

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Sättigende strukturvariable Regelungen

Michael Buhl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy,

Technische Universität Darmstadt

Die Dissertation wurde am 22.09.2008 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 04.11.2008 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Aufbau der Arbeit	5
1.3	Theoretische Grundlagen und Definitionen	6
1.4	Stand der Forschung	8
1.4.1	Strukturvariable Regelungen	9
1.4.2	Sättigende Regelungen	11
1.4.3	Sättigende strukturvariable Regelungen	14
2	Sättigende Reglerauslegung	17
2.1	Motivierendes Beispiel	17
2.2	Ansatz für die Reglerauslegung	19
2.3	Eigenschaften der Regelung	21
2.3.1	Eigenschaften von \mathbf{P}	21
2.3.2	Abschätzung des Einzugsbereichs	26
2.3.3	Zielkonflikt bei konstantem Regelgesetz	33
3	Sättigende strukturvariable Regelung	35
3.1	Ansatz	35
3.2	Stabilität	36
3.2.1	Stabilität bei kontinuierlicher Variation von α	36
3.2.2	Stabilität bei diskreter Variation von α	38
3.3	Beispiel	39
3.4	Algorithmus zur Bestimmung von α	41

3.4.1	Beschreibung des Algorithmus	41
3.4.2	Numerisches Beispiel	43
3.4.3	Diskrete Bestimmung von α	44
4	Modifikation zur besseren Stellgrößenausnutzung	47
4.1	Vergrößerung von u	47
4.2	Kompromissbildung in u	49
4.3	Beispiel für die modifizierte Regelung	50
5	Modifikation für unsichere Strecken	53
5.0.1	Unsicherheiten in \mathbf{b} und u_{max}	54
5.1	Auslegung für matched uncertainties	54
5.1.1	Struktur der Unsicherheit in \mathbf{A}	54
5.1.2	Auslegung der Regelung	57
5.1.3	Stabilitätsnachweis	57
5.2	Auslegung für beliebige Unsicherheiten in \mathbf{A}	59
5.2.1	Systemdarstellung	59
5.2.2	Auslegung der Regelung	59
5.2.3	Stabilitätsnachweis	60
5.2.4	Lösbarkeit der Riccati-Gleichung	60
5.2.5	Vergleich mit dem Ansatz für matched uncertainties	62
5.3	Variation von α	64
5.3.1	Stabilität bei variierendem α	64
5.4	Laborexperiment: inverses Pendel	64
5.4.1	Modellierung des inversen Pendels	65
5.4.2	Mögliche Unsicherheiten	67
5.4.3	Reglerparametrierung für den Versuchsaufbau	68
6	Führungsfilter	79
6.1	Motivation	79
6.2	Ansatz Führungsfilter	80
6.3	Stabilität	83

6.4	Interpretation	84
6.5	Laborexperiment: inverses Pendel	85
7	Ausblick für Systeme mit mehreren Eingängen	91
7.1	Probleme bei der Erweiterung	91
7.2	Anpassung des α -Reglers für MI-Systeme	94
7.2.1	Übergang zur diskreten Variation von α	94
7.2.2	Verwendung einer korrigierten Abschätzung für η	95
7.3	Skalierung der Stellgröße	99
7.4	Beispiel: Flugzeug Längsdynamik	103
7.4.1	Beschreibung des Modells	103
7.4.2	Auslegung und Ergebnisse der Regelung	104
8	Zusammenfassung	111
9	Anhang	115
9.1	Beweise	115
9.1.1	Reduktion der Riccati-Gleichung	115
9.1.2	Beweis Satz 2.5	118
9.1.3	Beweis Satz 2.6	119
9.1.4	Beweis Satz 2.7	120
9.1.5	Beweis Satz 2.8	121

Wichtige Bezeichnungen und Konventionen

Lateinische Schrift

A	Systemmatrix eines linearen Systems
A₀	nominelle Systemmatrix eines unsicheren, linearen Systems
A_α	$\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}$, siehe Abschnitt 2.2
b, b₀	Eingangsvektor eines linearen Systems
<i>f</i>	Parameter der modifizierten Regelung, siehe Abschnitt 4.2
F	Schranke der Unsicherheit, siehe Abschnitt 5.1.1
I	Einheitsmatrix
<i>J</i>	Wert eines Gütemaßes
k, K	Zustandsrückführung
<i>l</i>	Anzahl der vorab berechneten Regler, siehe Abschnitt 3
<i>m</i>	Anzahl der Eingänge bei einem Mehrgrößensystem
<i>n</i>	Systemordnung
P	Matrix für quadratische Ljapunow-Funktionen
<i>t</i>	Zeit
R	Matrix zur Gewichtung oder Skalierung der Stellgröße
q	Vektor der Unsicherheiten, siehe Abschnitt 5.1.1
<i>u, u</i>	kommandierte Stellgröße
<i>u_{max}, u_{max}</i>	maximal mögliche Stellgrößenamplitude(n)
<i>u_s</i>	realisierbare Stellgröße
v	Rechtseigenvektor einer Matrix
<i>V</i>	Ljapunow-Funktion
<i>V_α</i>	Ljapunow-Funktion mit α fix, siehe Abschnitt 3.2
x	Zustandsvektor
x_r	Referenz-Ruhelage, siehe Abschnitt 6
x_z	Ziel Ruhelage, siehe Abschnitt 6
z	Vektor der generalisierten Positionen, siehe Abschnitt 5.4.1
ż	Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten, siehe Abschnitt 5.4.1

Griechische Schrift

α	zentrale Parameter der Regelung (in Abschnitt 7.4 auch Anstellwinkel)
β	Parameter zur Variation von α , eingeführt in Abschnitt 3
γ	Summe der verschobenen Eigenwerte von \mathbf{A} (Abschnitt 2.3.2)
η	Wert einer Ljapunow-Funktion am Rand des Einzugsbereichs
κ	Parameter der robusten Regelung, siehe Abschnitt 5.1.2
$\lambda(\cdot)$	Eigenwert einer Matrix
Λ	Sättigungskonfiguration, siehe Abschnitt 7.1
μ	Lagrange Multiplikator

Symbole

$ \cdot $	Vektor mit den Beträgen der Komponenten des Vektors
$\ \cdot\ $	Länge eines Vektors
$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$	hochgestellter Punkt entspricht der Ableitung nach der Zeit
\mathcal{S}	Elliptischer Bereich im Zustandsraum, siehe Abschnitt 1.3
$\partial\mathcal{S}$	Elliptische Fläche im Zustandsraum, siehe Abschnitt 1.3
\cdot^T	transponierter Vektor oder transponierte Matrix
\cdot^H	adjungierter Vektor oder adjungierte Matrix
$\bar{\cdot}$	konjugiert komplex

Allgemeine Konvention

Folgende Konventionen wurden in dieser Arbeit zur Unterscheidung von skalaren Größen, Vektoren und Matrizen verwendet:

- skalare Größen: normale Schriftstärke, Groß- und Kleinbuchstaben (z.B. V, a, α)
- Vektoren: fettgedruckte Kleinbuchstaben (z.B. \mathbf{b}, \mathbf{x})
- Matrizen: fettgedruckte Großbuchstaben (z.B. \mathbf{A}, \mathbf{B})

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Nahezu sämtliche reale Systeme, deren Dynamik mit einem linearen Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1.1)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ beschrieben werden, weisen tatsächlich eine Begrenzung im Systemeingang u auf. Berücksichtigt man diese, ergibt sich ein nichtlineares Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\text{sat}(u) \quad (1.2)$$

mit der nichtlinearen Sättigungsfunktion

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} -u_{max} & \text{für } u \leq -u_{max} \\ u & \text{für } -u_{max} < u < u_{max} \\ u_{max} & \text{für } u \geq u_{max} \end{cases} \quad (1.3)$$

Trotz dieser Nichtlinearität im Systemeingang erfolgt die Auslegung und Analyse einer Regelung oftmals anhand der linearen Darstellung (1.1). Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, solange sich der generierte Stellgrößenverlauf u innerhalb der Grenzen $[-u_{max}; u_{max}]$ bewegt.

Liegt der Regelung ferner ein lineares Regelgesetz der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad (1.4)$$

zu Grunde, ergibt sich für den geschlossenen Kreis ebenfalls eine lineare Dynamik:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

Die Analyse und Auslegung des Regelkreises kann in diesem Falle relativ einfach über die Betrachtung bzw. Platzierung der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ erfolgen.

Will man nun die Regelung dazu nutzen, die Dynamik des Systems hinsichtlich des Abklingverhaltens von Anfangsstörungen zu optimieren, so ist eine lineare Regelung und Stabilitätsanalyse nicht mehr zielführend. In diesem Fall ist aus der Theorie der Optimalen Regelung (siehe z.B. [9]) bekannt, dass eine schnellstmögliche Überführung des Systems in eine gewünschte Ruhelage die vollständige Ausnutzung des Stellgrößenhubs erfordert. Im Hinblick auf eine optimale Ausnutzung der möglichen Systemdynamik hat jedoch eine Rückführung der Form (1.4), welche sicherstellt, dass u im Intervall $[-u_{max}; u_{max}]$ bleibt und somit die Nichtlinearität im Systemeingang nicht aktiv wird, folgende Nachteile:

- Geht man davon aus, dass sich der Zustand \mathbf{x} während des angestrebten Betriebs des Systems innerhalb eines Gebiets $M \subset \mathbb{R}^n$ befindet, so führt eine darauf basierende lineare Rückführung dazu, dass die maximale Stellgröße nur auf Teilen der Randkurve ∂M und damit entsprechend selten ausgenutzt wird.
- Eine Rückführung entsprechend (1.4) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen der Abweichung von der Ruhelage und der generierten Stellgröße her. Die Bestimmung bzw. Dimensionierung von \mathbf{k} muss anhand der Punkte auf der Randkurve ∂M des zulässigen Gebiets M erfolgen. Für die Punkte im Inneren von M , speziell in der Umgebung der Ruhelage, führt eine lineare Regelung dadurch zu einem Stellgrößenverlauf, der weit hinter den tatsächlichen Möglichkeiten des Systems zurück bleibt.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Reglerentwurf soll diese beiden inhärenten Nachteile einer linearen Regelung überwinden. Dies geschieht zum einen, indem die Zustandsrückführung \mathbf{k} in Abhängigkeit des Zustands variiert wird $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, was zu einem nichtlinearen Regelgesetz der Form

$$u = -\mathbf{k}(x)^T \mathbf{x} \quad (1.6)$$

führt. Regelungen entsprechend (1.6) werden als *strukturvariable Regelungen* (SVR) bezeichnet. Im Vergleich zu linearen Regelungen ermöglichen SVR durch die Variation der Rückführung eine deutlich bessere Ausnutzung der Stellgröße.

Die zweite wesentliche Verbesserung bei der Stellgrößenausnutzung wird durch das gezielte Zulassen von Rückführungen erreicht, welche einen Stellgrößenverlauf erzeugen, der betragsmäßig größer als u_{max} ist. Um die Bedeutung dieses zweiten Punktes zu unterstreichen, wird im Titel der Arbeit der Regelungsansatz auch als *sättigend* bezeichnet.

Ein weiterer Punkt, welcher bei der linearen Modellierung und Regelung realer Systeme entsprechend (1.1) oftmals nicht berücksichtigt wird, betrifft speziell instabile Systeme mit Eigenwerten in der offenen rechten Halbebene. Durch die Kombination von instabiler Eigenbewegung und begrenzter Stellgröße können in solchen Systemen nicht mehr alle Punkte des Zustandsraums in die Ruhelage überführt werden. Die Auslegung der Regelung soll deshalb auch unter dem Gesichtspunkt erfolgen, eine möglichst große und analytisch beschreibbare Menge von Punkten im Zustandsraum stabil in die Ruhelage überführen zu können.

1.2 Aufbau der Arbeit

Neben der Motivation der Arbeit werden im einleitenden Kapitel die theoretischen Grundlagen der Ljapunow-Theorie wiederholt, welche für die Stabilitätsanalysen der nichtlinearen Regelung benötigt werden. Des weiteren gibt das erste Kapitel einen Überblick über relevante Arbeiten auf dem Gebiet der *strukturvariablen Regelungen* und der Regelung bzw. Analyse von Systemen mit Stellgrößenbegrenzungen.

In Kapitel 2 wird ein sättigender Regler mit einer linearer Zustandsrückführung entworfen und hinsichtlich seiner Stabilität bzw. Dynamik analysiert. Aufbauend darauf wird in Kapitel 3 ein nachweisbar stabiles Konzept zur Variation der Zustandsrückführung vorgestellt. Die Kapitel 2 und 3 beschreiben die wesentlichen Ideen der vorgestellten *sättigenden strukturvariablen Regelung*.

In Kapitel 4 wird eine Modifikation des grundlegenden Regelungsansatzes beschrieben, mit welcher eine noch bessere Ausnutzung der Stellgröße angestrebt wird.

Die Anwendung der Regelung auf unsichere Strecken wird mit den in Kapitel 5 beschriebenen Modifikationen ermöglicht.

Falls eine Ruhelage außerhalb des Ursprungs stabilisiert werden soll, ist unter Umständen ein gewisser Anteil der Stellgröße allein zum Halten des Zustands in der Ruhelage erforderlich. In solchen Fällen reduziert sich die für die Regelung verfügbare Stellamplitude. Durch den in Kapitel 6 eingeführten Führungsfilter kann man verhindern, dass diese Reduktion der Stellamplitude einen Einfluss auf die Menge der Zustandspunkte hat, welche in eine Ruhelage überführt werden können.

Schwerpunkt der Arbeit stellen Systeme mit einer Eingangsgröße dar. In Kapitel 7 wird jedoch auch untersucht, in wieweit die Grundideen der Regelung auf Systeme mit mehreren Eingängen übertragen werden können.

Zur flüssigeren Darstellung befindet sich ein Großteil der Beweise in Kapitel 9, dem Anhang der Arbeit.

1.3 Theoretische Grundlagen und Definitionen

Sämtliche Stabilitätsuntersuchungen in dieser Arbeit basieren auf der so genannten direkten Methoden von Ljapunow. Eine gute Darstellung dieser Theorie findet man z.B. in [18], [30] oder [10]. Um eine in sich abgeschlossene Arbeit zu erhalten, sollen die für diese Arbeit wichtigen Punkte im Folgenden kurz zusammengefasst werden.

Ausgangspunkt der direkten Methoden von Ljapunow ist die Betrachtung des autonomen, nichtlinearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

mit der einzigen Ruhelage $\mathbf{0}$. Folgende Definition existiert bezüglich der Stabilität dieser Ruhelage:

Definition 1.1 Die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems 1.7 ist

- stabil, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0$$

- instabil, falls sie nicht stabil ist.

- *asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und δ so gewählt werden kann, dass*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Um die Stabilität der Ruhelage mit Hilfe der direkten Methoden von Ljapunow nachweisen zu können, wird die Dynamik einer skalaren Funktion $V(\mathbf{x})$ untersucht, welche ihr Minimum in der Ruhelage des Systems hat. Die Funktion $V(\mathbf{x})$ kann als eine verallgemeinerte Energiefunktion des Systems angesehen werden, deren monotone Abnahme den Schluss erlaubt, dass das System zur Ruhe kommt, bzw. in die Ruhelage strebt und somit asymptotisch stabil ist.

Um mit Hilfe einer solchen Funktion $V(\mathbf{x})$ die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Ruhelage nachweisen zu können, müssen die in Satz 1.1 formulierten Punkte erfüllt sein. Ist dies der Fall, wird $V(\mathbf{x})$ auch als eine Ljapunow-Funktion des Systems bezeichnet.

Satz 1.1 *Sei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Ruhelage des Systems (1.7) und $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches die Ruhelage enthält. Ist in diesem Gebiet D die Funktion $V(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar und es gilt*

- *$V(\mathbf{x})$ ist positiv definit in D , d.h. $V(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $V(\mathbf{0}) = 0$,*
- *$\dot{V}(\mathbf{x})$ ist negativ semi-definit in D , d.h. $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$,*

so ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabil. Ist ferner

- *$\dot{V}(\mathbf{x})$ negativ definit in D , d.h. $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\dot{V}(\mathbf{0}) = 0$,*

so ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Falls eine Ruhelage asymptotisch stabil ist, stellt sich in der Regel auch die Frage, wie weit entfernt von der Ruhelage ein Startpunkt liegen darf, um in diese überführt zu werden. In diesem Zusammenhang soll der Begriff des *Einzugsbereichs einer Ruhelage* eingeführt werden.

Definition 1.2 *Der Einzugsbereich einer Ruhelage bezeichnet die Gesamtheit aller Punkte, die in diese Ruhelage streben.*

Im Hinblick auf den Einzugsbereich einer Ruhelage lassen sich mit Hilfe der direkten Methoden von Ljapunow im wesentlichen zwei Aussagen treffen:

Satz 1.2 Falls die Bedingungen von Satz 1.1 für asymptotische Stabilität im gesamten Zustandsraum gelten und außerdem

- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ immer wenn $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$,

so umfasst der Einzugsbereich der Ruhelage den gesamten Zustandsraum.

Sind die Bedingungen von Satz 1.2 erfüllt, wird die Ruhelage auch als *global* asymptotisch stabil bezeichnet. Oftmals kann jedoch nicht der gesamte Zustandsraum in die Ruhelage überführt werden. Die Ruhelage wird dann als *lokal* asymptotisch stabil bezeichnet. Mit Hilfe der Ljapunow-Theorie kann in diesem Fall eine Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage erfolgen.

Satz 1.3 Falls die Bedingungen von Satz 1.1 für asymptotische Stabilität in einem Bereich D erfüllt sind und dieser durch eine Niveaumenge ∂D von $V(\mathbf{x})$ begrenzt wird (d.h. $V(\mathbf{x} \in \partial D) = c$), so ist der Bereich D ein Teil des Einzugsbereichs der Ruhelage.

Aufbauend auf den in diesem Abschnitt beschriebenen Sätzen und Definitionen wird im Verlauf der Arbeit die Stabilität der gewünschten Ruhelage untersucht bzw. nachgewiesen werden. Folgende Schreibweisen werden hierbei verwendet.

- Ein elliptischer Bereich im Zustandsraum wird mit $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ angegeben:

$$\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < \eta\}.$$

- Der Rand des Bereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ wird mit $\partial \mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ angegeben:

$$\partial \mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \eta\}.$$

1.4 Stand der Forschung

Im Folgenden werden die Arbeiten beschrieben, welche die Ansätze dieser Arbeit wesentlich beeinflusst bzw. motiviert haben.

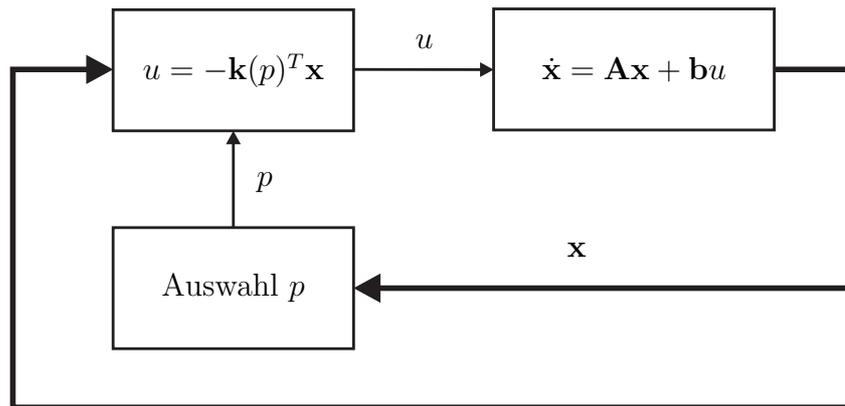


Bild 1.1: Blockschaltbild einer strukturvariablen Regelung

1.4.1 Strukturvariable Regelungen

Entsprechend der Arbeit von Adamy und Flemming [2] versteht man unter *strukturvariablen Regelungen* (SVR) für eine lineare Strecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

solche Regelungen, welche die Stellgröße u als Funktion des Zustands \mathbf{x} und eines Auswahlparameters p bestimmen:

$$u = u(\mathbf{x}, p).$$

Für den Einfluss von p auf das Regelgesetz u sind in der Literatur zwei gängige Ansätze zu finden (siehe auch Übersichtsartikel [2]). Eine Möglichkeit ist es, die Kombination zweier linearer Rückführung \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 über p zu steuern:

$$u = -\frac{1}{2}((\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) + p(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1))^T \mathbf{x} \quad (1.8)$$

wie z.B. in [10] oder

$$u = -(\mathbf{k} + p\mathbf{l})^T \mathbf{x} \quad (1.9)$$

wie z.B. in [13], [12]. Der Auswahlparameter p kann hierbei die diskreten Werte -1 und 1 annehmen [10], oder kontinuierlich im Intervall z.B. $[0; 1]$ variiert werden [13], [12]. Das diskrete Schalten bzw. kontinuierliche Überblenden zwischen zwei linearen Rückführungen begrenzt jedoch die Menge der möglichen Rückführungen stark und ist im Hinblick auf den in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz von geringer Bedeutung.

Deutlich mehr Freiheit bieten die in [19], [32], [24], [20] oder [1] verfolgten Ansätze, bei welchen diskret oder kontinuierlich zwischen verschiedenen Rückführungen geschaltet bzw. variiert wird:

$$u = -\mathbf{k}(p)^T \mathbf{x}.$$

Die Bestimmung des Auswahlparameters p erfolgt hierbei mit Hilfe einer Auswahlfunktion

$$g(\mathbf{x}, p) = 0,$$

welche in expliziter oder impliziter Form vorliegen kann. Bild 1.1 zeigt das typische Blockschaltbild einer entsprechenden strukturvariablen Regelung.

Falls $u(\mathbf{x}, p)$ und $g(\mathbf{x}, p)$ stetige Funktionen in \mathbf{x} und p sind und sich somit ein stetiger Verlauf der Stellgröße u ergibt, spricht man von einer *weichen* strukturvariablen Regelung (WSVR). Ausgangspunkt der WSVR bilden die strukturvariablen Regelungen (SVR) mit diskret schaltenden Regelgesetzen [19], [32]. Bei diesen erfolgt mit Hilfe der Auswahlfunktion g ein diskretes Schalten zwischen linearen Regelgesetzen, was zu entsprechenden Sprüngen in der Stellgröße führt.

Aufgrund der sich ändernden Regelgesetze weisen die WSVR wie auch die SVR eine nichtlineare Dynamik auf, deren Stabilität in der Regel mit Hilfe der Ljapunow-Theorie überprüft wird. Hierbei können im Wesentlichen drei Ansätze unterschieden werden:

- **Eine gemeinsame Ljapunow-Funktion:** Für das strukturvariable System kann eine gemeinsame Ljapunow-Funktion gefunden werden [10].
- **Geschachtelte Ljapunow-Funktionen:** Für jedes Teilsystem existiert eine Ljapunow-Funktion $V_i(\mathbf{x})$. Die Umschaltung von der Rückführungen \mathbf{k}_{i-1} auf die Rückführung \mathbf{k}_i erfolgt auf der Niveaumenge $\partial G_i = \{\mathbf{x} \mid V_i(\mathbf{x}) = c_i\}$ der i -ten Ljapunow-Funktion. Sind die Schaltflächen bzw. Niveaumengen ineinander geschachtelt, das heißt $G_i \subset G_{i-1}$, so ergibt sich daraus die Stabilität des geschalteten Systems (siehe z.B. [19], [32], [1]) .
- **implizite Ljapunow-Funktionen:** Für WSVR wird in [1] ein Ansatz vorgestellt, bei dem der Auswahlparameter p monoton abnimmt und somit eine implizite Ljapunow-Funktion darstellt.

In dieser Arbeit wird die Stabilität der Regelung mit Hilfe der ersten beiden Ansätze gezeigt werden.

1.4.2 Sättigende Regelungen

Abschätzung von Einzugsbereichen

Für Systeme mit konstanter Rückführung existieren umfangreiche Ergebnisse bezüglich der Auswirkung von Sättigungseffekten auf die Stabilität der Ruhelage. Betrachtet man die Sättigungskennlinie z.B. als nichtlineare Funktion im Sektor $[0; 1]$, so kann die Stabilität des sich ergebenden Standardregelkreises mit Hilfe des Popov- oder Kreiskriteriums untersucht werden [18], [27]. Ist der lineare Systemteil asymptotisch stabil, kann auf diese Weise globale Stabilität für ein Regelgesetz gezeigt werden. Die hierfür auszuwertenden Kriterien haben eine anschauliche Bedeutung im Frequenzbereich, was eine relativ einfache Untersuchung der Stabilität ermöglicht. Für Systeme mit instabilem, linearem Anteil erlauben diese Kriterien die Abschätzung eines Einzugsbereichs im Zustandsraum, welche jedoch sehr konservativ ausfallen kann. Die Entwicklung von weniger konservativen Abschätzungen ist ein aktives Forschungsfeld. Eine Weiterentwicklung des Kreiskriteriums kann in den so genannten *Linear Differential Inclusion* (LDI) Ansätzen gesehen werden [16], [17], [3].

Die Grundlage des Kreis- und Popovkriteriums sowie der LDI-Verfahren ist die direkte Methode von Ljapunow zum Nachweis lokaler Stabilität (Satz 1.3). Wendet man diese auf das System (1.2) mit einem stabilisierenden Regelgesetz

$$u = -\mathbf{f}^T \mathbf{x}$$

an und benutzt eine quadratische Ljapunow-Funktion der Form

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$, so kann damit ein Bereich $\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$ als Teil des Einzugsbereichs nachgewiesen werden. Der Wert für η ergibt sich dabei aus dem Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{0}\}} \eta = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (1.10)$$

$$\text{NB: } \dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(-\mathbf{f}^T \mathbf{x}) = 0. \quad (1.11)$$

Anstatt dieses Optimierungsproblem mit nichtlinearer Nebenbedingung (1.11) direkt zu lösen, wird es bei den LDI-Verfahren in einen Satz von linearen Matrixungleichungen (*linear matrix inequalities* kurz LMIs) umgeschrieben. Hierzu wird eine zweite fiktive Rückführung \mathbf{h} eingeführt, für die im Gebiet $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ gilt:

$$|-\mathbf{h}^T \mathbf{x}| \leq u_{max} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}. \quad (1.12)$$

Innerhalb des Gebiets $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ gilt dann für die realisierbare Stellgröße $u_s = \text{sat}(-\mathbf{f}^T \mathbf{x})$:

$$-\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq u_s \leq -\mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad \text{falls} \quad -\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq -\mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad (1.13)$$

$$-\mathbf{h}^T \mathbf{x} \geq u_s \geq -\mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad \text{falls} \quad -\mathbf{h}^T \mathbf{x} \geq -\mathbf{f}^T \mathbf{x}. \quad (1.14)$$

Das heißt, die nichtlineare Funktion $u_s = \text{sat}(u)$ liegt innerhalb der beiden linearen Rückführungen \mathbf{h} und \mathbf{f} , was sich auch im Namen *linear inclusion* widerspiegelt. Erfüllt nun die Matrix \mathbf{P} folgende beiden Ungleichungen:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f}^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f}^T) < 0 \quad (1.15)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) < 0, \quad (1.16)$$

so ist das System im Gebiet $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ asymptotisch stabil.

Um dies zu beweisen, verwendet man die Ljapunow-Funktion V . Wegen der Schranken (1.13) bzw. (1.14) für die tatsächliche nichtlineare Rückführung u_s muss \dot{V} zwischen Werten gebildet mit der Rückführung $-\mathbf{f}$ und mit der Rückführung $-\mathbf{h}$ liegen. Aufgrund der beiden Ungleichungen (1.15) und (1.16) ist aber \dot{V} in beiden Fällen negativ definit, so dass das tatsächliche \dot{V} innerhalb von \mathbb{S} auch negativ definit sein muss, womit die Bedingungen für Satz 1.3 erfüllt sind. Somit ist $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ ein Teil des Einzugsbereichs der Ruhelage bzw. kann als eine Abschätzung für diesen verwendet werden.

Im Vergleich zu dem Optimierungsproblem (1.10), (1.11) wird also bei dem LDI-Ansatz die ursprüngliche nichtlineare Nebenbedingung (1.11) mit Hilfe der beiden LMIs (1.15) und (1.16) sowie der linearen Nebenbedingung (1.12) ausgedrückt, was numerisch günstigere Lösungsverfahren ermöglicht.

Bei den LDI-Ansätzen wird in der Regel nicht die Ljapunow-Funktion vorgegeben. Die Matrix \mathbf{P} ist genauso wie die fiktive Rückführung \mathbf{h} vom Optimierungsalgorithmus zu bestimmen. Um die Größe des gefunden Einzugsbereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ zu bewerten, wird oftmals ein Faktor r eingeführt, welcher ausdrückt, wie stark eine vorgegebene Form \mathbb{X}_r im

Zustandsraum gestreckt werden kann, so dass sie komplett im Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ liegt. Ziel der Optimierung ist es nun, \mathbf{h} und \mathbf{P} so zu wählen, dass r maximal wird. Dadurch stellt die vorzugebende Form \mathbb{X}_r eine zentrale Einflussmöglichkeit bzw. Vorgabe des Benutzers dar.

Durch eine günstige Wahl von \mathbf{P} und u gelingt es in dieser Arbeit, eine *analytische* Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems (1.10), (1.11) zu finden. Im Allgemeinen nehmen jedoch die LDI-Ansätze aufgrund der numerisch günstigen Formulierung des Optimierungsproblems momentan eine dominierende Stellung bei der Abschätzung von Einzugsbereichen für Systeme der Form (1.2) ein.

Saturated High-Gain Regler

Neben der Abschätzung von Einzugsbereichen mittels LMIs wird in [16] vorgeschlagen, die Ausnutzung der Stellgröße durch die Verwendung von so genannten *saturated high-gain* Reglern zu verbessern. Kernidee dieses Konzepts ist die Verwendung von Reglern mit einer unendlichen Verstärkungsreserve. Um eine bessere Stellgrößenausnutzung zu erreichen, wird das ursprüngliche Regelgesetz noch mit einem Faktor größer als eins multipliziert, was aufgrund der unendlichen Verstärkungsreserve ohne weiteres möglich ist. Eine an [16] angelehnte Formulierung dieses Konzepts für das System (1.2) lautet:

Satz 1.4 *Sei die Ableitung der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ im Gebiet $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ bei Verwendung der Stellgröße*

$$u_s = \text{sat}(-k_0 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (1.17)$$

mit $k_0 > 0$ negativ definit und damit $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ Teil des Einzugsgebiets der Ruhelage, dann ist \dot{V} auch für alle

$$u_s = \text{sat}(-k \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x})$$

mit $k > k_0$ innerhalb von $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ negativ definit und $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ bleibt ein Teil des Einzugsgebiets.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Laut Voraussetzung ist

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(-k_0 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta).$$

Da der Term $2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \text{bsat}(-k_0 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \leq 0$ ist, gilt

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \text{bsat}(-k \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \leq 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \text{bsat}(-k_0 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}),$$

wodurch \dot{V} auch bei Verwendung des Regelgesetzes $u = -k \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ innerhalb von $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ sicher negativ definit ist und somit $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ Teil des Einzugsgebiets bleibt. \square

Die Bedeutung von Satz 1.4 liegt darin, dass sämtliche Regelgesetze, die entsprechend (1.17) im Zusammenhang mit einer Ljapunow-Funktion stehen, eine unendliche Verstärkungsreserve besitzen und somit als Basis für high-gain Regler verwendet werden können. Einer beliebigen Verbesserung der Systemdynamik durch Wahl von großen Werten für k stehen jedoch die folgenden beiden Punkte im Wege:

- Eine beliebig große Wahl von k ist alleine schon wegen der damit verbundenen Verstärkung von Messrauschen in der Praxis nicht möglich.
- Die Annahme, dass eine große Wahl von k zu einer Verbesserung der Dynamik führt, begründet sich auf der Beobachtung, dass für jedes \mathbf{x} mit $0 < | -k_0 \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} | < u_{max}$ die Abnahme von V durch eine Wahl von $k > k_0$ verstärkt werden kann. Im Hinblick auf die Dynamik der Überführung in die Ruhelage ist jedoch nicht \dot{V} zu *jedem einzelnen* Zeitpunkt entscheidend, sondern das *durchschnittliche* $\underline{\dot{V}}$ während des gesamten Überführungsvorgangs. Da sich die Trajektorien mit der Wahl von k verändern, kann aus der punktwisen Minimierung von \dot{V} nicht zwingend auf eine Minimierung des durchschnittlichen $\underline{\dot{V}}$ geschlossen werden.

1.4.3 Sättigende strukturvariable Regelungen

Eine wichtige Gemeinsamkeit in den Arbeiten von [1], [2], [19] und [32] stellt die Auswahl von Rückführungen dar, welche realisierbare Stellsignale generieren. Zum besseren Verständnis der sich daraus ergebenden Nachteile bezüglich der Stellgrößenausnutzung soll das Vorgehen in [19] und [32] an einem System mit nur einem Stelleingang erläutert werden. Die Umschaltung von der Rückführung \mathbf{k}_{i-1} auf die Rückführung \mathbf{k}_i erfolgt auf der Niveaumenge $\partial \mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$. Damit der Betrag der Stellgröße innerhalb des Gebiets $\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$

nicht größer als u_{max} wird, muss

$$\eta_i = \frac{u_{max}^2}{\mathbf{k}_i^T \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{k}_i} \quad (1.18)$$

gewählt werden. Bei einer Wahl von η_i entsprechend (1.18) wird $|u| = u_{max}$ genau an zwei Punkten auf der Niveaumenge $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$. Ohne weiteres Umschalten kann die Stellgröße also nur an diesen zwei Punkten theoretisch vollständig ausgenutzt werden. Durch jeden weiteren Schaltvorgang innerhalb von $\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ kommen zwei weitere, theoretisch mögliche Punkte hinzu. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Trajektorie des Systems genau durch einen dieser Punkte läuft, ist jedoch bei beliebigen Startwerten entsprechend gering.

Um diesen Nachteil zu mindern, wird in [7] ein Ansatz vorgestellt, bei welchem auf den Niveaumengen $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ ein größerer Wert für die kommandierte Stellgröße als u_{max} erlaubt ist:

$$\max_{\mathbf{x}} |u(\mathbf{x})| = (1 + \beta)u_{max} \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i). \quad (1.19)$$

Dadurch ergeben sich ganze Bereiche im Zustandsraum, in denen $|u| = u_{max}$ aufgeschaltet werden kann, was zu einer deutlich besseren Ausnutzung der Stellgrößen führt. Da dieses Vorgehen dem Ansatz dieser Arbeit ähnlich ist, soll die Kernidee im Folgenden anhand der Strecke (1.2) mit einem Eingang und Stellgrößenbegrenzung beschrieben werden.

Die Bestimmung der Rückführungen \mathbf{k}_i erfolgt in [7] mittels Reglern, welche das Gütemaß:

$$J_i(\mathbf{x}) = \int_t^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + r_i u^2 \, d\tau \quad (1.20)$$

minimieren. Alle Teilregler optimieren das Gütemaß für dieselbe \mathbf{Q} Matrix, nur die Gewichtung der Stellgröße im Gütemaß wird zwischen den Teilreglern variiert. Von den sich daraus ergebenden so genannten Riccati-Reglern ist bekannt, dass sie eine Verstärkungsreserve von mindestens 0.5 bis ∞ besitzen. Bei einer Wahl von $\beta = 1$ würde das für einen Punkt auf der Randkurve $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ bedeuten, dass nur die Hälfte der kommandierten Stellgröße realisierbar ist, was genau einer Verstärkungsreserve von 0.5 entspricht. In [7] wird gezeigt, dass abhängig von \mathbf{Q} und r_i eine Abnahme der aktiven Ljapunow-Funktion $V_i(\mathbf{x})$ sogar noch dann nachgewiesen werden kann, wenn der Parameter β etwas größer als 1 gewählt wird.

Aufgrund der Kombination von sättigenden und variierenden Rückführungen kommt der Ansatz von De Doná, Goodwin und Moheimani in [7] dem Ansatz dieser Arbeit am

nächsten. Der wesentliche Unterschied zu [7] wird in der äußerst systematischen und transparenten Auslegung der Teilregler gesehen. Wie im Verlauf der Arbeit gezeigt wird, zeichnet sich diese dadurch aus,

- dass eine sehr gute *analytische* Abschätzung des Einzugsbereichs ermöglicht wird;
- dass im wesentlichen vom Anwender nur Schranken für den Parameter vorzugeben sind, welcher über die Teilregler variiert wird. (Keine Vorgabe der u.U. schwierig zu bestimmenden Matrix \mathbf{Q})

Kapitel 2

Sättigende Reglerauslegung

In Vorbereitung zum Entwurf der strukturvariablen Regelung wird in diesem Kapitel für das nichtlineare System (1.2) ein lineares Regelgesetz vorgestellt,

- welches außer von den Größen \mathbf{A} und \mathbf{b} der Strecke nur von einem Parameter α abhängt;
- welches eine analytische Abschätzung des Einzugsbereichs erlaubt.

Aufgrund dieser beiden Eigenschaften ist dieses lineare Regelgesetz sehr gut für den Einsatz in einer strukturvariablen Regelung (Kapitel 3) geeignet.

2.1 Motivierendes Beispiel

Wie bereits in der Einleitung der Arbeit erwähnt, sind die primären Ziele der Regelung

- eine gute Ausnutzung der Stellgröße, um somit möglichst nahe an den zeitoptimalen Fall zu kommen;
- eine große Menge von Punkten im Zustandsraum sicher in die Ruhelage überführen zu können.

Um eine lineare Regelung im Hinblick auf den zweiten Punkt zu optimieren, werden oftmals die LDI-Verfahren verwendet (siehe Abschnitt 1.4.2 bzw. [16], [17], [3]). Aufgrund der folgenden zwei Punkte werden diese Verfahren in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht verwendet:

- Falls die Rückführung und die zugehörigen Ljapunow-Funktion mittels numerischer Optimierungsverfahren bestimmt werden, ist eine kontinuierliche Variation der Rückführung nur sehr schwer möglich, da dazu online in jedem Rechenschritt ein entsprechendes Optimierungsproblem gelöst werden müsste.
- Wie im Abschnitt 1.4.2 beschrieben, ist bei den LDI-Verfahren die vom Benutzer vorzugebende Form \mathbb{X}_r die wesentliche Größe des Gütemaßes und somit entscheidend für das Ergebnis der Optimierungsrechnung. Da die Zustandsgrößen in einem System oftmals verschiedenste physikalische Bedeutungen und Einheiten haben und somit in der Regel keine natürliche Vergleichbarkeit aufweisen, ist eine sinnvolle Wahl der Form \mathbb{X}_r schwierig. Das Optimum bezüglich eines entsprechend undurchsichtigen Gütemaßes zu bestimmen, erscheint jedoch eine fragwürdige Aufgabe.

Obwohl die LDI-Verfahren in dieser Arbeit nicht benutzt werden, soll anhand von Ergebnissen, welche mit diesen für das folgende Beispielsystem erzielt und veröffentlicht wurden, der Ansatz dieser Arbeit motiviert werden.

In [17] wurde für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{sat}(u) \quad (2.1)$$

mit $u_{max} = 1$ und dem Regelgesetz

$$u = -[2 \quad 1] \mathbf{x} \quad (2.2)$$

ein elliptischer Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ gesucht, welcher eine möglichst große Ausdehnung in Richtung $\mathbf{x}_1 = [-1 \quad 0.8]^T$ besitzt. Als Ergebnis der entsprechenden Optimierung wird

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0.117 & 0.0627 \\ 0.0627 & 0.0558 \end{bmatrix} \quad \eta = 1 \quad (2.3)$$

angegeben. Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses sind in Bild 2.1 die Bereiche im Zustandsraum mit $\dot{V} > 0$ bzw. $\dot{V} < 0$ markiert. Die Ellipse $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ kann nun gerade so gewählt werden, dass sie an zwei Punkten an den Bereich mit $\dot{V} > 0$ anstößt. Bis auf diese zwei Punkte liegt $\partial\mathbb{S}$ komplett im Bereich mit $\dot{V} < 0$. Um dies zu verdeutlichen, ist in Bild 2.2 der durch η normierte Verlauf von \dot{V} auf der Randkurve $\partial\mathbb{S}$ dargestellt. Auch

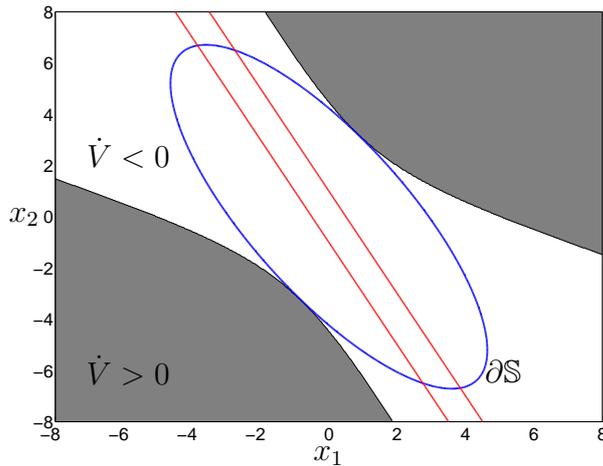


Bild 2.1: Bereiche mit $\dot{V} > 0$ bzw. $\dot{V} < 0$ sowie $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ und die Geraden mit $|u| = u_{max}$

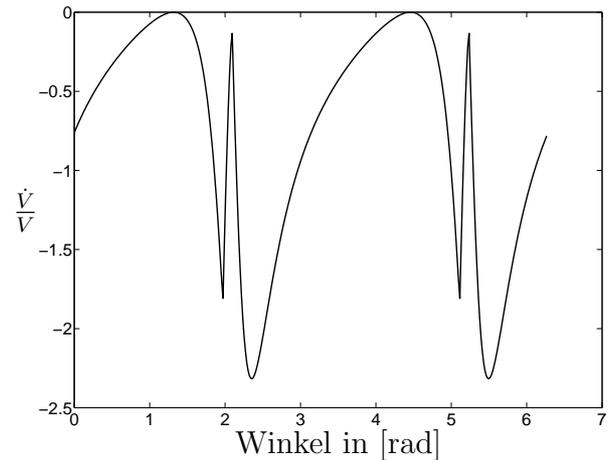


Bild 2.2: \dot{V}/V auf $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$

dort zeigt sich, dass so gut wie überall auf der Randkurve $\dot{V} < 0$ ist (meistens sogar sehr deutlich) und nur an zwei Punkten $\dot{V} = 0$ wird.

Ein Verlauf von \dot{V} auf der Randkurve des Bereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ in der Art des obigen Beispiels ist bei der Abschätzung von Einzugsbereichen mittels quadratischer Ljapunow-Funktionen typisch und dient als Ausgangspunkt für den im nächsten Abschnitt vorgestellten Regleransatz.

2.2 Ansatz für die Reglerauslegung

Im Beispiel des vorhergehenden Abschnitts wurde eine Ljapunow-Funktion für eine gegebene Regelung mit Hilfe einer numerischen Optimierung gefunden. Neben dem Aufwand für ein solches Vorgehen, welcher mit der Ordnung der Strecke ansteigt, wird es auch immer schwieriger eine sinnvolle Form \mathbb{X}_r im Zustandsraum zu definieren, welche Grundlage der Optimierungsrechnung ist.

Andererseits kann man durch die Betrachtung der Bereiche mit $\dot{V} > 0$ und $\dot{V} < 0$ in Bild 2.1 bzw. des Verlaufs von \dot{V} auf der Randkurve Bild 2.2 darauf schließen, dass etliche Punkte im Bereich mit $\dot{V} < 0$, die außerhalb von $\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ liegen, ebenfalls in die Ruhelage streben. Der Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}^*, \eta)$ stellt deshalb eine deutlich zu kleine Abschätzung des tatsächlichen Einzugsbereichs dar.

Anstatt, wie oben beschrieben, für ein geregeltes System im Nachhinein eine möglichst günstige Ljapunow-Funktion zu finden, soll nun bereits die Regelung bzw. Rückführung so bestimmt werden, dass eine günstige Ljapunow-Funktion zur Abschätzung des Einzugsbereichs einfach und systematisch gefunden werden kann.

Ausgangspunkt hierfür ist die Beobachtung, dass \mathbb{S} den exakten Einzugsbereich der Ruhelage beschreibt, wenn der Rand $\partial\mathbb{S}$ die Gebiete mit $\dot{V} > 0$ und $\dot{V} < 0$ exakt trennt, also auf dem gesamten Rand $\dot{V} = 0$ ist. Um dieser Situation möglichst nahe zu kommen, soll die Rückführung so gewählt werden, dass eine Ljapunow-Funktion gefunden werden kann, welche die Forderung

$$\dot{V} = -\alpha V \quad (2.4)$$

erfüllt. Lässt man nun α gegen 0 gehen, kann man erwarten, der gewünschten Situation sehr nahe zu kommen. Verwendet man nun für V eine quadratische Funktion der Form

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

und drückt \dot{V} mit Hilfe der Zustandsdifferentialgleichung (1.2) aus, so ergibt sich aus (2.4)

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(u) = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Forderung (2.6) lässt sich nicht im gesamten Zustandsraum erfüllen, sondern nur in den Bereichen des Zustandsraums, in denen die Systemdynamik linear ist, also dort wo $|u| \leq u_{max}$. Dort vereinfacht sich (2.6) zu

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Da $\dot{V} < 0$ gelten soll, bietet sich ein Regelgesetz an, welches den von u abhängigen Term quadriert und mit einem negativen Vorzeichen belegt

$$u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (2.8)$$

Mit der Rückführung (2.8) wird Gleichung (2.7) zu

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} - 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (2.9)$$

Hieraus ergibt sich für die Bestimmung von \mathbf{P} die algebraische Riccati-Gleichung

$$(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \underbrace{(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I})}_{\mathbf{A}_\alpha} - 2 \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\mathbf{Q}}. \quad (2.10)$$

Durch die Wahl von \mathbf{P} entsprechend (2.10) bzw. von u entsprechend (2.8) wird die Forderung (2.4) in den ungesättigten Bereichen (dort wo $|u| < u_{max}$ gilt) exakt erfüllt. In den gesättigten Bereichen reduziert sich der Betrag von \dot{V} , so dass dort $\dot{V} \geq -\alpha V$ ist. Innerhalb von \mathbb{S} muss außerdem $\dot{V} < 0$ gelten. Insgesamt kann somit durch eine entsprechend kleine Wahl von α ein beliebig schmales Intervall $[-\alpha V; 0]$ für den Verlauf von \dot{V} auf dem Rand $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ erreicht werden. Dies lässt, wie oben erläutert, eine weniger konservative Abschätzung des Einzugsbereichs erwarten.

Eine Besonderheit des hier vorgestellten Reglerentwurfs liegt darin, dass nur ein einziger Parameter α für die Bestimmung des Reglers bzw. der zugehörigen Ljapunow-Funktion vorzugeben ist. In dem nächsten Abschnitt soll nun darauf eingegangen werden, welche Auswirkungen α auf folgende Punkte hat:

- die Lösung \mathbf{P} der Riccati-Gleichung (2.10),
- die Lage der Eigenwerte des geschlossenen Kreises,
- die Abschätzung des Einzugsbereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$.

2.3 Eigenschaften der Regelung

2.3.1 Eigenschaften von \mathbf{P}

Hintergrund der Riccati-Gleichung

Die algebraische Riccati-Gleichung (ARE) wird in der Regel mit folgendem Optimierungsproblem assoziiert (siehe z.B. [9]):

Für ein lineares System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.11)$$

wird die optimale Zustandsrückführung gesucht, welche das Gütemaß

$$J(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{opt}\mathbf{u} dt, \quad \mathbf{R}_{opt} > 0, \quad \mathbf{Q} \geq 0 \quad (2.12)$$

zu einem Minimum macht.

Die Lösung dieses Problems lautet:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_{opt}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ die positiv-semidefinite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}_{opt}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.13)$$

bezeichnet.

Für die im vorhergehenden Abschnitt entworfene Regelung ist ebenfalls eine Riccati-Gleichung zu lösen. Allerdings ist, wie in (2.10) gekennzeichnet, die konstante Matrix \mathbf{Q} in der Riccati-Gleichung $\mathbf{0}$. Außerdem existiert kein Gütemaß der Form (2.12) in Bezug auf das System (1.2), welches durch die vorgeschlagene Regelung (2.8),(2.10) zum Minimum gemacht werden würde. Obwohl also die vorgestellte Reglerauslegung keine inhaltliche Verwandtschaft mit einer optimalen Regelung aufweist, sind die Ergebnisse, welche im Hinblick auf die Lösung der Riccati-Gleichung existieren, durchaus für diese Arbeit von Interesse.

Existenz und Eigenschaften von \mathbf{P}

Im Zusammenhang mit der ARE

$$\mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.14)$$

mit $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ wurde in [29] der folgende Satz zur Existenz der Lösung \mathbf{P} aufgestellt:

Satz 2.1 (dort Theorem 2.1.) :

a) *Es existiert höchstens eine Lösung \mathbf{P} der ARE, die das System $[\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{R}\mathbf{P}]$ (asymptotisch) stabilisiert oder vollständig destabilisiert (d.h. $-\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{R}\mathbf{P}$ stabilisiert).*

b) *Die stabilisierende Lösung \mathbf{P} existiert genau dann, wenn*

1. *$(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{R})$ stabilisierbar ist,*
2. *$(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q})$ keine nicht beobachtbaren Pole auf der imaginären Achse hat, und*
3. *\mathbf{R} "genügend klein" ist, $\mathbf{R} < \mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. D.h. für \mathbf{R} existiert ein Supremum $\mathbf{R}_0 \geq \mathbf{0}$, unterhalb welchem \mathbf{P} existiert.*

Bei der Reglerauslegung nach Abschnitt 2.2 ist

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= -2\mathbf{b}\mathbf{b}^T \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_\alpha &= \mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}.\end{aligned}$$

In diesem Fall ist b3 immer erfüllt und die Existenz einer stabilisierenden Lösung hängt nur von b1 und b2 ab. Bedingung b1 ist elementar für den Entwurf einer Regelung. Es soll daher für den Rest der Arbeit gelten, dass $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{R})$ für $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ immer stabilisierbar ist.

Bedingung b2 wird immer dann verletzt, wenn für einen Eigenwert λ_i von \mathbf{A} gilt: $\alpha = -2\text{Re}(\lambda_i)$. Falls Bedingung b1 jedoch erfüllt ist, kann \mathbf{P} an diesen Stellen stetig fortgesetzt werden (siehe hierzu Anmerkung auf Seite 25). Für diese Fortsetzung muss gelten:

Satz 2.2 Falls \mathbf{R} dargestellt werden kann als $\mathbf{R} = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ mit beliebiger reeller Matrix \mathbf{B} , und $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q})$ nicht beobachtbare Eigenvektoren \mathbf{v}_i mit Eigenwerten λ_i auf der imaginären Achse besitzt, so muss für die Lösung $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ der Riccati-Gleichung (2.14) gelten

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Beweis: Multipliziert man (2.14) von links und rechts mit \mathbf{v}_i^H bzw. \mathbf{v}_i so erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i^H \mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{A}_\alpha \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^H \mathbf{Q} \mathbf{v}_i &= 0 \\ \underbrace{(\bar{\lambda}_i + \lambda_i)}_0 \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \underbrace{\mathbf{v}_i^H \mathbf{Q} \mathbf{v}_i}_0 &= 0 \\ (\mathbf{B}^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i)^H \mathbf{B}^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{B}^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Da \mathbf{A}_α und \mathbf{B} nur reelle Einträge haben, wurde ausgenutzt, dass $\mathbf{A}_\alpha^T = \mathbf{A}_\alpha^H$ und $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^H$. Ferner gilt $\mathbf{v}_i^H \mathbf{A}_\alpha^H = (\mathbf{A}_\alpha \mathbf{v}_i)^H = (\lambda_i \mathbf{v}_i)^H = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^H$, wobei $\bar{\lambda}_i$ der konjugiert komplexe Eigenwert zu λ_i ist. \square

Laut Satz 2.2 wird die Rückführung $u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ von den Eigenvektoren von \mathbf{A}_α bzw. \mathbf{A} mit Eigenwerten auf der imaginären Achse bzw. mit einem Realteil von $-\frac{\alpha}{2}$ nicht angeregt und verschiebt diese Eigenwerte somit nicht (siehe auch Satz 2.4). Bezüglich der Matrix

\mathbf{A} kann deshalb \mathbf{P} auch als stabilisierende Lösung angesehen werden, wenn $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q})$ nicht beobachtbare Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt.

Falls eine stabilisierende Lösung existiert, so gilt laut [29] für diese:

Satz 2.3 (dort Theorem 2.2.) :

a) Die stabilisierende Lösung \mathbf{P} ist genau dann positiv-semidefinit, $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$, wenn $(\mathbf{A}_\alpha, \hat{\mathbf{R}}_2)$ stabilisierbar ist, wobei $\hat{\mathbf{R}}_2$ aus der eindeutigen Zerlegung von \mathbf{R} in zwei positiv-semidefinite orthogonale Matrizen folgt, $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}_1 - \hat{\mathbf{R}}_2$ mit $\hat{\mathbf{R}}_1, \hat{\mathbf{R}}_2 \geq \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{0}$.

b) \mathbf{P} ist genau dann singular, wenn $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q})$ nicht beobachtbare, asymptotisch stabile Pole besitzt. Der Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ von \mathbf{P} wird durch die Eigenvektoren dieser stabilen, nicht beobachtbaren Pole aufgespannt.

Im geregelten System werden diese Pole nicht verschoben.

Im vorliegenden Fall ist $\hat{\mathbf{R}}_2 = 2\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ und $\hat{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{0}$. Dass $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{b}\mathbf{b}^T)$ stabilisierbar ist, war bereits Voraussetzung für die Existenz einer stabilisierenden Lösung \mathbf{P} . Deshalb ist die stabilisierende Lösung \mathbf{P} immer positiv-semidefinit.

Da $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ist, wird \mathbf{P} singular, sobald \mathbf{A}_α Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{A}_\alpha)$ mit $Re(\lambda_i(\mathbf{A}_\alpha)) < 0$ besitzt.

Da für die Eigenwerte von \mathbf{A}_α gilt

$$\lambda_i(\mathbf{A}_\alpha) = \lambda_i(\mathbf{A}) + \frac{\alpha}{2}, \quad (2.16)$$

wird \mathbf{P} singular, sobald \mathbf{A} Eigenwerte λ_i hat mit $Re(\lambda_i(\mathbf{A})) < -\frac{\alpha}{2}$. Die entsprechenden Eigenvektoren befinden sich dann im Nullraum von \mathbf{P} , so dass diese Eigenwerte durch die Rückführung (2.8) nicht verschoben werden. Für die Eigenwerte des geregelten Systems gilt:

Satz 2.4 : Habe die Matrix \mathbf{A} genau

- q Eigenwerte mit einem Realteil größer als $-\frac{\alpha}{2}$ ($Re(\lambda_{1..q}(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2}$),
- p Eigenwerte mit einem Realteil von genau $-\frac{\alpha}{2}$ ($Re(\lambda_{q+1..q+p}(\mathbf{A})) = -\frac{\alpha}{2}$),

so hat die Matrix des geregelten Systems $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}$ genau $l = q + p$ Eigenwerte mit einem Realteil von $-\frac{\alpha}{2}$.

Beweis: Aufgrund von Satz 2.2 ist $\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{v}_{q+1 \dots q+p} = \mathbf{0}$. Deshalb werden die p Eigenwerte bei $-\frac{\alpha}{2}$ nicht verschoben.

Um zu zeigen, dass die q Eigenwerte rechts von $-\frac{\alpha}{2}$ nach $-\frac{\alpha}{2}$ verschoben werden, schreibt man die Riccati-Gleichung (2.10) um in

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_r^T \mathbf{P} = -\alpha \mathbf{P}. \quad (2.17)$$

Seien \mathbf{v}_i ($i = 1 \dots q$) die q durch die Rückführung verschobenen Eigenvektoren von \mathbf{A}_r . Durch Multiplikation von (2.17) von rechts und links mit \mathbf{v}_i bzw. dem adjungierten Eigenvektor \mathbf{v}_i^H erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{A}_r \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^H \mathbf{A}_r^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i &= -\alpha \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i \\ \lambda_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i + \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i &= -\alpha \mathbf{v}_i^H \mathbf{P} \mathbf{v}_i \\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) &= -\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Da \mathbf{A}_r nur reelle Einträge hat, wurde ausgenutzt, dass $\mathbf{A}_r^T = \mathbf{A}_r^H$. Ferner gilt $\mathbf{v}_i^H \mathbf{A}_r^H = (\mathbf{A}_r \mathbf{v}_i)^H = (\lambda_i \mathbf{v}_i)^H = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^H$, wobei $\bar{\lambda}_i$ der konjugiert komplexe Eigenwert zu λ_i ist. \square

Zur Veranschaulichung von Satz 2.4 und Satz 2.3 ist für eine Matrix \mathbf{A} mit Eigenwerten bei -2 , -1 , 1 , 2 , in Bild 2.3 der Zusammenhang zwischen α und dem Realteil der Eigenwerte des geregelten Systems $\lambda(\mathbf{A}_r)$ dargestellt. In dem Intervall $\alpha \in]0; 2]$ werden nur die beiden instabilen Eigenwerte von \mathbf{A} verschoben, während die Eigenwerte von \mathbf{A} bei -1 bzw. -2 unverändert bleiben. Letztere werden erst ab einem $\alpha > 2$ bzw. $\alpha > 4$ verschoben.

Anmerkung zur stetigen Fortsetzung von \mathbf{P}

In sämtlichen Diskussionen zur Existenz bzw. zur Definitheit der Lösung der Riccati-Gleichung (2.14) wird vorausgesetzt, dass $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{Q})$ keine unbeobachtbaren Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Hamilton-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha & \mathbf{R} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat.

Bei der vorgestellten Regelung ist $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, wodurch diese Forderung immer dann verletzt wird, wenn Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}_α auf der imaginären Achse liegen, bzw. wenn $\alpha =$

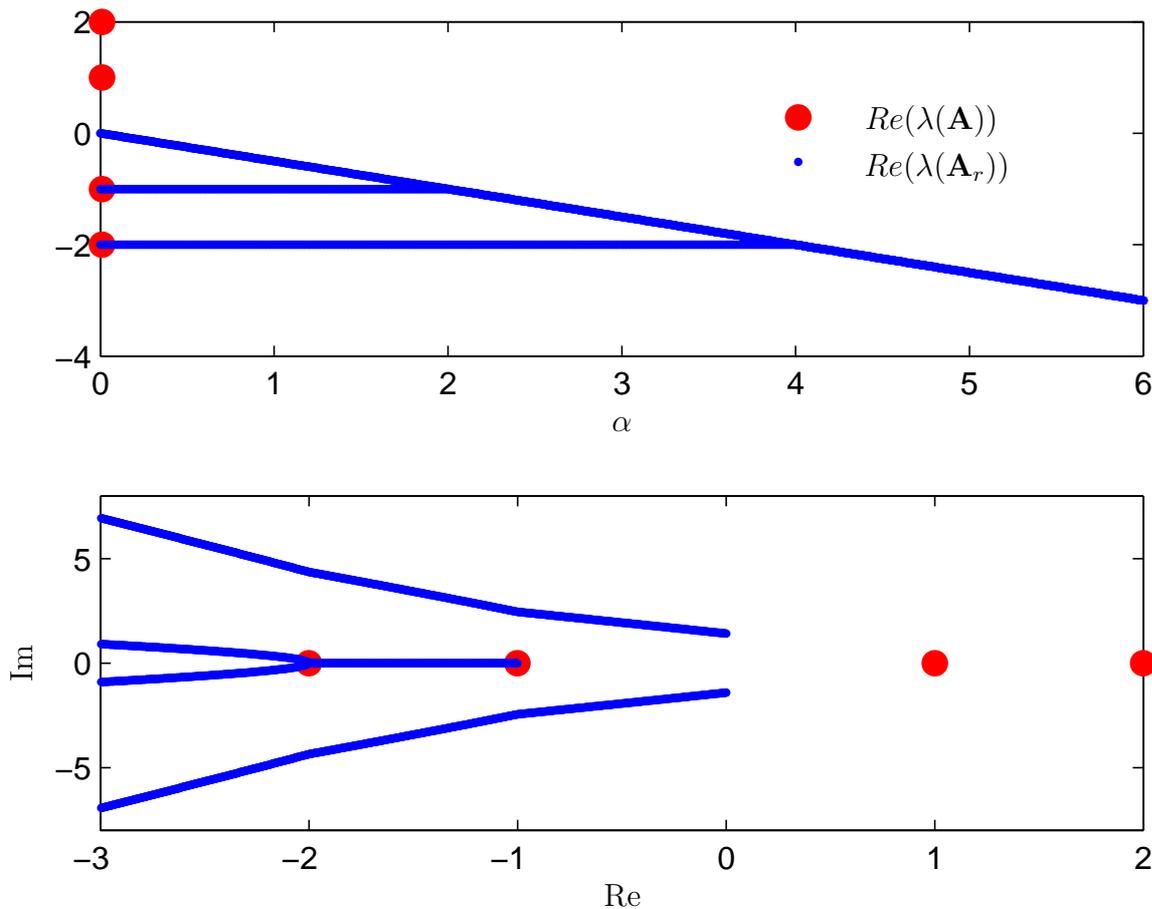


Bild 2.3: Realteil (oben) und Lage (unten) der Eigenwerte von \mathbf{A} und \mathbf{A}_r

$\alpha^* = -2Re(\lambda(\mathbf{A}))$ gewählt wird. Da die Riccati-Gleichung (2.14) jedoch eine stetige Funktion in α ist, muss die Lösung an dieser Stelle stetig fortgesetzt werden können. In dieser Arbeit wird dieser Sonderfall deshalb nicht weiter explizit betrachtet. Stattdessen wird angenommen, dass alle Eigenschaften, die für $\mathbf{P}(\alpha^* \pm \Delta\alpha)$ gelten, auch für die stetige Fortsetzung $\mathbf{P}(\alpha^*)$ gelten.

2.3.2 Abschätzung des Einzugsbereichs

Für die Abschätzung des Einzugsbereichs mit Hilfe einer Ljapunow-Funktion entsprechend Satz 1.3 soll die quadratische Funktion (2.5) verwendet werden. Die Abgrenzung der Abschätzung erfolgt dann durch eine Niveaumenge $\partial\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$. Da innerhalb von $\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$ die Ableitung \dot{V} negativ definit sein muss, ist die größtmögliche Abschätzung $\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$

durch das kleinste η gegeben, für welches auf der Niveaumenge $\partial\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$ zum ersten Mal $\dot{V} = 0$ auftritt. η ist also die Lösung des Optimierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{x}} \eta = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.19)$$

$$\text{NB: } \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathcal{N}(\mathbf{P})\}. \quad (2.21)$$

Durch die Einschränkung des Lösungsraums für \mathbf{x} entsprechend (2.21) werden die trivialen, aber nicht interessierenden Lösungen im Nullraum von \mathbf{P} bzw. im Ursprung ausgeschlossen. Die Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung sind Stationärpunkte der zugehörigen Lagrangeschen Hilfsfunktion:

$$L(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mu \dot{V}.$$

Unter Verwendung von (2.7) lautet die Nebenbedingung $\dot{V} = 0$:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(u) = 0.$$

Entsprechend der Riccati-Gleichung (2.10) kann $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$ durch $-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}$ ersetzt werden. Ferner muss die Lösung des Optimierungsproblems im gesättigten Bereich des Zustandsraums liegen, da nur dort $\dot{V} = 0$ möglich ist. Deshalb kann für $\text{sat}(u)$ auch $u_{max} \text{sgn}(-\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = u_{max} \text{sgn}(u)$ geschrieben werden. Die Nebenbedingung bzw. die Lagrangesche Hilfsfunktion wird dadurch zu:

$$\text{NB: } 0 = \mathbf{x}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u_{max} \text{sgn}(u) \quad (2.22)$$

$$L(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mu (\mathbf{x}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u_{max} \text{sgn}(u)).$$

An den Stationärpunkten von L verschwinden die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= 2\mathbf{P} \mathbf{x} + \mu (-2\alpha \mathbf{P} \mathbf{x} + 4\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + 2\mathbf{P} \mathbf{b} u_{max} \text{sgn}(u)) \\ &= \mathbf{P} ((2 - 2\mu\alpha) \mathbf{x} + \mu (4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + 2u_{max} \text{sgn}(u)) \mathbf{b}) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da die Funktion $\text{sgn}(u)$ in den gesättigten Bereichen des Zustandsraums jeweils konstant ist, taucht die Ableitung dieser Funktion in (2.23) nicht auf.

Berücksichtigt man, dass in Gleichung (2.23) die Klammerausdrücke vor \mathbf{x} und \mathbf{b} skalare Größen darstellen und die Lösungen im Nullraum von \mathbf{P} ausgeschlossen wurden, so muss

die Lösung \mathbf{x}^* des Optimierungsproblems darstellbar sein als

$$\mathbf{x}^* = a\mathbf{b}. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe der Nebenbedingung (2.22) kann der Faktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt werden:

$$a = \pm \frac{2}{2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha} u_{max}. \quad (2.25)$$

Für \mathbf{x}^* ergeben sich damit die Lösungen

$$\mathbf{x}^* = \pm \frac{2}{2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha} \mathbf{b} u_{max}, \quad (2.26)$$

welche beide zu demselben Wert für η führen

$$\eta = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{P} \mathbf{x}^* = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} u_{max}^2. \quad (2.27)$$

Neben α und u_{max} hängt η nur noch von dem Term $\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}$ ab. Für diesen gilt:

Satz 2.5 *Habe die Matrix \mathbf{A} unter Berücksichtigung der Vielfachheit genau q Eigenwerte mit einem Realteil größer als $-\frac{\alpha}{2}$ und bezeichne γ die Summe dieser Eigenwerte:*

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) > -\frac{\alpha}{2} \quad i = 1..q \quad (2.28)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^q \lambda_i(\mathbf{A}). \quad (2.29)$$

Dann gilt für die positiv semi-definite Lösung \mathbf{P} der algebraischen Riccati-Gleichung (2.10)

$$\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} = \gamma + q \frac{\alpha}{2}. \quad (2.30)$$

(Beweis siehe Anhang 9.1.2)

Mit (2.30) kann η geschrieben werden als:

$$\eta = 2 \frac{2\gamma + q\alpha}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2} u_{max}^2. \quad (2.31)$$

Anders als bei den in Abschnitt 1.4.2 vorgestellten Verfahren ermöglicht der hier gezeigte Reglerentwurf eine analytische Lösung (2.27) bzw. (2.31) des Optimierungsproblems (2.20), (2.21). Auf Basis dieser analytischen Lösung können die folgenden drei Sätze (Beweise siehe Anhang 9.1) bezüglich der Abschätzung \mathbb{S} abgeleitet werden.

Satz 2.6 : Solange $\alpha > 0$ so klein gewählt wird, dass genau ein Eigenwert von \mathbf{A} durch die Rückführung verschoben wird, verändert sich die Größe von \mathbb{S} nicht.

Falls der verschobene Eigenwert ursprünglich in der offenen rechten Halbebene gelegen hat, beschreibt \mathbb{S} den maximal möglichen Einzugsbereich des Systems exakt.

(Beweis siehe Anhang 9.1.3)

Satz 2.6 ist von Bedeutung, falls \mathbf{A} genau einen Eigenwert in der offenen rechten Halbebene besitzt. In diesem Fall kann entsprechend Satz 2.6 mit Hilfe des zweitgrößten Eigenwertes $\lambda_2(\mathbf{A})$ eine sinnvolle Untergrenze für α , nämlich $\alpha_{min} = -2\text{Re}(\lambda_2)$ angegeben werden. Wählt man α kleiner als α_{min} , vergrößert sich der Bereich \mathbb{S} nicht mehr, aber die Regelung wird entsprechend der Eigenwertverschiebung (Satz 2.4) langsamer.

Interessanterweise stellt in diesem Spezialfall der so gefundene Bereich \mathbb{S} exakt den Einzugsbereich dar, welche auch durch Verwendung eines anderen Reglers nicht mehr vergrößert werden kann.

Satz 2.6 bleibt auch gültig, falls der größte Eigenwert auf der imaginären Achse, also in der geschlossenen rechten Halbebene liegt. In diesem Fall kann jedoch auch mit Satz 2.7 ein $\hat{\alpha}$ bzw. α_{min} gefunden werden, mit welchem der gesamte Zustandsraum als Einzugsbereich nachgewiesen werden kann.

Satz 2.7 : Falls für alle Eigenwerte $\lambda_{1..n}$ der Matrix \mathbf{A} gilt

$$\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})) \leq 0 \quad i = 1..n, \quad (2.32)$$

so existiert ein $\hat{\alpha} \geq 0$, so dass für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ (von oben) der Wert η gegen unendlich geht und $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ den gesamten Zustandsraum beinhaltet. $\hat{\alpha}$ ergibt sich hierfür zu:

$$\hat{\alpha} = \frac{-2\gamma}{q-1} \quad (2.33)$$

wobei q die kleinste Anzahl der verschobenen Eigenwerte für $\alpha > \hat{\alpha}$ bezeichnet.

(Beweis siehe Anhang 9.1.4)

Aufgrund von Satz 2.7 ist es also möglich, für Strecken ohne Eigenwerte mit positivem Realteil den Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ auf den gesamten Zustandsraum auszudehnen. Dies ist insofern plausibel, da es in solchen Systemen keine interne ‘‘Kraft’’ gibt, welche den Zustandspunkt

in einer Richtung mit abstandsproportionaler Stärke von der Ruhelage “wegdrückt” und somit in dieser Richtung eine feste Grenze für den Bereich \mathbb{S} setzen würde.

Falls alle Eigenwerte von \mathbf{A} in der offenen linken Halbebene liegen ($Re(\lambda(\mathbf{A})) < 0$), ist $\hat{\alpha} > 0$. In diesem Fall stellt $\hat{\alpha}$ eine Untergrenze für eine sinnvolle Wahl von α dar. Eine weitere Verkleinerung von α würde zu keiner Vergrößerung des Einzugsbereichs, sondern nur zu einer langsameren Regelung führen.

Satz 2.8 : Wenn $\alpha > \hat{\alpha}$ bzw. so gewählt wird, dass $q > 1$ ist, so gilt:

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\alpha} < 0 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}' = \frac{d\mathbf{P}}{d\alpha} \geq \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

(Beweis siehe Anhang 9.1.5)

Dies bedeutet, dass die Bereiche $\mathbb{S}(\alpha) = \mathbb{S}(\mathbf{P}(\alpha), \eta(\alpha))$ mit wachsendem α kleiner werden und ineinander liegen. Umgekehrt werden die Bereiche $\mathbb{S}(\alpha)$ mit fallendem α immer größer. Die maximal möglichen Bereiche sind im Folgenden nochmals in Abhängigkeit von der Lage der Eigenwerte von \mathbf{A} zusammengefasst:

- Falls alle Eigenwerte in der geschlossenen linken Halbebene liegen, $Re(\lambda_i) \leq 0$, kann der gesamte Zustandsraum als Einzugsbereich abgeschätzt werden. (siehe Satz 2.7)
- Falls genau ein Eigenwert in der offenen rechten Halbebene liegt, $Re(\lambda_1) > 0$, so beschreibt $\mathbb{S}(\alpha = -2Re(\lambda_2))$ den exakten Einzugsbereich des Systems. (siehe Satz 2.6)
- Falls mehr als ein Eigenwert in der offenen rechten Halbebene liegt, wächst $\mathbb{S}(\alpha)$ für $\alpha \rightarrow 0$ kontinuierlich an (siehe Satz 2.8). Im Grenzfall $\alpha = 0$ beschreibt \mathbb{S} einen Bereich, in welchem gilt $\dot{V} = 0$. Die Trajektorien sämtlicher Punkte innerhalb von \mathbb{S} verlaufen dann auf Niveauflächen von V . Die Regelung stabilisiert die Ruhelage in diesem Grenzfall zwar noch, allerdings nicht mehr *asymptotisch*. Für $\alpha = 0$ ist damit genau der Grenzfall zwischen asymptotisch stabilen und instabilen Verhalten erreicht. Wie bei der Auslegung der Regelung erhofft, ergibt sich für diesen Grenzfall tatsächlich der größte Bereich \mathbb{S} .

Wendet man die vorgestellte Regelung auf Systeme 2. Ordnung an, so beschreiben die obigen Punkte genau die Ergebnisse, welche in [4] für allgemeine lineare und teilweise auch nichtlineare Regelgesetze für Systeme 2. Ordnung gefunden wurden.

Nachtrag zur Berechnung von η

Betrachtet man bei der Berechnung von η die Nebenbedingung des Optimierungsproblems in der Form (2.22), so erkennt man, dass auch in den gesättigten Gebieten des Zustandsraums nur dann $\dot{V} = 0$ erfüllt werden kann, wenn die Matrix $\Phi = -\alpha\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}$ nicht negativ definit ist. In diesem Nachtrag soll nun gezeigt werden, unter welchen Bedingungen diese Forderung erfüllt ist.

Zur Überprüfung, wann Φ sicher nicht negativ definit ist, bildet man $\mathbf{b}^T\Phi\mathbf{b}$

$$\mathbf{b}^T\Phi\mathbf{b} = -\alpha\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}(-\alpha + 2\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}). \quad (2.36)$$

Berücksichtigt man außerdem, dass laut Satz 2.5 für $\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}$ gilt:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} = \gamma + q\frac{\alpha}{2}$$

so wird daraus:

$$\mathbf{b}^T\Phi\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}(-\alpha + 2\gamma + q\alpha). \quad (2.37)$$

- Für instabile \mathbf{A} existiert mindestens ein Eigenwert mit positivem Realteil. Damit gilt auf jeden Fall $\gamma > -(q-1)\frac{\alpha}{2}$ und somit ist $\mathbf{b}^T\Phi\mathbf{b} > 0$. $\Rightarrow \Phi$ nicht negativ definit.
- Für stabile \mathbf{A} mit $n > 1$ und $\alpha > \hat{\alpha}$ ist aufgrund der Definition von $\hat{\alpha}$ ebenfalls $\gamma > -(q-1)\frac{\alpha}{2}$. $\Rightarrow \Phi$ nicht negativ definit.
- Für stabile \mathbf{A} mit $n = 1$ ist $\mathbf{A} = A < 0$. Ersetzt man Φ durch $AP + PA = 2AP$, erkennt man, dass in diesem Fall Φ immer negativ definit ist.

Abgesehen von stabilen Systemen 1. Ordnung ist die Bedingung, dass Φ nicht negativ definit ist, bei einer sinnvollen Wahl von α immer erfüllt.

Für stabile Strecken 1. Ordnung ist der vorgestellte Entwurf jedoch nicht interessant bzw. zu aufwändig. Diese können mit jeder beliebigen Rückführung der Form $u = -kx$ stabil geregelt werden. Ferner kann man mit einer beliebigen Ljapunow-Funktion der Form $V = x^2P$ mit $P > 0$ für diese Systeme zeigen, dass sich der Einzugsbereich der Ruhelage auf den gesamten Zustandsraum erstreckt.

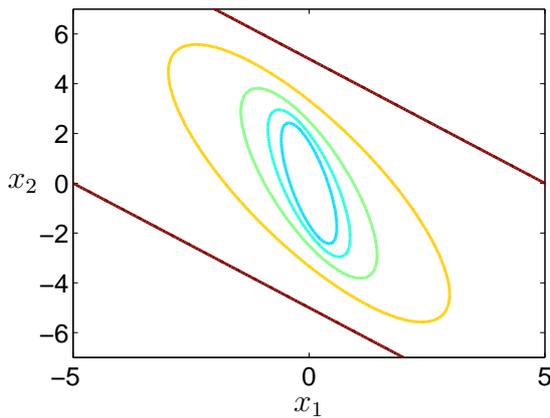


Bild 2.4: $\mathbb{S}(\alpha)$ für $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6$
(von außen nach innen)

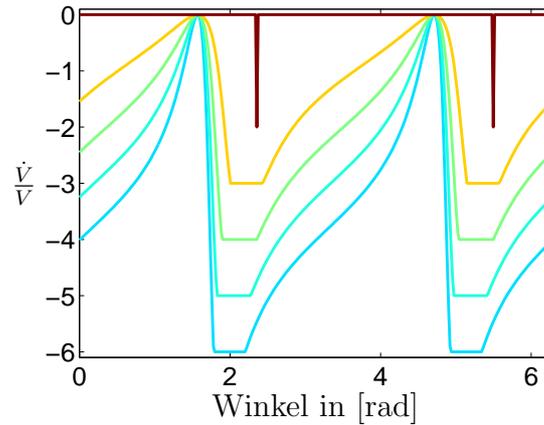


Bild 2.5: \dot{V}/V auf $\partial\mathbb{S}(\alpha)$ für $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6$
(von oben nach unten)

Beispiel

Zur Veranschaulichung der Aussagen von Satz 2.6 und Satz 2.8 sind in Bild 2.4 bzw. Bild 2.5 die Ergebnisse für die Anwendung der Regelung auf das Beispielsystem (2.1) gezeigt. Wie in Bild 2.4 zu erkennen, nimmt die Größe von $\mathbb{S}(\alpha)$ mit wachsendem α ab. Entsprechend Satz 2.6 ist $\mathbb{S}(\alpha)$ für $\alpha \leq 2$ konstant, da in diesem Bereich nur ein Eigenwert von \mathbf{A} , nämlich der bei $+1$, verschoben wird.

Die Singularität der Matrix \mathbf{P} für eine Wahl von $\alpha \leq 2$ kann man daran erkennen, dass die größte Ellipse in Richtung des stabilen Eigenwertes von \mathbf{A} ($\mathbf{v}_2 = [1 \ -1]^T$), der den Nullraum von \mathbf{P} aufspannt, eine unbegrenzte Ausdehnung aufweist und somit zu zwei Parallelen entartet.

In Bild 2.5 ist der Verlauf von \dot{V}/V auf dem Rand von \mathbb{S} dargestellt. Wie erwartet, liegt dieser im Intervall $[-\alpha; 0]$. Ferner zeigt sich, dass für $\alpha = 2$ der Verlauf von \dot{V}/V auf dem gesamten Rand zu 0 wird (die beiden Spitzen bei -2 liegen in Richtung des stabilen Eigenwertes bzw. des Nullraums von \mathbf{P}). Dies bestätigt, dass \mathbb{S} für $\alpha \leq 2$ den Einzugsbereich exakt beschreibt. (siehe Satz 2.6)

Die Beobachtung, dass auf allen Kurven die Punkte mit $\dot{V} = 0$ in derselben Richtung, nämlich bei einem Winkel von $\frac{\pi}{2}$ bzw. der Richtung von \mathbf{b} liegen, entspricht genau dem Ergebnis der Optimierungsrechnung.

2.3.3 Zielkonflikt bei konstantem Regelgesetz

Kombiniert man die Aussagen von Satz 2.8 und Satz 2.4, so wird deutlich, dass sich bei Verwendung eines konstanten Regelgesetzes der folgende Zielkonflikt ergibt:

Mit wachsendem α wird die Regelung immer schneller, aber der nachweisbare Einzugsbereich $\mathbb{S}(\alpha)$ wird immer kleiner.

Dieser Zielkonflikt bildet die Grundlage der im nächsten Kapitel vorgestellten strukturvariablen Regelung.

Kapitel 3

Sättigende strukturvariable Regelung

3.1 Ansatz

Wie im vorhergehende Kapitel gezeigt, führt die dort vorgestellte Regelung zu einem Zielkonflikt zwischen der Dynamik bzw. der Platzierung der Eigenwerte des geregelten Systems und dem nachweisbaren Einzugsbereich $\mathbb{S}(\alpha) = \mathbb{S}(\mathbf{P}(\alpha), \eta(\alpha))$. Um diesen Konflikt zu mindern, bietet es sich an, den einzigen Parameter des Reglerentwurfs, α , abhängig vom Zustand \mathbf{x} im Betrieb zu variieren. Der sich hieraus ergebende strukturvariable Regler wird im Folgenden als α -Regler bezeichnet. Die Variation von α soll so erfolgen, dass sich der aktuelle Zustand \mathbf{x} immer im nachweisbaren Einzugsbereich $\mathbb{S}(\alpha)$ befindet. Falls man also für α ein Intervall $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ zulassen will, erscheint folgende Auswahlstrategie für α naheliegend:

Wähle das größtmögliche α aus dem Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$, für welches \mathbf{x} in $\mathbb{S}(\alpha)$ liegt.

Die Umsetzung dieser Strategie kann nun auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Zum einen durch kontinuierliche Variation von α , in diesem Fall spricht man auch von einer weichen Variation von α bzw. einer weich strukturvariablen Regelung, zum anderen durch Schalten zwischen einer endlichen Anzahl von Werten $\{\alpha_1 \dots \alpha_l\}$, welche im Folgenden auch als diskrete Variation bezeichnet wird. Da die erstere Methode keine Sprünge in der Stellgröße aufweist, stellt diese die bevorzugte Variante dar. Bei manchen Anwendungen ist aufgrund mangelnder Rechenleistung eine weiche Variation jedoch nicht möglich. Für diese muss auf eine diskrete Variation zurückgegriffen werden, welche deshalb in diesem Kapitel auch beschrieben wird.

Die Bestimmung von α entsprechend obiger Auswahlstrategie führt auf das Optimierungsproblem:

$$\max_{\alpha} \quad \alpha \quad (3.1)$$

$$\text{NB:} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} < \eta(\alpha). \quad (3.2)$$

Laut Satz 2.8 liegen die Bereiche $\mathbb{S}(\alpha)$ ineinander. Deshalb muss sich \mathbf{x} für das größte α am Rand von $\mathbb{S}(\alpha)$ befinden. Anstelle des obigen Optimierungsproblems soll deshalb α im Falle einer kontinuierlichen Variation über die implizite Gleichung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} = \beta \eta(\alpha) \quad (3.3)$$

mit $\beta \rightarrow 1$ (z.B. $\beta = 0.99$) bestimmt werden. Sobald das α aus (3.3) größer als α_{max} ist, wird α auf α_{max} reduziert.

Im Falle eines diskreten Schaltens zwischen einer endlichen Anzahl von Werten α kann das Optimierungsproblem (3.1), (3.2) direkt gelöst werden. Ein numerisch effizienter Suchalgorithmus ist in Abschnitt 3.4.3 beschrieben.

3.2 Stabilität

3.2.1 Stabilität bei kontinuierlicher Variation von α

Die Variation von α entsprechend (3.3) führt zu einem in zweifacher Weise nichtlinearen Stellgrößenverlauf u_s

$$u_s = \text{sat}(u) = \text{sat}(-\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}).$$

Die auf die Strecke tatsächlich wirkende Stellgröße u_s weist einerseits aufgrund der Sättigungsfunktion $\text{sat}(u)$ eine Nichtlinearität auf, andererseits führt die Variation von α zu einer nicht konstanten Zustandsrückführung $u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}$.

Die Auswirkung der Sättigungsfunktion auf die Stabilität liegt im wesentlichen darin, dass bei einem konstanten α asymptotische Stabilität nur innerhalb eines Bereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ nachgewiesen werden kann. Dies geschieht, wie in Abschnitt 2.3.2 gezeigt, mit Hilfe der Ljapunow-Funktion

$$V_{\alpha} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}, \quad (3.4)$$

wobei der Index α anzeigen soll, dass α in (3.4) ein *konstanter Parameter* der Funktion ist. Solange \mathbf{x} in $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ liegt, ist die Ableitung \dot{V}_α negativ-definit.

Um die Stabilität der Regelung mit variierendem α zu zeigen, soll die Funktion

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha(\mathbf{x})) \mathbf{x} \quad (3.5)$$

verwendet werden, wobei nun α und \mathbf{P} entsprechend der Auswahlstrategie (3.3) *variiert* werden und somit vom Zustand \mathbf{x} abhängen. Bei der Bestimmung von \dot{V} sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Lösung von (3.3) liegt im zulässigen Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$. Solange dies der Fall ist, wird α tatsächlich variiert und es gilt:

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} = \beta \eta(\alpha).$$

2. Die Lösung von (3.3) ist größer als α_{max} . In diesem Fall wird $\alpha = \alpha_{max}$ gesetzt und ist somit konstant. ($\dot{\alpha} = 0$)

Im ersten Fall wird \dot{V} zu:

$$\dot{V} = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}}_{\dot{V}_\alpha} + \mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{P}}{d\alpha} \mathbf{x} \dot{\alpha} = \beta \frac{d\eta}{d\alpha} \dot{\alpha}. \quad (3.6)$$

Da $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\alpha)$, ist $\dot{V}_\alpha < 0$. Laut Satz 2.8 ist $\mathbf{P}' \geq 0$ und $\eta' < 0$. Deshalb folgt aus (3.6)

$$\dot{\alpha} > 0 \quad (3.7)$$

und damit

$$\dot{V} = \beta \eta' \dot{\alpha} < 0. \quad (3.8)$$

Solange α variiert wird, ist also $\dot{V} < 0$ und α wächst bis $\alpha = \alpha_{max}$. Sobald $\alpha = \alpha_{max}$ ist, wird $\dot{\alpha} = 0$ und man erhält für \dot{V}

$$\dot{V} = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}}_{\dot{V}_\alpha} < 0. \quad (3.9)$$

In beiden Fällen ist also $\dot{V} < 0$. Somit ist die Regelung mit variierendem α asymptotisch stabil. Der Einzugsbereich entspricht dem Einzugsbereich einer Regelung mit $\alpha = \alpha_{min}$ also dem größten Einzugsbereich aller $\alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$. Allerdings wird durch die Variation von α die Stellgröße deutlich besser ausgenutzt als mit einer konstanten Wahl von $\alpha = \alpha_{min}$, was am Beispiel in Abschnitt 3.3 verdeutlicht wird.

3.2.2 Stabilität bei diskreter Variation von α

Ähnlich wie z.B. in [1] und [19] beschrieben, kann die Stabilität der Regelung bei diskreter Variation von α gezeigt werden, falls für alle $\alpha_{1\dots l}$ mit $\alpha_{i+1} > \alpha_i$

1. die Schaltfläche $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ auf der von α_{i-1} nach α_i geschaltet wird, Niveaumengen einer im Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ gültigen Ljapunow-Funktion ist und
2. die Schaltflächen ineinander geschachtelt sind: $\mathbb{S}(\mathbf{P}_l, \eta_l) \subset \mathbb{S}(\mathbf{P}_{l-1}, \eta_{l-1}) \subset \dots \subset \mathbb{S}(\mathbf{P}_1, \eta_1)$.

Der Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}_1, \eta_1)$ gehört dann sicher zum Einzugsbereich der strukturvariablen Regelung.

Beweis: Laut Voraussetzung 1 ist $V_i = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}$ eine gültige Ljapunow-Funktion, d.h. $\dot{V}_i < 0$. Da weiterhin die Schaltfläche $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ eine Niveaumenge von V_i ist, bleibt der Zustand auf jeden Fall innerhalb von $\mathbb{S}(\mathbf{P}_i, \eta_i)$.

- Falls $i < l$ ist, folgt aus $\dot{V}_i < 0$, dass der Zustand asymptotisch gegen die Ruhelage strebt. Vor dem Erreichen der Ruhelage muss der Zustand auf die Schaltfläche $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}_{i+1}, \eta_{i+1})$ treffen. Dies wiederholt sich bis $i = l$ gilt.
- Sobald $i = l$ ist, folgt aus $\dot{V}_i < 0$ die asymptotische Stabilität des Systems.

□

Zwischen dem Nachweis der Stabilität bei kontinuierlicher und bei diskreter Variation bestehen große Ähnlichkeiten. Dies gilt auch für die Voraussetzungen:

- In beiden Fällen werden Ljapunow-Funktionen für die Regelung mit konstantem α vorausgesetzt (V_α bei kontinuierlicher und V_i bei diskreter Variation).
- In beiden Fällen wird α auf dem Rand $\partial\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ dieser Ljapunow-Funktionen variiert.
- Ein zentraler Punkt bei der kontinuierlichen Variation von α ist die Voraussetzung, dass $\mathbf{P}' \geq 0$ und $\eta' < 0$ gilt. Diese Forderung führt bei einer diskreten Variation automatisch dazu, dass die Schaltflächen ineinander geschachtelt sind.

Falls also $\mathbf{P}(\alpha)$ und $\eta(\alpha)$ so bestimmt wurden, dass eine stabile, kontinuierliche Variation möglich ist, sind auch die Bedingungen für eine diskrete Variation von α erfüllt. Eine

Approximation der kontinuierlichen Variation durch eine diskrete Variation ist deshalb immer möglich.

3.3 Beispiel

Ein in der Literatur gerne verwendetes Beispiel für strukturvariable Regelungen stellt die Tiefenregelung eines U-Boots dar [2], [14]. Die Dynamik des U-Boots wird dabei approximiert mit:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.005 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.004 \end{bmatrix}^T$$

$$u_{max} = 2.5e - 5.$$

Die Tauchtiefe entspricht der ersten Komponente x_1 des Zustandsvektors \mathbf{x} . Ziel der Regelung ist es, die Anfangsstörung $\mathbf{x}(0)$ möglichst schnell auszuregeln.

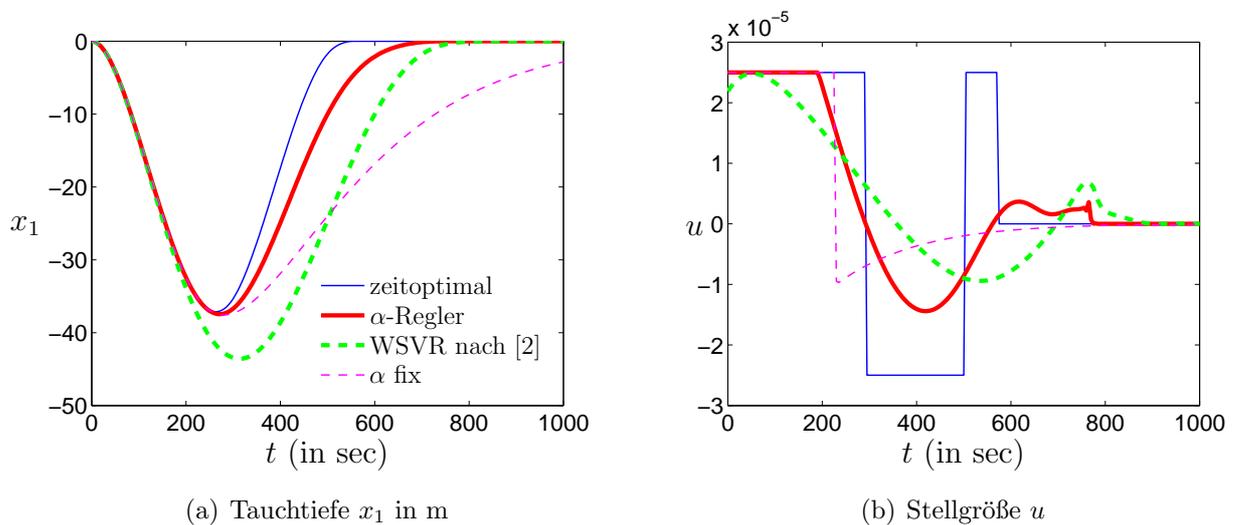


Bild 3.1: Simulationbeispiel: U-Boot-Dynamik

Für den α -Regler wurde ein Intervall $\alpha \in [0.01; 0.58]$ vorgegeben und der Parameter β in der Auswahlstrategie (3.3) zu 0.95 gewählt. Zur Bewertung des α -Reglers sind in Bild 3.1 auch die Tauchtiefen- und Stellgrößenverläufe einer zeitoptimalen Regelung, einer weichen

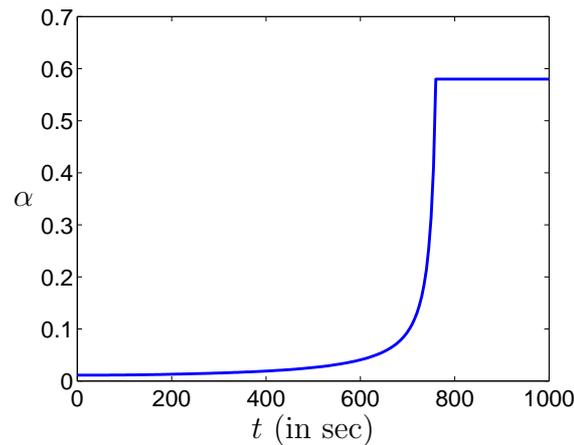


Bild 3.2: Variation von α

strukturvariablen Regelung nach [2] und einer Regelung mit festem $\alpha = 0.0111$ dargestellt. Der feste Wert von $\alpha = 0.0111$ ist so gewählt, dass sich der Anfangszustand entsprechend der Auswahlstrategie (3.3) im gesicherten Einzugsbereich der Regelung befindet.

Die zeitoptimale Regelung stellt eine natürliche Grenze für die erreichbare Dynamik dar und dient deshalb als Referenzgröße für die Bewertung der Regelungen. Als Maß für die Dynamik der Regelungen ist in Tabelle 3.1 die Zeit $T_{0.1}$ bis zum Erreichen einer Tiefe von 0.1m gegeben. Wie zu erwarten war, erzielt der α -Regler durch die erheblich

Regler	zeitoptimal	α -Regler	WSVR nach [2]	α fest
$T_{0.1}$	541	707	792	1013
$T_{0.1}/T_{opt}$	1	1.31	1.46	1.87

Tabelle 3.1: Vergleich der Ausregelzeiten (absolut und relativ zur optimalen Zeit)

bessere Ausnutzung der Stellgröße ein deutlich besseres Ergebnis als die Regelung mit festem α . Die dargestellte weiche strukturvariable Regelung WSVR nach [2] stellt eine der schnellsten in der Literatur zu findenden Regelungen für das Beispiel dar. Bei ihr wird auch eine variable Zustandsrückführung verwendet. Die Variation der Rückführung erfolgt dort jedoch so, dass mit Hilfe von Ljapunow-Funktionen immer $\text{sat}(u) = u$ sichergestellt werden kann (siehe auch Abschnitt 1.4). Wie man in Bild 3.1(b) erkennen kann, führt dies zu einer geringeren Stellgrößenausnutzung, was sich in einer entsprechend längeren

Ausregelzeit niederschlägt.

Basierend auf den Werten in Tabelle 3.1 kann der vorgestellte α -Regler im Vergleich zu den existierenden Reglern als durchaus leistungsfähig eingestuft werden.

3.4 Algorithmus zur Bestimmung von α

Entsprechend (3.3) muss für die Bestimmung von α eine Nullstelle von

$$\Delta\eta(\alpha, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} - \beta\eta(\alpha) \quad (3.10)$$

gefunden werden. Ein für solche Probleme sehr gängiges Verfahren ist der Algorithmus von Dekker-Brent. Dieser wird sowohl in [28] zur Nullstellensuche vorgeschlagen, als auch in Matlab in der Funktion *fzero* zu diesem Zweck verwendet. Für das gegebene Problem hat sich jedoch der im Folgenden vorgestellte Algorithmus als deutlich effizienter herausgestellt.

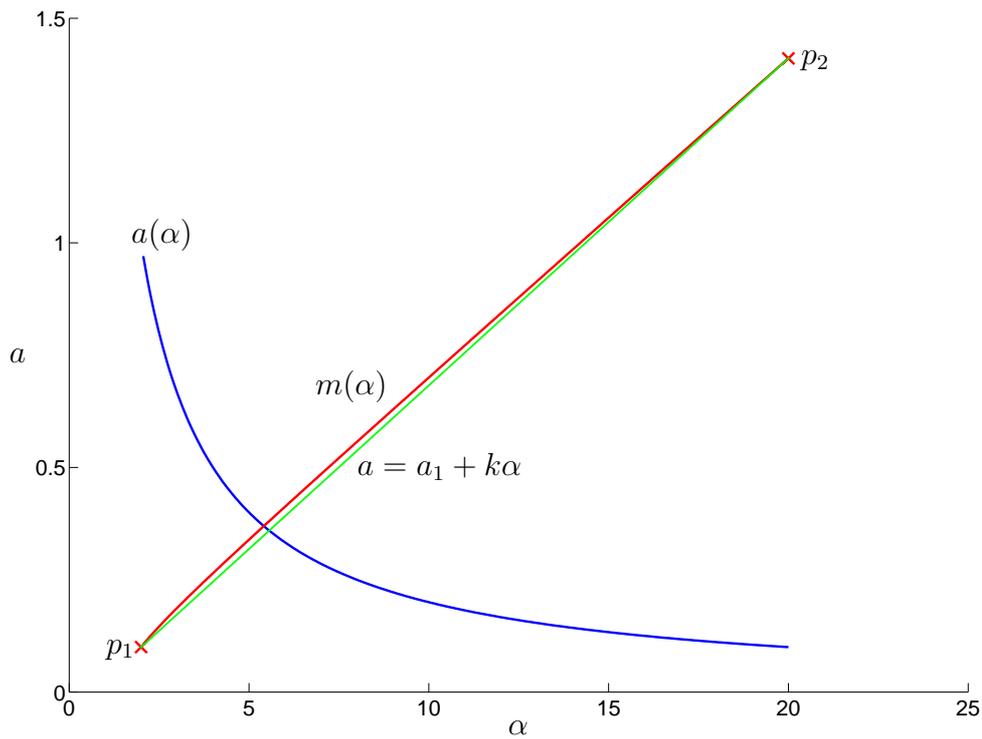
3.4.1 Beschreibung des Algorithmus

Die Grundidee des Algorithmus ist die Nullstellensuche von (3.10) nicht am Punkt \mathbf{x} durchzuführen, sondern das Problem in Richtung \mathbf{b} zu projizieren und dort zu lösen. Dies hat den Vorteil, dass in Richtung \mathbf{b} die Nullstelle von (3.10) analytisch gefunden werden kann. Da die Projektion des Problems in Richtung \mathbf{b} fehlerhaft ist, hat der vorgeschlagene Algorithmus auch iterativen Charakter. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass dieses Vorgehen günstiger ist.

Ablauf des Algorithmus:

1. **Bestimmung des Intervalls** $[\alpha_1; \alpha_2]$ innerhalb dessen das gesuchte α liegen muss. Hierzu muss gelten $\Delta\eta(\alpha_1, \mathbf{x}) < 0$ und $\Delta\eta(\alpha_2, \mathbf{x}) > 0$.
2. **Projektion des Problems in Richtung \mathbf{b} :** Unter einer Projektion verstehe man im Folgenden die Verschiebung von \mathbf{x} auf einer Niveaumenge der Funktion $V_i = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha_i) \mathbf{x}$. In Richtung \mathbf{b} wird damit aus dem Punkt \mathbf{x} der Punkt $a_i \mathbf{b}$ mit:

$$a_i = \sqrt{\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha_i) \mathbf{x}}{\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\alpha_i) \mathbf{b}}}. \quad (3.11)$$

Bild 3.3: Nullstellensuche in Richtung \mathbf{b}

Durch die Projektion (3.11) ändert sich der Wert von $\Delta\eta$ nicht, so dass auch in Richtung \mathbf{b} gilt:

$$\Delta\eta(\alpha_1, a_1\mathbf{b}) < 0$$

$$\Delta\eta(\alpha_2, a_2\mathbf{b}) > 0.$$

In Richtung \mathbf{b} kann mit (2.30) und (2.31) aus der Bedingung $\Delta\eta(\alpha, a\mathbf{b}) = 0$ ein expliziter Ausdruck für $a(\alpha)$ gefunden werden:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} - \beta\eta(\alpha) \\ 0 &= a^2\left(\gamma + q\frac{\alpha}{2}\right) - 4\beta\frac{\gamma + q\frac{\alpha}{2}}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2}u_{max}^2 \\ 0 &= a^2 - \frac{4\beta u_{max}^2}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2} \\ \Rightarrow a(\alpha) &= \sqrt{\beta}\frac{2u_{max}}{(2\gamma + (q-1)\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

In Bild 3.3 ist der Zusammenhang (3.12) sowie die Punkte $p_1 = (\alpha_1, a_1)$ und $p_2 = (\alpha_2, a_2)$ für den mittleren Testfall aus Tabelle 3.2 dargestellt.

3. **Lösen des Problems in Richtung \mathbf{b} :** Die gesuchte Lösung muss auf der Kurve $a(\alpha)$ entsprechend (3.12) liegen. Ferner muss die Rückprojektion von $\mathbf{a}\mathbf{b}$ auf einer Niveaumenge von $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}$ wieder auf den Punkt \mathbf{x} führen. Letztere Bedingung ist in Bild 3.3 durch die Kurve $a = m(\alpha)$ dargestellt. Approximiert man $m(\alpha)$ durch die Gerade:

$$a = a_1 + \underbrace{\frac{a_2 - a_1}{\alpha_2 - \alpha_1}}_k (\alpha - \alpha_1) = a_1 + k(\alpha - \alpha_1), \quad (3.13)$$

so ergibt sich für den gesuchten Schnittpunkt der Kurven $a(\alpha)$ und $m(\alpha)$ eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} a_1 + k(\alpha - \alpha_1) &= \sqrt{\beta} \frac{2u_{max}}{(2\gamma + (q-1)\alpha)} \\ k(q-1)\alpha^2 + ((a_1 - k\alpha_1)(q-1) + 2k\gamma)\alpha + \dots \\ \dots + 2\gamma(a_1 - k\alpha_1) - 2\sqrt{\beta}u_{max} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die gesuchte Lösung α_3 von (3.14) ist die, welche im Intervall $[\alpha_1; \alpha_2]$ liegt.

4. **Kontraktion des Suchintervalls:** Als letzter Schritt wird $\Delta\eta(\alpha_3, \mathbf{x})$ berechnet. Falls $\Delta\eta(\alpha_3, \mathbf{x}) < 0$ ist, wird das Suchintervall auf $[\alpha_3, \alpha_2]$ verkleinert, ansonsten auf $[\alpha_1; \alpha_3]$. Mit diesem verkleinerten Suchintervall wird die nächste Iteration gestartet.

Wie in Bild 3.3 zu sehen, kann $m(\alpha)$ sehr gut mit einer Geraden approximiert werden. Aus diesem Grund konvergiert der vorgeschlagene Algorithmus sehr schnell zur gesuchten Lösung, wie auch das folgende Beispiel bestätigt.

3.4.2 Numerisches Beispiel

Um die Leistungsfähigkeit des Algorithmus zu zeigen, wird dieser auf das Beispielsystem (2.1) aus Abschnitt 2.1 angewandt. Die erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 3.2 zu finden. Wie dort zu sehen ist, wurde zum Testen ein sehr großes Anfangsintervall für α vorgegeben. Außerdem wurde der Zustandspunkt senkrecht zur Richtung \mathbf{b} gewählt. Aufgrund dieser beiden Punkte wird der durch die Projektion verursachte Fehler relativ groß. Für den projektionsbasierten Algorithmus stellt das numerische Beispiel deshalb einen der

Startintervall für α :	[2.001; 20]	[2.001; 20]	[2.001; 20]			
Zustand \mathbf{x} :	[0.4 0] ^T	[0.2 0] ^T	[0.01 0] ^T			
α exakt	2.8533	3.8958	16.8477			
β	1	1	1			
Iterationsfolge von α Projektion Dekker-Brent		4.0322	2.2156			
	2.9522	2.0483	3.9018	3.6848	16.8894	18.3777
	2.8576	2.9312	3.8961	3.6848	16.8483	17.062
	2.8535	2.8410	3.8958	3.7429	16.8477	16.8628
	2.8533	2.8531		3.8996		16.8478
			3.8957		16.8477	
			3.8958			

Tabelle 3.2: Nullstellensuche mit Dekker-Brent- und Projektions-Algorithmus

ungünstigsten Fälle dar. Trotzdem konvergiert der vorgeschlagene Algorithmus bei allen drei Testfällen deutlich schneller als das Verfahren nach Dekker-Brent.

3.4.3 Diskrete Bestimmung von α

Falls α aus einer endlichen Menge von Werten ausgewählt wird, werden zu diesen $\alpha_{1\dots l}$ Werten vorab die entsprechenden Riccati-Gleichungen offline gelöst und die sich ergebenden Matrizen \mathbf{P}_i und Einzugsbereiche $\mathcal{S}_i(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ abgespeichert. Im Betrieb muss dann nur noch aus einer Menge von l Werten der größte α Wert gefunden werden, welcher die Forderung (3.2) erfüllt. Der im Folgenden beschriebene Bisektions Algorithmus (siehe z.B. [28]) löst dieses Problem mit $\log_2(l-1)$ Rechenschritten und kann als Standardalgorithmus zur Lösung einer solchen Suche angesehen werden.

- Es werden die Lösungen \mathbf{P}_i bzw. η_i für $(2^r + 1)$ α Werte berechnet und in aufsteigender Reihenfolge abgespeichert ($\alpha_{i+1} > \alpha_i$). In der Praxis wurden gute Ergebnisse mit z.B. 65 oder 129 Stützstellen für α erzielt.
- Die Auswahl des größte α Wertes kann nun durch das im Folgenden beschriebene wiederholte Halbieren des Suchintervalls erfolgen:

1. Es wird überprüft, ob die gesuchte Lösung im Intervall $[\alpha_1; \alpha_{max}]$ liegt. Hierzu wertet man $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x} \geq \eta_1$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_{max} \mathbf{x} \leq \eta_{max}$ aus. Falls die letzte Ungleichung erfüllt ist, lautet die Lösung $\alpha = \alpha_{max}$. Falls die erste Ungleichung erfüllt ist, wird $\alpha = \alpha_1$ gesetzt. Falls beide Ungleichungen nicht erfüllt sind, liegt die gesuchte Lösung im Intervall $] \alpha_a; \alpha_b [$ mit $a = 1$ und $b = 2^r + 1 = l$.
2. Zur Halbierung des Suchintervalls testet man das α an der Stelle $c = 0.5(a+b)$, also in der Mitte des Intervalls:
 Falls $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_c \mathbf{x} < \eta_c$ ist, wird $a = c$ gesetzt;
 falls $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_c \mathbf{x} > \eta_c$ ist, wird $b = c$ gesetzt;
 falls $\mathbf{x}^T \mathbf{P}_c \mathbf{x} = \eta_c$ ist, stellt α_c die gesuchte Lösung dar.
3. Schritt 2 wird $(r - 1)$ -mal wiederholt (bis $b = a + 1$). Die gesuchte Lösung ist dann α_a .

Durch Zulassen von diskreten α Werten und vorab Berechnung der entsprechenden Matrizen \mathbf{P}_i bzw. der Werte η_i reduziert sich somit der Online-Rechenaufwand zur Lösung des Optimierungsproblems (3.1), (3.2) erheblich.

Diesem Vorteil stehen hauptsächlich die unerwünschten Sprünge in der Stellgröße gegenüber, welche sich beim Schalten von einem diskreten α Wert zum nächsthöheren ergeben. Durch Bereitstellung einer genügend großen Anzahl von α Werten bzw. Reglern, zwischen denen geschaltet wird, können die Sprünge in der Stellgröße jedoch beliebig stark gemindert werden.

Kapitel 4

Modifikation des α -Reglers zur besseren Stellgrößenausnutzung

In Abschnitt 3.3 wurde die Leistungsfähigkeit des α -Reglers anhand eines Beispiels demonstriert. Bezüglich der existierenden Regelungen ist der α -Regler als durchaus gut einzustufen. Im Hinblick auf die zeitoptimale Lösung bzw. auf die Stellgrößenausnutzung besteht aber offensichtlich noch Verbesserungspotential. Der im Folgenden vorgestellte Ansatz zur Modifikation der α -Regelung ist sicher stabil und hat sich bei allen bis jetzt betrachteten Systemen sehr gut bewährt. Allerdings existiert kein Beweis, dass die vorgestellte Modifikation zu einer schnelleren Ausregelung von Störungen führt. Stattdessen können nur die Überlegungen dargelegt werden, welche die Modifikation motiviert haben.

4.1 Vergrößerung von u

Für den Nachweis der Stabilität (Abschnitt 3.2) wurde benötigt, dass die Ableitung \dot{V}_α (der Index soll andeuten, dass α nicht variiert wird) negativ definit ist. Betrachtet man \dot{V}_α

$$\dot{V}_\alpha = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{b} \text{sat}(u_\alpha) \quad (4.1)$$

$$u_\alpha = -\mathbf{b}^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{x}, \quad (4.2)$$

so erkennt man, dass die Verwendung einer Stellgröße u , die dasselbe Vorzeichen, aber einen größeren Betrag als u_α aufweist, zu einer schnelleren Abnahme von V_α führen würde.

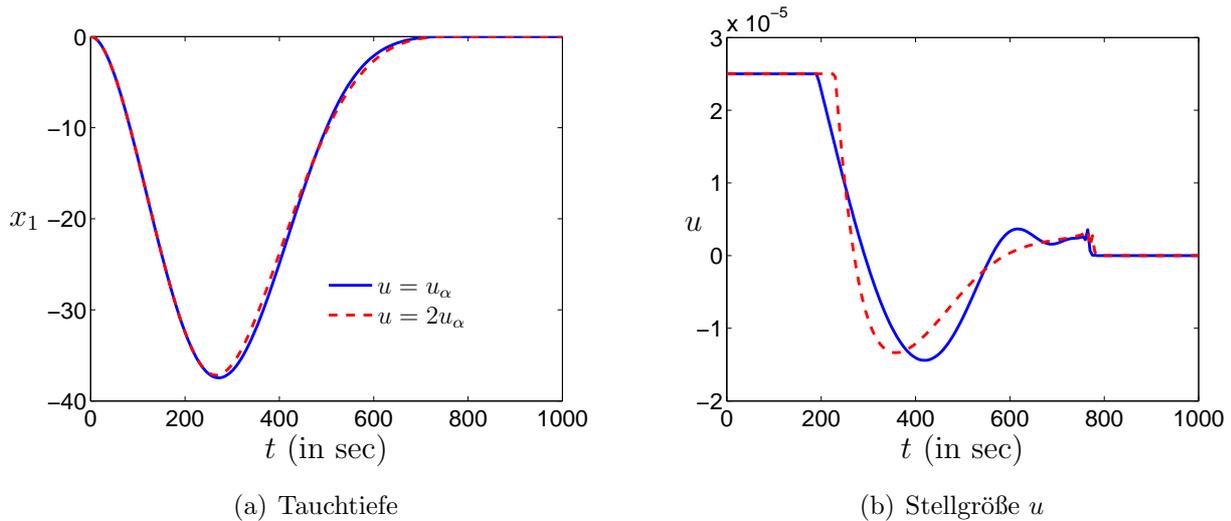


Bild 4.1: Vergleich von $u = u_\alpha$ und $u = 2u_\alpha$

In Bild 4.1 ist für das Beispiel 3.3 der Verlauf des ursprünglichen α -Reglers und der eines Reglers mit der Rückführung $u = -2\mathbf{b}^T\mathbf{P}_\alpha\mathbf{x} = 2u_\alpha$ gezeigt. Obwohl der Regler mit $u = 2u_\alpha$ in der Anfangsphase eine bessere Stellgrößenausnutzung erreicht, kann durch die Modifikation die gesamte Ausregelzeit nicht verkürzt werden. Im Gegenteil, sie verlängert sich sogar um ca. 10 sec. Der Grund hierfür ist, dass bei der obigen Überlegung nur die Dynamik der aktuellen Ljapunow-Funktion berücksichtigt wurde. Da sich die Matrix \mathbf{P} aber verändert, kann eine starke Abnahme von V bezüglich der aktuellen Matrix \mathbf{P}_α zu einer Zunahme von V bezüglich einer Matrix \mathbf{P}_{α^*} mit $\alpha^* > \alpha$ führen. Um nun zu entscheiden, wann eine Erhöhung von u günstig für den *gesamten* Ausregelvorgang ist, wird deshalb neben u_α auch $u_m = u_{\alpha_{max}}$, also die Rückführung mit dem größten α betrachtet. Eine für den gesamten Vorgang günstige Erhöhung von u erscheint dann sinnvoll, wenn u_m und u_α das gleiche Vorzeichen haben. In diesem Fall nimmt sowohl V_α als auch $V_m = V_{\alpha_{max}}$ schneller ab. Basierend auf dieser Überlegung lautet die erste Modifikation der Regelung:

In den Bereichen, wo u_m und u_α das gleiche Vorzeichen haben und $|u_m| > |u_\alpha|$ ist, verwendet man statt u_α den Wert u_m .

4.2 Kompromissbildung in u

Die Modifikation von u in den Bereichen, wo u_m und u_α verschiedene Vorzeichen besitzen, bzw. wo $|u_m| < |u_\alpha|$ ist, soll zum einen stetig an die obige Modifikation anschließen, zum anderen soll auch in diesen Bereichen versucht werden, eine für den gesamten Vorgang günstige Modifikation zu finden. Um beide Ziele zu erreichen, wird in diesen Bereichen ein u_k bestimmt, welches einen Kompromiss zwischen u_m und u_α darstellt. Die Grundidee dieses Kompromisses ist, von der Forderung $\dot{V}_\alpha = -\alpha V_\alpha$ abzuweichen und eine etwas kleiner Abnahme innerhalb der aktuellen Ljapunow-Funktion V_α zuzulassen. Die Wahl von u_k soll deshalb so nahe an u_m erfolgen, wie die Forderung:

$$\dot{V}_\alpha = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{b}u_k = -\alpha V_\alpha f \quad (4.3)$$

mit $0 < f < 1$ zulässt. Der Parameter f ist demnach ein Maß für die Möglichkeit zur Kompromissbildung. Für $f \rightarrow 1$ liegt u_k entsprechend nahe bei u_α , während für $f \rightarrow 0$ eine relativ große Abweichung von u_k gegenüber u_α möglich wird. Die Bestimmung von u_k entsprechend (4.3) hat folgende Vorteile:

1. Die Stabilität der Regelung wird durch die Modifikation nicht beeinträchtigt, denn es gilt entsprechend (4.3) weiterhin $\dot{V}_\alpha < 0$, wie für den Stabilitätsnachweis gefordert.
2. Die Berechnung von \mathbf{P} sowie die Auswahl des aktuellen α kann weiterhin wie in Kapitel 3 beschrieben erfolgen, so dass sich der gesicherte Einzugsbereich durch die Modifikation nicht verändert.
3. Die Stärke der Veränderung von u richtet sich danach, wie groß der Einfluss von u auf \dot{V}_α ist. Falls $u_\alpha = -\mathbf{b}^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{x} \rightarrow 0$ geht, kann man in (4.3) erkennen, dass auch der Einfluss der Stellgröße auf \dot{V}_α immer mehr verschwindet ($\dot{V}_\alpha = \dots - 2u_\alpha u_k$). Anstatt in diesen Phasen ein u_α mit einer sehr kleinen Amplitude zu verwenden, ist es für den Ausregelvorgang sicher günstiger, ein u_k nahe u_m mit entsprechend großer Amplitude zu verwenden, was durch (4.3) ermöglicht wird.

Zusammengefasst lautet die zweite Modifikation der Regelung:

In den Bereichen, wo u_m und u_α verschiedene Vorzeichen haben oder wo $|u_m| < |u_\alpha|$ ist, verwendet man statt u_α ein u_k , welches möglichst nahe bei u_m liegt und (4.3) erfüllt.

4.3 Beispiel für die modifizierte Regelung

Obwohl nicht nachgewiesen werden konnte, dass die beschriebene Modifikation der Regelung zu einem schnelleren Ausregeln von Anfangsstörungen führt, war in allen untersuchten Beispielen eine deutliche Verbesserung durch die Modifikation zu erreichen. Beispielhaft soll hier die bereits in Abschnitt 3.3 eingeführte U-Boot Dynamik betrachtet werden. In Bild 4.2 und 4.3 sind neben den Ergebnissen des α -Reglers und des zeitoptimalen Verlaufs auch die Ergebnisse des modifizierten α -Reglers mit $f = 0.85$ dargestellt. Die Zeiten für die Ausregelung der Anfangsstörung sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Wie man erkennen kann, ist der modifizierte α -Regler deutlich schneller als der ursprüngliche α -Regler.

Regler	zeitoptimal	modifizierte α -Regler	α -Regler
$T_{0.1}$	541	626	703
$T_{0.1}/T_{opt}$	1	1.157	1.299

Tabelle 4.1: Vergleich der Ausregelzeiten (absolut und relativ zur optimalen Zeit)

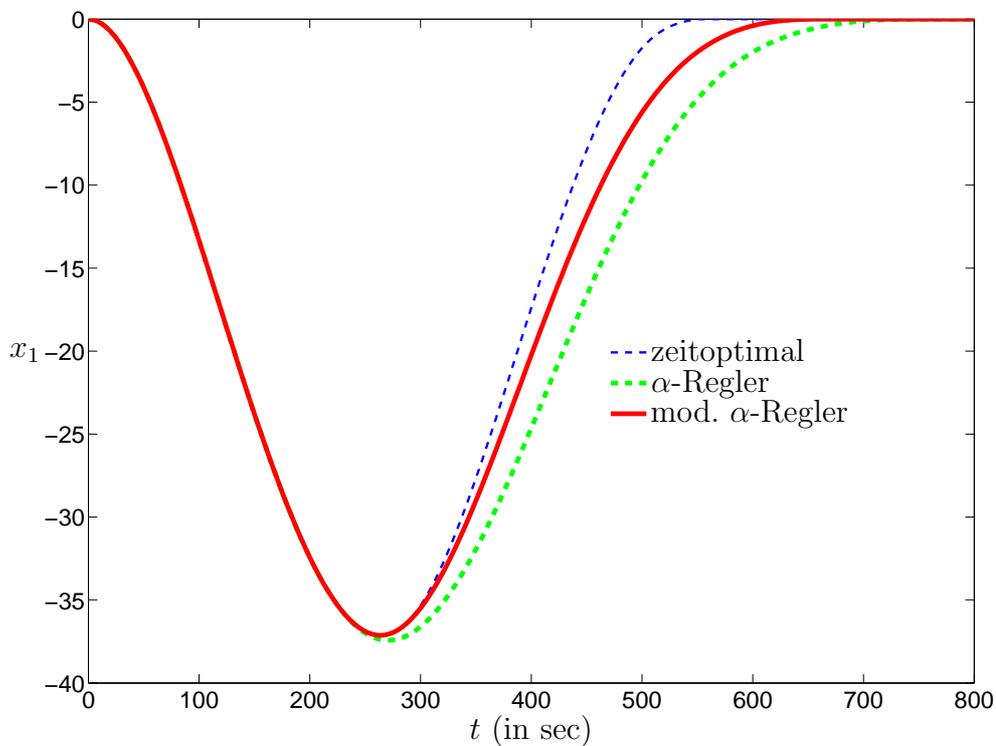
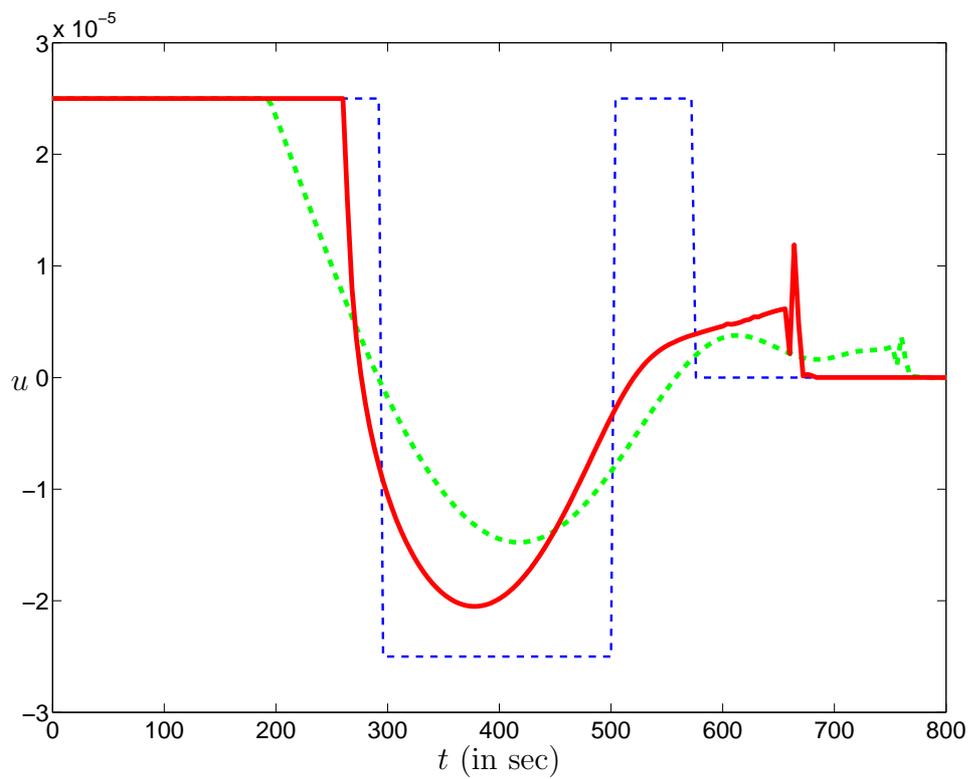


Bild 4.2: Vergleich der Tauchtiefen

**Bild 4.3:** Vergleich der Stellgrößen

Kapitel 5

Modifikation des α -Reglers für unsichere Strecken

Neben der erreichbaren Dynamik stellt die Robustheit einen wichtigen Punkt bei der Auslegung einer Regelung dar. In diesem Kapitel soll deshalb gezeigt werden, wie die vorgestellte Regelung robust gegenüber Unsicherheiten in den folgenden Größen ausgelegt werden kann:

- der Systemmatrix \mathbf{A} ,
- dem Eingangsvektor \mathbf{b} ,
- der verfügbaren Amplitude der Stellgröße u_{max} .

Da der vorgestellte Ansatz immer zu einem Regler mit unendlicher Verstärkungsreserve führt, können für u_{max} und \mathbf{b} sehr einfach multiplikative Unsicherheiten zugelassen werden (siehe Abschnitt 5.0.1).

Bezüglich Unsicherheiten in \mathbf{A} werden zwei Möglichkeiten betrachtet. In Abschnitt 5.1 wird detailliert darauf eingegangen, wie der Reglerentwurf modifiziert werden kann, damit Unsicherheiten, welche eine spezielle Struktur aufweisen, nämlich so genannte *matched uncertainties*, kompensiert werden können. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 5.2 auch auf die Möglichkeit zur Kompensation beliebig strukturierter Unsicherheiten in \mathbf{A} eingegangen. Letzteres führt jedoch auf eine Riccati-Gleichung, deren Lösbarkeit nicht allgemein sichergestellt werden kann.

5.0.1 Unsicherheiten in \mathbf{b} und u_{max}

Für den Eingangsvektor \mathbf{b} und die Stellgrößenamplitude u_{max} wird angenommen, dass die Unsicherheiten multiplikativen Charakter haben und betragsmäßig größer oder gleich einem nominellen Wert sind. Das heißt der wahre Eingangsvektor \mathbf{b} lässt sich darstellen als

$$\mathbf{b} = \zeta(t)\mathbf{b}_0 \quad \zeta(t) \geq 1 \quad (5.1)$$

mit dem nominellen Eingangsvektor \mathbf{b}_0 und der multiplikativen, zeitvariablen Unsicherheit $\zeta(t)$. Ohne eine weitere Einschränkung der betrachteten Systeme kann die Wahl von \mathbf{b}_0 so erfolgen, dass $\zeta(t) \geq 1$ gilt.

Da es sich bei der Stellamplitude u_{max} um eine skalare Größe handelt, folgt aus der Annahme einer multiplikativen, zeitvariablen Unsicherheit $\nu(t)$:

$$u_{max} = \nu(t)u_{max,0} \quad \nu(t) \geq 1 \quad (5.2)$$

mit dem nominellen Wert $u_{max,0}$ keine Einschränkung bezüglich der Anwendbarkeit des Ansatzes.

5.1 Auslegung für *matched uncertainties*

5.1.1 Struktur der Unsicherheit in \mathbf{A}

Um den in [21] beschriebenen Ansatz zu verwenden, wird die Unsicherheit in der Systemmatrix \mathbf{A} auf so genannte *matched uncertainties* eingeschränkt. *Matched uncertainties* beschreiben Unsicherheiten in \mathbf{A} , welche sich über den nominellen Eingangsvektor \mathbf{b}_0 darstellen lassen. Bezeichnet man mit \mathbf{A}_0 die nominelle Systemmatrix, so ist die Menge aller Matrizen \mathbf{A} mit *matched uncertainties* definiert als:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{b}_0\mathbf{q}^T \quad (5.3)$$

mit dem Vektor der zeitvariablen Unsicherheit $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Die betrachteten Unsicherheiten in \mathbf{A} lassen sich also exakt durch eine beschränkte, zeitvariable Zustandsrückführung kompensieren, was auch im Namen *matched uncertainties* zum Ausdruck kommt.

Wie einfach zu erkennen ist, weisen z.B. sämtliche Systeme, die in der häufig anzutreffenden Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (5.4)$$

vorliegen, eine solche strukturierte Unsicherheit bezüglich Variationen der Parameter a_0, \dots, a_{n-1} auf. Trotz der Einschränkung auf Unsicherheiten vom Typ (5.3) lassen sich also immer noch eine signifikante Menge von Systemen behandeln.

Für eine sinnvolle Reglerauslegung müssen Schranken für \mathbf{q} angegeben werden. Dies soll durch Vorgabe eines Unterraums M_q erfolgen, welcher durch die Vektoren \mathbf{q}_i aufgespannt wird:

$$\mathbf{q} \in M_q = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{q}_i : l_i \leq \mu_i \leq r_i \right\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (5.5)$$

Die Vektoren \mathbf{q}_i können somit als Basis der Unsicherheit in der Matrix \mathbf{A} angesehen werden. Sie spiegeln oftmals die Variationen der Matrix \mathbf{A} wider, welche sich durch Variation einzelner physikalischer Parameter der Strecke ergeben (siehe z.B. Abschnitt 5.4.2).

Neben der Einschränkung von \mathbf{q} durch M_q ist es für die Auslegung der Regelung nötig, eine symmetrische, positiv-semidefinite Matrix \mathbf{F} zu bestimmen, welche die Unsicherheit \mathbf{q} in folgender Weise begrenzt:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{F} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{q} \in M_q. \quad (5.6)$$

Für eine wenig konservative Reglerauslegung muss \mathbf{F} möglichst klein gewählt - bzw. $\mathbf{q} \mathbf{q}^T$ möglichst knapp abgeschätzt werden. Schreibt man die rechte Seite in (5.6) mit Hilfe der Basisvektoren \mathbf{q}_i

$$\mathbf{x}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{q})^2 = \left(\sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{x}^T \mathbf{q}_i \right)^2, \quad (5.7)$$

so wird ersichtlich, dass für jedes \mathbf{x} die rechte Seite in (5.6) ihr Maximum

- entweder für $\mu_i = r_i$, falls $\mathbf{x}^T \mathbf{q}_i > 0$ und $\mu_i = l_i$, falls $\mathbf{x}^T \mathbf{q}_i < 0$ (Maximum in der Klammer)

- oder für $\mu_i = l_i$, falls $\mathbf{x}^T \mathbf{q}_i > 0$ und $\mu_i = r_i$, falls $\mathbf{x}^T \mathbf{q}_i < 0$ (Minimum in der Klammer)

annimmt. Um also (5.6) zu erfüllen, muss die Matrix \mathbf{F} so gewählt werden, dass (5.6) für alle Ecken E_q des Gebiets M_q erfüllt ist:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{F} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{q} \in E_q = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{q}_i : \mu_i = \{l_i, r_i\} \right\}. \quad (5.8)$$

Da \mathbf{F} und $\mathbf{q} \mathbf{q}^T$ symmetrische Matrizen sind, kann (5.8) durch die Betrachtung der Eigenwerte von $\mathbf{F} - \mathbf{q} \mathbf{q}^T$ überprüft werden:

$$\lambda_i (\mathbf{F} - \mathbf{q} \mathbf{q}^T) \geq 0 \quad i = 1 \dots n, \quad \mathbf{q} \in E_q = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{q}_i : \mu_i = \{l_i, r_i\} \right\}. \quad (5.9)$$

Basierend auf (5.9) bestimmt der folgende Algorithmus in 2^p Schritten die gesuchte Matrix \mathbf{F} .

Algorithmus zur Berechnung von \mathbf{F} :

1. Initialisieren von \mathbf{F} mit $\mathbf{F}(1) = \mathbf{0}$
2. Schleife, bei der \mathbf{q} alle Punkte in E_q durchläuft. Für jedes $\mathbf{q}(k)$ (mit $k = 1 \dots 2^p$) werden die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{F}(k) - \mathbf{q}(k) \mathbf{q}(k)^T$ untersucht. Treten negative Eigenwerte λ_j auf, wird die Matrix \mathbf{F} verändert zu

$$\mathbf{F}(k+1) = \mathbf{F}(k) - \sum \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T, \quad (5.10)$$

wobei \mathbf{v}_j die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j sind. Ansonsten ist $\mathbf{F}(k+1) = \mathbf{F}(k)$. Durch die Modifikation von \mathbf{F} entsprechend (5.10) wird sichergestellt, dass $\mathbf{F}(k+1) - \mathbf{q}(k) \mathbf{q}(k)^T$ keine negativen Eigenwerte mehr besitzt und somit (5.9) an dieser Ecke von E_q erfüllt ist. Außerdem wird die Matrix \mathbf{F} durch (5.10) nur vergrößert, so dass an den $k-1$ bereits überprüften Ecken es nicht zu einer Verletzung von (5.9) kommen kann.

3. Nach Überprüfung der letzten Ecke in E_q ist die Bestimmung von \mathbf{F} abgeschlossen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(2^p + 1).$$

5.1.2 Auslegung der Regelung

Für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\text{sat}(u) \quad (5.11)$$

mit einem \mathbf{A} und \mathbf{b} entsprechend (5.3) bzw. (5.1) lautet ein robust stabilisierender Regler

$$u = -\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (5.12)$$

wobei die Matrix \mathbf{P} anstelle der Riccati-Gleichung (2.10) die Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right) - \left(2 - \frac{1}{\kappa}\right) \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} = -\kappa\mathbf{F} \quad (5.13)$$

erfüllen muss. Die Bestimmung von \mathbf{F} erfolgt, wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben. Eine Abschätzung des Einzugsbereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ ist gegeben mit:

$$\eta = \frac{4\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0}{(2\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0 - \alpha)^2} u_{max,0}^2. \quad (5.14)$$

Damit die Riccati-Gleichung (5.13) sicher eine positiv-semidefinite Lösung besitzt, muss $((\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}), \mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T)$ stabilisierbar sein und der Parameter κ größer als $\kappa^* = 0.5$ gewählt werden. (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.1) Die verbleibende Freiheit bei der Wahl von κ kann sinnvollerweise dazu genutzt werden, den Term $\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0$ zu minimieren, wodurch sich eine maximale Ausdehnung von \mathbb{S} in Richtung \mathbf{b}_0 ergibt (siehe auch (5.20)).

5.1.3 Stabilitätsnachweis

Für den Stabilitätsnachweis der in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Regelung wird die Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$ verwendet. Mit Hilfe von (5.11), (5.3) und (5.13) erhält man für \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}\text{sat}(u) \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_0)\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}\text{sat}(u) + \mathbf{x}^T \mathbf{q}\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{q}^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \left(-\alpha\mathbf{P} - \kappa\mathbf{F} + \left(2 - \frac{1}{\kappa}\right) \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\right) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}\text{sat}(u) + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{q}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aus

$$\frac{1}{\kappa} \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{q}^T \mathbf{x} + \kappa \mathbf{x}^T \mathbf{q}\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{b}_0 - \sqrt{\kappa} \mathbf{x}^T \mathbf{q} \right)^2 \geq 0$$

kann $2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{q}^T\mathbf{x}$ nach oben abgeschätzt werden zu:

$$2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{q}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \left(\frac{1}{\kappa}\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T\mathbf{P} + \kappa\mathbf{q}\mathbf{q}^T \right) \mathbf{x}. \quad (5.16)$$

Unter Benutzung von $\mathbf{F} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T \geq 0$ (siehe hierfür Abschnitt 5.1.1) ergibt sich damit für \dot{V} als Obergrenze

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{x}^T \left(-\alpha\mathbf{P} - \underbrace{\kappa(\mathbf{F} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T)}_{\geq 0} + \left(2 - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\right)\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T\mathbf{P} \right) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\text{sat}(u) \\ &\leq \underbrace{\mathbf{x}^T(-\alpha\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T\mathbf{P})\mathbf{x}}_U + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0\text{sat}(u). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Substitution von \mathbf{b} durch den betragsmäßig kleineren Vektor \mathbf{b}_0 ist dadurch motiviert, eine Obergrenze U für \dot{V} zu finden, die nicht mehr von unbekanntem Parametern abhängt. In den ungesättigten Bereichen des Zustandsraums ergibt sich mit dem Regelgesetz (5.12) für $U = -\alpha\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$. Aufgrund der sat-Funktion kann es jedoch Bereiche im Zustandsraum geben, in denen U nicht mehr negativ ist. In diesen Fällen kann eine analytische Abschätzung für den Einzugsbereich der robusten Regelung genauso wie in Abschnitt 2.3.2 mit Hilfe der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ gefunden werden. Der Wert η der begrenzenden Niveaumenge ergibt sich hierfür aus dem Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \eta = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (5.18)$$

$$\text{NB: } U = 0 \quad (5.19)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathcal{N}(\mathbf{P})\},$$

wobei im Vergleich zu (2.21) die Nebenbedingung $\dot{V} = 0$ durch die völlig äquivalente Forderung $U = 0$ ersetzt wurde. Löst man dieses Optimierungsproblem, wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, so erhält man:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\pm 2}{2\mathbf{b}_0^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0 - \alpha} \mathbf{b}_0 u_{max} \geq \frac{\pm 2}{2\mathbf{b}_0^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0 - \alpha} \mathbf{b}_0 u_{max,0}, \quad (5.20)$$

woraus die in (5.14) gegebene Abschätzung für den Wert der gesuchten Höhenlinie η folgt. Ferner erkennt man in (5.20), dass durch die Minimierung von $\mathbf{b}_0^T\mathbf{P}\mathbf{b}_0$ die Ausdehnung von \mathbb{S} in Richtung \mathbf{b}_0 maximiert wird.

5.2 Auslegung für beliebige Unsicherheiten in \mathbf{A}

5.2.1 Systemdarstellung

In [25] ist ein Verfahren beschrieben, um Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{D}\mathbf{M}(t)\mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u \quad (5.21)$$

zu stabilisieren. Die unsicheren Parameter von \mathbf{A} werden bei dieser Darstellung über die Matrix $\mathbf{M}(t) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ausgedrückt. Die Amplitude der Unsicherheiten muss dabei so auf die Matrizen $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bzw. $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ aufgeteilt werden, dass gilt

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} \leq \mathbf{I}. \quad (5.22)$$

In [8] und [7] wird dieses Verfahren für schaltende Regler mit Stellgrößenbegrenzungen erweitert bzw. angewandt. Ähnlich wie dort beschrieben, kann auch der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz modifiziert werden, um Systeme der Form (5.23) zu stabilisieren.

5.2.2 Auslegung der Regelung

Das System

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{D}\mathbf{M}(t)\mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{b}\text{sat}(u) \quad (5.23)$$

mit einem \mathbf{b} entsprechend (5.1) und einer Matrix \mathbf{M} , für die gilt $\mathbf{M}^T \mathbf{M} \leq \mathbf{I}$, kann mit dem Regler

$$u = -\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5.24)$$

stabilisiert werden, falls ein $\epsilon > 0$ gefunden werden kann, so dass eine positiv-semidefinite Lösung $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ der Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right) - 2\mathbf{P}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} + \epsilon \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} = -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (5.25)$$

existiert. (siehe dazu Abschnitt 5.2.4)

Eine Abschätzung des Einzugsbereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ ist dann gegeben mit:

$$\eta = \frac{4\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0}{(2\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0 - \alpha)^2} u_{max,0}^2. \quad (5.26)$$

5.2.3 Stabilitätsnachweis

Der Stabilitätsnachweis zur Reglerauslegung nach (5.24) und (5.25) ist dem Vorgehen in Abschnitt 5.1.3 sehr verwandt. Anstelle der Abschätzung (5.16) benutzt man die Beziehung

$$\underbrace{\mathbf{x}^T \left(\sqrt{\epsilon} \mathbf{D}^T \mathbf{P} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathbf{M} \mathbf{E} \right)^T}_{\mathbf{a}^T} \underbrace{\left(\sqrt{\epsilon} \mathbf{D}^T \mathbf{P} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathbf{M} \mathbf{E} \right)}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} \geq 0,$$

um die Abschätzung (5.27) zu erhalten.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \left(\epsilon \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{E} \right) \mathbf{x} &\geq \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{M}^T \mathbf{D}^T \mathbf{P}^T) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T \left(\epsilon \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right) \mathbf{x} &\geq \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{M}^T \mathbf{D}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mit Hilfe dieser kann die Ableitung der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, wie im Folgenden gezeigt, abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T \left((\mathbf{A}_0 + \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{E})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_0 + \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{E}) \right) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_{\text{sat}} (-\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_0 + \mathbf{E}^T \mathbf{M}^T \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{E}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_{\text{sat}} (-\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \\ &\leq \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_0 + \epsilon \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0 \mathbf{sat} (-\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2 \mathbf{P} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0 \mathbf{sat} (-\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die Abschätzung (5.28) entspricht exakt (5.17), so dass der dort beschriebene Weg zur Bestimmung von η direkt übernommen werden kann.

5.2.4 Lösbarkeit der Riccati-Gleichung

Die Existenz einer stabilisierenden Lösung der Riccati-Gleichung wurde bereits auf Seite 22 diskutiert. Vergleicht man die Riccati-Gleichung (5.25) mit der Riccati-Gleichung (2.14) dort, so erhält man für \mathbf{R} den Ausdruck

$$\mathbf{R} = \epsilon \mathbf{D} \mathbf{D}^T - 2 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T. \quad (5.29)$$

Die Matrix \mathbf{R} kann somit *indefinit* werden. Dadurch kann vorab nicht sicher gesagt werden, wann eine stabilisierende Lösung \mathbf{P} existiert. In [25] ist zur Existenz einer stabilisierenden Lösung zu finden:

Satz 5.1 (dort Theorem 3.3.) Sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{D}\mathbf{M}(t)\mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.30)$$

mit $\mathbf{M}^T\mathbf{M} \leq \mathbf{I}$ quadratisch stabilisierbar und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seien positiv-definite Matrizen. Dann existiert ein $\epsilon^* > 0$, so dass die Riccati-Gleichung

$$\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \epsilon\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{E}\mathbf{E}^T + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

eine positiv-semidefinite, symmetrische Lösung \mathbf{P} für alle $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ besitzt.

Die Definition des hierin verwendeten Begriffs *quadratisch stabilisierbar* lautet:

Definition 5.1 Das System (5.30) ist quadratisch stabilisierbar, falls ein lineares Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, eine positiv-definite Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Konstante $c > 0$ existieren, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jede Unsicherheit $\mathbf{M}(t)$ mit $\mathbf{M}^T\mathbf{M} \leq \mathbf{I}$ und jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt im geregelten System die Ableitung der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ die Bedingung:

$$\dot{V} \leq -c\|\mathbf{x}\|^2.$$

Versucht man (5.25) auf die Form (5.31) zu bringen, so ergibt sich $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}$, $\tilde{\mathbf{R}} = 0.5 > 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}_0$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Die Matrix \mathbf{Q} ist also nicht wie in Satz 5.1 gefordert positiv definit. Allerdings sind die Änderungen im Regelgesetz bzw. im Stabilitätsbeweis vernachlässigbar, wenn anstelle von $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ eine beliebige kleine positiv-definite Matrix $\mathbf{Q} = \Delta\mathbf{I}$ mit $\Delta \rightarrow 0$ verwendet würde. In diesem Fall würde Satz 5.1 Auskunft über die Existenz einer Lösung \mathbf{P} geben.

Da im Allgemeinen jedoch kein Verfahren zur Überprüfung der quadratischen Stabilisierbarkeit eines Systems bekannt ist, liegt die Bedeutung von Satz 5.1 primär darin, die Leistungsfähigkeit des Ansatzes zu unterstreichen. Falls nämlich eine Lösung des gestellten Problems möglich ist, so wird diese durch eine genügend kleine Wahl von ϵ auch gefunden, unabhängig von der Wahl von \mathbf{Q} und \mathbf{R} (siehe dazu auch [25]). Die Lösbarkeit der Riccati-Gleichung (5.31) kann somit selbst als Kriterium für die quadratische Stabilisierbarkeit eines Systems angesehen werden.

5.2.5 Vergleich mit dem Ansatz für matched uncertainties

Wie unschwer zu erkennen, bilden die in Abschnitt 5.1 betrachteten Unsicherheiten eine Untermenge der in Abschnitt 5.2 berücksichtigten Unsicherheiten. Eine separate Behandlung dieser Untermenge wurde einerseits dadurch motiviert, dass für diese Untermenge immer eine Lösung der Riccati-Gleichung existiert, falls $\kappa > 0.5$ gewählt wird und $(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}, \mathbf{b}_0\mathbf{b}_0^T)$ stabilisierbar ist. Andererseits unterscheiden sich die beiden Ansätze in der Bestimmung der konstanten Matrix in der Riccati-Gleichung und führen damit zu verschiedenen Regelungen. Dies soll im Folgenden an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Betrachtet man hierzu das System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u. \quad (5.32)$$

Für die beiden Unsicherheiten in der Systemmatrix \mathbf{A} soll gelten

$$\begin{aligned} -1 &\leq q_1 \leq 1 \\ -10 &\leq q_2 \leq 10. \end{aligned}$$

Stellt man die Unsicherheit in \mathbf{A} als $\mathbf{b}\mathbf{q}^T$ mit $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$ dar, so erhält man entsprechend dem in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Algorithmus für die Matrix \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 105 \end{bmatrix} (\geq \mathbf{q}\mathbf{q}^T).$$

Zur Bestimmung eines robust stabilisierenden Reglers $u = -\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ muss nun die Riccati-Gleichung (5.13) für ein $\kappa > 0.5$ gelöst werden. Wählt man z.B. $\kappa = 1$ und $\alpha = 4$, erhält man:

$$u = - \begin{bmatrix} 50.33 & 16.48 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (5.33)$$

Die Eigenwerte des geregelten, nominellen Systems liegen mit dieser Rückführung bei -3.93 und -12.55 .

Andererseits kann die Unsicherheit in \mathbf{A} auch als **DME** mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

und

$$-1 \leq \Delta_1 \leq 1$$

$$-1 \leq \Delta_2 \leq 1$$

geschrieben werden. Ein robust stabilisierender Regler liegt auch hier in der Form $u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ vor, wobei nun \mathbf{P} die Riccati-Gleichung (5.25) erfüllen muss. Berücksichtigt man, dass im vorliegenden Fall $0.5\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{b}\mathbf{b}^T$ ist, so kann durch eine Wahl von $\alpha = 4$ und $\epsilon = 0.5$ erreicht werden, dass (5.25) und (5.13) in allen Termen auf der linken Seite übereinstimmen. Anstelle von \mathbf{F} steht jetzt jedoch $2\mathbf{E}^T \mathbf{E}$:

$$2\mathbf{E}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 105 \end{bmatrix} = \mathbf{F}.$$

Damit ergibt sich als Rückführung

$$u = - \begin{bmatrix} 66.16 & 20.34 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

wodurch die Eigenwerte des geregelten, nominellen Systems nach -3.98 und -16.35 verschoben werden.

Obwohl also die Darstellung der Unsicherheit entsprechend (5.21) die so genannten *matched uncertainties* als Untermenge beinhaltet und die zu lösenden Riccati-Gleichungen ähnlich sind, führen die beiden Ansätze zu verschiedenen robust stabilisierenden Reglern. Vergleicht man die beiden, so ist die Bestimmung der Matrix \mathbf{F} bei dem Ansatz für *matched uncertainties* deutlich aufwändiger als die Bestimmung der Matrix $\mathbf{E}^T \mathbf{E}$. Im Gegenzug führt jedoch der Ansatz für *matched uncertainties* zu kleineren Rückführverstärkungen bzw. zu einer Platzierung der Eigenwerte, die näher an der Auslegung ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten liegt. Der größere Aufwand bei der Bestimmung von \mathbf{F} kann also damit gerechtfertigt werden, dass die Unsicherheiten im System besser abgeschätzt werden und deshalb die robuste Regelung die Eigenwerte des Systems nicht unnötig weit nach links verschiebt.

5.3 Variation von α

5.3.1 Stabilität bei variierendem α

Der Parameter α kann bei einer robusten Auslegung der Regelung ebenfalls, wie in Kapitel 3 und 4 beschrieben, variiert werden. Die Bestimmung von \mathbf{P} , η und u erfolgt hierzu entweder wie in Abschnitt 5.1.2 oder 5.2.2 beschrieben. Für den Stabilitätsnachweis bei Variation von α (siehe Abschnitt 3.2) mit Hilfe der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}$ sind die folgenden beiden Punkte wichtig:

- Die diskrete oder kontinuierliche Variation von α muss so erfolgen, dass \mathbf{x} im gesicherten Einzugsbereich des aktuellen $\mathbb{S}(\alpha)$ liegt und somit bei festem α gelten würde $\dot{V}_\alpha < 0$. Um dies zu erreichen, wird α , wie bereits in Abschnitt 3 beschrieben, so variiert, dass immer gilt:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} < \eta(\alpha)$$

mit $\mathbf{P}(\alpha)$, $\eta(\alpha)$ entsprechend (5.13) und (5.14) bzw. (5.25) und (5.26).

- Für die Abhängigkeit von \mathbf{P} und η bezüglich α muss gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &\geq \mathbf{0} \\ \eta' &< 0. \end{aligned}$$

Falls eine positiv-semidefinite Lösung $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ existiert, so ist diese auch stabilisierend (Satz 2.3). Der Nachweis für $\mathbf{P}' \geq \mathbf{0}$ kann dann wie in Abschnitt 9.1.5 (dem Beweis von Satz 2.8) gezeigt werden.

Ein analytischer Nachweis für $\eta' < 0$ ist jedoch bis jetzt nicht gelungen. Die Eigenschaft, dass η monoton fallend ist, muss daher für jede Anwendung numerisch für das interessierende Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ überprüft werden.

5.4 Laborexperiment: inverses Pendel

Als beispielhafte Anwendung für die robuste Regelung eines Systems mit *matched uncertainties* soll ein inverses Pendel auf einem angetriebenen Wagen (Bild 5.1) betrachtet

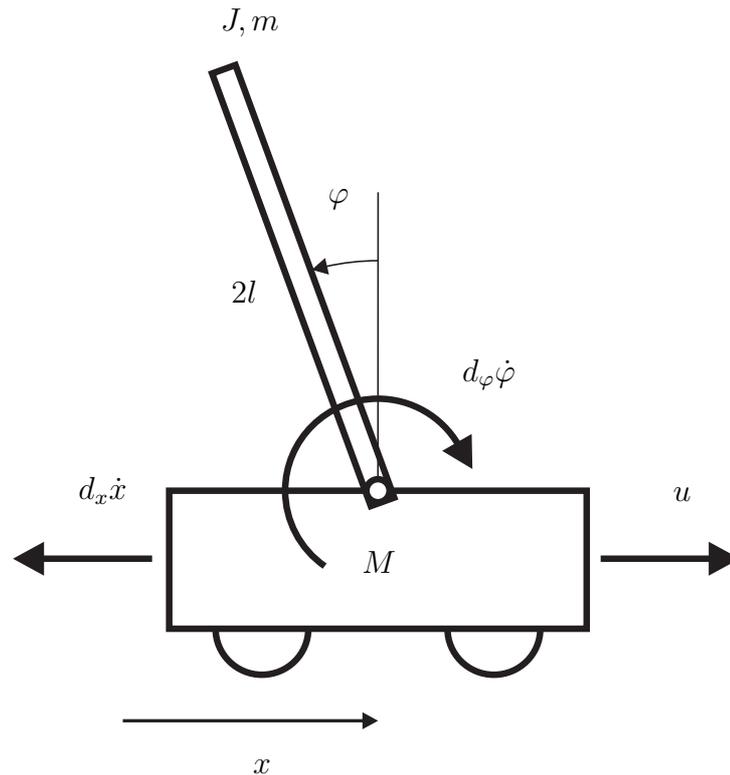


Bild 5.1: Schematische Darstellung des inversen Pendels auf einem Wagen

werden. Aufgabe der Regelung sei eine robuste und möglichst schnelle Positionsregelung des Wagens.

5.4.1 Modellierung des inversen Pendels

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen soll mit Hilfe der Methode von Lagrange durchgeführt werden (siehe z.B. [26]). Laut dieser gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{z}} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} \right) = \sum \mathbf{Q}_i \quad (5.34)$$

mit

\mathbf{z} Vektor der generalisierten Positionen; hier $\mathbf{z} = (\varphi \ x)^T$

$\dot{\mathbf{z}}$ Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten; hier $\dot{\mathbf{z}} = (\dot{\varphi} \ \dot{x})^T$

$T(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ Kinetische Energie

$P(\mathbf{z})$ Potentielle Energie

\mathbf{Q}_i nicht-konservative Kräfte, projiziert in den Raum der generalisierten Koordinaten

Unter der Annahme eines Stabes der Länge $2l$ mit einer Masse m und einem Massenträgheitsmoment J ergibt sich für die kinetische und die potentielle Energie des Systems:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi) \quad (5.35)$$

$$P = mgl \cos \varphi. \quad (5.36)$$

Die nicht-konservativen Kräfte, projiziert in den Raum der generalisierten Koordinaten sind:

- die von außen auf den Wagen wirkende Kraft $\mathbf{f}_u = (u \ 0)^T$. Diese greift am Punkt $\mathbf{r} = (x \ 0)^T$ an. Die Projektion in den Raum der generalisierten Koordinaten führt damit auf:

$$\mathbf{Q}_u = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

- die Reibkraft zwischen dem Wagen und der Schiene $\mathbf{f}_r = (-d_x \dot{x} \ 0)^T$. Diese greift am selben Punkt wie die Kraft \mathbf{f}_u an, so dass man in analoger Weise für die projizierte Kraft erhält:

$$\mathbf{Q}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -d_x \dot{x} \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

- die Reibung im Gelenk $M_r = -d_\varphi \dot{\varphi}$. Deren Projektion lautet:

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{pmatrix} -d_\varphi \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Setzt man (5.35) bis (5.39) in (5.34) ein, ergeben sich die nichtlinearen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} ml^2 + J & -ml \cos \varphi \\ -ml \cos \varphi & (M + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_\varphi \dot{\varphi} - mlg \sin \varphi \\ d_x \dot{x} + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Linearisiert man diese um die Ruhelage $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ mit $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$ und $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \approx 0$, erhält man:

$$\begin{pmatrix} ml^2 + J & -ml \\ -ml & (M + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_\varphi \dot{\varphi} - mlg\varphi \\ d_x \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen (5.41) können auch als Zustandsraummodell geschrieben werden. Für den Zustandsvektor \mathbf{x} und die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{b} ergibt sich dann:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi & x & \dot{\varphi} & \dot{x} \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M+m}{h}mgl & 0 & -\frac{(M+m)}{h}d_\varphi & -\frac{ml}{h}d_x \\ \frac{ml}{h}mgl & 0 & -\frac{ml}{h}d_\varphi & -\frac{(J+ml^2)}{h}d_x \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml \\ J + ml^2 \end{pmatrix}$$

$$h = M(J + ml^2) + Jm.$$

5.4.2 Mögliche Unsicherheiten

Um festzustellen, welche Parameter des Systems so genannte *matched uncertainties* darstellen, betrachtet man deren Einfluss auf die Systemmatrix \mathbf{A} . Lässt man z.B. für die Masse des Wagens ein Intervall

$$M = M_0 - \mu_M \Delta M \quad 0 \leq \mu_M \leq 1 \quad (5.42)$$

zu, so erhält man für die Differenz in der Systemmatrix:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{A}(M) - \mathbf{A}(M_0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m^2 l^2}{h_0 h} mgl & 0 & -\frac{m^2 l^2}{h_0 h} d_\varphi & -\frac{ml(J+ml^2)}{h_0 h} d_x \\ \frac{ml(J+ml^2)}{h_0 h} mgl & 0 & -\frac{ml(J+ml^2)}{h_0 h} d_\varphi & -\frac{(J+ml^2)^2}{h_0 h} d_x \end{pmatrix} \tilde{\mu}_M \Delta M \\ &= \frac{1}{h_0} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml \\ J + ml^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_0} \begin{pmatrix} m^2 l^2 g & 0 & -m l d_\varphi & -(J + ml^2) d_x \end{pmatrix} \frac{\Delta M}{h} \tilde{\mu}_M \\ &= \mathbf{b}_0 \underbrace{\begin{pmatrix} m^2 l^2 g & 0 & -m l d_\varphi & -(J + ml^2) d_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_M^T} \underbrace{\frac{\Delta M}{h_{min}} \frac{h_{min}}{h}}_{\mu_M} \tilde{\mu}_M \end{aligned} \quad (5.43)$$

mit $h_0 = M_0(J + ml^2) + Jm$ und $h_{min} = (M_0 - \Delta M)(J + ml^2) + Jm$.

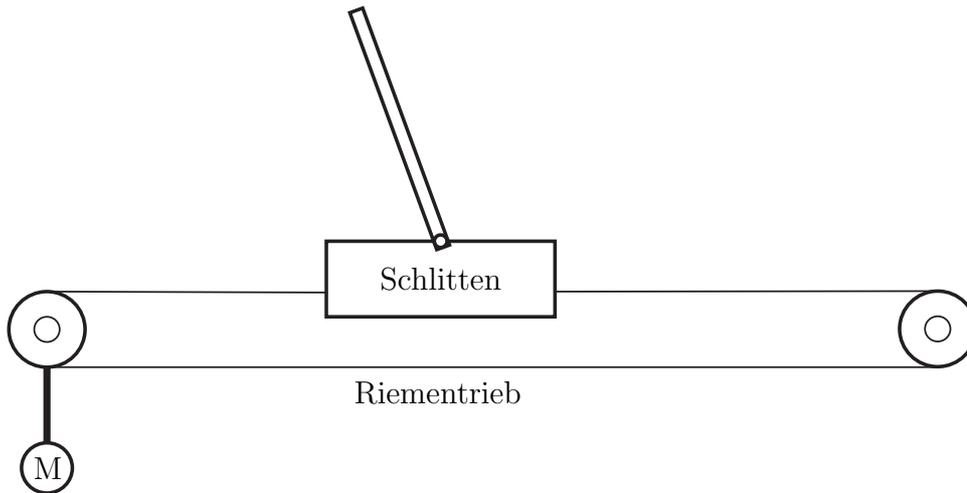


Bild 5.2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Anhand (5.43) kann man erkennen, dass eine Veränderung der Wagenmasse M zu einer Veränderung von \mathbf{A} führt, welche mit Hilfe des nominellen Eingangsvektors \mathbf{b}_0 ausgedrückt werden kann. Damit die sich ergebende multiplikative Unsicherheit im Eingangsvektor \mathbf{b} die Bedingung (5.1) erfüllt, wurde für die nominelle Wagenmasse M_0 der maximale Wert von M gewählt. Genauso wie die Wagenmasse stellt der Reibparameter d_x eine *matched uncertainty* dar. Für diesen kann ein symmetrisches Intervall zugelassen werden:

$$d_x = d_{x,0} + \mu_d \Delta d_x \quad -1 \leq \mu_d \leq 1.$$

Die sich daraus ergebenden Basisvektoren für die Unsicherheit lauten:

$$\mathbf{q}_M^T = \left(m^2 l^2 g \quad 0 \quad -m l d_\varphi \quad -(J + m l^2) d_{x,0} \right) \frac{\Delta M}{h_{min}} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{q}_d^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right) \frac{h_0}{h_{min}} \Delta d_x. \quad (5.45)$$

Eine Variation der Parameter des Pendels J, m, d_φ oder l führt zu Variationen von \mathbf{A} , welche nicht komplett über den Eingang kompensiert werden können. Die exakte Bestimmung dieser Parameter ist im vorliegenden Fall jedoch einfach möglich.

5.4.3 Reglerparametrierung für den Versuchsaufbau

Zum Testen des Reglers wurde anstelle des Wagens ein Pendel auf einem riemengetriebenen Schlitten aufgebaut (Skizze siehe Bild 5.2). Für diesen Versuchsaufbau wurden

folgende Werte ermittelt:

Länge des Pendels	$2l = 0.385\text{m},$
Stabmasse	$m = 0.146\text{kg},$
Massenträgheit	$J = \frac{1}{3}ml^2 = 0.0018\text{kgm}^2,$
Erdbeschleunigung	$g = 9.81\text{N/kg},$
Lagerreibung	$d_\varphi = 3e - 4\text{Nms},$
maximale Masse des Schlittens	$M_0 = 5.89\text{kg},$
Horizontale Reibung	$d_{x,0} = 841\text{Ns/m},$
Motorkonstante bezogen auf die Bewegung des Wagens	$k_w = 25\text{N/V},$
Begrenzung der Eingangsspannung	$u_{max,0} = 45\text{V}.$

Die große Masse des Schlittens ist dadurch bedingt, dass alle beweglichen Teile des Riementriebs (Drehträgheit des Motors, Getriebe und Riemen mit Antriebsrädern) zur Schlittenmasse addiert wurden. Die große Reibung in horizontaler Richtung wird fast ausschließlich durch das elektrisch induzierte Bremsmoment des Motors hervorgerufen. Die Motorkonstante k_w beschreibt, welche horizontale Kraft durch die anliegende Motorspannung erzeugt wird. Die Angabe eines statischen Zusammenhangs an dieser Stelle beruht auf der Vernachlässigung der sehr viel schnelleren Dynamik des elektrischen Kreises. (Pol des elektrischen Kreises bei ca. -780)

Für eine robuste Reglerauslegung können beim vorliegenden Beispiel zwei Fälle unterschieden werden:

Elektromotor nicht unsicher

Falls man davon ausgeht, dass keine Unsicherheiten im Elektromotor zu berücksichtigen sind und somit nur die mechanische Reibung des Riementriebs und die Masse des Schlittens (ca. 0.5 kg) unsicher sind, erscheinen folgende Werte für die Unsicherheiten als realistisch:

Unsicherheit in der Masse des Schlittens	$\Delta M = 0.05\text{kg},$
Unsicherheit in der horizontalen Reibung	$\Delta d_x = 1\text{Ns/m}.$

Für diese Unsicherheiten ergibt sich die Matrix \mathbf{F} zu:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.96e-5 & -0.065 & -1.02e-7 \\ 0 & -0.065 & 51.02 & 7.41e-5 \\ 0 & -1.02e-7 & 7.41e-5 & 1.16e-10 \end{pmatrix}.$$

Zum Testen der Regelung wurden die Reglerparameter folgendermaßen gewählt:

$$\alpha \in [1; 13.8],$$

$$\kappa = 1.59,$$

$$\beta = 0.98,$$

$$f = 0.85.$$

Da kein analytischer Nachweis für die monotone Abnahme von η gefunden wurde, muss diese Forderung numerisch überprüft werden. Bild 5.3 zeigt zu diesem Zweck den Verlauf von η über α .

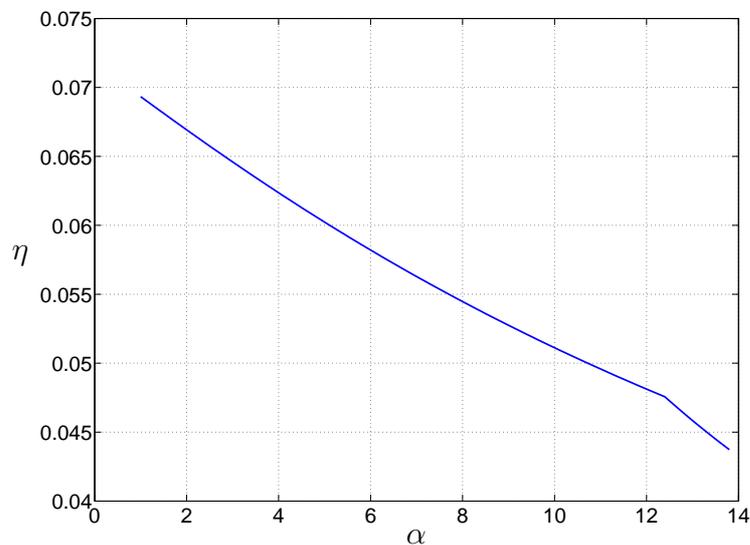
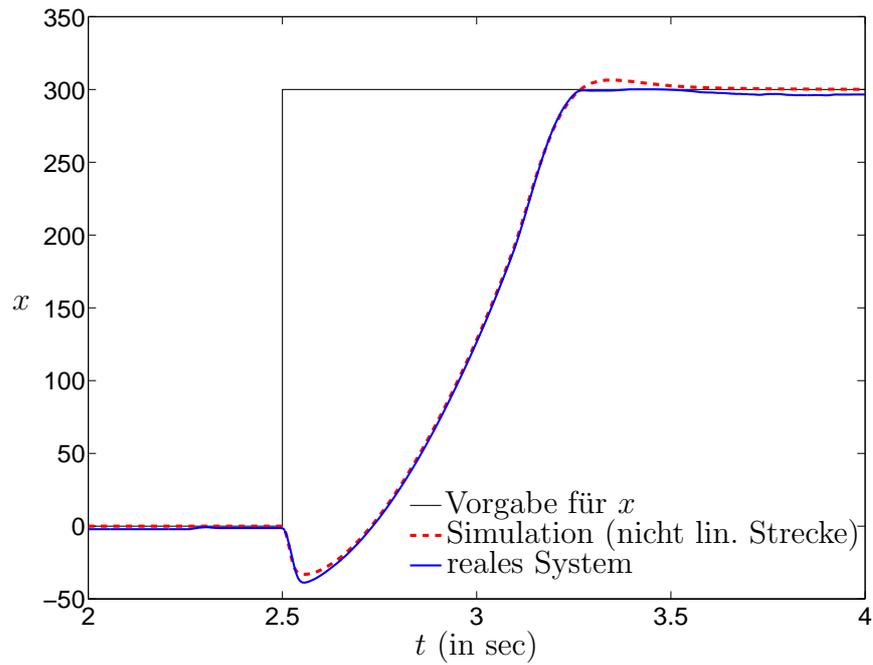
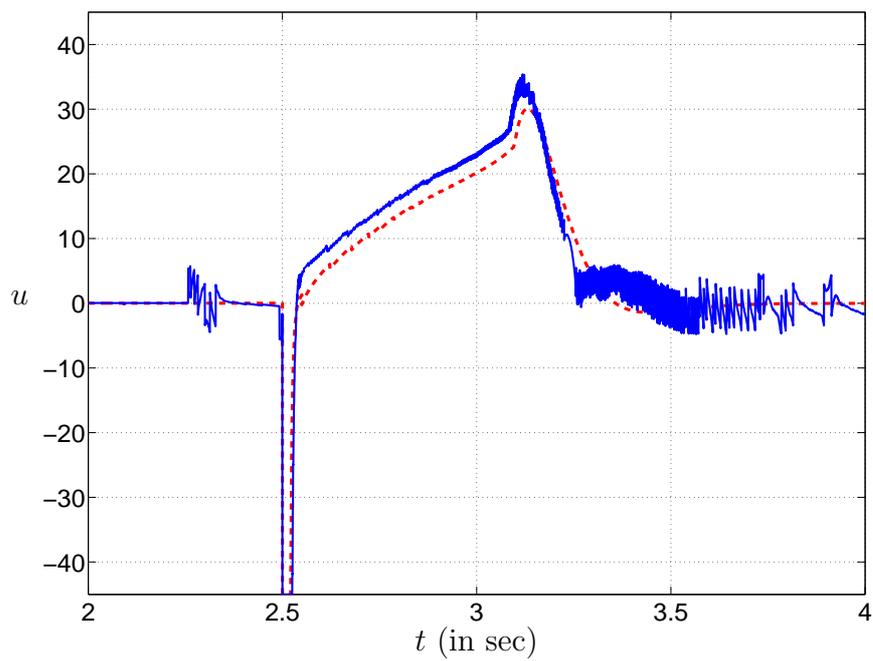
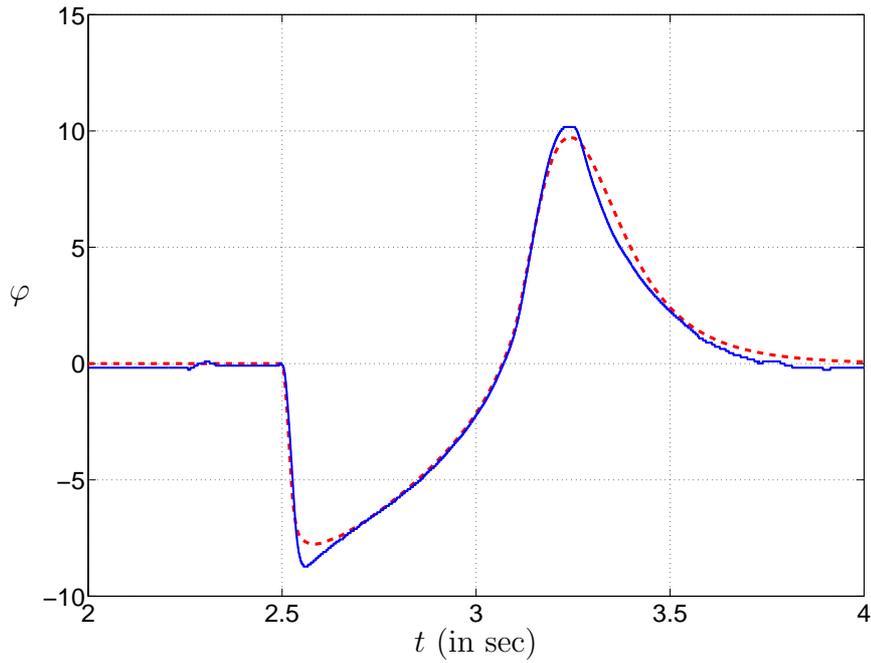
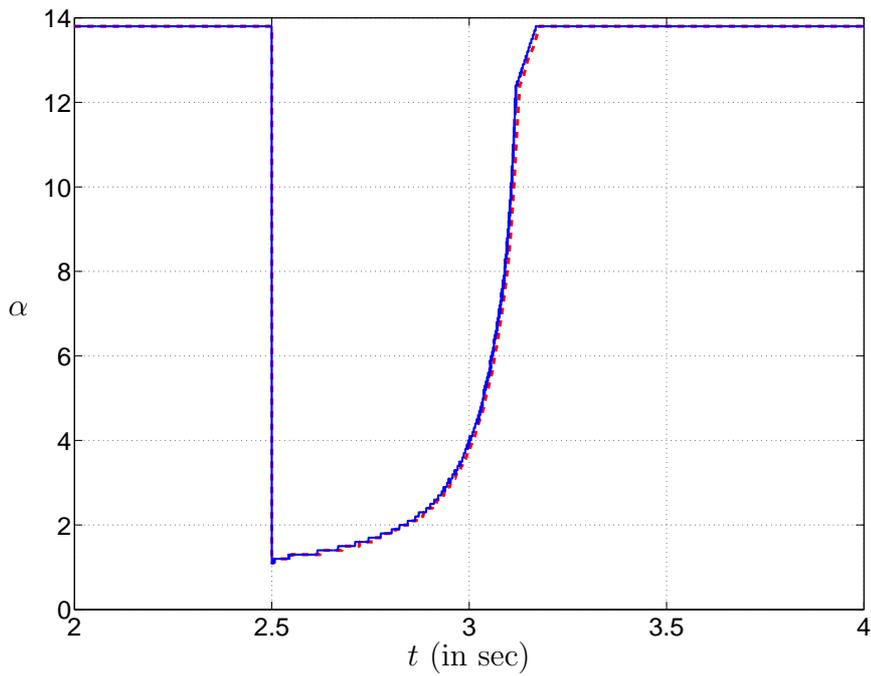


Bild 5.3: Monotone Abnahme von η über α

In Bild 5.4-5.7 sind die mit der Regelung erreichten Ergebnisse beim Verfahren des Schlittens um 0.3 m dargestellt. Für den Unterschied zwischen den Ergebnissen der Simulation und des realen Systems können z.B. die folgende Punkte verantwortlich gemacht werden:

Bild 5.4: Schlittenposition x (in mm)Bild 5.5: Stellgröße u (in V)

- Elastizität des Riemens,
- die Haftreibung zwischen Schlitten und Führung,

Bild 5.6: Pendelwinkel φ (in $^\circ$)Bild 5.7: Reglerparameter α

- Spiel im Getriebe zwischen Motor und Riementrieb.

Aufgrund dieser in der Modellbildung vernachlässigten Punkte kommt es im realen System

zu Oszillationen in der Stellgröße, welche bei einer weitere Vergrößerung von α_{max} in ihrer Amplitude stark zunehmen und somit eine Grenze für α_{max} darstellen. Die Untergrenze für α wurde so gewählt, dass ein Anfangsfehler in der Schlittenposition von 0.3 m im sicheren Einzugsbereich der Regelung liegt. Der Wert für den Parameter κ wurde durch Minimierung von $\mathbf{b}_0^T \mathbf{P}(\alpha_{min}) \mathbf{b}_0$ gefunden. Der Einfluss der beiden Parameter β und f auf die Regelgüte ist gering. Die hier verwendeten Zahlenwerte stellen Standardwerte da, welche bei allen getesteten Beispielen zu guten Ergebnissen geführt haben.

Aufgrund der guten Ausnutzung der möglichen Stellgröße von 45V (siehe Bild 5.5) und des schnellen Verfahrens kann die Leistungsfähigkeit des Reglers als gut eingestuft werden.

Elektromotor unsicher

Lässt man auch Unsicherheiten in der Dynamik des Elektromotors zu, so vergrößern sich die Amplituden der möglichen Unsicherheiten stark. Beispielhaft soll im Folgenden für die Amplituden der Unsicherheiten angenommen werden:

$$\begin{aligned} 4\% \text{ Unsicherheit in der bewegten Masse} & \quad \Delta M = 0.236\text{kg}, \\ 4\% \text{ Unsicherheit in der gesamten horizontalen Reibung} & \quad \Delta d_x = 33.63\text{Ns/m}. \end{aligned}$$

Für diese Unsicherheiten ergibt sich die Matrix \mathbf{F} zu:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.158 & -0.0161 & -1.8e-4 \\ 0 & -0.0161 & 1226 & 1.83e-5 \\ 0 & -1.8e-4 & 1.83e-5 & 2.043e-7 \end{pmatrix}.$$

Wegen der deutlich größeren Einträge in der Matrix \mathbf{F} unterscheidet sich der im Folgenden bestimmte Regler deutlich von dem Regler, welcher nur für eine kleine Unsicherheit ausgelegt war. Hauptgrund hierfür ist, dass im nominellen Fall ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) die Ljapunow-Funktion V entsprechend (5.15) mit:

$$\dot{V} = -\alpha V - \frac{1}{\kappa} u^2 - \kappa \mathbf{x}^T \mathbf{F} \mathbf{x}$$

abnimmt. Dadurch nehmen die Zustände, welche in der Matrix \mathbf{F} stark gewichtet sind, schneller ab als der ursprünglichen Polplatzierung bei $-\frac{\alpha}{2}$ entsprechen würde. Dies führt

dazu, dass im vorliegenden Fall die schnellen, stabilen Eigenwerte des Systems schon bei kleinen α Werten stark verschoben werden, was große Rückführverstärkungen schon bei kleinen α Werten zur Folge hat. Bedingt durch die nicht modellierte Dynamik der Strecke kommt es deshalb schon bei deutlich kleineren α Werten zu Oszillationen in der Stellgröße. Für folgende Parameter konnte im realen Versuch noch ein akzeptables Verhalten beobachtet werden:

$$\alpha \in [1; 8.04],$$

$$\kappa = 0.7735,$$

$$\beta = 0.98,$$

$$f = 0.85.$$

Der sich daraus ergebende Verlauf von η über α ist in Bild 5.8 aufgetragen und wie gefordert monoton fallend.

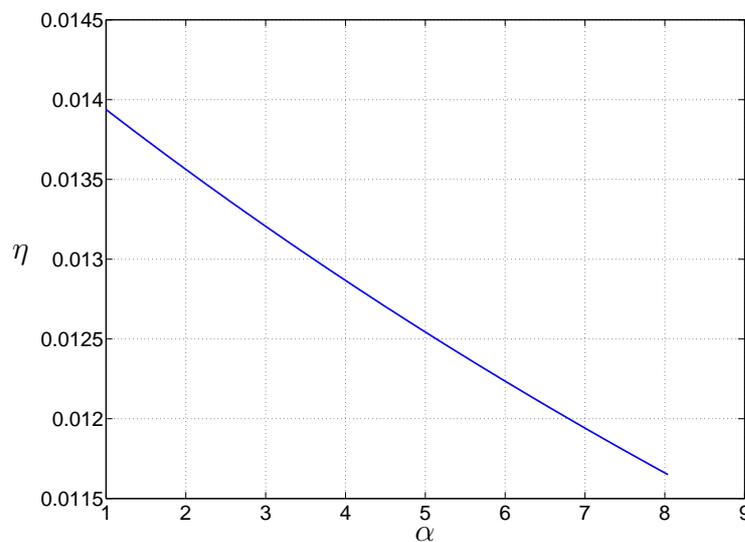
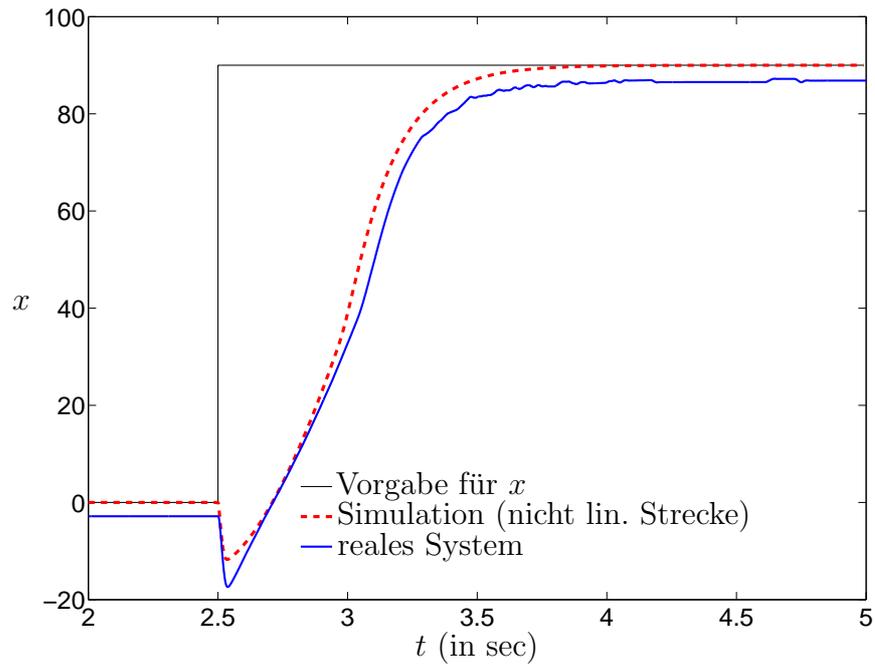
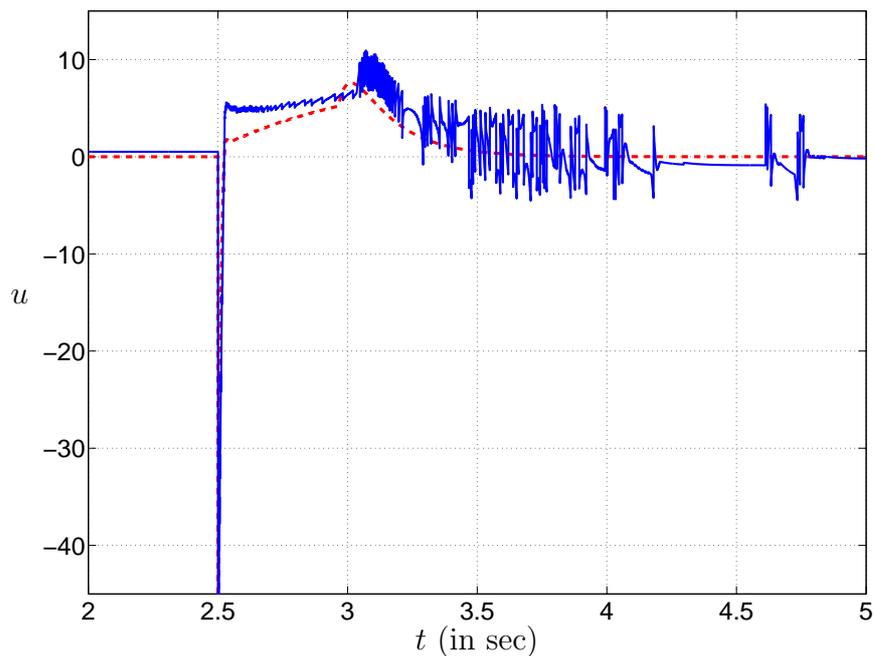
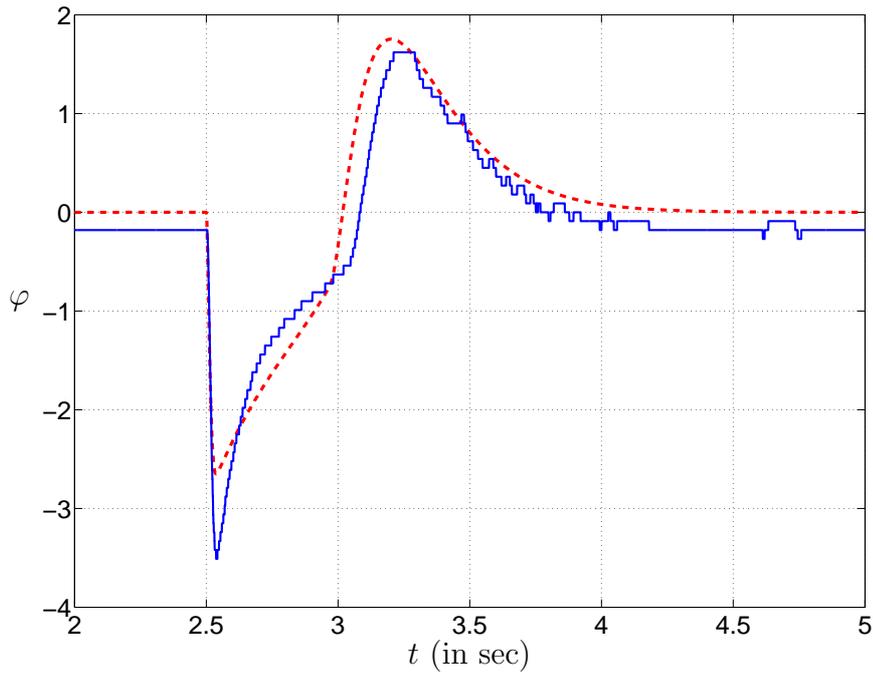
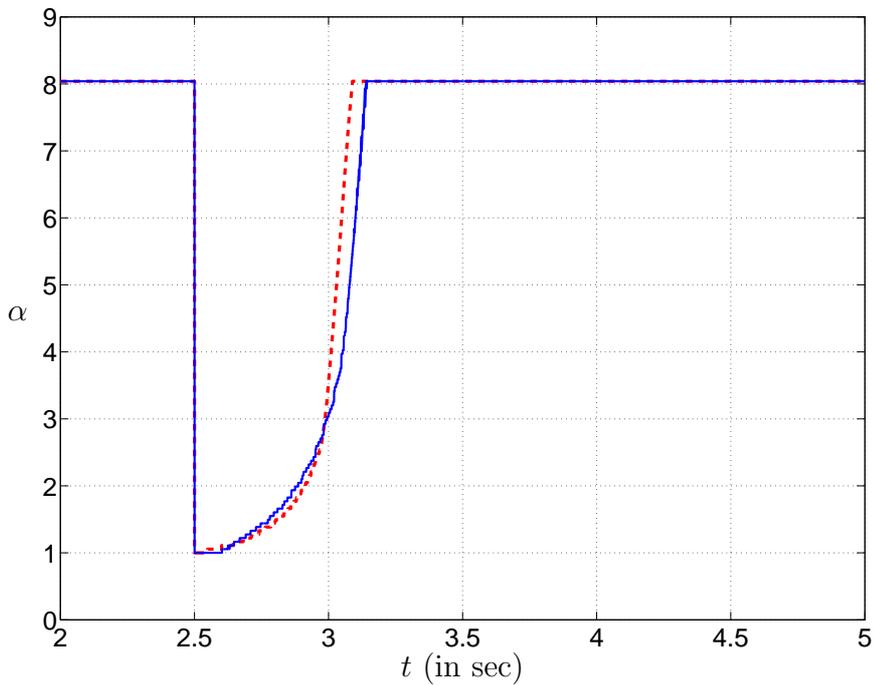


Bild 5.8: Monotone Abnahme von η über α

Neben der Einschränkung bei der Wahl von α hat eine große Matrix \mathbf{F} zur Folge, dass sich der gesicherte Einzugsbereich verkleinert. Im vorliegenden Beispiel sind nun nur noch Fehler in der Schlittenposition mit einer Amplitude von 0.09 m erlaubt. In den Bildern 5.9 - 5.12 sind die Ergebnisse für ein entsprechendes Verfahren des Schlittens dargestellt.

Bild 5.9: Schlittenposition x (in mm)Bild 5.10: Stellgröße u (in V)

Wie man in Bild 5.10 erkennen kann, wird die Stellgröße deutlich schlechter ausgenutzt als bei der vorangegangenen Regelung (siehe Bild 5.5). Trotz der Reduktion des Fahrwegs von 0.3 m auf 0.09 m benötigt der Regler nun zur Ausregelung ungefähr die gleiche Zeit

Bild 5.11: Pendelwinkel φ (in $^\circ$)Bild 5.12: Reglerparameter α

wie beim Verfahren um 0.3 m.

Die deutliche Verschlechterung in der erreichten Streckendynamik hat im wesentlichen

zwei Gründe:

- Ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten im System klingen alle durch die Regelung verschobenen Eigenvektoren mit $-\frac{\alpha}{2}$ ab. Durch die Modifikation in der Riccati-Gleichung (5.13) klingen nun *manche* Eigenvektoren deutlich schneller ab (siehe Tabelle 5.1). Bestimmend für die Dynamik des Ausregelvorgangs ist jedoch das Abklingverhalten der *langsamsten* Eigenvektoren. Wie ebenfalls in Tabelle 5.1 zu sehen, verkleinert sich im vorliegenden Beispiel der Einzugsbereich der Regelung mit zunehmender Robustheit stark. Dadurch können robust ausgelegte Regler erst deutlich später den Reglerparameter α erhöhen und somit das Abklingen der langsamsten Eigenvektoren beschleunigen. Die starke Verkleinerung des Einzugsbereichs \mathbb{S} stellt somit einen wesentlichen Grund für die Verschlechterung der Systemdynamik dar.

$\alpha = 2$ $\alpha = 8$ $\alpha = 14$	Eigenwerte $\mathbf{A}_0 - \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P}$	Ausdehnung von \mathbb{S} in Richtung \mathbf{b}_0
Regler ohne \mathbf{F}	$-1 \pm 2.68j, -6.2, -141.7$ $-4 \pm 6.38j, -6.2, -141.7$ $-7 \pm 10.4j, -7.0, -141.7$	6.22 4.38 3.19
Regler mit kleinem \mathbf{F}	$-2.95 \pm 1.84j, -6.2, -146.4$ $-7.4 \pm 5.41j, -6.2, -146.4$ $-11.9 \pm 9.04j, -7.34, -146.4$	2.82 2.06 1.55
Regler mit großem \mathbf{F}	$-1.6, -6.2, -13.5, -192.5$ $-5.96, -6.2, -24.4, -195.0$ $-8.74 \pm 9.5j, -36.1, -198.1$	0.627 0.519 0.433
Strecke ungeregelt	$6.16, 0, -6.20, -141.7$	-

Tabelle 5.1: Vergleich der Eigenwerte und Ausdehnung von \mathbb{S}

- Der zweite Grund für das langsamere Ausregeln von Störungen liegt darin, dass bei der robusten Reglerauslegung schon früh die schnellen, stabilen Pole der Strecke stark verschoben werden (siehe Tabelle 5.1). Aufgrund der oftmals mangelnden Genauigkeit des Modells in hohen Frequenzbereichen ist dies in der Regel problematisch

bzw. nur begrenzt möglich. Wie am vorliegenden Beispiel gezeigt, verhindert dies eine Wahl von großen α Werten, wodurch wiederum das Abklingen der langsamen Eigenvektoren begrenzt wird.

Zusammenfassend zeigt sich, dass die vorgestellte Modifikation des α -Reglers zur Kompensation von kleinen Unsicherheiten in der Streckendynamik gut geeignet ist. Sobald jedoch die Matrix \mathbf{F} stark die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beeinflusst, kann es aufgrund der oben erläuterten Mechanismen zu einer Verschlechterung der Dynamik kommen. In diesen Fällen ist die Anwendung der vorgestellten Modifikation zu überdenken bzw. die sich in der Praxis ergebende Grenze für α_{max} zu beachten.

Kapitel 6

Führungsfilter

6.1 Motivation

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ausschließlich die Stabilisierung der Ruhelage im Ursprung betrachtet. Für lineare Systeme führt die Annahme, dass sich die Ruhelage im Ursprung befindet, zu keiner Einschränkung der Allgemeingültigkeit. Falls anstelle des Ursprungs die Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) mit

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_z + \mathbf{b}u_z \quad (6.1)$$

als Zielpunkt vorgegeben wird, so stellt dies in dem Zustand \mathbf{x}_t bzw. dem Eingang u_t

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} - \mathbf{x}_z \quad (6.2)$$

$$u_t = u - u_z \quad (6.3)$$

wiederum eine Stabilisierung des Ursprungs dar. Die Dynamik in den transformierten Größen lautet

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t \quad (6.4)$$

und entspricht exakt der Dynamik in den ursprünglichen Größen. Unter Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung verhalten sich die Ruhelagen (\mathbf{x}_z, u_z) und die Ruhelage $(\mathbf{0}, 0)$ jedoch verschieden. Für die Stabilisierung der Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) steht nur ein symmetrischer Stellhub von

$$u_{max,z} = u_{max} - |u_z| \quad (6.5)$$

zur Verfügung. Entsprechend verkleinern sich die Abschätzungen für die Einzugsbereiche $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$:

$$\eta(\alpha, u_z) = \eta(\alpha) \frac{u_{max,z}^2}{u_{max}^2} \quad (6.6)$$

mit $\eta(\alpha)$ aus (2.27) oder (5.14) bzw. (5.26). Für Systeme, bei denen \mathbb{S} nicht beliebig groß gemacht werden kann (siehe Abschnitt 2.3.2), bedeutet dies, dass für große Bereiche im Zustandsraum keine stabile Überführung in die Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) nachgewiesen werden kann, obwohl diese teilweise möglich erscheint. Dies soll im Folgenden kurz an dem bereits in Abschnitt 2.1 eingeführten Beispiel illustriert werden. Die Dynamik dieses Beispielsystems wird hierzu geschrieben als:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u)$$

mit $u_{max} = 5$. Die Ruhelagen dieses Systems liegen bei $((x_{z,1} \ 0)^T, -x_{z,1})$. In Bild 6.1 sind die Einzugsbereiche \mathbb{S} für $x_{z,1} = 0$ und $x_{z,1} = 4$ mit $\alpha_{min} = 2.5$ dargestellt. Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, würden sich die größtmöglichen Einzugsbereiche für $\alpha_{min} = 2$ ergeben. Allerdings entarten für diese Wahl die Ellipsen zu Parallelen, so dass für eine günstigere Darstellung $\alpha_{min} = 2.5$ gewählt wurde. Wie man erkennen kann, gibt es vor allem bezüglich der Ruhelage bei $x_{z,1} = 4$ einen großen Bereich im Zustandsraum, der außerhalb von \mathbb{S} liegt, dessen Überführung in die Ruhelage aber möglich erscheint, bzw. mit dem im Folgenden vorgestellten Führungsfiler auch möglich ist.

6.2 Ansatz Führungsfiler

Die Kernidee des Führungsfilters ist es, anstelle der Ruhelage (\mathbf{x}_z, u_z) eine Referenz-Ruhelage (\mathbf{x}_r, u_r) zu bestimmen, deren Einzugsbereich \mathbb{S} den aktuellen Zustandspunkt gerade beinhaltet, so dass sich \mathbf{x} auf \mathbf{x}_r zubewegen muss. Während dies geschieht, wird \mathbf{x}_r kontinuierlich in Richtung \mathbf{x}_z verschoben, bis $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_z$ und folglich \mathbf{x} im Einzugsbereich von \mathbf{x}_z angekommen ist. Um dies zu veranschaulichen, ist in Bild 6.2 die Trajektorie sowie die Einzugsbereiche \mathbb{S} einiger ausgewählter Referenz-Ruhelagen \mathbf{x}_r dargestellt.

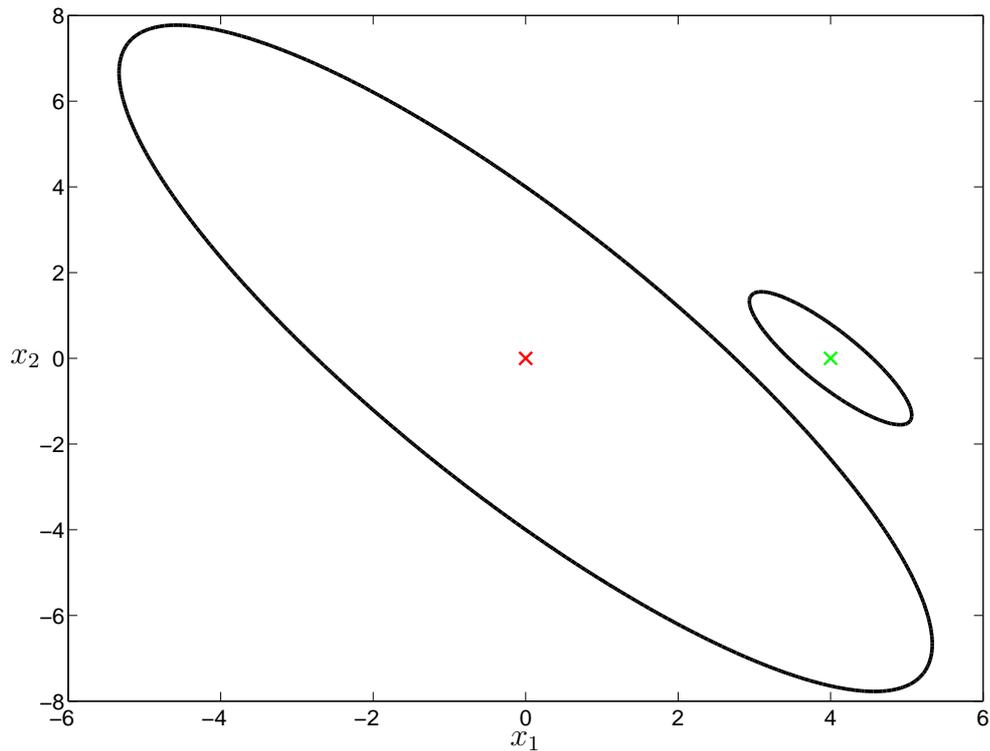


Bild 6.1: Einzugsbereiche \mathbb{S} von $x_{z,1} = 0$ und $x_{z,1} = 4$

Das Blockschaltbild der Regelung mit vorgeschaltetem Führungsfilter zeigt Bild 6.3. Wie man dort erkennen kann, benötigt das Führungsfilter den aktuellen Zustand \mathbf{x} . Dies unterscheidet es von klassischen Führungsfiltern, die ohne Rückführung des Zustands auskommen. Aufgrund dieser Rückführung muss das Verhalten des Führungsfilters bei der Stabilitätsuntersuchung mit berücksichtigt werden.

Für den α -Regler in Bild 6.3 können die in Kapitel 3, 4 und 5 vorgestellten Regler verwendet werden. Da die für die Ausregelung des Fehler $\mathbf{e}_r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ verfügbare Amplitude der Stellgröße von der Referenz-Ruhelage (\mathbf{x}_r, u_r) abhängt und diese Amplitude vom α -Regler benötigt wird, muss der vom Führungsfilter kommandierte Stellgrößenhub u_r dem Reglerblock ebenfalls zugeführt werden.

Die Bestimmung der Referenz-Ruhelagen (\mathbf{x}_r, u_r) basiert auf der Annahme, dass zum Startzeitpunkt eine Ruhelage $(\mathbf{x}_r(t_0), u_r(t_0))$ bekannt ist, in deren Einzugsbereich sich der aktuelle Zustand befindet. Ausgehend von dieser Ruhelage ergeben sich die Referenz-

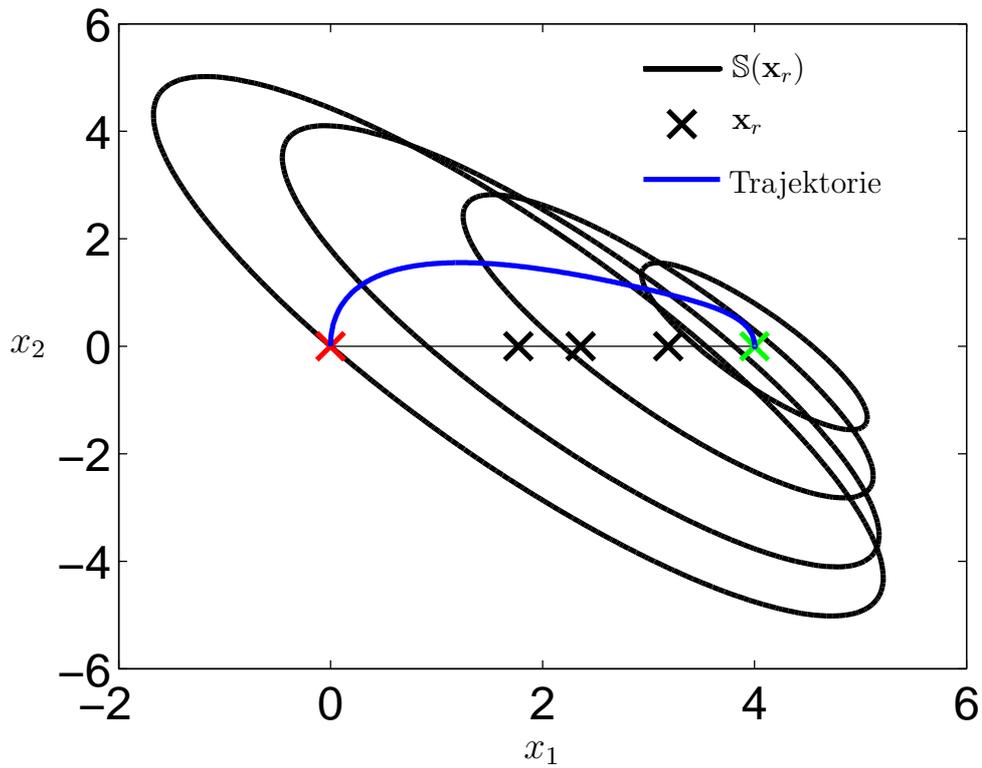
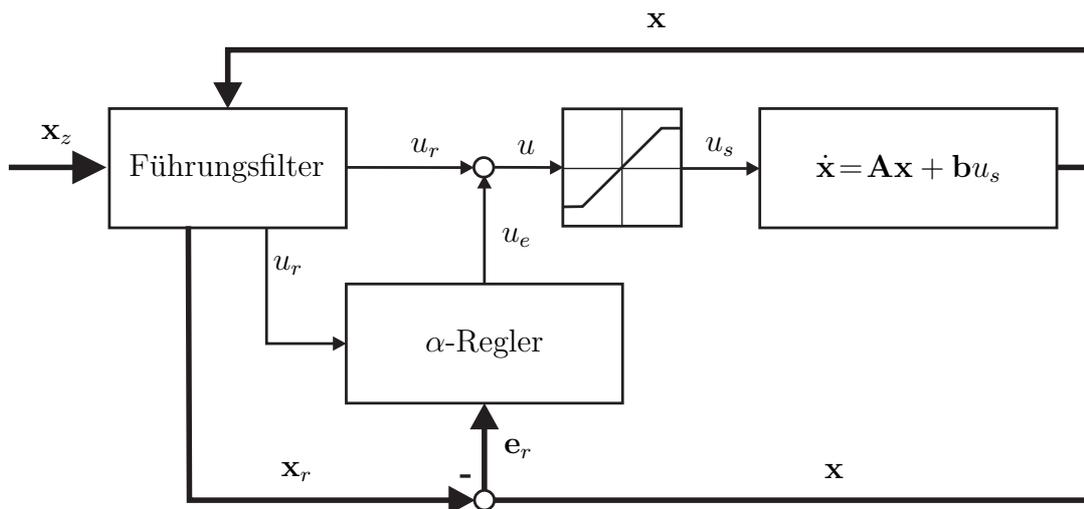
Bild 6.2: Einzugsgebiete der Ruhelagen \mathbf{x}_r und Trajektorie

Bild 6.3: Blockschaltbild von Regelung mit Führungsfilter

Ruhelagen zu späteren Zeitpunkten $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ als:

$$\mathbf{x}_r(t_{i+1}) = \mathbf{x}_r(t_i) + c(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_r(t_i)) \quad (6.7)$$

$$u_r(t_{i+1}) = u_r(t_i) + c(u_z - u_r(t_i)). \quad (6.8)$$

Der skalare Wert $c \geq 0$ gibt an, wie weit \mathbf{x}_r in Richtung \mathbf{x}_z verschoben wird. Die Bestimmung von c erfolgt aus der Bedingung, dass \mathbf{x} auf dem Rand von $\mathbb{S}(\alpha_{min}, \mathbf{x}_r(t_{i+1}))$ liegt. Dies bedeutet:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t_{i+1}))^T \mathbf{P}(\alpha_{min})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t_{i+1})) = \beta \eta(\alpha_{min}, u_r(t_{i+1})) \quad (6.9)$$

mit $\beta \rightarrow 1$. Für $\eta(\alpha_{min}, u_r(t_{i+1}))$ ergibt sich entsprechend (6.6):

$$\eta(\alpha_{min}, u_r(t_{i+1})) = \eta(\alpha_{min}) \frac{(u_{max} - |u_r(t_{i+1})|)^2}{u_{max}^2}. \quad (6.10)$$

Durch Einsetzen von (6.7) in (6.9) und (6.8) in (6.10) und anschließend in (6.9) ergibt sich aus (6.9) eine quadratische, skalare Gleichung zur Bestimmung von c . Die gesuchte Lösung ist der größte Wert im Intervall $[0; 1]$.

6.3 Stabilität

Für die Überprüfung der Stabilität des mit Führungfilter geregelten Systems ist es nötig, den Fehler $\mathbf{e}_r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ sowie den Fehler $\mathbf{e}_f = \mathbf{x}_z - \mathbf{x}_r$ zu betrachten. Hierzu soll die Ljapunow-Funktion:

$$V = \underbrace{\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f}_{V_f} + \underbrace{\mathbf{e}_r^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{e}_r \frac{u_{max}^2}{u_{max,r}^2}}_{V_r} \quad (6.11)$$

mit

$$u_{max,r} = u_{max} - |u_r|$$

verwendet werden. Bei der Bestimmung von \dot{V} sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Referenz-Ruhelage \mathbf{x}_r hat noch nicht die Zielruhelage \mathbf{x}_z erreicht. In diesem Fall ist $\alpha = \alpha_{min}$. Mit (6.10) ergibt sich in dieser Phase für den zweiten Term V_r :

$$\mathbf{e}_r^T \mathbf{P}(\alpha_{min}) \mathbf{e}_r \frac{u_{max}^2}{u_{max,r}^2} = \beta \eta(\alpha_{min}, u_r) \frac{u_{max}^2}{u_{max,r}^2} = \beta \eta(\alpha_{min}) = konst.$$

Für die zeitliche Ableitung von V ist somit nur der erste Term V_f interessant. Solange \mathbf{x}_r in Richtung \mathbf{x}_z verschoben wird, nimmt der Fehler \mathbf{e}_f ab, so dass gelten muss

$$\dot{V} = \dot{V}_f = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_f^T \mathbf{e}_f) < 0.$$

Dass \mathbf{x}_r kontinuierlich in Richtung \mathbf{x}_z verschoben wird, kann durch Annahme des Gegenteils gezeigt werden. Falls \mathbf{x}_r nicht verschoben würde, würde \mathbf{x} sich auf \mathbf{x}_r zubewegen, da $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\alpha_{min}, \mathbf{x}_r)$. In diesem Falle wäre \mathbf{x} nicht mehr auf dem Rand von $\partial\mathbb{S}(\alpha_{min}, \mathbf{x}_r)$, wie bei der Bestimmung von \mathbf{x}_r (siehe Gleichung (6.9)) gefordert.

2. Sobald \mathbf{x}_r die Zielruhelage \mathbf{x}_z erreicht hat, ist $\mathbf{e}_f = \mathbf{0}$. Folglich ist ab dann nur noch der zweite Term V_r für \dot{V} von Bedeutung. Dieser unterscheidet sich nur um den Faktor $u_{max}^2/u_{max,r}^2$, welcher für $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_z$ konstant ist, von den in den Kapiteln 3, 4 und 5 verwendeten Ljapunow-Funktionen. Abhängig von der Berechnung von u_e kann somit die Abnahme von V_r in dem entsprechenden Kapitel nachgelesen werden.

Insgesamt ergibt sich für die Ableitung von V

$$\dot{V} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_f < 0 \quad , \text{ wenn } \mathbf{x}_r \neq \mathbf{x}_z \\ \dot{V}_r < 0 \quad , \text{ wenn } \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_z \end{array} \right\} < 0,$$

womit die Stabilität des Systems mit Führungsfiler gezeigt ist.

6.4 Interpretation

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, könnte es ohne die Verwendung des vorgestellten Führungsfilters dazu kommen, dass die nachweisbare Größe des Einzugsbereichs einer Ruhelage von der Lage der Ruhelage abhängt. Durch die Verwendung des Führungsfilters kann zur Stabilisierung einer beliebigen Ruhelage auf die Einzugsbereiche aller möglichen Ruhelagen im System zurückgegriffen werden. Dadurch besitzen alle Ruhelagen in einem System denselben nachweisbaren Einzugsbereich. Der mit den vorgestellten Methoden nachweisbare Einzugsbereich ist somit eine Eigenschaft des Systems und hängt ab von

- der Stellgrößenbegrenzung $u_{max,0}$,
- dem Eingangsvektor \mathbf{b}_0 ,

- den Unsicherheiten \mathbf{q} bzw. \mathbf{F} ,
- der Systemmatrix \mathbf{A}_0 ,

nicht aber von der gewählten Ruhelage.

6.5 Laborexperiment: inverses Pendel

Als Anwendungsbeispiel für den vorgestellten Führungsfiler soll das bereits in Abschnitt 5.4 eingeführte invertierte Pendel verwendet werden. Zum Testen des Führungsfilters wurden sämtliche Reglereinstellungen wie in Abschnitt 5.4.3 im Falle des nicht unsicheren Elektromotors übernommen ($\alpha \in [1; 13.8]$, $\kappa = 1.59$, $\beta = 0.98$, $f = 0.85$). Mit diesen Parametern beträgt der stabile Einzugsbereich bezüglich einer Auslenkung in der Wagenposition 0.338 m. Durch die Ergänzung der Regelung um den Führungsfiler können nun theoretisch beliebig große Auslenkungen in der Wagenposition stabil ausgeregelt werden. Um dies zu demonstrieren, sind in den Bildern 6.4 - 6.7 die Simulationsergebnisse für ein Verfahren des Wagens um 5 m dargestellt.

Für eine praktische Verifikation des Ansatzes wurde der bereits in Abschnitt 5.4.3 beschriebene Versuchsaufbau verwendet. Wegen der beschränkten Länge des Riementriebs konnte im praktischen Versuch nur ein Verfahren um 0.5 m getestet werden. Die im Versuch erzielten Ergebnisse sind in den Bildern 6.8 - 6.11 zusammen mit den Ergebnissen der Simulation dargestellt. Angesichts der guten Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen erscheint ein beliebig weites Verfahren des Wagens mit Hilfe des Führungsfilters auch in der Praxis ohne weiteres möglich.

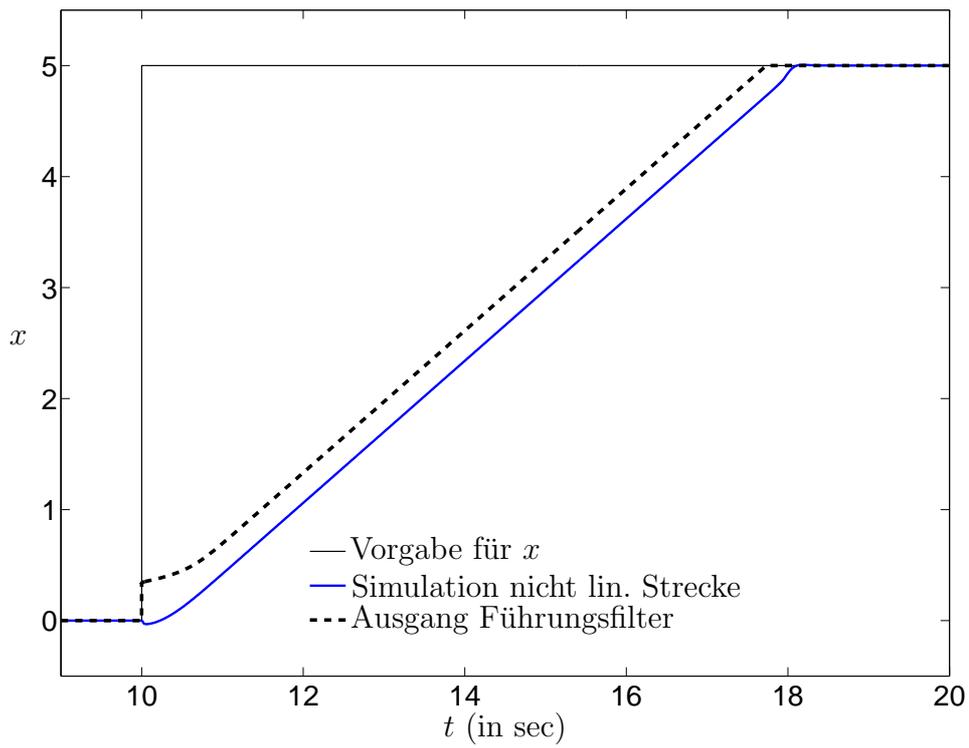


Bild 6.4: Schlittenposition x (in m)

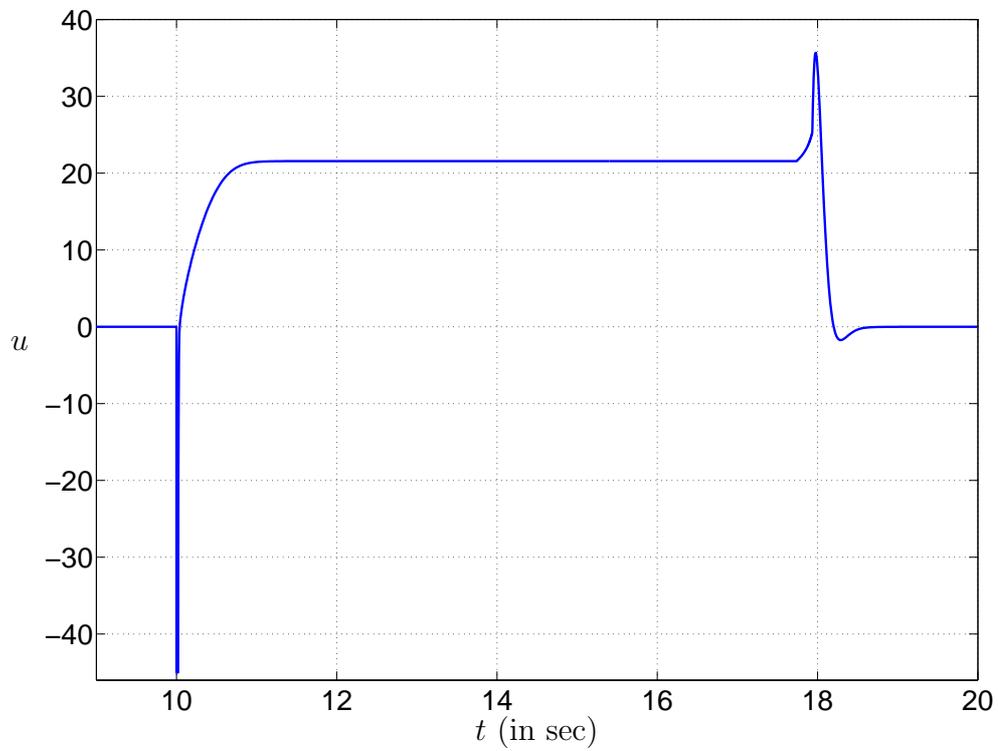
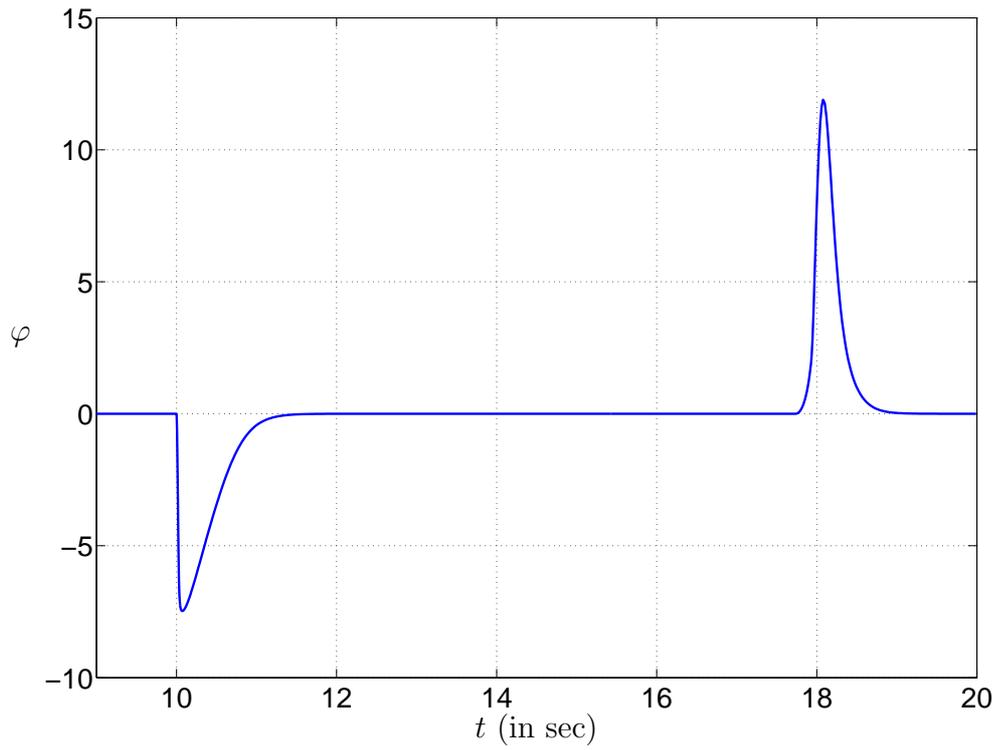
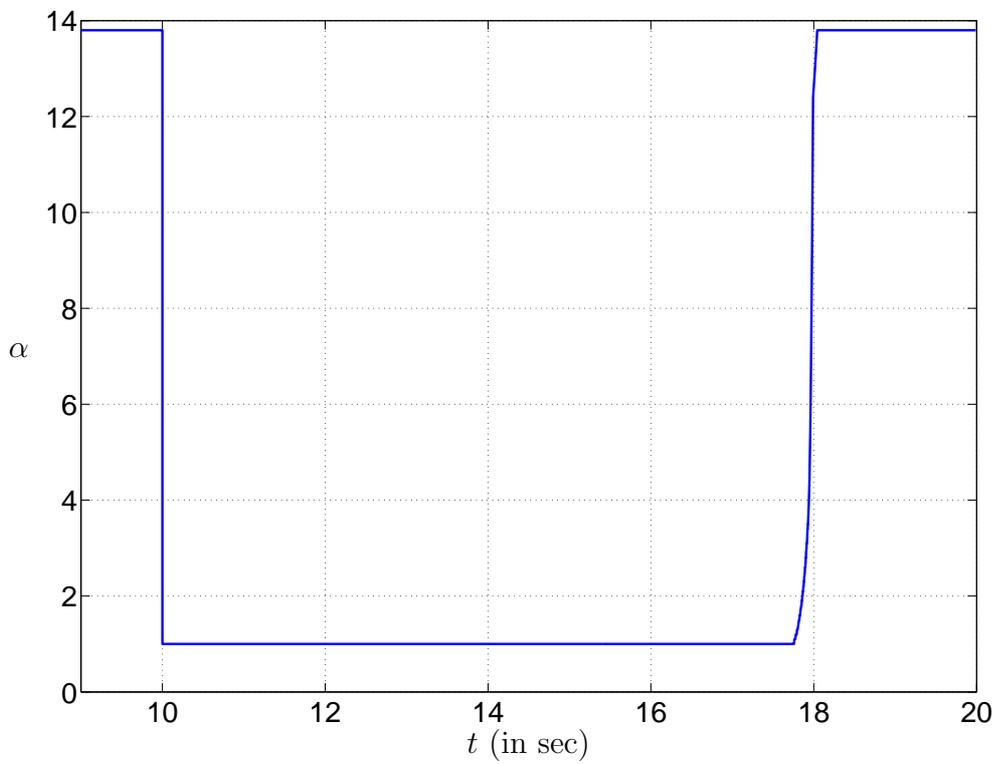
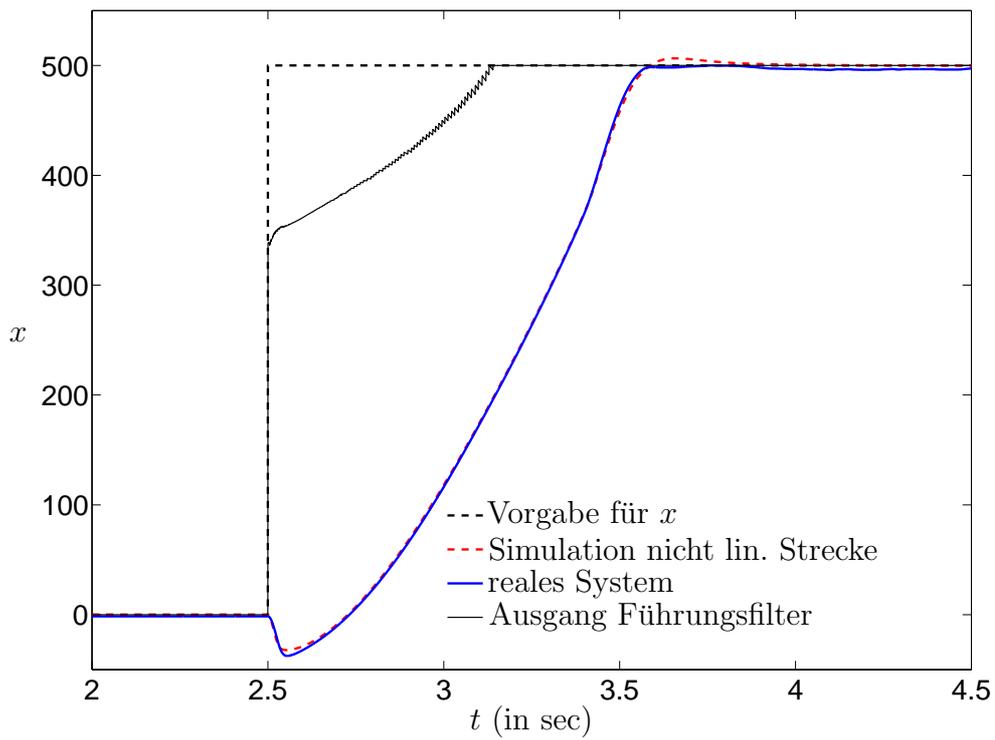
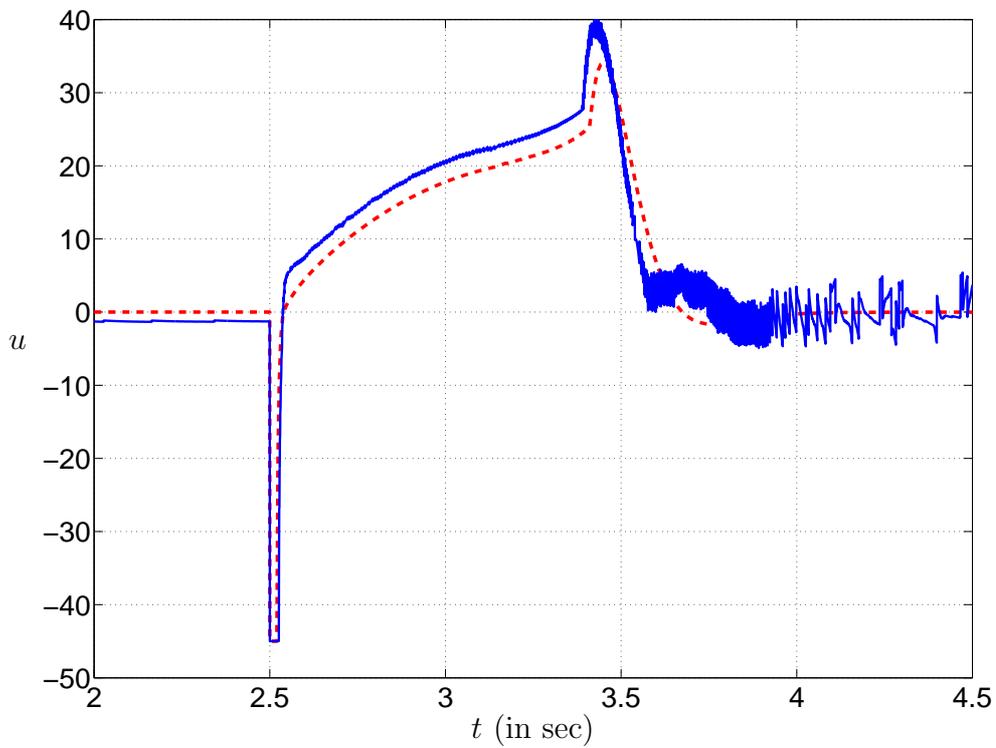
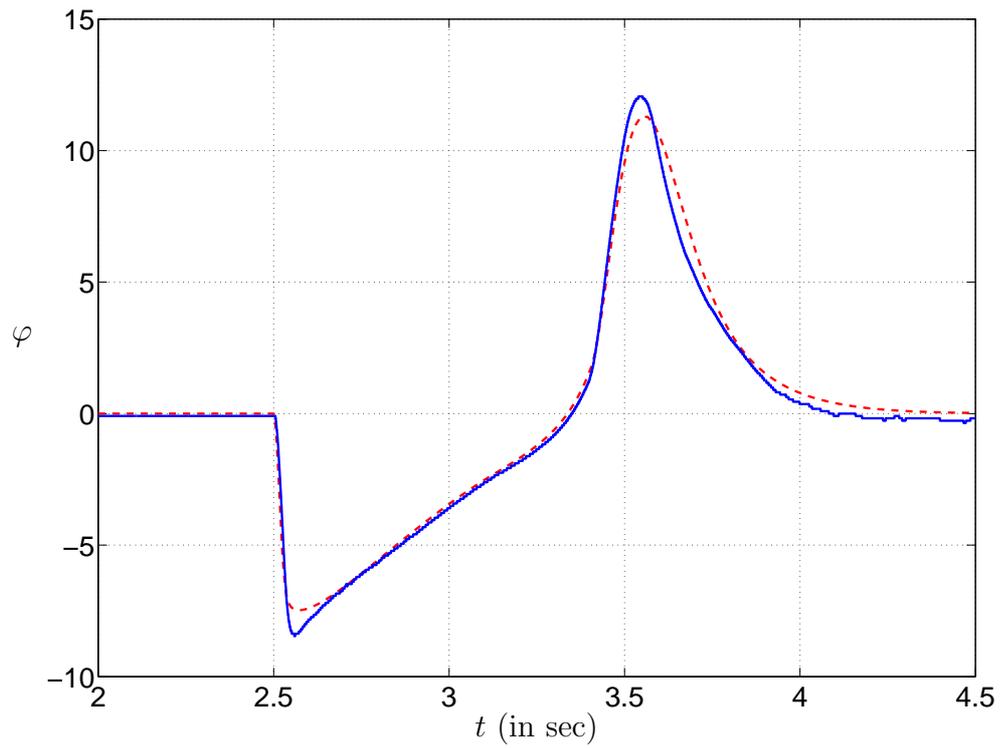
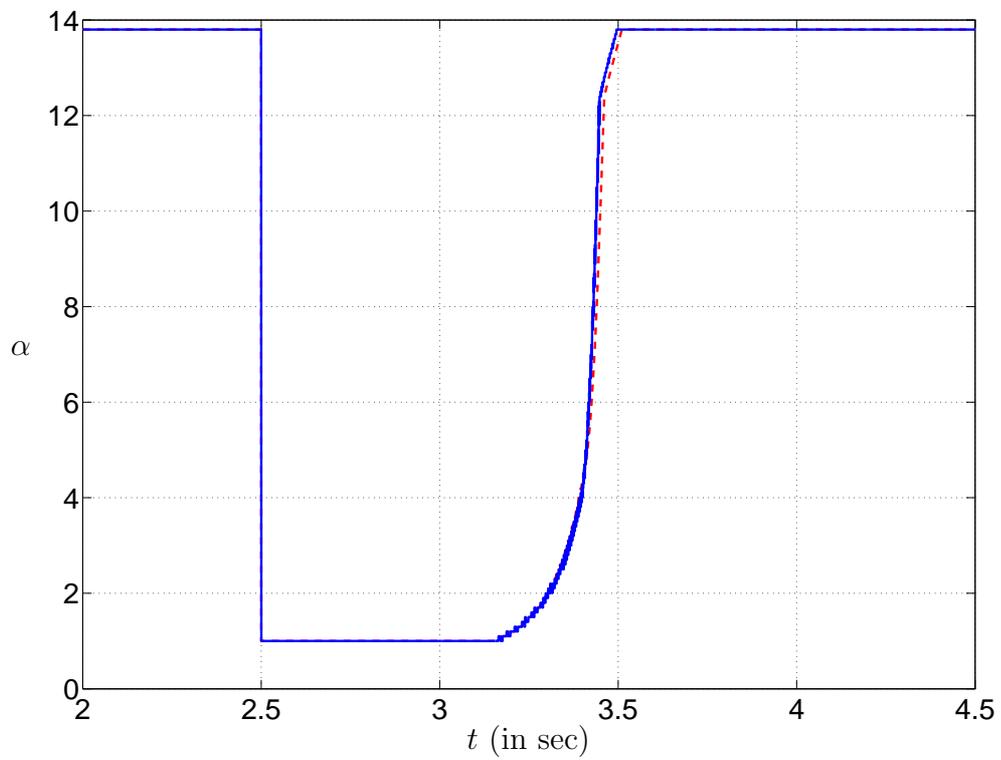


Bild 6.5: Stellgröße u (in V)

**Bild 6.6:** Pendelwinkel φ (in $^\circ$)**Bild 6.7:** Reglerparameter α

Bild 6.8: Schlittenposition x (in mm)Bild 6.9: Stellgröße u (in V)

Bild 6.10: Pendelwinkel φ (in $^\circ$)Bild 6.11: Reglerparameter α

Kapitel 7

Ausblick für Systeme mit mehreren Eingängen

In diesem Kapitel sollen im Wesentlichen die Probleme aufgezeigt werden, welche eine direkte Erweiterung des vorgestellten, weich strukturvariablen Regelungsansatzes auf Systeme mit mehreren Eingangsgrößen verhindern. Die einzige bis jetzt gefundene Möglichkeit zur strukturvariablen Regelung von Systemen mit mehreren Eingängen stellt die Verwendung von diskret schaltenden Reglern dar. In Abschnitt 7.4 wird diese anhand eines Beispiels demonstriert.

7.1 Probleme bei der Erweiterung

Strecken mit mehreren symmetrisch begrenzten Eingangsgrößen können dargestellt werden als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{sat}(\mathbf{u}) \quad (7.1)$$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m > 1$), wobei die vektorielle Sättigungsfunktion \mathbf{sat} jede Komponente von \mathbf{u} entsprechend des zulässigen Stellhubs $u_{max,i}$ symmetrisch begrenzt:

$$\mathbf{sat}_i(u_i) = \begin{cases} -u_{max,i} & \text{für } u_i \leq -u_{max,i} \\ u_i & \text{für } -u_{max,i} < u_i < u_{max,i} \\ u_{max,i} & \text{für } u_i \geq u_{max,i} \end{cases} \quad (7.2)$$

Alle Amplituden $u_{max,1} \dots u_{max,m}$ seien im Vektor \mathbf{u}_{max} zusammengefasst. Für Systeme der Form (7.1) ergeben sich nun die im Folgenden gezeigten Probleme bei der Anwendung des

weich strukturvariablen Regelungsansatzes.

Verwendet man auch für Systeme mit mehreren Eingängen als Grundlage für die Reglerauslegung den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Ansatz $\dot{V} = -\alpha V$, so erhält man in völlig analoger Weise wie im Eingrößenfall als Bestimmungsgleichungen für \mathbf{P} bzw. \mathbf{u} :

$$0 = (\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}) - 2\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x}. \quad (7.4)$$

Um nun die kleinste Höhenlinie zu finden, auf welcher, bedingt durch die Stellgrößenbegrenzung, zum ersten Mal $\dot{V} = 0$ auftritt, muss das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \eta = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (7.5)$$

$$\text{NB: } \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.6)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathcal{N}(\mathbf{P})\} \quad (7.7)$$

gelöst werden. Die ausgeschriebene Nebenbedingung (7.6) lautet:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\text{sat}(-\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x}) = 0. \quad (7.8)$$

Ähnlich wie in Abschnitt 2.3.2 kann $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ unter Verwendung von (7.3) durch $-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}$ ersetzt werden. Weiterhin gilt auch im Fall mit mehreren Eingängen, dass $\dot{V} = 0$ nicht ohne sättigungsbedingte Effekte erreicht werden kann. Führt man hierzu die Diagonalmatrix $\Lambda = \Lambda(\mathbf{u})$ ein:

$$\Lambda_{i,i}(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i > u_{max,i} \\ -1 & \text{falls } u_i < -u_{max,i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.9)$$

welche die Sättigungskonfiguration der Stellgröße beschreibt, so gilt

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\text{sat}(\mathbf{u}) = 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^2 \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda \mathbf{u}_{max}.$$

Damit wird (7.8) zu

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^2 \mathbf{B}^T \mathbf{P})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda \mathbf{u}_{max} = 0. \quad (7.10)$$

Versucht man das Optimierungsproblem (7.5) - (7.7) durch Suche der Stationärpunkte der zugehörigen Lagrangeschen Hilfsfunktion:

$$L = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mu (\mathbf{x}^T (-\alpha \mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^2 \mathbf{B}^T \mathbf{P})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda \mathbf{u}_{max}) \quad (7.11)$$

zu lösen, erhält man:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{P}\mathbf{x} + \mu \left((-2\alpha\mathbf{P} + 4\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^2\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda\mathbf{u}_{max} \right) &= 0 \\ \mathbf{P} \left(\mathbf{x}(2 - 2\mu\alpha) + \mathbf{B}\Lambda \left(4\mu\Lambda\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + 2\mu\mathbf{u}_{max} \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Aus (7.12) kann nun der Schluss gezogen werden, dass \mathbf{x}^* in dem Raum liegt, welcher durch die gesättigten Spalten von \mathbf{B} aufgespannt wird. Wählt man mit Hilfe von Λ^2 die gesättigten Spalten von \mathbf{B} aus, so kann man den Vektor \mathbf{x}^* ausdrücken als:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{B}\Lambda^2\mathbf{w} \quad (7.13)$$

mit $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Die Analogie zum Fall mit einem Eingang wird in (7.13) klar ersichtlich. Auch dort liegt die gesuchte Lösung \mathbf{x}^* im Raum, der durch die Spalte von \mathbf{b} "aufgespannt" wird. Anders als im Fall mit einem Eingang ist bei mehreren Eingängen jedoch nicht klar, welche Sättigungskonfiguration Λ in (7.13) zu wählen ist! Selbst ein Ausprobieren aller möglichen Sättigungskonfigurationen ist nicht direkt zielführend, denn sobald mehr als ein Eingang als gesättigt angenommen wird und die entsprechenden Spalten von \mathbf{B} unabhängig sind, kann aus (7.13) die Lage von \mathbf{x}^* nicht auf eine Richtung im Zustandsraum, sondern nur auf einen mehrdimensionalen Unterraum des Zustandsraums eingeschränkt werden. Eine eindeutige Bestimmung von \mathbf{w} und damit \mathbf{x}^* ist jedoch in diesem Unterraum alleine durch Benutzung der skalaren Nebenbedingung (7.10) nicht möglich.

Sobald also ein System mehr als einen amplitudenbegrenzten Eingang besitzt, ist eine analytische Lösung des Optimierungsproblems (7.5) - (7.7) und damit eine analytische Abschätzung des Einzugsbereichs nicht mehr möglich. Ohne diese ist das Lösen der impliziten Gleichung 3.3 zur Bestimmung von α nicht mehr online möglich, wodurch eine einfache Erweiterung der vorgestellten Regelung auf Systeme mit mehreren Eingängen verhindert wird.

Neben der strukturvariablen Regelung ist auch für den in Abschnitt 6 beschriebenen Führungfilter eine analytische Abschätzung von $\mathcal{S}(\alpha_{min})$ nötig. Ohne diese ist der Einfluss der verfügbaren Stellgröße auf die Größe von $\mathcal{S}(\alpha_{min})$ unbekannt, was eine sinnvolle Bestimmung von Referenz-Ruhelagen \mathbf{x}_r entsprechend (6.9) unmöglich macht. Damit ist auch der Einsatz des Führungfilters für Systeme mit mehreren Eingängen nicht ohne weiteres zu erreichen.

7.2 Anpassung des α -Reglers für Systeme mit mehreren Eingängen

Wie im vorhergehenden Abschnitt 7.1 gezeigt, ist eine analytische Abschätzung des Einzugsbereichs \mathbb{S} im Falle mehrerer Eingänge nicht mehr möglich. Um den vorgestellten strukturvariablen Regelungsansatz mit vertretbarem Online-Rechenaufwand auch auf solche Systeme anwenden zu können, bieten sich die folgenden beiden Möglichkeiten an:

1. diskrete Variation von α (Abschnitt 7.2.1),
2. kontinuierliche Variation von α durch Verwendung einer korrigierten analytischen Abschätzung für η (Abschnitt 7.2.2).

In beiden Fällen kann die Stabilität der strukturvariablen Regelung, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, gezeigt werden. Hierzu muss allerdings sichergestellt sein, dass $\mathbf{P}' \geq \mathbf{0}$ und $\eta' < 0$ gilt. Die erste Bedingung kann bei einer Bestimmung von \mathbf{P} nach (7.3) entsprechend dem Nachweis von Satz 2.8 auch im Mehrgrößenfall gezeigt werden. Um jedoch die geforderte monotone Abnahme von η sicherzustellen, muss - wie bei der robusten Reglerauslegung auch - $\eta(\alpha)$ vorab berechnet und überprüft werden.

7.2.1 Übergang zur diskreten Variation von α

Im Hinblick auf die zur Laufzeit benötigte Rechenzeit stellt der Übergang zu einer diskreten Variation von α die günstigste Möglichkeit dar. In diesem Fall werden für eine endliche Anzahl von α Werten $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ vorab mit Hilfe von numerischen Optimierungsverfahren die Einzugsbereiche $\mathbb{S}(\alpha)$ bestimmt und abgespeichert. Da nicht absehbar ist, welche Sättigungskonfiguration Λ zu dem kleinsten $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ führt, müssen für jedes α_i alle $2^m - 1$ möglichen Sättigungskonfigurationen untersucht werden, die zu einem unterschiedlichen Λ^2 und damit nach (7.13) unterschiedlichen Lösungsraum führen. Somit steigt der numerische Aufwand zur Auslegung der Regelung mit der Anzahl der Eingänge stark an.

Unabhängig von der Anzahl der Eingänge beschränkt sich der Rechenaufwand während der Laufzeit auf die Auswahl des größten α Wertes, für welchen die Bedingung $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(\alpha)$ erfüllt ist. Ein effizientes Verfahren für die Suche nach diesem α Wert ist in Abschnitt 3.4.3 beschrieben.

Der Übergang zu einer diskret schaltenden Regelung weist im wesentlichen zwei Nachteile auf.

1. Durch das diskrete Schalten ergeben sich Sprünge in den Stellgrößen.
2. Falls der zur Verfügung stehende Stellhub für verschiedene Zielruhelagen unterschiedlich ist, müssen die Einzugsbereiche $\mathbb{S}(\alpha_{1\dots l})$ für jede interessierende Ruhelage bestimmt und abgespeichert werden.

Der erste Punkt kann durch Bereitstellung einer genügend großen Anzahl von α Werten gemindert werden. Aufgrund des zweiten Punktes erscheint eine Anwendung der Regelung hauptsächlich für Systeme interessant, bei denen entweder kein Einfluss zwischen den Zielruhelagen und dem für die Regelung verfügbaren Stellhub besteht oder bei denen die Anzahl der Zielruhelagen entsprechend gering ist.

7.2.2 Verwendung einer korrigierten Abschätzung für η

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Abschätzung von $\eta(\alpha)$ vorgestellt, mit deren Hilfe eine kontinuierliche Variation von α wieder ermöglicht wird. Ausgangspunkt für die Bestimmung von η ist die Abschätzung von \dot{V} durch eine obere Schranke U . Der exakte Ausdruck für \dot{V} entsprechend (7.10) lautet:

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T(-\alpha\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^2\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda\mathbf{u}_{max}. \quad (7.14)$$

Da $\Lambda = \Lambda^3$ und $\Lambda^2 = \Lambda^4$ gilt, kann (7.14) auch als

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T(-\alpha\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^4\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x} + 2\underbrace{\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}_{-\mathbf{u}^T}\Lambda^3\mathbf{u}_{max} \quad (7.15)$$

geschrieben werden. Der letzte Term in (7.15) ist sicher negativ. Außerdem sind die Komponenten in \mathbf{u} , die zu den gesättigten Eingängen des Systems gehören, betragsmäßig größer als $u_{max,i}$. Deshalb kann \dot{V} nach oben abgeschätzt werden mit:

$$\dot{V} \leq U = \mathbf{x}^T(-\alpha\mathbf{P} + 2\mathbf{P}\mathbf{B}\Lambda^4\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x} - 2\mathbf{u}_{max}^T\Lambda^2\mathbf{u}_{max}.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung und dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{B}\Lambda^2\mathbf{w}$ lautet das Optimierungsproblem zur Bestimmung von η

$$\min_{\mathbf{w}} \eta = \mathbf{w}^T \mathbf{P}_s \mathbf{w} \quad (7.16)$$

$$\text{NB: } U(\mathbf{w}) = 0 \quad (7.17)$$

$$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}, \mathcal{N}(\mathbf{P}_s)\} \quad (7.18)$$

mit $\mathbf{P}_s = \Lambda^2 \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \Lambda^2$. Die Lagrangesche Hilfsfunktion zum Optimierungsproblem (7.16)-(7.18) wird dann zu

$$L = \mathbf{w}^T \mathbf{P}_s \mathbf{w} + \mu (\mathbf{w}^T (-\alpha \mathbf{P}_s + 2 \mathbf{P}_s \mathbf{P}_s) \mathbf{w} - 2 \mathbf{u}_{max}^T \Lambda^2 \mathbf{u}_{max}). \quad (7.19)$$

Die Ableitung von (7.19) zur Bestimmung der Stationärpunkte liefert

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{P}_s (2\mathbf{w} + \mu(-2\alpha\mathbf{I} + 4\mathbf{P}_s)\mathbf{w}) = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Da die Lösungen \mathbf{w}^* im Nullraum von \mathbf{P}_s nicht interessieren, kann man aus (7.20) schließen, dass der Klammerausdruck verschwinden muss. Dies geht nur, falls \mathbf{w} ein Eigenvektor der Matrix $-2\alpha\mathbf{I} + 4\mathbf{P}_s$ bzw. der Matrix

$$\Phi = -\alpha\mathbf{I} + 2\mathbf{P}_s \quad (7.21)$$

ist. Die Eigenvektoren \mathbf{v}_i der Matrix Φ , welche positive Eigenwerte λ_i besitzen, stellen also ausgezeichnete Richtungen im Lösungsraum dar, da sich unter ihnen auch die Lösung zum leicht modifizierten Optimierungsproblem (7.16)-(7.18) befindet. Um nun eine Näherungslösung für die ursprüngliche Optimierung zu finden, benutzt man deshalb den Ansatz

$$\mathbf{w}^* = a\mathbf{v}_i \quad (7.22)$$

zusammen mit der ursprünglichen Nebenbedingung $\dot{V} = 0$. Für die Länge a erhält man dann:

$$\dot{V} = \mathbf{w}^{*T} (-\alpha \mathbf{P}_s + 2 \mathbf{P}_s \mathbf{P}_s) \mathbf{w}^* + 2 \underbrace{\mathbf{w}^{*T} \mathbf{P}_s \Lambda}_{-|\mathbf{w}^{*T} \mathbf{P}_s|} \mathbf{u}_{max} \quad (7.23)$$

$$= \mathbf{w}^{*T} \mathbf{P}_s (-\alpha \mathbf{I} + 2 \mathbf{P}_s) \mathbf{w}^* - 2 |\mathbf{w}^{*T} \mathbf{P}_s| \mathbf{u}_{max} \quad (7.24)$$

$$= a^2 \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_s \mathbf{v}_i - 2a |\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_s| \mathbf{u}_{max} = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \frac{|\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_s| \mathbf{u}_{max}}{\lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_s \mathbf{v}_i}, \quad (7.25)$$

α	η nach (7.27)	η numerischen
0.5	$4.0451e + 3$	$4.0444e + 3$
2.058	532.39	532.36
3.35	207.54	207.45

Tabelle 7.1: Vergleich der Abschätzung für η und der exakten Lösung

wobei $|\mathbf{w}^{*T}\mathbf{P}_s|$ bzw. $|\mathbf{v}_i^T\mathbf{P}_s|$ einen Vektor mit den Beträgen der Komponenten des jeweiligen Vektors bezeichnet. Damit ergibt sich für \mathbf{w}^* bzw. η :

$$\mathbf{w}^* = 2 \frac{|\mathbf{v}_i^T\mathbf{P}_s| \mathbf{u}_{max}}{\lambda_i \mathbf{v}_i^T\mathbf{P}_s \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i \quad (7.26)$$

$$\eta = 4 \frac{\left(|\mathbf{v}_i^T\mathbf{P}_s| \mathbf{u}_{max}\right)^2}{\lambda_i^2 \mathbf{v}_i^T\mathbf{P}_s \mathbf{v}_i}. \quad (7.27)$$

Bei der Berechnung der Näherungslösung wurde stillschweigend angenommen, dass die sich ergebende Lösung (7.26) auch tatsächlich zu der angesetzten Sättigungskonfiguration Λ führt. Falls dies nicht zutrifft, also $\mathbf{x}^* = \mathbf{B}\Lambda^2\mathbf{w}^*$ zu einem Eingangsvektor führt, bei dem weniger Eingänge als angenommen gesättigt sind und somit tatsächlich eine andere Sättigungskonfiguration $\tilde{\Lambda}$ vorgelegen hat, liefert (7.23) einen zu kleinen Wert für \dot{V} , so dass man in der Folge einen zu großen Wert für η erhält. Da jedoch für jedes α nur die Lösung \mathbf{x}^* bzw. \mathbf{w}^* mit dem kleinsten η interessiert und die Sättigungskonfiguration $\tilde{\Lambda}$, welche auch überprüft wird, sicher ein kleineres η liefert, wirkt sich der beschriebene Fehler nicht auf das Endergebnis aus.

Wie anhand der Definitionen von \mathbf{P}_s und \dot{V} entsprechend (7.24) zu erkennen, macht es keinen Unterschied, ob ein Eingang in positiver oder negativer Richtung gesättigt ist. Analog zur numerischen Optimierung müssen deshalb von den theoretisch denkbaren $3^m - 1$ Sättigungskonfigurationen für Λ nur die $2^m - 1$ Konfigurationen untersucht werden, deren Quadrate Λ^2 sich unterscheiden.

In Tabelle 7.1 sind für das Beispiel aus Abschnitt 7.4 die Werte für η nach (7.27) mit den Ergebnissen der numerischen Optimierung verglichen. Beispielhaft sind in Bild 7.1 für $\alpha = 3.35$ die entsprechenden Vektoren \mathbf{w}^* zusammen mit den Einzugsbereichen $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ und der Höhenlinie $\dot{V} = 0$ dargestellt. Wie man sieht, stellt für das vorliegende Beispiel die Abschätzung (7.27) eine sehr gute Näherungslösung für das Optimierungsproblem dar.

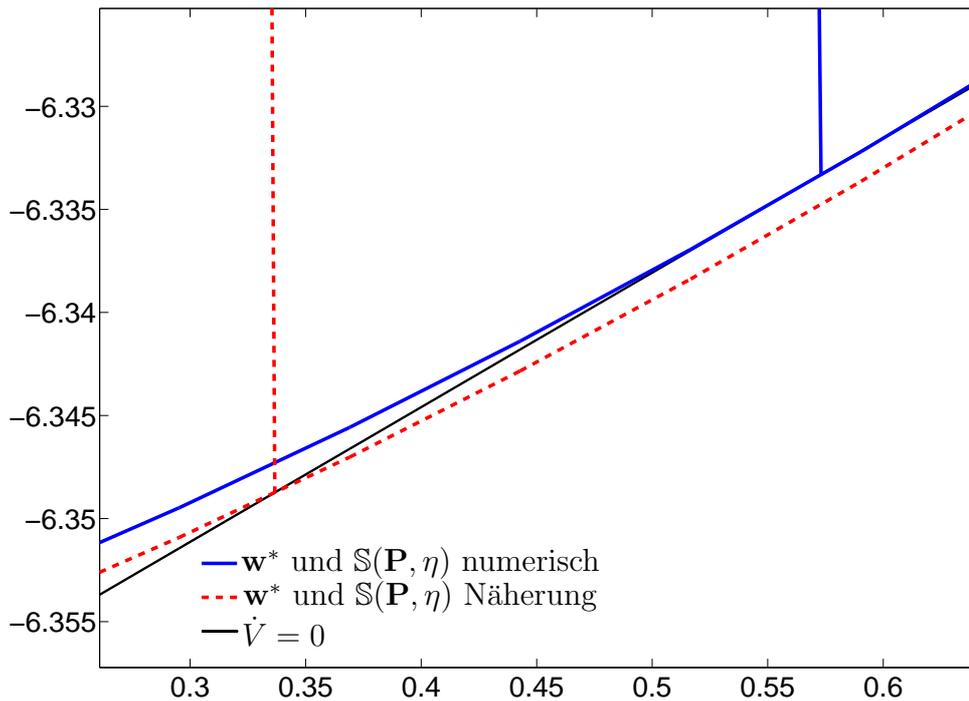


Bild 7.1: Vergleich der Näherungslösung und der exakten Lösung

Da bei der Bestimmung der Näherungslösung die Bedingung $\dot{V} = 0$ jedoch in einer leicht falschen Richtung ausgewertet wird, sind die Werte für η nach (7.27) leider immer etwas größer als die exakten η Werte, so dass der Einzugsbereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ mit der Näherungslösung immer ein bisschen zu groß bestimmt wird. Um die Abschätzung für η trotzdem für eine kontinuierliche Variation von α zu nutzen, wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

- Vorab werden im interessierenden Intervall $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ die Ergebnisse der numerischen Optimierung mit der Näherungslösung verglichen.
- Zur Laufzeit der Regelung wird dann die Näherungslösung verwendet, welche eine kontinuierliche Variation von α entsprechend (3.3) ermöglicht. Der Faktor β muss hierbei dazu genutzt werden, die leichte Überschätzung des Einzugsbereichs zu kompensieren ($\beta\eta_{\text{Näherung}} < \eta_{\text{numerisch}}$). Für eine schnelle Auswertung der Näherungslösung bietet es sich außerdem an, die kritischen Sättigungskonfigurationen Λ zusammen mit den dazu gehörenden Intervallen von α abzuspeichern, so dass zur Laufzeit nicht alle möglichen Sättigungskonfigurationen untersucht werden

müssen.

Mit Hilfe der vorgestellten Abschätzung ist eine kontinuierliche Variation von α auch im Falle mehrerer Eingangsgrößen möglich. Um die Überschätzung des Bereichs \mathbb{S} zu kompensieren, muss dazu allerdings, wie bei der diskreten Variation auch, im Vorfeld $\eta(\alpha)$ numerisch bestimmt werden.

Da die diskrete Variation jedoch zur Laufzeit mit einem deutlich geringeren Rechenaufwand auskommt und durch eine Abspeicherung von genügend vielen Reglern die bei der diskreten Variation entstehenden Sprünge in der Stellgröße beliebig gemindert werden können, wird die diskrete Variation von α für Systeme mit mehreren Eingängen als attraktiver eingestuft.

7.3 Skalierung der Stellgröße

Im Gegensatz zu Systemen mit einer Eingangsgröße hat die Skalierung der Stellgröße im Mehrgrößenfall einen wesentlichen Einfluss auf die Regelung. Um dies zu verdeutlichen, soll zunächst die Situation beim Eingrößenfall erläutert werden.

Durch die Skalierung der Stellgröße (z.B. mVolt statt Volt) ist es möglich, *ein* reales System mit verschiedenen Zustandsraumdarstellungen zu beschreiben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \text{sat}_0 u_0 \quad (7.28)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \text{sat}_1 u_1. \quad (7.29)$$

Die sat_0 bzw. sat_1 Funktionen beziehen sich dabei auf die Stellgrößenamplituden $u_{max,0}$ bzw. $u_{max,1}$. Damit (7.28) und (7.29) das gleiche System beschreiben, muss gelten:

$$\begin{aligned} u_{max,1} &= r u_{max,0} \\ \mathbf{b}_1 &= \frac{1}{r} \mathbf{b}_0. \end{aligned}$$

Führt man nun für einen α Wert die Reglerauslegung für beide Systemdarstellungen durch, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= r^2 \mathbf{P}_0 \\ \eta_1 &= r^2 \eta_0. \end{aligned}$$

Damit lässt sich leicht zeigen,

- dass die Dynamiken der geschlossenen Kreise gleich sind:

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{A} - \frac{1}{r} \mathbf{b}_0 \frac{1}{r} \mathbf{b}_0^T r^2 \mathbf{P}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T \mathbf{P}_1.$$

- dass die Einzugsbereiche $\mathbb{S}(\mathbf{P}_0, \eta_0)$ und $\mathbb{S}(\mathbf{P}_1, \eta_1)$ den gleichen Bereich im Zustandsraum beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\mathbf{P}_0, \eta_0) &= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} < \eta_0 \} \\ &= \{ \mathbf{x} \mid r^2 \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} < r^2 \eta_0 \} \\ &= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x} < \eta_1 \} = \mathbb{S}(\mathbf{P}_1, \eta_1). \end{aligned}$$

Somit macht es keinen Unterschied, ob das System in der Form (7.28) oder (7.29) dargestellt wird.

Für Systeme mit mehreren Eingängen sind hingegen die Dynamiken der geschlossenen Kreise sowie die Einzugsbereiche \mathbb{S} abhängig von der Skalierung der Stellgröße. Das heißt, die beiden Zustandsraumdarstellungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \text{sat}_0 u_0 \quad (7.30)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \text{sat}_1 u_1 \quad (7.31)$$

mit der folgenden Beziehung zwischen den Eingangsmatrizen \mathbf{B}_0 und \mathbf{B}_1 bzw. den Vektoren der möglichen Stellamplituden $\mathbf{u}_{max,0}$ und $\mathbf{u}_{max,1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{max,1} &= \mathbf{R} \mathbf{u}_{max,0} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

führen im Allgemeinen zu sehr unterschiedlichen Regelungen. Die Skalierung der Stellgröße stellt daher bereits einen wichtigen Schritt bei der Auslegung der Regelung dar. Wie bereits durch die Bezeichnung der Skalierungsmatrix mit \mathbf{R} angedeutet, kommt der Skalierung der Stellgröße eine ähnliche Bedeutung zu wie der Gewichtung der Stellgröße im Gütemaß bei der Auslegung einer optimalen Regelung (siehe Abschnitt 2.3).

Im Hinblick auf eine der zentralen Zielsetzungen der Regelung, nämlich eine gute Stellgrößenausnutzung zu erreichen, erscheint das folgende Vorgehen für die Bestimmung der Matrix \mathbf{R} sinnvoll.

Für ein α_t und eine Richtung \mathbf{e}_t im Zustandsraum wird die kommandierte Stellgröße \mathbf{u}_t auf dem Rand des Bereichs \mathbb{S} bestimmt und zwar genau an dem Punkt, welcher in Richtung \mathbf{e}_t liegt:

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_t \sqrt{\frac{\eta}{\mathbf{e}_t^T \mathbf{P} \mathbf{e}_t}}.$$

Die Matrix \mathbf{R} wird nun mit Hilfe numerischer Optimierung so gewählt, dass die Summe

$$J = \left(\frac{u_{t,1}^2}{u_{max,1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_{t,m}^2}{u_{max,m}} \right)^2 \quad (7.32)$$

maximiert wird. Die Summe (7.32) kann als Maß für die Stellgrößenausnutzung in der vorgegebenen Testrichtung \mathbf{e}_t interpretiert werden. Durch die Maximierung dieser Summe wird deshalb eine möglichst günstige Stellgrößenausnutzung angestrebt.

Für die Bestimmung von \mathbf{R} bzw. Maximierung von J ist es nicht nötig, η ganz exakt zu bestimmen. An dieser Stelle würde es sich deshalb anbieten, η mit Hilfe der in Abschnitt 7.2.2 beschriebene Näherungslösung (7.27) zu berechnen.

Um den zusätzlichen Aufwand bei der Auslegung der Regelung, welcher sich durch die Bestimmung der Matrix \mathbf{R} ergibt, bewerten zu können, soll im Folgenden kurz auf Parallelen zu zwei anderen Entwurfsverfahren für Mehrgrößensysteme hingewiesen werden.

- **Riccati-Regelungen:** Die zentralen Entwurfsparameter einer Riccati-Regelung sind die beiden Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R}_{opt} , mit welchen der Verlauf der Zustandsgrößen bzw. der Stellgröße in der Kostenfunktion (2.12)

$$J(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{opt} \mathbf{u} \, dt$$

gewichtet werden. Im Falle einer Eingangsgröße ist eine Skalierung von \mathbf{Q} gleichbedeutend mit einer Veränderung von \mathbf{R}_{opt} . Deshalb kann im Eingrößenfall \mathbf{R}_{opt} dauerhaft zu eins gesetzt werden, ohne dass dabei die Menge der sich ergebenden Regler eingeschränkt wird. Sobald mehrere Eingänge zur Verfügung stehen, bekommt die Matrix \mathbf{R}_{opt} jedoch tatsächlich eine Bedeutung. In diesem Fall wird über die Gewichtung der Eingangsgrößen vorgegeben, welche Eingangsgröße wie stark

zum Ausregeln einer Anfangsstörung eingesetzt werden soll. Eine sinnvolle Nutzung dieser Entwurfsparameter bildet eine zentrale Aufgabe bei der Reglerauslegung.

- **Polvorgabe mit Roppenecker-Formel:** Nach [11] sind die Entwurfsvariablen einer Mehrgrößenregelung zum einen die n -Eigenwerte λ_{Ri} des geschlossenen Kreises und zum anderen die dazu gehörenden so genannten n -Parametervektoren $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^m$. Durch Vorgabe dieser Größen ergeben sich die Eigenvektoren \mathbf{v}_{Ri} des geregelten Systems zu:

$$\mathbf{v}_{Ri} = (\mathbf{A} - \lambda_{Ri}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}_i \quad (7.33)$$

und daraus die gesuchte Zustandsrückführung $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{R1} & \dots & \mathbf{v}_{Rn} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Bei der Polvorgabe nach Roppenecker stellen also die Parametervektoren die zusätzlichen Freiheitsgrade im Falle einer Mehrgrößenregelung dar. Für eine sinnvolle Wahl der Parametervektoren dient oftmals die Interpretation, dass man das Regelgesetz $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ auch darstellen kann als

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{R1} & \dots & \mathbf{v}_{Rn} \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{m}} \mathbf{x} = - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

mit den Modalkoordinaten \mathbf{m} . Über die Wahl der Parametervektoren \mathbf{p}_i kann also der Zusammenhang zwischen den Eigenformen des geschlossenen Systems und der Stellgröße \mathbf{u} vorgegeben werden. Da jedoch die Eigenformen \mathbf{v}_{Ri} über (7.33) von den Parametervektoren abhängen, ist eine Bestimmung von günstigen Parametervektoren oftmals trotzdem nur mit numerischen Verfahren möglich.

Wie anhand der beiden Entwurfsverfahren ersichtlich wird, kann die Tatsache, dass bei der Auslegung einer Regelung im Falle mehrerer Eingangsgrößen zusätzliche Parameter vorgegeben werden müssen bzw. können als inhärent angesehen werden. Aufgrund der unterschiedlichen Menge und Bedeutung der zusätzlichen Freiheitsgrade kann im Hinblick auf die zu erfüllenden Anforderungen entschieden werden, welches Entwurfsverfahren am geeignetsten erscheint.

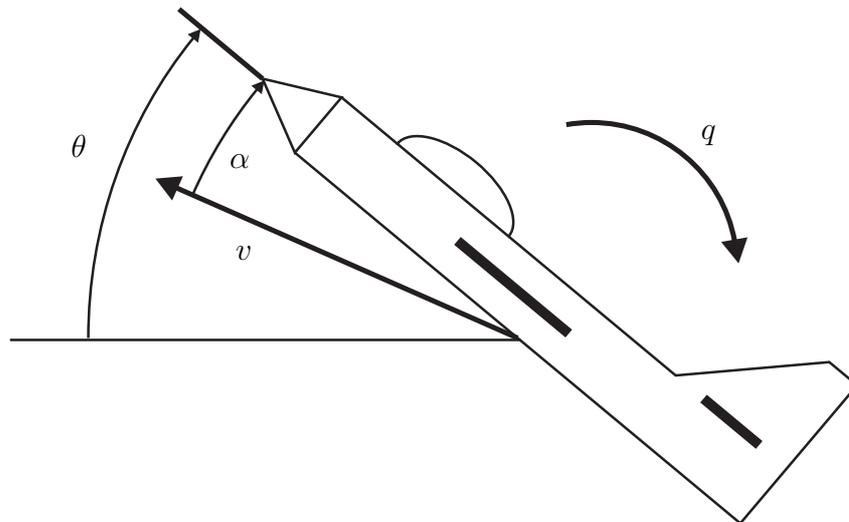


Bild 7.2: Bedeutung der Zustandsvariablen

7.4 Beispiel: Flugzeug Längsdynamik

7.4.1 Beschreibung des Modells

Als anschauliches Simulationsbeispiel zum Testen der diskret schaltenden Regelung für Systeme mit mehreren Eingängen wurde die Längsdynamik eines Flugzeugs gewählt. Das hierfür benötigte linearisierte Modell wurde mit den von [31] im Internet bereitgestellten Unterlagen und Programmen für ein Flugzeug des Typs F16 erstellt. Die Bedeutung und Einheiten der Zustands- bzw. Eingangsvariablen sind in Tabelle 7.2 gegeben bzw. teilweise in Bild 7.2 dargestellt.

$x_1 = h$	Höhe des Schwerpunktes	in ft
$x_2 = \theta$	Nickwinkel	in $^\circ$
$x_3 = v$	Länge des Geschwindigkeitsvektors	in ft/sec
$x_4 = \alpha$	Anstellwinkel	in $^\circ$
$x_5 = q$	Drehrate um die y -Achse	in $^\circ$ /sec
u_1	Triebwerksschub	in lbs
u_2	Höhenruder	in $^\circ$

Tabelle 7.2: Bedeutung und Einheiten der Zustandsvariablen

Um ein lineares System zu erhalten, wurde die Dynamik um den Trimpunkt (=Ruhelage des nichtlinearen Modells):

Höhe:	$h = 15000\text{ft},$
Anstell- und Nickwinkel:	$\alpha = \theta = 4.53^\circ,$
Geschwindigkeit:	$v = 500\text{ft}/\text{sec},$
Schub:	$u_{1,\text{trimm}} = 2109 \text{ lbs},$
Höhenruder	$u_{2,\text{trimm}} = -2.24^\circ$

linearisiert. Die sich ergebende System- bzw. Eingangsmatrix lautet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.074e-4 & -32.17 & -1.32e-2 & -2.67 & -1.19 \\ 2.076e-6 & 1.2e-13 & -2.55e-4 & -0.676 & 0.939 \\ 9.63e-12 & 0 & -1.18e-9 & -0.576 & -0.874 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5.421 & 3.87e-2 \\ -8.59e-4 & -1.4e-3 \\ 0 & -0.1188 \end{bmatrix}.$$

Für die Begrenzung der Stellgrößen werde angenommen:

$$1000 \leq u_1 \leq 19000$$

$$-25 \leq u_2 \leq 25.$$

Um den Trimpunkt steht damit für die Ausregelung von Störungen ungefähr ein symmetrischer Stellhub

$$\mathbf{u}_{max} = \begin{bmatrix} 1000 & 22 \end{bmatrix}^T$$

zur Verfügung.

7.4.2 Auslegung und Ergebnisse der Regelung

Für die Auslegung der Regelung wurden folgende Einstellungen getroffen:

- Es wurden 257 Stützstellen für α entsprechend $\alpha_{i+1} = 1.01\alpha_i$ mit $\alpha_1 = 0.5$ vorgegeben.
- Wie in Abschnitt 7.3 beschrieben, wurde für die Auslegung der Regelung eine Skalierung der Eingangsgrößen vorgenommen. Das Gütemaß (7.32) wurde dazu für $\alpha_t = 4$ und $\mathbf{e}_t = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ optimiert. Die gefundene \mathbf{R} Matrix lautet:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3.498e - 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Interessanterweise ergab sich für alle getesteten Richtungen im Zustandsraum die gleiche Matrix \mathbf{R} , so dass im vorliegenden Beispiel offenbar \mathbf{R} nur eine Funktion von α_t ist.

- Für das skalierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \text{sat}_1(\mathbf{u}_1) \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{u}_{max,1} &= \mathbf{R}\mathbf{u}_{max} \end{aligned}$$

wurden für alle 257 α Werte die Matrizen \mathbf{P}_i - und mit Hilfe numerischer Optimierung die Einzugsbereiche $\mathbb{S}_i(\mathbf{P}_i, \eta_i)$ bestimmt. Der Verlauf von η_i über α_i ist in Bild 7.3 zu sehen und, wie gefordert, monoton fallend.

Mit dem so ausgelegten Regler soll nun eine Anfangsstörung in der Flughöhe von -6000 ft ausgeregelt werden. Die sich ergebenden Verläufe für die ersten vier Zustandsgrößen, die zurück skalierten Eingangsgrößen $\mathbf{u} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_1$ sowie den Reglerparameter α sind in den Bildern 7.4 - 7.8 dargestellt.

Betrachtet man die dargestellten Ergebnisse, so können folgende Aussagen bezüglich des Verhaltens der Regelung gemacht werden:

- Wie in Bild 7.7 zu sehen, wird über einen sehr großen Zeitraum der maximal mögliche Schub ausgenutzt, was mit Sicherheit für einen schnellen Aufstieg des Flugzeugs nötig ist. Auch das Höhenruder weist große Ausschläge auf. Aus energetischen Betrachtungen liegt jedoch die Vermutung nahe, dass für einen zeitoptimalen Aufstieg

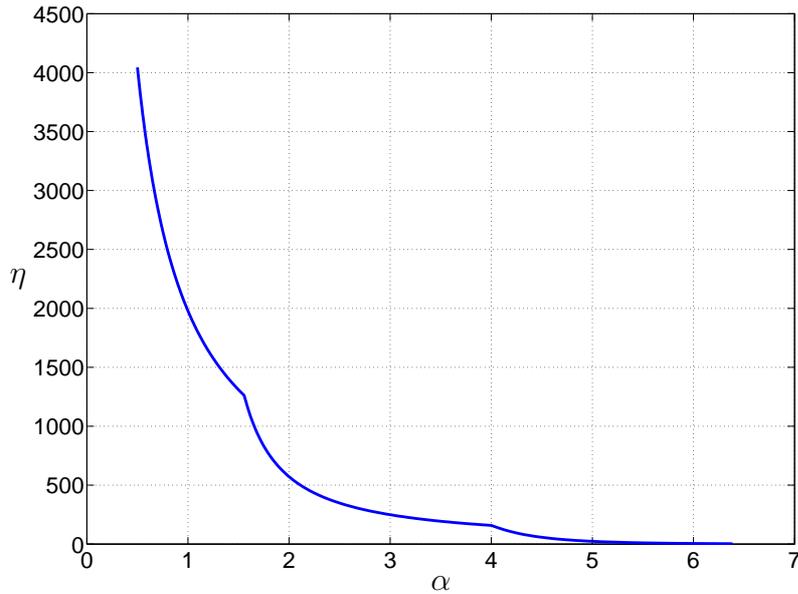


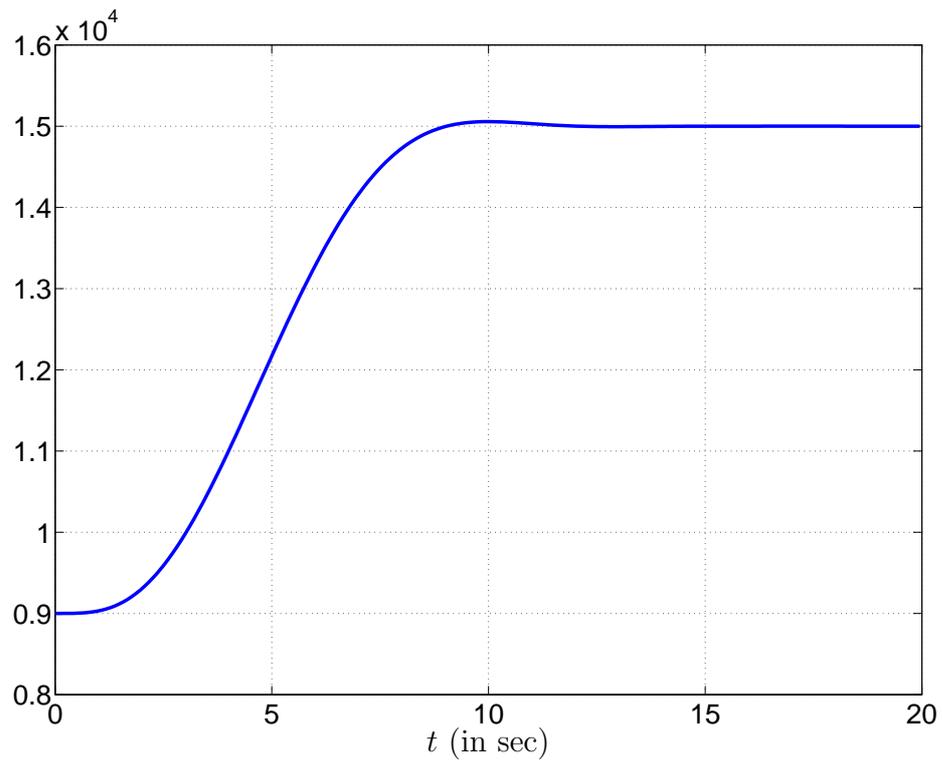
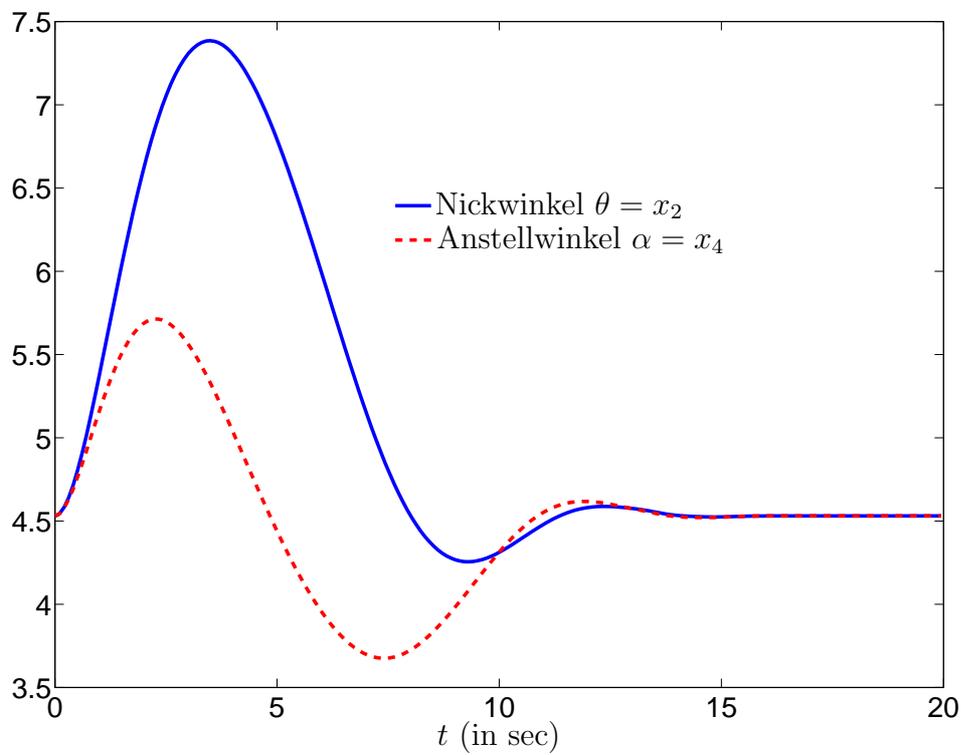
Bild 7.3: Monotone Abnahme von η über α

des Flugzeugs primär die volle Ausschöpfung des maximalen Schubs wichtig ist. Insofern kann das Verhalten des Reglers in diesem Punkt als sehr positiv bewertet werden.

- Durch die Verwendung von 257 Stützstellen für α ergeben sich kaum merkbare Sprünge in den Stellgrößen (Bild 7.7). Bezüglich der Stetigkeit in der Stellgröße stellt somit der Übergang zu einer diskreten Variation von α keine wesentlichen Probleme dar.

Obwohl die dargestellten Ergebnisse eine durchaus positive Bewertung der Regelung zulassen, soll die gewählte Anwendung hauptsächlich ein interpretierbares Beispiel für ein System mit mehreren Eingängen darstellen. Vor einer tatsächlichen Anwendung der Regelung müssten z.B. noch folgende Punkte berücksichtigt werden:

- Inwieweit ist das linearisierte Modell noch gültig, wenn die Stellgrößen vollständig ausgeschöpft werden? Vor allem die Wirksamkeit der Steuerflächen kann wahrscheinlich nicht über den gesamten Bereich als linear angenommen werden.
- Ist es möglich, die Anzahl der Trimpunkte so einzuschränken bzw. zu wählen, dass für alle diese Trimpunkte eine Reglerauslegung wie im vorgestellten Beispiel zu

Bild 7.4: Flughöhe x_1 (in ft)Bild 7.5: Anstell- und Nickwinkel (in $^\circ$)

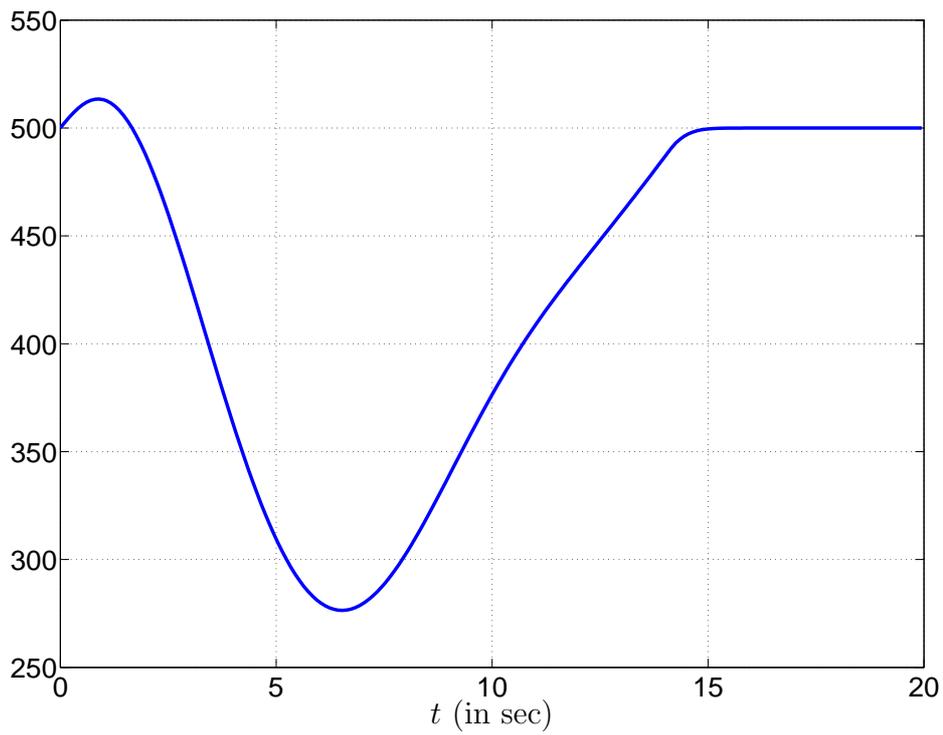


Bild 7.6: Geschwindigkeit $v = x_3$ (in ft/sec)

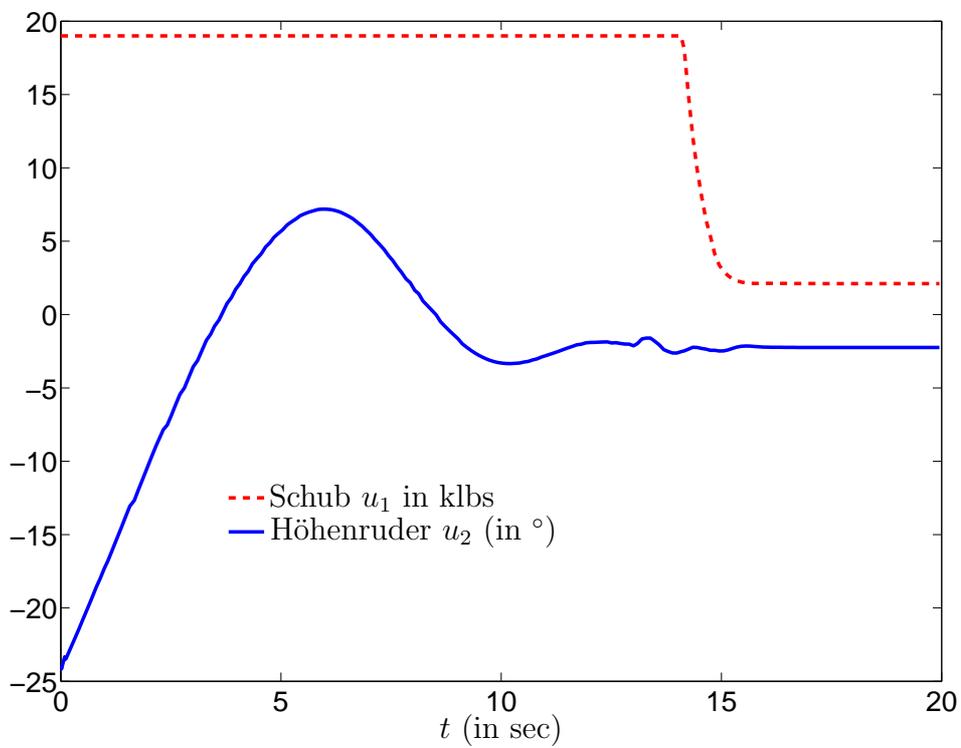


Bild 7.7: Schub und Höhenruder

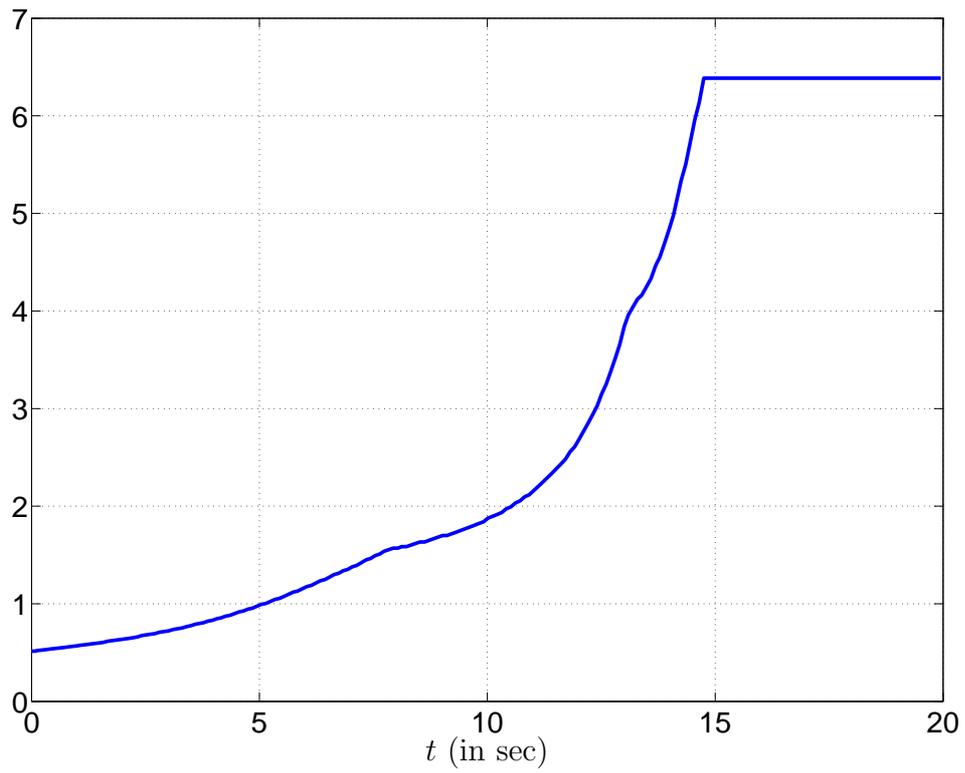


Bild 7.8: Reglerparameter α

einer handhabbaren Datenmenge führt?

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Auslegung einer strukturvariablen Regelung vorgestellt. Schwerpunkt der Arbeit war dabei die kontinuierliche oder weiche Variation der Regelung von Systemen mit einem begrenzten Eingang, welche jedoch bei Bedarf immer durch eine diskrete Variation approximiert werden kann. In beiden Fällen ist das Ziel der Regelung, die Stellgrößenausnutzung gegenüber einer linearen Regelung zu verbessern und die Stabilität des geregelten Systems trotz der Beschränkung in der Stellgröße sicherzustellen sowie eine Aussage über den Einzugsbereich der Regelung treffen zu können. Der zum Erreichen dieser Ziele gemachte Ansatz zeichnet sich durch zwei Punkte besonders aus:

- Die Auslegung der Regelung erfolgt im wesentlichen durch Vorgabe *eines* Parameters, nämlich α . Mit diesem wird vorgegeben, wie schnell die Ljapunow-Funktion V des Systems abklingen soll ($\dot{V} = -\alpha V$). Anders als z.B. bei einer Polvorgabe oder einer Riccati-Regelung steigt damit der Aufwand bei der Parametrierung der Regelung nicht mit der Systemordnung an, was die Anwendung der Regelung vereinfacht. Außerdem ist die Bedeutung des Parameters α leicht verständlich, wodurch die Parametrierung für den Anwender sehr transparent wird.
- Das Regelgesetz wird im Hinblick auf eine Ljapunow-Funktion so gewählt, dass mit dieser ein möglichst großer Einzugsbereich abgeschätzt werden kann. Die Verwendung einer Ljapunow-Funktion als Basis für die Bestimmung des Regelgesetzes führt dazu, dass eine *analytische* Abschätzung des Einzugsbereichs der Ruhelage möglich ist.

Einen für die praktische Anwendung des Ansatzes wichtigen Punkt stellt die Modifikation der Regelung für Systeme mit teilweise unsicherer Streckendynamik dar. Bei den beiden hierzu vorgestellten Modifikationen wird unterschieden, ob die Auswirkung der Unsicherheiten durch den Systemeingang exakt kompensiert werden könnte oder nicht. Im ersten Fall spricht man von so genannten *matched uncertainties*. Gegenüber dieser Klasse von Unsicherheiten kann die Regelung immer robust ausgelegt werden. Falls die Unsicherheiten nicht über den Eingang kompensiert werden können, wird ebenfalls ein systematisches Vorgehen zum Entwurf einer robusten Regelung vorgestellt. Die Lösbarkeit der entsprechenden Riccati-Gleichung kann allerdings in diesem Fall nicht vorab sichergestellt werden. Aufbauend auf dem Reglerentwurf wurde außerdem ein nichtlineares Führungsfilter entwickelt, mit welchem erreicht werden konnte, dass für alle Ruhelagen eines linearen Systems der gleiche Einzugsbereich gültig ist. Durch die enge Verbindung zum Reglerentwurf benötigt das Führungsfilter nahezu keinen weiteren Aufwand in der Parametrierung. Aufgrund der erreichbaren, signifikanten Erweiterung des Einzugsbereichs ergibt sich somit aus der Kombination von Führungsfilter und strukturvariabler Regelung ein interessanter Ansatz für Anwendungen, bei denen eine schnelle Überführung von weit entfernten Ruhelagen angestrebt wird. In diesen Fällen berücksichtigt das Führungsfilter die Stellgrößenbeschränkung und übernimmt somit die sonst oftmals sehr aufwändige Aufgabe der Trajektorienplanung.

Neben der Behandlung von Systemen mit einer Eingangsgröße wurde am Ende der Arbeit auf mögliche Erweiterungen des Ansatzes für Systeme mit mehreren begrenzten Stellgrößen eingegangen. Wie sich hierbei zeigt, ist eine direkte Erweiterung des Ansatzes nicht möglich. Greift man jedoch zur Bestimmung der Einzugsbereiche auf numerische Optimierungsverfahren zurück, so kann eine leicht modifizierte Version des vorgestellten Ansatzes auch im Falle mehrerer Eingangsgrößen zum Einsatz gebracht werden.

Neben den Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Einzugsbereiche erhöht sich im Mehrgrößenfall, so wie dies von anderen Entwurfsverfahren (z.B. Polplatzierung mit Roppenecker-Formel oder Riccati-Regelungen) ebenfalls bekannt ist, die Anzahl der vorzugebenden Parameter. Ähnlich wie bei anderen Entwurfsverfahren muss auch bei dem hier vorgestellten Ansatz neben der Vorgabe, wie schnell eine Anfangsstörung abklingen soll, festgelegt werden, welche Eingangsgrößen dazu wie stark benutzt werden sollen. Der

hierfür zusätzlich benötigte Aufwand bei der Auslegung der Regelung kann als inhärent für Mehrgrößensysteme angesehen werden und stellt deshalb keinen spezifischen Nachteil des vorgestellten Ansatzes dar.

Insgesamt ermöglicht der vorgestellte Ansatz somit auch im Mehrgrößenfall eine relativ systematische und transparente Reglerauslegung, mit welcher die verfügbaren Stellgrößen gut genutzt werden können.

Kapitel 9

Anhang

9.1 Beweise

9.1.1 Reduktion der Riccati-Gleichung

Als Grundlage mehrerer Beweise soll die Riccati-Gleichung (2.10) so transformiert bzw. reduziert werden, dass die Lösung sicher positiv definit ist. Hierzu wird die Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (9.1)$$

mit der Schur-Zerlegung \mathbf{N} der Matrix \mathbf{A}_α transformiert.

Die orthogonale Matrix $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird folgendermaßen aufgebaut:

Seien $\mathbf{v}_{1\dots p}$ die Eigenvektoren von \mathbf{A}_α , welche asymptotisch stabil und nicht über \mathbf{Q} beobachtbar sind. Die verbleibenden q Eigenvektoren $\mathbf{v}_{p+1\dots n}$ sind dann entweder instabil oder über \mathbf{Q} beobachtbar. Die Spalten $\mathbf{n}_{1\dots n}$ von \mathbf{N} werden nun sukzessiv mit Hilfe der Vektoren \mathbf{v}_i bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \tilde{\mathbf{n}}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_2) & \mathbf{n}_2 &= \tilde{\mathbf{n}}_2 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{n}}_2\|} \\ \tilde{\mathbf{n}}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_3) - \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2^T \mathbf{v}_3) & \mathbf{n}_3 &= \tilde{\mathbf{n}}_3 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{n}}_3\|} \\ \tilde{\mathbf{n}}_4 &= \mathbf{v}_4 - \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_4) - \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2^T \mathbf{v}_4) - \mathbf{n}_3(\mathbf{n}_3^T \mathbf{v}_4) & \mathbf{n}_4 &= \tilde{\mathbf{n}}_4 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{n}}_4\|} \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Im Falle eines konjugiert komplexen Eigenvektorpaars $\mathbf{v}_{i,i+1} = \mathbf{v}_r \pm j\mathbf{v}_j$ mit $\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$ bestimmt man zuerst die Anteile von \mathbf{v}_r und \mathbf{v}_j , welche aus dem Raum der bisherigen Spalten $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{i-1}$ heraus ragen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r &= \mathbf{v}_r - \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_r) - \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2^T \mathbf{v}_r) - \dots - \mathbf{n}_{i-1}(\mathbf{n}_{i-1}^T \mathbf{v}_r) \\ \mathbf{r}_j &= \mathbf{v}_j - \mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_j) - \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2^T \mathbf{v}_j) - \dots - \mathbf{n}_{i-1}(\mathbf{n}_{i-1}^T \mathbf{v}_j).\end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich dann die Vektoren $\tilde{\mathbf{n}}_i$ und $\tilde{\mathbf{n}}_{i+1}$ bzw. \mathbf{n}_i und \mathbf{n}_{i+1} zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{n}}_i &= \mathbf{r}_r + a\mathbf{r}_j & \mathbf{n}_i &= \tilde{\mathbf{n}}_i \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{n}}_i\|} \\ \tilde{\mathbf{n}}_{i+1} &= \mathbf{r}_r - a\mathbf{r}_j & \mathbf{n}_{i+1} &= \tilde{\mathbf{n}}_{i+1} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{n}}_{i+1}\|}\end{aligned}$$

wobei die Bedingung, dass $\tilde{\mathbf{n}}_i$ senkrecht auf $\tilde{\mathbf{n}}_{i+1}$ steht, durch

$$a = \sqrt{\frac{\mathbf{r}_r^T \mathbf{r}_r}{\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j}} \quad (9.2)$$

immer erfüllt werden kann. Die Bestimmung der Spalten von \mathbf{N} auf diese Weise führt offensichtlich dazu, dass

- die Spalten orthogonal zueinander sind;
- die ersten Spalten $\mathbf{n}_{1\dots p}$ denselben Raum aufspannen wie die Eigenvektoren $\mathbf{v}_{1\dots p}$.

Bildet man nun die Transformation $\mathbf{N}^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{N}$, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{N} &= \mathbf{N}^T [\mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_1, \mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_n] \\ &= \mathbf{N}^T [t_{11}\mathbf{n}_1, t_{12}\mathbf{n}_1 + t_{22}\mathbf{n}_2, \dots, t_{1n}\mathbf{n}_1 + \dots + t_{nn}\mathbf{n}_n] \\ &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\alpha.\end{aligned}$$

Benutzt man den Zusammenhang zwischen den Spalten von \mathbf{N} und den Eigenvektoren von \mathbf{A}_α und die Orthogonalität der Spalten von \mathbf{N} , so kann man unschwer zeigen, dass für die Einträge auf der Diagonalen von \mathbf{T}_α gilt:

$$t_{ii} = \lambda_i.$$

(Im Falle eines komplexen Eigenwertpaares wird t_{ii} zu einer 2×2 Matrix mit $Re(\lambda_i)$ auf der Diagonalen.)

Für die Reduktion der Riccati-Gleichung wird die Matrix \mathbf{T}_α aufgeteilt in

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_- & \mathbf{T}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_+ \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{T}_- \in \mathbb{R}^{p \times p}$ die nicht beobachtbaren, asymptotisch stabilen Eigenwerte von \mathbf{A}_α und $\mathbf{T}_+ \in \mathbb{R}^{q \times q}$ die verbleibenden Eigenwerte enthält.

Multipliziert man die Riccati-Gleichung (9.1) von links und rechts mit \mathbf{N}^T bzw. \mathbf{N} und führt an geeigneten Stellen noch Einheitsmatrizen in der Form $\mathbf{I} = \mathbf{N}\mathbf{N}^T$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \underbrace{\mathbf{N}^T \mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{N}}_{\mathbf{T}_\alpha^T} \underbrace{\mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N}}_{\tilde{\mathbf{P}}} + \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} \underbrace{\mathbf{N}^T \mathbf{R} \mathbf{N}}_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} + \underbrace{\mathbf{N}^T \mathbf{Q} \mathbf{N}}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{T}_\alpha^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T}_\alpha + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Berücksichtigt man, dass die ersten p Spalten von \mathbf{N} den Nullraum von \mathbf{P} aufspannen, welcher laut Satz 2.3 auch Nullraum von \mathbf{Q} ist, so müssen die Matrizen $\tilde{\mathbf{P}}$ und $\tilde{\mathbf{Q}}$ folgende Gestalt haben:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_q \end{bmatrix}.$$

Damit wird die transformierte Riccati-Gleichung (9.3) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_+^T \tilde{\mathbf{P}}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_q \mathbf{T}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{R}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Die gesuchte reduzierte Riccati-Gleichung lautet somit

$$\mathbf{T}_+^T \tilde{\mathbf{P}}_q + \tilde{\mathbf{P}}_q \mathbf{T}_+ + \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{R}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q + \tilde{\mathbf{Q}}_q = \mathbf{0}. \quad (9.4)$$

Folgende wichtige Punkte gelten für (9.4):

- Die Eigenwerte von \mathbf{T}_+ sind die instabilen und die über \mathbf{Q} beobachtbaren stabilen Eigenwerte von \mathbf{A}_α .
- Die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_q$ ist positiv definit.

9.1.2 Beweis Satz 2.5

Grundlage des Beweises ist (9.4) mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Q}}_q &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R} &= -2\mathbf{b}\mathbf{b}^T \Rightarrow \tilde{\mathbf{R}} = -2\mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{N} = -2\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}^T \\ \tilde{\mathbf{R}}_q &= -2\tilde{\mathbf{b}}_q\tilde{\mathbf{b}}_q^T.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ sind alle stabilen Eigenwerte von \mathbf{A}_α unbeobachtbar, so dass ausschließlich die q instabilen Eigenwerte von \mathbf{A}_α die Eigenwerte von \mathbf{T}_+ bilden.

Da die Lösung $\tilde{\mathbf{P}}_q$ positiv definit ist, existiert eine Cholesky-Zerlegung [22]:

$$\tilde{\mathbf{P}}_q = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (9.5)$$

mit einer invertierbaren unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} . Multipliziert man (9.4) von links und rechts mit \mathbf{L}^{-1} bzw. \mathbf{L}^{-T} , so erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}_+\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} + \underbrace{\mathbf{L}^T\mathbf{T}_+\mathbf{L}^{-T}}_{\mathbf{M}^T} - 2\underbrace{\mathbf{L}^T\tilde{\mathbf{b}}_q}_{\mathbf{1}}\underbrace{\tilde{\mathbf{b}}_q^T\mathbf{L}}_{\mathbf{1}^T} \\ 2\mathbf{\Pi}^T &= \mathbf{M} + \mathbf{M}^T.\end{aligned} \quad (9.6)$$

Die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{M}^T haben beide dieselben Eigenwerte, nämlich die von \mathbf{T}_+ . Die Matrix $\mathbf{\Pi}^T$ hat nur einen Eigenwert, nämlich $\mathbf{1}^T\mathbf{1}$ (zum Eigenvektor $\mathbf{1}$). Bildet man nun auf beiden Seiten von (9.6) die Spur, was der Summe der Eigenwerte entspricht, so erhält man:

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^q \lambda_i(\mathbf{T}_+) &= 2\mathbf{1}^T\mathbf{1} \\ \sum_{i=1}^q \lambda_i(\mathbf{A}_\alpha) &= \tilde{\mathbf{b}}_q^T \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{L}^T}_{\tilde{\mathbf{P}}_q} \tilde{\mathbf{b}}_q = \mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^q \lambda_i\left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right) &= \mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} \\ \gamma + q\frac{\alpha}{2} &= \mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b}.\end{aligned} \quad (9.8)$$

Für die Umformung in (9.7) wurde verwendet:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{b}^T \underbrace{\mathbf{N}\mathbf{N}^T}_{\mathbf{I}} \mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}^T\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}_q^T\tilde{\mathbf{P}}_q\tilde{\mathbf{b}}_q.$$

□

9.1.3 Beweis Satz 2.6

Wenn α so klein gewählt wird, dass nur ein Eigenwert λ_1 von \mathbf{A} durch die Rückführung verschoben wird, so ist $q = 1$. Laut Satz 2.5 erhält man dann für $\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} = \lambda_1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Damit ergibt sich für die Lage des kritischen Punktes \mathbf{x}^* entsprechend (2.26)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \pm \frac{2}{2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha} \mathbf{b} u_{max} \\ &= \pm \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{b} u_{max} = const. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Der kritische Punkt hängt also nicht von α ab.

Falls $q = 1$ ist, so spannen die Eigen- und Hauptvektoren der stabilen Eigenwerte von \mathbf{A} den $n - 1$ dimensionalen Nullraum von \mathbf{P} auf. Da der Bildraum senkrecht auf dem Nullraum steht, wird dieser von dem links Eigenvektor \mathbf{r}_1 zum instabilen Eigenwert λ_1 gebildet, welcher ebenfalls senkrecht auf den $n - 1$ stabilen rechts Eigenvektoren steht. Folglich beschreibt $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ einen Bereich im Zustandsraum, der nur in Richtung des links Eigenvektors \mathbf{r}_1 begrenzt ist. Die Form des Bereichs $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ ist damit unabhängig von α . Da der Punkt \mathbf{x}^* , welcher auf der Randfläche $\partial \mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ liegt, konstant ist, muss auch die Größe von $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ konstant bleiben.

Innerhalb von \mathbb{S} überführt der Regler jeden Punkt in die Ruhelage. Um nun zu zeigen, dass \mathbb{S} auch den maximal möglichen Einzugsbereich des Systems exakt beschreibt, wird im Folgenden gezeigt, dass Zustände \mathbf{x} außerhalb von \mathbb{S} mit keinem Regler stabilisiert werden können. Dazu zerlegt man \mathbf{x} in eine Komponente z_1 in Richtung \mathbf{r}_1 und einen Rest \mathbf{z}_r

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathbf{r}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_r &= \mathbf{x} - z_1 \mathbf{r}_1. \end{aligned}$$

(\mathbf{r}_1 habe die Länge 1) Die Dynamik von z_1 erhält man durch Multiplikation der Systemdynamik (1.2) mit \mathbf{r}_1^T :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{r}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{r}_1^T \mathbf{b}}_{b_{r_1}} \text{sat}(u) \\ \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + b_{r_1} \text{sat}(u). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Bestimmt man nun den Wert von z_1 auf dem Rand von \mathbb{S} , z.B. mit Hilfe von (9.9):

$$z_{1,max} = \mathbf{r}_1^T \mathbf{x}^* = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{r}_1^T \mathbf{b} u_{max} = \frac{1}{\lambda_1} b_{\mathbf{r}_1} u_{max} \quad (9.11)$$

und setzt diesen in (9.10) ein, so erkennt man, dass es für $z_1 = \pm z_{1,max}$ bei vollständiger Ausnutzung von u gerade noch möglich ist $\dot{z}_1 = 0$ zu erreichen. Für $z_1 > z_{1,max}$ (bzw. $z_1 < -z_{1,max}$) erhält man aber *unabhängig* von der Wahl von u , also für jeden nur möglichen Regler $\dot{z}_1 > 0$ (bzw. $\dot{z}_1 < 0$). Liegt der Zustand also außerhalb von \mathbb{S} , so entfernt er sich in Richtung von \mathbf{r}_1 für jedes u immer weiter weg von der Ruhelage, während alle Zustände innerhalb von \mathbb{S} in diese überführt werden können. Damit stellt \mathbb{S} eine exakte Abschätzung des Einzugsbereichs dar. \square

9.1.4 Beweis Satz 2.7

Satz 2.7 basiert auf (2.31)

$$\eta = 2 \frac{2\gamma + q\alpha}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2} u_{max}^2. \quad (9.12)$$

Laut der Definition von $\hat{\alpha}$ ist

$$(q-1)\hat{\alpha} = -2 \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q)}_{\gamma}. \quad (9.13)$$

Damit q die Anzahl der verschobenen Eigenwerte beschreibt, muss außerdem gelten

$$-2Re(\lambda_q) \leq \hat{\alpha} < -2Re(\lambda_{q+1}). \quad (9.14)$$

Um nun zu zeigen, dass immer ein $\hat{\alpha} \geq 0$ mit $q > 1$ existiert, so dass gilt $\eta \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$, werden die folgenden drei Fälle betrachtet:

Alle Eigenwerte von \mathbf{A} sind negativ

In diesem Fall muss ein $\hat{\alpha}$ größer als $-2Re(\lambda_2(\mathbf{A}))$ existieren und damit $q \geq 2$ sein. Die erste Möglichkeit, bei der (9.13) erfüllt sein könnte, ist für $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_2 = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. Falls für $\hat{\alpha}_2$ jedoch $\hat{\alpha}_2 < -2Re(\lambda_3)$ nicht erfüllt ist, ist die nächste Möglichkeit $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_3 = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/2$. Spätestens für $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_n = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)/(n-1)$ muss auf diese Weise eine Lösung für $\hat{\alpha}$ gefunden werden.

Für $\alpha = \hat{\alpha}$ ist nun der Nenner von (9.12) Null und der Zähler wird zu $\hat{\alpha}$, so dass offensichtlich $\eta \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ gilt.

Genau ein Eigenwert von \mathbf{A} liegt auf der imaginären Achse

In diesem Fall ist $\hat{\alpha} = -2\operatorname{Re}(\lambda_2)$. Für $\alpha > \hat{\alpha}$ ist dann $q > 1$. Lässt man nun α von oben gegen $\hat{\alpha}$ gehen, strebt der Nenner in (9.12) gegen Null, während der Zähler zu $\hat{\alpha}$ wird, so dass $\eta \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ folgt.

Mehr als ein Eigenwert von \mathbf{A} liegt auf der imaginären Achse

In diesem Fall ist $\hat{\alpha} = \gamma = 0$. Für $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ gehen sowohl der Nenner als auch der Zähler in (9.12) gegen Null. Das geforderte Verhalten von η kann aber z.B. mit Hilfe der Regel von l'Hospital nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned}\eta &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \frac{q\alpha}{((q-1)\alpha)^2} u_{max}^2 \\ \text{l'H.} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \frac{q}{2(q-1)^2\alpha} u_{max}^2 = \frac{q}{0} u_{max}^2 = \infty.\end{aligned}$$

Durch die Wahl von $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ kann also in allen Fällen η beliebig groß gemacht werden.

Andererseits ist aufgrund von Satz 2.8 die Ableitung $\mathbf{P}' = \frac{d\mathbf{P}}{d\alpha}$ positiv semi-definit ($\mathbf{P}' \geq 0$). Lässt man also α von oben gegen $\hat{\alpha}$ gehen, so bleibt \mathbf{P} konstant oder wird kleiner, während η über alle Grenzen wächst. Dadurch kann der Bereich $\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta)$ tatsächlich in alle Richtungen beliebig groß gemacht werden. \square

9.1.5 Beweis Satz 2.8

Um zu zeigen, dass $\eta' < 0$ ist, leitet man (2.31)

$$\eta = 2 \frac{2\gamma + q\alpha}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^2} u_{max}^2$$

nach α ab:

$$\eta' = 2 \frac{2\gamma(2-q) - q\alpha(q-1)}{(2\gamma + (q-1)\alpha)^3} u_{max}^2.$$

Folgende Fälle können nun auftreten:

Fall 1: $\gamma > 0$ und $q > 1$

Für $\gamma > 0$ und $q > 1$ ist offensichtlich $\eta' < 0$.

Fall 2: $\gamma < 0$ und $q > 1$

a) Falls alle Eigenwerte von \mathbf{A} in der geschlossenen linken Halbebene liegen, existiert ein $\hat{\alpha}$. Mit

$$\alpha > \hat{\alpha} = \frac{-2\gamma}{q-1}$$

wird der Nenner von η' sicher positiv. Unter Verwendung von $\alpha > \hat{\alpha}$ kann für den Zähler als obere Grenze

$$2\gamma(2-q) - q\alpha(q-1) < 2\gamma(2-q) - q(-2\gamma) = 4\gamma < 0$$

angegeben werden. $\Rightarrow \eta' < 0$.

b) Sobald mindestens ein Eigenwert in der offenen rechten Halbebene liegt, existiert kein $\hat{\alpha}$ mehr. Da aber $Re(\lambda_q) \geq -\frac{\alpha}{2}$ und $Re(\lambda_1) > 0$ ist, gilt in diesem Fall

$$\gamma = \sum_{i=1}^q \lambda_i(\mathbf{A}) > -(q-1)\frac{\alpha}{2} \quad (9.15)$$

und deshalb gilt für den Nenner von η'

$$2\gamma + (q-1)\alpha > 0.$$

Andererseits kann mit der Ungleichung (9.15) der Zähler von η' nach oben abgeschätzt werden:

$$2\gamma(2-q) - q\alpha(q-1) < 2\gamma(2-q) + 2q\gamma = 4\gamma < 0.$$

$\Rightarrow \eta' < 0$.

Somit ist η' in allen möglichen Fällen negativ.

Um $\mathbf{P}' \geq \mathbf{0}$ zu zeigen, benutzt man die in Abschnitt 9.1.1 eingeführte Transformation der Riccati-Gleichung. Wendet man diese auf die Matrix \mathbf{A} an, welche die selben Eigenvektoren wie \mathbf{A}_α hat, so erhält man

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_q \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

mit $\mathbf{T}_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{T}_q \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Wegen $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}$ besteht zwischen der Matrix \mathbf{T}_+ und \mathbf{T}_q der Zusammenhang:

$$\mathbf{T}_+ = \mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}.$$

Damit wird die Riccati-Gleichung (9.4) zu

$$\mathbf{0} = (\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I})^T \tilde{\mathbf{P}}_q + \tilde{\mathbf{P}}_q (\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}) + \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{R}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q + \tilde{\mathbf{Q}}_q. \quad (9.17)$$

Leitet man diese nach α ab, erhält man eine Ljapunow-Gleichung für $\tilde{\mathbf{P}}'_q$:

$$\left(\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q \right)^T \tilde{\mathbf{P}}'_q + \tilde{\mathbf{P}}'_q \underbrace{\left(\mathbf{T}_q + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q \right)}_{\mathbf{T}_r} = -\tilde{\mathbf{P}}_q. \quad (9.18)$$

Laut Satz 2.1 ist die Matrix \mathbf{T}_r asymptotisch stabil. Da die Matrix $\tilde{\mathbf{P}}_q$ positiv definit ist, muss die Lösung $\tilde{\mathbf{P}}'_q$ der Ljapunow-Gleichung (9.18) ebenfalls positiv definit sein. Durch Umkehrung der Transformation $\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{N}^T \mathbf{P}' \mathbf{N}$ erhält man aus $\tilde{\mathbf{P}}'_q$ das gesuchte Ergebnis für \mathbf{P}' :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}'_q \mathbf{N}^T = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}'_q \end{bmatrix} \mathbf{N}^T \geq \mathbf{0}. \quad (9.19)$$

Aufgrund der möglichen Nullmatrizen in $\tilde{\mathbf{P}}'$ ist \mathbf{P}' nur positiv semi-definit. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Adamy J. Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen. Fortschritts Bericht VDI Reihe 8, Nr. 271, VDI-Verlag, 1991.
- [2] Adamy J., Flemming A. Soft variable-structure controls: a survey. *Automatica*, 40:1821–1844, 2004.
- [3] Alamo T., Cepeda A., Limon D. Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems. In *Proceedings of the 44th European Control Conference*, Seville, Spain, December 2005.
- [4] Alvarez J., Suárez R. and Alvarez J. Planar linear systems with single saturated feedback. *Systems and Control Letters*, 20:319–326, 1992.
- [5] Buhl M., Joos P., Lohmann B. Sättigende weiche strukturvariable Regelungen. *Automatisierungstechnik*, 56:316–323, 6 2008.
- [6] Buhl M., Lohmann B. Schaltende Regler für Systeme mit Stellgrößenbegrenzung. In Lohmann B., Roppenecker G., editor, *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik*, pages 13–25. Shaker, 2007.
- [7] De Doná J.A., Goodwin G.C., Moheimani S.O.R. Combining switching, oversaturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation. *Automatica*, 38:1153–1162, 2002.
- [8] De Doná J.A., Moheimani S.O., Goodwin G.C., Feuer A. Robust Hybrid control incorporating over-saturation. *Systems and Control Letters*, 38:179–185, 1999.
- [9] Föllinger O. *Optimale Regelung und Steuerung*. Hüthig Buch Verlag GmbH Heidelberg, 1992.

- [10] Föllinger O. *Nichtlineare Regelungen 2*. R. Oldenbourg, 1993.
- [11] Föllinger O. *Regelungstechnik*. R. Oldenbourg, 1994.
- [12] Franke D. Ausschöpfung von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelungen. *Regelungstechnik*, 30(10):348–355, 1982.
- [13] Franke D. Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände. *Regelungstechnik*, 30(8):271–276, 1982.
- [14] Gutmann Per-Olof, Hagander Per. A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30:22–33, Januar 1985.
- [15] Horn R.A. and Johnson C.R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2005.
- [16] Hu T. and Lin Z. *Control Systems with Actuator Saturation*. Birkhäuser, 2001.
- [17] Hu T., Lin Z., Chen B. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38:351–359, 2002.
- [18] Khalil H. K. *Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1996.
- [19] Kiendl H. *Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur*. New York, Springer, 1972.
- [20] Ledwich G. Linear switching controller convergence. In *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, volume 142, pages 4:329–334, July 1995.
- [21] Lin F., Olbrot A.W. An LQR Approach to Robust Control of Linear Systems with Uncertain Parameters. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, IEEE, pages 4158–4163, 1996.
- [22] Meyberg K., Vachenauer P. *Höhere Mathematik 1*. Springer, 1999.
- [23] Meyberg K., Vachenauer P. *Höhere Mathematik 2*. Springer, 1999.
- [24] Miotto P., Shewchun J.M., Feron E., Paduano J.D. High Performance bounded control synthesis with application to the F18. *AIAA*, 1996.

- [25] Petersen I.R. A stabilization algorithm for a class of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 8:351–357, 1987.
- [26] Pfeiffer F. *Einführung in die Dynamik*. Teubner Studienbücher, 1992.
- [27] Pittet C., Tarbouriech S., Burgat C. Stability regions for linear systems with saturating controls via Circle and Popov criteria. In *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 1997.
- [28] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes*. CAMBRIDGE University Press, 2007.
- [29] Roduner Ch. Die Riccati-Gleichung. *Institut für Mess- und Regeltechnik, ETH Zürich*, 1994.
- [30] Slotine J.E. and Li W. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1990.
- [31] Sonneveldt L. Nonlinear F-16 Model Description. *Control and Simulation Division, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology*, 2006.
- [32] Wredenhagen G.F., Bélanger P.R. Piecewise-linear LQ Control for Systems with Input Constraints. *Automatica*, 30:403–416, 1994.
- [33] Zhou K., Doyle J.C. and Glover K. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.