

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Baumechanik

**Vereinfachende dynamische Gebäudemodellierung  
unter besonderer Berücksichtigung  
der Bauwerk-Boden-Interaktion**

Holger Klaus Molzberger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stephan Freudenstein

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Harry Grundmann (em.)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Gerhard Herbert Müller
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinrich Kreuzinger (i. R.)

Die Dissertation wurde am 28.07.2008 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
am 13.02.2009 angenommen.

## Überblick

In ca. 10 Jahren baodynamischer Beratungspraxis entwickelte sich die Forderung nach leicht handhabbaren Berechnungswerkzeugen im Bereich der dynamischen Gebäudemodellierung – sowohl für fußpunkt-angeregte Gebäude, als auch im Fall einer Kraftanregung.

Die vorliegende Arbeit befasst sich zunächst mit der Kopplung biegeweicher Fundamente mit dem homogenen Halbraum. Ein umfangreiches dreidimensionales Rechenmodell wird schrittweise in ein stark vereinfachtes Ersatzmodell übergeführt, das – unter Beachtung seiner Anwendungsgrenzen – dazu geeignet ist, das Verhalten nachgiebiger Fundamente auf dem ungeschichteten Boden in einer für praktische Belange ausreichenden Näherung zu erfassen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Teilbereiche einer bereits vorliegenden Ersatz-Gebäudemodellierung /3/ betrachtet und praxisorientiert erweitert, so das Verhalten punktgestützter Flachdecken sowie des Zweifeldträgers als klassisches Bauelement heutiger Bürogebäude. Es wird ein Vorschlag für die praktische Behandlung mehrfeldriger Geschossdecken unterbreitet.

In Hinblick auf die Übertragungswege von Schwingungen in Gebäuden stellt sich die Frage, ob relevante Erschütterungsanteile durch Biegeschwingungen von Stützen und Wänden in die Obergeschosse übertragen werden. Um diese Fragestellung zu beantworten, wurde eine Modellierung entwickelt, die bei sehr geringem Rechenaufwand eine gute Kontrollmöglichkeit für andere Berechnungsmethoden bietet, aber auch „stand alone“ einsetzbar ist.

Messergebnisse aus der täglichen Praxis und Hinweise zur Anbindung von Rechenmodellen an die Messdaten runden die vorliegende Arbeit ab und zeigen an realen Beispielen Einsatz und Nutzen – aber auch die Grenzen der vorgestellten Teilmodellierungen.

*Stichworte: Ersatzmodell, Bauwerk-Boden Interaktion, biegeweiches Fundament, Flachdecken*

## Abstract

The primary object of this work was the investigation into the coupling between a flexible foundation and an homogeneous halfspace. The resulting widely-applicable model was then reduced step-by-step to give a series of simpler models that, taking into account their limitations, are suitable for use in calculating the approximate properties and the dynamic stiffness of flexible foundations on homogeneous soil.

This work led to the further examination and the wider application of existing simple models /3/, e.g. the dynamic behaviour of flat floors and two-span beams as used today in the classic construction of office buildings.

A fully new autonomous working model was developed, originally in answer to the question of how much vibration is transmitted to the upper floors by the flexing of the vertical supports of the building. This model offers an efficient method of checking up simple- and Finite- Element (FE) models, but can also be used as a stand-alone tool for vibration prediction.

The results for the measurement of typically occurring demands are given, as are suggestions for the evaluation and coupling of model and measurement data, demonstrating the practical application of these applied models.

*Keywords: simple model, soil-structure interaction, flexible foundation, flat slab*

---

## Vorwort

Herzlich bedanken möchte ich mich vor allem bei

- Herrn Professor Grundmann für die Betreuung der Arbeit über einen mittlerweile beachtlichen Zeitraum hinweg, für seine Geduld und die vielen „geopferten“ Stunden der Diskussion,
- Herrn Professor Müller und Herrn Professor Kreuzinger für die Übernahme der Funktion des Zweit- und des Drittprüfers,
- Herrn Dr. Norbert Breitsamter, auf dessen Dissertation die vorliegende Arbeit im Wesentlichen aufbaut, dem ich mein Wissen und meine Begeisterung in dieser Thematik zu einem erheblichen Teil verdanke für viele Diskussionen, Anregungen und Unterstützung,
- dem Ingenieurbüro imb-dynamik – insbesondere Herrn Dr. Müller-Boruttau – für das entgegengebrachte Verständnis, seine Begeisterungsfähigkeit und das Einräumen der benötigten Zeit
- und auch besonders bei meiner Frau Susanne und meinen Kindern, die neben weniger verfügbarer Freizeit sicherlich von einigen Stimmungsschwankungen mitbetroffen waren.

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>Überblick .....</b>	<b>2</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>2</b>
<b>Vorwort .....</b>	<b>3</b>
<b>Inhaltsverzeichnis.....</b>	<b>4</b>
<b>Verwendete Abkürzungen .....</b>	<b>8</b>
<b>1 Einleitung.....</b>	<b>9</b>
1.1 Motivation der Arbeit .....	9
1.2 Abgrenzung der Aufgabenstellung .....	10
1.3 Vereinfachende Ersatzmodelle in der Literatur .....	12
1.3.1 Fundamente auf dem elastischen Halbraum .....	12
1.3.2 Gebäudemodelle .....	13
<b>2 Wellenausbreitung im Baugrund .....</b>	<b>14</b>
2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen des elastischen Kontinuums .....	15
2.1.1 LAMEsche Gleichung .....	15
2.1.2 Entkopplung der LAMEschen Gleichung .....	15
2.1.3 Lösung der partiellen Differentialgleichungen im transformierten Raum .....	16
2.1.4 Halbraumantwort auf vertikale Lasten auf der Halbraumoberfläche .....	16
2.1.5 Dämpfung und Wellenabstrahlung .....	19
2.1.6 Frequenzraster .....	19
2.2 Bestimmung der Bodenantwort im Bildraum.....	20
2.2.1 Rotationssymmetrische Ansatzfunktionen.....	20
2.2.2 Modifizierte Ansatzfunktion .....	20
2.2.3 Ermittlung der Verschiebungen an der Halbraumoberfläche .....	21
2.3 Rücktransformation .....	21
2.3.1 Antwort auf beliebige, auch auf nicht rotationssymmetrische Halbraumlasten.....	21
2.3.2 Rücktransformation rotationssymmetrischer Lasten.....	22
2.3.3 Behandlung nicht rotationssymmetrischer Lasten.....	22
2.3.4 Wellenfeld unter erzwungener Weganregung eines starren Fundamentes .....	23
2.3.5 Verifizierung – Optimierung der Ansatzfunktionen – Sensitivität .....	24
<b>3 System Halbraum – Fundament.....</b>	<b>29</b>
3.1 Überblick.....	29

---

3.2	Das „Plattenmodell“ .....	30
3.2.1	FE-Modellierung, Modellierungsgrundlagen und Vereinfachungen .....	30
3.2.2	Kopplung mit dem Halbraum.....	30
3.2.3	„Einbau“ der Direkt- und Relativfedern:.....	32
3.3	Das „Balkenmodell“ .....	33
3.3.1	Timoshenkobalken als FE-Modellierung .....	34
3.3.2	Kopplung mit dem Halbraum, Kraftanregung, Fußpunktanregung.....	35
3.3.3	Vergleich Platten - Balkenmodell .....	36
4	System Winklerbettung - Fundamentbalken.....	39
4.1	Bettungsmodell – modifizierte Winklerbettung .....	39
4.1.1	Spuranpassung Balken auf Halbraum.....	40
4.1.2	Starre Fundamente, konstante Einsenkung.....	43
4.1.3	Wellenförmige Einsenkung – einachsig .....	44
4.1.4	Wellenförmige Einsenkung – zweiachsig.....	46
4.2	Das „Winklermodell“ .....	50
4.3	Das „Ersatzmodell“.....	51
4.3.1	Maßgebende Wellenlänge $\lambda_B$ .....	52
4.3.2	Separates Erfassung des Fundament-Eigenschwingverhaltens.....	54
4.4	Die „Ersatzformel“ – modulares Baukastensystem .....	57
4.4.1	Bausteine Bodenmodell .....	57
4.4.2	Aufbau Bodenfeder aus quasistatischem und dynamischem Anteil .....	58
4.4.3	Fundamentmodellierung .....	59
5	Flachdecken .....	62
5.1	Deckenmittelfelder unter kohärenter Fußpunktanregung .....	62
5.1.1	Anregbare Eigenformen, Ansätze .....	62
5.1.2	Referenzmodell: Parameteridentifikation.....	64
5.1.3	Vergleich FE- und Ersatzmodell.....	67
5.1.4	Ersatzschwingerkennwerte .....	68
5.2	Flachdecken, modelliert als Zweifeldträger mit unterschiedlicher Spannweite.....	71
5.2.1	Allgemeines.....	71
5.2.2	Lösungsweg, Kenngrößen.....	72
5.2.3	Bestimmung Ersatzschwinger-Kenngrößen (analog /3/ ).....	75
5.2.4	Ersatzschwinger-Kenngrößen .....	77
5.3	Mehrfeldrige Deckensysteme .....	81

---

5.3.1	Problematik .....	81
5.3.2	Lösungsstrategie .....	81
5.3.3	Modellierung.....	82
5.3.4	Parameterstudie: Variation der Wellengeschwindigkeit der Anregung.....	82
5.3.5	Parameterstudie: Variation der Anzahl an Deckenfeldern .....	85
5.3.6	Messergebnisse (= zweidimensionale Referenz) .....	86
5.3.7	Fazit .....	87
5.3.8	Lösungskonzept Ersatzmodell .....	87
5.3.9	Illustration zur Umsetzung.....	89
5.3.10	Vorschlag: Erfassung Anregungsgrad.....	90
5.3.11	Vorschlag: Erfassung Abstrahldämpfung.....	90
<b>6</b>	<b>Gebäudemodell: Übertragung von Schwingungen über Stützenbiegung .....</b>	<b>91</b>
6.1	Berechnungsannahmen, Einschränkungen.....	91
6.2	Modellierung Gebäude .....	93
6.2.1	Exemplarische Ergebnisse .....	93
6.3	Ergebnisse eingeschossiger Rahmen .....	96
6.3.1	Übertragungsfunktionen .....	96
6.3.2	Verhältnis der Übertragungsfunktionen.....	97
6.3.3	Analyse der Ergebnisse .....	99
6.4	Modellierung eines mehrgeschossigen Rahmens .....	101
6.4.1	Variationen .....	101
6.4.2	Bewertung der Ergebnisse .....	107
<b>7</b>	<b>Messungen und Modellverifikation .....</b>	<b>109</b>
7.1	Rasterung, Skalierung und Filterung.....	109
7.1.1	Abszisse (Frequenz- / Wellenzahlachse).....	109
7.1.2	Ordinate: Messgröße a, v oder w, Zeit- und Frequenzbewertungen .....	112
7.1.3	Transiente Signale in der Modellierung.....	113
7.2	Messungen an Fundamenten und in Gebäuden .....	115
7.2.1	Wellenausbreitung in Bodenplatten .....	115
7.2.2	Erschütterungsschutzwirkung einer starken Flachgründung .....	116
7.2.3	Messungen von teilflächig elastisch gelagerten Bodenplatten .....	118
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>124</b>
	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>126</b>

---

<b>Anhang 2.1, Transformation Gaußsche Glockenkurve .....</b>	<b>128</b>
<b>Anhang 3.1, Plattenelement mit Polynomansatz .....</b>	<b>129</b>
<b>Anhang 3.2, FE-Platten-Modellierung .....</b>	<b>130</b>
<b>Anhang 3.3, Numerische Gaußintegration .....</b>	<b>132</b>
<b>Anhang 3.4, FE-Modell – rechnerische Umsetzung .....</b>	<b>133</b>
<b>Anhang 4.1, Parameter Spuranpassung .....</b>	<b>134</b>
<b>Anhang 4.2, „Winklermodell“ .....</b>	<b>135</b>
<b>Anhang 4.3, Parameterstudie „Ersatzmodell“ .....</b>	<b>138</b>
<b>Anhang 5.1, Messergebnisse Bürospange unter U-Bahnanregung .....</b>	<b>141</b>
<b>Anhang 6.1, Gebäudemodell Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung.....</b>	<b>143</b>
<b>Anhang 7.1, Messergebnisse Präsentationsgebäude .....</b>	<b>147</b>
<b>Anhang 7.2, Messergebnisse teilflächige elastische Gebäudelagerung .....</b>	<b>150</b>

## Verwendete Abkürzungen

A, A <sub>Q</sub>	Fläche, Schubfläche	V	Vergrößerungsfunktion
a <sub>0</sub>	dimensionslose Frequenz	w <sub>rel</sub>	Relativweg
b, l, d (B, L, D)	Abmessungen	x, y, z	Ortskoordinaten
C, C <sub>dyn</sub>	dynamische Steifigkeit	α	Beiwert
c, c <sub>dyn</sub>	dynamische Bettung	β	Beiwert
C <sub>P</sub> , C <sub>S</sub> , C <sub>R</sub>	Kompression-, Scher-, Rayleigh-Wellengeschwindigkeit	ε	Dehnung
c <sub>Z</sub>	Beiwert Bodendämpfung	η	Hysteretische Dämpfung
C*	generalisierte Steifigkeit	φ	Verdrehung
D	Lehrsche Dämpfung	κ	Anregungsgrad
E	Elastizitätsmodul	λ	Wellenlänge (auch: Lamesche Konstante)
F	Kraftvektor	μ	Massebelegung (auch: Lamesche Konstante)
FF	Freifeld	ν	Querdehnzahl
G	Schubmodul	ρ	Dichte
H	Höhe	σ	Normalspannung
I	Flächenträgheitsmoment	τ	Schubspannung
K (K <sub>b</sub> , K <sub>e</sub> , K <sub>f</sub> ..)	Steifigkeitsmatrix (Boden~ / Element~ / Fundament~)	ω, ω <sub>0</sub>	(Eigen-) Kreisfrequenz
k <sub>x</sub> , k <sub>y</sub>	Wellenzahlen	ζ	Verdrillung
k <sub>Z</sub>	Beiwert Bodenfeder	Φ	Skalarfeld
M	Masse (teils: Matrix)	Π	Potenzial
M*	generalisierte Masse	Ω	Lastfrequenz
$\bar{M}, \bar{m}$	Koppelmasse	Ψ	Vektorfeld
m <sub>0</sub>	Restmasse		
N	Nachgiebigkeitsmatrix		
P, p	Einzellast, Linienlast		
Q	Querkraft		
u, v, w	Verschiebungen		
u <sub>FP</sub>	Fußpunktverschiebung		

## 1 Einleitung

### 1.1 Motivation der Arbeit

Mit dem Einsatz immer schnellerer Rechner haben sich numerische Berechnungsverfahren in den letzten zwei Jahrzehnten in Planung und Forschung etabliert. Es wurden daher – auch im Ingenieursstudium – neue Schwerpunkte gesetzt, die der Tendenz von analytischer zu numerischer Sichtweise Rechnung tragen.

Gerade im Bereich der Baudynamik haben jedoch so genannte Ersatzmodelle – die einer analytischen Betrachtungsweise entstammen und einen hohen Abstraktionsgrad aufweisen – u.a. folgende entscheidende Vorteile gegenüber den einschlägigen numerischen Verfahren:

- **Schnelligkeit:** Oft werden baudynamische Betrachtungen erst in einer Notlage für erforderlich gehalten. Es wird daher eine extrem schnelle Aussage benötigt.
- **Variabilität:** Nur mittels geeigneter Parameterstudien lässt sich eine den technischen und wirtschaftlichen Randbedingungen angepasste Lösung finden, denn komplexe mechanische Zusammenhänge machen eine direkte Lösung der gestellten Aufgabe meist unmöglich. Bei Rechenzeiten von wenigen Sekunden für einen Parametersatz und gleichzeitig hoher Transparenz behält der Anwender trotz der Komplexität des Systems den Überblick über die Wechselwirkungen bestimmter Bauteile. Aufgrund des modularen Aufbaus der hier vorgestellten Ersatzmodelle können Änderungen und Abhilfsmaßnahmen problemlos berücksichtigt werden.
- Bei Berechnungen im Frequenzbereich sind die Auswirkungen unsicherer Eingangsgrößen, die sich z.B. auf die Lage von Eigenfrequenzen und damit auf die Interaktion mit Nachbar-elementen auswirken, transparent und gut kontrollierbar.

In der Praxis sind Ersatzmodellierungen wenig weit verbreitet. So bauen auch die Prognosemodelle renommierter Herstellerfirmen elastischer Elemente zumeist auf dem bewährten EMS (Ein-Massen-Schwinger) auf. Diese können lediglich mittels messtechnischer Modellanpassung – und auch nur in einem sehr eingeschränkten Nutzungsbereich - eine ausreichende Genauigkeit aufweisen. Eine mechanisch korrekte Interaktion mehrerer Elemente untereinander findet sich bei diesen Modellen nur in Sonderfällen, sodass sich ihr Einsatz nur in sehr speziellen Fällen rechtfertigen lässt oder nur zur Abschätzung von Größenordnungen dienen kann.

Die Motivation zur vorliegenden Arbeit bedingt sich aus ca. 10 Jahren Berechnungs- und Beratungspraxis in fast ausschließlich baudynamischer Richtung. In dieser Zeit konnte der Einsatz kommerzieller FE-Programme auf die sporadische Detailmodellierung unregelmäßig geformter Bauteile beschränkt bleiben. Auf der anderen Seite fielen bei den bestehenden Simulationsmodellen Unzulänglichkeiten auf, die im Rahmen der üblichen Auftragsabwicklung mit entsprechend geringem Aufwand nicht beseitigt werden konnten. In der vorliegenden Arbeit wird daher versucht, diese Lücken zu schließen und die bestehenden Modellierungen in einigen Punkten für den praktischen Einsatz zu ergänzen.

Es sei an dieser Stelle der Aufsatz von J.Eibl zitiert [9]: *Grundsätzlich sollte dabei für Zwecke der Entwurfspraxis beachtet werden, daß u.U. einer einfachen Berechnung mit Parametervariationen einer sehr aufwändigen Untersuchung mit zwangsläufig beschränkter Variation der Stoffwerte der Vorzug zu geben ist.*

## 1.2 Abgrenzung der Aufgabenstellung

### Abgrenzung bzgl. der Einsatzmöglichkeiten

Von Interesse ist in der Praxis prinzipiell die vollständige Modellierung typischer baodynamischer Schwingungsprobleme. Diese lassen sich im Allgemeinen in folgende drei Teilbereiche gliedern:

- a) Eintrag von Schwingungen (Emissionsseite)
- b) Ausbreitung der Schwingungen im Übertragungsmedium (Transmission)
- c) Anregung erschütterungsempfindlicher Strukturen (Immissionsseite)

Vorhandene „simple models“ – also gegenüber numerischen Methoden stark vereinfachende Modellierungen – stützen sich zumeist auf eine linienförmige, eindimensionale Struktur (sog. Schwingerkette). Sind die mechanischen Zusammenhänge einheitlich, z.B. als Impedanzen, formuliert, können bausteinähnlich verschiedenste Aufgabenstellungen und auch äußerlich sehr unterschiedliche Probleme bearbeitet werden.

Es erweisen sich jedoch stets Bereiche als problematisch, in welchen auf eine zwei- oder dreidimensionale Modellierung nicht verzichtet werden kann und deshalb gängige Impedanzformulierungen unmöglich sind, wie z.B. bei der Wellenabstrahlung im Boden oder bei Strukturen, die einen Ringschluss enthalten. Diese Bereiche sind in geeigneter Weise in vorhandene Ersatzmodelle einzubinden. In der Regel ist hierfür eine geeignete Ersatzstruktur zu finden, die die für das Gesamtmodell relevanten dynamischen Eigenschaften in Abhängigkeit von den veränderlichen Parametern und möglichen Randbedingungen beschreibt.

Die vorliegende Arbeit versucht, vor allem in zwei Teilbereichen eine praxistaugliche Erweiterung bestehender Modellierungen vorzustellen:

1. Schnittstelle Boden / Fundament: Berücksichtigung der Boden-Bauwerks-Interaktion im Fall biegewei-cher oder biege-schubweicher Fundamentierungen (emissions- und immissionsseitig)
2. Ausbreitung der Schwingungen innerhalb langgestreckter bzw. flächig ausgedehnter Gebäude (hori-zontaler Energietransport, Mittelung von Schwingungen, Abstrahldämpfung) und Erweiterung des Kata-loges typisierter Geschossdecken.

Die Weiterleitung von Schwingungen im Boden (Transmission) wird nicht behandelt. Sie kann mit ingenieur-mäßigen Abschätzungen behandelt werden.

Eine Ausweitung der Boden-Bauwerks-Interaktion auf geschichtete Böden kann prinzipiell mit den vorge-stellten Mitteln erfolgen, war jedoch nicht Gegenstand der durchgeführten Untersuchungen.

### Abgrenzung bzgl. der gewählten Modellierung

Aufgabe ist es, die einzelnen Bausteine der Modellierung so einfach zu gestalten, dass jeweils alle relevan-ten Einflüsse erfasst sind, jedoch eine maximale Reduktion der hierfür erforderlichen Freiheitsgrade erfolgt. Numerische Methoden sollen lediglich als Referenz dienen.

Die Forderung nach rasch durchzuführenden Machbarkeits- und Parameterstudien bedingt größtmögliche Variabilität, die keinesfalls über eine aufwändige Gesamtmodellierung erreicht werden kann. Erforderlich ist daher eine möglichst transparente Vorgehensweise mit klaren Schnittstellen, die nur eine Variation der wich-tigsten Eingangsgrößen ermöglicht.

Unbeachtet sollen bleiben:

- geometrisch komplizierte Formen
- nichtlineares Materialverhalten

- große Auslenkungen, die eine Betrachtung nach Theorie II. Ordnung erfordern,

Sie können bei Bedarf über ergänzende Betrachtungen oder iterativ berücksichtigt werden.

Bei sämtlichen Modellen, die die Boden-Bauwerk Kopplung behandeln, wurde auf die Modellierung der horizontalen Kopplung – die Übertragung von Schubkräften zwischen Boden und Fundament – verzichtet. Eine Erweiterung der Halbraummodelle zur Untersuchung dieses Einflusses wäre prinzipiell analog zur gezeigten Vorgehensweise möglich.

#### Abgrenzung bzgl. der Lastcharakteristik

Betrachtet wird nur der eingeschwingene Zustand. Transiente Schwingungseinwirkungen oder Impulslasten können auf der Anregungsseite in den Frequenzbereich transformiert werden oder können – wie später kurz gezeigt – als Faktoren aufgeschlagen werden. Die Modellierungen arbeiten im transformierten Raum. Eine Rücktransformation von Ergebnissen in den Zeitbereich kann im Nachhinein nach Belieben erfolgen. Dies kann beispielsweise bei gemessenen Eingangsgrößen interessant sein, wenn die exakte Phasenlage bei unterschiedlichen Frequenzen am Messort bekannt ist. Für eine phasenechte Berechnung sind die angegebenen Modellierungen im Schmalband zu formulieren – für Betrachtungen im Frequenzbereich kann die gesamte Modellierung mit relativer Bandbreite, z.B. im Terzraster, durchgeführt werden, sodass Anschaulichkeit und Transparenz gewährleistet sind.

#### Abgrenzung bzgl. des Frequenzbereiches

Die exakten Einspannverhältnisse einzelner Bauteile eines Gebäudes sind üblicherweise unbekannt. Es macht daher wenig Sinn, mit rein deterministischen Modellen bis in den höherfrequenten Bereich zu arbeiten, ohne die Sensitivität auf Eingangsparameter zu untersuchen und Bandbreiten für die Ergebnisse anzugeben.

Oberhalb einer Grenzfrequenz, bei Gebäuden vielleicht oberhalb der Estrichabstimmung, sind deshalb statistische Betrachtungen, wie die „Statistical Energie Analysis“ (SEA), außer bei stark tonhaltiger Anregung klar im Vorteil.

Im Gegensatz zu rein energetisch arbeitenden Methoden kann jedoch eine Kombination aus deterministischem Ansatz und anschließender überlegter Mittelung in Teilbereichen (z.B. nur bzgl. des Ortes oder über ein spezifiziertes Frequenzband) das Resonanzverhalten gezielter erfassen. Die exakte Lage der Eigenfrequenzen muss hierbei dank der Möglichkeit von Parametervariationen oder im Fall eines breitbandigen Anregungsspektrums nicht bekannt sein. Es kann sich jedoch im mittleren Frequenzbereich weder um eine exakte noch um eine „blind“ anwendbare Prognosemethode handeln.

Aufgrund kurzer Rechenzeiten bieten die vorgestellten Ersatzmodelle die Möglichkeit, Parametersätze zu variieren und Sensitivitätsstudien bzgl. der Eingangsparameter durchzuführen. Die Anwendungsgrenzen der bestehenden Ersatzmodelle sollen im Folgenden erweitert und unter Berücksichtigung des frequenzabhängigen Einflusses von Abstrahldämpfung und Anregungsgrad bis in den mittleren Frequenzbereich hinein ausgedehnt werden.

Im Frequenzbereich oberhalb der ersten Eigenformen musste bislang stets eine aufwändige Modellkalibrierung an Messwerten vorgenommen werden, sodass von „semi-empirischen“ Modellen gesprochen wurde. Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist es, ohne empirische Parameter eine akzeptable Genauigkeit in Prognoseberechnungen zu erzielen.

### 1.3 Vereinfachende Ersatzmodelle in der Literatur

Die vorliegende Arbeit baut im Wesentlichen auf der Dissertation von Breitsamter /3/ auf. Hierin enthalten ist u.a. ein Überblick über die bestehenden Lösungsansätze für Ersatzmodelle. Diese älteren Modelle verwenden meist nur statisch arbeitende Komponenten, wobei durch eine geeignete Ergänzung eines Dämpfungs- und Trägheitsterms eine Erweiterung auf dynamische Anwendungen denkbar wäre.

Folgende weitere Quellen sind zu nennen, die hinsichtlich rechnerischer Anwendbarkeit oder im Hinblick auf eine mögliche Modellbildung wertvoll sind:

#### 1.3.1 Fundamente auf dem elastischen Halbraum

Vereinfachende Lösungsansätze entstammen weniger dem Bereich der Gebäudemodellierung als der Forderung nach schnellen Lösungen für Maschine-Fundament-Baugrund Systeme.

- Historisch: Entdeckung von Hsieh (1962) und Lysmer (1965): Feder- / Dämpfer - Annäherung möglich
- Miller und Pursey, 1954 /20/: Abstrahlungsgesetze / Wellenausbreitung bei einem vertikal schwingenden Fundament auf elastischem Halbraum
- Wolf, J.P. 1994 /33/: Energieanteile der ins Unendliche abgestrahlten Wellentypen im elastischen Halbraum
- Studer und Ziegler /31/: Kennwerte für Ersatzfeder- und -Dämpfer einer starren Kreisplatte auf elastischem Halbraum (Kennwerte nach Gazetas /11/)

Einschränkungen dieser Betrachtungen / Ansätze:

- Mit wachsender dimensionsloser Frequenz  $a_0 = \omega r_0 / v_s$  (Fundamentabmessungen bezogen auf die Wellenlänge der Scherwelle) nehmen die Abweichungen von der Realität zu.
- Vernachlässigung des Einflusses von Schubspannungen in der Kontaktfuge Fundament / Boden
- Beschränkung auf „starre“ Fundamente

Es besteht mittlerweile ein weites Kontingent an Modellierungen, die sich mit der Frage der Boden-Bauwerks-Interaktion beschäftigen. Hinsichtlich der Forderung nach rascher Anwendbarkeit bzw. der ausführlichen Interpretation der mechanischen Zusammenhänge sei hier folgende Quelle genannt:

- Auersch /1 /: Die unendlich ausgedehnte Platte auf dem Halbraum

Ersatzbettungen für endliche Platten und Balken sind in den nachfolgend aufgelisteten Quellen enthalten:

- Winkler-Bettung (Bettungsfeder ohne horizontale Interaktion) /17/
- Pasternak Bettung: Im Gegensatz zu älteren Ansätzen (Filonenko-Borodich und Hetenyi laut /17/) wird die Kopplung über den Boden in horizontaler Richtung über eine – dem Bodenverhalten mechanisch weitgehend entsprechende – Schubsteifigkeit zwischen „benachbarten Federn“ erzielt.
- Generalisierte Bettung nach /11/: Zusätzlich zur translatorisch wirkenden Winkler-Bettung wird ein rotatorisch wirksamer Federanteil eingeführt, der eine verdrehungs-proportionale Momentenaufnahme garantiert.

- Abweichend von diesen drei genannten Bettungsarten, die sich der Realität durch die Erweiterung einer möglichst einfachen Ersatzmodellierung anzunähern versuchen, findet sich bei der Reissner-Bettung der Versuch, mittels vereinfachender Annahmen und Einschränkungen ausgehend vom elastischen Kontinuum zu einer praktikablen Lösung zu gelangen. Kerr /17/ zeigt, dass unter der Bedingung konstanter oder linearer Belastungsverteilung Reissner- und Pasternak-Bettung sich entsprechen.

### 1.3.2 Gebäudemodelle

Auf diesem Sektor finden sich erst in neuester Zeit einige Lösungsansätze, u. a. von der Bundesanstalt für Materialforschung (BAM) und in Österreich in Zusammenhang mit dem Forschungsprojekt „Lärm- und erschütterungsarmer Oberbau“ (z.B. /10/, /19/, /19a/). Grundlegend war die Dissertation von Breitsamter /3/, die in Hinblick auf die gestellte Aufgabe bereits folgende Themenbereiche abdeckt:

- Interaktion benachbarter Streifenfundamente (ebener Formänderungszustand)
- Mittelwerte der Freifeldverschiebungen für spezielle Fundamentgeometrien (Streifen-, Rechteck-, Kreis-Fundamente)
- Klassifizierung möglicher Eigenformen
- „Baukastensystem“ für Vertikalschwingungen, bestehend v.a. aus dynamischen Ersatzsteifigkeiten der aufgehenden Gebäudeteile (Wände, Stützen) und sog. Ersatzschwinger für Geschossdecken, die an das Vertikalmodell angehängt werden und die mechanisch korrekte Interaktion Gebäude – Decke liefern.
- Berücksichtigung symmetrischer und antimetrischer Anregung benachbarter Stützen, sowie des Anregungsgrades (ausschlaggebend bei höheren Eigenformen)
- Unregelmäßige Feldweiten (eingeschränkt)
- Deckenkatalog der benötigten Ersatzschwinger für unterschiedliche Randbedingungen

Die weiteren genannten Quellen sind für die geplante Zielsetzung weniger geeignet. So ist z.B. die Modellierung von Meinhard, BAM Berlin, als autarkes, abgeschlossenes System zu verstehen. Sie basiert im Kern auf einer möglichst weitreichenden Anpassung eines Zweimassenschwingers an Referenzmodelle bzw. an vorliegende Messwerte.

## 2 Wellenausbreitung im Baugrund

Das dynamische Verhalten des Untergrundes soll an dieser Stelle – soweit für die Bildung von Ersatzmodellen im Rahmen der gestellten Aufgabe von Nutzen – untersucht werden. Für eine möglichst praktikable Erfassung biegeweicher endlicher Fundamentplatten auf dem Baugrund wird sowohl versucht, sich dem Problem mittels geeigneter Vereinfachungen von Seite der allgemeinen Gesetze des Kontinuums zu nähern, als auch von der Seite einer einfachen Bettung, die in geeigneter Weise für das vorliegende mechanische Problem zu ergänzen ist.

Begonnen wird mit der Halbraumdynamik. Es werden die folgenden Einschränkungen und Annahmen getroffen:

- a) Zugrunde liegt der dreidimensionale Halbraum. In Hinblick auf universelle geometrische Anwendbarkeit der Bodenlösung wird kein ebener Formänderungszustand vorausgesetzt. Die Abstrahlung mechanischer Wellen in den Halbraum und damit die Abstrahldämpfung des Untergrundes wird daher korrekt erfasst.
- b) Keine Schichtung des Halbraumes. In Hinblick auf mehr oder weniger ausgeprägte Schichtungen in der Praxis bedeutet dies eine Einschränkung. Der Einsatz der vorgestellten Ersatzmodelle wird daher stets ein gewisses Maß an Hintergrundwissen und –informationen des Anwenders erfordern. Im konkreten Anwendungsfall sind maßgebende Wellenformen und -längen, Eindringtiefen und hieraus resultierende mögliche Reflexionseinflüsse über geeignete Zusatzbetrachtungen oder Sensitivitätsstudien zu berücksichtigen.
- c) Elastisches und isotropes Material: Hinsichtlich der Gebrauchstauglichkeit von Gebäuden und damit angesichts der meisten in Deutschland auftretenden Erschütterungsprobleme bedeuten lineare Stoffgesetze eine nur geringe Einschränkung. Die Annahme eines isotropen homogenen Baugrundes wäre im Bedarfsfall – ähnlich der Schichtungsproblematik – mittels ergänzender Betrachtungen und Parametervariationen zu erweitern.

Die Reduktion auf eine verhältnismäßig einfache Untergrundsituation wird auf den ersten Blick mit mangelnder praktischer Anwendbarkeit erkaufte. Es ist jedoch zu bedenken, dass eine Quantifizierung sämtlicher dynamischer Effekte im Baugrund-Fundament-System – sofern überhaupt möglich – eine vereinfachende Modellbildung zumindest sehr unübersichtlich machen würde.

Zu den dynamisch relevanten Effekten zählen u.a.:

- Reflexionen an Schichtgrenzen
- Einfluss kontinuierlicher Änderungen der stofflichen Parameter
- Spuranpassung bzgl. der wellenleitfähigen Medien Boden (-Schichtungen) und Fundament
- Kombiniertes Eigenformverhalten

Es wird im Folgenden versucht, den Einfluss v.a. der beiden letztgenannten Punkte zu quantifizieren.

Bedenkt man einerseits die Berechnungseinschränkungen hinsichtlich der in der Praxis üblichen Formeln für starre Kreisfundamente /11/, /31/, /9/, andererseits den Modellierungs- und Rechenaufwand aufwändiger Bauwerks-Bodenmodelle, erscheint die Lücke zwischen diesen beiden Extrema offensichtlich und o.g. Einschränkungen als akzeptabel. Rechenzeiten von wenigen Sekunden der hier vorgestellten Modelle geben den Freiraum, den Einfluss spezieller Parameterkonstellationen eingehend zu überprüfen.

## 2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen des elastischen Kontinuums

Die für eine Lösung mittels Integraltransformationen erforderlichen Bewegungsgleichungen sind nachfolgend – in Analogie zu z.B. /13/ und /35/ – in Kurzform aufgelistet. Für eine ausführliche Herleitung sei auf diese beiden Arbeiten und /33/ verwiesen.

### 2.1.1 LAMEsche Gleichung

Aus den

- Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums,
- den untenstehenden Verschiebungs- / Verzerrungsbeziehungen (2.12)
- und den linearen Verzerrungs- / Spannungsbeziehungen (2.13)

ergibt sich die Lamesche Gleichung, wie z.B. in /23/ ausführlich gezeigt:

$$\mu \cdot u^j |^j_j + (\lambda + \mu) \cdot u^j |^j_j - \rho \cdot \ddot{u}_i = 0 \quad (2.1)$$

mit den LAMEschen Konstanten  $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  und  $\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

und der Dichte  $\rho$  des Kontinuums.

### 2.1.2 Entkopplung der LAMEschen Gleichung

Das gekoppelte partielle Differentialgleichungssystem (2.1) lässt sich mittels Anwendung des Satzes von HELMHOLTZ in folgende zwei, mechanisch entkoppelte Anteile (Vektorfelder) zerlegen:

- a) Wirbelfreier Anteil: Gradient des Skalarfeldes  $\Phi$
- b) Quellfreier Anteil: Rotation des Vektorfeldes  $\Psi^k$

Die Verschiebungen lassen sich demnach aus

$$u_i = \Phi |^j_j + \Psi^k |^j_j \varepsilon_{ijk} \quad \text{zusammensetzen.} \quad (2.2)$$

Für den dreidimensionalen Raum ergeben sich durch Einsetzen von (2.2) in (2.1) folgende vier partielle Differentialgleichungen ( $i = x, y, z$ ):

$$\Phi |^j_j - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \cdot \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.3)$$

$$\Psi_i |^j_j - \frac{\rho}{\mu} \cdot \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (2.4)$$

Gleichung (2.3) beschreibt eine (rotationsfreie) Kompressionswelle (Dilatationswelle, P-Welle), Gleichung (2.4) eine (volumenkonstante) Scherwelle (S-Welle). Die zugehörigen Wellengeschwindigkeiten ergeben sich zu

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{und} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.5)$$

### 2.1.3 Lösung der partiellen Differentialgleichungen im transformierten Raum

Es werden Transformationen in den Frequenzraum und in den Wellenzahlraum durchgeführt, wobei die z-Richtung untransformiert bleibt. Die Lösung wird in Abhängigkeit der z-Richtung erstellt, wobei im vorliegenden Fall lediglich das Verhalten der Halbraumboberfläche bei  $z = 0$  interessiert.

Folgendes Diagramm veranschaulicht den Lösungsweg und klärt die Normierung der Hin- und Rücktransformationen:

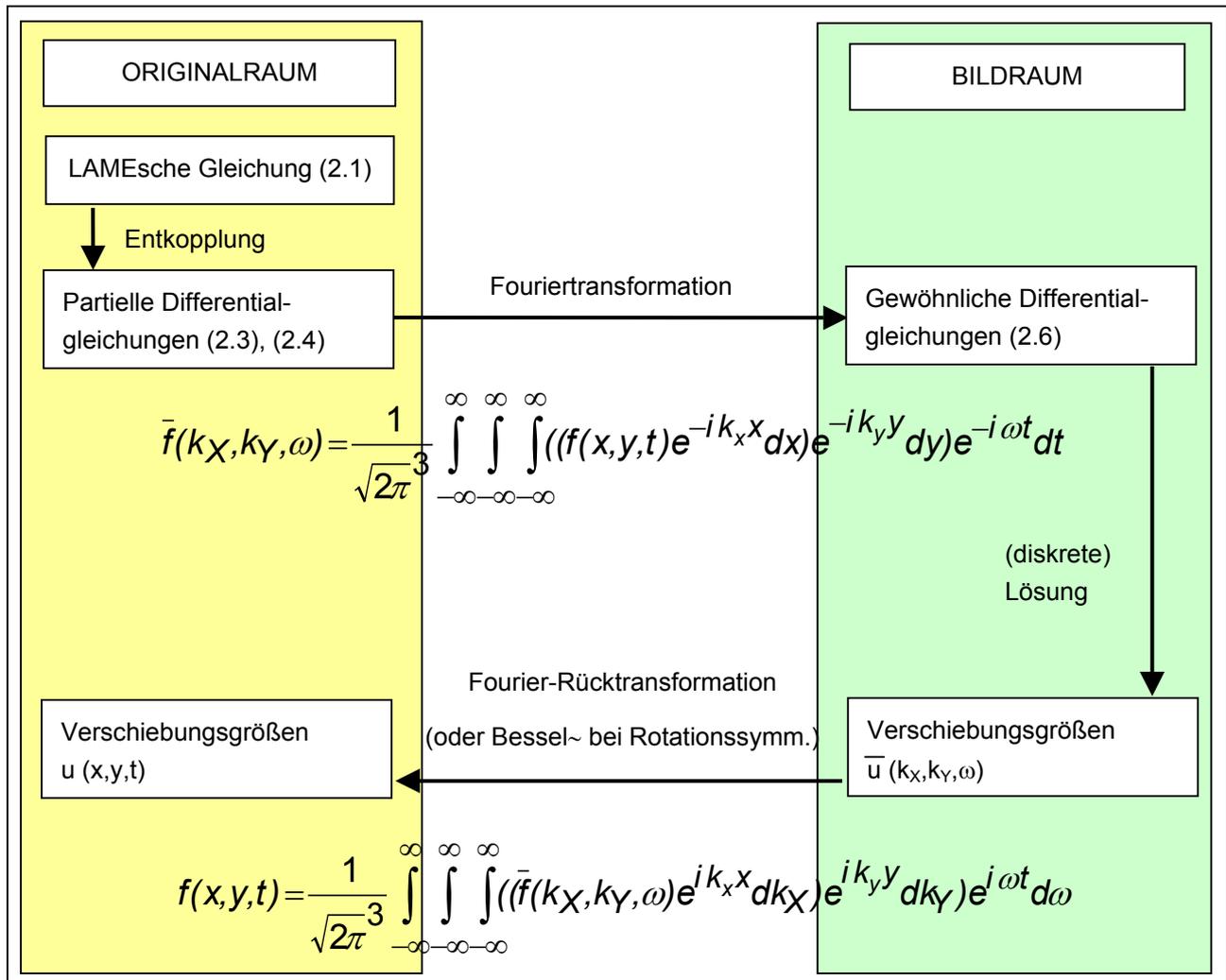


Abb. 2.1: Lösungsschema Integraltransformation

Die Rücktransformation kann im Fall rotationssymmetrischer Lasten auch als Bessel-Rücktransformation der sich im Bildraum ebenfalls rotationssymmetrisch darstellenden Lösung durchgeführt werden /35/.

In /35/ ist eine Umformung enthalten, die für den rotationssymmetrischen Fall die Gleichwertigkeit einer einfachen Bessel-Rücktransformation mit einer Fourier-Rücktransformation nach  $k_x$  und  $k_y$  Wellenzahlen zeigt.

### 2.1.4 Halbraumantwort auf vertikale Lasten auf der Halbraumboberfläche

Im Folgenden wird die Bewegungsantwort des Halbraumes an seiner Oberfläche für eine zunächst beliebige transformierte Ansatzfunktion  $p(x,y,z=0,t) \rightarrow \bar{p}(k_x, k_y, \omega)$ , die an der Oberfläche ( $z = 0$ ) angreift, ermittelt.

Unter Verwendung eines harmonischen Lösungsansatzes für die beiden horizontalen Raumrichtungen und die Zeit (siehe z.B. /15/) ergeben sich aus (2.4) und (2.5) im Bildraum folgende gewöhnliche homogene Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{cp^2} - k_X^2 - k_Y^2 \right) \bar{\Phi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_i}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{cs^2} - k_X^2 - k_Y^2 \right) \bar{\Psi}_i = 0 \quad (2.7)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \bar{p}_{zz}(k_X, k_Y, \omega) \\ \tau_{zx} &= 0 \\ \tau_{zy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Schubspannungen in der Fuge Fundament / Boden werden hier zu Null gesetzt und nur der wichtigste Spannungsanteil – der vertikale Kontakt – berücksichtigt. In der Realität stimmt diese Annahme nicht. Mit der vorgestellten Bodenmodellierung könnte die Auswirkung der Schubspannungsübertragung mittels einer Erweiterung um horizontale Ansatzfunktionen untersucht werden. Im Fundamentmodell wären die eingeleiteten Schubspannungen mit einem Versatz von  $d/2$  zur Plattennulllinie zu berücksichtigen. Es ergäbe sich hieraus eine Kopplung mit der Dehnsteifigkeit der Fundamentplatte und ein sich einkoppelndes Versatz-Biegemoment, das dem Moment aus äußerer Belastung der Fundamentplatte entgegenwirkt. Dem Ziel einer vereinfachten praktikablen Lösung wäre diese zusätzliche Betrachtung zumindest zunächst im Wege.

Bei üblichen baupraktischen Verhältnissen von Plattenstärke zu typischen Scherwellenlängen des Bodens wird aufgrund der resultierenden Hebelverhältnisse angenommen, dass eine Schubspannungsübertragung gegenüber dem primären Biegeeinfluss nur untergeordnete Auswirkungen hat, vgl. /4a/.

Da für die drei unbekanntes Verschiebungen vier Ansatzpotentiale zur Verfügung stehen, kann eines beliebig festgesetzt werden. Es wird daher – in mechanisch sinnvoller Weise – der Ansatz  $\psi_z$  für die Scherwelle in z-Richtung zu Null gesetzt, siehe /16a/. Der Verzicht auf tensorielle Schreibweise überführt die Verschiebungen  $u_i$  gemäß Gleichung (2.2) in folgende drei Richtungsanteile, rechter Hand bereits im transformierten Raum:

$$\begin{array}{ll} \text{Originalraum} & \text{Bildraum} \\ u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & u = ik_X \Phi - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \end{array} \quad (2.9)$$

$$\begin{array}{ll} v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} & v = ik_Y \Phi + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \end{array} \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{ll} z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} & z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - ik_Y \Psi_x + ik_X \Psi_y \end{array} \quad (2.11)$$

Mit den allgemeinen Verschiebungs- / Verzerrungsbeziehungen des Kontinuums

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i}) \quad (2.12)$$

und den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

$$\sigma^{ij} = 2\mu\varepsilon^{ij} + \lambda\varepsilon_m^m g^{ij} \quad (2.13)$$

lassen sich die Randbedingungen der Halbraumfläche wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_{ZZ} &= 2\mu \varepsilon_{ZZ} + \lambda(\varepsilon_{XX} + \varepsilon_{YY} + \varepsilon_{ZZ}) = \bar{p}_{ZZ}(k_X, k_Y, \omega) \\ \tau_{ZX} &= 2\mu \varepsilon_{ZX} = 0 \\ \tau_{ZY} &= 2\mu \varepsilon_{ZY} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Der Term der Volumendehnung  $\lambda(\varepsilon_{XX} + \varepsilon_{YY} + \varepsilon_{ZZ})$  verkürzt sich unter Anwendung von (2.4) zu  $-\frac{\omega^2}{cp^2}\lambda$ ,

sodass sich die Randbedingungen in den Ansatzpotentialen  $\Phi$  und  $\Psi$  folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_{ZZ} = 2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - ik_Y \frac{\partial\Psi_X}{\partial z} + ik_X \frac{\partial\Psi_Y}{\partial z}\right) - \lambda \frac{\omega^2}{cp^2}\Phi \quad (2.15)$$

$$\tau_{ZX} = 2\mu\left(ik_X \frac{\partial\Phi}{\partial z} - k_X^2\Psi_Y\right) + \mu\left(k_X k_Y\Psi_X + \left(\frac{\omega^2}{cs^2} - k_Y^2\right)\Psi_Y\right) \quad (2.16)$$

$$\tau_{ZY} = 2\mu\left(ik_Y \frac{\partial\Phi}{\partial z} - k_Y^2\Psi_X\right) - \mu\left(k_X k_Y\Psi_Y + \left(\frac{\omega^2}{cs^2} - k_X^2\right)\Psi_X\right) \quad (2.17)$$

Die Differentialgleichungen (2.6) und (2.7) haben die allgemeinen Wellen-Lösungen

$$\bar{\Phi} = A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} \quad (2.18)$$

$$\bar{\Psi}_i = B_{1i} e^{\lambda_2 z} + B_{2i} e^{-\lambda_2 z} \quad (2.19)$$

mit

$$\lambda_1(k_X, k_Y) = -i\sqrt{\frac{\omega^2}{cp^2} - k_X^2 - k_Y^2} \quad (2.20)$$

$$\lambda_2(k_X, k_Y) = -i\sqrt{\frac{\omega^2}{cs^2} - k_X^2 - k_Y^2} \quad (2.21)$$

Die Forderung nach abklingenden Wellen im Unendlichen schränkt die Lösung auf Berücksichtigung der Konstanten  $A_2$ ,  $B_{2X}$  und  $B_{2Y}$  ein (Sommerfeldsche Abstrahlbedingung).

Einsetzen in die Randbedingungen (2.15) bis (2.17) ergibt in Abhängigkeit der Frequenz nachfolgendes Bestimmungsgleichungssystem im Wellenzahl- / Frequenzraum:

$$\begin{bmatrix} 2\lambda_1(k_X, k_Y) - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\omega}{cp}\right)^2 & 2ik_Y\lambda_2(k_X, k_Y) & -2ik_X\lambda_2(k_X, k_Y) \\ -2ik_X\lambda_1(k_X, k_Y) & k_X k_Y & -k_X^2 - \lambda_2^2(k_X, k_Y) \\ -2ik_Y\lambda_1(k_X, k_Y) & k_Y^2 + \lambda_1^2(k_X, k_Y) & -k_X k_Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2(k_X, k_Y) \\ B_{2X}(k_X, k_Y) \\ B_{2Y}(k_X, k_Y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{p}_{ZZ}(k_X, k_Y) \\ \bar{p}_{ZX}(k_X, k_Y) \\ \bar{p}_{ZY}(k_X, k_Y) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Die Beschränkung auf die Übergabe von Normalspannungen zwischen Fundament und Halbraum im vorliegenden Fall reduziert die rechte Seite des Gleichungssystems auf die Randbedingungen (2.8).

Die Lösung des Gleichungssystems (2.22) liefert im Bildraum für jede Wellenzahlkombination ( $k_x, k_y$ ) und Frequenz ( $\omega$ ) die Werte  $A_2$ ,  $B_{2x}$  und  $B_{2y}$ .

### 2.1.5 Dämpfung und Wellenabstrahlung

Energiedissipation findet bei den vorliegenden Aufgabenstellungen prinzipiell statt in Form von

- a) „geometrischer Dämpfung“ durch Abstrahlung von Wellen ins Unendliche und
- b) Materialdämpfung infolge von Reibungsverlusten der Bodenteilchen untereinander.

Anteil a) wird bei der gewählten Art der Modellbildung bereits berücksichtigt. Die Materialdämpfung b) hingegen wird im Folgenden in Form eines komplexen E-Moduls berücksichtigt, der die gewünschte Phasendifferenz von  $90^\circ$  und ein Verhalten proportional zur Steifigkeit (bzw. Steifigkeitsmatrix) besitzt. Für harmonische Berechnung ist dies zulässig, siehe diesbezüglich z.B. /23/.

$$\mu = G(1 + i\eta) = \frac{E}{2(1 + \nu)}(1 + i\eta) \quad (2.23)$$

Der Beiwert  $\eta$  ist ein Maß dafür, wieviel Energie je Schwingungsdurchgang „verbraucht“ wird. Gegenüber der – vor allem in kommerziellen FE-Programmen – sehr weitverbreiteten viskosen Dämpfung ist die sog. hysteretische Materialdämpfung mit dem Schwingweg und nicht mit der Schwinggeschwindigkeit (Schwinggeschwindigkeit) korreliert und liefert daher bei höheren Frequenzen im Vergleich niedrigere Dämpfungswerte.

Bei Kopplung von Bodenmodell und (kommerziellem) FE-Programm muss daher darauf geachtet werden, dass die vermeintlich vielfältigen Möglichkeiten zur Dämpfungseinstellung zumeist den Charakter einer viskosen Dämpfung haben. Verfügt ein FE-Programm nicht über einen komplexen Gleichungslöser, was i.d.R. der Fall ist, kann eine frequenzunabhängige Materialdämpfung nur simuliert werden, indem die viskose Dämpfung des FE-Modells in jedem Frequenzschritt neu angepasst wird. In Analogie zum EMS ergibt sich in der Eigenfrequenz  $\eta = 2D$ . Für andere Lastfrequenzen ergibt sich die Umrechnung

$$\eta = 2D \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (2.24)$$

Folgende Größen werden im transformierten Raum aufgrund der Einführung einer Materialdämpfung komplex, ohne dass dieses ausdrücklich gekennzeichnet wird:

- E- Modul, Schubmodul
- Wellengeschwindigkeiten
- Lösung von (2.2), Konstanten  $A_2$ ,  $B_{2x}$  und  $B_{2y}$

### 2.1.6 Frequenzraster

Sämtliche vorgestellten Modellierungen können in einem beliebigen Frequenzraster durchgeführt werden. Ist eine anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich erwünscht, muss im Schmalband unter Mitnahme der Phase bzw. komplex gerechnet werden. Die Berechnung kann in jedem Fall vektorisiert erfolgen, d.h. separat für jede Frequenz. Für die Berechnung der Systemantwort auf transiente Lasten muss auf die Vorgehensweise in Abschnitt 7.1.3 verwiesen werden.

## 2.2 Bestimmung der Bodenantwort im Bildraum

### 2.2.1 Rotationssymmetrische Ansatzfunktionen

Für die meisten der in dieser Arbeit genannten Modelle wurde als Ansatzfunktion analog /35/ eine Gaußsche Glockenkurve verwendet, deren Volumen für eine einfache Handhabung auf den Wert eins normiert wird.

$$p(x, y) = e^{-\frac{1}{2a^2}(x^2 + y^2)} \quad \text{mit} \quad 4 \cdot \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} p(x, y) \, dx dy = 1 \quad (2.25)$$

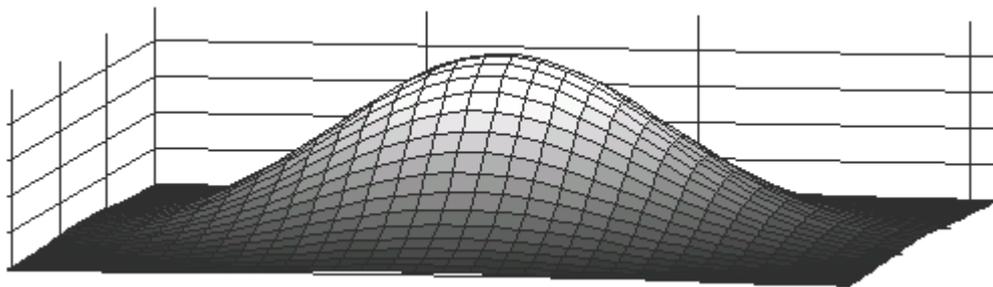


Abb. 2.2: Ansatzfunktion Gaußsche Glockenkurve

In Hinblick auf die Kopplung mit einem biegeweichen Fundament ist man prinzipiell in der Wahl der Ansatzfunktion frei, die gewählte Ansatzfunktion bietet jedoch folgende Vorteile:

- Unkritisches Verhalten, die Absolutbreite der Funktion (Freiwert  $a$ ) betreffend
- Numerisch unanfällig aufgrund ausgerundeter Lasten (keine Lastspitzen am Kontaktpunkt)
- Gute „Formbarkeit“ bzgl. der diskreten Zusammensetzung eines Spannungsverlaufes zwischen Fundament und Boden, rasches Abklingen in Zeit- und Spektral-Bereich /35/

Die Transformationen in den Wellenzahlraum können für diese einfach zu integrierende Ansatzfunktion noch analytisch ermittelt werden (s. Anhang 2.1). Unter Anwendung von Bronstein /3 /, Integral Nr. 1.1.3.4-3 ergibt sich schließlich:

$$p(k_x, k_y) = a e^{-\frac{1}{2a^2}(k_x^2 + k_y^2)} \quad (2.26)$$

### 2.2.2 Modifizierte Ansatzfunktion

Erwähnt werden muss, dass die Abbildung der Spannungsverteilung zwischen einem biegeweichen Fundament und dem Boden in beiden horizontalen Richtungen eine bestimmte Anzahl diskreter Ansatzfunktionen benötigt. Bei der Kopplung eines eindimensionalen Balkenmodells mit dem dreidimensionalen Halbraum ergibt sich unter Verwendung einer nur einreihigen Kette dieser Ansatzfunktionen (Diskretisierung nur in X-Richtung) ein äußerst schlecht angenäherter Verlauf der Kontaktspannungen in Querrichtung (Y-Richtung).

In diesem Fall bietet sich die Verwendung nicht-rotationssymmetrischer Ansatzfunktionen an (siehe Fensterausschnitt nachfolgend):

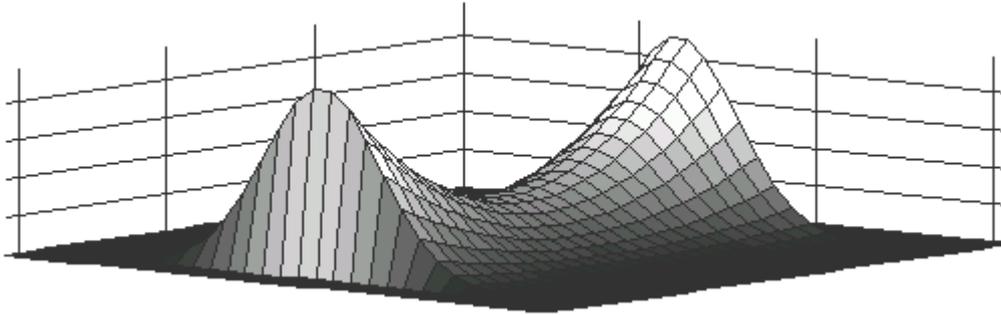


Abb. 2.3: Beispiel für eine modifizierte Ansatzfunktion (Fensterausschnitt)

Aufgrund fehlender Rotationssymmetrie wird sich jedoch oberhalb einer bestimmten Frequenz ein unerwünschtes Interferenzmuster an der Halbraumoberfläche abzeichnen, welches innerhalb des Koppelbereiches Fundament – Boden zu Störungen führen kann. Diese Ansatzfunktion wurde daher in keiner der nachfolgenden Modellierungen verwendet.

### 2.2.3 Ermittlung der Verschiebungen an der Halbraumoberfläche

Die Rückrechnung auf die interessierenden Verschiebungen der Halbraumoberfläche  $z = 0$  infolge vertikal einwirkender harmonischer Belastung geschieht wie folgt:

- Ansatzpotenziale  $\Phi$  und  $\Psi_i$  nach Gl.(2.18) und (2.19)
- Verschiebungsgrößen nach Gl.(2.9) bis (2.11)

Die nachfolgende Rücktransformation nach den Wellenzahlen beider horizontaler Raumrichtungen eignet sich für beliebig gewählte Ansatzfunktionen (nicht nur rotationssymmetrische). Bei der Kopplung eines Balkenmodells mit dem Halbraum ist es daher z.B. möglich, in Querrichtung eine der Halbraumreaktion entsprechende Verteilung der Kontaktspannungen zu wählen (vgl. obenstehende Abb.).

## 2.3 Rücktransformation

### 2.3.1 Antwort auf beliebige, auch auf nicht rotationssymmetrische Halbraumlaster

Die Rücktransformation erfolgt gemäß Abb. 2.1 mittels zweifacher Fouriertransformation nach der Wellenzahl und einfacher Transformation nach der Zeit:

$$f(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{f}(k_X, k_Y, \omega) e^{ik_X x} dk_X) e^{ik_Y y} dk_Y) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.27)$$

Im Fall harmonischer Belastung genügt es, nur die Ortstransformationen durchzuführen und das Ergebnis für die Lastfrequenz zu bestimmen.

### 2.3.2 Rücktransformation rotationssymmetrischer Lasten

Nach /35/ kann man sich die Rotationssymmetrie von Ansatzfunktionen zu Nutze machen, indem anstelle der zweifachen Fourierreücktransformation eine Besseltransformation durchgeführt wird. Im Ortsraum ergibt sich – unabhängig von der gewählten Rücktransformation – ein rotationssymmetrisches Wellenfeld.

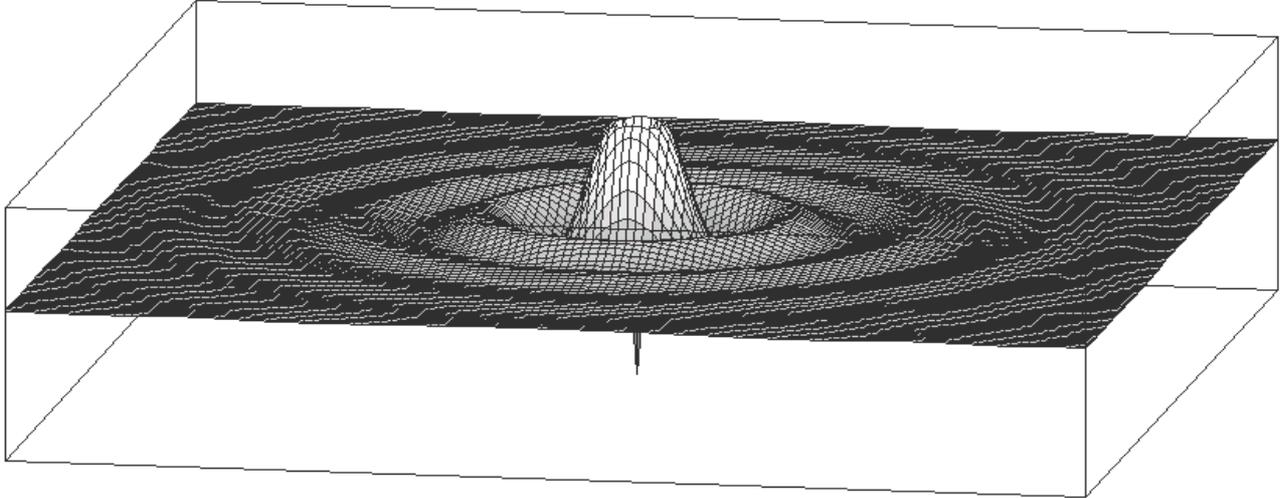


Abb. 2.4: Realteil der Halbraumantwort auf Gaußsche Lastfunktion im Ortsbereich

### 2.3.3 Behandlung nicht rotationssymmetrischer Lasten

Für die in Abb. 2.3 gezeigten Ansatzfunktionen oder auch zur Berechnung der Bodenantwort unter beliebig räumlich verteilter Belastung kann die Hin- und Rücktransformation als doppelte Fouriertransformation durchgeführt werden. Bei bekannter Belastung der Halbraumoberfläche oder vernachlässigbar geringer Rückwirkung der Halbraumantwort auf die einwirkende Kraft kann so auch bei komplizierter Lastgeometrie auf relativ einfache Weise eine Prognose der Freifelderschütterungen erstellt werden.

Die resultierende Spannungseinwirkung auf die Halbraumoberfläche wird dabei – anders als in /35/ – nicht über eine Diskretisierung der Last über Gauß'sche Ansatzfunktionen erfasst. Die bekannte Last kann nach doppelter Transformation in den Wellenzahlbereich direkt als  $\underline{p}_{zz}(k_x, k_y)$  in das Gleichungssystem (2.22) eingegeben werden.

Im Anwendungsfall einer Großteil-Mehrstufenpresse konnte z.B. mittels direkter Transformation des Lastbildes eine qualitative Wellenabstrahlung sehr einfach ermittelt werden:

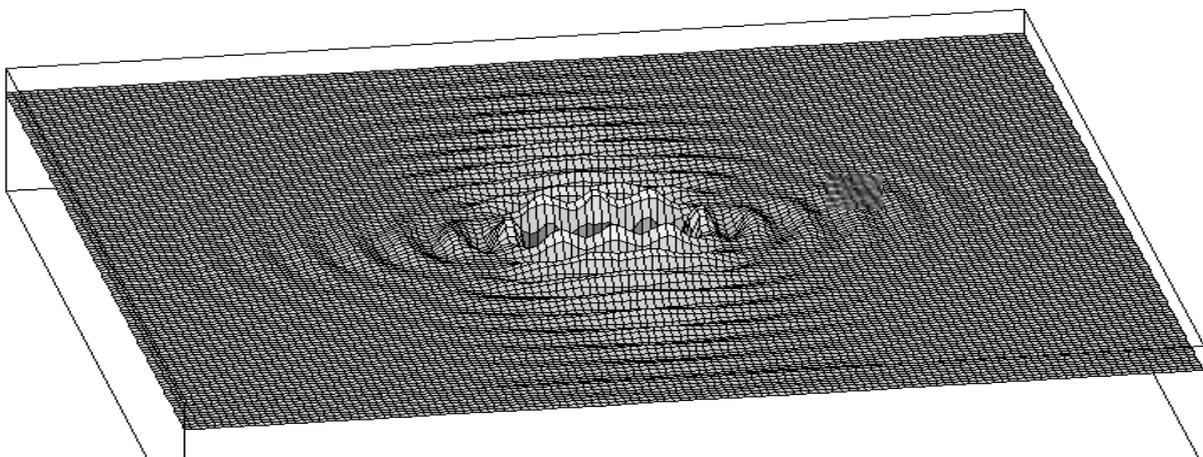


Abb. 2.5: Beispiel: Abgestrahlte Pressenerschütterungen 7300 to Presse länglicher Bauform, vertikale Auslenkung der Halbraumoberfläche, 8 Hz, Kraftanregung

Deutlich erkennbar sind in obiger Abbildung die beiden bevorzugten Hauptabstrahlrichtungen und die Umwandlung der zunächst ebenen Wellenfronten hin zu einer annähernd ringförmig abgestrahlten Rayleighwelle in großer Entfernung.

### 2.3.4 Wellenfeld unter erzwungener Weganregung eines starren Fundamentes

Die Vorgehensweise erfolgt analog /35/ mittels rotationssymmetrischen Ansatzfunktionen. Es wird für erzwungene Vertikal- oder Kippschwingungen für  $n$  Kopplungspunkte einer starren Fundamentplatte mit dem Boden ein Verschiebungsvektor  $U_n$  gemäß der einwirkenden, erzwungenen Verformungsfigur erzeugt. Für eine harmonische Vertikalbewegung des Fundamentes wird z.B.  $U_n = 1$  gesetzt.

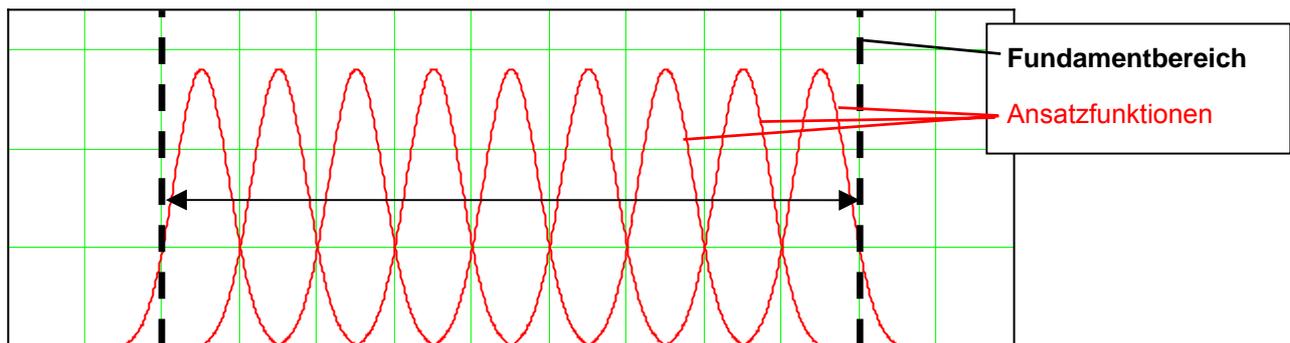


Abb. 2.6: Prinzip der Überlagerung Gaußscher Ansatzfunktionen (einachsig),  $U_{n=1..9} = 1$ , Vertikalanregung

Zu errechnen sind die Koeffizienten  $C_n$  mit welchen die einzelnen Ansatzfunktionen  $P_n$  zu gewichten sind, sodass sich bei Superposition der Bodenantworten an der Halbraumboberfläche die gewünschte (erzwungene) Auslenkung ergibt (s. Abb. 2.7 und 2.8). Hierfür werden grob folgende Schritte durchgeführt:

- Erstellen Abstandsmatrix  $[R]$ , Größe  $n \times n$ , die gegenseitigen Abstände aller Koppelpunkte zueinander beinhaltend (Hauptdiagonale mit Nullen besetzt).

$$R_{m,n} = \sqrt{[x(P_m) - x(P_n)]^2 + [y(P_m) - y(P_n)]^2} \quad (2.28)$$

- Erstellen einer Matrix  $[A(R)]$ , die vertikalen Verschiebungen der Halbraumboberfläche an allen Koppelpunkten infolge normierter Last an ebenfalls allen Koppelpunkten enthaltend.

$$A_{m,n} = u(R_{m,n}) \quad (2.29)$$

- Lösen des vollbesetzten komplexen Gleichungssystems  $[A] \cdot [C] = [U]$  ergibt.  $U$  ist der Vektor der Zwangsverformung der Kontaktpunkte an der Halbraumboberfläche.

Die nachfolgenden Beispielabbildungen enthalten die Auslenkung der Halbraumboberfläche (Realteil) eines starren Fundamentes, das in  $8 \times 16$  Punkten mit dem Halbraum gekoppelt wurde:

- Abb. 2.7, Vertikalanregung,  $u(x,y) = \bar{1}$
- Abb. 2.8, Kippanregung,  $u(x,y) = x \cdot \varphi_y = x \cdot \bar{1}$

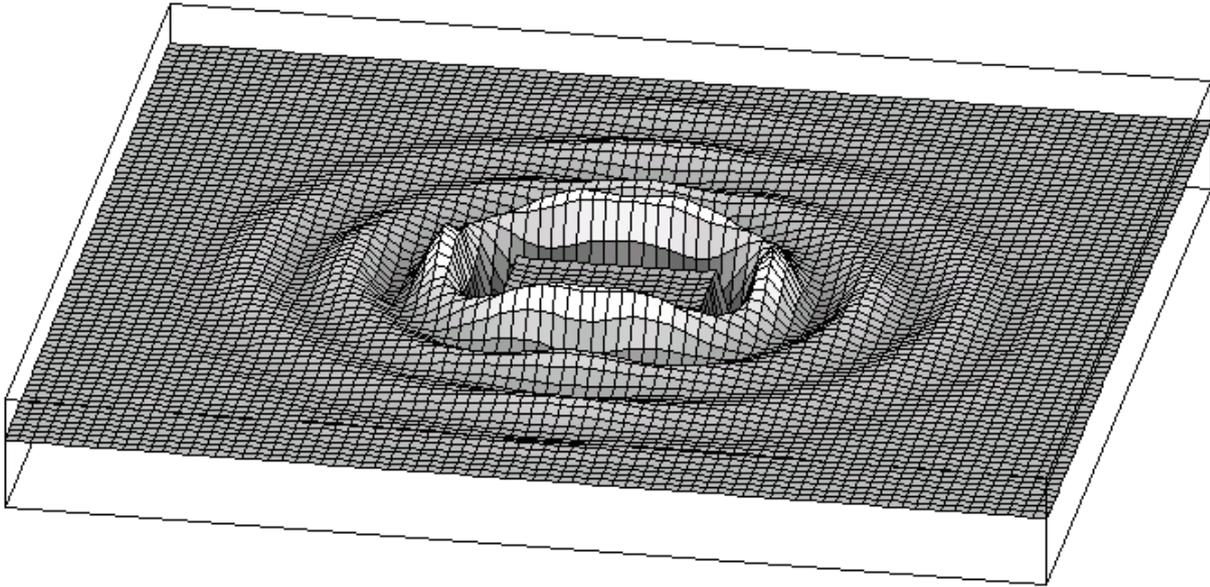


Abb. 2.7: Realteil Halbraumboberfläche vertikal, bei erzwungener Vertikalbewegung eines starren Fundamentes 32 m x 16 m, Diskretisierung 2 m

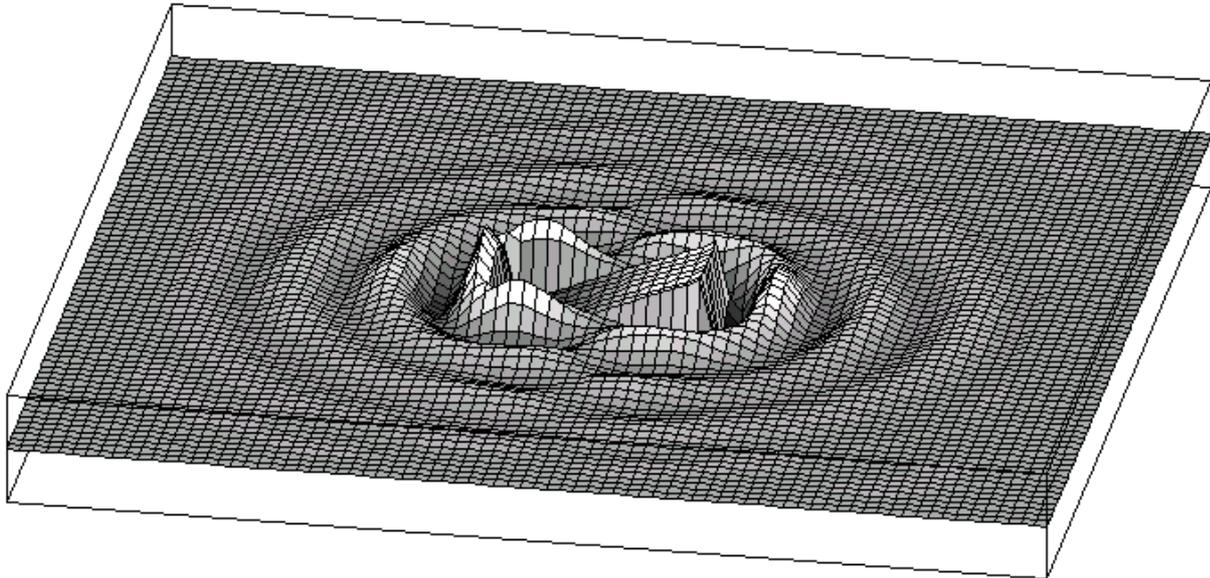


Abb. 2.8: Wie Abb.2.7, jedoch erzwungene Kippbewegung des Fundamentes um die Querachse

### 2.3.5 Verifizierung – Optimierung der Ansatzfunktionen – Sensitivität

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse einer Parameterstudie dienen der Kontrolle von Berechnung und Programmierung obenstehender Ansätze durch Vergleich mit der Lösung für starre Kreisfundamente /31/. Zu untersuchen war hinsichtlich der Sensitivität der Ergebnisse vor allem

- Variation der Fülligkeit der Ansatzfunktionen
- Variation der Diskretisierung bzgl. Kontaktpunkten
- Ferner: Einfluss der Fenstergröße, unzureichende Diskretisierung des Bodens bei kurzen Wellenlängen

Wegen des letzten Punktes wurden sämtliche Berechnungen sehr breitbandig im Terzrastrer von 1,25 Hz bis 400 Hz durchgeführt. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes ist es nicht sinnvoll, den Einfluss sämtlicher Parameter zu überprüfen. Kontrollen zu den Auswirkungen der Bodenparameter z.B. wurden daher schon bei Transformation und Rücktransformation einzelner Ansatzfunktionen durchgeführt.

Vertikale dynamische Steifigkeit, Variation der Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen (Gl.2.25):

Modelliert wurde analog Abschnitt 2.3.4 ein starres Fundament mit einer Größe von 8 m x 10 m, gewählte Diskretisierung der Kontaktpunkte relativ grob mit  $\Delta = 2$  m, Diskretisierung Boden = 1 m.

Mit der Referenzlösung nach /11/, /31/, /9/ wird der Betrag der dynamischen Steifigkeit und die Phasenlage verglichen, ohne Berücksichtigung der Fundamentmasse (s. untenstehende Abbildungen).

Die Ermittlung der komplexen Größe der dynamischen Steifigkeit  $C_{dyn}$  erfolgt bei  $i = 5$  Ansatzfunktionen in Längsrichtung und  $j = 4$  Ansatzfunktionen in Querrichtung nach folgender Gleichung:

$$C_{dyn} = \frac{1}{u} \sum_{i=1..4} \sum_{j=1..5} C_{i,j} \quad (2.30)$$

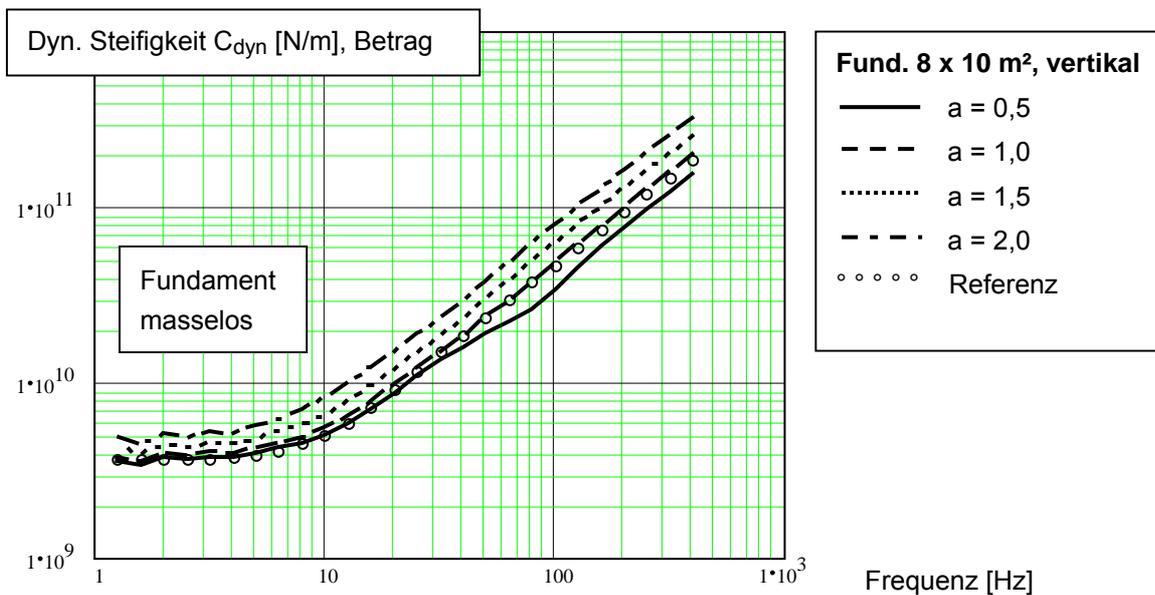


Abb. 2.9: Betrag  $C_{dyn}$ , Variation Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen (2.25), Vergleich mit /31/ (= Referenz)

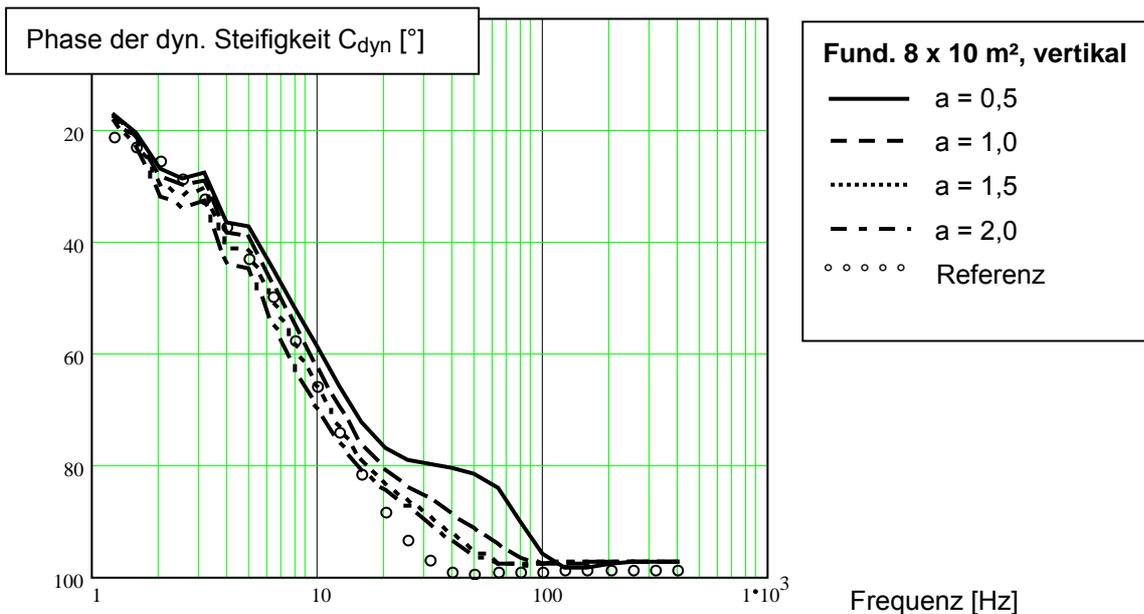


Abb. 2.10: Phase  $C_{dyn}$ , Variation Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen (2.25), Vergleich mit /31/ (= Referenz)

Die Grenzen hinsichtlich der gewählten Diskretisierung sind offensichtlich:

- Tieffrequent: Einschränkung durch Wellenreflexion, dadurch Welligkeiten in Abb. 2.9 und 2.10
- Mittelfrequent: Abweichungen im Phasenwinkel – der Realteil (keine Abb.) verringert sich zu höheren Frequenzen hin langsamer als bei der Referenz. Der Imaginärteil hingegen zeigt gute Übereinstimmung mit der Referenz (in diesem Frequenzbereich bereits maßgebend für den Betrag der dyn. Steifigkeit)
- Höherfrequent sind bzgl. der dynamischen Steifigkeit starrer Fundamente keine Einschränkungen erkennbar. Die Wellenabstrahlung wird jedoch bei grober Bodendiskretisierung zu höheren Frequenzen hin zunehmend ungenauer abgebildet (vgl. Abb. 2.7 und 2.8).

Zu hohen Frequenzen hin – der Boden wirkt als Dämpfer – beträgt die Phasenlage in allen gerechneten Beispielen (auch für die Referenz)  $95^\circ - 100^\circ$ . Ein Wert von  $90^\circ$  wäre zu erwarten gewesen.

Erklärungsversuch: Es wurde mit einer relativ hohen Materialdämpfung gerechnet, um den Einfluss von Reflexionen am Fensterrand zu verringern. Auch für die Referenz wurde stets diese hohe Dämpfung angesetzt. Der Imaginärteil des komplexen Schubmoduls des Bodens wird mit dem imaginären Dämpfungsanteil des Bodens multipliziert, wodurch ein höherfrequent relativ konstanter Anteil mit  $180^\circ$  Phasenversatz entsteht.

Vertikale dynamische Steifigkeit, verfeinerte Diskretisierung der Kontaktpunkte:

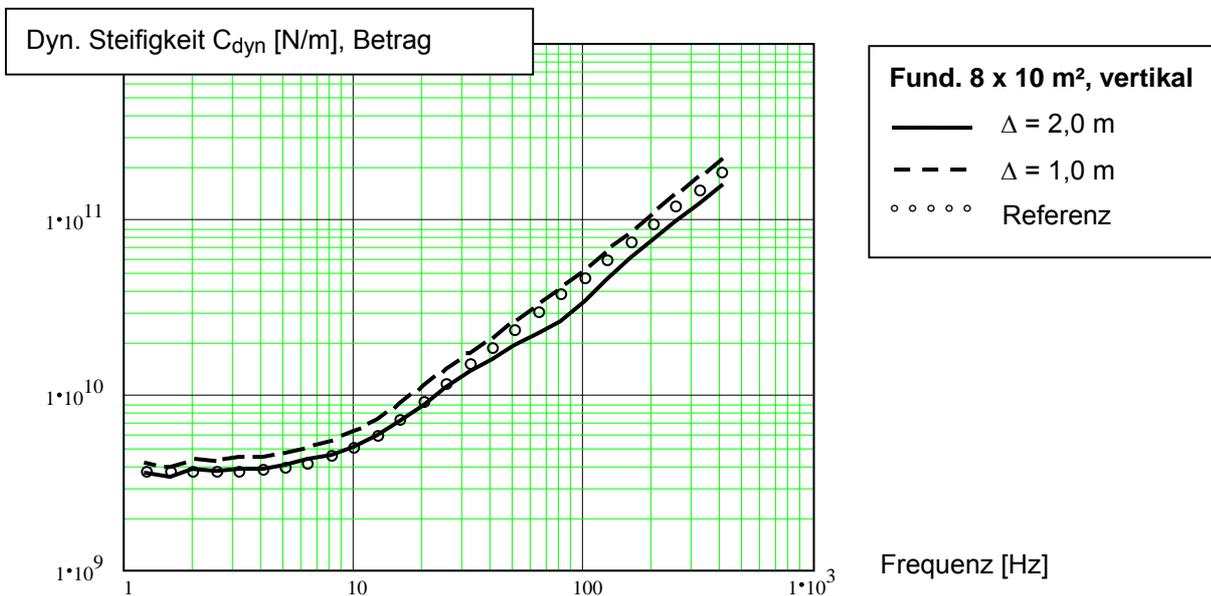


Abb. 2.11: Betrag  $C_{dyn}$  bei unterschiedlicher Diskretisierung, Vergleich mit /31/ (= Referenz)

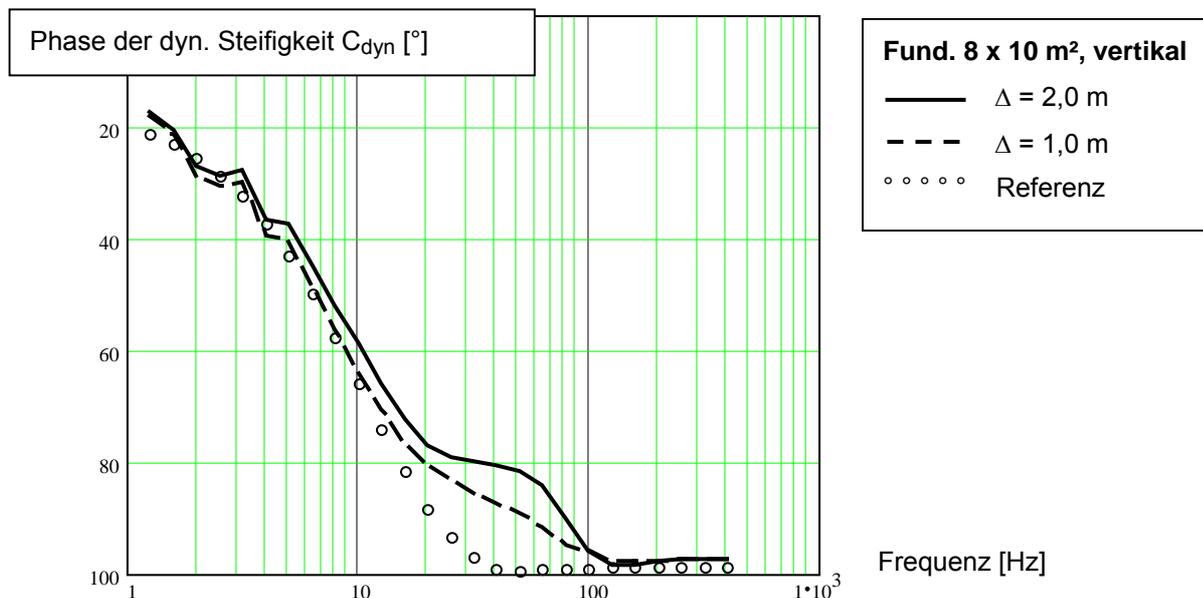


Abb. 2.12: Phase  $C_{dyn}$  bei unterschiedlicher Diskretisierung, Vergleich mit /31/ (= Referenz)

Eine verfeinerte Diskretisierung ergibt mittel- und höherfrequent bessere Übereinstimmung mit der Referenz, vor allem bzgl. des Verhältnisses von Imaginär- zu Realteil im Bereich einer normierten Frequenz von  $a_0 = 1$ . Tieffrequent wird dies mit einer etwas zu großen Steifigkeit erkauft (Realteil zu groß). Eine entsprechend schmalere Ansatzfunktion ( $a = 0,3$ ) würde hier Verbesserungen bringen. Es soll an dieser Stelle jedoch nur die qualitative Auswirkung einer Netzverfeinerung untersucht werden, um z.B. Programmierfehler auszuschließen.

Dynamische Steifigkeit gegenüber Verdrehung, Variation der Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen (Gl.2.25):

Die Ermittlung der komplexen Größe der dynamischen Drehsteifigkeit  $C_{\varphi \text{ dyn}}$  erfolgt analog Gleichung (2.30) für die Kippbewegung:

$$C_{\varphi \text{ dyn}} = \frac{1}{\varphi_y} \sum_{i=1..4} \sum_{j=1..5} C_{i,j} \cdot s_{i,j} \quad (2.31)$$

Der Wert  $s_{i,j}$  bezeichnet den senkrechten Abstand der jeweiligen Ansatzfunktion von der Drehachse.

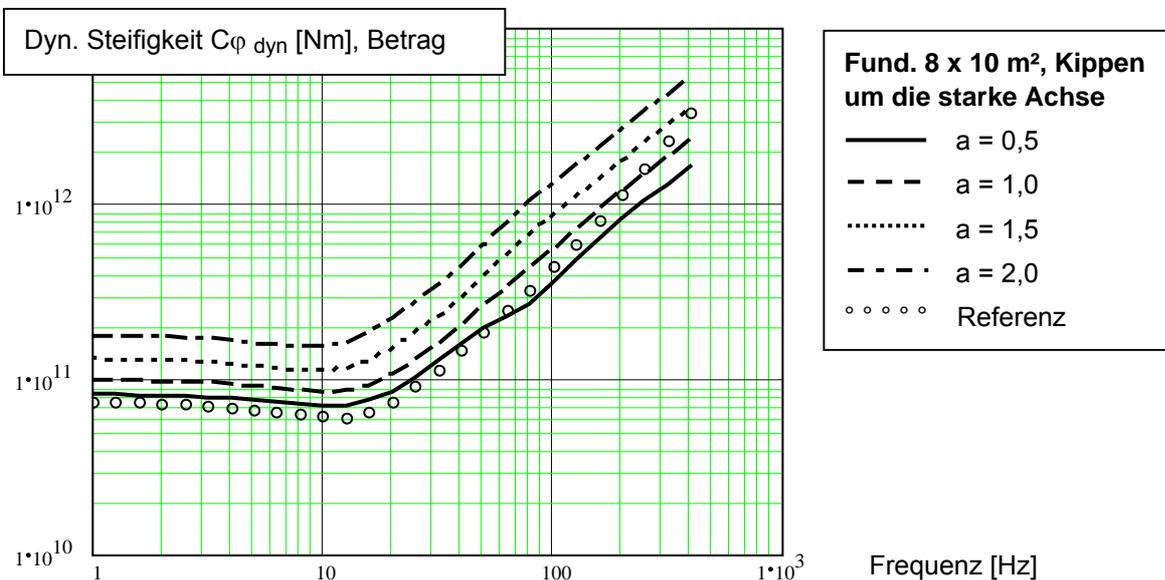


Abb. 2.13: Betrag  $C_{\varphi \text{ dyn}}$ , Variation Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen, Vergleich mit /31/ (= Referenz)

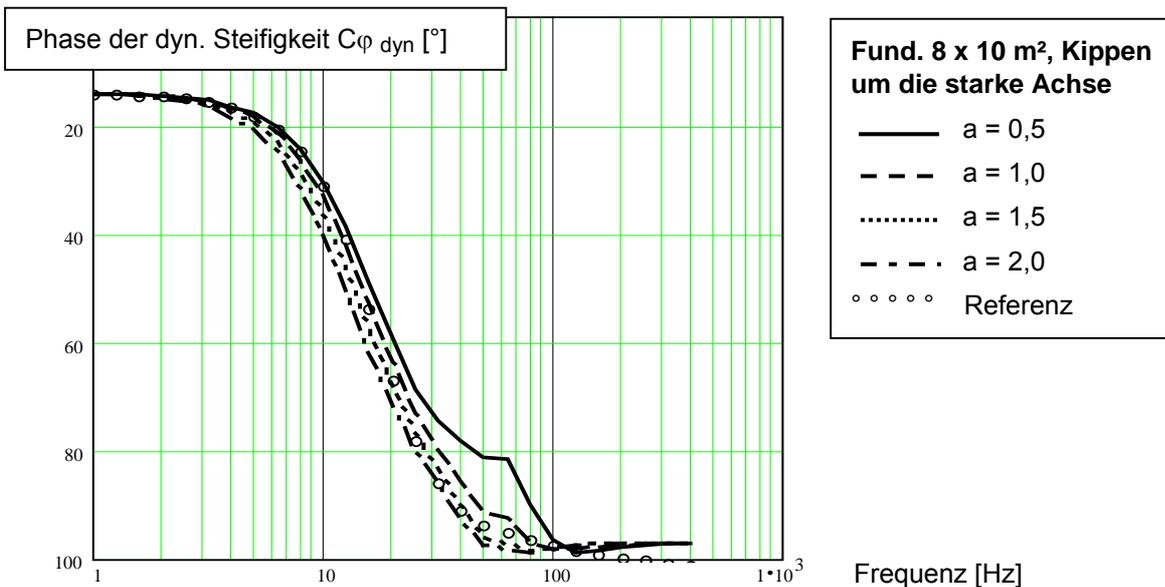


Abb. 2.14: Phase  $C_{\varphi \text{ dyn}}$  Variation Fülligkeit  $a$  der Ansatzfunktionen, Vergleich mit /31/ (= Referenz)

Bei der Kippbewegung treten erwartungsgemäß größere Abweichungen – vor allem bei der Wahl von breiten Ansatzfunktionen – auf, da entsprechend ihrer Gewichtung mit dem jeweiligen Hebelarm wenige Ansatzfunktionen im Randbereich überbewertet werden und dies offensichtlich zu einer Versteifung führt. Bei grober Diskretisierung stellt sich daher erneut die Frage des „Überstandes“ des gedachten Fundamentes über die Kontaktpunkte im Randbereich (s. Abb.).

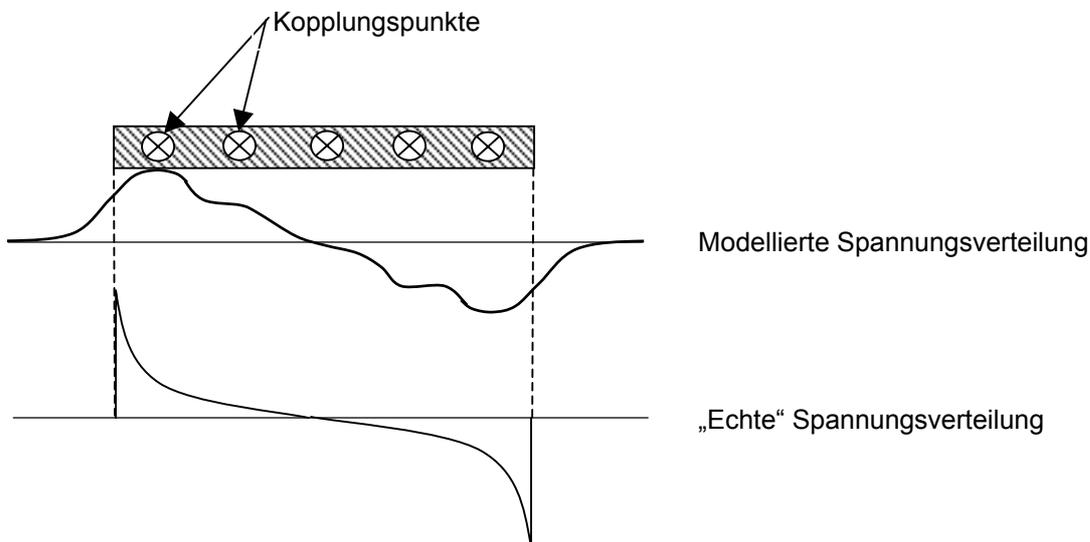


Abb. 2.15: Qualitativer Vergleich der Spannungsverteilungen im Modell und in Realität

Fazit des durchgeführten Vergleiches mit der Referenzlösung /31/:

Gute Übereinstimmung bzgl. des Betrages liefern relativ schmale Ansatzfunktionen, die geeigneter sind, die Kontaktspannungen zwischen Boden und Fundament wiederzugeben.

Breitere Ansatzfunktionen sind im vorliegenden Beispielfall hingegen bzgl. der Phasenlage überlegen, da sich bei schmalen Ansatzfunktionen der Realteil der dynamischen Steifigkeit mit zunehmender Frequenz langsamer verringert (und negativ wird) als bei der Referenzlösung.

Die in diesem Abschnitt abgebildeten Spektren der dynamischen Steifigkeit wurden mit einer relativ groben Diskretisierung erstellt, da jeder Frequenzschritt eine eigene Halbraumberechnung darstellt und daher insgesamt sehr viele Berechnungen durchzuführen waren.

Bei der gewählten Diskretisierung klingen weder die längsten Oberflächenwellen vollständig ab, noch können die kürzesten Wellen ausreichend abgebildet werden. Trotzdem kann die Übereinstimmung mit der Referenz bereits als relativ gut bezeichnet werden.

### 3 System Halbraum – Fundament

#### 3.1 Überblick

Die vorliegende Arbeit stellt bei der Behandlung der Gebäude-Bauwerksinteraktion folgende, ihrer Komplexität nach geordnete Modellierungsvarianten vor:

*In Abschnitt 3:*

Variante	Bodenmodellierung	Fundamentmodellierung
a) Plattenmodell	Halbraum, 3 D	Platte, 2 D, FE-Modellierung (höherwertige Ansätze, siehe /34/)
b) Balkenmodell	Halbraum, 3 D	Biege-Schub-Balken <sup>1</sup> als FE-Modellierung, 1 D

*In Abschnitt 4:*

c) „Winklermodell“	Bettung <sup>2</sup> nachiteriert, komplex, frequenzabhängig	Timoshenkobalken <sup>1</sup> , 1 D
d) Ersatzmodell	Bettung wie c)	Ausschnitt in frequenzabhängiger Größe, 1 D, Eigenschwingverhalten getrennt berücksichtigt
e) Ersatzformel	Bettung in Form einer weitgehend modifizierten, eine Iteration beinhaltenden Lösungsformel	Ausschnitt in frequenzabhängiger Größe, 1 D, Auswirkungen der Eigenschwingungen des Fundamentes als mögliche Schwankungsbreite

*Tabelle 3.1: Modellierungsstufen*

Die Modelle c) und d) wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit aus dem Textteil der Arbeit weitgehend entfernt. Sie sind lediglich als „Zwischenstationen“ auf dem Weg zu einer vereinfachten Modellierung zu betrachten und werden daher in ihrer Funktionsweise nur grob umrissen. Im Anhang 4.3 finden sich die Ergebnisse einer exemplarischen Parameterstudie, die mit diesen beiden Modellen durchgeführt wurde.

Naturgemäß ergibt sich von a) nach e) mit weitreichenderen Vereinfachungen ein verbessertes Handling bei allerdings wachsender Ergebnisunschärfe. Im Folgenden wird versucht, die Abweichungen zu quantifizieren und somit eine Entscheidungsgrundlage für die Wahl der Modellierung zu liefern.

Im Sinne einer Ersatzmodellierung können nur die Varianten b) bis e) als anwendungstauglich angesehen werden, die mit vergleichsweise geringem Modellierungsaufwand zu erstellen und somit leicht mit einem Gebäudemodell koppelbar sind.

Kontrollen der vereinfachenden Modellierungen wurden u.a. mit den komplexeren Modellen durchgeführt, was jedoch immer nur stichprobenartig erfolgen konnte und kein Beweis für die Allgemeingültigkeit der vereinfachten Modelle sein kann. Besonderen Effekten, wie z.B. Spuranpassung und ggf. resultierenden Impedanz- bzw. Dämpfungseinbrüchen musste daher gesondert Aufmerksamkeit geschenkt werden. Die Nutzung der vorgestellten Modellierungen erfordert daher vom Anwender eine erhöhte Aufmerksamkeit bzgl. der vorliegenden Einschränkungen.

<sup>1</sup> Vernachlässigung der Drehträge gegenüber dem Timoshenkobalken

<sup>2</sup> Bettungsmodell siehe Abschnitt 4.1

### 3.2 Das „Plattenmodell“

#### Warum eigens erstellte FE-Modellierungen?

Wie unter Abschnitt 2.1.5 „Dämpfung“ bemerkt, eignen sich gebräuchliche kommerzielle FE-Programme nicht zur direkten Kopplung mit der vorgestellten Bodenmodellierung, da – vermutlich aus der Entstehungshistorie heraus – im Allgemeinen kein komplexer Gleichungslöser verwendet wird.

Daher, und um Kompatibilitätsprobleme der Schnittstellen zwischen mehreren Programmen zu vermeiden, wurden die folgenden, auf Finite-Element-Methoden beruhenden Modellierungen der Fundamentplatten und –balken erstellt.

Hinsichtlich Elementraster und Anzahl der berechenbaren Elemente bestehen hierbei deutliche Einschränkungen, so sind z.B. 100 Plattenelemente bereits als „großes“ Modell zu werten. Auch bezüglich der Geometrie bestehen starke Einschränkungen, z.B. auf reine Rechteckformen.

Andererseits stand im vorliegenden Fall die FE-Modellierung nicht im Vordergrund. Sie diene der Untersuchung der Kopplungsmöglichkeiten mit dem Boden, der Durchführung von Sensitivitätsstudien (z.B. Diskretisierung von Ansatzfunktionen) und der Kontrolle vereinfachender Ersatzmodellierungen. Bei diesen Aufgaben geht es nicht um hohe Wirtschaftlichkeit, sondern darum, dass die Auswirkungen aller relevanten Einflussgrößen erfasst werden können. Dies kann jedoch hinsichtlich der „black-box“ FE-Modellierung nur der Fall sein, wenn Funktionsweise und Grenzen vollständig transparent vorliegen.

#### 3.2.1 FE-Modellierung, Modellierungsgrundlagen und Vereinfachungen

Im Folgenden sind in Kurzform die Berechnungsgrundlagen der selbst erstellten FE-Modellierung aufgelistet:

- FE-Platte nach Schäfer (s. Anhang 3.1)
- Keine Schubdeformation
- Massenträgheit berücksichtigt mittels Lumped-Mass Methode
- Materialdämpfung in Form von hysteretischer (komplexer) Dämpfung

Weiter soll an dieser Stelle nicht auf die FE-Modellierung eingegangen werden, da diese Modellierung nur ein eingesetztes Werkzeug darstellt, nicht jedoch an sich interessiert.

#### 3.2.2 Kopplung mit dem Halbraum

Prinzipiell stehen mehrere Möglichkeiten der Anbindung der Platte an die Bodenmodellierung zur Verfügung:

- a) Iterationsverfahren
- b) Kraftgrößenverfahren
- c) Aufstellen einer Nachgiebigkeitsmatrix für den Boden, Invertierung in Steifigkeitsmatrix

Gewählt wurde die elegante und programmiertechnisch einfach umsetzbare Variante c).

Im rotationssymmetrischen Fall gilt für die rücktransformierte Antwort des Halbraums:

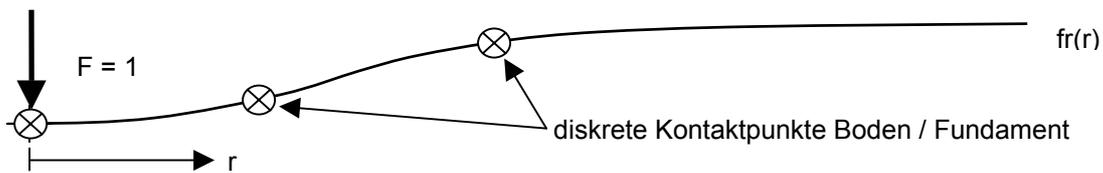
$$fr(r, \omega) \leftarrow f\left(x = \frac{r}{\sqrt{2}}, y = \frac{r}{\sqrt{2}}, \omega\right) \quad (3.1)$$

Die Funktion  $fr(r, \omega)$  quantifiziert für jede Frequenz den wechselseitigen Einfluss zwischen den Kontaktpunkten von Fundamentplatte und Halbraum in vertikaler Richtung.

Aufstellung der Steifigkeitsmatrix für den Halbraum:

- Wird an einem Kontaktpunkt die Halbraumboberfläche durch eine Ansatzfunktion der Größe 1 belastet ergibt sich dort eine Einsenkung  $fr(0, \omega)$ , die den Boden an sämtlichen anderen Kontaktpunkten im Abstand  $r$  mit  $fr(r, \omega)$  beeinflusst: Kontaktpunkte in geringer Entfernung liegen im Bereich des sich einstellenden Einsenkungstrichters – bei höheren Frequenzen werden alle Kontaktpunkte von abgestrahlten Wellen bestrichen. Aufgrund des Kontaktes zum Fundament kann die Bewegung nicht frei erfolgen. Es muss daher die Verträglichkeit der Verformungen hergestellt werden.
- Die Wechselwirkung zu jedem anderen Kontaktpunkt wird über eine komplexe Relativfeder (mit negativem oder positivem Realteil) beschrieben:

Beispiel: Einsenkungsmulde, freie Oberfläche, Ausschnitt mit 3 Kontaktpunkten



Mechanisches Ersatzmodell, Ausschnitt (Federn jeweils als Symbol für komplexe dyn. Steifigkeiten):

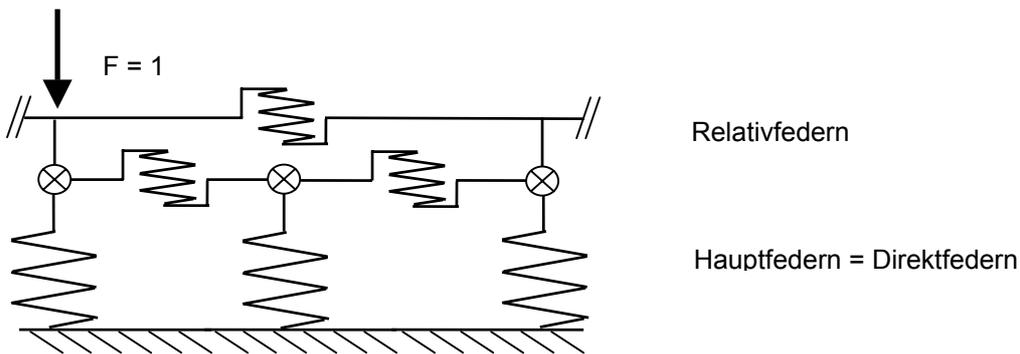


Abb. 3.1: Diskretes Ersatzmodell des elastischen Halbraumes, Ausschnitt mit 3 Kontaktpunkten

- Die abgebildeten Relativfedern werden für eine Ansatzfunktion, also von einem Kontaktpunkt  $i$  zu jedem anderen Kontaktpunkt  $j$  benötigt, daher ergeben sich bei  $n$  Kontaktpunkten insgesamt  $n^2$  zu berücksichtigende komplexe Steifigkeitsterme je berechneter Frequenz. Da sich die Werte  $k_{ij}$  und  $k_{ji}$  entsprechen, reduziert sich die mechanisch anschauliche Federanzahl auf  $n!$ .
- Bestimmung der Werte der Nachgiebigkeitsmatrix  $N$  für die  $n$  Direktfedern (Kontaktpunkt – starres Ende)

$$N_{ij}(\omega) = fr(0, \omega) \tag{3.2}$$

- Bestimmung der Werte der Nachgiebigkeitsmatrix für die Relativfedern (Kontaktpunkt – Kontaktpunkt)

$$N_{ij}(\omega) = fr(r(i, j), \omega) \tag{3.3}$$

- Es ergibt sich eine vollbesetzte komplexe Matrix mit folgendem Aufbau:

$$N(\omega) = \begin{bmatrix} N_{11}(\omega) & N_{12}(\omega) & \dots & N_{1n}(\omega) \\ \dots & N_{22}(\omega) & \dots & N_{2n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{sym.} & \dots & \dots & N_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Direktfedernachgiebigkeiten  
in den Hauptdiagonalwerten  
enthalten

- Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix zu einer **Steifigkeitsmatrix  $K_b$** , die die Steifigkeitsverhältnisse bzgl. der Kontaktpunkte inkl. der horizontalen Kopplung über den Boden beinhaltet

### 3.2.3 „Einbau“ der Direkt- und Relativfedern

Unterschieden wird zwischen den Fällen Kraftanregung und Fußpunktanregung. Für die Fußpunktanregung wird eine Lage des Fundamentes im Fernfeld einer Anregungsquelle vorausgesetzt. Der Einfluss der Dehnsteifigkeit des Fundamentes auf die Wellencharakteristik wird vernachlässigt.

#### Kraftanregung

Die Direktfedern enden gedanklich gegen ein starres Auflager.  $K_b$  ist lediglich gemäß FEM auf die entsprechenden FHG der Steifigkeitsmatrix der Plattenmodellierung aufzuaddieren.

#### Fußpunktanregung

Die Freifeldanregung greift am unteren Ende der Direktfedern an (s. Abb.), so dass sich eine Aufteilung der Anregung anteilig der Impedanzverhältnisse von Platte und Boden ergibt.

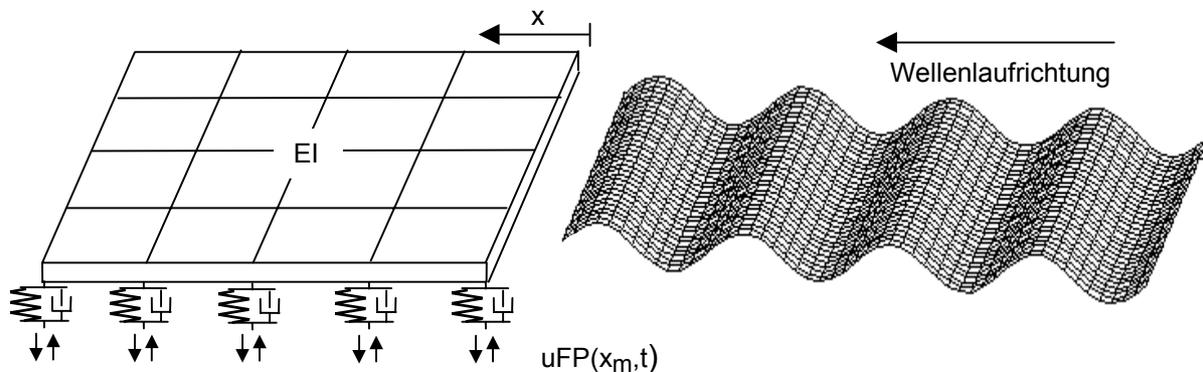


Abb.3.2: Aufbringen der Freifeldanregung an den Federfüßpunkten

Die Lösung kann gemäß FEM – analog dem Lastfall Stützensenkung in der Statik – erfolgen. Erwähnt werden hier nur die Besonderheiten einer dynamischen Berechnung.

Harmonische Fußpunktanregung:

$$u_{FP_m} = u_{FP}(x_m, t) = u_0 e^{2\pi i \left( \frac{x_m}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)} \quad (3.5)$$

- $x_m$ : Abstand des Kopplungspunktes vom Fundamentrand in Richtung der laufenden Welle
- $\lambda$ : Wellenlänge im Boden bzw Wellenlänge des Systems Boden – Platte, siehe Gl. (4.5a)
- $t$ : Zeit       $T$ : Periodendauer einer Schwingung



Im Folgenden wird unterschieden zwischen

- Balkenmodellierungen mit Finiten Elementen (in diesem Abschnitt)
- Geschlossene Balkenlösung (s. Abschnitt 4.2)

Eine Kopplung mit dem vorgestellten Halbraummodell (Abschnitt 2.1.4) und ein Anschluss an die Gebäudeimpedanzen ist in allen Knotenpunkten möglich.

Die analytische Betrachtung eignet sich zur Erweiterung des Verständnisses der mechanischen Effekte der Kopplung des Bodens mit einer nachgiebigen endlichen Fundamentplatte und für die Durchführung schneller Parameterstudien. Aus dieser Betrachtung lassen sich auch die Ersatzformeln (s. Abschnitt 4.4) entwickeln, die eine einfache Lösung des Problems für bestimmte Anwendungszwecke erlauben und die modular in vorhandene Gebäudemodelle eingebaut werden können.

### 3.3.1 Timoshenkobalken als FE-Modellierung<sup>3</sup>

In z.B. /28/ ist die Differentialgleichung für den Biege-Schub-Balken enthalten. Unter Verwendung der in Abschnitt 3.2.3 dargestellten Kopplung von Fundament und Boden an diskreten Punkten bietet es sich an, die Diskretisierung der FE-Modellierung des „Fundamentbalkens“ im gleichen Raster durchzuführen. Folglich kann auf die elastische Linienbettung der Elemente verzichtet werden. Unter Vernachlässigung der Massendrehträge ergibt sich folgende DGL:

$$EIw'''' - \frac{EI}{GA_Q} \mu \ddot{w}'' + \mu \ddot{w} = 0 \quad \text{mit} \quad w'' = w''_B + w''_Q \quad (3.8)$$

$$\text{Harmonischer Lösungsansatz: } w(x, t) = w(x) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad w(x) = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot e^{i k_i x} \quad (3.9)$$

Einsetzen des Lösungsansatzes in (3.8) ergibt die folgende algebraische Gleichung:

$$k_i^4 - \frac{\mu}{GA_Q} \omega^2 k_i^2 + \frac{\mu \omega^2}{EI} = 0 \quad (3.10)$$

Die Substitutionen  $b = -\mu \omega^2 / GA$  und  $c = -\mu \omega^2 / EI$  führen zu folgenden 4 Wellenzahlen:

$$k_i = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right)} \quad (3.11)$$

Zur Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix werden Ansatzfunktionen für normierte Auslenkungen und Verdrehungen der Elementenden errechnet. Die weitere Herleitung erfolgt gemäß FEM unter Beachtung der beiden Verdrehungsanteile aus Biege- und Schubdeformation:

$$w''_B = \varphi' = w'' - w''_Q = w'' - \frac{Q'}{GA_Q} \quad (3.12)$$

Weitere Einzelheiten werden hier nicht dargestellt, da es sich um eine übliche Vorgehensweise handelt.

<sup>3</sup> Vernachlässigung von Drehträge und Bettung

Nach Übergang von der Vorzeichendefinition der Mechanik auf eine „globale“ Vorzeichendefinition ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix  $k$ , die das exakte dynamische Verhalten des Biege-Schub-Balkens beschreibt.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K_f$  wird analog zum Plattenmodell aufgestellt – aufgrund der eindimensionalen Struktur jedoch deutlich einfacher – siehe Anhang 3.2. Sie ist lediglich in ihrer „verbreiterten“ Diagonalen als Bandstruktur besetzt in einer Breite von  $K_{i \pm 3, i \pm 3}$ . Die Berechnung könnte in diesem Fall auch mittels eines Übertragungsverfahrens durchgeführt werden.

### 3.3.2 Kopplung mit dem Halbraum, Kraftanregung, Fußpunktanregung

Die in der Überschrift genannten 3 Punkte werden ebenfalls analog zum Plattenmodell durchgeführt:

- Kopplung mit dem Halbraum über eine invertierte Nachgiebigkeitsmatrix, die ausschließlich vertikale Freiheitsgrade enthält und die auf die Größe der Fundamentsteifigkeitsmatrix vergrößert wird. Verdrehungs-FHG werden mit Nullen aufgefüllt.  $K$  ergibt sich zu  $K = K_f + K_b$
- Die Modifizierung des Systems für die Fälle Kraftanregung und Fußpunktanregung erfolgt ebenfalls wie beim Plattenmodell. Einschränkung: Rayleighwellen können nur in Fundamentlängsrichtung angesetzt werden. (Schräg einlaufende Wellen ließen sich evtl. über eine korrigierte Spurgeschwindigkeit und elementweise korrigierte Plattenbreiten modellieren. Die sich hieraus ergebenden Abweichungen wurden jedoch nicht überprüft.)

Berücksichtigung der Fundamentbreite:

Gemäß /30/ kann bei der Berechnung von Maschinenfundamenten mit der Lösung für starre Kreisfundamente und hierin mit flächen- bzw. trägheitsäquivalenten Ersatzradien gerechnet werden. Im vorliegenden Fall wird diese Lösung verwendet, um die Anwendungsgrenzen hinsichtlich der Fundamentgeometrie abzustecken. Nach /30/ beträgt der Fehler beim Abweichen von der idealisierten Kreis- bzw. Quadratform im Falle eines rechteckigen Fundamentes

- bei einem Seitenverhältnis bis 1 : 4 kleiner 10% und
- bei einem Seitenverhältnis bis 1 : 8 kleiner 30%.

Für die Anwendung des Balkenmodells heißt das, dass die zulässige Breite des betrachteten Fundamentes in Abhängigkeit der betrachteten Wellenlänge begrenzt ist (s. Beispiel untenstehend).

Oben genannte Fehlerquantifizierung wurde nicht kontrolliert, da bereits das für eine Überprüfung geeignete Referenzmodell bereits (geringe) Fehler aufgrund der Diskretisierung aufweist (vgl. Abschnitt 2.3.5). Bei länglichen Fundamenten könnten diese Fehler eine nicht genau quantifizierbare Größenordnung einnehmen.

Die Anwendung des Balkenmodells geschieht auf folgende Weise:

- Ermittlung der zu betrachtenden Wellenlängen über die Scherwellengeschwindigkeit des Bodens z.B. nach /9/ oder aus Messung
- Festlegung der Boden- und damit auch der FE-Diskretisierung aus der Forderung nach zufriedenstellender Abbildung der kürzesten betrachteten Wellenlängen.
- Es erscheint sinnvoll, die Fundamentbreite ersatzweise über einen Anpassungsfaktor zu berücksichtigen, der dem Realteil der Bodenfeder unter der Wurzel, dem Imaginärteil direkt aufmultipliziert wird <sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Legitimiert sich neben /30/ auch durch die Untersuchungen in den Abschnitten 4.1.3 und 4.1.4, „wellenförmige Zwangsverformung an der Halbraumoberfläche“

Dies lässt sich aus der bestehenden Lösung für starre Kreisfundamente /30/ ableiten.

$$C_{neu} = \sqrt{\frac{b}{b_0}} \operatorname{Re}(C_{dyn}) + i \frac{b}{b_0} \operatorname{Im}(C_{dyn}) \quad \text{mit} \quad (3.13)$$

b: tatsächliche Fundamentbreite

b<sub>0</sub>: normierte Fundamentbreite (entspricht der Diskretisierung in Längsrichtung)

Nachdem beim Balkenmodell die Fundamentnachgiebigkeit in Querrichtung (⊥ zur Wellenaufrichtung) nicht berücksichtigt wird, liegt die Legitimation für die Anpassung (3.13) in der Lösung für starre Kreisfundamente /30/, sofern die untenstehend genannten Verhältnisse von Fundamentbreite zu Halbwellenlänge eingehalten werden.

Der Realteil der Ersatzfedersteifigkeit verhält sich aufgrund der Interaktion benachbarter (gedachter) Kontaktpunkte proportional zum Kreisumfang des Fundamentes bzw. proportional zur Quadratwurzel der Fundamentfläche. Der Imaginärteil als Maß für die abstrahlbare Schwingungsenergie ist von dieser Interaktion nicht betroffen. Er verhält sich proportional zur Fundamentfläche. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezeigt, dass die genannte Gesetzmäßigkeit weitgehend auch für eine wellenförmig ausge rundete Einsenkungsform gilt, siehe Gl. (4.3) und (4.4).

Anwendungsgrenzen unter Zugrundelegung des in /30/ genannten Seitenverhältnisses von 1:4 bzw. 1:8:

- Die Länge einer dynamischen Einsenkungsmulde des Bodens beträgt λ/2 (λ = gemeinsame Wellenlänge von Fundament und Boden)
- Die maximale Breite des Fundamentes ergibt sich hieraus zu 2 λ (max. 10% Abweichung) bzw. 4 λ (max. 30% Abweichung).

Diese Abschätzung gilt für den Frequenzbereich, in dem der Realteil gegenüber dem Imaginärteil maßgebend ist, also bis zu einer dimensionslosen Fundamentlänge von ca. a<sub>0</sub> = 1.

Zum Vergleich: Der später in Gl. (4.3) mittels Halbraumberechnungen angepasste „Formfaktor“ für die einachsige halbsinusförmige Oberflächenverformung ergibt bei einem Längenverhältnis von 1:8 einen Fehler von ca. 29%.

Ein exemplarischer Vergleich der 2-dimensionalen Platten und der 1-dimensionalen Balkenmodellierung ist im folgenden Abschnitt enthalten.

### 3.3.3 Vergleich Platten - Balkenmodell

Der exemplarische Vergleich erfolgt über normierte Krafterregung in Platten- / Balkenmitte und visuelle Kontrolle. Beim Balkenmodell wurde ohne Schubnachgiebigkeit gerechnet.

Eingangsparameter der 2 dargestellten Varianten:

	Var. 1	Var. 2		Var. 1	Var. 2
Plattenlänge	40 m	48 m	Scherwellengeschwindigkeit Boden	250 m/s	200 m/s
Plattenbreite	4 m	10 m	Querdehnzahl Boden	0,3	0,3
Plattenstärke	0,4 m	0,4 m	Materialdämpfung Boden	0,15	0,15
E-Modul Platte	3·10 <sup>10</sup>	3·10 <sup>10</sup>	Lastfrequenz	10 Hz	16 Hz

Tabelle 3.2 Eingangsparameter Modellvergleich

Errechnete dynamische Steifigkeiten [MN/mm] am Lastangriffspunkt:

	Plattenmodellierung	Balkenmodellierung
<b>Variante 1</b>	1,26 – 0,65 i	1,23 – 0,61 i
<b>Variante 2</b>	1,0 – 1,45 i	1,54 – 1,81 i

Tabelle 3.3 exemplarischer Modellvergleich: dynamische Steifigkeiten

Exemplarische Darstellung eines länglichen Fundamentes – sehr grobe Breitendiskretisierung:

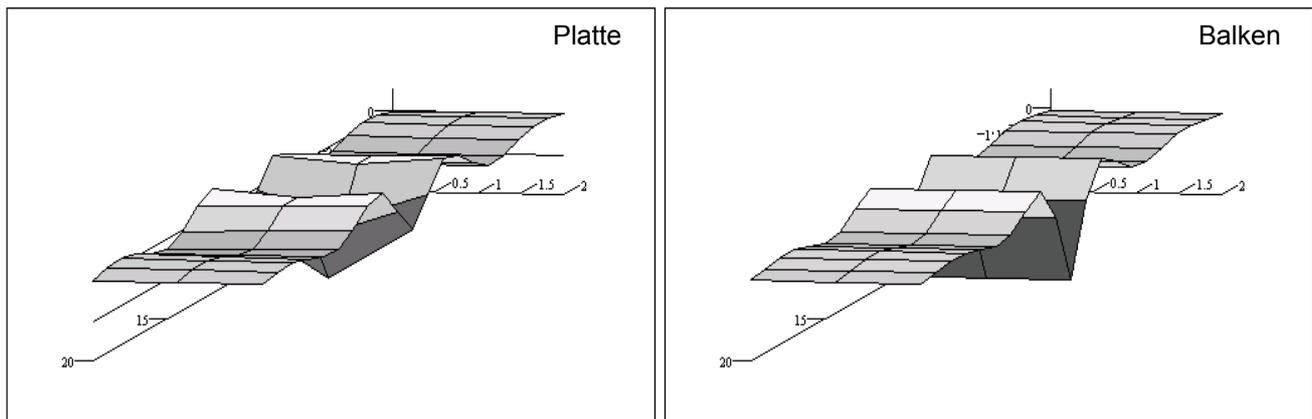


Abb. 3.3: exemplarischer Vergleich Platten- Balkenmodellierung: Variante 1

Exemplarische Darstellung eines relativ breiten Fundamentes

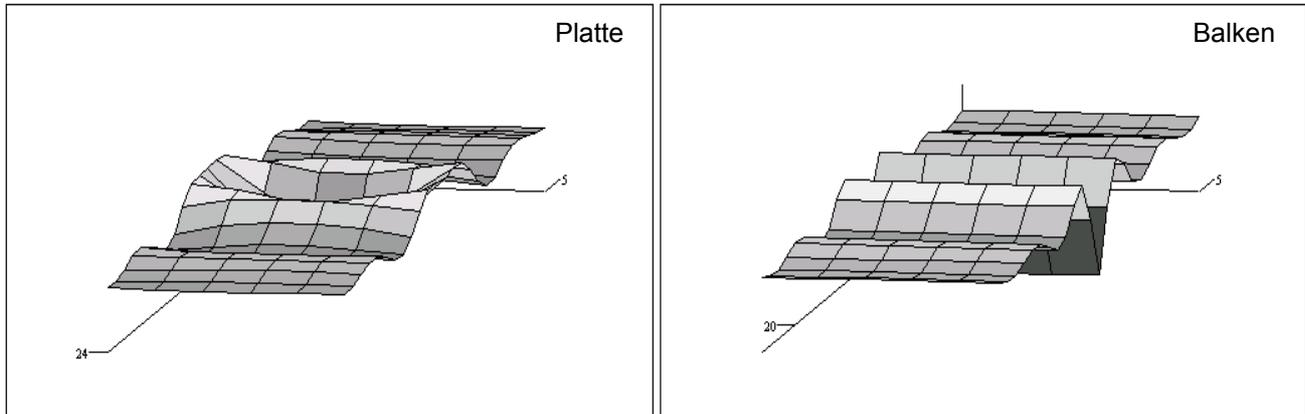


Abb. 3.4: exemplarischer Vergleich Platten- Balkenmodellierung: Variante 2

Zu bewerten sind

- die Unterschiede zwischen Platten- und Balkenmodellierung
- die Abweichungen Plattenmodell – Literaturlösung für starre Fundamente nach Abschnitt 2.3.5

Im Konsens beider Betrachtungen und einer Vielzahl verglichener Varianten ergibt sich folgendes Fazit:

- Die Abbildung des exakten Spannungsverlaufes unter dem Fundament – vor allem in Querrichtung – kann das Ergebnis (hier die Impedanz gegenüber mittiger Anregung) maßgebend beeinflussen. Je nachdem, welche Verformungsfigur dem Halbraum in Querrichtung aufgeprägt wird, können sich deutliche Unterschiede in der Bodennachgiebigkeit ergeben.

- Ein relativ steifes Fundament erfordert vom Boden in Querrichtung eine „scharfkantige“ Einsenkungsform mit einer entsprechenden Spannungskonzentration an den Plattenrändern, die weder mit einer einzigen noch mit nur einigen wenigen Gaußschen Ansatzfunktionen in Querrichtung abgebildet werden kann (vgl. Abweichungen in Abschnitt 2.3.5). In Längsrichtung sind die Gaußschen Ansatzfunktionen hingegen gut geeignet, den tatsächlichen Spannungsverlauf abzubilden (s. Diskretisierungsempfehlung in Abschnitt 2.3.5).
- Die in Abschnitt 2.2.2 abgebildete „modifizierte Ansatzfunktion“ könnte eine weit bessere Übereinstimmung mit der Realität erzielen. Die Freiwerte dieser Ansatzfunktion müssten jedoch iterativ ermittelt werden. Der hierbei – zusätzlich zur FE-Modellierung – entstehende Aufwand wird für ein Ersatzmodell als zu hoch bewertet.

Im Folgenden wird eine andere Vorgehensweise besprochen. Die für starre Kreisfundamente vorhandene Lösung für den Halbraum /31/ gilt – aufgrund fehlender Biegeachgiebigkeit der Fundamente – für eine „scharfkantige“ Einsenkungsform. Sie wird in den folgenden Abschnitten 4.1.3 und 4.1.4 für sinusförmig ausgerundete Einsenkungsformen modifiziert (1-achsig und 2-achsig ausgerundet).

## 4 System Winklerbettung - Fundamentbalken

Für eine möglichst weitreichende Vereinfachung hinsichtlich der Bauwerk-Boden-Modellierung werden im folgenden Abschnitt Rechenmodelle vorgestellt, die ohne FE-Formulierung und ohne diskrete Ansatzfunktionen für den Boden auskommen. Im Einzelnen sind dies, wie schon in Abschnitt 3 angemerkt:

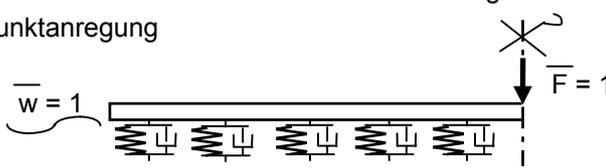
Abschnitt 4.2	Das „Winklermodell“	Timoshenkobalken <sup>5</sup> auf nachiterierter Winklerbettung unter Kraft- oder Fußpunktanregung 
Abschnitt 4.3	Das „Ersatzmodell“ <sup>6</sup>	Eindimensionale Modellierung eines Ausschnittes frequenzabhängiger Größe, auf nachiterierter Winklerbettung, separate Erfassung des Eigenschwingverhaltens <sup>7</sup>
Abschnitt 4.4	Die „Ersatzformel“	1-fach iterierte Formel, Erfassung Eigenschwingverhalten in Form einer unteren- und oberen Einhüllenden.

Tabelle 4.1

Den Vorteilen stehen folgende Einschränkungen gegenüber:

1. Keine Wellenleitfähigkeit des als Bettung modellierten Untergrundes
2. Aufgrund der Modellierung als Einfeldträger ist die Kopplung Fundament – Gebäude nur an den Fundamentenden und bei Symmetrie zusätzlich in der Mitte möglich.

Das „Winklermodell“ und das „Ersatzmodell“ werden in ihrer Funktionsweise nur grob umrissen. Im Anhang 4.3 finden sich die Ergebnisse einer exemplarischen Parameterstudie, die mit beiden Modellen durchgeführt wurde.

### 4.1 Bettungsmodell – modifizierte Winklerbettung

In den Abschnitten 4.2 bis einschließlich 4.4 werden obenstehend genannte Fundamentmodelle vorgestellt. Die im Folgenden mit „c“ bezeichnete komplexe Bettung wird vorab in diesem Abschnitt für die auftretende wellenförmige bzw. ausgerundete Belastung des Bodens ermittelt. Dies geschieht

- a) über Analogie zur Lösung für starre Kreisfundamente nach /31/, sowie
- b) über das Modell des 3-dimensionalen Halbraumes (Abschnitt 2). Mit diesem kann die Bodenimpedanz für beliebige vorgegebene Einsenkungsformen ermittelt werden. Außerhalb der aufgeprägten Zwangsverformung wird eine freie Halbraum-Oberfläche angesetzt.

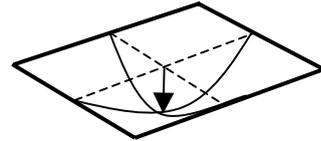
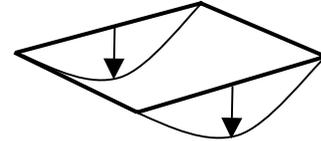
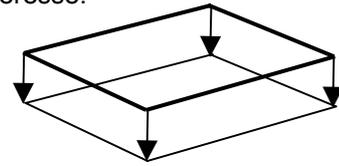
<sup>5</sup> Vernachlässigung der Drehträgeit

<sup>6</sup> Notwendiger Zwischenschritt, um die wesentlichen Effekte zu studieren

<sup>7</sup> Berücksichtigung insbesondere bei großen Fundamentstärken und sehr weichem Boden erforderlich

Es sind folgende Halbraumverformungen unter dem Fundament von Interesse:

- Rechteckform  
(Starrkörpereinsenkung für Vergleichszwecke bzw. für einen verbleibenden Starrkörperanteil der Einsenkung)
- Halbsinusform 1-achsig (in Wellenlaufrichtung)
- Halbsinusform 2-achsig



Der Unterschied zwischen Halbsinus- und beidseitiger Halbsinusform ist vor allem interessant, um den Einfluss von Randbereichen zu erfassen. Der einachsige Halbsinus kann die am Rand auftretende „scharfkantige“ Einsenkungsform abbilden. Welche Lösung heranzuziehen ist, hängt neben der Geometrie des Anwendungsfalles, Wellenlaufrichtung und bezogener Fundamentgröße auch von der Form der sich ausbreitenden Wellenfronten (Fußpunktanregung) ab. Da diese Form i.d.R. unbekannt ist, müssen evtl. Annahmen getroffen werden oder die möglichen Fälle sind als Parametervarianten zu untersuchen.

Die Bodenimpedanz ist jeweils über geeignete Ersatzgrößen von Feder und Dämpfer in Näherung für den Bereich einer Halbwellenlänge der sich einstellenden Verformungsfigur zu ermitteln. Anschließend erfolgt eine Umrechnung in eine frequenzabhängige komplexe Linienbettung.

Das Manko der fehlenden Wellenleitfähigkeit des Bodens muss hingenommen werden. Die hieraus resultierenden Auswirkungen waren zu untersuchen (s. nachfolgender Abschnitt: „Spuranpassung“).

Bei der Beurteilung sämtlicher Unzulänglichkeiten und eingeführter Näherungen ist zu beachten:

- Bislang existiert nur a) die leicht verwendbare Lösung für das starre Kreisfundament, z.B. /31/, und b) die Lösung für den Fall der unendlichen Platte /1/, die aufgrund der Randbedingungen (unendliche Abmessungen) und wegen ihrer Komplexität nicht für Ersatzmodellierungen geeignet scheint.
- Wie im Folgenden gezeigt wird, kann v.a. die Anwendung der Lösung für starre Fundamente bei höheren Frequenzen zu gänzlich falschen Ergebnissen führen.
- Es besteht bei den meisten praktischen Anwendungsfällen eine sehr ungenaue Kenntnis der Eingangsgrößen – zusätzlich finden sich i.d.R. auch größere Abweichungen vom Idealfall hinsichtlich Fundamentgestalt, Welleneinfallrichtung, Bodenaufbau etc – so dass die Fehler durch die eingeführten Näherungen vergleichsweise gering sind.

Vor diesem Hintergrund ist klar, dass generell eine grobe Betrachtungsweise ausreicht, also in vielen Fällen Schubverformung und Drehträgeiten vernachlässigbar sind. Obenstehend genannter Einfluss einer Spuranpassung bzw. gleicher Wellengeschwindigkeiten in Fundament und Boden muss hingegen untersucht und ggf. grob quantifiziert werden.

#### 4.1.1 Spuranpassung Balken auf Halbraum

Befürchtet wird bei gleicher Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in Fundament und Boden eine besonders hohe Wellenleitfähigkeit, da der Boden den Bewegungen des Fundamentes keine Widerstände außer der (vernachlässigbaren) Materialdämpfung entgegensetzt. Andererseits bildet sich im gekoppelten System von

Boden und Fundament bei jeder Frequenz zwangsweise eine gemeinsame Wellenausbreitungsgeschwindigkeit aus, ohne dass sich eine stärkere Dämpfung begründen lassen würde, die aus unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten beider Komponenten resultiert.

(Als gedanklicher Anstoß zum vorliegenden Problem sei der Zweimassenschwinger erwähnt, bei welchem unterschiedliche Eigenfrequenzen der einzelnen Schwinger keine Dämpfungserhöhung bewirken und gleiche Eigenfrequenzen nicht zu einer Multiplikation der Resonanzüberhöhungen führen – „normale“ Massenverhältnisse vorausgesetzt.)

Die Biegewellengeschwindigkeit des Fundamentes ergibt sich aus der eindimensionalen Biegewellengleichung

$$-EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{nach z.B. [7] zu } c_B = \sqrt[4]{\frac{EI}{\mu}} \sqrt{\omega} \quad (4.1)$$

Folgendes Diagramm zeigt für den Werkstoff Beton ( $E = 30\,000 \text{ MN/m}^2$ ,  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,2$ ) die Biegewellengeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Plattenstärke und übliche Rayleighwellengeschwindigkeiten des Baugrundes, um einen Eindruck für den eventuell betroffenen Frequenzbereich zu bekommen:

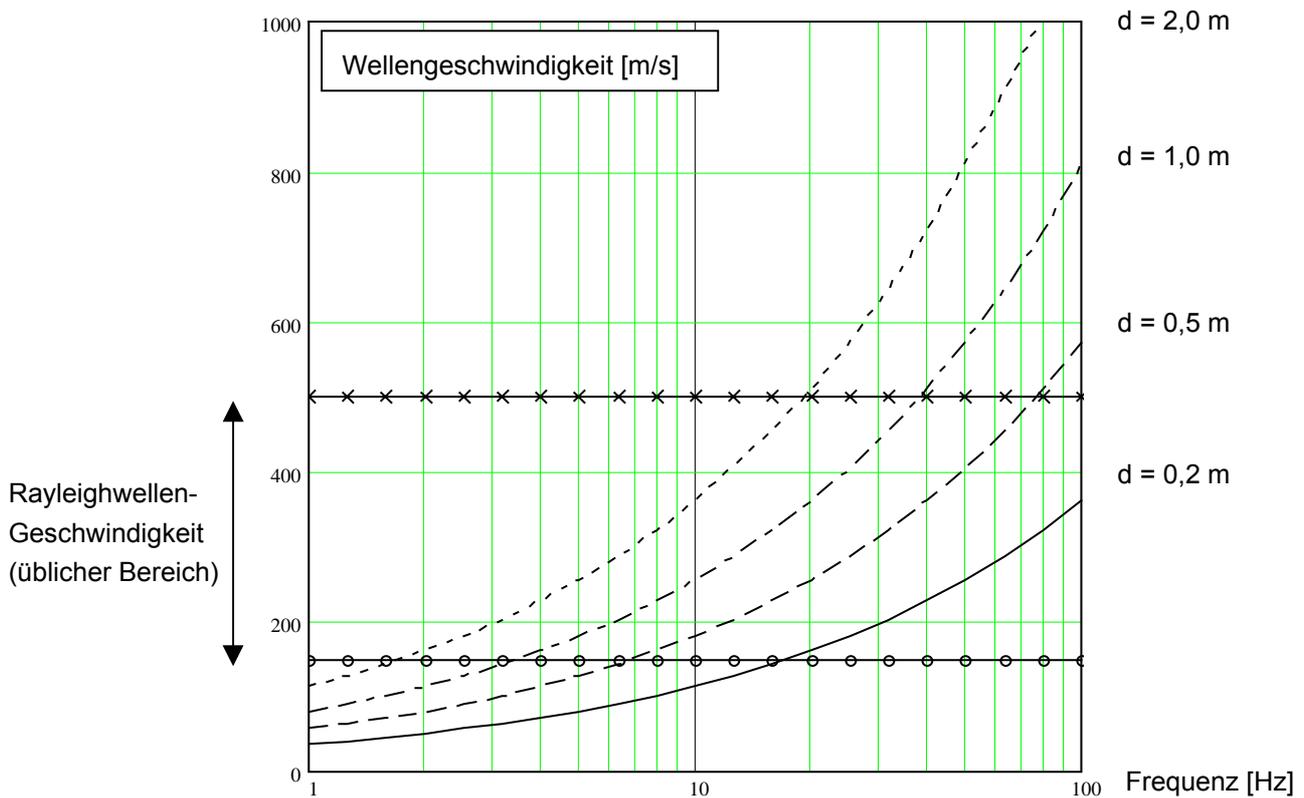


Abb. 4.1 Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Betonplatten

Der Frequenzbereich, in welchem beide Geschwindigkeiten zusammenfallen können und somit eine Modellierung ohne Wellenleitfähigkeit des Bodens zu größeren Abweichungen von der Realität führen könnte, umfasst also in der Praxis mit ca. 2 Hz bis über 100 Hz den Bereich üblicher Erschütterungsprobleme.

Bei größeren Plattenstärken und weicheren Böden wird die Platte im Verhältnis zum Boden eine größere Menge Energie transportieren können. Im Gegenzug wird eine dünne Platte im baodynamisch interessierenden Frequenzbereich kaum zur Wellenausbreitung beitragen, sodass eine Betrachtung der Wellenausbreitung im Boden bei bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit ausreichend ist.

Es war zu untersuchen, ob die Amplitudenabnahme eines kraftangeregten Balkens auf dem Halbraum im Bereich der Koinzidenzfrequenz geringer ausfällt. Mit dem Balkenmodell nach Abschnitt 3.3 wurde daher folgende Parameterstudie durchgeführt:

- Modifizierung des 3-D Bodenmodells auf den ebenen Formänderungszustand. Die Abstrahldämpfung ist somit deutlich geringer. Der zu untersuchende Effekt sollte sich daher stärker auswirken.
- Da mit einem Modell begrenzter Länge gearbeitet wird, Einstellen der Balkenlänge auf einen großen Wert (ca.  $3,5 \lambda - 8 \lambda$ ), um Reflexionen am Balkenende zu verhindern
- Aufbringen einer normierten harmonischen Kraftanregung  $F = 1$  an einem Balkenende
- Wahl der Systemparameter so, dass sich die Koinzidenzfrequenz in der Mitte des zur Wellenlänge passenden Lastfrequenzbereiches befindet.
- Variieren der Lastfrequenz im Terzraster und Beurteilung der Amplitudenabnahme

Für eine einfachere optische Beurteilung wurde der Betrag der maximalen Einsenkung am Lasteinleitungspunkt auf  $|w| = 1$  normiert:

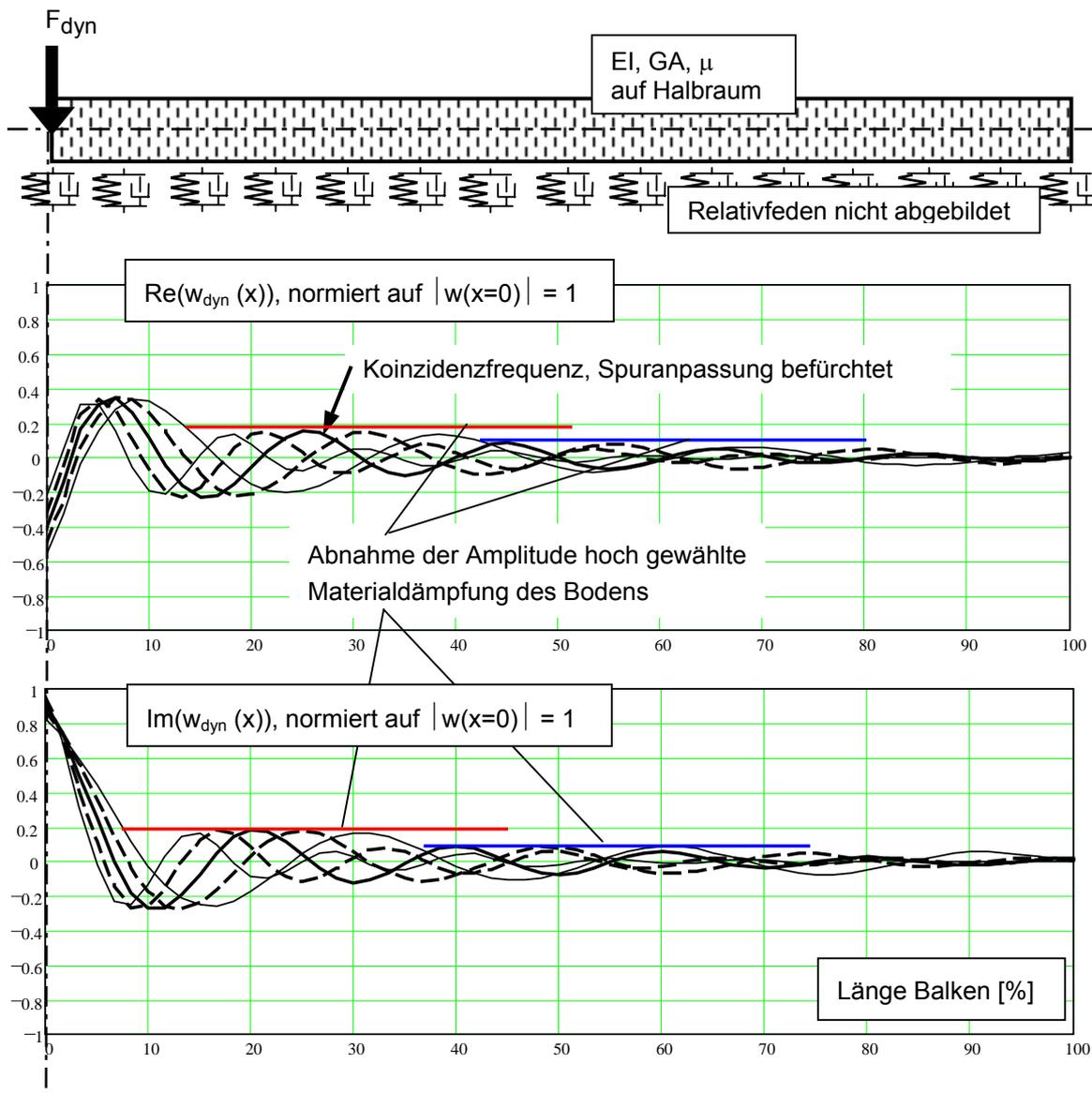


Abb. 4.2 Normierte Wellenausbreitung in der Umgebung der Koinzidenzfrequenz

Ergebnisse:

- Es tritt keine verstärkte Wellenabstrahlung in der Koinzidenzfrequenz auf.
- Deutlich zu sehen ist die starke Amplitudenreduktion im Nahfeld aufgrund der Wellenabstrahlung nach unten in Form von Raumwellen. Bei ebener Modellierung tritt keinerlei geometrische Dämpfung der abgestrahlten Oberflächenwellen auf.
- Die Materialdämpfung des Bodens wurde unrealistisch hoch gewählt, um ein Abklingen beobachten zu können. Die Plateaus einer Wellenlängen-abhängigen Dämpfungscharakteristik sind in obenstehender Abbildung eingezeichnet.

Die Berechnungsparameter sind in Anhang 4.1 enthalten.

Aufgrund praktischer Erfahrungen mit Messergebnissen bzgl. dieser Problematik kann bestätigt werden, dass bislang bei einer Vielzahl dieser Messungen keine Ergebnisse auf das Vorhandensein eines „Spuranpassung“-Effektes hinwiesen (siehe hierzu Abschnitt 7, Messungen)

#### 4.1.2 Starre Fundamente, konstante Einsenkung

Betrachtung der Lösung nach /31/

$$C_{-dynZ} = \frac{4Gr}{1-\nu} [k_Z + i a_0 c_Z] \quad \text{mit} \quad a_0 = \frac{\Omega r}{c_S} \quad (4.2)$$

bzw. im Folgenden als Bettung  $c_{-dynZ} = \frac{C_{-dynZ}}{L}$  mit  $L$  = Fundamentlänge

zeigt, dass die Fundamentfläche – unter Vernachlässigung der frequenzabhängigen Beiwerte  $k_Z$  und  $c_Z$  – in den Federanteil unter der Wurzel eingeht, zum Dämpferanteil hingegen proportional ist (vgl. 3.13).

Betrachtet man den Spannungsverlauf unter einem starren Fundament (z.B. mittels der Modellierung in Abschnitt 2.3.4), zeigt sich eine extreme Spannungskonzentration unter den Fundamentecken und an den Fundamenträndern, die einen Großteil des Federwiderstandes eines starren Fundamentes bereitstellt. Es läge daher die Vermutung nahe, dass der Federwiderstand zum Umfang des Fundamentes näherungsweise proportional ist.

Beide Behauptungen – Proportionalität zum Umfang und zur Wurzel der Fläche – entsprechen sich nur bei feststehendem Längen-Breiten-Verhältnis. Hiervon abweichend findet sich in /30/ die Aussage, dass für starre Rechteckfundamente die Lösung für Kreisfundamente herangezogen werden kann, und zwar mit einem Fehler < 10% bis zu einem Längenverhältnis von 1:4 bzw. mit einem Fehler < 30% bei bis zu 1:8. Der Ansatz einer reinen Umfangsabhängigkeit würde bzgl. des Federanteils zu einem etwas größeren Fehler führen.

Der Dämpferanteil ermittelt sich aus der „Menge“ der abstrahlbaren Wellen, woraus sich die Proportionalität zur Fundamentfläche erklärt.

Im Folgenden wurden für die beiden oben genannten

- 1-achsig und
- 2-achsig ausgerundeten

Einsenkungsformen Lösungen erstellt, die neben dem grundlegenden mechanischen Zusammenhang auch die modifizierten Koeffizienten  $k_Z$  und  $c_Z$  enthalten.

### 4.1.3 Wellenförmige Einsenkung – einachsig

Diese Lösung ist z.B. zur Berechnung von schmalen Fundamenten bzw. Streifenfundamenten geeignet. Die Belastung kann in punktueller oder flächiger Kräfteanregung bestehen oder bei Fußpunktanregung in Längsrichtung auf das Fundament einwirken. Quer zur Wellenlaufrichtung erfolgt keine Berücksichtigung der Fundamentbiegung, weshalb bei breiten Fundamenten der zweiachsige Fall in Abschnitt 4.1.4 heranzuziehen wäre.

Bei quer zum Streifenfundament einfallenden Wellen (bzw.  $B \gg L$ ) sei auf die Transformationsmöglichkeiten für den zweidimensionalen Halbraum mit gekoppeltem Biegebalken in /23/ hingewiesen.

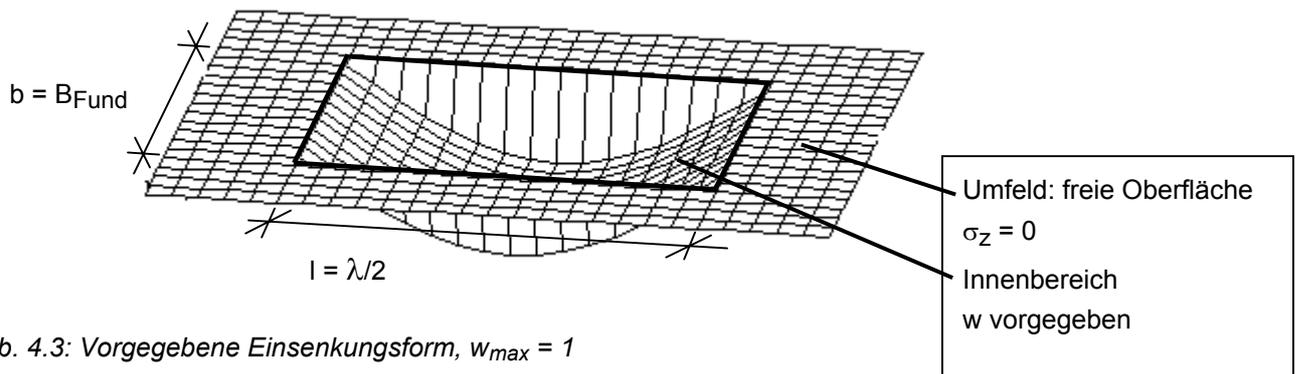


Abb. 4.3: Vorgegebene Einsenkungsform,  $w_{max} = 1$

#### Vorgehensweise:

- Referenzlösung 3-D Halbraum aus Abschnitt 2
- Ermitteln optimaler Last- und Bodendiskretisierung, Fenstergröße und Materialdämpfung über Vergleich mit der Lösung für starre Kreisfundamente /31/
- Aufbringen der vorgegebenen Einsenkungsmulde
- Variation von Breite und Länge (testweise auch Scherwellengeschwindigkeit und Materialdämpfung)
- Parameteridentifikation (vgl. Abb. 4.5 und 4.6)
  - a) Anpassen der quasistatischen Bodenfeder (Größe, Abhängigkeit vom Ersatzradius)
  - b) Anpassen der Dämpfergröße
  - c) Einführen und Anpassen eines Formfaktors „FF“ an den Einfluss des Seitenverhältnisses  $l:b$
  - d) Bestimmen der Koeffizienten  $k_z$  und  $c_z$

#### Ergebnis (= gewählter Ansatz analog /31/):

Die dynamische Steifigkeit (4.2) modifiziert sich damit bei Halbsinusform in Richtung  $l$  zu:

$$C_{dynZ\_SIN} = A1 \frac{Gr}{1-\nu} \left[ k_{Z\_SIN} FF + A2 i a_0 c_{Z\_SIN} \right] \quad (4.3)$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{\Omega r}{c_S}, \quad r = \sqrt{\frac{bl}{\pi}} \quad \text{und} \quad FF = \frac{\sqrt[3]{bl^2}}{\sqrt{bl}} \quad (= \text{Formfaktor})$$

$$A1 = 2 \quad A2 = 1,1$$

Entlang der Halbsinusform ergibt sich ein relativ „scharfkantiger“ Einsenkungssprung (s. Abb. 4.3), der hohe Vertikalspannungen zwischen Fundament und Halbraum anzieht. Wenn  $l > b$  ist, reagiert der Untergrund insgesamt steifer, als bei  $b > l$ . Der eingeführte Formfaktor FF dient dazu, allein beim Realteil (= Feder) die Richtung des Halbsinus und damit den Bereich der hohen Vertikalspannungen zu berücksichtigen (Halbsinus bei rechteckiger Einsenkungsmulde in Längs- oder Querrichtung).

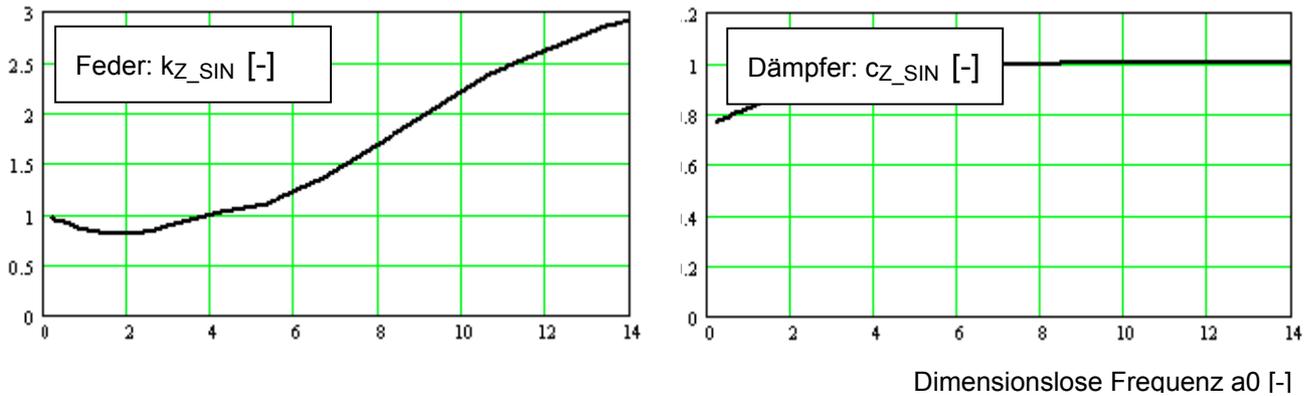


Abb. 4.4: Frequenzabhängige Feder- und Dämpferkoeffizienten,  $\nu = 0,3$

Gleichung 4.3 zeigt in Verbindung mit obenstehenden Koeffizienten für die angesetzten Parameter eine hohe Übereinstimmung mit der Referenz<sup>8</sup> – Referenz basierend auf 3-D Halbraum aus Abschnitt 2 unter auf-geprägter Zwangsverformung der Oberfläche gemäß Abb. 4.3:

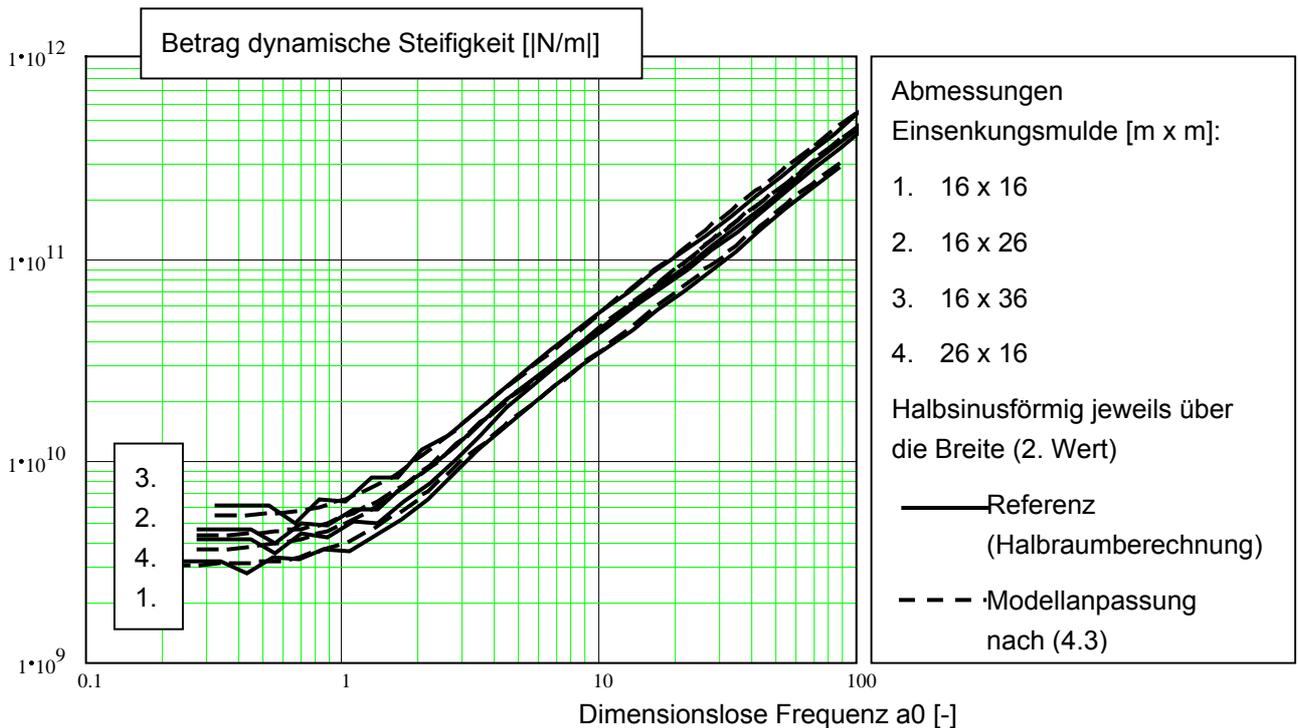


Abb. 4.5: Parameterstudie (exemplarischer Auszug), Betrag der dynamischen Steifigkeiten

<sup>8</sup> Zunächst normiert auf eine **Maximaleinsenkung** der Größe 1

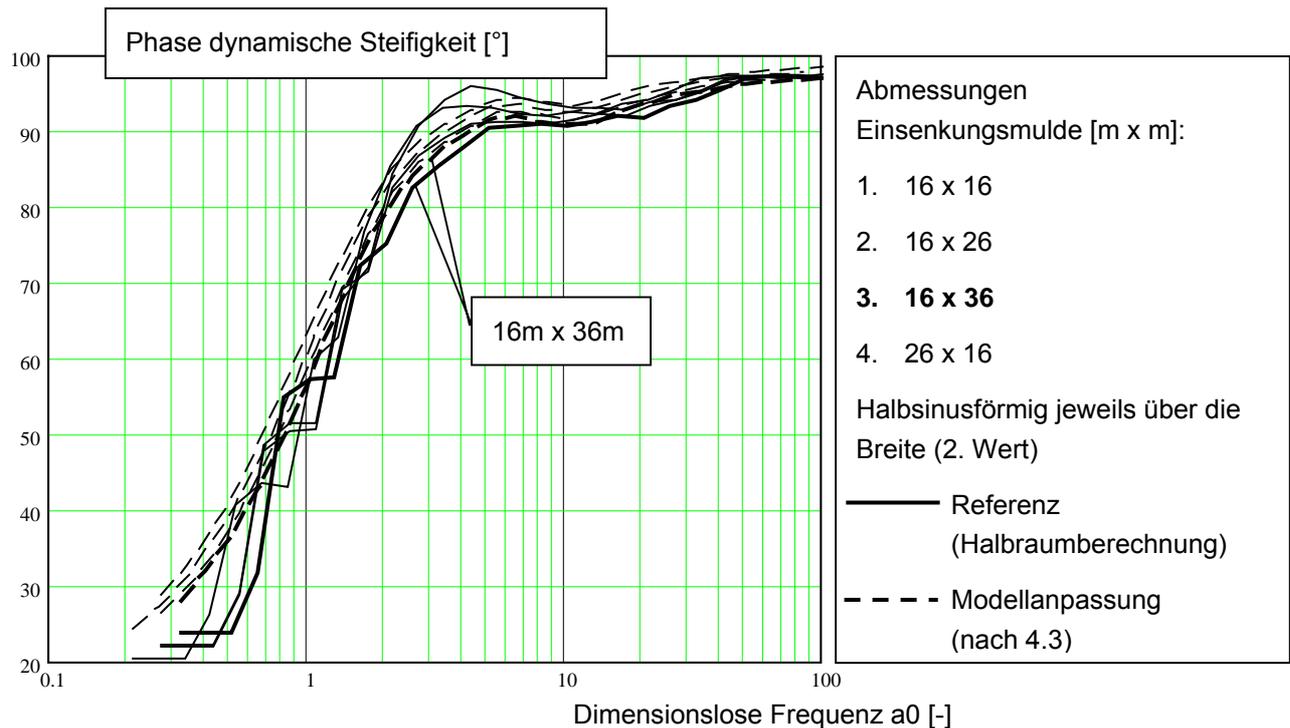


Abb. 4.6: Parameterstudie (exemplarischer Auszug), Phase

Bei kontinuierlicher Kopplung von Boden und Fundament ist die Bodensteifigkeit in eine „verschmierte“ Bettung umzurechnen. Die hierfür benötigte gemittelte Einsenkung wird über das Integral der Halbsinus-Verformung bestimmt.

Die dynamische Bettung ergibt sich so analog zu (4.2):

$$c_{\text{dynZ\_SIN}} = \frac{C_{\text{dynZ\_SIN}}}{l} \quad (4.3a)$$

mit  $C_{\text{dyn}}$  nach (4.3) und  $A1 = \frac{2}{0,64} = 3,1$   $A2 = 1,1$

#### 4.1.4 Wellenförmige Einsenkung – zweiachsig

Bei Fundamentplatten großer Breite im Verhältnis zur Scherwellenlänge (des gekoppelten Systems) bzw. bei ausreichend hohen Frequenzen kann die Biegung in Querrichtung nicht vernachlässigt werden.

Anwendungsfälle:

- punktuell kraftangeregte Platten
- Fußpunktanregung einer Flachgründung mit Stützen

Dieser Grenzfall wurde untersucht, um ein allseitiges „sanftes“ Auslaufen eines Einsenkungstrichters zu simulieren. Die Oberfläche außerhalb des Einsenkungstrichters ist dabei spannungsfrei gesetzt.

In Kombination mit 4.1.2 (starres Fundament) und 4.1.3 (einachsig gekrümmtes Einsenkungsfeld) können beliebige Verformungsfiguren von Rechteckfundamenten simuliert werden und die zugehörigen Bodenimpedanzen für quasistatische Belastung (iterativ) berechnet werden.

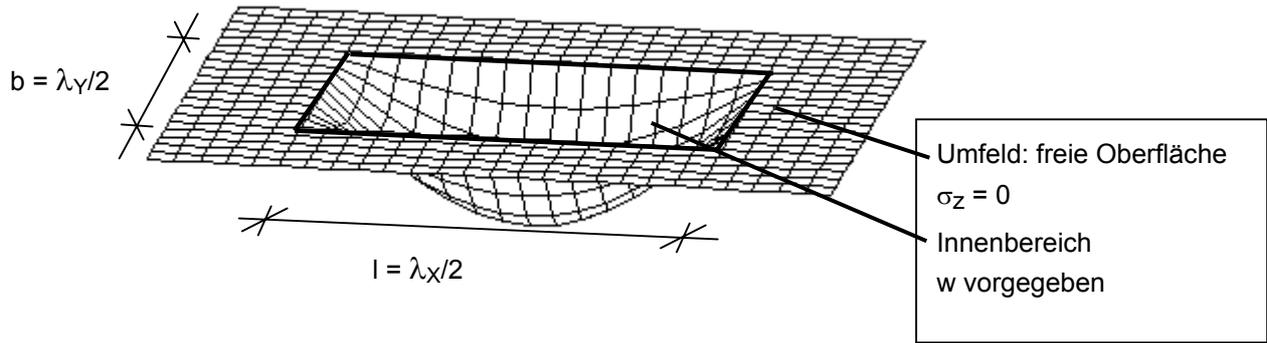


Abb. 4.7: Vorgegebene Einsenkungsform,  $w_{max} = 1$

Vorgehensweise:

- Bestimmung der Ersatzfedern und -Dämpfer analog Abschnitt 4.1.3

Ergebnis (= gewählter Ansatz analog /31/):

Die dynamische Steifigkeit (4.2) modifiziert sich damit für die zweiachsige Halbsinusform zu

$$C_{dynZ\_2SIN} = B1 \frac{Gr}{1-\nu} [kZ\_2SIN + B2 i a_0 cZ\_2SIN] \tag{4.4}$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{\Omega r}{c_S} \text{ und } r = \sqrt{\frac{bl}{\pi}}$$

$$B1 = 0,85 \quad B2 = 1,8$$

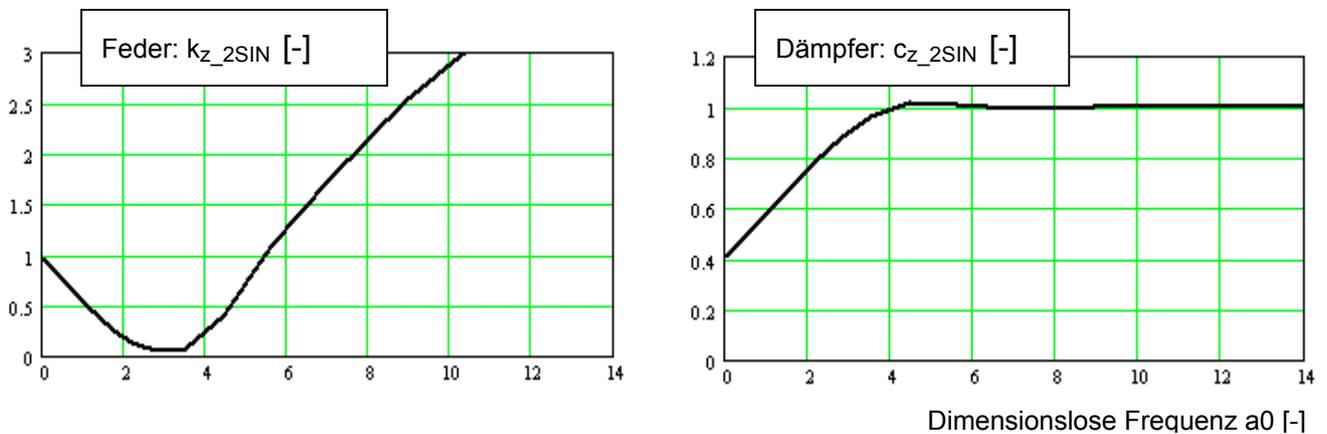


Abb. 4.8: Frequenzabhängige Feder- und Dämpferkoeffizienten,  $\nu = 0,3$

Der Federkoeffizient wurde bei  $a_0 = 0$  auf die Größe 1 normiert, der Dämpfungskoeffizient wurde für hohe Frequenzen auf 1 normiert, sodass für die Feder statisch und für den Dämpfer hochfrequent kein Einfluss durch diese Beiwerte entsteht.

Beim dimensionslosen Federkoeffizienten  $k_z$  tritt im Bereich  $a_0 = 2$  bis 4 ein Minimum auf. In diesem Bereich ist die  $k_z$ -Funktion am wenigsten genau. Die absolute Federsteifigkeit ist jedoch in diesem Frequenzbereich im Verhältnis zum Dämpferwiderstand bereits sehr gering, so dass auch prozentual große Abweichungen im Realteil nur einen geringen Einfluss auf den Betrag und die Phase der Boden-Ersatzfeder und damit auf das Berechnungsergebnis haben.

Für die Anpassung der Ersatzmodellierung an die Referenz sind im Folgenden Betrag und Phase dargestellt:

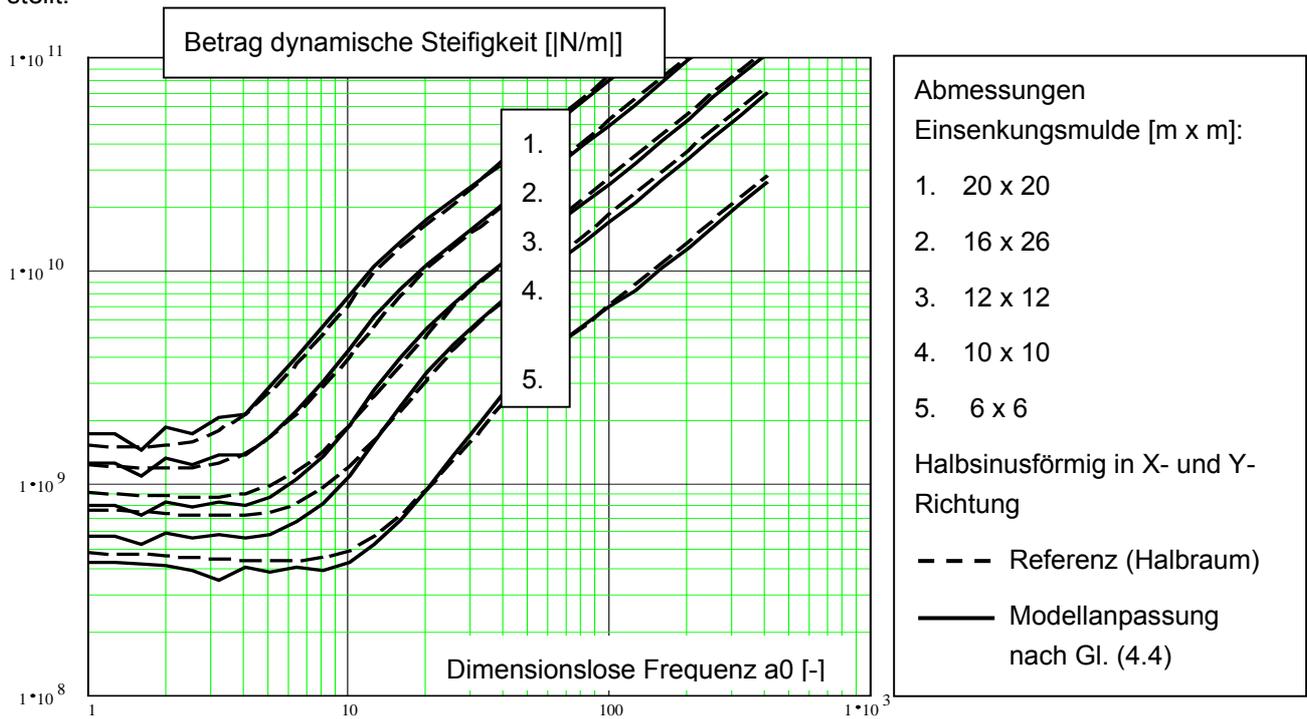


Abb. 4.9: Parameterstudie (exemplarischer Auszug), Betrag der dynamischen Steifigkeiten

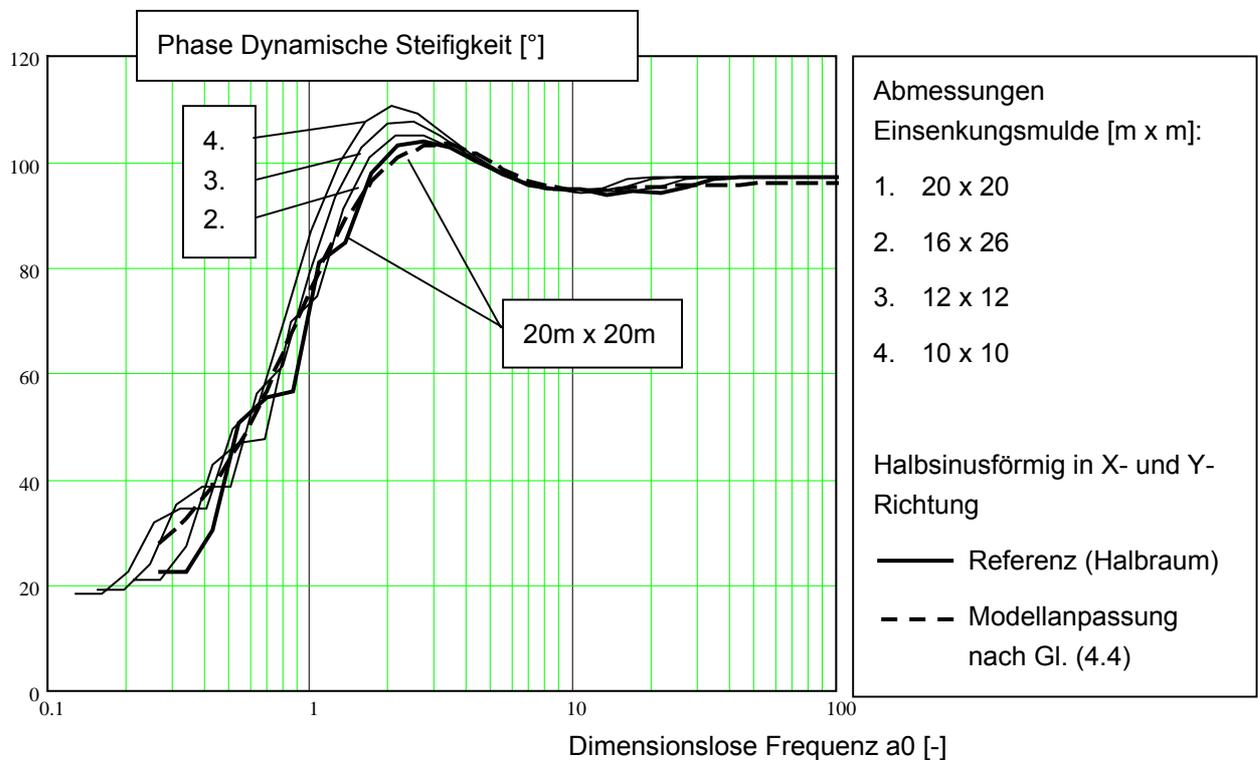


Abb. 4.10: Parameterstudie (exemplarischer Auszug), Phase

- Der größte Phasenfehler ergibt sich im Bereich  $a_0 = 1$  bis 3. Der Realteil erreicht in diesem Bereich ein lokales Minimum, das mit dem dimensionslosen Beiwert  $a_0$  schwierig einzustellen ist, da sich in diesem Bereich eine leichte Abhängigkeit von der Diskretisierung zeigt. Der für die numerische Auswertung anzusetzende komplexe Schubmodul erschwert die Bestimmung der dimensionslosen Koeffizienten aus Real- und Imaginärteil der Referenzlösung.
- Der maximale Phasenfehler liegt bei ca.  $10^\circ$ .
- Für rechteckige Einsenkungsmulden (ohne Abb.) wurden – auch im Realteil – keine signifikanten Abweichungen von obenstehenden Ergebnissen beobachtet. Abgedeckt wurden maximale Längenverhältnisse von 1:3.

Einfluss der Diskretisierung:

Deutlich zu sehen ist in nachfolgender Abbildung der Fehler aus unzureichender Diskretisierung – zunehmend bei kleineren Abmessungen. Im Fall einer Diskretisierung mit 6 Punkten über die Fundamentlänge (analog über die Breite) ergibt sich bereits ein völlig falsches Ergebnis für den Realteil. Eine Halbierung der Rasterweite liefert hingegen brauchbare Werte.

Die Bodenfeder reagiert trotz der als gutmütig vermuteten ausgerundeten Einsenkung wesentlich kritischer auf die Diskretisierung als im Fall einer konstanten Einsenkung, da der Rand der Einsenkungsmulde auf den Wert Null gezogen wird: Bei unzureichender Diskretisierung nimmt der Rand im Verhältnis zum übrigen „Fundament“ eine zu große Fläche ein, wodurch das Ergebnis stark beeinflusst wird.

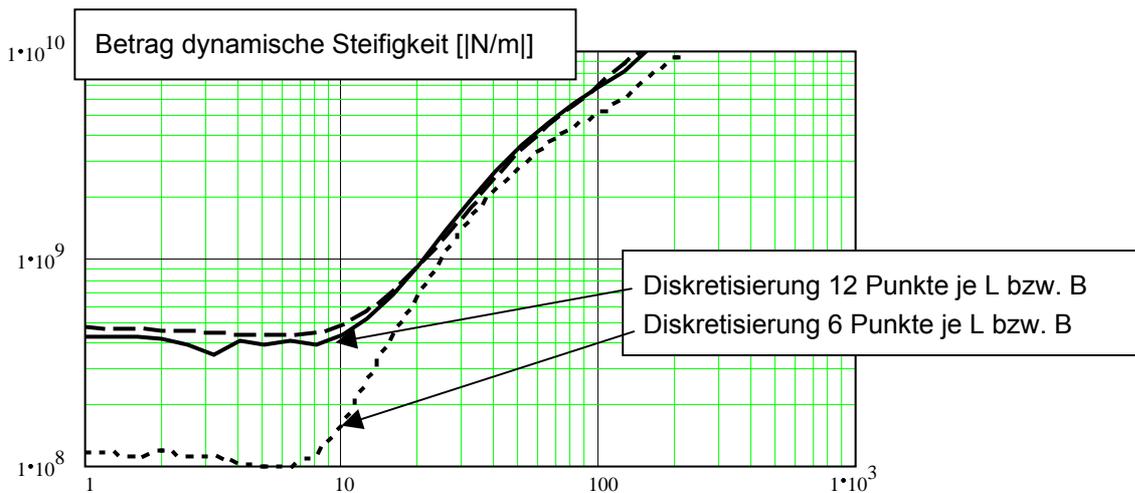


Abb. 4.11: Einfluss der Diskretisierung auf den Betrag der dynamischen Steifigkeit

Für die Umrechnung der Bodensteifigkeit in eine kontinuierliche Bettung wird analog Abschnitt 4.1.3 der Wert  $B_1$  aus Gl. (4.4) auf die mittlere Einsenkung normiert:

$$c_{dynZ\_2SIN} = \frac{C_{dynZ\_2SIN}}{l} \tag{4.4a}$$

mit  $C_{dyn}$  nach (4.4) und  $B_1 = \frac{0,85}{0,64^2} = 2,1$      $B_2 = 1,8$

## 4.2 Das „Winklermodell“

Das Winklermodell stellt einen Vereinfachungsschritt auf dem Weg zu einer gebrauchsfertigen Ersatzformel für den Fundament-Bodenbereich dar. Seine Anwendung macht stets die Lösung der Differentialgleichung für den Fundamentbalken erforderlich. Für einen direkten Einbau in ein Ersatzmodell erscheint es daher zu aufwändig.

Die Grundlagen des „Winklermodells“ sind in nachfolgender Tabelle kurz aufgeführt. Im Anhang (4.3) sind auszugsweise Ergebnisse einer Parameterstudie enthalten, in der das „Winklermodell“ mit der nächst einfacheren Modellierung, dem „Ersatzmodell“ verglichen wird.

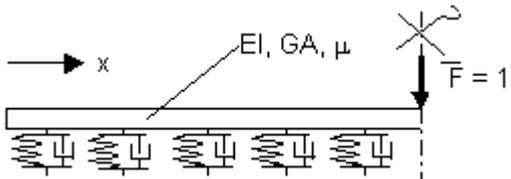
Boden	komplexe Bettung, frequenzabhängig, 1-fach nachiteriert bzgl. der maßgebenden Wellenlänge
Fundamenttyp	Balken
Modellierung Fundament	1-feldriger Timoshenkobalken (Drehträgeit vernachlässigt) $EIw'''' - \frac{EI}{GA_Q} \mu \ddot{w}'' - \frac{EI}{GA_Q} cw'' + \mu \ddot{w} + cw = 0$
Skizze Kraftanregung	 <p>Auch für Fußpunktanregung anwendbar – jedoch ohne Ausnutzung der Symmetrie s. Anhang (4.2)</p>

Tabelle 4.2

Vorteile:

- Bodenmodell wenig aufwändig im Vergleich zum Halbraummodell
- Eigenverhalten des Fundamentes automatisch enthalten

Nachteile:

- Keine Wellenleitung über den Boden möglich
- Kopplung zum Gebäude nur an Fundamentanfang und -ende, bei Symmetrie weiterhin in der Mitte des Fundamentes oder in „verschmierter“ Form möglich; geometrische Flexibilität gegenüber FE-Formulierung eingeschränkt

Die vergleichende Parameterstudie in Anhang (4.3) zeigt, dass weitere Vereinfachungen möglich sind. Es wurde daher das „Ersatzmodell“ entworfen, das eine Näherung zum hier kurz angerissenen „Winklermodell“ darstellt.

### 4.3 Das „Ersatzmodell“

Auch diese Modellierung ist nur ein weiterer Vereinfachungsschritt. Er beinhaltet jedoch einige Betrachtungen und Vereinfachungen, die für das weitere Vorgehen wichtig sind.

Das „Ersatzmodell“ wird in seinen Grundzügen kurz vorgestellt. Die eingeführten Betrachtungen zum

- Eigenverhalten und
- der maßgebenden Wellenlänge

werden näher behandelt, da bei den letztendlich gewonnen Anwendungsformeln auf sie zurückgegriffen wird.

Boden	komplexe Bettung, frequenzabhängig, 1-fach nachiteriert bzgl. der maßgebenden Wellenlänge
Fundamenttyp	Balken – wahlweise mit oder ohne Schubnachgiebigkeit
Modellierung Fundament	<p><u>Heranziehen eines Fundamentausschnittes in Halbwellenlänge</u></p> <p>Berücksichtigung der Elastizität des Fundamentes in Form der gemeinsam sich ausbildenden Wellenlänge (von Fundament und Boden)</p> <p>Berücksichtigung der Massenträgheit</p>

Tabelle 4.3

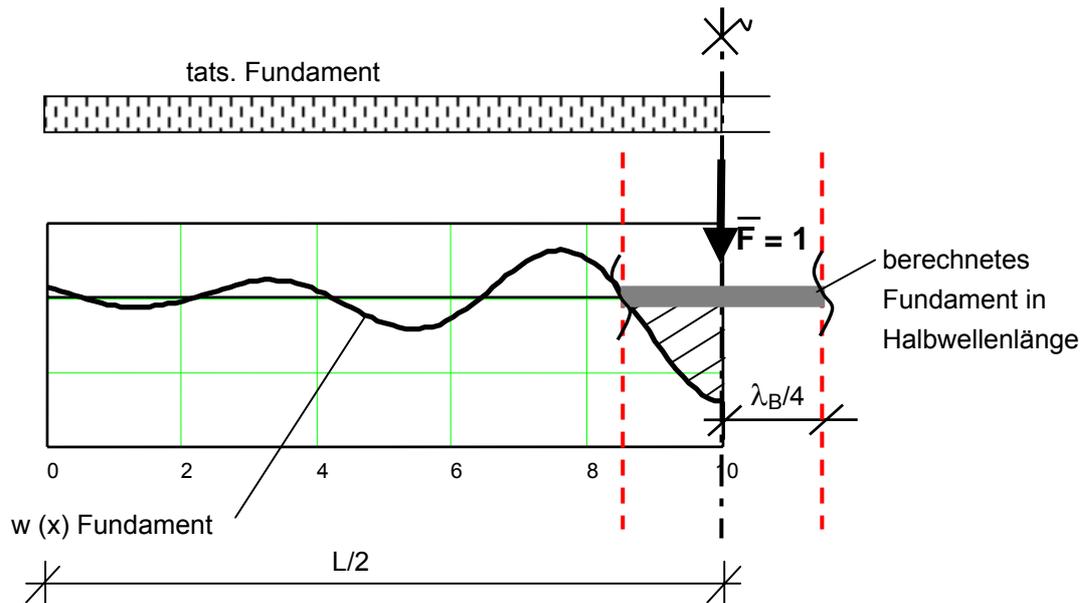


Abb. 4.12: Skizze der Modellierung – mitwirkende Fundamentlänge

Vorteil gegenüber „Winklermodell“:

- Kein Lösen einer DGL notwendig

Nachteil gegenüber „Winklermodell“

- Keine Wellenabstrahlung in den Fundamentbalken außerhalb des Ausschnittes
- Die Modellierung kann das Fundament-Eigenverhalten nicht berücksichtigen.

Folgende Vorwerte und Einflüsse müssen separat erfasst werden:

- Wellenlänge des gebetteten Fundamentbalkens
- Fundament-Eigenverhalten: Impedanz-Einbrüche und -Versteifungen

Diese Berechnungsbestandteile kommen auch im einfachsten hier vorgestellten Modell, der „Ersatzformel“, zur Anwendung und werden daher erläutert.

### 4.3.1 Maßgebende Wellenlänge $\lambda_B$

Die maßgebende Wellenlänge  $\lambda_B$  (in der Statik: Elastische Länge) bestimmt die Größe der dem Boden auf-geprägten Einsenkungsform. Sie beeinflusst daher direkt die Größe der Bodenimpedanz. Ihre Kenntnis ist für die Errechnung der Bettung deshalb zwingend notwendig.

In /12/ findet sich eine Lösung zur Bestimmung der Wellenlänge des Einsenkungsverlaufes eines elastisch gebetteten Balkens. Sie gilt jedoch nur für den statischen Fall und für den unendlich langen Balken.

Zur Interpretation der Wellenzahlen wird der elastisch gebettete Biegebalken betrachtet:

$$EI k_x^4 w(t) + \mu \ddot{w}(t) + c w(t) = 0 \tag{4.5}$$

- Die 4 Wellenzahlen liegen in der komplexen Ebene gleichverteilt auf einem Kreis um den Koordinatenursprung, siehe nachfolgende Abb.
- Je 2 Wellenzahlen bestimmen das Verhalten von Wellen einer Wellenausbreitungsrichtung (so dass im Fall  $L \rightarrow \infty$  für abgestrahlte Wellen nach Sommerfeld nur 2 Wellenzahlen übrigbleiben)

Darstellung der 4 komplexen Wellenzahlen eines gebetteten Fundamentbalkens auf elastischer Lagerung für die Fälle reelle Bettung (links) und komplexe Bettung (rechts):

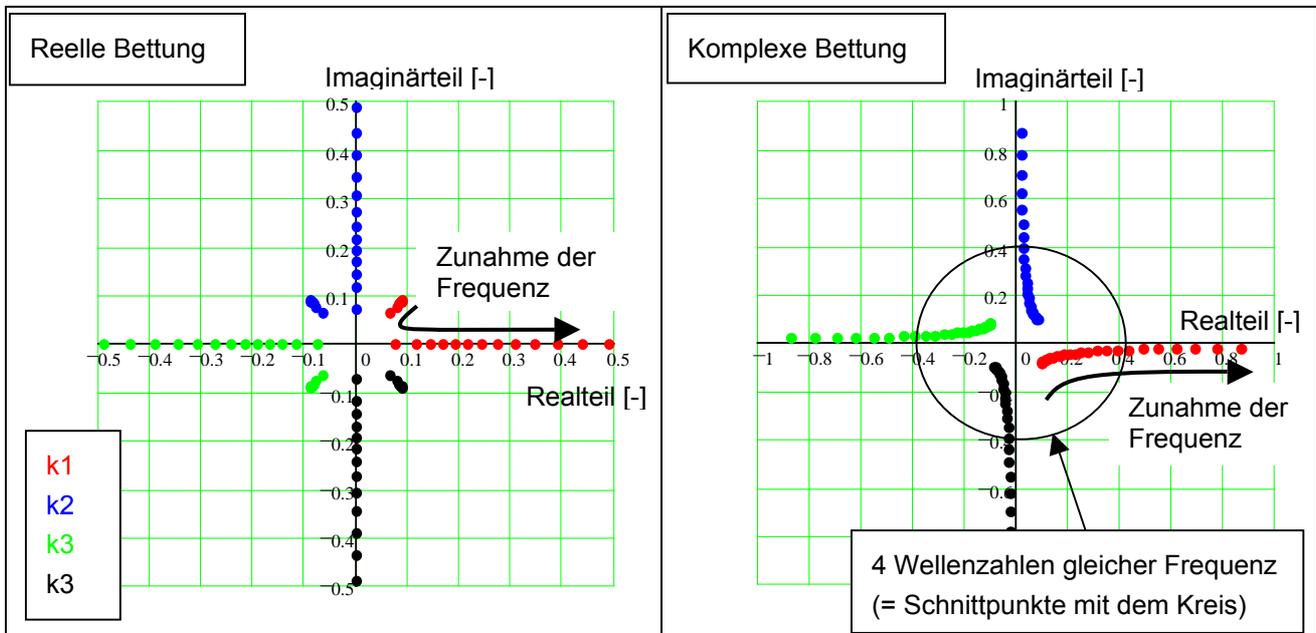


Abb. 4.13: Erläuterung Wellenzahlen zur Illustration der Vorgehensweise

Linke Abbildung:

- Deutlich zu sehen das cut-off Verhalten im ungedämpften Fall. Mit zunehmender Frequenz ergibt sich zunächst eine Nullstelle der Wellenzahl (= ungedämpfte vertikale Eigenfrequenz auf Bettung), zu höheren Frequenzen hin dann eine rein reelle (k1, k3) bzw. rein imaginäre Wellenzahl (k2, k4) für die

Beschreibung der Wellenabstrahlung im Fundamentbalken. (Im gewählten Frequenzraaster werden die Nullstellen nicht exakt getroffen.)

Rechte Abbildung:

- Im gedämpften Fall wird die Nullstelle (= die Vertikalresonanz und der Beginn einer Wellenabstrahlung im Balken) gutmütig umgangen. Zu hohen Frequenzen hin wird einer von beiden Anteilen (Realteil oder Imaginärteil) zunehmend dominant.
- Im quasistatischen Frequenzbereich gleichen sich die Größe des Real- und Imaginärteils, im dynamischen Bereich überwiegt einer von beiden Anteilen deutlich

Die Frequenzbereiche oberhalb und unterhalb der cut-off-Frequenz sind durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

Dynamischer Bereich:

- Prinzipiell Möglichkeit einer Wellenabstrahlung
- Im dynamischen Bereich charakterisieren die 2 überwiegend imaginären Wellenzahlen (d.h.  $ik_{xx}$  ist reell und negativ) das exponentielle Abklingverhalten der Lösung.
- Die 2 überwiegend reellen Wellenzahlen (d.h.  $ik_{xx}$  ist imaginär) beschreiben den Wellencharakter und damit die Wellenlänge. Die Realteile dieser beiden Wellenzahlen entsprechen sich betragsmäßig. Unterschiedlich ist lediglich die Wellenlaufrichtung. Für die Größe einer sich bewegenden Einsenkungsmulde und die damit verbundene Reaktionsimpedanz des Untergrundes ist die Laufrichtung unerheblich.

Hierdurch ist die maßgebende Wellenzahl oberhalb der cut-off Frequenz eindeutig festgelegt: Der betragsmäßig größere Realteil zweier beliebiger, um  $90^\circ$  verdrehter Wellenzahlen ist maßgebend (z.B.  $k_1$  und  $k_2 = ik_1$ ). Eine Ermittlung ist auch aus nur einer beliebigen Wellenzahl möglich: Der betragsmäßig größere Wert von Imaginär- und Realteil wird verwendet.

Quasistatischer Bereich:

- Im quasistatischen Frequenzbereich (Real- und Imaginärteil einer Wellenzahl entsprechen sich im ungedämpften Fall) addieren sich 2 jeweils konjugiert komplexe Lösungsanteile zur Gesamtlösung, sodass sich die Wellenbewegung aufhebt und allein das exponentielle Abklingen verbleibt.
- Die maßgebende Wellenzahl ist durch den Betrag des Realteils einer beliebigen der 4 Wellenzahlen festgelegt (s. Abb. oben).

Fazit für den gedämpften Fall:

Im gedämpften Fall kann im gesamten Frequenzbereich der Realteil der dynamisch maßgebenden Wellenzahl<sup>9</sup> herangezogen werden. Die in die Berechnung der Bodenimpedanz eingehende frequenzabhängige Halbwellenlänge ergibt sich zu:

$$\frac{\lambda_B}{2} = \frac{\pi}{k_B} \quad \text{mit } k_B = \text{maßgebende Wellenzahl} \quad (4.5a)$$

Entgegen dem tatsächlichen Verhalten wird in der Näherung beim „Ersatzmodell“ mit einer sinusförmigen Auslenkung der Halbraumoberfläche gerechnet. Der Sinusverlauf hat bei der Betrachtung einer festen Lastfrequenz eine konstante Wellenlänge. Im „Ersatzmodell“ wird das Fundament von der Symmetrieachse

<sup>9</sup> maßgebend = der betragsmäßig größere Realteil zweier um  $90^\circ$  verdrehter Wellenzahlen (z.B.  $k$  und  $ik$ ) nach Abschnitt 4.1. Gilt für den gewählten Ansatz  $w(x) = e^{ikx}$ .

ausgehend beidseits nur bis zum ersten Durchschlagen der Biegelinie betrachtet (= angenäherte Halbsinusform).

#### 4.3.2 Separates Erfassung des Fundament-Eigenschwingverhaltens

Ein Effekt, der bei einer weiteren Vereinfachung der Modellierung zu berücksichtigen ist, ist das Eigenverhalten kurzer Fundamente. Auch hier gilt, dass größere Fundamentstärken und ein weicherer Boden stärkere Auswirkungen auf das Ergebnis zeigen: Das Impedanzverhältnis Fundament zu Boden wächst in diesem Fall an, wodurch die Dämpfung des gekoppelten Systems geringer wird und im Extremfall leichter anregbare Bereiche (Resonanzen) und schwerer anregbare Bereiche (zur Unterscheidung „Antiresonanzen“ genannt) auftreten können, die die dynamische Gesamtsteifigkeit einer Fundamentierung stark beeinflussen.

Exemplarische Darstellung (weitere Ergebnisauszüge s. Anhang 4.3):

- Boden:  $c_s = 100 \text{ m/s}$
- Fund.-Länge = 20 m
- Fund.-Stärke = 1,6 m

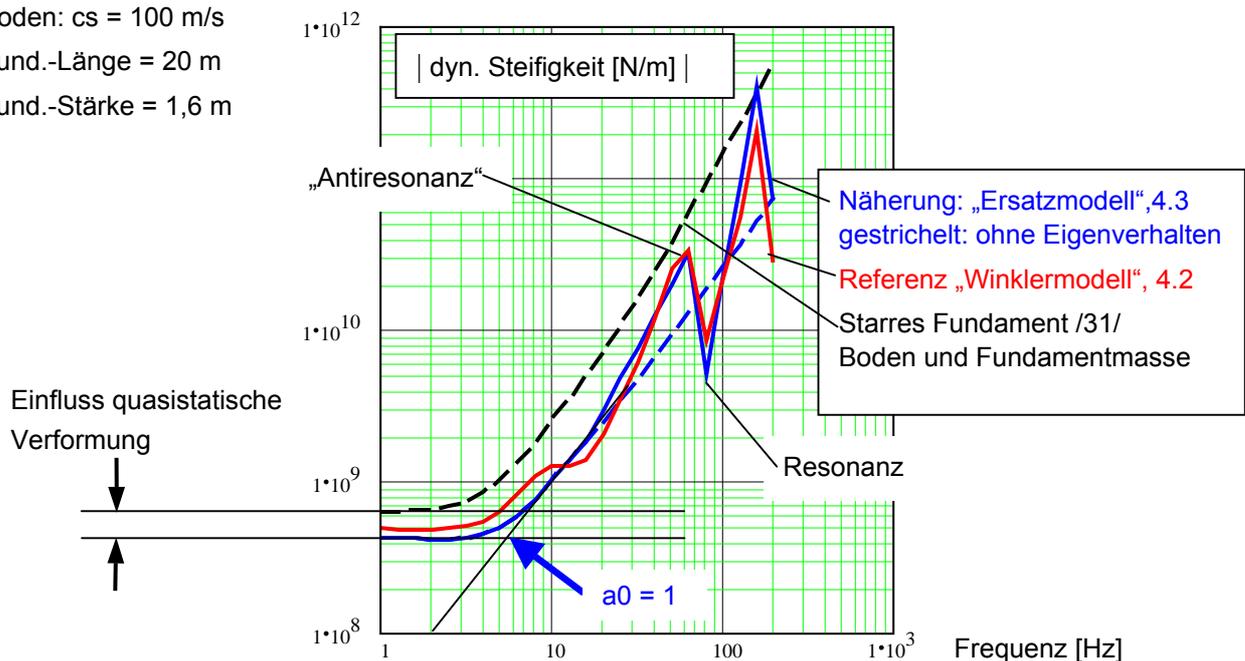


Abb. 4.14: Beispielabbildung Parameterstudie, Vergleich der Modellierungen

Charakteristischer Eckwert:

- Eine charakteristische Übergangsfrequenz zwischen quasistatischem und dynamischem Verhalten wird eingeführt und als „ $f_{co}$ “<sup>10</sup> benannt. An dieser Stelle ist  $\text{Re}(\text{Boden}) = \text{Im}(\text{Boden})$  und  $a_0 = 1$  (s. blauer Pfeil)

#### Impedanzeinbrüche (Resonanz):

Liegt die 1. Biegeeigenschwingung des Fundamentes so tieffrequent, dass der Boden noch quasistatisch reagiert, ist ihr Einfluss auf das Ergebnis vernachlässigbar, da a) die Fundamentimpedanz nicht ausreicht, dem Boden Resonanzschwingungen des Fundamentes aufzuzwingen und b) in diesem Fall stets eine gekoppelte Vertikal- / Biege-Eigenform vorliegt, deren Vertikalschwingungsanteil im Ersatzmodell bereits über die Bettung berücksichtigt ist (Durch Parameterstudie in Anhang 4.3 bestätigt).

Die zusätzlich mögliche dynamische Überhöhung aufgrund der elastischen Energie der Fundamentbiegung liegt bei den in Anhang 4.3 abgedruckten Eingangswerten der Parameterstudie bei  $\ll 5\%$ .

<sup>10</sup>  $f_{co}$  = „cut-off Frequenz“, entsprechend einer bezogenen Fundamentlänge  $a_0 = 1$

Deutliche Eigenformen werden nur dann auftreten, wenn

- die Biegeeigenschwingungen im Frequenzbereich der dynamischen Bodenreaktion liegen und
- das Absolutmaß der Bodendämpfung gering genug ist, dass sich Eigenformen ausbilden können. Im Fall des ungeschichteten Halbraumes kann dies aufgrund der hohen Abstrahldämpfung nur bei einem relativ weichen Untergrund bzw. verhältnismäßig großen Fundamentstärken der Fall sein.

Unter der Annahme, dass die frei-frei Eigenform des Fundamentbalkens in diesem Fall erhalten bleibt, ergibt sich für die Gleichung der Schwingungsbiegelinie /9/

$$\psi = \sinh(ax) + \sin(ax) - (\cosh(ax) + \cos(ax)) \frac{\sinh(aL) - \sin(aL)}{\cosh(aL) - \cos(aL)} \tag{4.6}$$

mit  $a = \frac{\alpha}{L}$  und  $\alpha_1 = 4,73$  bzw.  $\alpha_3 = 11$

und über den Rayleighkoeffizienten die Eigenfrequenz unter Berücksichtigung der Bettung  $c_B$  zu:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI \int (\Psi''(x))^2 dx + Re(c_B) \int (\Psi(x))^2 dx}{\mu \int (\Psi(x))^2 dx}} \text{ mit } c_B \text{ nach Abschnitt (4.1)} \tag{4.7}$$

Anmerkung:

Der Abstand der Nulldurchgänge der ersten frei-frei-Eigenform ergäbe sich zu 55% der Fundamentlänge. Da bei der eingeführten Begrenzung des Fundamentes auf eine halbe Wellenlänge jedoch keine Biegemomente am Fundamentrand übertragen werden können, korreliert mit einer Halbwellenlänge von 55% Fundamentlänge eine zu hohe 1. Biegeeigenfrequenz.

Die mit der errechneten 1. Eigenfrequenz korrelierende Halbwellenlänge wird daher zu 66% der Fundamentlänge festgesetzt: Damit entspricht die Eigenfrequenz eines zwischen diesen Punkten gelenkig gelagerten Balkens (= Schwingung zwischen seinen Nulldurchgängen) der gesuchten frei-frei Eigenfrequenz.

In der 3. Eigenform stimmen die Wellenlängen des Halbsinusmodells und der 3. Eigenform bereits gut überein (Frequenzfehler < 3%).

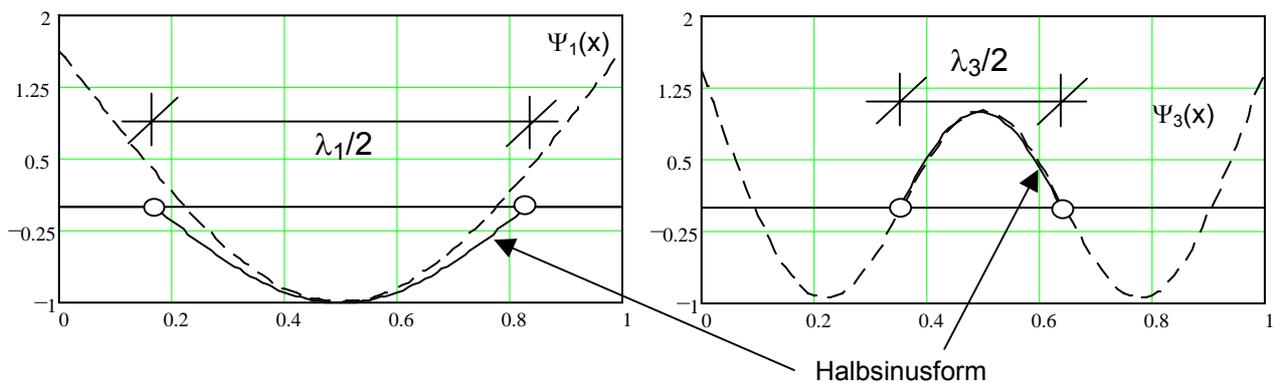


Abb. 4.15: Normierte Schwingungsbiegelinien, Vergleich der Eigenformen

Die genannten Abweichungen in der 1.EF sind in untenstehender Eigenfrequenzabschätzung bereits über die Faktoren  $\alpha_i$  (im Antiresonanzfall  $\gamma_i$ ) enthalten. Die nachfolgende Ermittlung der Impedanzverhältnisse zum Abschätzen der modalen Dämpfung und des Überhöhungsfaktors geschieht dann konsistent im halbsinusförmigen „Ersatzmodell“.

Unter der Annahme, dass die Eigenformen von der Bettung unbeeinflusst bleiben, ergeben sich die Eigenfrequenzen des kurzen, elastisch gebetteten Biegebalkens zu

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu} \left(\frac{\alpha_j}{L}\right)^4 + \frac{Re(c_B)}{\mu}} \quad (4.8)$$

Die Größe des jeweiligen Impedanzeinbruches lässt sich aus den Dämpfungsverhältnissen abschätzen. Für die Dämpfung wird vereinfachend nur die Bodendämpfung herangezogen. Die Materialdämpfung des Fundamentes bleibt unberücksichtigt.

Der modale Dämpfungsgrad ermittelt sich damit zu:

$$D_j = \frac{Im(C_{dyn} f_j)}{2M_j^* (2\pi f_j)^2} \quad \text{mit } M_j^* = \frac{\mu \lambda_j}{4} \quad \text{und } \frac{\lambda_1}{2} = 0,66 L \quad \frac{\lambda_3}{2} = 0,29 L \quad (4.9)$$

Die Größe des Impedanz-Einbruches ergibt sich bei den Eigenfrequenzen in Analogie zum EMS:

$$Faktor\_C_j = 2D_j \quad (4.10)$$

Impedanzversteifungen („Antiresonanz“):

Es finden sich weitere Eigenformen, die sich im Gegensatz zu den oben Genannten gegenüber zentrischer Kraftanregung versteifend verhalten: Das Fundament schwingt an seinen Enden stärker als der mittige Ansatzpunkt, der durch diese Eigenschwingung beruhigt wird:

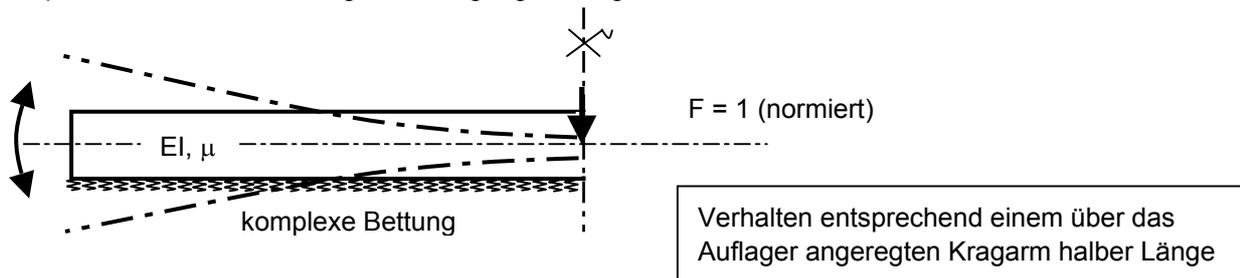


Abb. 4.16: Antiresonanz im Fundamentbereich

Mechanische Deutung: Das im vorherigen Abschnitt behandelte Resonanzverhalten entspricht bzgl. des qualitativen Impedanzverlaufes einem kraftangeregten EMS – die nun zu untersuchende „Antiresonanz“ entspricht hingegen dem fußpunktangeregten EMS.

Die dynamische Steifigkeit gegenüber Kraftanregung kann bei Berücksichtigung von Resonanzen / Antiresonanzen sowohl die alleinige Bodensteifigkeit unterschreiten, als auch die Steifigkeit von Boden und Fundament – starr gerechnet – überschreiten.

Die Phasenlage in den Antiresonanzen liegt ebenfalls bei 90°. Die gesuchten Eigenfrequenzen ergeben sich überschlägig zu (basierend auf /9/):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu} \left(\frac{2 \gamma_j}{L}\right)^4 + \frac{Re(c_B)}{\mu}} \quad \text{mit } \gamma_1=1,88 \quad \gamma_2=4,69 \quad \gamma_3=7,85 \quad \gamma_4=11,00 \quad (4.11)$$

Die Größe der Impedanz-Erhöhung beträgt bei diesen Eigenfrequenzen in Analogie zum EMS:

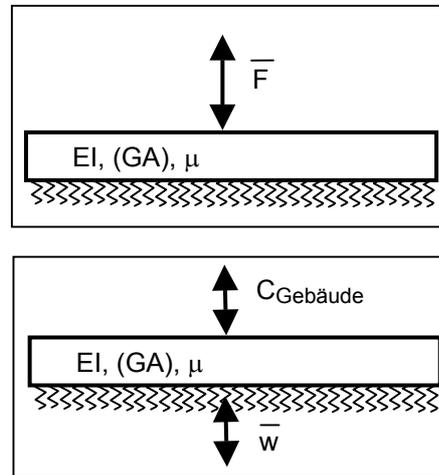
$$Faktor\_C_j = \frac{1}{2D_j} \quad \text{mit } D_j \text{ nach (4.20) mit } \lambda_j = \frac{\pi}{2 \gamma_j} L \quad (4.12)$$

### 4.4 Die „Ersatzformel“ – modulares Baukastensystem

Die nachfolgend zusammengestellten Näherungen kamen bereits bei den obenstehenden Modellierungen zum Einsatz. Sie werden hier im Überblick vorgestellt, ihr Einsatzzweck benannt und ggf. Kombinationsmöglichkeiten aufgezeigt.

Typische Anwendungsfälle:

- mittige Kraftanregung:
- Fußpunktanregung symm. Einzelfundament



Über diese beiden Anwendungsfälle hinaus sind Teile der Modellierung auch für den Einbau in andere Modelle geeignet. Vor allem das Bettungsmodell des Bodens kann leicht mit einem Bernoulli oder Biegeschubbalken kombiniert werden (vgl. Abschnitt 4.2 „Winklermodell“), so dass auch der Einfluss unter dem Fundamentbalken durchlaufender Wellen untersucht werden kann.

#### 4.4.1 Bausteine Bodenmodell

Folgende Einsenkungsformen der Bodenoberfläche stehen als dimensionslose Näherungslösungen des homogenen Halbraumes – analog zur bekannten Lösung für starre Fundamente (31) – zur Verfügung:

Beschreibung	Form	Abschnitt
Konstante Einsenkung „rechteckig“		4.1.2 bzw. (31)
Einachsig sinusförmige Einsenkung (Querrichtung konstant)		4.1.3
Zweiachsig sinusförmige Einsenkung „ausgerundet“		4.1.4

Tabelle 4.4

Außerhalb der aufgeprägten Einsenkungsform liegt jeweils eine freie Oberfläche vor ( $\sigma_z = 0$ ).

#### 4.4.2 Aufbau Bodenfeder aus quasistatischem und dynamischem Anteil

Die Gesamt-Bodenfeder bestimmt sich aus der Nachgiebigkeit zweier unterschiedlicher Einsenkungsanteile:

- Starrkörperanteil „R“ der Einsenkung nach Gl. (4.2)
- Wellenanteil „S“ der Einsenkung nach Gl (4.3, 4.3a bzw. 4.4, 4.4a)

Die folgende Aufteilung in „kurzes“ und „langes“ Fundament richtet sich nach der dimensionslosen Fundamentlänge. Ein Fundament ist daher stets bis zu einer bestimmten Wellenlänge „kurz“, bei höheren Frequenzen und kürzeren Wellenlängen wird es ab zwei Nulldurchgängen der Biegelinie zu einem „langen“ Fundament.

„Kurzes“<sup>11</sup> Fundament ( $L < \lambda_B/2$ ):

Ist die Fundamentlänge kleiner als die halbe Wellenlänge des gekoppelten Systems aus Fundamentbalken und Boden, so begrenzt sich für die Berechnung von Anteil S die maßgebende Halbwellenlänge auf die Fundamentlänge (s. Skizze).

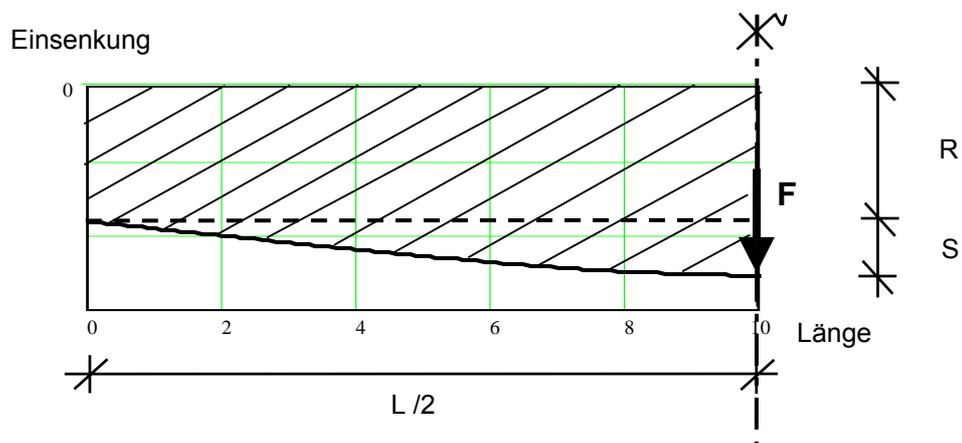


Abb. 4.17: Beispiel kurzes Fundament, Festlegung der maßgebenden Wellenlänge

Die Einsenkungsanteile R und S und die resultierende Bodensteifigkeit ergeben sich für die einachsige Fundamentbiegung aus geometrischer Betrachtung zu:

$$\text{mit } R = \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda_B}\right) \text{ und } S = 1 - R \quad (4.14)$$

$$C_B = R \cdot C_{\text{dyn}Z} + S \cdot C_{\text{dyn}Z\_S/N} \text{ nach Gl. (4.2 und 4.3a)}$$

Anmerkung: Es handelt sich nicht um eine Reihenschaltung der beiden Federanteile, sondern um eine alternative Bettungswahl, die schleifend mit den Anteiligkeiten R und S formuliert wird.

„Langes“ Fundament ( $L > \lambda_B/2$ ):

Ist die Fundamentlänge größer als die halbe Wellenlänge, so liegen die Schwingungsnulldurchgänge der Vertikalverformung innerhalb des Fundamentbereiches. Es entfällt der Starrkörperanteil R.

Es ergibt sich eine frequenzabhängige Wellenlänge für das gekoppelte System, die auch als mitwirkende Fundamentlänge – bzgl. der Impedanzverhältnisse – verstanden werden kann.

<sup>11</sup> „kurz“ in Relation zur Wellenlänge

4.4.3 Fundamentmodellierung

Das Fundament wird im „Ersatzmodell“ nur bis zum ersten Durchschlagpunkt der Biegelinie berücksichtigt, dort „abgeschnitten“ und dadurch zu hohen Frequenzen hin wesentlich verkleinert (s. Abb. 4.12). Die Wellenabstrahlung in das Fundament wird somit nicht berücksichtigt. Dieses Vorgehen rechtfertigt sich jedoch aus folgenden Gründen:

- Die Wellenabstrahlung in den Boden und damit ein Großteil der gesamten Abstrahldämpfung wird berücksichtigt.
- Gemäß Parameterstudie (Anhang 4.3) sind trotz der groben Näherung die wesentlichen Steifigkeitsanteile erfasst.
- Falls sich bei begrenzten Fundamentabmessungen eine nennenswerte Energieabstrahlung in die Fundamentplatte ergibt, führt dies zu stehenden Wellen. Diese haben als gesondert erfasstes Eigenverhalten (s.o.) auf die Gründungsimpedanz deutlich größeren Einfluss, als die vergleichsweise geringe Abstrahlungsdämpfung zwischen den Eigenformen.

*Eine mechanisch korrekte Berücksichtigung des Fundamentes, z.B. mittels einer Entwicklung nach Eigenformen, wurde aufgrund der Kopplungsprobleme mit dem Gebäude und der daraus resultierenden geringen Praktikabilität nicht gewählt.*

Die dynamische Gründungssteifigkeit eines einachsig biegeweichen Fundamentes auf dem homogenen elastischen Halbraum lässt sich in Näherung konstruieren wie hier grafisch veranschaulicht:

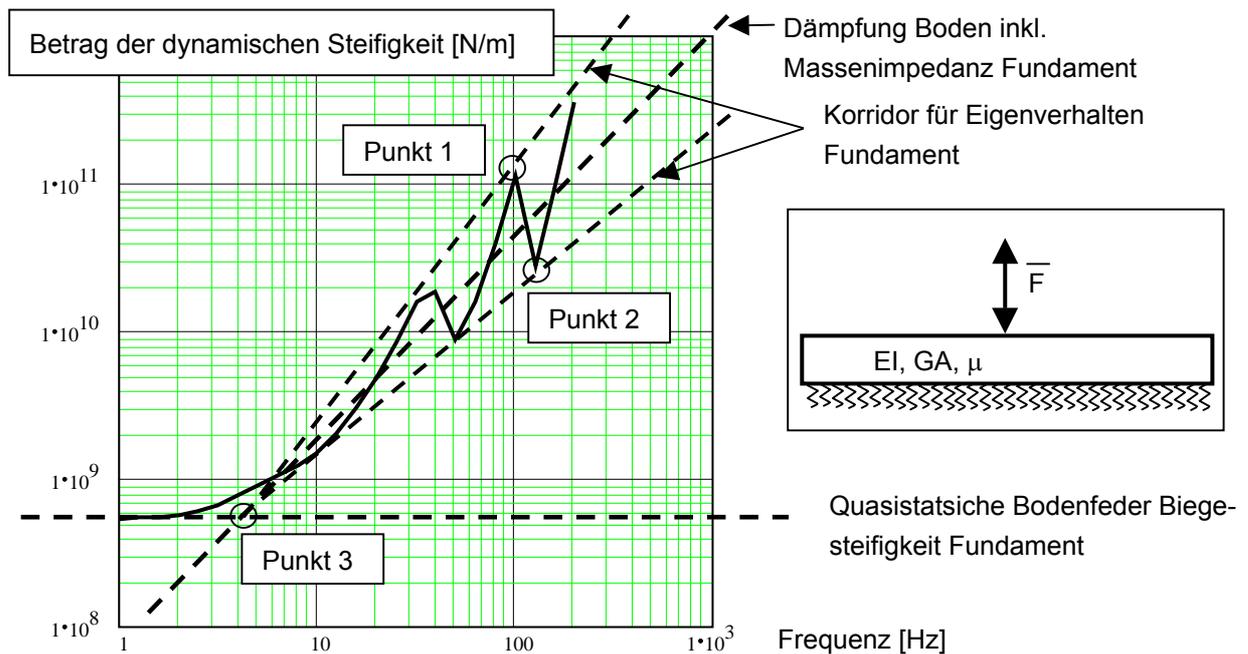


Abb. 4.18: Anteile dynamischer Steifigkeiten, Variation mit Korridor

Für die Berechnung der modifizierten Winklerbettung ist ein Iterationsschritt erforderlich. Da eine rasche Konvergenz erzielt wird, ist die eingangs abgeschätzte Steifigkeit der Bettung relativ unempfindlich.

Vorgehensweise bei Fundamentlänge  $l$ , Fundamentbreite  $b$ <sup>12</sup>:

	<p>Startwert Bettung <math>c = \frac{4Gr}{l(1-\nu)}(1+i)</math> mit <math>r = \sqrt{\frac{bl}{\pi}}</math></p>	(4.2)
	<p>Wellenzahlen <math>k_{j=1..4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C})}</math> mit <math>B = \frac{c - \mu\omega^2}{GA_Q}</math>; <math>C = \frac{c - \mu\omega^2}{EI}</math></p>	Anhang 4.2
<p>Iteration der Bettung</p>	<p>maßgebende Halbwellenlänge <math>\frac{\lambda_B}{2} = \frac{\pi}{k_B}</math></p> <p>mit <math>k_B = \text{Re}(k_1)</math> wenn <math>\text{Re}(k_1) &gt; \text{Re}(k_2 = ik_1)</math>, sonst <math>k_B = \text{Re}(k_2)</math></p> $r_{neu} = \sqrt{\frac{\lambda_B b}{2\pi}}$ <p>Begrenzung Bodenverformung auf Fundamentgröße: <math>l_{neu} = \frac{\lambda_B}{2}</math> wenn <math>\frac{\lambda_B}{2} \leq l</math> sonst <math>l_{neu} = l</math></p>	(4.5)
	<p>Anteile Starrkörpereinsenkung <math>R</math> und Wellenanteil <math>S</math>: <math>R = \cos\left(\frac{\pi l}{\lambda_B}\right)</math> und <math>S = 1 - R</math></p>	(4.14)
	<p>Anteil <math>R</math> als Einzelfeder/-Dämpfer <math>C_{dynZ} = \frac{4Gr}{(1-\nu)} [k_Z + i a_0 c_Z]</math> mit <math>a_0 = \frac{\Omega r}{c_S}</math></p>	(4.2)
	<p>Anteil <math>S</math> als Einzelfeder/-Dämpfer</p> $C_{dynZ\_SIN} = A1 \frac{Gr_{SIN}}{(1-\nu)} [k_{Z\_SIN} FF + A2 i a_0 c_{Z\_SIN}]$ mit $a_0 = \frac{\Omega r_{SIN}}{c_S}$ <p>und <math>r_{SIN} = \sqrt{\frac{bl_{neu}}{\pi}}</math>; Formfaktor <math>FF = \frac{\sqrt[3]{bl_{neu}^2}}{\sqrt{bl_{neu}}}</math>; <math>A1 = 2,0</math> und <math>A2 = 1,1</math></p>	(4.3)
	<p>Bodenersatzfeder für Halbwellenlänge <math>C_B = R \cdot C_{dynZ} + S \cdot C_{dynZ\_SIN}</math></p>	(4.14)
	<p>Dynamische Steifigkeit gegenüber zentrischer Kraftanregung inkl. Massensteifigkeit</p> $C = C_B - M^* (2\pi f)^2 = C_B - 0,5 \mu l_{neu} (2\pi f)^2$	(4.9)

Hinweise:

Im Fall einer Flachgründung bietet sich die Verwendung der zweiachsig ausgerundeten Bodenverformung nach Abschnitt (4.4) anstelle von (4.3) an.

Das Bodenmodell kann ohne Starrkörperanteil  $R$  günstig mit einem Balkenmodell gekoppelt werden. Dies entspricht dem nur ansatzweise vorgestellten „Winklermodell“.

<sup>12</sup> i.d.R. vektorisierte Berechnung in Abhängigkeit der Frequenz, Fallunterscheidung Gl. 4.14 dann unkritisch

Der Korridor für das Eigenformverhalten lässt sich bei Bedarf folgendermaßen aufspannen:

- Ermitteln der Eigenfrequenzen der höchsten bekannten Eigenformen für Resonanz (Gl. 4.8) und Antiresonanz (Gl. 4.11)
- Ermitteln der beiden zugehörigen Lehrschen Ersatzdämpfungen und des Faktors des Impedanzeinbruches (Gl. 4.9 und 4.10) bzw. der Impedanzerhöhung (Gl. 4.12)
- In Resonanz und Antiresonanz werden die beiden Faktoren mit dem Betrag der dynamischen Steifigkeit multipliziert (ergibt Punkt 1 und 2 in Abb. 4.18)
- Die Korridorbegrenzung hat bei  $a_0 = 1$  den Wert des Realteiles der Bodenfeder (ergibt Punkt 3)

Diese Näherungslösung beinhaltet nicht:

- Biegemomentenübertragung am Rand der zentrischen Einsenkungsmulde
- Wellenabstrahlung längs des Fundamentes (sonst „Winklermodell“ erforderlich, Abschnitt 4.2)
- Wellenleitfähigkeit des Bodens und somit Energietransport in horizontaler Richtung durch den Boden – die dämpfende Wirkung der Wellenabstrahlung in den Halbraum ist jedoch enthalten.

Die Anwendung der Näherungslösung rechtfertigt sich jedoch aus folgenden Gründen:

- Gegenüber der Lösung für starre Fundamente wird die Biegenachgiebigkeit des Fundamentes einbezogen. Die Abweichungen bzgl. der quasistatischen Bodenimpedanz hieraus betragen ca. Faktor 2.
- Die beteiligte Fundamentmasse verringert sich mit zunehmender Frequenz. Dies hat im höheren Frequenzbereich sehr großen Einfluss und findet in der Näherung Berücksichtigung.
- Aufgrund der gewählten künstlichen Schnittführung entsteht ein vergleichsweise geringer Fehler durch Vernachlässigen der Biegewellenabstrahlung des Fundamentes. Das berücksichtigte Eigenschwingverhalten kann hingegen Abweichungen von mindestens Faktor 2 bedingen. Diese deutlichen Abweichungen vom Starrkörperverhalten werden berücksichtigt.

## 5 Flachdecken

Im Folgenden werden in Abschnitt 5.1 zunächst Flachdecken in allgemeiner Form behandelt. Aus dem breiten Spektrum möglicher Rand- und Übergangsbedingungen wird zunächst folgender Fall behandelt:

- Deckenmittelfelder gleicher Größe
- kohärente Fußpunktanregung

In Abschnitt 5.2 wird mittels einer Balkenmodellierung der Zweifeldträger als häufig anzutreffender Fall einer typischen Bürogebäude-Decke gelöst. Hierfür wird die Anregung in gleichphasige, gegenphasige und zwiängende Anregungsanteile zerlegt.

Im Gebäudequerschnitt entsprechen die Decken einem Zweifeldträger mit leicht unterschiedlichen Spannweiten, die sich daraus ergeben, dass bei gleichen Raumgrößen der notwendige Mittelgang asymmetrisch auf einer Seite der Mittelstützenreihe verläuft. Übliche Deckenspannweiten wären hier z.B. 8 m (Bürraum + Gang) und 6 m (Bürraum). Die Spannweiten in Gebäudelängsrichtung sind dabei üblicherweise kürzer als der kleinere Wert, sodass die niedrigsten Eigenformen vom Stützenabstand in Längsrichtung nur wenig beeinflusst werden.

Im Anschluss an diese Fälle werden in Abschnitt 5.3 mittels eines Balkenmodells Untersuchungen zur Anregbarkeit der Decken durch quer zum Gebäude eintreffende Wellenfronten durchgeführt. Die Ergebnisse werden unter Berücksichtigung von Messergebnissen (für den 2-dim. Fall) dazu herangezogen, um die bei größeren zusammenhängenden Decken und höheren Eigenformen vorhandene Abstrahldämpfung zu erfassen.

### 5.1 Deckenmittelfelder unter kohärenter Fußpunktanregung

Ausgehend von einer geeigneten Näherungslösung sollen für die relevanten Eigenformen die jeweils erste Eigenfrequenz und die Werte für die generalisierte Masse, die Koppelmasse und die generalisierte Steifigkeit bestimmt werden.

#### 5.1.1 Anregbare Eigenformen, Ansätze

Prinzipiell können in Analogie zur Balkentheorie nach /9/ in beiden horizontalen Raumrichtungen folgende Formfunktionen als Näherungen für Eigenschwingformen angesetzt werden (jeweils auch sinngemäß für die y-Richtung):

a) beidseitig gelenkig gelagert 
$$gg(x) = w_0 \sin\left(\frac{n x}{L} \pi\right) \quad (5.1)$$

b) beidseitig eingespannt

$$ee(x) = w_0 \left[ \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) + (\cosh(a_n x) - \cos(a_n x)) \frac{\sinh(a_n L) - \sin(a_n L)}{\cosh(a_n L) - \cos(a_n L)} \right] \quad (5.2)$$

c) einseitig eingespannt

$$eg(x) = w_0 \left[ \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) - (\cosh(a_n x) - \cos(a_n x)) \frac{\sinh(a_n L) - \sin(a_n L)}{\cosh(a_n L) - \cos(a_n L)} \right] \quad (5.3)$$

Aus diesen Lösungen für nur eine Koordinatenrichtung wird die Gesamtlösung  $\Psi(x,y)$  für ein Deckenmittelfeld aufgebaut.

$$\Psi(x, y) = A \text{gg}(x) + B \text{gg}(y) + C \text{gg}(x) \text{gg}(y) + D \text{ee}(x) + E \text{ee}(y) + F \text{ee}(x) \text{ee}(y) \quad (5.4)$$

Das Deckenrandfeld stellt einen Sonderfall dar und bleibt zunächst unbeachtet.

Zwecks Systematisierung wird der Fall „lotrecht“ zum Gebäude einfallender Wellenfronten betrachtet. Die in /6/ von Coutagne und Garcin untersuchte Eigenschwingform der Deckenfelder kann gleichphasig über die Stützen angeregt werden:

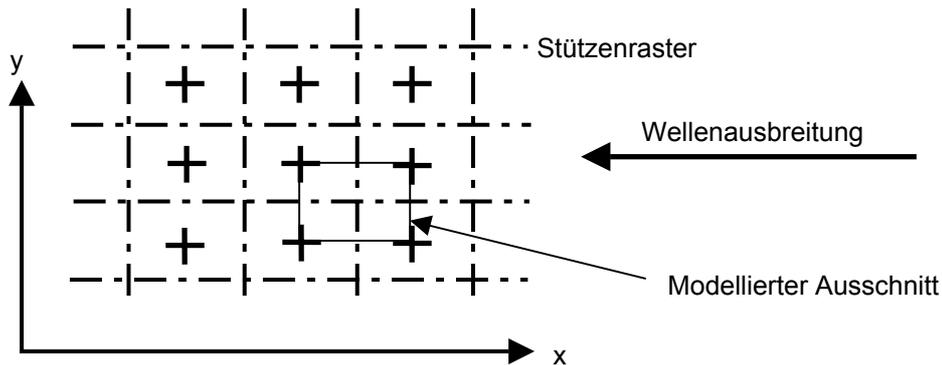


Abb. 5.1: Gleichphasige Anregung von Deckenfeldern einer Geschossdecke

In diesem Fall sind die Ansatzkoeffizienten A, B und C = 0, da die Eigenschwingform im Bereich aller Gebäudeachsen (strich-punktiert) eine horizontale Tangente besitzt. Folglich sind mittels eines geeigneten Referenzmodells – z.B. eines FE-Modells – lediglich die Parameter D, E und F zu bestimmen.

Weitere Fälle, die sich im Industriebau relativ häufig finden, sind

- einzelne Flachdecken, bei welchen jegliche Zwängung am Rand entfällt,
- Flachdecken in linienartiger Aneinanderreihung z.B. in Form einer eingezogenen Zwischenebene
- und große Deckenebenen, die jedoch schachbrettartig oder reihenweise angeregt werden:

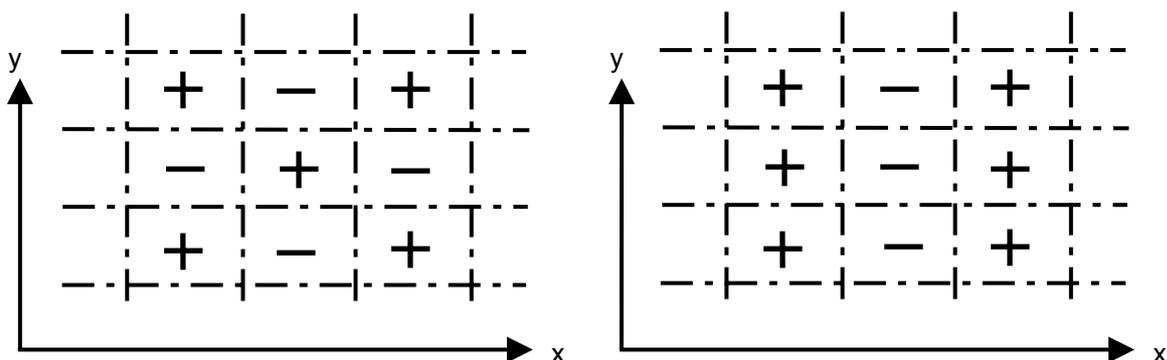


Abb. 5.2: Mögliche Varianten gegenphasiger Anregung von Deckenfeldern einer Geschossdecke

Aufgrund einer Vielzahl von Eingangsparametern (Wellenlängen, -Laufrichtungen, Bodeneigenschaften, Unregelmäßigkeiten des Rasters, Gebäudekernen) wird sich in der baodynamischen Praxis fast immer eine Kombination aus den hier genannten Eigenform-Mustern ergeben. Unterschieden werden muss weiterhin zwischen unterschiedlichen Anregungsarten, z.B. zwischen gleichphasiger Anregung bei sehr „schnellem“ Boden im Gegensatz zu punktueller Anregung über eine Stütze. Die unterschiedlichen Anregungen wirken

sich nicht nur bzgl. der maßgebenden Eigenformen und damit Eigenfrequenzen aus, sondern vor allem bzgl. der Größe der vorhandenen Abstrahldämpfung und damit der Größe der Schwingungsantwort.

Folgende Vorgehensweise erscheint daher sinnvoll:

- Ersatzmodelle für die Extremfälle
  - a) gleichphasige Anregung, siehe Abb. 5.1 (maximale Einspannverhältnisse durch horizontale Tangenten zwischen den Deckenfeldern) und
  - b) Einzeldecke (minimale Einspannung, da keine Nachbarfelder vorhanden)
- Der übliche Anwendungsfall wird zwischen diesen Extremfällen einzuschätzen sein.
- Der Anwender kann je nach Aufgabenstellung mit einem der Extremfälle rechnen, die Ersatzschwingergößen gemäß Breitsamter /3/ zwischen diesen interpolieren oder mehrere unterschiedliche Decken in sein Gebäude „einhängen“ und anschließend in geeigneter Weise über die Immissionsgrößen räumlich und zeitlich mitteln.

Es ist zunächst weiterhin unklar, welche Eigenformen über die Stützen wie stark angeregt werden können (Anregungsgrad), und aus welchen Eigenformkombinationen sich im Fall vieler Deckenfelder die Gesamtschwingung aufbaut. Diese Fragestellung kann prinzipiell kaum befriedigend deterministisch gelöst werden. Untersuchungen, Denkansätze und Lösungsvorschläge hierzu werden in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

### 5.1.2 Referenzmodell: Parameteridentifikation

#### *FALL A, maximale dynamische Einspannverhältnisse*

Die FE-Modellierung mit ANSYS (siehe /32/) umfasst den Ausschnitt einer Stütze bis in die jeweilige Deckenfeldmitte. Die Modellierung besteht aus Plattenelementen, die – wie in /6/ gezeigt wurde – deutlich stabilere Ergebnisse als z.B. Volumenelemente liefern.

Der Kräfteinleitungsbereich um die Stütze wurde in einem Bereich von 15% der Länge und der Breite des Ausschnittes mit einem feineren Netz generiert.

Im Schnittbereich Decke – Stütze wurden sämtliche Deckenknoten in allen Freiheitsgraden festgehalten. Die Querschnittsabmessungen der Stütze wurden so gering gewählt, dass der Einspanneffekt durch die Stütze vernachlässigt werden kann, sich andererseits aber auch keine zu große punktuelle (Schub-) Nachgiebigkeit ergibt (Parameterstudie). Die Verformung weist an den Plattenrändern horizontale Tangenten auf.

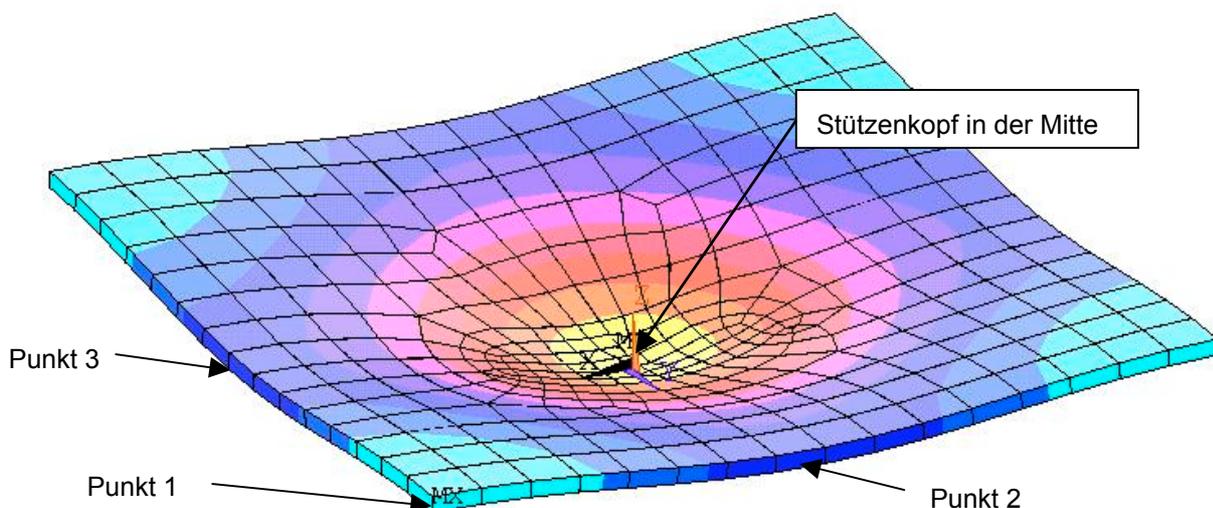


Abb. 5.3: Flachdecken-Ausschnitt, erste symmetrische EF

Parameterstudien mit dem ANSYS Modell bestätigen /6/ und ergeben Folgendes:

- Eigenfrequenzen gemäß Balkentheorie proportional zur Plattenstärke
- Eigenfrequenzen indirekt proportional zum Quadrat der Plattengröße (L bei quadratischen Platten)

Die Ermittlung der Eigenform aus den Abmessungen L und B bei rechteckigen Platten erfolgt über den Parameter  $q = B/L (< 1)$ , gerastert in Schritten von 0,1.

Für  $q = 0,3$  bis 1,0 wird die Auslenkung der für die Eigenschwingform charakteristischen Punkte

- Deckenfeldmitte (= Ecke in Abb. 5.3) und
- Randmitten  $L/2$  und  $B/2$  ermittelt.

Wird die Auslenkung der Randmitten  $w_2$  und  $w_3$  auf den Eckwert  $w_1$  bezogen (Normierung der EF auf eine Maximalauslenkung der Größe 1), ergeben sich folgende Werte:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$w_2$ bei $L/2$	71 %	80 %	90 %	96 %	99 %	100%	100%	100%
$w_3$ bei $B/2$	71 %	60%	47 %	33 %	22 %	13%	6 %	2 %

Tabelle 5.1

Gleichung 5.4 reduziert sich auf die Ansatzkoeffizienten D, E und F. Für diese 3 Unbekannten stehen 3 im FE-Modell ermittelte bekannte Punkte zur Verfügung, sodass sich ein lineares Gleichungssystem ergibt:

$$\begin{bmatrix} ee(x1) & ee(y1) & ee(x1) \cdot ee(y1) \\ ee(x2) & ee(y2) & ee(x2) \cdot ee(y2) \\ ee(x3) & ee(y3) & ee(x3) \cdot ee(y3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 = 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Hieraus lassen sich die Ansatzkoeffizienten – auf D bezogen – bestimmen wie folgt:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
E/D	1	0,72	0,52	0,34	0,22	0,13	0,06	0,02
F/D	-0,37	-0,32	-0,25	-0,19	-0,13	-0,08	-0,04	-0,01

Tabelle 5.2

FALL B, minimale dynamische Einspannverhältnisse („Einzeldecke“ gemäß Abschnitt 5.1.1)

Der Ausschnitt der FE-Modellierung musste zur Erfassung der freien Plattenränder in den Systemachsen neu gewählt werden. Modelliert wurde daher ein Deckenfeld, welches an seinen 4 Ecken jeweils durch Stützen vertikal gehalten ist. Die weitere Modellierung wurde analog zu Fall A durchgeführt.

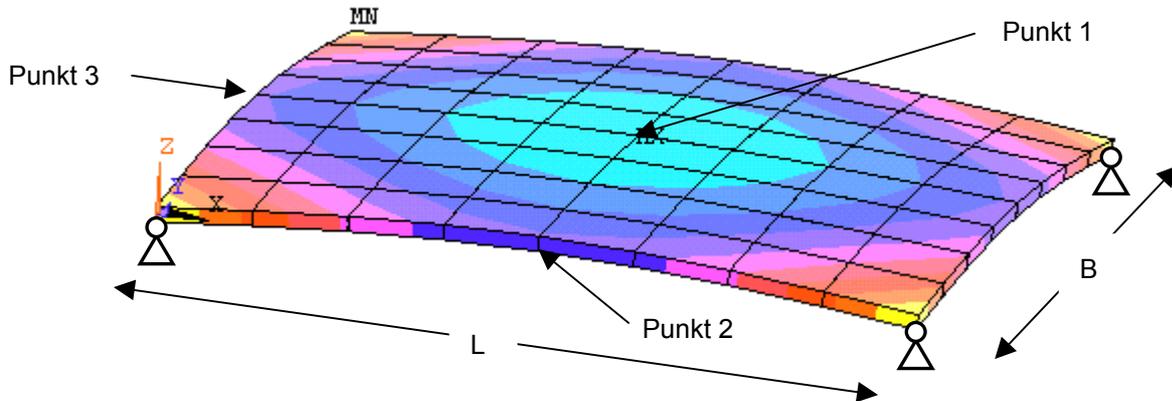


Abb. 5.4: Flachdecke mit freien Rändern, erste symmetrische EF

Analog zu Fall A wird für das Abmessungsverhältnis  $q = 0,1$  bis  $1,0$  die Auslenkung der für die Eigenschwingform charakteristischen Punkte

- Deckenfeldmitte (Punkt1) und
- Randmitten  $L/2$  und  $B/2$  ermittelt (Punkt 2 und 3).

Wird die Auslenkung der Randmitten auf den Eckwert bezogen (Normierung der EF auf eine Maximalauslenkung der Größe 1), ergeben sich folgende Werte:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$w_2$ bei $L/2$	65 %	77 %	88 %	96 %	100 %	102 %	103 %	102%
$w_3$ bei $B/2$	65 %	52 %	38 %	27 %	16 %	9 %	4 %	2 %

Tabelle 5.3

Werte oberhalb von 100% ergeben sich bei schmalen Deckenstreifen, sobald das Maximum am Rand und nicht in der Mitte auftritt. Die unbehinderte Querdehnung am Rand führt zu einer höheren Nachgiebigkeit der „Randfasern“ in Deckenlängsrichtung.

Ab  $q \leq 0,7$  zeigte die gewählte Elementgröße deutlichen Einfluss auf das Ergebnis. Die Größe der Plattenelemente wurde daher bei kleineren  $q$ -Werten auf  $1/3$  reduziert.

Gleichung 5.4 reduziert sich bei diesen Randbedingungen auf die Ansatzkoeffizienten A, B und C und die Ansatzfunktionen, die keine Randeinspannung beinhalten. Die Ansatzkoeffizienten lassen sich analog zu Gl. 5.5 über die mittels FE-Modell ermittelten Verformungseckpunkte bestimmen:

$$\begin{bmatrix} gg(x1) & gg(y1) & gg(x1) \cdot gg(y1) \\ gg(x2) & gg(y2) & gg(x2) \cdot gg(y2) \\ gg(x3) & gg(y3) & gg(x3) \cdot gg(y3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 = 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Die Ansatzkoeffizienten – auf D bezogen – ergeben sich zu:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
E/D	1,00	0,68	0,43	0,27	0,16	0,09	0,04	0,02
F/D	-0,46	-0,38	-0,30	-0,24	-0,16	-0,09	-0,04	-0,02

Tabelle 5.4

### 5.1.3 Vergleich FE- und Ersatzmodell

#### FALL A, maximale dynamische Einspannverhältnisse

Folgende Grafik zeigt die Abweichungen des Ersatzmodells vom ANSYS-FE-Modell (L = 10 m, d = 0,2 m, E-Modul = 3E10). Der Fehler bzgl. der 1. Eigenfrequenz liegt bei < 4%.

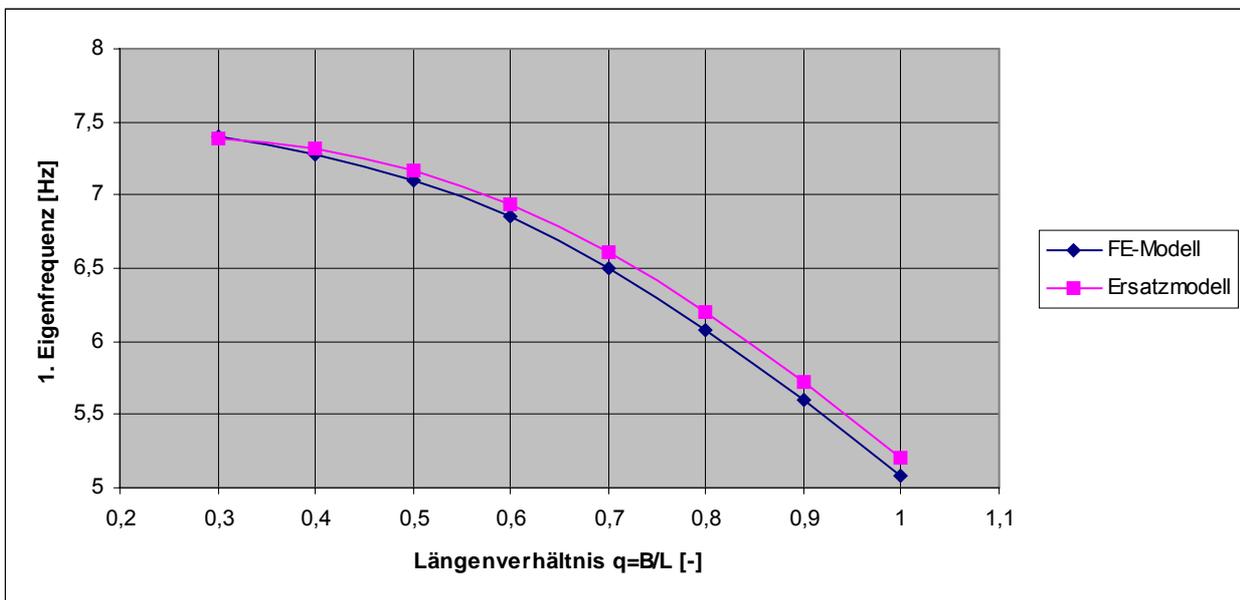


Abb. 5.5: Vergleich FE-Modell – Ersatzmodell, Flachdecke eingespannt

Anhand weiterer Parametersätze konnte bestätigt werden, dass sich die Lage der 1. Eigenfrequenz erwartungsgemäß proportional zur Plattenstärke und indirekt proportional zum Quadrat der Länge verhält.

$$f_0 \sim \frac{d}{L^2} \tag{5.7}$$

FALL B, minimale dynamische Einspannverhältnisse

Vergleich der mit dem ANSYS-FE-Modell und mit dem Ersatzmodell ermittelten Eigenfrequenzen (Parameter von Fall A beibehalten):

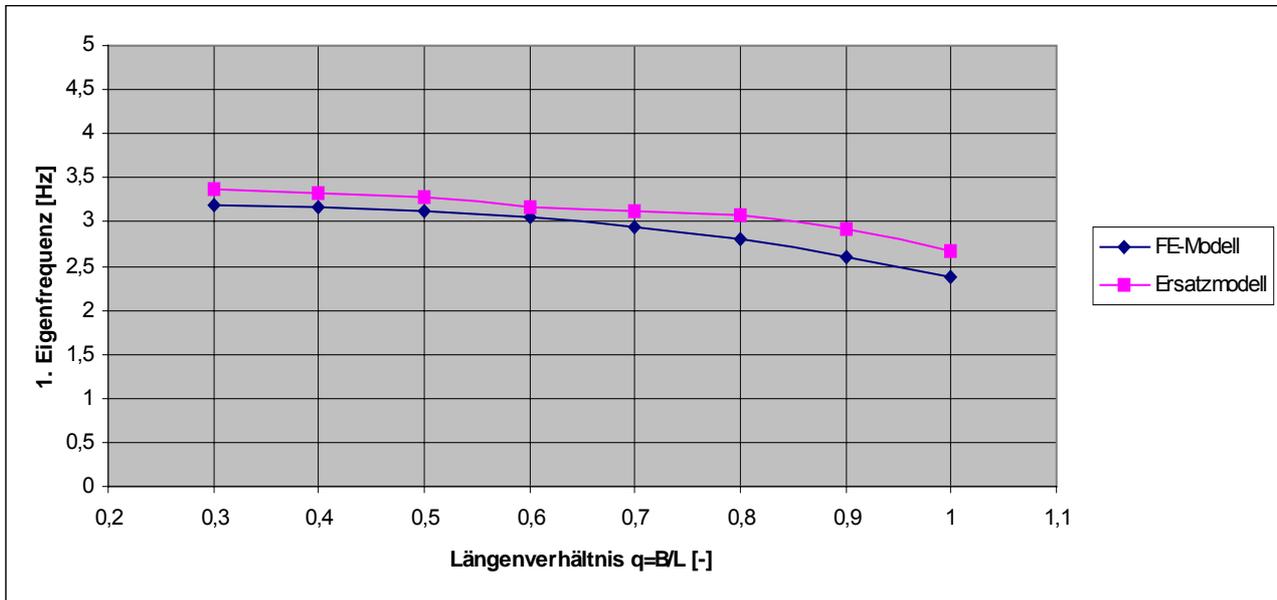


Abb. 5.6: Vergleich FE-Modell – Ersatzmodell, Flachdecke, Einspannung dynamisch nicht vorhanden

Bis zu einem Längenverhältnis von ca. 0,6 ähneln die Abweichungen Fall A. Ab q = 0,7 ergibt sich ein leichter Knick in der dargestellten Kurve der 1. Eigenfrequenz beim Ersatzmodell.

**5.1.4 Ersatzschwingerkennwerte**

FALL A, maximale dynamische Einspannverhältnisse

Für den Fall einer unendlich ausgedehnten Decke bzw. näherungsweise für ein Deckenmittelfeld ist mit der Kenntnis der Ansatzkoeffizienten aus Tabelle 5.2 die Eigenform über Gleichung (5.4) eindeutig festgelegt (Parameter A,B und C = 0). Die benötigten Ersatzschwingerkenngrößen ergeben sich damit wie folgt:

Die Lage der 1. Eigenfrequenz ergibt sich für das **quadratische Deckenfeld** aus nachfolgender Gleichung mittels Anpassung des Wertes  $\alpha$  zu

$$f_0 = \beta_{RE} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\mu d}} \quad \text{mit} \quad D = \frac{E d^3}{12(1-\nu)^2} \quad \text{und} \quad \alpha = 3,96^{13} \quad (5.8)$$

$$\beta_{RE} = 1 \text{ bei quadratischen Deckenfeldern}$$

<sup>13</sup> Biegnachgiebigkeit berücksichtigt, keine Schubnachgiebigkeit

Für **rechteckige Deckenfelder** kann im Fall A die 1. Eigenfrequenz vereinfachend aus dem Längenverhältnis  $q$  ermittelt werden:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$\beta_{RE}$	1,00	1,10	1,19	1,27	1,33	1,38	1,41	1,42

Tabelle 5.5

FALL B, minimale dynamische Einspannverhältnisse

Die gleiche Vorgehensweise – angewandt auf die Randbedingungen von Fall B – ergibt für das **quadratische Deckenfeld**:

$$f_0 = \beta_{RE} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\mu d}} \quad \text{mit} \quad D = \frac{E d^3}{12(1-\nu)^2} \quad \text{und} \quad \alpha = 2,87^{14} \quad (5.9)$$

$\beta_{RE} = 1$  bei quadratischen Deckenfeldern

Für **rechteckige Deckenfelder** ergibt sich für Fall B:

$q = \frac{B}{L}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$\beta_{RE}$	1,00	1,09	1,15	1,17	1,18	1,23	1,25	1,26

Tabelle 5.6

Mittels Bildung nachfolgender Generalisierten Größen für die 1. Eigenform werden die Ersatzschwinger-Kenngrößen nach /3/, Abschnitt 6.2, gebildet:

Generalisierte Masse  $M^* = \int \Psi^2 dm$  (5.10)

Koppelmasse  $\bar{M} = \int \Psi dm$  (5.11)

Generalisierte Steifigkeit  $C^* = M^* (2\pi f_0)^2$  (5.12)

Eine analytische Lösung der Integrale – Produkte aus trigonometrischen Funktionen – ist mit den Integraltafeln in z.B. /4/ mit größerem Rechenaufwand möglich, jedoch nicht erforderlich. Aufgrund des variablen Längenverhältnisses  $q$  erfolgt die Auswertung in Abhängigkeit von  $q$  numerisch.

<sup>14</sup> Biegnachgiebigkeit berücksichtigt, keine Schubnachgiebigkeit

Zur Erstellung nachfolgender Tabelle wurde die Länge auf 1 normiert, die Breite entspricht somit dem Wert q. Generalisierte- und Koppelmasse können somit als formabhängige „Fülligkeitsbeiwerte“ verstanden werden, wobei entsprechend Tabelle 5.2 der Parameter D auf den Wert 1 normiert wurde:

*FALL A, maximale dynamische Einspannverhältnisse*

q= B <sup>15</sup>	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	1-achsig
$\frac{m^*}{\mu}$	2,353	1,748	1,461	1,235	1,141	1,088	1,053	1,047	1,036
$\frac{\bar{m}}{\mu}$	1,427	1,226	1,107	0,997	0,939	0,898	0,868	0,855	0,846
anteilige schwingende Masse m <sub>1</sub> [%]	86,5	85,9	83,8	80,6	77,2	74,2	71,5	69,9	69,0

Tabelle 5.7

Infolge der gewählten Normierung auf D= 1 können Werte größer 1 für die Generalisierte- und die Koppelmasse auftreten (nicht jedoch für die anteilige schwingende Masse des Ersatzschwingers).

*FALL B, minimale dynamische Einspannverhältnisse*

q= B <sup>16</sup>	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	1-achsig
$\frac{m^*}{\mu}$	1,276	0,909	0,696	0,586	0,531	0,517	0,507	0,504	0,500
$\frac{\bar{m}}{\mu}$	1,086	0,914	0,792	0,719	0,674	0,657	0,646	0,641	0,637
anteilige schwingende Masse m <sub>1</sub> [%]	92,4	91,9	90,1	88,0	85,5	83,7	82,3	81,7	81,0

Tabelle 5.8

Für die tatsächlichen Abmessungen sind die Generalisierte Masse und die Koppelmasse mit der quadrierten Vergrößerung gegenüber dem normierten Fall zu multiplizieren:

$$M^* = m^* \left( \frac{LB}{L_{norm} \cdot B_{norm}} \right) = m^* \left( \frac{LB}{1 \cdot q} \right) \tag{5.13}$$

<sup>15</sup> q entspricht B, da L auf den Wert 1 normiert ist.

<sup>16</sup> q entspricht B, da L auf den Wert 1 normiert ist.

$$\bar{M} = \bar{m} \left( \frac{LB}{1 \cdot q} \right) \quad (5.14)$$

$$\text{schwingende Masse je Eigenform nach /3/: } m_j = \frac{\bar{M}_j^2}{M_j^*} \quad (5.15)$$

Die sich nach (5.15) ergebende schwingende Ersatzmasse  $m_1$  ist in der jeweils letzten Zeile von Tabelle 5.7 und 5.8 in Prozent der Gesamtmasse angegeben.

#### Anmerkungen:

Aufgrund wachsender Komplexizität der Fortführung des sog. „Deckenkataloges“ nach /3/ muss zunehmend mit Näherungslösungen und numerischen Auswerteverfahren gearbeitet werden. Eine geschlossene Lösung in Abhängigkeit der Ordnung der Eigenform kann daher schon bei den Flachdecken nicht mehr gefunden werden.

Ein Vorschlag für die Berücksichtigung höherer EF wird in dieser Arbeit in Abschnitt 5.3 gegeben. Höhere EF sind in der Praxis vor allem bzgl. der Sekundärluftschall-Problematik interessant.

## 5.2 Flachdecken, modelliert als Zweifeldträger mit unterschiedlicher Spannweite

Eine Decke mit  $n \times 2$  Feldern wird in Näherung mit einem Balkenmodell als Zweifeldträger modelliert.

### 5.2.1 Allgemeines

Ein sehr häufig vorkommendes statisches System ist das hier als „Büroriegel“ bezeichnete. Er ergibt sich aus der Forderung nach Tageslicht-beleuchteten Büroräumen, die durch einen Mittelgang getrennt sind. Die Raumgrößen der Büroräume sind üblicherweise gleich. Im Gang sollen sich natürlich keine Stützen befinden, weshalb die Mittelstützenreihe asymmetrisch neben dem Gang angeordnet wird. Die größere Deckenspannweite ergibt sich also aus Bürotiefe plus Gangbreite, die kleinere allein aus der Bürotiefe. Es handelt sich daher oft um einen Zweifeldträger mit leicht unterschiedlichen Spannweiten:

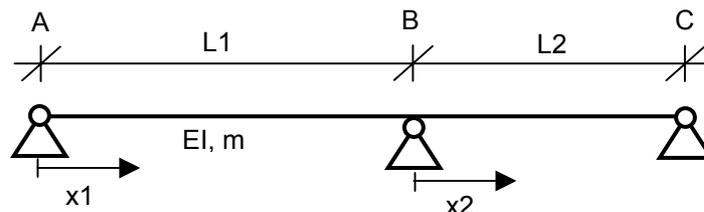


Abb. 5.7: Zweifeldträger, System „Büroriegel“

Folgende Vereinfachungen werden für die Bildung eines Ersatzmodells getroffen:

- Betrachtung mittels Balkenmodell
- Nur Biegenachgiebigkeit (kein Schub)
- Konstante Steifigkeits und Massenverhältnisse über beide Spannweiten
- Auflager gelenkig angenommen

Die naheliegende Überlegung, z.B. die rechte Seite des Tragwerks durch eine frequenzabhängige Drehimpedanz (bestehend aus Drehfedern und -Trägheiten) zu ersetzen, scheitert daran, dass auch über Auflager C Schwingungen eingeleitet werden. Dies wäre im Fall einer Abschlussimpedanz in B nicht möglich.

Es könnte so nur die homogene Lösung der DGL entsprechend dem freien Ausschwingen des Systems beschrieben werden.

### 5.2.2 Lösungsweg, Kenngrößen

Es wurde folgende Lösungsstrategie verfolgt:

- Aufstellen DGL-System im Wellenzahlraum
- Aufsplitten der Fußpunktanregung  $w_f$  in die Fälle gleichphasig / gegenphasig / Biegung (= 3 Sätze Randbedingungen  $w_{fi}$ ) – der gleich- und der gegenphasige Fall sind zwängungsfrei.
- Bestimmen der benötigten generalisierten Kenngrößen getrennt für die 3 normierten Anregungsarten für die jeweils ersten 3 Eigenformen aus der Forderung gleicher Auflagerkräfte
- Berechnung Ersatzschwingerkennwerte, Aufstellen Ersatzmodell mittels Impedanzverfahren und Kontrolle über Vergleich von Ersatzmodell und DGL-Modell

Rand- und Übergangsbedingungen an den Auflagern A, B und C:

- A)  $w(x_1 = 0) = w_{fi}(A)$  (5.16)  
 $M(x_1 = 0) = 0$
- B)  $w(x_1 = L_1) = w_{fi}(B)$   
 $w(x_1 = L_1) = w(x_2 = 0)$   
 $w'(x_1 = L_1) = w'(x_2 = 0)$   
 $M(x_1 = L_1) = M(x_2 = 0)$
- C)  $w(x_2 = L_2) = w_{fi}(C)$   
 $M(x_2 = L_2) = 0$

Ein Produktansatz mit den Koeffizienten  $A_i$  für den Bereich  $L_1$  und  $B_i$  für  $L_2$  führt zu folgendem Gleichungssystem,

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_1^2 EI & -k_2^2 EI & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e^{ik_1 L_1} & e^{ik_2 L_1} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 ik_1 e^{ik_1 L_1} & ik_2 e^{ik_2 L_1} & \dots & \dots & -ik_1 & -ik_2 & \dots & \dots \\
 e^{ik_1 L_1} & e^{ik_2 L_1} & \dots & \dots & -1 & -1 & \dots & \dots \\
 k_1^2 EI e^{ik_1 L_1} & k_2^2 EI e^{ik_2 L_1} & \dots & \dots & -k_1^2 EI & -k_2^2 EI & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & e^{ik_1 L_2} & e^{ik_2 L_2} & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^2 EI e^{ik_1 L_2} & k_2^2 EI e^{ik_2 L_2} & \dots & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{bmatrix}
 = [RHS]
 \tag{5.17}$$

welches für die untenstehenden 3 normierten Sätze von Randbedingungen zu lösen ist:

$$\text{mit } k_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}} \text{ und } RHS1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, RHS2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{L2}{L1} \\ 0 \end{bmatrix}, RHS3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17a)$$

Die vollständige Lösung für die dynamische Biegelinie ergibt sich nach Bestimmen der (komplexen) Koeffizienten  $A_i$  und  $B_i$  wie folgt. Im Weiteren wird für die Bestimmung der Querkraft in Auflagernähe noch die 3. Ableitung der Biegelinie benötigt:

$$w(x1) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{ik_i x1} \text{ im Bereich } L1, \text{ bzw. } w(x2) = \sum_{i=1}^4 B_i e^{ik_i x2} \text{ für } L2 \quad (5.18)$$

$$\text{und } EIw'''(x1) = -EI \sum_{i=1}^4 ik_i^3 A_i e^{ik_i x1} \text{ bzw. } EIw'''(x2) = -EI \sum_{i=1}^4 ik_i^3 B_i e^{ik_i x2}$$

Untenstehende Abbildung zeigt für  $L1 = 7 \text{ m}$  und  $L2 = 5 \text{ m}$  bei gleichphasiger und gegenphasiger Anregung die quasistatische Verformungsfigur, die Biegelinie im Fall einer alleinigen Auflagerverschiebung in B (Biegung), sowie qualitative Querkraftverläufe bei gegenphasiger Anregung und Biegung. Alle Kurven wurden für eine Frequenz von  $1/100 \text{ Hz}$  erzeugt. Die Querkraft bei gegenphasiger Anregung  $Q2$  ist allein durch die verbleibenden minimalen Trägheitskräfte bedingt.

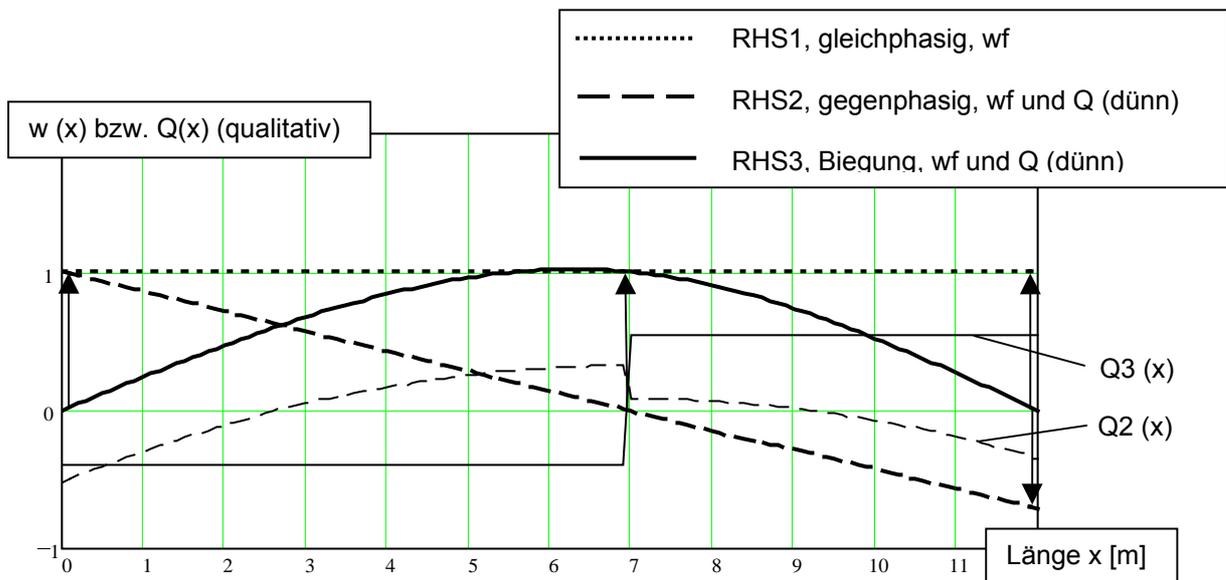


Abb. 5.8: Normierte Fußpunktanregung inkl. qualitativer Querkraftverläufe bei 0,01 Hz (quasistatisch)

In der Farbkarte lassen sich die Resonanzen des Büroriegels unter gleichphasiger Anregung in der dargestellten Relativbewegung  $w_{rel}$  gut erkennen:

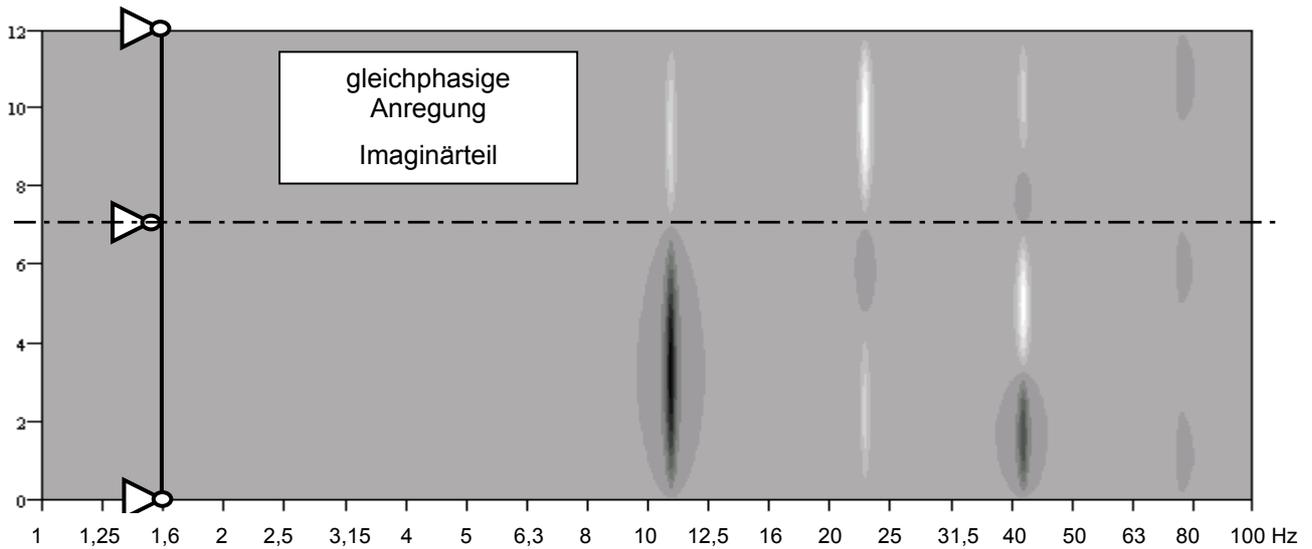


Abb. 5.9: Gleichphasige Anregung Büroriegel, Frequenzsweep, sichtbare Eigenformen

**Die weitere Auswertung – die Ermittlung der Eigenfrequenzen und die Integrationen zur Bestimmung der Generalisierten Größen – erfolgt numerisch.**

Die Nummerierung der Eigenformen der 3 normierten Anregungsfälle (RHS1, 2 und 3) sind nicht zwangsweise identisch. Eine unterschiedliche Nummerierung findet sich vor allem bei höheren Eigenfrequenzen und im Fall einer geometrischen Regelmäßigkeit (z.B. gleiche Spannweiten, exakte Trennung der gleich- und gegenphasigen Eigenformen). Es sind aufgrund dieser Sonderfälle die Eigenfrequenzen und Ersatzschwingerkenngrößen separat für die 3 Anregungsfälle zu ermitteln.

Untenstehende Abbildung zeigt das bei der gewählten Normierung der Anregung übliche Antwortverhalten des Büroriegels (Beispiel  $L_1 = 7\text{m}$ ,  $L_2 = 5\text{m}$ ). Es wurde die Schwingenergie über die Gesamtlänge aufintegriert. Die ersten 3 Eigenformen lassen sich gleichphasig, gegenphasig und über Biegung anregen. Bei den höheren Eigenformen entsteht aufgrund der Kopplung der beiden Felder ein teils schwer interpretierbares Verhalten, das stark von den gewählten Längen von  $L_1$  und  $L_2$  abhängt.

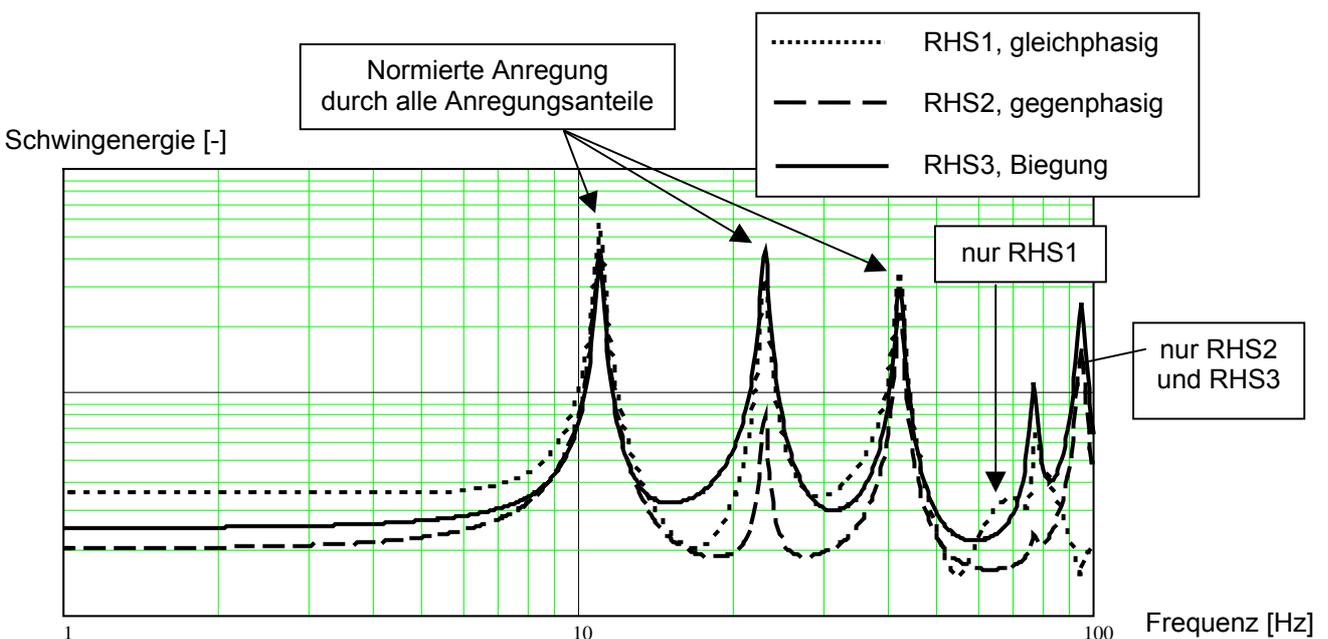


Abb. 5.10: Verteilung der Schwingenergie unterschiedlicher Anregungsanteile (exemplarisch)

Da mit zunehmender Frequenz a) der Einfluss der Lagerungsbedingungen auf die endgültige Immissionsgröße abnimmt und b) die Phasenlage bei wachsender Modendichte sich einer „energetischen“ Verteilung annähert, wird das Ersatzmodell auf die ersten 3 Eigenformen beschränkt. Für eine höherfrequente Auswertung kann die in Abschnitt 5.3 skizzierte Vorgehensweise herangezogen werden.

**5.2.3 Bestimmung Ersatzschwinger-Kenngrößen (analog /3/)**

Generell sind die Ersatzschwinger so einzustellen, dass sich neben den korrekten Eigenfrequenzen die gleichen rückwirkenden Kräfte auf das Gesamtgebäude ergeben. Dies geschieht im Fall des statisch unbestimmten Büroriegels

- a) bei gleichphasiger Anregung: Lagerkräfte aus Gleichgewicht (Vergleich mit Querkraft möglich)
- b) Gegenphasige Anregung: Aufgrund fehlender Symmetrie Bestimmung der Lagerkräfte aus der Querkraft (siehe Gl. 5.18)
- c) Biegung: Ebenfalls Querkraftmethode

Die Ersatzschwinger werden separat für die Auflager A, B und C berechnet und mit einem Vorzeichen für die relative Phasenlage versehen. Dies erfolgt nacheinander für die Anregungsfälle a) bis c).

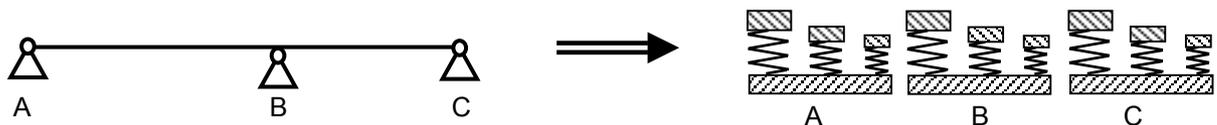


Abb. 5.11: Skizze Ersatzmodell Zweifeldträger

Ersatzschwingerkennwerte zu a) gleichphasige Anregung

Das zu untersuchende System lässt sich nicht direkt mit einem der in /3/ enthaltenen Grundfälle vergleichen, da keine Symmetrie vorliegt und es sich nicht um einen beidseits gelagerten bzw. eingespannten Balken handelt.

Ungedämpfte DGL in generalisierten Größen ( $w_A$  am Auflager,  $w_{rel}$  = Relativweg)

$$M^* \ddot{w}_{rel} + C^* w_{rel} = -\ddot{w}_A \int \overline{\Psi} dm = -M^* \frac{\overline{M}}{M^*} \ddot{w}_A \tag{5.19}$$

$$w = (1 + \kappa_{\Psi} V_{rel}) w_A \quad \text{mit} \quad \kappa_{\Psi} = \frac{\overline{M}}{M^*} \quad \text{und} \quad V_{rel} = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$$

Summe der vertikalen Auflagerkräfte für die Eigenform  $\Psi$  (nur Anregungsanteil a)

$$\sum F = \int_L \ddot{w}_A dm + \int_L \ddot{w}_{rel} dm = \ddot{w}_A \int_L \overline{M} dm + \frac{\overline{M}}{M^*} V_{rel} \ddot{w}_A \int_L \overline{\Psi} dm \tag{5.20}$$

$$\sum F = \left[ M + V_{rel} \frac{\overline{M}\overline{M}}{M^*} \right] \ddot{w}_A$$

Ersatzschwingerkennwerte für  $i$  Eigenformen bei gleichphasiger Anregung:

$$m_i = \frac{\overline{M}_i^2}{M_i^*} \quad c_i = m_i \omega_i^2 \quad m_0 = M - \sum_i m_i \quad \kappa_{\Psi_i} = \frac{\overline{M}_i}{M_i^*} \quad (5.21)$$

Die Auswertung der Kenngrößen muss numerisch erfolgen, da die Eigenformen nicht analytisch ermittelt wurden.

Ersatzschwingerkennwerte zu b) gegenphasige Anregung und c) Biegung

Für gegenphasige Anregung und Biegung lassen sich analog zu /3/, Gleichung (9.10a,b), „Grundfall des symmetrischen Balkens mit beliebigem Einspanngrad“, zunächst die Lagerkräfte und weiterhin die Ersatzschwinger-Kenngrößen bestimmen:

Ungedämpfte DGL in generalisierten Größen

$$M^* \ddot{w}_{rel} + C^* w_{rel} = -\ddot{w}_A \int \overbrace{w_{st} \Psi_{i,j} dm}^{\overline{M}_{st}} = -M^* \frac{\overline{M}_{st}}{M^*} \ddot{w}_A \quad (5.22)$$

$$w = w_f + \kappa_{\Psi} V_{rel} w_A \quad \text{mit} \quad \kappa_{\Psi} = \frac{\overline{M}_{st}}{M^*}$$

$w_f$  = Fußpunktverschiebung, entspricht  $w_{st}$  = statische Biegelinie

$M_{st}$  = die der statischen Verformung äquivalente Masse<sup>17</sup>

Für die Bestimmung der Auflagerkräfte werden im Fall b) und c) jeweils die Auflager freigeschnitten. Die einzelnen Lagerkräfte ergeben sich zu

$$F_A = -Q(x_1 = 0) = EI [w_{st}'''(x_1 = 0)] w_A + EI [\Psi'''(x_1 = 0)] \frac{\overline{M}_{st}}{M^*} V_{rel} w_A \quad (5.23)$$

$$F_B = Q(L_1) - Q(x_2 = 0) =$$

$$= EI [-w_{st}'''(L_1) + w_{st}'''(x_2 = 0)] w_A + EI [-\Psi'''(L_1) + \Psi'''(x_2 = 0)] \frac{\overline{M}_{st}}{M^*} V_{rel} w_A$$

$$F_C = Q(L_2) = EI [-w_{st}'''(L_2)] w_A + EI [-\Psi'''(L_2)] \frac{\overline{M}_{st}}{M^*} V_{rel} w_A$$

Aufgrund der quasistatischen Vorspannung im Fall einer Anregung über Biegung ist analog zu /3/ „Ersatzschwinger Typ 2“ anzuwenden, d.h. es ist eine Feder  $c_{st}$  der Restmasse  $m_0$  gegenüber dem Untergrund erforderlich.

<sup>17</sup> Bezeichnungen konsistent zu /12/ gehalten

Die Ersatzschwingerkennwerte ergeben sich für die Kopplungspunkte A,B und C aus dem Gleichsetzen der Lagerkräfte mit dem Einmassenschwinger, vgl. /3/:

$$\begin{aligned}
 cA_{St} &= EI w'''_{St}(x1=0) & cB_{St} &= EI [-w'''_{St}(L1) + w'''_{St}(x2=0)] & cC_{St} &= EI w'''_{St}(L2) \\
 cA_i &= EI \Psi'''_i(x1=0) \frac{\bar{M}_{St_i}}{M_i^*} & cB_i &= EI [-\Psi'''_i(L1) + \Psi'''_i(x2=0)] \frac{\bar{M}_{St_i}}{M_i^*} & cC_i &= EI [-\Psi'''_i(L2)] \frac{\bar{M}_{St_i}}{M_i^*} \\
 m_i &= \frac{c_i}{\omega_i^2} & m_0 &= M_{St} - \sum_i m_i & \kappa_{\Psi_i} &= \frac{\bar{M}_{St_i}}{M_i^*} \quad (\text{jeweils für A, B und C}) \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Die Auswertung der Kenngrößen muss hier ebenfalls numerisch erfolgen.

Hinweis:

Es ist vereinfachend möglich, die Resultierende der Auflagerkräfte zu bilden und somit für die gesamte Decke (2 Felder, 3 Auflager) gemeinsame Ersatzschwinger zu erzeugen (vgl. Anwendungsfall Abschnitt 7.2.3). Die Anzahl der Ersatzschwinger verringert sich bei dieser Vorgehensweise um Faktor 3. Es wird allerdings nur die resultierende Vertikalkraft aus der Decke richtig mit dem Gebäude gekoppelt. Phasenversätze zwischen den einzelnen Auflagern und die Übergabe von Momenten an das restliche Gebäude bzw. an die Gründung ist damit nicht mehr möglich.

#### 5.2.4 Ersatzschwinger-Kenngrößen

Vorabbemerkungen zur numerischen Auswertung:

- Berechnung mit geringer Dämpfung erforderlich, gewählt  $\eta = 0,03$  (entsprechend  $D = 1,5\%$  in der jeweiligen Eigenfrequenz, jedoch hysteretische Charakteristik)
- Frequenzraster in 1/8 Halbtonschritten = 1/96 Oktavschritte (!) für eine ausreichend exakte Eigenfrequenz-Bestimmung (Verschwinden des Realteils in den Eigenfrequenzen erforderlich)
- Quasistatische Berechnung bei einer willkürlich niedrig gesetzten Frequenz von 0,01 Hz
- Rasterung in x-Richtung:  $\Delta x = 0,1$  m bei Spannweiten von 1 m bis 10 m

Die nachfolgende Tabelle enthält für jedes Auflager die prozentuale Masse des Ersatzschwingers (von der statischen Gesamtmasse) in Abhängigkeit der Eigenform und der Anregungsart.

$q = \frac{L2}{L1}$	1			0,9			0,8			0,7			0,6		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
3 EF Gleichphasig	-15,2	-44,1	-15,2	-5,3	-3,7	4,3	-10,4	-10,1	6,2	-14,4	-17,9	7,7	-17,6	-26,2	9
	0,8	-2,5	0,8	-11,6	-40,8	-17,1	-8,4	-33,7	-17,2	-6,4	-24,4	-15,3	-5,8	-13,1	-11,6
	-2,4	-6,7	-2,4	1	-1,1	-0,6	1,8	-2,6	-0,8	2,8	-5	-1,2	4,1	-9,8	-2,8
3 EF Gegenphasig	-4,2	0	4,2	-11	-6,1	8,2	-11,2	-10,7	6,6	-11,4	-14,3	5,9	-11,7	-17,3	6
	-1,6	0	1,6	0,7	2,5	1	0,8	3,1	1,6	0,6	2,4	1,5	0,4	0,8	0,6
	-0,8	0	0,8	-3	2,7	1,7	-3	4,2	1,2	-3	5,3	1,3	-2,9	6,7	1,9
3 EF Biegung	-9	-26,1	-9	-3,7	-2,6	2,9	-7,3	-7,1	4,4	-10,4	-13	5,5	-13,2	-19,7	6,8
	2,8	-8,1	2,8	-6,8	-24	-10,1	-4,8	-19,1	-9,8	-3,4	-13	-8,1	-2,5	-5,8	-5
	-1,4	-4	-1,4	1,9	-2	-1	3,1	-4,3	-1,3	4,1	-7,3	-1,8	4,8	-11,3	-3,3
$q = \frac{L2}{L1}$	0,5			0,4			0,3			0,2			0,1		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
3 EF Gleichphasig	-20,1	-34,3	11,3	-22,3	-43,5	15,4	-24,8	-57,2	23,7	-26,9	-79,1	41,2	-28,5	-136,7	95,7
	-4,6	-1,5	-4,8	-1,6	2,1	-1	-1,6	-1,5	1,1	0,9	-1,9	0,8	1,5	-4,4	2,4
	4,3	-15,7	-7	2,5	-7,5	-5,7	-2,8	-9	-6,5	-3,5	-5,4	1,8	-4,2	-10,1	4,5
3 EF Gegenphasig	-12,1	-20,5	6,8	-12,6	-24,6	8,8	-13,7	-31,3	13	-14,6	-42,9	22,4	-15,5	-74,9	52,4
	-1,2	0,4	-1,1	-2,4	2,4	-1,3	-0,7	1	-0,3	-3	6	-2,2	-3,2	9,5	-5,2
	-1,8	6,6	3	-1,2	3,4	2,6	-0,8	-0,6	0,6	-1,9	-2,9	1	-2	-4,8	2,1
3 EF Biegung	-16	-27,3	9	-19,2	-37,6	13,3	-24,3	-56,1	23,2	-32,8	-96,6	50,3	-56	-269,6	188,9
	3,7	-13,3	-6	3,2	-3,3	1,8	5	-7,6	2,6	7	-13,9	5,1	11,4	-34,6	19
	-2,1	-3,5	-0,9	1,8	-5,3	-4	-1	-1	0,7	-2,6	-4,1	1,3	-4,4	-10,4	4,7

Tabelle 5.9 Masse Ersatzschwinger, getrennt nach Auflagern A bis C

Anmerkung zu den Werten > 100%: Bei kleinen Längenverhältnissen q wird bei normiertem  $w(B) = 1$  in Feld L1 eine wesentlich größere Auslenkung erzielt. Da die Normierung nicht auf den Maximalwert der Biegelinie erfolgt, sondern auf die Auslenkung am Kräfteinleitungspunkt, ergeben sich bei den vorliegenden kinematischen Verhältnissen entsprechend große Auflagerkräfte bzw. große Ersatzmassen.

Für die Ermittlung der Restmassen ist diese „Massen-Vergrößerung“ entsprechend zu berücksichtigen.

Im Sonderfall  $L1 = L2$  wird die erste Eigenform gar nicht angeregt. Hierdurch entsteht in Abhängigkeit des vorliegenden Längenverhältnisses  $q$  eine Verschiebung bei der Nummerierung der Eigenformen (s. Pfeile).

$q = \frac{L2}{L1}$			1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	
Amplitudenverhältnis $\kappa$ [%]	Gleichphasig	1. EF	130	34	67	90	105	115	122	126	128	130	
		2. EF	13	149	152	141	111	43	15	20	8	12	
		3. EF	51	12	23	34	49	86	72	104	42	49	
	Gegenphasig	1. EF	0	70	72	71	70	69	69	69	69	70	71
		2. EF	0	9	14	13	5	11	23	23	26	25	
		3. EF	0	37	37	36	34	36	34	5	23	23	
	Biegung	1. EF	77	24	47	65	79	92	105	124	157	255	
		2. EF	43	87	86	75	48	0	30	13	60	92	
		3. EF	30	23	39	49	57	75	51	51	32	50	

Tabelle 5.10 Amplitudenverhältnis  $\kappa$

Bestimmung der Eigenfrequenzen analog zu den Flachdecken (5.6):

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha}{L1} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \alpha \text{ siehe nachfolgende Tabelle} \quad (5.25)$$

$q = \frac{L2}{L1}$			1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	
Frequenzfaktor $\alpha$ [-]	Gleichphasig	1. EF	3,93	3,28	3,38	3,45	3,50	3,55	3,61	3,66	3,72	3,82	
		2. EF	7,07	4,18	4,56	5,06	5,69	6,28	6,55	9,59	6,77	6,89	
		3. EF	10,20	6,51	6,65	6,74	6,92	7,43	8,64	11,65	9,80	9,98	
	Gegenphasig	1. EF	3,15	wie gleichphasig (siehe oben)				3,55		3,66			
		2. EF	6,28					6,28	~	6,67	~		
		3. EF	9,42					7,43		9,59			
	Biegung	1. EF	3,93	wie gleichphasig (siehe oben)				3,55		3,66			
		2. EF	7,07					7,43	~	6,67	~		
		3. EF	10,20					9,84		9,59			

Tabelle 5.11 Frequenzfaktor  $\alpha$

Grau hinterlegte Tabellenwerte: Aufgrund des Zusammenfalls zweier EF ergibt sich bei bestimmten Eingangswerten eine Verschiebung in der EF-Nummerierung. Diese Abweichungen vom „Normalfall“, insbesondere bei einem Längenverhältnis  $q = 1$  und  $q = 0,5$ , ferner  $q = 0,3$  auftretend, wurden grau hinterlegt.

Durchgeführte Kontrollen:

- Variation  $\eta$  liefert für die ersten 3 Eigenformen stabile Ergebnisse, ab der 4. Eigenform stark zunehmende Abweichungen (Es müsste das Frequenzraster verfeinert werden.)
- Plausibilitätskontrollen, Kontrollabbildungen (Randbedingungen eingehalten, Realteil verschwindet in Resonanz, Maximasuche arbeitet korrekt, Sichtung der gewichteten Biegelinien vor Integration zur Kopfmassse, etc.)
- Vergleich Ersatzmodell / Referenzmodell einzeln für die 3 Anregungsfälle (Ausführung s. unten)
- Vergleich Querkraftmethode / Gleichgewicht (Summe V):  
Für die exemplarischen Längenverhältnisse  $L1 = 10$  m,  $L2 = 8$  m ergeben sich z.B. folgende Beträge der Ersatzschwingermassen für die ersten 3 EF:

$$\text{Methode\_V} = \begin{pmatrix} 14.213 \\ 58.7 \\ 1.512 \end{pmatrix} \quad \text{Methode\_Q} = \begin{pmatrix} 14.288 \\ 59.218 \\ 1.495 \end{pmatrix}$$

Vergleich Ersatzmodell / Referenzmodell

Für die gewählte Parameterkonstellation  $L1 = 7$  m,  $L2 = 5$  m,  $d = 0,28$  m wurde ein Ersatzmodell für die ersten 3 Eigenformen erstellt. Die maximalen Resonanzüberhöhungen der einzelnen Anregungsfälle wurden separat mit dem Referenzmodell (gemäß Abschnitt 5.2.2) verglichen. Berücksichtigt werden muss, dass aufgrund der geringen Dämpfung leichte Frequenzverschiebungen – evtl. bereits Rundungsfehler – die Größe der Resonanzüberhöhung deutlich beeinflussen können. Weiterhin erfolgte das gesamte Vorgehen ab Erhalt der Biegelinie numerisch, vor allem die Maximasuche und sämtliche Integrationen zur Bildung generalisierter Größen.

Anregungsart	Eigenfrequenz	Dyn. Überhöhung Referenzmodell	Dyn. Überhöhung Ersatzmodell	Abweichung
Gleichphasig	10,984	28,908	29,037	+ 0,4 %
	23,099	47,327	47,093	- 0,5 %
	42,006	10,162	10,499	+ 0,3 %
Gegenphasig	10,984	23,621	23,709	+ 0,4 %
	23,099	4,52	4,574	+ 1,2 %
	42,006	11,543	11,792	+ 2,2 %
Biegung	10,984	20,79	20,878	+ 0,4 %
	23,099	25,423	25,306	- 0,5 %
	42,006	15,251	15,61	+ 2,4 %

Tabelle 5.13

Anmerkung: Eigenfrequenzen interpoliert nach Tabelle 5.11; Interpolation nur möglich, wenn die Werte zur gleichen Eigenform gehören. Dies ist jedoch leicht aus der Größenordnung erkennbar.

## 5.3 Mehrfeldrige Deckensysteme

### 5.3.1 Problematik

In Abschnitt 5.1 wurde die Ersatzmodellierung nur für die 1. Eigenform erstellt, für die sich die dynamische Verformung gut mit trigonometrischen Funktionen abbilden lässt.

Im Folgenden soll untersucht werden, in welchen Eigenformen eine mehrfeldrige Geschossdecke über durchlaufende Wellen von unten her angeregt werden kann. Die Anregung kann dabei in der Realität über Einzelfundamente / Stützen oder auch über die Bewegung einer Flachgründung und Stützen in die untersuchte Deckenebene eingetragen werden. Diese Untersuchung kann somit für jedes annähernd gleichmäßig aufgebaute Gebäude in Beton-Skelett-Bauweise angewendet werden.

Im Folgenden soll geklärt werden,

- wie groß die Abweichungen der häufig angewandten Betrachtungsweise der Decken als einzelne EMS von der „Realität“ (dem Referenzmodell) sind,
- wie stark höhere EF anregbar sind,
- ferner, ob ein Zusammenhang zwischen EF-Nummer und der Größe der Resonanzüberhöhung besteht und ob sich der Anregungsgrad bei durchlaufender Fußpunktanregung und daher unterschiedlichen Phasenlagen mit den Ersatzmodellen in /3/ deckt.

Gegenüber der vereinfachenden Betrachtungsweise bei einer Entwicklung nach Eigenformen wird im nachfolgenden Referenzmodell die Anregung in Form einer laufenden Welle aufgebracht, sodass der Energietransport innerhalb der durchlaufenden Deckenebene berücksichtigt werden kann.

Hierdurch können wesentliche, in der EMS-Betrachtung nicht enthaltene Effekte untersucht werden, wie z.B. die Wellenreflexion am Deckenrand, übereinstimmende Wellengeschwindigkeiten in Untergrund und Decke und „Abtasteffekte“, die sich durch das im Verhältnis zur Last-Wellenlänge grobe Stützenraster ergeben (ähnlich einem Aliasing im Ortsbereich).

Für die Kalibrierung des vorgeschlagenen Berechnungsverfahrens stehen zur Verfügung:

- 1-dim. Biege- / Schubbalen, diskrete Anregung über die Stützen (s. nächster Abschnitt)
- 2-dim. Ausdehnung: Messergebnisse (s. Anhang 5.1)

### 5.3.2 Lösungsstrategie

Es ist zunächst vom einfachsten Fall auszugehen. Für diesen wird zunächst ein Referenzmodell erstellt:

- Einachsige Betrachtung in Wellenlaufrichtung, (FE-Formulierung aus Abschnitt 3.3)
- Vernachlässigung Drehträgeit
- Gleiche Spannweiten
- Konstante Querschnittswerte
- Vertikale Anregung ohne Abnahme der Amplitude im Untergrund
- Keine Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit der Stützen, keine Interaktion mit dem Untergrund

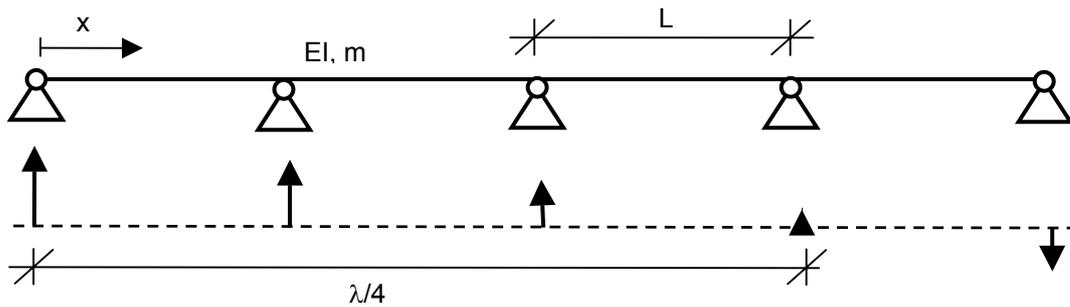


Abb. 5.12: 1-dim. Referenzmodell Anregung mehrfeldriger Decken

Es bieten sich selbst für diesen einfachsten Fall zahlreiche Variationsmöglichkeiten an. Prinzipiell ist stets sowohl das Verhältnis von Lastfrequenz zu den einzelnen Eigenfrequenzen interessant als auch das Verhältnis von Wellenlänge zu Spannweite. Werden die Ergebnisse für jeden Parametersatz stets in Abhängigkeit der Frequenz ermittelt, sind nur noch folgende Größen zu variieren:

- Wellengeschwindigkeit im Untergrund und damit Variation der dimensionslosen Wellenlänge (Wellenlänge / Spannweite)
- Anzahl an Deckenfeldern in Wellenlaufrichtung; wird zunächst willkürlich festgesetzt
- (möglich: gesonderte Betrachtung Deckenrandfelder aufgrund abweichender Einspannbedingungen)

### 5.3.3 Modellierung

Die gewählte Modellierung arbeitet mit einem vereinfachten Timoshenkobalken, der als FE-Element eingesetzt wird, gemäß Abschnitt 3.3. Anstelle einer Nachlaufrechnung für die einzelnen Balkenelemente wurde eine feinere Diskretisierung eingesetzt. Die Betrachtung der dynamischen Biegelinie erfolgt lediglich in den Knoten zwischen den Elementen.

Die Anregung am n-ten Auflager erfolgt als vertikale Zwangsangregung  $w_{FP}$ :

$$w_{FP}(n, f, t) = e^{i 2 \pi \frac{L}{\lambda(f)} n - i 2 \pi f t} \quad (5.26)$$

### 5.3.4 Parameterstudie: Variation der Wellengeschwindigkeit der Anregung

Eingangsdaten:

- 10 Deckenfelder
- Spannweite 6 m, Deckenstärke 0,2 m,  $E = 30\,000 \text{ MN/m}^2$ , hysteretische Dämpfung  $\eta = 0,05$
- Diskretisierung 1 m (Ausreichend bis ca. 100 Hz)
- Berechnung im Terzraster (siehe hierzu Abschnitt 7.1.1), Wellengeschwindigkeit Fußpunktanregung ebenfalls im Terzraster

Enthalten sind in nachfolgender Abbildung die Maxima des Betrages der Schwingungsantwort  $w(x)$  im Bereich der 8 inneren Deckenfelder für Wellengeschwindigkeiten von 100 m/s bis 1000 m/s:

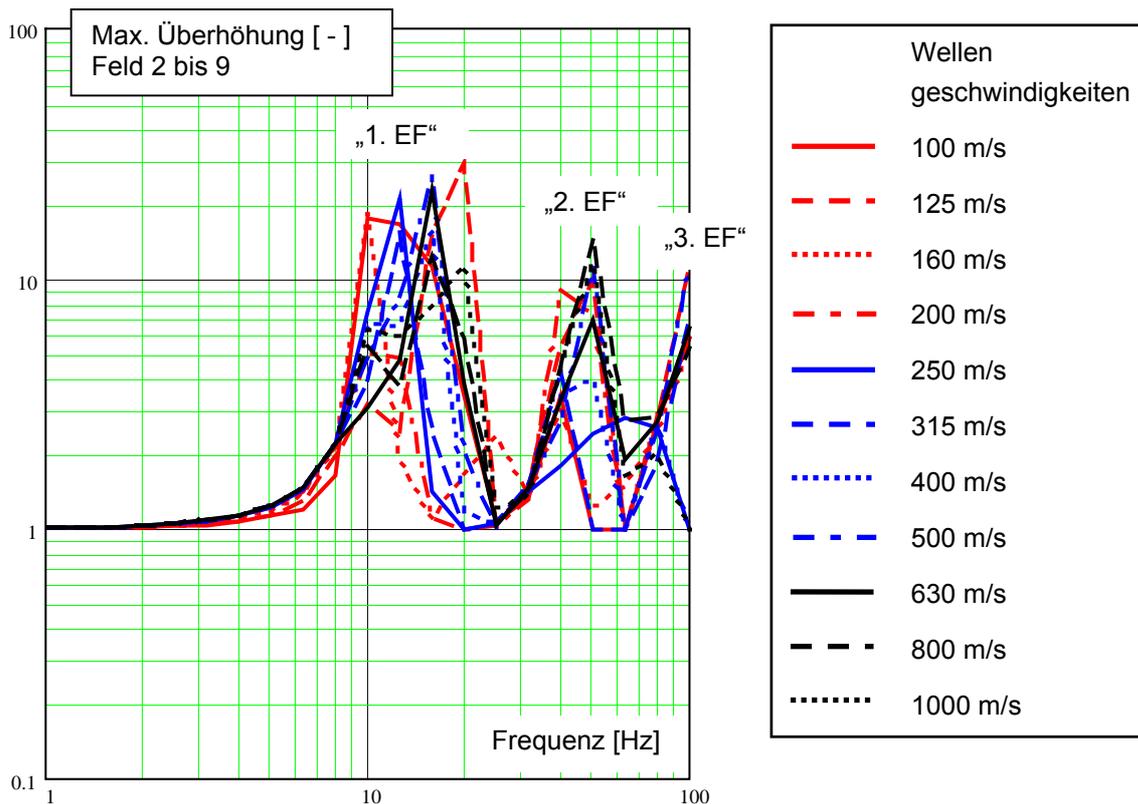


Abb. 5.13: Maximale Schwingungsüberhöhungen ohne Randfelder (1. und 10. Feld unberücksichtigt)

Im Terzraster werden z.T. resonanzbedingte Maxima schlecht abgebildet (s. hierzu Abschnitt 7.1.1). Trotzdem lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Unabhängig von der Last-Wellenlänge: Ausgeprägtes Resonanzverhalten der Decke
- Antwort in der 1. EF unscharf, große Überhöhungen im breiten Frequenzbereich einer ganzen Oktave, trotz Ausschluss der Randfelder (nur Durchlauf-Deckenfelder berücksichtigt)
- Der vereinfachend als 2. EF bezeichnete Peak bei 50 Hz streut weniger breit. Die Randbedingungen verlieren zu höheren Frequenzen hin ihren Einfluss.
- Resonanzhöhe zu höheren EF hin abnehmend; Maximalwerte jedoch in der Größenordnung von Faktor 10-15. Bei Messungen flächiger Geschossdecken lässt sich diese Größenordnung nicht beobachten (= Hinweis auf Abstrahldämpfung und transienten Anregungscharakter)

Die obenstehende Abbildung kann prinzipiell nicht den Effekt einer „tiefen Abstimmung“ der Balkenmitten gegenüber den Kräfteinleitungspunkten (Stützenköpfen) zeigen. Die Auflager werden mit einer Zwangsanregung der Größe 1 bewegt. Das abgebildete Maximum der Biegelinie  $w(x)$  kann daher nie kleiner 1 werden.

Weiterhin kann das gewählte Modell die Auswirkungen in Querrichtung abgestrahlter BiegeWellen aufgrund der eindimensionalen Modellierung nicht enthalten.

Ingenieurmäßige Überschlagsbetrachtungen könnten in Abhängigkeit der Deckenstärke eine Grenzfrequenz festlegen, ab welcher verstärkt Sekundärluftschall abgestrahlt werden kann (nicht vorgestellt in dieser Arbeit).

Im Weiteren ist jedoch vor allem die Beantwortung folgender Fragen von Interesse:

- Ort der auftretenden Schwingungsmaxima
- Größe der maximal möglichen Resonanzüberhöhung und Abnahme zu höheren EF hin (Anregungsgrad)

- Erklärung der „Resonanzbreite“ der 1. EF – nicht nur bei unterschiedlichen Last-Wellenlängen, sondern auch innerhalb eines einzelnen Überhöhungsspektrums (s. nachfolgende Abb., Wellengeschwindigkeit 800 bzw. 1000 m/s)

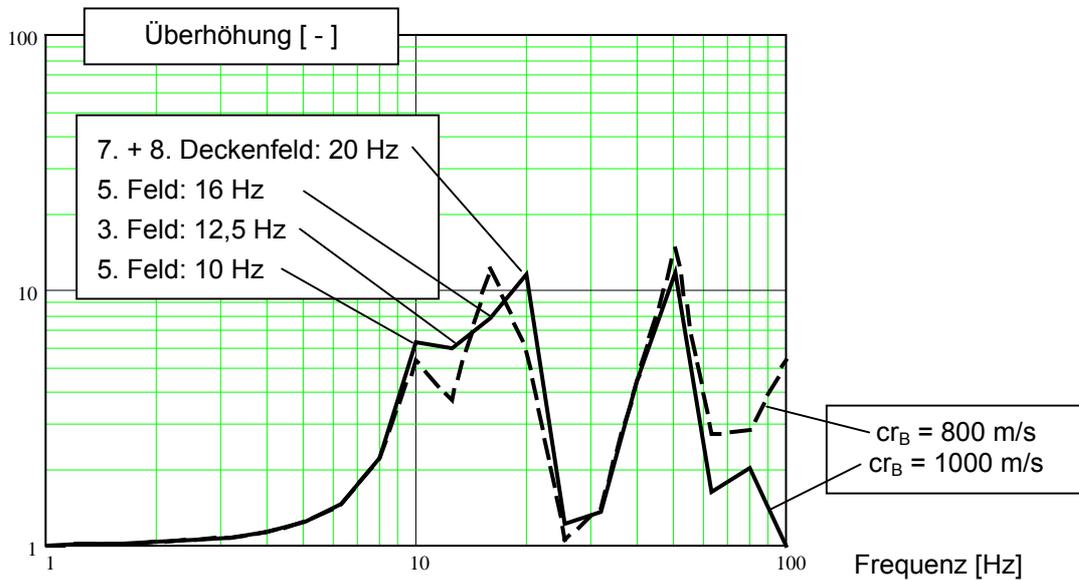


Abb. 5.14: Maximale Schwingungsüberhöhungen ohne Randfelder

Hinweis: Quantitative Aussagen lassen sich zwar im Terzraster nicht mit ausreichender Sicherheit machen, da die maximale Resonanzüberhöhung nicht zwangsweise auf die berechnete Terzmittenfrequenz fällt. Es ist jedoch ersichtlich, dass bereits im Terzraster eine Überhöhung von 30 erzielt wird. Für einen entsprechend bedämpften EMS ergäbe sich bei  $\eta = 0,05$  eine harmonische Überhöhung von 20 – demnach beträgt das Verhältnis von Maximum der Biegelinie zur Maximalamplitude eines Ersatzschwingers mindestens 1,5. Analog /3/ wird dieses Amplitudenverhältnis mit  $\kappa$  bezeichnet und errechnet sich aus dem Verhältnis von  $M/M^*$ .

Messtechnisch findet sich häufig das dargestellte Überhöhungsverhalten mit großer Resonanzbreite. Die Anpassung mit einfachen Ersatzmodellen, die über keinerlei horizontale Ausdehnung verfügen, gelingt in diesen Fällen nur unzureichend, da der Ersatzschwinger nur die schmale Überhöhung eines EMS zeigt. Die horizontale Kopplung mit den Nachbardeckenfeldern kann in diesen Fällen nicht berücksichtigt werden.

Erklärungen:

Exemplarische Darstellung für  $v = 1000$  m/s und 20 Hz (Realteil):

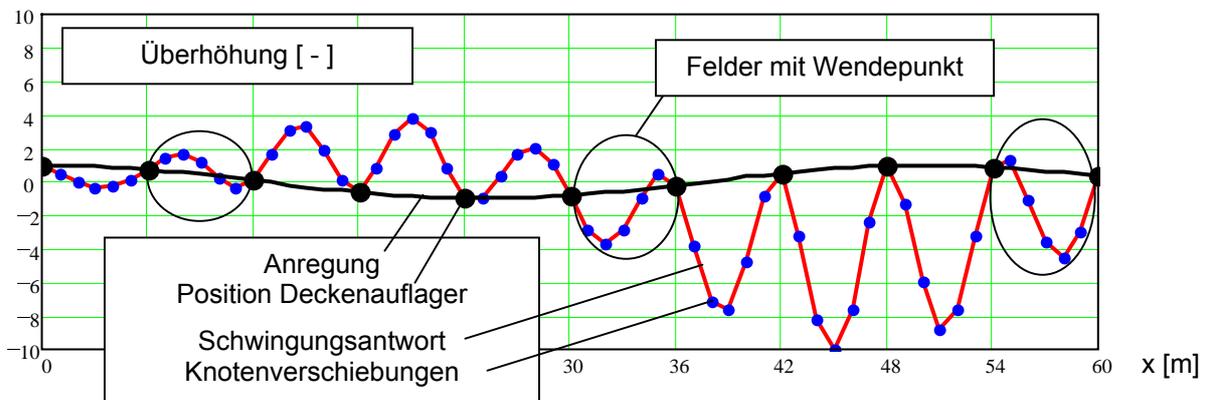


Abb. 5.15: Exemplarische Schwingungsantwort durchlaufender Deckenbalken

- Die Breite des Frequenzbereiches, in welchem eine Überhöhung auftritt, ergibt sich aus einer Vielzahl optisch nur leicht unterschiedlicher EF. Diese weisen teilweise bereits durchschlagende Deckenfelder auf, ähnlich der ersten asymmetrischen EF (vgl. Kreise in obenstehender Abb.). Für die übrigen Deckenfelder ergeben sich so leicht unterschiedliche dynamische Einspanngrade und damit Eigenfrequenzen.
- Eine vereinfachte Modellierung als EMS kann im Fall durchlaufender Decken leicht zu großen Abweichungen führen. In der hier verwendeten Balkenmodellierung werden trotz der Verteilung der Schwingenergie auf mehrere Nachbarmoden und der Möglichkeit der Wellenausbreitung (Abstrahl-dämpfung) in Längsrichtung große Schwingungsüberhöhungen festgestellt.

**5.3.5 Parameterstudie: Variation der Anzahl an Deckenfeldern**

Um das Aufklingverhalten bei zunehmender Anzahl von Deckenfeldern untersuchen zu können, wurde die Anzahl der Deckenfelder für 2 Bodengeschwindigkeiten ( $c_{rB} = 125 \text{ m/s}$  und  $1000 \text{ m/s}$ ) variiert:

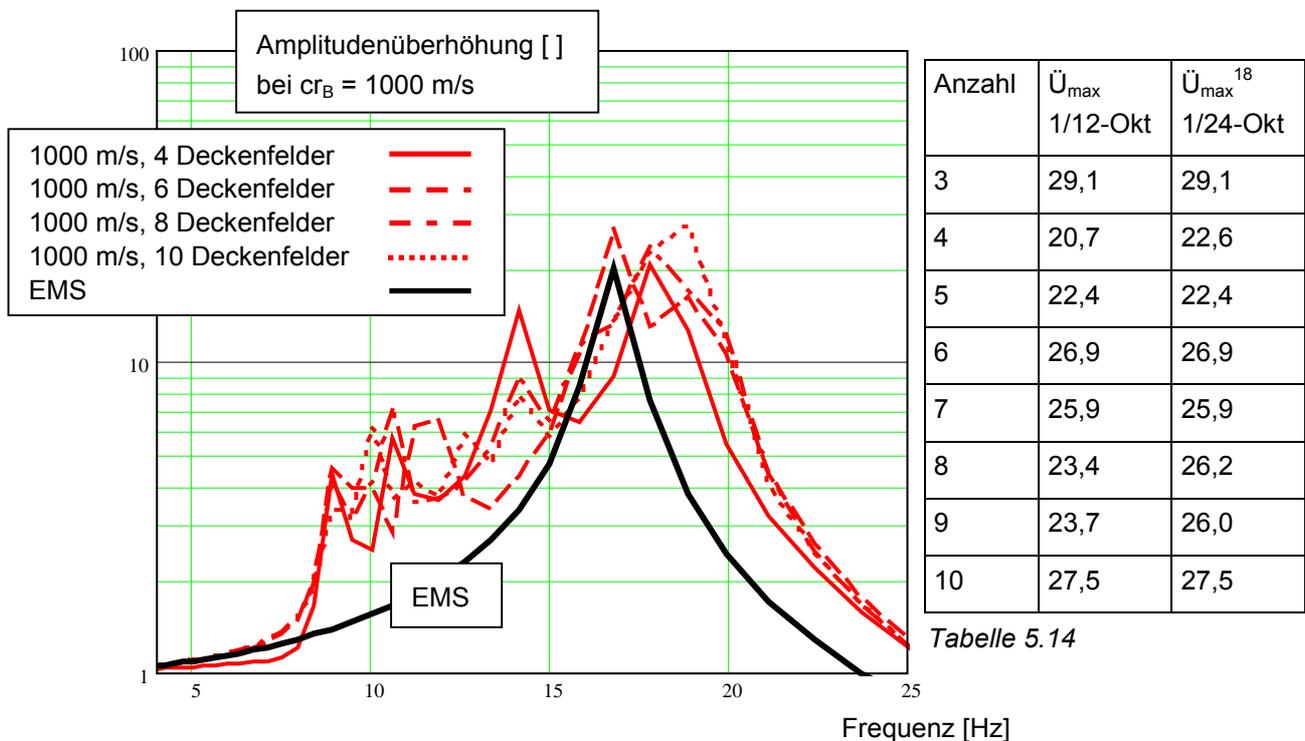


Abb. 5.16: Mehrfeldträger mit unterschiedlicher Feldanzahl

In der rechts abgebildeten Tabelle sind die Maxima des Betrages der Schwingungsantwort im 1/12- und zu Kontrollzwecken im 1/24-Oktav-Raster für den dargestellten Frequenzbereich der 1.EF enthalten.

Die exemplarische Erweiterung obenstehender Tabelle auf die niedrige Wellengeschwindigkeit von  $125 \text{ m/s}$  liefert:

Anzahl	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ddot{U}_{\max}^{19}$ bei <b>125 m/s</b>	19,8	17,0 / 21,5 <sup>20</sup>	25,1	21,5	23,3	26,1	28,4	31,1

Tabelle 5.15

<sup>18</sup> Maximalwerte im 1/24-Oktav-Raster, (1/12-Oktav-Raster in der Abbildung)

<sup>19</sup> Maximalwerte im 1/12-Oktav-Raster

<sup>20</sup> zum 1/24-Oktav-Raster besteht nur in diesem Fall ein deutlicher Unterschied

Schlussfolgerungen Balkenmodell:

- Die abgebildeten Überhöhungsvektoren zeigt keine direkte Abhängigkeit der maximal erreichten Resonanzüberhöhung mit der Anzahl an Deckenfeldern.
- Die auftretende Größe der Überhöhung ist durchweg größer als beim EMS, d.h. es gilt  $\kappa > 1$  im Bereich der 1. EF.
- Im Vergleich mit einem fußpunktangeregten EMS ist das Überhöhungsverhalten durch die vielen nur leicht unterschiedlichen EF wesentlich breiter
- Der Bereich der zu berücksichtigenden EF wird erwartungsgemäß von den möglichen dynamischen Einspannverhältnissen vorgegeben: Im dargestellten Beispiel gelenkig (9 Hz) bis eingespannt (20,4 Hz).
- Flankensteilheit außerhalb dieses Bereiches in etwa entsprechend dem EMS

Anmerkung: Überhöhungswerte  $< 1$  im Sinne einer „tiefen Abstimmung“ sind beim Balkenmodell nicht möglich, da bereits die Auflagerpunkte den Zwangsweg = 1 haben.

**5.3.6 Messergebnisse (= zweidimensionale Referenz)**

Bei Messungen auf größeren zusammenhängenden Geschossdecken ergibt sich häufig folgendes Bild (vgl. Anhang 5.1, Messergebnisse unter U-Bahn-Anregung):

- Ausgeprägtes Resonanzverhalten – jedoch wesentlich stärker bedämpft als beim 1-dimensionale Balkenmodell des vorangehenden Abschnittes mit einer typischen Überhöhung in der 1. Eigenform zwischen Faktor 3 und 6 für Innenfelder
- Resonanzbereich der „1. EF“ durch einkoppelnde Moden der Nachbarfelder breiter als beim EMS
- In den Feldmitten keine ausgeprägte Schwingungsreduktion oberhalb der „1. EF“
- „2. EF“ bei ca. 4-5-facher Frequenz der „1. EF“

Auf folgende Fälle treffen diese Feststellungen nicht zu. Es sind dann größere Überhöhungen möglich:

- Einzelne große „Ausnahme“-Deckenfelder mit geringer Abstrahlmöglichkeit, tiefe 1. Eigenfrequenz
- Eck- bzw. Randfelder aufgrund ebenfalls geringer Abstrahlmöglichkeit und der kohärenteren Anregung, die im Wesentlichen über nur eine Stütze eingeleitet wird
- „Ungewöhnliche“ industrielle Anregung (z.B. Presswerk) bei großen Abständen vom Emissionsort und damit kohärent einfallenden Wellenfronten

In diesen Fällen wird eine vergleichsweise geringe Abstrahldämpfung erreicht. Die Beurteilung der jeweils vorliegenden Abstrahlmöglichkeiten und der Kohärenz der Anregung wird unter Abwägung aller beteiligten Faktoren im Einzelfall erfolgen müssen.

Schlussfolgerungen Messergebnisse:

Die vorhandenen Messergebnisse liefern wesentlich geringere dynamische Überhöhungen als das vorgestellte 1-dimensionale Balkenmodell. Es wären daher beim Balkenmodell – und auch bei einer Ersatzmodellierung – prinzipiell die beiden folgenden ergebnisrelevanten Einflüsse zu berücksichtigen:

- 2-dimensionale Wellenabstrahlung
- Unterschiedliche Phasenlagen der anregenden Stützen (ebenfalls 2-dimensional)

Weitere Einflüsse können u.a. die zeitliche Anregungscharakteristik (transiente Anregung, siehe 7.1.3), eine unregelmäßige Gebäudestruktur (schlecht systematisch erfassbar) und ggf. eine dämpfende Wirkung des Innenausbau (ggf. über entsprechende Fachliteratur erfassen) sein.

### 5.3.7 Fazit

Größere zusammenhängende Geschossdecken zeigen ein sehr komplexes dynamisches Verhalten.

Eine Ersatzmodellierung müsste die relevanten Eigenformen in ausreichender Dichte enthalten, was aufgrund der rechnerisch bislang vernachlässigten Querrichtung und schwieriger Geometrie nicht mit vertretbarem Aufwand möglich sein wird. Wird mit nur einem einzigen Ersatzschwinger für den Bereich der verbreiterten 1. EF gerechnet, kann mittels Variation seiner Eigenfrequenz zwar die Größe der Erschütterungen auf der Decke abgeschätzt werden, die spektrale Rückwirkung auf das Gebäude wird jedoch zu schmalbandig modelliert.

Da die betrachteten Decken i.d.R. in ein großes Gebäude „eingebaut“ sind, geht durch die Wechselwirkung mit den Anschlussimpedanzen der Überblick über notwendige Parametervariationen leicht verloren, sodass sich schließlich – wenn an zu vielen Schrauben gleichzeitig gedreht wird – beliebige Immissionswerte prognostizieren lassen. Insbesondere im Fall breitbandiger Anregung drängt sich daher der Gedanke an ein gutmütiger reagierendes Verfahren auf, das in Teilbereichen Mittelungen enthält.

Ein Vorschlag für eine Betrachtung auf mechanisch basierten Grundlagen wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 5.3.8 Lösungskonzept Ersatzmodell

#### Zunächst sind die Anwendungsgrenzen abzustecken:

Eine Ersatzmodellierung für Geschossdecken, die brauchbare Ergebnisse auch im mittleren Frequenzbereich (bis ca. 100 Hz) erzielen soll, kann nur mit geeigneten Mittelungen und Annahmen bzgl. der unbekannten Phasenlage arbeiten. Daher wird die Prognosegenauigkeit nur in folgenden Fällen zufriedenstellend sein:

- Breitbandige Anregung – ansonsten können sich aufgrund spektraler Verschiebungen große Abweichungen von der Realität ergeben.
- Flächige Fußpunktanregung über ein Wellenfeld (keine punktuelle Anregung über eine einzelne Stütze)

⇒ Im Einzelfall muss beurteilt werden, ob die praktische Anwendung für Mittelungsverfahren geeignet ist.

#### Anforderungen an die Modellierung:

- Einbezug weiterer Moden nahe der 1. EF, wie in obigem Abschnitt festgestellt (Stichwort: Resonanzbreite) für eine breitbandige Interaktion mit dem restlichen Gebäude
- Berücksichtigung höherer Eigenformen ab einer Anregungs-Grenzfrequenz, die sich auf die Lage der Grundeigenform „1. EF“ bezieht (z.B. oberhalb der 4-fachen Frequenz der „1. EF“)
- Berücksichtigung beider horizontaler Raumrichtungen hinsichtlich Abstrahldämpfung (mit dem eindimensionalen Referenzmodell nicht überprüfbar, Verifizierung nur über Messdaten)

#### Prinzipielle Umsetzung:

- Berücksichtigung unterschiedlicher dynamischer Einspannverhältnisse im Bereich der Grundeigen-schwingung, Aufspannen eines Frequenzbereiches für die Moden in der Nähe der „1. EF“

- Aufgrund zufälliger Phasenlagen wird stets mit 2 Modellen separat für symmetrische und für antimetrische Anregung gearbeitet. Anteiligkeit i.d.R. je 50%, jedoch für Grenzfallberechnungen und spezielle Annahmen bzgl. der Phasenlage frei einstellbar
- Keine Berücksichtigung der Einspannverhältnisse für höhere EF – diese verlieren zu höheren Frequenzen hin an Bedeutung
- Extrapolation der bestehenden Deckenmodellierungen in /3/ nach den mechanischen Gesetzmäßigkeiten<sup>21</sup> zu höheren Frequenzen hin
- Mittelung der Prognoseergebnisse in Abhängigkeit der horizontalen Raumrichtungen (Mittelung im Ortsbereich)
- Energetische Mittelung der Antwort des symmetrischen und des antimetrischen Modells
- Energetische Mittelung bei unbekannter Phasenlage
- Keine Mittelung im Frequenzbereich – diese kann jedoch ganz am Schluss für die Bildung von Einzahlwerten (z.B. KB-Wert) nachgeschaltet werden
- Oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz wird in jeder berechneten Bandbreite (z.B. in jeder Terz – nicht im Schmalband) eine Systemantwort in einer Eigenform vorausgesetzt.
- „Auflösung“ der Restmassen, die höherfrequent durch ihre Massenimpedanz eine Sperrwirkung besitzen. Die Summe der schwingenden Massen entspricht der statischen Masse.
- Überschlägige Berücksichtigung von Abstrahldämpfung und Transienz der Anregung (s.u.)

Kritischste Punkte sind sicherlich die Einschätzung, ab welcher Grenzfrequenz zufällige Phasenlagen vorherrschen, wie groß der Gebäudebereich gegenseitiger Beeinflussung ist und welche Größe sich damit für die Abstrahldämpfung ergibt. Abstrahldämpfung und Anregbarkeit haben sehr großen Einfluss auf das Ergebnis.

#### Abgrenzung zur SEA:

Es werden wie bei der SEA teilweise Mittelungen bezüglich der Phasenlagen und der räumlichen Überlagerung mehrerer Moden durchgeführt. Hinsichtlich der Modellbildung und der Verknüpfungsgesetze der einzelnen Bauglieder bestehen hingegen grundlegende Unterschiede. Im Gegensatz zur SEA wird nicht der Energiefluss betrachtet, sondern – unabhängig von der gewählten Modellierungsmethode – stets das Kräftegleichgewicht herangezogen und somit Resonanzen theoretisch exakt erfasst. Es wird keine Mittelung im Frequenzbereich durchgeführt.

Bzgl. des relativ gut bekannten Bereiches der ersten EF wird eine rein „deterministische“ Modellierung verwendet, wodurch bei bekannten Randbedingungen und Phasenlagen eine nicht vorhandene Ausmittlung der Schwingungen verhindert wird. Zu höheren EF hin wird eine auf ingenieurmäßiger Einschätzung beruhende Modellierung herangezogen, die in Teilbereichen sinnvolle Mittelungen verwendet.

Da sich eine Ersatzmodellierung naturgemäß auf einen kleinen Gebäudeausschnitt beschränken muss, kann die abgestrahlte Schwingenergie nicht anderen Gebäudebereichen zugeführt werden, sondern wird in der Dämpfung „vernichtet“. Oberhalb der Gründung kann daher kein horizontaler Energiefluss betrachtet werden. Dies ist ein Manko gegenüber der SEA, ermöglicht jedoch die Modellierung kleiner, leicht handhabbarer Gebäudeausschnitte.

---

<sup>21</sup> Basis: Deckenkatalog nach /3/, fertige Lösungen in /9/

5.3.9 Illustration zur Umsetzung

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die gegenüber der Ersatzmodellierung nach /3/ modifizierten Punkte:

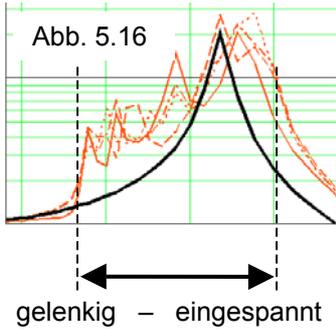
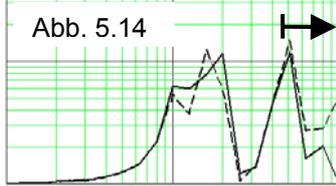
2 Modelle	Symmetrische Anregung (gemäß /3/)	Antimetrische Anregung (gemäß /3/)
Modelltyp (wählbar)	A) Ersatzmodell entwickelt nach EF (gemäß /3/) oder	B) kontinuierliches Gebäudemodell nach Abschnitt 6
1. EF = Bereich I	 <p>Abb. 5.16</p> <p>gelenkig – eingespannt</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Eigenfrequenzen von gelenkig bis eingespannt</li> <li>- Ergibt eine Bandbreite von ca. 1 Oktave für die „1. EF“ (Faktor 2,27 bei ebener Modellierung)</li> <li>- In diesem Bereich je Frequenzband 1 Ersatzschwinger bei gleichverteilter Gewichtung (Fall B – Berücksichtigung unterschiedlicher Randbedingungen und Variation der Eingangsparameter)</li> <li>- Max. Überhöhung <math>\kappa</math> im gesamten Bereich möglich</li> <li>- Rückwirkung auf Gebäude deutlich besser als bei Berücksichtigung nur eines einzelnen Schwingers</li> </ul>
	Abstrahldämpfung	Berücksichtigung nach Gl. 5.28
	Transienz der Anregung	Berücksichtigung nach Abschnitt 7.1.3
Höhere EF = Bereich II	 <p>Abb. 5.14</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ab der theoretisch zu erwartenden „2. EF“ nach /3/, /9/ bei Modell A)</li> <li>- „Auflösung“ der Gesamtmasse der Decken, sodass keine Restmassen übrigbleiben bei Modell A)</li> </ul>
	Anregungsgrad	Gemäß nach Abschnitt 5.3.10
	Abstrahldämpfung	Berücksichtigung nach Abschnitt 5.3.11
	Transienz der Anregung	Berücksichtigung nach Abschnitt 7.1.3
Ergebnis	Energ. Mittelung über Symmetrische / Antimetrische Anregung Energ. Mittelung über alle EF, falls Einzahlwert gewünscht Energ. Mittelung der räumlichen Verteilung der beteiligten EF	

Tabelle 5.16: Einstellung der zur Verfügung stehenden Modellierungen

Als zu klärende Punkte verbleiben für durchlaufende Flachdecken eine Verallgemeinerung des Anregungsgrades und die überschlägige Berücksichtigung der Abstrahldämpfung in Form einer Ersatzdämpfung  $\eta_A$ . **Die nachfolgende Erfassung beider Größen kann als ein auf mechanischer Anschauung basierender Vorschlag verstanden werden.**

### 5.3.10 Vorschlag: Erfassung Anregungsgrad

Der zu höheren EF hin nachlassende Einfluss der Randbedingungen und die horizontale Kopplung über zusammenhängende Geschossdecken erfordern in Hinblick auf schnelle Anwendbarkeit der Ersatzmodellierung eine verallgemeinerte Betrachtung des Anregungsgrades. Der Anregungsgrad lässt zu hohen Frequenzen hin nach. Dies geschieht aufgrund kürzerer Wellenlängen, bzw. der Ausmittelung positiv und negativ ausgelenkter Bereiche und damit verringerter Koppelmassen.

Die Betrachtung des verallgemeinerten Anregungsgrades basiert auf bereits vorhandenen Lösungen in /3/ und /9/:

$$\kappa_{i,j} = \frac{16}{(2i-1)(2j-1)\pi^2} \quad (5.27)$$

i: Eigenformindex in x-Richtung

j: Eigenformindex in y-Richtung

### 5.3.11 Vorschlag: Erfassung Abstrahldämpfung

Unbekannt sind:

- exakte Wellenlaufrichtung, evtl. auch die Wellenlänge in der Fundamentierung
- Kohärenz der Anregung (Länge der Wellenfronten, Stützenanzahl gleicher Phasenlage)

Angenommen wird daher eine zufällige Phasenlage der anregenden Stützen zueinander. Die Schwingungsantworten der Decke infolge einer Anregung durch die jeweils einzeln betrachteten Stützen werden energetisch überlagert.

Auf Basis dieser Überlegung lässt sich – auch für höhere EF und damit kürzere Wellenlängen – die folgende frequenzabhängige Abminderung als Multiplikator der maximalen Schwingungsantwort und damit ein ersatzweise erhöhter Verlustfaktor  $\eta_A$  vorschlagen:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(m+1) \cdot (n+1)}} \sqrt{\frac{\lambda_x \lambda_y}{4LB}} \quad (5.28)$$

bei: m Deckenfeldern in X-Richtung

n Deckenfeldern in Y-Richtung

Feldabmessung L x B

$\lambda_x, \lambda_y$  Wellenlängen in X- und Y-Richtung

ergibt eine Dämpfung von  $\eta_A = \frac{\eta}{A} = \eta \sqrt{\frac{4LB(m+1) \cdot (n+1)}{\lambda_x \lambda_y}}$

mit  $\eta$  = Materialdämpfung

Die Größe des betrachteten Bereiches, innerhalb welchem eine gegenseitige horizontale Beeinflussung stattfindet, ergibt sich bei kleineren Gebäuden aus den Abmessungen der gesamten Geschossdecke. Bei größeren bzw. langgestreckten Gebäuden muss die Größe des Bereiches geschätzt oder variiert werden.

Für die Anwendung wird vorgeschlagen, vereinfachend nur mit  $\lambda$  und einer gemittelten Größe des Stützenrasters zu rechnen.

## 6 Gebäudemodell: Übertragung von Schwingungen über Stützenbiegung

Die meisten dynamischen Ersatzmodelle berücksichtigen nur die vertikale Schwingungskomponente. Die Möglichkeit einer Schwingungsübertragung über die Biegung von Stützen oder Wänden wird i.d.R. außer Acht gelassen. Von Interesse ist daher die Fragestellung, ob auf diesem Weg nennenswerte Schwingungsanteile übertragen werden können, bzw. in welcher Größenordnung diese in Relation zu den vertikal übertragenen Schwingungskomponenten üblicherweise liegen oder im Extremfall liegen können.

Es wird im Folgenden eine Modellierung mit analytischen Ansätzen vorgestellt, in welcher bei biegesteifem Anschluss von Stützen und Decken die Weiterleitung von BiegeWellen vollständig enthalten ist. Die Modellierung beinhaltet weiterhin den Weg der vertikalen Schwingungsübertragung.

Falls die Untersuchungen bestätigen sollten, dass die über Biegung übertragenen Anteile vernachlässigbar sind, kann dies als Legitimation für eine verfeinerte Anpassung der nur vertikal arbeitenden Ersatzmodelle an Messdaten gewertet werden. Es wäre so sichergestellt, dass eine Modellanpassung auf den physikalisch korrekten Grundannahmen erfolgt.

Weiterhin sollen besonders kritische Parameterkonstellationen identifiziert werden, bei welchen der Übertragungsweg über Stützen- / Wandbiegung besonders großen Einfluss haben kann, sodass dies gesondert in der Modellbildung berücksichtigt werden kann.

Es sind hier vorab 3 Fälle zu unterscheiden:

- Frequenzbereich quasistatischer Stützenbiegung
- Biegeresonanzen der Stützen
- Biegeresonanz der Stützen trifft mit den Deckeneigenfrequenzen zusammen bzw. ungünstige Konstellationen der beteiligten EF

Es ist im Vorfeld zu vermuten, dass die Fälle, die eine Stützenresonanz beinhalten, aufgrund der wesentlich größeren Rotationsimpedanz gegenüber dem quasistatischen Fall maßgebend werden.

*Anmerkung: Im Folgenden wird der Begriff „Stütze“ für die aufgehenden Bauteile (Stützen, Wände) verwendet, der Begriff „Decke“ für die als Balken modellierten horizontalen Riegel.*

### 6.1 Berechnungsannahmen, Einschränkungen

Die Geschossdecken halten die Stützen in horizontaler Richtung fest. Die Aussteifung des Gesamtgebäudes wird schon aus statischen Gründen vorausgesetzt und ist nicht Gegenstand der Untersuchungen. Sie erfolgt meist über einen Kern (z.B. Treppenhäuser). Die Eigenschwingformen der Stützen sind somit vorgegeben. Die größte BiegeWellenlänge der Stützen entspricht zwangsweise der doppelten Geschosshöhe.

Sämtliche Untersuchungen werden unter Ausnutzung von Symmetrie und Antimetrie durchgeführt. In der Mittelachse lassen sich wahlweise die entsprechenden Randbedingungen aufbringen.

Die Fundamentierung wird aufgrund zu komplexer Einflüsse auf das Gebäude nicht berücksichtigt – lässt sich aber an die Modellierung problemlos koppeln. Die Belastung wird in Form vertikaler Fußpunktanregung sowie einer Verdrehung des Stützenfußes auf die Modellierung aufgebracht. (Eine sehr kurze Wellenlänge stellt den worst case dar und wird für die Untersuchung der Übertragungsverhältnisse verwendet.)

Die einzelnen Teile des zu untersuchenden Stockwerksrahmens werden geschlossen formuliert. Die Lösung erfolgt aufgrund des zu großen Aufwandes einer geschlossenen Lösung numerisch mittels eines Übertragungsverfahrens.

Für die Untersuchungen wird ein ebenes Modell verwendet, jedoch vor dem Hintergrund, dass eine regelmäßige Gebäudestruktur zugrundeliegt, die auf die ideellen Steifigkeits- und Massenparameter des ebenen Modells umgerechnet wird. Die punktuelle Nachgiebigkeit der Stützeinspannung in die Decken wird im Modell vernachlässigt – wäre jedoch in einem konkreten Anwendungsfall problemlos als seriell geschaltete Drehfeder zu berücksichtigen.

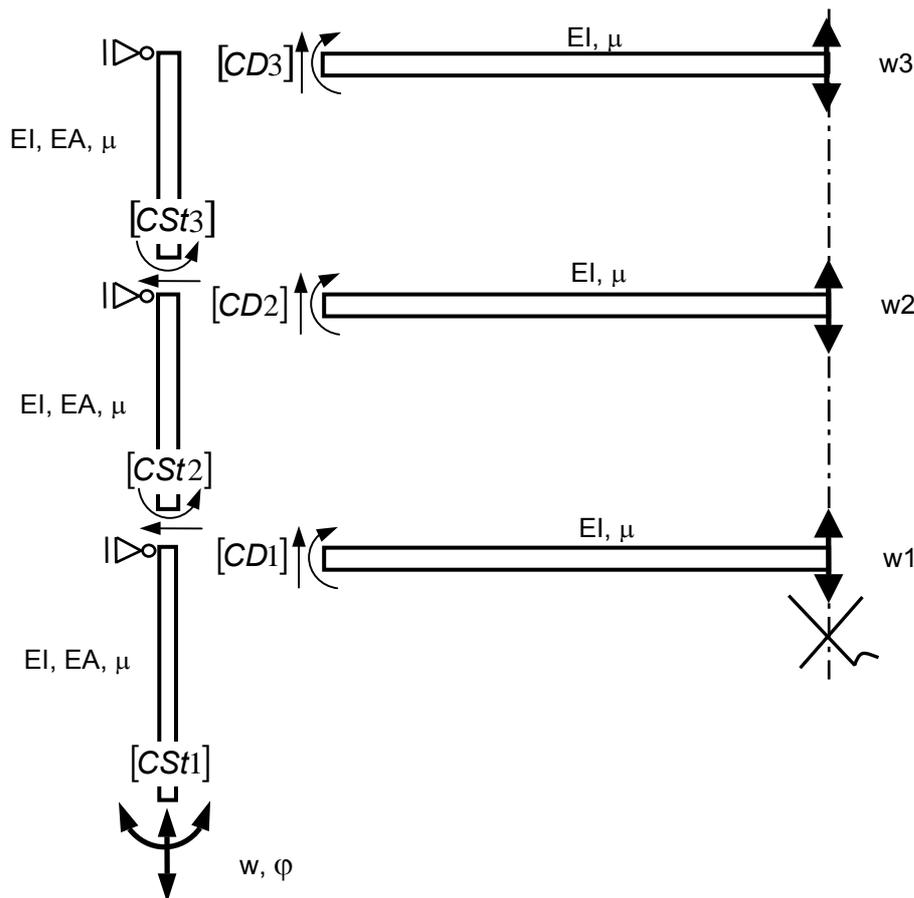


Abb. 6.1: Gebäudemodell am Beispiel eines 3-geschossigen Rahmens

Weitere Annahmen / Merkmale:

- Vernachlässigung der Schubdeformation: Eine Frequenzverschiebung insbesondere der höheren EF kann in Kauf genommen werden
- Anregungskombinationen:

	symmetrische Randbedingungen	antimetrische Randbedingungen
Vertikalanregung	gleichphasig	gegenphasig
Biegeanregung	gegenphasig	gleichphasig

Tabelle 6.1

- Modellierungsreihenfolge: Stütze von oben nach unten unter Einbindung der Steifigkeitsmatrizen der Decken
- Horizontale Festhaltungen lassen keine Übergabe der Querkraft an den Kopplungspunkten zu. Trotzdem haben die dynamischen Steifigkeitsmatrizen der Stützelemente 6. Ordnung.

## 6.2 Modellierung Gebäude

System, Randbedingungen, Wellenzahlen und Lösung finden sich detailliert im Anhang 6.1

### Anregung:

Neben der normierten vertikalen Fußpunktanregung wird eine Zwangsverdrehung des Stützenfußpunktes infolge einer auf  $w_0 = 1$  normierten Amplitude aufgebracht. Es wird mit harmonischer Anregung gerechnet:

$$w(x,t) = w_0 e^{ikx + i\omega t} \quad \text{mit } w_0 = \bar{1} \text{ [m]} \quad (6.1)$$

$$\phi_0 = \frac{\omega}{cr} w_0 = \frac{\omega}{cr} \quad \text{mit } cr = \text{Rayleighwellen-Geschwindigkeit}$$

Nach erfolgter Rückrechnung (s. ebenfalls Anhang 6.1) steht ein Rechenmodell bereit, welches die vertikale Schwingungsübertragung und die Übertragung durch Biegeschwingungen – unter den gegebenen Einschränkungen einer ebenen Modellierung – berücksichtigen kann.

### Kontrollmöglichkeiten:

- Handrechnung Deckeneigenfrequenzen (Balken) gelenkig und eingespannt und Beobachtung des korrekten Überganges zwischen diesen Extremwerten bei Veränderung der Stützensteifigkeit
- Optische Kontrollen bzgl. richtiger Übergangsbedingungen in den Rahmenecken (90° Winkel bleibt erhalten, da keine Schubdeformation berücksichtigt wurde.), ferner Kontrolle Symmetriebedingungen
- Die 1. vertikale EF des Gesamtgebäudes kann mit der geschlossenen Lösung des Dehnstabes gegengerechnet werden, wenn im Gebäudemodell die Decken starr gesetzt werden und lediglich als Massenträgheiten zwischen den einzelnen Geschoss-Abschnitten eingehängt werden:

Ersatzfeder des massebelegten Dehnstabes mit Wellenzahlansatz:

$$\begin{bmatrix} i m_1 EA e^{i m_1 H} + C_D e^{i m_1 H} & i m_2 EA e^{i m_2 H} + C_D e^{i m_2 H} \\ i m_1 EA e^{i m_1 H} & i m_2 EA e^{i m_2 H} + C_D e^{i m_2 H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 = \bar{1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\text{ergibt } c_{EA} = \frac{i m_1 e^{i m_1 H} - i m_2 e^{i m_2 H}}{e^{i m_1 H} - e^{i m_2 H}} EA \quad \text{mit } m_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EA}}$$

### 6.2.1 Exemplarische Ergebnisse

Bei ebener Betrachtung ist das Steifigkeitsverhältnis Stütze zu Decke  $EI_{St} / EI_D$  bei fester Geometrie von Spannweite und Geschosshöhe die wichtigste Einflussgröße. Die absoluten Abmessungen des untersuchten Rahmens sind damit weniger von Interesse: Da sich kombinierte EF von Stütze und Riegel ausbilden, sind auch die separaten Eigenfrequenzen dieser Bauglieder nicht ausschlaggebend.

Es geht weniger um eine exakte Quantifizierung als um die prinzipielle Frage, ob überhaupt und in welcher Form eine Biegeanregung über die Stützen nennenswerte Vertikalschwingungsanteile auf einer Decke erzeugen kann. Im Folgenden wird deshalb die Bauteilstärke in sehr groben Schritten variiert:

- Variation Steifigkeitsverhältnis  $EI_{St} / EI_D$  in einer Abstufung von 10, 3.16, 1, 0.316, 0.1
- Wellengeschwindigkeit Boden im Sinne einer worst case Betrachtung klein gewählt (200 m/s)
- Materialdämpfung einheitlich  $\eta = 5\%$

Im Folgenden wird als „Standardvariante“ ein Wert von  $EI_{St} / EI_D = 1$  bezeichnet.

Absolutabmessungen:  $L = 3 \text{ m}$   
 $H = 3 \text{ m}$   
 $d_{\text{Decke}} = 0,3 \text{ m}$   
 $d_{\text{Stütze}}$  aus Verhältnis  $EI_{St} / EI_D$

Deckenantwort Standardvariante infolge normierter Weggrößen:

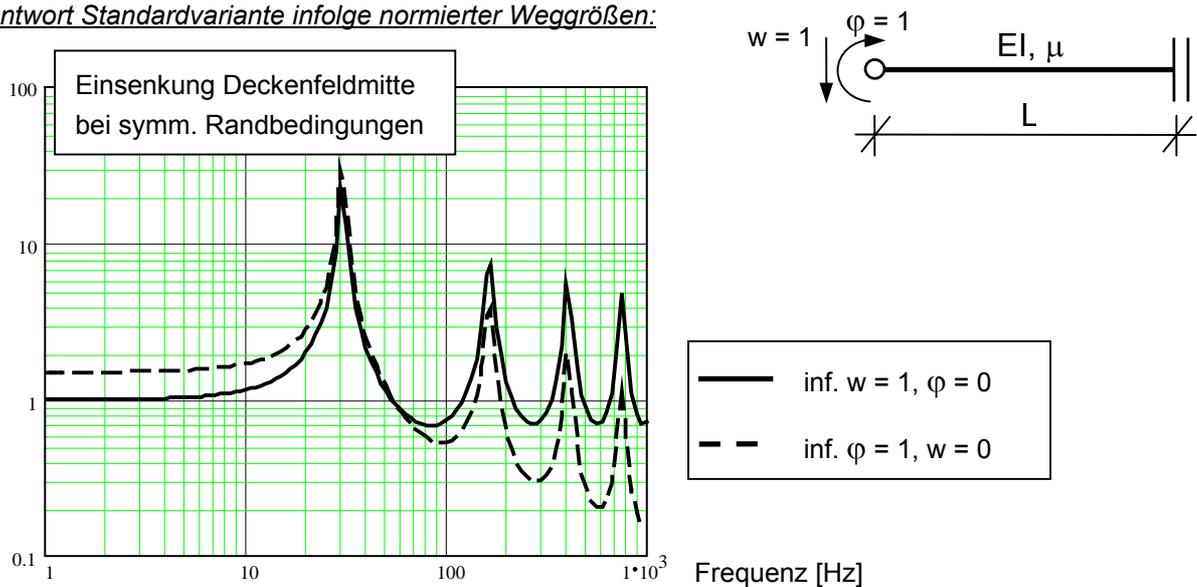
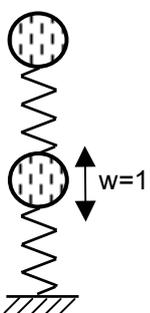


Abb. 6.2: Übertragungsfunktionen Decke

Kontrollen:

- 1. EF beidseits gelenkig gelagert rechnerisch 13,4 Hz, eingespannt 30,3 Hz
- Realteil der quasistatischen Auslenkung infolge  $\varphi$  (bei 1 Hz) entspricht Handrechnung.

Bemerkenswert ist, dass die erste Resonanz in der Eigenfrequenz der eingespannten Decke auftritt, obwohl die aufgebrachten Randbedingungen für den Fall  $\varphi = 1, w = 0$  eventuell eine Verformungsfigur erwarten ließen, die einer gelenkigen Lagerung entspräche.



Erklärung: Trotz der eingeleiteten Verdrehung ist das Balkenende gegenüber Eigenschwingungen des Balkens eingespannt.

Es besteht ein Phasenversatz von  $90^\circ$  zwischen der (anregenden) quasistatischen Verformungsfigur und der Eigenschwingung des Balkens. Aus der quasistatischen und der dynamischen Verformung ergibt sich anteilig ihrer Schwingwege eine superponierte „Gesamtphasenlage“ längs des Deckenbalkens. Am Auflager findet keine dynamische Überhöhung statt – in der Symmetrieachse ist sie hingegen maximal. Hieraus ergibt sich bei Resonanz optisch der Effekt eines gegenüber der Balkenmitte um  $90^\circ$  vorseilenden Auflagers. (Anschauungsmodell 2-Massenschwinger: Obere Masse = Balkenmitte, untere Masse = Auflager, sog. „Restmasse“, vgl. /3/)

Stützenantwort infolge normierter Weggrößen:

Untenstehende Abbildung zeigt für die Standardvariante mit symmetrischen Randbedingungen das Übertragungsverhalten der Stütze (bei bereits angekoppelter Decke).

Neben der vertikalen Auslenkung und der Verdrehung des Stützenkopfes wurde die horizontale Verformung der Stütze auf halber Höhe bzw. der Maximalwert abgebildet.

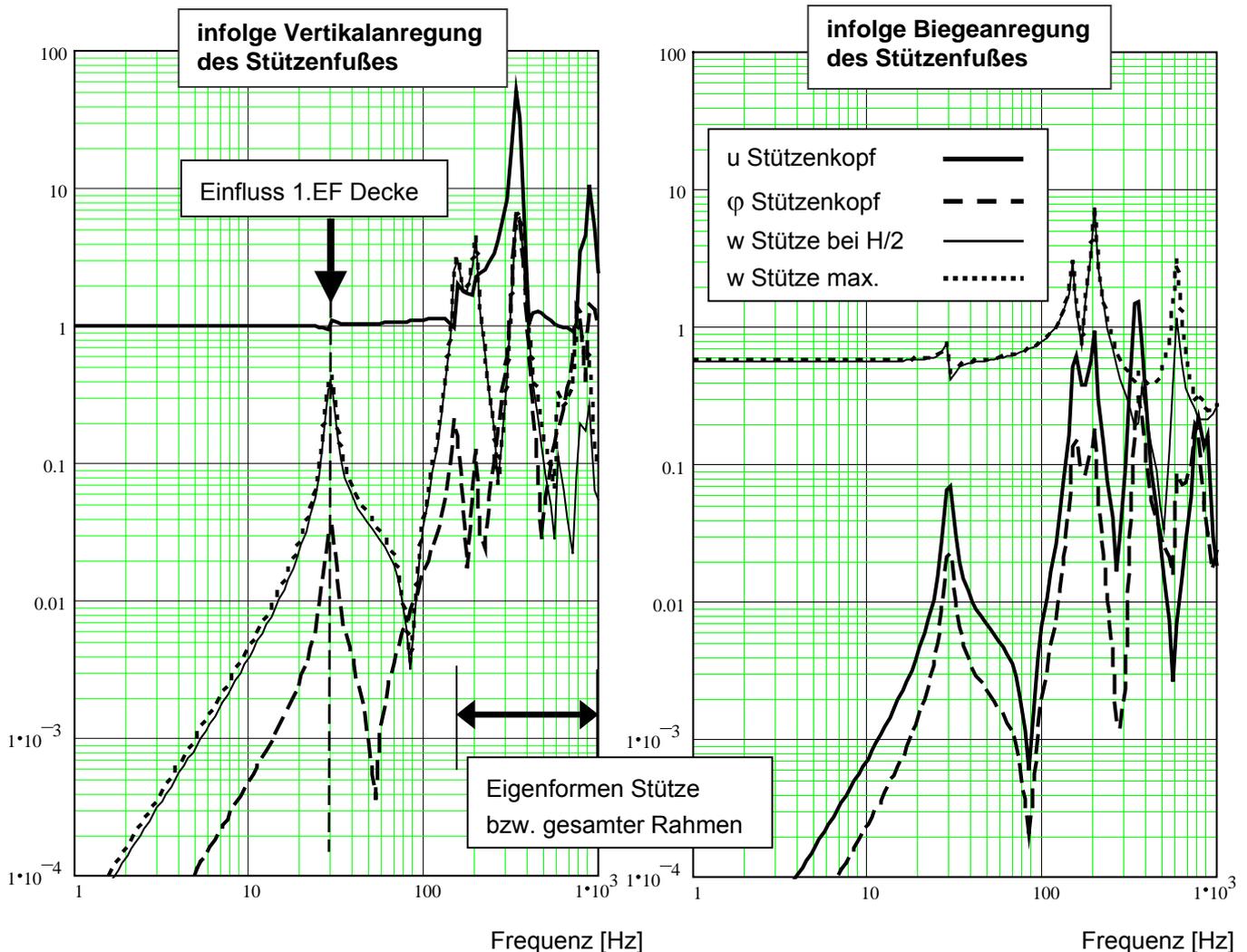
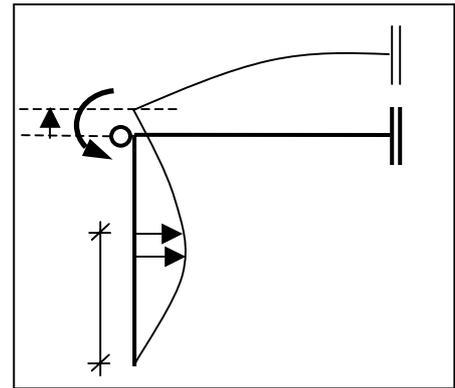


Abb. 6.3: Übertragungsverhalten Stütze

Aus Abb. 6.3 lässt sich für die Standardvariante der Einfluss der Stützendehnsteifigkeit auf die Schwingungsübertragung durch Biegeübertragung abschätzen. (Hier aufgrund geringer Gebäudehöhe erst ab ca. 160 Hz – im Bereich der 1. EF der Decke noch kein nennenswerter Einfluss).

## 6.3 Ergebnisse eingeschossiger Rahmen

### 6.3.1 Übertragungsfunktionen

Die normierten Schwingungsantworten (Übertragungsfunktionen) werden für den eingeschossigen Rahmen aufgrund des klaren Systems im Sinne einer Basisuntersuchung dargestellt.

In der linken Abbildung ist die normierte Fußpunktanregung der Größe 1 eingezeichnet. Für die Biegeübertragung (rechte Abb.) errechnet sich die mit der Vertikalamplitude der Größe 1 korrelierende Verdrehung  $\varphi$  nach Gl.(6.1). Als abgeleitete Größe wächst die Verdrehung proportional mit der Anregungsfrequenz.

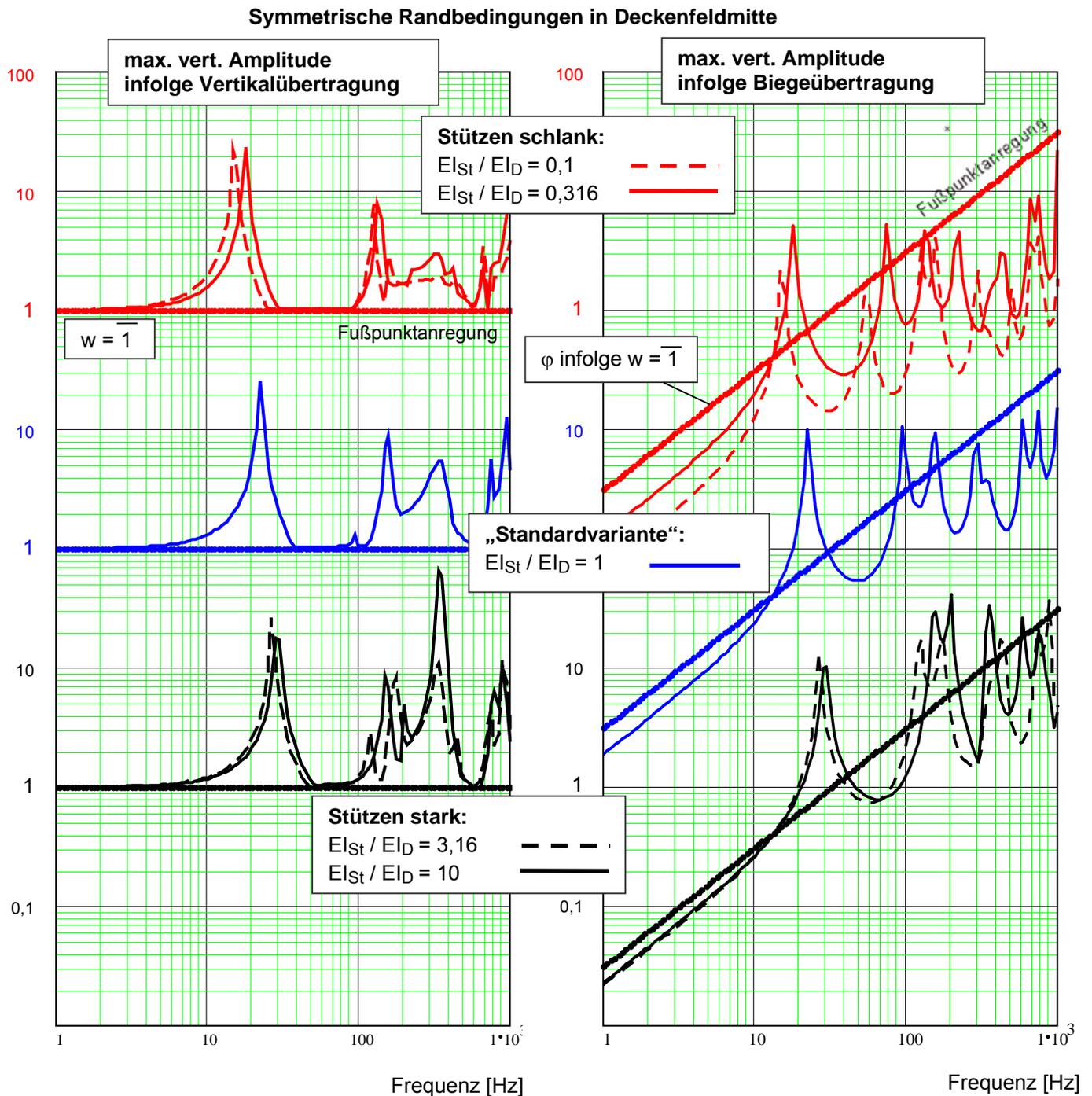


Abb. 6.4: Normierte Schwingungsantwort der vertikal und durch Biegung übertragenen Schwingungsanteile

## Antimetrische Randbedingungen in Deckenfeldmitte

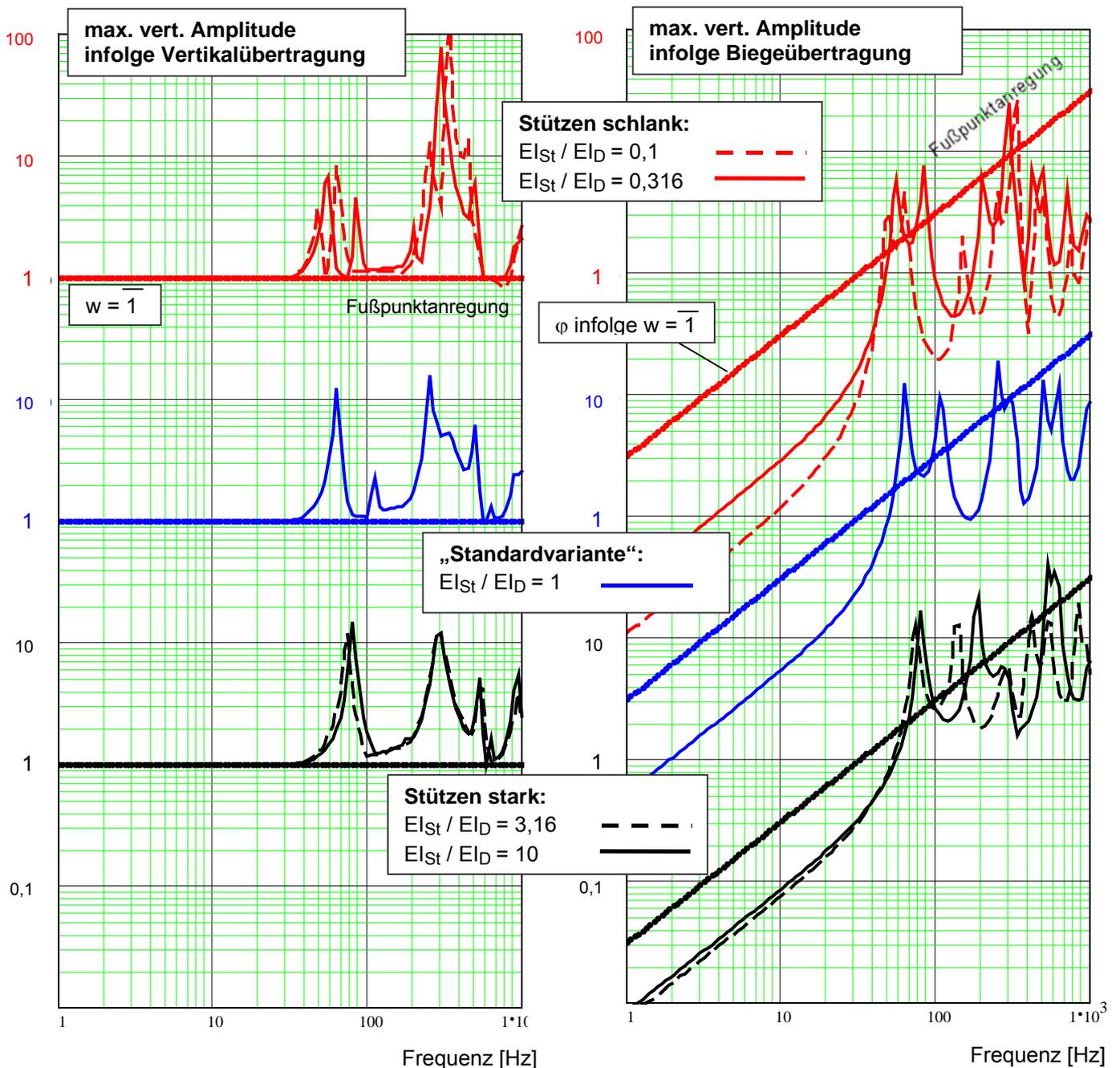


Abb. 6.5: Normierte Schwingungsantwort der vertikal und durch Biegung übertragenen Schwingungsanteile

## 6.3.2 Verhältnis der Übertragungsfunktionen

Nur zur Beurteilung in Zusammenhang mit obenstehenden Übertragungsfunktionen geeignet!

Bei der Bildung eines Verhältnisses von Übertragungsfunktionen können Maxima infolge sehr kleiner absoluter Werte entstehen. Mittels der Absolutwerte kann beurteilt werden, ob eine vergleichsweise starke Schwingungsübertragung durch Biegung überhaupt in einem stark überhöhenden Frequenzbereich liegt und deshalb auch zu hohen Schwingstärken führen kann. (Extrem schmalbandige Anregung wird zur Identifikation kritischer Bereiche ausgeschlossen.)

Die Übertragungsverhältnisse (vertikal / Biegung) wurden durcheinander geteilt:

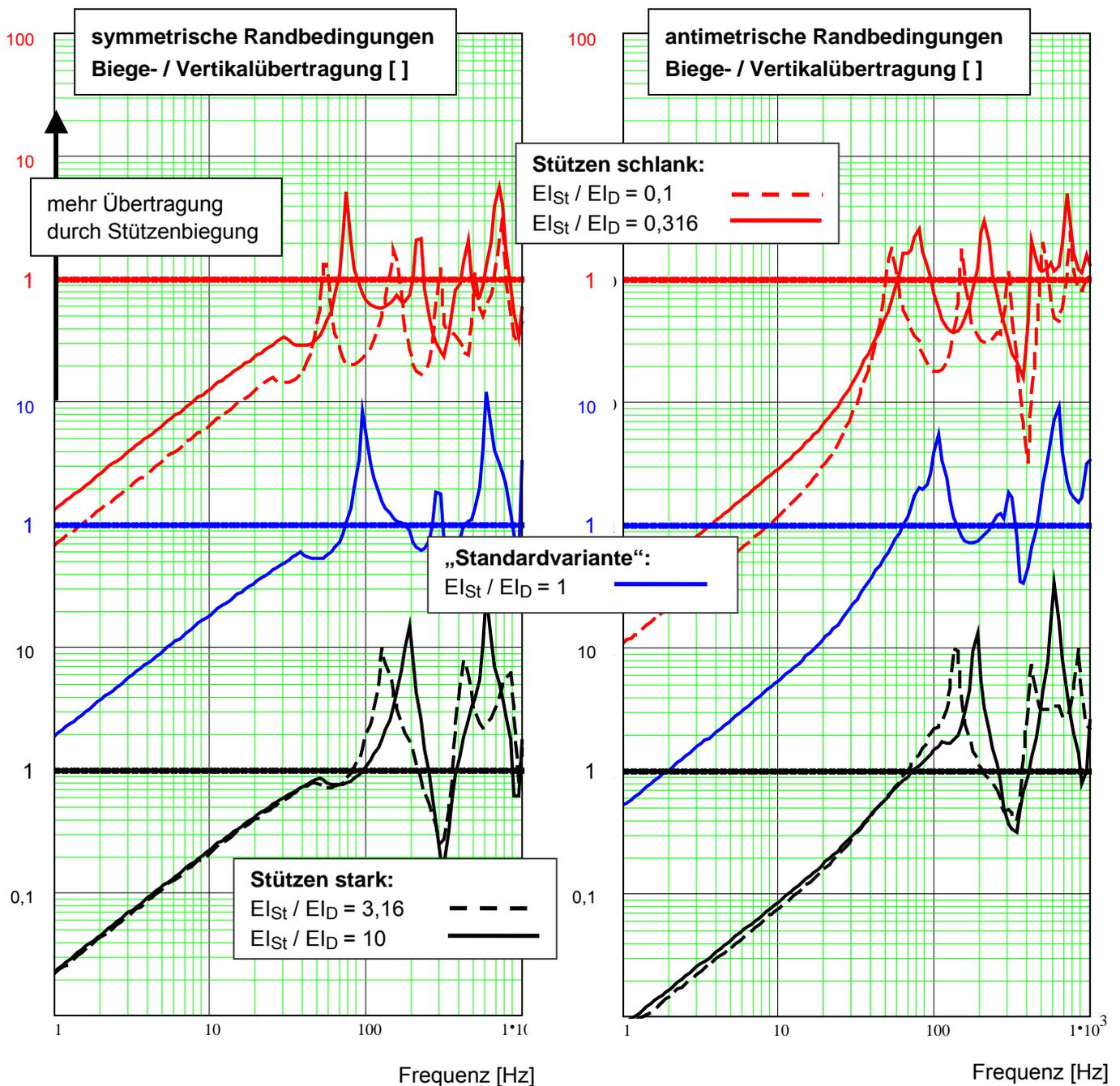


Abb. 6.6: Parameterstudie: Verhältnis der vertikal / der durch Biegung übertragenen Schwingungsanteile

Die Unterschiede zwischen symmetrischen und antimetrischen Randbedingungen sind gering. Dies dürfte auch für höhere Gebäude gelten – die Betrachtung der antimetrischen Randbedingungen wird daher reduziert (kontrolliert, jedoch nicht abgebildet).

### 6.3.3 Analyse der Ergebnisse

Zu beachten ist, dass in der durchgeführten Parameterstudie im ebenen Modell eine vollständige Einspannung der Stütze in die Decke enthalten ist. In der Praxis wird der Einspanngrad aufgrund der punktuellen Nachgiebigkeit i.d.R. deutlich niedriger liegen.

#### Bzgl. der Anregung:

- Zunehmende Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung bei hohen Frequenzen – das Anregungsspektrum der Fußpunktverdrehung wächst im Gegensatz zur vertikalen Fußpunktanregung proportional mit der Frequenz. Im praktischen Anwendungsfall wird dieser Zusammenhang bereits durch die ausmittelnde Wirkung der Fundamente stark abgemildert.
- Die Biegeanregung unterschreitet die Vertikalanregung deutlich bis zu einer (willkürlich eingeführten) Grenzfrequenz von:

$$v_{\text{vert}}^{\dagger} = v_{\text{phi}}^{22} \quad \text{bei} \quad fg = \frac{cr}{2\pi w_0} \quad \text{mit} \quad cr = \text{Rayleighwellengeschwindigkeit, } w_0 = \bar{1} \text{ [m]} \quad (6.3)$$

$fg$  dient im Weiteren als Bezugsgröße für die Abschätzung des Einflusses der Stützenbiegung. Es handelt sich bei  $fg$  um eine willkürlich eingeführte Größe, bei welcher  $\varphi = 1$  (im Bogenmaß) und  $w = 1$  ist.

- Es stellt sich die Frage
  - a) der ausmittelnden Wirkung der Fundamente, in der Parameterstudie nicht berücksichtigt
  - b) des zur Beurteilung heranzuziehenden Frequenzbereiches bei den Erschütterungen (s. /8/) bzw. des Sekundärluftschalls (Literaturquellen z.B. in /29/)

#### Bzgl. des Übertragungsverhaltens:

- Allgemein Begünstigung der Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung durch starke Stützenquerschnitte. Das Steifigkeitsverhältnis Stütze zu Decke ist eine wesentliche Einflussgröße.
- Eine wesentliche Übertragung über Biegung findet ab der 1. Biegeeigenfrequenz der Stützen statt. Bei schlanken Stützen kann zu ihrer überschlägigen Ermittlung die beidseits eingespannte EF herangezogen werden, bei sehr starken Stützen die nur einseitig eingespannte EF.
- Größte Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung erwartungsgemäß in den Biegeeigenfrequenzen der Stützen (z.B. Standardvariante ca. 100 Hz und 640 Hz).
- Zu beachten ist, dass die Impedanz der Anregung in der Praxis nicht unendlich groß ist. Es wird daher in den meisten Fällen die Boden-Bauwerk-Interaktion zu berücksichtigen sein. Je nach Verhältnis der Drehimpedanz von Stütze zu Gründung ist beim Abschätzen der ersten Biegeeigenfrequenz der Stützen auch am Fußpunkt eine gelenkige Lagerung (genauer: eine Teileinspannung) anzusetzen.
- Zu bedenken ist, dass die Standardvariante nicht die übliche Bauweise des heute üblichen Industriebaus repräsentiert. Die Stützen sind in der Praxis meistens wesentlich schlanker.

Unter Beachtung der Berechnungsannahmen kann gefolgert werden, dass der Übertragungsweg der Stützenbiegung maßgebend gegenüber der Vertikalübertragung sein kann. Dies gilt für den oberen Frequenzbereich üblicher Erschütterungen (ca. 50 Hz – 80 Hz) und den sekundären Luftschall.

---

<sup>22</sup> Diese Forderung ist nicht dimensionsecht

Für eine Abschätzung des betroffenen Frequenzbereiches wird eine Betrachtung der Stützeigenfrequenzen unter Berücksichtigung der Rayleighwellenlänge des Bodens (Gl. 6.1) und des Steifigkeitsverhältnisses  $EI_{St} / EI_D$  die wesentlichen Einflüsse abdecken.

Exemplarische Abbildungen im Ortsbereich zur Schwingungsübertragung in den Stützeigenfrequenzen (Standardvariante):

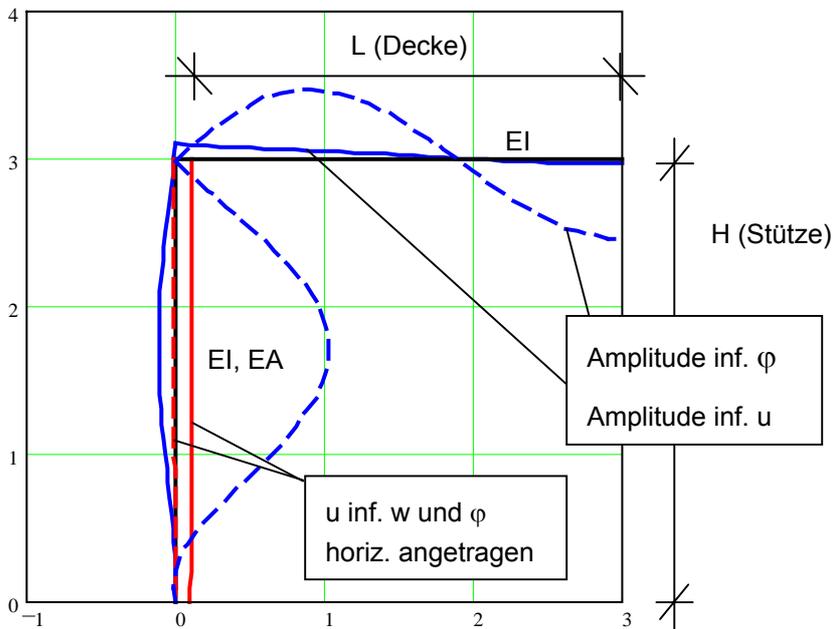


Abb. 6.7: Grafische Darstellung der Amplitude bei 1. EF der Stütze (100 Hz), Realteil

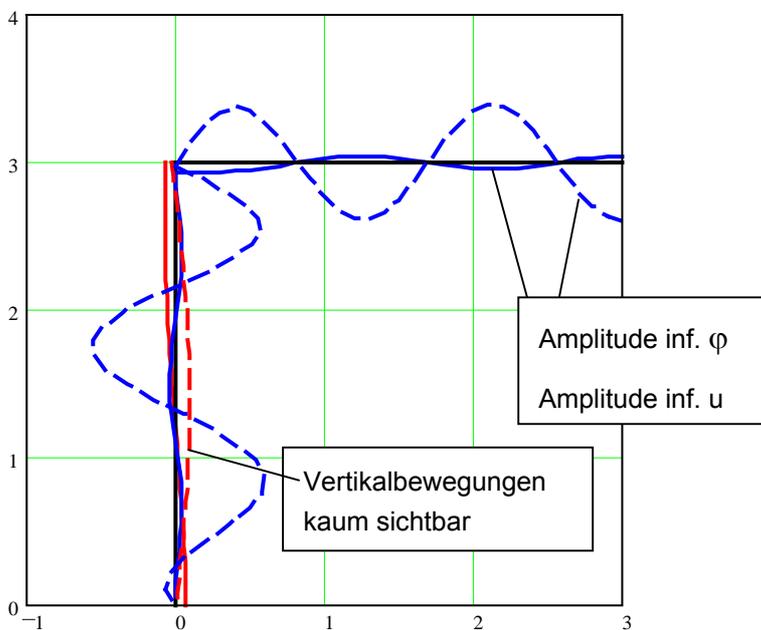


Abb. 6.8: Grafische Darstellung der Amplitude in der 3. EF der Stütze (640 Hz), Realteil

Bemerkung zu obenstehenden Darstellungen:

Der Darstellungszeitpunkt wurde jeweils so gewählt, dass die Feld- bzw. Stützenamplituden maximal werden. Durch den Phasenversatz des anregenden Auflagers gegenüber der angeregten Eigenschwingung ergibt sich automatisch, dass die Auflagerverdrehung zum dargestellten Zeitpunkt beinahe gleich Null ist.

## 6.4 Modellierung eines mehrgeschossigen Rahmens

Die Modellierung wurde bereits in Abschnitt 6.2 umrissen. Modelliert wurde ein Rahmen mit 3 Obergeschossen. Die vorgestellte Modellierung lässt sich jedoch problemlos auf eine beliebige Stockwerkszahl erweitern.

### 6.4.1 Variationen

Es wurden nicht sämtliche Konstellationen aus allen zu variierenden Eingangsparametern berechnet. Die Variationen erfolgten, ausgehend von der Standardvariante, in jeweils nur einer Größe:

- Vergleich Obergeschosse in der Standardvariante (auch für die nachfolgenden Varianten untersucht und exemplarisch dargestellt)
- Variation des Steifigkeitsverhältnisses  $EI_{St} / EI_D$
- Variation der Impedanzverhältnisse  $C_D / C_{St}$  bei gleichbleibenden Bauteileigenfrequenzen
- Vergleich mit dem eingeschossigen Rahmen im 1.OG

Dargestellt wurden jeweils die Übertragungsverhältnisse beider Anregungsanteile (Vertikal und Biegung) und das Verhältnis beider Anteile. Als Datenbasis dient jeweils der Maximalwert des Betrages über die Deckenspannweite.

Auf Basis der Erfahrungen am eingeschossigen Rahmen wurden stets nur symmetrische RB betrachtet. Die Materialeingangswerte und die Standardvariante bleiben gegenüber Abschnitt 6.3 unverändert.

Vergleich der Obergeschosse:

Anmerkung: tatsächliche Tiefe der sich ergebenden Minima nicht von Belang

Standardvariante mit  $EI_{St} / EI_D = 1$

Links abgebildet

- oben die vertikale Übertragungsfunktion Stützenfußpunkt – Decke infolge vertikaler Anregung
- unten analog die vertikale Übertragungsfunktion infolge der mit  $w = 1$  korrelierenden „Biegeanregung“

Rechts abgebildet das Verhältnis der Übertragungsfunktionen

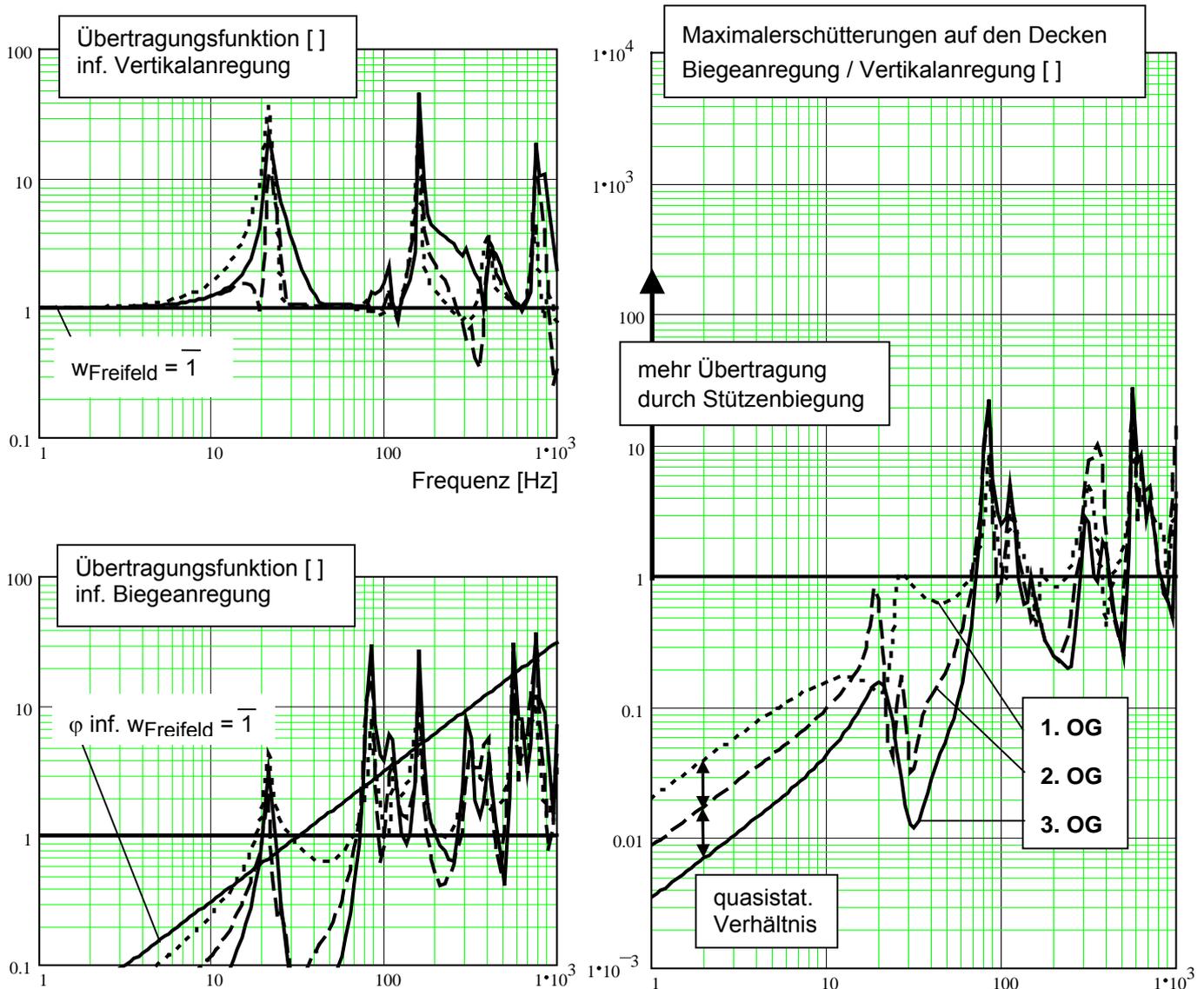


Abb. 6.9: Standardvariante – Max. Deckenverschiebung vertikal infolge Vertikal- / Biegeanregung

- Bei vertikaler Anregung größte Überhöhung der untersten Decke – in diesem Fall kein Effekt tiefer Abstimmung über die vertikale Gebäudesteifigkeit, sondern aus der Biegekopplung über die Stützen begründet: Die untere und obere Decke schwingen gleichphasig, die mittlere dagegen.
- Die 1. und 3. EF werden vertikal und über Verdrehung angeregt. Der Verdrehungsanteil wird trotz der begünstigenden Annahmen nicht maßgebend.

- Zwischen diesen beiden EF findet sich eine „3. gegenphasige EF“ (ca. 85 Hz), die sich vertikal kaum anregen lässt. Insbesondere in dieser EF werden hohe Absolutwerte erzeugt (Übertragungsfunktion ca. 30) bei gleichzeitig minimaler Vertikalanregung.
- Höhere EF: in den maßgebenden Maxima nur geringe Unterschiede bzgl. der Höhe, tiefe Abstimmung wenig ausgeprägt beginnend oberhalb ca. der 3.EF
- Bereiche zwischen den höheren EF sowie hochfrequent: Abnehmende Wellenausbreitung mit der Höhe infolge der Dämpfung auf dem Übertragungsweg
- Exemplarisch wurde nachfolgend das quasistatische Verhalten dem bzgl. der Biegeanregung dynamischen Verhalten grafisch gegenübergestellt (Randbedingungen symmetrisch in Rahmenmitte):

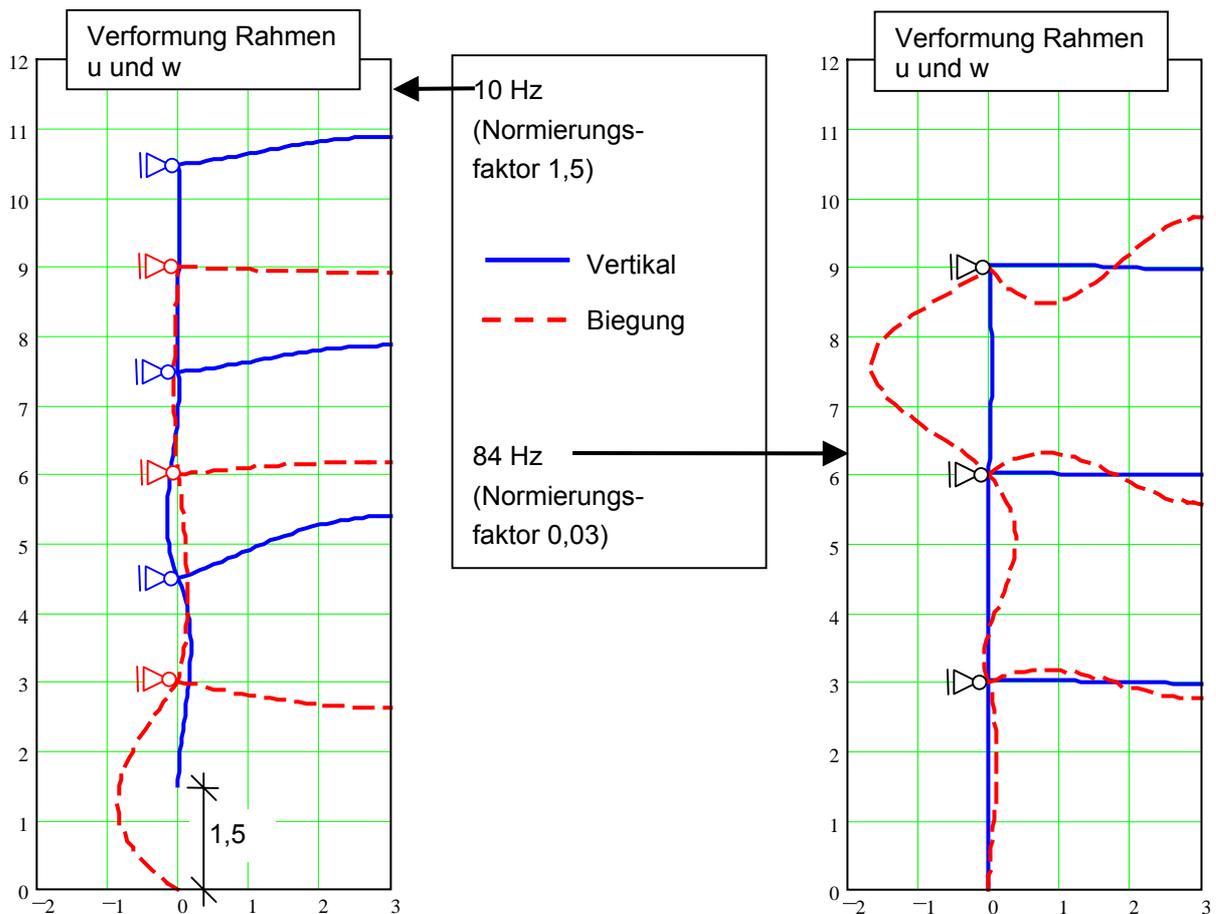


Abb. 6.10: Vergleich quasistatisches und dynamisches Gebäudeverhalten (Realteil)

Bzgl. der Immissionsentwicklung über die Gebäudehöhe lässt sich Folgendes ableiten:

Niederfrequent – im Frequenzbereich bis ca. zur willkürlich eingeführten „Anregungsgleiche“ = fg nach Gl. (6.3) – findet sich zunächst quasistatisch, dann im Bereich der ersten EF ein angenähert linearer Zuwachs des durch Biegeübertragung verursachten Immissionsanteils. Bei Vertikalanregung nehmen in der ersten EF mit zunehmender Gebäudehöhe i.d.R. die Immissionen zu. Aufgrund des hierzu entgegengerichteten Verhaltens bei der Biegeübertragung werden die untersten Geschosse maßgebend<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> evtl. allein aus der Darstellung der Standardvariante nicht ersichtlich, gilt nur für 1. EF

**Höherfrequent** – im Frequenzbereich  $> f_g$  (vgl. z. B. Abb. 6.9, li. unten, Schnittpunkt der Geraden bei 31,5 Hz) – wachsen die Erschütterungen infolge Biegeanregung vor allem aufgrund höherer Verdrehungen am Fußpunkt stark an. Ungeachtet der Anteiligkeiten beider Übertragungswege ist aus den einzelnen Übertragungsfunktionen erkennbar, dass a) unter den auferlegten Modellierungsannahmen die Biegeübertragung maßgebend wird und b) in allen Geschossen der Einfluss der Biegeübertragung in etwa gleich groß ist. Zwischen den Eigenfrequenzen ist jedoch auch hier die Übertragung auf die unterste Decke am größten.

*Hinweis: Sämtliche Ergebnisse können nicht beliebig auf höhere Gebäude extrapoliert werden!*

Variation des Steifigkeitsverhältnisses  $EI_{St} / EI_D$ :

Als Vergleichsort wurde zunächst die unterste Decke gewählt:

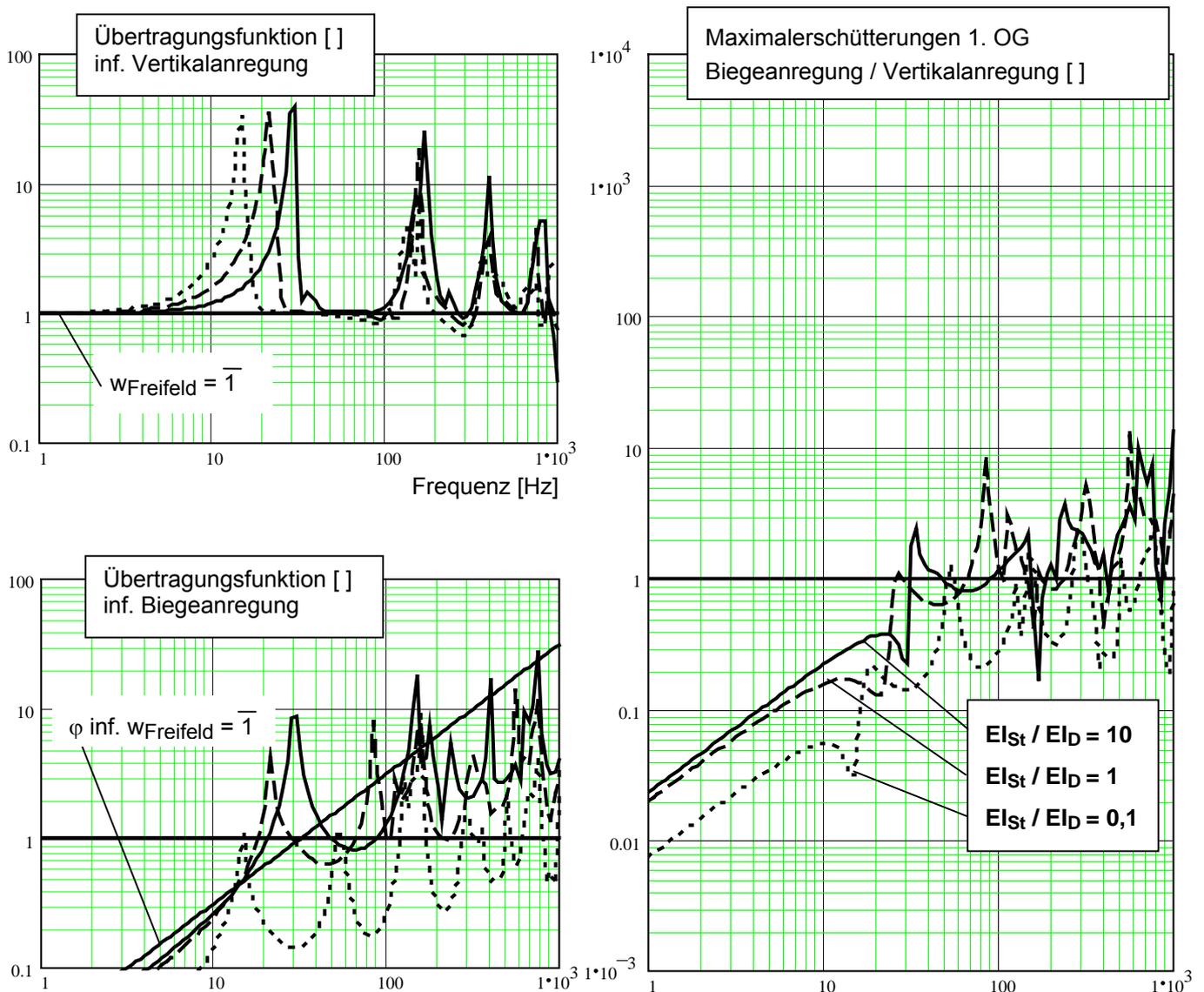


Abb. 6.11: Variation der Steifigkeitsverhältnisse – Vergleich Vertikal- / Biegeübertragung

Für die oberen Geschosse ergibt sich Folgendes:

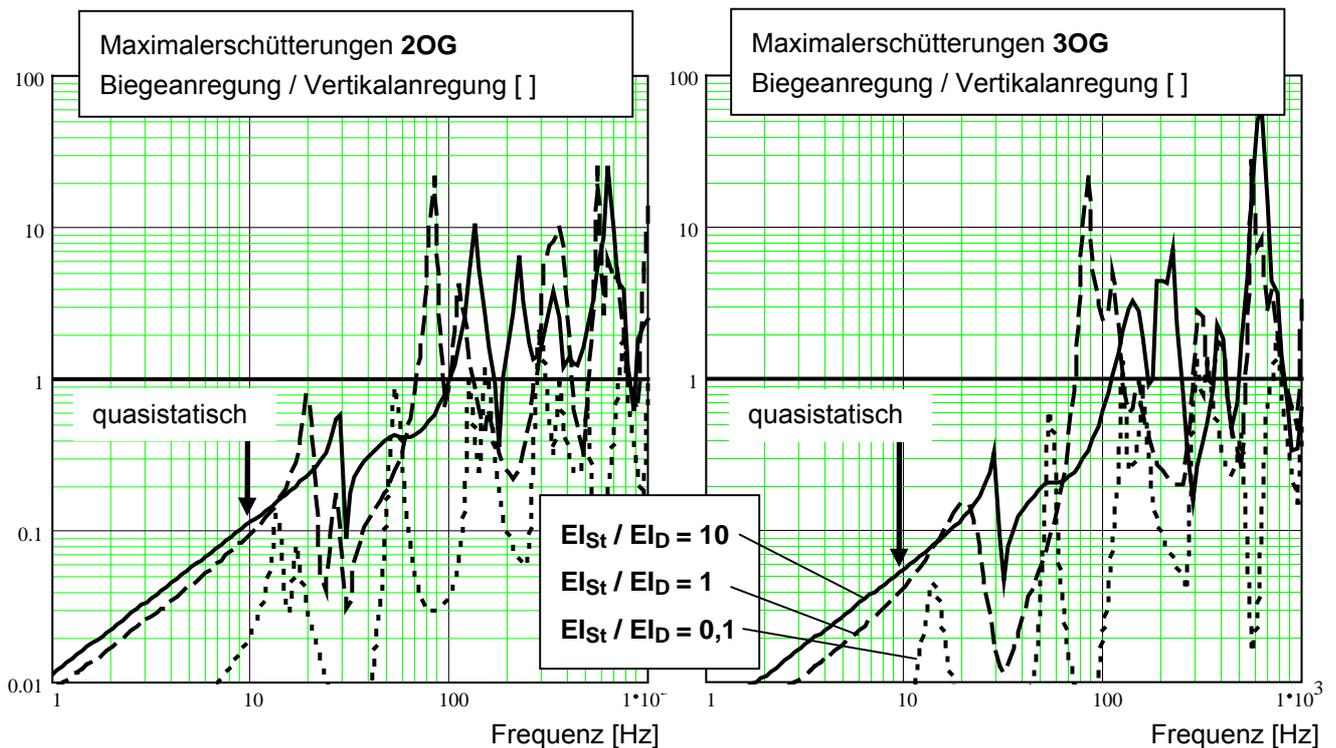
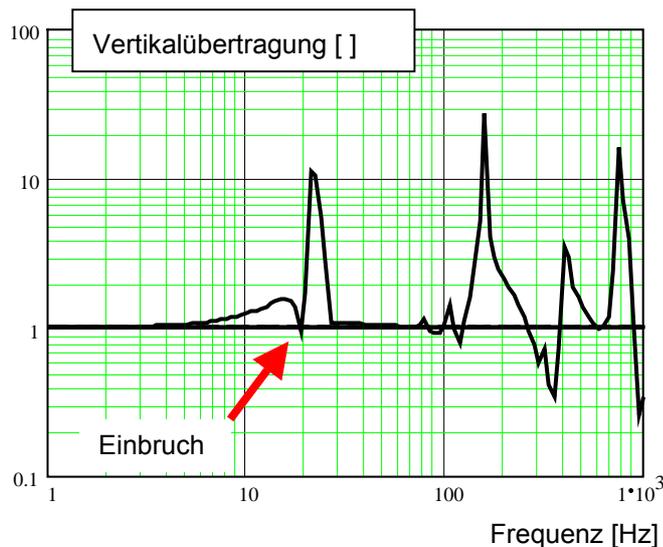


Abb. 6.12: Vergleich Vertikal- / Biegeübertragung auf den oberen Decken

Fazit: Die quasistatische Übertragung durch Biegung nimmt mit zunehmender Gebäudehöhe ab (s. Pfeil), die dynamische Übertragung nimmt zu (Dies gilt für wesentlich höhere Gebäude evtl. nicht mehr, da infolge des längeren Übertragungsweges die Dämpfung zunimmt).

Durch die Berücksichtigung der Biegekopplung können sich auch bei allein vertikaler Anregung bei besonderen Parameterkonstellationen Effekte ergeben, die bei nur vertikal arbeitenden Ersatzmodellen nicht auftreten können:



Bei der Standardvariante ergibt sich ein Einbruch im Anwachsen der Überhöhungsfunktion noch vor Erreichen der 1. Vertikalresonanz (Gebäude und Decken in Phase, *siehe Pfeil links*).

Dies wird – trotz gleicher Deckenparameter – bedingt durch die unterschiedlichen Einspanngrade und damit Eigenfrequenzen der Decken. Bei der gewählten Parameterkonstellation „stört“ die Biegeform der Stütze die gleichsinnige Schwingung aller 3 Decken.

In der 1. EF sind die Decken über die Stützenbiegeline in gegensinniger Richtung gekoppelt.

Abb. 6.13: „Störung“ der gleichsinnigen 1. Deckenschwingung durch Kopplung der Decken über die Stützen

Variation der Impedanzverhältnisse:

Im Gegensatz zur Änderung der Steifigkeitsverhältnisse bleiben die Eigenfrequenzen der einzelnen Bauteile (Decken, Stützen) nun unverändert. Die Impedanzen werden über die berücksichtigte Bauteilbreite<sup>24</sup> eingestellt. Durch die Kopplung von Decken und Stützen ergeben sich aufgrund veränderter Einspannverhältnisse unvermeidlich unterschiedliche Eigenfrequenzen.

Als Vergleichsort wurde in Analogie zum Vorherigen zunächst die unterste Decke gewählt:

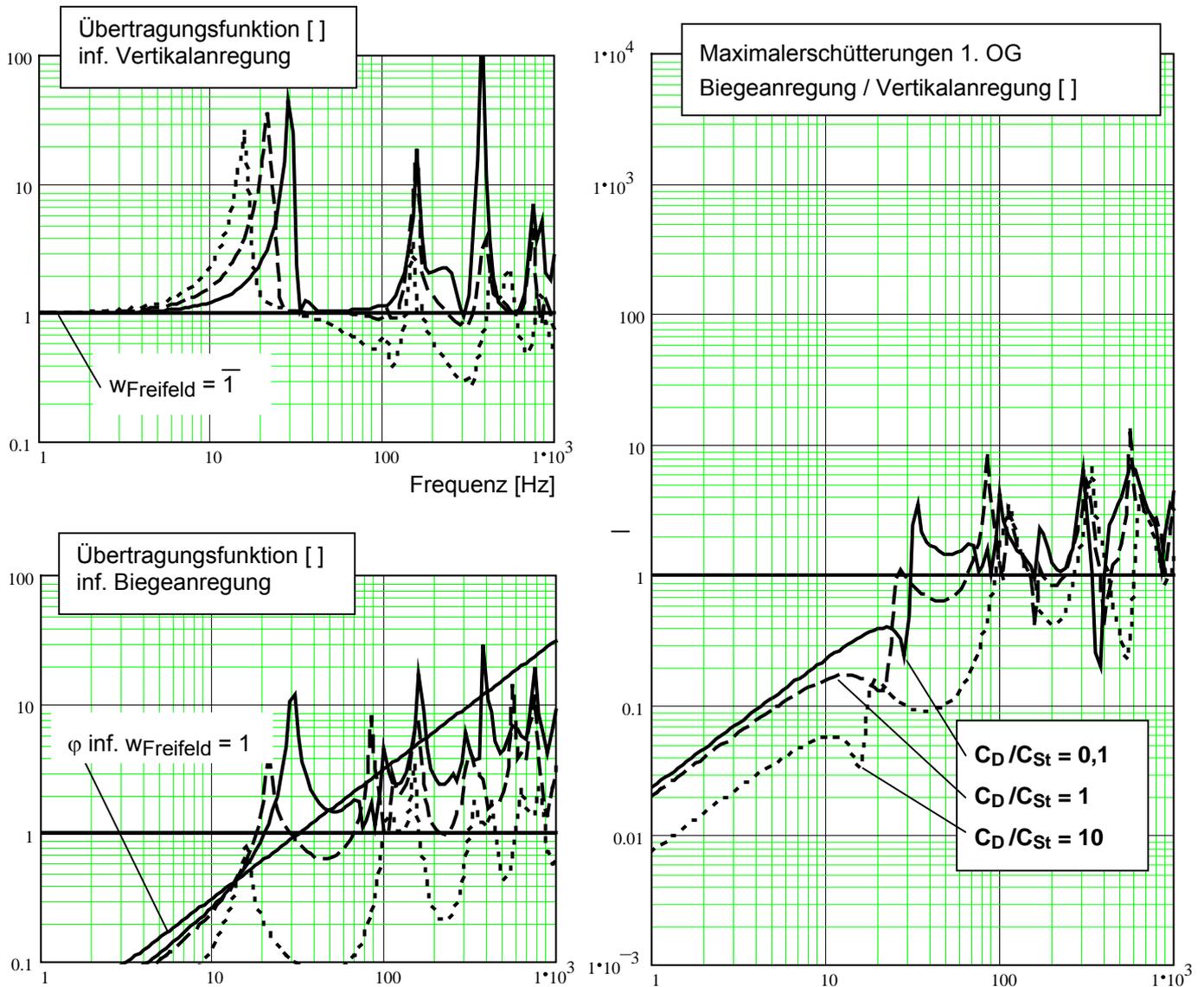


Abb. 6.14: Variation der Impedanzverhältnisse – Vergleich Vertikal- / Biegeübertragung

Beurteilung:

Es wurden unterschiedlich große Deckenimpedanzen (Decken gleicher Eigenfrequenz) an die Stütze des Standardfalls angekoppelt. Bei der vorangegangenen Variation der Steifigkeitsverhältnisse wurden hingegen unterschiedlich starke Stützen (unterschiedlicher Bauteileigenfrequenz) mit der stets gleichen Decke des Standardfalles kombiniert.

<sup>24</sup> Ein Verhältnis  $C_D/C_{St} = 10$  bedeutet 10-fache Deckenbreite gegenüber der Standardvariante.

Die beiden Untersuchungen unterscheiden sich somit in 2 Punkten, erstens bzgl. der Funktion des betroffenen Bauteils (Stütze = Übertragungsglied, Decke = Beurteilungsort), zweitens bzgl. der Auswirkungen auf die Eigenfrequenz des variierten Einzelbauteils.

Trotz der Systemveränderungen in diesen beiden Bereichen sind die Unterschiede zwischen beiden Untersuchungen erwartungsgemäß sehr gering. Dies gilt auch für die oberen Stockwerke (o. Abb.). Eine Unterscheidung zwischen den beiden variierten Parametern wird daher nicht weiter verfolgt.

Dies kann als Legitimation einer vereinfachten Parameterstudie für den weiteren Verlauf der Untersuchungen gelten (s. unten). Es wird im Folgenden lediglich eine Variation des Steifigkeitsverhältnisses aufgrund unterschiedlicher Bauteilstärken durchgeführt.

#### Vergleich mit dem eingeschossigen Rahmen im 1.OG:

Als Vergleichsort wurde in Analogie zum Vorherigen zunächst die unterste Decke gewählt:

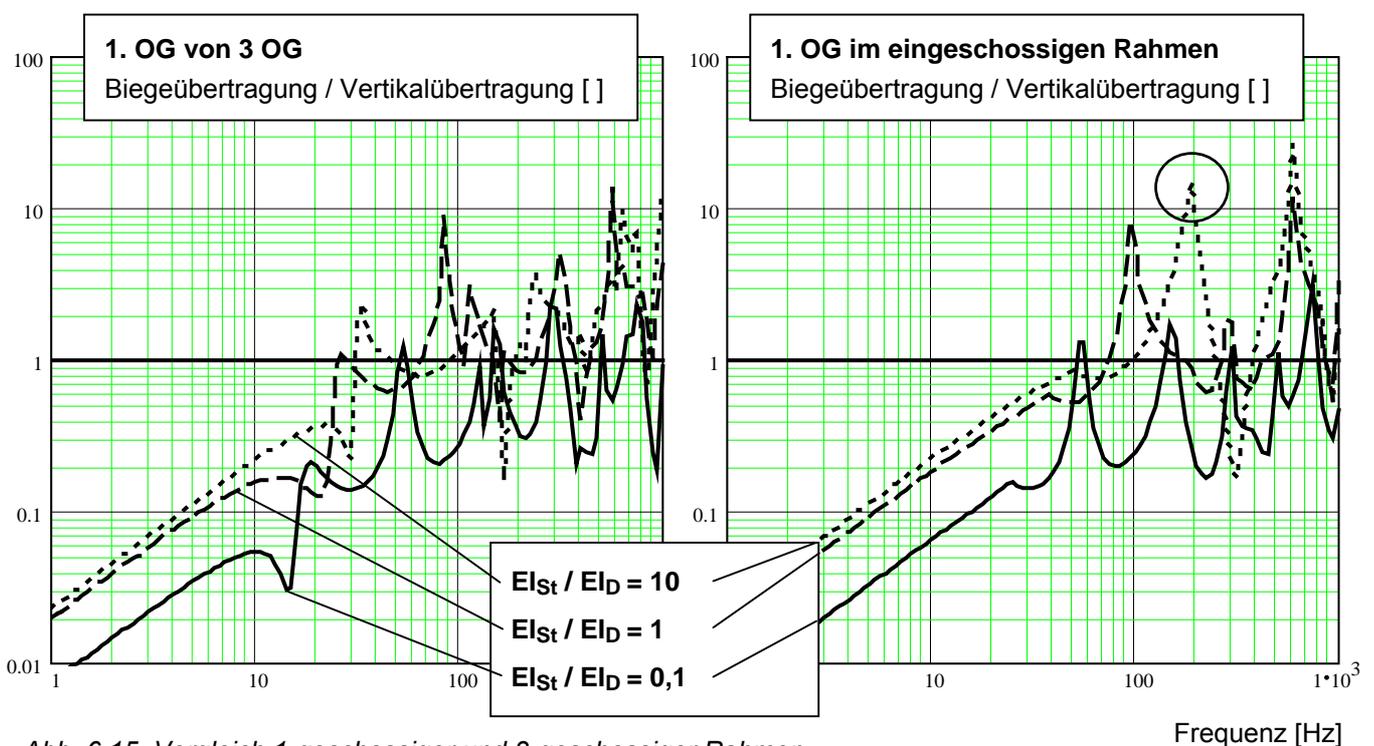


Abb. 6.15, Vergleich 1-geschossiger und 3-geschossiger Rahmen

Beurteilung:

Neben den zu erwartenden Einwirkungen weiterer Gebäudemoden der 3-geschossigen Modellierung sind die Auswirkungen relativ gering. Lediglich die ausgeprägte 1. Biege-EF der starken Stützenvariante (bei  $EI_{St} / EI_D = 10$ ) findet sich beim höheren Gebäude nicht mehr (s. Kreis).

#### 6.4.2 Bewertung der Ergebnisse

Eine Beurteilung muss sich stets nach dem individuellen Anwendungsfall richten. Wichtige, über die Untersuchungen hinausgehende Einflussgrößen sind v.a. die Fundamentierung, die 3-Dimensionalität des realen Gebäudes und die Charakteristik der Anregung hinsichtlich Kohärenz, Breitbandigkeit und pegelbestimmender Frequenzanteile.

Aus der geringen Sensitivität der Ergebnisse gegenüber einer Variation der Impedanzverhältnisse legitimiert sich die Beschränkung der Parametervariation auf die wichtigste Einflussgröße, das Steifigkeitsverhältnis  $EI_{St} / EI_D$ . Da in Abhängigkeit von  $EI_{St} / EI_D$  bereits unterschiedliche Verhältnisse von Bauteil-Eigenfrequen-

zen untersucht werden, können weitere Änderungen der Modellgeometrie (z.B. Spannweiten, Stützenhöhe) unterbleiben.

Insgesamt kann hinsichtlich einer befürchteten Schwingungsübertragung über Stützenbiegung nur die folgende, praktische Empfehlung gegeben werden:

- Im niederfrequenten, quasistatisch dominierten Bereich wird eine nennenswerte Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung insgesamt selten auftreten. Bei „normalen“ Bauteilquerschnitten sollte der durch Biegung übertragene Schwingungsanteil im Summenpegel üblicherweise bei < 20% liegen.
- Auch in der ersten Deckeneigenfrequenz wird der Biegeanteil in Relation zur großen vertikalen Schwingungsüberhöhung gering ausfallen.
- Maßgebende Schwingungsanteile können – zumindest unter Vernachlässigung der ausmittelnden Wirkung der Fundamentierung bei Stützen-Biegeresonanz übertragen werden.
- Dieser Fall wird von großen Stützenimpedanzen (Drehimpedanzen) gegenüber geringen Deckenimpedanzen begünstigt – also beispielsweise bei einer in ein großes Industriegebäude eingehängten Bürosperre, wobei eine ausreichende Stützeinspannung (evtl. durch Ortbeton) vorliegen muss.
- Die kritischen Frequenzbereiche werden aufgrund niedriger beteiligter Massen und großer Steifigkeiten im Vergleich zu üblichen Deckeneigenfrequenzen relativ hoch liegen. Bei diesen Frequenzen wäre die in beiden Anregungsfällen abmildernde Wirkung der Gebäudefundamentierung zu beachten.
- Für eine praktische Beurteilung fehlt eine Gewichtung der Übertragungsverhältnisse mit einer typischen spektralen Verteilung. Typisch für Bahnmmissionen ist eine Abnahme der Erschütterungen zu hohen Frequenzen hin. Die Bewertung von Erschütterungen erstreckt sich i.d.R. sogar nur bis 80 Hz /8/. Dies entschärft die Gefahr einer nennenswerten Biegeübertragung für die Erschütterungsimmissionen, jedoch nicht für den sekundären Luftschall, da dieser über die A-Bewertung des Signals eine starke Abminderung bei tiefen Frequenzen – entsprechend einer relativen Verstärkung der höheren Frequenzanteile – erfährt.
- Die übliche Beurteilung des Sekundärluftschalls erfolgt im Frequenzbereich zwischen 20 Hz und 315 Hz. Nach /29/ ist sogar bereits bei Frequenzen oberhalb von ca. 100 Hz der Sekundärluftschall bei Bahnerschütterungen vernachlässigbar. Diese Grenzen für den Sekundärluftschall müssen sicherlich jedoch mit Vorsicht betrachtet werden und können bei außergewöhnlichen Aufgabenstellungen (z.B. Tunnelbohrmaschine) gänzlich unzureichend sein. Je nach betroffenem Frequenzbereich kann eine nennenswerte Übertragung durch Stützenbiegung nicht nur nicht ausgeschlossen werden, sondern muss für den Frequenzbereich ca. > 100 Hz sogar als gleichwertig zur vertikalen Übertragung angesehen werden.

Mit dem in diesem Abschnitt vorgestellten, ebenen Gebäudemodell können bei einfacher Handhabung Gebäude in vollständiger Kopplung zwischen Decken und Stützen, Dehn- und Biegesteifigkeiten untersucht werden. Für die Modellierung eines Skelettbaus mit typischen 3-dimensionalen Eigenschaften (Deckenbreite  $\neq$  Stützenbreite) kann am Kopplungspunkt Decke – Stütze leicht eine Kontaktnachgiebigkeit zwischengeschaltet werden. Diese kann vorab mit ingenieurmäßiger Abschätzung oder einer FE-Substruktur ermittelt werden (vgl. z.B. Abschnitt 5.1).

## 7 Messungen und Modellverifikation

Dynamische Messungen dienen u.a. der Modellverifizierung. Es hat sich in ca. 10 Jahren beruflicher Praxis auf diesem Gebiet gezeigt, dass selbst bei mechanisch klaren Strukturen und vermeintlich gut erfassbaren Aufgabenstellungen belastbare Messergebnisse unverzichtbar oder zumindest sehr wertvoll sind. Dies hatte im Wesentlichen folgende Gründe:

- Beschaffung gesicherter Eingangsdaten
- z.T. hohe Sensitivität der Rechenmodelle auf spezielle Eingangsparameter (z.B. bei schmalbandiger Anregung)
- geringe Kenntnis der Dämpfungseigenschaften
- Vernachlässigung von 3-D Effekten in der Modellierung, z.B. Abstrahldämpfung quer zur Wellenausbreitungsrichtung, ungenaue Kenntnis von Phasenlage und Wellenausbreitungsrichtungen

In diesem Abschnitt wird neben der Vorstellung konkreter Messergebnisse die praktische Umsetzung der vorgestellten Rechenmodelle in Zusammenhang mit den zur Verfügung stehenden Auswertemethoden angesprochen. Es werden hier u.a. Fragestellungen bzgl. des gewählten Frequenzrasters (insb. des Terzrasters) behandelt, wie auch Einflüsse der Filterung und Behandlung von Messdaten. Dieser Abschnitt kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben – er kann jedoch dazu dienen, hinsichtlich typischer Fehlermöglichkeiten zu sensibilisieren.

Anmerkung:

Für gute Lesbarkeit wird im Folgenden teilweise nicht explizit zwischen gemessenen und errechneten Größen unterschieden. Es wird zwischen „Schmalband“ und „Terzband“ unterschieden, wobei anstelle der Terzauflösung natürlich sinngemäß auch andere relative Bandbreiten (v.a. Oktav-, 1/12-Oktav) gemeint sind.

### 7.1 Rasterung, Skalierung und Filterung

#### 7.1.1 Abszisse (Frequenz- / Wellenzahlachse)

Die vorgestellten Modellierungen arbeiten weitestgehend im transformierten Raum, d.h. je nach Transformation der Zeit- bzw. Ortsabhängigkeit im Frequenz- bzw. Wellenzahlraum.

Zur Verfügung stehen hinsichtlich der Auflösung der Abszisse

- die konstante Bandbreite (z.B. Schmalband)
- die relative Bandbreite (z.B. Terzband<sup>25</sup>)

Die wesentlichen Vor- und Nachteile liegen auf der Hand: Dem exakten Phasenbezug und damit dem Vorteil der Rücktransformations-Möglichkeit im (komplexen) Schmalband steht eine physikalisch sinnvollere Auflösung im Terzband gegenüber.

So interessiert beispielsweise der Frequenzbereich zwischen 10 Hz und 16 Hz (2 Terzen) i.d.R. mehr als der Bereich von 110 Hz bis 116 Hz (Bruchteil einer Terz, jedoch gleicher absoluter Frequenzabstand). Der Frequenzbereich gleicher relativer Größe von 100 Hz bis 160 Hz (2 Terzen) besitzt hingegen mechanisch die gleiche Bedeutung, da sich z.B. Überhöhungsfunktionen in gleicher Form darstellen.

---

<sup>25</sup> bzw. Oktav-, 1/12-Oktav-, 1/24-Oktav- Auflösung sinngemäß

Da das Ziel der allermeisten baulynamischen Untersuchungen ein auf einen Blick interpretierbares Ergebnis bei Unterstellung einer gewissen Breitbandigkeit der Anregung sein dürfte, ist eine Ergebnisdarstellung im Terzband sehr vorteilig.

Andererseits arbeiten die hier vorgestellten Rechenmodelle mit Transformationstechniken und enthalten die korrekte Phasenlage, sodass für die Modellierungen ein Schmalbandraster unverzichtbar ist.

Es stellt sich somit die Frage nach dem günstigsten Zeitpunkt des Überganges vom Schmalband ins Terzraster. In der Praxis haben sich folgende Ablaufschema bewährt:

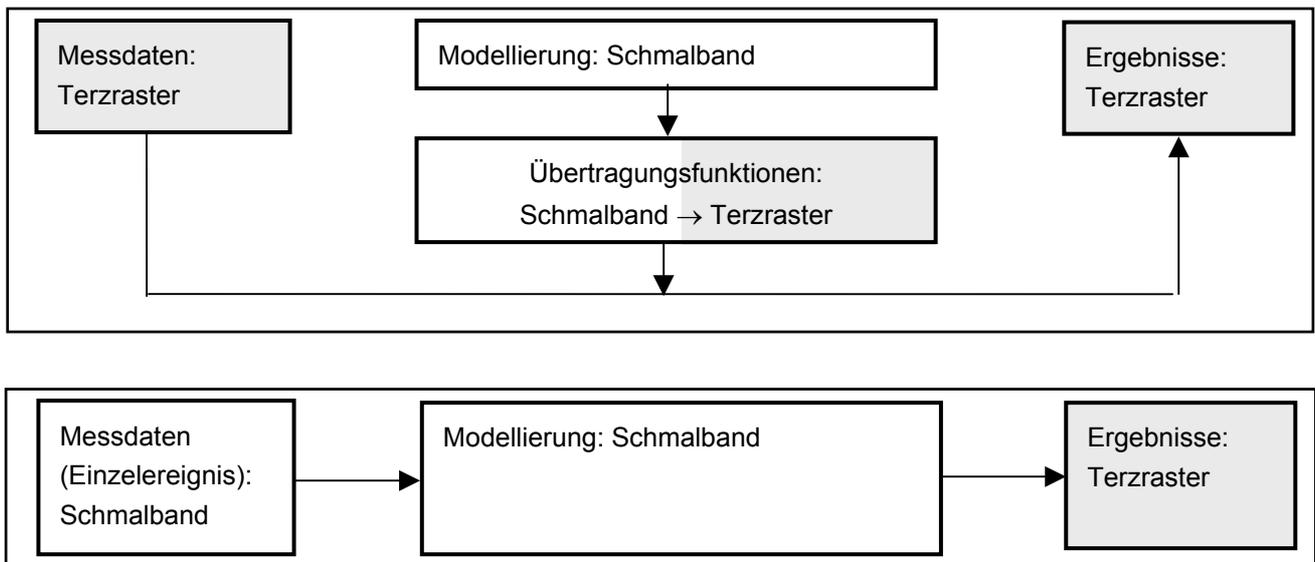


Abb. 7.1: Gewähltes Frequenzraster (Terzraster stellvertretend für relative Bandbreite)

Als weitere Variante bietet sich noch eine Modellierung vollständig im Terzraster an, solange keine Transformationen ausgeführt werden. Dies hat den Vorteil guter Interpretierbarkeit bereits im Modellierungsbereich, da hier die Information in wenigen übersichtlichen Datenpunkten enthalten ist.

Die Rechenzeiten verkürzen sich zudem bei Terzauflösung wesentlich: Bei einer Auswertung im Sekundärluftschallbereich bis 315 Hz ergibt sich z.B. bei einer gewählten Messdauer von 10 Sek. ohne weitere Datenreduktion bereits die Notwendigkeit eines Frequenzvektors mit über 3000 Werten, im Terzband wären es ca. 30 Werte (1 Hz – 1000 Hz).

Der vorliegende Abschnitt kann als Plädoyer für eine weitestgehende Auswertung und Modellierung im Terzraster verstanden werden. Es muss jedoch vor den nachfolgenden prinzipiellen Unzulänglichkeiten gewarnt werden, unterschieden nach den Einsatzbereichen Messauswertung und Modellierung. Kritisch ist jeweils der Fall einer Systemresonanz zwischen den Terzmittenfrequenzen, die daher vom Terzraster schlecht erfasst wird:

Terzraster bei der Messauswertung	Terzraster in der Modellierung
<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Die gemessene Schwinggröße verteilt sich auf die beiden angrenzenden Terzen.</li> <li>➤ Energetische Summe korrekt</li> <li>➤ Einzelwerte je Terz Wurzel (2) niedriger als beim Treffen der Terzmittenfrequenz (<math>\approx 70\%</math>).</li> <li>➤ Bei nachfolgenden Rechenoperationen mit einem auf Terzmittenfrequenzen korrekt ausgerichteten Modell (maximale Überhöhungen in die Terzmitte geschoben) ergibt sich ein Fehler von 0% bis -30%</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Die Berechnung in Terzmitte trifft die jeweilige Eigenfrequenz nicht</li> <li>➤ Die maximale Überhöhung wird abgeschnitten</li> <li>➤ Je geringer die Dämpfung, desto größer der Fehler</li> </ul>
<b>Bewertung: Relativ unkritisch</b>	<b>Bewertung: Kritisch</b>

Tabelle 7.1: Beurteilung Fehleranfälligkeit Terzraster

Siehe hierzu folgende (nicht normgerechte) Darstellung:

a) Eigenfrequenz EMS trifft Terzmittenfrequenz

b) Eigenfrequenz EMS zwischen 2 Terzen

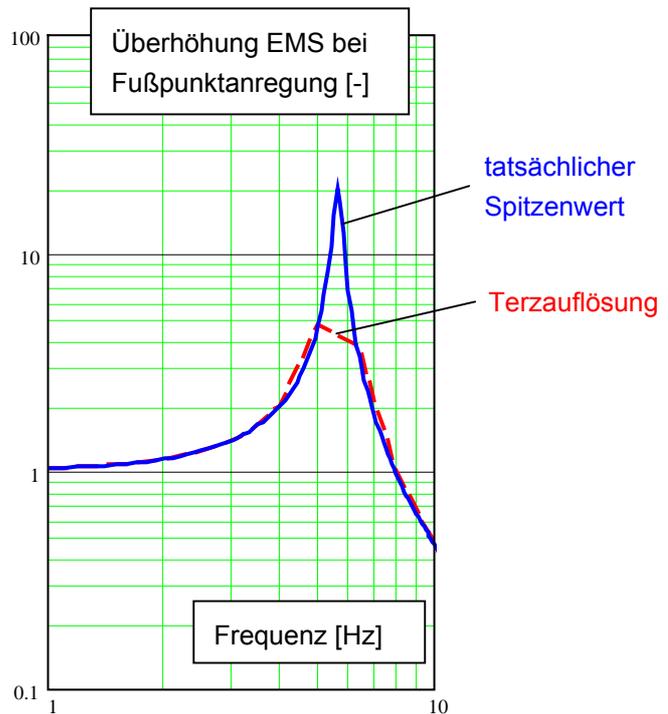
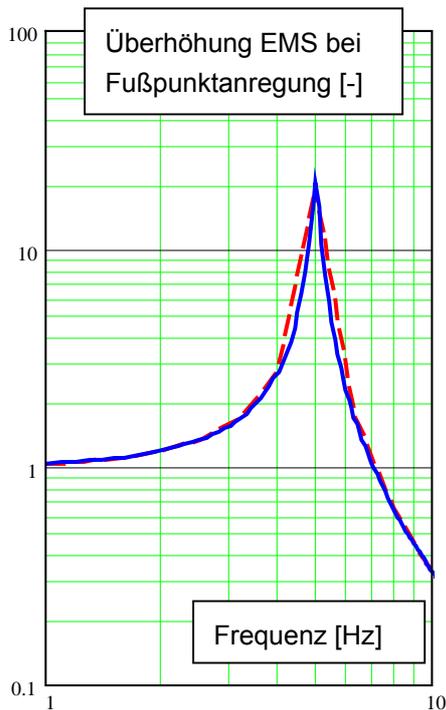


Abb. 7.2: Exemplarischer Fehler bei Berechnung im Terzraster

Im Beispielfall einer 5% - Materialdämpfung ergibt sich im rechten Diagramm ein Überhöhungsfehler von 4,2. Die gestrichelte Linie (Terzraster) ist im dargestellten worst case (rechte Abb.) weitgehend unabhängig von der Dämpfung, sodass sich für kleine Dämpfungen von  $\eta < 10\%$  der maximale Überhöhungsfehlers als Faktor grob abschätzen lässt:

$$\Delta \text{ Terz} = \frac{1}{1 + 1,5 \frac{10[\%]}{\eta[\%]}} \quad (\text{Multiplikator auf harmonische Resonanzüberhöhung}) \quad (7.1)$$

Es ist bei der Einstellung von Gebäudeeigenfrequenzen darauf zu achten, dass die korrekte Überhöhung erreicht wird. Bei Mehrkörpermodellen kann dies u.U. schwierig sein. Ist hierfür ein zu großer Aufwand notwendig, kann evtl. das Frequenzraster verfeinert werden:

- Im 1/12-Oktav-Raster liegt der Fehler bei einer Dämpfung von  $\eta < 5\%$  noch bei maximal 33% (- 33%),
- im 1/24-Oktav Raster bei Faktor 0,87, d.h. der Fehler liegt bei weniger als 13% (-13%).

*Hinweis: Die angegebene Fehlerabschätzung beruht auf eigenen Betrachtungen und Berechnungen.*

### 7.1.2 Ordinate: Messgröße a, v oder w, Zeit- und Frequenzbewertungen

Ähnlich wie in der Akustik ist bei Körperschallmessungen eine Filterung im Zeitbereich üblich. Im Allgemeinen wird unter gleitender Integration mit einer e-Funktion der gewünschten Steilheit bei der Effektivwertbildung eine Art „Vergessenskurve“ aufgebracht. Werte, die bereits lange her sind werden weniger stark gewichtet als unmittelbar zuvor Geschehenes. Je kürzer die sog. Zeitkonstante der e-Funktion, desto stärker reagiert das Ergebnis (der bewertete Pegel) auf Schwankungen im gemessenen Zeitverlauf.

Für harmonische Signale ist dies weitgehend ohne Belang. Da jedoch sehr häufig zeitlich variierende (transiente) Signale zu verarbeiten sind, werden häufig die nachfolgend genannten Zeitbewertungen verwendet:

- FAST Bewertung.:  $\tau = 0,125$  Sekunden
- SLOW Bewertung.:  $\tau = 1$  Sekunde
- Leq Bewertung.: Ohne Zeitbewertung
- (Peak- und Impulsbewertungen i.d.R. aus verarbeitungstechnischen Gründen mit unterschiedlichen Anstiegssteilheiten in pos. und neg. Zeitrichtung)

Die energetische Integration eines FAST-, SLOW- oder Leq- bewerteten Signales über die Einwirkzeit liefert stets den gleichen Energiegehalt bzw. damit den gleichen Mittelungs- oder Beurteilungspegel (= Maß für die einwirkende Schwingungsdosis).

Die FAST Bewertung harmoniert bzgl. ihrer Filterwirkung am besten mit dem menschlichen Fühlvermögen und wird daher u.A. zur Bildung von KB-Werten (Maß für die gefühlte Schwingstärke) herangezogen. Auch in der Maschinen- und Baudynamik wird diese Zeitbewertung häufig verwendet.

Die Zeitkonstante der Filterung sollte vom mechanischen Standpunkt her zur Systemdämpfung passen, damit kurzfristige transiente Signale schwächer gewichtet werden als harmonische Signale, da mit Ersteren geringere Überhöhungsfaktoren erzielt werden. Eine Filterung mit der Einstellung „FAST“ entspricht bei transienten Signalen der Verringerung des Resonanzgrades. Da immer mit der gleichen Zeitkonstante gearbeitet wird, ist die Genauigkeit dieser Vorgehensweise niedrig. Sie kann nur für einen einzigen Dämpfungsgrad exakt gelten.

### 7.1.3 Transiente Signale in der Modellierung

Für die Verarbeitung transienter Signale bietet sich eine der folgenden Vorgehensweisen an:

- Direkte Verarbeitung der Messsignale: Transformation in den Bildraum, phasenechte Berechnung im Schmalband (komplex), Rücktransformation in den Originalraum oder Terzbildung im Bildraum
- Modellierung im Terzraster, Berücksichtigung der Transienz der Signale in Abhängigkeit der auftretenden Wellen-Anzahlen der auf- und abklingenden Signale, z.B. über /21/, mittels eines „Transienz-Vektors“ oder nachfolgender Überschlagsformel (auf eigenen Überlegungen beruhend)

Wird nicht die im Allgemeinen auf- und abklingende Charakteristik der Wellenzüge berücksichtigt, sondern mit konstanten Wellenhöhen gemäß des nachfolgenden Beispiels gerechnet,

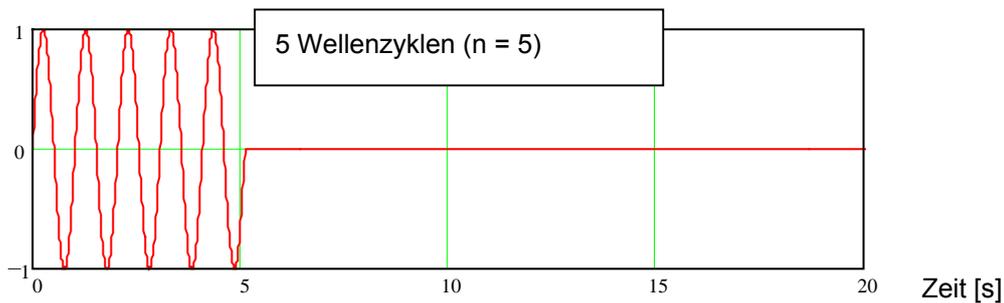


Abb. 7.3: Idealisierte transiente Last

lässt sich der Einschwingvorgang in der Eigenfrequenz eines EMS in Abhängigkeit der Systemdämpfung wie folgt beschreiben:

$$w(n) = \frac{1}{\eta} \left( 1 - e^{-\eta n \pi} \right) \quad (7.2)$$

$n$  = Anzahl Wellenzyklen

$\eta$  = Materialdämpfung

Es ergibt sich ein Aufklingverhalten, das dem im transformierten Raum ermittelten Aufklingvorgang hinsichtlich des Betrages entspricht:

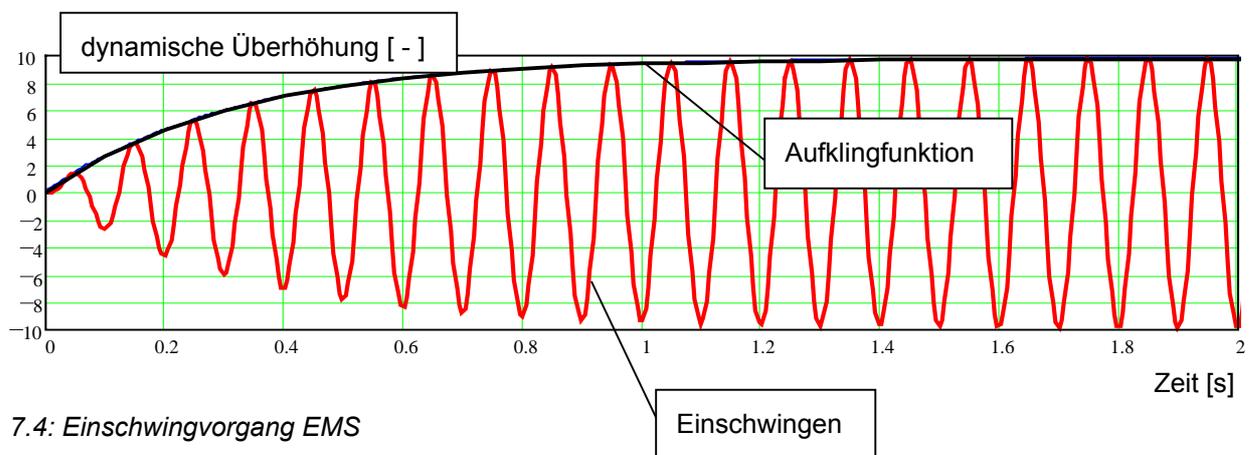


Abb. 7.4: Einschwingvorgang EMS

Für MDOF-Systeme sind die Einschwingvorgänge entsprechend ihrer Eigenformentwicklung zu überlagern. Für die praktische Anwendung genügt jedoch die Einführung eines sog. „Transienz-faktors“ für jede auszu-

wertende Terzmittenfrequenz nach obenstehender Gleichung oder  $/21/$ , solange im gesamten Gebäudemodell annähernd die gleichen Dämpfungswerte angesetzt werden.

Je zufälliger das Eingangssignal ist, desto schlechter lässt sich – z.B. nach Terzfilterung gemessener Zeitverläufe – ein Transienzfaktor abschätzen. Wird in solchen Fällen vereinfachend mit FAST-bewerteten Eingangsspektren gerechnet, sind noch weitere Eigenschaften dieser Bewertung zu berücksichtigen:

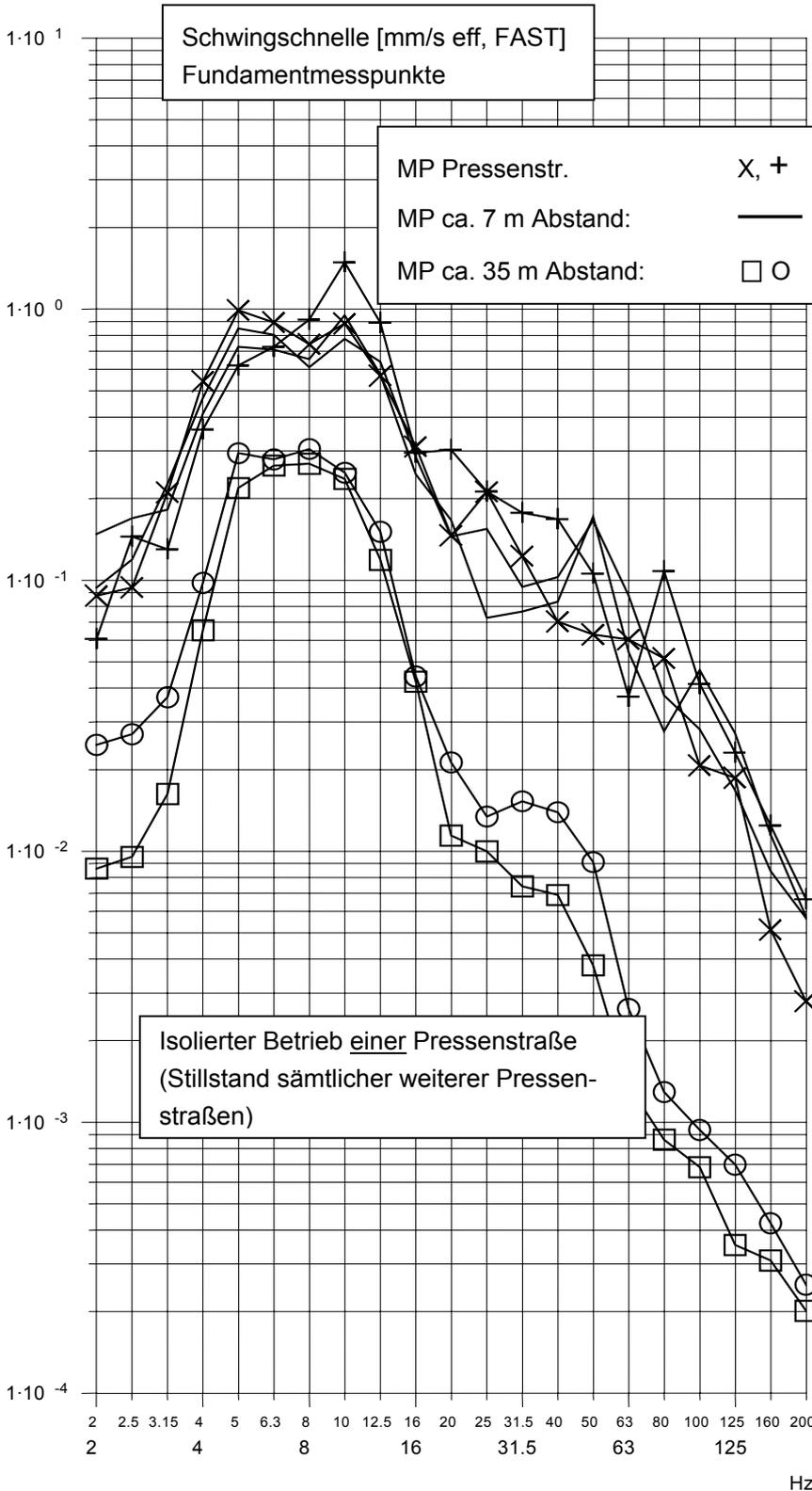
- Bei sehr tiefen Frequenzen („Fenster“ der gleitenden e-Funktion klein gegenüber Wellenlänge) entspricht der gleitende Effektivwert in etwa dem Maximalwert, da über den relativ gesehen kurzen Integrationsbereich die Messwerte näherungsweise konstant sind.
- Da die Form der gleitenden e-Funktion stets gleich ist, erfolgt für höherfrequente kurzweilige Signale eine größere Abschwächung (stärkere Ausmittelung über den Integrationsbereich) als für niederfrequente Signalanteile.
- Die Frequenz-Charakteristik der FAST-Bewertung passt daher besser zu einem viskosen als zu einem hysteretischen Dämpfungsverhalten.

Anmerkung: Da bei  $Leq$  Spektren der Bezug zur zeitlichen Veränderlichkeit des Messsignals innerhalb des Auswertzeitraumes vollständig verloren geht, sind diese Spektren aus baumechanischer Sicht nur zur Bildung von Übertragungsfunktionen geeignet. Die zeitliche Charakteristik der Messsignale zweier Messpunkte ist hierbei, abgesehen von einer zeitlichen Streckung durch Resonanzerscheinungen, ähnlich. Die Übertragungsfunktion kann daher über das zeitliche Mittel ( $eq = equal$ ) gebildet werden.

## 7.2 Messungen an Fundamenten und in Gebäuden

### 7.2.1 Wellenausbreitung in Bodenplatten

Nachfolgend wurden Messergebnisse von Karosserie-Pressen auf erdberührten Bodenplatten abgedruckt.



Die in Betrieb befindliche Pressenstraße emittiert als Linie einzelner Punktquellen. (= 1. Messpunktreihe)

2. Messpunktreihe in geringem Abstand (ca. 7 m)

3. Messpunktreihe in größerem Abstand (ca. 35 m)

Die Abnahme der Erschütterungen mit der Entfernung erfolgt über die Bodenplatte(n) hinweg bei allen Frequenzen in fast einheitlichem Maß.

Die Koinzidenzfrequenz wäre im Bereich von 10 Hz zu erwarten, bei einer angenommenen Versteifung des Untergrundes mit (allerdings geringer) Gründungstiefe kann von ca. 12,5 Hz – max. 20 Hz ausgegangen werden.

Gemäß theoretischer Betrachtungen nehmen ab einer Frequenz von ca. 12,5 Hz die Erschütterungen stetig ab, da der Einfluss der hysteretischen Bodendämpfung zu höheren Frequenzen hin anwächst.

Im niederfrequenten Bereich < 4 Hz lässt die Wellenleitfähigkeit des Untergrundes (vermutlich aufgrund schichtweiser Steifigkeitszunahme) deutlich nach – in diesem Frequenzbereich fällt die Amplitudenabnahme bei beinahe quasistatischer Reaktion größer aus.

Abb. 7.5: Messergebnisse Bodenplatte Presswerk

Die üblichen Transmissionsformeln für Oberflächenwellen lassen sich auf Messergebnisse i.d.R. gut anpassen (geometrische Dämpfung, Materialdämpfung), sofern die Materialdämpfung etwas höher, als in den einschlägigen Literaturquellen angegeben, gewählt wird. Die Abnahme normierter Schwingschnellen erfolgt bei erdberührten Bodenplatten über einen weiten Frequenzbereich ohne Auffälligkeiten. Falls sich ein bei einzelnen Frequenzen stark schwankendes Abnahmeverhalten findet, kann dies an unterschiedlich überlagerten Quellencharakteristiken und Ausbreitungsrichtungen liegen, z.B. Überlagerung einer Punkt- und einer Linienquelle.

Weiterhin (o. Abb.) finden sich bei einer Vielzahl durchgeführter Pressenmessungen im Bereich einer vermuteten Koinzidenzfrequenz

- weder auffällig hohe Emissionswerte, die eine verringerte Eingangsimpedanz vermuten ließen,
- noch Einbrüche in der Übertragungsfunktion.

Fazit: Es ist zu vermuten, dass die Effekte einer Spuranpassung zwischen Boden und Fundamentplatte bei den in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungen vernachlässigt werden können.

Die Wellenleitfähigkeit des Bodens und die damit einhergehende Erschütterungsabnahme muss hingegen lastseitig berücksichtigt werden.

### 7.2.2 Erschütterungsschutzwirkung einer starken Flachgründung

#### Vergleich Modellierung / Messdaten

Die ursprüngliche Motivation dieser Arbeit war ein praktischer Anwendungsfall: Aus Gründen des Schutzes vor Pressenerschütterungen stand der Vorschlag im Raum, die flachgegründete Bodenplatte (BPL) eines Gebäudes deutlich stärker auszuführen, als nach statischen Gesichtspunkten erforderlich. Diese Maßnahme wird vom Bauherrn häufig gerne angenommen, da – zu einem üblicherweise späten Planungszeitpunkt – kaum Änderungen an der Gebäudekonstruktion erforderlich sind. Bei der Dimensionierung der Maßnahme wurde jedoch festgestellt, dass die zu Verfügung stehenden Berechnungswerkzeuge unzureichend sind, bzw. die errechnete Erschütterungsreduktion nicht mit ausreichender Sicherheit prognostiziert werden konnte.

Die extrem verstärkte Flachgründung wurde für eines von zwei aneinander grenzenden Gebäuden gemäß den damaligen Prognosen ausgeführt und die Gebäude im rohbaufertigen Zustand nachgemessen. Es stehen somit Messergebnisse zur Verfügung, die für Gebäude in einer sehr ähnlichen Situation eine vergleichende Betrachtung hinsichtlich ihrer Bodenplattenstärken erlauben (Auszug aus den Messergebnissen enthalten in Anhang 7.1).

Abweichungen von der idealisierten Situation zweier unterschiedlich starker Bodenplatten unter gleichen Randbedingungen:

- Gebäudegröße und damit Länge der Bodenplatten unterschiedlich
- Gebäudehöhe, Anschlussimpedanzen der Stützen hinsichtlich Größe und Frequenzbereich unterschiedlich

Hinsichtlich der Erschütterungssituation vor der Baumaßnahme bestehen lediglich sehr geringe Abweichungen. Messungen im Freifeld stehen diesbezüglich zur Verfügung (ohne Abb. / Anhang).

Es wurde nun – ca. 6 Jahre nach den damals durchgeführten Berechnungen – eine „Blindprognose“ mit den damaligen Eingangswerten (nach Planunterlagen bzw. Messergebnissen bzgl. Wellenausbreitungsgeschwindigkeit) durchgeführt. Es erfolgte keinerlei Anpassung von Parametern mit einer Ausnahme:

- Korrektur der Plattenstärke auf einen mittleren Wert von 1,7 m gegenüber dem groben Wert der Erstdimensionierung 2,0 m. (Die verstärkte Bodenplatte hat unterschiedliche Dicken zwischen 1,6 m und ca. 2,0 m, Schwächungen durch Kabelkanäle, etc)

Verglichen wurden folgende 2 Fälle:

- A) Gebäude „FORUM“, verstärkte Bodenplatte, relativ hohes Gebäude (ca. 4 Vollgeschosse, große Geschosshöhen), von oben abgehängte äußere Gebäudebereiche, niedrige 1. vertikale Eigenfrequenz
- B) Gebäude „RIEGEL“, Anbau des Forums, konventionelle Gründung, rel. niedriges Gebäude (ca. 3 Vollgeschosse, normale Geschosshöhen, höhere erste vertikale Eigenfrequenz)

Anmerkung: Gründungstiefen vergleichbar (Tiefpaterre zzgl. erhöhter Stärke BPL bzw. unterkellert)

Datenbasis:

- Messdaten: Auswahl der maßgebenden Betriebszustände<sup>26</sup> mit hohen Pegeln, Mittelung über diese Betriebszustände am jeweiligen Messpunkt der BPL von Geb. A) und B)
- Mittelung der Berechnungsergebnisse einer normierten Anregung über sämtliche „Berechnungspunkte“ der Bodenplatten im 5-m Abstand ohne Randmesspunkte (Ausmittlung evtl. zufälligen Eigenverhaltens an den relevanten Punkten)

Es wurde jeweils die „Einfügedämmung“ der starken BPL gegenüber konventioneller Gründung =  $v(A) / v(B)$  berechnet und nachfolgend dargestellt.

Modellierung: Zur Anwendung kam der Biege-/Schubbalken aus Abschnitt 3.3.1 und die modifizierte Winklerbettung nach Abschnitt 4.1, ermittelt mit wellenförmiger Bodenimpedanz nach Abschnitt 4.1.4.

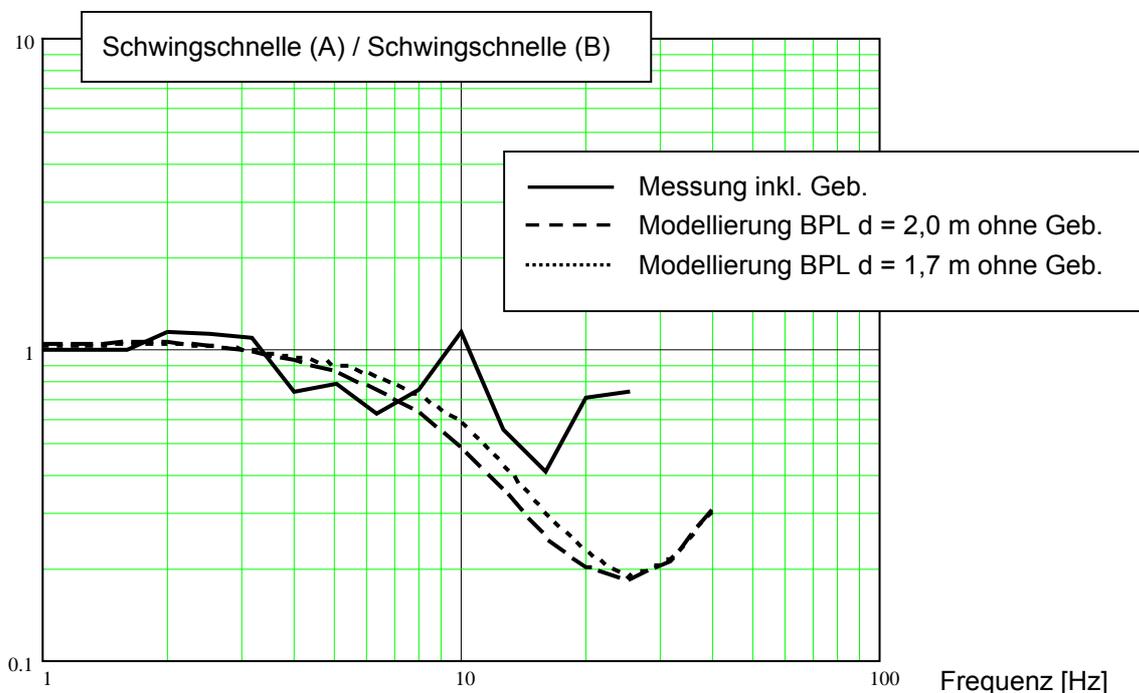


Abb. 7.6: Trendlinie Messung / Berechnung

<sup>26</sup> Für jeden Betriebszustand liegen bereits energetische Mittel mehrerer Einzelmessungen vor

Interpretation: Berücksichtigung o.g. Abweichungen der Praxis von der Modellierung zeigt:

- Tieffrequent evtl. Starrkörpereinflüsse von Gebäude A: bei ca. 2,5 Hz Starrkörperverdrehung auf der Bodenkipfeder
- Einfluss der ersten vertikalen EF: bei 4 Hz Gebäude vertikal inkl. der abgehängten äußeren Stockwerksbereiche, bei 6,3 Hz evtl. 2. vertikal-EF (z.B. Decken gegenphasig zu aufgehenden Gebäudeteilen).
- Gebäude B: 1. EF ohne Boden bei 10 Hz – Das Gebäude (B) tilgt diese Schwingungen, sodass der Fundamentmesspunkt extrem ruhig ist. Im Vergleich hierzu wird das Gebäudefundament A bei 10 Hz nicht oder nur wenig durch die Gebäudeschwingungen beruhigt.
- 12,5 Hz bis 16 Hz: Frequenzbereich ohne Auffälligkeiten
- Ab 20 Hz höhere EF: Der obere Gebäudeteil ist bei A bereits dynamisch abgekoppelt. Hieraus resultierende größere Bewegungen des unteren Gebäudeteils inkl. der BPL führen ab diesem Frequenzbereich zu einem Einbruch der Dämmwirkung (Dämmwirkung basierend auf der vergleichsweise großen Gesamtimpedanz von Gebäude A gegenüber dem Boden).

Wie so häufig konnten auch in diesem Fall die Auswirkungen einer bestimmten Maßnahme nicht isoliert gemessen werden. Hinsichtlich Größenordnung und Frequenzabhängigkeit wurde jedoch mittels der „Blindprognose“ eine gute Übereinstimmung erzielt.

### 7.2.3 Messungen von teilflächig elastisch gelagerten Bodenplatten

In München wurde in Nähe des Hauptbahnhofes der Erschütterungsschutz für einen großen Baukomplex geplant. Die Aufgabenstellung unterschied sich in einigen Punkten wesentlich von der üblichen elastischen Lagerung (= EL) von Gebäuden an Bahnstrecken. Hier sind die mechanisch interessanten Besonderheiten aufgelistet:

- Aufgrund des späten Hinzuziehens eines baulastischen Beraters ergab sich die Lage der EL zwingend unterhalb der flachgegründeten Bodenplatte im Grundwasser
- Sehr große und sehr starke Bodenplatte
- Gebäude: Stützen und Flachdecken, bzgl. der Baukonstruktion mehr einem Industriebau als einem Wohngebäude ähnelnd
- Lage der Emissionsquelle im Schnitt seitlich neben den Untergeschossen (Anhang 7.2, 1. Abb.)
- Überraschende Schichtungen im Aushubbereich – teils entgegen den Angaben des Baugrundgutachtens.

Aus der Größe des Objektes (Gesamtbauvolumen in der Größenordnung von ca. 500 Mio €) resultierte zudem die Forderung nach einer sogenannten teilflächigen EL für 2 Gebäudeteile, bei welcher das Gebäude nur U-Bahn-seitig elastisch gelagert wird, der immissions-abgewandte Teil des Gebäudes jedoch konventionell gegründet wird.

Im wirtschaftlichen Interesse und auf Vorgabe des Bauherrn waren die Auslegungen mit einem sehr knappen „Sicherheitspolster“ vorzunehmen, da die EL einen erheblichen Kostenfaktor darstellt.

Vom baulastischen Berater wurden zur Bearbeitung dieser Aufgabe sehr umfangreiche Messkampagnen und gebäude-dynamische Simulationsberechnungen durchgeführt, sowie ferner die Entwicklung der unterwassertauglichen Lagerelemente beratend begleitet.

Nähere Informationen zu den geometrischen Verhältnissen, Ausführung der Lagerung und Anordnung der Messpunkte finden sich in Anhang 7.2.

Die beiden gemessenen Bodenplatten unterscheiden sich v.a. hinsichtlich ihrer Stärke, des Untergrundes, der Anregung bzw. Anregungscharakteristik (Abstand U-Bahn, Anzahl Tunnelröhren, Oberbauausführung, Weichensituation) und ihrer Höhenlage relativ zur Immissionsquelle.

Die elastische Lagerung wurde in Abhängigkeit der örtlich variierenden Anregungs-Stärke und –Frequenzcharakteristik, sowie in Abhängigkeit von Gebäudekonstruktion und den qualitativen Anforderungen bis in unterschiedliche Entfernungen von der immissionsseitigen Gebäudeaußenkante ausgeführt – im Extremfall bis Ende der Platte, meistens jedoch deutlich weniger weit.

Die Simulationsberechnungen stützten sich hinsichtlich des Gründungssystems weitgehend auf die in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsmethoden, sowohl hinsichtlich des Untergrundes, als auch der angekopplten Flachgründung. Die verwendete Gebäudemodellierung (Stützen, Decken) wurde nicht mit Methoden der vorliegenden Arbeit durchgeführt.

Verwendete Modellierung:

- Formulierung der Bodenplatte als Biege-Schub-Balken abschnittsweise nach der Methode der Finiten Elemente nach Abschnitt 3.3
- Boden: Nachiterierte Winklerbettung mit frequenzabhängiger, ausgerundeter Verformung der Bodenoberfläche nach Abschnitt 4.1.4 unter Anpassung der Bodenparameter an gemessene Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten

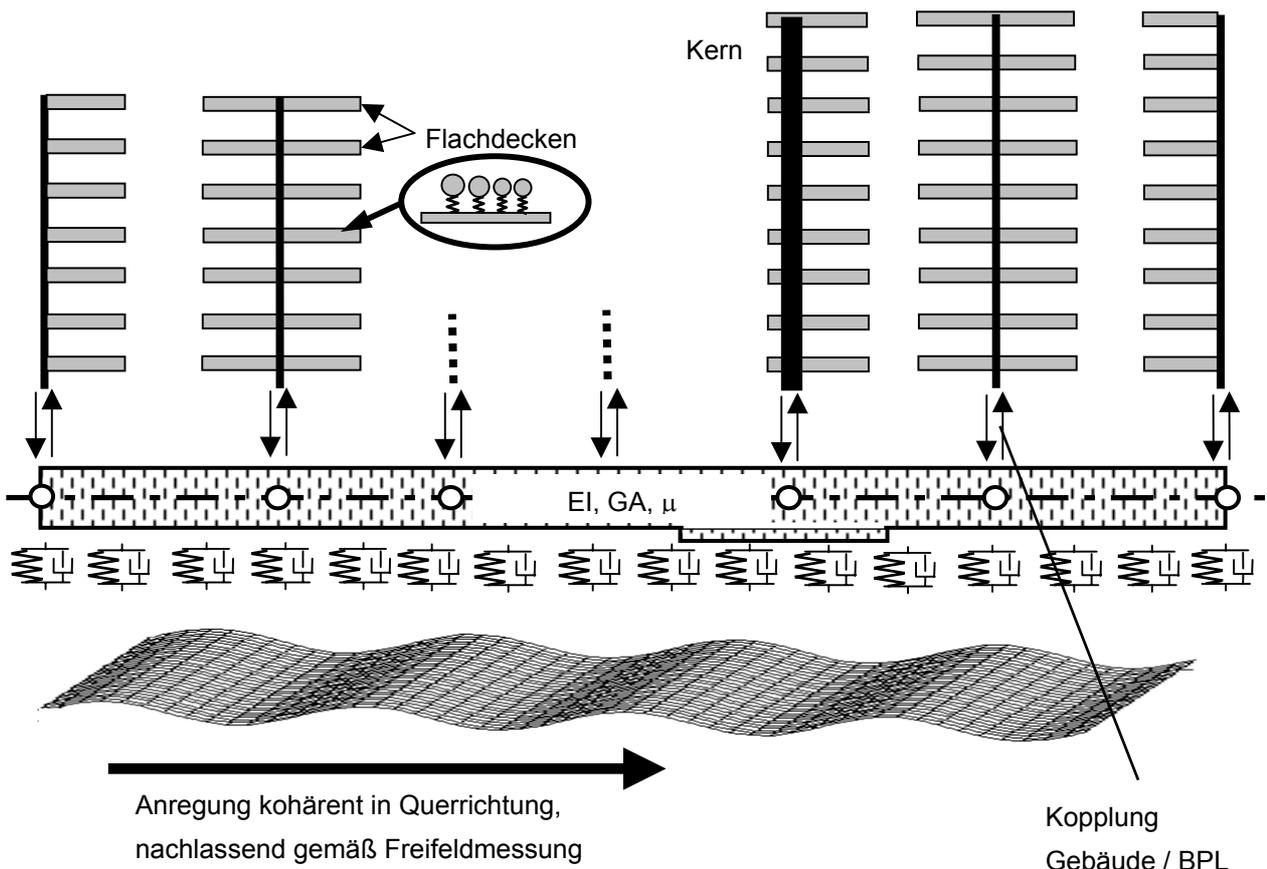


Abb. 7.7: Prinzipskizze Modellierung einer Gebäudespur

Angesetzte bzw. angepasste Größen:

- E-Modul Bodenplatte um ca. 35% höher als DIN-Wert
- Materialdämpfung Bodenplatte mit  $\eta = 20\%$  höher als die reine Materialdämpfung
- Breite der untersuchten Spur: 20 m, frequenzunabhängig
- Detailliertere Anpassung an die flächig erhobenen Messdaten – insbesondere Anpassung der stark frequenzabhängigen Erschütterungsabnahme im Freifeld der Baugrube

Für die beiden Gebäude-Blöcke A und B wurden nachfolgend die Ergebnisse der quer zur Gleisachse verlaufenden Messketten den Modellierungsergebnissen gegenübergestellt. Das Gebäude war zum Messzeitpunkt noch kaum vorhanden (max. 1 Geschoss) – in den Modellierungen wurden die Koppelimpedanzen der aufgehenden Gebäudeteile ausgeschaltet. Die Messpunkte sind über die Gebäudetiefe jeweils in etwa gleich verteilt.

Bodenplatte Block A, Spur 1, Elastische Lagerung (= EL) bis Plattenende (48 m)

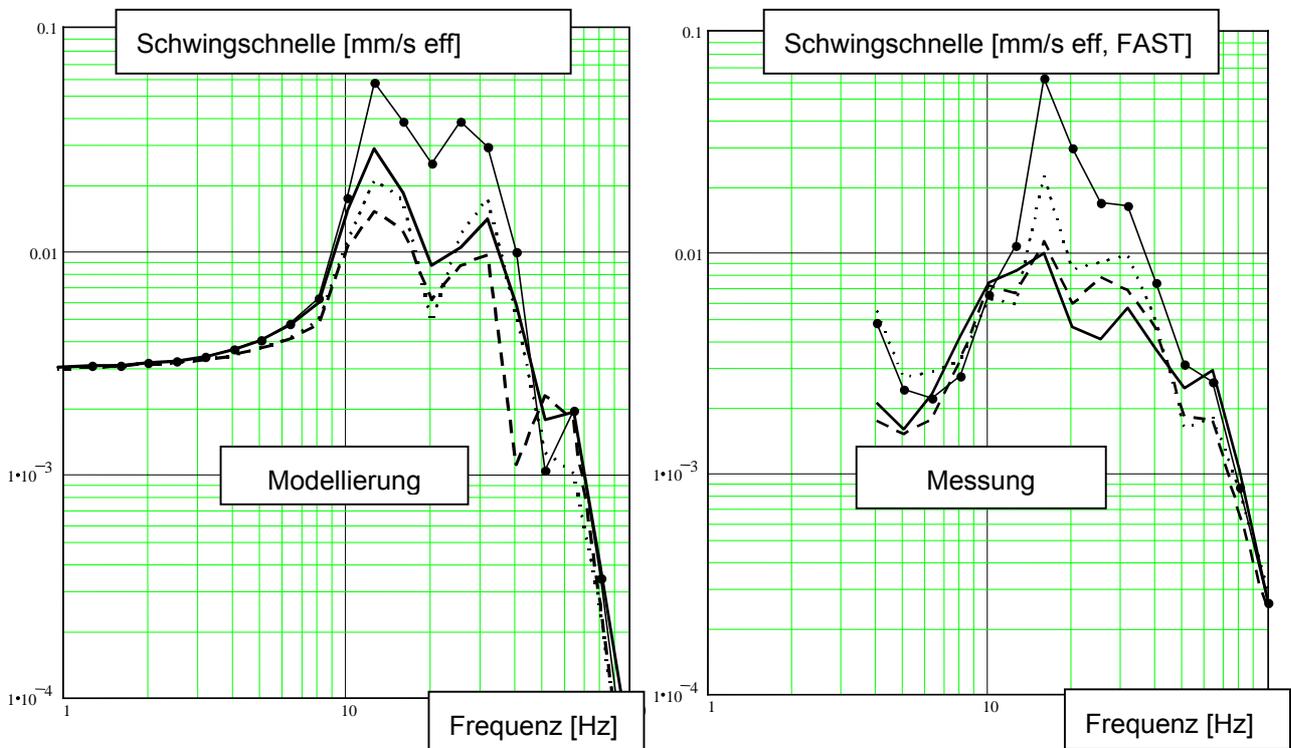


Abb. 7.8: Vgl. Modell - Modellierung

Bauliche Besonderheiten:

- Körperschallbrücke durch Randschalung bei Messpunkt 1
- Schmalere Bereich mit vollflächiger EL (Quereinflüsse)

*Bodenplatte Block A, Spur 2, EL bis ca. 36 m, inkl. verstärkter Platte unter zukünftigem Gebäudekern*

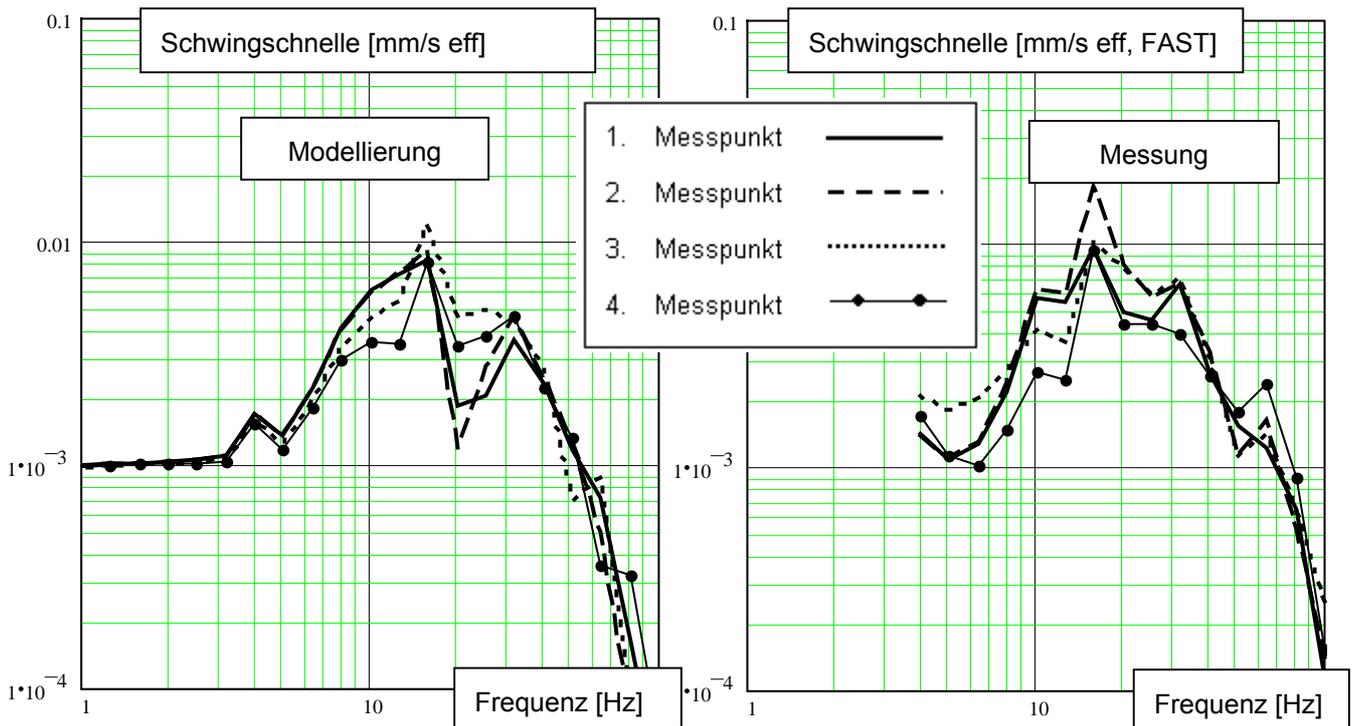


Abb. 7.9: Vgl. Modell - Modellierung

Besonderheiten: unregelmäßiger Verlauf der Bodenplatte (Sprünge in Höhe und Stärke, Vertiefungen für kleinen und großen Gebäudern (Berücksichtigung nur beim großen Kern)

*Bodenplatte Block B, Spur 1, EL Lagerung bis 20/21 m, alle Innenstützen identisch (kein Atrium)*

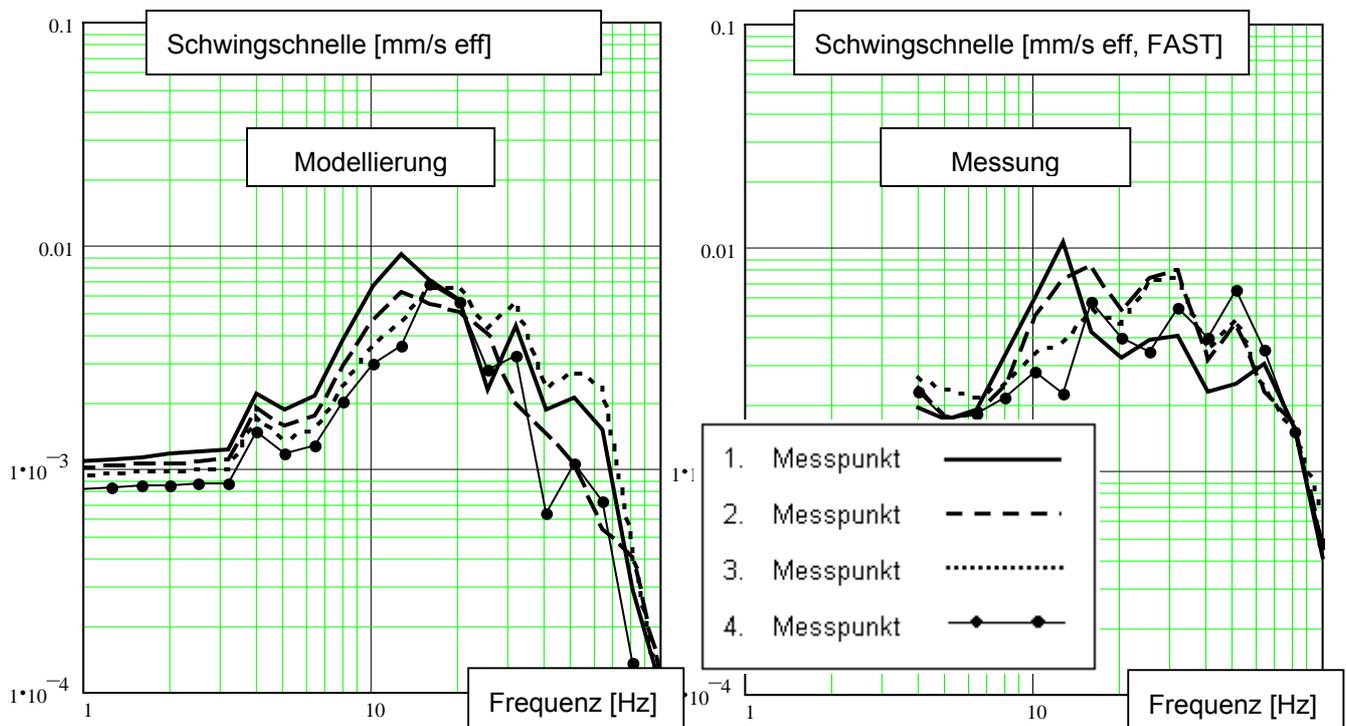


Abb. 7.10: Vgl. Modell - Modellierung

- Störungen durch Pumpen bei ca. 50 Hz am hintersten Messpunkt (Nr. 4)

*Bodenplatte Block B, Spur 3, EL bis 16/17 m, Innenhofbereich*

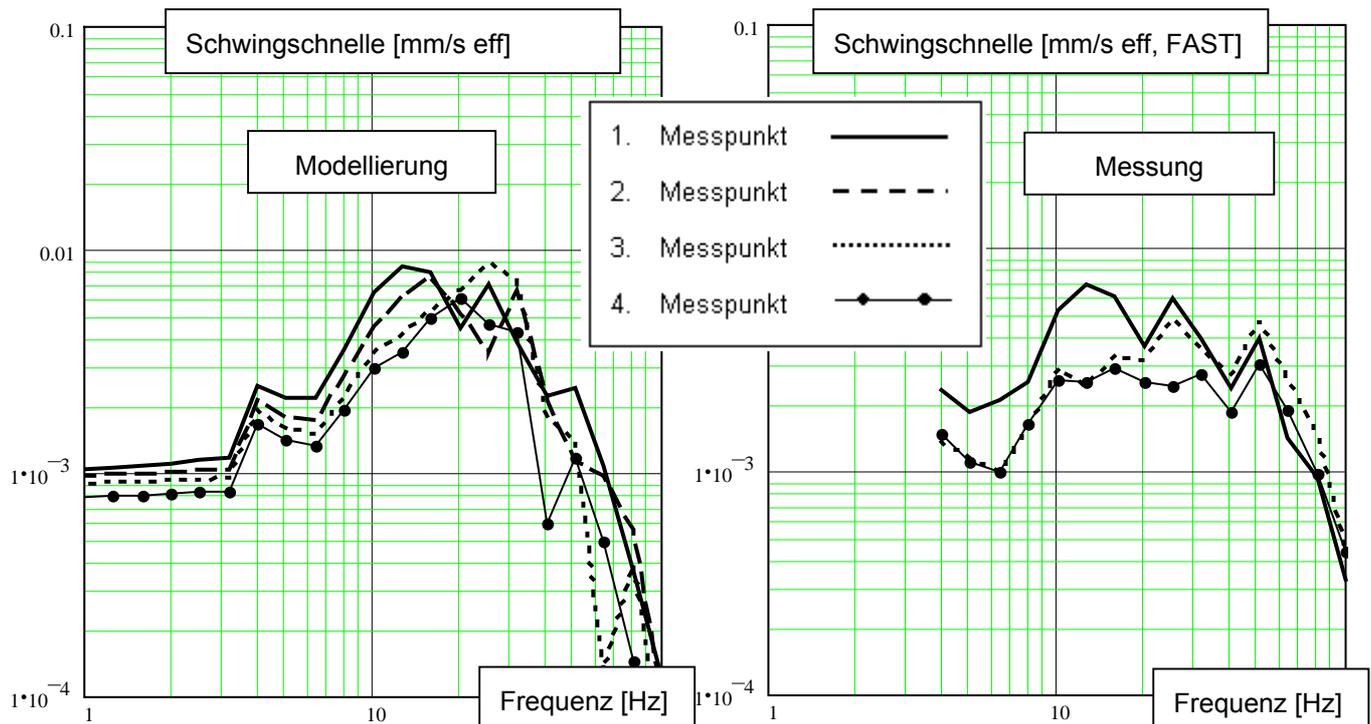


Abb. 7.11: Vgl. Modell - Modellierung

#### Problematik:

Im tieffrequenten Bereich < ca. 8 Hz sind die Messergebnisse vom Grundgeräusch beeinflusst. Es sind kaum tieffrequente Anregungsanteile vorhanden.

Die zeitliche Anregungscharakteristik ist stark unterschiedlich: Nahezu harmonische Anregung durch Radrundheiten (bewegte Quellen), ortsfeste transiente Anregung durch Gleislage, Störstellen und Weichen, weißer Anregungscharakter durch Flachstellen und tieffrequent teilharmonische Anregung durch die Achsgeometrie der Triebzüge.

Bei einer Auswertung im Terzraster ergeben sich so – bedingt durch die mehr oder weniger harmonische Anregung – unterschiedliche maximale Überhöhungsfaktoren in den einzelnen Terzen. Durch bewegte und ortsfeste Quellen, sowie punkt- und linienförmige Quellen kann die Wellenlaufrichtung unterschiedlich sein. Die exakte Wellenlaufrichtung und die Phasenlage benachbarter Bereiche sind daher unbekannt.

Bauliche, nicht quantifizierbare Abweichungen vom modellierten Idealfall (z.B. Körperschallbrücken durch temporäre Schalungen, Spundwandeinfluss) führen zu Abweichungen unbekannter Größe und Ausdehnung.

Unterschiedliche Zugkollektive an verschiedenen Messtagen führen bei 4 sich in unterschiedlichen Höhenlagen kreuzenden Gleisen zu Normierungsproblemen.

Die Messungen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit können trotz frequenzabhängiger und damit wellenlängenabhängiger Betrachtung stets nur die Gesamtwirkung des Bodenpaketes inklusive eines eventuellen Schichtaufbaus widerspiegeln.

➔ Die identifizierten Probleme sind unabhängig von der verwendeten Modellierung.

Beurteilung

- Trotz der Vielzahl nur ungenügend bekannter Eingangsparameter werden wesentliche Effekte (z.B. das Aufklingen der Schwingungen am Plattenende, Block A, Spur 1) abgebildet. Sobald das Platteneigenverhalten beteiligt ist, ergeben sich z.T. erwartungsgemäß Frequenzverschiebungen gegenüber der Realität. Die von laufenden Wellen anregbaren Platteneigenformen sind nicht ausreichend bekannt und können von einem ebenen Modell nur ansatzweise abgebildet werden.
- Die Verwendung von Messdaten in einem möglichst engen Messpunktraster war im dargestellten Anwendungsfall von größter Wichtigkeit. Eine unzureichende Berücksichtigung der frequenzabhängigen Schwingungsabnahme auf dem Baufeld führte in einigen Gebäudebereichen zu sehr großen Abweichungen (in obenstehenden Abbildungen bereits behoben).
- Die Modellierung ist empfindlich gegenüber den ausgewählten „Messpunkten“ im Rechenmodell. Aufgrund stehender Wellen sollte beim Abgriff der Ergebnisgrößen jeweils eine Mittelung über einen Bereich vorgenommen werden.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die Motivation zur vorliegenden Arbeit lag im Wesentlichen in zwei Teilbereichen begründet, die bei der Bearbeitung praktischer baodynamischer Fragestellungen stets zu Unsicherheiten führten:

- A) Erschütterungsreduktion beim Eintrag von Schwingungen in Fundamente, speziell in den Fällen, in welchen die Biegesteifigkeit des Fundamentes zu berücksichtigen ist
- B) Ausbreitung von Schwingungen in Gebäuden in Bezug auf die anzusetzende Abstrahldämpfung auf Geschossdecken, sowie die Erschütterungsübertragung durch Biegeschwingungen der aufgehenden Gebäudeteile

Es stand in Punkto anwendbarer Ersatzmodellierungen bislang im Wesentlichen das nach Eigenformen entwickelte Vertikalmodell für den anteiligen Gebäudeausschnitt einer Stütze zur Verfügung. Die Gründungssteifigkeit wurde i.d.R. für ein entsprechendes starres Ersatzfundament auf homogenem Halbraum ermittelt.

---

Es wurden nun folgende Untersuchungen durchgeführt, um den Einsatzbereich des vorhandenen Ersatzmodells zu erweitern, die Unsicherheiten A) und B) zu reduzieren oder auch, um den Einfluss bislang unberücksichtigter Effekte zu studieren:

Kopplung einer biegeweichen Platte – eigens erstellte komplexe FE-Modellierung – mit dem elastischen isotropen Halbraum (Abschnitt 2) in diskreten Punkten mittels Gaußscher Ansatzfunktionen, die in ihrer Summe den Verlauf der vertikalen Kontaktspannungen zwischen Platte und Boden annähern. Neben der prinzipiellen Vorgehensweise wurde die Sensitivität hinsichtlich der vorzunehmenden Diskretisierungen und Einstellung der Anpassungsparameter untersucht (Abschnitt 3.2)

Auf der Suche nach möglichen Vereinfachungen dieses relativ schwer handhabbaren 3-D-Modells wurden nacheinander folgende Reduktionen durchgeführt, die zu immer einfacheren Modellierungen führten:

- Vernachlässigung Biegenachgiebigkeit quer zur Wellenlaufrichtung:
  - ⇒ FE-Balkenmodellierung (1D) auf Halbraum (3D) als „Balkenmodell“ bezeichnet, Abschnitt 3.3
  - Der Einfluss der Breite wird überschlägig getrennt in Real- und Imaginärteil der Bodensteifigkeiten berücksichtigt.
- Übergang vom Halbraum zur nachiterierten modifizierten Winklerbettung – Nachiteration in Bezug auf die sich ergebende Wellenlänge des gekoppelten Systems – mittels Bestimmung von Ersatzfedern und -Dämpfern für den „wellenförmig“ belasteten Halbraum, Abschnitt 4.1
  - ⇒ kontinuierliches Balkenmodell auf modifizierter Bettung, „Winklermodell“ Abschnitt 4.2
  - ⇒ „Ersatzmodell“ zur Rekonstruktion der dynamischen Gründungssteifigkeiten, Abschnitt 4.3
  - ⇒ „Ersatzformel“, Abschnitt 4.4

Hinsichtlich der jeweils durch die Vereinfachungen eingehandelten Unzulänglichkeiten wurden ergänzende Untersuchungen durchgeführt, die auf die Grenzen der jeweiligen Anwendbarkeit hinweisen. Mittels einer umfangreich angelegten Sensitivitätsstudie konnten wesentliche Einflüsse für die Erstellung der „Ersatzformel“ analysiert und quantifiziert werden; diese kann jedoch „nur“ als Werkzeug zur Abschätzung der dynamischen Gründungssteifigkeiten verstanden werden. Eine einfache und unter bestimmten Abgrenzungen exakte Ersatzformel für die Schwingungsreduktion beim Übergang Freifeld – Fundamentplatte konnte hingegen nicht erstellt werden.

Die Erweiterung der gebäudeseitigen Ersatzmodellierungen konzentrierte sich auf folgende Bereiche:

- Punktgestützte Flachdecken: Ersatzschwingerkennwerte für die ersten symmetrischen und antisymmetrischen Biegeeigenformen (2-D, Abschnitt 5.1).
- 2-feldrige Geschossdecke: Geschlossene Modellierung und Ableitung von Ersatzschwingerkennwerten für das statisch unbestimmte System bei eindimensionaler Betrachtung (Abschnitt 5.2)
- Mehrfeldrige Geschossdecken: Es wurden am einachsigen Modell Untersuchungen unter Fußpunktanregung durch laufende Wellen vorgenommen. Die Last wurde über diskrete Stützstellen eingeleitet. Für den zweidimensionalen Fall stehen nur Messergebnisse (kein Referenzmodell) zur Verfügung. Aus den Untersuchungen ist ersichtlich, dass eine Vielzahl von i.d.R. nicht näher bekannten, messtechnisch schwer zu erhebenden Parametern großen Einfluss auf das Ergebnis hat. Es wurde daher lediglich ein ingenieurmäßiger Vorschlag für die Behandlung derartiger Gebäudestrukturen abgeleitet. Die Anwendung erfordert in der Praxis vielfältige Einschätzungen und evtl. die Festlegung des Umfangs durchzuführender Parameter- und Sensitivitätsstudien.

Bei der Untersuchung der Schwingungsübertragung durch Biegeschwingungen der aufgehenden Bauteile handelt es sich um eine eigenständige neue Modellierung:

- Geschlossene Formulierung für den ebenen Stockwerksrahmen
- Getrennte Betrachtung der vertikal- bzw. der durch Biegung übertragenen Schwingungsanteile und Analyse der zu berücksichtigenden Effekte, sowie der Sensitivität auf die Eingangsgrößen

Alle Untersuchungen wurden hier ohne den Einfluss der Fundamentierung durchgeführt, der separat zu berücksichtigen wäre. Analysiert wurden die maßgebenden Parameterkonstellationen und die Grenzfrequenz, ab welcher die Biegeschwingungsübertragung in Betracht gezogen werden sollte.

Gegen Ende der Arbeit wurde die praktische Umsetzung der vorgestellten Rechenmodelle in Zusammenhang mit den zur Verfügung stehenden Auswertemethoden angesprochen. Es wird hier u.a. auf Fragestellungen und Besonderheiten der Wahl des Frequenzrasters (insb. des Terzrasters) eingegangen sowie Einflüsse der Filterung und Aufbereitung von Messdaten behandelt. Messergebnisse aus der täglichen Praxis werden vorgestellt und mit den in den einzelnen Kapitel vorgestellten Modellierungen verglichen: Wenn die herangezogenen Messergebnisse aufgrund der Vielschichtigkeit der Eingangsdaten zwar nicht dazu dienen können, die Richtigkeit der Modellierungen zu beweisen, so sind sie zumindest dazu geeignet, die Modellierungen trendmäßig zu bestätigen, in einigen Fällen aber auch Unzulänglichkeiten aufzuzeigen und auf das Fehlen idealisierter Situationen in der Praxis hinzuweisen.

Die Anwendung von Ersatzmodellen erfordert ein hohes dynamisches Grundwissen vom Nutzer. Auf bestimmte Parameter können baodynamische Modellierungen allgemein sehr sensitiv reagieren, woraus teils erhebliche Abweichungen resultieren können. Dies gilt auch für die vorgestellten Ersatzmodelle, bei welchen sich jedoch Parameter- und Sensitivitätsstudien transparent und schnell durchführen lassen.

In Hinblick auf die praktische Anwendung wird besonders auf die Streubreiten der Eingangsparameter - gerade der Bodenkenngrößen - hingewiesen. Stammen diese z.B. aus einem für statische Belange erstellten Bodengutachten, ist die größere Steifigkeit des Bodens unter dynamischer Belastung zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollte insbesondere die Bodensteifigkeit in weitem Umfang variiert werden.

Das Thema der vereinfachenden Gebäudemodellierung ist naturgemäß sehr weit gefasst, sodass eine einzelne Arbeit immer nur einen Beitrag in Teilbereichen behandeln kann und nie der Anspruch auf Vollständigkeit erfüllt sein wird. Im vorliegenden Fall basiert die Auswahl der einzelnen vorgestellten Themenbereiche auf den Anforderungen der baodynamischen Beratungspraxis.

---

**Literaturverzeichnis**

- /1/ Auersch, L.: Zur Dynamik einer unendlichen Platte auf dem Halbraum – Fundamentnachgiebigkeit und Wellenfeld. Springer Verlag, Archive of Applied Mechanics 64, p. 346 – 356, 1994.
- /2/ Bathe K.J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag 1990.
- /3/ Breitsamter N.: Ersatzmodelle zur Bestimmung der Schwingungsantwort von Gebäuden unter Anregung durch Bodenerschütterungen. Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik TU-München 1996.
- /4/ Bronstein, Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. 25. Auflage, Nauka Moskau und Teubner 1991.
- /4a/ Boscovic L., Halbraumdynamik nach der Theorie poröser Medien und Einfluss der Horizontalverschiebungsbehinderung unter einem auf dem klassischen Halbraum gebetteten Balken, Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik TU-München, 2007.
- /5/ Clough R.W., Penzien J.: Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill, 2nd edition 1993.
- /6/ Coutagne D., Garcin P.: Das dynamische Verhalten von Flachdecken – FEM und Ersatzmodelle. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Baumechanik der TU-München 1999-06.
- /7/ Cremer L., Heckl M.: Körperschall. 2. Auflage, Springer Verlag 1996.
- /8/ DIN 4150: Erschütterungen im Bauwesen, Teil 2, Einwirkungen auf Menschen in Gebäuden. 1999-06.
- /9/ Eibl J., Häussler-Combe U.: Baudynamik. Ernst & Sohn, Aufsatz, Beton-Kalender 1988.
- /10/ Flesch R., Rutishauser G.: Baudynamische Aspekte bei der Erschütterungsprognose und Maßnahmen zur Schwingungsreduktion. VDI-Berichte 1754, Tagung Kassel, Mai 2003.
- /11/ Gazetas G.: Analysis of machine foundation vibrations. Soil Dynamik and Earthquake Engineering Vol 2, p. 1 – 42, 1983.
- /12/ Graßhoff H.: Die Berechnung elastischer Flächengründungen. Ernst & Sohn, Grundbau-Taschenbuch 1966.
- /13/ Grundmann H.: Baudynamik. Vertiefervorlesung, Lehrstuhl für Baumechanik, TU-München 1997.
- /14/ Haupt W.: Bodendynamik. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1986.
- /15/ Hoffmann, R.: Signalanalyse und –erkennung; eine Einführung für Informationstechniker. Springer-Verlag 1997, ISBN 3-540-63443-6.
- /16/ Irschik H., Heuer R., Ziegler F.: Statics and dynamics of simply supported Reissner-Mindlin plates by analogy. Springer Verlag, Archive of Applied Mechanics, Vol. 70, p. 231 – 244, 2000.
- /16a/ Long C. F., On the completeness of the Lamé Potentials. Acta Mecanica 3, 1967.
- /17/ Kerr A.: Elastic and Viscoelastic Foundation Models. Journal of Applied Mechanics, Vol 31, p. 491 – 498 , Sep. 1964.
- /18/ Klingbeil E.: Tensorrechnung für Ingenieure. BI Wissenschaftsverlag, Hochschultaschenbuch Band 197, 2. Auflage, 1989.
- /19/ Meinhardt Chr., BAM Berlin: Erschütterungsübertragung in Gebäude. VDI-Berichte 1754, Tagung Kassel, 2003-05.

*Fortsetzung Literaturverzeichnis:*

- /19a/ Meinhardt Chr.: Einflussgrößen für das Schwingungsverhalten von Gebäuden zur Prognose von Erschütterungsimmissionen. Dissertation, Fakultät VI – Planen Bauen Umwelt, TU-Berlin 2007-12-17
- /20/ Miller G. F., Pursey H.: The field radiation impedance of mechanical radiators on the surface of a semi-infinite isotropic solid. Proc Royal Society, London, Vol223, p.521-541.
- /21/ Molzberger H.: Dynamische Gebäudemodellierung am Beispiel des Geb. A51 [..]. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Baumechanik der TU-München 1997-11.
- /22/ Molzberger H., Schmitz H., Breitsamter N., Müller-Boruttau F. H.: Teilflächige elastische Gebäudelagerung [..]. VDI-Berichte 1941, Tagung Kassel, 2006-05.
- /23/ Müller G.: Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten. Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik TU-München 1989.
- /24/ Müller G.: Statistical Energy Analysis (SEA). Vertiefervorlesung, Lehrstuhl für Baumechanik, TU-München 1997.
- /25/ Müller H.A., Heckl M.: Taschenbuch der Technischen Akustik. 2. Auflage, Springer-Verlag, 1994.
- /26/ Müller-Boruttau F. H., Molzberger H., Breitsamter N.: Schwingungstilger gegen Erschütterungen aus Pressenbetrieb. VDI-Berichte 1754, Tagung Kassel, 2003- 05.
- /27/ Natke H. G.: Baudynamik – Einführung in die Dynamik mit Anwendungen aus dem Bauwesen. Stuttgart: Teubner 1989.
- /28/ Petersen Chr.: Dynamik der Baukonstruktionen. Vieweg & Sohn Braunschweig, Wiesbaden, 1996.
- /29/ Said A., Grütz H.-P., Garburg R.: Ermittlung des sekundären Luftschalls aus dem Schienenverkehr. Zeitschrift für Lärmbekämpfung 53 (2006) Nr. 1-Januar, S. 12-18.
- /30/ Studer J, Ziegler A.: Bodendynamik. Springer Verlag, 1.Auflage 1986.
- /31/ Studer J.A., Koller M.G.: Bodendynamik. Springer Verlag, 2. Auflage 1997.
- /32/ Swanson Analysis Systems, Inc.: Ansys users manual. Revision 5.0, DN-R300:50-4, 4th Printing 1994-02.
- /33/ Wolf J.P.: Dynamic Soil-Structure-Interaction. Englewood Cliffs, Prentice Hall 1985.
- /34/ Wunderlich W.: Baustatik 5/6, Abschnitt 4, Theorie und Berechnung von Platten. Stand 1995.
- /35/ Zirwas G.: Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung mit analytischen Integraltansätzen und numerischen Ansätzen. Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik TU-München 1996.

## Anhang 2.1, Transformation Gaußsche Glockenkurve

### Transformation der Gaußschen Glockenkurve in den Wellenzahlraum $k_x - k_y$ .

Zweifache Fouriertransformation des Ortes in den horizontalen Raumrichtungen:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}(x^2+y^2)} \cdot e^{-ik_x \cdot x} \cdot e^{-ik_y \cdot y} dx dy = \left( \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}x^2} \cdot e^{-ik_x \cdot x} dx \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}y^2} \cdot e^{-ik_y \cdot y} dy \right)$$

Komplex quadratisch Ergänzen

$$\frac{1}{2a} \cdot x^2 + ik_x \cdot x = \frac{1}{2a} \cdot (x + ia \cdot k_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (k_x)^2$$

führt für den ersten Term zu:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}(x+ia k_x)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} a k_x^2} dx \dots = \frac{e^{-\frac{1}{2} a k_x^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}(x+ia k_x)^2} dx \dots$$

(zweiter Term analog)

Anwendung von Bronstein-Integral 1.1.3.4 – Nr.3 /4/

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2 \cdot x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}$$

ergibt bzgl. des Integralausdruckes (unter Berücksichtigung der Symmetrie zum Nullpunkt)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}x^2} dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2a}}} = \sqrt{\pi \cdot 2a}$$

Ergebnis der Transformationen in x- und y- Richtung ist die Gaußsche Glockenkurve im Wellenzahlraum:

$$a \cdot e^{-\frac{1}{2a} \left[ \left( \frac{k_x}{a} \right)^2 + \left( \frac{k_y}{a} \right)^2 \right]}$$

## Anhang 3.1, Plattenelement mit Polynomansatz

### Plattenansatz (nach Schäfer) als sog. „höherwertiges“ Plattenelement, s. /34/

Als Ansatzfunktion wird ein Polynom 3. Grades verwendet, welches sich inkl. der konstanten Verschiebungsanteile bei einer 4-Knotenplatte in Vektorform folgendermaßen darstellt:

$$\Phi(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi \cdot \eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2 \cdot \eta & \xi \cdot \eta^2 & \eta^3 & \xi^3 \cdot \eta & \xi^2 \cdot \eta^2 & \xi \cdot \eta^3 & \xi^3 \cdot \eta^2 & \xi^2 \cdot \eta^3 & \xi^3 \cdot \eta^3 \end{pmatrix}$$

Erstellen der 2-fachen Ableitungen

$$\Phi_{ss}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \cdot \xi & 2 \cdot \eta & 0 & 0 & 6 \cdot \xi \cdot \eta & 2 \cdot \eta^2 & 0 & 6 \cdot \xi \cdot \eta^2 & 2 \cdot \eta^3 & 6 \cdot \xi \cdot \eta^3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{pp}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \xi \cdot 2 & 6 \cdot \eta & 0 & \xi^2 \cdot 2 & \xi \cdot 6 \cdot \eta & \xi^3 \cdot 2 & \xi^2 \cdot 6 \cdot \eta & \xi^3 \cdot 6 \cdot \eta \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{sp}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \cdot \xi & 2 \cdot \eta & 0 & 3 \cdot \xi^2 & 4 \cdot \xi \cdot \eta & 3 \cdot \eta^2 & 6 \cdot \xi^2 \cdot \eta & 6 \cdot \xi \cdot \eta^2 & 9 \cdot \xi^2 \cdot \eta^2 \end{pmatrix}$$

4 unbekannte Verschiebungsgrößen je Knoten:  $w$ ,  $a \varphi_x$ ,  $b \varphi_y$ ,  $a b \vartheta$  ( $\vartheta$  = gemischte Abl., Verdrillung)

Verschiebungsvektor:  $[V] = [w_1, a \varphi_{x1}, b \varphi_{y1}, a b \vartheta_1; \dots; \dots; w_4, a \varphi_{x4}, b \varphi_{y4}, a b \vartheta_4]$

Ansatz:  $w(\xi, \eta) := \Phi(\xi, \eta) [w]$

mit den Freiwerten  $[w] = [w_1, w_2, \dots, w_{16}]$

Verknüpfungsmatrix  $[\Phi]$  aus der Beziehung  $[V] = [\Phi] [w]$ , ergibt invertiert Matrix  $[G]$ , s.auch nächste Seite.

In Analogie zur Reißner-Mindlin-Platte ergibt sich mit der gleichen Plattenbiegesteifigkeit

$$EB := \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

und der aus obenstehenden 2-fachen Ableitungen gewonnenen Matrix der Verzerrungen

$$B(\xi, \eta) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \cdot 2 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \cdot 6 \cdot \xi & \frac{1}{a^2} \cdot (2 \cdot \eta) & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \cdot 6 \cdot \xi \cdot \eta & \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cdot \eta^2 & 0 & \frac{1}{a^2} \cdot 6 \cdot \xi \cdot \eta^2 & \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cdot \eta^3 & \frac{1}{a^2} \cdot 6 \cdot \xi \cdot \eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \cdot 2 & 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \cdot \xi \cdot 2 & \frac{1}{b^2} \cdot 6 \cdot \eta & 0 & \frac{1}{b^2} \cdot \xi^2 \cdot 2 & \frac{1}{b^2} \cdot \xi \cdot 6 \cdot \eta & \frac{1}{b^2} \cdot \xi^3 \cdot 2 & \frac{1}{b^2} \cdot \xi^2 \cdot 6 \cdot \eta & \frac{1}{b^2} \cdot \xi^3 \cdot 6 \cdot \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a \cdot b} & 0 & 0 & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 2 \cdot \xi & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 2 \cdot \eta & 0 & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 3 \cdot \xi^2 & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 4 \cdot \xi \cdot \eta & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 3 \cdot \eta^2 & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 6 \cdot \xi^2 \cdot \eta & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 6 \cdot \xi \cdot \eta^2 & \frac{2}{a \cdot b} \cdot 9 \cdot \xi^2 \cdot \eta^2 \end{bmatrix}$$

die Steifigkeitsmatrix zu:

$$K := G^T \cdot a \cdot b \cdot \int_0^1 \int_0^1 B^T \cdot EB \cdot B \, d\xi \, d\eta \cdot G$$

mit dem Unterschied der aus dem Integral entfernten Elementabmessungen und der Transformation der mechanischen Verschiebungsgrößen auf die Freiwerte  $w_{1..16}$ .

## Anhang 3.2, FE-Platten-Modellierung

### Ansatzfunktionen, Elementsteifigkeitsmatrix

Unter Verwendung von Polynomen 3. Grades als Ansatzfunktionen ergeben sich für eine Platte mit vier Knoten 16 unbekannte Freiwerte  $W$ , die „durch mechanisch sinnvolle“ Unbekannte, s. /34/, ersetzt werden sollen.

Je Knoten werden vier Koeffizienten für die vertikale Translation  $w$ , die Verdrehungen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  und die Verdrillung  $\zeta$  benötigt. Diese genannten Verschiebungsgrößen stehen miteinander über differenzielle Ableitungen von  $w$  in mechanischem Zusammenhang. Es kann daher eine Matrix  $\Phi$  erstellt werden, welche die 16 Freiwerte mit den Verschiebungen verknüpft. Die gesuchten Freiwerte lassen sich über Inversion dieser Matrix ausdrücken:

$$V = \Phi W \rightarrow W = \Phi^{-1} V = G V$$

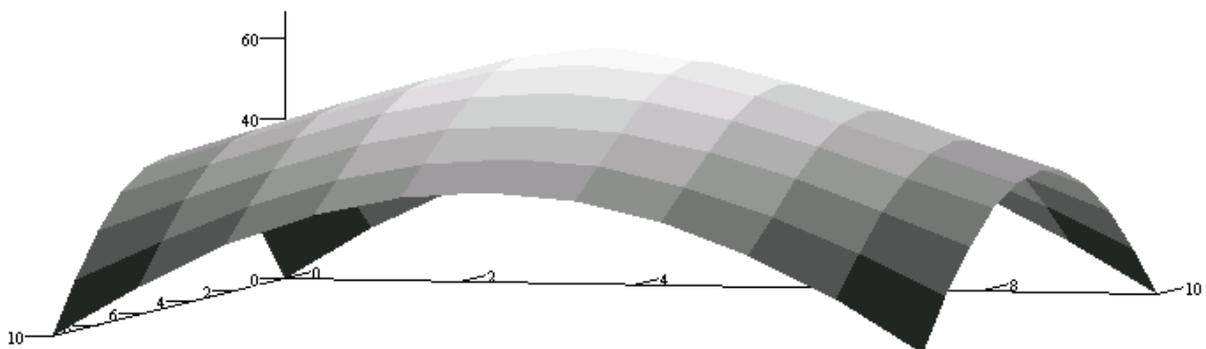
Die Matrix  $G$  ist daher – ähnlich einer üblichen Element-Transformationsmatrix – sowohl in den virtuellen Verzerrungen als auch in den Elementspannungen enthalten und somit auch im Potential und letztendlich zweifach in der Elementsteifigkeitsmatrix enthalten.

Die vorgestellte Plattenmodellierung kann im Gegensatz zur Reissner-Platte keine Schubverzerrung berücksichtigen. Diese Einschränkung erscheint jedoch in Hinblick auf die weitere Vorgehensweise akzeptabel.

Berücksichtigung der Massenträgheit konzentriert in den Plattenecken analog zu Abschnitt 3.2.1

### Test der FE-Modellierung

- a) Optische Kontrolle bzgl. der Auflagerbedingungen, hier am Beispiel einer mittig belasteten Platte mit 10 x 10 Elementen, gelenkig gelagert an den Ecken



*FE-Testmodell*

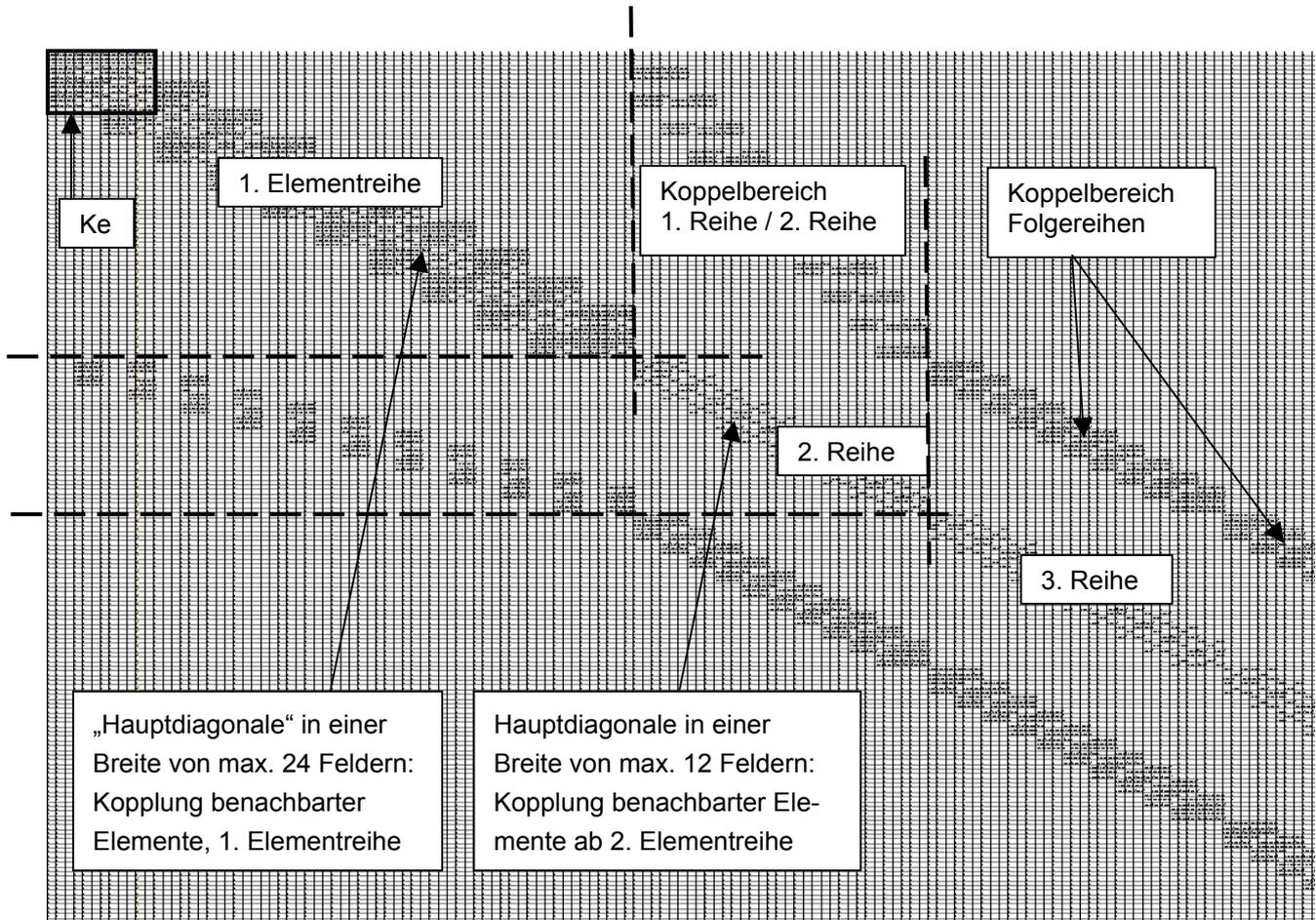
- b) Kontrolle der statischen Einsenkung am Balkenmodell als Einfeldträger bei zentrischer Belastung von  $2 \times 10^8$  N ergibt folgende Abweichungen bzgl. der mittleren Einsenkung (ohne Schubanteil):

	FE-Berechnung	Handrechnung (Balkenmodell)	Abweichung
Länge 10 m, d = 0,4 m	26,14	26,04	< 1%
Länge 14 m, d = 0,4 m	71,59	71,46	
Länge 18 m, d = 0,4 m	152,04	151,88	
Länge 10 m, d = 0,8 m	3,27	3,26	

Die FE-Berechnung führt stets zu leicht größeren Einsenkungswerten, da die Plattenquerbiegung (über 1 Elementbreite) im Bereich der Lasteinleitung berücksichtigt wird.

**Struktur der selbst erstellten FE-Plattenmodellierung**

Reihenweise Verknüpfung der Elemente (Elementsteifigkeitsmatrix  $K_e$ ) führt zu einer Diagonalstruktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K_f$ :



Struktur Steifigkeitsmatrix Fundamentplatte (exemplarischer Ausschnitt)

Zur weiteren Behandlung der in dieser Arbeit vorgestellten FE-Ansätze waren prinzipiell alle Bestandteile eines kommerziellen FE-Programms in minimaler Form zu erstellen (z.B. Pre- und Postprozessor).

Auf diese Programmierungsbestandteile soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

### Anhang 3.3, Numerische Gaußintegration

#### Numerische Gauß-Integration (Gauß-Quadratur) mit veränderlichen Stützpunktabständen, siehe /2/

Gaußintegration einachsig im Integrationsbereich von 0 bis a:

$$\text{Gint}(f, a) := \left| \begin{array}{l} r1 \leftarrow \left[ r1 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \right] + \frac{a}{2} \\ r2 \leftarrow \left[ r2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \right] + \frac{a}{2} \\ \alpha1 \leftarrow \alpha1 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \\ \alpha2 \leftarrow \alpha2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \\ \alpha1 \cdot f(r1) + \alpha2 \cdot f(r2) \end{array} \right.$$

Mit folgenden Stützpunkten und Gewichtsfaktoren:

$r1 := \frac{1}{\sqrt{3}}$	$r2 := \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\alpha1 := 1$	$\alpha2 := 1$
----------------------------	----------------------------	----------------	----------------

Gauß-Doppelintegration im Integrationsbereich von 0 – a und 0 – b:

$$\text{Gint}(f, a, b) := \left| \begin{array}{l} rx_1 \leftarrow \left[ r1 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \right] + \frac{a}{2} \\ rx_2 \leftarrow \left[ r2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \right] + \frac{a}{2} \\ \alpha_{x1} \leftarrow \alpha1 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \\ \alpha_{x2} \leftarrow \alpha2 \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \\ ry_1 \leftarrow \left[ r1 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \right] + \frac{b}{2} \\ ry_2 \leftarrow \left[ r2 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \right] + \frac{b}{2} \\ \alpha_{y1} \leftarrow \alpha1 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \\ \alpha_{y2} \leftarrow \alpha2 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \\ \sum_{h=1}^2 \sum_{g=1}^2 \alpha_{x_h} \cdot \alpha_{y_g} \cdot f(rx_h, ry_g) \end{array} \right.$$

Zur numerischen Integration z.B. bei der Bestimmung des Potentials zur Aufstellung von Elementmatrizen.

### Anhang 3.4, FE-Modell – rechnerische Umsetzung

#### Modellbildung: FE-Plattenmodelle mit 4-Knoten-Platten-Rechteckelementen

Auch gültig für die verwendeten FE-Balkenmodelle, die mit Plattenelementen generiert wurden.

- Freiheitsgrade  $\varphi_x, \varphi_y, w$
- Hierarchieebenen bei der Erstellung der Steifigkeitsmatrix:

```

STFGK := | Zeil ← NrM,N · FHG_KN
        | Spal ← Zeil
        | for i ∈ 0..Zeil - 1
        |   for j ∈ 0..Spal - 1
        |     Matrix1,j ← 0
        |     for m ∈ 0..M - 1
        |       for n ∈ 0..N - 1
        |         for i ∈ 0..Zeil - 1
        |           for j ∈ 0..Spal - 1
        |             Mtmpi,j ← 0
        |             for eckx ∈ 0..3
        |               for ecky ∈ 0..3
        |                 Akt0 ← Nrm,n
        |                 Akt1 ← Nrm,n+1
        |                 Akt2 ← Nrm+1,n
        |                 Akt3 ← Nrm+1,n+1
        |                 for i2 ∈ 0..FHG_KN - 1
        |                   for j2 ∈ 0..FHG_KN - 1
        |                     Mtmp(Akteckx - 1)·FHG_KN + i2, (Aktecky - 1)·FHG_KN + j2 ← KSeckx·FHG_KN + i2, ecky·FHG_KN + j2
        |             for i ∈ 0..Zeil - 1
        |               for j ∈ 0..Spal - 1
        |                 Matrix1,j ← Matrix1,j + Mtmpi,j
        | Matrix
    
```

Vorbelegung / Speicherreservierung

Schleifen über M Elemente in x-Richtung bzw. N-Elemente in y-Richtung

Erstellen temporäre Matrix

Schleifen über die 4 Knoten eines Elementes

Knotenauswahl für die 4 Ecken

Schleifen über Anzahl FHG je Knoten

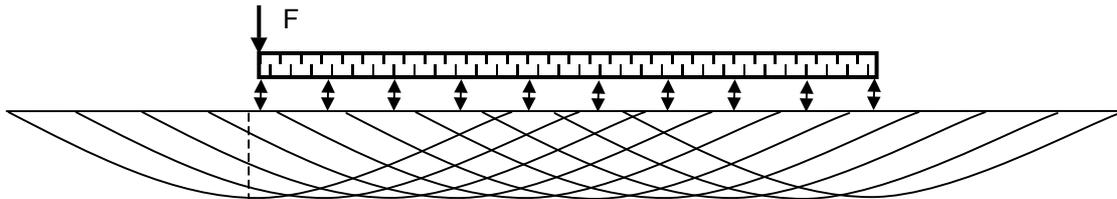
FHG_KN	Freiheitsgrade je Knoten	N	Elementanzahl in x-Richtung
Nr	Knotennummer zeilenweise	M	Elementanzahl in y-Richtung

## Anhang 4.1, Parameter Spuranpassung

Im Folgenden sind die Randbedingungen und Parameter aufgelistet, die bei der Untersuchung zur Spuranpassung verwendet wurden.

### Prinzip:

- „ausreichend langes“ Fundament auf elastischem homogenem Halbraum
- Kraftanregung am Fundamentrand
- Beobachtung des Wellenausbreitungsverhaltens im Fundament



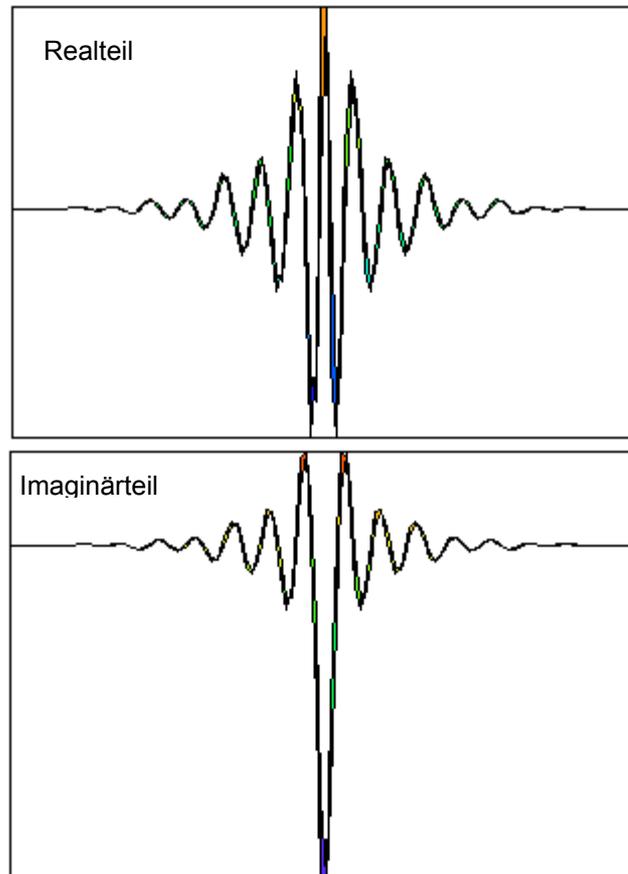
### Rechenmodell:

- 3-D Bodenmodell auf den ebenen Formänderungszustand (2-D) reduziert (s. Abb.unten)
- Boden: Dämpfung hysteretisch, keine geometrische Abstanddämpfung
- Reflexion am Balkenende: Weitgehend ausgeschlossen durch ausreichende Fundamentlänge in Verbindung mit relativ hoher Materialdämpfung des Bodens, freie Bodenoberfläche außerhalb des Fundamentes)
- Fundament: Modelliert als Balken ( $EI$ ,  $GA$ ,  $\mu$ )
- Diskrete Kopplung mit dem Boden (mind. 10 Stützstellen /  $\lambda$ )

### Parameter:

- Fundamentabmessungen  
( $L \times d$ ) = 100 m x 0,4m
- Scherwellengeschwindigkeit 200 m/s  
Boden 2000 kg/m<sup>3</sup>
- Bodenmodell: Fensterlänge 256 m  
(2 x 128 m vom Kontaktpunkt aus)
- Horizontale Diskretisierung: 1 m
- Materialdämpfung  
Betonfundament 1%, Boden 25%
- Erwartete Koinzidenzfrequenz: 16 Hz
- Parametervariation: Lastfrequenz  
im Terzraster 10 Hz bis 25 Hz

*Abbildungen: Bodenantwort auf Einheitslast, Real- und Imaginärteil:*



## Anhang 4.2, „Winklermodell“

Das betrachtete Fundament wird als einfeldriger Timoshenkobalken formuliert. Der Boden wird in Form einer nachiterierten, frequenzabhängigen, komplexen Bettung  $c$  berücksichtigt. Unter Vernachlässigung der Drehträgheit ergibt sich:

$$EIw'''' - \frac{EI}{GA_Q} \mu \ddot{w}'' - \frac{EI}{GA_Q} cw'' + \mu \ddot{w} + cw = 0$$

Es wird ein harmonischer Lösungsansatz bzgl. Ort und Zeit herangezogen. Damit ergibt sich:

$$k_i^4 - \left( \frac{\mu}{GA_Q} \omega^2 - \frac{c}{GA_Q} \right) k_i^2 + \frac{c - \mu \omega^2}{EI} = 0$$

Die 4 Wellenzahlen ergeben sich aus der allgemeinen Lösung einer quadratischen Gleichung für  $k^2$  bei entsprechender Substitution:

$$k_i = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( -B \pm \sqrt{B^2 - 4C} \right)} \quad \text{mit } B = \frac{c - \mu \omega^2}{GA_Q} \quad \text{und } C = \frac{c - \mu \omega^2}{EI}$$

### Kraftanregung

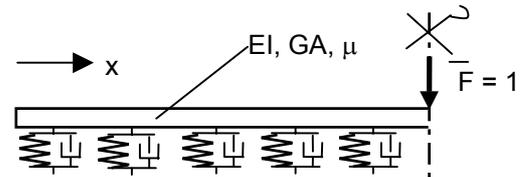
Randbedingungen für den symmetrischen Fall:

I.)  $M(x=0) = 0 \Rightarrow w''_{\text{Biegung}}(x=0) = 0$

II.)  $Q(x=0) = 0 \Rightarrow w'''_{\text{Biegung}}(x=0) = 0$

III.)  $\varphi(x = \frac{L}{2}) = 0$

IV.)  $Q(x = \frac{L}{2}) = F/2$



aus RB I ergibt sich:

$$-EIw_0'' + \kappa i^2 \frac{E}{G} (c - \mu \omega^2) w_0 = 0$$

und mit  $\kappa i^2 \frac{E}{G} = \frac{EI}{GA_Q}$  und  $D = \frac{c - \mu \omega^2}{GA_Q}$  an der Stelle  $x = 0$

$$\sum_{i=1}^4 (D + k_i^2) A_i = 0$$

Für die Querkraft gilt analog (vgl. RB II)

$$w_0'' - \left( \frac{c - \mu\omega^2}{GA_Q} \right) w_0' = 0 \Rightarrow \text{an der Stelle } x = 0 : \sum_{i=1}^4 (-k_i^3 - Dk_i) A_i = 0$$

Für die Biegeverdrehung gilt an der Stelle  $x = L/2$  (RB III):

$$\begin{aligned} \varphi &= w' - \frac{Q}{GA_Q} = w' + \frac{EI}{GA_Q} w''' - \frac{EI}{GA_Q} \left( \frac{c - \mu\omega^2}{GA_Q} \right) w' = \\ &= \left( 1 - \frac{EI}{GA_Q} D \right) w' + \frac{EI}{GA_Q} w''' = (1 - HD) w' + H w''' \quad \text{mit } H = \frac{EI}{GA_Q} \\ \sum_{i=1}^4 \left( (1 - HD) - H k_i^2 \right) A_i e^{i k_i \frac{L}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

Analog zu RB II ergibt sich aus aus RB IV:

$$\sum_{i=1}^4 - (Dk_i + k_i^3) A_i e^{i k_i \frac{L}{2}} = \frac{F}{2}$$

Bestimmung der 4 frequenzabhängigen Koeffizienten in folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} D + k_1^2 & D + k_2^2 & D + k_3^2 & D + k_4^2 \\ Dk_1 + k_1^3 & \dots & \dots & \dots \\ (Jk_1 - Hk_1^3) A_1 e^{i k_1 \frac{L}{2}} & \dots & \dots & \dots \\ - (Dk_i + k_i^3) A_i e^{i k_i \frac{L}{2}} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{2} \end{bmatrix}$$

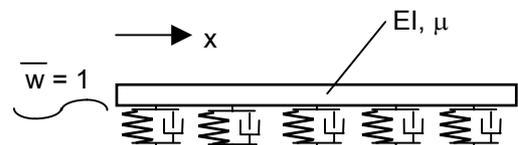
$$\text{mit } D = \frac{c - \mu\omega^2}{GA_Q}; \quad H = \frac{EI}{GA_Q}; \quad J = 1 - HD$$

Berechnung der Koeffizienten  $A_i$  und Einsetzen in den Lösungsansatz ergibt die Lösung  $w(x,t)$ .

### Fußpunktanregung

Zur Vereinfachung der DGL wurde die Schubnachgiebigkeit

Vernachlässigt:



$$EI w'''' + \mu \dot{w} + c w = c w_{FP} e^{i K x}$$

$$\text{mit Lastwellenzahl } K = -\frac{\omega}{c s} \quad \text{und } w_{FP} = \text{Fußpunktanregung}$$

Es liegt keine Symmetrie vor.

Randbedingungen:  $M = 0$  und  $Q = 0$  jeweils an den Stellen  $x = 0$  und  $x = L$ .

Die partikuläre Lösung ergibt sich bei harmonischer Belastung mittels Störansatz<sup>27</sup>:

$$w_p(x) = Q e^{iKx} \quad \text{mit} \quad Q = \frac{c W_{FP}}{EI k^4 + c - \mu \omega^2}$$

Die Gesamtlösung  $w_h + w_p$  lautet damit:

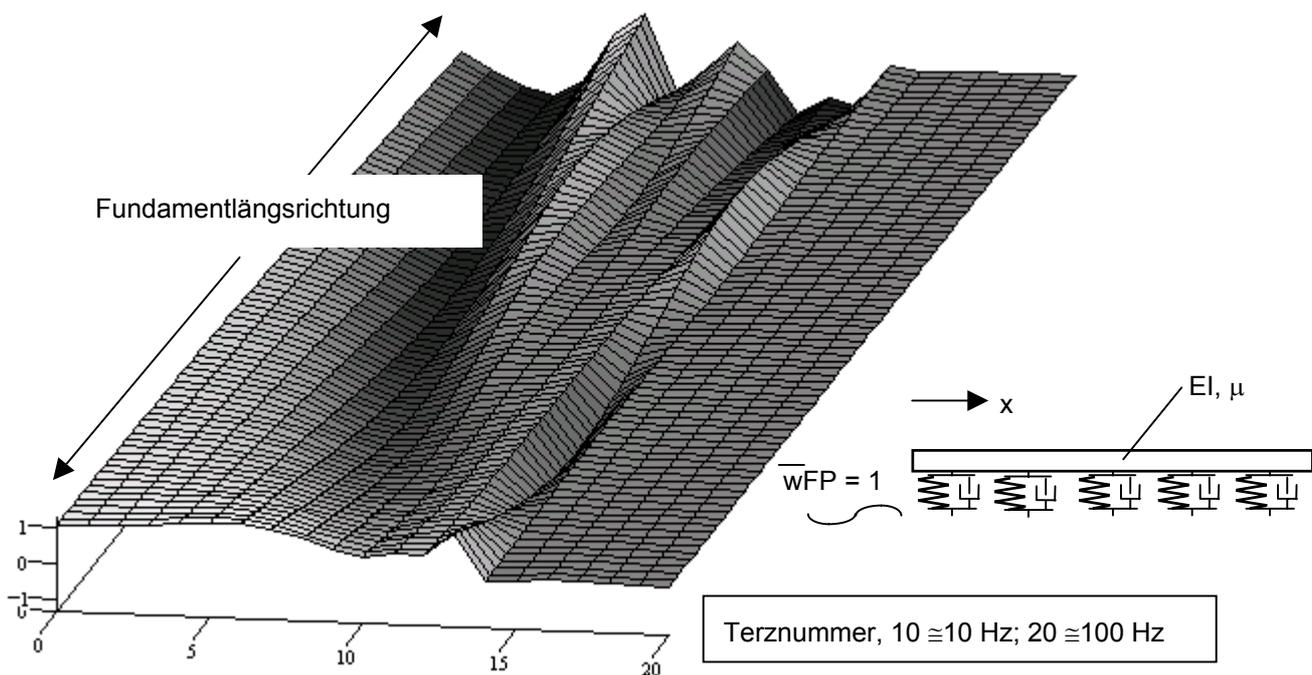
$$w(x) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{i k_i x} + \frac{c W_{FP}}{EI k^4 + c - \mu \omega^2} e^{iKx}$$

Die rechte Seite des Gleichungssystems modifiziert sich durch 2-fache bzw. 3-fache Ableitung des inhomogenen Lösungsterms zu:

$$RHS = \begin{bmatrix} -EI K^2 Q \\ -EI i K^3 Q \\ -EI K^2 Q e^{iKL} \\ -EI i K^3 Q e^{iKL} \end{bmatrix}$$

Mechanische Deutung: Die innere (flächige) Belastung des Fundamentes aus der Sohlanregung wurde mittels des Kraftvektors RHS durch eine wirkungsgleiche äußere Belastung ersetzt.

Exemplarische Abbildung  $w(x)$  für normierte Fußpunktanregung  $w_{FP} = 1$



Anregung durch Untergrund, Boden  $c_s = 100$  m/s, Fundament  $40$  m x  $5$  m x  $2$  m, Beton

Die plötzliche Beruhigung des Fundamentes bei Terznr. 14 (25 Hz) wird durch die gewählte Darstellungsart überbetont. Tatsächlich werden bei 25 Hz auf dem Fundament noch ca. 20% der Freifieldanregung erzielt.

<sup>27</sup> Störansatz unkritisch, solange eine (geringe) Materialdämpfung angesetzt wird und sich daher keine „wirkliche“ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ergibt.

## Anhang 4.3, Parameterstudie „Ersatzmodell“

### Ersatzimpedanz biegeweiches Fundament einachsig

Exemplarischer Vergleich: „Winklermodell“ nach Abschnitt 4.2 und „Ersatzmodell“ nach Abschnitt 4.3

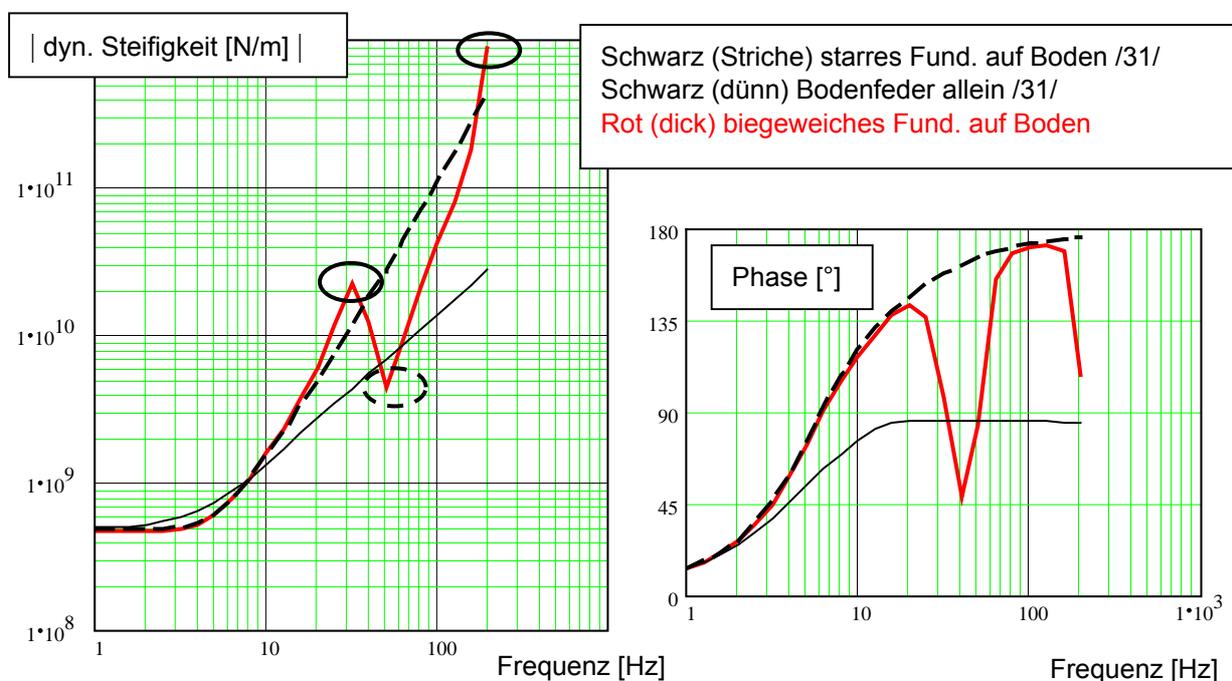
Für die Näherungslösung (= Ersatzmodell) wurden folgende Größen nacheinander errechnet (sämtliche Größen frequenzabhängig, solange es sich nicht um die Lage einer Eigenfrequenz handelt):

- Bodenfeder für starres Fundament nach /31/, hieraus Ersatzbettung in 1. Näherung
- Wellenlänge  $\lambda$  von Fundament und Boden (nach 4.5), hieraus mitwirkende Fundamentlänge
- Neuberechnung Bodenfeder (4.3) unter mitwirkender Fundamentfläche von nur  $\lambda/2$
- Aufaddieren Massenimpedanz – unter Annahme einer sinusförmigen Verformung – auf Bodenfeder entsprechend mitwirkender Fundamentfläche (4.9)

Im quasistatischen Bereich bis zu einer Frequenz  $f_{c0} = f_{(a_0 = 1)}$  ist der so gewonnene Impedanzverlauf damit errechnet. Der „dynamische“ Impedanzverlauf  $> f_{c0}$  wird wie folgt „nachbehandelt“:

- Ermittlung Fundamenteigenfrequenzen und für die Resonanzen (4.8) und Antiresonanzen (4.11)
- Ermittlung generalisierte Dämpfung in den Fundamenteigenfrequenzen
- Reziproker Wert des Verlustfaktors (bzw.  $1/2D$ ) ergibt den Überhöhungsfaktor für die Resonanzstellen bzw. den Versteifungsfaktor für die Antiresonanzen (4.10 und 4.12)
- Der ermittelte Faktor gibt für Resonanz- / Antiresonanzstellen die Größe der Versteifung bzw. der Senke in der Impedanzfunktion gegenüber dem starren Ersatzfundament an.

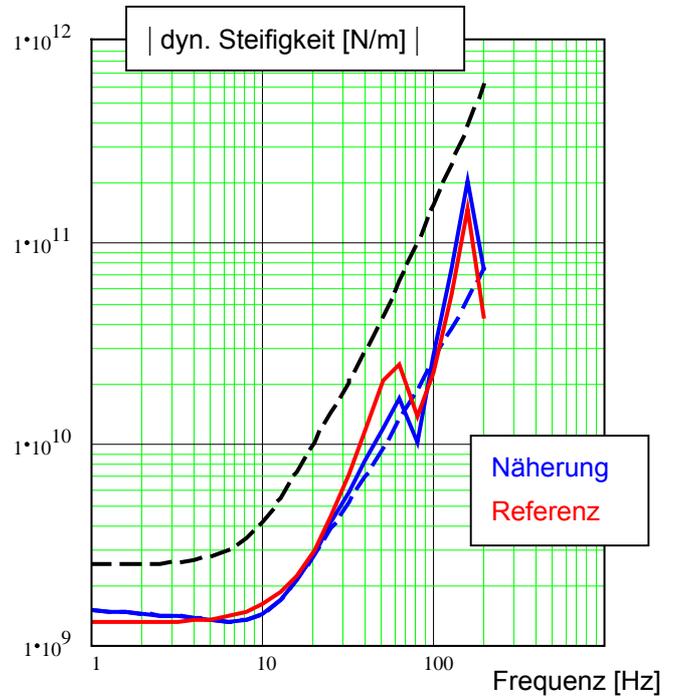
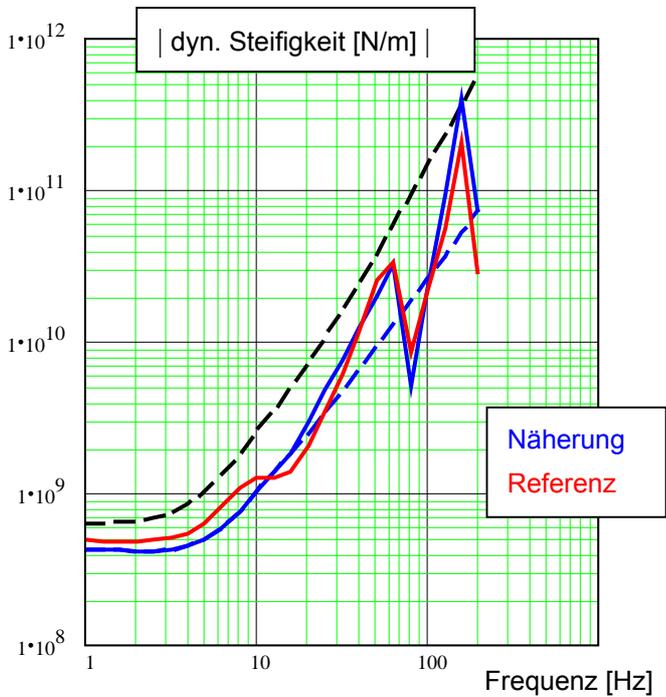
Beispielfall zur Veranschaulichung:



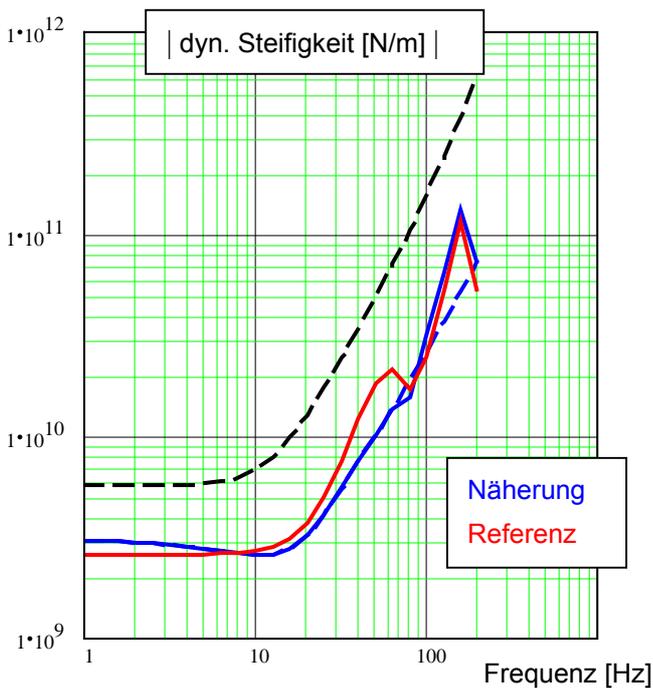
Nachfolgend einige exemplarische Ergebnisse der Parameterstudie  
(schwarz gestrichelt immer der Vergleich mit einem starren Kreisfundament /31/)

Exemplarische Ergebnisse Parameterstudie: Balkenmodellierung (Referenz) – Ersatzmodell (Näherung)  
 Variation der Bodensteifigkeit:

Boden	Fundamentlänge	Fundamentstärke		Boden	Fundamentlänge	Fundamentstärke
<b>cs = 100 m/s</b>	20 m	1,6 m		<b>cs = 200 m/s</b>	20 m	1,6 m

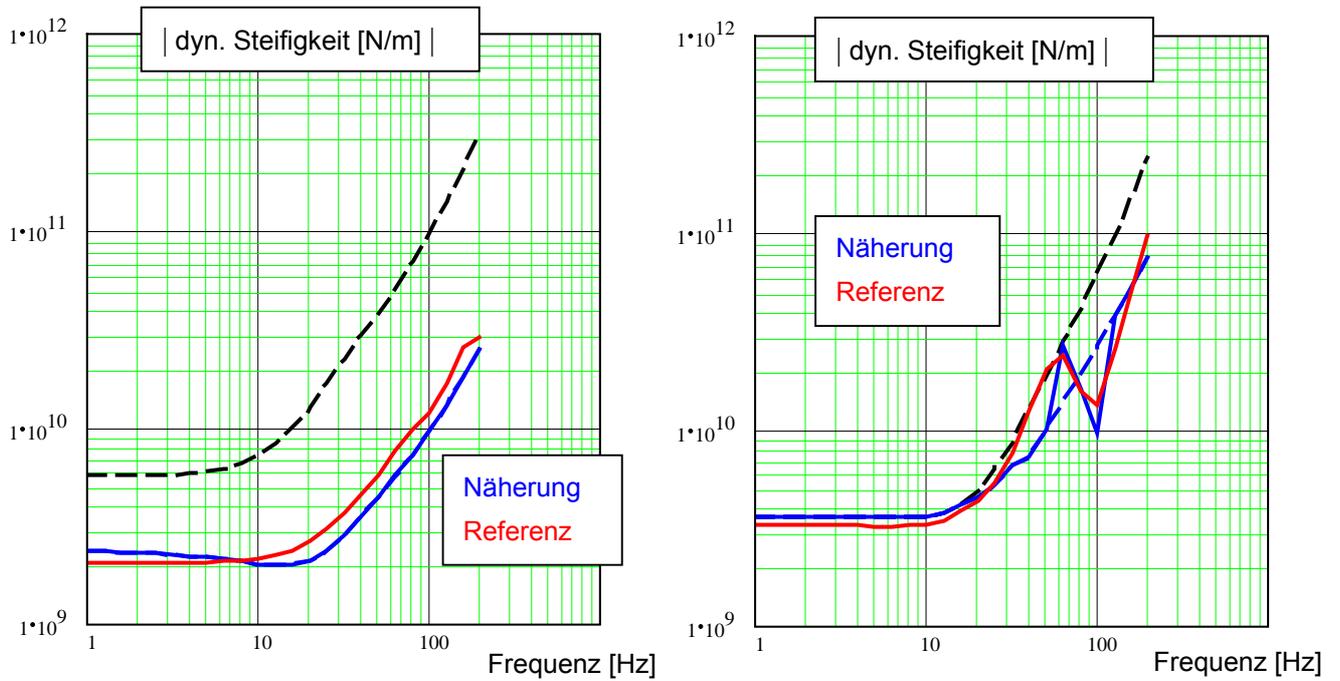


Boden	Fundamentlänge	Fundamentstärke
<b>cs = 300 m/s</b>	20 m	1,6 m



Variation der Abmessungen:

Boden	Fundamentlänge	Fundamentstärke		Boden	Fundamentlänge	Fundamentstärke
cs = 300 m/s	20 m	0,8 m		cs = 300 m/s	8 m	1,6 m



Varierte Eingangsparameter (praxisnahe Werte Betonfundament):

Parameter	Werte
Länge Fundament	4, 8, ..., 28 m
Breite Fundament	zunächst fest 5 m
Fundamentstärke	0,4 0,8 ... 2,4 m
Scherwellengeschwindigkeit Boden cs	100, 200, 300, 400, 500 m/s

## Anhang 5.1, Messergebnisse Bürospange unter U-Bahnanregung

### Messungen nach Fertigstellung Rohbau

Messungen vom 05.06.2006

Immissionsmessungen: Gebäude Block A im 5.OG und 8.OG, Block B im 4.OG

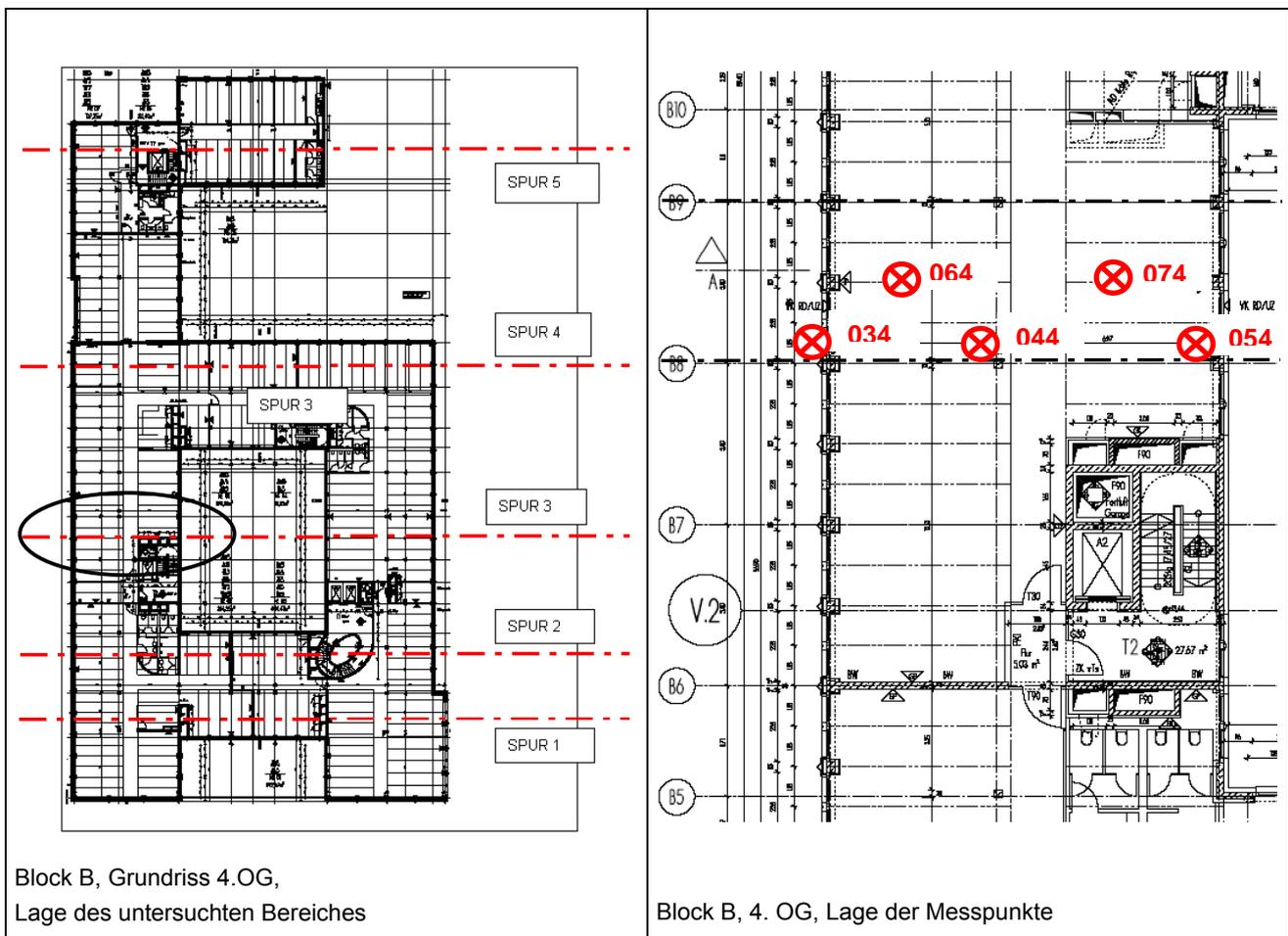
Anregung: 2 U-Bahn-Linien, 4 Gleise

### Detailmessung „Block B“

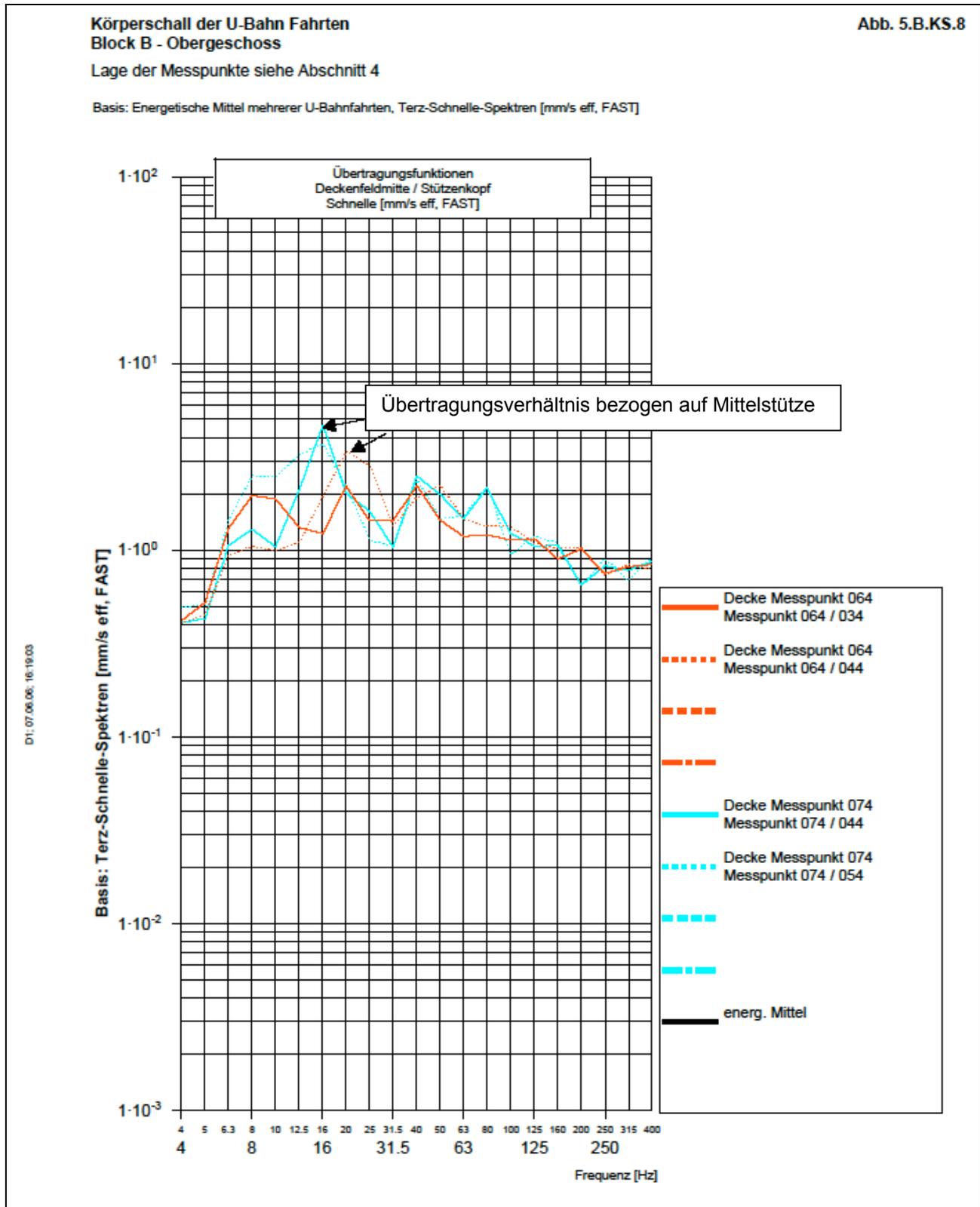
Messung des sog. „Büroriegls“, 2-Feld-Träger mit leicht unterschiedlichen Spannweiten

Besonderheiten:

- Fassadenstützen im halben Raster
- Vertiefte Deckenbereiche für Kabelführung im Boden
- Nähe zu Gebäudekernen



Aus den primären Messergebnissen ergeben sich die nachfolgend dargestellten Übertragungsfunktionen. Da die Stützenköpfe z.T. deutlich unterschiedlich stark anregen (Randstütze ≠ Mittelstütze), wurde die Übertragung jeweils von Deckenfeldmitte auf beide anregenden Stützenköpfe gebildet.



## Anhang 6.1, Gebäudemodell Schwingungsübertragung durch Stützenbiegung

### Steifigkeitsmatrix der Deckenbalken

Es wurden folgende Kombinationen untersucht:

Symmetrische Decken-EF (Deckenbalken) Vertikalanregung Fußpunkt	Symmetrische Decken-EF Verdrehung Fußpunkt
Antimetrische Decken-EF Vertikalanregung Fußpunkt	Antimetrische Decken-EF Verdrehung Fußpunkt

Symmetrie und Antimetrie sind über die Steifigkeitsmatrizen der Decken einstellbar. Das Modell ist für Vertikalanregung und Verdrehung des Fußpunktes erstellt, sodass für die o.g. Kombinationen lediglich jeweils eine dieser Anregungsgrößen zu Null gesetzt wird.

Die Modellierung arbeitet im transformierten Raum mit harmonischen Wellenzahl- und Zeitansätzen für Stütze und Decke – analog den in Abschnitt 4 vorgestellten Modellen:

$$\text{Decke: } w_D(x_1, \omega) = w_{D0} \sum_{i=1}^4 A_i e^{ik_i x_1} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\text{Stütze } w_{St}(x_2, \omega) = w_{St0} \sum_{i=1}^4 B_i e^{in_i x_2} \cdot e^{i\omega t}$$

$$u_{St}(x_2, \omega) = u_{St0} \sum_{j=1}^2 C_j e^{im_j x_2} \cdot e^{i\omega t}$$

Die Koeffizienten A bis C existieren jeweils doppelt z.B. als  $A_u$  und  $A_\varphi$  für die beiden Fußpunktanregungen  $u$  und  $\varphi$ .

Wellenzahlen des Riegels (= Decke) und der Stützen (resp. Wände), unabhängig von der Anregungsart:

$$k_{1...4} = 4 \sqrt{\frac{\mu_D \omega^2}{EI_D}}$$

$$m_{1...2} = \sqrt{\frac{\mu_{St} \omega^2}{EA_{St}}}$$

$$n_{1...4} = 4 \sqrt{\frac{\mu_{St} \omega^2}{EI_{St}}}$$

Ziel ist zunächst die Gewinnung der 2 x 2 Steifigkeitsmatrix der angeschlossenen Decken.

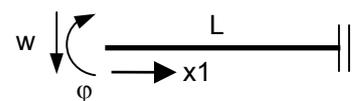
Symmetrische RB:

$$w_{x_1=0} = 0 \text{ bzw. } 1 \text{ (normiert)}$$

$$w'_{x_1=0} = 0 \text{ bzw. } 1 \text{ (normiert)}$$

$$w'_{x_1=L} = 0 \text{ (Symmetriebedingung)}$$

$$Q_{x_1=L} = -EI w'''' = 0 \text{ (Symmetriebedingung)}$$



- Antimetrische RB:
- $w_{x1=0} = 0$  bzw. 1 (normiert)
  - $w'_{x1=0} = 0$  bzw. 1 (normiert)
  - $w_{x1=L} = 0$  (Antimetriebedingung)
  - $M_{x1=L} = -EIw'' = 0$  (Antimetriebedingung)

Die gesuchte Steifigkeitsmatrix verknüpft die normierten Zwangsauslenkungen am Deckenaufleger mit den Schnittgrößen:

$$\begin{bmatrix} QD_{x1=0} \\ MD_{x1=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CD_{11} & CD_{12} \\ CD_{21} & CD_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x1=0} \\ \varphi_{x1=0} \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeiten  $CD_{11} .. CD_{22}$  ergeben sich wie folgt:

infolge  $w$

$$CD_{11} = EI_D \sum_{i=1}^4 Aw_i (ik_i)^3$$

$$CD_{21} = -EI_D \sum_{i=1}^4 Aw_i (ik_i)^2$$

infolge  $\varphi$

$$CD_{12} = EI_D \sum_{i=1}^4 A\varphi_i (ik_i)^3$$

$$CD_{22} = -EI_D \sum_{i=1}^4 A\varphi_i (ik_i)^2$$

Die Koeffizienten  $Aw_i$  und  $A\varphi_i$  lassen sich für die normierte Auflagerverschiebung  $w = 1$  bzw. Verdrehung  $\varphi = 1$  über die Decken-Steifigkeitsmatrizen gewinnen:

Symmetrische Randbedingungen in Feldmitte: Steifigkeitsmatrix [CDs]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots \\ ik_1 & ik_2 & \dots & \dots \\ ik_1 e^{ik_1 L} & ik_2 e^{ik_2 L} & \dots & \dots \\ EI_D ik_1^3 e^{ik_1 L} & EI_D ik_2^3 e^{ik_2 L} & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Aw_1 \\ Aw_2 \\ Aw_3 \\ Aw_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } w = 1 \text{ bzw. } [CDs] \begin{bmatrix} A\varphi_1 \\ A\varphi_2 \\ A\varphi_3 \\ A\varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } \varphi = 1$$

Antimetrische Randbedingungen in Feldmitte: Steifigkeitsmatrix [CDa]

$$[CDa] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots \\ ik_1 & ik_2 & \dots & \dots \\ e^{ik_1 L} & e^{ik_2 L} & \dots & \dots \\ EI_D ik_1^2 e^{ik_1 L} & EI_D ik_2^2 e^{ik_2 L} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Obwohl einer der beiden Einheitsverformungszustände keinen statischen Widerstand bietet ( $w = 1$ , symmetrische Randbedingungen) kann der Satz von Betti als Kontrolle dienen.

Unter Nutzung der Symmetrie- / Antimetriebedingungen ergibt sich eine linienförmige Struktur vom obersten Geschoss bis zum Fußpunkt. Es wurde daher ein ebenes Übertragungsverfahren mit den Freiheitsgraden  $u$ ,  $w$  und  $\varphi$  verwendet. Da Horizontalschwingungen des Gebäudes bei dieser Untersuchung nicht von Interesse sind, wurden horizontale Auflager in den Knotenpunkten Stütze – Decke eingeführt (s. Abb. unten).

In den Rahmenecken als Kopplungspunkten werden jeweils die dynamischen Steifigkeitsmatrizen  $[CD]$  der Decken und  $[CSt]$  der oberhalb anbindenden Stütze, jeweils mit den Verschiebungen  $w$  und  $\varphi$ , übergeben:

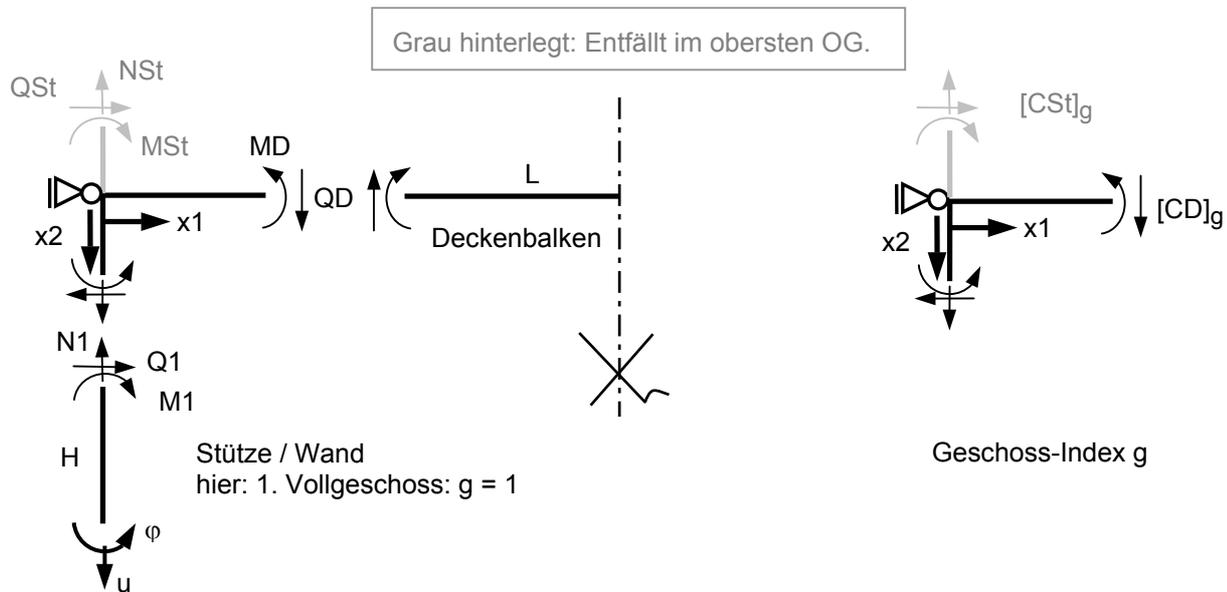


Abb.: Kräftegleichgewicht Verbindungspunkt Decke / Stütze, übergebene Matrizen

Aus dem Gleichgewicht Kenntnis der Schnittkräfte  $N1$  und  $M1$  der nach unten führenden Stütze und Formulierung der Randbedingungen:

$$u_{x2} = H = 0 \text{ bzw. } 1 \text{ (normiert)}$$

$$N_{x2} = 0 = EAu' = -QD + NSt = -(CD_{11} w_{x1=0} + CD_{12} \varphi_{x1=0}) + (CSt_{11} u_{x2=0} + CSt_{12} \varphi_{x2=0})$$

$$w_{x2} = 0 = 0$$

$$w_{x2} = H = 0$$

$$M_{x2} = 0 = -EIw'' = MSt - MD = (CSt_{21} u_{x2=0} + CSt_{22} \varphi_{x2=0}) - (CD_{21} w_{x1=0} + CD_{22} \varphi_{x1=0})$$

$$\varphi_{x2} = 0 = 0 \text{ bzw. } 1 \text{ (normiert)}$$

Als zentrales Element des Rahmens ergibt sich das Bestimmungsgleichungssystem der Stütze  $[K]$ :

$$[K] \begin{bmatrix} Cu_1 \\ Cu_2 \\ Bu_1 \\ Bu_2 \\ Bu_3 \\ Bu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [K] \begin{bmatrix} C\varphi_1 \\ C\varphi_2 \\ B\varphi_1 \\ B\varphi_2 \\ B\varphi_3 \\ B\varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ mit}$$



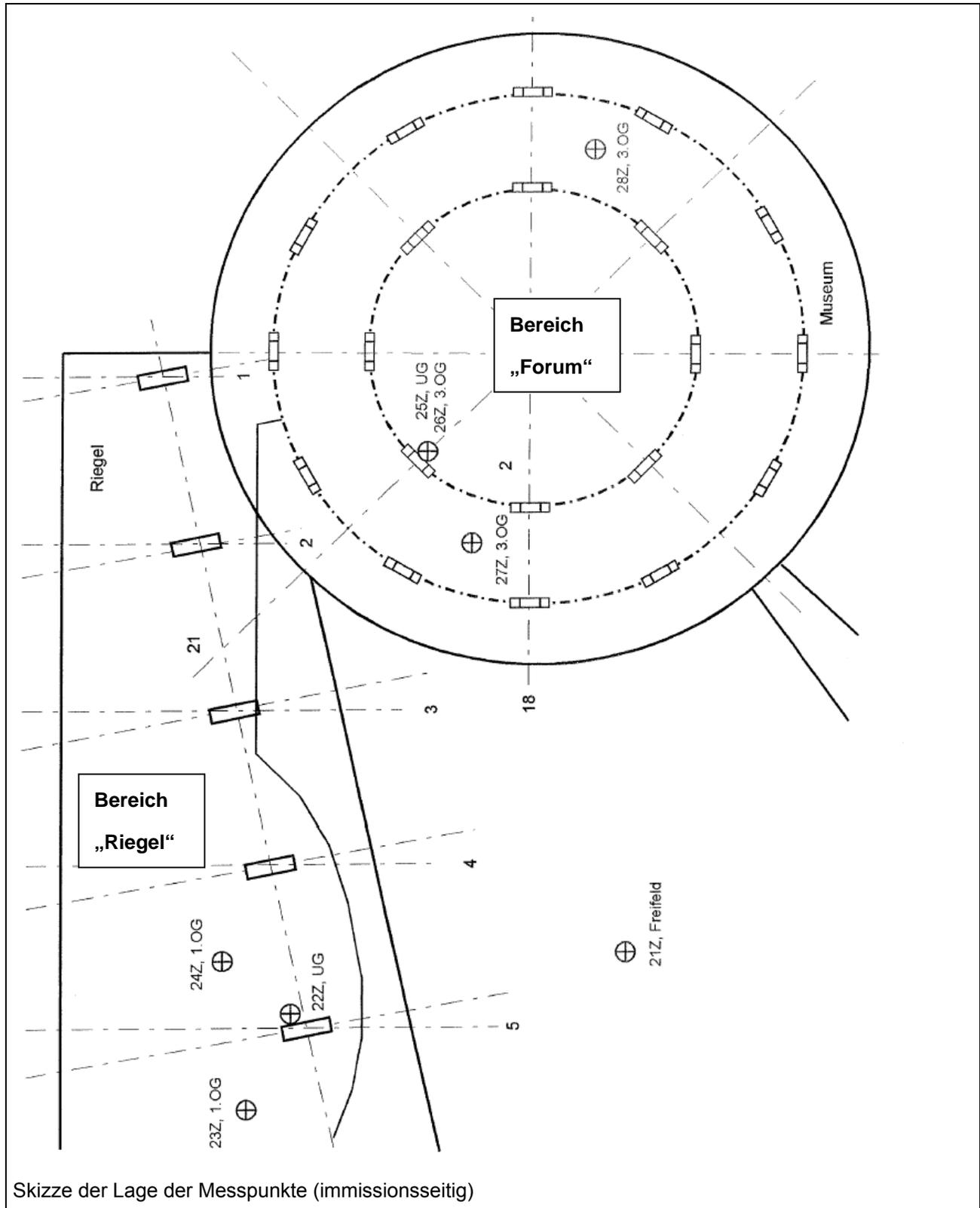
## Anhang 7.1, Messergebnisse Präsentationsgebäude

Messungen vom 07.07.2000, bei einem Kfz-Hersteller in Süddeutschland

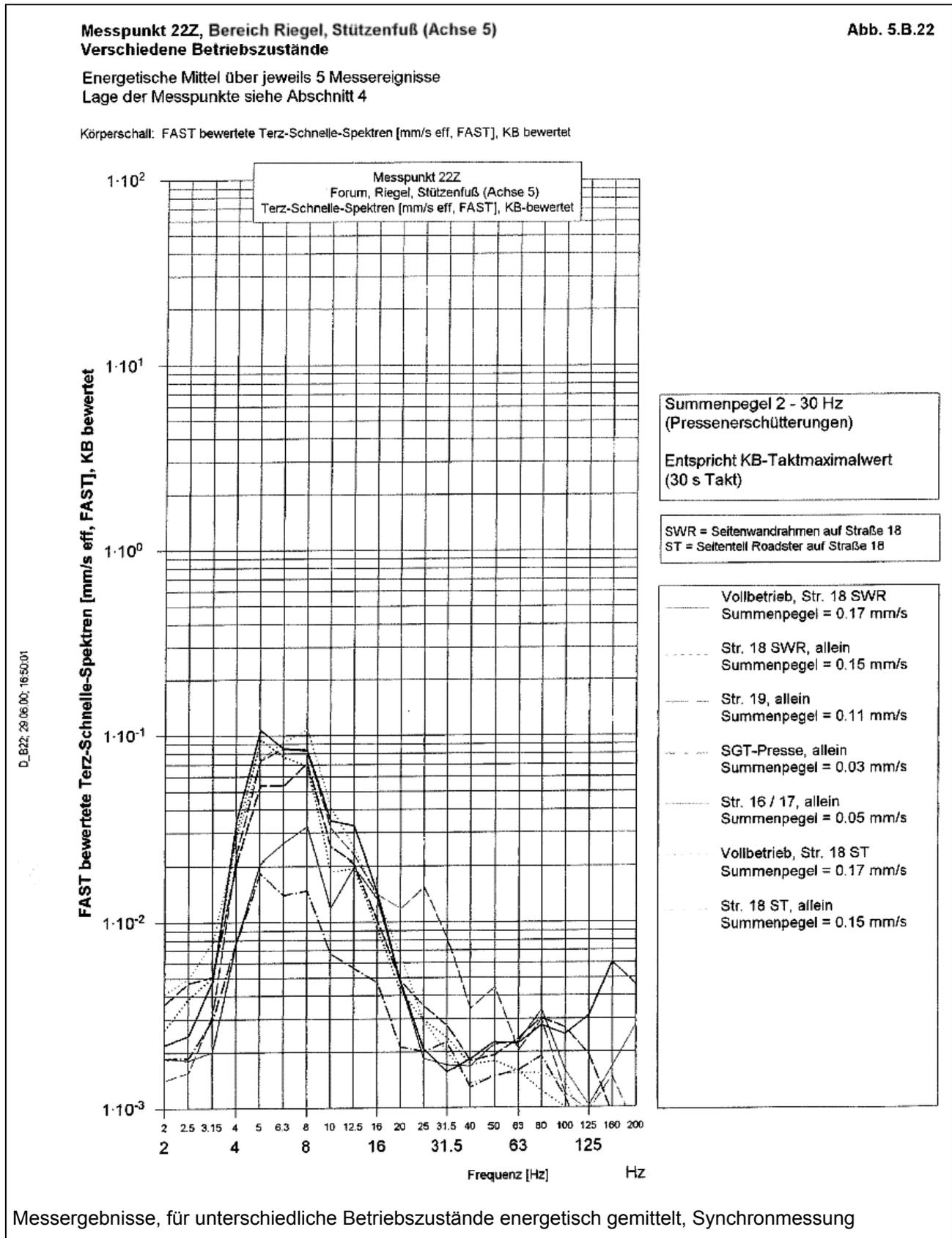
Vergleichsmessung: Gebäude mit verstärkter Bodenplatte („Forum“) / gewöhnliche Bodenplatte („Riegel“)

Anregung durch hydraulische Karosseriepressen ohne elastische Lagerung im Einzel- und Vollbetrieb

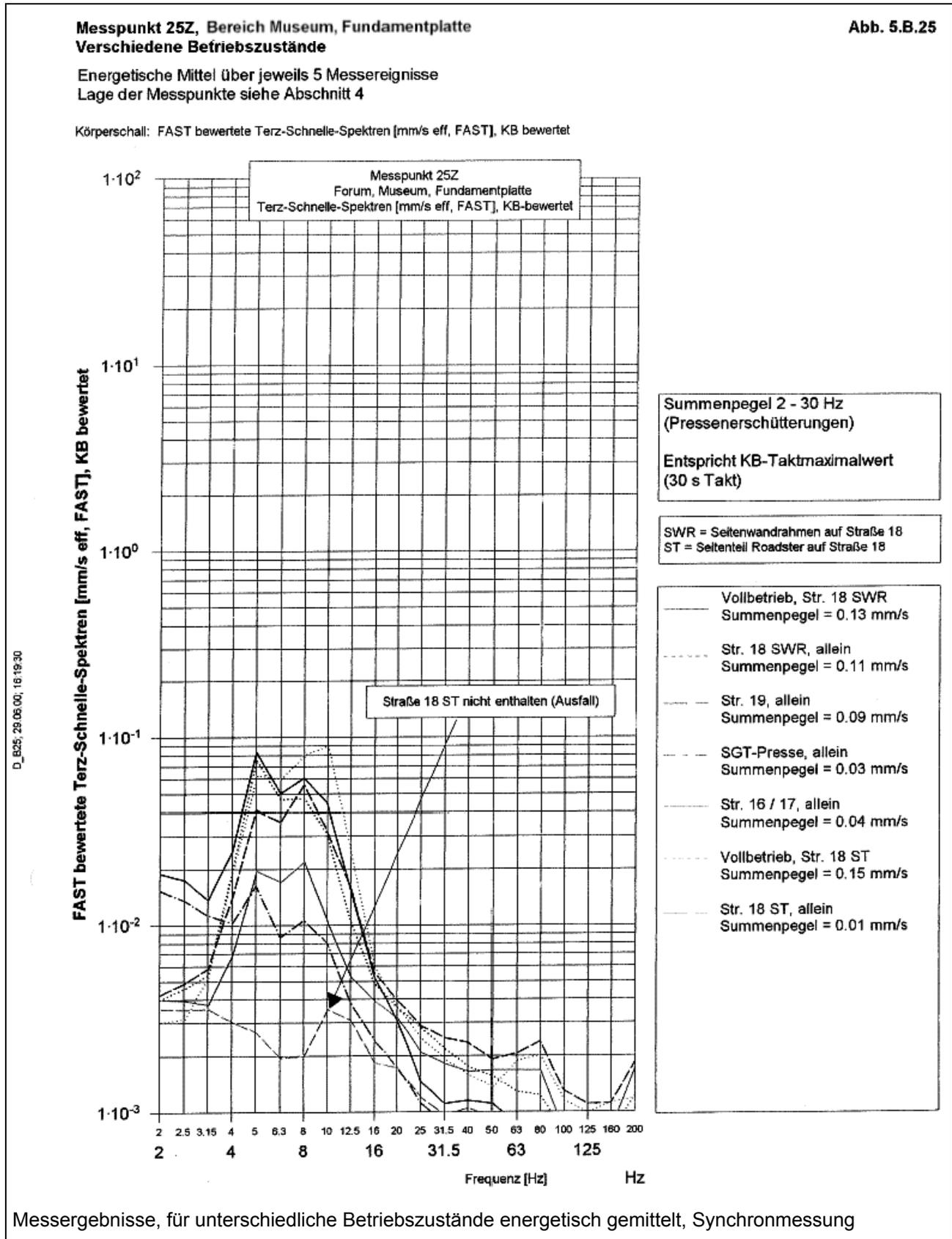
Entfernung vom Emissionsort: ca. 150 m



Fundament-Messpunkt im konventionell gegründeten Gebäudebereich:



Fundament-Messpunkt im Gebäudebereich „Forum“ mit verstärkter Bodenplatte:



## Anhang 7.2, Messergebnisse teilflächige elastische Gebäudelagerung

### Messungen nach Fertigstellung der Bodenplatten

Messungen vom 04.09.2005 und 25.09.2005

Immissionsmessung: Bodenplatte mit teilflächiger elastischer Lagerung, ohne Gebäude

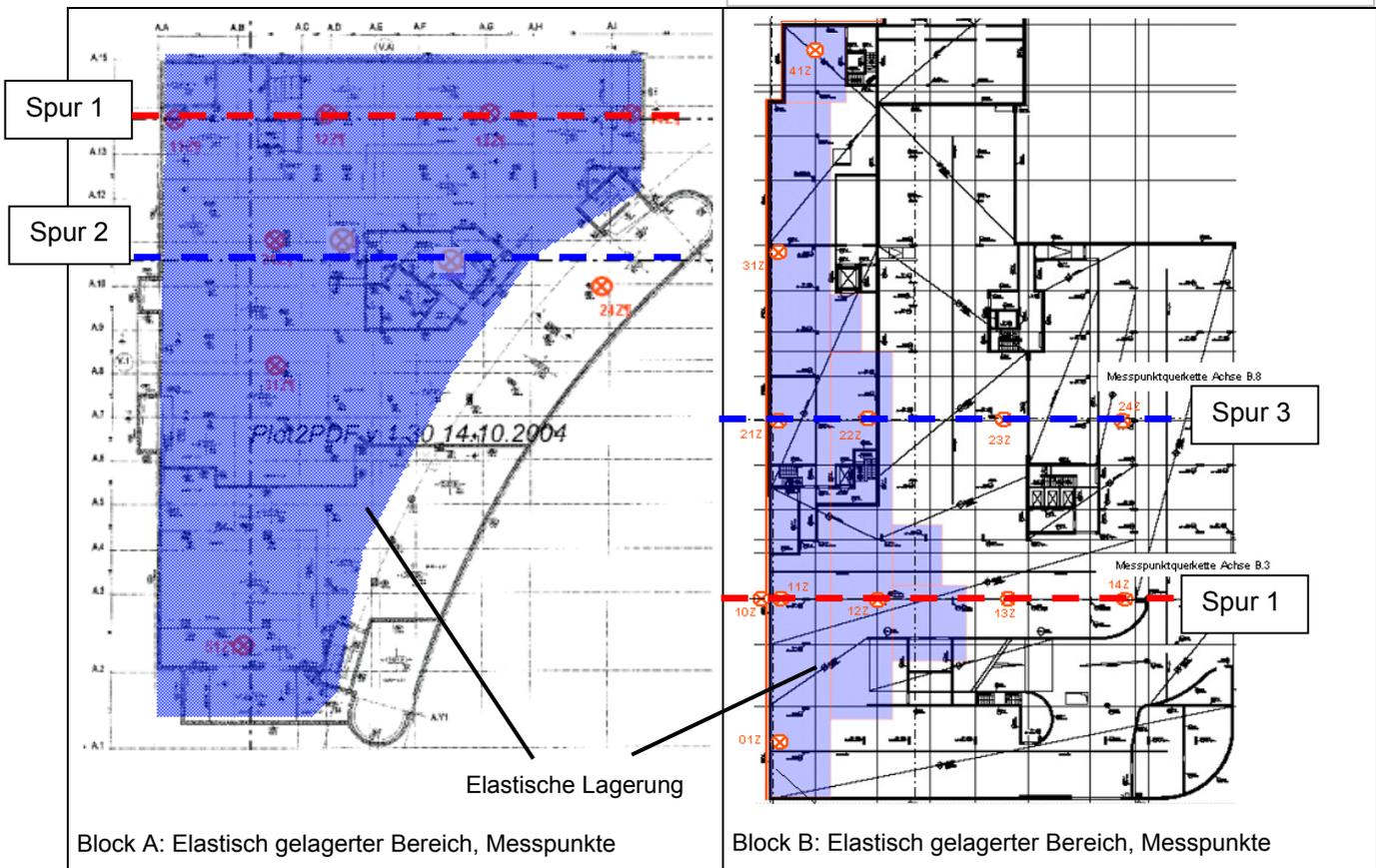
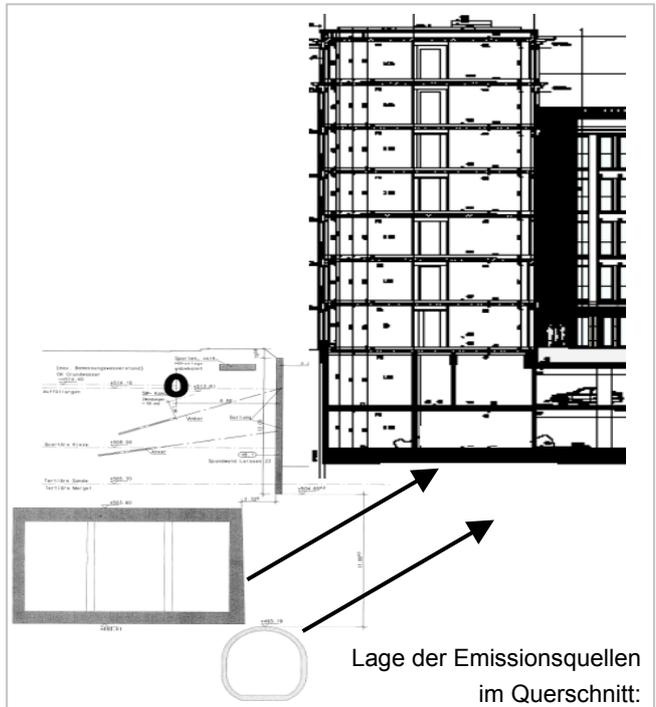
Anregung: 2 U-Bahn-Linien, 4 Gleise

#### Block A

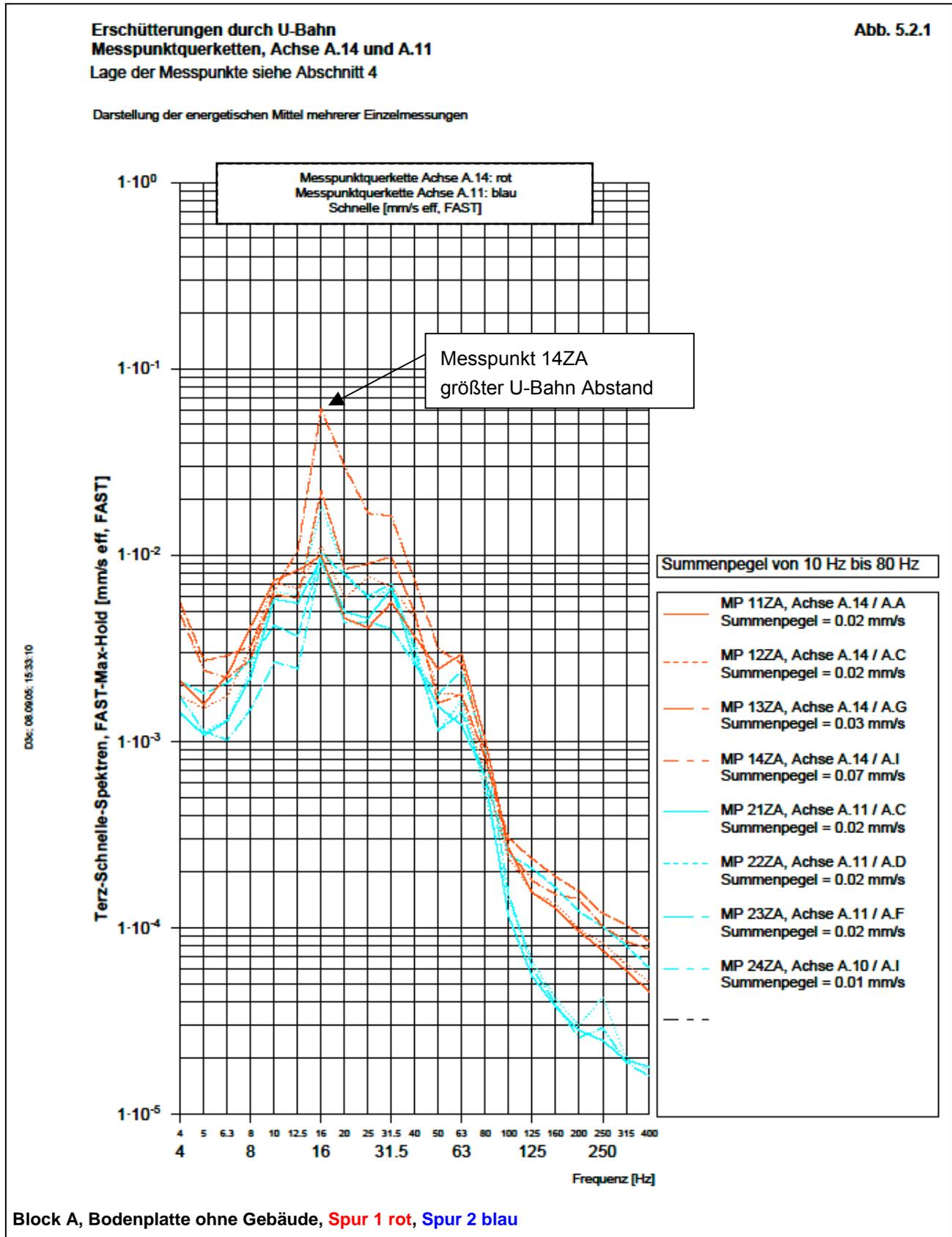
- vollflächige elastische Lagerung auf einem Streifen mit ca. 20 m Breite
- teilflächige elastische Lagerung in den übrigen Bereichen gleiszugewandt

#### Block B

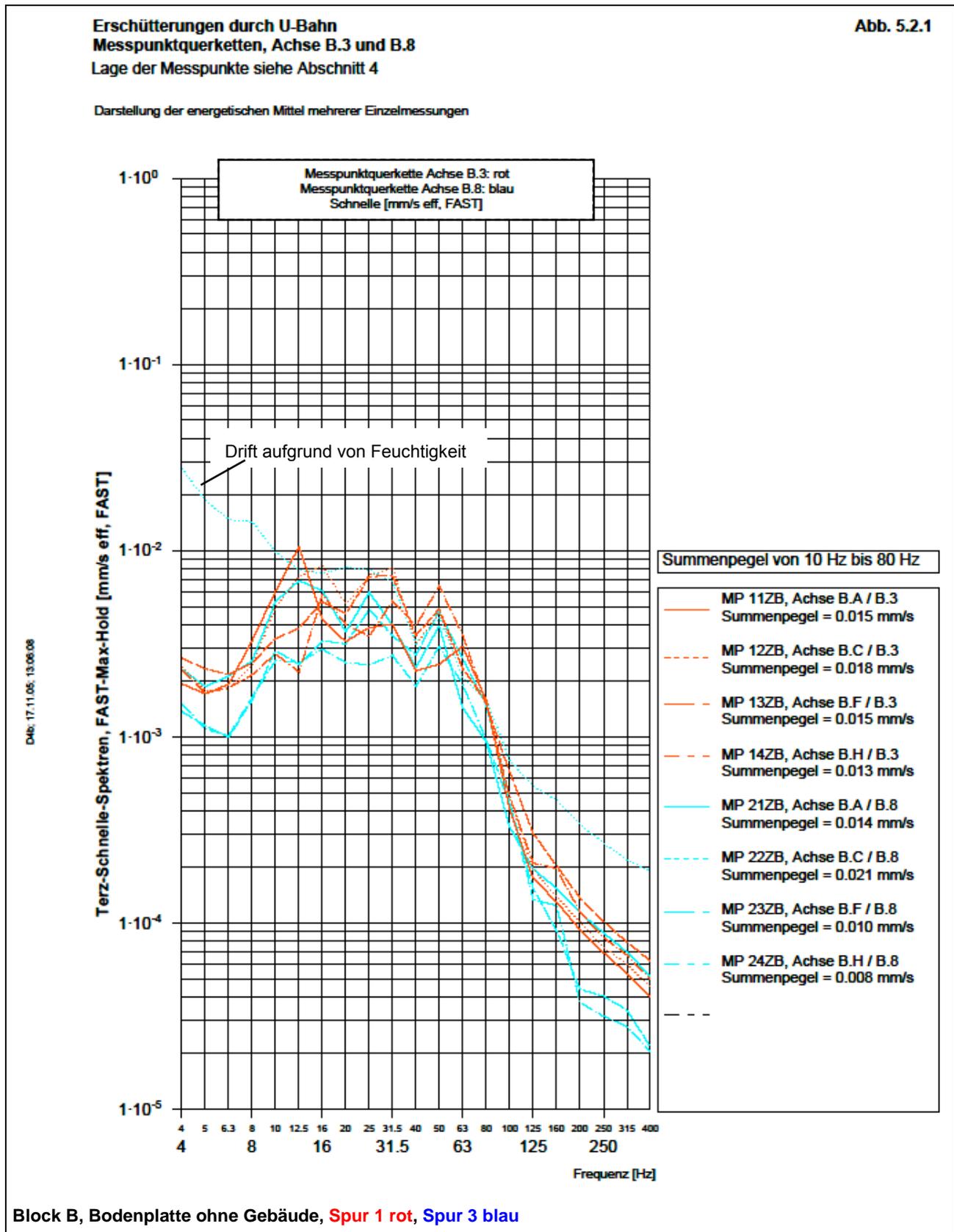
- teilflächige elastische Lagerung bis in unterschiedliche Entfernungen
- gegenüber Block A andere Situation bzgl. der Anregung, Gründungstiefe, Stärke der Bodenplatte



Messergebnisse: Energetisch gemittelte Spektren für die Messpunkt-Querketten



Messergebnisse: Energetisch gemittelte Spektren für die Messpunkt-Querketten



Ende Anhänge