (4.14) enthält somit neben Einschleifen- und Vakuumintegralen ausschließlich Zweischleifen-Zweipunkt-Funktionen.

5.1 Rechenmethoden

Die Berechnung dieses Teilbeitrags kann somit in den folgende Schritte durchgeführt werden:

- **Erzeugung der Diagramme und Amplituden**

Hierzu wurde das Programmpaket FeynArts [42, 43] verwendet, das nach Spezifikation des Prozesses und der Schleifenordnung die entsprechenden Diagramme und

Amplituden generiert. Die generischen Zweischleifen-Diagramme, die zu einer der Renormierungskonstanten (2.69)-(2.73) oder zum $Z\bar{l}l$ -Vertex beitragen, finden sich in Anhang A.

- **Extraktion der effektiven Kopplungen aus der Amplitude**

Aus den von FeynArts erzeugten Amplituden wurden mittels des sogenannten Spurtricks die effektiven Kopplungen gewonnen. Dieser basiert darauf, dass bei nichtverschwindenden Impulsen p_1 , p_2 und P aus einem Matrixelement der Form (ϵ^α bezeichnet einen Polarisationsvektor)

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_2) \gamma_\alpha [g_V - g_A \gamma_5] v(p_1) \epsilon^\alpha(P) =: \bar{u}(p_2) \Gamma_\alpha v(p_1) \epsilon^\alpha(P), \quad (5.1)$$

also insbesondere auch aus dem Matrixelement (4.9), die Koeffizienten g_V und g_A mittels Spurbildung wie folgt herausprojiziert werden können,

$$g_V = -\frac{1}{2(D-2)P^2} \text{Tr} \{ \Gamma^\lambda \not{p}_1 \gamma_\lambda \not{p}_2 \}, \quad (5.2)$$

$$g_A = \frac{1}{2(D-2)P^2} \text{Tr} \{ \Gamma^\lambda \not{p}_1 \gamma_\lambda \gamma_5 \not{p}_2 \}. \quad (5.3)$$

Bei verschwindenden Impulsen, wie es in diesem Kapitel der Fall ist, können g_V und g_A folgendermaßen bestimmt werden,

$$g_V = \frac{1}{4D} \text{Tr} \{ \Gamma^\lambda \gamma_\lambda \}, \quad p_1 = 0, p_2 = 0, P = 0, \quad (5.4)$$

$$g_A = -\frac{1}{4D} \text{Tr} \{ \Gamma^\lambda \gamma_5 \gamma_\lambda \}, \quad p_1 = 0, p_2 = 0, P = 0. \quad (5.5)$$

Hierbei ist D die Raum-Zeit-Dimension.

- **Zurückführung der auftretenden Schleifenintegrale auf Standardintegrale**

Die auftretenden Zweischleifen-Zweipunkt-Funktionen wurden mit dem Programmpaket TwoCalc [44], die Einschleifen-Funktionen aus den Countertermdiagrammen mit dem Programmpaket OneCalc [44] auf skalare Standardintegrale zurückgeführt.

- **Numerische Auswertung**

Die von OneCalc und TwoCalc erzeugten analytischen Ausdrücke wurden mit dem Programmpaket S2L [45] numerisch ausgewertet. Dieses Paket verwendet analytische Ergebnisse für die auftretenden Einschleifen- [46] und Zweischleifen-Vakuum-Integrale [47] sowie eindimensionale Intergaldarstellungen für die Zweischleifen-Selbstenergien bei nichtverschwindendem äußeren Impuls [45]. Darüber hinaus wurden zur Überprüfung der Ergebnisse einige der Methoden aus [48] implementiert.

5.2 Besonderheiten bei der Berechnung von $\hat{\Gamma}_{(2)}^{Z\bar{l}l}(0)$

Bei der Berechnungen der Zweischleifen-Renormierungskonstanten(2.69)-(2.73) sowie des $Z\bar{l}l$ -Vertex bei Impuls Null können im Allgemeinen alle Fermionmassen bis auf die top-Masse vernachlässigt werden. Zusätzliche Schwierigkeiten treten nur bei der Berechnung der Lepton-Feldrenormierungskonstanten (siehe Abschnitt 5.2.1) sowie der Diagramme aus Abbildung 5.1 (siehe Abschnitte 5.2.2 und 5.2.3) auf.

5.2.1 Lepton-Feldrenormierungskonstanten

Die Lepton-Feldrenormierungskonstanten ergeben sich nach Gleichung (2.72) und (2.73) unter Vernachlässigung der Leptonmasse aus den entsprechenden Selbstenergien bei Impuls 0. Hierbei kann der äußere Impuls aber nicht von vorneherein auf Null gesetzt werden, da ansonsten die Aufteilung in links- und rechtshändigen Anteil der Selbstenergie nicht mehr eindeutig wäre. Daher muss erst die Selbstenergie bei nichtverschwindendem Impuls p berechnet, diese dann in links- und rechtshändigen Anteil aufgeteilt und erst dann der Grenzübergang $p \rightarrow 0$ vollzogen werden. Hierbei können jedoch künstliche IR -Divergenzen auftreten. Deshalb müssen zunächst die Fermionmassen beibehalten, sowie eine Photonmasse als Regulator eingeführt werden. Nachdem man den Grenzübergang $p \rightarrow 0$ durchgeführt hat, erhält man die Feldrenormierungskonstanten, indem man die Teilchenmassen entsprechend ihrer physikalischen Ordnung gegen Null gehen lässt (also zuerst die Photon-, dann die Elektronmasse usw.).

5.2.2 Dreiecksdiagramm mit zwei Photonen

Auch bei der Berechnung der Beiträge von Diagramm aus Abb. 5.1a) im gemischten Schema (siehe Abschnitt 2.3.1), können künstliche IR -Divergenzen auftreten. Deshalb kann man auch hier zunächst die leichten Fermionmassen nicht vernachlässigen und muss zusätzlich eine Photonmasse einführen. Lässt man nach dem Grenzübergang $D \rightarrow 4$ wiederum die Teilchenmassen entsprechend ihrer physikalischen Ordnung gegen Null gehen, so stellt man fest, dass der Beitrag dieses Diagramms zu $\hat{\Gamma}_{(2)}^{Zff}(0)$ nach Summation über alle inneren Fermionen identisch verschwindet.

5.2.3 IR -divergente Diagramme

Die Diagramme aus Abb. 5.1b) sind IR -divergent. Gemeinsam mit dem Produkt aus Ein-schleifen-Beiträgen $\delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)})$ aus (4.13) ergeben sie jedoch einen IR -endlichen

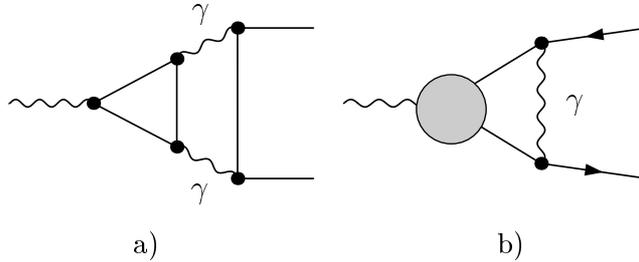


Abbildung 5.1: problematische Zweischleifen-Diagramme

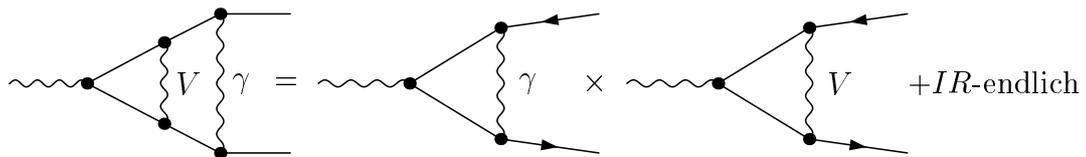


Abbildung 5.2: Kompensation von IR -Divergenzen

Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$, was schematisch in Abb. 5.2 dargestellt ist. Dies wurde explizit überprüft, indem der bosonische Anteil von $\delta g_{A(1)}$ ($\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}$) ebenfalls gemäß

$$\delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}) (P^2) = \delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}) (0) + \{ \delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}) (P^2) - \delta g_{A(1)} (\delta g_{A(1)} - \delta g_{V(1)}) (0) \} \quad (5.6)$$

aufgespalten wurde und anschließend die beiden Term aus (5.6) gemeinsam mit den entsprechenden Beiträgen der Diagramme aus Abb. 5.1b) berechnet wurden. Auch hier mussten wiederum Elektron- und Photonmasse vor dem Grenzübergang $D \rightarrow 4$ eingeführt und anschließend entsprechend ihrer physikalischen Ordnung auf Null gesetzt werden.

Kapitel 6

IR-endliche Zweischleifen-Vertices

In diesem Kapitel werden Methoden zur Berechnung der *IR*-endlichen Zweischleifen-Diagramme vorgestellt, die zur Differenz

$$\Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}}(M_Z^2) - \Gamma_{(2)}^{Z\bar{l}}(0) \quad (6.1)$$

aus Gleichung (4.14) beitragen. Mit den Bezeichnungen aus Anhang B lässt sich dieser Beitrag als Summe von Tensorintegralen der Familien V^{141} , V^{231} , V^{222} , V^{221} und V^{131} schreiben. Unsere Methode zur Berechnung der V^{141} -Diagramme findet sich im folgenden Abschnitt 6.1, während die Berechnung der restlichen Diagramme im Abschnitt 6.2 beschrieben ist. Darüber hinaus treten noch Diagramme wie in Abb. 6.1 auf. Ihr Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ lässt sich als Produkte von Einschleifen-Funktionen schreiben, die leicht berechnet werden können.

Im Folgenden wird die abkürzende Schreibweise

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \quad (6.2)$$

verwendet.

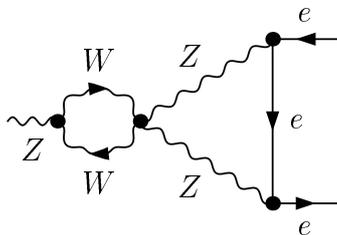
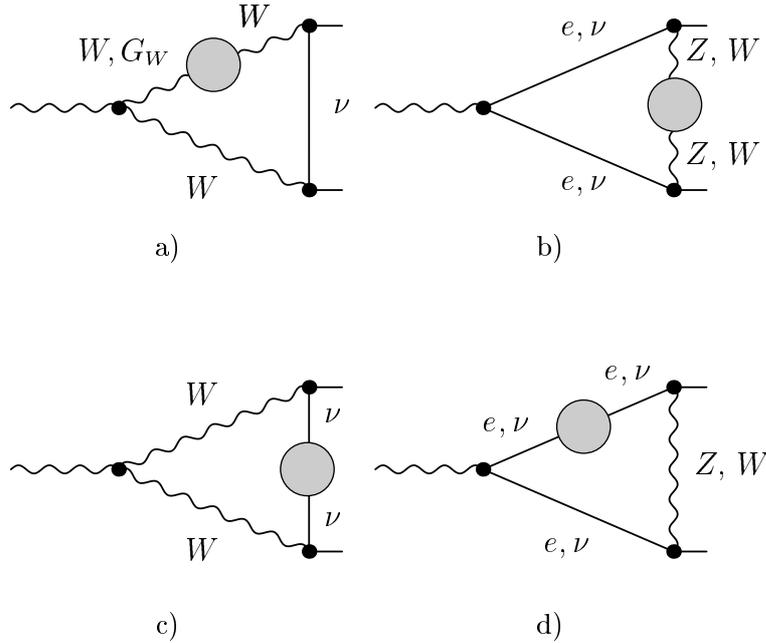


Abbildung 6.1: V^{230} -Diagramm

6.1 V^{141} -Diagramme


 Abbildung 6.2: V^{141} -Diagramme

Alle auftretenden *IR*-endlichen V^{141} -Diagramme sind schematisch in Abb. 6.2 dargestellt. Ihr Beitrag zur Differenz $\Gamma_\mu^{Z\bar{l}}(M_Z^2) - \Gamma_\mu^{Z\bar{l}}(0)$ kann mithilfe von Dispersionsrelationen berechnet werden. Dieses Verfahren wird im Folgenden anhand des Beispiels Abb. 6.2b) mit diagonalen Z -Selbstenergien erklärt. Die anderen Diagramme können analog behandelt werden.

Das entsprechende Vertexdiagramm hat die Struktur

$$\Gamma_\mu(P^2) \sim \int d^D q \gamma^\rho (g_v - g_a \gamma_5) \frac{1}{\not{q} - \not{p}_-} \gamma_\mu (g_v - g_a \gamma_5) \frac{1}{\not{q} + \not{p}_+} \gamma^\sigma (g_v - g_a \gamma_5) \frac{\hat{\Sigma}_{\rho\sigma}(q)}{(q^2 - M_Z^2)^2},$$

$$P^2 = (p_- + p_+)^2. \quad (6.3)$$

Die renormierte Einschleifen-Selbstenergie kann in Transversal- und Longitudinalteil aufgespalten werden,

$$\hat{\Sigma}_{\rho\sigma}(q) = \hat{\Sigma}_T(q^2) \left(g_{\rho\sigma} - \frac{q_\rho q_\sigma}{q^2} \right) + \hat{\Sigma}_L(q^2) \left(\frac{q_\rho q_\sigma}{q^2} \right). \quad (6.4)$$

Es kann leicht verifiziert werden, dass der Teil proportional zu $q_\rho q_\sigma$ für masselose äußere Leptonen einen Term ergibt, der unabhängig von P^2 ist. Dieser Teil trägt somit nicht zur Differenz $\Gamma_\mu^{Zll}(M_Z^2) - \Gamma_\mu^{Zll}(0)$ bei und nur der transversale Anteil muss berücksichtigt werden.

Dieser hat im On-Shell-Schema die folgende Form

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_T(q^2) &= \Sigma_T(q^2) - \mathcal{R}e \Sigma_T(M_Z^2) - (q^2 - M_Z^2) \mathcal{R}e \Sigma'_T(M_Z^2) \\ &= \Sigma_T(q^2) - \Sigma_T(M_Z^2) - (q^2 - M_Z^2) \Sigma'_T(M_Z^2) \\ &\quad + i \mathcal{I}m \Sigma_T(M_Z^2) + i (q^2 - M_Z^2) \mathcal{I}m \Sigma'_T(M_Z^2).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Setzt man die Imaginärteile aus (6.5) in (6.3) ein, so erhält man eine Konstante multipliziert mit Einschleifen-Funktionen. Auf die erste Zeile aus (6.5) wird die folgende Dispersionsrelation angewendet,

$$\Sigma_T(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{I}m \Sigma_T(s)}{s - q^2 - i\epsilon}, \quad (6.6)$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Sigma_T(q^2) - \Sigma_T(M_Z^2) - (q^2 - M_Z^2) \Sigma'_T(M_Z^2) \\ = -\frac{(q^2 - M_Z^2)^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{I}m \Sigma_T(s)}{(s - M_Z^2 - i\epsilon)^2} \frac{1}{(q^2 - s + i\epsilon)}.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Setzt man dies in (6.3) ein, so kürzt der Faktor $(q^2 - M_Z^2)^2$ den entsprechenden Term im Nenner, und man erhält ein eindimensionales Integral über eine Einschleifen-Vertexfunktion mit einer variablen Masse s , multipliziert mit einem Gewichtsfaktor $\mathcal{I}m \Sigma(s) / (s - M_Z^2)^2$. Dadurch, dass der entsprechende Beitrag bei $P^2 = 0$ subtrahiert wird, ist der Ausdruck UV -endlich. Letztendlich verbleiben also Integrale der Form

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ds \frac{f(s)}{(s - M^2 - i\epsilon)^2} &= \int_0^{2M^2} ds \frac{f(s) - f(M^2) - (s - M^2)f'(M^2)}{(s - M^2 - i\epsilon)^2} \\ &\quad + \int_0^{2M^2} ds \frac{f(M^2) + (s - M^2)f'(M^2)}{(s - M^2 - i\epsilon)^2} \\ &\quad + \int_{2M^2}^\infty ds \frac{f(s)}{(s - M^2)^2}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Der zweite Term aus (6.8) kann analytisch berechnet werden. Die beiden anderen Terme in (6.8) weisen keine Singularitäten mehr auf und können numerisch integriert werden. Hierzu wurde die CUBA-Bibliothek [49] verwendet, die eine sehr schnelle und präzise Berechnung der Integrale ermöglicht.

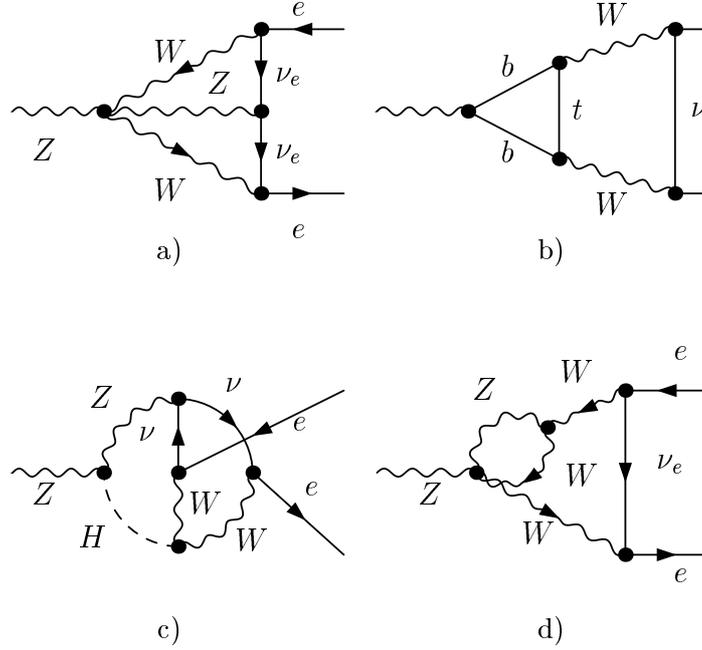


Abbildung 6.3: Beispiel-Diagramme

6.2 V^{221} -, V^{231} -, V^{222} -, und V^{131} -Diagramme

In Abbildung 6.3 finden sich Beispieldiagramme der V^{221} (Abb. 6.3a)–, V^{231} (Abb. 6.3b)–, V^{222} (Abb. 6.3c)– und V^{131} (Abb. 6.3d)–Familie, die zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ beitragen. Zu ihrer Berechnung wurden im Wesentlichen die auf numerischer Integration beruhenden Methoden aus [48] übernommen.

Zur Vereinfachung der Tensorstruktur werden Umformungen der Art

$$\frac{2qp}{(q^2 - m^2)[(q+p)^2 - M^2]} = \frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{1}{(q+p)^2 - M^2} - \frac{p^2 + m^2 - M^2}{(q^2 - m^2)[(q+p)^2 - M^2]}$$

vorgenommen. Damit erhält man eine Summe aus Tensorintegralen bis maximal dritter Stufe der Familien V^{121} , V^{131} , V^{221} , V^{231} sowie der Selbstenergiefamilien S^{111} , S^{121} , S^{131} und Produkte von Einschleifen-Funktionen.

Für all diese Tensorintegrale werden Feynmanparameter eingeführt. Nach der Integration über die Schleifenimpulse werden die Parameter-Integrale analytisch umgeformt, um glatte Integranden zu erhalten, die numerisch integriert werden können. Eine detaillierte

Diskussion finden sich in [48]. Diese Methoden sind für allgemeine äußere Impulskonfigurationen gültig. Darüber hinaus haben wir diese Methoden für masselose äußere Elektronen ($p_1^2 = 0 = p_2^2$) weiterentwickelt. Mit diesen Verbesserungen konnte oftmals die Laufzeit verringert und die numerische Präzision erhöht werden. Diese Neuerungen werden beispielhaft anhand der Diagramme aus Abb. 6.3a)-c) in den Abschnitten 6.2.1, 6.2.2 und 6.2.3 erklärt. Die Tensorintegrale der V^{131} -Familie können außerdem ähnlich wie die V^{141} -Diagramme mittels Dispersionsrelationen berechnet werden. Diese Methode wird in Abschnitt 6.2.4 am Beispiel des Diagramms 6.3d) erläutert.

6.2.1 Berechnung von V^{221}

Bei der Berechnung des Diagramms aus Abb. 6.3a) verbleiben nach der Reduktion aus dem vorigen Abschnitt unter anderem Tensorintegrale bis zur 2. Stufe der V^{221} -Familie. Diese Integrale sind UV -endlich und können in 4 Dimensionen berechnet werden. Sie haben die Form

$$V_{221}^{(1,\mu,\mu\nu)} = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(1, q_i^\mu, q_i^\mu q_j^\nu)}{[1][2][3][4][5]} \quad (6.9)$$

mit den Propagatoren

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2 - M_1^2, & [2] &= (q_1 + p_1)^2 - M_2^2, & [3] &= (q_1 - q_2)^2 - M_3^2, \\ [4] &= (q_2 + p_1)^2 - M_4^2, & [5] &= (q_2 + P)^2 - M_5^2, & & i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Das Diagramm 6.3a) hat die Massenkonfiguration

$$M_1 = M_W = M_5, \quad M_2 = 0 = M_4, \quad M_3 = M_Z. \quad (6.10)$$

In einem ersten Schritt werden die Propagatoren [1] und [2] mit einem Feynmanparameter z_1 und die Propagatoren [4] und [5] mit z_2 kombiniert,

$$\begin{aligned} [12] &= (1 - z_1) [1] + z_1 [2], \\ [45] &= (1 - z_2) [4] + z_2 [5]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Danach fasst man die Propagatoren [12] und [3] mit einem Parameter x zusammen,

$$\begin{aligned} [123] &= (1 - x) [12] + x [3] =: q_1^2 + 2 a_1 q_1 + b_1 \\ (a_1, b_1) &= (a_1, b_1) (z_1, x, M_1, M_2, M_3, p_1, q_2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die q_1 -Abhängigkeit von $V_{221}^{(1)}$ lautet damit

$$V_{221}^{(1)} \sim \int d^4 q_1 \frac{1 - x}{[123]^3} \sim \frac{1 - x}{a_1^2 - b_1}. \quad (6.13)$$

Die q_1 -Integration liefert also den Term $(a^2 - b)$, der quadratisch in q_2 ist und somit als ein neuer Propagator [6] in q_2 aufgefasst werden kann. Dieser wird dann mit dem Propagator [45] kombiniert,

$$[456] = (1 - y) [45] + y [6] =: q_2^2 + 2a_2 q_2 + b_2. \quad (6.14)$$

Die q_2 -Integration kann analog zur q_1 -Integration durchgeführt werden und es ergibt sich unter Ausnutzung von $p_1^2 = 0 = p_2^2$

$$\begin{aligned} V_{221}^{(1)} &= \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{(1-x)(1-y)}{A(P^2, M_i, x, y, z_1) z_2 - B(P^2, M_i, x, y, z_1)}, \\ A(P^2, M_i, x, y, z_1) &=: A = x(1-x)(1-y)(M_4^2 - M_5^2 + P^2 y(1-z_1)), \\ B(P^2, M_i, x, y, z_1) &=: B = M_4^2 x(1-x)(1-y) + y [M_3^2 x + (1-x)(M_1^2(1-z_1) + M_2^2 z_1)], \\ &i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die z_2 -Integration kann analytisch durchgeführt werden,

$$V_{221}^{(1)} = \int_0^1 dx dy dz_1 \frac{(1-x)(1-y)}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{B} \right). \quad (6.16)$$

Die drei verbleibenden Integration kann man numerisch auswerten, da die Nullstellen von A durch den Logarithmus kompensiert werden. Für die numerische Integration wurde wiederum die CUBA-Bibliothek [49] verwendet.

In den Vektorintegralen treten folgende Ausdrücke auf,

$$V_{221}^{(\mu)} \sim \int d^4 q_i \frac{q_i^\mu}{[456]^3} \sim \frac{a_i^\mu}{a_i^2 - b_i}. \quad (6.17)$$

Für $i = 2$ ergibt sich im Vergleich zu (6.13) der zusätzliche Faktor a_2^μ , der linear in z_2 ist. Somit erhält man bei der Berechnung der Vektorintegrale außer Ausdrücken der Form (6.15) auch noch Integrale der Art

$$\int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{(1-x)(1-y) z_2}{A z_2 - B}. \quad (6.18)$$

Allgemein müssen in den Tensorintegrale $V_{221}^{(\mu, \mu\nu)}$ neben Integralen der Form (6.15) auch noch folgende Integrale berechnet werden,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{(1-x)(1-y) z_2^n}{A z_2 - B} \\ &= - \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{(1-x)(1-y) n z_2^{n-1}}{A} \ln \left(1 - \frac{A(1-z_2)}{A-B} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

wobei partiell in z_2 integriert wurde. Auch hier werden die Nullstellen von A durch den Logarithmus kompensiert und die vier Integrationen können numerisch durchgeführt werden.

6.2.2 Berechnung von V^{231}

Das Diagramm 6.3b) trägt zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ unter anderem die folgenden UV -endlichen Tensorintegrale der V^{231} -Familie bei,

$$V_{231}^{(1,\mu,\mu\nu,\mu\nu\rho)} = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(1, q_1^\mu, q_1^\mu q_1^\nu, q_1^\mu q_1^\nu q_1^\rho)}{[1][2][3][4][5][6]} \quad (6.20)$$

mit den Propagatoren

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2 - M_1^2, & [2] &= (q_1 + P)^2 - M_1^2, & [3] &= (q_1 - q_2)^2 - M_3^2, \\ [4] &= q_2^2 - M^2, & [5] &= (q_2 + p_1)^2, & [6] &= (q_2 + P)^2 - M^2. \end{aligned}$$

Das Diagramm 6.3b) hat die Massenkonfiguration

$$M_1 = m_b (\approx 0), \quad M_3 = m_t, \quad M = M_W. \quad (6.21)$$

Zur Berechnung dieser Art von Integralen haben wir neben der Standardmethode aus [48] noch eine Methode entwickelt, die stark an die Methode zur Berechnung IR -divergenter V^{231} -Integrale aus [50] angelehnt ist (vergleiche auch Abschnitt 7.2.2). Diese Methode wird im Folgenden anhand des skalaren Integrals $V_{231}^{(1)}$ erklärt.

Zunächst werden die Propagatoren [1]–[3] mit Feynmanparametern x_1 und x_2 kombiniert,

$$[123] = (1 - x_1) [2] + (x_1 - x_2) [1] + x_2 [3]. \quad (6.22)$$

Aus der q_1 -Integration resultiert wie im vorherigen Abschnitt 6.2.1 ein zusätzlicher Propagator [7], der folgendermaßen mit den restlichen Propagatoren verknüpft wird,

$$[4567] = (1 - y_1) [5] + (y_1 - y_2) [6] + (y_2 - y_3) [4] + y_3 [7]. \quad (6.23)$$

Nach der q_2 -Integration ergibt sich

$$V_{231}^{(1)} = - \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^1 dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \frac{1}{x_2 (1 - x_2)} U^{-2}, \quad (6.24)$$

wobei U quadratisch in y_3 ist,

$$\begin{aligned} U &= a (y_2 - X y_3)^2 + b y_3 + c, \\ X &= \frac{1 - x_1}{1 - x_2}, \\ (a, b, c) &= (a, b, c) (P^2, M_i, x_1, x_2, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Durch die Transformation $y_2 \rightarrow y_2 + X y_3$ wird der Term proportional zu y_3^2 in U eliminiert, so dass die y_3 -Integration ausgeführt werden kann und man erhält

$$V_{231}^{(1)} = C_0 [0, 0, P^2, M^2, 0, M^2] C_0 [M^2, M^2, P^2, M_1^2, M_3^2, M_1^2] + V_{231}^{(1a)} + V_{231}^{(1b)}, \quad (6.26)$$

wobei für die C_0 -Funktion die Konvention

$$C_0 [p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2] = \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int d^4 q_1 \frac{1}{[1][2][3]} \quad (6.27)$$

verwendet wird mit

$$[1] = q_1^2 - M_1^2, \quad [2] = (q_1 + p_1)^2 - M_2^2, \quad [3] = (q_1 + p_1 + p_2)^2 - M_3^2. \quad (6.28)$$

$V_{231}^{(1a)}$ und $V_{231}^{(1b)}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} V_{231}^{(1a)} &= - \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \frac{1}{V} \int_0^1 dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{\bar{X}y_1} \frac{1}{a_1 A + B}, \\ V_{231}^{(1b)} &= - \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \frac{1}{V} \int_0^1 dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_{\bar{X}y_1}^{y_1} \frac{1}{a_2 A + B}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 1 - X, \quad a_1 = \frac{y_2}{\bar{X}}, \quad a_2 = \frac{y_1 - y_2}{\bar{X}}, \\ V &= P^2 (1 - x_1)(x_2 - x_1) + M_1^2 (1 - x_2) + M_3^2 x_2 - M^2 x_2 (1 - x_2), \\ A &= \frac{V}{x_2 (1 - x_2)}, \quad B = M^2 y_1 - P^2 y_2 (y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nach den Transformationen

$$\begin{aligned} V_{231}^{(1a)} &: y_2 \rightarrow y_1 y_2, \quad x_1 \rightarrow x_1 + x_2, \quad x_2 \rightarrow 1 - x_2, \\ &\quad x_2 \leftrightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow x_1 x_2, \quad y_2 \rightarrow x_2 y_2, \\ V_{231}^{(1b)} &: y_2 \rightarrow y_1 (1 - y_2), \quad x_1 \rightarrow 1 - x_1, \quad x_2 \rightarrow 1 - x_2, \\ &\quad x_2 \leftrightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow x_1 x_2, \quad y_2 \rightarrow x_2 y_2, \end{aligned} \quad (6.31)$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} V_{231}^{(1a)} = V_{231}^{(1b)} &= - \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \frac{x_1^2 (1 - x_1) x_2}{V_1} \\ &\quad \times \frac{1}{- [P^2 x_1 (1 - x_1) x_2 y_2 (1 - x_2 y_2)] y_1 + (M^2 x_1 (1 - x_1) + V_1 y_2)}, \\ V_1 &= -P^2 x_1 x_2 (1 - x_2) + M_1^2 x_1 + M_3^2 (1 - x_1) - M^2 (1 - x_1). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Die y_1 -Integration kann analytisch durchgeführt werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{231}^{(1)} &= C_0 [0, 0, P^2, M^2, 0, M^2] C_0 [M^2, M^2, P^2, M_1^2, M_3^2, M_1^2] \\ &\quad + 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_2 \frac{x_1}{V_1 P^2 y_2 (1 - x_2 y_2)} \\ &\quad \times \ln \left(1 - \frac{P^2 x_1 (1 - x_1) x_2 y_2 (1 - x_2 y_2)}{(M^2 x_1 (1 - x_1) + V_1 y_2)} \right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Der Faktor $1/y_2$ wird durch den Logarithmus kompensiert und das verbleibende dreifache Parameterintegral kann numerisch berechnet werden.

6.2.3 Berechnung von V^{222}

Im Beitrag des nichtplanaren Diagramms 6.3c) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ treten die folgenden UV -endlichen Tensorintegrale der V^{222} -Familie auf,

$$V_{222}^{(\mu, \mu\nu)} = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(q_1^\mu, q_1^\mu q_1^\nu)}{[1][2][3][4][5][6]}. \quad (6.34)$$

Die Propagatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2 - M_W^2, & [2] &= (q_1 - p_2)^2, & [3] &= (q_1 - q_2 + p_1)^2 - M_H^2, \\ [4] &= (q_1 - q_2 - p_2)^2 - M_Z^2, & [5] &= q_2^2, & [6] &= (q_2 - p_1)^2 - M_W^2. \end{aligned}$$

Wie in [48] beschrieben, werden die Propagatoren [1] und [2] mit einem Feynman-Parameter z_1 , [3] und [4] mit z_2 und [5] und [6] mit z_3 kombiniert. Danach fasst man die q_1 und $q_1 - q_2$ Propagatoren mit einem Parameter x zusammen. Nach der q_1 -Integration werden die verbleibenden Propagatoren mit einem Parameter y kombiniert und die q_2 -Integration durchgeführt.

An dieser Stelle findet man für $p_{1,2}^2 = 0$ wiederum einen deutlich einfacheren Ausdruck für V_{222} als für allgemeine Impulsconfigurationen, da ausschließlich die Integrale

$$\int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 dz_3 z_3^n (a z_1 z_3 + b z_3 + c z_1 + d)^{-2} \quad (6.35)$$

auftreten, mit $n = 0, 1, 2$.

a,b,c und d sind Funktionen von P^2 , der inneren Massen und der Parameter x, y, z_2 , aber unabhängig von z_1 und z_3 . Für $n = 0$ kann analytisch in z_1 und z_3 integriert werden,

$$\int_0^1 dz_1 dz_3 (a z_1 z_3 + b z_3 + c z_1 + d)^{-2} = \frac{1}{a d - b c} \ln \left(1 + \frac{a d - b c}{(c + d)(b + d)} \right), \quad (6.36)$$

während man für $n = 1, 2$ die z_1 -Integration und eine partielle Integration in z_3 analytisch durchführt,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dz_1 dz_3 z_3^n (a z_1 z_3 + b z_3 + c z_1 + d)^{-2} = \\ &\int_0^1 dz_3 \frac{n z_3^{n-1}}{a d - b c} \ln \left(1 + \frac{(1 - z_3)(a d - b c)}{[(a + b) z_3 + c + d](b + d)} \right). \end{aligned} \quad (6.37)$$

In beiden Fällen erhält man glatte Integranden, die sehr gut numerisch integriert werden können.

6.2.4 Berechnung von V^{131}

Bei der Berechnung des Diagramms aus Abb. 6.3d) treten unter anderem Tensorintegrale bis zur 2. Stufe der V^{131} -Familie auf,

$$V_{131}^{(1,\mu,\mu\nu)} = -\frac{(4\pi^2\mu^2)^{(4-D)}}{\pi^4} \int d^4q_1 \int d^4q_2 \frac{(1, q_1^\mu, q_1^\mu q_1^\nu)}{[1][2][3][4][5]} \quad (6.38)$$

mit den Propagatoren

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2 - M_1^2, & [2] &= (q_1 - q_2)^2 - M_2^2, \\ [3] &= q_2^2 - M_3^2, & [4] &= (q_2 + p_1)^2 - M_4^2, & [5] &= (q_2 + P)^2 - M_5^2. \end{aligned}$$

Im Diagramm 6.3d) gilt

$$M_1 = M_Z, \quad M_2 = M_3 = M_5 = M_W, \quad M_4 = 0. \quad (6.39)$$

Diese Funktionen können außer mit dem Verfahren aus [48] auch noch mithilfe von Dispersionsrelationen ähnlich wie in Abschnitt 6.1 berechnet werden. Dieses Verfahren wird im Folgenden anhand der skalaren Funktion $V_{131}^{(1)}$ erklärt. Die Tensorintegrale höherer Ordnung können analog behandelt werden.

$V_{131}^{(1)}$ ist *UV*-divergent, aber die folgende Kombination ist endlich,

$$\Delta V_{131}^{(1)} := V_{131}^{(1)} - B_0 [M_3^2, M_1^2, M_2^2] C_0 [0, 0, P^2, M_3^2, M_4^2, M_5^2]. \quad (6.40)$$

Unsere Konvention für die C_0 -Funktion ist in (6.27) gegeben und die B_0 -Funktion ist wie üblich definiert,

$$B_0 [P^2, M_1^2, M_2^2] := \frac{(2\pi\mu)^{(4-D)}}{i\pi^2} \int d^4q_1 \frac{1}{[q_1^2 - M_1^2] [(q_1^2 + P)^2 - M_2^2]}. \quad (6.41)$$

Sie erfüllt die Dispersionrelation

$$B_0 [P^2, M_1^2, M_2^2] := \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{I}m B_0 [s, M_1^2, M_2^2]}{\pi (s - P^2)}. \quad (6.42)$$

Wendet man diese Relation auf die Propagatoren [1] und [2] aus (6.38) sowie auf $B_0 [M_3^2, M_1, M_2]$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta V_{131}^{(1)} &:= - \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{I}m B_0 [s, M_1^2, M_2^2]}{\pi (s - M_3^2 - i\epsilon)} \frac{[3]}{q_2^2 - s} \frac{1}{[3][4][5]} \\ &= - \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{I}m B_0 [s, M_1^2, M_2^2] C_0 [0, 0, P^2, s, M_4^2, M_5^2]}{(s - M_3^2 - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Letztendlich verbleiben also Integrale der Form

$$\int_0^\infty ds \frac{f(s)}{(s - M^2 - i\epsilon)} = \int_0^{2M^2} ds \frac{f(s) - f(M^2)}{(s - M^2 - i\epsilon)} + \int_0^{2M^2} ds \frac{f(M^2)}{(s - M^2 - i\epsilon)} + \int_{2M^2}^\infty ds \frac{f(s)}{(s - M^2)}. \quad (6.44)$$

Der zweite Term aus (6.44) kann analytisch berechnet werden. Die beiden anderen Terme in (6.44) weisen keine Singularitäten mehr auf und können numerisch integriert werden.

Kapitel 7

IR-divergente Zweischleifen-Vertices

Wie in Abschnitt 2.3.2 ausgeführt können Schleifen-Integrale *IR*-divergent sein. In diesem Kapitel werden die Methoden zur Behandlung dieser Divergenzen beschrieben. Hierbei wird zwischen fermionischen (Abschnitt 7.1) und bosonischen (Abschnitt 7.2) Beiträgen unterschieden. Die fermionischen Beiträge umfassen alle Diagramme mit mindestens einer geschlossenen Fermionschleife, die bosonischen alle Diagramme ohne geschlossene Fermionschleifen.

Auch in diesem Kapitel wird wieder die abkürzende Schreibweise

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \quad (7.1)$$

verwendet.

7.1 Fermionische Beiträge

Nach der Klassifikation aus Abschnitt 2.3.2 können kollineare Divergenzen in den fermionischen Diagrammen aus Abbildung 7.1 auftreten. Das V^{141} -Diagramm 7.1a) ist für fermionische Einsetzungen in die γZ -Mischung jedoch endlich und kann mit Dispersionsrelationen, ähnlich wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, berechnet werden.

Die beiden Diagramme 7.1b) und 7.1c) verschwinden identisch im naiv antikommutierenden Schema für die Behandlung von γ_5 in D Dimensionen (vgl. Abschnitt 2.3.1). Im HVBM-Schema gilt dies nur für eine Generation von Fermionen mit entarteten Massen, während sich bei unterschiedlichen Fermionmassen ein von Null verschiedener Beitrag ergibt. Da in unserer Rechnung die leichten Fermionmassen vernachlässigt werden, trägt also nur die dritte Generation von Fermionen bei.

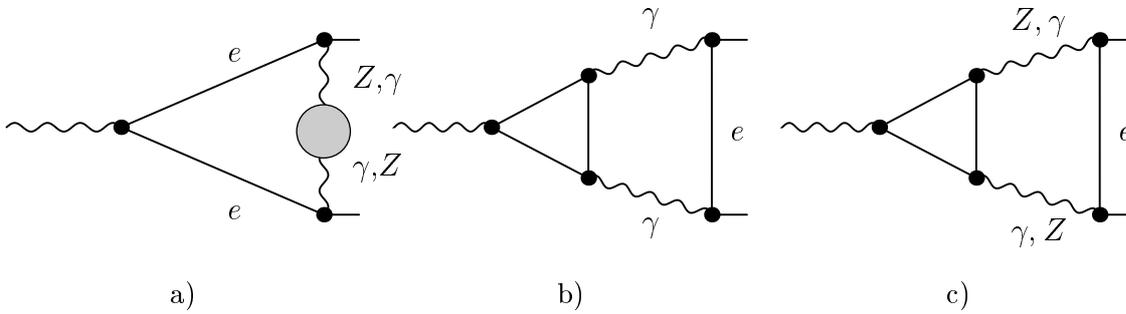


Abbildung 7.1: fermionische Diagramme

Für exakt masselose äußere Elektronen würden die auftretenden kollinearen Divergenzen zu einem endlichen Unterschied zwischen HVBM- und dem in dieser Arbeit verwendeten gemischten Schema führen. Daher wurden in diesen Diagrammen die kollinearen Divergenzen durch die physikalische Elektronmasse regularisiert. Aus Konsistenzgründen wurden darüber hinaus auch die physikalischen Massen des b -Quarks und des τ in der Fermionenschleife beibehalten.

Nach der in Abschnitt 6.2 beschriebenen Reduktion treten im Beitrag des Diagramms 7.1c) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ auch Integrale auf, die soft-Divergenzen aufweisen. Ein typisches Beispiel ist das skalare Integral aus der V^{231} -Familie, das die folgende Struktur besitzt,

$$\begin{array}{c} \gamma \\ \diagup \quad \diagdown \\ Z \quad \quad Z \end{array} = \begin{array}{c} \gamma \\ \diagup \quad \diagdown \\ Z \quad \quad Z \end{array} \times \begin{array}{c} \gamma \\ \diagup \quad \diagdown \\ Z \quad \quad Z \end{array} + \text{endliche Terme.} \quad (7.2)$$

Das zweite Einschleifen-Diagramm auf der rechten Seite von Gleichung (7.2) ist soft-divergent. Das gesamte Diagramm aus Abbildung 7.1c) ist jedoch endlich. Dies wurde überprüft indem in allen divergente Formfaktoren die soft-Divergenzen als divergente Einschleifen-Funktionen abgespalten wurden. Anschließend wurde analytisch verifiziert, dass die Summe dieser divergente Funktionen Null ergibt. Die Methoden zur Extraktion der soft-Divergenzen sind in [50] beschrieben und sind analog zum Verfahren aus Abschnitt 7.2.2.

7.2 Bosonische Beiträge

In den bosonischen Beiträgen treten sowohl rein kollinear divergente Diagramme auf (Abschnitt 7.2.1), als auch solche, in denen soft- und kollineare Divergenzen überlappen (Abschnitt 7.2.2). Die soft-Divergenzen lassen sich als divergente Einschleifen-Vertices abspalten. Hierfür wurden die Methoden aus [50] übernommen.

Die verbleibenden soft-endlichen Terme weisen aber immer noch kollineare Divergenzen auf, die durch Beibehaltung der Elektronmasse regularisiert und als Logarithmen der Elektronmasse extrahiert werden können. Hierfür wurden neue Methoden entwickelt, die in den beiden folgenden Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2 beschrieben sind.

7.2.1 Kollineare Divergenzen

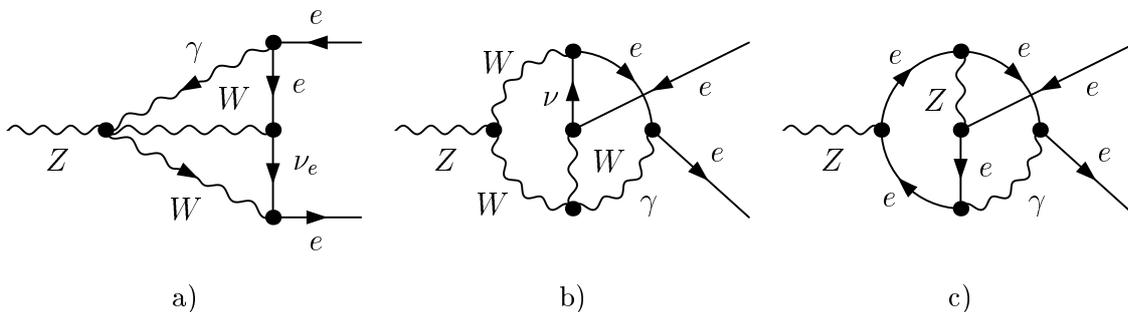


Abbildung 7.2: bosonische Diagramme mit kollinearen Divergenzen

Beispiele für rein kollinear divergente Diagramme finden sich in Abbildung 7.2. Bei der Berechnung der nicht-planaren Diagramme 7.2b) und 7.2c) müssen V^{222} -Integrale berechnet werden. Die Methode für die IR -endlichen V^{222} -Integrale aus Abschnitt 6.2.3 kann dabei nicht angewendet werden, da dort verwendet wurde, dass beide äußeren Elektronen masselos sind. Zur Regularisierung der kollinearen Divergenzen muss aber mindestens eines der beiden Elektronen als massiv angenommen werden.

Zunächst wird jedoch die allgemeine Methode zur Extraktion der kollinearen Divergenzen anhand des relativ einfachen Beispiels der V^{221} -Integrale, die in der Tensorreduktion des Diagramms 7.2a) auftreten, erklärt.

V^{221} -Integrale

Die V^{221} -Integrale, die in 7.2a) auftreten, lauten

$$V_{221}^{(1,\mu,\mu\nu)} = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(1, q_i^\mu, q_i^\mu q_j^\nu)}{[1][2][3][4][5]} \quad (7.3)$$

mit den Propagatoren

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2, & [2] &= (q_1 + p_1)^2 - m_e^2, & [3] &= (q_1 - q_2)^2 - M_3^2, \\ [4] &= (q_2 + p_1)^2 - M_4^2, & [5] &= (q_2 + P)^2 - M_5^2, & & i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Während weiterhin $p_2^2 = 0$ gesetzt werden kann, wird $p_1^2 = m_e^2$ zur Regularisierung der kollinearen Divergenz verwendet.

Mit der Parametrisierung aus Abschnitt 6.2.1 ergibt sich für das skalare Integral

$$V_{221}^{(1)} = -\int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{(1-y)(1-x)}{x(a x + b) + m_e^2 f(x)}. \quad (7.4)$$

a und b sind Funktionen von M_3, M_4, M_5, P^2 sowie der Feynmanparameter y, z_1 und z_2 . $a x + b$ und b sind jeweils linear in z_2 ,

$$a x + b = \alpha_0 z_2 + \beta_0, \quad b = \alpha_1 z_2 + \beta_1, \quad (7.5)$$

und es gelten die Relationen

$$a + b = M_3^2 y, \quad f(0) = y z_1^2. \quad (7.6)$$

Für $m_e^2 = 0$ ist $V_{221}^{(1)}$ divergent in $x = 0$. Allgemein kann aus einer Funktion

$$f(x) = \int_0^1 dx \frac{a(x)}{x b(x) + \epsilon c(x)}, \quad \epsilon \ll 1, \quad (7.7)$$

das divergente Verhalten für $\epsilon \rightarrow 0$ wie folgt als $\ln(\epsilon)$ extrahiert werden,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 dx \left(\frac{a(x)}{x b(x) + \epsilon c(x)} - \frac{a(0)}{x b(0) + \epsilon c(0)} \right) + \int_0^1 dx \frac{a(0)}{x b(0) + \epsilon c(0)} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{x} \left(\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{a(0)}{b(0)} \right) + \frac{a(0)}{b(0)} [\ln(b(0)) - \ln(\epsilon) - \ln(c(0))] + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Der erste Term ist endlich, da der Faktor $1/x$ durch die Nullstelle in $x = 0$ des Ausdrucks in der Klammer kompensiert wird. Deshalb wurde dort $\epsilon = 0$ gesetzt. Im zweiten Term wurde in x integriert.

In den folgenden Beispielen treten darüber hinaus noch Terme der Art

$$g(x, y) = \int_0^1 dx dy \frac{xy a(x, y)}{(xy b(x, y) + \epsilon c(x, y))^2}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (7.9)$$

auf, die für $\epsilon = 0$ divergent in zwei Punkten (in diesem Beispiel in $x = 0$ und $y = 0$) des Integrationsbereichs sind. Hier kann die folgende Aufteilung vorgenommen werden,

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \int_0^1 dx dy \left(\frac{xy a(x, y)}{(xy b(x, y) + \epsilon c(x, y))^2} - \frac{xy a(0, y)}{(xy b(0, y) + \epsilon c(0, y))^2} \right. \\ & \left. - \frac{xy a(x, 0)}{(xy b(x, 0) + \epsilon c(x, 0))^2} + \frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \right) \\ & + \int_0^1 dx dy \left(\frac{xy a(0, y)}{(xy b(0, y) + \epsilon c(0, y))^2} - \frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \right) \\ & + \int_0^1 dx dy \left(\frac{xy a(x, 0)}{(xy b(x, 0) + \epsilon c(x, 0))^2} - \frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \right) \\ & + \int_0^1 dx dy \left(\frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Der erste Term ist endlich und es kann hier $\epsilon = 0$ gesetzt werden. Der zweite Term ist für $\epsilon = 0$ nur noch divergent in $x = 0$. Diese Divergenz wird durch Integration in x extrahiert,

$$\int_0^1 dx dy \left(\frac{xy a(0, y)}{(xy b(0, y) + \epsilon c(0, y))^2} - \frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \right) \quad (7.11)$$

$$= \int_0^1 dy \frac{1}{y} \left(\frac{a(0, y)}{b(0, y)^2} [\ln(b(0, y)) + \ln(y) - 1 - \ln(\epsilon) - \ln(c(0, y))] \right) \quad (7.12)$$

$$- \frac{a(0, 0)}{b(0, 0)^2} [\ln(b(0, 0)) + \ln(y) - 1 - \ln(\epsilon) - \ln(c(0, 0))] \Big) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (7.13)$$

Der Faktor $1/y$ wird durch die Nullstelle in $y = 0$ des Ausdrucks in der Klammer kompensiert.

Der dritte Term wird völlig analog in y integriert. Der vierte Term enthält die doppelte Divergenz in $x = 0$ und $y = 0$. Dieses divergente Verhalten kann durch Integration in x und y als Terme proportional zu $\ln(\epsilon)$ und $\ln^2(\epsilon)$ abgespalten werden,

$$\int_0^1 dx dy \frac{xy a(0, 0)}{(xy b(0, 0) + \epsilon c(0, 0))^2} \quad (7.14)$$

$$= \frac{a(0, 0)}{b(0, 0)^2} \left[\ln(c(0, 0)) + \ln(\epsilon) - \ln(b(0, 0)) - \text{Li}_2 \left(-\frac{b(0, 0)}{c(0, 0)\epsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (7.15)$$

Entwickelt man den Dilogarithmus mit Hilfe der Relation

$$\text{Li}_2 \left(-\frac{A}{\epsilon} \right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} [\ln(A) - \ln(\epsilon)]^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (7.16)$$

in ϵ , so ergibt sich ein Term proportional zu $\ln(\epsilon)^2$.

Das Verfahren (7.8) kann nun auf $V_{221}^{(1)}$ angewendet werden,

$$\begin{aligned}
 V_{221}^{(1)} &= (1-y) \left(V_{221}^{(1a)} + V_{221}^{(1b)} + V_{221}^{(1c)} \right) \\
 &= \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 (1-y) \left[\left(\frac{x}{x(ax+b) + m_e^2 f(x)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{x(ax+b) + m_e^2 f(x)} - \frac{1}{bx + m_e^2 f(0)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{bx + m_e^2 f(0)} \right) \right]. \tag{7.17}
 \end{aligned}$$

Im Folgenden werden nicht mehr alle Integrationen explizit ausgeschrieben.

$V_{221}^{(1a)}$ und $V_{221}^{(1b)}$ sind endlich und m_e kann dort gleich Null gesetzt werden. Das gesamte divergente Verhalten ergibt sich aus $V_{221}^{(1c)}$. Die einzelnen Terme berechnen sich unter Berücksichtigung von (7.5) zu

$$\begin{aligned}
 V_{221}^{(1a)} &= - \int_0^1 dz_2 \frac{1}{\alpha_0 z_2 + \beta_0} = - \frac{1}{\alpha_0} \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right), \\
 V_{221}^{(1b)} &= \int_0^1 dx \frac{a}{b(ax+b)} = \frac{\ln(a+b) - \ln(b)}{b}, \\
 V_{221}^{(1c)} &= - \frac{1}{bx + m_e^2 f(0)} = - \frac{\ln(b) - \ln(m_e^2) - \ln(f(0))}{b}. \tag{7.18}
 \end{aligned}$$

$V_{221}^{(1a)}$ kann direkt numerisch integriert werden. Da nach (7.6) $a+b$ und $f(0)$ unabhängig von z_2 sind, treten in $V_{221}^{(1b)}$ und $V_{221}^{(1c)}$ ausschließlich Integrale der folgenden Art auf,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dz_2 \frac{1}{b} &= \int_0^1 dz_2 \frac{1}{\alpha_1 z_2 + \beta_1} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)}{\alpha_1}, \\
 \int_0^1 dz_2 \frac{\ln(b)}{b} &= \frac{\ln(\alpha_1 + \beta_1)^2 - \ln(\beta_1)^2}{2\alpha_1}. \tag{7.19}
 \end{aligned}$$

Auch diese Ausdrücke sind direkt zur numerischen Integration geeignet.

Der divergente Anteil von $V_{221}^{(1)}$ ergibt sich also zu

$$V_{221}^{(1)} = \int_0^1 dz_1 dy \ln(m_e^2) (1-y) \frac{\ln \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)}{\alpha_1} + \text{endliche Anteile}. \tag{7.20}$$

Bei der Berechnung der Vektor- und Tensorintegrale $V_{221}^{(\mu, \mu\nu)}$ wie in Abschnitt 6.2.1 treten neben Integralen der Art (7.4) auch noch folgende Ausdrücke auf,

$$\int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{x^n z_2^m}{x(ax+b) + m_e^2 f(x)}. \tag{7.21}$$

Für $n > 0$ wird die Divergenz von dem zusätzlichen Faktor x^n kompensiert, so dass der Term proportional zu m_e^2 im Nenner vernachlässigt werden kann. Partielle Integration in z_2 ergibt

$$\int_0^1 dz_2 \frac{x^n z_2^m}{x(ax+b)} = -\frac{m z_2^{m-1} x^{n-1}}{\alpha_1} \ln \left(1 - \frac{\alpha_1 (1-z_2)}{\alpha_1 + \beta_1} \right), \quad n > 0. \quad (7.22)$$

Für $n = 0$ kann wieder die gleiche Aufteilung wie in (7.17) vorgenommen werden und man erhält analog zu (7.19) die Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz_2 \frac{z_2^m}{\alpha_i z_2 + \beta_i} &= -\frac{m z_2^{m-1}}{\alpha_i} \ln \left(1 - \frac{\alpha_i (1-z_2)}{\alpha_i + \beta_i} \right), \quad i = 1, 2, \\ \int_0^1 dz_2 \frac{z_2^m \ln(b)}{b} &= \frac{m z_2^{m-1} [\ln(\alpha_1 + \beta_1)^2 - \ln(\alpha_1 z_2 + \beta_1)^2]}{2\alpha_1}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

V^{222} : 2 innere Fermionen

Der Beitrag des nichtplanaren Diagramms 7.2b) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ enthält Integrale der V^{222} -Familie,

$$V_{222}^{(1,\mu,\mu\nu,\mu\nu\rho)} = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(1, q_1^\mu, q_1^\mu q_1^\nu, q_1^\mu q_1^\nu q_1^\rho)}{[1][2][3][4][5][6]}. \quad (7.24)$$

Die Propagatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2, & [2] &= (q_1 - p_2)^2 - m_e^2, & [3] &= (q_1 - q_2 + p_1)^2 - M_W^2, \\ [4] &= (q_1 - q_2 - p_2)^2 - M_W^2, & [5] &= q_2^2, & [6] &= (q_2 - p_1)^2 - M_W^2. \end{aligned}$$

Zur Regularisierung der kollinearen Divergenzen wird $p_2^2 = m_e^2$ verwendet, während $p_1^2 = 0$ gesetzt werden kann.

Mit der Parametrisierung aus Abschnitt 6.2.3 ergibt sich damit für das skalare Integral

$$V_{222}^{(1)} = \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 dz_3 \frac{y(1-y)x(1-x)}{(x(ax+b) + m_e^2 c(x))^2}. \quad (7.25)$$

a , b und $c(x)$ sind Funktionen von M_W , P^2 und der Feynman-Parameter y , z_1 , z_2 und z_3 . b ist linear in z_1 und z_3 ,

$$b = \alpha z_1 z_3 + \beta z_1 + \gamma z_3 + \delta, \quad (7.26)$$

und es gelten die Relationen

$$c(0) = (1-y)z_1^2, \quad a+b = (1-y) [M_W^2 - P^2 z_2 (1-z_2)]. \quad (7.27)$$

Im Folgenden werden erneut nicht mehr alle Integrationen explizit ausgeschrieben.

Aus (7.25) ist ersichtlich, dass $V_{222}^{(1)}$ für $m_e^2 = 0$ divergent in $x = 0$ ist. Dieses divergente Verhalten kann durch eine Aufteilung ähnlich wie in (7.8) wiederum als Term proportional zu $\ln(m_e^2)$ extrahiert werden,

$$\begin{aligned} V_{222}^{(1)} &= y(1-y) \left(V_{222}^{(1a)} + V_{222}^{(1b)} \right) \\ &= y(1-y) \left[\left(\frac{x(1-x)}{(x(ax+b) + m_e^2 c(x))^2} - \frac{x}{(xb + m_e^2 c(0))^2} \right) + \frac{x}{(xb + m_e^2 c(0))^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

$V_{222}^{(1a)}$ ist nicht mehr divergent, weshalb dort $m_e^2 = 0$ gesetzt werden kann.

$$\begin{aligned} V_{222}^{(1a)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{x} \left(\frac{(1-x)}{(ax+b)^2} - \frac{1}{b^2} \right) = - \int_0^1 dx \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{ax+b} + \frac{b(a+b)}{(ax+b)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{b^2} [\ln(a+b) - \ln(b) + 1]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

In $V_{222}^{(1b)}$ kann die Divergenz durch Integration in x abgespalten werden,

$$V_{222}^{(1b)} = -\frac{1}{b^2} [\ln(m_e^2) + \ln(c(0)) - \ln(b) + 1]. \quad (7.30)$$

Unter Berücksichtigung von (7.26) und (7.27) verbleiben also mit $d := \alpha\delta - \beta\gamma$ Integrale der Art,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{1}{b^2} &= \int_0^1 \frac{dz_1 dz_3}{(\alpha z_1 z_3 + \beta z_1 + \gamma z_3 + \delta)^2} = \frac{1}{d} \ln \left(1 + \frac{d}{(\beta + \delta)(\gamma + \delta)} \right), \\ \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{\ln(z_1)}{b^2} &= \frac{1}{d} \left[\text{Li}_2 \left(-\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{\beta}{\delta} \right) \right], \\ \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{\ln(b) - 1}{b^2} &= \frac{1}{d} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\beta + \delta)} \right) \right. \\ &\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha\delta} \right) \\ &\quad - \ln(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} \right) \\ &\quad + \ln(\beta + \delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\beta + \delta)} \right) \\ &\quad \left. + \ln(\gamma + \delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) - \ln(\delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha\delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Bei der Berechnung der Vektor- und Tensorintegrale $V_{222}^{(\mu, \mu\nu, \mu\nu\rho)}$ treten darüber hinaus noch folgende Integrale auf ($m > 0$),

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{z_3^m}{b^2} &= \int_0^1 dz_3 \frac{mz_3^{m-1}}{d} \ln \left(1 + \frac{(1-z_3)d}{(\gamma+\delta)((\alpha+\gamma)z_3 + \beta + \delta)} \right), \\
 \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{z_3^m \ln(z_1)}{b^2} &= \int_0^1 dz_3 \frac{mz_3^{m-1}}{d} \left[\text{Li}_2 \left(-\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{\alpha z_3 + \beta}{\gamma z_3 + \delta} \right) \right], \\
 \int_0^1 dz_1 dz_3 \frac{z_3^m (\ln(b) - 1)}{b^2} &= \int_0^1 dz_3 \frac{mz_3^{m-1}}{d} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \right) \right. \\
 &\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha((\alpha+\gamma)z_3 + \beta + \delta)} \right) \\
 &\quad - \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\gamma+\delta)} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{d}{\alpha(\gamma z_3 + \delta)} \right) \\
 &\quad - \ln(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \right) \\
 &\quad + \ln((\alpha+\gamma)z_3 + \beta + \delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha((\alpha+\gamma)z_3 + \beta + \delta)} \right) \\
 &\quad + \ln(\gamma+\delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\gamma+\delta)} \right) \\
 &\quad \left. - \ln(\gamma z_3 + \delta) \ln \left(1 - \frac{d}{\alpha(\gamma z_3 + \delta)} \right) \right]. \tag{7.32}
 \end{aligned}$$

V^{222} : 4 innere Fermionen

Auch der Beitrag des Diagramms 7.2c) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ beinhaltet Integrale der V^{222} -Familie,

$$\begin{aligned}
 V_{222}^{(1, \mu, \mu\nu, \mu\nu\rho)} &= -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{(1, q_1^\mu, q_1^\mu q_1^\nu, q_1^\mu q_1^\nu q_1^\rho)}{[1][2][3][4][5][6]}, \tag{7.33} \\
 [1] &= q_1^2 - M_Z^2, & [2] &= (q_1 - p_2)^2 - m_e^2, & [3] &= (q_1 - q_2 + p_1)^2 - m_e^2, \\
 [4] &= (q_1 - q_2 - p_2)^2 - m_e^2, & [5] &= q_2^2, & [6] &= (q_2 - p_1)^2 - m_e^2.
 \end{aligned}$$

In dieser Konfiguration sind auch die inneren Elektronen, die an das Photon koppeln, für gewisse Werte der Schleifenimpulse on-shell. Somit weisen die Integrale dieser Familie eine doppelte kollineare Divergenz auf. Um dieses divergente Verhalten zu regularisieren, müssen die Massen aller inneren Elektronen beibehalten und $p_1^2 = m_e^2 = p_2^2$ verwendet werden. Im Weiteren wird das skalare Integral $V_{222}^{(1)}$ betrachtet, die Berechnung der Vektorintegrale erfolgt ähnlich wie in den beiden vorherigen Fällen der V^{221} - und der V^{222} -Integrale mit zwei inneren Elektronen.

Mit der Parametrisierung aus Abschnitt 6.2.3 und den zusätzlichen Parametertransformationen $z_{2,3} \rightarrow 1 - z_{2,3}$, $z_1 \leftrightarrow z_3$ und $y \rightarrow 1 - y$ ergibt sich unter Verwendung von $P^2 = M_Z^2$

$$V_{222}^{(1)} = \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 dz_3 \frac{x(1-x)y(1-y)}{[M_Z^2 x(z_1 A(z_2, x) + z_2 B(z_2, x)) + m_e^2 f(x, z_1, z_2)]^2}. \quad (7.34)$$

Für $m_e^2 = 0$ divergiert $V_{222}^{(1)}$ in $x = 0$ und in $z_1 = 0 = z_2$.

Der Term $z_1 A(z_2, x) + z_2 B(z_2, x)$ ist linear in x ,

$$\begin{aligned} z_1 A(z_2, x) + z_2 B(z_2, x) &=: \alpha_1 x + \beta_1, \\ z_1 A(0, x) + z_2 B(0, x) &=: \alpha_2 x + \beta_2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

β_1 und β_2 sind wiederum linear in z_1 und z_3 ,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -y(1-y)z_1 z_3 + (1-y)(1+yz_2)z_1 + z_2(1-y)y z_3 - y z_2(1-yz_2), \\ \beta_2 &= -y(1-y)z_1 z_3 + (1-y)z_1 + z_2(1-y)y z_3 - y z_2 \end{aligned} \quad (7.36)$$

und es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= -y(1-z_2)z_2, & \alpha_2 + \beta_2 &= -y z_2, \\ f(0, z_1, z_2) &= y z_3^2 = f(0, 0, 0), & A(0, x) &= (1-x)(1-y)(1-yz_3), \\ B(0, x) &= -y(1-z_3+xz_3(1-y)+yz_3), & A(0, 0) + B(0, 0) &= 1-2y. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Zur Berechnung von $V_{222}^{(1)}$ wird eine ähnliche Aufteilung wie in (7.10) vorgenommen,

$$\begin{aligned} \frac{V_{222}^{(1)}}{y(1-y)} &= V_{222}^{(1a)} + V_{222}^{(1b)} + V_{222}^{(1c)} + V_{222}^{(1d)} \\ &= \left(\frac{x(1-x)}{[M_Z^2 x(z_1 A(z_2, x) + z_2 B(z_2, x)) + m_e^2 f(x, z_1, z_2)]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(z_2, 0) + z_2 B(z_2, 0)) + m_e^2 f(0, z_1, z_2)]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x(1-x)}{[M_Z^2 x(z_1 A(0, x) + z_2 B(0, x)) + m_e^2 f(x, 0, 0)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(0, 0) + z_2 B(0, 0)) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \\ &+ \left(\frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(z_2, 0) + z_2 B(z_2, 0)) + m_e^2 f(0, z_1, z_2)]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(0, 0) + z_2 B(0, 0)) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{x(1-x)}{[M_Z^2 x (z_1 A(0, x) + z_2 B(0, x)) + m_e^2 f(x, 0, 0)]^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{x}{[M_Z^2 x (z_1 A(0, 0) + z_2 B(0, 0)) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \\
 & + \left(\frac{x}{[M_Z^2 x (z_1 A(0, 0) + z_2 B(0, 0)) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right). \quad (7.38)
 \end{aligned}$$

$V_{222}^{(1a)}$ ist endlich, weshalb dort $m_e = 0$ gesetzt werden kann. $V_{222}^{(1b)}$ und $V_{222}^{(1c)}$ sind nur noch einfach divergent (in $x = 0$ bzw. $z_1 = 0 = z_2$). $V_{222}^{(1d)}$ ist divergent in $x = 0$ und $z_1 = 0 = z_2$.

Unter Berücksichtigung von (7.35), (7.36) und (7.37) berechnen sich die einzelnen Terme zu:

•

$$\begin{aligned}
 M_Z^4 V_{222}^{(1a)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{(\alpha_1 x + \beta_1)^2} - \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1-x}{(\alpha_2 x + \beta_2)^2} + \frac{1}{\beta_2^2} \right) \\
 &= \frac{\ln(\beta_1) - 1}{\beta_1^2} - \frac{\ln(\beta_2) - 1}{\beta_2^2} - \frac{\ln(\alpha_1 + \beta_1)}{\beta_1^2} + \frac{\ln(\alpha_2 + \beta_2)}{\beta_2^2}. \quad (7.39)
 \end{aligned}$$

Die resultierenden Ausdrücke sind von der gleichen Form wie die Terme in (7.31) und können wie dort angegeben in z_1 und z_3 integriert werden.

•

$$\begin{aligned}
 M_Z^4 V_{222}^{(1b)} &= M_Z^4 \int_0^1 dx \left(\frac{x}{(M_Z^2 x \beta_1 + m_e^2 y z_3^2)^2} - \frac{x}{(M_Z^2 x \beta_2 + m_e^2 y z_3^2)^2} \right) \\
 &= \frac{\ln(\beta_1) - 1}{\beta_1^2} + \frac{\ln(M_Z^2) - \ln(m_e^2) - \ln(y)}{\beta_1^2} - \frac{2 \ln(z_3)}{\beta_1^2} \\
 &\quad - \frac{\ln(\beta_2) - 1}{\beta_2^2} - \frac{\ln(M_Z^2) - \ln(m_e^2) - \ln(y)}{\beta_2^2} + \frac{2 \ln(z_3)}{\beta_2^2}. \quad (7.40)
 \end{aligned}$$

Auch diese Ausdrücke sind alle vom gleichen Typ wie die Terme in (7.31) und können entsprechend in z_1 und z_3 integriert werden.

•

$$\begin{aligned}
 M_Z^4 V_{222}^{(1c)} &= M_Z^4 \int_0^1 dz_1 dz_2 \left(\frac{x(1-x)}{[M_Z^2 x(z_1 A(0,x) + z_2 B(0,x)) + m_e^2 f(x,0,0)]^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(0,0) + z_2 B(0,0)) + m_e^2 f(0,0,0)]^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{x} \left(\frac{(1-x) [\ln(A(0,x) + B(0,x)) - \ln(A(0,x)) - \ln(B(0,x))]}{A(0,x) B(0,x)} \right. \\
 &\quad - \frac{\ln(A(0,0) + B(0,0)) - \ln(A(0,0)) - \ln(B(0,0))}{A(0,0) B(0,0)} \\
 &\quad - \frac{(1-x) [\ln(M_Z^2) + \ln(x) - \ln(m_e^2) - \ln(f(x,0,0))]}{A(0,x) B(0,x)} \\
 &\quad \left. + \frac{\ln(M_Z^2) + \ln(x) - \ln(m_e^2) - \ln(f(0,0,0))}{A(0,0) B(0,0)} \right). \tag{7.41}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann direkt numerisch integriert werden, da der Faktor $1/x$ durch die Nullstelle des Ausdrucks in der Klammer in $x = 0$ kompensiert wird und auch die Terme $1 - x$, y und $1 - y$, die in $A(0, x)$ und $B(0, x)$ auftreten, durch die entsprechenden Faktoren im Zähler kompensiert werden (siehe (7.41) und (7.38)).

•

$$\begin{aligned}
 M_Z^4 V_{222}^{(1d)} &= M_Z^4 \int_0^1 dx dz_1 dz_2 \frac{x}{[M_Z^2 x(z_1 A(0,0) + z_2 B(0,0)) + m_e^2 f(0,0,0)]^2} \\
 &= \frac{1}{A(0,0) B(0,0)} \left[\text{Li}_2 \left(-\frac{A(0,0) + B(0,0)}{m_e^2 f(0,0,0)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2 \left(-\frac{A(0,0)}{m_e^2 f(0,0,0)} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{B(0,0)}{m_e^2 f(0,0,0)} \right) \right]. \tag{7.42}
 \end{aligned}$$

Die Dilogarithmen können nach (7.16) in m_e entwickelt werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 M_Z^4 V_{222}^{(1d)} &= \frac{1}{A(0,0) B(0,0)} \times \\
 &\quad \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} [\ln(A(0,0) + B(0,0)) - \ln(m_e^2) - \ln(f(0,0,0))]^2 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} [\ln(A(0,0)) - \ln(m_e^2) - \ln(f(0,0,0))]^2 \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} [\ln(B(0,0)) - \ln(m_e^2) - \ln(f(0,0,0))]^2 \right). \tag{7.43}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der doppelten Singularität tritt hier also ein Term proportional zu $\ln^2(m_e^2)$ auf. Alle Ausdrücke sind direkt zur numerischen Integration geeignet.

7.2.2 Überlappende Divergenzen

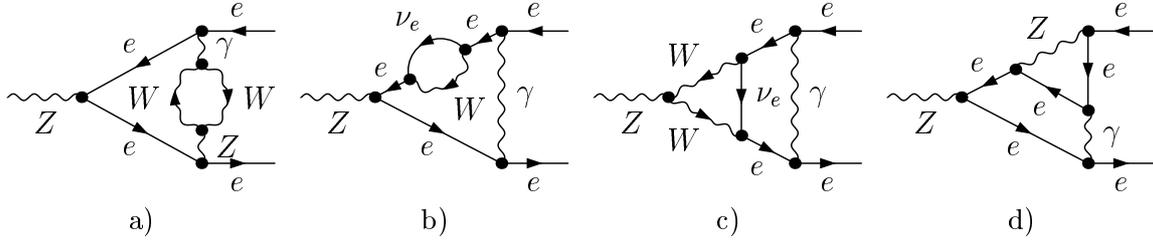


Abbildung 7.3: bosonische Diagramme mit überlappenden Divergenzen

In Abbildung 7.3 sind einige Diagramme dargestellt, in deren Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ Formfaktoren auftreten, in denen soft- und kollineare Divergenzen überlappen.

Alle auftretenden soft-Divergenzen können mit den Methoden aus [50] als divergente Einschleifen-Vertices extrahiert werden. Die verbleibenden Ausdrücke sind im Allgemeinen kollinear divergent. Diese kollinearen Divergenzen können wieder durch Beibehaltung der Elektronenmasse reguliert und als Terme proportional zu $\ln(m_e^2)$ bzw. $\ln^2(m_e^2)$ abgespalten werden. Dieses Verfahren wird im Folgenden exemplarisch anhand jeweils eines divergenten Formfaktors aus den Diagrammen 7.3a)-d) erklärt.

V^{131} -Integrale

Im Beitrag des Diagramms 7.3a) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ tritt das folgende soft-divergente Integral auf,

$$V_{131}^{(1)} = -\frac{(4\pi^2\mu^2)^{(4-D)}}{\pi^4} \int d^4q_1 \int d^4q_2 \frac{1}{[1][2][3][4][5]} \quad (7.44)$$

mit den Propagatoren

$$\begin{aligned} [1] &= q_1^2 - M_W^2, & [2] &= (q_1 - q_2)^2 - M_W^2, \\ [3] &= q_2^2, & [4] &= (q_2 + p_1)^2 - m_e^2, & [5] &= (q_2 - p_2)^2 - m_e^2. \end{aligned}$$

Dieses Integral kann analog zur Methode aus Abschnitt 6.2.4 mithilfe der Dispersionsrelation (6.42) berechnet werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{131}^{(1)} &= B_0(0, M_W^2, M_W^2) C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2) \\ &\quad - \int_{4M_W^2}^{\infty} ds \frac{1}{\pi s} \mathcal{I}m B_0(s, M_W^2, M_W^2) C_0(0, 0, P^2, 0, s, 0). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Die untere Integrationsgrenze $4 M_W^2$ ergibt sich aus der Tatsache, dass $\mathcal{I}mB_0(s, M_W^2, M_W^2)$ für $s < 4M_W^2$ identisch verschwindet. Durch die Transformation $s \rightarrow 4M_W^2/x$ wird der Integrationsbereich auf das Einheitsintervall abgebildet,

$$V_{131}^{(1)} = B_0(0, M_W^2, M_W^2) C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2) \quad (7.46)$$

$$- \int_0^1 dx \frac{1}{\pi x} \mathcal{I}mB_0\left(\frac{4M_W^2}{x}, M_W^2, M_W^2\right) C_0\left(0, 0, P^2, 0, \frac{4M_W^2}{x}, 0\right). \quad (7.47)$$

Das gesamte divergente Verhalten von V^{131} ist dabei im Term mit der divergenten Einschleifen-Vertex-Funktion $C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2)$ enthalten, wohingegen der Integralausdruck frei von Divergenzen ist und numerisch integriert werden kann.

V^{141} -Integrale

Das Diagramm 7.3b) trägt zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ das folgende soft-divergente Integral bei,

$$V_{141}^{(1)} = -\frac{(4\pi^2\mu^2)^{(4-D)}}{\pi^4} \int d^4q_1 \int d^4q_2 \frac{1}{[1][2][3]^2[4][5]},$$

$$[1] = q_1^2, \quad [2] = (q_1 - q_2)^2 - M_W^2,$$

$$[3] = q_2^2 - m_e^2, \quad [4] = (q_2 + p_1)^2, \quad [5] = (q_2 + P)^2 - m_e^2.$$

Auch hier kann eine divergente Einschleifen-Funktion abgespalten werden,

$$V_{141}^{(1)} = B_0(0, 0, M_W^2) C_{0, M_1^2}(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2) + V_{\text{sub}}^{141}. \quad (7.48)$$

C_{0, M_1^2} bezeichnet die Ableitung von C_0 aus (6.27) nach M_1^2

$$C_{0, M_1^2}(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2) = \frac{\partial}{\partial M_1^2} C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, M_1^2, M_2^2, M_3^2). \quad (7.49)$$

Die Größe V_{sub}^{141} ist aber auch noch soft-divergent. Dieses divergente Verhalten kann mithilfe der Dispersionsrelation (6.42) extrahiert werden,

$$V_{\text{sub}}^{141} = - \int_{M_W^2}^{\infty} ds \frac{\mathcal{I}mB_0(s, 0, M_W^2)}{\pi s} \frac{1}{(q_2^2 - s)[3][4][5]} + \mathcal{O}(m_e^2)$$

$$= - \int_{M_W^2}^{\infty} ds \frac{s - M_W^2}{\pi s^3} [C_0(0, m_e^2, P^2, s, 0, m_e^2) - C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2)]$$

$$= - \frac{1}{M_W^2} \int_0^1 dx (1-x) C_0\left(0, m_e^2, P^2, \frac{M_W^2}{x}, 0, m_e^2\right)$$

$$+ \frac{1}{2 M_W^2} C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2), \quad (7.50)$$

wobei die Relation

$$\mathcal{I}m B_0(s, 0, M^2) = \frac{\pi(s - M^2)}{s} \Theta(s - M^2) \quad (7.51)$$

verwendet wurde. Die kollinear divergente Funktion $C_0\left(0, m_e^2, P^2, \frac{M_W^2}{x}, 0, m_e^2\right)$ berechnet sich nach [51] zu

$$\begin{aligned} C_0\left(0, m_e^2, P^2, \frac{M_W^2}{x}, 0, m_e^2\right) &= \frac{1}{s} \left\{ [\ln(M_W^2 - sx) - \ln(x) - \ln(m_e^2)] \right. \\ &\quad \left. \times [\ln(M_W^2 - sx) - \ln(M_W^2)] - \text{Li}_2\left(\frac{sx}{M^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Damit liegt die kollineare Divergenz von V^{141} wiederum als Term proportional zu $\ln(m_e^2)$ vor, während das soft-divergente Verhalten als IR -divergente Einschleifen-Funktionen $C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2)$ und $C_{0, M_1^2}(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2)$ abgespalten wurde. Die verbleibende Integration in x kann numerisch oder analytisch durchgeführt werden.

V^{231} : 1. Fall

Das Diagramm 7.3c) trägt zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ unter anderem das folgende soft-divergente Integral der V^{231} -Familie bei,

$$\begin{aligned} V_{231} &= -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{1}{[1][2][3][4][5][6]}, \quad (7.53) \\ [1] &= q_1^2 - M_W^2, \quad [2] = (q_1 + P)^2 - M_W^2, \quad [3] = (q_1 - q_2)^2, \\ [4] &= q_2^2 - m_e^2, \quad [5] = (q_2 + p_1)^2, \quad [6] = (q_2 + P)^2 - m_e^2. \end{aligned}$$

Führt man die selben Schritte wie in Abschnitt 6.2.2 durch, so erhält man analog zu (6.26),

$$V_{231} = C_0[m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2] C_0[M^2, M^2, P^2, M_W^2, 0, M_W^2] + 2 V_{231}^{(a)}. \quad (7.54)$$

$V_{231}^{(a)}$ weist keine soft-Divergenz mehr auf, ist aber kollinear divergent,

$$\begin{aligned} V_{231}^{(a)} &= -\int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \frac{(1-x_1)x_2}{A \{y_1 [m_e^2(1-x_1) - B y_2(1-x_2 y_2)] + A y_2\}}, \\ A &= M_W^2 - s x_1 x_2 (1-x_2), \\ B &= s x_2 (1-x_1). \end{aligned} \quad (7.55)$$

$V_{231}^{(a)}$ kann umgeschrieben werden zu

$$V_{231}^{(a)} = -\int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dy_3 \frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2 (A - B(1-x_2 y_2) y_1 y_3) + m_e^2(1-x_1) y_1 y_3]^2}. \quad (7.56)$$

Dieser Ausdruck ist für $m_e^2 = 0$ divergent in $y_2 = 0$. Das divergente Verhalten kann folgendermaßen als $\ln(m_e^2)$ extrahiert werden,

$$\begin{aligned} V_{231}^{(a)} &= V_{231}^{(a1)} + V_{231}^{(a2)} \\ &= - \left(\frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B(1-x_2 y_2)y_1 y_3)]^2} - \frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B y_1 y_3)]^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B y_1 y_3) + m_e^2(1-x_1)y_1 y_3]^2} \right). \end{aligned}$$

$V_{231}^{(a1)}$ ist endlich, weswegen dort bereits $m_e = 0$ gesetzt wurde.

Die beiden Terme berechnen sich zu

$$\begin{aligned} V_{231}^{(a1)} &= - \int_0^1 dy_1 dy_2 dy_3 \left(\frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B(1-x_2 y_2)y_1 y_3)]^2} - \frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B y_1 y_3)]^2} \right) \\ &= \frac{1}{A s} \{ [\ln(B) - \ln(A)] [\ln(A-B) - \ln(A-B(1-x_2))] \\ &\quad + [\ln(A) - \ln(A-(1-x_2)B)] \ln(1-x_2) \\ &\quad + \text{Li}_2\left(1 - \frac{B}{A}\right) - \text{Li}_2\left(1 - \frac{B(1-x_2)}{A}\right) - \text{Li}_2\left(1 - \frac{B x_2}{A-B}\right) \}, \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} V_{231}^{(a2)} &= - \int_0^1 dy_2 \frac{(1-x_1)x_2 y_2}{[y_2(A-B y_1 y_3) + m_e^2(1-x_1)y_1 y_3]^2} \\ &= -(1-x_1)x_2 \frac{\ln(A-B y_1 y_3) - 1 - \ln(m_e^2) - \ln(1-x_1) - \ln(y_1) - \ln(y_3)}{(A-B y_1 y_3)^2}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

(7.57) kann problemlos numerisch integriert werden. Die in (7.58) auftretenden Ausdrücke sind von der Form (7.31) (mit $\beta = 0 = \gamma$) und können wie dort angegeben in y_1 und y_3 integriert werden, wodurch sich Ausdrücke ergeben, die direkt zur numerischen Integration geeignet sind.

V^{231} : 2. Fall

Der Beitrag des Diagramms 7.3d) zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ umfasst unter anderem auch den Formfaktor V_{231}^{p2} des Vektor-Integrals der V^{231} -Familie,

$$\begin{aligned} V_{231}^\mu &= V_{231}^{p1} p_1^\mu + V_{231}^{p2} p_2^\mu = -\frac{1}{\pi^4} \int d^4 q_1 \int d^4 q_2 \frac{q_1^\mu}{[1][2][3][4][5][6]}, \quad (7.59) \\ [1] &= q_1^2 - m_e^2, \quad [2] = (q_1 + P)^2 - M_Z^2, \quad [3] = (q_1 - q_2)^2 - m_e^2, \\ [4] &= q_2^2, \quad [5] = (q_2 + p_1)^2 - m_e^2, \quad [6] = (q_2 - p_2)^2 - m_e^2. \end{aligned}$$

Die soft-Divergenz von $V_{231}^{p_2}$ lässt sich erneut wie in Abschnitt 6.2.2 beschrieben abspalten und es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{231}^{p_1} &= V_{231a}^{p_1} + V_{231b}^{p_1} + \frac{1}{2M_Z^2} C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2) \\ &\quad + \frac{1}{4M_Z^2 s} [3 + 2 \ln(m_e^2) - 2 \ln(M_Z^2)] [(\ln(m_e^2) - \ln(s))]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Der $C_0(m_e^2, m_e^2, P^2, m_e^2, 0, m_e^2)$ -Term enthält das gesamte soft-divergente Verhalten.

$V_{231a}^{p_1}$ hat die folgende Form,

$$V_{231a}^{p_1} = \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dy_3 \frac{x_1 x_2^2 y_2 \{1 - x_1 [1 - (1 - y_1) y_2]\}}{\left(M_Z^2 x_2 y_2 (1 - x_1 y_1 y_3) + m_e^2 \frac{x_1 y_1^2 y_3}{1 - y_1}\right)^2}. \quad (7.61)$$

Für $m_e = 0$ ist dieser Ausdruck divergent in $y_2 = 0$. Diese Divergenz lässt sich durch Integration in y_2 abspalten,

$$\begin{aligned} V_{231a}^{p_1} &= \frac{x_1^2 x_2^2 y_2^2 (1 - y_1)}{[M_Z^2 x_2 y_2 (1 - x_1 y_1 y_3)]^2} + \int_0^1 dy_2 \frac{x_1 (1 - x_1) x_2^2 y_2}{\left[M_Z^2 x_2 y_2 (1 - x_1 y_1 y_3) + m_e^2 \frac{x_1 y_1^2 y_3}{1 - y_1}\right]^2} \\ &= \frac{x_1^2 (1 - y_1) + x_1 (1 - x_1) \left[\ln\left(\frac{M_Z^2 x_2 (1 - x_1 y_1 y_3) (1 - y_1)}{x_1 y_1^2 y_3}\right) - 1 - \ln(m_e^2)\right]}{M_Z^4 (1 - x_1 y_1 y_3)^2} \end{aligned} \quad (7.62)$$

und das Ergebnis kann problemlos numerisch oder analytisch integriert werden.

$V_{231b}^{p_1}$ besteht aus einem endlichen Anteil und einem Anteil, der eine doppelte kollineare Divergenz aufweist,

$$\begin{aligned} V_{231b}^{p_1} &= V_{231b1}^{p_1} + V_{231b2}^{p_1} \\ &= \frac{x_1 x_2 (1 - x_2) (1 - y_2) [1 - x_1 (y_1 + y_2 - y_1 y_2)]}{M_Z^4 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)]^2} \\ &\quad + \frac{x_1^2 (1 - x_2) (1 - y_1) y_2 (1 - y_2)}{\left\{M_Z^2 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)] + m_e^2 f(x_2, y_1, y_3)\right\}^2}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

$V_{231b1}^{p_1}$ kann durch Integration in y_3 und partielle Integration in y_1 in einen Ausdruck transformiert werden, der direkt numerisch integriert werden kann,

$$\begin{aligned} V_{231b1}^{p_1} &= \int_0^1 dy_1 dy_3 \frac{x_1 x_2 (1 - x_2) (1 - y_2) [1 - x_1 (y_1 + y_2 - y_1 y_2)]}{M_Z^4 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)]^2} \\ &= \int_0^1 dy_1 \frac{x_1 (1 - x_2) [1 - x_1 (y_1 + y_2 - y_1 y_2)]}{M_Z^4 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)]^2} \\ &= - \int_0^1 dy_1 \frac{1 - x_2}{M_Z^4 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)} \left\{ (1 - x_1) \ln [x_2 (1 - y_2) - x_1 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)] \right. \\ &\quad \left. - (1 - x_1 y_2) [\ln(x_2) + \ln(1 - y_2)] \right. \\ &\quad \left. + x_1 (1 - y_2) \ln [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

$V_{231b2}^{p_1}$ divergiert für $m_e = 0$ in $x_2 = 0 = y_1$ und $x_2 = 0 = y_3$, während die dritte Nullstelle des Nenners $x_2 = 0 = y_2$ durch den Faktor y_2 im Zähler kompensiert wird. Zur Berechnung von $V_{231b2}^{p_1}$ wird die folgende Aufteilung vorgenommen,

$$\begin{aligned}
 V_{231b2}^{p_1} &= V_{231b2a}^{p_1} + V_{231b2b}^{p_1} + V_{231b2c}^{p_1} + V_{231b2d}^{p_1} \\
 &+ x_1^2 y_2 (1 - y_2) \left(\frac{(1 - x_2)(1 - y_1)}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3(x_2 + y_2 - x_2 y_2)) + m_e^2 f(x_2, y_1, y_3)]^2} \right. \\
 &\quad - \frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, y_3)]^2} \\
 &\quad - \frac{(1 - y_1)}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, y_1, 0)]^2} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \\
 &+ x_1^2 y_2 (1 - y_2) \left(\frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, y_3)]^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \\
 &+ x_1^2 y_2 (1 - y_2) \left(\frac{(1 - y_1)}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, y_1, 0)]^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right) \\
 &+ x_1^2 y_2 (1 - y_2) \left(\frac{1}{[M_Z^2(x_2(1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2) + m_e^2 f(0, 0, 0)]^2} \right). \tag{7.65}
 \end{aligned}$$

$V_{231b2a}^{p_1}$ ist endlich und m_e kann gleich Null gesetzt werden,

$$\begin{aligned}
 V_{231b2a}^{p_1} &= x_1^2 y_2 (1 - y_2) (1 - y_1) \left(\frac{(1 - x_2)}{M_Z^4 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 (x_2 + y_2 - x_2 y_2)]^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{M_Z^4 [x_2 (1 - y_2) - x_1 y_1 y_3 y_2]^2} \right). \tag{7.66}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann nach

$$\int_0^1 dx_2 \frac{1}{x_2} \left(\frac{1 - x_2}{A x_2 B - C} - \frac{1}{A x_2 - C} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{A(1-B)}{C-A} \right)}{C} - \frac{\ln \left(1 - \frac{AB}{C} \right)}{AB} \tag{7.67}$$

in x_2 integriert werden und man erhält

$$V_{231b2a}^{p_1} = -\frac{x_1^2(1-y_2)(1-y_1)}{M_Z^4(1-x_1y_1)y_2} \ln\left(1 - \frac{y_2(1-x_1y_1)}{x_1y_1(1-y_2)}\right) + \frac{x_1(1-y_1)}{M_Z^4y_1} \ln\left(1 + \frac{(1-y_2)x_1y_1}{x_1y_1y_2 - (1-y_2)}\right). \quad (7.68)$$

Integriert man die beiden Terme in $V_{231b2b}^{p_1}$ mithilfe der Relation

$$\int_0^1 dx dy \frac{1}{(Ax - By + \epsilon)^2} = \frac{\ln(A-B) - \ln(A) - \ln(-B) + \ln(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon)}{AB} \quad (7.69)$$

in x_2 und y_1 , so ergibt sich mit

$$f(0,0,y_3) = \frac{1-y_2}{1-x_1} + x_1y_2^2y_3, \quad f(0,y_1,0) = \frac{1-y_2}{1-x_1} = f(0,0,0), \quad (7.70)$$

$$V_{231b2b}^{p_1} = \int_0^1 dy_3 \frac{x_1}{y_3M_Z^4} \left[\ln\left(\frac{1-y_2}{1-x_1} + x_1y_2^2y_3\right) - \ln\left(\frac{1-y_2}{1-x_1}\right) \right] = -\frac{x_1}{M_Z^4} \text{Li}_2\left(-\frac{(1-x_1)x_1y_2^2}{1-y_2}\right). \quad (7.71)$$

$V_{231b2c}^{p_1}$ kann nach (7.69) in x_2 und y_3 integriert werden, und man erhält unter Verwendung von (7.70) den Ausdruck

$$V_{231b2c}^{p_1} = -\frac{x_1}{M_Z^4} \left[\ln(m_e^2) - \ln(-M_Z^2) + \ln(1-y_2-x_1y_1y_2) - \ln(x_1y_1y_2(1-x_1)) \right]. \quad (7.72)$$

Integriert man schließlich $V_{231b2d}^{p_1}$ nach der folgenden Relation in x_2 , y_1 und y_3 ,

$$\int_0^1 dx dy dz \frac{1}{(Ax - B y z + \epsilon)^2} = \frac{\text{Li}_2\left(\frac{B}{\epsilon}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{B}{A}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)}{AB}, \quad (7.73)$$

so ergibt sich unter Zuhilfenahme von (7.16)

$$V_{231b2d}^{p_1} = -\frac{x_1}{M_Z^4} \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln(-M_Z^2) - \ln(m_e^2) + \ln\left(\frac{x_1y_2}{(1-x_1)(1-y_2)}\right) \right]^2 + \frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2\left(\frac{x_1y_2}{1-y_2}\right) \right\}. \quad (7.74)$$

Damit können alle Teilbeiträge zu $V_{231}^{p_1}$ numerisch integriert werden.

Kapitel 8

Ergebnisse

Mit den in den Kapiteln 5, 6 und 7 beschriebenen Methoden können die elektroschwachen Zweischleifen-Beiträge zum effektiven Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ berechnet werden. Die entsprechenden Feynman-Diagramme finden sich im Anhang A. Sie lassen sich in zwei eichinvariante Unterklassen aufteilen. Die erste Klasse bilden alle Diagramme mit mindestens einer geschlossenen Fermionschleife, die sogenannten fermionischen Korrekturen. Die restlichen Diagramme, also alle ohne geschlossenen Fermionschleifen, bilden die Klasse der bosonischen Korrekturen.

Die Ergebnisse zu den fermionischen Korrekturen sind im folgenden Abschnitt 8.1 dargestellt, während die bosonischen Beiträge in Abschnitt 8.2 behandelt werden. Eine abschließende Diskussion findet sich in Abschnitt 8.3.

8.1 Fermionische Beiträge

In den fermionischen Korrekturen treten an Zweischleifen-Vertex-Diagrammen ausschließlich Diagramme aus der V^{141} - (siehe Abbildung 8.1a) und 8.1b) und der V^{231} -Familie (Abbildung 8.1c)) auf. Ihr Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ kann mit den Methoden aus den Abschnitten 6.1, 6.2 und 7.1 berechnet werden. Wie in den Abschnitten 2.3.1 und 7.1 beschrieben ergibt sich für die dritte Generation von Fermionen ein endlicher Unterschied durch die konsistente Behandlung von γ_5 im HVBM-Schema im Vergleich zum naiv antikommutierenden Schema. Dieser Beitrag wird im Folgenden durch den Index γ_5 gekennzeichnet.

Zur numerischen Auswertung wurde zunächst der Eingabeparametersatz aus Tabelle 8.1 verwendet. Dieser ist in Übereinstimmung mit der unabhängigen Rechnung aus [52] gewählt, um einen direkten Vergleich mit dem dortigen Ergebnis zu ermöglichen. M_W und M_Z sind die experimentellen Werte der W - und Z -Boson Massen [53]. Wie in Abschnitt 2.4.3 beschrieben, müssen diese in die in der Rechnung verwendeten Werte im Polmassenschema [16], \overline{M}_W und \overline{M}_Z , umgerechnet werden. Diese Größen sind über (2.82) miteinander

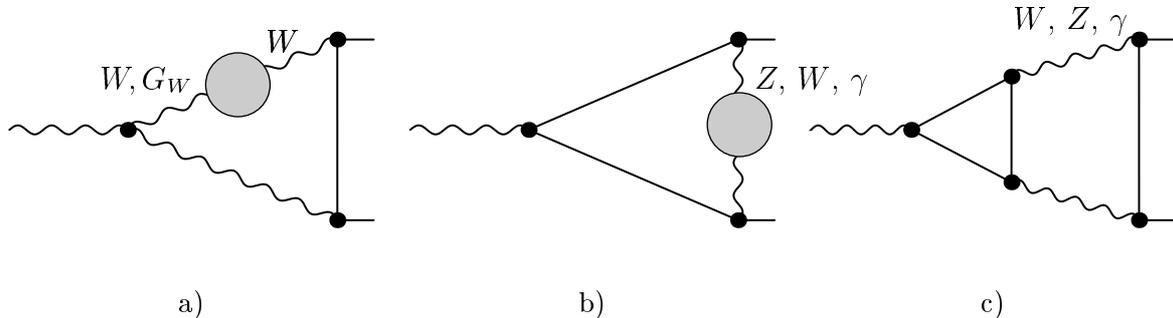


Abbildung 8.1: Fermionische Diagramme

verknüpft. Zur Umrechnung wurde für Γ_Z der experimentelle Wert (Tab. 8.1) und für Γ_W der theoretische Wert benutzt, der mit hinreichender Genauigkeit gegeben ist durch

$$\Gamma_W = \frac{3 G_\mu M_W^3}{(2\sqrt{2}\pi) \left(1 + \frac{2\alpha_s(M_W^2)}{(3\pi)} \right)}. \quad (8.1)$$

Parameter	Wert
M_W	80.426 GeV
M_Z	91.1876 GeV
Γ_Z	2.4952 GeV
m_t	178.0 GeV
$\Delta\alpha(M_Z^2)$	0.05907
$\alpha_s(M_Z^2)$	0.117
G_μ	1.16637×10^{-5}
\overline{M}_W	80.3986 GeV
\overline{M}_Z	91.1535 GeV

Tabelle 8.1: Eingabeparameter. M_W und M_Z sind experimentelle Werte für die W - und Z -Boson Massen, während \overline{M}_W und \overline{M}_Z berechnete Größen im Polmassenschema sind.

Unsere Ergebnisse [54] für die Größe $\Delta\kappa$ aus (4.11) sind in Tabelle 8.2 und Tabelle 8.3 für verschiedene Werte der Higgs-Masse aufgeführt. Tabelle 8.2 enthält zum Vergleich den Einschleifen-Beitrag und das entsprechende Ergebnis aus [52]. In den Einschleifen-Korrekturen wurde eine endliche Masse von $m_b = 4.85$ GeV für das b-Quark beibehalten. Die Fehler (in Klammern) in unserem Zweischleifen-Resultat stammen von Unsicherhei-

ten aus der numerischen Integration. Unser Ergebnis stimmt mit dem in [52] angegebenen (letzte Spalte in Tab. 8.2) überein.

In Tab. 8.3 sind die verschiedenen Teile des Zweischleifen-Ergebnisses (in Feynman-Eichung) gezeigt. Der Anteil mit zwei Fermionschleifen und derjenige mit einer Fermionschleife sind bei unterschiedlichem Vorzeichen von der gleichen Größenordnung, so dass eine starke Kompensation zwischen diesen beiden Beiträgen auftritt. Darüberhinaus fällt auf, dass der erste Term aus (4.14) (4. Spalte) abhängig von M_H etwa 15-20 mal größer ist als der zweite (5. Spalte). Das gesamte Ergebnis für den renormierten $Z\bar{l}l$ -Vertex bei $P^2 = M_Z^2$ kann also gut durch das sehr viel einfachere Ergebnis bei $P^2 = 0$ approximiert werden. Auch der γ_5 -Anteil wird sehr gut durch seinen Wert bei $P^2 = 0$ (0.280×10^{-4}) genähert. Er enthält keine Terme proportional zu m_t^4 oder m_t^2 . Dies ist aus Abbildung 8.2 ersichtlich, wo der γ_5 -Anteil bei $P^2 = 0$ als Funktion der top-Masse gezeigt ist.

M_H [GeV]	$\mathcal{O}(\alpha) \times 10^{-4}$	$\mathcal{O}(\alpha^2) \times 10^{-4}$	$\mathcal{O}(\alpha^2) \times 10^{-4}$ [52]
100	438.937	-0.637(1)	-0.63
200	419.599	-2.165(1)	-2.16
600	379.560	-5.012(1)	-5.01
1000	358.619	-4.737(1)	-4.73

Tabelle 8.2: Zweischleifen-Ergebnis für $\Delta\kappa$ im Vergleich mit dem Einschleifen-Ergebnis und dem Resultat aus [52].

M_H [GeV]	2 ferm. loops $\times 10^{-4}$	red. $\times 10^{-4}$	$\hat{\Gamma}(0)$ $\times 10^{-4}$	$\Gamma(M_Z^2) - \Gamma(0)$ $\times 10^{-4}$	γ_5 $\times 10^{-4}$
100	13.758	-0.722	-14.903	0.963(1)	0.271
200	13.758	-0.688	-16.465	0.963(1)	0.271
600	13.758	-0.501	-19.499	0.963(1)	0.271
1000	13.758	-0.386	-19.339	0.963(1)	0.271

Tabelle 8.3: Verschiedene Anteil des Zweischleifen-Ergebnisses. Die 2. Spalte enthält alle Beiträge mit zwei Fermionschleifen, alle anderen Spalten Beiträge mit einer Fermionschleife. Die 3. Spalte umfasst die reduzierbaren Beiträge aus Abb. 4.1a) und Abb. 4.1b) und das Produkt aus Einschleifenbeiträgen aus (4.13). $\hat{\Gamma}(0)$ ist der erste Term aus (4.14), $\Gamma(M_Z^2) - \Gamma(0)$ der zweite. In der letzten Spalte ist der γ_5 -Beitrag (siehe Text) angegeben.

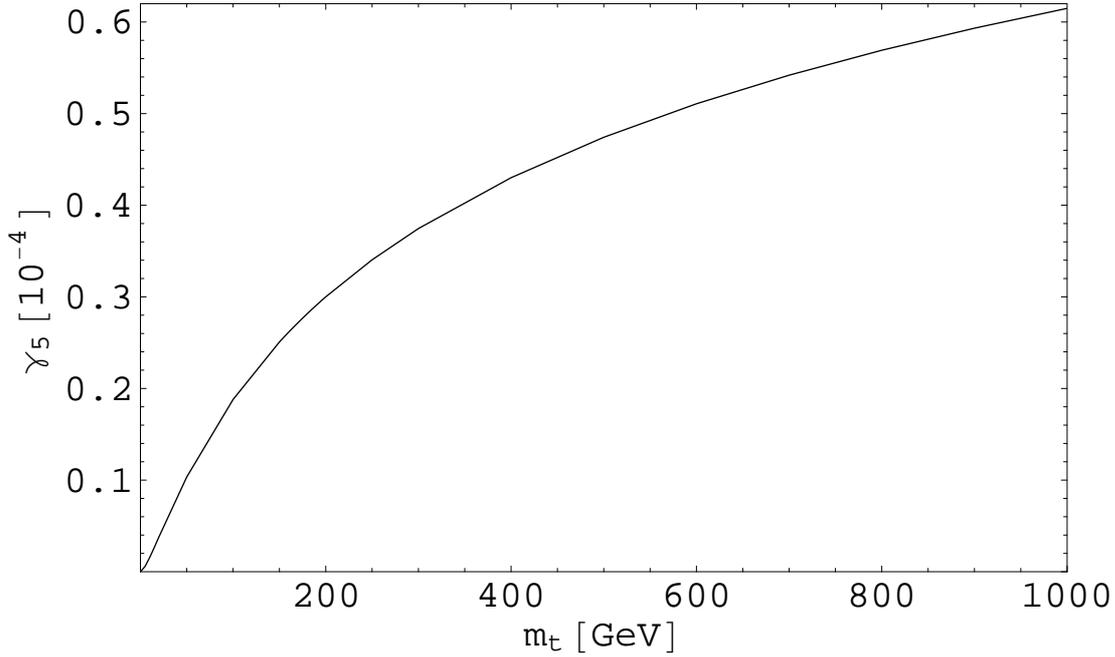


Abbildung 8.2: γ_5 -Beiträge bei $P^2 = 0$ als Funktion von m_t .

Für eine umfassendere Analyse der fermionischen Beiträge wurde \overline{M}_W zwischen 80.2 und 81.0 GeV, m_t zwischen 167.5 und 177.5 GeV und M_H zwischen 90 und 1000 GeV variiert, während für die anderen Parameter weiterhin die Werte aus Tabelle 8.1 verwendet wurden. Um die Laufzeit zu reduzieren wurde der γ_5 -Beitrag durch seinen Wert bei $P^2 = 0$ angenähert.

Die Ergebnisse für die fermionischen Korrekturen in dem genannten Parameterbereich können durch die folgende Formel approximiert werden,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{\text{eff}}^{(\alpha^2), \text{ferm}} = & a + b L_H + c L_H^2 + d L_H^4 + e (d_H^2 - 1) + f d_t + g d_t^2 + h d_t (d_H - 1) \\ & + i d_W + j d_W^2 + k d_W d_t + l d_W (d_H - 1). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} d_H &= \frac{M_H}{100 \text{ GeV}}, & L_H &= \ln \left(\frac{M_H}{100 \text{ GeV}} \right), \\ d_t &= \left(\frac{m_t}{172.5 \text{ GeV}} \right)^2 - 1, & d_W &= \left(\frac{\overline{M}_W}{80.3766 \text{ GeV}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (8.3)$$

und die Koeffizienten in (8.2) bestimmen sich mit der Methode der kleinsten Quadrate zu

$$\begin{aligned}
a &= +2.43436 \times 10^{-5}, & b &= -3.05852 \times 10^{-5}, & c &= -2.35008 \times 10^{-5}, \\
d &= +4.73284 \times 10^{-6}, & e &= -1.95245 \times 10^{-7}, & f &= -5.45799 \times 10^{-4}, \\
g &= -4.42463 \times 10^{-4}, & h &= -1.76628 \times 10^{-5}, & i &= -4.98886 \times 10^{-3}, \\
j &= -1.01287 \times 10^{-1}, & k &= -1.76603 \times 10^{-2}, & l &= +4.56623 \times 10^{-5}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Die maximale und die mittlere Abweichung der Ergebnisse dieser Formel zum exakten Ergebnis betragen 6.7×10^{-6} und 0.9×10^{-6} . Diese Abweichung ist also deutlich kleiner als der aktuelle experimentelle Fehler von 1.6×10^{-4} [6] und liegt auch unterhalb von 1.3×10^{-5} , was als experimenteller Fehler an einem zukünftigen Linearbeschleuniger mit GigaZ-Modus erwartet wird [7, 8].

Beschränkt man den Bereich der Higgs-Masse auf 90 bis 150 GeV, so erhält man mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a &= +2.42450 \times 10^{-5}, & b &= -3.31179 \times 10^{-5}, & c &= -8.13094 \times 10^{-6}, \\
d &= +3.56531 \times 10^{-6}, & e &= -1.69249 \times 10^{-6}, & f &= -5.30203 \times 10^{-4}, \\
g &= -3.78335 \times 10^{-4}, & h &= -4.80069 \times 10^{-5}, & i &= -4.93659 \times 10^{-3}, \\
j &= -1.02092 \times 10^{-1}, & k &= -1.69374 \times 10^{-2}, & l &= -6.96544 \times 10^{-6}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

im Vergleich zum exakten Ergebnis eine maximale Abweichung von 4.7×10^{-6} und eine mittlere Abweichung von 0.2×10^{-6} .

Im Folgenden wird mit Hilfe von (8.2) die Abhängigkeit der fermionischen Korrekturen von Higgs-, top- und W -Masse analysiert. In den Abbildungen 8.3, 8.4 und 8.5 sind diese Korrekturen als Funktion jeweils einer dieser Massen bei festen Werten der anderen beiden Massen aufgetragen.

Abbildung 8.3 verdeutlicht die starke Higgs-Massen-Abhängigkeit der fermionischen Beiträge. In allen vier gezeigten Fällen haben diese Beiträge einen positiven Wert für kleine Higgs-Massen und fallen mit steigender Higgs-Masse stark ab bis zu einem minimalen Wert bei $M_H \sim 700$ GeV und steigen anschließend wieder an. Die Differenz zwischen maximalem und minimalem Wert für diese Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ im betrachteten Intervall beträgt ungefähr 9×10^{-5} .

Abbildung 8.4 zeigt die top-Massen-Abhängigkeit der fermionischen Korrekturen. Im Gegensatz zur Higgs-Massen-Abhängigkeit fallen diese Beiträge mit steigender top-Masse monoton ab, wobei sich in allen vier betrachteten Fällen ein Nulldurchgang ergibt. Die gesamte Variation im betrachteten Intervall beträgt hier ca. 6×10^{-5} .

In Abbildung 8.5 ist die W -Massen-Abhängigkeit der fermionischen Beiträge dargestellt. Wie in der top-Massen-Abhängigkeit fallen sie mit steigender W -Masse im betrachteten Intervall monoton ab und es ergibt sich ein Nulldurchgang. Dabei beträgt die Variation im betrachteten Intervall ca. 5.5×10^{-5} .

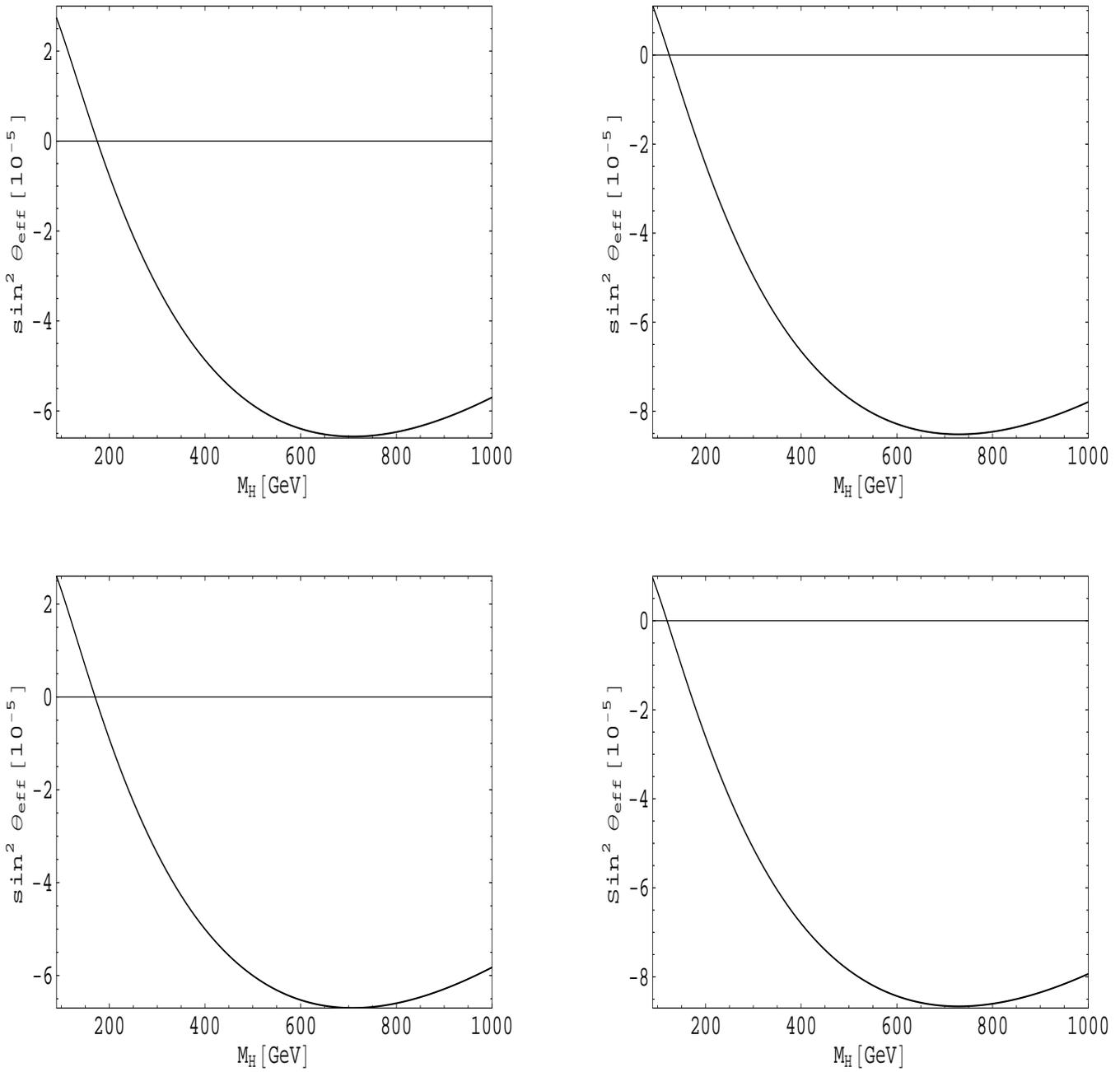


Abbildung 8.3: Fermionische Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ als Funktion der Higgs-Masse. $\overline{M}_W = 80.3766$ GeV oben und $\overline{M}_W = 80.3986$ GeV unten, $m_t = 172.5$ GeV auf der linken und $m_t = 175.0$ GeV auf der rechten Seite.

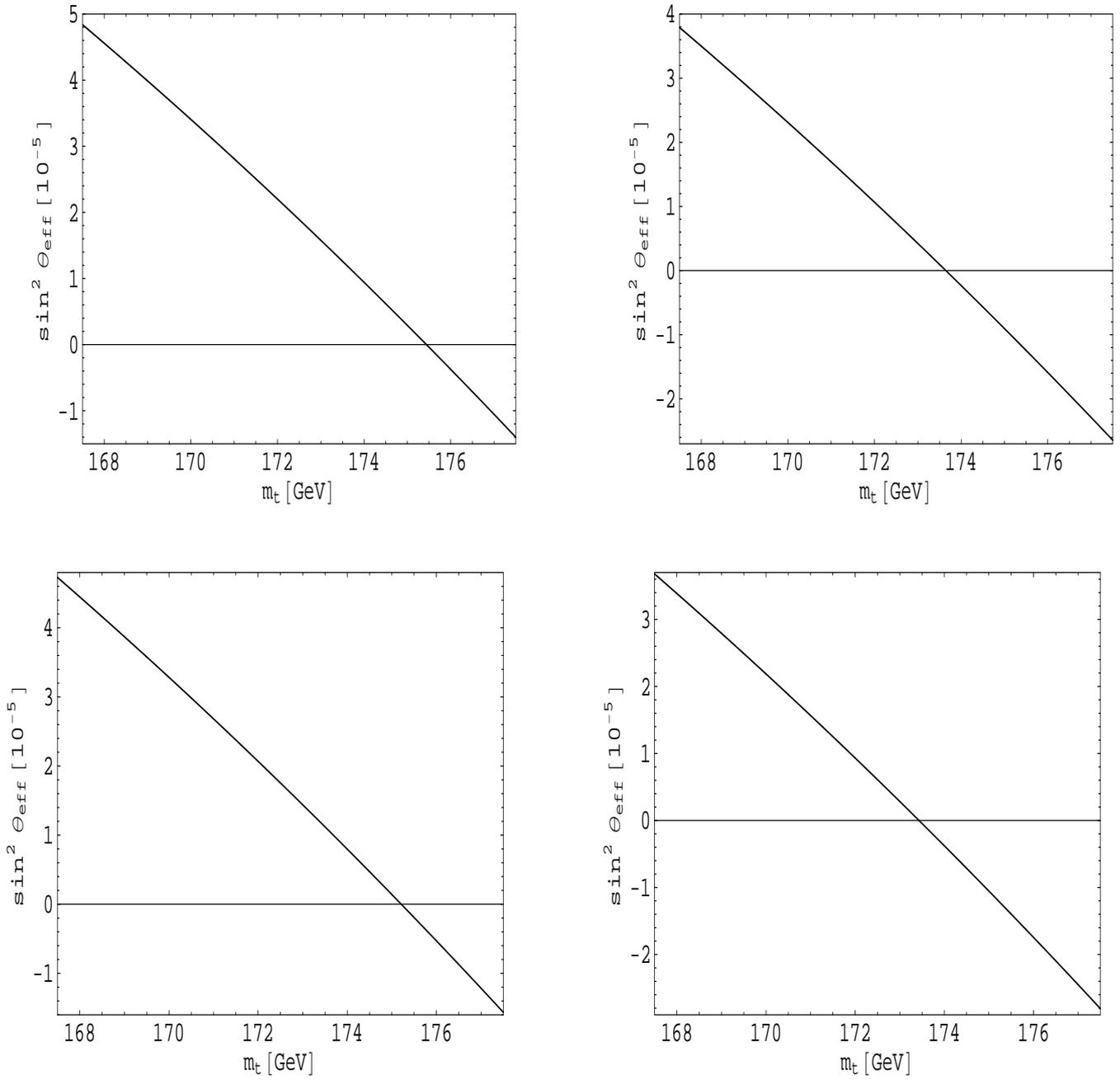


Abbildung 8.4: Fermionische Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ als Funktion der top-Masse. $\overline{M}_W = 80.3766$ GeV oben und $\overline{M}_W = 80.3986$ GeV unten, $M_H = 115$ GeV auf der linken und $M_H = 150$ GeV auf der rechten Seite.

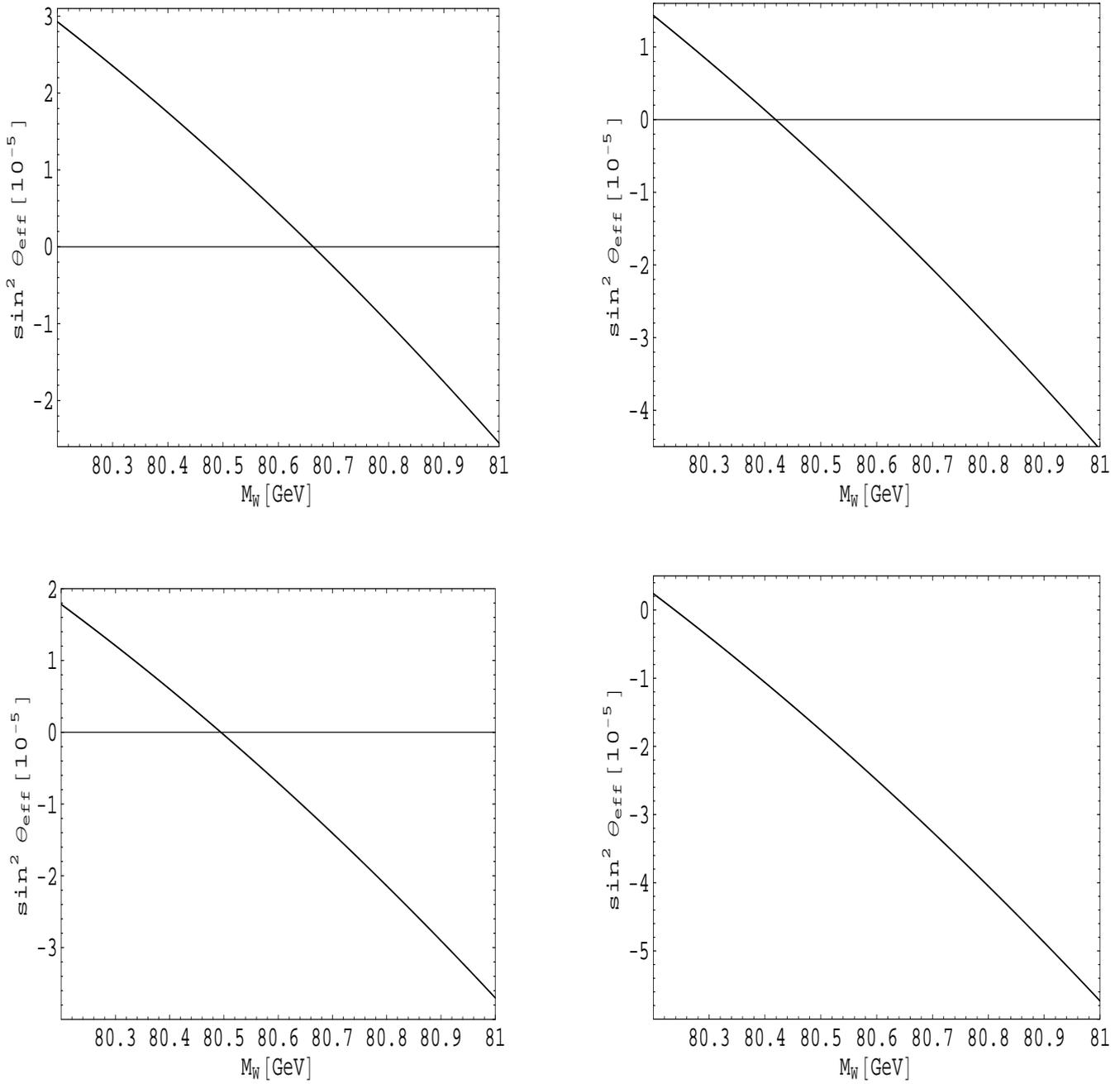


Abbildung 8.5: Fermionische Beiträge zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ als Funktion der W -Masse. $M_H = 115$ GeV oben und $M_H = 150$ GeV unten, $m_t = 172.5$ GeV auf der linken und $m_t = 175.0$ GeV auf der rechten Seite.

8.2 Bosonische Beiträge

In einem ersten Schritt zu den vollständigen bosonischen Zweischleifen-Korrekturen wird deren Higgs-Massen-Abhängigkeit berechnet. Dazu wird die Größe

$$\Delta\kappa_{bos,sub}^{(\alpha^2)} := \Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)}(M_H) - \Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)}(M_H^0) \quad (8.6)$$

betrachtet, die die Higgs-Massen-Abhängigkeit im Vergleich zu einem festen Wert parametrisiert, der als $M_H^0 = 100$ GeV gewählt wurde. $\Delta\kappa_{bos,sub}^{(\alpha^2)}$ ist UV -endlich und Eichparameter-unabhängig. Die Ergebnisse für diese Größe sind im Abschnitt 8.2.1 aufgeführt. Die Ergebnisse für die verbleibende Konstante $\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)}(M_H^0)$ finden sich im Abschnitt 8.2.2.

8.2.1 Higgs-Massen-Abhängigkeit

Die M_H -Abhängigkeit der bosonischen Korrekturen resultiert ausschließlich aus Diagrammen mit inneren Higgs-Boson-Propagatoren. Einige typische Beispiele sind in Abbildung 8.6 aufgeführt. Im Vergleich zu den fermionischen Beiträgen treten als einzig neuer Diagramm-Typ die beiden nicht-planaren Diagramme 8.6c) und d) auf. Sie können mit der Methode aus Abschnitt 6.2.3 berechnet werden.

Unsere Ergebnisse [55] für $\Delta\kappa$ für den Parametersatz aus Tabelle 8.1 und verschiedene Werte der Higgs-Masse sind in Tabelle 8.4 aufgeführt. Die Unsicherheiten aufgrund der numerischen Integration sind von der Größenordnung 10^{-9} und daher vernachlässigbar. Zum Vergleich sind in Tabelle 8.4 auch nochmal die Ergebnisse für die fermionischen Korrekturen (siehe auch Tabelle 8.2) und die entsprechende subtrahierte Größe $\Delta\kappa_{ferm,sub}^{(\alpha^2)} = \Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)}(M_H) - \Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)}(M_H^0)$ angegeben. Unser Ergebnis wurde nachträglich in einer unabhängigen Rechnung [56] bestätigt (siehe die 5. Spalte in 8.4).

M_H [GeV]	$\Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{ferm,sub}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{bos,sub}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$ [56]
100	-0.637(1)	0	0	0
200	-2.165(1)	-1.528	0.265	0.266
600	-5.012(1)	-4.375	0.914	0.914
1000	-4.737(1)	-4.100	1.849	1.849

Tabelle 8.4: Zweischleifen-Ergebnis für $\Delta\kappa$ im Vergleich mit den fermionischen Korrekturen und dem Ergebnis aus [56]

Im betrachteten Bereich der Higgs-Boson-Masse haben die bosonischen Korrekturen ein anderes Vorzeichen als die fermionischen Beiträge und kompensieren diese daher teilweise. Dies wäre von Bedeutung für die Präzision, die im GigaZ-Modus an einem Linear Collider erwartet wird.

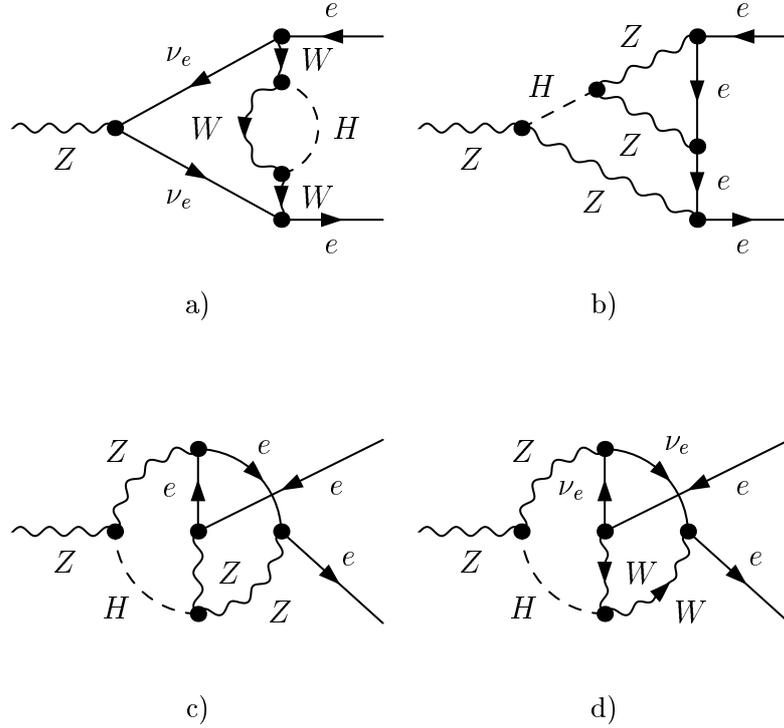


Abbildung 8.6: Diagramme mit inneren Higgs-Bosonen

Anstelle der W -Masse nimmt man jedoch oft die sehr genau bekannte Fermikonstante als Eingabeparameter und berechnet $M_W = M_W(M_H)$ wie in Kapitel 3 beschrieben über die W - Z -Massenrelation (3.6).

Nach Gleichung (4.11), ergibt sich damit die gesamte M_H -Abhängigkeit von $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ aus $\kappa(M_H)$ und $M_W(M_H)$. Die bosonischen Zweischleifen-Korrekturen zu $M_W(M_H)$ wurden in [38] berechnet. Die beiden Beiträge, von $\kappa(M_H)$ und $M_W(M_H)$, haben unterschiedliche Vorzeichen und kompensieren sich in hohem Maße, wie aus Tabelle 8.5 ersichtlich wird. Eine genauere Analyse hierzu findet sich in Abschnitt 8.3.

M_H [GeV]	$\Delta M_{W,bos}^{(\alpha^2)}$ [MeV] [38]	$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{sub} (\Delta M_W) \times 10^{-5}$	$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{sub} (\Delta \kappa) \times 10^{-5}$
100	-1.0	0	0
200	-0.5	-0.97	0.59
600	-0.1	-1.74	2.03
1000	0.6	-3.10	4.11

Tabelle 8.5: Higgs-Massen-Abhängigkeit der bosonischen Korrekturen zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$, die über $M_W(M_H)$ (Spalte 3) eingeht, im Vergleich mit der Variation über $\Delta \kappa$. Die zweite Spalte enthält die bosonischen Zweischleifen-Korrekturen zu M_W aus [38].

8.2.2 Vollständige bosonische Korrekturen

In dem verbleibenden Beitrag $\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)}(M_H^0)$ treten als zusätzliche Schwierigkeit *IR*-divergente Diagramme auf. Sie können mit den Methoden aus Kapitel 7 berechnet werden.

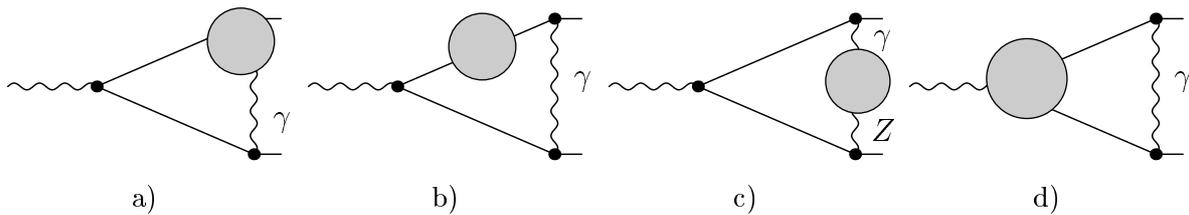


Abbildung 8.7: bosonische Diagramme mit soft-Divergenzen

Soft-Divergenzen treten in den Diagrammen aus Abbildung 8.7 auf. Wie in Kapitel 7 beschrieben, lassen sich diese Divergenzen als *IR*-divergente Einschleifen-Funktionen abspalten. Anschließend kann analytisch verifiziert werden, dass sich diese divergenten Anteile zu Null addieren. Dabei kompensieren sich die Divergenzen aus den Diagrammen 8.7a)–8.7c) gegenseitig, während die Divergenzen aus 8.7d) von den soft-Divergenzen aus dem Produkt von Einschleifen-Beiträgen in (4.13) kompensiert werden. Dies ist schematisch in Abbildung 8.8 skizziert.

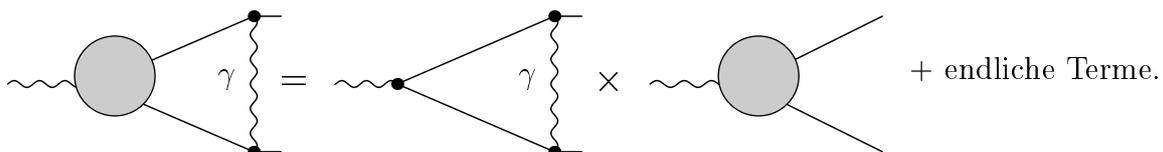


Abbildung 8.8: Kompensation von soft-Divergenzen

Die auftretenden kollinearen Divergenzen können mit dem Verfahren aus Kapitel 7 als Logarithmen in der Elektronenmasse abgespalten werden. Während analytisch überprüft wurde, dass sich die Terme proportional zu $\log^2(m_e^2)$ wegheben, wurde dies für die Terme proportional zu $\log(m_e^2)$ numerisch verifiziert.

Die Ergebnisse für die gesamten bosonischen Korrekturen zu $\Delta\kappa$ für den Parametersatz 8.1 sind in Tabelle 8.6 im Vergleich zu den fermionischen Beiträgen aufgeführt.

M_H [GeV]	$\Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$
100	-0.637(1)	-0.741(2)
200	-2.165(1)	-0.476(2)
600	-5.012(1)	0.173(2)
1000	-4.737(1)	1.108(2)

Tabelle 8.6: bosonische Zweischleifen-Korrekturen zu $\Delta\kappa$ im Vergleich zu den fermionischen Korrekturen

Aus Tabelle 8.6 wird ersichtlich, dass die bosonischen Korrekturen von der gleichen Größenordnung wie die fermionischen Korrekturen sind, wenn man den experimentellen Wert für M_W als Eingabeparameter verwendet. Nimmt man jedoch die Fermikonstante als Eingabegröße und setzt für M_W den berechneten Wert ein, so ergibt sich eine Kompensation zwischen den bosonischen Zweischleifen-Korrekturen zu M_W und denen zu κ . Dies wird im folgenden Abschnitt 8.3 näher ausgeführt.

8.3 Gesamtergebnis

Parameter	Wert
M_W	80.404 GeV
M_Z	91.1876 GeV
Γ_Z	2.4952 GeV
m_t	172.5 GeV
$\Delta\alpha(M_Z^2)$	0.05907
$\alpha_s(M_Z^2)$	0.119
G_μ	1.16637×10^{-5}
\overline{M}_W	80.3766 GeV
\overline{M}_Z	91.1535 GeV

Tabelle 8.7: Eingabeparameter. M_W und M_Z sind experimentelle Werte für die W - und Z -Boson Massen, während \overline{M}_W und \overline{M}_Z berechnete Größen im Polmassenschema sind.

In Tabelle 8.8 finden sich unsere Ergebnisse für den im Vergleich zu Tabelle 8.1 aktuelleren Parametersatz [53] aus Tabelle 8.7. Die letzten beiden Spalten in Tabelle 8.8 enthalten die entsprechenden Ergebnisse aus [56], die mit unseren in Einklang stehen.

Während sich die bosonischen Korrekturen durch die etwas kleinere W -Masse im Vergleich zu Tabelle 8.6 nicht wesentlich verändert haben, tritt eine große Änderung in den fermionischen Beiträgen im Vergleich zu Tabelle 8.2 auf, die auf den deutlich kleineren Wert für die top-Masse im Vergleich zum Parametersatz aus Tabelle 8.1 zurückzuführen ist.

M_H [GeV]	$\Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$	$\Delta\kappa_{ferm}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$ [56]	$\Delta\kappa_{bos}^{(\alpha^2)} \times 10^{-4}$ [56]
100	1.07	-0.74	1.07	-0.74
200	-0.33	-0.47	-0.32	-0.47
600	-2.89	0.18	-2.89	0.17
1000	-2.62	1.11	-2.61	1.11

Tabelle 8.8: bosonische Zweischleifen-Korrekturen zu $\Delta\kappa$ im Vergleich zu den fermionischen Korrekturen und dem Ergebnis aus [56]

Außerdem ist aus Tabelle 8.8 wiederum ersichtlich, dass die bosonischen Korrekturen von der gleichen Größenordnung wie die fermionischen Beiträgen sind, wenn die experimentelle W -Masse als Eingabegröße verwendet wird.

Bevorzugt verwendet man jedoch, wie in Kapitel 3 beschrieben, die experimentell sehr genau bekannte Fermikonstante als Eingabeparameter und berechnet M_W über die W - Z -Massenrelation (3.6).

Entwickelt man nun $\{M_W, \kappa\} = \{M_W, \kappa\}^{(\text{born}+\alpha)} + \{M_W, \kappa\}^{(\alpha^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{\text{eff}} &= \sin^2 \theta_{\text{eff}}^{(\text{born}+\alpha)} + \Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta M_W^{(\alpha^2)}) + \Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta k^{(\alpha^2)}) \\ &= \left(1 - \frac{(M_W^{(\text{born}+\alpha)})^2}{M_Z^2}\right) \kappa^{(\text{born}+\alpha)} - 2 \frac{M_W}{M_Z^2} \Delta M_W^{(\alpha^2)} + \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) \Delta \kappa^{(\alpha^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Der erste Term ist das Ergebnis für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ unter Berücksichtigung der Einschleifen-Korrekturen, während die letzten beiden Terme die elektroschwachen Zweischleifen-Beiträge sind, die zum Einen von $\Delta M_W^{(\alpha^2)}$ und zum Anderen von $\Delta k^{(\alpha^2)}$ herrühren. Wie aus Tabelle 8.9 ersichtlich wird, wird das Zweischleifen-Ergebnis von den fermionischen Korrekturen zu M_W dominiert, während sich die bosonischen Korrekturen zu M_W und κ zum größten Teil kompensieren.

M_H	$\Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta M_{W,ferm}^{(\alpha^2)})$	$\Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta k_{ferm}^{(\alpha^2)})$	$\Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta M_{W,bos}^{(\alpha^2)})$	$\Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}(\Delta k_{bos}^{(\alpha^2)})$
100	93.89	2.38	1.93	-1.65
200	98.51	-0.73	0.97	-1.05
600	106.89	-6.43	0.19	0.40
1000	105.36	-5.83	-1.16	2.47

Tabelle 8.9: Fermionische und bosonische Zweischleifen-Korrekturen zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$. M_H ist in GeV angegeben und der Normierungsfaktor von $\Delta \sin^2 \theta_{\text{eff}}$ ist 10^{-5} .

Diese Kompensation ist auch aus Tabelle 8.10 ersichtlich, in der das Gesamtergebnis für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ gezeigt ist unter Berücksichtigung der elektroschwachen Einschleifen-Korrekturen,

der QCD-Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [33], der führenden Dreischleifen-Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s m_t^4)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3 m_t^6)$ [34] sowie der elektroschwachen Zweischleifen-Beiträge einmal ohne Berücksichtigung der bosonischen Beiträge, sowohl zu κ als auch zu M_W , (M_W^{ferm} und $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{ferm}}$) und einmal mit diesen Beiträgen ($M_W^{\text{ferm+bos}}$ und $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{ferm+bos}}$).

M_H [GeV]	M_W^{ferm} [GeV]	$M_W^{\text{ferm+bos}}$ [GeV]	$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{ferm}}$	$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{ferm+bos}}$	$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{bos}}$ [10^{-4}]
100	80.3694	80.3684	0.231459	0.231461	0.02
200	80.3276	80.3270	0.231792	0.231792	0
600	80.2491	80.2490	0.232346	0.232352	0.06
1000	80.2134	80.2141	0.232587	0.232599	0.12

Tabelle 8.10: M_W und $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ ohne (ferm) und mit (ferm+bos) bosonischen Zweischleifen-Korrekturen. $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{bos}}$ ist der rein bosonische Beitrag zu $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$.

Die Differenz aus diesen beiden Werten ergibt die gesamten bosonischen Zweischleifen-Korrekturen, die in der letzten Spalte der Tabelle 8.10 dargestellt sind. Sie sind selbst im Vergleich zur erwarteten GigaZ-Genauigkeit marginal und deutlich kleiner als die entsprechenden Ergebnisse mit fester W -Masse als Eingabeparameter. So entspricht beispielsweise der Wert $\Delta\kappa = -0.74 \times 10^{-4}$ ($M_H = 100$ GeV) aus Tabelle 8.8 einem Wert von $\sin^2 \theta_{\text{eff}} = -1.6 \times 10^{-5}$, also einem deutlich größeren Wert als dem in Tabelle 8.10 angegebenen von $\sin^2 \theta_{\text{eff}} = 0.2 \times 10^{-5}$.

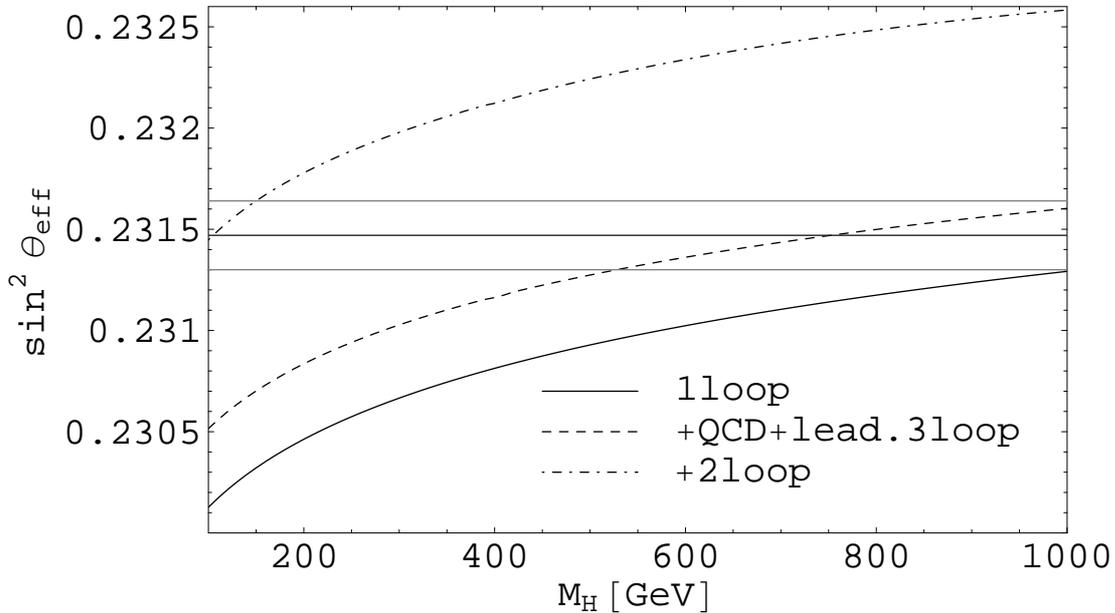


Abbildung 8.9: Gesamtergebnis für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ mit M_W aus (3.6)

Der Effekt der gesamten Zweischleifen-Beiträge wird aus Abbildung 8.9 ersichtlich. Dort ist das Ergebnis für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ unter Einbeziehung der Einschleifen- (durchgezogene Linie), QCD und führenden Dreischleifen- (gestrichelte Linie) sowie der elektroschwachen Zweischleifen-Korrekturen (gestrichelte/gepunktete Linie) als Funktion der Higgsmasse aufgetragen. Außerdem ist der experimentelle Wert 0.23153 ± 0.00016 [6] eingezeichnet. Der große numerische Einfluss der Zweischleifen-Beiträge ist klar erkennbar. Darüberhinaus wird deutlich, dass die Standardmodellvorhersage für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ nur für ein leichtes Higgs-Boson im Einklang mit dem experimentellen Ergebnis steht.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Im Rahmen der immer genaueren Tests, denen das Standardmodell unterworfen wird, stellt der effektive leptonische Mischungswinkel $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ eine Schlüsselobservable dar. Aufgrund der hohen experimentellen Genauigkeit mit der diese Größe gemessen wurde und der noch größeren Genauigkeit, die von zukünftigen Beschleunigerexperimenten erwartet wird, ist eine sehr genaue theoretische Vorhersage für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ erforderlich. Hierfür werden die vollständigen elektroschwachen Zweischleifen-Korrekturen benötigt.

In der vorliegenden Arbeit wurden diese Korrekturen berechnet. Eine der wesentlichen Schwierigkeiten hierbei war die Berechnung von Zweischleifen-Vertexfunktionen. Dafür wurden die Methoden aus [48, 50] angewendet und weiterentwickelt. Einige Klassen von Diagrammen konnten darüber hinaus mithilfe von Dispersionsrelationen berechnet werden. Eine ausführliche Beschreibung zur Behandlung der auftretenden Infrarot-Divergenzen wurde gegeben.

Unsere Rechnung stellt die erste physikalische Anwendung für diese Rechentechniken dar. Damit können sie als Grundlage für weitere Rechnungen im Standardmodell dienen. Des Weiteren sind auch Anwendungen jenseits des Standardmodells denkbar, da die Methoden für eine beliebige Anzahl von Massenskalen anwendbar sind.

Nimmt man den experimentellen Wert der W -Masse als Eingabeparameter, so tritt in den fermionischen Korrekturen eine große numerische Kompensation zwischen dem Ergebnis für die Diagramme mit einer und den Diagrammen mit zwei geschlossenen Fermionschleifen auf. Das resultierende Gesamtergebnis ist aber auf jeden Fall von Bedeutung für die Präzision, die an einem zukünftigen Linearbeschleuniger erwartet wird. Außerdem wurde mit dieser Rechnung die theoretische Unsicherheit in der Standardmodellvorhersage für $\sin^2 \theta_{\text{eff}}$ wesentlich verringert. Die bosonischen Korrekturen sind in diesem Fall von der gleichen Größenordnung wie die fermionischen.

Verwendet man die experimentell genauer bekannte Fermikonstante als Eingabeparameter, so ergibt sich ein sehr großer numerischer Effekt der elektroschwachen Zweischleifen-Korrekturen, der von den fermionischen Beiträgen zur W -Masse dominiert wird. Dahingegen kompensieren sich die bosonischen Beiträge zu M_W und κ größtenteils. Würde man nur die bosonischen Korrekturen zu M_W berücksichtigen und nicht die in dieser Arbeit berechneten zu κ , erhielte man also einen zu großen numerischen Effekt der bosonischen Beiträge.

Alle unsere Ergebnisse stehen im Einklang mit einer unabhängigen Rechnung [52, 56].

Abschließend lässt sich festhalten, dass die Ergebnisse dieser Arbeit einen wichtigen Schritt auf dem Weg zu immer genaueren Tests des Standardmodells bei zukünftigen Hochenergie-Collidern darstellen.

Anhang A

Zweischleifen-Diagramme

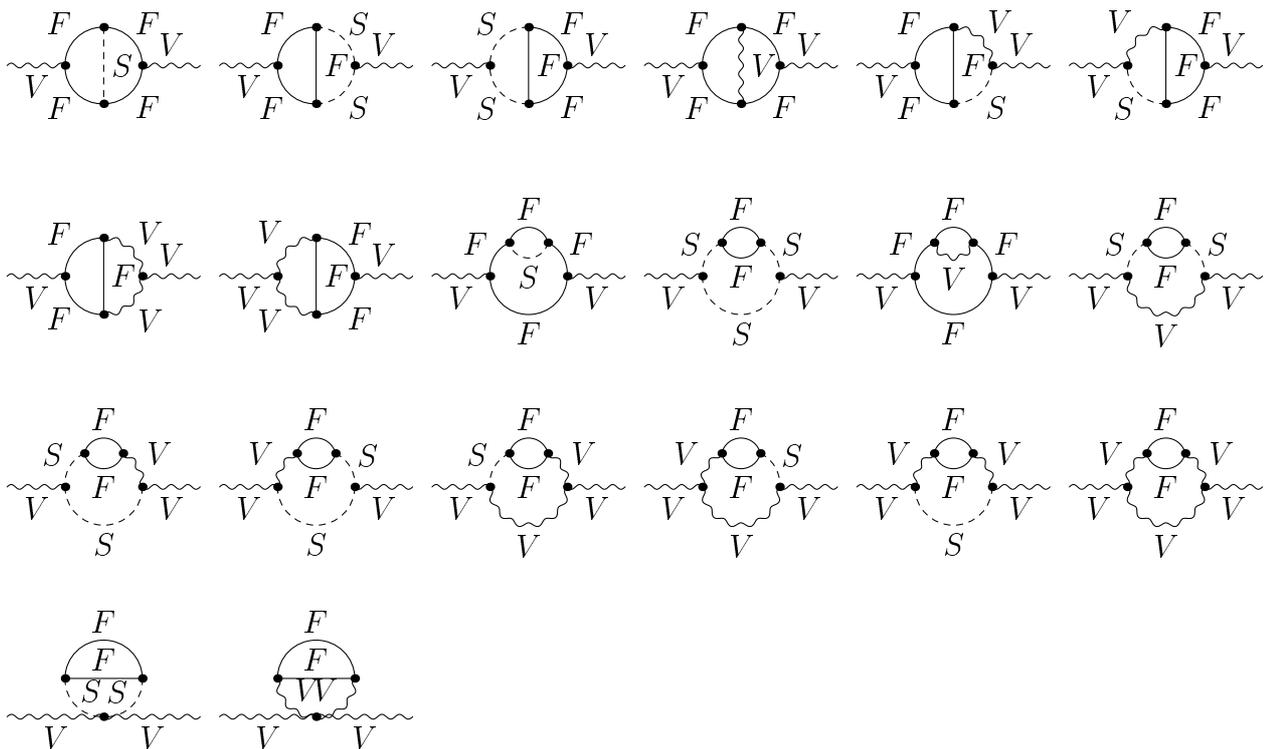
In den folgenden Abschnitten A.1 - A.3 sind die generischen Zweischleifen-Diagramme aufgeführt, die bei der Berechnung der Renormierungskonstanten (2.69)-(2.73) oder des irreduziblen $Z\bar{e}e$ -Vertex auftreten. F , G , S und V bezeichnen dabei jeweils sämtliche Fermionen, Geister, Skalare und Vektorteilchen des Standardmodells. Einschleifen-Counterterm-Einsetzungen werden durch ein Kreuz symbolisiert.

Die echten Zweischleifen-Diagramme sind in fermionische und bosonische Diagramme unterteilt. Fermionische Diagramme beinhalten mindestens eine, bosonische Diagramme keine geschlossene Fermionschleife.

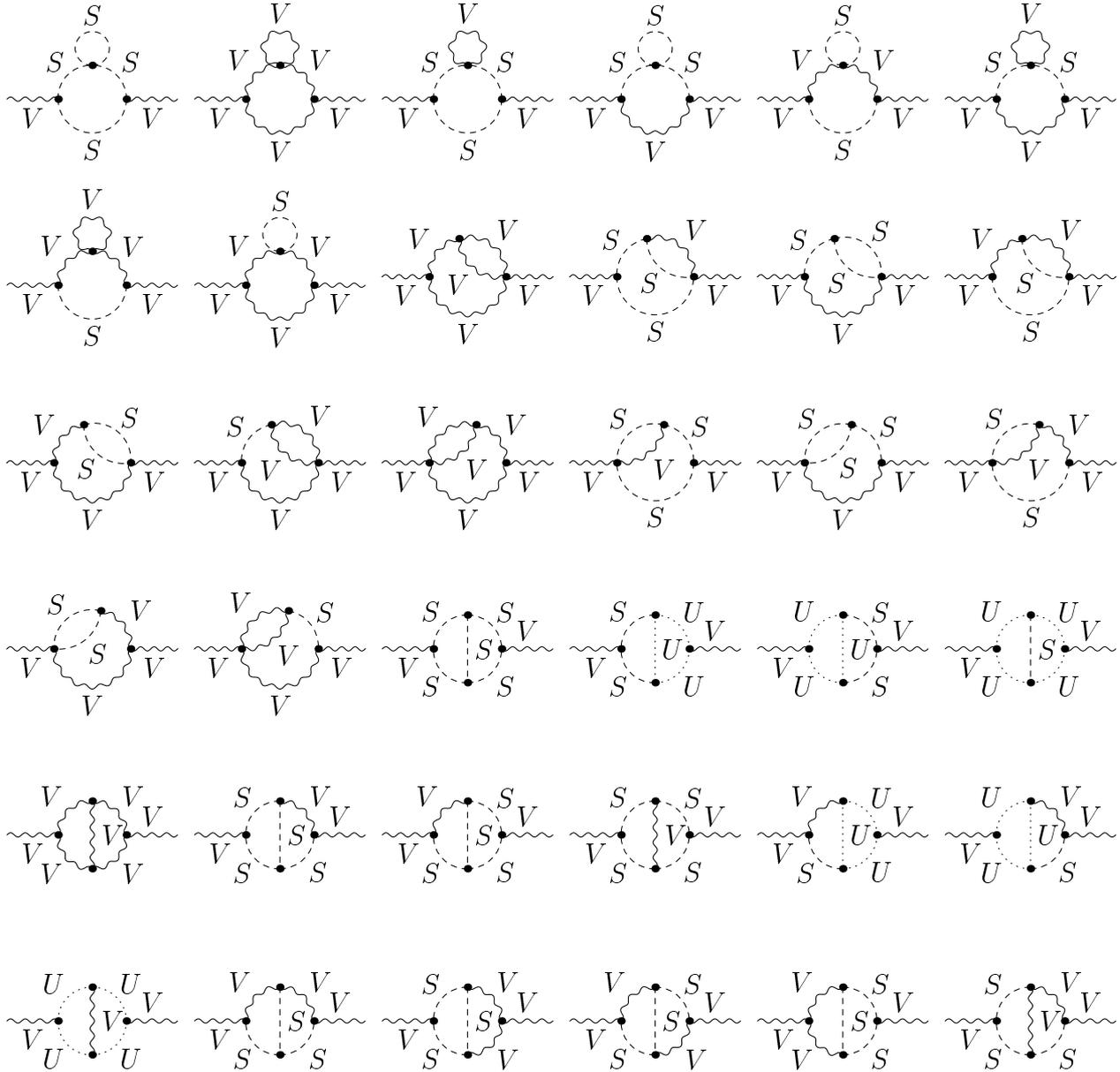
In den Diagrammen zur ee -Selbstenergie (Abschnitt A.2) und zum $Z\bar{e}e$ -Vertex (Abschnitt A.3) wurden alle Diagramme weggelassen, die eine Kopplung von Elektronen an ein skalares Teilchen beinhalten. Diese Kopplungen sind im Standardmodell proportional zur Elektronenmasse, die in dieser Arbeit vernachlässigt wurde.

A.1 VV -Selbstenergie

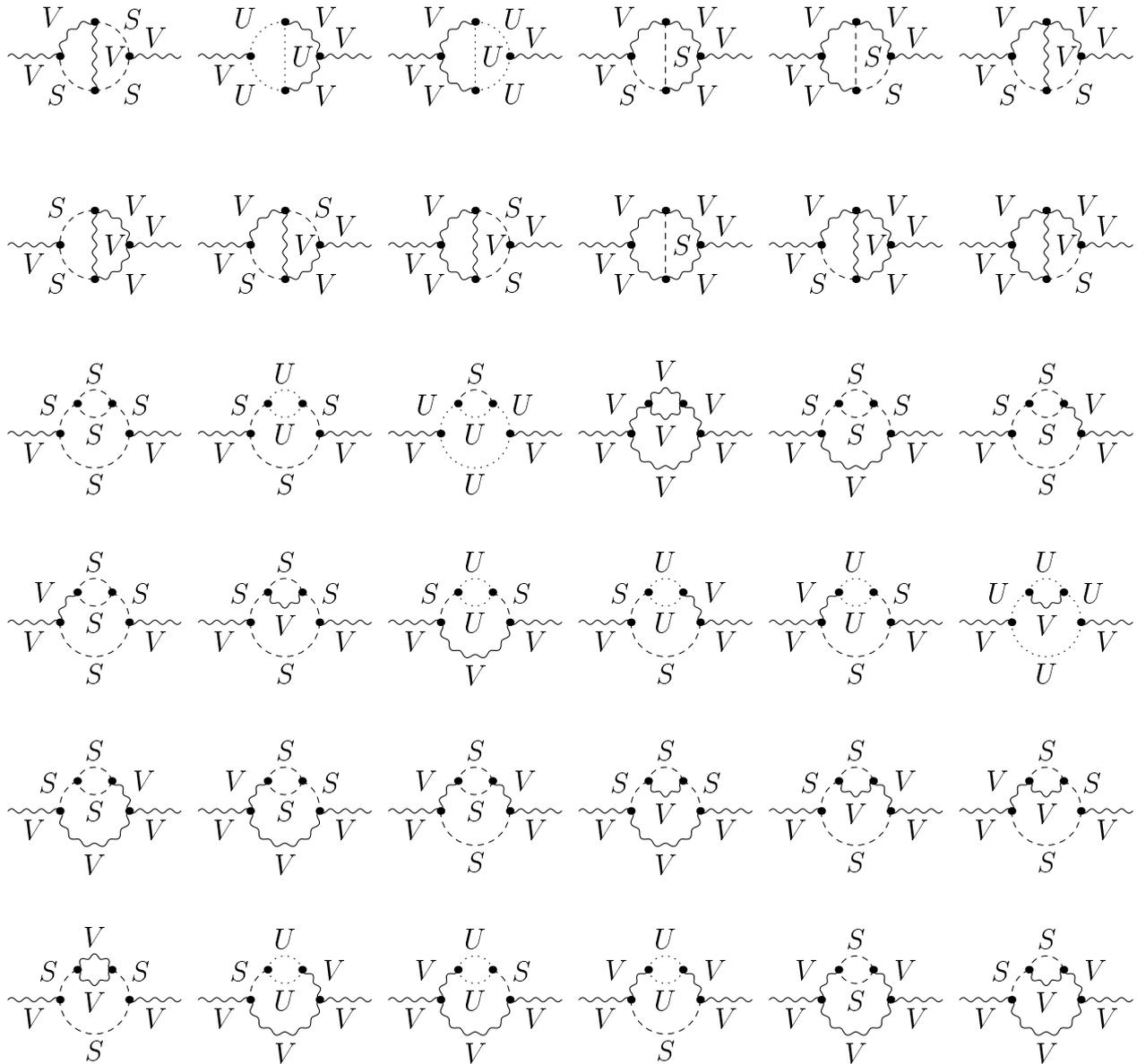
fermionische Beiträge zur V - V Selbstenergie



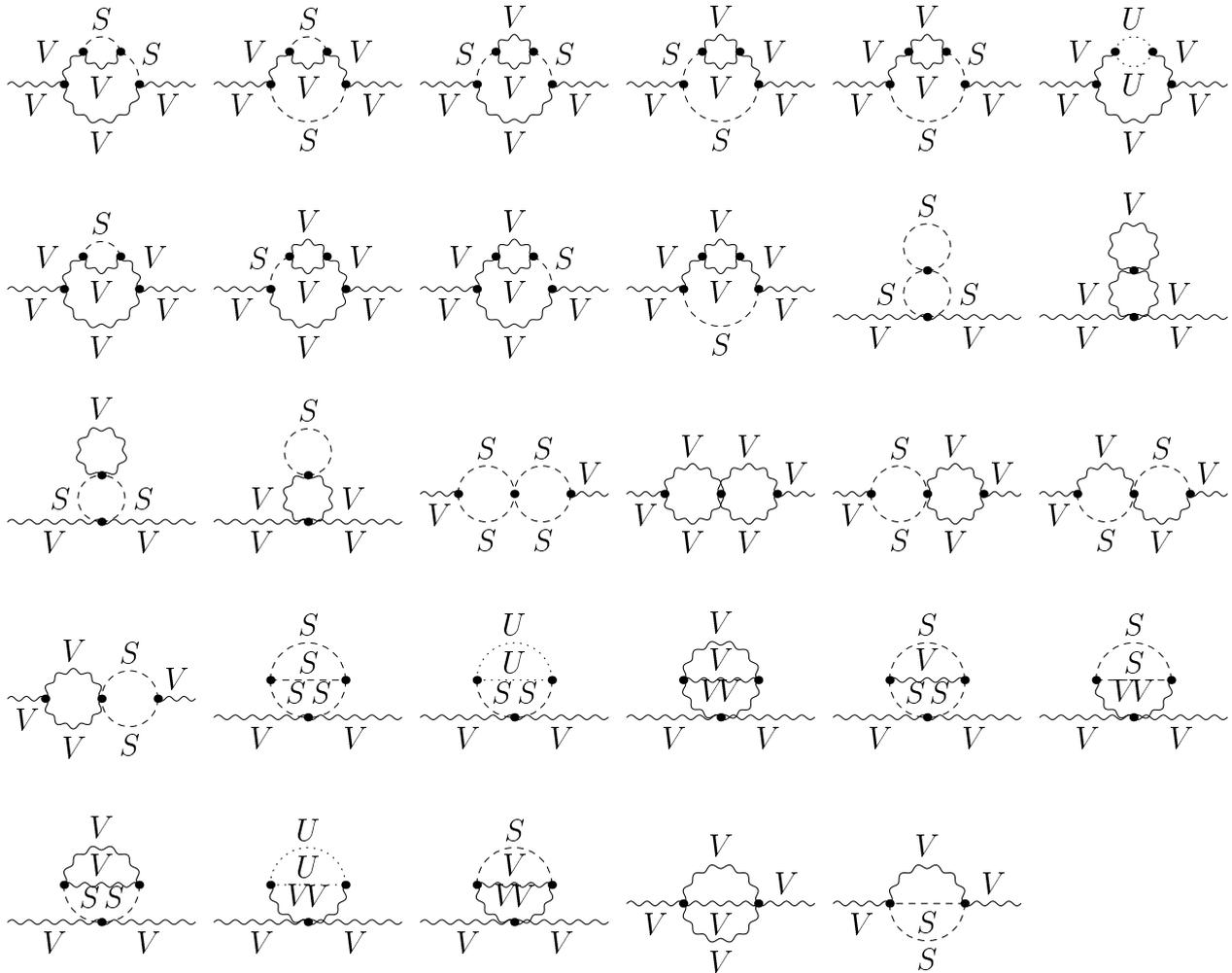
bosonische Beiträge zur $V-V$ Selbstenergie



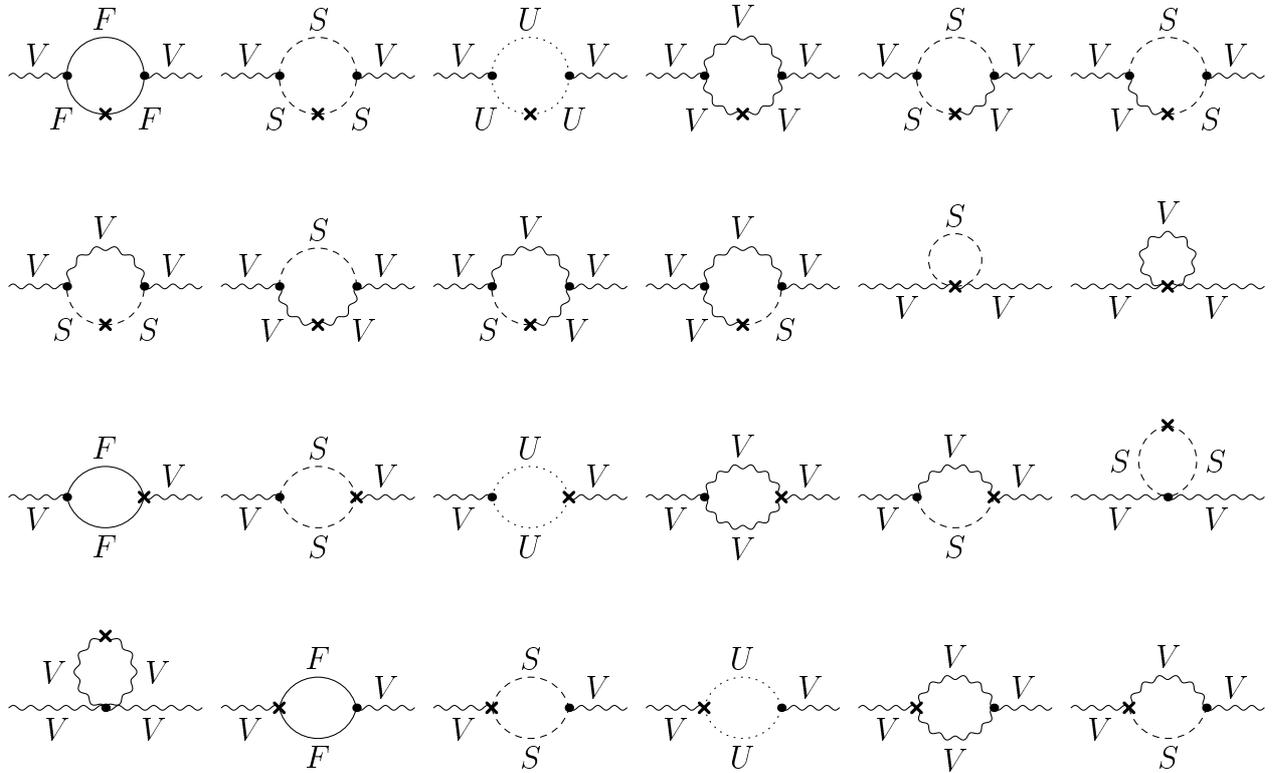
bosonische Beiträge zur V - V Selbstenergie



bosonische Beiträge zur V - V Selbstenergie

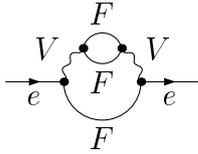


**Einschleifen-Beiträge zur V - V Selbstenergie
mit Counterterm-Einsetzung**

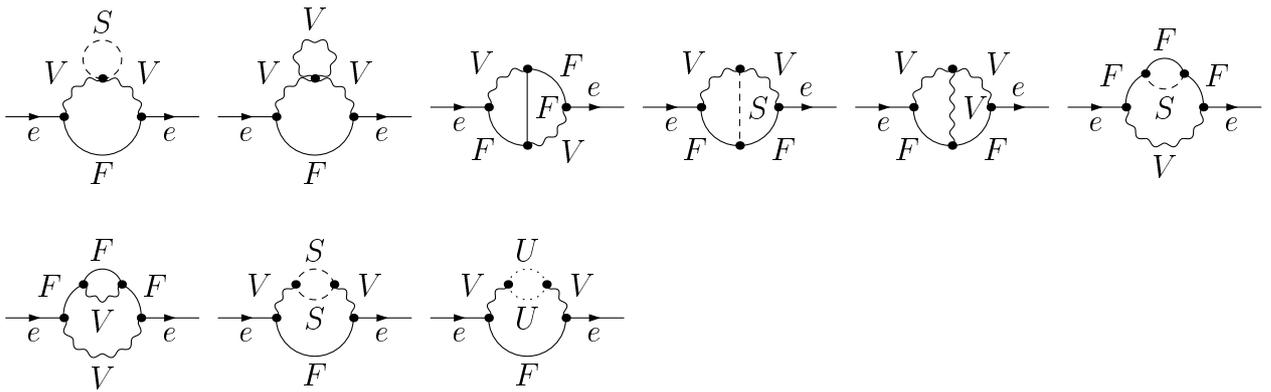


A.2 ee -Selbstenergie

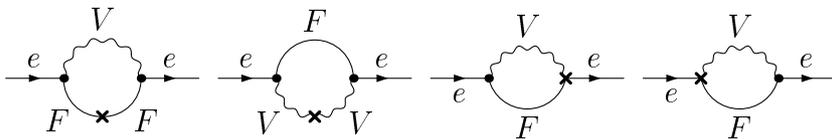
fermionische Beiträge zur e - e Selbstenergie



bosonische Beiträge zur e - e Selbstenergie

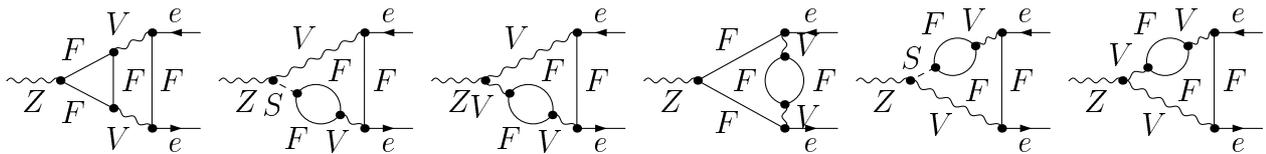


Einschleifen-Beiträge zur e - e Selbstenergie mit Counterterm-Einsetzung

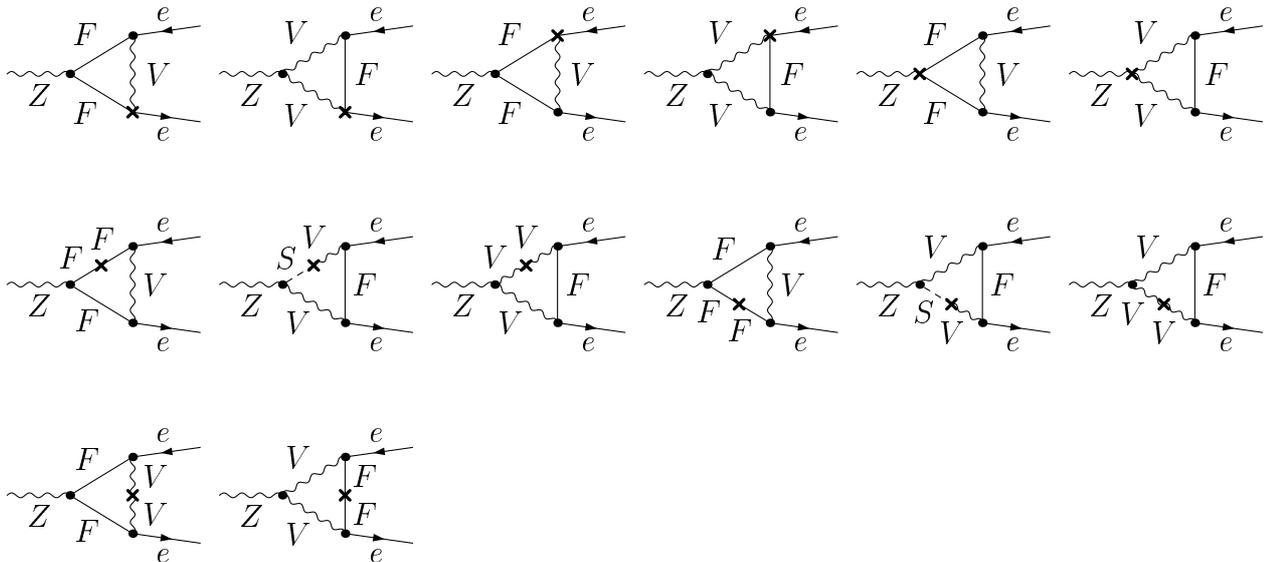


A.3 $Z\bar{e}e$ -Vertex

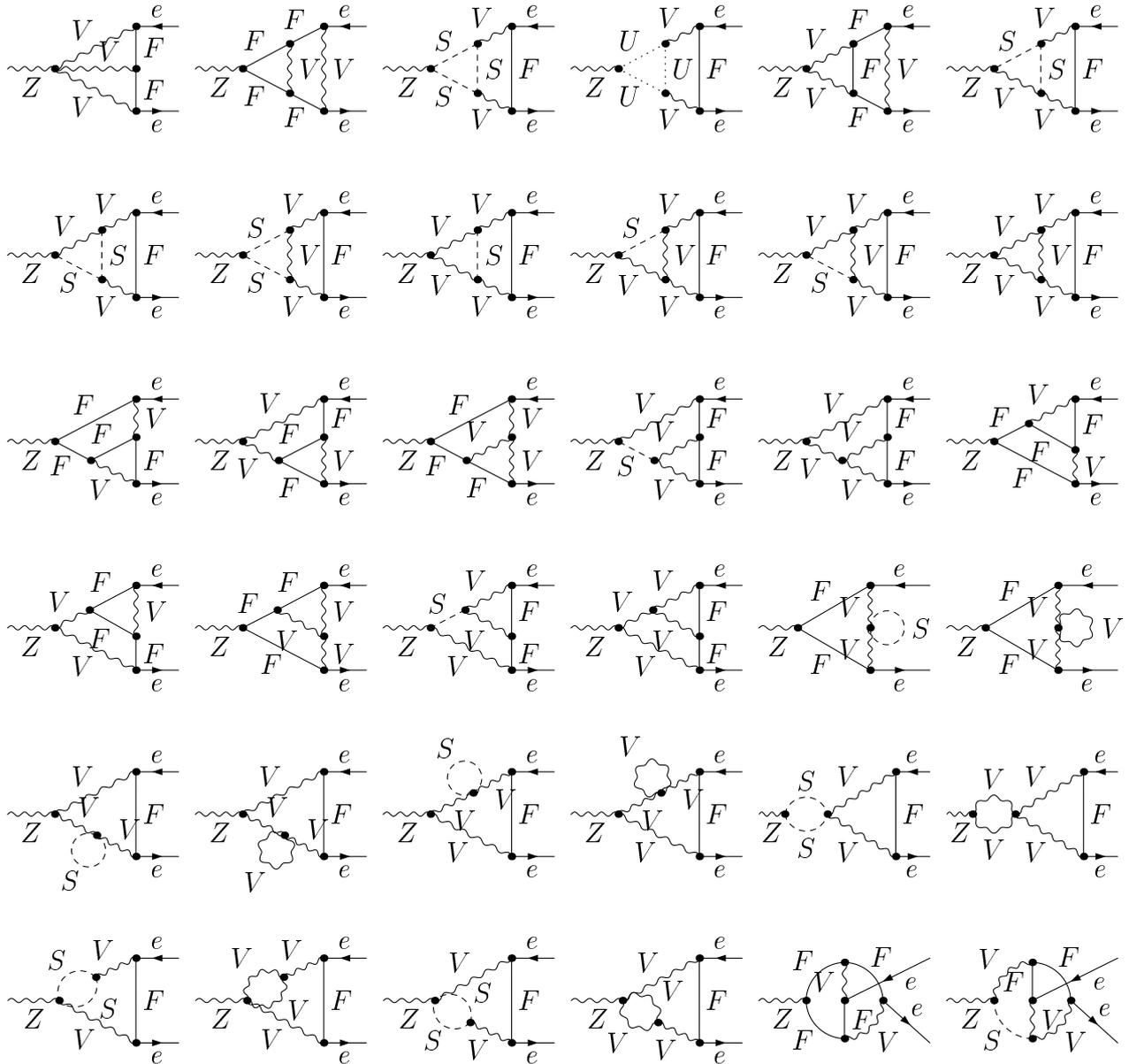
fermionische Beiträge zum $Z\bar{e}e$ -Vertex



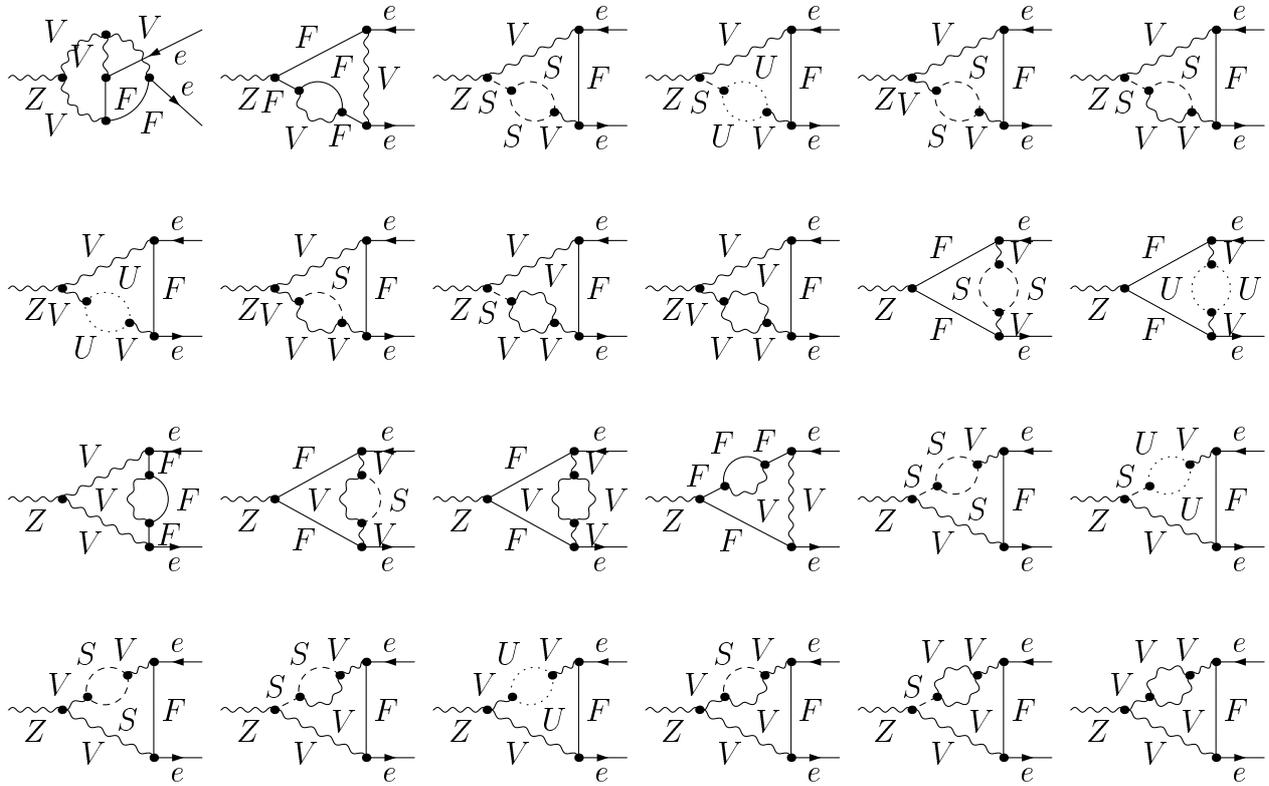
Einschleifen-Beiträge zum $Z\bar{e}e$ -Vertex mit Counterterm-Einsetzung



bosonische Beiträge zum $Z\bar{e}e$ -Vertex



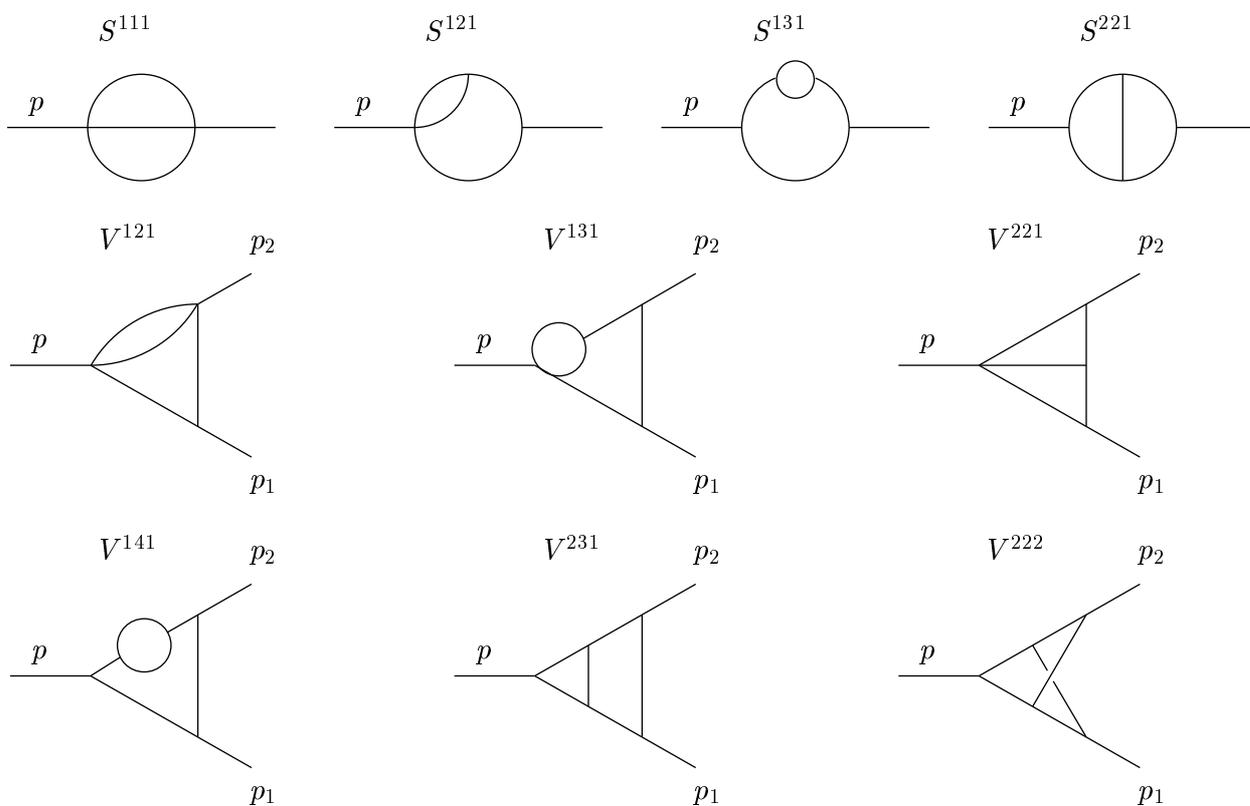
bosonische Beiträge zum $Z\bar{e}e$ -Vertex



Anhang B

Vertex- und Selbstenergiefamilien

Im Folgenden sind die verschiedenen Topologien von Zweischleifen-Zweipunkt- (S^{ijk}) und Dreipunktfunktionen (V^{ijk}) aufgeführt. Die Indizes i , j und k bezeichnen dabei die Zahl der Propagatoren mit Schleifenimpuls q_1 , q_2 bzw. $q_1 - q_2$. Alle äußeren Impulse sind einlaufend und $p = -P = -(p_1 + p_2)$.



Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579;
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264;
A. Salam, in “Svartholm: Elementary Particle Theory”, Stockholm 1968, 367-377.
- [2] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2** (1970) 1285.
- [3] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531;
M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
- [4] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598;
M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965) B1006;
W.A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann “Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics”, ed. R. Gatto (Wiley, New York, 1973).
- [5] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626 [arXiv:hep-ex/9503002];
S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2632 [arXiv:hep-ex/9503003].
- [6] The LEP Collaborations, the LEP Electroweak Working Group, the SLD Electroweak and Heavy Flavour Groups, arXiv:hep-ex/0509008.
- [7] J. A. Aguilar-Saavedra *et al.*, TESLA Technical Design Report Part III: *Physics at an e^+e^- Linear Collider* [hep-ph/0106315];
T. Abe *et al.* [American Linear Collider Working Group Collaboration], in *Proc. of the APS/DPF/DPB Summer Study on the Future of Particle Physics (Snowmass 2001)* ed. R. Davidson and C. Quigg, SLAC-R-570, *Resource book for Snowmass 2001* [hep-ex/0106055, hep-ex/0106056, hep-ex/0106057, hep-ex/0106058];
K. Abe *et al.* [ACFA Linear Collider Working Group Collaboration], ACFA Linear Collider Working Group report, [hep-ph/0109166].
- [8] U. Baur, R. Clare, J. Erler, S. Heinemeyer, D. Wackerroth, G. Weiglein and D. R. Wood, in *Proc. of the APS/DPF/DPB Summer Study on the Future of Particle Physics (Snowmass 2001)* ed. N. Graf, eConf **C010630** (2001) P122 [arXiv:hep-ph/0111314].

- [9] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964) 132;
P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508;
P. W. Higgs, Phys. Rev. **145** (1966) 1156;
F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321;
T. W. Kibble, Phys. Rev. **155** (1967) 1554.
- [10] E. Fermi, Z. Phys. **88** (1934) 161;
E. Fermi, Nuovo Cim. **11** (1934) 1.
- [11] K. Fujikawa, B. W. Lee and A. I. Sanda, Phys. Rev. D **6** (1972) 2923.
- [12] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
- [13] G. 't Hooft and M. J. Veltman, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [14] P. Breitenlohner and D. Maison, Commun. Math. Phys. **52** (1977) 11.
- [15] D. J. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. D **6** (1972) 477;
G. Costa, J. Julve, T. Marinucci and M. Tonin, Nuovo Cim. A **38** (1977) 373.
- [16] A. Freitas, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, Phys. Lett. B **495** (2000) 338
[Erratum-ibid. B **570** (2003) 260] [arXiv:hep-ph/0007091];
A. Freitas, S. Heinemeyer, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** (2000) 82 [arXiv:hep-ph/0007129];
A. Freitas, S. Heinemeyer, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, in *Proc. of the 5th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 2000)* ed. Howard E. Haber, arXiv:hep-ph/0101260;
A. Freitas, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, Nucl. Phys. B **632** (2002) 189
[Erratum-ibid. B **666** (2003) 305] [arXiv:hep-ph/0202131].
- [17] A. Freitas, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe(1999).
- [18] W. Walter, Doktorarbeit, Universität Karlsruhe(2002).
- [19] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [20] D. A. Ross and J. C. Taylor, Nucl. Phys. B **51** (1973) 125 [Erratum-ibid. B **58** (1973) 643];
A. Sirlin, Phys. Rev. D **22** (1980) 971.
- [21] A. Denner, *Fortsch. Phys.* **41** (1993), 307.
- [22] W. Hollik, MPI-PH-93-21, in *Langacker, P. (ed.): Precision tests of the standard electroweak model 37-116, and Muenchen MPI Phys. - MPI-Ph-93-021 (93/04, rec. Sep.) 79 p. Bielefeld U. - BI-TP-93-16 (93/04, rec. Sep.) 79 p.*

-
- [23] S. Eidelman and F. Jegerlehner, Z. Phys. C **67** (1995) 585 [arXiv:hep-ph/9502298];
H. Burkhardt and B. Pietrzyk, Phys. Rev. D **72** (2005) 057501 [arXiv:hep-ph/0506323].
- [24] A. Stremplat, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe(1998).
- [25] A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 2127;
A. Sirlin, Phys. Lett. B **267** (1991) 240;
R. G. Stuart, Phys. Lett. B **262** (1991) 113;
G. Stuart, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3193;
M. Passera and A. Sirlin, Phys. Rev. D **58** (1998) 113010 [arXiv:hep-ph/9804309].
- [26] P. Gambino and P. A. Grassi, Phys. Rev. D **62** (2000) 076002 [arXiv:hep-ph/9907254].
- [27] D. E. Groom *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Eur. Phys. J. C **15** (2000) 1.
- [28] D. Y. Bardin, A. Leike, T. Riemann and M. Sachwitz, Phys. Lett. B **206** (1988) 539.
- [29] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein and A. Sirlin, Phys. Rev. **101** (1956) 866;
S. M. Berman, Phys. Rev. **112** (1958) 267;
T. Kinoshita and A. Sirlin, Phys. Rev. **113** (1959) 1652.
- [30] T. van Ritbergen and R. G. Stuart, Phys. Lett. B **437**, 201 (1998) [arXiv:hep-ph/9802341];
T. van Ritbergen and R. G. Stuart, Phys. Rev. Lett. **82**, 488 (1999) [arXiv:hep-ph/9808283];
T. van Ritbergen and R. G. Stuart, Nucl. Phys. B **564**, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/9904240];
M. Steinhauser and T. Seidensticker, Phys. Lett. B **467**, 271 (1999) [arXiv:hep-ph/9909436].
- [31] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], J. Phys. G **33** (2006) 1.
- [32] A. Djouadi and C. Verzegnassi, Phys. Lett. B **195** (1987) 265;
A. Djouadi, Nuovo Cim. A **100** (1988) 357;
B. A. Kniehl, Nucl. Phys. B **347** (1990) 86;
F. Halzen and B. A. Kniehl, Nucl. Phys. B **353** (1991) 567;
B. A. Kniehl and A. Sirlin, Nucl. Phys. B **371** (1992) 141;
A. Djouadi and P. Gambino, Phys. Rev. D **49** (1994) 3499 [Erratum-ibid. D **53** (1996) 4111] [arXiv:hep-ph/9309298].
- [33] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3394 [arXiv:hep-ph/9504413], Nucl. Phys. B **482** (1996) 213 [arXiv:hep-ph/9606230].
- [34] J. van der Bij, K. Chetyrkin, M. Faisst, G. Jikia and T. Seidensticker, Phys. Lett. B **498** (2001) 156 [hep-ph/0011373];

- M. Faisst, J. H. Kühn, T. Seidensticker and O. Veretin, Nucl. Phys. B **665**, 649 (2003) [hep-ph/0302275].
- [35] R. Boughezal, J.B. Tausk and J.J. van der Bij, Nucl. Phys. B **713**, 278 (2005) [hep-ph/0410216];
Y. Schroder and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **622** (2005) 124 [arXiv:hep-ph/0504055];
K. G. Chetyrkin, M. Faisst, J. H. Kuhn, P. Maierhofer and C. Sturm, arXiv:hep-ph/0605201.
- [36] R. Boughezal, J. B. Tausk and J. J. van der Bij, Nucl. Phys. B **725** (2005) 3 [arXiv:hep-ph/0504092].
- [37] M. Awramik and M. Czakon, Phys. Lett. B **568**, 48 (2003) [arXiv:hep-ph/0305248].
- [38] M. Awramik and M. Czakon, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 241801 [hep-ph/0208113];
A. Onishchenko and O. Veretin, Phys. Lett. B **551** (2003) 111 [hep-ph/0209010];
M. Awramik, M. Czakon, A. Onishchenko and O. Veretin, Phys. Rev. D **68**, 053004 (2003) [hep-ph/0209084].
- [39] D. Y. Bardin *et al.*, arXiv:hep-ph/9709229, in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Resonance, Cern 95-03 (1995)*, eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino.
- [40] G. Degrossi and A. Sirlin, Nucl. Phys. B **352**, 342 (1991);
P. Gambino and A. Sirlin, Phys. Rev. D **49**, 1160 (1994) [arXiv:hep-ph/9309326].
- [41] G. Degrossi, P. Gambino and A. Sirlin,
Phys. Lett. B **394**, 188 (1997) [arXiv:hep-ph/9611363].
- [42] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **140** (2001) 418, „FeynArts User’s Guide”, erhältlich unter www.feynarts.de.
- [43] T. Hahn, arXiv:hep-ph/9905354;
T. Hahn, Acta Phys. Polon. B **30** (1999) 3469 [arXiv:hep-ph/9910227];
T. Hahn, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** (2000) 231 [arXiv:hep-ph/0005029].
- [44] G. Weiglein, R. Scharf and M. Bohm, Nucl. Phys. B **416** (1994) 606 [arXiv:hep-ph/9310358];
G. Weiglein, R. Mertig, R. Scharf and M. Bohm, PRINT-95-128 *Prepared for 2nd International Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High-energy and Nuclear Physics, La Londe Les Maures, France, 13-18 Jan 1992*.

- [45] S. Bauberger, M. Bohm, G. Weiglein, F. A. Berends and M. Buza, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **37B** (1994) 95 [arXiv:hep-ph/9406404];
S. Bauberger, F. A. Berends, M. Bohm and M. Buza, Nucl. Phys. B **434** (1995) 383 [arXiv:hep-ph/9409388];
S. Bauberger and M. Bohm, Nucl. Phys. B **445** (1995) 25 [arXiv:hep-ph/9501201].
- [46] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **153** (1979) 365.
- [47] A. I. Davydychev and J. B. Tausk, Nucl. Phys. B **397** (1993) 123.
- [48] A. Ferroglia, M. Passera, G. Passarino and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **680** (2004) 199, [arXiv:hep-ph/0311186] Nucl. Phys. B **650** (2003) 162 [arXiv:hep-ph/0209219];
S. Actis, A. Ferroglia, G. Passarino, M. Passera and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **703** (2004) 3 [arXiv:hep-ph/0402132];
G. Passarino, Nucl. Phys. B **619** (2001) 257 [arXiv:hep-ph/0108252];
G. Passarino and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **629** (2002) 97 [arXiv:hep-ph/0112004];
S. Uccirati, Acta Phys. Polon. B **35** (2004) 2573 [arXiv:hep-ph/0410332].
- [49] T. Hahn, arXiv:hep-ph/0404043.
- [50] G. Passarino and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **747** (2006) 113 [arXiv:hep-ph/0603121].
- [51] S. Dittmaier, Nucl. Phys. B **675** (2003) 447 [arXiv:hep-ph/0308246].
- [52] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas and G. Weiglein, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 201805 [arXiv:hep-ph/0407317], Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135** (2004) 119 [arXiv:hep-ph/0408207].
- [53] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **592** (2004) 1.
- [54] W. Hollik, U. Meier and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **731** (2005) 213 [arXiv:hep-ph/0507158].
- [55] W. Hollik, U. Meier and S. Uccirati, Phys. Lett. B **632** (2006) 680 [arXiv:hep-ph/0509302].
- [56] M. Awramik, M. Czakon and A. Freitas, arXiv:hep-ph/0605339, arXiv:hep-ph/0608099.

LITERATURVERZEICHNIS

Danksagung

An dieser Stelle sei allen gedankt, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Herrn Prof. W. Hollik danke ich für die interessante Themenstellung und die gute Betreuung. Seine zahlreichen Ratschläge und die vielen Diskussionen haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Sehr dankbar bin ich auch Sandro Uccirati, von dessen großem Wissen über Zweischleifen-Integrale ich sehr profitiert habe. Nicht nur die Zusammenarbeit mit ihm war stets sehr angenehm.

Auch Heidi Rzehak und Markus Roth sei herzlich dafür gedankt, dass sie sich sehr viel Zeit genommen haben, meine zahlreichen Fragen zu beantworten.

Großes Lob gebührt den Systemadministratoren Peter Breitenlohner und Thomas Hahn.

Mein herzlichster Dank für das Korrekturlesen gilt Heidi Rzehak, Michael Plümacher sowie Arne Weber.

Auch die gute Atmosphäre am Max-Planck-Institut für Physik hat maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Hierfür sei allen Kollegen gedankt, insbesondere den ständigen Mitglieder der nachmittäglichen Kaffeerunde und meinen Bürokollegen Monika Kollar und Arne Weber. Letzterem danke ich auch für die gemeinsamen Karnevals-Chorproben. Die MPI-Fussballgruppe und der Platzwart der Werner-Heisenberg-Arena haben dafür gesorgt, dass es mir in der Schlussphase dieser Arbeit nicht an der nötigen Kondition fehlte.

Schließlich danke ich meinen Eltern und meinem Bruder Christoph, die mich moralisch, kulinarisch und finanziell unterstützt haben und natürlich meiner Freundin Jenny für ihr Verständnis und die niemals endenden Ermutigungen.