

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Numerische Behandlung stationärer Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Diskretisierung und Algorithmen

Carolyn Kalender

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Peter Gritzmann
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Folkmar Bornemann
2. Univ.-Prof. Dr. Michael Ulbrich
3. Univ.-Prof. Dr. Martin Rumpf,
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
(schriftliche Beurteilung)

Die Dissertation wurde am 6.12.2007 bei der Technischen Universität eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 16.6.2008 angenommen.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle gerne bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. An erster Stelle danke ich meinem Betreuer Prof. Dr. Folkmar Bornemann, der mir die Möglichkeit gab, diese Dissertation an seinem Lehrstuhl anzufertigen. Er hat mir immer die nötige Freiheit gewährt und blieb dabei jederzeit für Probleme ansprechbar. Desweiteren danke ich Herrn Prof. Dr. Michael Ulbrich und Herrn Prof. Dr. Martin Rumpf für die Übernahme der Gutachten und die damit verbundenen Bemühungen.

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Graduiertenkollegs „Angewandte Algorithmische Mathematik“ der Technischen Universität München gefördert, auch dafür mein Dank.

Christian Ludwig, Thomas März und mein Mann Bernhard haben die Mühe auf sich genommen diese Arbeit Korrektur zu lesen und mir dabei hilfreiche Fragen und Anmerkungen an die Hand gegeben.

Nicht unerwähnt bleiben sollen auch alle Freunde und Kollegen, die mich während der gesamten Zeit angenehm begleitet haben. Insbesondere möchte ich mich bei Christian Ludwig bedanken, mit dem ich schöne und anregende Kaffeepausen verbracht habe und der mir bei programmiertechnischen sowie allen anderen denkbaren Computer-Problemen immer hilfreich zur Seite stand.

Nicht zu Letzt möchte ich mich bei meiner Familie, ganz im Besonderen bei meinem Mann Bernhard bedanken. Er hat mich in meinem Weg zur Mathematik bestärkt und in jeder Hinsicht unterstützt. Danke Schatz!

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
1 Einleitung	1
1.1 Anforderungen an die Hamilton-Jacobi-Gleichung	1
1.2 Überblick	3
2 Lösungstheorie	5
2.1 Äquivalente Definitionen der Viskositätslösung	7
2.2 Konsistenz der verallgemeinerten Lösung	8
2.3 Existenz und Eindeutigkeit	8
2.4 Einige Eigenschaften der Trägerfunktion	9
3 Diskretisierung	11
3.1 Godunov-Diskretisierung auf Rechteckgittern	11
3.2 Diskretisierung auf Dreiecksgittern	22
3.3 Einführung der Kugelwellen-Interpolation	24
3.4 Interpretation als Snellius'sches Gesetz	30
3.5 Konvergenz	31
3.6 Ordnungsvergleich	37
3.7 Lineare Interpolation des Geschwindigkeitsterms	40
3.8 Zusammenfassung des Diskretisierungsvorschlags	42
4 Lösungsalgorithmen	45
4.1 Das Gauß-Seidel-Verfahren	46
4.2 Das Fast-Marching-Verfahren	48
4.3 Das Fast-Sweeping-Verfahren	50
4.4 Das Gauß-Southwell-Verfahren	53
4.5 Das adaptive Gauß-Southwell-Verfahren	65

4.6	Das selbstordnende Southwell-Verfahren	67
4.7	Das Fast-Southwell-Verfahren	71
4.8	Weitere Verbesserungsvorschläge und Anmerkungen	78
5	Numerische Beispiele	81
5.1	Verhalten des Fast-Southwell-Verfahrens	81
5.2	Verhalten der Kugelwellendiskretisierung	87
5.3	Kürzeste Wege auf Manigfaltigkeiten	88
	Literatur	91

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem numerischen Lösen stationärer Hamilton-Jacobi-Gleichungen (HJG) der Art

$$\begin{aligned} H(x, \nabla u(x)) &= 0 & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{HJG}$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ einem beschränkten Gebiet mit Lipschitzrand. Durch die recht allgemeine Form, die wir im folgenden für die Hamiltonfunktion H erlauben werden, handelt es sich dabei in der Regel um nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit Dirichlet-Randdaten.

Ein bedeutender Vertreter dieser Gleichungen ist die Eikonalgleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla u(x)\| &= \frac{1}{F(x)} & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{EIK}$$

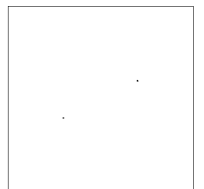
die der geometrischen Optik entstammt.

Sie beschreibt für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ das Laufzeitverhalten von Wellen bei gegebener Geschwindigkeitsfunktion F in der Ebene und bei geeigneter Modifikation der Norm (wie z.B. in [TCOZ03] vorgeschlagen) auch auf Manifoldigkeiten.

Durch die große Zahl an Anwendungsmöglichkeiten z.B. in Seismik, Bildverarbeitung, Medizintechnik und anderen Gebieten war und ist sie ein Ausgangspunkt bei der Entwicklung effizienter numerischer Lösungsverfahren für Hamilton-Jacobi-Gleichungen.

1.1 Anforderungen an die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Um gewünschte Eigenschaften wie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen garantieren zu können, werden wir für die gesamte Arbeit einen kanoni-



schen Satz an Forderungen an die Hamiltonfunktion sowie die Randdaten stellen.

Ein hinreichend guter Anforderungskatalog ist der in [Lio82, §5.3] zu findende Satz von Bedingungen.

(H1) (*Stetigkeit*) $H \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d)$.

(H2) (*Konvexität*) $p \mapsto H(x, p)$ ist konvex $\forall x \in \overline{\Omega}$.

(H3) (*Koerzivität*) $H(x, p) \rightarrow \infty$ für $\|p\| \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $x \in \overline{\Omega}$.
Äquivalent dazu (mit (H1) und (H2)) existieren positive α, β mit

$$H(x, p) \geq \alpha \|p\| - \beta, \quad x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^d.$$

(H4) (*Kompatibilität von H*) $H(x, 0) \leq 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ oder

(H4') (*Kompatibilität von H*) $H(x, 0) < 0$ für alle $x \in \Omega$.

(H5) (*Kompatibilität von g*) Für alle $x, y \in \partial\Omega$ gilt $g(x) - g(y) \leq \delta(x, y)$.
Dabei ist die optische Distanz δ definiert durch

$$\delta(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 \rho(\xi(t), -\xi'(t)) dt : \xi \in C^{0,1}([0, 1], \overline{\Omega}), \xi(0) = x, \xi(1) = y \right\}$$

mit der Trägerfunktion $\rho(x, q) = \max_{H(x, p)=0} \langle p, q \rangle$.

Einerseits erfüllen eine große Menge praktischer Probleme diese Anforderungen, so dass wir unser Anwendungsgebiet nicht zu sehr beschnitten haben. Andererseits ermöglichen sie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung der HJG. Im folgenden reicht die schwächere Forderung (H4), um die Existenz von Lösungen zu garantieren, aber es ist (H4') nötig, um eine Eindeutigkeitsaussage zu erlangen. Sofern nichts anderes erwähnt wird, soll in dieser Arbeit daher die (HJG) die Forderungen (H1)–(H3), (H4') und (H5) erfüllen.

Für die schon erwähnte Eikonalgleichung (EIK) mit $H(x, p) = \|p\| - \frac{1}{F(x)}$ gelten (H1)–(H4') für stetige Funktionen $F(x) > 0 \forall x \in \overline{\Omega}$ offensichtlich. Für die Randdaten betrachten wir zunächst die zugehörige Trägerfunktion

$$\rho(x, q) = \max_{H(x, p)=0} \langle p, q \rangle = \left\langle \frac{1}{F(x)} \frac{q}{\|q\|}, q \right\rangle = \frac{1}{F(x)} \|q\|$$

und erhalten damit die optische Distanz mit $F_{\min} = \min_{x \in \bar{\Omega}} F(x)$ zu

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \inf \left\{ \int_0^1 \frac{\|\zeta'(t)\|}{F(\zeta(t))} dt : \zeta \in C^{0,1}([0, 1], \bar{\Omega}), \zeta(0) = x, \zeta(1) = y \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \int_0^1 \frac{\|\zeta'(t)\|}{F_{\min}} dt : \zeta \in C^{0,1}([0, 1], \bar{\Omega}), \zeta(0) = x, \zeta(1) = y \right\} \\ &\leq \frac{1}{F_{\min}} \|x - y\|, \end{aligned}$$

da das Integral über $\|\zeta'(t)\|$ gerade die Länge des Weges ζ misst. Für konstante Geschwindigkeitsfunktionen F ist diese Abschätzung scharf und wir erhalten in diesem Fall (H5) zu $g(x) - g(y) \leq \frac{1}{F} \|x - y\|$ für alle $x, y \in \partial\Omega$.

1.2 Überblick

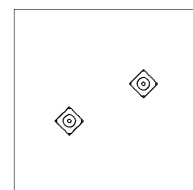
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem effizienten numerischen Lösen von Hamilton-Jacobi-Gleichungen. Dabei gliedert sich der Beitrag dieser Arbeit zu dem Themengebiet in zwei Bereiche:

- Verbesserung der Diskretisierung (Kap. 3)
- Verbesserung der Algorithmen (Kap. 4)

Zunächst wird in Kapitel 2 das notwendige theoretische Rüstzeug bereitgestellt. Wir motivieren den für HJG geeigneten schwachen Lösungsbegriff der *Viskositätslösung* und führen ihn aus verschiedenen Blickwinkeln mit unterschiedlichen zueinander äquivalenten Definitionen ein. Desweiteren zitieren wir einige grundlegende Resultate zu Konsistenz, Existenz und Eindeutigkeit.

In Kapitel 3 werden verschiedene Ansätze zur Diskretisierung der HJG diskutiert. Zunächst beginnen wir in Abschnitt 3.1 mit der Godunov-Diskretisierung auf Rechteckgittern. Die aus dieser Diskretisierung für einen Gitterwert resultierende Lösungsformel lässt sich für die Eikonalgleichung (ebenso wie ihre Erweiterung auf Dreiecksgitter nach [BR06], die in 3.2 eingeführt wird) geometrisch deuten:

Die Lösung der diskreten Gleichung in einem Gitterpunkt x_k berechnet sich als die erstmögliche Ankunftszeit einer ebenen Wellenfront, die zu vorgegebenen Zeitpunkten die Nachbarn von x_k passiert. Dieser Ansatz erzeugt insbesondere dort Diskretisierungsfehler, wo die sich fortbewegende Wellenfront große Krümmungen aufweist. Dieser Diskretisierungsfehler wird im folgenden transportiert und addiert sich zu einem nicht zu vernachlässigbaren Fehler.



Deshalb schlage ich in 3.3 als Verbesserung der Diskretisierung vor, die Lösung in x_k als erstmögliche Ankunft einer approximierenden *Kugelwelle* zu berechnen, die zu den vorgegebenen Zeitpunkten die Nachbarn passiert.

Die folgenden Abschnitte widmen sich der Analyse dieser Kugelwellendiskretisierung. In 3.4 wird eine weitere geometrisch/physikalische Deutung durchgeführt. In 3.5 zeigen wir die Konvergenz der diskreten Lösung für kleiner werdende Gitterweite gegen die Viskositätslösung des Problems. In 3.6 erfolgt eine modellhafte Betrachtung des kumulierten Fehlers der Godunov-Diskretisierung im Vergleich zur Kugelwellenidee. Abschließend zeigen wir in 3.7 eine weitere mögliche Verbesserung der Diskretisierung auf.

Kapitel 4 widmet sich den Algorithmen zum Lösen der diskreten Gleichungen. Zunächst geben wir einen Überblick über die bekannten Verfahren. In 4.4 machen wir den Leser dann zunächst mit dem weniger bekannten Gauß-Southwell-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme vertraut, um diesen Ansatz im folgenden auf die aus der Diskretisierung der HJG hervorgegangenen nichtlinearen Gleichungssysteme anwenden zu können. Wir können nachweisen, dass für eine bestimmte Klasse von HJG das Gauß-Southwell-Verfahren die diskrete Lösung in derselben Reihenfolge wie das Fast-Marching-Verfahren berechnet und damit ebenso nach einem Durchlauf terminiert. Es hat jedoch den Vorteil durch Betrachtung der billiger zu berechnenden Residuen weniger Lösungsschritte zu benötigen. Im folgenden wird dieser algorithmische Ansatz weiterverfolgt, um die Idee der Residuenberechnung auch für alle anderen HJG effizient nutzbar zu machen. Diese Bemühungen schlagen sich in der Entwicklung des Fast-Southwell-Verfahrens nieder, das in einer Komplexität von $\mathcal{O}(N + K \log K)$ Operationen verläuft, wobei wir mit N die Anzahl der Gitterstellen bezeichnen und $K \leq N$ problemabhängig gilt. Es verläuft schneller als das bekannte Fast-Marching-Verfahren.

Das in der unteren rechten Ecke der Seiten befindliche Daumenkino visualisiert den Berechnungsfortschritt des neuen Fast-Southwell-Verfahrens für das Modellproblem

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= 1 \quad \text{auf }]0, 1[^2 \\ u(0.3, 0.4) &= 0 \quad u(0.7, 0.6) = 0 \end{aligned}$$

und soll so zum weiteren Verständnis beitragen.

Die Arbeit wird durch numerische Experimente in Kapitel 5 beschlossen, die die Vor- und Nachteile der Kugelwellendiskretisierung und des Fast-Southwell-Verfahrens herausstellen sollen.

Kapitel 2

Lösungstheorie

Wenn wir über Existenz und Eindeutigkeit sprechen, so müssen wir uns als aller erstes darüber klar werden, in welchen Funktionenräumen die Lösung u von (HJG) zu suchen sein wird. Wie in einigen Arbeiten (z.B. [Lio82, S.48]) anhand der eindimensionalen Eikonalgleichung mit Nullrandbedingungen bemerkt, ist $C^1(\Omega)$ zu klein, um Existenz zu garantieren und $C^{0,1}(\Omega)$ zu groß, um Eindeutigkeit zu erlangen. Es muss also ein verallgemeinerter Lösungsbegriff etabliert werden. Dies ist der Begriff der *Viskositätslösung*, dem wir uns in diesem Kapitel hauptsächlich widmen wollen.

Dazu betrachten wir zunächst das einfache Beispiel einer eindimensionalen Eikonalgleichung

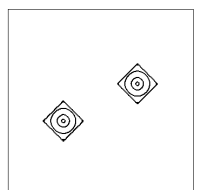
$$\begin{aligned} |u'(x)| &= 1 & \forall x \in]-1, 1[\\ u(x) &= 0 & \text{für } x \in \{-1, 1\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Würden wir hier im klassischen Sinne $u \in C^1(]-1, 1[)$ fordern, so wäre die Gleichung nicht lösbar.

Wir benötigen also einen verallgemeinerten Lösungsbegriff. Dazu überlegen wir uns zunächst aus der physikalischen Anschauung heraus, welche Lösung wir uns für diese Gleichung erwarten.

Wenn wir u als erste Ankunftszeit einer Welle auffassen, die zum Zeitpunkt 0 in -1 bzw. 1 startet, so erwarten wir als sinnvolle Lösung $u(x) = 1 - |x|$. Diese Funktion ist durch den Sprung in der ersten Ableitung bei $x = 0$ nicht differenzierbar, jedoch Lipschitz-stetig. Also liegt es nahe zu fordern, dass unsere Lösung sich in $C^{0,1}(\Omega)$ befinden soll.

Lassen wir aber diesen Funktionenraum als zugrunde liegenden Lösungsraum zu, so sind z.B. auch die in Abbildung 2.1 gestrichelt und gepunktet dargestellten Funktionen zulässige Lösungen der Gleichung und wir erhalten keine Eindeutigkeit mehr.



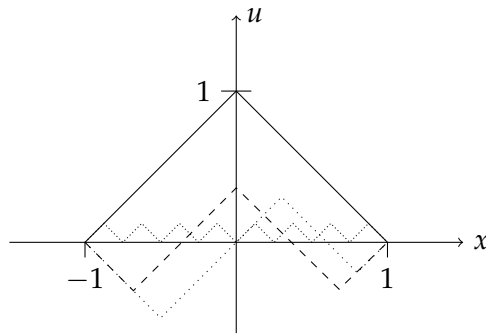


Abbildung 2.1: Einige mögliche Lösungen von (2.1) in $C^{0,1}([-1, 1])$

Wir müssen also den Lösungsbegriff stärker einschränken. Die Idee in welcher Art und Weise dies zu tun ist, ergibt sich wiederum aus der physikalischen Anwendung heraus.

Der Begriff der Viskositätslösung hat sich aus einer Methode (Methode der verschwindenden Viskosität) zur Lösung des Problems (HJG) heraus entwickelt. Die Idee besteht darin, die ursprüngliche Differentialgleichung durch

$$-\epsilon \Delta u^\epsilon + H(x, \nabla u^\epsilon(x)) = 0 \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

$$u^\epsilon(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.3)$$

zu approximieren.

Für eine große Klasse von HJG hat diese quasilineare elliptische Gleichung [Lio82] folgend eine eindeutige Lösung u^ϵ und wir erhalten für ϵ gegen 0 eine eindeutige Grenzfunktion u^0 , die Lösung unseres ursprünglichen Problems (HJG) ist. Diese Lösung u^0 wird als *Viskositätslösung* bezeichnet, da der verschwindende elliptische Anteil in (2.2) im physikalischen Kontext als Viskosität gedeutet werden kann.

In gewissem Sinn erhalten wir dadurch die „glatteste“ Funktion unter allen Lösungen aus $C^{0,1}(\Omega)$.

Den Lösungsbegriff für HJG über diesen Weg zu definieren, wäre jedoch eine sehr umständliche, schwer greifbare Definition. Wir wünschen uns eine intrinsische Definition der Viskositätslösung. Eine solche erhält man durch Betrachtung charakteristischer Eigenschaften der Lösung u^ϵ von (2.2, 2.3), die durch die Grenzwertbildung erhalten bleiben. Dies führt auf eine Reihe von möglichen äquivalenten Definitionen, die in [Lio82] und [CL83] erstmals eingeführt wurden und deren Diskussion in den zwei Folgeartikeln [CEL84] und [CL84] fortgeführt wurde.

Im nächsten Abschnitt wollen wir diese Definitionen zur Verfügung stellen, um dann im folgenden auf Existenz und Eindeutigkeitsaussagen ver-

weisen zu können.

2.1 Äquivalente Definitionen der Viskositätslösung

Definition 2.1 (Viskositätslösung). Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt *Viskositätslösung* von $H(x, \nabla u) = 0$, wenn für jede Testfunktion $v \in C^\infty(\Omega)$ gilt

- (i) Hat $u - v$ ein lokales Maximum in $x_0 \in \Omega$, so folgt $H(x_0, Dv(x_0)) \leq 0$.
- (ii) Hat $u - v$ ein lokales Minimum in $x_0 \in \Omega$, so folgt $H(x_0, Dv(x_0)) \geq 0$.

Eine Funktion $u \in C(\Omega)$, die die Bedingung (i) erfüllt heißt *Viskositätssublösung* von $H(x, \nabla u) = 0$. Eine Funktion $u \in C(\Omega)$, die (ii) erfüllt heißt *Viskositätssuperlösung* von $H(x, \nabla u) = 0$.

Definition 2.1 werden wir in den Konvergenzbeweisen in Kapitel 3 nutzen, um nachzuweisen, dass die dort auftretende Grenzfunktion die Viskositätslösung des Problems ist. Steht man jedoch z.B. vor der Aufgabe für unser Beispiel (2.1) der eindimensionalen Eikonalgleichung nachzuweisen, dass $u(x) = 1 - |x|$ die Viskositätslösung ist, so liefert uns eine andere, noch stärker auf die Lösungsfunktion bezogene Definition das beste Mittel der Wahl. Dafür benötigen wir den Begriff des Sub- bzw. Superdifferentials als Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs auch auf nicht differenzierbare Funktionen.

Definition 2.2 (Superdifferential, Subdifferential).

Es sei eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \Omega$,

- (i) dann heißt die Menge

$$D^+u(x_0) = \left\{ p_0 \in \mathbb{R}^d \mid \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p_0(x - x_0)}{|x - x_0|} \leq 0 \right\}$$

Superdifferential von u in x_0 ,

- (ii) und die Menge

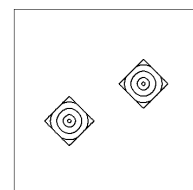
$$D^-u(x_0) = \left\{ p_0 \in \mathbb{R}^d \mid \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p_0(x - x_0)}{|x - x_0|} \geq 0 \right\}$$

heißt *Subdifferential* von u in x_0 .

Damit erhält man folgende äquivalente Charakterisierung der Viskositätslösung:

Satz 2.3 ([CEL84, Satz 1.1]).

Die folgenden Aussagen sind äquivalent



(i) $u \in C(\Omega)$ ist Viskositätslösung von $H(x, \nabla u) = 0$.

(ii) Für $u \in C(\Omega)$ gilt

a) $H(x, p) \leq 0 \forall x \in \Omega, \forall p \in D^+u(x)$ und

b) $H(x, p) \geq 0 \forall x \in \Omega, \forall p \in D^-u(x)$.

Viskositätssublösungen sind dabei jene, die (ii) a) erfüllen und Viskositäts-superlösungen jene, die (ii) b) erfüllen.

Durch die Einführung des kleinen elliptischen Anteils in Gleichung (2.2) wurde ein Symmetriebruch erzeugt. Es ist nun ein Unterschied, ob die Lösung der Gleichung $H = 0$ oder $-H = 0$ gesucht ist.

Für das Beispiel (2.1) der eindimensionalen Eikonalgleichung kann man mit Hilfe des Sub- und Superdifferentials nun schnell nachprüfen, dass $u(x) = 1 - |x|$ die Viskositätslösung von $H = |u'| - 1 = 0$ ist. Für $H = 1 - |u'| = 0$ ist auf Grund des Symmetriebruchs $-u$ die Viskositätslösung.

2.2 Konsistenz der verallgemeinerten Lösung

Es ist nun der Begriff der Viskositätslösung eingeführt, der uns im folgenden Existenz und Eindeutigkeit garantieren soll. Bevor wir diese grundlegenden Aussagen zitieren, wollen wir vorab noch klären, ob Viskositätslösungen konsistent mit möglichen klassischen Lösungen sind. Dies ist natürlich das, was wir erwarten und der folgende Satz garantiert es uns.

Satz 2.4 ([CEL84, Satz 1.2] Konsistenz).

(i) Sei $u \in C^1(\Omega)$ eine klassische Lösung von (HJG), dann ist u eine Viskositätslösung von (HJG).

(ii) Sei $u \in C(\Omega)$ eine Viskositätslösung von (HJG), die in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. Dann gilt $H(x_0, Du(x_0)) = 0$.

2.3 Existenz und Eindeutigkeit

Nun kommen wir zu den angekündigten Resultaten, die den Antrieb zur Einführung des verallgemeinerten Lösungsbegriffs darstellten.

Satz 2.5 (Existenz [Lio82, Thm. 5.3]). H erfülle (H1)-(H4). Für das Dirichletproblem (HJG) existiert eine Viskositätslösung u genau dann wenn die Randdaten g die Kompatibilitätsforderung (H5) erfüllen. Eine Viskositätslösung ist gegeben durch

$$u(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} (g(y) + \delta(x, y)).$$

Die durch den Satz gegebene Lösungsformel wird in der Literatur auch als Hopf-Lax-Formel geführt und bildet die Motivation für die Wahl der Diskretisierung der HJG auf Dreiecksgittern in [BR06].

Das nun folgende Vergleichsprinzip liefert schließlich die Eindeutigkeit der durch die Hopf-Lax-Formel gegebenen Lösung.

Satz 2.6 (Vergleichsprinzip [Ish87]). *H* erfülle (H1)–(H3) und (H4'). Seien $\underline{u}, \bar{u} \in C(\Omega)$ Viskositätssub- bzw. Viskositätssuperlösung von $H(x, \nabla u) = 0$ mit $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x) \forall x \in \partial\Omega$. Dann gilt $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x) \forall x \in \Omega$.

Die Eindeutigkeit der Viskositätslösung folgt nun direkt aus dem Vergleichsprinzip.

2.4 Einige Eigenschaften der Trägerfunktion

Die Trägerfunktion ρ , die bei der Definition der optischen Distanz δ in (H5) eine Rolle gespielt hat, wird uns in Kapitel 3 bei der Diskretisierung der HJG wieder begegnen. Daher ist es sinnvoll hier vorab einige benötigte Eigenschaften zu referenzieren.

Lemma 2.7 ([BR06, Teil von Lemma 3]). *Es gelte (H1)–(H3) und (H4').*

Dann ist $\rho : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Mit $\rho^ := \beta/\alpha$ und α, β aus (H3) gilt*

$$0 \leq \rho(x, q) \leq \rho^* \|q\| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, q \in \mathbb{R}^d$$

und

$$\rho(x, q) > 0 \quad \forall x \in \Omega, 0 \neq q \in \mathbb{R}^d.$$

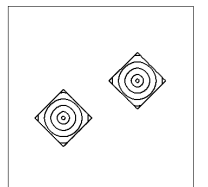
Desweiteren gilt für alle $x \in \bar{\Omega}$ und alle $q_1, q_2, q \in \mathbb{R}^d$

$$\rho(x, q_1 + q_2) \leq \rho(x, q_1) + \rho(x, q_2) \quad \text{und} \quad \rho(x, tq) = t\rho(x, q) \quad \forall t \geq 0.$$

Neben der oberen Schranke ρ^* aus dem Lemma wollen wir auch eine untere Schranke ρ_* einführen. Es sei also $\rho_* > 0$ maximal, so dass

$$\rho_* \|q\| \leq \rho(x, q) \quad \forall x \in \Omega, 0 \neq q \in \mathbb{R}^d.$$

Die Existenz eines solchen ρ_* ist durch das Lemma gesichert.



Kapitel 3

Diskretisierung

In dieser Arbeit wird die Diskretisierung und Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichungen auf quadratischen Gittern betrachtet. Da aber die allgemeinere Diskretisierung auf Dreiecksgittern hilfreiche Anschauung bietet, werden wir auch diese nach [BR06] im Abschnitt 3.2 einführen und uns des dortigen Formalismus zur Erläuterung des neuen Diskretisierungsvorschlages bedienen und somit auch aufzeigen, wie die Diskretisierung im Falle von Dreiecksgittern zu wählen wäre.

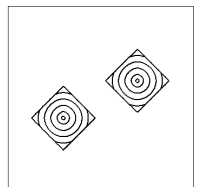
Für alle weiteren Betrachtungen jedoch werden wir uns wieder auf quadratische Gitter beschränken, insbesondere geht bei der Formulierung und Analyse der Algorithmen in Kapitel 4 teilweise die quadratische Struktur ein.

Wir bezeichnen im folgenden mit Ω_h die Menge aller N in Ω liegenden Gitterpunkte x_k . Die Menge der auf dem Rand $\partial\Omega$ liegenden Gitterpunkte wird mit $\partial\Omega_h$ bezeichnet. Die beim Lösen der diskreten Gleichungen auftretenden Gitterfunktionen seien im Fall der quadratischen Gitter auf jedem Quaderbereich stückweise multilineare Interpolationen durch die Gitterfunktionswerte $u_h(x_k)$, $x_k \in (\Omega_h \cup \partial\Omega_h)$. Im Fall der Dreiecksgitter in Abschnitt 3.2 werden sie als stückweise lineare Interpolationen betrachtet. Die Gitterweite wird mit h bezeichnet.

Zunächst untersuchen wir die bekannte Godunov-Diskretisierung.

3.1 Godunov-Diskretisierung auf Rechteckgittern

Angelehnt an Godunovs Upwind-Diskretisierung ([God59]) für hyperbolische Erhaltungsgleichungen führten Osher und Shu in [OS91] die Diskretisierung von Hamilton-Jacobi-Gleichungen durch den Godunov-Fluss ein.



Für eine Gitterstelle x_k definiert man die diskrete Hamiltonfunktion als

$$\begin{aligned} H^G(u_h)_k &:= H^G(x_k, u_h) \\ &:= \operatorname{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^- u_h(x_k), D_{x_1}^+ u_h(x_k)]} \cdots \operatorname{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^- u_h(x_k), D_{x_d}^+ u_h(x_k)]} H(x_k, p) \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit

$$\operatorname{ext}_{p_i \in I[D_{x_i}^- u, D_{x_i}^+ u]} := \begin{cases} \min_{p_i \in [D_{x_i}^- u, D_{x_i}^+ u]} & \text{falls } D_{x_i}^- u \leq D_{x_i}^+ u \\ \max_{p_i \in [D_{x_i}^+ u, D_{x_i}^- u]} & \text{falls } D_{x_i}^+ u < D_{x_i}^- u \end{cases}$$

für alle $x_k \in \Omega_h$ und den Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen

$$\begin{aligned} D_{x_i}^+ u_h(x_k) &:= \frac{u_h(x_k + he_i) - u_h(x_k)}{h} \\ D_{x_i}^- u_h(x_k) &:= \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k - he_i)}{h} \end{aligned}$$

in jeder Koordinatenrichtung e_i .

Wir haben uns hier für eine der Koordinatenrichtungen entsprechenden Anordnung der ext-Operationen in (3.1) entschieden. Im allgemeinen operieren die ext-Operationen nicht kommutativ. Jede mögliche Anordnung legt eine andere Diskretisierung fest.

Für jeden Gitterpunkt $x_k \in \Omega_h$ erhalten wir also die diskrete Hamilton-Jacobi-Gleichung $H^G(u_h)_k = 0$. Das gesamte nichtlineare Gleichungssystem schreiben wir als

$$\begin{aligned} H^G(u_h) &:= (H^G(x_k, u_h))_{x_k \in \Omega_h} = 0 \\ u_h|_{\partial\Omega_h} &= g|_{\partial\Omega_h} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir werden nun einige Eigenschaften zusammentragen, die es uns ermöglichen der Argumentation in [RT92, S.874 ff] folgend mit dem Satz von Barles und Souganidis ([BS91, Thm. 2.1.]) die Konvergenz der Lösungen u_h von (3.2) für $h \rightarrow 0$ gegen die Viskositätslösung u der HJG zu folgern, unabhängig von der Reihenfolge der ext-Operationen.

Die benötigten Eigenschaften sind

- Monotonie der Diskretisierung,
- Konsistenz der Diskretisierung,
- Existenz einer Lösung von (3.2) und
- eine gleichmäßige Lipschitzschranke für die Lösungen u_h der diskreten Gleichung,

die nun eine nach der anderen nachgewiesen werden.

Lemma 3.1 (Konsistenz). Die diskrete Hamiltonfunktion H^G ist konsistent mit der kontinuierlichen Hamiltonfunktion H . Das heißt für $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega_h$ und $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} H^G(y, \phi + \xi) = H(x, D\phi(x)) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Beweis. H^G ist unabhängig von einer additiven Konstante $\xi \in \mathbb{R}$ in der zu betrachtenden Funktion und damit verbleibt die Untersuchung des Grenzwerts

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} H^G(y, \phi) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} H^G(y, \phi + \xi).$$

Mit $\phi \in C^\infty(\Omega)$ und der Taylorentwicklung gilt

$$D_{x_i}^\pm \phi(y) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) + \mathcal{O}(h)$$

für $h \rightarrow 0$. Damit folgt für stetige Funktionen f

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} \text{ext}_{p \in I[D_{x_1}^-, \phi(y), D_{x_1}^+, \phi(y)]} f(y, p) = \text{ext}_{p \in I[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)]} f(x, p) = f(x, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)).$$

Und dadurch schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} H^G(y, \phi) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} \text{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^-, \phi(y), D_{x_1}^+, \phi(y)]} \dots \text{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^-, \phi(y), D_{x_d}^+, \phi(y)]} H(y, p) \\ &= H(x, D\phi(x)). \end{aligned}$$

□

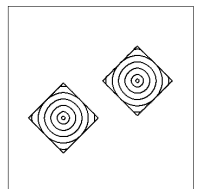
Lemma 3.2 (Monotonie). Für jede Gitterweite h und die zugehörige diskrete Hamiltonfunktion H^G gilt mit Funktionen $u, v \in C(\Omega)$

- (i) Sei $v(x) \geq u(x)$ für alle $x \in \Omega_h$ und $u(y) = v(y)$ für ein $y \in \Omega_h$, dann gilt $H^G(y, v) \leq H^G(y, u)$.
- (ii) Mit einem $y \in \Omega_h$ sei $v(x) = u(x)$ für alle $x \in \Omega_h \setminus \{y\}$ und $v(y) \geq u(y)$, dann gilt $H^G(y, v) \geq H^G(y, u)$.

Beweis.

Zu (i): Sei also $v(x) \geq u(x) \forall x \in \Omega_h$ und $u(y) = v(y)$ mit $y \in \Omega_h$, dann folgt

$$D_{x_i}^+ v(y) = \frac{v(y + he_i) - v(y)}{h} \geq \frac{u(y + he_i) - u(y)}{h} = D_{x_i}^+ u(y)$$



und

$$D_{x_i}^- v(y) = \frac{v(y) - v(y - he_i)}{h} \leq \frac{u(y) - u(y - he_i)}{h} = D_{x_i}^- u(y).$$

Desweiteren ist $\text{ext}_{p \in I[D^-, D^+]}$ monoton steigend in D^- und monoton fallend in D^+ , da $\min_{p \in [D^-, D^+]}$ und $\max_{p \in [D^+, D^-]}$ diese Montonieigenschaften besitzen und ext einzig von ihnen monoton abhängt. Zusammen gilt also

$$\text{ext}_{p_i \in I[D_{x_i}^- v(y), D_{x_i}^+ v(y)]} H(y, p) \leq \text{ext}_{p_i \in I[D_{x_i}^- u(y), D_{x_i}^+ u(y)]} H(y, p) \quad \forall p_j, j \neq i.$$

Und damit schließlich

$$\begin{aligned} H^G(y, v) &= \text{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^- v(y), D_{x_1}^+ v(y)]} \dots \text{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^- v(y), D_{x_d}^+ v(y)]} H(y, p) \\ &\leq \text{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^- u(y), D_{x_1}^+ u(y)]} \dots \text{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^- u(y), D_{x_d}^+ u(y)]} H(y, p) \\ &= H^G(y, u). \end{aligned}$$

Zu (ii): Sei nun $v(y) \geq u(y)$ und $u = v$ auf $\Omega_h \setminus \{y\}$ dann folgen hier die umgekehrten Relationen

$$D_{x_i}^+ v(y) = \frac{v(y + he_i) - v(y)}{h} \leq \frac{u(y + he_i) - u(y)}{h} = D_{x_i}^+ u(y)$$

und

$$D_{x_i}^- v(y) = \frac{v(y) - v(y - he_i)}{h} \geq \frac{u(y) - u(y - he_i)}{h} = D_{x_i}^- u(y).$$

Mit der Monotonie der ext -Operation erhält man nun in zu (i) analoger Argumentaion

$$H^G(y, v) \geq H^G(y, u).$$

□

Lemma 3.3 (Existenz). Für alle $h > 0$ existiert eine Lösung u_h von (3.2).

Beweis. Betrachten wir zunächst die einzelne Gleichung $H^G(u_h)_k = 0$. Für $u_h(x_k)$ hinreichend klein gilt $D_{x_i}^- u_h(x_k) < 0 < D_{x_i}^+ u_h(x_k) \forall i$ und damit mit einem geeigneten R

$$H^G(u_h)_k = \min_{p \in B_R} H(x_k, p) \leq H(x_k, 0) \stackrel{(H4)}{\leq} 0.$$

Andererseits gilt für $u_h(x_k)$ hinreichend groß $D_{x_i}^- u_h(x_k) > D_{x_i}^+ u_h(x_k) \forall i$ und mit einem geeigneten R

$$H^G(u_h)_k \geq \max_{p \in B_R} H(x_k, p) \stackrel{(H3)}{>} 0.$$

Damit existiert nach dem Zwischenwertsatz (H ist nach Forderung (H1) stetig und damit ist auch H^G stetig) eine Lösung $u_h(x_k)$ für $H^G(u_h)_k = 0$ bei festgehaltenen Nachbargitterwerten.

Wir konstruieren nun auf dieser Grundlage für h fest aber beliebig eine Folge $(u_h^{(i)})_i$ von Funktionen, die im Grenzwert $i \rightarrow \infty$ gegen eine Lösungsfunktion u_h von (3.2) konvergiert und zeigen somit die Existenz einer Lösung.

Sei

$$u_h^{(0)}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in \partial\Omega_h \\ \min_{y \in \partial\Omega_h} g(y) & \text{für } x \in \Omega_h. \end{cases}$$

Nun lösen wir für alle $x_k \in \Omega_h$ die Gleichung $H^G(u_h^{(0)})_k = 0$ und erhalten das nächste Folgenglied $u_h^{(1)}$. Dieses Vorgehen wiederholen wir und erhalten so eine Folge $u_h^{(i)}$. Zunächst gilt $H^G(u_h^{(0)}) \leq 0$. Im ersten Lösungsschritt $H^G(u_h^{(0)})_k = 0$ kann $u_h(x_k)$ auf Grund der Monotonie von Lemma 3.2 also nur steigen. Der Wert der diskreten Hamiltonfunktion H^G verändert sich daraufhin in den Nachbarpunkten y_k von x_k . Auf Grund der Monotonie von Lemma 3.2 kann dabei $H^G(y_k, u_h^{(0)})$ nur fallen, es gilt also wieder $H^G(u_h^{(0)}) \leq 0$. Induktiv erhalten wir also eine monoton steigende Folge von Funktionen $u_h^{(i)}$.

Diese Funktionen sind alle nach oben beschränkt: Auf Grund der Wachstumseigenschaft (H3) der Hamiltonfunktion existiert ein endliches

$$p_{\max} := \max\{\|p\|_2 : H(x, p) = 0, x \in \Omega\},$$

also eine Beschränkung für die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen in (3.1). Damit gilt für alle i und alle $x \in \Omega_h$ die extrem grobe obere Schranke

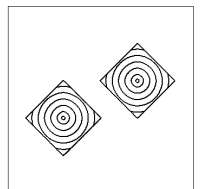
$$u_h^{(i)}(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega_h} g(y) + N \cdot h \cdot p_{\max},$$

die jedoch im Fall der eindimensionalen Eikonalgleichung mit konstanter Geschwindigkeitsfunktion und 1-Punkt-Rand scharf ist.

Somit konvergiert die Folge $u_h^{(i)}$ und wegen der Stetigkeit von H^G ist somit auch $H^G(u_h^{(i)})$ konvergent. Da auf Grund des Lösens immer wieder $H^G(u_h^{(i)})_k = 0$ gilt, folgt für die Grenzfunktion $H^G(u_h) = 0$. Also existiert eine Lösung.

Diese Argumentation zeigt gleichzeitig wie in [RT92] die Konvergenz der Gauß-Seidel-Iteration. \square

Anders als in [BS91] verlangen wir für die Viskositätslösung Stetigkeit und können deshalb nicht dem Ansatz über lediglich oberhalbstetige und un-



terhalbstetige Häufungspunkte der Funktionenfolge u_h nachgehen (insbesondere wäre dann auch für diese ein Vergleichsprinzip notwendig). Deshalb werden wir hier der Argumentation von [BR06] folgen und eine gleichmäßige Lipschitzschranke für die u_h nachweisen, um anschließend mit dem Satz von Arzelà-Ascoli argumentieren zu können.

Analog zu [BR06] benötigen wir dafür eine diskrete Kompatibilitätsbedingung für die Randdaten. Sie lautet in unserem Fall

$$(H5') \quad g(x) - g(y) \leq \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min} \|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in \partial\Omega$$

mit $p_{\min} := \min\{\|p\|_2 : H(x, p) = 0, x \in \Omega\}$. Desweiteren benötigen wir das schon im vorangegangenen Beweis verwendete $p_{\max} = \max\{\|p\|_2 : H(x, p) = 0, x \in \Omega\}$.

So erhalten wir für die multilinear interpolierten u_h den folgenden Satz:

Satz 3.4 (Analogon zu [BR06, Thm. 8]). *Es gelten (H1)–(H3), (H4') und (H5'). Eine Lösung u_h von (3.2) erfüllt die Lipschitzbedingung*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq c_\Omega \sqrt{d} p_{\max} \cdot \|x - y\|_2, \quad x, y \in \bar{\Omega},$$

und die gleichmäßige Schranke

$$\|u_h\|_\infty \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + c_\Omega \sqrt{d} p_{\max} \cdot \text{diam}(\Omega).$$

Beweis. Die gleichmäßige Schranke für $\|u_h\|_\infty$ ist eine einfache Folgerung aus der Lipschitzbedingung. Der Beweis der Lipschitzbedingung verläuft in drei Schritten.

Schritt 1: Für benachbarte Gitterpunkte $x_h, y_h \in \bar{\Omega}_h$ zeigen wir

$$|u_h(x_h) - u_h(y_h)| \leq p_{\max} \cdot \|x_h - y_h\|_2.$$

Für $x_h, y_h \in \partial\Omega_h$ folgt die Ungleichung sofort aus (H5'). Ist $x_h \in \Omega_h$ gilt

$$H^G(x_h, u_h) = \underset{p_1 \in I[D_{x_1}^- u_h(x_h), D_{x_1}^+ u_h(x_h)]}{\text{ext}} \dots \underset{p_d \in I[D_{x_d}^- u_h(x_h), D_{x_d}^+ u_h(x_h)]}{\text{ext}} H(x_h, p) = 0$$

und $p_{\min} \leq \|p\|_2 \leq p_{\max}$, also insbesondere $|p_i| \leq p_{\max}$.

Angenommen $y_h = x_h + h e_i$, dann ist $D_{x_i}^+ u_h(x_h) = \frac{u_h(y_h) - u_h(x_h)}{h}$.

Gilt $D_{x_i}^- u_h(x_h) \leq D_{x_i}^+ u_h(x_h)$ folgt:

$$\begin{aligned} \underset{p_i \in I[D_{x_i}^- u_h(x_h), D_{x_i}^+ u_h(x_h)]}{\text{ext}} &= \underset{p_i \in [D_{x_i}^- u_h(x_h), D_{x_i}^+ u_h(x_h)]}{\text{min}} \\ &\Rightarrow D_{x_i}^- u_h(x_h) \leq p_i \leq D_{x_i}^+ u_h(x_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_h(x_h) &\leq u_h(y_h) - hp_i \\ &\leq u_h(y_h) + h|p_i| \\ &\leq u_h(y_h) + hp_{\max} \end{aligned}$$

Gilt $D_{x_i}^- u_h(x_h) > D_{x_i}^+ u_h(x_h)$ folgt:

$$\text{ext}_{p_i \in I[D_{x_i}^- u_h(x_h), D_{x_i}^+ u_h(x_h)]} = \text{max}_{p_i \in [D_{x_i}^+ u_h(x_h), D_{x_i}^- u_h(x_h)]}$$

$$\Rightarrow |D_{x_i}^+ u_h(x_h)| \leq p_{\max}$$

Wäre dies nicht der Fall, so würde auf Grund der Konvexität von H ein $p_i < -p_{\max}$ existieren, für das $H(x, p) = 0$ gilt, was der Maximalität von p_{\max} widerspricht.

$$\Rightarrow |u_h(y_h) - u_h(x_h)| \leq hp_{\max}$$

Ist $y_h = x_h - he_i$, so erhalten wir mit einer ähnlichen Argumentation für $D_{x_i}^- u_h(x_h)$ ebenso entweder

$$u_h(x_h) \leq u_h(y_h) + hp_{\max}$$

oder

$$|u_h(y_h) - u_h(x_h)| \leq hp_{\max}.$$

Mit $h = \|x_h - y_h\|_2$ erhalten wir also insgesamt entweder

$$u_h(x_h) \leq u_h(y_h) + p_{\max} \|x_h - y_h\|_2$$

oder

$$|u_h(y_h) - u_h(x_h)| \leq p_{\max} \|x_h - y_h\|_2.$$

Ist auch $y_h \in \Omega_h$ können die Rollen von x_h und y_h vertauscht werden und man erhält die Lipschitzschranke.

Ist aber $y_h \in \partial\Omega_h$, so müssen wir anders vorgehen. Mit $\|p\|_2 \geq p_{\min}$ gilt

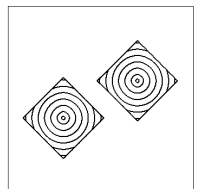
$$u_h(x_h) \geq u_h(x_h^{(1)}) + h \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}$$

mit einem zu x_h benachbart liegenden Punkt $x_h^{(1)}$. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde

$$D_{x_i}^- u_h(x_h) = \frac{u_h(x_h) - u_h(x_h - he_i)}{h} < \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}$$

und

$$D_{x_i}^+ u_h(x_h) = \frac{u_h(x_h + he_i) - u_h(x_h)}{h} > -\frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}$$



gelten.

Dann erhalten wir für $D_{x_i}^+ u_h(x_h) < D_{x_i}^- u_h(x_h)$ den Fall

$$\operatorname{ext}_{p_i \in I[D_{x_i}^- u_h(x_h), D_{x_i}^+ u_h(x_h)]} = \operatorname{max}_{p_i \in [D_{x_i}^+ u_h(x_h), D_{x_i}^- u_h(x_h)]}$$

und

$$|p_i| < \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}.$$

Für $D_{x_j}^+ u_h(x_h) \geq D_{x_j}^- u_h(x_h)$ gilt

$$\operatorname{ext}_{p_j \in I[D_{x_j}^- u_h(x_h), D_{x_j}^+ u_h(x_h)]} = \operatorname{min}_{p_j \in [D_{x_j}^- u_h(x_h), D_{x_j}^+ u_h(x_h)]}.$$

Mit einer speziellen Wahl von $p_j \in [D_{x_j}^- u_h(x_h), D_{x_j}^+ u_h(x_h)]$ mit $|p_j| < \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}$ können wir dann den Godunov-Fluss nach oben abschätzen:

$$H^G(x_h, u_h) \leq H(x_h, p)$$

mit

$$\|p\|_2 < \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min} \right)^T \right\|_2 = p_{\min}.$$

Wegen der Minimalität von p_{\min} gilt also $H^G(x_h, u_h) \leq H(x_h, p) < 0$, was einen Widerspruch zu $H^G(x_h, u_h) = 0$ darstellt. Damit gilt die postulierte Abschätzung.

Führen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir eine Folge von Gitterpunkten $x_h = x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(m)}$, deren Gitterwerte strikt fallen. Damit erreichen wir notwendigerweise für einen Index n den Rand: $x_h^{(n)} \in \partial\Omega_h$. Dann gilt mit (H5')

$$\begin{aligned} u_h(x_h) &\geq g(x_h^{(n)}) + \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_h^{(i)} - x_h^{(i+1)}\|_2 \\ &\geq g(y_h) + \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|x_h^{(i)} - x_h^{(i+1)}\|_2 - \|x_h^{(n)} - y_h\|_2 \right) \\ &\geq u_h(y_h) - \frac{1}{\sqrt{d}} p_{\min} \|x_h - y_h\|_2, \end{aligned}$$

womit der Beweis von Schritt 1 abgeschlossen ist.

Schritt 2: Sei Q eine quadratische Zelle des Gitters. Für $x, y \in Q$ zeigen wir

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq \sqrt{d} p_{\max} \cdot \|x - y\|_2$$

durch Abschätzen des Gradienten von u_h durch

$$\|Du_h|_Q\|_2 \leq \sqrt{d} p_{\max}.$$

Wir verschieben den Quader nach $[0, h]^d$ und bezeichnen die Eckpunkte mit $y_{i_1, \dots, i_d} = (i_1, \dots, i_d) \cdot h$, $i_j \in \{0, 1\}$. Dann schreibt sich die multilineare Funktion u_h auf dem Quader als

$$u_h(x) = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \\ i_j \in \{0, 1\}}} u_h(y_{i_1, \dots, i_d}) \cdot \prod_{k: i_k=0} \frac{h-x_k}{h} \prod_{l: i_l=1} \frac{x_l}{h}$$

und es gilt damit für die Richtungsableitung nach x_r

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_r} &= \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_d) \\ i_j \in \{0, 1\}}} u_h(y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 0, i_{r+1}, \dots, i_d}) \cdot \prod_{k: i_k=0} \frac{h-x_k}{h} \prod_{l: i_l=1} \frac{x_l}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_d) \\ i_j \in \{0, 1\}}} u_h(y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1, i_{r+1}, \dots, i_d}) \cdot \prod_{k: i_k=0} \frac{h-x_k}{h} \prod_{l: i_l=1} \frac{x_l}{h} \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_d) \\ i_j \in \{0, 1\}}} \left[u_h(y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1, i_{r+1}, \dots, i_d}) - u_h(y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 0, i_{r+1}, \dots, i_d}) \right] \cdot \\ &\quad \prod_{k: i_k=0} \frac{h-x_k}{h} \prod_{l: i_l=1} \frac{x_l}{h}. \end{aligned}$$

Die Punkte $y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 0, i_{r+1}, \dots, i_d}$ und $y_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1, i_{r+1}, \dots, i_d}$ sind Nachbargitterpunkte. Damit gilt für die Differenz ihrer Gitterfunktionswerte die Abschätzung aus Schritt 1 und wir erhalten

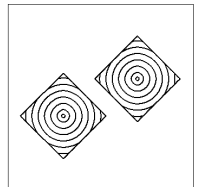
$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_r} \right| &\leq p_{\max} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_d) \\ i_j \in \{0, 1\}}} \left[\prod_{k: i_k=0} \frac{h-x_k}{h} \prod_{l: i_l=1} \frac{x_l}{h} \right] \\ &\leq p_{\max}. \end{aligned}$$

Damit folgt sofort $\|Du_h|_Q\|_2 \leq \sqrt{d} p_{\max}$ und der Beweis von Schritt 2 ist abgeschlossen.

Schritt 3: Für $x, y \in \bar{\Omega}$ existiert ein Lipschitzweg $\gamma \in C^{0,1}([0, 1], \bar{\Omega})$ durch x und y so dass (nach [Alt99, S. 304])

$$\|\gamma'\|_{\infty} \leq c_{\Omega} \|x - y\|_2.$$

Für konvexe Ω kann γ als Verbindungsstrecke zwischen x und y gewählt werden, was zu $c_{\Omega} = 1$ führt. Sei nun $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ eine



Unterteilung von $[0, 1]$ so dass $\gamma(t_{i-1})$ und $\gamma(t_i)$ demselben Quader angehören. Mit Schritt 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} |u_h(x) - u_h(y)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |u_h(\gamma(t_i)) - u_h(\gamma(t_{i+1}))| \\ &\leq \sqrt{d} p_{\max} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|_2 \\ &\leq c_\Omega \sqrt{d} p_{\max} \cdot \|x - y\|_2, \end{aligned}$$

was den Beweis über die gleichmäßige Lipschitzschranke abschließt. \square

Die prinzipielle Aussage des Satzes der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit hätten wir schon erwarten können, da der Update auf Dreiecksgittern in [BR06] für den Fall vier rechtwinklig zueinander gelegener Nachbarn genau mit dem Lösen der Godunov-Diskretisierung übereinstimmt.

Nun sind alle am Anfang des Abschnitts geforderten Eigenschaften nachgewiesen und damit erhalten wir insgesamt den Konvergenzsatz.

Satz 3.5 (nach [BS91, Thm. 2.1.]). *Die Lösungen u_h von (3.2) konvergieren für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die eindeutige Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG).*

Beweis. (nach [BS91, Thm. 2.1.])

Nach dem vorangegangenen Satz 3.4 ist die Folge der Lösungen u_h von (3.2) eine Folge gleichmäßig beschränkter Lipschitzfunktionen auf $\bar{\Omega}$ kompakt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (siehe z.B. [Wer97, Satz II.3.4.]) existiert eine Teilfolge $u_{h'}$, die gleichmäßig gegen eine Lipschitz-stetige Funktion u konvergiert, für die wegen $u_h|_{\partial\Omega_h} = g|_{\partial\Omega_h}$ und (H5') gilt, dass $u|_{\partial\Omega} = g$.

Zu zeigen bleibt die Tatsache, dass u Viskositätssub- und Viskositätssuperlösung von (HJG) ist. Wir zeigen die Behauptung hier nur für die Eigenschaft Viskositätssublösung zu sein. Die Argumentation für die Viskositätssuperlösung verläuft analog.

Sei also $x_0 \in \Omega$ Stelle eines lokalen Maximums für $u - \phi$ für ein $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Wir können Evans [Eva98, S.542] folgend annehmen, es handle sich dabei um ein striktes lokales Maximum und $u(x_0) = \phi(x_0)$ (ansonsten addiere man eine geeignete quadratische Funktion zu ϕ). Und außerhalb eines Radius r um x_0 sei $\phi \geq 2 \sup_h \|u_h\|_\infty$, wobei r so gewählt ist, dass innerhalb des Kreises $u(x) - \phi(x) \leq 0 = u(x_0) - \phi(x_0)$ gilt.

Dann existiert auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz eine Folge $h_n \in \mathbb{R}^+$ und $y_n \in \Omega_{h_n}$, so dass für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$h_n \rightarrow 0, \quad y_n \rightarrow x_0, \quad u_{h_n}(y_n) \rightarrow u(x_0)$$

und y_n ist Stelle eines globalen Maximums von $u_{h_n} - \phi$.

Es gilt

$$\zeta_n := u_{h_n}(y_n) - \phi(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und

$$u_{h_n}(x) \leq \phi(x) + \zeta_n \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Mit u_{h_n} Lsg. von (3.2) und der Monotonie aus Lemma 3.2 (i) folgt

$$H^G(y_n, \phi + \zeta_n) \leq H^G(y_n, u_{h_n}) = 0$$

Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und mit der Konsistenz aus Lemma 3.1 erhalten wir

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} H^G(y_n, \phi + \zeta_n) = H(x_0, D\phi(x_0))$$

was uns u als Viskositätssublösung liefert. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts über die Godunov-Diskretisierung wollen wir noch auf die vereinfachte Darstellung von (3.1) für speziell strukturierte HJG eingehen und damit insbesondere die explizite Update-Formel für die viel verwendete Eikonalgleichung bereitstellen.

Für speziell strukturierte HJG führt ein Vertauschen der ext-Operationen auf ein und dasselbe H^G , für das sich dann die Diskretisierung (3.1) vereinfacht darstellen läßt. So erhält man für Hamiltonfunktionen $H(x, p)$, die in allen p_j achsensymmetrisch sind, die vereinfachte Darstellung der diskreten Hamiltonfunktion als

$$H^G(u_h)_k = H(x_k, (\max(-D_{x_i}^+ u_h(x_k), D_{x_i}^- u_h(x_k), 0))_{i=1:d}).$$

Im Fall der Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = 1/F(x)$ ist diese Symmetrieforderung erfüllt und man erhält damit im zweidimensionalen für jeden Gitterpunkt x_k :

$$\max(-D_{x_1}^+ u(x_k), D_{x_1}^- u(x_k), 0)^2 + \max(-D_{x_2}^+ u(x_k), D_{x_2}^- u(x_k), 0)^2 = \frac{1}{F(x_k)^2}.$$

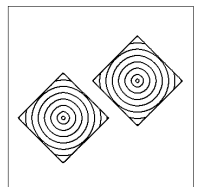
Die Lösung dieser Gleichung erhält man mit den Bezeichnungen

$$u_1 := \min(u_h(x_k + he_1), u_h(x_k - he_1))$$

$$u_2 := \min(u_h(x_k + he_2), u_h(x_k - he_2))$$

und einer Fallunterscheidung zu

$$u_h(x_k) = \begin{cases} \min(u_1, u_2) + \frac{h}{F(x_k)} & \text{falls } |u_1 - u_2| > \frac{h}{F(x_k)} \\ \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{F(x_k)^2} - (u_1 - u_2)^2} & \text{falls } |u_1 - u_2| \leq \frac{h}{F(x_k)} \end{cases}.$$



3.2 Diskretisierung auf Dreiecksgittern

Bornemann und Rasch haben in [BR06] eine Möglichkeit aufgezeigt, die Godunov-Diskretisierung auf Dreiecksgitter zu verallgemeinern.

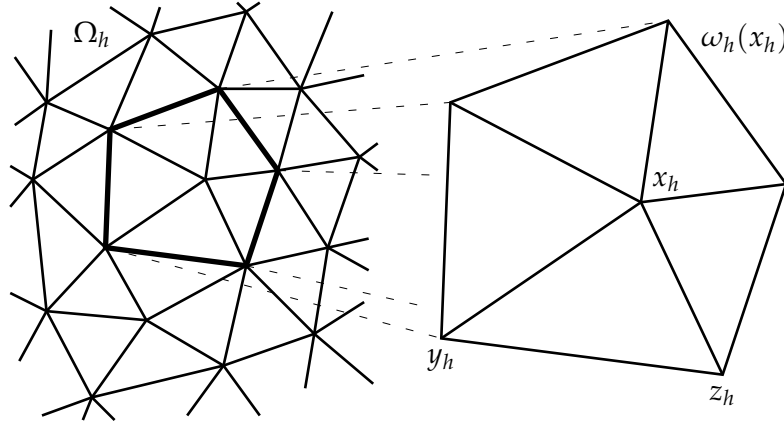


Abbildung 3.1: Dreiecksgitter mit Umgebungspatch $\omega_h(x_h)$

Dabei ergibt sich die Update-Formel aus der Diskretisierung des Variationsprinzips der Hopf-Lax-Lösungsformel zu

$$(\Lambda_{h,E}u_h)(x_h) := \begin{cases} \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(I_{h,E}u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\} & x_h \in \Omega_h \\ g(x_h) & x_h \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad (3.3)$$

mit $\omega_h(x_h)$ der Menge aller x_h enthaltenden Dreiecke, der stückweisen linearen Interpolation $I_{h,E}(y)$ der benachbarten Gitterwerte auf einer Dreiecksseite und ρ der Trägerfunktion aus (H5).

Im Zweidimensionalen lautet der Interpolationsoperator auf einer Dreiecksseite mit den Randpunkten y_h und z_h und mit $\lambda \in [0, 1]$

$$(I_{h,E}u_h)(y) = \lambda (u_h(z_h) - u_h(y_h)) + u_h(y_h) \quad \text{für } y = (1 - \lambda)y_h + \lambda z_h.$$

$\Lambda_{h,E}$ ist ein Update-Operator, ein Gitterwert $u_h(x_h)$ soll durch $(\Lambda_{h,E}u_h)(x_h)$ bestimmt werden, das diskrete Gleichungssystem schreibt sich als

$$\begin{aligned} u_h &= \Lambda_{h,E}u_h \\ u_h|_{\partial\Omega_h} &= g|_{\partial\Omega_h} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für den Fall eines Dreieckspatches $\omega_h(x_h)$, das aus vier rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken gebildet wird, stimmt der so erhaltene Gitterwert mit dem Update der Godunov-Diskretisierung überein.

Aus der allgemeineren Sichtweise der Dreiecksgitters erschließt sich auf natürliche Weise eine geometrische Deutung der Berechnung eines Gitterpunkts.

In [BR06, S.65] wird der Updateprozess $(\Lambda_h u_h)(x_h)$ für die zweidimensionale Eikonalgleichung $\|Du\|_2 = 1$ als Bestimmung des Abstands von x_h zu einer Geraden l_δ durch (o.B.d.A.) y_h gelöst, wie in Abbildung 3.2 verdeutlicht ist. Die Steigung der Geraden ist durch

$$\cos \delta = \frac{u_h(z_h) - u_h(y_h)}{\|z_h - y_h\|} \quad (3.5)$$

gegeben.

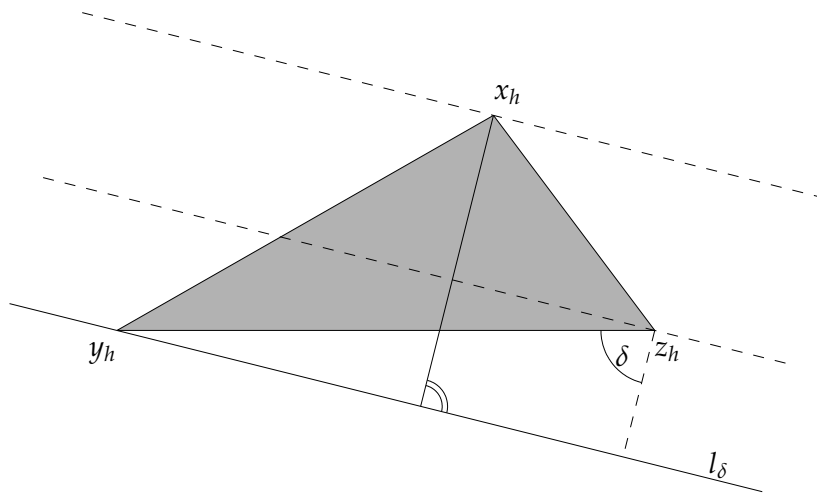


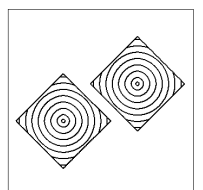
Abbildung 3.2: Update durch ebene Welle

Wir wollen nun zur Motivation unserer neuen Diskretisierung in 3.3 diesen Zusammenhang im Kontext der Anwendung deuten:

Die Lösung der Eikonalgleichung beschreibt den Zeitpunkt der ersten Ankunft einer Welle in $x \in \Omega$ bei gegebenen Startzeitdaten $g(x)$, $x \in \partial\Omega$.

In diesem Sinne können wir uns den Updateprozess in [BR06] wie folgt vorstellen:

Die Gerade l_δ beschreibt eine ebene Wellenfront, die sich mit Geschwindigkeit 1 ausbreitet. Der Zeitpunkt der ersten Ankunft in y_h ist $u_h(y_h)$. Davon ausgehend bewegt sie sich senkrecht zur Wellenfront weiter und erreicht zum Zeitpunkt $u_h(z_h)$ den Punkt z_h . Diese Lage wird gerade durch die Beziehung (3.5) bestimmt. Nun läuft die Gerade von z_h aus senkrecht weiter bis sie schließlich x_h erreicht. Die Zeit, die dabei von der Ankunft in y_h



vergangen ist, ist gerade die zurückgelegte Strecke, also der Abstand der Geraden zu x_h .

Zusammengefasst können wir also $(\Lambda_h u_h)(x_h)$ als erste Ankunftszeit einer ebenen Wellenfront, die vorher die Punkte y_h und z_h zu vorgegebenen Zeiten passiert hat, deuten.

Aus dieser geometrischen Deutung heraus, lässt sich nun die Idee einer neuen Art der Diskretisierung beschreiben.

3.3 Einführung der Kugelwellen-Interpolation

Wenn wir die Lösung der Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u(0,0) = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega = (0,0)$ betrachten, so stellen wir fest, dass die Höhenlinien von u (die Zeiten gleicher Ankunft) aber keine Geraden, sondern konzentrische Kreise um $(0,0)$ sind. Aber auch wenn $\partial\Omega$ ein komplizierteres geometrisches Gebilde darstellt, so werden sich die Höhenlinien nach dem Huygensschen Prinzip aus der Superposition kleiner Elementarkugelwellen zusammensetzen und so in aller Regel nicht auf einer Geraden liegen.

Der relative Fehler, der entsteht, wenn die Höhenlinien anstatt von Kreissegmenten mit Geradenstücken approximiert werden, ist gerade bei großen Krümmungen nicht unerheblich.

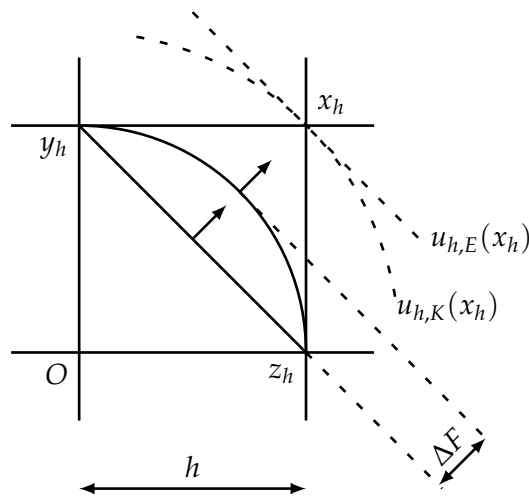


Abbildung 3.3: Differenz von ebener Welle zu Kugelwelle

So erhält man in Abbildung 3.3 im Fall eines quadratischen Gitters mit Gitterweite h und den Gitterwerten $u_h(y_h) = u_h(z_h) = h$ den Updatewert für x_h im Fall der ebenen Wellenfront (= lineare Interpolation, Update nach

(3.3)) zu

$$u_{h,E}(x_h) = h + \frac{\sqrt{2}}{2}h,$$

im Fall einer angenommenen Kugelwelle (wie es der Realität entspricht)

$$u_{h,K}(x_h) = \sqrt{2}h.$$

Damit erhält man einen relativen Fehler von

$$\frac{\Delta u}{u_{h,K}(x_h)} = \frac{(1 + 0.5\sqrt{2})h - \sqrt{2}h}{\sqrt{2}h} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0.207.$$

Dieser Fehler wird in der weiteren Rechnung transportiert und kumuliert sich mit neu entstehenden Fehlern derselben Ursache zu einem Gesamtfehler, der, wie wir in Abschnitt 3.6 sehen werden, sogar die Konvergenzordnung des Verfahrens bestimmen kann.

Dieser Sachverhalt führt uns zu der Überzeugung, dass es dem Problem stärker angepasst wäre, wenn die Diskretisierung nicht das Eintreffen einer Wellenfront, sondern das Eintreffen einer approximierenden Kugelwelle modellieren würde.

Wir führen also angelehnt an $\Lambda_{h,E}$ einen neuen Update-Operator $\Lambda_{h,K}$ mit

$$(\Lambda_{h,K}u_h)(x_h) = \begin{cases} \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(I_{h,K}u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\} & x_h \in \Omega_h \\ g(x_h) & x_h \in \partial\Omega_h \end{cases}$$

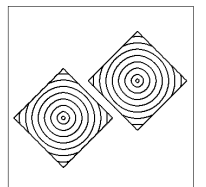
ein, wobei der Interpolationsterm $I_{h,E}$ aus (3.3) durch $I_{h,K}$ ersetzt wurde. Die neue Interpolation soll durch das Eintreffen einer approximierenden Kugelwelle bestimmt sein.

Dies soll im folgenden für den zweidimensionalen Fall konkretisiert werden. Wir betrachten zunächst ein Dreieck aus $\omega_h(x_h)$ mit einigen Nachbarknoten (siehe Abbildung 3.4).

Wir werden die durch x_m verlaufende Höhenlinie von u_h durch den zugehörigen Krümmungskreis approximieren und anschließend die Funktionswerte in Normalenrichtung linear interpolieren, um auf diese Weise eine Interpolation $(Iu_h)(y)$ für $y \in \overline{y_h z_h}$ zu erhalten. Widmen wir uns also zunächst dem Krümmungskreis in x_m .

Die Krümmung der Höhenlinien einer Funktion $u(x)$ beträgt nach Kimmel [Kim04, Lemma 5]

$$\kappa = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right).$$



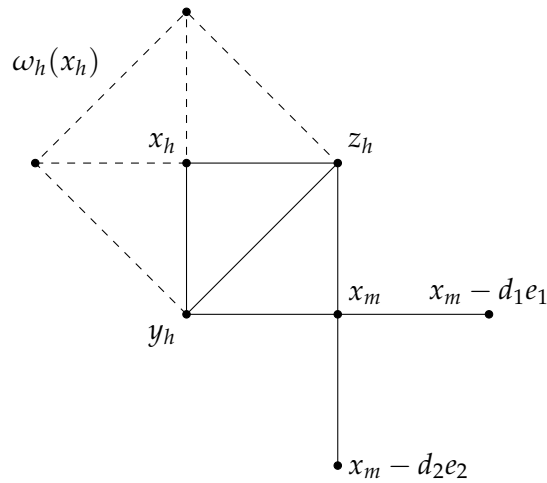


Abbildung 3.4: Benötigte Nachbarwerte zur Kugelwelleninterpolation

Wir diskretisieren sie durch

$$\begin{aligned}
 -\kappa_h(x_m) = & \\
 & \frac{1}{h} \left(\frac{D_{x_1}^+ u(x_m)}{\sqrt{(D_{x_1}^+ u(x_m))^2 + (D_{x_2}^\circ u(x_m))^2}} - \frac{D_{x_1}^- u(x_m)}{\sqrt{(D_{x_1}^- u(x_m))^2 + (D_{x_2}^\circ u(x_m))^2}} \right) \\
 & + \frac{1}{h} \left(\frac{D_{x_2}^+ u(x_m)}{\sqrt{(D_{x_1}^\circ u(x_m))^2 + (D_{x_2}^+ u(x_m))^2}} - \frac{D_{x_2}^- u(x_m)}{\sqrt{(D_{x_1}^\circ u(x_m))^2 + (D_{x_2}^- u(x_m))^2}} \right)
 \end{aligned}$$

mit den bekannten Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen, sowie den zentralen Differenzen $D_{x_i}^\circ u(x_m) = \frac{u(x_m + h e_i) - u(x_m - h e_i)}{2h}$.

Abgesehen von der Krümmung in x_m wird zusätzlich noch die Normale — also der normierte Vektor der Richtungsableitungen — benötigt. Sie soll durch finite Differenzen approximiert werden. Dabei wählen wir jeweils die Differenz (in Updaterichtung), die aus $u_h(x_m)$ und $u_h(y_h)$ bzw. $u_h(z_h)$ gebildet wird. Mit $d = x_h - x_m$ erhält man

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{u_h(x_m + d_1 e_1) - u_h(x_m)}{h} \cdot \text{sign } d_1 \\
 n_2 &= \frac{u_h(x_m + d_2 e_2) - u_h(x_m)}{h} \cdot \text{sign } d_2
 \end{aligned}$$

und damit

$$n = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich der Krümmungskreismittelpunkt zu

$$M = x_m + \frac{1}{\kappa_h(x_m)} n.$$

Damit schlagen wir zur verbesserten Diskretisierung vor, den Interpolationsterm durch das Eintreffen der Kugelwelle zu bestimmen, deren Ursprung durch κ_h und n bestimmt wird. Die Geschwindigkeit mit der sich diese Kugelwelle bis zum Rand $\partial\omega_h(x_h)$ ausbreitet, soll — wie zuvor auch die Geschwindigkeit der ebenen Wellenfront — implizit durch die Gitterwerte von u_h in den Nachbarpunkten y_h und z_h bestimmt werden.

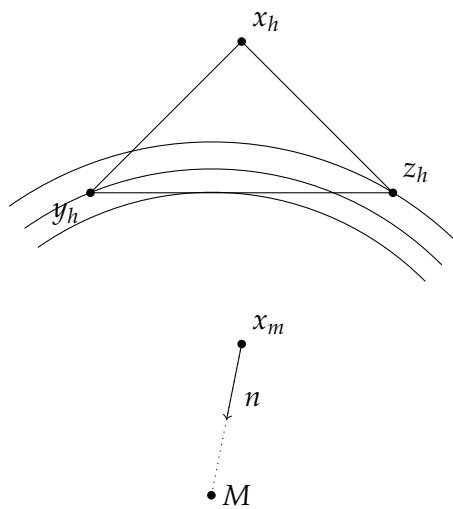


Abbildung 3.5: Idee der Kugelwellendiskretisierung

Wir wählen also zunächst als neuen Interpolationsterm

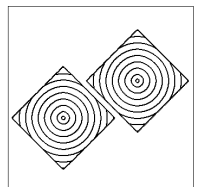
$$(Iu_h)(y) := \begin{cases} L(\|M - y\|_2) & \kappa_h \neq 0 \\ (I_{h,E}u_h)(y) & \kappa_h = 0 \end{cases}$$

für $y \in \overline{y_h z_h}$ und der linearen Interpolation L , so dass

$$\begin{aligned} L(\|M - y_h\|_2) &= u_h(y_h) \\ L(\|M - z_h\|_2) &= u_h(z_h). \end{aligned}$$

Bei dieser Wahl der Interpolation wird u_h auf dem Krümmungskreis in der Umgebung von x_m quadratisch interpoliert. Da aber die Normale auf dem Krümmungskreis sowohl in ihrer Richtung als auch in ihrem Betrag nur linear interpoliert wird, erhalten wir insgesamt wie im Fall der linearen Interpolation in Abschnitt 3.2 nur

$$(Iu_h)(y) = u_h(y) + \mathcal{O}(h^2),$$



erhoffen uns aber eine Verbesserung der Fehlerkonstanten und in speziellen Fällen (wie z.B. in Abschnitt 3.6) unter Umständen auch eine Ordnungserhöhung.

Nun gibt es einige Konstellationen, in denen in der soeben getroffenen Definition von I Ausnahmefälle formuliert werden müssen. So ist L für $u_h(y_h) = u_h(z_h)$ nicht eindeutig definiert. Außerdem muss festgelegt werden wie n und κ_h für verschwindende Nenner definiert werden sollen. In der programmtechnischen Realisierung reicht es durchaus aus, nur für diese Sonderfälle einen sinnvollen Ersatz der Interpolation zu definieren. Für die theoretische Untersuchung in Abschnitt 3.5 wird jedoch beim Nachweis der Existenz von Lösungen die Stetigkeit von $\Lambda_{h,K}$ benötigt. Da in diesen Problemstellen aber keine stetige Fortsetzung existiert, die wir nutzen könnten, werden wir nicht nur die punktuellen Spezialfälle gesondert betrachten, sondern in einer ganzen Umgebung einen stetigen Übergang realisieren.

Für die Spezialfälle soll wie folgt verfahren werden:

κ_h : Ist einer der zur Approximation genutzten Vektoren $\begin{pmatrix} D_{x_1}^+ \\ D_{x_2}^\circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{x_1}^- \\ D_{x_2}^\circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{x_1}^\circ \\ D_{x_2}^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{x_1}^\circ \\ D_{x_2}^- \end{pmatrix}$ der Nullvektor, so wird $\kappa_h := 0$ definiert, mit einem stetigen Übergang für $\|D\|_2 < \epsilon$.

n : Ist $n_1^2 + n_2^2 = 0$, so wird $n := 0$ definiert, mit einem stetigen Übergang für $n_1^2 + n_2^2 < \epsilon$.

L : Ist $\|M - y_h\|_2 = \|M - z_h\|_2$, so wird L durch die zusätzliche Bedingung

$$L(\|M - \tilde{x}\|_2) = u_h(\tilde{x}).$$

mit

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_m & \text{für } \|M - x_m\|_2 \neq \|M - y_h\|_2 \\ x_m - 2(z_h - x_m) & \text{sonst} \end{cases}$$

eindeutig festgelegt, mit einem stetigen Übergang für $|\|M - y_h\|_2 - \|M - z_h\|_2| < \epsilon$ bzw. $|\|M - y_h\|_2 - \|M - x_m\|_2| < \epsilon$.

Die stetigen Übergänge von den Spezialfällen zur regulären Definition der Größen könnten z.B. durch Konvexkombinationen der Spezialfälle mit den „Randdaten“ realisiert werden. Dies soll hier aber nicht weiter spezifiziert werden, da sie im folgenden ohne Belang sind. Ihre Existenz ist durch den Fortsetzungssatz von Tietze gesichert. Noch mehr können wir sagen, dass die Werte innerhalb des stetigen Übergangs durch die Werte am Rand des Übergangsbereichs beschränkt sind ([Sch71, S. 80, Satz 2]). Bei hinreichend

kleiner Wahl von ϵ bleibt daher auch die Approximationsordnung in diesen Bereichen erhalten.

Einen letzten Sonderfall müssen wir noch betrachten:

Für die neue Interpolation $(Iu_h)(y)$ gilt in der Regel — anders als für die Interpolation $(I_{h,E}u_h)(y)$ aus Abschnitt 3.2 — dass für einige $y \in \overline{y_h z_h}$ gilt $(Iu_h)(y) < \min(u_h(y_h), u_h(z_h))$. Dies könnte im Extremfall dazu führen, dass ein Gitterfunktionswert, der durch

$$u_h(x_h) = \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(Iu_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\}$$

bestimmt wird, kleiner als alle seine Nachbargitterwerte ist.

Das wollen wir im folgenden aber nicht zulassen, da es der allgemeinen Vorstellung eines diskreten Informationsflusses widerspricht und uns beim späteren Nachweis der Lipschitzschranke Probleme bereiten würde. Deshalb schließen wir diesen Fall bei der Definition der neuen Fixpunktabbildung $\Lambda_{h,K}$ aus und erhalten mit dem aus der Interpolation resultierenden Update

$$\hat{u}_h(x_h) := \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(Iu_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\}$$

und dem minimal erlaubten Funktionswert

$$\hat{u}_{h,\min}(x_h) := \min_{y_h \in (\partial\omega_h(x_h) \cap \Omega_h)} \left\{ u_h(y_h) + \frac{1}{4}\rho(x_h, x_h - y_h) \right\} \quad (3.6)$$

schließlich

$$(\Lambda_{h,K}u_h)(x_h) := \begin{cases} g(x_h) & x_h \in \partial\Omega_h \\ \hat{u}_h(x_h) & \text{für } \hat{u}_h(x_h) \geq \hat{u}_{h,\min}(x_h) \\ \hat{u}_{h,\min}(x_h) & \text{für } \hat{u}_h(x_h) < \hat{u}_{h,\min}(x_h) \end{cases} \quad (3.7)$$

Dabei können wir $\hat{u}_{h,\min}(x_h)$ sofern die Wahl in (3.7) darauf fällt als Update betrachten, der aus einer Updateformel

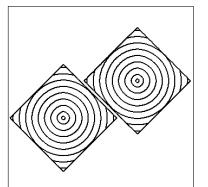
$$\hat{u}_{h,\min}(x_h) := \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(I_*u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\}$$

mit einer Interpolation $(I_*u_h)(y)$ resultiert, für die

$$(I_{h,E}u_h)(y) \geq (I_*u_h)(y) \geq (Iu_h)(y)$$

gilt und die somit auch $u_h(y) = (I_*u_h)(y) + \mathcal{O}(h^2)$ erfüllt.

Die konkrete Grenze $\hat{u}_{h,\min}(x_h)$ ist relativ frei gewählt, beeinflusst aber die Kompatibilitätsbedingung an die Randdaten in Abschnitt 3.5, so dass eine Verschiebung dieser Grenze immer mit Bedacht gewählt werden muss.



Definieren wir nun den allgemeinen Ausdruck für die Interpolation auf der Dreiecksseite zu

$$(I_{h,K}u_h)(y) := \begin{cases} (Iu_h)(y) & \text{für } \hat{u}_h(x_h) \geq \hat{u}_{h,\min}(x_h) \\ (I_*u_h)(y) & \text{für } \hat{u}_h(x_h) < \hat{u}_{h,\min}(x_h) \end{cases} \quad (3.8)$$

so können wir $\Lambda_{h,K}$ wie geplant analog zu Abschnitt 3.2 schreiben als

$$(\Lambda_{h,K}u_h)(x_h) := \begin{cases} \min_{y \in \partial\omega_h(x_h)} \{(I_{h,K}u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y)\} & x_h \in \Omega_h \\ g(x_h) & x_h \in \partial\Omega_h \end{cases}$$

und erhalten das diskrete Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_h &= \Lambda_{h,K}u_h \\ u_h|_{\partial\Omega_h} &= g|_{\partial\Omega_h} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Idee kann bei geeigneter Approximation von κ und n natürlich auch auf Dreiecksgitter angewendet und in höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

3.4 Interpretation als Snellius'sches Gesetz

Wir können die geometrisch/physikalische Interpretation noch ein Stück weiter treiben, um für den Fall der Eikonalgleichung eine explizite Lösungsformel der Update-Gleichung zu erhalten, wie dies im Fall des Godunovflusses bzw. der ebenen Wellenausbreitung möglich war.

Wie in Abbildung 3.6 verdeutlicht, breitet sich die Kugelwelle außerhalb des Patches $\omega_h(x_h)$ in direkter Linie vom Kugelmittelpunkt M mit der implizit durch die Nachbarpunkte gegebenen Geschwindigkeit F_2 bis zum minimierenden y auf $\partial\omega_h(x_h)$ aus. Von dort aus bewegt sich die Welle wiederum auf direkter Linie nun mit der Geschwindigkeit $F_1 = F(x_h)$ zum Punkt x_h .

Auf Grund der minimalen Lage von y ist dies genau der Weg, den ein Lichtstrahl entsprechend dem Snellius'schen Brechungsgesetzes bei den gegebenen Geschwindigkeiten vom Mittelpunkt M der Kugel zu x_h nehmen würde.

Um $u_h(x_h)$ zu berechnen, ist es nötig die Lage von y zu bestimmen. Durch das Snellius'sche Brechungsgesetz ist uns die Beziehung

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

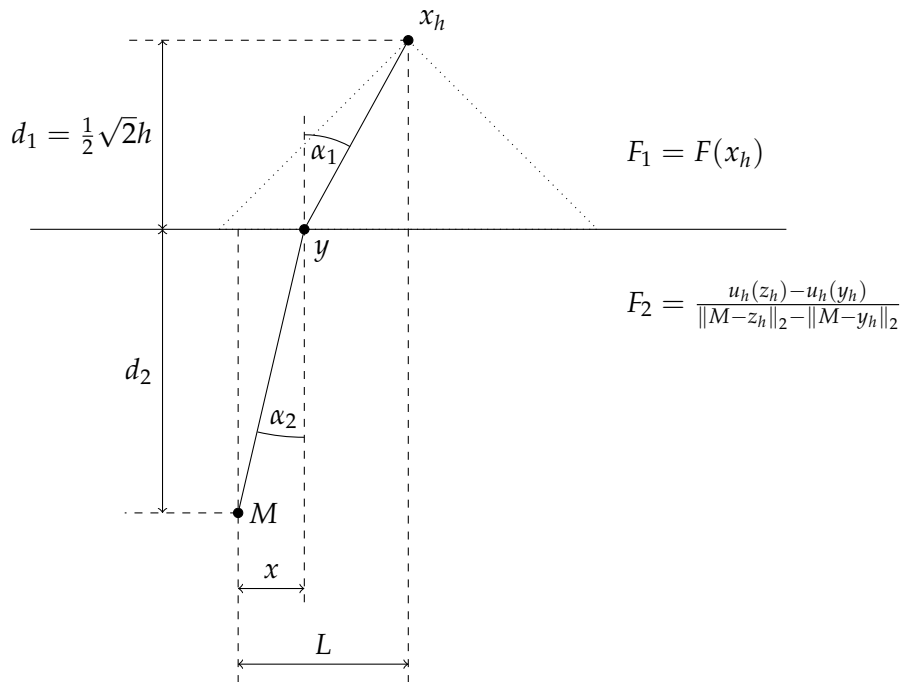


Abbildung 3.6: Update als Realisierung des Snellius'schen Gesetzes

gegeben mit

$$\sin \alpha_1 = \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + d_1^2}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_2^2}}.$$

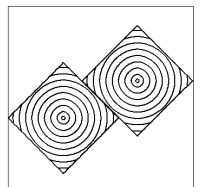
Das führt uns schliesslich auf die Lösung x einer Gleichung vierten Grades:

$$F_1^2 (L - x)^2 [x^2 + d_2^2] = F_2^2 x^2 [(L - x)^2 + d_1^2].$$

Dies ist zwar explizit möglich, allerdings in so umfangreichen Termen, dass es für die Laufzeit der Lösungsalgorithmen von Vorteil ist, den Wert des Updates mittels iterativer Verfahren (z.B. Newton-Verfahren) zu bestimmen.

3.5 Konvergenz

Um die Konvergenz der Lösungen u_h der Kugelwellendiskretisierung (3.9) gegen die Viskositätslösung der (HJG) zu zeigen, wollen wir uns wie in Abschnitt 3.1 der Argumentation von Barles/Souganidis [BS91] bedienen und stoßen zunächst auf das Problem, dass unsere neue Diskretisierung



nicht mehr die beim Godunov-Fluss ausgenutzten Monotonieeigenschaften besitzt. Daher werden wir uns hier stärker an dem der Update-Formel angepassten Konvergenzbeweis in [BR06] orientieren, der diese starke Monotonieforderung nicht benötigt, sondern implizit eine asymptotische Monotonie, die von (3.9) erfüllt wird, ausnutzt.

Satz 3.6 (Existenz). *Für alle $h > 0$ existiert eine Lösung u_h von (3.9).*

Beweis. Wir werden den Beweis mit Hilfe des Schauder'schen Fixpunktsatzes führen (siehe z.B. [Zei93, Thm.2.A]). Dafür fassen wir hier $\Lambda_{h,K}$ als eine Funktion auf, die N Gitterfunktionswerte $u_h(x_k)$ in ebensolche abbildet. Als Definitionsbereich wählen wir uns die nichtleere, kompakte und konvexe Menge

$$M := [g_{\min}, S(x_1)] \times [g_{\min}, S(x_2)] \times \cdots \times [g_{\min}, S(x_N)] \subset \mathbb{R}^N$$

mit $g_{\min} = \min_{y \in \partial\Omega_h} g(y)$ und

$$S(x_k) = \max_{y \in \partial\Omega_h} g(y) + \rho^* \cdot \min_{y \in \partial\Omega_h} \|x_k - y\|_1$$

mit ρ^* der Abschätzung von ρ laut Lemma 2.7.

Wir zeigen, dass $\Lambda_{h,K}$ von M nach M abbildet und haben dann mit der Stetigkeit von $\Lambda_{h,K}$ alle Voraussetzung des Schauder'schen Fixpunktsatzes erfüllt, erhalten also die Existenz eines u_h mit $u_h = \Lambda_{h,K}u_h$.

Sei also

$$(u_h(x_1), \dots, u_h(x_N))^T \in M.$$

Für $x_k \in \partial\Omega_h$ folgt sofort

$$g_{\min} \leq (\Lambda_{h,K}u_h)(x_k) = g(x_k) \leq S(x_k) = \max_{y \in \partial\Omega_h} g(y).$$

Für $x_k \in \Omega_h$ gilt

$$(\Lambda_{h,K}u_h)(x_k) \leq u_h(y_h) + \rho(x_k, x_k - y_h),$$

dabei sei der Nachbargitterpunkt y_h auf einem kürzesten 1-Norm-Gitterweg von x_k zum Rand $\partial\Omega_h$ liegend gewählt. Mit $u_h(y_h) \leq S(y_h)$ folgt

$$\begin{aligned} (\Lambda_{h,K}u_h)(x_k) &\leq \max_{y \in \partial\Omega_h} g(y) + \rho^* \cdot \min_{y \in \partial\Omega_h} \|y_h - y\|_1 + \rho^* \|x_k - y_h\| \\ &= \max_{y \in \partial\Omega_h} g(y) + \rho^* \cdot \min_{y \in \partial\Omega_h} \|x_k - y\|_1 \\ &= S(x_k), \end{aligned}$$

da im Rechteckgitter $\|x_k - y_h\| = \|x_k - y_h\|_1$ erfüllt ist und y_h auf einem minimierenden 1-Norm-Gitterweg zum Rand liegt.

Die untere Schranke $g_{\min} \leq (\Lambda_{h,K}u_h)(x_k) \forall x_k$ folgt sofort aus (3.6), (3.7) mit $\rho(x, q) > 0$ für $q \neq 0$ aus Lemma 2.7.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Für die benötigte Konsistenzaussage, benötigen wir einen Hilfsatz, den wir [BR06] entnehmen können.

Lemma 3.7 ([BR06, Lemma9]). Sei $x \in \overline{\Omega}$ und $p \in \mathbb{R}^d$. Für die modifizierte Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(x, p) = \max_{\|q\|=1} (\langle p, q \rangle - \rho(p, q))$$

gilt

$$\tilde{H}(x, p) \leq 0 \Rightarrow H(x, p) \leq 0 \text{ und}$$

$$\tilde{H}(x, p) \geq 0 \Rightarrow H(x, p) \geq 0.$$

Damit können wir die Konsistenz in Analogie zu [BR06] formulieren.

Lemma 3.8 (Konsistenz, analog zu [BR06, Thm.10]). Sei $v \in C^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $y_h \in \Omega_h$ mit $y_h \rightarrow x_0$ für $h \rightarrow 0$.

Gilt $v(y_h) \leq (\Lambda_{h,K}v)(y_h) + \mathcal{O}(h^2)$ für $h \rightarrow 0$, folgt $H(x_0, \nabla v(x_0)) \leq 0$.

Gilt $v(y_h) \geq (\Lambda_{h,K}v)(y_h) + \mathcal{O}(h^2)$ für $h \rightarrow 0$, folgt $H(x_0, \nabla v(x_0)) \geq 0$.

Beweis. Der Beweis verläuft vollständig analog zu [BR06, Thm.10].

Da v hinreichend glatt ist und $I_{h,K}$ linear approximiert, können wir die Richtungsableitungen von v mit Hilfe von $I_{h,K}v$ approximieren:

$$\frac{v(y_h) - (I_{h,K}v)(y)}{\|y_h - y\|} = \left\langle Dv(y_h), \frac{y_h - y}{\|y_h - y\|} \right\rangle + \mathcal{O}(h), \quad y \in \partial\omega_h(y_h).$$

Sei nun also $v(y_h) \leq (\Lambda_{h,K}v)(y_h) + \mathcal{O}(h^2)$ für $h \rightarrow 0$, dann folgt

$$v(y_h) - (I_{h,K}v)(y) - \rho(y_h, y_h - y) \leq \mathcal{O}(h^2), \quad y \in \partial\omega_h(y_h),$$

teilen wir diesen Ausdruck durch $\|y_h - y\|$ so erhalten wir mit der Approximation der Richtungsableitung

$$\langle Dv(y_h), q \rangle - \rho(y_h, q) \leq ch$$

mit $\|q\| = 1$. Gehen wir zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ über, so erhalten wir mit der Stetigkeit von ρ aus Lemma 2.7.

$$\tilde{H}(x_0, Dv(x_0)) = \max_{\|q\|=1} (\langle Dv(x_0), q \rangle - \rho(x_0, q)) \leq 0$$

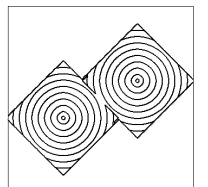
und erhalten mit Lemma 3.7 schließlich $H(x_0, Dv(x_0)) \leq 0$.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei nun

$$v(y_h) \geq (\Lambda_{h,K}v)(y_h) + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Für ein minimierendes $y_* \in \partial\omega_h(y_h)$ gilt dann

$$v(y_h) - (I_{h,K}v)(y_*) - \rho(y_h, y_h - y_*) \geq \mathcal{O}(h^2).$$



Teilen wir den Ausdruck durch $\|y_h - y_*\|$, erhalten wir wieder mit der Approximation der Richtungsableitung

$$\langle Dv(x_0), q_* \rangle - \rho(x_0, q_*) \geq 0$$

mit $\frac{y_h - y_*}{\|y_h - y_*\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} q_*$.

Mit $\tilde{H}(x_0, Dv(x_0)) \geq \langle Dv(x_0), q_* \rangle - \rho(x_0, q_*)$ und Lemma 3.7 folgt die Behauptung. \square

Auch an dieser Stelle benötigen wir wieder eine gleichmäßige Lipschitzschranke für die u_h und müssen wie zuvor eine diskrete Kompatibilitätsbedingung an die Randdaten etablieren. In diesem Fall benötigen wir

$$(H5'') \quad g(x) - g(y) \leq \frac{1}{4}\rho_* \|x - y\| \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

und erhalten mit dem folgenden Satz die gleichmäßige Lipschitzschranke.

Satz 3.9 (Analogon zu [BR06, Thm. 8]). *Es gelten (H1)–(H3), (H4') und (H5''). Eine Lösung u_h von (3.9) erfüllt die Lipschitzbedingung*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq c_\Omega \sqrt{d}\rho_* \cdot \|x - y\|, \quad x, y \in \bar{\Omega},$$

und die gleichmäßige Schranke

$$\|u_h\|_\infty \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + c_\Omega \sqrt{d}\rho_* \cdot \text{diam}(\Omega).$$

Beweis. Die gleichmäßige Schranke für $\|u_h\|_\infty$ ist eine einfache Folgerung aus der Lipschitzbedingung. Der Beweis der Lipschitzbedingung verläuft in drei Schritten.

Schritt 1: Für benachbarte Gitterpunkte $x_h, y_h \in \bar{\Omega}_h$ zeigen wir

$$|u_h(x_h) - u_h(y_h)| \leq \rho^* \cdot \|x_h - y_h\|.$$

Für $x_h, y_h \in \partial\Omega_h$ folgt die Ungleichung sofort aus (H5''). Ist $x_h \in \Omega_h$ und $y_h \in \partial\omega_h(x_h)$ gilt

$$u_h(x_h) = (\Lambda_{h,K} u_h)(x_h) \leq u_h(y_h) + \rho(x_h, x_h - y_h) \leq u_h(y_h) + \rho^* \|x_h - y_h\|.$$

Ist auch $y_h \in \Omega_h$ können wir die Rollen von x_h und y_h vertauschen und erhalten die Lipschitzschranke.

Ist aber $y_h \in \partial\Omega_h$, dann gilt für mindestens einem Nachbargitterpunkt $x_h^{(1)}$ von x_h

$$\begin{aligned} u_h(x_h) &= (\Lambda_{h,K} u_h)(x_h) \\ &\geq u_h(x_h^{(1)}) + \frac{1}{4}\rho(x_h, x_h - x_h^{(1)}) \\ &\geq u_h(x_h^{(1)}) + \frac{1}{4}\rho_* \|x_h - x_h^{(1)}\| \end{aligned}$$

Führen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir eine Folge von Gitterpunkten $x_h = x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(m)}$, deren Gitterwerte strikt fallen. Damit erreichen wir notwendigerweise für einen Index n den Rand: $x_h^{(n)} \in \partial\Omega_h$. Dann gilt mit (H5'')

$$\begin{aligned} u_h(x_h) &\geq g(x_h^n) + \frac{1}{4}\rho_* \sum_{i=0}^{n-1} \|x_h^{(i)} - x_h^{(i+1)}\| \\ &\geq g(y_h) + \frac{1}{4}\rho_* \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|x_h^{(i)} - x_h^{(i+1)}\| - \|x_h^{(n)} - y_h\| \right) \\ &\geq u_h(y_h) - \frac{1}{4}\rho_* \|x_h - y_h\|, \end{aligned}$$

womit der Beweis von Schritt 1 abgeschlossen ist.

Schritt 2 und 3 verlaufen völlig analog zu denen im Beweis von Satz 3.4, deshalb geben wir hier nur die Resultate an.

Schritt2: Sei Q eine quadratische Zelle des Gitters. Für $x, y \in Q$ gilt

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq \sqrt{d}\rho_* \cdot \|x - y\|$$

Schritt3: Für $x, y \in \bar{\Omega}$ existiert ein Lipschitzweg $\gamma \in C^{0,1}([0, 1], \bar{\Omega})$ durch x und y so dass (nach [Alt99, S. 304])

$$\|\gamma'\|_\infty \leq c_\Omega \|x - y\|.$$

Damit erhalten wir

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq c_\Omega \sqrt{d}\rho_* \cdot \|x - y\|,$$

was den Beweis über die gleichmäßige Lipschitzschranke abschließt. \square

Wenn man den Beweis eingehender betrachtet, so stellt man fest, dass die Kompatibilitätsbedingung (H5'') für die Randdaten nicht ganz so strikt hätte gewählt werden müssen, wenn wir in (3.6) und (3.7) $\hat{u}_{h,\min}$ größer gewählt hätten. Allgemeiner kann man sagen, dass man bei der Wahl von

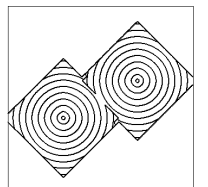
$$\hat{u}_{h,\min}(x_h) := \min_{y_h \in (\partial\omega_h(x_h) \cap \Omega_h)} \{u_h(y_h) + c \cdot \rho(x_h, x_h - y_h)\}$$

eine Bedingung

$$g(x) - g(y) \leq c \cdot \rho_* \|x - y\| \quad \forall x, y \in \partial\Omega$$

erhält. Je nach Bedarf kann man also diese zwei Einstellungen abhängig voneinander zu Gunsten der einen oder der anderen Eigenschaft verschieben. Die hier getroffene Wahl ist ein exemplarischer Kompromiss.

Nachdem nun alle Eigenschaften, die zum Beweis der Konvergenz benötigt werden, zusammengestellt sind, erhalten wir



Satz 3.10 (nach [BR06, Thm. 11] und [BS91, Thm. 2.1.]). *Die Lösungen u_h von (3.9) konvergieren für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die eindeutige Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG).*

Beweis. (nach [BR06, Thm. 11] und [BS91, Thm. 2.1.]

Nach dem vorangegangenen Satz 3.9 ist die Folge der Lösungen u_h von (3.9) eine Folge gleichmäßig beschränkter Lipschitzfunktionen auf $\bar{\Omega}$ kompakt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (siehe z.B. [Wer97, Satz II.3.4.]) existiert eine Teilfolge $u_{h'}$, die gleichmäßig gegen eine Lipschitz-stetige Funktion u konvergiert, für die wegen $u_h|_{\partial\Omega_h} = g|_{\partial\Omega_h}$ und (H5'') gilt, dass $u|_{\partial\Omega} = g$.

Zu zeigen bleibt die Tatsache, dass u Viskositätssub- und Viskositätssuperlösung von (HJG) ist. Wir zeigen die Behauptung hier nur für die Eigenschaft Viskositätssublösung zu sein. Die Argumentation für die Viskositätssuperlösung verläuft analog.

Sei also $x_0 \in \Omega$ Stelle eines lokalen Maximums für $u - \phi$ für ein $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Wir können Evans [Eva98, S.542] folgend annehmen, es handle sich dabei um ein striktes lokales Maximum (ansonsten addiere man eine geeignete quadratische Funktion zu ϕ).

Dann existiert auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz eine Folge $h_n \in \mathbb{R}^+$ und $y_n \in \Omega_{h_n}$, so dass für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$h_n \rightarrow 0, \quad y_n \rightarrow x_0, \quad u_{h_n}(y_n) \rightarrow u(x_0)$$

und y_n ist Stelle eines lokalen Maximums von $u_{h_n} - \phi$, also

$$(u_{h_n} - \phi)(y_n) \geq (u_{h_n} - \phi)(y) \quad \forall y \in \partial\omega_{h_n}(y_n)$$

sowie

$$(u_{h_n} - \phi)(y_n) \geq (I_{h,K}u_{h_n} - I_{h,K}\phi)(y) + \mathcal{O}(h_n^2) \quad \forall y \in \partial\omega_{h_n}(y_n).$$

Für die spezielle Wahl von $y = y^*$ mit

$$(\Lambda_{h,K}\phi)(y_n) = (I_{h,K}\phi)(y^*) + \rho(y_n, y_n - y^*)$$

folgt

$$\begin{aligned} (u_{h_n} - \phi)(y_n) &\geq (I_{h,K}u_{h_n} - I_{h,K}\phi)(y^*) + \mathcal{O}(h_n^2) \\ &= (I_{h,K}u_{h_n})(y^*) + \rho(y_n, y_n - y^*) \\ &\quad - (I_{h,K}\phi)(y^*) - \rho(y_n, y_n - y^*) + \mathcal{O}(h_n^2) \\ &\geq (\lambda_{h,K}u_{h_n})(y_n) - (\lambda_{h,K}\phi)(y_n) + \mathcal{O}(h_n^2) \end{aligned}$$

mit u_{h_n} Lösung der Fixpunktgleichung folgt

$$\geq u_{h_n}(y_n) - (\lambda_{h,K}\phi)(y_n) + \mathcal{O}(h_n^2)$$

also

$$\phi(y_n) \leq (\lambda_{h,K}\phi)(y_n) + \mathcal{O}(h_n^2).$$

Mit der Konsistenz aus Lemma 3.8 folgt

$$H(x_0, \nabla\phi(x_0)) \leq 0$$

was uns u als Viskositätssublösung liefert. \square

3.6 Ordnungsvergleich

Man kann sich nun die Frage stellen, in wie weit die Veränderung der Diskretisierung eine Verbesserung der numerischen Lösung und der Konvergenzrate bedeutet.

Da — wie schon erwähnt — für eine quadratische Interpolation nicht genug Information verwendet wird, können wir im allgemeinen nicht erwarten ein Verfahren höherer Ordnung erhalten zu können. Aber dass sich die neue Idee in speziellen Fällen trotzdem auch in der Ordnung bemerkbar machen könnte, wollen wir hier am modellhaften Beispiel der Eikonalgleichung mit konstanter Geschwindigkeitsfunktion $F \equiv 1$ und 1-Punkt-Rand diskutieren.

Wir betrachten dabei die Ausbreitung des Fehlers, der durch lineare Approximation der Kugelwelle entsteht. Im quadratischen Gitter ist dieser Fehler in den Diagonalen am größten und daher beschränken wir uns hier auf die Betrachtung dieser Gitterstellen.

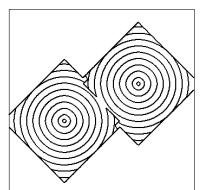
In $x_1 = (j-1, j)h$ und $x_2 = (j, j-1)h$ hat die Viskositätslösung des Modellproblems den Wert

$$r_j = h\sqrt{(j-1)^2 + j^2} = h\sqrt{2j^2 - 2j + 1}$$

und die Krümmung der zugehörigen Level-Sets beträgt $\frac{1}{r_j}$. Die zum Godunov-Fluß gehörige lineare Interpolation auf $\overline{x_1x_2}$ führt somit auf

$$(I_{h,E}u)(y) = r_j \quad \forall y \in \overline{x_1x_2}.$$

Um die maximal mögliche Leistungsfähigkeit des Krümmungsansatzes zu ermitteln, nehmen wir an dieser Stelle den Krümmungskreismittelpunkt



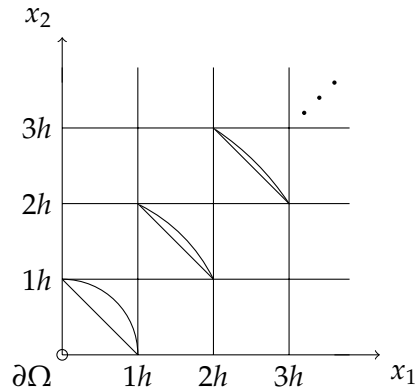


Abbildung 3.7: Differenzen zwischen ebener und Kugelwelle entlang der Diagonale

M als exakt gegeben an und vernachlässigen zunächst den Approximationsfehler und erhalten damit

$$(I_{h,K}u)(y) = \|y\| \quad \forall y \in \overline{x_1 x_2}.$$

Der Fehler, der sich dann bei der Berechnung an der Stelle $x = (j, j)h$ ergibt beträgt mit Abbildung 3.8

$$\begin{aligned} d_j &= u_{h,E}(x) - u_{h,K}(x) \\ &= r_j + \frac{1}{2}\sqrt{2}h - \left[\sqrt{r_j^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}h\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}h \right] \\ &= r_j - \sqrt{r_j^2 - \frac{h^2}{2}} \\ &= h\sqrt{2j^2 - 2j + 1} - h\sqrt{2j^2 - 2j + \frac{1}{2}} \\ &= h\sqrt{2j^2 - 2j + 1} - h\sqrt{2}\left|j - \frac{1}{2}\right|. \end{aligned}$$

Dieser Fehler in $(j, j)h$ pflanzt sich in der weiteren Berechnung in die Nachbarn fort und kumuliert sich somit zu

$$\begin{aligned} F &\leq \sum_{j=1}^N d_j \\ &= h \sum_{j=1}^N \underbrace{\left[\sqrt{2j^2 - 2j + 1} - \sqrt{2}\left(j - \frac{1}{2}\right) \right]}_{=:g(j)}. \end{aligned}$$

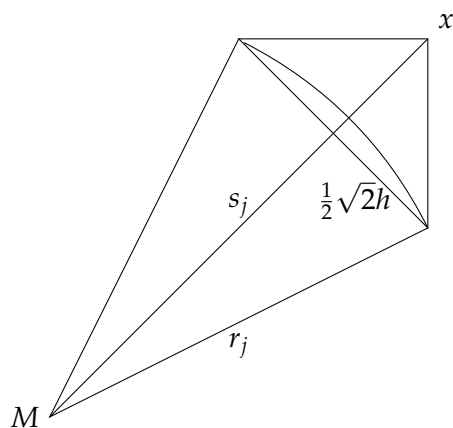


Abbildung 3.8: Kugelwelleninterpolation ergibt Interpolationswert $s_j = \sqrt{r_j^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2}h)^2}$ in der Mitte der Dreiecksseite

Es gilt $g'(j) < 0$, also fällt g auf dem betrachteten Bereich monoton. Deshalb können wir die Summe durch ein Integral abschätzen. Die Stammfunktion von g ist in einschlägigen Formelsammlungen wie z.B. [Bro] zu finden.

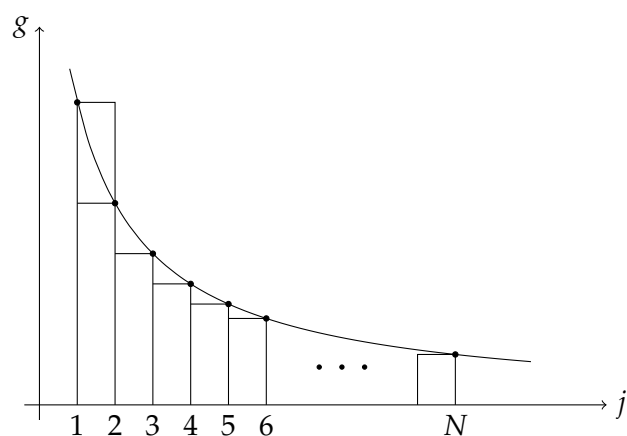
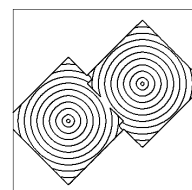


Abbildung 3.9: Abschätzung der Summe durch das zugehörige Integral



$$\begin{aligned}
F &\leq h \cdot \left[\int_1^N g(j) dj + g(1) \right] \\
&= h \cdot \left[\frac{2j-1}{4} \sqrt{2j^2 - 2j + 1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(2\sqrt{2(2j^2 - 2j + 1)} + 4j - 2 \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} j(j-1) \right]_1^N + \mathcal{O}(h) \\
&= h \cdot \left[\frac{2N-1}{4} \sqrt{2N^2 - 2N + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} N(N-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(2\sqrt{2(2N^2 - 2N + 1)} + 4N - 2 \right) \right] + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Hier erkennt man nach geeigneter Umformung (erweitere z.B. den gesamten Term $a - b$ mit $a + b$) dass

$$h \cdot \left[\frac{2N-1}{4} \sqrt{2N^2 - 2N + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} N(N-1) \right] = \mathcal{O}(h)$$

und

$$\frac{h}{4\sqrt{2}} \ln \left(2\sqrt{2(2N^2 - 2N + 1)} + 4N - 2 \right) = \mathcal{O}(h \log h^{-1}) = \mathcal{O}(h \log h)$$

gilt. Insgesamt erhält man also

$$F \leq \mathcal{O}(h \log h).$$

Ein ähnliches Resultat wurde bereits von Zhao in [Zha05] erzielt.

Wir haben zur vorangegangenen Berechnung angenommen $(I_{h,KU})(y)$ wäre fehlerfrei, was natürlich nicht den Tatsachen entspricht. Führt man den Interpolationsfehlerterm $\mathcal{O}(h^2)$ in die Berechnung ein, so erkennt man leicht, dass sich dieser durch die Summenbildung zu $\mathcal{O}(h)$ kumuliert und unser Ergebnis damit nicht beeinflusst.

3.7 Lineare Interpolation des Geschwindigkeitsterms

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir Verbesserungsmöglichkeiten im Interpolationsterm der diskreten Gleichung betrachtet. An dieser Stelle wollen wir unser Augenmerk nun auf den zweiten Term der Update-Formel richten.

Er diskretisiert die optische Distanz

$$\delta(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 \rho(\xi(t), -\xi'(t)) dt : \xi \in C^{0,1}([0, 1], \overline{\Omega}), \xi(0) = x, \xi(1) = y \right\},$$

die in (H5) definiert wurde durch stückweise konstante Approximation im ersten Argument der Trägerfunktion $\rho(\xi(t), -\xi'(t))$ und Einschränkung der möglichen Wege ξ auf die direkten Verbindungsstrecken von x nach y .

Für den Fall der Eikonalgleichung bedeutet dies, dass man die Zeit, die die Welle von einem Randpunkt y bis x_h benötigt dadurch misst, dass man annimmt, dass jede im Patch befindliche Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit $F(x_h)$ zurückgelegt wird.

Möchte man diese Diskretisierung verbessern, so ist es ein erster Schritt die Geschwindigkeit — bzw. im allgemeinen ρ im ersten Argument — nicht mehr als Konstante zu betrachten, sondern als eine auf jedem Dreieck lineare Funktion. Die Wahl der möglichen Wege wollen wir hier weiterhin auf direkte Strecken beschränken.

Durch diese veränderte Approximation von F ergibt sich das Integral

$$\int_0^1 \rho(\xi(t), -\xi'(t)) dt$$

für die Eikonalgleichung nun nicht mehr einfach als Integration einer Konstante $\int_0^1 \frac{1}{F(x_h)} \|x_h - y\| dt = \frac{1}{F(x_h)} \|x_h - y\|$, sondern als $\int_0^1 \frac{1}{F(x(t))} \|x_h - y\| dt$ mit linear interpoliertem F . Explizit erhalten wir:

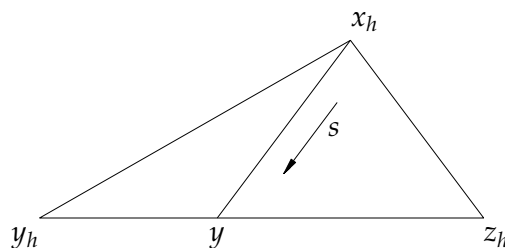
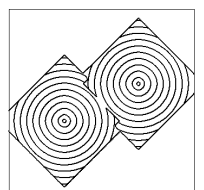


Abbildung 3.10: Integrationsweg im Dreieck

$$F(x(s)) = F(x_h) + s \cdot (F_h(y) - F(x_h)), \quad s \in [0, 1]$$

mit $F_h(y) = \lambda F(y_h) + (1 - \lambda)F(z_h)$ für $y = \lambda y_h + (1 - \lambda)z_h$ und $x(s) = x_h(1 - s) + ys$.

Damit erhält man für die Strecke $\xi(s) = x_h + s \cdot (y - x_h)$ von x_h nach y und $F_h(y) \neq F(x_h)$



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho(\xi(t), -\xi'(t)) dt &= \int_0^1 \frac{1}{F(x(s))} \|x_h - y\| ds \\
&= \int_0^1 \frac{\|x_h - y\|}{F(x_h) + s(F_h(y) - F(x_h))} ds \\
&= \frac{\|x_h - y\|}{F_h(y) - F(x_h)} \ln |F(x_h) + s(F_h(y) - F(x_h))| \Big|_0^1 \\
&= \frac{\|x_h - y\|}{F_h(y) - F(x_h)} (\ln |F_h(y)| - \ln |F(x_h)|) \\
&= \frac{\|x_h - y\|}{F_h(y) - F(x_h)} \ln \left| \frac{F_h(y)}{F(x_h)} \right|.
\end{aligned}$$

Damit muss in der Update-Formel für die Eikonalgleichung der Ausdruck $\rho(x, x_h - y) = \frac{1}{F(x_h)} \|x_h - y\|$ durch $\frac{\ln |F_h(y)| - \ln |F(x_h)|}{F_h(y) - F(x_h)} \|x_h - y\|$ ersetzt werden. Und somit erhalten wir im Fall der Eikonalgleichung

$$(\Lambda_h u_h)(x_h) := \min_{y \in \partial \omega_h(x_h)} \left[(I_{h,K} u_h)(y) + \frac{\|x_h - y\|}{F_h(y) - F(x_h)} \ln \left| \frac{F_h(y)}{F(x_h)} \right| \right]$$

für $x_h \in \Omega_h$.

Für allgemeine Hamilton-Jacobi-Gleichungen muss in analoger Weise das Integral für linear interpolierte ρ ausgewertet werden.

Diese Idee kann man sicherlich erweitern, indem man die Geschwindigkeitsfunktion stückweise quadratisch oder kubisch interpoliert. Desweiteren kann man darüber nachdenken, inwieweit das Einbeziehen anderer als nur linearer Wegverläufe sinnvoll ist.

Solange die Geschwindigkeit als konstant angenommen wurde, war a priori klar, dass die minimierende Wegstrecke ein Geradenstück sein würde. Für beliebige Geschwindigkeitsfunktionen ist dies natürlich nicht mehr der Fall und man muss überlegen, welche anderen Streckenverläufe sinnvollerweise einbezogen werden sollten. Da es uns an dieser Stelle aber nicht um eine Ordnungserhöhung, sondern nur um eine Verbesserung der Konstanten gehen kann (die Interpolation wirkt ja schon nicht ordnungserhöhend), können wir uns weiterhin auf Geraden als Wege beschränken.

3.8 Zusammenfassung des Diskretisierungsvorschlags für die Eikonalgleichung

An dieser Stelle wollen wir zusammenfassend die Update-Vorschrift für den speziellen Fall der Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{F(x)}$ explizit notieren.

Dabei ist der erste Term, unsere Kugelwelleninterpolation völlig unabhängig von der betrachteten Gleichung. Erst der zweite Term wird durch die HJG bestimmt.

Wir erhalten also abgesehen von den Spezialfällen den zu minimierenden Ausdruck im Fall der konstanten Geschwindigkeitsapproximation zu

$$\begin{aligned} & (I_{h,K}u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y) \\ &= (\|M - y\|_2 - \|M - y_h\|_2) \cdot \frac{u_h(z_h) - u_h(y_h)}{\|M - z_h\|_2 - \|M - y_h\|_2} + u_h(y_h) \\ & \quad + \frac{1}{F(x_h)} \|x_h - y\| \end{aligned}$$

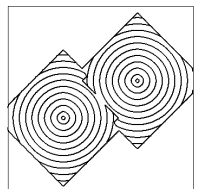
für $y = y_h + x(z_h - y_h)$, $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &= (\|M - y_h + x(z_h - y_h)\|_2 - \|M - y_h\|_2) \cdot \frac{u_h(z_h) - u_h(y_h)}{\|M - z_h\|_2 - \|M - y_h\|_2} \\ & \quad + u_h(y_h) + \frac{h}{F(x_h)} \sqrt{2x^2 - 2x + 1}. \end{aligned}$$

Im Fall der linearen Interpolation der Geschwindigkeit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & (I_{h,K}u_h)(y) + \rho(x_h, x_h - y) \\ &= (\|M - y\|_2 - \|M - y_h\|_2) \cdot \frac{u_h(z_h) - u_h(y_h)}{\|M - z_h\|_2 - \|M - y_h\|_2} + u_h(y_h) \\ & \quad + \frac{h\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{F_h(y_h + x(z_h - y_h)) - F(x_h)} \ln \left| \frac{F_h(y_h + x(z_h - y_h))}{F(x_h)} \right|. \end{aligned}$$

Das Minimierungsproblem wird numerisch gelöst. Man kann z.B. das Newton-Verfahren verwenden. Zumindest im Fall der stückweise konstant approximierter Geschwindigkeitsfunktion haben wir eine konvexe Funktion zu minimieren. In diesem Fall benötigt man erste und zweite Ableitung nach x , die sich aus den gegebenen Ausdrücken leicht bestimmen lassen.



Kapitel 4

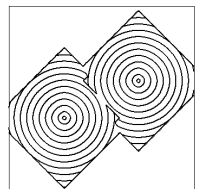
Lösungsalgorithmen

Die beiden in Kapitel 3 auftretenden diskreten Gleichungssysteme sind das durch den Godunov-Fluss gegebene $H^G(u_h) = 0$ und die durch die Kugelwellendiskretisierung gegebene Fixpunktgleichung $u_h = \Lambda_{h,K}u_h$.

Die in diesem Kapitel vorgestellten und vorgeschlagenen Algorithmen zur Lösung der diskreten Hamilton-Jacobi-Gleichung bedienen sich zuweilen gewisser Monotonie-Eigenschaften, die wir für die Kugelwellendiskretisierung nicht garantieren können. So ist das Fast-Marching-Verfahren auf die Monotonie der Diskretisierung angewiesen, so dass hier nur der Godunov-Fluss verwendet werden kann. Es ist allerdings möglich dieses Verfahren durch leichte Modifikation als iteratives Verfahren aufzufassen, das dann keine Monotonie mehr benötigt. Durch diese Herabsetzung der Anforderungen verlieren wir allerdings die Sicherheit, dass der Algorithmus in $\mathcal{O}(N \log N)$ Schritten terminiert. Auch das hier entwickelte Fast-Southwell-Verfahren ist für die Komplexitätsaussage auf eine monotone Diskretisierung angewiesen, kann aber auch ohne Modifikation direkt auf andere Diskretisierungen angewendet werden. Wir bezeichnen — wie schon in Kapitel 3 — mit N stets die Anzahl der Gitterpunkte im quadratischen Gitter Ω_h .

Die entscheidenden Resultate dieses Kapitels betreffen einzig das algorithmische Vorgehen für die Godunov-Diskretisierung, so dass wir in der Diskussion nur auf jene eingehen, auch wenn die Algorithmen durchaus auf die Kugelwellendiskretisierung anwendbar sind. Es soll dadurch ein unübersichtliches hin- und herspringen zwischen den Diskretisierungen vermieden werden.

Wir sind nun also in der Situation, dass wir durch $H^G(u_h) = 0$ ein System nichtlinearer Gleichungen gegeben haben und dieses numerisch lösen wollen. Die vorgestellten Algorithmen werden alle Gitterpunkt für Gitterpunkt (also Gleichung für Gleichung) vorgehen und diese unter Kenntnis der bis dahin berechneten Daten updaten.



Wir bezeichnen dabei die Lösung der diskreten Gleichung auf einem Gitter mit Gitterweite h als u_h . Wird ein Verfahren verwendet, dass die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems in mehreren Iterationsdurchläufen bestimmt, so bezeichnen wir mit $u_h^{(0)}$ die Initialisierung und mit $u_h^{(i)}$ die i -te Iterierte.

Die Algorithmen unterscheiden sich in der Wahl der Reihenfolge, in der die Gitterpunkte durchlaufen werden, der Auswahlstrategie und der Anzahl der benötigten Iterationen. Je nachdem sind einige Verfahren effizienter als andere oder eignen sich besonders gut oder schlecht für bestimmte Problemklassen.

Zunächst wollen wir die bekannten Verfahren zum Lösen insbesondere der Eikonalgleichung vorstellen.

4.1 Das Gauß-Seidel-Verfahren

Das in [RT92] vorgeschlagene Gauß-Seidel-Verfahren für das nichtlineare Gleichungssystem $H^G(u_h) = 0$ ist eine direkte Übertragung des linearen Gauß-Seidel-Verfahrens.

Wir legen zunächst eine Reihenfolge fest, in der die Gitterpunkte $x_k \in \Omega_h$ zu durchlaufen sind. Dann lösen wir in der für x_k festgelegten Reihenfolge die einzelnen Gleichungen $H^G(x_k, u_h) = 0$ und nutzen an jedem Punkt die bis dahin berechneten Daten. Dieses Vorgehen wird solange iteriert bis eine hinreichend gute Approximation (durch ein geeignetes Abbruchkriterium) der Lösung gefunden wurde.

Algorithmus 1 : Nichtlineares Gauß-Seidel-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0$

$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ \min_{y \in \partial\Omega_h} g(y) & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

repeat

$$\left| \begin{array}{l} u_h^{(i+1)} = u_h^{(i)} \\ \text{Löse } H^G(x_k, u_h^{(i+1)}) = 0 \text{ in vorgegebener Reihenfolge für alle } x_k \\ i = i + 1 \end{array} \right.$$

until $|H^G(x_k, u_h^{(i)})| < \text{TOL} \quad \forall x_k \in \Omega_h ;$

Wie der folgende Satz von Rouy/Tourin zeigt, konvergiert diese Iteration

gegen die Lösung der diskreten Gleichung.

Satz 4.1 ([RT92, Satz 3]). Die Iterierten $u_h^{(i)}$ im nichtlinearen Gauß-Seidel-Verfahren konvergieren gegen die Lösung der Gleichung $H^G(u_h) = 0$, $u_h|_{\partial\Omega_h} = g|_{\partial\Omega_h}$:

$$u_h^{(i)} \rightarrow u_h \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Beweis. Der Beweis wird in [RT92] zwar nur für die Godunov-Diskretisierung der Eikonalgleichung geführt, kann aber auf den allgemeinen Fall wortgleich übertragen werden. \square

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert zwar gegen die Lösung der diskreten Gleichung $H^G(u_h) = 0$, es kann jedoch passieren, dass die Anzahl der Iterationen nicht unerheblich groß ist.

Löst man auf diese Art und Weise z.B. die Eikonalgleichung auf dem Einheitsquadrat, hat als Randpunkt $(1,0)$ und als Iterationsreihenfolge eine zeilenweise Abarbeitung des Gebiets von oben links nach unten rechts vorgesehen, so bewegt man sich gerade entgegengesetzt zur Richtung des Informationsflusses des Problems.

Die Iterationsreihenfolge lautet als Pseudocode:

```

for  $k_1 = 0 : n$ 
  for  $k_2 = n : -1 : 0$ 
     $x_k = (k_1 h, k_2 h)$ 
    Löse  $H^G(x_k, u_h) = 0$ 
  end
end
end

```

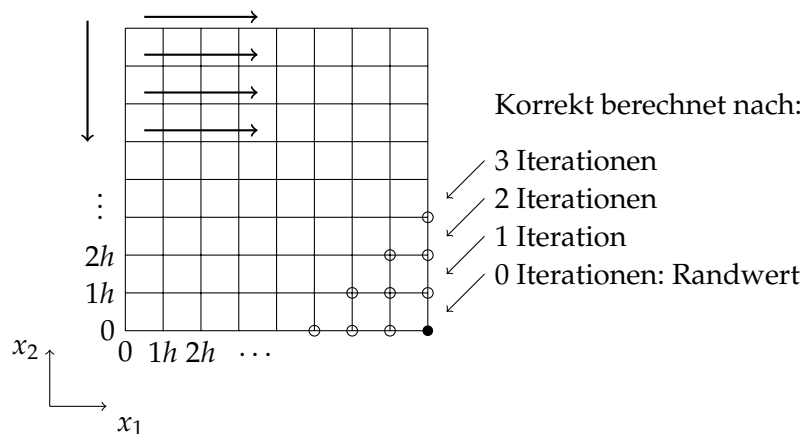
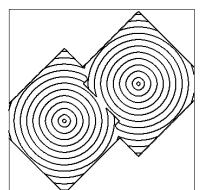


Abbildung 4.1: Fortschritt des Gauß-Seidel-Verfahrens



Nach dem ersten Durchlauf mit N Berechnungen sind lediglich die zwei direkten Nachbarn des Randpunkts korrekt berechnet. Im nächsten Durchlauf kommen lediglich die drei direkten Nachbarn dieser Punkte hinzu. Es füllt sich in jedem Komplettdurchlauf des Gitters eine Diagonale mit korrekten Werten. In einem $n \times n$ Gitter sind $2n - 1$ Diagonalen vorhanden, so dass sich hier die Anzahl von Lösungsiterationen zu $(2n - 1) \cdot n^2$ summiert. Die Laufzeit des Gauß-Seidel-Verfahrens ist also für eine allgemeine Wahl der Iterationsreihenfolge im zweidimensionalen mindestens von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{1.5})$.

Verallgemeinert man sich dieses Beispiel ins d -dimensionale, so erhält man $d \cdot n - 1$ Diagonal-Hyperebenen, die sukzessive gefüllt werden. Bei $N = n^d$ zu berechnenden Gitterwerten pro Iterationsdurchlauf erhält man $(dn - 1)n^d = \mathcal{O}(N^{1+\frac{1}{d}})$ Lösungsoperationen.

4.2 Das Fast-Marching-Verfahren

Das Fast-Marching-Verfahren wurde von Sethian ([Set96]) für die Godunov-Diskretisierung — sowie in anderer Darstellung von Tsitsiklis in [Tsi95] — erstmalig zur Lösung der Eikonalgleichung vorgeschlagen. Es löst das Problem in $\mathcal{O}(N \log N)$ Operationen und damit besser als das vorherig erklärte Gauß-Seidel-Verfahren. Es erzielt diese Einsparung an Iterationen durch die Beobachtung, dass im Diskretisierungsschema in die Berechnung eines Gitterwerts nur seine kleineren Nachbarn einfließen und bei Initialisierung mit einem oberhalb der Lösung liegenden Wert in jedem Schritt die Gitterwerte höchstens sinken. Durch Festlegen einer gesichert berechneten Menge \mathcal{A} (Active) an Funktionswerten (zunächst die Randdaten) ist es möglich sich kausal voranzuarbeiten: Man betrachtet die Nachbarn \mathcal{T} (Trial) der gesicherten Menge und berechnet diese. Der kleinste Wert in \mathcal{T} kann, da er nur von kleineren Werten abhängt, lediglich von sicheren Werten abhängen und wird daher der sicheren Menge \mathcal{A} hinzugefügt. Dies wird im folgenden iteriert und wir erhalten sukzessive der Größe nach aufsteigende Gitterfunktionswerte, die sich lediglich auf sichere Werte stützen. Da die nach dieser Regel hinzukommenden Nachbarn stets größer sind, wird diese kausale Abhängigkeit auch später nicht mehr verändert.

Diese Argumentation ist nicht nur auf die Eikonalgleichung anwendbar, sondern immer dann, wenn in die Berechnung eines Gitterwerts nur seine kleineren Nachbarn einfließen. Dies kann (nach Betrachtung von (3.1)) genau dann garantiert werden, wenn für die Hamiltonfunktion H mit $p = (p_1, \dots, p_d)$ die zusätzliche Forderung

$$\arg \left[\min_{p_i} H(x, p) \right] = 0 \quad \forall i, \forall x, \forall p_j (j \neq i) \quad (4.1)$$

erfüllt ist, sie also ihr Minimum als Funktion von p_i immer in 0 annimmt.

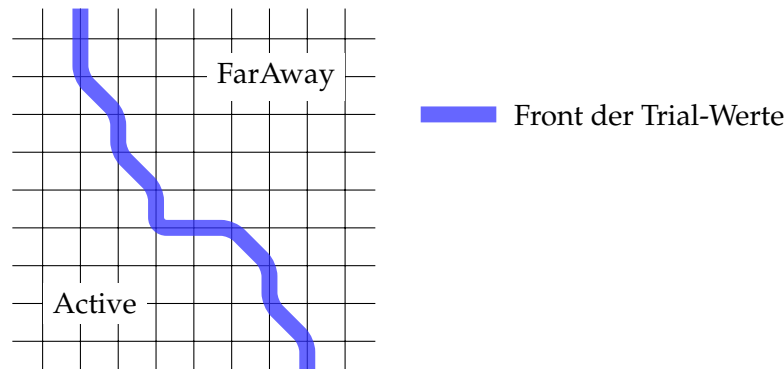


Abbildung 4.2: Ausschnitt einer Front mit Active, Trial und FarAway Punkten

Für diese Art von Hamiltonfunktion ist es also möglich die diskrete Lösung mittels des Fast-Marching-Verfahrens mit maximal viermaligem Update eines Punktes zu erreichen (in der Regel wird ein Gitterwert zweimal berechnet). Damit hat man $\mathcal{O}(N)$ Lösungsprozesse und erhält durch den Sortierungsprozess nach dem kleinsten Gitterfunktionswert in der Menge der Trials pro Iteration noch den Aufwand $\mathcal{O}(\log N)$ hinzu. Dabei erzielt man diese Komplexität durch Verwendung einer Prioritätswarteschlange in Form eines binären Heaps.

Notieren wir das eben beschriebene Vorgehen etwas formaler:

Algorithmus 2 : Fast-Marching-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld:

$$u_h(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ \infty & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

$\mathcal{A} = \{x | x \in \partial\Omega_h\}$, $\mathcal{T} = \emptyset$, $\mathcal{FA} = \{x | x \in \Omega_h\}$

Löse $H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h) = 0$ für die Nachbarn der Randpunkte $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$ und stelle sie in den Heap $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$,
 $\mathcal{FA} = \mathcal{FA} \setminus \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$

while $\mathcal{T} \neq \emptyset$ **do**

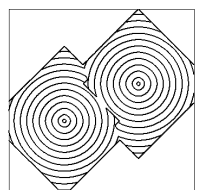
 Finde $\min_{x \in \mathcal{T}} u_h(x) = u_h(x_*)$

$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup x_*$, $\mathcal{T} = \mathcal{T} \setminus x_*$

 Löse $H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h) = 0$ für seine Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_*) \setminus \mathcal{A}$

 Falls $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{FA}$: $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup x_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{FA} = \mathcal{FA} \setminus x_{\mathcal{N}}$

end



Mit der am Anfang des Abschnitts stehenden Argumentation, die vielfach nachzulesen ist (z.B. in [Kim04, §7.2]), ergibt sich:

Satz 4.2. Für Hamiltonfunktionen H , die (4.1) erfüllen terminiert das Fast-Marching-Verfahren nach $\mathcal{O}(N \log N)$ Operationen mit der Lösung u_h von $H^G(u_h) = 0$, $u|_{\partial\Omega_h} = g|_{\partial\Omega_h}$.

4.3 Das Fast-Sweeping-Verfahren

Das Fast-Sweeping-Verfahren wurde in [TCOZ03] vorgeschlagen mit dem Ziel, zum einen eine größere Klasse von Gleichungen als das Fast-Marching-Verfahren bedienen zu können und zum anderen ein optimales Laufzeitverhalten von $\mathcal{O}(N)$ zu erreichen. Ein ähnliches Vorgehen findet sich bereits in einer Veröffentlichung von Danielsson [Dan80].

Die Idee basiert auf der Beobachtung, dass das Gauß-Seidel-Verfahren in dem in 4.1 diskutierten Beispiel in optimaler Weise jede der diskreten Gleichungen nur einmal lösen würde, falls die festgelegte Iterationsreihenfolge nicht entgegen dem Informationsfluss ausgerichtet wäre, sondern in dieser Richtung laufen würde.

Im rechteckigen Gitter kann ein Punkt seine Information — je nachdem welche ein oder zwei Nachbarn diese übermitteln — aus prinzipiell vier verschiedenen Richtungen erhalten. Im d -dimensionalen ist dieser Informationsfluss entsprechend aus 2^d Richtungen möglich. Da man im vorneherein nicht weiß, in welcher Richtung sich die Information ausbreitet, werden im Fast-Sweeping-Verfahren einfach alle 2^d Möglichkeiten durch 2^d entsprechend abwechselnde Iterationsreihenfolgen abgedeckt.

Information fließt in Richtung

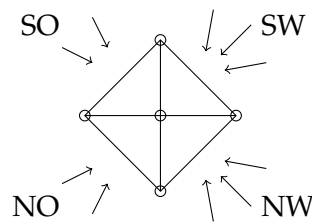


Abbildung 4.3: Vier prinzipielle Richtungen im $2d$, in die beim Update Information fließt

Eine sogenannte *Sweeping-Iteration* wird im zweidimensionalen also festgelegt als ein viermaliges Durchlaufen und Lösen des gesamten Gebietes, je einmal in süd-westlicher, nord-westlicher, süd-östlicher und nord-östlicher Richtung.

Die 4 Iterationen im $2d$ folgen den Charakteristiken in Richtung

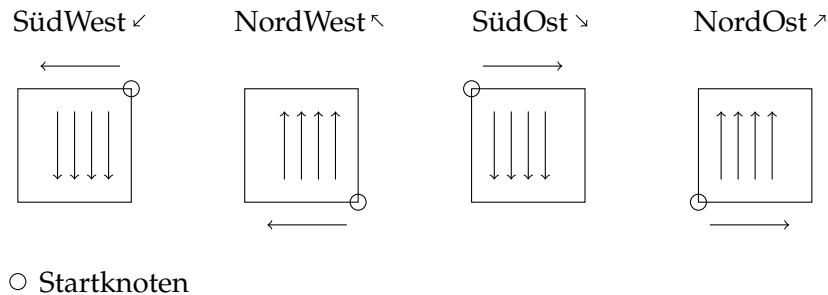


Abbildung 4.4: Sweeping-Iteration im $2d$

Notieren wir den Algorithmus für ein $n \times n$ -Gitter im zweidimensionalen:

Algorithmus 3 : Fast-Sweeping-Verfahren ($2d$ -Version)

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0$

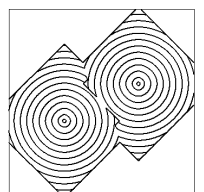
$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ \infty & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

```

repeat
   $u_h^{(i+1)} = u_h^{(i)}$ 
   $i = i + 1$ 
  for  $s1 = -1, 1$  do
    for  $s2 = -1, 1$  do
      for  $k = (s1 < 0 ? n : 0); (s1 < 0 ? k >= 0 : k <= n); k += s1$  do
        for  $l = (s2 < 0 ? n : 0); (s2 < 0 ? l >= 0 : l <= n); l += s2$  do
           $x_h = (kh, lh)$ 
          Löse  $H^G(x_h, u_h^{(i)}) = 0$ 
        end
      end
    end
  end
end
until  $|H^G(x_k, u_h^{(i)})| < \text{TOL} \quad \forall x_k \in \Omega_h$  ;

```

Da wir es hier mit einem Gauß-Seidel-Verfahren mit spezieller Wahl der Iterationsreihenfolge zu tun haben, erhalten wir die Konvergenz der Iteration als einfaches Korollar.



Korollar 4.3. Das Fast-Sweeping-Verfahren konvergiert gegen die Lösung von $H^G(u_h) = 0$, $u_h|_{\partial\Omega_h} = g|_{\partial\Omega_h}$.

Beweis. Das Fast-Sweeping-Verfahren ist ein spezielles Gauß-Seidel-Verfahren. Die Iterationsreihenfolge ist durch die Sweeping-Idee festgelegt. Somit konvergiert es mit Satz 4.1. \square

Je nachdem in welcher Weise nun die Charakteristiken des Problems verlaufen, sind eine oder mehrere Fast-Sweeping-Iterationen zum Lösen der diskreten Gleichung nötig. Für jeden Richtungswechsel der Charakteristiken, derart, dass der Tangentenvektor an die Charakteristik seinen Quadranten verlässt (die Information also in eine andere der 4 prinzipiellen Richtungen fließt), ist im schlechtesten Fall eine weitere Sweeping-Iteration notwendig. So kann man sich Probleme konstruieren, für die das Fast-

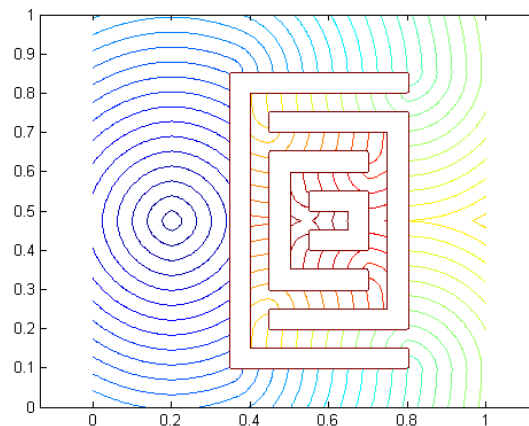


Abbildung 4.5: Höhenlinienplot der Lösungsfunktion zu $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u(0.2, 0.5) = 0$ mit Hindernissen im Gebiet

Sweeping-Verfahren zwar nach $\mathcal{O}(N)$ Operationen terminiert, aber so viele Sweeping-Iterationen nötig werden, dass es zeitlich nicht konkurrenzfähig ist. Es sind allerdings (anders als im Fast-Marching-Verfahren) keine weiteren Voraussetzungen an die Gleichung oder die Diskretisierung notwendig. So wurden zum Beispiel für die in Abbildung 4.5 dargestellte Lösung der Eikonalgleichung mit konstanter Geschwindigkeitsfunktion und ineinander geschachtelten U-Stück-förmigen Hindernissen im Gebiet 3 Sweeping-Iterationen, also 12 Iterationen über das Gebiet benötigt.

Wie wir sehen, finden mehr als drei Richtungswechsel für die Charakteristiken statt, aber einige von ihnen werden durch die Reihenfolge der Teilite-

rationen innerhalb einer einzigen Sweeping-Iteration verfolgt.

Nachdem nun die drei gebräuchlichsten Algorithmen zum Lösen der Godunov-Diskretisierung vorgestellt sind, wollen wir uns neuen Ideen zuwenden.

4.4 Das Gauß-Southwell-Verfahren

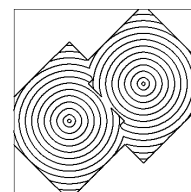
Das Gauß-Southwell-Verfahren geht auf die ursprüngliche Idee von Gauß zum iterativen Lösen von linearen Gleichungssystemen zurück. Weniger bekannt als Gauß-Seidel- und Jacobi-Verfahren ist es dasjenige, das der eigentlichen Idee Gauß', wie er sie Gerling brieflich mitteilte (siehe [Gau23]), entspricht. In einem Passus, in dem es um das Lösen eines 4×4 -Systems geht, schrieb er:

„Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direkt eliminieren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als zwei Unbekannte haben.“

Intensiv von Southwell in [Sou46] verwendet, trägt es heute den Namen Gauß-Southwell-Verfahren und wird z.B. in [FW60, S.241 f] und [FF70, §38] beschrieben.

Das Gauß-Southwell-Verfahren ist wie das Gauß-Seidel-Verfahren ein Einzelschritt-Verfahren. Hier jedoch werden die einzelnen Komponenten der Lösung nicht in einer vorgegebenen Reihenfolge berechnet, sondern in jedem Einzelschritt diejenige Gleichung bestimmt, die im Residuum gemessen den größten Fehler beinhaltet und nach der zugehörigen Variablen aufgelöst.

Im Gegensatz zum Gauß-Seidel-Verfahren ist hier die Konvergenzanalyse auf Grund der dynamischen Auswahl der x_k schwerer. In [FF70, Satz 38.1.] wird gezeigt, dass das Gauß-Southwell-Verfahren für positiv definite Ma-



trizen konvergiert.

Algorithmus 4 : Lineares Gauß-Southwell-Verfahren

Initialisiere $i = 0$, wähle Startschätzung $x^{(0)}$;
 Berechne das Residuum $r^{(0)} = Ax^{(0)} - b$
while $\max_k |r_k^{(i)}| > \text{TOL}$ **do**
 $i = i + 1$
 Bestimme $k_{\max} = \arg \left[\max_k |r_k^{(i-1)}| \right]$
 Löse die zugehörige Gleichung:

$$x_{k_{\max}}^{(i)} = \frac{1}{a_{k_{\max}k_{\max}}} \left(b - \sum_{l \neq k_{\max}} a_{k_{\max}l} x_l^{(i-1)} \right)$$

 $x_k^{(i)} = x_k^{(i-1)} \quad \forall k \neq k_{\max}$
 Berechne das Residuum neu: $r^{(i)} = Ax^{(i)} - b$
end

Negativ macht sich hierbei bemerkbar, dass in jedem Schritt das Maximum unter den Residuen bestimmt werden muss, was einen Sortierungsprozess voraussetzt, der natürlich auch Rechenzeit benötigt. Dies wird ein Grund für die relativ schwache Verbreitung sein.

Diese Sortierung nach der Größe erinnert stark an den Sortierungsprozess im Fast-Marching-Verfahren. Auch dort wird die als nächstes zu behandelnde Größe durch den (in diesem Fall minimalen Wert) eines bestimmten Indikators festgelegt. Daher wollen wir im folgenden das Gauß-Southwell-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme formulieren und weiter untersuchen.

Dies ist auf ganz natürliche Weise möglich. Es muss lediglich geklärt werden, welcher Ausdruck die Rolle des Residuums übernimmt.

Diskretisieren wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf einem Rechteckgitter mit Hilfe des Godunovflusses, so lautet das zu lösende Gleichungssystem $H^G(u_h) = 0$. Es ist also nur naheliegend das Residuum für eine Gitterstelle x_k durch

$$R(x_k) := H^G(x_k, u_h)$$

festzulegen (analog zum Residuum $r = Ax - b$ für das lineare System $Ax - b = 0$).

Wir formulieren nun das nichtlineare Gauß-Southwell-Verfahren gleich in einer dem Godunov-Fluss angepassten Art und Weise. Da die Veränderung eines Gitterwerts sich nur in den nichtlinearen Gleichungen seiner direkten Nachbarn bemerkbar macht, ist es dann auch nur dort nötig das Residuum neu zu bestimmen. Die Maximumssuche soll wie beim Fast-Marching-

Verfahren durch einen binären Heap organisiert werden. Wir erhalten also:

Algorithmus 5 : Nichtlineares Gauß-Southwell-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0, R(x) = 0 \forall x \in \Omega_h$

$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ C & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

Berechne das Residuum $R(x_{\mathcal{N}}) = H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(0)})$ der Nachbarn

$x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$ der Randpunkte

while $\max_k |R(x_k)| > \text{TOL}$ **do**

$i = i + 1, u_h^{(i)} = u_h^{(i-1)}$

 Bestimme $x_{\max} = \arg \left[\max_{x_k} |H^G(x_k, u_h^{(i)})| \right]$

 Löse die zugehörige Gleichung $H^G(x_{\max}, u_h^{(i)}) = 0; R(x_{\max}) = 0$

 Berechne das Residuum seiner Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_{\max})$:

$R(x_{\mathcal{N}}) = H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(i)})$

end

Hierbei ist es für die folgenden Betrachtungen wichtig, dass in der Initialisierung ein hinreichend großer endlicher Wert C gewählt wird, so dass der Initialisierungswert den Wert der Lösungsfunktion übersteigt. Für die Eikonalgleichung mit nichtverschwindender Geschwindigkeitsfunktion F muss somit gelten

$$C \geq \max_{x \in \partial\Omega} (g(x)) + \text{diam } \Omega \cdot \frac{1}{\min_{x \in \Omega} (F(x))}.$$

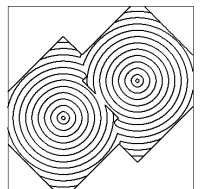
Zunächst wollen wir festhalten, dass das so definierte Verfahren konvergiert:

Satz 4.4. *Das nichtlineare Gauß-Southwell-Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten mit einer Approximation $u_h^{(m)}$ an u_h , für die $|H^G(u_h^{(m)})| < \text{TOL}$ gilt.*

Beweis.

Der Beweis lehnt sich an die Argumentation in den Beweisen zu [RT92, Thm. 3] und [BR06, Thm. 13] an.

In jedem Schritt des Verfahrens wird eine Gleichung gelöst. Für die Initialisierung gilt $H^G(u_h^{(0)}) \leq 0$. Wegen der Monotonie aus Lemma 3.2 muss u_h im ersten Lösungsschritt also sinken. Dabei wird — ebenfalls mit der Monotonie aus Lemma 3.2 — der Wert von H^G für die Nachbarn höchstens



kleiner werden. Induktiv können die Gitterwerte u_h also in jedem Schritt nur fallen.

Angenommen das Verfahren würde nicht terminieren, so gäbe es mindestens einen Punkt x_k , der unendlich oft upgedatet würde. Somit hätten wir eine monoton fallende Folge $(u_h^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist und damit konvergiert.

Mit der stetigen Abbildung $u_h \mapsto H^G(u_h)$ folgt aus der Konvergenz der $(u_h^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(H^G(u_h^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$. Da wir die Gleichung immer wieder lösen, erhalten wir eine Teilfolge, für die $(H^G(x_k, u_h^{(i)}))_{i \in I} = 0$ gilt. Damit konvergiert $H^G(x_k, u_h^{(i)}) \rightarrow 0$ und fällt also insbesondere irgendwann endgültig betragsmäßig unter die Schranke TOL, was einen Widerspruch darstellt. \square

Wie schon bemerkt weist das Vorgehen des Gauß-Southwell-Verfahrens eine starke Analogie zum Fast-Marching-Verfahren auf und wir werden im folgenden sehen, dass die beiden Verfahren für einen bestimmten Typ von Hamiltonfunktion übereinstimmen.

Dafür wollen wir zunächst eine vereinfachte Darstellung des Godunovflusses für diese Hamiltonfunktionen bereitstellen:

Lemma 4.5. *Es sei H eine Hamiltonfunktion der Form*

$$H(x, p) = f(\|p\|_\infty) - g(x)$$

mit f monoton steigend. Dann lautet die zugehörige Diskretisierung durch den Godunovfluß

$$\begin{aligned} H^G(x_k, u_h) &= f(\max_{1 \leq i \leq d} p_i) - g(x_k) \\ &\text{mit } p_i = \max(D_{x_i}^- u_h(x_k), -D_{x_i}^+ u_h(x_k), 0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Beweis. Nach Definition (3.1) gilt

$$\begin{aligned} H^G(u_h)_k &= \operatorname{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^- u_h(x_k), D_{x_1}^+ u_h(x_k)]} \dots \operatorname{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^- u_h(x_k), D_{x_d}^+ u_h(x_k)]} H(x_k, p) \\ &= \operatorname{ext}_{p_1 \in I[D_{x_1}^- u_h(x_k), D_{x_1}^+ u_h(x_k)]} \dots \operatorname{ext}_{p_d \in I[D_{x_d}^- u_h(x_k), D_{x_d}^+ u_h(x_k)]} [f(\|p\|_\infty) - g(x_k)] \end{aligned}$$

Nun sei p_j diejenige Richtung, in der das Maximum angenommen werde.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
H^G(u_h)_k &= \operatorname{ext}_{p_j \in I[D_{x_j}^- u, D_{x_j}^+ u]} [f(|p_j|) - g(x_k)] \\
&= \begin{cases} \min_{p_j \in [D_{x_j}^- u, D_{x_j}^+ u]} [f(|p_j|) - g(x_k)] & \text{falls } D_{x_j}^- u \leq D_{x_j}^+ u \\ \max_{p_j \in [D_{x_j}^+ u, D_{x_j}^- u]} [f(|p_j|) - g(x_k)] & \text{falls } D_{x_j}^+ u < D_{x_j}^- u \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(0) - g(x_k) & \text{falls } D_{x_j}^- u \leq 0 \leq D_{x_j}^+ u \\ f(D_{x_j}^- u_h) - g(x_k) & \text{falls } 0 < D_{x_j}^- u \leq D_{x_j}^+ u \\ f(D_{x_j}^+ u_h) - g(x_k) & \text{falls } D_{x_j}^- u \leq D_{x_j}^+ u < 0 \\ f(D_{x_j}^- u_h) - g(x_k) & \text{falls } D_{x_j}^+ u < D_{x_j}^- u \text{ und } |D_{x_j}^+ u| < |D_{x_j}^- u| \\ f(D_{x_j}^+ u_h) - g(x_k) & \text{falls } D_{x_j}^+ u < D_{x_j}^- u \text{ und } |D_{x_j}^+ u| > |D_{x_j}^- u| \end{cases} \\
&= f(\max(D_{x_j}^- u, -D_{x_j}^+ u, 0)) - g(x_k)
\end{aligned}$$

□

Desweiteren benötigen wir eine Aussage über das Verhalten der in Upwind-Richtung gelegenen Differenzenquotienten:

Lemma 4.6. *Betrachten wir $p_i = \max(D_{x_i}^- u_h(x_k), -D_{x_i}^+ u_h(x_k), 0)$ als Funktion von $u_h(x_k)$ mit festen Werten für die Nachbarn $u_h(x_k \pm he_i)$, so gilt mit $u_{k,\min} = \min(u_h(x_k + he_i), u_h(x_k - he_i))$*

$$p_i(u_h(x_k)) = \begin{cases} 0 & \text{für } u_h(x_k) \leq u_{k,\min} \\ \frac{1}{h}[u_h(x_k) - u_{k,\min}] & \text{für } u_h(x_k) > u_{k,\min} \end{cases}$$

Beweis. Für $u_h(x_k) \leq \min(u_h(x_{k+e_i}), u_h(x_{k-e_i}))$ gilt:

$$D_{x_i}^- u_h(x_k) = \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k - he_i)}{h} < 0$$

und

$$-D_{x_i}^+ u_h(x_k) = \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k + he_i)}{h} < 0$$

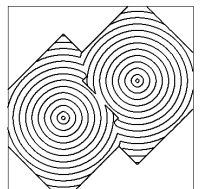
also $p_i(u_h(x_k)) = \max(D_{x_i}^- u_h(x_k), -D_{x_i}^+ u_h(x_k), 0) = 0$.

Für $u_h(x_k) > \min(u_h(x_k + he_i), u_h(x_k - he_i))$ gilt:

$$D_{x_i}^- u_h(x_k) = \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k - he_i)}{h}$$

und

$$-D_{x_i}^+ u_h(x_k) = \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k + he_i)}{h}$$



und mindestens einer der Quotienten ist > 0 , also insgesamt

$$\begin{aligned} p_i(u_h(x_k)) &= \max(D_{x_i}^- u_h(x_k), -D_{x_i}^+ u_h(x_k), 0) \\ &= \max\left(\frac{1}{h}[u_h(x_k) - u_h(x_k - he_i)], \frac{1}{h}[u_h(x_k) - u_h(x_k + he_i)]\right) \\ &= \frac{1}{h}[u_h(x_k) - u_{k,\min}] \end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage die eigentliche Äquivalenz zu formulieren und zu beweisen:

Satz 4.7. *Es sei H eine Hamiltonfunktion der Gestalt*

$$H(x, p) = f(\|p\|_\infty) - g(x),$$

die eine der zwei Bedingung erfüllt:

- f ist streng monoton steigend und $g \equiv \text{const.}$ ODER
- f ist streng linear steigend

H^G ist der zugehörige Godunov-Fluss. Dann gilt:

Die Reihenfolge, in der die einzelnen Gitterwerte beim Lösen von $H^G(u_h) = 0$ mittels des Gauß-Southwell-Verfahrens bestimmt werden, stimmt mit der Reihenfolge der Einordnung eines Punktes als Active im Fast-Marching-Verfahren überein.

Beweis. Der Beweis verläuft induktiv. \mathcal{T}_{FM} bezeichne die Menge der Trial-Gitterpunkte des Fast-Marching-Verfahrens und \mathcal{T}_{GS} die Gitterpunkte, für die $R > \text{TOL}$ im Heap des Gauß-Southwell-Verfahrens gilt.

Analog bezeichne \mathcal{A}_{FM} die Menge der Active-Gitterpunkte des Fast-Marching-Verfahrens und \mathcal{A}_{GS} die Menge der Punkte, deren zugehörigen Gleichungen im Gauß-Southwell-Verfahren schon gelöst wurden.

Induktionsanfang:

Nach der Initialisierung gilt $\mathcal{T}_{\text{GS}} = \mathcal{T}_{\text{FM}}$, $\mathcal{A}_{\text{GS}} = \mathcal{A}_{\text{FM}}$ und die Funktionswerte für alle Punkte in $\mathcal{A}_{\text{FM/GS}}$ stimmen überein.

Induktionsannahme:

Es gilt $\mathcal{T}_{\text{GS}} = \mathcal{T}_{\text{FM}}$, $\mathcal{A}_{\text{GS}} = \mathcal{A}_{\text{FM}}$ und die Funktionswerte für alle Punkte in $\mathcal{A}_{\text{FM/GS}}$ stimmen überein.

Induktionsschritt:

Es soll nun in beiden Verfahren ein Schleifendurchlauf durchgeführt werden.

Betrachten wir zunächst das Gauß-Southwell-Verfahren:

Es sei $x_k \in \mathcal{T}_{\text{GS}}$ der Punkt maximalen Residuums R_{max} , d.h. mit Lemma 4.5

$$\begin{aligned} R_{\text{max}} &= H^G(x_k, u_h) \\ &= f(D_{x_i}^* u_h(x_k)) - g(x_k) \end{aligned}$$

mit

$$D_{x_i}^* u_h(x_k) = \max\{D_{x_j}^- u_h(x_k), -D_{x_j}^+ u_h(x_k) \mid 1 \leq j \leq d\}$$

(Bei hinreichend großer Initialisierung von u_h können wir davon ausgehen, dass die Differenzenquotienten positiv sind).

Nun wollen wir zeigen, dass unter allen Punkten in \mathcal{T}_{GS} dies genau derjenige ist, der nach einem etwaigen Lösungsschritt den kleinsten Gitterfunktionswert zugewiesen bekommen würde:

Durch unsere Voraussetzung an f existiert die Umkehrabbildung f^{-1} und wir können schreiben:

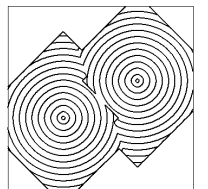
$$\begin{aligned} R_{\text{max}} &= f(D_{x_i}^* u_h(x_k)) - g(x_k) && \Leftrightarrow \\ R_{\text{max}} + g(x_k) &= f(D_{x_i}^* u_h(x_k)) && \Leftrightarrow \\ f^{-1}(R_{\text{max}} + g(x_k)) &= D_{x_i}^* u_h(x_k) = \frac{u_h(x_k) - u_h(x_k \pm h e_i)}{h} && (4.3) \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.6 fallen die finiten Differenzen $D_{x_j}^*$ bei einem Sinken von $u_h^{(0)}$ auf $u_h^{(1)}$ alle um denselben Betrag $\frac{1}{h}(u_h^{(0)} - u_h^{(1)})$. Damit bleibt die Ordnung der finiten Differenzen von klein nach groß nach einem Lösungsschritt erhalten und die Maximumwahl im Godunovfluß führt auf dieselbe Koordinatenrichtung und Orientierung wie das vor dem Lösen der Fall war. Also erhalten wir analog zu (4.3) nach dem Lösen:

$$f^{-1}(0 + g(x_k)) = D_{x_i}^* u_h(x_k) = \frac{u_h^{(1)}(x_k) - u_h(x_k \pm h e_i)}{h} \quad (4.4)$$

und es folgt aus (4.3) und (4.4) und mit der Initialisierung $u_h^{(0)}(x) = C \forall x \in \Omega_h$

$$\begin{aligned} u_h^{(1)}(x_k) &= C + h f^{-1}(g(x_k)) - h f^{-1}(R_{\text{max}} + g(x_k)) \\ &= \begin{cases} C - h f^{-1}(R_{\text{max}}) & f \text{ linear} \\ C + h f^{-1}(a) - h f^{-1}(R_{\text{max}} + a) & g \equiv a \end{cases} \\ \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} & \begin{cases} C - h f^{-1}(R(x_l)) & f \text{ linear} \\ C + h f^{-1}(a) - h f^{-1}(R(x_l) + a) & g \equiv a \end{cases} \\ &= C + h f^{-1}(g(x_l)) - h f^{-1}(R(x_l) + g(x_l)) \\ &= u_h^{(1)}(x_l) \end{aligned}$$



für alle Gitterpunkte $x_l \in \mathcal{T}$ und $R(x_l)$ dem zugehörigen Residuum.

Damit ist x_k die Stelle des größten Residuums, sofern wir uns im Ablauf des Gauß-Southwell-Verfahrens befinden und die Trial-Gitterwerte noch ihrer Initialisierung C entsprechen. Gleichzeitig ist x_k die Stelle des kleinsten Gitterwertes, sofern wir uns im Ablauf des Fast-Marching-Verfahrens befinden und alle Trial-Gitterwerte mindestens einmal durch Lösen der zugehörigen Gleichung berechnet haben. Damit wird in beiden Verfahren dieselbe Gitterstelle x_k aus der Menge der Trials ausgewählt und in die Menge der Active-Knoten eingestellt mit der damit verbunden Aufnahme der nicht-aktiven Nachbarn in die Trial-Menge. Somit gilt auch nach einem solchen Auswahlsschritt $\mathcal{T}_{GS} = \mathcal{T}_{FM}$ und $\mathcal{A}_{GS} = \mathcal{A}_{FM}$. Die Funktionswerte für alle Punkte in $\mathcal{A}_{FM/GS}$ stimmen überein, da in die Berechnung des hinzukommenden Punkts x_k nur die vorher schon übereinstimmenden Active-Werte eingegangen sind. Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen. \square

Damit erhalten wir natürlich sofort das Terminieren des nichtlinearen Gauß-Southwell-Verfahrens nach einem Gitterdurchlauf.

Korollar 4.8. Für eine Hamiltonfunktion H der Gestalt $H(x, p) = f(\|p\|_\infty) - g(x)$, die eine der zwei Bedingung erfüllt:

- f ist streng monoton steigend und $g \equiv \text{const.}$ ODER
- f ist streng linear steigend

und einer Diskretisierung durch den zugehörigen Godunov-Fluss H^G terminiert das nichtlineare Gauß-Southwell-Verfahren nach einem Lösungsdurchlauf.

Die Komplexität beträgt $\mathcal{O}(N \log N)$.

Beweis.

Dies ergibt sich sofort aus dem Verhalten des Fast-Marching-Verfahrens, das in Satz 4.2 beschrieben wird. \square

Das Gauß-Southwell-Verfahren berechnet also die Gitterwerte für bestimmte Hamiltonfunktionen in derselben Reihenfolge wie das Fast-Marching-Verfahren. Statt des bis zu viermaligen Lösens einer nichtlinearen Gleichung pro Gitterwert wird beim Gauß-Southwell-Verfahren jedoch nur einmal gelöst und dafür bis zu vier mal das Residuum bestimmt. Als einfache Funktionsauswertung wird dies in der Regel weniger Rechenzeit beanspruchen als das Lösen der diskreten Gleichung. Im Fall der Maximumnorm jedoch ist dieser Vorteil verschwindend.

Aber unter Umständen können wir diesen Vorteil im Fall anderer Normen trotzdem ausnutzen. Hier wird das Gauß-Southwell-Verfahren zwar nicht notwendigerweise nach einem Lösungsdurchlauf terminieren, sollte sich die Anzahl der weiteren Iterationen allerdings im Rahmen halten,

so wird es aber möglicherweise trotzdem schneller verlaufen als das Fast-Marching-Verfahren. In den folgenden Abschnitten werden wir von dieser Überlegung ausgehend weitere Verfahren, die ihren Iterationsverlauf durch den Wert der Residuen steuern, untersuchen und entwickeln.

An dieser Stelle soll noch einer anderen Fragestellung nachgegangen werden:

Ist es möglich die Definition bzw. die Anordnung der residualen Werte so zu verändern, dass das Gauß-Southwell-Verfahren auch für andere Hamiltonfunktionen mit dem Fast-Marching-Verfahren übereinstimmt.

Um diese Fragestellung zu beantworten wollen wir uns hier den Beweis zu Satz 4.7 veranschaulichen.

Der Grund, warum das Fast-Marching- und das Gauß-Southwell-Verfahren für die dort diskutierten Hamiltonfunktionen übereinstimmen, liegt darin, dass die Größe des Residuums eindeutig und monoton mit der Stärke der Korrektur des Funktionswertes zusammenhängt.

Betrachtet man im p -Raum die Residuums-Isoflächen, so stellt man fest, dass diese im Maximumsnormfall gerade mit den Isoflächen gleichen u -Abstandes zur Lösungsfläche übereinstimmen.

Betrachtet man andere als die Maximumsnorm, so ist das nicht mehr der Fall. Man kann sich nun aber natürlich überlegen, ob es sinnvoll ist, die Flächen gleichen u -Abstandes zu charakterisieren und als neues Maß für eine veränderte Residuumsdefinition zu benutzen.

Wir wollen dies hier exemplarisch für die Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{F(x)}$ im zweidimensionalen diskutieren.

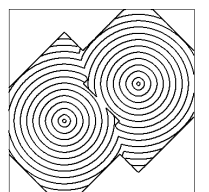
Wie wir im folgenden zeigen werden befinden sich all jene Punkte

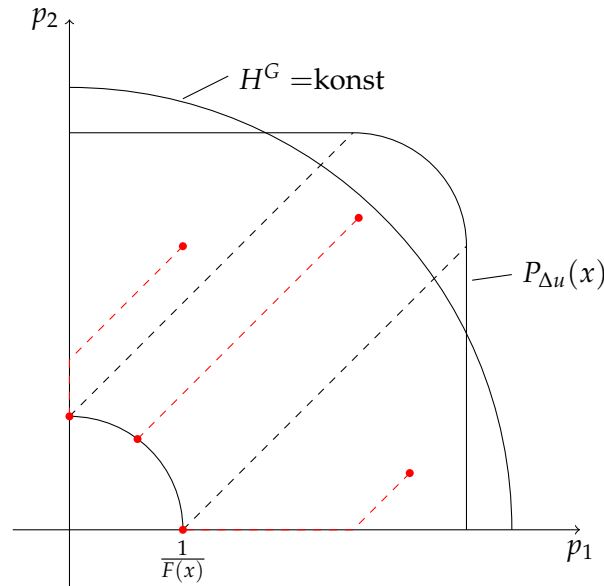
$$p = (\max(D_{x_1}^- u_h(x_k), -D_{x_1}^+ u_h(x_k), 0), \max(D_{x_2}^- u_h(x_k), -D_{x_2}^+ u_h(x_k), 0))^T,$$

die durch Absenken von $u_h(x_k)$ um ein konstantes Δu auf die Lösungskurve $H^G(x_k, u_h) = \|p\|_2 - \frac{1}{F(x_k)}$ abgebildet werden auf

$$P_{\Delta u}(x_k) := \left\{ \begin{array}{ll} \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{F(x_k)} + \frac{\Delta u}{h} \right) \\ t \end{array} \right), t \in [0, \frac{\Delta u}{h}] & \text{für } p_1 > p_2 + \frac{1}{F} \\ \left(\begin{array}{l} t \\ \left(\frac{1}{F(x_k)} + \frac{\Delta u}{h} \right) \end{array} \right), t \in [0, \frac{\Delta u}{h}] & \text{für } p_2 > p_1 + \frac{1}{F} \\ \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{F(x_k)} \cos(t) + \frac{\Delta u}{h} \right) \\ \left(\frac{1}{F(x_k)} \sin(t) + \frac{\Delta u}{h} \right) \end{array} \right), t \in [0, \frac{\pi}{2}] & \text{sonst} \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

$P_{\Delta u}$ ist in Abbildung 4.6 dargestellt.





• - - - • Beispielwege, entlang derer sich p für fallendes u bewegt

Abbildung 4.6: Darstellung der Lösungskurve, der Residuumsisolinie und $P_{\Delta u}$ für die Standard-Eikonalgleichung im p -Raum

Lemma 4.9. $P_{\Delta u}$ aus (4.5) ist die Kurve all jener Punkte, die bei einem Absenken von $u_h(x_k)$ um Δu bei gleichzeitigem Festhalten der Nachbarwerte $u_h(x_k \pm he_i)$ auf die Lösungskurve $H^G(x_k, u_h) = 0$ abgebildet werden.

Beweis. Sei also $p \in P_{\Delta u}$.

Fall 1: $p = (\frac{1}{F} + \frac{\Delta u}{h}, t)^T$, $t \in [0, \frac{\Delta u}{h}]$

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{1}{F} + \frac{\Delta u}{h}, t \right)^T, t \in \left[0, \frac{\Delta u}{h} \right] \\ &= (D_{x_1}^* u_h, D_{x_2}^* u_h)^T \\ &= \left(\frac{u_h^{(0)}(x_k) - u_h(x_k \pm he_1)}{h}, \frac{u_h^{(0)}(x_k) - u_h(x_k \pm he_2)}{h} \right)^T \end{aligned}$$

Sinkt nun u_h ab: $u_h^{(1)}(x_k) = u_h^{(0)}(x_k) - \Delta u$ so folgt

$$\begin{aligned}
p^{(1)} &= \left(\frac{u_h^{(0)}(x_k) - \Delta u - u_h(x_k \pm he_1)}{h}, 0 \right)^T \\
&= \left(\frac{u_h^{(0)}(x_k) - u_h(x_k \pm he_1)}{h} - \frac{\Delta u}{h}, 0 \right)^T \\
&= \left(\frac{1}{F} + \frac{\Delta u}{h} - \frac{\Delta u}{h}, 0 \right)^T \\
&= \left(\frac{1}{F}, 0 \right)^T
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| p^{(1)} \right\|_2 = \frac{1}{F}.$$

$$\text{Fall 2: } p = \left(t, \frac{1}{F} + \frac{\Delta u}{h} \right)^T, t \in [0, \frac{\Delta u}{h}]$$

Verläuft analog zu Fall 1.

$$\text{Fall 3: } p = \left(\frac{1}{F} \cos(t) + \frac{\Delta u}{h}, \frac{1}{F} \sin(t) + \frac{\Delta u}{h} \right)^T, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{1}{F} \cos(t) + \frac{\Delta u}{h}, \frac{1}{F} \sin(t) + \frac{\Delta u}{h} \right)^T, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
&= (D_{x_1}^* u_h, D_{x_2}^* u_h)^T \\
&= \left(\frac{u_h^{(0)}(x_k) - u_h(x_k \pm he_1)}{h}, \frac{u_h^{(0)}(x_k) - u_h(x_k \pm he_2)}{h} \right)^T
\end{aligned}$$

Sinkt nun u_h ab: $u_h^{(1)}(x_k) = u_h^{(0)}(x_k) - \Delta u$ so folgt

$$\begin{aligned}
p^{(1)} &= p - \left(\frac{\Delta u}{h}, \frac{\Delta u}{h} \right)^T \\
&= \left(\frac{1}{F} \cos(t), \frac{1}{F} \sin(t) \right)^T
\end{aligned}$$

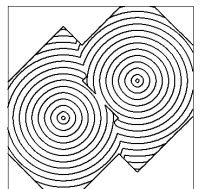
$$\Rightarrow \left\| p^{(1)} \right\|_2 = \frac{1}{F}.$$

Jeder Punkt $p \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{p \mid \|p\|_2 < \frac{1}{F}\}$ gehört einer Kurve $P_{\Delta u}$ an. Also wird die Menge aller Punkte gleichen u -Abstands zur Lösung von $P_{\Delta u}$ vollständig charakterisiert. \square

Wir könnten nun die Menge aller Punkte gleichen u -Abstandes zur Lösung mit Hilfe von $P_{\Delta u}$ charakterisieren. Wie man Abbildung 4.6 entnehmen kann, stimmt sie nicht mit der Residuums-Isolinie $H^G = \text{konst.}$ überein. Um eine zu Satz 4.7 vergleichbare Situation zu schaffen, müssen wir uns ein neues Residuum definieren, das für

$$p(x_k) = (\max(D_{x_1}^- u_h(x_k), -D_{x_1}^+ u_h(x_k)), 0, \max(D_{x_2}^- u_h(x_k), -D_{x_2}^+ u_h(x_k)), 0))^T$$

folgende Bedingungen erfüllt:



- $R(x_k) = \text{konst.}$ für alle x_k mit $p(x_k) \in P_{\Delta u}(x_k)$
- $R(x_1) < R(x_2)$ für $p(x_1) \in P_{\Delta u_1}(x_1)$, $p(x_2) \in P_{\Delta u_2}(x_2)$ mit $\Delta u_1 < \Delta u_2$

Definiert man sich

$$R(x) := \Delta u \text{ für } p(x) \in P_{\Delta u}(x),$$

so erhält man eine Abbildung, die das geforderte leistet. Ausgehend von $P_{\Delta u}$ in (4.5) erhält man so für die Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{F(x)}$ im zweidimensionalen

$$R(x_k) := \left\{ \begin{array}{ll} h \left(p_1(x_k) - \frac{1}{F(x_k)} \right) & \text{für } p_1(x_k) > p_2(x_k) + \frac{1}{F(x_k)} \\ h \left(p_2(x_k) - \frac{1}{F(x_k)} \right) & \text{für } p_2(x_k) > p_1(x_k) + \frac{1}{F(x_k)} \\ h \left(\frac{p_1(x_k) + p_2(x_k)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{F^2} - (p_1(x_k) - p_2(x_k))^2} \right) & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

Satz 4.10. *Definiert man als Residuum R nach (4.6), so verläuft im Fall der mit dem Godunovfluß diskretisierten Eikonalgleichung $\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{F(x)}$ das Gauß-Southwell-Verfahren in derselben Reihenfolge wie das Fast-Marching-Verfahren.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis in Satz 4.7. Im Induktionsschritt erhalten wir den Zusammenhang zwischen Residuum und u_h -Wert nach Konstruktion von (4.6) durch $R = u_h^{(0)} - u_h^{(1)}$. Damit folgt für die Stelle x_k des größten Residuums

$$\begin{aligned} u_h^{(1)}(x_k) &= C - R_{\max} \\ &= u_h^{(0)}(x_k) - R_{\max} \\ &\leq u_h^{(0)}(x_k) - R(x_k) \\ &= u_h^{(1)}(x_l) \end{aligned}$$

und somit können wir den Schritt analog zu Satz 4.7 abschließen. \square

Diese Untersuchung führt uns zwar auf eine veränderte Sichtweise für das Residuum, für die dann tatsächlich das Gauß-Southwell-Verfahren dem Fast-Marching-Verfahren entspricht. Jedoch ist diese veränderte Residuumsbestimmung genauso aufwendig wie das Lösen der diskreten Gleichung, so dass wir daraus keinen Vorteil mehr ziehen können.

Diese Äquivalenz bringt uns also nicht die erhofften Vorteile, da die Berechnung dieses modifizierten Residuums nicht billiger als der eigentliche Lösungsoperator zu erhalten ist.

Man kann natürlich weiterhin versuchen eine Abbildung R zu finden, die den geforderten Bedingungen genügt und eine leichte Berechnung ermöglicht. Da $P_{\Delta u}$ aber ein Kreissegment enthält, wird es wohl schwierig sein ein R zu finden, für das man auf das Wurzelziehen verzichten könnte.

4.5 Das adaptive Gauß-Southwell-Verfahren

Bei allen Vorteilen, die sich unter Umständen durch weniger Lösungsprozesse nichtlinearer Gleichungen ergeben, bleibt einem auch beim Gauß-Southwell-Verfahren ein Sortierungsprozess nicht erspart. In [BR06] wird vorgeschlagen ein adaptives Gauß-Southwell-Verfahren wie man es auch bei [PR93] findet zu verwenden. Dabei ist die Iterationsreihenfolge nicht mehr davon abhängig, welches der Residuen das Größte ist. Die Reihenfolge der Berechnung erfolgt nach dem FIFO-Prinzip. Nach der Berechnung eines Gitterwerts wird das Residuum für seine Nachbarn bestimmt. Ist es größer als die vorgegebene Toleranz, so wird der betroffene Nachbar in eine FIFO-Warteschlange zur Neuberechnung eingestellt. Damit erspart man sich die Maximumssuche.

Algorithmus 6 : Adaptives Southwell-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0, R(x) = 0 \forall x \in \Omega_h, \mathcal{S} = \emptyset$

$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ C & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

Berechne das Residuum $R(x_{\mathcal{N}}) = H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(0)})$ der Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$ der Randpunkte und stelle sie für $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ hinten in die FIFO-Warteschlange $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

while $\mathcal{S} \neq \emptyset$ **do**

$$i = i + 1, u_h^{(i)} = u_h^{(i-1)}$$

Entnehme das erste Element x_k : $\mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus x_k$

Löse die zugehörige Gleichung $H^G(x_k, u_h^{(i)}) = 0$

Berechne das Residuum seiner Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k)$ neu

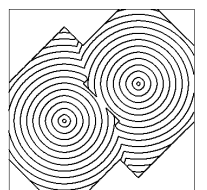
$$R(x_{\mathcal{N}}) = H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(i)})$$

Falls $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ und $x_{\mathcal{N}} \notin \mathcal{S}$: $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

end

Satz 4.11. Die Iterierten des adaptiven Gauß-Southwell-Verfahrens bilden eine monoton fallende Folge. Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten mit $|R| < \text{TOL}$.

Beweis. Der Beweis in [BR06] wird für die dort behandelte Lax-Hopf-Diskretisierung durchgeführt. Für den hier betrachteten Fall der Diskretisierung durch den Godunovfluß verläuft er analog zum Beweis der Konvergenz des Gauß-Southwell-Verfahrens in Satz 4.4. \square



Leider ist schon bei recht einfachen Beispielen zu beobachten, dass der Algorithmus nicht in den erhofften $\mathcal{O}(N)$ Schritten terminiert. Eines der Probleme, die sich ergeben ist das folgende: Wird an einem Punkt ein zu großes Residuum festgestellt, so wird zwar für die Problembeseitigung gesorgt, indem der Punkt in die Warteschlange gestellt wird, jedoch trägt er bis zum Zeitpunkt der Neuberechnung den falschen Wert und gibt ihn unter Umständen an seine Nachbarn weiter. So breitet sich der falsche Wert in das gesamte numerische Abhängigkeitsgebiet des Punktes aus und muss dann in dem gesamten Gebiet durch weitere Iterationen korrigiert werden. Solange dies lediglich an einer festen, von N unabhängigen, Anzahl von Gitterstellen auftritt, wirkt es sich noch nicht auf die Komplexität aus. Gibt es in dem zu Grunde liegenden Problem jedoch kontinuierliche Bereiche, in denen diese Problemstellen auftreten, so steigt die Anzahl der nötigen Nachiterationen mit N und wir erhalten kein $\mathcal{O}(N)$ -Verhalten mehr, sondern im zweidimensionalen das schon beim Gauß-Seidel-Verfahren beobachtete $\mathcal{O}(N^{1.5})$ Verhalten.

Exemplarisch stellt sich dieses Verhalten am Beispiel der Eikonalgleichung mit $F(x) = 2 - x_1$ und einpunktigem Randgebiet dar. In [Abbildung 4.7](#) sieht man den Höhenlinienplot der Lösungsfunktion, die auf einem 1000×1000 -Gitter berechnet wurde, sowie darüber gelegt die Anzahl an Lösungsiterationen, die pro Punkt benötigt wurden.

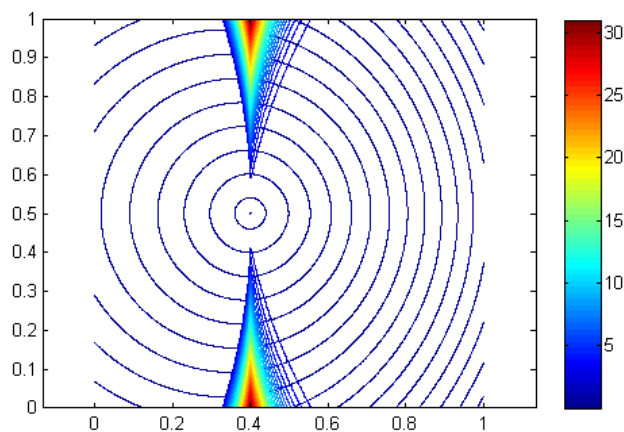


Abbildung 4.7: Anzahl der Iterationen über dem Höhenlinienplot der Lösung des Beispiels

Die „Iterationstreppen“, die man in der Abbildung beobachten kann sind typisch für das adaptive Southwell-Verfahren und steigen mit der Gittergröße an.

Der Übersichtlichkeit der Darstellung wegen, haben wir an dieser Stelle nur ein moderat schlechtes Beispiel gewählt. In anderen Fällen können die Problembereiche, in denen nachiteriert werden muss, größer sein als in diesem Fall.

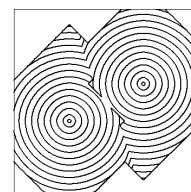
Der Vollständigkeit halber sei hier gesagt, dass die Problembereiche in Abbildung 4.7 von Charakteristiken der Lösung begrenzt werden, die sich zu einem Zeitpunkt tangential zu den Isolinien gleichen 1-Norm-Abstands zum Rand $\partial\Omega$ befunden haben. Ein Verständnis für diese Aussage werden wir in den Abschnitten 4.6 und 4.7 entwickeln.

Wir wollen versuchen das Verhalten der hintereinander durchlaufenden Nachiterationen zu vermeiden, dazu werden wir in den nächsten beiden Abschnitten Überlegungen anstellen. Dabei ist das selbstordnende Southwell-Verfahren im nächsten Abschnitt — wenn auch für manche Probleme effektiv — nur ein Zwischenschritt auf dem Weg zum Fast-Southwell-Verfahren in 4.7.

4.6 Das selbstordnende Southwell-Verfahren

Nach der Problembeschreibung, die wir im vorangegangenen Abschnitt durchgeführt haben, hat man schnell eine Idee zur Abhilfe entwickelt: Es muss dafür gesorgt werden, dass sich die schon als falsch erkannte Information nicht weiter ausbreiten kann. Sobald also ein Punkt berechnet werden soll, muss geprüft werden, ob einer seiner Nachbarn ein zu großes Residuum besitzt. Ist dies der Fall, so wird der Punkt (um Ausbreitung von falscher Information zu vermeiden) nicht berechnet, sondern wieder ans Ende der Warteschlange gestellt. Dieser erste einfache Ansatz erzeugt jedoch endlose Iterationen genau dann, wenn bei zwei direkt benachbarten Punkten ein zu großes Residuum festgestellt wurde. Dann würden diese Punkte sich immer wieder gegenseitig ans Ende der Schlange stellen.

Die Idee muss also noch verfeinert werden: Ein Nachbar mit zu großem Residuum breitet ja nur dann seinen Fehler zum zu berechnenden Punkt aus, falls dieser kausal von ihm abhängig ist. Wie wir aus den Betrachtungen in Abschnitt 4.2 wissen, ist für bestimmte HJG jeder Gitterwert nur von seinen kleineren Nachbarwerten abhängig. Deshalb werden wir einen Punkt nur dann wieder ans Ende der Schlange stellen, wenn einer der kleineren Nachbarwerte ein zu großes Residuum aufweist. Trägt ein größerer Nachbar ein zu großes Residuum, so werden wir den Punkt und seine Nachbarn



wechselseitig updaten. Der Algorithmus stellt sich also wie folgt dar:

Algorithmus 7 : Selbstordnendes Southwell-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0, R(x) = 0 \forall x \in \Omega_h, \mathcal{S} = \emptyset$

$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ C & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

Berechne das Residuum $R(x_{\mathcal{N}})$ der Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$ der Randpunkte und stelle sie für $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ von großem nach kleinem R hinten in die FIFO-Warteschlange $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

while $\mathcal{S} \neq \emptyset$ **do**

$$i = i + 1, u_h^{(i)} = u_h^{(i-1)}$$

Entnehme das erste Element x_k : $\mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus x_k$

if $|R(x_{\mathcal{N}})| < \text{TOL} \forall x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k)$ **then**

$$\quad \text{Löse } H^G(x_k, u_h^{(i)}) = 0$$

 Berechne das Residuum $R(x_{\mathcal{N}})$ der Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k)$

 Falls $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ und $x_{\mathcal{N}} \notin \mathcal{S}$: $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

else if $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ und $u_h(x_{\mathcal{N}}) < u_h(x_k)$ für ein $x_{\mathcal{N}}$ **then**

 Stelle das Element nach hinten in die Schlange:

$$\quad \mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus x_{\mathcal{N}}, \mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$$

else

$$\quad \text{Löse } H^G(x_k, u_h^{(i)}) = 0$$

$$\quad \text{Löse } H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(i)}) = 0 \forall x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k) \text{ mit } |R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$$

$$\quad \text{Löse erneut } H^G(x_k, u_h^{(i)}) = 0$$

 Berechne $R(x_{\mathcal{N}}) \forall x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k)$

 Falls $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ und $x_{\mathcal{N}} \notin \mathcal{S}$: $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

end

end

Auch dieser Algorithmus arbeitet noch nicht zufriedenstellend. Er stellt jedoch einen wichtigen Entwicklungsschritt hin zum Fast-Southwell-Verfahren im nächsten Abschnitt dar. Deshalb wollen wir sein Verhalten hier näher untersuchen und herausarbeiten.

Zunächst werden wir in den folgenden zwei Lemmata betrachten, wie sich der Algorithmus verhält, solange keine zu großen Residuen festgestellt werden.

Lemma 4.12. *Solange kein Punkt ein Residuum oberhalb der Toleranz aufweist, arbeitet der Algorithmus eine Warteschlange in FIFO-Struktur ab.*

Beweis. Es wird nur der erste Teil der if-Abfrage durchlaufen. Dieser realisiert eine FIFO-Warteschlange. \square

Lemma 4.13. *Solange das selbstordnende Southwell-Verfahren die Gitterpunkte in einer FIFO-Warteschlange abarbeitet, werden die Gitterwerte in aufsteigender Reihenfolge ihres 1-Norm-Abstandes zum Rand berechnet.*

Beweis. Der Beweis wird induktiv geführt. Wir werden zeigen:

Induktionsbehauptung: Zu jedem Zeitpunkt besteht die Warteschlange aus maximal zwei Komponenten. Im vorderen Teil der Schlange befinden alle noch nicht berechneten Gitterpunkte mit 1-Norm-Abstand d_1 zum Rand. Im möglicherweise anschließenden hinteren Teil der Schlange befinden sich nur Gitterpunkte, die sich im 1-Norm-Abstand $d_1 + h$ zum Rand befinden.

Induktionsanfang: Zunächst werden die Nachbarn der Randpunkte in die Warteschlange gestellt. Sie befinden sich alle im 1-Norm-Abstand h zum Rand.

Induktionsannahme: Die Induktionsbehauptung sei im n -ten Schritt wahr.

Induktionsschluss: Wir befinden uns in der Abarbeitung der Warteschlange. Der erste Eintrag ist ein Gitterpunkt x mit 1-Norm-Abstand

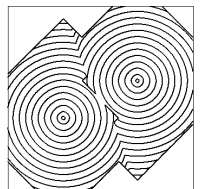
$$d_1 = \|x\|_{1,\partial\Omega_h} := \min_{\omega \in \partial\Omega_h} \|x - \omega\|_1 = \|x - \omega^*\|_1$$

zum Rand. Er wird berechnet und aus der Schlange entfernt. Anschließend werden die Nachbarn $x \pm he_i$ des Punktes betrachtet. Für sie gilt

$$\begin{aligned} \min_{\omega \in \partial\Omega_h} \|x \pm he_i - \omega\|_1 &\leq \|x \pm he_i - \omega^*\|_1 \\ &= \|x - \omega^*\|_1 \pm \|he_i\|_1 \\ &= d_1 \pm h. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme sind diejenigen Nachbarn, für die die Abschätzung $\|x \pm he_i\|_{1,\partial\Omega_h} \leq d_1$ gilt entweder schon berechnet oder sie befinden sich im vorderen Teil der Schlange. Es werden also nur Nachbarn ans Ende der Schlange gestellt, für die $\|x \pm he_i\|_{1,\partial\Omega_h} > d_1$ und mit der obigen Abschätzung also $\|x \pm he_i\|_{1,\partial\Omega_h} = d_1 + h$ gilt.

Nach dem $n + 1$ -ten Schritt besteht die Schlange also aus maximal zwei Komponenten. Im vorderen Teil befinden sich möglicherweise noch Punkte mit 1-Norm-Abstand d_1 zum Rand, im hinteren Teil sind nur Punkte mit 1-Norm-Abstand $d_1 + h$ zum Rand hinzugekommen. Sollten keine Punkte mit Abstand d_1 mehr in der Schlange vertreten sein, so besteht die Schlange nur aus Punkten mit dem 1-Norm-Abstand $d_{1,\text{neu}} = d_1 + h$ zum Rand. Dies sind in diesem Fall auch alle Punkte mit diesem Abstand, da sie als Nachbarn der zuvor vollständig in der Schlange enthaltenen d_1 -Abstands-Isolinie bestimmt worden sind.



Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und insgesamt ergibt sich, dass die Gitterpunkte aufsteigend nach ihrem 1-Norm-Abstand zum Rand in der Schlange abgearbeitet werden.

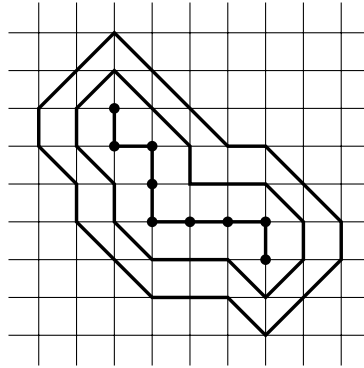


Abbildung 4.8: Randpunkte mit ihren zugehörigen 1-Norm-Abstandsisolinien

□

Dieser FIFO-Ablauf wird erst durch zu große Residuen unterbrochen. Wann dies im Modellfall $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ überhaupt nur erfolgen kann, ist im folgenden Lemma festgehalten:

Lemma 4.14. *Im Modellfall $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ werden während der Abarbeitung der FIFO-Warteschlange alle Gitterwerte korrekt berechnet, soweit nicht einer der folgenden beiden Fälle eintritt:*

- *Durch Diskretisierungsfehler werden Gitterwerte signifikant falsch berechnet*
- *Die Gitterwerte werden über einen Stoß hinweg berechnet*

Beweis. Nach Lemma 4.13 läuft der Algorithmus während der FIFO-Warteschlange die Gitterpunkte in 1-Norm-Isoabstandslinien zum Rand ab. Die Charakteristiken, entlang derer sich die Information ausbreitet, sind im Fall des Modellproblems Geraden, die senkrecht auf dem Rand stehen. Entlang dieser Geraden wächst der 1-Norm-Abstand kontinuierlich an. Wenn die Punkte in aufsteigender 1-Norm berechnet werden, passiert dies also in kausaler Abfolge entlang jeder Charakteristik.

Es gibt zwei denkbare Fälle, in denen diese Kausalität gestört wird.

Zum einen haben wir hier eine Betrachtung der kontinuierlichen Abhängigkeiten aufgestellt. Sollte durch die Diskretisierung ein signifikanter Fehler entstehen, so kann es dazu kommen, dass die Punkte zwar in ihrer kontinuierlich kausalen, aber nicht mehr in ihrer diskret kausalen Reihenfolge abgelaufen werden.

Zum anderen erhalten wir bei unserer Argumentation eine kausale Berechnung entlang jeder Charakteristik. Während dieses Ablaufens kann aber nicht erkannt werden, wann eine Charakteristik in einem Stoß endet. Ab diesem Zeitpunkt sind die fortlaufend berechneten Werte falsch. Erkannt wird dies erst, wenn zwei 1-Norm-Abstandsfronten aufeinander treffen. \square

Die Problemstellen 1.Art treten üblicherweise am Skelett der Lösung auf, insbesondere dort, wo die Charakteristiken sich im nahezu 90° Winkel treffen. Eine etwas eingehendere Untersuchung dieser Stellen wird im nächsten Abschnitt erfolgen.

Die Problemstellen 2.Art liegen nach der Argumentation im vorangegangenen Beweis genau zwischen dem 1-Norm- und dem 2-Norm-Skelett (Skelett der Lösung).

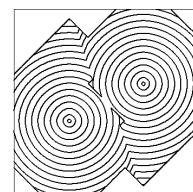
Treten im Verlauf des Algorithmus dann Residuen oberhalb der Toleranz auf, so wird durch die Abfrage der Größe der Gitterfunktionswerte eine zumindest lokale Ordnung in der Abarbeitung der Warteschlange von kleinen zu großen Gitterfunktionswerten hin durchgeführt. Wir haben die optimistische Hoffnung (die sich experimentell bestätigt), dass für Hamiltonfunktionen, die die Bedingung (4.1) erfüllen, durch diese kausale Ordnung nur $\mathcal{O}(N)$ Lösungsoperationen nötig werden. Aber auf Grund der zusätzlichen Schleifendurchläufe, die zur Ordnung nötig sind, erreichen wir für die Anzahl der Schleifendurchläufe nur schlechte $\mathcal{O}(N^2)$, da die Ordnung sehr ineffizient stattfindet.

Da die zusätzlichen „Ordnungsdurchläufe“ der Schleife weit weniger Zeit beanspruchen als das Lösen, ist dieses Verhalten für alle von uns gemachten Experimente zwar an der Zahl der Gesamtiterationen ablesbar, aber im Laufzeitverhalten nur für sehr große N ersichtlich. In Bereichen bis $N = 1500^2$, in denen wir Beispielrechnungen durchgeführt haben, ist es also durchaus eine Alternative zum Fast-Marching-Verfahren, genauere Betrachtungen entnimmt man Kapitel 5.

Wir können mit diesem Verhalten im Allgemeinen aber natürlich nicht zufrieden sein und werden daher im nächsten Abschnitt Abhilfe schaffen.

4.7 Das Fast-Southwell-Verfahren

Wir stellen hier nun einen Algorithmus vor, der die Vorteile des Southwell- und des Fast-Marching-Verfahrens zusammenführt und sich als strikte Kon-



sequenz aus den Analysen der letzten Abschnitte ergibt.

Algorithmus 8 : Fast-Southwell-Verfahren

Initialisiere das Lösungsfeld: $i = 0, R(x) = 0 \forall x \in \Omega_h, \mathcal{S} = \emptyset, \mathcal{T} = \emptyset$

$$u_h^{(0)}(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \partial\Omega_h \\ C & \forall x \in \Omega_h \end{cases}$$

Berechne das Residuum $R(x_{\mathcal{N}})$ der Nachbarn $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(\partial\Omega_h)$ der Randpunkte und stelle sie für $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$ von großem nach kleinem R hinten in die FIFO-Warteschlange $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$

```

while  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  do
   $i = i + 1, u_h^{(i)} = u_h^{(i-1)}$ 
  Entnehme das erste Element  $x_k$ :  $\mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus x_k$ 
  Löse  $H^G(x_k, u_h^{(i)}) = 0$ 
  for  $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_k)$  do
    if  $u_h(x_{\mathcal{N}}) = C, x_{\mathcal{N}} \notin \mathcal{S}$  then
       $\mathcal{S} = [\mathcal{S}, x_{\mathcal{N}}]$ 
    else
      Berechne  $R(x_{\mathcal{N}})$ 
      if  $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$  then
        Löse  $H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(i)}) = 0$ 
        Falls noch nicht im Heap:  $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup x_{\mathcal{N}}$ 
      end
    end
  end
end
end
Laufe den Heap ab : Fast-Marching mit TOL:
while  $\mathcal{T} \neq \emptyset$  do
   $i = i + 1, u_h^{(i)} = u_h^{(i-1)}$ 
  Finde  $\min_{x \in \mathcal{T}} u_h^{(i)}(x) = u_h^{(i)}(x_*)$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{T} \setminus x_*$ 
  for  $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(x_*)$  do
    Berechne  $R(x_{\mathcal{N}})$  if  $|R(x_{\mathcal{N}})| > \text{TOL}$  then
      Löse  $H^G(x_{\mathcal{N}}, u_h^{(i)}) = 0$ 
      Falls noch nicht im Heap:  $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup x_{\mathcal{N}}$ 
    end
  end
end
end

```

Wie wir in Lemma 4.14 gesehen haben, berechnet man im Fall des Modell-

problems über weite Strecken hinweg die korrekte Lösung und muss nur in beschränkten Bereichen nachiterieren. Im selbstordnenden Southwell-Verfahren werden diese Bereiche durch Lösung der betroffenen Gitterwerte von klein nach groß kausal berechnet. Jedoch wird dort die Ordnung in einer sehr ineffizienten Art und Weise vorgenommen. Die Idee des Fast-Southwell-Verfahrens ist nun jene:

Wir laufen zunächst das gesamte Gebiet in 1-Norm-Isolinien (durch eine FIFO-Warteschlange realisiert) ab. Jedes Mal wenn wir dabei einen Punkt mit zu großem Residuum feststellen, wird dieser gelöst und zur späteren Behandlung in einem Heap gespeichert. Nachdem wir das Gebiet durchlaufen haben, nehmen wir die als fehlerhaft festgestellten Punkte als Startwerte eines „kleinen“ Fast-Marching-Verfahrens über die Problembereiche. Sie werden in kausaler Reihenfolge abgelaufen und dabei festgestellte, fehlerbehaftete Nachbarn in den Heap eingestellt. So durchläuft der Fast-Marching gezielt nur die fehlerbehafteten Gebiete in kausaler Ordnung.

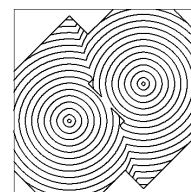
Wir erhalten durch Einsatz der Residuenberechnung und automatisiertem Ablaufen der direkten Nachbarn einen über weite Strecken ohne Sortierung und mit genau einem Lösungsprozess pro Gitterstelle auskommenen Algorithmus, der lediglich an den Grenzen der problematischen Bereiche den Fast-Marching-Algorithmus startet. Durch dieses Vorgehen reduzieren wir die Komplexität auf $\mathcal{O}(N + K \log K)$, wobei K problemabhängig ist und in einigen, speziellen Fällen auch Null sein kann. Für die Eikonalgleichung mit konstanter Geschwindigkeitsfunktion ist K gerade die Anzahl der Gitterpunkte, die sich im Bereich zwischen dem 2-Norm-Skelett und dem 1-Norm-Skelett befinden plus diejenigen Punkte, die auf Grund von Diskretisierungsfehlern nachiteriert werden müssen.

Das Daumenkino visualisiert gerade für ein solches Modellproblem den Berechnungsfortschritt des Fast-Southwell-Verfahrens.

Satz 4.15. *Für Hamiltonfunktionen, die die Eigenschaft (4.1) erfüllen, terminiert das Fast-Southwell-Verfahren nach $\mathcal{O}(N + K \log K)$ Operationen mit einer Approximation $u_h^{(n)}$ der Lösung, für die $|H^G(u_h^{(n)})| < \text{TOL}$ gilt. Dabei ist $K \leq N$ problemabhängig.*

Beweis. Der Algorithmus läuft alle N Gitterstellen genau einmal ab und löst dort die Gleichung. Hinterher wird an den Rändern der Gebiete, in denen bis jetzt falsche Werte berechnet wurden, der Fast-Marching-Algorithmus gestartet. Dieser terminiert nach $\mathcal{O}(K \log K)$ Operationen für ein Gebiet, das K Gitterpunkte enthält. Man erhält also $\mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(K \log K) = \mathcal{O}(N + K \log K)$ Operationen. \square

Zur weiteren Analyse des Algorithmus wollen wir hier zunächst noch einmal diejenigen Eigenschaften festhalten, die auch schon dem selbstordnenden Southwell-Verfahren zu eigen waren.



Lemma 4.16. *In der While-Schleife des Algorithmus werden die Gitterwerte in aufsteigendem 1-Norm-Abstand zum Rand berechnet.*

Beweis. Wie der Beweis im letzten Abschnitt zu Lemma 4.13. □

Lemma 4.17. *Im Modellfall $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ werden während der Abarbeitung der FIFO-Warteschlange alle Gitterwerte korrekt berechnet, soweit nicht einer der folgenden beiden Fälle eintritt:*

- *Durch Diskretisierungsfehler werden Gitterwerte signifikant falsch berechnet*
- *Die Gitterwerte werden über einen Stoß hinweg berechnet*

Beweis. Wie der Beweis im letzten Abschnitt zu Lemma 4.14. □

Um für den Modellfall die Komplexität noch besser abschätzen zu können, wollen wir die Größe der Problembereiche eingrenzen.

Fassen wir die geometrische Deutung aus Kapitel 3 wieder auf, so entspricht die Lösung der Godunov-Diskretisierung an einer Gitterstelle gerade der ersten Ankunft einer ebenen Wellenfront. Wie wir gesehen haben, kann der so berechnete Gitterwert in einigen Fällen deutlich von der kontinuierlichen Lösung abweichen. Wird in dieser Art und Weise ein Gitterwert deutlich zu klein berechnet, so werden Nachbarn im diskreten unter Umständen von ihm kausal abhängig, obwohl diese Abhängigkeit im Kontinuierlichen nicht besteht. Befinden sich diese Nachbarn z.B. in einer gemeinsamen 1-Norm-Abstandsisolinie zum Rand, so wirkt sich dies auf den Ablauf des Verfahrens aus. Das nächste Lemma beschreibt einen wichtigen Fall, in dem sich der Diskretisierungsfehler derart bemerkbar macht.

Lemma 4.18. *Im Modellproblem $\|\nabla u\|_2 = 1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ treten insbesondere dort Diskretisierungsfehler auf, die sich auf den Ablauf des Fast-Southwell-Verfahrens auswirken, wo sich in Achsenrichtung verlaufende Charakteristiken im 90° Winkel treffen.*

Beweis. Man betrachte Abbildung 4.9. Für das Modellproblem ergibt sich an der Stelle x_k die Lösung der diskreten Gleichung zu

$$u_h(x_k) = u_h(x_{k-e_2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{2}h,$$

wohingegen die kontinuierliche Lösung $u(x_k) = h$ lautet. Ganz allgemein gilt im Falle sich so treffender Charakteristiken $u_h(x_{k-e_2}) = u_h(x_{k-e_1})$. Die diskrete Lösung ergibt sich dann zu $u_h(x_k) = u_h(x_{k-e_2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}h$, wohingegen die kontinuierliche $u(x_k) = u(x_{k-e_2}) + h$ lautet. Betrachtet man über den Umweg der Lax-Hopf-Diskretisierung die geometrische Deutung der

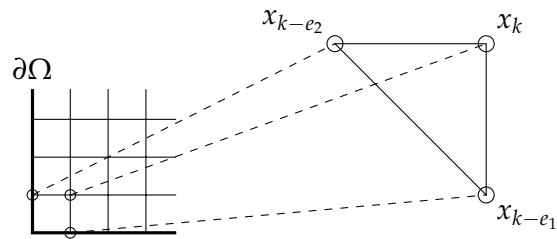


Abbildung 4.9: Gitterkonfiguration, bei der entscheidende Diskretisierungsfehler auftreten

diskreten Gleichung, so stellt man fest, dass die Ursache der Fehlberechnung hier in der falschen Schätzung der Richtung liegt. Wir haben zwar in diesem Fall wirklich eine ebene Wellenfront, die sich ausbreitet, aber die diskrete Lösungsformel betrachtet sie aus der Richtung der Winkelhalbierenden kommend und nicht aus zwei verschiedenen Richtungen. \square

Dieser Fehler tritt natürlich auch dann auf, wenn die Charakteristiken nicht genau in Achsrichtung laufen oder auch der Winkel etwas von 90° abweicht, aber der in obigen Lemma vorgestellte Fall erzeugt die größten Residuen in den Nachbarknoten. Im folgenden wollen wir sehen, wie weit sich dieser Diskretisierungsfehler ausbreitet und somit Nachiterationen hervorruft.

Werden im Modellproblem mit einem rechtwinkligen Randstück in Koordinatenrichtung die Nachbarpunkte des Skeletts vor den Skelettpunkten selber berechnet, so müssen sie auf Grund des Diskretisierungsfehlers im Skelett nachiteriert werden. Dabei breitet sich der Diskretisierungsfehler mit abnehmender Stärke so lange aus, bis sein Anteil das Residuum der nächsten Nachbarwerte nicht mehr über die Toleranz TOL anwachsen lässt.

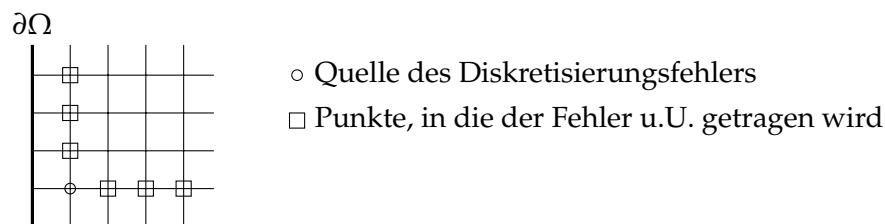
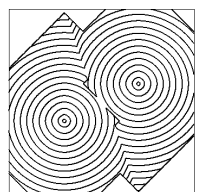


Abbildung 4.10: Ausbreitung der Diskretisierungsfehler

Wir wollen das weiter quantisieren: Betrachten wir den Informationsfluss in der ersten 1-Norm-Isolinie. Die Lösungsformel der diskreten Gleichung



für einen Punkt $x_{s,1} = (s, 1)h$ der Isolinie lautet

$$u_h(x_{s,1}) = \frac{u_h(x_{s-1,1}) + u_h(x_{s,0})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{F^2} - (u_h(x_{s-1,1}) - u_h(x_{s,0}))^2}$$

mit $F \equiv 1$ und $u_h(x_{s,0}) = 0$, also

$$u_h(x_{s,1}) = \frac{u_h(x_{s-1,1})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2h^2 - u_h(x_{s-1,1})^2}.$$

Die Folge der Nachbarwerte $(u_h(x_{s,1}))_s$ realisiert damit eine Fixpunktiteration der Funktion

$$f(u) = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2h^2 - u^2}$$

mit ihrem Fixpunkt $f(h) = h$. Für die Ableitung gilt

$$f'(u) = \frac{1}{2} - \frac{u}{\sqrt{2h^2 - u^2}},$$

die von $f'(0) = 0.5$ monoton auf $f'(h) = 0$ fällt.

Also ist f auf $[0, h]$ kontraktiv mit der Lipschitzkonstante $L = 0.5$. Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz (siehe z.B. [Zei93, Thm. 1.A]) folgt

$$|h - u_h(x_{s,1})| \leq \frac{L^s}{1 - L} |u_h(x_{1,1}) - u_h(x_{0,1})|.$$

Aber wir können an dieser Stelle noch bessere Abschätzungen treffen. Wegen $f'(h) = 0$ folgt mit Betrachtung der Taylorreihe von f und der Argumentation wie in [Zei93, §1.5] die quadratische Konvergenz der Iteration und wir erhalten als Abschätzung

$$|f(h) - f(u_h(x_{s,1}))| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2!} |h - u_h(x_{s,1})|^2 \text{ mit einem } \xi \in]0, h[$$

mit $f(h) = h$ und $u_h(x_{s,1}) = f(u_h(x_{s-1,1}))$ können wir diese Abschätzung auf die ersten Iterierten zurückführen.

$$|f(h) - f(u_h(x_{s,1}))| \leq \left(\frac{|f''(\xi)|}{2!} \right)^{2^{s+1}-1} |h - u_h(x_{0,1})|^{2^{s+1}} \text{ mit einem } \xi \in]0, h[.$$

Mit $f''(u) \leq \frac{1}{\sqrt{2}h}$ für $u \in [0, h]$ und $u_h(x_{0,1}) = 0$ folgt

$$|h - u_h(x_{s+1,1})| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^{s+1}-1} \cdot h.$$

Für das Residuum gilt

$$R(x_{s+1,1}) = H^G(x_{s+1,1}, u_h) = \left(\frac{h - u_h(x_{s+1,1})}{h} \right)^2 \stackrel{!}{<} \text{TOL}.$$

Also folgt

$$|u - u_h(x_{s+1,1})| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{2^{s+1}-1} \cdot h \stackrel{!}{<} h\sqrt{\text{TOL}}$$

und damit

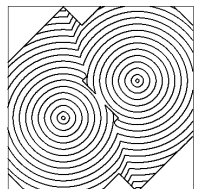
$$s \geq \log_2 \left(\frac{\ln(\sqrt{\text{TOL}})}{\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} + 1 \right) - 1.$$

Für $\text{TOL} = 10^{-8}$ folgt damit zum Beispiel $s \geq 3$, was die praktischen Erfahrungen mit Nachiterationen in den nächsten drei Nachbarn perfekt widerspiegelt.

Im Falle der nächsten Isolinien sind die Gitterfunktionswerte in den in y -Richtung gelegenen Nachbarknoten nicht mehr konstant, daher kann die eben betrachtete Fixpunktiteration nicht einfach auf die nächsten Isolinien übertragen werden. Aber wir haben einen Eindruck gewonnen, wie sich Diskretisierungsfehler im Modellproblem auf den Algorithmus auswirken. Desweiteren wissen wir aus der Diskussion des selbstordnenden Southwell-Verfahrens im vorangegangenen Abschnitt, dass die Problemgebiete, die durch das Berechnen über einen Stoß hinweg auftreten genau die Bereiche zwischen den 1- und 2-Norm-Skeletten sind.

Damit haben wir insgesamt eine Vorstellung davon, wie groß die Anzahl K der nachzuitierenden Punkte im Fast-Southwell-Verfahren für das Modellproblem ist.

Für nichtkonstante Geschwindigkeitsfunktionen ändert sich das zum einen dahingehend, dass jetzt der Bereich zwischen 1-Norm-Skelett und Lösungsskelett, der nachberechnet werden muss u.U. größer ist. Zum anderen werden in der Regel die Charakteristiken keine Geraden mehr sein. Dadurch stellt das Ablaufen der 1-Norm-Isolinien nicht mehr notwendig eine kausale Ordnung her, was bedeutet, dass sich der Bereich, in dem nachiteriert werden muss, vergrößert. Wir konnten das exemplarisch schon in Abbildung 4.7 im Abschnitt 4.5 beobachten, wo auf Grund von Charakteristiken, die keine Geraden mehr waren, Nachiterationen nötig wurden. Dort führte es im Gegensatz zum Fast-Southwell-Verfahren auf Grund des FIFO-Ablaufens des Gebiets zu einer stark ansteigenden Zahl an Nachiterationen.



4.8 Weitere Verbesserungsvorschläge und Anmerkungen

Aus der Analyse des Fast-Southwell-Verfahrens für die Eikonalgleichung mit konstanter Geschwindigkeitsfunktion weiß man, dass der Fast-Marching-Algorithmus nur auf dem Teil des Gebietes zum Laufen kommt, der zwischen dem Skelett der Lösung und dem Skelett der 1-Norm liegt. Dieser Bereich kann (muss aber nicht) bei großem Quotienten F_{\max}/F_{\min} ein nicht unerhebliches Gebiet beanspruchen. Wenn man nun das Ablaufen der Punkte in 1-Norm-Isolinien grob an die lokale Geschwindigkeit anpassen würde (dies geht immer nur grob in ganzzahligen F-Stufen), so würde jetzt die Nachiteration mittels des Fast-Marching-Verfahrens im Gebiet zwischen dem Skelett der Lösung und dem Skelett der 1-Norm-Eikonalgl. mit entsprechend variierender Geschwindigkeitsfunktion liegen. Im Extremfall könnte man den Bereich so vollständig eliminieren, ansonsten sicher jedoch einschränken.

Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= \frac{1}{F(x)} & x \in]0,1[^2 \\ u(x) &= 0 & x \in \{0 \times]0,1[\} \cup \{1 \times]0,1[\} \end{aligned}$$

mit

$$F(x) := \begin{cases} 2 & \text{für } x_1 \leq 2/3 \\ 1 & \text{für } x_1 > 2/3 \end{cases}$$

Die vom rechten und linken Rand loslaufenden Charakteristiken treffen sich in $x = 2/3$, die Berechnungsfronten im Fast-Southwell-Verfahren hingegen treffen sich in $x = 1/2$. Es muss also im Gebiet zwischen $x = 1/2$ und $x = 2/3$ nachiteriert werden.

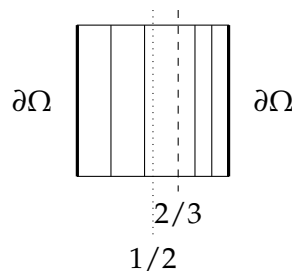


Abbildung 4.11: Höhenlinien der Lösung des betrachteten Beispiels

Würde man nun im Gebiet mit $F = 2$ nicht nur die direkten Nachbarn eines Punktes in die Warteschlange stellen, sondern auch die Nachbarsnachbarn, so würde man — der Geschwindigkeit entsprechend — mit der

Berechnung doppelt so schnell voranschreiten und die Berechnungsfronten würden sich in $x = 2/3$ treffen. Es wäre keine Nachiteration nötig.

Es ist auch denkbar die Nachiteration nicht mit der Standard-Implementierung des Fast-Marching-Verfahrens durchzuführen, sondern den Vorschlag in [Kim01] oder [YBS06] zur $\mathcal{O}(N)$ -Implementation geeignet modifiziert zu verwenden. Dadurch würde man unter Umständen nicht nur Rechenzeit einsparen, sondern auch die Komplexität auf $\mathcal{O}(N)$ reduzieren können.

Zu guter Letzt wollen wir noch einen Blick auf das Verhalten der Algorithmen für die Kugelwellendiskretisierung werfen.

Da man für die Kugelwellendiskretisierung nicht mehr dasselbe monotone Verhalten wie für den Godunov-Fluss garantieren kann, liefert das Fast-Marching-Verfahren nicht mehr notwendigerweise nach einem Durchlauf eine Lösung der diskreten Gleichung. Modifiziert man das Fast-Marching-Verfahren hin zu einem iterativen Verfahren mit geeignetem Abbruchkriterium — wie wir es schon für das Fast-Southwell-Verfahren getan haben — so können wir es natürlich zur Lösung der Fixpunktgleichung heranziehen.

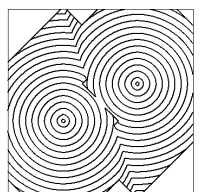
Nicht nur hier, sondern auch für die anderen Verfahren ist es also grundlegend das Residuum für dieses anders geartete nichtlineare Gleichungssystem festzulegen. Auf Grund der Struktur in Form einer Fixpunktgleichung $u_h = \Lambda_{h,K} u_h$ ergibt sich natürlicherweise

$$R(x_k) := (u_h - \Lambda_{h,K} u_h)(x_k) \quad (4.7)$$

als Residuum.

Dies hat ein anderes Verhalten als das Residuum, das wir durch den Godunovfluß definiert haben. In speziellen Fällen kann es natürlich sinnvoll sein, das Residuum auf eine andere Weise zu definieren. Wir wollen uns hier auf diese allgemein mögliche Definition beschränken.

A priori können wir feststellen, dass uns die Berechnung des Residuums keine Vorteile gegenüber dem ursprünglichen Lösungsprozess verschafft, denn die Berechnung $R = u_h^{(n)} - \Lambda_h u_h^{(n)} = u_h^{(n)} - u_h^{(n+1)}$ erfordert genau dieselben Operationen wie ein Schritt der Fixpunktiteration selbst. Aber es liefert uns einen Indikator, wie nahe wir schon dem eigentlichen Fixpunkt des Systems sind und wir erhoffen uns damit ein gutes Verhalten der besprochenen Algorithmen auch für die Kugelwellendiskretisierung.



Kapitel 5

Numerische Beispiele

Diese Arbeit soll durch ausgewählte numerische Experimente beschlossen werden, in denen die Vor- und Nachteile der neu eingeführten Diskretisierung sowie des neuen Algorithmus dargestellt werden. Die C-Programme mit mex-Anbindung an Matlab, die zur Berechnung verwendet wurden, liegen der Dissertation auf einer CD bei.

Die Berechnungen wurden alle auf einem IBM ThinkPad R50p mit Intel Pentium M 1.7 GHz Prozessor und 1GB Arbeitsspeicher unter Matlab 2007b durchgeführt.

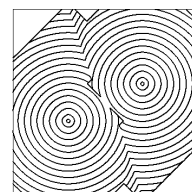
5.1 Verhalten des Fast-Southwell-Verfahrens

In diesem Abschnitt soll das Verhalten des Fast-Southwell-Verfahrens näher betrachtet werden. Wir werden uns an dieser Stelle darauf einschränken die Diskretisierung durch den Godunov-Fluss zu verwenden, um insbesondere das vorhergesagte Iterationsverhalten beobachten zu können. In den folgenden Abschnitten 5.2 und 5.3 wird dann das Fast-Southwell-Verfahren auch für die Kugelwellendiskretisierung verwendet. Zunächst wird das Fast-Southwell-Verfahren in zwei Beispielen nur mit seinem direkten Konkurrenten dem Fast-Marching-Verfahren verglichen. In weiteren zwei Beispielfällen dann auch mit den anderen Verfahren, insbesondere wird auch ein Fall behandelt, in dem das Fast-Marching-Verfahren nicht ohne Modifikation anwendbar ist.

Aus der Analyse in Abschnitt 4.7 wissen wir, dass für das Modellproblem der Eikonalgleichung

$$\|\nabla u\|_2 = 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

im Fast-Southwell-Verfahren nur in der Umgebung von Skelettpunkten und zwischen 1-Norm- und 2-Norm-Skelett Nachiterationen auftreten. Daher



beginnen wir mit dem vielversprechenden Beispiel

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= 1 \quad \text{auf }]0,1[^2 \\ u(0.5,0.5) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

für das wir keine Nachiterationen erwarten dürfen.

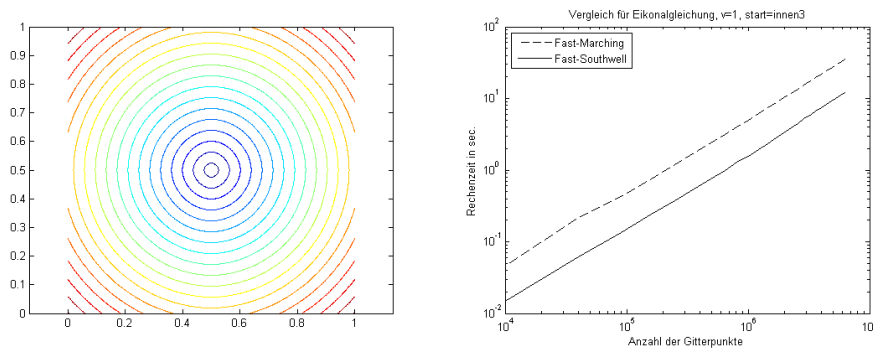


Abbildung 5.1: Zu Beispiel (5.1). Links: Höhenlinienplot der Lösung. Rechts: Rechenzeitverhalten.

Wie der rechte Plot in Abbildung 5.1 zeigt, verläuft das Fast-Southwell-Verfahren schneller als das Fast-Marching-Verfahren. In diesem einfachen Beispiel verläuft die Berechnung mit dem Fast-Southwell-Verfahren um ca. Faktor 3.2 schneller. Die Anzahl der Lösungsiterationen liegt für jeden Gitterpunkt wie erwartet bei 1.

Als nächstes wenden wir uns einem Beispiel zu, für das wir Nachiterationen erwarten dürfen. Es wird wieder die Eikonalgleichung betrachtet, diesmal in der Form

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= 1 \quad \text{auf }]0,1[^2 \\ u(0.3,0.4) &= 0 \quad u(0.7,0.6) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

also mit anderer Randkonfiguration. Hier treten Skelettpunkte auf und es existiert ein nichtleerer Bereich zwischen 1-Norm- und 2-Norm-Skelett.

In Abbildung 5.2 sind die Höhenlinien der Lösung geplottet. Zusätzlich liegt darüber der Höhenlinienplot für die Anzahl der Iterationen für jeden einzelnen Gitterpunkt. Der Bereich zwischen den gelben respektive roten Linien wird also 2 bzw. 3 mal berechnet, während auf dem restlichen Gebiet nur einmal gelöst werden muss. Wie man sieht finden die zusätzlichen Iterationen genau in den Bereichen zwischen 1-Norm- und 2-Norm-Skelett statt.

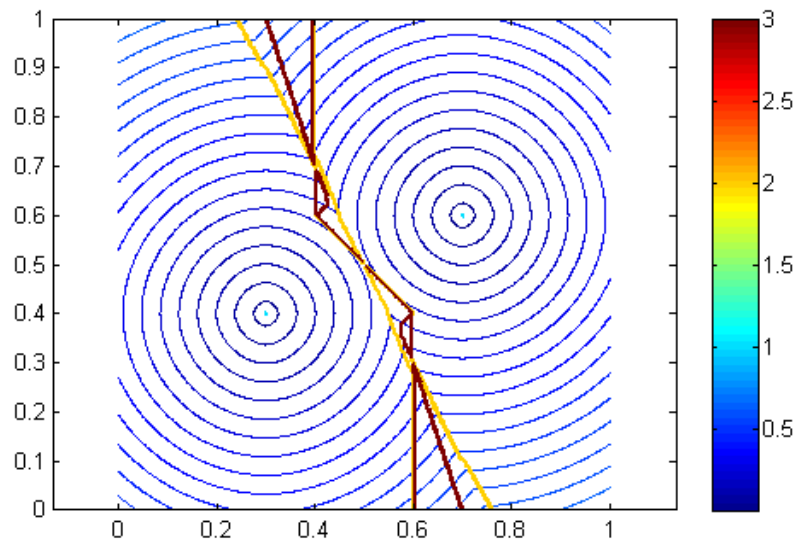


Abbildung 5.2: Zu Beispiel (5.2). Höhenlinienplot der Lösung mit Iterationszahl

Wie in Abbildung 5.3 zu erkennen, behält auch für dieses Beispiel das Fast-Southwell-Verfahren seinen Geschwindigkeitsvorteil, diesmal ist es um ca. Faktor 2.6 schneller.

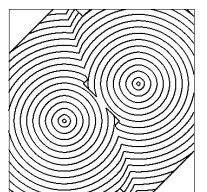
Verlassen wir nun das einfache Modellproblem und versuchen die Bereiche, in denen Nachiterationen auftreten zu vergrößern, um das Fast-Southwell-Verfahren an seine Grenzen zu führen. Dazu betrachten wir die Eikonalgleichung nun mit nichtkonstanter Geschwindigkeitsfunktion und veränderter Randgeometrie.

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= \frac{1}{F(x)} \quad \text{auf }]0,1[^2 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit $F(x) = 1 + x_1$ und $\partial\Omega$ der Berandung eines L-förmigen Gebiets.

Der Höhenlinienplot der Lösung ist zusammen mit der Anzahl der Iterationen für das Fast-Southwell-Verfahren in Abbildung 5.4 dargestellt.

Wie man erkennt, sind nun auf Grund der nicht länger konstanten Geschwindigkeitsfunktion in größeren Bereichen Nachiterationen nötig.



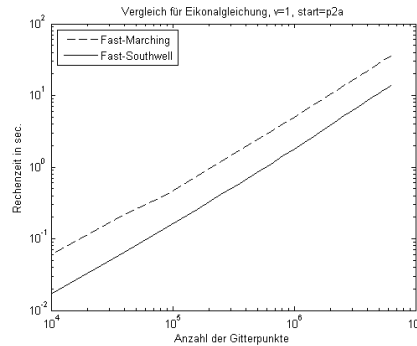


Abbildung 5.3: Zu Beispiel (5.2). Rechenzeitverhalten

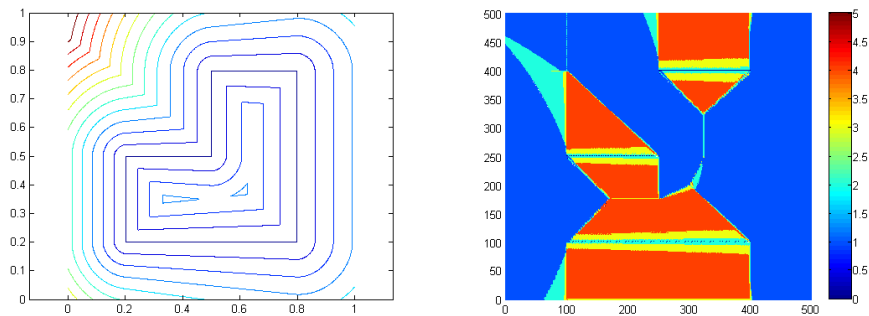


Abbildung 5.4: Zu Beispiel (5.3). Links: Höhenlinienplot der Lösung. Rechts: Anzahl der Iterationen pro Gitterpunkt

In den Laufzeitvergleich in Abbildung 5.5 haben wir nun auch die anderen Verfahren mit einbezogen. Wie man sieht, hat auch hier noch (trotz der großen Gebiete, auf denen Nachiterationen nötig sind) das Fast-Southwell-Verfahren einen Vorteil gegenüber dem Fast-Marching-Verfahren, der sich etwa im Bereich von Faktor 1.5 befindet. Das Fast-Sweeping-Verfahren verläuft vergleichbar schnell. Beim adaptiven Southwell-Verfahren machen sich die wiederholenden Nachiterationen über große Bereiche nachteilig bemerkbar.

Als abschließendes Beispiel in diesem Abschnitt betrachten wir nun eine Problem, auf das das Fast-Marching-Verfahren nicht mehr anwendbar ist.

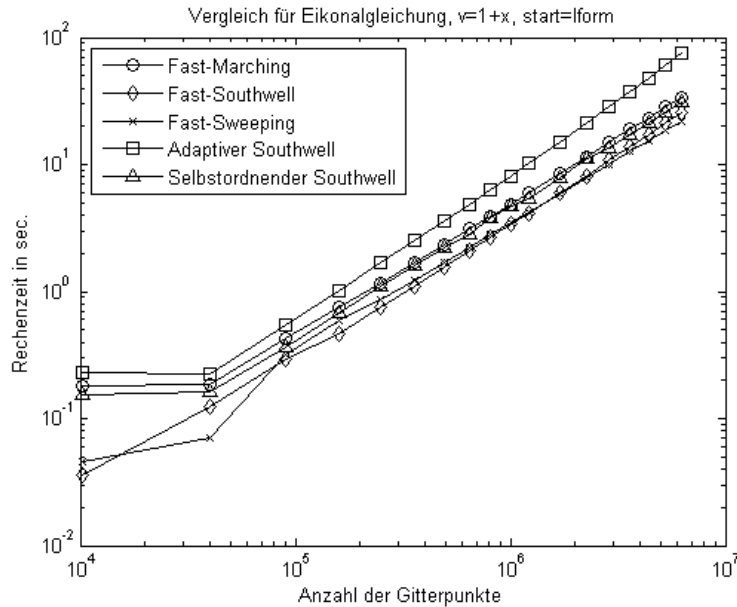


Abbildung 5.5: Zu Beispiel (5.3). Laufzeitverhalten

Wir lösen

$$\begin{aligned} H(x, \nabla u) &= 0 \quad \text{auf }]0, 1[^2 \\ u(0.5, 0.5) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

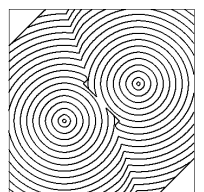
mit

$$H(x, p) = (p_1 p_2) \begin{pmatrix} a & -c \\ -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - 1$$

mit $a = b = 2, c = 1$.

Diese Gleichung erfüllt nicht mehr die Bedingung (4.1), kann aber natürlich mit dem Godunov-Fluss diskretisiert werden. Die Lösung der diskreten Gleichungen $H^G(x_k, u_h) = 0$ wird hierbei mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmt.

Abbildung 5.6 zeigt den Höhenlinienplot der Lösung und Abbildung 5.7 die Konvergenzverläufe der einzelnen Verfahren. Auch hier zählt das Fast-Southwell-Verfahren zu den Leistungsfähigsten, wobei die Konkurrenten um Platz 1 nun gewechselt haben. Das adaptive Southwell-Verfahren verläuft für dieses Problem nahezu mit identischen Rechenzeiten wie das Fast-Southwell-Verfahren, wohingegen hier das Fast-Sweeping-Verfahren schlechter abschneidet. Beim selbstordnenden Southwell-Verfahren können wir ab einer Gittergröße von 1500×1500 deutlich erkennen, wie sich der ungünstige Sortierungsprozess bemerkbar macht.



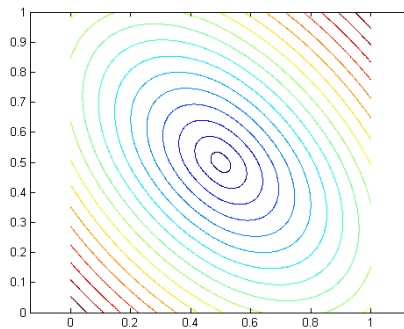


Abbildung 5.6: Zu Beispiel (5.4). Höhenlinienplot der Lösung

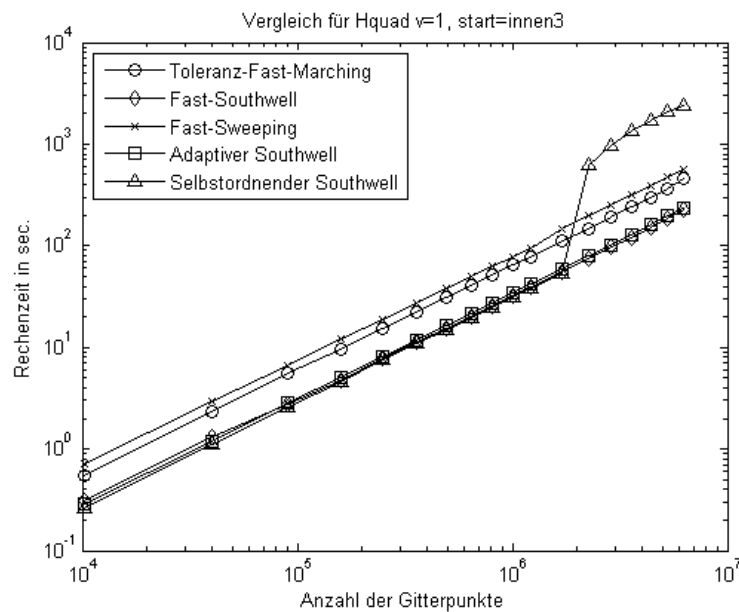


Abbildung 5.7: Zu Beispiel (5.4). Laufzeitverhalten

Prinzipiell sind die beiden letzten Beispiele typisch in dem Sinn, dass das Fast-Southwell-Verfahren in allen unseren Experimenten zu den besten Verfahren gehört, aber seine direkten Konkurrenten um Platz 1 wechseln problemabhängig. Das Fast-Southwell-Verfahren ist also universell zum Einsatz zu empfehlen.

5.2 Verhalten der Kugelwellendiskretisierung

Nachdem die Berechnungen im letzten Abschnitt mit Hilfe des Godunov-Flusses durchgeführt wurden, wollen wir uns nun dem Verhalten der Kugelwellendiskretisierung zuwenden.

Dabei werden wir natürlich nur für solche Beispiele verbesserte Ergebnisse erhalten können, bei denen die Höhenlinien der Viskositätslösung Krümmungen aufweisen. Dies wird daher bei den beiden ausgewählten Beispielen der Fall sein.

Als erstes betrachten wir die Eikonalgleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2 &= \frac{1}{F(x)} \quad \text{auf }]0,1[^2 \\ u(0.5,0.5) &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

mit $F(x) = 2\sqrt{2-r}$ mit $r = \|x - (0.5, 0.5)^T\|_2$. Die zugehörige Viskositätslösung lautet $u(x) = \sqrt{2} - \sqrt{2-r}$.

Da für die Godunovdiskretisierung der Eikonalgleichung eine explizite Lösungsformel existiert, der Update durch die Kugelwellendiskretisierung aber ein Lösungsprozess mittels des Newton-Verfahrens benötigt, werden wir in solchen Fällen zwar eine Verringerung des Fehlers bei selber Gitterweite, aber nicht unbedingt bei selber Rechenzeit erwarten dürfen.

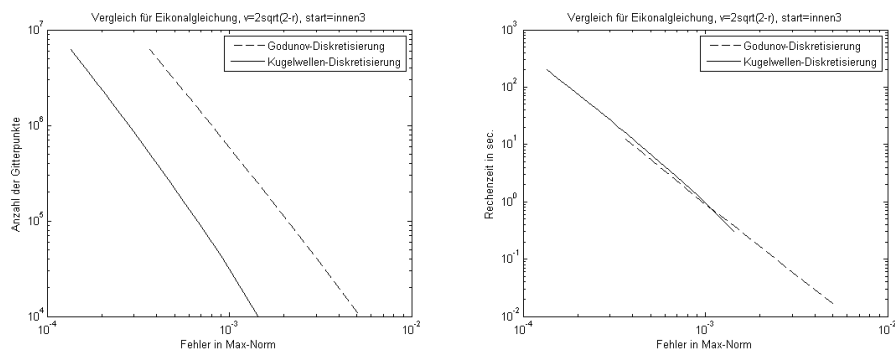
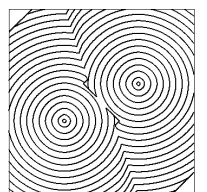


Abbildung 5.8: Zu Beispiel 5.5. Konvergenzverläufe

Die Konvergenzplots in Abbildung 5.8 bestätigen diese Erwartung, zeigen aber auch die deutliche Verringerung des Fehler bei gleicher Gitterweite.

Um ein Beispiel vorzustellen, bei der sich diese deutliche Verbesserung auch in den Fehler-Rechenzeit-Plots widerspiegelt, wollen wir als zweites Beispiel die Hamiltonfunktion aus Beispiel (5.4) wieder heranziehen, da



für diese auch die diskreten Gleichungen, die aus dem Godunov-Fluss resultieren mit Hilfe eines Näherungsverfahrens gelöst werden müssen. Wir betrachten also

$$\begin{aligned} H(x, \nabla u) &= 0 \quad \text{auf }]0, 1[^2 \\ u(0.5, 0.5) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit

$$H(x, p) = (p_1 p_2) \underbrace{\begin{pmatrix} a & -c \\ -c & b \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - 1$$

mit $a = b = 2, c = 1$ und der zugehörigen Viskositätslösung

$$u(x) = \left\| x - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\|_{M^{-1}}.$$

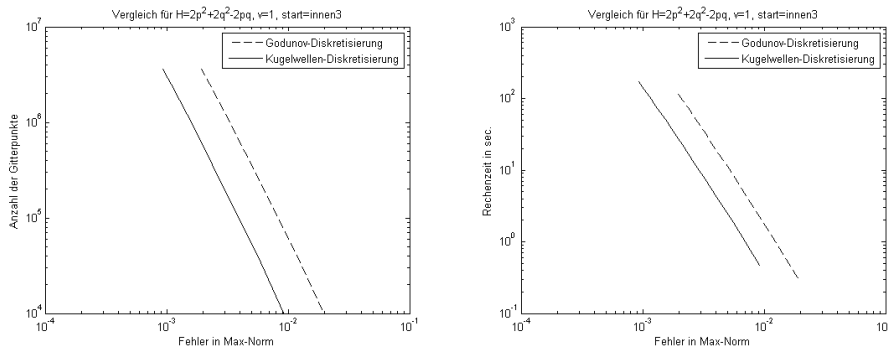


Abbildung 5.9: Zu Beispiel 5.6. Konvergenzverläufe

Die Konvergenzplots in Abbildung 5.9 bestätigen das gute Verhalten der Kugelwellendiskretisierung nun auch im Rechenzeitvergleich.

Für alle Berechnungen dieses Abschnitts wurde das Fast-Southwell-Verfahren verwendet.

5.3 Kürzeste Wege auf Manigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir uns ein Stück von dem modellhaften Charakter der bisher behandelten Beispiele lösen. In [TCOZ03] wurde aufgezeigt, wie es möglich ist, durch die Variation der Hamiltonfunktion die

kürzesten Laufzeiten auf Manigfaltigkeiten zu bestimmen. Der dort verwendete Ansatz erzeugt Hamiltonfunktionen

$$H((x, y), p) = p^T \begin{pmatrix} a & -c \\ -c & b \end{pmatrix} p - \frac{1}{F(x, y)},$$

deren Koeffizienten a, b und c durch die Funktion $f(x, y)$, auf deren Fläche die Ausbreitungszeiten gemessen werden sollen, bestimmt werden. Explizit lautet die Darstellung

$$a = 1 - \frac{f_x^2}{f_x^2 + f_y^2 + 1}, \quad b = 1 - \frac{f_y^2}{f_x^2 + f_y^2 + 1} \quad \text{und} \quad c = \frac{f_x f_y}{f_x^2 + f_y^2 + 1}.$$

Wir wollen hier die Laufzeiten auf der Eierdeckelfunktion

$$f(x, y) = \cos(4\pi x - \pi) \sin(4\pi y - 0.5\pi)$$

mit Start in $(0.5, 0.5)^T$ bestimmen.

Es geht also um die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} H((x, y), \nabla u) &= 0 \quad \text{auf }]0, 1[^2 \\ u(0.5, 0.5) &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

mit $F = 1$ und den Koeffizienten a, b und c durch die Eierdeckelfunktion f festgelegt.

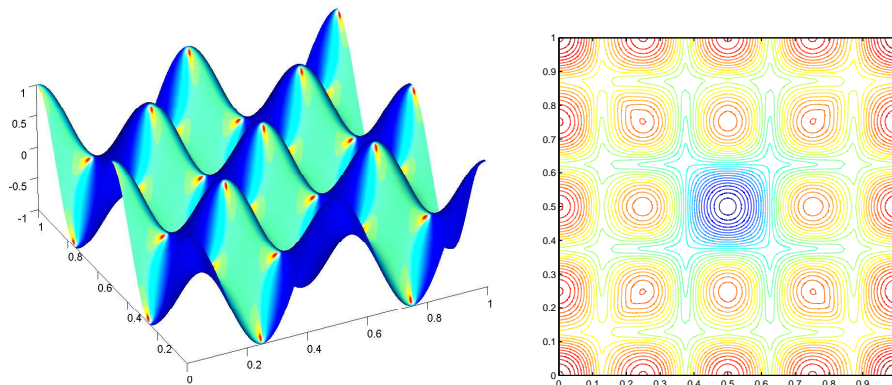
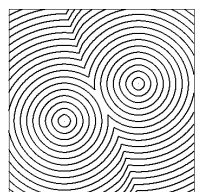


Abbildung 5.10: Zu Beispiel (5.7). Links: Eierdeckelfunktion f . Rechts: Höhenlinienplot der Lösung.

Abbildung 5.10 zeigt rechts den Höhenlinienplot der Lösung. Wie man leicht erkennt, treten auch hier starke Krümmungen auf und wir wollen



das Verhalten von Godunov- und Kugelwellendiskretisierung anhand dieses Beispiels vergleichen und erwarten natürlich ein besseres Verhalten für die Kugelwellendiskretisierung.

Um die beiden Diskretisierungen in ihrem Fehlerverhalten vergleichen zu können, wurde zunächst eine Lösung auf einem 2401×2401 Gitter berechnet und als Referenzlösung verwendet. Die Konvergenzverläufe zeigen also den Fehler in Bezug auf diese Referenzlösung. Dabei wurden die diskreten Gleichungen auf Gittern bis zur Größe 401×401 berechnet. Es

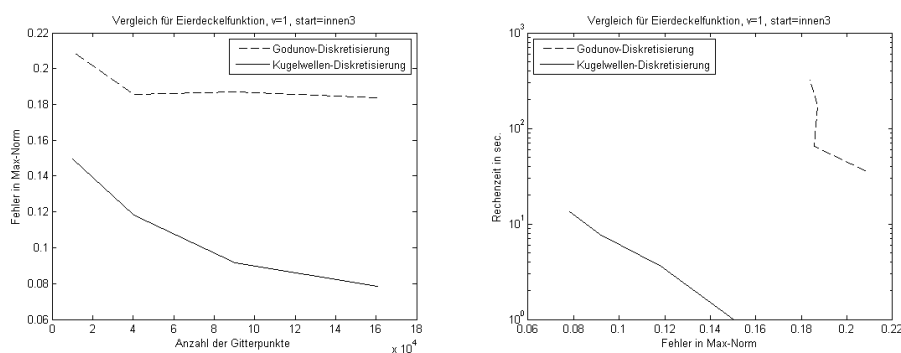
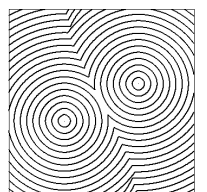


Abbildung 5.11: Zu Beispiel (5.7). Links: Fehler über Anzahl der Gitterpunkte. Rechts: Rechenzeit über Fehler.

verwundert nicht, dass die Kugelwellendiskretisierung hier deutlich besser abschneidet. Leider stagniert die Lösung der Godunov-Diskretisierung hierbei auf einem schlechten Niveau und es war nicht möglich, in den Konvergenzbereich vorzudringen. Aber die Erfahrung aus den letzten Abschnitten und der Eindruck, den wir für die kleinen Gitter in diesem Beispiel gewonnen haben, läßt uns trotzdem zu dem Schluss kommen, dass die Kugelwellendiskretisierung auch in diesem Beispiel bessere Ergebnisse liefert.

Literaturverzeichnis

- [Alt99] Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1999. (Zitiert auf S. [19](#), [35](#).)
- [BR06] Folkmar Bornemann and Christian Rasch. Finite-Element Discretization of Static Hamilton-Jacobi Equations Based on a Local Variational Principle. *Computing and Visualization in Science*, 9(2):57–69, Juli 2006. (Zitiert auf S. [3](#), [9](#), [11](#), [16](#), [20](#), [22](#), [23](#), [32](#), [33](#), [34](#), [36](#), [55](#), [65](#).)
- [Bro] Ilja N. Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch (Harri). (Zitiert auf S. [39](#).)
- [BS91] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Anal.*, 4(3):271–283, 1991. (Zitiert auf S. [12](#), [15](#), [20](#), [31](#), [36](#).)
- [CEL84] M.G. Crandall, L.C. Evans, and P.L. Lions. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Trans. of the AMS*, 282(2):487–502, April 1984. (Zitiert auf S. [6](#), [7](#), [8](#).)
- [CL83] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Trans. of the AMS*, 277(1):1–42, May 1983. (Zitiert auf S. [6](#).)
- [CL84] M.G. Crandall and P.L. Lions. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Mathematics of Computation*, 43(167):1–19, July 1984. (Zitiert auf S. [6](#).)
- [Dan80] Per-Erik Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980. (Zitiert auf S. [50](#).)
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equation*. AMS, 1998. (Zitiert auf S. [20](#), [36](#).)
- [FF70] D.K. Faddejewa and W.N. Faddejewa. *Numerische Methoden der linearen Algebra*. Oldenbourg Verlag, 1970. (Zitiert auf S. [53](#).)



- [FW60] G.E. Forsythe and W.R. Wasow. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, 1960. (Zitiert auf S. 53.)
- [Gau23] C.F. Gauß. Brief an Gerling. In *Werke*, volume 9, pages 278–281, 26. Dez. 1823. (Zitiert auf S. 53.)
- [God59] S.K. Godunov. A finite difference method for the numerical solution of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, 47:271–291, 1959. (Zitiert auf S. 11.)
- [Ish87] H. Ishii. A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of Eikonal type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2):247–251, June 1987. (Zitiert auf S. 9.)
- [Kim01] Seongjai Kim. An $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ level set method for eikonal equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(6):2178–2193, 2001. (Zitiert auf S. 79.)
- [Kim04] Ron Kimmel. *Numerical geometry of images. Theory, algorithms, and applications*. New York, NY: Springer. xiii, 209 p., 2004. (Zitiert auf S. 25, 50.)
- [Lio82] P.L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman, 1982. (Zitiert auf S. 2, 5, 6, 8.)
- [OS91] S. Osher and C.-W. Shu. High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi-Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(4):907–922, August 1991. (Zitiert auf S. 11.)
- [PR93] C. Pflaum and U. Råde. Gauß' adaptive relaxation for the multilevel solution of partial differential equations on sparse grids, 1993. (Zitiert auf S. 65.)
- [RT92] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3):867–884, June 1992. (Zitiert auf S. 12, 15, 46, 47, 55.)
- [Sch71] H. Schubert. *Topologie*. B.G.Teubner, 1971. (Zitiert auf S. 28.)
- [Set96] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93(4):1591–1595, 1996. (Zitiert auf S. 48.)
- [Sou46] R.V. Southwell. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Oxford University Press, 1946. (Zitiert auf S. 53.)
- [TCOZ03] Yen-Hsi Richard Tsai, Li-Tien Cheng, Stanley Osher, and Hong-Kai Zhao. Fast sweeping algorithms for a class of Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(2):673–694, 2003. (Zitiert auf S. 1, 50, 88.)

- [Tsi95] John N. Tsitsiklis. Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(9):1528–1538, 1995. (Zitiert auf S. 48.)
- [Wer97] Dirk Werner. *Funktionalanalysis 2. Auflage*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiii, 527 p., 1997. (Zitiert auf S. 20, 36.)
- [YBS06] Liron Yatziv, Alberto Bartsaghi, and Guillermo Sapiro. $O(N)$ implementation of the fast marching algorithm. *J. Comput. Phys.*, 212(2):393–399, 2006. (Zitiert auf S. 79.)
- [Zei93] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. Volume I: Fixed-point theorems*. New York: Springer-Verlag. xxiii, 909 p., 1993. (Zitiert auf S. 32, 76.)
- [Zha05] Hongkai Zhao. A fast sweeping method for eikonal equations. *Math. Comput.*, 74(250):603–627, 2005. (Zitiert auf S. 40.)

